VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume primo
1881-1892

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1954

OPERE MATEMATICHE
DI VITO VOLTERRA

1904

Vito Volterra

VITO VOLTERRA

OPERE MATEMATICHE

Memorie e Note

PUBBLICATE A CURA DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
COL CONCORSO
DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

Volume primo
1881-1892

ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1954

Roma, 1954. – Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

PREFAZIONE

Guido Castelnuovo, chiamato a presiedere i ricostituiti Lincei, ritenne che della loro rinnovata attività fosse degno e significativo auspicio la pubblicazione delle Opere matematiche di VITO VOLTERRA, *che di questa Accademia nazionale fu uno dei soci più illustri e uno dei più autorevoli presidenti; e affidò il compito di realizzare tale iniziativa ad un Comitato composto dei soci Ugo Amaldi, Luigi Amoroso, Giuseppe Armellini, Umberto D'Ancona, Joseph Pérès, Enrico Persico, Mauro Picone, Antonio Signorini, Carlo Somigliana, Edoardo Volterra e della prof.ssa Elena Freda. Di questo Comitato il Castelnuovo stesso assunse la presidenza effettiva e, fino all'ultimo suo giorno di vita, promosse e diresse i lavori con indefessa cura e illuminato fervore.*

Fu deliberato di pubblicare tutte le memorie e note scientifiche, escludendo soltanto i trattati e taluni discorsi e rapporti di carattere strettamente parlamentare od occasionale; e si fu concordi nel ritenere che, a meglio mettere in luce il naturale sviluppo del pensiero matematico del grande scienziato, giovasse adottare, come criterio di classificazione, il semplice ordine cronologico. Di ogni singolo lavoro fu riprodotta con cura scrupolosa la forma originale e solo si è tenuto conto di quelle rettifiche o postille, che si poterono rilevare negli esemplari conservati dallo stesso Autore nella Sua biblioteca personale (*).

Questo paziente e complesso lavoro di raccolta e revisione della vasta produzione scientifica del VOLTERRA *fu facilitato dal fattivo e appassionato concorso della Sua eletta Consorte, alla quale il Comitato sente il dovere di esprimere anche pubblicamente la più profonda e devota riconoscenza.*

Un'altra grande benemerenza deve essere segnalata: quella del Consiglio Nazionale delle Ricerche, presieduta dal nostro socio Gustavo Colonnetti, che per la pubblicazione delle Opere di VITO VOLTERRA *ha voluto unirsi all'Accademia con un cospicuo contributo.*

Come premessa a questo primo volume, che comprende le memorie e note pubblicate dal 1881 al 1892, si riproducono i discorsi, che sull'opera del VOLTERRA *furono pronunciati nell'adunanza accademica celebrativa dal Castelnuovo e dal Somigliana; e ad essi fanno seguito i cenni biografici, che del* VOLTERRA, *su preghiera del Comitato, furono redatti, con cuore di intimo, fedelissimo amico, da Joseph Pérès.*

(*) Queste rettifiche o postille si trovano in note a pié di pagina, richiamate nel testo con asterischi e contrassegnate con la sigla [N. d. R.] = [Nota dei Revisori].

VITO VOLTERRA(*)

Parve alla Presidenza di questa Accademia che il miglior modo per celebrarne la rinascita fosse quello di rievocare la figura di uno dei Soci più illustri, che fu pure uno dei suoi più autorevoli presidenti. In momenti di smarrimento ed incertezza come quello che oggi attraversiamo, dopo la immane catastrofe che si è abbattuta sul nostro paese, giova ispirarsi al ricordo dei grandi che ci precedettero e trarre dal loro esempio suggerimenti intorno alla via da seguire.

VITO VOLTERRA fu uno dei maggiori matematici che l'Italia abbia mai avuto. Noto in tutto il mondo per i suoi scritti, per le conferenze e lezioni impartite in varie città di Europa e di America, Egli tenne alta per mezzo secolo la gloria della scuola italiana fra tutti i popoli civili.

Delle opere a cui il suo nome resterà per sempre legato vi parlerà tra poco con competenza ed affetto Carlo Somigliana, che gli fu collega ed amico fin dagli anni universitari, e quest'opera seguì assiduamente per cinquant'anni. Ma la ricerca scientifica non bastò ad assorbire tutta l'attività e il fervore di VITO VOLTERRA. Egli fu nei primi venticinque anni di questo secolo l'animatore e l'organizzatore della scienza italiana. Si può dire non esser sorta nel nostro Paese, in quel periodo, istituzione scientifica importante a cui Egli non abbia dato l'origine o l'impulso. Qui sopratutto giova conoscerne e seguirne l'attività, giacchè, mentre per imitarlo nella ricerca matematica occorre il genio che a ben pochi è concesso, per continuare l'opera promotrice e animatrice della cultura basta la fede nel valore del sapere e nel progresso del genere umano, fede che Egli ebbe altissima e che l'esempio di Lui può comunicare ai Suoi ammiratori.

L'azione organizzatrice di VITO VOLTERRA non è una manifestazione della prima giovinezza. Più di vent'anni dovevano trascorrere dopo la laurea, tra austere meditazioni e severe lezioni dettate dalle cattedre di Pisa, Torino e Roma, prima che Egli sentisse il bisogno, anzi il dovere di assumere una funzione direttiva nel movimento scientifico italiano. Ed il ritardo fu vantaggioso, sia perchè venti anni di studio avevano allargato le Sue vedute a tutti i campi delle scienze fisiche, sia perchè l'autorità universale che con

(*) Discorso pronunciato dal Presidente G. CASTELNUOVO nell'Adunanza generale del 17 ottobre 1946, con la quale l'Accademia Nazionale dei Lincei inaugurava la rinnovata sua attività dopo la sua ricostituzione. « Rendiconto delle Adunanze solenni », vol. V, Roma 1947, pp. 5-9.

le Sue scoperte aveva acquistato valse a spianare gli ostacoli che sempre si frappongono ad ogni nuova iniziativa.

Così è bastato un anno perchè una idea da Lui lanciata a Milano nel 1906, ad un Congresso di Naturalisti Italiani, si traducesse in atto. La Sua attenzione era stata richiamata su quei singolari Congressi degli scienziati italiani che tra il 1839 e il 1847 avevano tenuto desti ad un tempo l'amore alla scienza e le aspirazioni patriottiche. Cessati i moventi politici, i Congressi erano decaduti. Pensò il VOLTERRA che convenisse farli risorgere in forma più ampia, come riunioni di una Società per il progresso delle scienze, costituita sul modello delle analoghe Associazioni fondate durante il secolo scorso nella Svizzera, in Inghilterra, in Francia, in Germania e in altri paesi.

Così nacque a Parma, nel 1907, la nuova Società. Questa, sotto la presidenza del VOLTERRA e di altri insigni maestri italiani, proseguì per un ventennio il suo luminoso cammino col proposito di stringere i rapporti tra i cultori di diverse discipline e di combattere lo specialismo eccessivo, che costituisce ad un tempo un bisogno ed un pericolo della ricerca contemporanea. Più tardi il fascismo con le preoccupazioni nazionalistiche ed autarchiche profanò gli antichi ideali. Ritornando oggi agli ordinamenti che il VOLTERRA aveva in origine tracciato, la Società per il progresso delle scienze potrà riprendere, come tutti ci auguriamo, la sua feconda attività.

La Società diede origine nel 1909, sempre per Sua iniziativa, al Comitato talassografico italiano, destinato a studiare i problemi fisici e biologici del mare e ad aggiungere il concorso dell'Italia all'opera che varie altre Nazioni avevano da tempo intrapresa.

Mentre Egli dedicava le Sue cure a questi due enti, stava preparandosi la prima guerra mondiale. Con l'entusiasmo del Suo animo passionale, con l'amore alla causa della libertà sostenuta dalla Francia e dall'Inghilterra, con l'aspirazione a riunire alla patria le due città care, allora come oggi, al cuore di ogni italiano, Egli si adoperò caldamente ad affrettare l'entrata in guerra dell'Italia appoggiando con la Sua autorità i movimenti per l'intervento, ed anche partecipando di persona alle dimostrazioni studentesche per le vie di Roma. Scoppiato il conflitto, volle prendervi parte sebbene avesse già compiuto 55 anni. Non starò oggi a ripetere con quale calma e quale coraggio Egli in quei primi anni di guerra si dedicasse a perfezionare l'arma dei dirigibili sui quali si faceva allora grande assegnamento. È pur noto come la Sua azione al fronte fosse ritenuta degna di una promozione per meriti speciali e di una onorificenza per la « incomparabile competenza tecnica ».

Ma più tardi, prolungandosi il conflitto, Egli si avvide che questa competenza avrebbe potuto rendere maggiori servigi qui a Roma che al fronte. Così Egli, seguendo l'esempio della Francia e dell'Inghilterra, suggerì ed ottenne di fondare un « Ufficio di invenzioni e ricerche » il quale, in contatto con uffici simili esistenti nei paesi alleati, doveva studiare ogni scoperta tecnica o scientifica che potesse trovare applicazioni nella condotta della guerra.

Ritornata la pace, questo ufficio e gli analoghi sorti tra gli alleati si trasformarono in Consigli nazionali delle ricerche affiliati al Consiglio internazionale che aveva sede a Bruxelles.

Sorse così tra noi, sempre per iniziativa di VITO VOLTERRA, il Consiglio italiano delle ricerche, di cui Egli fu per qualche anno presidente, e che da Lui ebbe i primi ordinamenti.

Ma più che ai detti Istituti che a Lui dovevano la vita o l'impulso, Egli teneva alla nostra Accademia, che a ventotto anni Lo aveva chiamato nel suo seno e che nei propri Atti aveva accolto alcuni dei Suoi primi lavori. All'attività dell'Accademia Egli partecipò sempre con zelo e con autorità, in guisa da acquistare la fiducia e l'ammirazione dei colleghi, che nel 1920 vollero affidargli la vice-presidenza e tre anni più tardi la presidenza.

All'alto ufficio Egli era particolarmente adatto. Le amicizie che aveva con gli scienziati più illustri di tutte le Nazioni, la conoscenza degli ordinamenti delle maggiori Società scientifiche straniere, a molte delle quali Egli già apparteneva, Lo ponevano in una condizione privilegiata per far partecipare la nostra Accademia alla vita scientifica internazionale.

Egli avrebbe voluto che l'Accademia contenesse tutti i maggiori rappresentanti della cultura e dell'ingegno del nostro paese, e comprendesse, accanto alle scienze fisiche e morali, anche le lettere e le arti che tanta parte ebbero nella storia d'Italia ed una pur notevole speriamo possano avere nel futuro.

Perciò Egli subito aderì ad una proposta formulata intorno al 1924 dal Senatore Tittoni di aggregare alle due classi già esistenti di scienze fisiche e di scienze morali una terza classe dedicata alle lettere, alle arti belle e alla musica. Di questo ampliamento dell'Accademia, che trovò ben presto l'appoggio autorevole di Vittorio Scialoja, Egli studiò attentamente i particolari e tracciò uno schema di statuto che fu sottoposto alla discussione in pubblica seduta nel 1925. La proposta trovò opposizioni da parte di alcuni soci della Classe di Scienze morali e fu lasciata cadere. Lo Scialoja si era per un momento illuso che l'accoglimento del progetto avrebbe fatto abbandonare, come superflua, la proposta della costituzione dell'Accademia di Italia, di cui allora si cominciava a parlare. Non credo che lo scopo si sarebbe raggiunto, perchè altre più forti ragioni spingevano il regime a creare il nuovo Istituto. Ma l'ombra che questo, secondo il grosso pubblico, gettava sull'antica Accademia, sarebbe stata più tenue se i Lincei avessero accolto nel loro seno uomini le cui opere letterarie od artistiche trovano nella folla più largo riconoscimento che i lavori austeri degli scienziati.

Il prestigio del nome di VOLTERRA attrasse sulla nostra Accademia l'attenzione di mecenati e di Enti protettori della cultura. Aumentò notevolmente durante la sua presidenza il numero delle Fondazioni accademiche per concorsi a premio, tra le quali basterà qui citare quelle della Banca d'Italia e della Compagnia di Assicurazione di Milano.

La biblioteca si accrebbe dei preziosi libri e manoscritti di lingue orientali che Don Leone Caetani generosamente regalò, e che costituiscono un fondo di inestimabile valore per i cultori di studi musulmani.

Durante la presidenza VOLTERRA l'Accademia ospitò anche per qualche tempo il museo Copernicano, ottenendo che non fosse allontanata da Roma, come si temeva, questa preziosa raccolta di cimeli concernenti il grande astronomo di Thorn, raccolta che aveva regalato all'Italia uno studioso polacco, il Wolinsky. Il museo ora ha trovato sede stabile presso l'Osservatorio astronomico di Monte Mario.

Alla nostra biblioteca VITO VOLTERRA dedicò le maggiori attenzioni. È noto che lo studioso si associava in Lui al bibliofilo, che ama i libri non solo per il loro contenuto, ma pure per il valore estetico o la rarità dell'edizione; ed è pur noto che Egli aveva raccolto in cinquant'anni di vita di studio una bellissima biblioteca privata, ove trascorreva le Sue giornate operose ed accoglieva con l'affabilità che Gli era propria colleghi ed amici. Non sorprende quindi che i tesori della biblioteca corsiniana, dotata di 2300 incunaboli e di 2800 manoscritti, e la ricchezza della biblioteca accademica, contenente le pubblicazioni periodiche di tutte le Società scientifiche del mondo, attirassero le sue cure. Quest'ultima biblioteca, che ogni giorno si accresce di nuovi volumi, si trovava allora a disagio in questo palazzo, del quale aveva occupato tutte le sale al primo piano allora disponibili. Ebbe l'idea il VOLTERRA di adattare a nuovo deposito di libri un vastissimo locale adiacente al palazzo, che serviva un tempo da granaio ai principi Corsini. Col contributo che il VOLTERRA ottenne dal Ministro della Pubblica Istruzione, la radicale trasformazione richiesta dallo stato di abbandono di quel locale fu rapidamente eseguita, e all'antica biblioteca fu congiunta una nuova sala che, con gli scaffali metallici che interamente la occupano, può ospitare 75.000 volumi.

Il VOLTERRA si interessava vivamente anche dello stato di conservazione degli antichi codici della Corsiniana; vari di essi furono restaurati dal laboratorio della biblioteca vaticana, il solo che in quell'epoca fosse attrezzato per il delicato lavoro. Il VOLTERRA si era allora adoperato per istituire in questo Palazzo un laboratorio per la cura del libro, laboratorio a cui avrebbero potuto ricorrere tutte le biblioteche italiane. Il progetto non potè in quel momento aver seguito, ma l'opportunità ne fu più tardi riconosciuta e l'Istituto per la patologia del libro sorse poi in forma autonoma ed in altra sede.

Anche la dotazione accademica fu sotto la presidenza VOLTERRA, e per Sua iniziativa, notevolmente accresciuta.

Egli aveva sempre sostenuto che l'Accademia non dovesse disinteressarsi dei problemi scientifici e culturali che si dibattevano nel paese. Così quando nel 1923 Giovanni Gentile propose ed attuò quella radicale riforma che doveva sconvolgere l'insegnamento superiore e in maggior misura l'insegnamento medio, il VOLTERRA propose e l'Accademia accettò che venisse nominata una Commissione col compito di esaminare lo spirito e i particolari della riforma. Quella Commissione, di cui io fui il relatore, comprendeva i nomi di alcuni dei maggiori soci dell'Accademia, purtroppo oggi tutti scomparsi; oltre il VOLTERRA presidente e lo Scialoja vicepresidente, ne facevano parte il Bonfante, Giulio Fano, il Marchiafava, il Mazzoni ed il Pais. La relazione e l'ampia discussione che ebbe luogo in seno all'Accademia ha dimostrato, nel tempo stesso quale interesse portasse il nostro Istituto a tutte le questioni riguardanti le scuole italiane, e quale atteggiamento indipendente tenessero i Lincei in quell'epoca (1923) di fronte agli atti del regime.

Per la parte presa dall'Accademia ad ogni questione culturale o scientifica di interesse nazionale, per il prestigio conseguito all'estero e in particolare nella Unione internazionale delle Accademie di Bruxelles, il periodo di presidenza di VITO VOLTERRA fu tra i più brillanti per il noto Istituto.

Ma ben presto il veleno della politica cominciò ad insinuarsi nell'ambiente sereno dell'Accademia. Il VOLTERRA lasciò la presidenza nel 1926, e nove anni dopo fu dimesso da Socio per non aver prestato il giuramento di fedeltà richiesto dal regime fascista. Per la stessa ragione, Egli dovette lasciare tutti gli altri istituti scientifici italiani ai quali aveva dato vita o che aveva onorato con le Sue opere.

S'inizia allora l'ultimo triste periodo della vita di VITO VOLTERRA. Allontanato dalle iniziative e dalle occupazioni che Gli erano care, turbato dalle sofferenze fisiche e dalle preoccupazioni per le sorti della patria che vedeva precipitare verso la catastrofe, confortato solo dall'affetto della famiglia e dei pochi amici che Gli erano rimasti fedeli, Egli ritorna ai suoi libri, ai Suoi lavori e cerca nella scienza quel sollievo che la vita esterna non Gli può più offrire.

Ed anche in questi anni dolorosi Egli ci dà un esempio di coerenza e di serenità che non deve essere dimenticato. Oggi che la ricostituzione morale del nostro paese si impone sopra ogni altra, oggi che occorre rifare il carattere degli italiani piegato o infranto da venti anni di malgoverno e di dittatura, dobbiamo tener presente la rigida condotta di VITO VOLTERRA. Una Sua debolezza, un minimo gesto di consenso al partito dominante Gli avrebbe ridato influenza ed onori e Lo avrebbe portato nuovamente alla direzione del movimento scientifico italiano. Ma Egli non piegò; ai riconoscimenti esterni preferì l'intima soddisfazione di rimaner fedele agli ideali che avevano ispirato tutta la Sua vita, ideali di libertà, di rispetto delle opinioni altrui, di amore tra gli individui e tra i popoli.

Così si è chiuso nell'ottobre del 1940, tra la indifferenza della classe dirigente e il silenzio della nostra stampa, la vita di uno dei maggiori figli d'Italia, del quale non sappiamo se più ammirare l'altezza dell'ingegno o la nobiltà del carattere.

GUIDO CASTELNUOVO.

L'OPERA SCIENTIFICA DI VITO VOLTERRA (*)

Quando nel 1879 VITO VOLTERRA, dieciannovenne, vinto il concorso per la Scuola Normale Superiore di Pisa, si inscriveva per la laurea in Fisica, l'ingegno acuto e potente di Ulisse Dini, professore di Calcolo infinitesimale, brillava nel suo maggior splendore. Il Calcolo infinitesimale assoggettato ad una critica inflessibile sembrava tutto rinnovarsi. Il campo di validità di ogni teorema, che nella scuola classica era rimasto incerto o eccessivamente ristretto, veniva assegnato con precisione e rigore. L'analisi infinitesimale acquistava la determinatezza dell'algebra. Nuovi concetti e nuovi metodi venivano proposti per costruire una teoria nella quale potessero rientrare anche le funzioni meno comuni, dotate di singolarità strane, alle quali la definizione di Dirichlet pur assegnava diritto di cittadinanza nel regno dell'analisi.

Il VOLTERRA, come tutti gli studenti di quell'epoca, fu subito attratto dalla personalità del Dini. Questo grande matematico non era uno scrittore facile nè sempre accurato, ma era un espositore affascinante. I concetti più ardui, i ragionamenti più complicati venivano illuminati dalla sua parola incisiva e divenivano facilmente famigliari alla scolaresca.

Il VOLTERRA non solo si impadronì subito delle teorie del maestro, ma ancora studente vi portò contributi assai notevoli. È interessante ricordare quelle prime manifestazioni del Suo precoce ingegno. Sono due lavori d'analisi pubblicati nel « Giornale di Matematica » del Battaglini. Nel primo non sono presentate che alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue, ma il secondo ha già il carattere di un lavoro organico, ricco di risultati interessanti, che potrebbe far onore ad un matematico provetto. Porta la data dell'aprile 1881 quando il VOLTERRA non aveva ancora raggiunto i ventun anni. Questo primo lavoro dà già la misura della potenza del Suo ingegno.

Raggiunge anzitutto un risultato assai notevole. Il Dini aveva espresso il dubbio che potessero esistere funzioni le cui derivate avessero tali singolarità da non essere integrabili secondo la definizione Riemanniana. Il VOLTERRA con mezzi semplici riesce a costruire una funzione che ha infatti una tale proprietà. La supposizione del Dini risulta così confermata. Il concetto classico che considera il calcolo integrale come l'inverso del differenziale cessa di avere un valore assoluto. Viene poi stabilita l'esistenza dei limiti delle somme formate coi limiti superiori ed inferiori dei valori della funzione in ogni intervallo elementare, e trovata così la condizione dell'inte-

(*) Discorso pronunciato dal Socio C. SOMIGLIANA nell'Adunanza generale del 17 ottobre 1946. « Rendiconto delle Adunanze solenni », vol. V, Roma 1947, pp. 10–22.

grabilità nella coincidenza di quei due limiti. Questi concetti sono poi estesi ed applicati alla difficile quistione dell'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali.

Il VOLTERRA però, dopo la laurea, non seguì più l'indirizzo Diniano. I corsi di Fisica matematica e di Meccanica Superiore di quell'uomo geniale che fu Enrico Betti, gli avevano aperto più larghi orizzonti nel campo delle applicazioni del calcolo ai fenomeni fisici e meccanici. Così fin dall'inizio non fu un analista puro, e poi in tutta la sua carriera unì sempre alternativamente lo studio dei metodi analitici colle applicazioni ai fatti fisici o naturali. Connubio fecondo che mantiene il ricercatore lontano dalle eccessive astrazioni e gli suggerisce i problemi più importanti da risolvere.

Uno dei primi lavori di Fisica matematica tratta delle proprietà dei potenziali binari, da un punto di vista generale, lasciando impregiudicata la quistione della loro esistenza, quistione classica studiata da Riemann in una celebre Memoria, e risolta poi esaurientemente dal Levi-Civita, che stabilì così anche quale fosse il campo di validità dei potenziali binari del VOLTERRA.

Ma già nel 1887 in una Nota dei Lincei viene introdotto uno dei concetti fondamentali dell'opera analitica del VOLTERRA, il concetto di funzione di linea. L'evoluzione del concetto di funzione segue storicamente lo sviluppo dell'Analisi, e si può dire che l'ultimo passo sia questo del VOLTERRA, per cui alla corrispondenza fra punti e valori della funzione si sostituisce il concetto di corrispondenza fra linea e valori della funzione. Estensione poi naturalmente allargabile a corrispondenza fra superficie o spazi a più dimensioni e valori della funzione. La possibilità di estendere i procedimenti del calcolo infinitesimale a queste nuove funzioni è uno dei risultati più interessanti a cui il VOLTERRA sia giunto, ed Egli considerò sempre come una tappa fondamentale delle Sue ricerche l'introduzione del concetto di funzione di linea. Così all'opera che nel 1936, alla fine della Sua carriera, doveva riassumere organicamente le Sue ricerche d'analisi, pose il titolo: *Théorie générale des fonctionnelles*, parola quest'ultima non Sua, ma introdotta da Hadamard per indicare appunto le funzioni che dipendono da tutti i valori di una o più altre funzioni.

Dal concetto di funzionale, il VOLTERRA fu portato alla considerazione delle equazioni integrali ed integro-differenziali, che furono oggetto delle Sue più ampie e fondamentali ricerche d'analisi. Si può anche affermare che in queste ricerche culmini la Sua genialità analitica.

La teoria delle equazioni integrali, infatti, ha aperto un campo estesissimo d'indagini, nel quale i maggiori ingegni matematici del nostro tempo hanno trovato materia di proficuo lavoro; ha dato all'analisi uno dei più potenti mezzi di ricerca; ha dimostrato la risolubilità di molti problemi di meccanica e di fisica matematica. Mentre per le equazioni differenziali non esistono metodi generali di risoluzione, il VOLTERRA ha scoperto per le equazioni integrali ed integro-differenziali procedimenti che portano in ogni caso a scrivere l'espressione della funzione risolvente sotto forma di serie convergente. Perciò, la riduzione di un problema ad una equazione integrale equivale alla sua risoluzione. Ed effettivamente molte quistioni d'analisi, compresa la integrazione di equazioni differenziali, e di problemi di Fisica matematica, ammettono questa riduzione. La scoperta del VOLTERRA acquista così una portata immensa nella scienza matematica.

Nel 1903 il matematico svedese Fredholm ha dato la risoluzione di una equazione integrale che differisce da quella del VOLTERRA poichè sono costanti i limiti dell'integrale, che in essa compare; e tale risultato ha avuto una grande risonanza nel mondo scientifico. Però il VOLTERRA ha dimostrato che alla soluzione di Fredholm si arriva applicando i metodi stessi da Lui usati, ed ha anche ricordato che equazioni a limiti costanti erano già state da Lui pure considerate.

Prima del VOLTERRA si conoscevano le soluzioni di alcune equazioni integrali particolari. Abel aveva risoluto un'equazione integrale, che ora si direbbe di prima specie di VOLTERRA, e che si presenta in un problema di cinematica. Hankel aveva pure dato un esempio di inversione d'integrali, ove compaiono funzioni cilindriche, ritrovato poi da Beltrami nello studio di un problema d'elettrostatica. L'integrale doppio di Fourier può essere considerato come determinato da un'inversione d'integrale. Il Beltrami stesso aveva messo in luce l'importanza della inversione degli integrali nella elettrostatica. Ma in tutti questi problemi la funzione che ora chiamiamo il *nucleo* dell'integrale aveva forma determinata speciale. Il VOLTERRA fu il primo a proporsi il problema da un punto di vista generale, lasciando cioè indeterminata la forma del nucleo. E ad onta di questa generalità ed indeterminatezza riuscì a trovare la soluzione completa del problema.

È questo un risultato fondamentale che fa epoca nella storia della analisi.

Il procedimento analitico che portò il VOLTERRA a così notevole successo, è basato su un principio sostanzialmente semplice, e che Egli chiama *principio del passaggio dal discontinuo al continuo*, ed è un'estensione del procedimento con cui si definisce, secondo Riemann, un integrale definito. Applicando questo principio, una funzione di più variabili diviene una funzione di linea, quando le variabili indipendenti crescono indefinitamente di numero, mantenendo i loro valori entro limiti finiti. Lo sviluppo di Taylor per le funzioni di più variabili diviene uno sviluppo per serie di integrali di molteplicità crescente.

Così un sistema di equazioni lineari, quando le incognite crescono indefinitamente, ed i coefficienti si riducono a successioni continue di valori, diviene un'equazione integrale. I valori discreti delle incognite, determinati dal sistema, al limite si succedono con continuità e danno la funzione che risolve l'equazione integrale.

« È questo » dice il VOLTERRA « il procedimento che io ho introdotto e sviluppato nei miei primi lavori sui funzionali e sulle equazioni integrali. Io vi ho insistito in tutti i miei lavori successivi ed è stato impiegato da tutti quelli che si sono occupati degli stessi soggetti ».

Gli sviluppi della teoria delle equazioni integrali sono stati esposti in numerose Memorie ed in molti Trattati, il primo del 1913: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles*. L'ultimo, a cui già abbiamo accennato, del 1936: *Théorie générale des fonctionelles*, è redatto in collaborazione col prof. Joseph Pérès della Sorbona, e doveva essere seguìto da altri due volumi, in modo da costituire un ampio trattato comprendente non solo le teorie analitiche, ma anche le loro applicazioni alla meccanica, alla fisica matematica, alla biologia, alla statistica, all'economia politica, e presentare un quadro completo anche delle teorie di altri ricercatori sugli stessi argomenti, quali Hilbert, Fredholm, Schmidt, Picard, i più illustri nomi della matematica contemporanea.

Disgraziatamente, la salute del VOLTERRA cominciò a declinare qualche anno dopo la pubblicazione di quel primo volume; poi venne la guerra, ed ogni lavoro fu interrotto.

Non ci è possibile seguire tutte le ricerche analitiche del nostro matematico in campi affini o del tutto estranee a quello delle equazioni integrali. Ci limitiamo ad accennare le più notevoli. Anzitutto, la teoria della composizione delle funzioni, che larghe applicazioni trova nella risoluzione delle equazioni integrali, ed a cui è dedicato un volume dal titolo: *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* del 1924; la teoria delle sostituzioni funzioni di una variabile, iniziata in un lavoro giovanile sulle equazioni differenziali lineari, ed ampiamente sviluppata in un volume: *Opérations infinitésimales linéaires*, edito nel 1938 colla collaborazione di Bohuslav Hostinsky; una estensione della teoria delle funzioni di variabile complessa agli iperspazi; uno studio sulle equazioni differenziali che provengono da questioni variazionali; complessivamente una mole immensa di lavori e di ricerche che arricchirono l'analisi matematica di mirabili risultati.

Ma all'analista geniale si univa nel VOLTERRA il fisico matematico, il meccanico, lo scienziato che vede nei problemi del mondo fisico la più interessante applicazione dei metodi dell'analisi. E la Sua opera nel campo applicato non è nè meno vasta, nè meno importante della Sua opera analitica. Anzi si può dire che al contatto dei problemi della realtà fisica il Suo ingegno e la Sua originalità brillino di maggior luce, sospinti da un nuovo spirito di ricerca e di scoperta.

Il primo lavoro di fondamentale importanza appare nel 1892 negli « Acta mathematica » di Stoccolma, non preceduto da alcuna nota lincea, come egli solitamente usava. *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringentes* è una soluzione esauriente del problema della propagazione luminosa da un centro nei mezzi birifrangenti, come estensione della propagazione per onde sferiche da un centro nei mezzi isotropi. Il problema era stato posto da Lamé che ne aveva trovato una soluzione, della quale si era servita la Kowalevsky per applicare un procedimento d'integrazione di Weierstrass. Ma il VOLTERRA scoprì che la soluzione di Lamé era illusoria, poichè alcune funzioni che in essa comparivano non erano uniformi. Diveniva così illusoria anche la soluzione della Kowalevsky. Il VOLTERRA riprende il problema usando nuove coordinate, quelle di Weber che rappresentano la superficie d'onda di Fresnel mediante funzioni ellittiche, e riesce a trovare un'espressione esatta delle funzioni introdotte da Lamé, risolvendo così completamente il problema, mediante formole non semplici ma che Egli maneggia colla solita insuperabile abilità. Trova poi l'estensione del principio di Huygens nei mezzi birifrangenti.

Seguono a questa Memoria altre ricerche sulla propagazione ondosa nei mezzi isotropi, nelle quali viene applicato il metodo delle caratteristiche di Du Bois Reymond e Riemann particolarmente alla propagazione per onde cilindriche.

Nel 1893 il VOLTERRA era chiamato a Torino ad occupare la cattedra di Meccanica Superiore lasciata da Siacci, e poco dopo ad un nuovo ed interessante problema di meccanica si volgeva la Sua attività.

Nella seconda metà del secolo scorso, gli astronomi, specialmente gli italiani, avevano osservato che le latitudini dei punti della superficie terrestre non erano fisse, ma subivano delle piccolissime variazioni, che la tecnica raffinata delle misure astronomiche riusciva a determinare. Osservazioni fatte alle estremità opposte del diametro di un parallelo avevano condotto a concludere che quelle variazioni erano dovute a spostamenti dell'asse istantaneo di rotazione della massa terrestre. Esse infatti si dimostravano pressochè di ampiezza uguale, ma di verso opposto. Ipotesi varie si proponevano per dar ragione di tal fenomeno. Si pensò a cause geologiche, alla elasticità o plasticità della terra, ad azioni vulcaniche, a perturbazioni meteorologiche. Azioni di questo genere hanno tutte carattere accidentale, non regolare nè periodico. Il VOLTERRA avanzò l'ipotesi che gli spostamenti dell'asse di rotazione potessero attribuirsi ad azioni permanenti, come le correnti marine, il moto delle acque dei fiumi, l'evaporazione e successiva condensazione del vapor acqueo. In altri termini a fatti schematizzabili come spostamenti regolari di materia, che lasciano inalterata la distribuzione della massa nel corpo della Terra.

Movimenti di questo genere non erano mai stati studiati. Egli allora pensò di generalizzare le equazioni di Eulero, esprimenti il moto di un corpo rigido intorno al suo centro di massa in assenza di forze esterne, con l'aggiunta di termini corrispondenti a supposti movimenti interni, non alteranti la distribuzione della massa. Veniva così posto un problema teorico, suscettibile di trattazione analitica. Naturalmente il VOLTERRA giunse subito ai corrispondenti integrali, estendendo la soluzione classica di Eulero.

Non era facile un confronto coi dati delle osservazioni, per l'irregolarità dei moti del polo effettivamente misurati. Per tale confronto il VOLTERRA seguì un procedimento in certo modo inverso. Un astronomo americano, M. Chandler, aveva identificato nei movimenti del polo un periodo di 432 giorni, circa 14 mesi, periodo superiore quindi ad un periodo teorico di 10 mesi che può essere dedotto dalle equazioni di Eulero. Il VOLTERRA pensò di calcolare il valore della coppia di quantità di moto, corrispondente ai moti interni, che era necessaria per produrre nel periodo euleriano una variazione che lo identificasse col periodo di Chandler. E trovò che la componente secondo l'asse terrestre di questa coppia di quantità di moto doveva essere 1 : 1053 della coppia della quantità di moto della Terra supposta rigida. Risultato non controllabile, ma verosimile.

Questa teoria fu poi estesa dal VOLTERRA ai moti ciclici generali, considerati da Helmholtz, Maxwell e da Hertz in quistioni di meccanica e termodinamica, con ampi svolgimenti analitici.

Verso il 1870 Enrico Betti aveva messo in evidenza la possibilità di trattare le equazioni della statica elastica con metodi analoghi a quelli della teoria del potenziale secondo Gauss e Green, ed aveva indicato importanti applicazioni, che se ne potevano dedurre. Da quell'epoca, e seguendo l'indirizzo del Betti, un numero grandissimo di lavori sull'elasticità comparve in Italia. Quasi tutti i cultori della fisica matematica trattarono problemi di elasticità.

Il VOLTERRA fu tra questi, e frutto delle Sue ricerche fu un capitolo tutto nuovo della statica elastica, non meno importante di quelli costituenti la teoria classica.

Weingarten aveva indicato la possibilità di deformazioni di corpi elastici senza l'intervento di forze esterne. Il VOLTERRA prese a studiare il fenomeno, la cui possibilità fisica risulta da un'elementare intuizione. Basta pensare ad un anello tagliato lungo una sezione normale alla direttrice e ricongiunto dopo averne asportato una piccola porzione, oppure ad un corpo acuminato che penetri in un altro.

Le deformazioni studiate dal VOLTERRA, che Egli chiama *distorsioni*, sono prodotte da discontinuità nelle componenti di spostamento, mentre si conserva la continuità nelle tensioni, ed anche nelle loro derivate prime e seconde. Egli dimostra che deformazioni di tal fatta non possono avvenire che in corpi a connessione multipla e che le discontinuità degli spostamenti devono essere quelle prodotte da spostamenti rigidi delle due faccie della superficie di discontinuità. Ne segue una certa analogia coi movimenti non vorticosi dei liquidi, i quali non possono verificarsi che in spazi a connessione multipla. Il VOLTERRA insiste molto su questa analogia fra fenomeni elastici e fenomeni idrodinamici e ne deduce notevoli teoremi.

Il problema della integrazione delle equazioni di equilibrio nel caso delle distorsioni fu poi trattato magistralmente. Trovò procedimenti generali d'integrazione e li applicò a casi speciali, pei quali ottenne tutti gli elementi della deformazione, così da poter istituire confronti qualitativi e quantitativi su modelli opportunamente costruiti, confronti che risultarono assai soddisfacenti.

La teoria veniva così ad acquistare un assetto organico e completo.

Conviene tuttavia notare che la condizione della continuità per le derivate prime e seconde delle tensioni, ammessa dal VOLTERRA, non è in via assoluta necessaria. L'abbandonarla porta ad una teoria di distorsioni più generali, che possono esistere anche in corpi semplicemente connessi, conformemente all'intuizione. Cade così il teorema che vincola le disposizioni alla molteplicità della connessione del corpo deformato.

Questo perfezionamento della teoria, sebbene in disaccordo alle vedute del VOLTERRA, ne ha messo tuttavia in maggior luce il valore sostanziale. Le distorsioni infatti, sia nell'una che nell'altra forma, sono ora divenute uno strumento prezioso nella scienza delle costruzioni, specialmente per le ricerche del prof. Colonnetti.

Le continuate ricerche sulla teoria delle equazioni integrali e gli ampi svolgimenti analitici che ne seguirono, in una mente come quella del nostro matematico, che sentiva l'attrattiva delle applicazioni al mondo reale, dovevano eccitare in Lui il desiderio di trovare un campo adatto per mettere in luce il valore della teoria rispetto ai fatti concreti.

Questo campo Egli lo trovò nei fenomeni che i fisici chiamano di isteresi, pei quali non esisteva alcuna teoria di carattere generale. Quando un corpo è soggetto ad azione esterna, ordinariamente riprende quello che si dice il suo stato naturale, allorchè le azioni esterne cessano, o almeno le modificazioni che conserva sono così piccole che sfuggono alle osservazioni. Ma esistono corpi che per effetto di certe azioni esterne subiscono modificazioni permanenti, per cui il loro stato attuale non può essere determinato che tenendo conto di tutte le azioni a cui sono stati precedentemente sottoposti a partire da un tempo più o meno lontano. Fenomeni di questa specie si hanno particolarmente intensi nella magnetizzazione e nelle deformazioni elastiche, ed il VOLTERRA, seguendo una denominazione di Picard, li chiamò fenomeni *ereditari*.

In una Nota lincea del 1909, cominciò a considerare le equazioni di Maxwell–Hertz del campo elettromagnetico, introducendo il procedimento che poi seguirà costantemente nello studio dei fenomeni ereditari. Alle funzioni che rappresentano la polarizzazione elettrica e magnetica aggiunge delle somme corrispondenti ai valori di queste quantità nelle epoche precedenti. E siccome questi valori si deve intendere che si succedano con continuità, così quelle somme divengono integrali rispetto al tempo, a partire dall'istante in cui l'azione dell'eredità ha cominciato a farsi sentire.

Le equazioni puramente differenziali di Hertz divengono allora equazioni integrali, e rientrano nel campo oggetto di tante ricerche del nostro matematico. Egli però non insistette nello studio di questo fenomeno; le Sue equazioni furono invece utilizzate da altri, specialmente dal prof. Graffi, che raggiunse notevoli risultati per la propagazione delle onde elettro–magnetiche.

Il VOLTERRA si volse invece ai fenomeni d'isteresi elastica e stabilì anche in questo caso le equazioni della statica elastica nell'ipotesi dell'eredità, seguendo un procedimento analogo a quello seguìto per le equazioni elettro–magnetiche. Si propose poi di estendere a queste equazioni i teoremi fondamentali della statica elastica, l'unicità della soluzione, il teorema di reciprocità del Betti, le formule integrali di rappresentazione per la dilatazione e le componenti della rotazione elementare e degli spostamenti. Infine, si propose il problema non facile dell'equilibrio elastico ereditario di una sfera elastica isotropa.

È mirabile l'abilità con cui Egli, in base alla risoluzione di un'equazione integrale, riesce alla soluzione esauriente del problema, conservando la generalità dei coefficienti di eredità. Ciò si accorda col suo primitivo fondamentale risultato della risoluzione delle equazioni integrali lineari conservando la completa generalità del nucleo. Ed ha anche una importanza pratica, poichè permette di stabilire dei procedimenti che conducono alla effettiva determinazione analitica dei coefficienti dell'eredità in base alle osservazioni ed agli esperimenti.

Con queste ricerche, viene stabilita una nuova teoria della statica elastica più aderente alla realtà e di particolare importanza fisica. Essa però non ha trovato finora generali applicazioni, probabilmente perchè richiederebbe un'elaborazione ulteriore per avvicinare le formole generali alle necessità pratiche della calcolazione, richiesta dal confronto coi fatti sperimentali. Però, in una conferenza tenuta alla Sorbona nel 1912, il VOLTERRA ricorda esperienze fatte in America dai fisici Nebster e Porter sulle vibrazioni dei diapason, le quali solo colla sua teoria ereditaria hanno trovato soddisfacente spiegazione.

L'ultima importante teoria creata dal VOLTERRA esce non solo dal campo dell'analisi pura, ma anche dal campo delle scienze fisiche. È un'applicazione dell'analisi a fenomeni biologici.

Quando nel 1926 il prof. Umberto D'Ancona invitava il nostro analista ad affrontare mediante il calcolo matematico lo studio delle fluttuazioni del numero dei pesci dell'Adriatico, sapeva di rivolgersi ad un uomo di scienza ben disposto ad un'indagine di quel genere. Già molti anni prima infatti, nel 1901, Egli aveva tenuto un Discorso inaugurale all'Università di Roma sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali, di cui è interessante che ricordiamo qualche brano. Diceva il VOLTERRA:

« È dato solo a rari spiriti altamente speculativi di spaziare nella sfera dei numeri e degli enti astratti della geometria e della logica, restando indifferenti ed estranei a tutto ciò che si agita, vive e si trasforma d'intorno, lavorando al solo fine della gloria del pensiero umano.

« È naturale invece nei più il desiderio di volgere la mente fuori della cerchia della pura analisi matematica; d'informarsi, di comparare la riuscita dei vari mezzi di cui essa dispone, e classificarli in vista delle loro applicazioni, onde poter rivolgere la propria attività a perfezionare i più utili, a rafforzare i più deboli, a crearne di più potenti.

«Ma è intorno a quelle scienze nelle quali le matematiche solo da poco tempo hanno tentato di introdursi, le scienze biologiche e le sociali, che è più intensa la curiosità, giacchè è forte il desiderio di assicurarsi se i metodi classici, i quali hanno dato così grandi risultati nelle scienze meccanico-fisiche, sono suscettibili di essere trasportati con pari successo nei nuovi ed inesplorati campi che si dischiudono loro dinnanzi ».

Così si esprimeva il VOLTERRA nel 1901.

I tentativi, a cui Egli accenna, erano quelli del Pareto nelle scienze economiche, e di De Vries, Pearson ed altri nelle scienze biologiche. Questi ultimi però non costituivano teorie organiche e complete, ma erano diretti alla spiegazione di qualche fatto speciale. Il VOLTERRA si accinse alla ricerca con intendimenti assai più larghi.

Tentativi di carattere più strettamente matematico erano già stati fatti da Sotka colla rappresentazione mediante equazioni differenziali delle variazioni che avvengono nel numero degli individui di due specie conviventi, per effetto delle azioni che l'una specie esercita sull'altra.

Il VOLTERRA si è ispirato a queste prime rappresentazioni analitiche per fondare la sua teoria generale delle variazioni degli individui componenti un'associazione di un numero qualsiasi di specie conviventi per effetto delle azioni che esse esercitano fra loro e che possono dirsi azioni *interne*. Esistono infatti anche variazioni dovute a cause ambientali, meteorologiche, termiche, chimiche ecc., generalmente accidentali, che possono dirsi *esterne*, non regolari e che perciò male si prestano ad un'analisi matematica.

Generalmente nella costruzione delle teorie fisiche si parte da qualche fatto sperimentale ben accertato, che permette di stabilire le prime relazioni quantitative fra gli elementi del fenomeno. Ciò non è possibile nel campo biologico, ove i fatti d'osservazione hanno generalmente carattere statistico e non precisamente metrico.

Conviene quindi partire da ipotesi fondate sulla osservazione o per lo meno sulla verosimiglianza dei fatti ammessi. Il VOLTERRA suppone che la variazione nel tempo del numero degli individui di una specie isolata sia proporzionale al numero degli individui componenti secondo un coefficiente che è la differenza fra il coefficiente di natalità e quello di mortalità. Le variazioni si suppone avvengano con continuità matematica ed allora una semplice integrazione porta a concludere che l'incremento della specie segue una legge esponenziale nel tempo, cioè porta alla ben nota classica legge di Maltus: se i tempi crescono in ragione aritmetica, il numero degli individui cresce in ragione geometrica.

Ma ciò costituisce in certo modo il substrato della teoria. Il problema che anzitutto conviene di studiare è quello della convivenza di due specie, che si contendono lo stesso nutrimento o di cui l'una si nutre dell'altra. In questo caso è evidente, anche senza ricorrere al calcolo, che se la prima specie si nutre della seconda, questa aggredita dall'altra diminuisce di numero. Ma raggiunto un certo limite, la prima non trova più il nutrimento sufficiente, quindi deperisce e va diminuendo. In conseguenza di ciò la seconda specie comincia ad essere meno danneggiata dalla prima la cui aggressione si fa meno intensa, onde la seconda cresce fino a ritornare alle primitive condizioni. In tal modo gli aumenti e le diminuzioni delle due specie si susseguono dando luogo a fluttuazioni aventi carattere periodico.

Questa così chiara descrizione della convivenza di due specie, di cui l'una divorante e l'altra divorata, è dello stesso VOLTERRA. Le equazioni che Egli stabilisce in questo caso sono un'estensione delle equazioni che danno l'incremento isolato delle due specie, ottenuta coll'aggiunta di termini esprimenti le azioni reciproche, e costituiscono un sistema differenziale di primo ordine, facilmente integrabile e che porta nella rappresentazione grafica a due curve oscillanti, l'una sfasata rispetto all'altra, che rappresentano appunto le fluttuazioni delle due specie, che la semplice intuizione poteva prevedere.

Il VOLTERRA stabilisce poi le equazioni corrispondenti ad un'associazione di un numero qualunque di specie conviventi, con azioni reciproche di varia natura. Ma in questo caso le relazioni analitiche si complicano e non è possibile parlarne senza l'aiuto delle formule ed in breve discorso.

Assai interessanti sono le analogie che si possono stabilire fra le equazioni delle variazioni biologiche e le equazioni fondamentali della meccanica.

Conviene introdurre il concetto di *quantità di vita* ossia la somma totale degli individui di una specie viventi fra un dato istante iniziale e l'istante attuale. Introducendo questo elemento, le equazioni delle variazioni divengono di secondo ordine, come quelle della meccanica. Si può allora definire una *energia demografica attuale* ed un'*energia demografica potenziale* la cui somma rimane costante come la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale dei sistemi meccanici. Le equazioni delle fluttuazioni possono esser poste sotto forma Lagrangiana e quindi considerate come conseguenza di un principio variazionale.

Si potrà forse pensare che queste analogie non siano sostanzialmente che analogie analitiche formali, ma non è senza interesse il constatare che un identico meccanismo presieda ai fenomeni del mondo fisico inorganico, ed a fenomeni del mondo biologico, mettendo in luce una generale unità nelle leggi dei fenomeni naturali.

Le teorie del VOLTERRA hanno dato luogo a sviluppi ed estensioni di vario genere e sono state oggetto di controlli sperimentali mediante colture artificiali di varie specie di bacteri, e prendendo in esame casi di simbiosi e di parassitismo di vari animali e specialmente di insetti.

I risultati di queste indagini generalmente confermano le teorie del VOLTERRA. Si potrà quindi prevedere, scrive il D'Ancona, che gli studi sulle associazioni biologiche andranno man mano assumendo carattere di ricerche quantitative esatte. Si avrà così uno dei più brillanti esempi di applicazione a fenomeni biologici del metodo quantitativo matematico; e sarà questo uno dei rami della biologia che primo assumerà quel carattere di scienza esatta che VOLTERRA auspicava già nel 1901.

I problemi dell'aumento delle popolazioni vegetali, animali ed umane, dell'incremento e dello sfruttamento delle risorse naturali, da questa impostazione quantitativa delle indagini ecologiche potranno trarre elementi di valutazione e norme di interesse non soltanto teorico ma anche d'importanza pratica.

Già il VOLTERRA aveva segnalato la possibilità di estendere l'impostazione matematica da lui applicata alle associazioni biologiche, anche ai problemi economici. Ecologia ed economia su questo terreno possono trovare un fecondo punto di contatto.

L'utilizzazione delle risorse naturali in rapporto all'aumento della popolazione ed all'incremento della attività umana diventa ogni giorno più problema di assillante importanza, che attende una guida. Ogni giorno si sente maggiormente la necessità di dare incremento alla produzione di sostanze alimentari e di prodotti vegetali ed animali necessari all'attività umana. Di qui l'importanza dei nuovi metodi di ricerca.

Queste considerazioni ci richiamano alla mente le discussioni sempre aperte fra la teoria e la pratica nelle indagini scientifiche. Chi mai poteva prevedere che il nostro matematico partendo dalle più astratte ricerche analitiche sulle funzioni punteggiate discontinue e sulle derivate non integrabili, potesse per successivi gradi arrivare a risultati che interessano problemi fondamentali del vivere umano?

Per non sorpassare i limiti di tempo che mi sono concessi, mi limiterò ora ad accennare agli argomenti di varie altre ricerche a cui il VOLTERRA si è dedicato.

Studiando le equazioni di Hertz riuscì a dimostrare che quelle celebri equazioni possono, come quelle della dinamica elastica, essere dedotte da un principio variazionale.

Trovò un'estensione ai campi newtoniani del teorema di Poynting sul flusso dell'energia elettromagnetica, scoprendo un flusso di energia meccanica che si comporta in modo analogo.

Oggetto di ampie ricerche e sviluppi analitici furono le equazioni differenziali lineari, alle quali applicò la Sua teoria delle sostituzioni funzioni di una variabile, nella quale ha dato l'estensione alle sostituzioni del celebre teorema di Cauchy sui residui, dimostrando che i risultati di Fuchs sulle equazioni differenziali lineari possono essere interpretati come l'estensione del teorema sui residui di Cauchy.

La teoria della composizione delle funzioni e delle funzioni permutabili, ideata per la risoluzione delle equazioni integrali, fu estesa in modo da costituire un capitolo importante ed autonomo dell'analisi matematica.

L'ultimo Suo lavoro fu presentato all'Accademia Pontificia pochi mesi prima della morte, e riguarda una quistione energetica, la dissipazione dell'energia nei fenomeni ereditari.

Così si chiuse la carriera scientifica di VITO VOLTERRA, iniziata nel 1881 e durata ininterrottamente per quasi sessant'anni. Ed a questa meravigliosa attività di ricercatore si intrecciò per quasi tutta la Sua vita l'attività di conferenziere e di trattatista.

Fu chiamato ad esporre le Sue teorie in tutti i principali centri di coltura in Europa ed in America. E le Sue teorie espose ampiamente nei numerosi trattati pubblicati a Parigi, in ultimo colla collaborazione del prof. Hostinský e del prof. Pérès. Purtroppo, il più comprensivo di questi trattati, che porta il titolo *Théorie générales des fonctionnelles*, rimane incompiuto, come già abbiamo ricordato.

In un piccolo volume intitolato *Saggi scientifici* il VOLTERRA ha raccolto vari Suoi discorsi, conferenze, commemorazioni. Io l'ho riletto con commozione prima di scrivere queste righe, poichè vi ho trovato l'espressione sincera delle Sue idee intorno al movimento scientifico del nostro tempo, ho compreso l'origine di varie Sue scoperte, ho ammirato l'acume e la finezza dei Suoi giudizi sull'opera di illustri matematici. Quel volume ci rivela una parte più intima del Suo animo, e rende più viva l'ammirazione che sentiamo per Lui.

La figura di VITO VOLTERRA si armonizza colle grandi figure dei matematici italiani che all'epoca del nostro risorgimento, nel subitaneo fiorire di tutte le scienze nel nuovo clima della libertà e della indipendenza, portarono la matematica italiana ad un altissimo livello, non inferiore a quello raggiunto allora in Francia, in Germania, in Inghilterra. I nomi di Francesco Brioschi, Luigi Cremona, Eugenio Beltrami, Felice Casorati, Ulisse Dini possono gareggiare coi nomi più illustri della matematica mondiale della seconda metà del secolo scorso. Il VOLTERRA può essere giustamente aggiunto al nobile gruppo di quei grandi, anche perchè le Sue ricerche, pur dotate di così viva originalità, seguirono sostanzialmente le vie che essi seguirono. Delle moderne teorie colle quali arditamente si cerca di trovare nuovi fondamenti alle scienze fisiche, rinnovando concetti che ne sono stati da secoli la base, Egli non si occupò, rimase sempre fedele alle vedute classiche.

La Sua opera non è per questo meno grandiosa e mirabile. Essa costituirà sempre una base feconda al pensiero dei ricercatori futuri.

L'Accademia dei Lincei, ricostituita nel suo alto ufficio e nella sua dignità secolare, ricorda oggi ed onora con riconoscenza e con ammirazione l'Uomo che per più di mezzo secolo ha tenuto alto nel mondo il vessillo glorioso della scienza italiana ed ha avuto in tutte le nazioni civili innumerevoli onori.

CARLO SOMIGLIANA.

CENNI BIOGRAFICI (*)

VITO (ISACAR) VOLTERRA nacque ad Ancona il 3 maggio 1860 da Abramo, commerciante in tessuti, e da Angelica Almagià in una casa dell'antico Ghetto, ora distrutta.

Le origini della famiglia sembrano trovarsi in Bologna, da dove nei primi anni del XV* secolo un Bonaventura di Genetano si era trasportato a Volterra; i suoi discendenti nel 1459 aprivano un banco a Firenze, raggiungendo una posizione notabile. Alcuni VOLTERRA sono ricordati nel 1400 quali scrittori, viaggiatori ed anche, come MENACHEM BEN AHARON, quali collezionisti di libri e codici antichi. Decaduta rapidamente la famiglia, vari rami di essa si ritrovano nei secoli successivi in diverse città italiane e, nel 1600 e nella metà del 1700, a Sinigaglia e ad Ancona.

Perduto il padre a due anni, il piccolo Vito venne allevato dalla madre e dal fratello di lei, Alfonso Almagià, funzionario della Banca d'Italia. Fu prima a Torino e poi a Firenze, ove trascorse l'infanzia e ove compì gli studi secondari presso la Scuola Tecnica «Dante Alighieri» e presso l'Istituto Tecnico «Galileo Galilei».

Le lettere famigliari lo ricordano come un fanciullo pensoso, assai sensibile alle impressioni esteriori, dotato di una singolare facoltà di astrazione e di concentrazione. Sin dai primi anni si era rivelato l'orientamento matematico ed analitico del suo pensiero. Come amava ricordare in età matura, non ancora tredicenne aveva scoperto da solo alcune leggi fisiche prima di studiarle nei libri e varie idee, da lui sviluppate ed esposte più tardi, si erano presentate in modo naturale ed intuitivo al suo spirito. Così, ad esempio, leggendo il romanzo di J. Verne «Dalla terra alla luna», si era proposto di calcolare la traiettoria del proiettile che lo scrittore immagina lanciato dalla terra alla luna ed aveva pensato di decomporre il tempo in piccoli intervalli, in ciascuno dei quali supponeva la forza costante: trentanove anni più tardi, nel 1912, esponeva questa soluzione del problema dei tre corpi nella sua prolusione al Corso alla Sorbona. L'idea, concepita in giovanissima età, di studiare un fenomeno dividendo il tempo nel quale esso si produce in intervalli parziali e studiando in ciascun intervallo il fenomeno, considerando invariate le cause che lo producono, ha costituito una delle direttrici del calcolo infinitesimale ed è stata la base di altre concezioni ed applicazioni del VOLTERRA alle sostituzioni lineari, alle equazioni differenziali lineari, alle funzioni di linee e alle funzioni che dipendono da un numero infinito e continuo di variabili.

(*) Questi cenni biografici furono redatti dal Prof. JOSEPH PÉRÈS in seguito a preghiera del Comitato per la pubblicazione delle *Opere* del VOLTERRA.

La passione scientifica trovava però un ostacolo nelle difficili condizioni finanziarie della famiglia, le quali esigevano che il giovanetto rinunziasse ai suoi studi e si dedicasse alla carriera commerciale. Per vari anni dovette lottare contro gravi difficoltà, perdurando il conflitto fra il suo ideale di scienziato e le necessità materiali. L'illuminato intervento di Antonio Roiti, allora Professore di Fisica presso l'Istituto Tecnico «Galilei» di Firenze, permise al VOLTERRA di non abbandonare la scuola [1]. Saputo che il suo allievo prediletto doveva entrare in Banca, il Roiti lo nominò dapprima preparatore e poi assistente al proprio Istituto. Il giovane poté così terminare gli studi medi e, superati gli esami supplementari di latino e di greco, iscriversi nel 1878 alla Facoltà di Scienze Naturali dell'Università di Firenze. Nell'anno successivo vinse il concorso per allievo interno alla Scuola Normale di Pisa ed in quella Università compì gli studi di matematica e fisica sotto la guida di Maestri insigni come il Betti, il Dini, il Felici, il Padova e il De Paolis. Ebbe compagni alla Scuola Luigi Bianchi e Carlo Somigliana e, fra gli studenti di altre Facoltà, i letterati Guido Mazzoni e Carlo Picciola ed il filologo Francesco Novati.

Durante gli anni universitari pubblicò alcune memorie scientifiche sulle funzioni di una variabile complessa, sulle funzioni punteggiate discontinue e sui principî di calcolo integrale.

Nel 1880 fu presentato dal Dini al matematico svedese Mittag-Leffler, venuto in Italia per incontrarsi con i colleghi italiani, il quale, apprezzato il giovane studente, contribuì assai a farlo conoscere all'estero.

Laureatosi in fisica nel 1882, presentando una tesi di idrodinamica, in cui applicava il metodo delle immagini, venne nominato dal Betti assistente alla cattedra di Meccanica Razionale. L'anno seguente partecipava al concorso per Professore Ordinario della medesima materia presso l'Università di Pisa, venendo classificato primo. Iniziava così come Professore Straordinario a 23 anni l'insegnamento nella medesima Università ove era stato pochi mesi prima studente. Titolare di Meccanica Razionale, insegnò anche per incarico Statica Grafica e, dopo la morte del Betti, Fisica Matematica. Nel 1892-93 fu Preside della Facoltà di Scienze.

Nel 1887 veniva promosso Professore Ordinario. Nello stesso anno la Società dei XL gli conferì la medaglia d'oro per la matematica; e pochi mesi dopo venne nominato Membro corrispondente dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

Nel 1888 si recò per la prima volta all'estero, compiendo con il Mittag-Leffler un lungo viaggio in Svizzera, incontrandosi con varii matematici stranieri e si recò successivamente in Francia, ove strinse rapporti cordialissimi con molti fra i maggiori scienziati del tempo.

(1) Per indurlo a questa decisione intervenne anche un parente autorevole, l'ingegnere Edoardo Almagià (che più tardi doveva divenire suocero del VOLTERRA), il quale, intuita l'importanza dei risultati matematici conseguiti dal suo giovane cugino, ne prendeva decisamente le difese.

Nel 1893 venne chiamato alla cattedra di Meccanica razionale presso l'Università di Torino, ove insegnò anche Meccanica Superiore. In quel periodo s'intensificarono le sue relazioni scientifiche con l'estero e la sua sempre più attiva partecipazione a Congressi internazionali. Nel 1897, fondata la Società Fisica Italiana, collaborò intensamente ai lavori di questa. L'anno seguente ottenne dall'Accademia Nazionale dei Lincei il Premio Reale per la matematica e nel 1899 venne nominato Socio Nazionale. Organizzò in quel tempo con il Forel lo studio sperimentale delle *seiches* nei laghi italiani.

Nel 1900 venne chiamato a Roma alla Cattedra di Fisica Matematica come successore di Eugenio Beltrami; e pochi mesi dopo si univa in matrimonio con la signorina Virginia Almagià che per quaranta anni fu la devota compagna della sua vita.

Nel 1901 gli fu conferito il titolo di dottore *honoris causa* dell'Università di Cristiania.

Designato a tenere il discorso per l'inaugurazione dell'anno scolastico all'Università di Roma, parlò *Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali*, esponendo per la prima volta l'idea che doveva sviluppare più tardi, di risolvere alcuni problemi biologici e sociali con metodi matematici.

Nel 1904, incaricato del Governo Italiano della riorganizzazione del Politecnico di Torino, visitò le principali Scuole di Ingegneria in Svizzera e in Germania per studiarne il funzionamento. Il materiale raccolto venne pubblicato in un'accurata relazione e due anni più tardi illustrò in Senato il progetto per la fondazione del Politecnico. Sempre nel 1904 gli venne conferito dall'Università di Cambridge il titolo di dottore *honoris causa*. L'anno seguente venne chiamato all'Università di Stoccolma per un corso di matematica.

Nel 1905 venne nominato Senatore del Regno, ufficio che mantenne fino alla morte. Durante 35 anni di vita parlamentare partecipò a vari lavori legislativi relativi all'organizzazione di Università – fra cui il Politecnico di Torino e la Scuola di Applicazione di Pisa – e di altri istituti di cultura. Preparò i progetti di legge per la ricerca e l'utilizzazione delle sostanze radioattive, per la creazione del Comitato di ricerche (da cui doveva poi sorgere il Consiglio Nazionale delle Ricerche), per l'organizzazione degli studi oceanografici in Italia, per la protezione e lo sviluppo dell'industria della pesca, per la sistemazione della rete telegrafica e telefonica nazionale, per la protezione della proprietà scientifica, per la trasformazione del Comitato talassografico, da lui creato nel 1909, in Commissione Governativa permanente presso il Ministero della Marina.

Nel 1914 e 1915 sostenne vigorosamente al Senato la partecipazione dell'Italia in guerra a fianco della Francia e dell'Inghilterra e fu uno dei più attivi parlamentari interventisti, prendendo parte a tutte le manifestazioni indette in questo senso, compresa quella dello Scoglio di Quarto nel maggio 1915. Dopo la guerra e sino alla sua morte fu irriducibile avversario del fascismo e, nel gruppo dei senatori oppositori al regime, non lasciò occasione per votare apertamente contro le misure restrittive delle libertà democratiche.

Nel 1906, al Congresso dei Naturalisti italiani in Milano, propose la creazione della Società italiana per il progresso delle Scienze. Il progetto venne subito tradotto in atto e un anno dopo la nuova Società, di cui il VOLTERRA era stato nominato Presidente, tenne a Parma la prima delle sue riunioni annuali, a cui dovevano seguire molte altre.

Nel 1909 venne invitato alla Clark University per un corso di lezioni e si recò per la prima volta negli Stati Uniti. L'Università gli conferì il titolo di dottore *honoris causa*.

L'anno seguente, nel 1910, inviato come rappresentante del Ministero della Pubblica Istruzione all'Esposizione internazionale di Buenos Ayres ed al Congresso di Scienze, si recò in Argentina, ove tenne varie conferenze.

Membro della Commissione per l'esame delle invenzioni e dei brevetti, s'interessava particolarmente all'aviazione. Effettuò varie ascensioni in aerostati e in dirigibili, occupandosi anche di problemi aeronautici concernenti questi ultimi.

Nei primi mesi del 1912 tenne un corso alla Sorbona sulle funzioni di linee e nello stesso anno venne nuovamente invitato negli Stati Uniti a tener lezioni presso il Rice Institut del Texas e presso le Università di Illinois, di Princeton, di Harvard e di Columbia.

Allo scoppio della guerra europea partecipava intensamente al movimento interventista e nel 1915, al momento dell'entrata in guerra dell'Italia, si presentava volontario nonostante avesse già compiuto i 55 anni di età. Nominato tenente nel Genio Aeronautico, specialità dirigibilisti, condusse per due anni la rude esistenza degli aviatori italiani come componente equipaggi di dirigibili, effettuando numerosi voli di guerra ed affrontando gravi pericoli. Durante questo periodo si occupò di problemi aeronautici – e in special modo del tiro di artiglieria da bordo di aeromobili, effettuando di persona i necessari esperimenti – nonchè di problemi attinenti la fonotelemetria; alcuni risultati di questi studi furono pubblicati più tardi in riviste scientifiche. Incaricato di missioni all'Estero, in contatto con l'Ufficio Invenzioni francese diretto dai matematici Paul Painlevé e Émile Borel, ebbe più volte occasione di recarsi in Francia e sul fronte francese nelle prime linee.

Promosso capitano per meriti eccezionali e decorato della croce di guerra al V. M. (2), nel 1917 veniva incaricato di organizzare e di dirigere l'Ufficio invenzioni e ricerche in Italia presso il Ministero Armi e Munizioni, e doveva

(2) La motivazione della decorazione è la seguente: « Durante le sue rischiose missioni « militari egli ha dimostrato ovunque una calma esemplare di fronte ai pericoli, per cui « nel luglio del 1916 ottenne un encomio solenne perchè a Campi di Bisenzio durante « una pericolosissima discesa del dirigibile n. 7 su cui si facevano esperimenti attinenti « ad operazioni belliche, da un'altezza di circa 5000 metri, conservava tale sangue freddo da « continuare i suoi studi e registrare tutte le variazioni del moto della aeronave.

« In zona di operazione poi ha compiuto tutti i suoi studi e le sue esperienze sulle « linee d'osservazione avanzate e ha fatto le sue osservazioni scientifiche sia sul fronte ita- « liano che su quello francese su terreno battuto dalle artiglierie nemiche di medio calibro, « non curandosi degli immensi rischi a cui era sottoposto ».

lasciare a malincuore l'aeronautica. Quale direttore di quell'Ufficio si recò spesso sui diversi fronti italiani e varie volte in Francia e in Inghilterra in missioni speciali (3). Si occupò fra l'altro attivamente della fabbricazione del gas elio da sostituire all'idrogeno nei dirigibili; e nel luglio del 1918 organizzò, insieme con la Sig.ra Curie, le ricerche e gli studi dei materiali radioattivi in Italia. Partecipava nello stesso tempo, quale membro del Comitato esecutivo, ai lavori del Consiglio Internazionale delle Ricerche.

Terminata la guerra, riprendeva la sua attività di studioso, cercando di indirizzare le istituzioni, create durante il conflitto europeo, a scopi scientifici. Partecipò alla costituzione definitiva del Consiglio Internazionale delle Ricerche, di cui nel 1919 fu eletto Vice Presidente.

Nel settembre del medesimo anno si recò nuovamente negli Stati Uniti su invito dell'Università di Berkeley per tenere conferenze in quella Università e in quelle di Houston, di Illinois e Chicago. Nel dicembre ricevette il dottorato *honoris causa* della Sorbona e dell'Università di Strasburgo.

Nel 1921 fu eletto Presidente del Bureau International des Poids et Mesures, carica che mantenne sino alla morte. A questa grande e celebre istituzione internazionale consacrò per diciotto anni la sua attività, realizzando e portando a termine varie importantissime iniziative, fra cui l'inclusione fra i campi di attività del Bureau quello dell'elettricità e della fotometria con la successiva creazione, accanto al Comitato internazionale, di Comitati consultivi di Elettricità, Fotometria e Termometria. Con la creazione di una Commissione amministrativa permanente di 6 membri, potenziò l'organizzazione del Bureau, rendendola assai più efficiente e nello stesso tempo promosse la costruzione dei laboratori per lo svolgimento delle nuove attività. Sotto la sua presidenza vennero preparati i progetti per la sostituzione delle unità elettriche internazionali artificiali col sistema delle unità assolute, per la definizione di una nuova unità di intensità luminosa (bugia nuova) e per la definizione precisa di un'unità di calore identificata con la unità di energia.

Nel 1922 venne nominato dottore *honoris causa* dell'Università di Edimburgo.

Vice Presidente dal 1920 al 1923 dell'Accademia Nazionale dei Lincei e Presidente della stessa dal 1923 al 1926, ne curò in modo particolare l'assetto amministrativo e finanziario, dando un vigoroso impulso all'attività dell'antico Consesso nel campo scientifico internazionale e potenziando numerose iniziative culturali.

Nel 1926 veniva nominato dottore *honoris causa* dell'Università di Oxford e nello stesso anno era chiamato ad impartire conferenze scientifiche in Romania nelle Università di Bucarest, Jassy e Cluy e nel 1931 in Cecoslovacchia nelle Università di Praga e di Brno.

(3) Di una di queste missioni dal 24 aprile al 10 maggio 1917, oltre la Relazione ufficiale pubblicata dal Ministero delle Armi e Munizioni, esiste un interessante diario manoscritto inedito, il quale fornisce un vivace quadro di quel periodo e dei vari personaggi incontrati.

Il suo interesse scientifico non si arrestava solo alla matematica. Era un profondo conoscitore della storia della scienza, come testimonia la sua ricchissima biblioteca, in cui aveva raccolto con paziente ed appassionata ricerca opere di antichi matematici e fisici. Amante di musica, era anche conoscitore di pittura e di scultura. Dedicava gran parte del suo tempo alla lettura di libri di ogni specie, di preferenza storici e letterari, di cui possedeva una piccola raccolta nella sua villa di Ariccia. La sua cultura letteraria era veramente prodigiosa, in quanto conosceva quasi tutte le opere classiche e si era tenuto al corrente nella sua lunga esistenza della letteratura internazionale.

Le sue opinioni politiche, alle quali restò fedele tutta la vita, non gli permisero di conservare la cattedra. Nel 1931, imposto a tutti i funzionari il giuramento di fedeltà al fascismo, egli rifiutò di prestarlo e venne collocato a riposo. Successivamente venne destituito da tutte le Accademie e da tutti gli Istituti culturali italiani.

V. VESENTINI Relaz. Lincei

Con la nobile e calma fierezza che era la caratteristica saliente del suo carattere e della sua personalità, egli non si piegò e continuò ad attendere al suo lavoro scientifico, rifiutando di abbandonare l'Italia, come gli veniva offerto da varie parti. Accettò solo di continuare i suoi corsi all'Institut Henri Poincaré di Parigi e per diversi anni all'Università di Madrid.

Nel 1936 il Pontefice Pio XI, all'atto della fondazione della Pontificia Accademia delle Scienze, lo nominava membro di questa in riconoscimento dei suoi alti meriti scientifici.

Nel 1937 potè realizzare la sua aspirazione di un viaggio in Oriente. Si recò in Egitto, spingendosi sino a Luxor ed Assuan. Nello stesso anno si recò ancora in Svizzera, ove tenne una conferenza a Ginevra, e in Inghilterra. Nel 1938 fu per l'ultima volta a Parigi, la città che amava come una seconda patria.

La malattia di cuore, di cui soffriva sin dal 1919, anche in conseguenza delle fatiche cui si era sottoposto durante la guerra, non gli permise più di viaggiare e lo costrinse a non muoversi più da Roma e dalla villa in Ariccia sui Colli Albani, che aveva fatto costruire nel 1903 e dove soleva passare vari mesi dell'anno.

Ma le sofferenze fisiche e morali non poterono mai abbattere la serenità del suo spirito nè fargli interrompere il lavoro scientifico.

Egli aveva scritto nel 1912, tracciando la biografia di Henri Poincaré, che «un uomo vale tanto più quanto meno apprezza la vita». Ma nello stesso tempo aveva descritto l'angoscia dello scienziato, il quale abbia concepito delle idee, che comprende essere grandi e feconde, e teme di non avere il tempo di svilupparle affinchè esse siano comprese, apprezzate ed applicate. VITO VOLTERRA, il quale ha mostrato in tutta la sua vita il disprezzo per la morte, e che ha atteso con tranquillo stoicismo la fine che sapeva prossima, ha forse provato negli ultimi anni questa angoscia, giacchè sentiva che non avrebbe potuto portare a termine i lavori che aveva allora iniziato, mentre la sua mente, sempre giovanilmente alacre, poteva ancora donare alla Scienza idee originali e feconde. Spesso, in quegli anni, si alzava di notte per fissare con lo scritto le concezioni che aveva elaborato e di cui voleva lasciare almeno una traccia.

Ed egli ha lavorato fino all'estremo della sua esistenza, per dare all'umanità quanto poteva. L'ultima sua memoria, sull'energia dei fenomeni ereditari, fu pubblicata dall'Accademia Pontificia nell'estate del 1940. Qualche giorno prima della sua morte, avvenuta all'alba dell'11 ottobre 1940, stava scrivendo un lavoro matematico, rimasto, purtroppo, incompiuto. Fu sepolto nel Cimitero di Ariccia, accanto ai luoghi che amava e dove aveva trascorso in vita tante ore serene.

Tre anni dopo, il 16 ottobre 1943, un camion di SS. tedesche si recava alla sua abitazione in Roma, con l'ordine – poichè si credeva fosse ancora in vita – di arrestarlo per trasportarlo in uno degli orridi campi di annientamento in Germania [4].

JOSEPH PÉRÈS.

(4) Oltre che del titolo di dottore *honoris causa* delle già ricordate Università di Cambridge, Oslo, Stoccolma, Worcester Mass., Strasburgo, Parigi, Edimburgo, Oxford, fu insignito di numerose decorazioni italiane e straniere e appartenne alle seguenti Accademie e Società scientifiche:

Accademia Nazionale dei Lincei; Istituto Marchigiano di Scienze, Lettere ed Arti (Ancona); Accademia delle Scienze di Atene; Berliner Mathematische Gesellschaft; Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna; Unione Matematica Italiana (Bologna); Société des Sciences Physiques et Naturelles (Bordeaux); Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique (Bruxelles); Academia Română (Bucarest); Magyar Tudomànyos Akademia (Budapest); Sociedad Científica Argentina (Buenos Aires); Calcutta Mathematical Society; Accademia Gioenia di Scienze Naturali (Catania); Royal Society of Edinburgh; Physikalisch-Medizinische Societät in Erlangen; Società Ligustica di Scienze Naturali e Geografiche (Genova); Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen; Sociedad Cubana de Ingenieros (Habana); Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher (Halle); Société Hollandaise des Sciences (Haarlem); Astronomische Gesellschaft (Heidelberg); Société Mathématique de Kharkov; Konigl. Danske Widenskabernes Selskab (Köbenhavn); Accademia delle Scienze dell'U.R.S.S. (Leningrad); Royal Society of London; Royal Institution (London); London Mathematical Society; British Association for the Advancement of Sciences (London); British Ecological Society (London); Kungl. Fysiografiska Sällskapet (Lund); Real Academia de Ciencias Exactas Fisicas y Naturales (Madrid); Sociedad Matemática (Madrid); Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano); Accademia di Scienze, Lettere ed Arti (Modena); Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Napoli); Accademia Pontaniana (Napoli); American Mathematical Society (New York); Circolo Matematico (Palermo); Académie des Sciences (Paris); Bureau des Longitudes (Paris); Société Mathématique de France (Paris); Société Française de Physique (Paris); Société Philomatique (Paris); American Philosophical Society for Promoving Useful Knowledge (Philadelphia); Regia Societas Scientiarum Bohemica (Praga); Union des Physiciens et Mathématiciens Tchecoslovaques (Praga); Pontificia Accademia delle Scienze (Città del Vaticano); Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Roma); Società Italiana delle Scienze, detta dei XL (Roma); Società Astronomica Italiana (Roma); Società Geografica Italiana (Roma); Società degli Spettroscopisti Italiani (Roma); Kungl. Svenska Vetenskaps-Akademien (Stockholm); Académie Impériale des Sciences (St. Pétersbourg); Société des Sciences, Agriculture et Arts du Bas Rhin (Strasbourg); Accademia delle Scienze (Torino); K. Vetenskaps Societeten (Uppsala); National Academy of Sciences (Washington); D. C. Econometric Society (Washington).

MEMORIE E NOTE

I.

SUL POTENZIALE DI UN'ELLISSOIDE ETEROGENEA SOPRA SÈ STESSA (*)

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. IX, 1881, pp. 221–229.

Supponiamo di avere dei corpi a tre dimensioni o delle superficie σ_1, $\sigma_2, \cdots, \sigma_n$ di cui le funzioni potenziali siano respettivamente $V_1, V_2, \cdots, V_n$ e le densità $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$. La funzione potenziale di tutto il sistema sarà:

$$\sum_1^n V_p$$

e il potenziale del sistema sopra se medesimo:

$$P = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} \left(\sum_1^n{}_r V_r\right) \rho_s \, d\sigma_s = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s .$$

Abbiamo ora, per una nota proprietà dei potenziali:

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_2^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_1} V_2 \, \rho_1 \, d\sigma_1 = \sum_2^n{}_s \int_{\sigma_s} V_2 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_2} V_1 \, \rho_2 \, d\sigma_2$$

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_3 \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_3^n{}_s \int_{\sigma_s} V_3 \, \rho_s \, d\sigma_s + \int_{\sigma_3} V_1 \, \rho_3 \, d\sigma_3 + \int_{\sigma_3} V_2 \, \rho_3 \, d\sigma_3 ,$$

. . . .

e in generale:

$$\sum_1^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s = \sum_r^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s + \sum_1^{r-1}{}_s \int_{\sigma_r} V_s \, \rho_r \, d\sigma_r .$$

Ne segue che:

$$(1) \qquad P = \sum_1^n{}_r \sum_r^n{}_s \int_{\sigma_s} V_r \, \rho_s \, d\sigma_s - \frac{1}{2} \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} V_r \, \rho_r \, d\sigma_r .$$

Da questa si deduce immediatamente l'altra:

$$(2) \qquad P = \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} \left(\sum_r^n{}_s V_s\right) \rho_r \, d\sigma_r - \frac{1}{2} \sum_1^n{}_r \int_{\sigma_r} V_r \, \rho_r \, d\sigma_r .$$

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

Suppongasi di dividere una massa a tre dimensioni in strati infinitesimi A_h compresi fra le superficie:

$$f(x, y, z, h) = 0 \quad \text{e} \quad f(x, y, z, h + dh) = 0,$$

e corrispondano ai valori h_0 ed h_1 del parametro arbitrario h, le superficie:

$$f(x, y, z, h_0) = 0 \quad , \quad f(x, y, z, h_1) = 0$$

contorni del corpo che si considera, ammesso che esso occupi uno spazio semplicemente connesso o al più doppiamente connesso; suppongasi inoltre che $d\sigma_h$ sia l'elemento superficiale della superficie $f(x, y, z, h) = 0$, $\rho_h\, dh\, d\sigma_h$ la massa contenuta fra le superficie:

$$f(x, y, z, h) = 0 \quad , \quad f(x, y, z, h + dh) = 0$$

e le normali al contorno dell'elemento $d\sigma_h$, e $V_{t,h}\, dt$ il valore della funzione potenziale dello strato A_t nei punti della superficie $f(x, y, z, h) = 0$.

In tal caso il potenziale del corpo sopra se stesso a causa della (1) resulta:

$$\int_{h_0}^{h_1} dt \int_{h_0}^{t} dh \int_{\sigma_h} V_{t,h}\, \rho_h\, d\sigma_h, \tag{3}$$

e a causa della (2)

$$\int_{h_0}^{h_1} dt \int_{\sigma_t} \rho_t\, V_t\, d\sigma_t, \tag{4}$$

essendo V_t la funzione potenziale della massa compresa fra le superficie $f(x, y, z, t) = 0$ e $f(x, y, z, h_0) = 0$ nei punti della superficie $f(x, y, z, t) = 0$.

Se gli strati sono di livello ed interni gli uni agli altri, se h_0 è il valore del parametro h corrispondente al più interno, e h_1 è il valore corrispondente al più esterno, allora il potenziale del corpo si riduce a:

$$\int_{h_0}^{h_1} V'_t M_t\, dt, \tag{5}$$

in cui V'_t indica il valore costante che ha la funzione potenziale dello strato di livello A_t nei punti situati nell'interno della superficie $f(x, y, z, t) = 0$, e M_t indica la massa interna a questa superficie.

Gli strati A_h rimanendo strati di livello, siano le superficie $f(x, y, z, h) = 0$ superficie omotetiche rispetto ad un centro interno; il rapporto delle lunghezze di due linee omologhe nelle due superficie $f(x, y, z, h_2) = 0$ $f(x, y, z, h_3) = 0$ sia h_2/h_3, la superficie $f(x, y, z, h_0) = 0$ si riduca al centro di omotetia (avremo quindi $h_0 = 0$); sia di più $h_1 = 1$, e la densità di ciascuno strato A_h sia costante e data da una funzione $F'(1 - h^2)$, derivata, atta alla integrazione, della funzione $F(1 - h^2)$ rapporto ad $1 - h^2$, che si annulla per $h = 1$. Avremo:

$$M_t = C\int_0^t F'(1-h^2)\,h^2\,dh\,,$$

$$V'_t = C_1\, t\, F'(1-t^2)\,,$$

C e C_1 essendo due quantità dipendenti soltanto dalla forma della superficie $f(x, y, z, 1) = 0$. Ne segue che il potenziale a causa della (5) diviene:

$$W = CC_1\int_0^1 F'(1-t^2)\,t\,dt\int_0^t F'(1-h^2)\,h^2\,dh$$

$$= \frac{1}{8}CC_1\int_0^1 F^2(1-h^2)\,dh\,.$$

Facendo $F'(1-h^2) = 1$, la W diviene:

$$W' = \frac{1}{15}CC_1\,,$$

quindi:

(6) $$W = \frac{15}{8}W'\int_0^1 F^2(1-h^2)\,dh\,,$$

formula che dà il valore del potenziale di una massa che occupa uno spazio a tre dimensioni semplicemente connesso, decomponibile in strati di livello omotetici, la densità essendo costante in ogni strato, in funzione del potenziale di una massa omogenea di densità 1 che occupa lo spazio stesso.

Applichiamo le formule trovate per avere in alcuni casi il potenziale sopra se stessa di un'ellissoide non omogenea di semiassi a, b, c.

Se la densità varia per ellissoidi omotetiche e concentriche, e alla superficie dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=h^2$$

la densità è $F'(1-h^2)$, si ha subito applicando la (6):

$$W' = \frac{8}{15}\pi^2 a^2 b^2 c^2\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$ (1)

e quindi:

(7) $$W = \pi^2 a^2 b^2 c^2\int_0^1 F^2(1-h^2)\,dh\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\,,$$

formula dovuta al ch. prof. Betti.

(1) BETTI, *Teorica delle forze Newtoniane*, p. 128.

Se la densità varia per ellissoidi omotetiche e non concentriche, siano α, β, γ le coordinate, rispetto agli assi principali dell'ellissoide esterna E, del centro di omotetia O, e $F'(1-h^2)$ sia la densità alla superficie σ_h dell'ellissoide omotetica ad E che ha per semiassi ah, bh, ch. Per determinare il potenziale dell'ellissoide sopra se stessa adopreremo la formula (3).

Se ξ_h, η_h, ζ_h sono le coordinate di un punto della superficie σ_h riferite agli assi paralleli agli assi principali di E, che passano per O, abbiamo:

$$V_{t,h} = F'(1-t^2)\, v_{t,h} = 2\pi abc\, F'(1-t^2) \int_0^\infty \left(t - \frac{(\xi_h + t\alpha)\alpha}{a^2+\lambda} - \frac{(\eta_h + t\beta)\beta}{b^2+\lambda} - \frac{(\zeta_h + t\gamma)\gamma}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

$$\rho_h = p\, F'(1-h^2),$$

p essendo la lunghezza della normale condotta per O al piano tangente all'ellissoide E nel punto della superficie di questa corrispondente al punto ξ_h, η_h, ζ_h della superficie σ_h (2).

Chiamando $d\sigma_1$ l'elemento della superficie dell'ellissoide E corrispondente all'elemento $d\sigma_h$ della superficie σ_h abbiamo dunque che il potenziale dell'ellissoide è:

$$W = \int_0^1 F'(1-t^2)\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh \int_{\sigma_1} p\, v_{t,h}\, d\sigma_1 .$$

Poniamo:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = K \quad , \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = A,$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = B \quad , \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = C;$$

avremo:

$$W = 2\pi abc(K - A\alpha^2 - B\beta^2 - C\gamma^2)\left(\int_0^1 tF'(1-t^2)\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh\right)\int_{\sigma_1} p\, d\sigma_1$$

$$- 2\pi abc\left(A\alpha\int_{\sigma_1} p\xi_1\, d\sigma_1 + B\beta\int_{\sigma_1} p\eta_1\, d\sigma_1 + C\gamma\int_{\sigma_1} p\zeta_1\, d\sigma_1\right)\left(\int_0^1 F'(1-t^2)\, dt\int_0^t F'(1-h^2)\, h^3\, dh\right)$$

Ora:

$$\int_{\sigma_1} p\, d\sigma_1 = 4\pi abc,$$

$$\int_{\sigma_1} p\xi_1\, d\sigma_1 = -\frac{16}{3}\pi abc\, \alpha,$$

(2) BELTRAMI, *Sulla teoria dell'attrazione degli ellissoidi*, «Nuovo Cimento», ser. 3, vol. VIII, 1880, p. 190 e sg. [*Opere mat.*, t. III, Milano, Hoepli, 1911; pp. 269-304].

perchè $\frac{1}{4} p \xi_1 \, d\sigma_1$ è il momento, rispetto al piano $\eta\zeta$ del cono omogeneo di densità 1 che ha per base l'elemento $d\sigma_1$ e per vertice O. Abbiamo inoltre, ponendo $\int_1^H F(H)\, dH = \Phi(H)$:

$$\int_0^1 F'(1-t^2)\, t\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^2\, dh = \frac{1}{8} \int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt,$$

$$\int_0^1 F'(1-t^2)\, dt \int_0^t F'(1-h^2)\, h^3\, dh = -\frac{1}{8} \int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \Phi(1-t^2)\, \Phi''(1-t^2)\, dt,$$

e quindi:

$$W = \pi^2 a^2 b^2 c^2 K \int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt - \frac{1}{3} \pi^2 a^2 b^2 c^2 (A\alpha^2 + B\beta^2 \tag{8}$$

$$+ C\gamma^2)\left(7 \int_0^1 F^2(1-t^2)\, dt + 16 \int_0^1 \Phi(1-t^2)\, \Phi''(1-t^2)\, dt\right).$$

Qualunque sia il punto O, purchè appartenga all'ellissoide:

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = \text{cost.},$$

e rimanga la stessa la distribuzione della densità da strato a strato, il potenziale ha lo stesso valore.

Dalla (8) si deduce immediatamente la (7) facendo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Consideriamo il caso in cui la densità varia per ellissoidi omofocali. Applicheremo la formula (4).

Supponiamo che la densità nei punti della superficie σ_t dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2+t} + \frac{y^2}{b^2+t} + \frac{z^2}{c^2+t} = 1$$

sia data da $F'(D_t)$, derivata atta alla integrazione della funzione $F(D_t)$ che è zero per $D_t = 0$, essendo;

$$D_t = \sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)},$$

e sia M_t la massa contenuta nell'interno dell'ellissoide σ_t; avremo:

$$V_t = \frac{3}{4} M_t \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_t^2}{a^2+t+\lambda} - \frac{y_t^2}{b^2+t+\lambda} - \frac{z_t^2}{c^2+t+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}}$$

$$M_t = \frac{4}{3} \pi \int_{-c^2}^t F'(D_h) \frac{d}{dh} D_h\, dh = \frac{4}{3} \pi F(D_t)$$

quando sia $a > c$, $b > c$. Quindi il potenziale sopra se stessa dell'ellissoide è:

$$W = \pi \int_{-c^2}^0 F(D_t)\, dt \int_{\sigma_t} \rho_t\, d\sigma_t \int_0^\infty \left(1 - \frac{x_t^2}{a^2+t+\lambda} - \frac{y_t^2}{b^2+t+\lambda} - \frac{z_t^2}{c^2+t+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}}.$$

Ora

$$dt\int_{\sigma_t} \rho_t\, d\sigma_t = \frac{4}{3}\pi\, F'(D_t)\frac{d}{dt}D_t\, dt,$$

e

$$dt\int_{\sigma_t} x_t^2\, \rho_t\, d\sigma_t$$

è il momento d'inerzia rispetto al piano yz dello strato compreso fra le ellissoidi σ_t e σ_{t+dt}, quindi:

$$dt\int_{\sigma_t} x_t^2\, \rho_t\, d\sigma_t = \frac{4}{15}\pi\, F'(D_t)\frac{d}{dt}((a^2+t)D_t)\, dt,$$

e analogamente:

$$dt\int_{\sigma_t} y_t^2\, \rho_t\, d\sigma_t = \frac{4}{15}\pi\, F'(D_t)\frac{d}{dt}((b^2+t)D_t)\, dt,$$

$$dt\int_{\sigma_t} z_t^2\, \rho_t\, d\sigma_t = \frac{4}{15}\pi\, F'(D_t)\frac{d}{dt}((c^2+t)D_t)\, dt.$$

Ne segue che:

$$W = \frac{4}{15}\pi^2\int_{-c^2}^{0} F(D_t)\, F'(D_t)\, dt\left\{\left(\frac{d}{dt}D_t\right)\int_0^{\infty}\left(5 - \frac{a^2+t}{a^2+t+\lambda} - \frac{b^2+t}{b^2+t+\lambda}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{c^2+t}{c^2+t+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}} - D_t\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+t+\lambda}+\frac{1}{b^2+t+\lambda}+\frac{1}{c^2+t+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{D_{\lambda+t}}\right\}.$$

Da questa facilmente si deduce:

$$W = \frac{8}{15}\pi^2\int_{-c^2}^{0} F(D_t)\, F'(D_t)\left\{2\left(\frac{d}{dt}D_t\right)\int_t^{\infty}\frac{d\lambda}{D_\lambda} - 1\right\}dt$$

$$= \frac{8}{15}\pi^2 F^2(abc)\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{D_\lambda} + \frac{8}{15}\pi^2\int_{-c^2}^{0}\frac{F(D_t)}{D_t}(F(D_t) - D_t F'(D_t))\, dt.$$

Ma se M è la massa dell'ellissoide,

$$M = \frac{4}{3}\pi F(abc),$$

quindi:

$$W = \frac{3}{10}M^2\int_0^{\infty}\frac{d\lambda}{D_\lambda} + \frac{8}{15}\pi^2\int_{-c^2}^{0}\frac{F(D_t)}{D_t}(F(D_t) - D_t F'(D_t))\, dt$$

ossia indicando con W′ il potenziale dell'ellissoide omogenea di massa M e di semiassi a, b, c:

$$W = W' + \frac{8}{15}\pi^2\int_{-c^2}^{0}\frac{F(D_t)}{D_t}(F(D_t) - D_t F'(D_t))\, dt.$$

Pisa, Maggio 1881.

II.

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE FUNZIONI PUNTEGGIATE DISCONTINUE (*)

« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 76-87;

I.

Il prof. DINI chiama funzioni *infinite volte discontinue* ed HANKEL *funzioni linearmente discontinue* quelle funzioni definite in un certo intervallo che in esso hanno un numero infinito di discontinuità (1); chiama poi HANKEL *funzioni punteggiate discontinue* quelle funzioni linearmente discontinue tali, che in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite, si possono trovare dei punti in cui sono continue (2).

Mediante il *principio della condensazione delle singolarità* (3) HANKEL venne a costruire delle funzioni (che hanno una espressione analitica) le quali sono continue in tutti i punti irrazionali e discontinue in tutti i punti razionali di un certo intervallo, tantochè possono aversi delle funzioni definite in un certo intervallo, tali che in ogni porzione di esso è possibile trovare dei punti in cui sono continue e dei punti in cui sono discontinue.

Riguardo a queste funzioni può enunciarsi il seguente teorema:

Se una funzione punteggiata discontinua ammette in ogni porzione dell'intervallo in cui è definita dei punti di discontinuità, non può esistere un'altra funzione punteggiata discontinua, la quale sia continua nei punti in cui la prima è discontinua e sia discontinua nei punti in cui la prima è continua.

Infatti due punteggiate discontinue $f(x)$ e $\varphi(x)$ definite in un dato intervallo devono avere in ciascuna porzione dell'intervallo dei punti in cui ambedue sono continue.

Sia $(\alpha\beta)$ l'intervallo in cui ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono definite; perchè sono punteggiate discontinue si avrà che presa una porzione arbitraria $(a\, b)$ dell'intervallo stesso, e fissato un numero arbitrariamente

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) HERMANN HANKEL, *Untersuchungen über die oscillirenden und unstetigen Functionen*, p. 23; ULISSE DINI, *Fondamenti per la Teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 62.

(2) Vedi HANKEL, op. cit., p. 25; DINI, op. cit., p. 62.

(3) Il principio della condensazione delle singolarità dovuto ad HANKEL (Vedi HANKEL, op. cit., p. 15) venne reso completo e rigoroso dal prof. DINI (Vedi DINI, op. cit., p. 117 e sgg.).

piccolo σ, dovrà trovarsi un intervallo (a_1, b_1) in (ab) in tutti i punti del quale la $f(x)$ fa dei salti minori di σ, ed entro $(a_1\ b_1)$ potrà trovarsi un intervallo (a'_1, b'_1) in tutti i punti del quale la $\varphi(x)$ fa essa pure salti minori di σ. Entro (a'_1, b'_1) potrà poi trovarsi un intervallo (a_2, b_2) in cui $f(x)$ fa salti minori di $\sigma/2$, e dentro questo uno (a'_2, b'_2) in cui la $\varphi(x)$ fa essa pure salti minori di $\sigma/2$. Così proseguendo si trova che deve sempre trovarsi un intervallo $(a'_n\ b'_n)$ in tutti i punti del quale ambedue le funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ fanno salti minori di $\sigma/2^n$, n essendo tanto grande quanto si vuole. I punti a'_n, b'_n dico vanno avvicinandosi indefinitamente col crescere indefinito di n. Infatti se ciò non fosse dovrebbe trovarsi un certo tratto in tutti i punti del quale le due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono ambedue continue il che è contro le ipotesi fatte. Poichè i punti a'_n, b'_n vanno indefinitamente avvicinandosi, si scorge come deve esistere un punto A in cui ambedue le funzioni sono continue come volevasi dimostrare.

Poichè dunque si hanno delle funzioni continue in tutti i punti irrazionali e discontinue nei razionali, sarà impossibile trovare una funzione che sia discontinua in tutti i punti irrazionali e continua nei razionali. In questo caso può asserirsi ancora di più, cioè, che *se una funzione è discontinua in tutti i punti irrazionali di un dato intervallo, essa deve essere totalmente discontinua in quell'intervallo* (4).

Questa proprietà dei due gruppi di punti razionali e irrazionali può estendersi ancora ad altri infiniti gruppi di punti mediante il seguente teorema generale:

Se costruendo successivamente nell'intervallo $(a\ b)$ *i gruppi di punti* $P_1, P_2, \cdots, P_m$ *di prima specie in numero infinito l'insieme dei punti che si ottiene costituisce un gruppo* Q *tale che questi punti si trovano in ogni porzione dell'intervallo* $(a\ b)$:

1° *dovranno trovarsi in ogni porzione dell'intervallo dei punti che non appartengono al gruppo* Q;

2° *potrà costruirsi una funzione discontinua nel gruppo* Q *e continua in tutti gli altri punti* R *dell'intervallo* $(a\ b)$;

3° *qualunque funzione discontinua in tutti i punti del gruppo* R *dovrà essere totalmente discontinua in* $(a\ b)$.

Formiamo una funzione $f(x)$ entro $(a\ b)$ così definita nel gruppo Q: prendiamo uno qualunque dei gruppi P_m componenti, sia n_m il suo grado; nei punti del suo n^{esimo} gruppo derivato che appartengono allo stesso gruppo P_m, e non fanno parte di nessuno dei gruppi $P_1, \cdots, P_{m-1}$, sia la $f(x)$ eguale a σ^m $(\sigma < 1)$; in ciascuno dei punti dell'$(n-1)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato, che fanno parte del gruppo P_m e non dei gruppi $P_1, \cdots, P_{m-1}$, esclusi i punti del gruppo derivato n^{esimo}, sia la $f(x)$ eguale a $\sigma^m h$, h essendo la distanza al punto dell'n^{esimo} gruppo derivato che è più vicino; in ogni punto dell'$(n-2)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato che appartiene al gruppo P_m, esclusi i punti che fanno parte dell'$(n-1)^{\text{esimo}}$ gruppo derivato e dei gruppi $P_1\ P_2, \cdots, P_{m-1}$,

(4) Vedi HANKEL, op, cit., p. 39; DINI, op. cit., p. 62.

sia eguale a $k\sigma^m$, k essendo la distanza al più vicino dei punti dell'$(n - 1)^{esimo}$ gruppo derivato e così di seguito.

In tutti i punti che non appartengono al gruppo Q la funzione sia zero.

Il limite dei valori della funzione $f(x)$ a destra e a sinistra di un punto arbitrario p è 0. Infatti preso un intorno $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ di questo punto, tale che nel suo interno non si trovino punti appartenenti agli ultimi gruppi derivati dei gruppi $P_1, P_2, \cdots, P_m$ (il punto p al più escluso) avremo che i valori della funzione nell'intervallo $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ (il punto p al più escluso) saranno inferiori al più grande dei due numeri $\varepsilon\sigma$ e σ^m.

La funzione $f(x)$ è dunque infinite volte discontinua, e le discontinuità si troveranno in ognuno dei punti del gruppo Q; ma le discontinuità della nostra funzione sono di prima specie, dunque essa sarà una punteggiata discontinua (5) e quindi in ogni intervallo dovranno trovarsi dei punti in cui essa è continua, cioè dei punti che non appartengono al gruppo Q, ma appartengono invece al gruppo R. Reciprocamente in ogni punto del gruppo R la funzione è continua perchè nei punti R la funzione è 0.

Dimostriamo che una funzione discontinua nel gruppo R è totalmente discontinua. Infatti supponiamo che esista una funzione $\varphi(x)$ discontinua in R e continua in una porzione Q_1 del gruppo Q, mentre nell'altra porzione Q_2 è discontinua. Prendiamo la funzione $\psi(x)$ eguale alla $f(x)$ nei punti del gruppo Q_1, eguale a 0 in tutti gli altri punti. Questa funzione sarà continua in tutti i punti dei gruppi R e Q_2, essa poi resterà discontinua nei punti del gruppo Q_1. Ne segue che le due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ non possono coesistere e quindi l'ipotesi della esistenza della $\varphi(x)$ è assurda.

Deriva subito di qui come caso particolare che una funzione discontinua nei punti irrazionali è totalmente discontinua perchè i punti razionali di un intervallo si possono ottenere prendendo i punti di divisione che si hanno dal dividere successivamente in $2, 3, 4, \cdots, n, \cdots$, parti eguali l'intervallo.

Dai teoremi enunciati può dedursi il seguente:

Se una funzione finita e continua, definita in un certo intervallo, non ha tratti d'invariabilità devono sempre esistere in qualunque porzione dell'intervallo stesso dei punti irrazionali a cui corrispondono valori irrazionali della funzione.

Infatti sia $\varphi(x)$ una funzione finita continua e senza alcun tratto d'invariabilità; essa dovrà assumere valori razionali e irrazionali in qualunque porzione dell'intervallo in cui è definita.

Suppongasi che assuma nei punti irrazionali soltanto valori razionali; dovrà evidentemente esistere un gruppo A di punti razionali esistenti in qualunque porzione dell'intervallo, in cui la funzione assume valori irrazionali. Prendiamo a considerare una funzione $f(x)$, continua pei valori irrazionali e discontinua pei valori razionali di x, definita fra il massimo e il minimo valore della $\varphi(x)$. La funzione $f[\varphi(x)]$ è evidentemente discontinua per tutti i valori irrazionali della x e continua nel gruppo di punti razionali A il che è assurdo.

(5) Vedi DINI, op. cit., p. 201.

Dal primo dei teoremi enunciati può dedursi subito che *la somma o il prodotto di un numero finito di funzioni punteggiate discontinue di cui i valori si mantengono tutti inferiori a un certo numero finito non può essere una funzione totalmente discontinua.*

Infatti più punteggiate discontinue definite in uno stesso intervallo hanno in ciascuna porzione dell'intervallo stesso dei punti in cui sono tutte continue, e quindi in cui anche la somma è continua.

Si può poi enunciare il teorema:

Una serie convergente in egual grado semplicemente (6) *di cui tutti i termini sono funzioni punteggiate discontinue non può essere una funzione totalmente discontinua.*

Sia

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + R_n$$

una serie convergente in egual grado semplicemente nell'intervallo $(\alpha\beta)$, e sieno i diversi termini nello stesso intervallo funzioni punteggiate discontinue.

Fissato un numero arbitrariamente piccolo σ potremo trovare un valore n_1 di n per cui R_{n_1} risulta minore di $\sigma/4$ in qualunque punto dell'intervallo $(\alpha\beta)$. D'altronde perchè le $u_1, u_2, \cdots, u_{n_1}$ sono punteggiate discontinue, anche la loro somma $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}$ risulterà una punteggiata discontinua e quindi avremo che in una porzione qualunque dell'intervallo $(\alpha\beta)$ potrà trovarsi un altro intervallo in tutti i punti del quale i salti della somma $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_1}$, saranno minori di $\sigma/2$; in questo intervallo i salti della R_{n_1} non potranno superare $\sigma/2$, e quindi i salti di U, σ. Ne segue che la U è una punteggiata discontinua.

Si riconosce facilmente come il teorema enunciato può estendersi a tutte le serie *generalmente* convergenti in egual grado semplicemente e a tutte quelle tali, che esclusi degli intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, nei rimanenti risultano convergenti in egual grado semplicemente.

II.

Passiamo a considerare la integrazione delle funzioni punteggiate discontinue, le quali sono le uniche funzioni (*) che possono essere atte alla integrazione.

(6) Le serie convergenti in egual grado semplicemente vennero definite dal professore DINI nell'op. cit. a p. 103. Di queste serie non convergenti in egual grado assolutamente cito un esempio poichè, a quanto so, non credo se ne conoscano.

La serie definita per tutti i valori della x da 0 a 1 (1 escluso) da

$$x^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{1\cdot 2}\right) + x^3 - x^3\left(1 - \frac{1}{\pi(3)}\right) + \cdots + x^n - x^n\left(1 - \frac{1}{\pi(n)}\right) + \cdots,$$

e nel punto 1 da una serie convergente arbitraria $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$, è convergente in egual grado semplicemente senza esserlo assolutamente.

(*) In un esemplare del lavoro, già posseduto dall'A., si trova l'aggiunta autografa « infinite volte discontinue ». [N.d.R.].

HANKEL ha cercato di dimostrare che ogni funzione punteggiata discontinua definita in un dato intervallo è in quell'intervallo atta alla integrazione (7).

Il prof. DINI ha riconosciuto che la dimostrazione di HANKEL non è rigorosa (8); a questo proposito può citarsi un esempio di una funzione punteggiata discontinua (la quale ha anche una espressione analitica) che in un dato intervallo non è atta alla integrazione.

Costruiamo nell'intervallo da 0 a 1 un gruppo infinito di punti α'_1, $\alpha'_2, \alpha'_3, \cdots, \alpha'_n, \cdots$, ognuno situato alla sinistra dei precedenti che abbia per unico punto limite il punto 0, tale che il punto α'_1 sia $1 - 1/2^2$ e le distanze fra i punti consecutivi (α'_1, α'_2), $(\alpha'_2, \alpha'_3), \cdots, (\alpha'_n, \alpha'_{n+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e siano tutte minori di $(1\ \alpha'_1)$. A sinistra di ciascuno di questi punti α'_n si separi un intervallo $(\alpha'_n, \alpha''_{n,1})$ eguale a $1/2^4$ dell'intervallo $(\alpha'_n, \alpha'_{n+1})$ e si costruisca un gruppo di punti $\alpha''_{n,1}, \alpha''_{n,2}, \cdots, \alpha''_{n,m}, \cdots$, che abbiano per unico punto limite il punto α'_{n+1} e le distanze fra i punti consecutivi $(\alpha''_{n,1}, \alpha''_{n,2})$, $(\alpha''_{n,2}, \alpha''_{n,3}), \cdots, (\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e sieno tutte minori di $(\alpha'_n, \alpha''_{n,1})$. Supponiamo di più che le diverse divisioni così formate entro i varii intervalli α'_n, α'_{n+1} sieno tutte simili. A sinistra di ciascuno dei punti $\alpha''_{n,m}$ si separi un intervallo $(\alpha''_{n,m}, \alpha'''_{n,m,1})$ eguale a $1/2^6$ dell'intervallo $\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1}$ e si costruisca un gruppo di punti $\alpha'''_{n,m,1}, \alpha'''_{n,m,2}, \cdots$, $\alpha'''_{n,m,p}, \cdots$, che abbiano per unico punto limite $\alpha''_{n,m+1}$ tali che le distanze fra i punti consecutivi $(\alpha'''_{n,m,1}, \alpha'''_{n,m,2})$ $(\alpha'''_{n,m,2}, \alpha'''_{n,m,3}), \cdots, (\alpha'''_{n,m,p}, \alpha'''_{n,m,p+1}), \cdots$, vadano sempre decrescendo e sieno tutte inferiori a $(\alpha''_{n,m}, \alpha'''_{n,m,1})$. Supponiamo che tutte le divisioni fatte entro gli intervalli $(\alpha''_{n,m}, \alpha''_{n,m+1})$ sieno tutte simili fra loro. Si continui indefinitamente nella stessa guisa.

Consideriamo il gruppo di punti formato da tutti i punti che così vengono a costruirsi e da tutti i loro punti limiti. Tutti i punti compresi entro l'intervallo $(\alpha'_1, 0)$ sono tali che le distanze fra due consecutivi sono minori di $1/2^2$; tutte le distanze fra i punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha''_{n,1}, \alpha'_{n+1})$ sono minori di $1/2^4$; quelle fra punti consecutivi compresi entro gli intervalli $(\alpha'''_{n,m,1}, \alpha''_{n,m+1})$ sono minori di $1/2^6$, e così di seguito. Se ne conclude che chiamando s_h la somma delle distanze fra punti consecutivi maggiori o eguali a $1/2^{2h}$ si ha:

$$s_1 = (1\ \alpha'_1) = \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3}$$

$$s_2 < (1\ \alpha'_1) + \sum (\alpha'_n\ \alpha''_{n,1}) < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} < \frac{1}{3}$$

$$s_3 < (1\ \alpha'_1) + \sum (\alpha'_n\ \alpha''_{n,1}) + \sum (\alpha''_{n,m}\ \alpha'''_{n,m,1}) < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} < \frac{1}{3}$$

. . . .

In generale si ha che, qualunque sia h, $s^h < 1/3$. Se ne deduce che supposto di aver diviso l'intervallo in 2^n parti eguali, la somma degli

(7) Vedi HANKEL, op. cit., p. 31.

(8) Vedi DINI, op. cit., p. 250.

intervalli che contengono punti del gruppo è maggiore di $2/3$. Infatti la somma di tutti gli intervalli che non contengono punti del gruppo è evidentemente minore della somma delle distanze fra punti consecutivi maggiori di $1/2^n$, ma questa somma è sempre minore di $1/3$, dunque la somma degli intervalli che contengono punti del gruppo è maggiore di $2/3$. Un'altra proprietà si riscontra immediatamente in questo gruppo di punti, cioè, presa una porzione qualunque dell'intervallo $(0\ 1)$, in essa si può trovare un altro intervallo in cui mancano punti del gruppo. Infatti se la porzione d'intervallo è maggiore di $1/2^{(n+1)n}$ deve in esso trovarsi o nessun punto del gruppo o un punto $\alpha^{(p)}$ in cui $p < n$ e quindi a sinistra di questo un intervallo senza alcun punto del gruppo.

Ciò premesso consideriamo una funzione che abbia il valore 0 in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti, ed il valore 1 in tutti gli altri punti. Questa funzione è una punteggiata discontinua, perchè, preso un intervallo qualunque, entro di esso si può trovarne un'altra in cui mancano punti del gruppo; in un punto interno qualunque di questo intervallo la funzione è continua. È poi evidente che in tutti i punti del gruppo e in tutti i punti limiti la funzione è discontinua ed i salti che essa fa in quei punti sono eguali a 1. Poichè dunque i punti del gruppo non sono rinchiudibili in intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, così ne risulta, che la funzione non è atta alla integrazione.

La funzione ora considerata ha una espressione analitica. Infatti può definirsi fra 0 e 1 una funzione in modo che in tutti i punti del gruppo e in tutti i suoi punti limiti sia eguale a 0; preso poi un altro punto qualunque x che non appartenga al gruppo né sia uno dei suoi punti limiti si potrà trovare un intorno (AB) di esso in cui non esistono punti del gruppo ed A e B sieno o punti, o punti limiti del gruppo; se nel punto x alla funzione diamo per valore la minima delle due distanze $x\mathrm{A}, x\mathrm{B}$ e, quando è nel punto di mezzo di (AB), il valore $1/2$ (AB), la funzione $\varphi(x)$ che così si viene a definire risulta continua e quindi ha una espressione analitica. Si vede subito che il massimo valore che potrà avere la funzione sarà $1/8$. Ora la serie:

$$y + y(1-y) + y(1-y)^2 + \cdots + y(1-y)^n + \cdots$$

è eguale a 1 per y compreso fra 0 e 1 (0 escluso) ed è 0 per $y = 0$; ne segue che la funzione:

$$f(x) = \varphi(x) + \varphi(x)[1 - \varphi(x)] + \varphi(x)[1 - \varphi(x)]^2 + \cdots + \varphi(x)[1 - \varphi(x)]^n + \cdots$$

la quale così viene ad avere una espressione analitica, è 0 nei punti del gruppo ed è 1 in tutti gli altri punti.

Con processi analoghi si potrebbero costruire altre funzioni punteggiate discontinue non atte alla integrazione.

Enunciamo alcune proprietà riguardo alla integrazione delle funzioni punteggiate discontinue.

Quando si prenda come salto di una funzione in un punto in cui essa è continua lo *zero* e si chiami *funzione dei salti* corrispondente ad una funzione definita in un certo intervallo, una funzione che in ciascun punto abbia per valore il salto della funzione in quel punto; *funzione dei salti di destra* o *di sinistra* una funzione che abbia per valore in ogni punto il salto di destra o di sinistra della funzione in quel punto, si può riconoscere subito che:

Una funzione punteggiata discontinua e la corrispondente funzione dei salti sono o non sono atte alla integrazione insieme (9).

Infatti il salto di una funzione punteggiata discontinua $f(x)$ in un punto qualunque a dell'intervallo in cui è definita, è lo stesso di quello della corrispondente funzione dei salti $\varphi(x)$ nello stesso punto, perchè in intorni comunque piccoli di a non si possono trovare dei salti della funzione $f(x)$ che superino di una data quantità finita il numero 2σ, σ essendo il salto che la funzione fa in a; d'altronde nelle vicinanze di a si hanno tanti punti quanti se ne vogliono in cui il valore del salto della $f(x)$ è lo zero, dunque la funzione $\varphi(x)$ in a ha un salto eguale a σ. Ne segue che se i salti della funzione $f(x)$ maggiori di un certo numero arbitrariamente piccolo sono rinchiudibili in un numero finito di intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole lo stesso avverrà per la $\varphi(x)$ e reciprocamente.

Si deduce di qui che *se una funzione punteggiata discontinua è atta alla integrazione saranno pure atte alla integrazione, le corrispondenti funzioni dei salti di destra e di sinistra*; reciprocamente può dimostrarsi che *se la funzione dei salti di destra o quella dei salti di sinistra corrispondente a una funzione punteggiata discontinua è atta alla integrazione, anche questa funzione è atta alla integrazione.*

La dimostrazione di questo teorema si fa in un modo del tutto analogo a quello seguito dal prof. DINI a p. 246 della di lui opera già citata.

Se la funzione dei salti di sinistra è atta alla integrazione evidentemente potranno escludersi con un numero finito di intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole i punti in cui i salti di sinistra sono maggiori di un numero arbitrariamente piccolo $\sigma/3$. Consideriamo in uno degli intervalli rimanenti (ab) la punteggiata discontinua data. Nell'intervallo $(a, a+\varepsilon)$, in cui ε è un numero arbitrariamente piccolo possiamo trovare un punto x_1 di continuità della funzione, e quindi potremo formare il massimo intervallo $(x_1\, y_1)$ entro cui i salti della funzione si mantengono minori o eguali a σ; entro l'intervallo $(y_1, y_1+\varepsilon/2)$ possiamo trovare un punto x_2 di continuità della funzione, potremo poi formare il massimo intervallo $(x_2\, y_2)$ entro il quale i salti della funzione sono minori o eguali a σ; entro l'intervallo $(y_2, y_2+\varepsilon/2^2)$ possiamo trovare un punto x_3 di continuità, quindi formare il massimo intervallo (x_3, y_3) in cui la funzione fa salti minori o eguali a σ, e così di seguito. Se non si raggiunge il punto b dopo aver formato un numero finito di intervalli, i punti $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$, ammetteranno un punto limite c rispetto al quale essi sono tutti situati a sinistra. Ne segue che in intorni a sinistra arbitrariamente piccoli di c si possono trovare tanti punti quanti se ne vogliono in cui i salti della funzione sono maggiori di σ, dunque

(9) È evidente che questa proprietà non può valere per le funzioni totalmente discontinue.

il salto a sinistra di c sarebbe $\sigma/2$ o maggiore di $\sigma/2$ il che è assurdo. I punti $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$, devono dunque essere in numero finito. Se ne deduce che in ciascuno degli intervalli (ab) i punti in cui i salti sono maggiori di σ si possono includere negli intervalli $(a, x_1), (y_1, x_2), \cdots, (y_{n-1}, x_n), \cdots$ in numero finito di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole perchè è inferiore a 2ε. Dunque la funzione proposta è atta alla integrazione.

Da questo teorema può dedursi:

Se i salti di destra o di sinistra di una funzione punteggiata discontinua coll'avvicinarsi da una stessa parte a tutti i punti dell'intervallo, in cui la funzione è definita, decrescono indefinitamente, la funzione è atta alla integrazione.

Infatti se si verifica questa condizione la funzione dei salti di destra o di sinistra viene ad ammettere da una stessa parte discontinuità di prima specie soltanto ed è quindi atta alla integrazione [10].

Dal teorema prima enunciato può dedursi un'altra conseguenza. Dimostriamo prima che *se una funzione è tale che possono rinchiudersi in intervalli di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole i punti in cui i salti a destra, oppure quelli a sinistra, sono maggiori di* σ (*σ essendo un numero piccolo ad arbitrio*), *la funzione è una punteggiata discontinua, o è generalmente continua.*

Sia $f(x)$ la funzione in quistione definita nell'intervallo $(\alpha\beta)$, e supponiamo che i salti a destra maggiori di σ siano rinchiudibili in intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole. Presa dell'intervallo $(\alpha\beta)$ una porzione arbitraria (ab) in essa esisterà sempre un punto a_1 (che non coincide cogli estremi) in cui il salto a destra sarà minore di $\sigma/2$ perchè la somma degli intervalli in cui il salto a destra è maggiore di $\sigma/2$, potendosi rendere tanto piccola quanto si vuole, si potrà anche rendere minore di (ab); quindi si scorge che non tutti i punti interni ad (ab) possono avere salti a destra maggiori di $\sigma/2$. Poichè dunque deve esistere un punto a_1 in cui il salto a destra è minore di $\sigma/2$ dovrà esistere un intorno a destra (a_1, b_1) di questo punto che può prendersi minore di $1/2\,(ab)$ e tutto contenuto in (ab) in cui l'oscillazione della funzione è minore di σ. Entro (a_1, b_1) si può determinare un punto a_2 che non coincide cogli estremi in cui il salto a destra sia minore di $\sigma/4$ e quindi un intervallo

$$(a_2, b_2) < \frac{1}{2}(a_1, b_1) < \frac{1}{4}(ab),$$

tutto interno ad (a_1, b_1) in cui l'oscillazione della funzione sia minore di $\sigma/2$ e così seguitando si potrà trovare un intervallo $(a_n, b_n) < (ab)/2^n$ situato internamente agli intervalli precedentemente costruiti in cui l'oscillazione della funzione è minore di $\sigma/2^{n-1}$.

Poichè i punti a_n e b_n vanno indefinitamente avvicinandosi, così dovrà esistere un punto m compreso sempre fra a_n e b_n nei cui intorni le oscilla-

(10) Vedi DINI, op. cit., p. 246.

zioni delle funzioni sono tanto piccole quanto si vuole e in cui quindi la funzione è continua.

Si deduce dunque:

Se una funzione è tale che possono rinchiudersi in un numero finito d'intervalli, di cui la somma è tanto piccola quanto si vuole, tutti i punti in cui i salti a destra o a sinistra sono maggiori di σ *(*σ *essendo tanto piccola quanto si vuole), la funzione è atta alla integrazione.*

L'esempio citato innanzi di una funzione punteggiata discontinua non atta alla integrazione, mostra che se due funzioni $\varphi(x)$, definita nell'intervallo (ab), e $f(x)$, definita fra L e l, rispettivamente limiti superiore e inferiore di $\varphi(x)$ in (ab), sono atte alla integrazione, la funzione

$$\psi(x) = f[\varphi(x)],$$

definita fra a e b, può non esserlo anche se la $\varphi(x)$ fosse continua e la $f(x)$ essendo discontinua fosse generalmente continua; però *se la* $f(x)$ è *continua* e la $\varphi(x)$ *è atta alla integrazione la* $\psi(x)$ *lo è pure.*

Questo teorema non è altro che un caso particolare di uno enunciato del signor DU BOIS REYMOND (11).

Un altro caso in cui la $\psi(x)$ risulta atta alla integrazione si ha *quando la* $f(x)$ *è generalmente continua e la* $\varphi(x)$ *non ha che un numero finito di oscillazioni.*

Se la $\varphi(x)$ nell'intervallo (ab) in cui è definita non compie che un numero finito di oscillazioni potremo dividere l'intervallo stesso negli altri (a, m_1), $(m_1, m_2), \cdots, (m_n, b)$ in numero finito in ciascuno dei quali la funzione si mantiene sempre crescente o sempre decrescente. Poichè la $f(x)$ è continua generalmente, sarà finito il numero dei valori di x in cui capitano le discontinuità della funzione stessa; potremo dunque dividere ciascuno degli intervalli (m_k, m_{k+1}) in un numero finito d'intervalli (m_k, x'_k), $(x'_k, x''_k), \cdots, (x_k^{(n)}, m_{k+1})$ in modo che in nessuno dei punti *interni* ad essi la $\varphi(x)$ possa prendere nessuno dei valori di x per cui la $f(x)$ risulta discontinua. Esclusi dunque i punti m_k e i punti $x_k^{(n)}$ che sono in numero finito con intorni arbitrariamente piccoli, negli intervalli rimanenti la $\psi(x)$ per il teorema enunciato precedentemente risulta atta alla integrazione, poichè in questi intervalli la $f(x)$ è continua; di più sappiamo che la $\varphi(x)$ è atta alla integrazione nell'intervallo (ab) perchè essa compie in questo intervallo solo un numero finito di oscillazioni (12); se ne conclude che la $\psi(x)$ è atta alla integrazione in tutto l'intervallo (ab) come volevasi dimostrare.

Pisa, Febbraio 1880.

(11) «Mathematische Annalen», vol. XVI, 1880, p. 112.
(12) Vedi DINI, op. cit., p. 249.

III.

SUI PRINCIPII DEL CALCOLO INTEGRALE (*)

« Giornale di Matematiche », vol. XIX, 1881, pp. 333-372.

RIEMANN nella sua Memoria *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* [1] ha introdotto il concetto di *integrale definito* di una funzione che si mantiene sempre finita nell'intervallo di integrazione definendolo come *il limite* (*quando esiste*) *della somma dei prodotti di ciascuno degli intervalli in cui viene diviso l'intervallo totale d'integrazione rispettivamente moltiplicato per uno dei valori che assume la funzione nell'intervallo stesso, quando questi intervalli decrescono insieme indefinitamente.*

Nella stessa Memoria RIEMANN enuncia la condizione necessaria e sufficiente per la possibilità della integrazione di una funzione definita in questo senso. RIEMANN ritornò poi con maggiori sviluppi su questo concetto nelle sue lezioni sulle equazioni differenziali [2].

Il chiar. prof. DINI [3] dà una dimostrazione completa del teorema di RIEMANN dopo avere alquanto estesa la definizione di integrale definito.

Partendo dal concetto di RIEMANN e considerando un integrale definito come funzione del suo limite superiore, esso risulta continuo ed ammette per derivata in tutti i punti di continuità della funzione che si integra, la funzione stessa; nei punti di discontinuità ordinaria a destra (o a sinistra) possiede una derivata a destra (o a sinistra) eguale al limite dei valori a destra (o a sinistra) della funzione che si integra; in un punto di discontinuità di seconda specie può l'integrale non avere la derivata: in ogni caso i suoi *estremi oscillatori destri e sinistri* [4] sono rispettivamente compresi fra i *limiti superiore* e *inferiore destri* e i *limiti superiore* e *inferiore sinistri* della funzione che si integra in quel punto [5].

Reciprocamente si può dimostrare che se una funzione continua ammette una derivata a destra o a sinistra o una derivata ordinaria atte alla integra-

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) RIEMANN, *Gesammelte Mathematische Werke*, p. 225.

(2) Vedi *Partielle Differentialgleichungen* von BERNHARD RIEMANN, herausgegeben von K. HATTENDORFF, p. 5.

(3) DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 232 e sgg.

(4) DINI, op. cit., p. 190.

(5) Per *limite superiore destro* di una funzione in un punto si intende il limite (che esiste sempre) dei limiti superiori dei valori della funzione negli intorni a destra del punto quando si fanno indefinitamente impiccolire questi intorni. Analogamente si definiscono il limite inferiore destro ed i due limiti di sinistra.

zione (nel concetto di RIEMANN), gli integrali definiti di queste funzioni fra dati limiti sono eguali alle differenze fra i valori della funzione primitiva ai limiti dell'integrale, e più generalmente si ha, che se uno dei quattro estremi oscillatori di una funzione continua è atto alla integrazione in un certo intervallo, in questo stesso intervallo sono pure atti alla integrazione gli altri tre estremi oscillatori ed il loro integrale fra dati limiti è la differenza dei valori della funzione primitiva in questi limiti stessi.

Così la definizione introdotta da RIEMANN di integrale definito in molti casi (quello, per esempio, in cui la funzione sotto il segno è continua) comprende la definizione ordinaria di integrale che viene data dai trattati (6) e ne dimostra rigorosamente la esistenza. Il chiar. prof. DINI (7) solleva il dubbio che in alcuni casi possa la definizione ordinaria di integrale non rientrare in quella di RIEMANN, cioè vi siano delle funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione.

Mi propongo di dare alcuni esempi di tali funzioni, come pure una dimostrazione del teorema di RIEMANN, alcune conseguenze che possono dedursi da questa dimostrazione e l'applicazione di essa alla dimostrazione dell'esistenza in alcuni casi degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.

I.

Nell'intervallo $(0, 1)$ può costruirsi un gruppo di punti P di seconda specie i quali godono della proprietà che non si possono rinchiudere in un numero finito di intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole, tale però che nell'interno di ogni intervallo entro a quello totale $(0, 1)$ esista un nuovo intervallo in cui mancano punti del gruppo (8).

Costruiamo nell'intervallo (ab) una funzione che indicheremo con

$$f(x, a, b)$$

la quale goda delle seguenti proprietà: 1° in a e b sia zero; 2° sia definita dalla espressione

$$A = (x - a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x - a}$$

dal punto a fino al punto x_1 a destra di a corrispondente al massimo della funzione situato a sinistra del punto di mezzo c dell'intervallo (ab) più vicino a questo punto; 3° sia definita dalla espressione

$$B = (b - x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{b - x}$$

(6) Vedi ad esempio SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, vol. 2, p. 2.

(7) Vedi DINI, op, cit., p. 276.

(8) Vedi la mia Nota: *Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* « Giornale di Matematica » diretto dal prof. G. BATTAGLINI, vol. XIX, p. 76. [In questo volume, II, p. 7].

dal punto b fino al punto x_2 a sinistra di b corrispondente al massimo della funzione a destra del punto c e più vicino a questo punto; 4° dal punto x_1 al punto x_2 sia costante ed eguale al valore comune che hanno le espressioni A e B rispettivamente per i valori x_1 e x_2 della x. La funzione $f(x, a, b)$ sarà una funzione finita, inferiore a $(b - a)^2$, continua e che avrà in tutti i punti dell'intervallo (ab) una derivata determinata finita e inferiore sempre a $2(b - a) + 1$ (eguale a 0 agli estremi); soltanto questa derivata nei punti a e b avrà una discontinuità di seconda specie perchè in vicinanza di questi punti essa assume valori prossimi a $+1$ e a -1 quanto si vuole.

È facile poi scorgere che in un punto qualunque m dell'intervallo (ab) la funzione ha un valore inferiore ai due numeri $(m - a)^2$, $(m - b)^2$.

Ciò premesso costruiamo nell'intervallo $(0, 1)$ una funzione $\varphi(x)$ la quale sia zero in tutti i punti del gruppo e nei suoi punti limiti; preso poi un punto qualunque che non appartiene al gruppo nè è suo punto limite e determinato il massimo intorno di esso (ab) in cui non esistono punti del gruppo, in questo intervallo (ab) prendiamo la funzione $\varphi(x)$ come data da $f(x, a, b)$.

Avremo così definito in tutti i punti la $\varphi(x)$, la quale resulterà finita, inferiore a 1 e continua in tutto l'intervallo $(0, 1)$; di più avrà la derivata in tutti i punti. Che esista la derivata nei punti che non sono del gruppo nè sono suoi punti limiti è evidente; nei punti del gruppo e nei punti limiti la derivata è zero. Infatti preso un punto del gruppo o un punto limite m qualunque avremo:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = \frac{\varphi(m+h)}{h}.$$

Ma $\varphi(m+h)$ non può superare h^2 quindi in valore assoluto avremo:

$$\frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} < h$$

e

$$\lim \frac{\varphi(m+h) - \varphi(m)}{h} = 0.$$

Ora abbiamo dimostrato che nell'interno di un intervallo arbitrario entro $(0, 1)$ esiste sempre un altro intervallo in cui mancano punti del gruppo P, quindi in intorni arbitrariamente piccoli di un punto di questo gruppo o di un suo punto limite ne esistono di quelli in cui la $\varphi(x)$ ha la derivata vicina a $+1$ o a -1 quanto si vuole. La derivata della $\varphi(x)$ è dunque una funzione discontinua in tutti i punti del gruppo P e nei suoi punti limiti, ed i suoi salti in questi punti sono eguali a 1, quindi, poichè i punti del gruppo P non sono richiudibili in intervalli in numero finito di cui la somma sia arbitrariamente piccola, essa derivata non è atta alla integrazione.

La funzione $\varphi(x)$ che abbiamo ora costruita gode della proprietà che preso un intervallo arbitrario entro $(0, 1)$ in esso se ne può costruire un altro nel quale la derivata è atta alla integrazione. Vediamo ora di costruire un'altra funzione di cui la derivata non sia atta alla integrazione in nessuna porzione dell'intervallo $(0, 1)$.

La funzione

$$(b-a)\,\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

definita fra a e b sarà sempre finita, inferiore in valore assoluto a $(b-a)$, continua e avrà in tutti i punti la derivata determinata finita, inferiore a $3\,(b-a)$ e non atta alla integrazione in tutto l'intervallo (ab), perchè in un gruppo di punti non rinchiudibili in intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, che chiameremo $P_{b,a}$, essa è discontinua e fa dei salti eguali a 1. Formiamo ora una funzione $\varphi_1(x)$ nell'intervallo $(0\,,1)$ eguale a 0 in tutti i punti del gruppo P e nei suoi punti limiti; preso poi un punto m arbitrario che non appartenga al gruppo né ai suoi punti limiti e costruito il massimo intorno (ab) di esso che non contiene punti del gruppo P, in questo intervallo sia la $\varphi_1(x)$ definita dalla espressione

$$(b-a)\,\varphi\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

Sia P_1 l'insieme di tutti i punti del gruppo P e dei gruppi $P_{b,a}$ che così si vengono a ottenere. Formiamo una nuova funzione $\varphi_2(x)$ eguale a zero nei punti del gruppo P_1 e nei suoi punti limiti; preso poi un punto m non appartenente al gruppo, né suo punto limite, e costruito il massimo intorno $(a_1\,b_1)$ non avente punti del gruppo P_1, in questo intorno la $\varphi_2(x)$ sia definita dalla espressione

$$(b_1-a_1)\,\varphi\left(\frac{x-a_1}{b_1-a_1}\right);$$

così analogamente si costruiscano le funzioni $\varphi_3(x)\,,\varphi_4(x)\,,\cdots,\varphi_n(x)$ mediante i gruppi di punti $P_2\,,P_3\,,\cdots,P_n$ ottenuti analogamente a P_1. È facile riconoscere che in ogni intervallo superiore a $1/2^{2n}$ esistono sempre dei punti del gruppo P_n e nell'interno di ogni intervallo si possono costruire altri intervalli in cui mancano punti del gruppo stesso.

Ciò premesso si costruisca la serie:

$$\psi(x)=\varphi(x)+\frac{\varphi_1(x)}{3^2}+\frac{\varphi_2(x)}{3^4}+\cdots+\frac{\varphi_n(x)}{3^{2n}}+\cdots$$

Essa sarà convergente in egual grado in tutto l'intervallo $(0\,,1)$, di più la serie delle derivate

$$\varphi'(x)+\frac{\varphi_1'(x)}{3^2}+\cdots+\frac{\varphi_n'(x)}{3^{2n}}+\cdots,$$

essendo essa pure convergente in egual grado, avremo che la $\psi(x)$ sarà una funzione finita e continua la quale avrà in tutti i punti una derivata determinata e finita che sarà la serie delle derivate dei termini [9]. Dimostriamo che la $\psi'(x)$ in qualunque porzione dell'intervallo $(0\,,1)$ non è atta alla integrazione. Sia infatti $(\alpha\,,\beta)$ un intervallo qualunque entro $(0\,,1)$; se esso è maggiore di $1/2^{2n-1}$ dovrà trovarsi entro di esso più di un punto

(9) Vedi DINI, op. cit., p. 115.

del gruppo P_n, e quindi un intervallo (cd) in cui mancano punti del gruppo P_n, ma tale che c e d siano punti di questo gruppo o suoi punti limiti.

Nell'intervallo (cd) le funzioni $\varphi', \varphi', \ldots, \varphi'_{n-1}$ sono continue, mentre la φ'_n non è atta alla integrazione perchè nel gruppo di punti $P_{c,d}$ è discontinua e fa dei salti eguali a 1. Ne segue che nello stesso intervallo, e quindi in (α, β), la $\psi'(x)$ non è atta alla integrazione perchè i salti della somma

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi'_m(x)}{3^{2m}}$$

sono certamente inferiori a $1/3^{2n+1}$ e quindi inferiori ai salti della funzione

$$\frac{\varphi'_n(x)}{3^{2n}}.$$

II.

Se $f(x)$ è una funzione finita qualunque data nell'intervallo (x_0, x_1) esistono (per le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tendenti arbitrariamente allo zero) i limiti delle somme

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n,$$

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n,$$

quando $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = x_1 - x_0$ e L_p e l_p sono rispettivamente i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ nell'intervallo h_p (gli estremi inclusi).

Infatti ammettiamo $x_1 > x_0$; costruiamo due diverse divisioni $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ $(h'_1, h'_2, \cdots, h'_m)$ dell'intervallo (x_0, x_1).

Chiamiamo $h'_{t+1}, h'_{t+2}, \cdots, h'_{t+p}$ tutti quegli intervalli situati internamente all'intervallo h_t; avremo

$$h'_{t+1} L'_{t+1} + h'_{t+2} L'_{t+2} + \cdots + h'_{t+p} L'_{t+p} \leqq h_r L_r;$$

quindi poichè gli intervalli h' che contengono (gli estremi esclusi) estremi degli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ sono certo in numero di n, ed in essi l'oscillazione della $f(x)$ è inferiore a $2M$, (M essendo il limite superiore dei valori assoluti della $f(x)$ nell'intervallo (x_0, x_1)), avremo se le h' sono tutte inferiori a δ

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m - 2n\delta M,$$

L'_p essendo il limite superiore della $f(x)$ nell'intervallo h'_p. Ciò prova che il

$$\lim (h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n)$$

comunque impiccoliscano le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ è il limite inferiore dei valori che assume la somma

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$; perchè se questo limite inferiore è A, avremo che dovrà esistere qualunque sia il numero positivo σ una speciale divisione $h_1, h_2, \cdots, h_n$ dell'intervallo (x_0, x_1) per cui si ha

$$0 < h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n - A < \frac{\sigma}{2}$$

e quindi per δ inferiore a $\sigma/4n\mathrm{M}$, se $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ sono comunque, purchè inferiori a δ, avremo

$$0 < h'_1 \mathrm{L}'_1 + h'_2 \mathrm{L}'_2 + \cdots + h'_m \mathrm{L}'_m - \mathrm{A} < \sigma.$$

Analogamente si prova che

$$\lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n)$$

esiste ed è il limite superiore dei valori che assume la somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Se $x_1 < x_0$ gli intervalli $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vanno presi negativi; in tal caso il limite della somma

$$h_1 \mathrm{L}_1 + h_2 \mathrm{L}_2 + \cdots + h_n \mathrm{L}_n$$

esiste ed è il limite inferiore dei valori della stessa somma per tutti i valori delle $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Il limite della somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

è invece il limite superiore dei valori della somma stessa.

Ciò prova subito che se

$$h_1 (\mathrm{L}_1 - l_1) + h_2 (\mathrm{L}_2 - l_2) + \cdots + h_n (\mathrm{L}_n - l_n) = h_1 \mathrm{D}_1 + h_2 \mathrm{D}_2 + \cdots + h_n \mathrm{D}_n$$

$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \cdots, \mathrm{D}_n$ essendo le oscillazioni della $f(x)$ negli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$, tende a zero coll'impiccolire delle h in un certo modo, tende pure a zero in qualunque altro modo si facciano impiccolire le h e si ha

$$\begin{aligned} &\lim (h_1 \mathrm{L}_1 + h_2 \mathrm{L}_2 + \cdots + h_n \mathrm{L}_n) = \\ &\lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n) = \\ &\lim (h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n), \end{aligned}$$

f_p essendo un valore compreso fra il limite superiore e il limite inferiore (gli estremi inclusi), di $f(x)$ nell'intervallo h_p.

Si è così ritrovata la condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia atta alla integrazione secondo il concetto di RIEMANN [10]. Vediamo di dedurre dalla dimostrazione data alcune conseguenze.

Si è visto, come da una funzione qualunque si può dedurre (moltiplicando rispettivamente i limiti superiori ed inferiori, che essa ha negli intervalli nei quali è diviso l'intervallo totale in cui è definita, per gli intervalli stessi e passando al limite coll'impiccolire insieme questi intervalli) due quantità le quali si riducono, quando la funzione è atta all'integrazione,

(10) DINI, op. cit., p. 241.

all'integrale definito. Queste quantità godono di alcune proprietà analoghe a quelle degli integrali ordinari. Per brevità indicheremo con

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

quella che si ottiene considerando i limiti superiori e con

$$\underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

quella che si ottiene considerando i limiti inferiori della funzione $f(x)$ definita nell'intervallo (x_0, x_1), e chiameremo la prima *integrale superiore*, la seconda *integrale inferiore*.

Siano Λ_p e λ_p respettivamente i limiti superiore e inferiore dei valori della $f(x)$ nell'intervallo h_p (*gli estremi ora esclusi*) avremo:

$$h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n \leqq h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$
$$h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n \geqq h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m - 4n\delta M$$
$$h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n \geqq h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$
$$h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n \leqq h'_1 l'_1 + h'_2 l'_2 + \cdots + h'_m l'_m + 4n\delta M.$$

il che prova che

$$\lim(h_1\Lambda_1 + h_2\Lambda_2 + \cdots + h_n\Lambda_n) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\lim(h_1\lambda_1 + h_2\lambda_2 + \cdots + h_n\lambda_n) = \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx,$$

per le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tendenti ciascuna indefinitamente allo zero.

È facile dimostrare le formule

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx = -\overline{\int_{x_1}^{x_0}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx = \overline{\int_{x_0}^{x_2}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_2}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_2}}[f(x)]\,dx = \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_1}^{x_2}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[Cf(x)]\,dx = C\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[\varphi(x)]\,dx$$

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)+\psi(x)]\,dx \gtreqqless \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx + \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[\psi(x)]\,dx,$$

essendo respettivamente x_2 una quantità compresa fra x_0 e x_1, C una costante, $\varphi(x)$ una funzione definita fra x_0 e x_1 maggiore in tutti i punti alla $f(x)$ e $\psi(x)$ una funzione arbitraria definita nell'intervallo (x_0, x_1); nelle due ultime formule va preso il primo o il secondo segno di diseguaglianza secondo che x_1 è maggiore o minore di x_0.

Se si aggiunge alla funzione $f(x)$ una funzione di *integrale nullo* le due quantità

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx, \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

non cambiano.

In particolare non cambiano mutando i valori della $f(x)$ in un numero finito di punti o in un gruppo di prima specie.

Da una delle formule scritte precedentemente si deduce se $x_1 > x_0$

$$M(x_1 - x_0) \geqq \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq m(x_1 - x_0)$$

M e m essendo respettivamente i limiti superiore e inferiore di $f(x)$ nell'intervallo (x_0, x_1).

È facile inoltre dimostrare il teorema:

Se $f(x)$ è una funzione finita definita nell'intervallo $(\alpha\beta)$, x_1 *e* x_0 *sono valori compresi in questo intervallo, le due espressioni*

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \quad , \quad \underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx,$$

considerate come funzioni di x_1 sono funzioni continue che hanno in ogni punto gli estremi oscillatori destri e sinistri respettivamente compresi fra i limiti superiore e inferiore destri e sinistri di $f(x)$ in quel punto, quando si prende per definizione:

$$\overline{\int_{x_0}^{x_0}}[f(x)]\,dx = \underline{\int_{x_0}^{x_0}}[f(x)]\,dx = 0.$$

Abbiamo infatti (M' e m' essendo respettivamente i limiti superiore e inferiore nell'intervallo (x_1, x'_1) interno ad $(\alpha\beta)$, dei valori della $f(x)$) se $x'_1 > x_1$

$$M'(x'_1 - x_1) \geqq \overline{\int_{x_0}^{x'_1}}[f(x)]\,dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)]\,dx \geqq m'(x'_1 - x_1)$$

e se $x'_1 < x_1$

$$M'(x'_1 - x_1) \leq \overline{\int_{x_0}^{x'_1}} [f(x)]\,dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\,dx \leq m'(x'_1 - x_1);$$

quindi in ogni caso

$$M' \geq \frac{\overline{\int_{x_0}^{x'_1}} [f(x)]\,dx - \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\,dx}{x'_1 - x_1} \geq m'$$

il che prova quanto si voleva dimostrare.

Se ne deduce che se in un punto la $f(x)$ è continua a destra o a sinistra o da tutte due le parti, in quel punto le due funzioni

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\,dx, \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [f(x)]\,dx$$

ammettono una derivata a destra o a sinistra o ordinaria eguale al limite dei valori della funzione a destra o a sinistra, o al limite comune dei valori della funzione a destra e a sinistra di quel punto.

Avremo dunque che se una funzione punteggiata discontinua non è atta alla integrazione si possono sempre trovare delle funzioni (delle quali quelle che assumono un dato valore in un punto dato, sono in numero infinito) che godono rispetto alla funzione data di una proprietà analoga a quella che possiede per le funzioni atte alla integrazione l'integrale ordinario, cioè di avere per derivate nei punti di continuità i valori che ha la punteggiata discontinua in quei punti.

A questo riguardo si può enunciare il teorema:

Se una funzione ha delle discontinuità in un gruppo di punti entro un dato intervallo, esiste sempre una funzione che ha per derivata la funzione data in tutti i punti dell'intervallo, esclusi quelli appartenenti al gruppo e i punti limiti del medesimo; la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa funzione sia unica, quando viene definita in un punto, è che i punti del gruppo siano rinchiudibili in intervalli arbitrariamente piccoli o anche, *se la derivata di una funzione si conosce in tutti i punti di un intervallo, esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti e ai suoi punti limiti, la condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa determinare la funzione primitiva (conoscendone il valore in un punto) è che il gruppo sia rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli.*

Infatti se il gruppo è rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli e se due funzioni $F(x)$ e $F_1(x)$ hanno per derivata la funzione data, la loro differenza

$$F(x) - F_1(x)$$

ha gli estremi oscillatori funzioni atte alla integrazione e di integrale nullo.

Se il gruppo non è rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli, aggiungendo alla $f(x)$ la $\varphi(x)$, funzione avente in tutti i punti del gruppo valori finiti discosti dallo zero più di una quantità finita maggiore della massima oscillazione della $f(x)$, e avente il valore zero in tutti gli altri punti, si otterrà la $f(x)+\varphi(x)$ funzione non atta alla integrazione e tale che A essendo una costante arbitraria

$$A+\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)+\varphi(x)]\,dx,$$

$$A+\underline{\int_{x_0}^{x_1}}[f(x)+\varphi(x)]\,dx$$

saranno funzioni di x_1 aventi per derivata nei punti di continuità della $f(x)$ (esclusi i punti limiti del gruppo) la $f(x)$ stessa.

Mediante i teoremi ora enunciati si vede come è possibile costruire con facilità degli esempi di funzioni le quali hanno in ogni porzione dell'intervallo in cui sono definite dei tratti d'invariabilità senza essere sempre costanti. Se infatti definiamo una funzione $f(x)$ in un intervallo $(\alpha\beta)$ in modo che sia eguale ad una costante diversa da zero in tutti i punti e nei punti limiti di un gruppo non rinchiudibile in un numero finito d'intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, ed eguale a zero in tutti i punti rimanenti (11), una delle funzioni di x_1

$$\overline{\int_{\alpha}^{x_1}}[f(x)]\,dx,$$

$$\underline{\int_{\alpha}^{x_1}}[f(x)]\,dx$$

per x_1 compresa fra α e β godrà della proprietà di avere in ogni porzione dell'intervallo $(\alpha\beta)$ dei tratti di invariabilità senza essere costante in tutto l'intervallo $(\alpha\beta)$.

Passiamo a considerare gli integrali superiori e inferiori degli estremi oscillatori di funzioni continue. Abbiamo i teoremi:

I quattro estremi oscillatori di una funzione hanno gli stessi integrali superiori e inferiori.

Infatti in ogni intervallo arbitrario in cui sono definiti i quattro estremi oscillatori di una funzione essi hanno uno stesso limite superiore ed uno stesso limite inferiore (12).

Se una funzione continua $f(x)$ definita fra x_0 e x_1 per $x=x_0$ assume il valore C *e* $\lambda(x)$ *è uno dei suoi estremi oscillatori si ha se* $x_1>x_0$

$$C+\underline{\int_{x_0}^{x_1}}[\lambda(x)]\,dx \leqq f(x_1) \leqq C+\overline{\int_{x_0}^{x_1}}[\lambda(x)]\,dx,$$

(11) Ho considerata una di tali funzioni nella mia Nota già citata.

(12) Vedi DINI, op. cit., p. 194.

e se $x_1 < x_0$

$$C + \underline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \geqq f(x_1) \geqq C + \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx.$$

Infatti dividiamo l'intervallo (x_0, x_1) negli altri $h_1, h_2, \cdots, h_n$; avremo se $x_1 > x_0$ e L_p e l_p sono respettivamente il limite superiore ed inferiore di $\lambda(x)$ nell'intervallo h_p

$$L_p h_p > f\left(x_0 + \sum_1^p h_r\right) - f\left(x_0 + \sum_1^{p-1} h_r\right) > l_p h_p$$

quindi

$$C + \sum_1^n L_r h_r \geqq f(x_1) \geqq C + \sum_1^n l_r h_r;$$

per conseguenza andando al limite per le h_r tendenti insieme allo zero si trova la prima relazione che dovevamo dimostrare.

Analogamente si ha la seconda.

Se una funzione è integrale superiore o inferiore di un'altra, essa è anche respettivamente integrale superiore o inferiore dei suoi quattro estremi oscillatori.

Infatti sia

$$f(x) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\varphi(x)]\, dx$$

e $x_1 > x_0$; avremo che in ogni punto uno degli estremi oscillatori destri $\lambda(x)$ di $f(x)$ sarà compreso fra il limite superiore e il limite inferiore destro di $\varphi(x)$; poichè dunque il limite superiore dei limiti superiori destri di una funzione in un certo intervallo (gli estremi esclusi) è minore del limite superiore dei valori che ha la funzione nell'intervallo (gli estremi esclusi o no), così per alcune proprietà sopra enunciate dovrà essere:

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \leqq f(x_1).$$

Ma abbiamo trovato

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx \geqq f(x_1)$$

dunque

$$\overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx = f(x_1).$$

Analogamente si dimostrerebbe la proprietà simile per gli integrali inferiori.

Da questo teorema si deduce subito che *gli integrali superiore o inferiore di una funzione qualunque sono respettivamente eguali all'integrale superiore* *dei limiti superiori destri o sinistri e all'integrale inferiore dei limiti inferiori destri o sinistri della funzione in ogni punto dell'intervallo.*

Abbiamo poi gli altri teoremi:

Il massimo estremo oscillatorio destro o sinistro di cui una funzione può essere integrale superiore è il proprio estremo oscillatorio superiore destro o sinistro.

Infatti se

$$F(x_1) = \overline{\int_{x_0}^{x_1}} [\lambda(x)]\, dx$$

$\lambda(x)$ essendo estremo oscillatorio superiore destro o sinistro di $f(x)$ si ha per un teorema precedentemente dimostrato:

$$F(x_2) - F(x_3) \gtreqless f(x_2) - f(x_3)$$

in cui va preso il segno superiore o inferiore secondo che x_2 è maggiore o minore di x_3, l'intervallo (x_2, x_3) essendo interno all'altro (x_0, x_1), quindi:

$$\frac{F(x_2) - F(x_3)}{x_2 - x_3} \geqq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}$$

il che prova il teorema.

Analogamente si dimostra che: *il minimo estremo oscillatorio destro o sinistro di cui una funzione può essere integrale inferiore è il proprio estremo oscillatorio inferiore destro o sinistro.*

Dalla definizione di estremi oscillatori si deduce subito che *la somma degli estremi oscillatori superiori destri o sinistri di due funzioni è maggiore dell'estremo oscillatorio superiore destro o sinistro della somma delle due funzioni, e la somma degli estremi oscillatori inferiori destri o sinistri di due funzioni è minore dell'estremo oscillatorio destro o sinistro della somma delle due funzioni.*

Se ne deduce che *se* $f(x)$, $\varphi(x)$ *e* $f(x) + \varphi(x)$ *hanno respettivamente per estremi oscillatori destri superiori e inferiori* λ *e* λ', λ_1 *e* λ'_1, λ_2 *e* λ'_2

$$\lambda_2 > \lambda + \lambda'_1 > \lambda'_2$$
$$\lambda_2 > \lambda' + \lambda_1 > \lambda'_2 .$$

Infatti gli estremi oscillatori superiore e inferiore destri di $-\varphi(x)$ sono respettivamente $-\lambda'_1$ e $-\lambda_1$, quindi:

$$\lambda_2 - \lambda'_1 > \lambda$$
$$\lambda'_2 - \lambda_1 < \lambda',$$

e analogamente

$$\lambda_2 - \lambda' > \lambda_1$$
$$\lambda'_2 - \lambda < \lambda'_1 ;$$

queste relazioni provano il teorema.

Se ne ha uno analogo quando si considerino gli estremi oscillatori sinistri.

Si conclude che le funzioni

$$\lambda + \lambda'_1 \,, \lambda' + \lambda_1 \,, \frac{\lambda + \lambda' + \lambda_1 + \lambda'_1}{2} \,, \lambda_2 \text{ e } \lambda'_2$$

hanno gli stessi integrali superiori e inferiori.

Non esiste che una sola funzione avente un dato valore in un dato punto e che in tutti i punti di un certo intervallo abbia un dato estremo oscillatorio, oppure una data media dei suoi due estremi oscillatori destri o dei suoi estremi oscillatori sinistri, oppure di cui si conoscano delle funzioni che differiscono da queste per funzioni di integrale nullo.

Siano $f(x)$ e $f_1(x)$ due funzioni che abbiano per estremo oscillatorio superiore destro $\lambda(x)$ o una funzione che differisce da questa per una di integrale nullo; la funzione $-f_1(x)$ avrà per estremo oscillatorio inferiore destro $-\lambda(x)$ o una funzione che differisce da questa per una di integrale nullo. Ne segue che gli estremi oscillatori di $f(x) - f_1(x)$ devono avere l'integrale superiore e l'integrale inferiore eguali allo zero il che prova che $f(x)$ e $f_1(x)$ non possono differire che per una costante. Similmente si dimostra il teorema negli altri casi.

Si può dunque generalizzare agli estremi oscillatori un teorema già dato riguardo alle derivate.

Se di una funzione si conosce il valore in un punto appartenente ad un certo intervallo, e in tutti i punti dell'intervallo stesso esclusi quelli appartenenti ad un gruppo di punti ed ai suoi punti limiti si conosce uno degli estremi oscillatori (*) *o la media degli estremi oscillatori destri o quella degli estremi oscillatori sinistri o funzioni che differiscono da queste per funzioni di integrale nullo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione sia determinata è che il gruppo sia rinchiudibile in intervalli arbitrariamente piccoli.*

III.

Passiamo alla considerazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine della forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

o dei sistemi della forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_n),
\end{aligned}$$

(*) Che si suppone sempre finito. [Correzione autografa].

allo studio dei quali si riduce molto spesso quello di equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore al primo.

La prima dimostrazione della esistenza degli integrali di equazioni differenziali, soddisfacenti a date condizioni, è dovuta a CAUCHY. I signori BRIOT e BOUQUET (13) hanno dimostrato il teorema di CAUCHY con maggiore semplicità; il metodo porta diverse restrizioni nelle equazioni differenziali, consistendo nel determinare a quali condizioni esse devono soddisfare affinchè gli integrali resultino sviluppabili in serie di TAYLOR.

Indipendentemente dalla considerazione della sviluppabilità in serie degli integrali, il sig. LIPSCHITZ (14) e il sig. HOÜEL (15) dànno una dimostrazione della esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, di cui il concetto ha analogia con quello della dimostrazione della esistenza degli integrali definiti di RIEMANN. Seguendo lo stesso concetto ma applicando il metodo ora tenuto nella dimostrazione del teorema di RIEMANN, si arriva a dei risultati alquanto più generali.

Cominciamo dalle equazioni differenziali del primo ordine fra due variabili.

Sia la funzione $f(x, y)$ definita per tutti i valori della x ed y in un certo campo C a due dimensioni che contiene il punto x_0, y_0 e sia M il limite superiore dei suoi valori assoluti.

Consideriamo le somme

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$
$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

quando si supponga che $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = x_1 - x_0$, ($x_1$ essendo maggiore di x_0), che L_1 sia il limite superiore e l_1 il limite inferiore dei valori che la funzione $f(x, y)$ ha nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)$ $(y_0 + Mh_1, y_0 - Mh_1)$; L_2 e l_2 il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)$ $(y_0 + h_1 L_1 + Mh_2, y_0 + h_1 l_1 - Mh_2)$; finalmente che L_n e l_n siano il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1}, x_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_{n-1} + h_n)$$
$$(y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_{n-1} L_{n-1} + Mh_n,$$
$$y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_{n-1} l_{n-1} - Mh_n).$$

Sarà poi evidentemente necessario supporre che non si esca mai dal campo C assegnato alla funzione $f(x, y)$.

Formiamo un'altra divisione qualunque $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ dell'intervallo (x_0, x_1) e consideriamo le somme analoghe a quelle precedenti

$$h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m$$
$$h'_1 l'_1 + h'_2 l'_2 + \cdots + h'_m l'_m.$$

(13) « Journal de l'École Polytechnique », XXXVI Cahier, vol. 21, 1856, pp. 133-198; SERRET, op. cit., vol. II, p. 348.

(14) « Annali di Matematica » diretti da F. BRIOSCHI e L. CREMONA, ser. II, vol. II.

(15) HOÜEL, *Cours de Calcul infinitésimal*, vol. II, pp. 304, 316 e 323.

Suppongansi tutte le quantità $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ minori di una quantità $\delta/2$, essendo δ inferiore alla più piccola delle $h_1, h_2, \cdots, h_m$. Sia

$$h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_{p-1} < h_1$$
$$h'_1 + h'_2 + \cdots + h'_{p-1} + h'_p \geqq h_1,$$

avremo che:

$$h_1 L_1 + \delta M > h'_1 L'_1 + \cdots + h'_p L'_p > h_1 l_1 - \delta M.$$

Sia:

$$h_2 - \delta > h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-q} > h_2 - \frac{3}{2}\delta$$
$$h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-1} < h_2$$
$$h'_{p+1} + h'_{p+2} + \cdots + h'_{s-1} + h'_s \geqq h_2;$$

avremo che $L'_{p+1}, L'_{p+2}, \cdots, L'_{s-q}$ saranno tutti compresi fra L_2 e l_2, quindi:

$$h_2 L_2 + 4\,\delta M > h'_{p+1} L'_{p+1} + \cdots + h'_s L'_s > h_2 l_2 - 4\,\delta M$$

e per conseguenza

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + 5\,\delta M > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_s L'_s > h_1 l_1 + h_2 l_2 - 5\,\delta M.$$

Sia:

$$h_3 - 5\,\delta > h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_{v-t} > h_3 - \left(5 + \frac{1}{2}\right)\delta$$
$$h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_{v-1} < h$$
$$h'_{s+1} + h'_{s+2} + \cdots + h'_v \geqq h_3$$

si troverà:

$$h_3 L_3 + 11\,\delta M > h'_{s+1} L'_{s+1} + h'_{s+2} L'_{s+2} + \cdots + h'_v L'_v < h_3 l_3 - 11\,\delta M$$

e quindi:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + h_3 L_3 + 16\,\delta M > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots$$
$$+ h'_v L'_v > h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_3 l_3 - 16\,\delta M$$

e così di seguito, in modo che si potrà concludere, N essendo un numero che dipende soltanto da n, che:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n + NM\delta > h'_1 L'_1 + h'_2 L'_2 + \cdots + h'_m L'_m.$$

Si ha inoltre

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > -(x_1 - x_0) M,$$

per conseguenza si vede che facendo impiccolire indefinitamente le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ in una maniera qualunque la somma

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

tende sempre verso uno stesso limite determinato e finito che è il limite inferiore dei valori della somma stessa per tutti i possibili valori di $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

Analogamente si riconosce che la somma

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

tende pure verso un limite determinato e finito indipendentemente dal modo con cui impiccoliscono le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ e questo limite è il limite superiore dei valori della somma stessa per tutti i valori possibili di $h_1, h_2, \cdots, h_n$. Se $x_1 < x_0$ allora $h_1, h_2, \cdots, h_n$ vanno presi negativi e si hanno proprietà analoghe a quelle dimostrate ora. Queste proprietà generali valgono per qualunque funzione di due variabili.

Suppongasi che

$$\lim (h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n) = \lim (h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n)$$

ossia:

$$\lim (h_1 D_1 + h_2 D_2 + \cdots + h_n D_n) = 0, \tag{1}$$

$D_1, D_2, \cdots, D_n$ essendo respettivamente le oscillazioni della $f(x, y)$ nei rettangoli considerati; in tal caso la somma

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n = \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$$

$f_1, f_2, \cdots, f_n$ essendo quantità comprese fra L_1 e l_1, L_2 e $l_2, \cdots, L_n$ e l_n, (gli estremi inclusi) avrà sempre per limite una stessa quantità.

Reciprocamente volendo che la somma $\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$ abbia sempre lo stesso limite comunque si prendano le h_p e le f_p purchè comprese fra L_p e l_p (gli estremi inclusi) è necessario che sia verificata la condizione (1).

Resulta dunque che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè il limite della somma*

$$h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_n f_n$$

esista, comunque siano le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ *purchè la loro somma sia* $x_1 - x_0$ *e tendano verso lo zero, è che la quantità*

$$h_1 D_1 + h_2 D_2 + \cdots + h_n D_n = \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n,$$

possa rendersi coll'impiccolire delle h in una certa maniera minore di qualunque quantità assegnabile, $D_1, D_2, \cdots, D_n$ *essendo le oscillazioni della* $f(x, y)$ *nei diversi rettangoli che abbiamo considerato.*

Il limite (quando esiste) della quantità

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n$$

lo indicheremo per brevità con

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y).$$

Nella ipotesi che la $f(x, y)$ verifichi la condizione (1) e sia $x_1 > x_0$, per quanto abbiamo detto risulta che $\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y)$ è il limite inferiore dei valori della somma

$$y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n$$

ed il limite superiore di quelli della somma

$$y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n$$

mentre se $x_1 < x_0$, $\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y)$ è il limite superiore della prima somma e il limite inferiore della seconda; ne segue che se $x_1 > x_0$:

$$(2) \quad y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n \geqq \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) > y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n .$$

E se $x_1 < x_0$,

$$(2') \quad y_0 + h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n \leqq \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) < y_0 + h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n ,$$

e per conseguenza in valore assoluto

$$(3) \qquad y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n - \int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n$$ (16)

e se $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ è un'altra divisione dell'intervallo (x_0, x_1), in valore assoluto

$$(4) \qquad \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n\right] - \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h'_n f'_n\right] \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h'_m D'_m .$$

Se si ha $x_1 > x_2 > x_0$, oppure $x_1 < x_2 < x_0$:

$$y_2 = \int_{x_0 y_0}^{x_2} f(x, y),$$

avremo supponendo che x_2 sia un estremo di uno degli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$

$$\left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n f_n\right] - \left[y_2 + \sum_{x_2 y_2}^{x_1} h_n f_n\right] < \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n ,$$

(16) Da ciò che segue si può vedere come per mezzo di questa formula si può determinare con quella approssimazione che si vuole il valore in un punto qualunque dell'integrale di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine, del quale si conosca il valore in un dato punto. Una analoga osservazione si può fare per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine.

e quindi

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) = \int_{x_2 y_2}^{x_1} f(x, y); \tag{5}$$

donde:

$$\int_{x_0 y_0}^{x_1} f(x, y) = \int_{x_0 y_0}^{x_2} f(x, y) + \lim \left\{ \sum_{x_2 y_2}^{x_1} h_n f_n \right\}. \tag{6}$$

Supponiamo che la funzione $f(x, y)$ verifichi le condizioni:

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n = 0 \quad , \quad \lim \sum_{x_0 y_0}^{x_2} h'_m D'_m = 0$$

in cui $x_1 < x_0 < x_2$, la funzione

$$F(x) = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$$

avrà un significato per tutti i valori della x compresi nell'intervallo (x_1, x_2) (gli estremi inclusi) ed escluso il valore x_0, pel quale però ammetteremo assuma il valore y_0.

La funzione $F(x)$ è continua. Infatti per un valore x' diverso da x_0 si ha per h sufficientemente piccola

$$\int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = \lim \sum_{x\ y'}^{x'+h} h_r f_n = hP, \tag{7}$$

P essendo una quantità compresa fra il limite superiore e il limite inferiore (gli estremi inclusi) di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x', x'+h)(y'+Mh, y'-Mh)$ ed essendo $y' = \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y)$. Per x tendente a destra o a sinistra verso x_0 evidentemente $\int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y)$ tende verso y_0.

Consideriamo ora gli estremi oscillatori della funzione $F(x)$.

Siano x' e $x' + h$ due valori di x compresi nell'intervallo (x'', x'''); avremo, se h è positivo:

$$hA \geqq \int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) > ha,$$

A e a essendo il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x'', x''')(y'' + M(x''' - x''), y'' - M(x''' - x''))$ ed essendo y'' il valore di $\int_{x_0 y_0}^{x''} f(x, y)$. Se ne deduce:

$$A \geqq \frac{\int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y)}{h} \geqq a,$$

il che prova che gli estremi oscillatori di $F(x)$ in tutti i punti dell'intervallo (x'', x''') sono compresi fra A e a. Da ciò si deduce che se $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ sono le oscillazioni di un estremo oscillatorio λ_x della funzione $F(x)$ negli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$ in cui è diviso l'intervallo (x_0, x_1) si ha in valore assoluto:

$$h_1 \Delta_1 + h_2 \Delta_2 + \cdots + h_n \Delta_n \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n,$$

e se $\Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_m$ sono le oscillazioni di λ_x negli intervalli $h'_1, h'_2, \cdots, h'_m$ in cui è diviso l'intervallo (x_0, x_2) si ha:

$$h'_1 \Delta'_1 + h'_2 \Delta'_2 + \cdots + h'_m \Delta'_m \leqq \sum_{x_0 y_0}^{x_2} h'_m D'_m;$$

ciò prova che gli estremi oscillatori della funzione $F(x)$ sono atti alla integrazione. Ne segue che in ogni intervallo compreso in quello totale in cui è definita la funzione $F(x)$ vi sono un numero infinito di punti in cui essa ammette una derivata determinata e finita.

Consideriamo nella funzione $f(x, y)$, y come funzione della x definita dalla relazione $y = F(x)$; la $f(x, y)$ resulterà una funzione $\varphi(x)$ della sola x definita in tutto l'intervallo (x_1, x_2); questa funzione è atta alla integrazione in tutto l'intervallo. Infatti dividiamo l'intervallo (x_0, x), x essendo compreso fra x_1 e x_2 (gli estremi inclusi) negli altri $h_1, h_2, \cdots, h_n$, avremo indicando con φ_p un valore compreso fra il limite superiore ed inferiore di $\varphi(x)$ nell'intervallo h_p che:

$$L_p > \varphi_p > l_p,$$

quindi:

$$h_1 L_1 + h_2 L_2 + \cdots + h_n L_n > h_1 \varphi_1 + h_2 \varphi_2 + \cdots + h_n \varphi_n > h_1 l_1 + h_2 l_2 + \cdots + h_n l_n,$$

il che prova quanto si voleva dimostrare.

Dalla stessa relazione si deduce

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\, dx = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y), \tag{8}$$

quindi $\varphi(x)$ differisce dagli estremi oscillatori di $F(x)$ per funzioni di integrale nullo.

Riprendiamo la formula (7), avremo

$$\int_{x_0 y_0}^{x'+h} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = h\,[f(x', y') + \theta\delta]$$

$$\int_{x_0 y_0}^{x'-h_1} f(x, y) - \int_{x_0 y_0}^{x'} f(x, y) = -h_1\,[f(x', y') + \theta_1 \delta_1],$$

δ e δ_1 essendo rispettivamente le oscillazioni della $f(x, y)$ nei rettangoli $(x', x'+h)$ $(y'+Mh, y'-Mh)$ e $(x', x'-h_1)$ $(y'+Mh_1, y'-Mh_1)$ e θ e θ_1 numeri compresi fra $+1$ e -1 (gli estremi inclusi).

Ne segue che:

$$\frac{F(x'+h)-F(x')}{h}=f(x',y')+\theta\delta$$

$$\frac{F(x'-h_1)-F(x')}{-h_1}=f(x',y')+\theta_1\,\delta_1\,.$$

Suppongasi la $f(x\,,y)$ continua assolutamente rispetto ad ambedue le variabili x ed y nel punto $(x'\,,y')$; avremo:

$$\lim_{h=0}\frac{F(x'+h)-F(x')}{h}=f(x',y')$$

$$\lim_{h_1=0}\frac{F(x'-h_1)-F(x')}{h_1}=f(x',y')$$

il che prova che la F (x) ammette nel punto x' una derivata ordinaria determinata e finita ed eguale a $f(x'\,,y')$.

Di qui si deduce che *se $f(x\,,y)$ è in un certo campo continua assolutamente rispetto alle due variabili x e y, per tutti quei sistemi di valore $(x_0\,,y_0)$ per cui vien soddisfatta la condizione* (1) *la funzione*

$$\int_{x_0 y_0}^{x} f(x\,,y)$$

è un integrale della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx}=f(x\,,y)\,.$$

È facile di più provare che *se per il punto $x_0\,,y_0$ la funzione $f(x\,,y)$ verifica la condizione* (1) *non può esistere che una sola funzione $y=$* F (x) *che per $x=x_0$ assuma il valore y_0 e verifichi l'equazione differenziale*

$$\frac{dy}{dx}=f(x\,,y)$$

per x compreso fra x_0 e x_1.

Infatti se ne esistessero due diverse F (x) e $F_1(x)$ dovrebbe potersi trovare un punto x_2 compreso fra x_0 e x_1 in cui esse differissero per una quantità finita k. Costruiamo successivamente i rettangoli $(x_0\,,x_0+h_1)\,(y_0+$ $+\,Mh_1\,,y_0-Mh_1)\,,\,(x_0+h_1\,,x_0+h_1+h_2)\,(y_0+h_1L_1+Mh_2\,,y_0+h_1l_1-$ $-\,Mh_2)$ ecc. essendo $h_1+h_2+\cdots+h_n=x_1-x_0$, evidentemente se x è compreso fra x_0 e x_0+h_1 (gli estremi inclusi) i valori F (x) e $F_1(x)$ devono essere compresi fra $y_0+h_1L_1$ e $y_0+h_1l_1$; se x è compreso fra x_0+h_1 e $x_0+h_1+h_2$ (gli estremi inclusi) i valori di F (x) e $F_1(x)$ saranno compresi fra $y_0+h_1L_1+h_2L_2$ e $y_0+h_1l_1+h_2l_2$ ecc. Finalmente per x compreso fra $x_1+h_1+\cdots+h_{n-1}$ e $x_0+h_1+\cdots+h_{n-1}+h_n$ (gli estremi inclusi) F (x) e $F_1(x)$ saranno compresi fra $y_0+h_1L_1+h_2L_2+\cdots+h_nL_n$ e $y_0+h_1l_1+\cdots+h_{n-1}l_{n-1}+h_nl_n$. Quindi in valore assoluto

$$[y_0+h_1L_1+h_2L_2+\cdots+h_nL_n]$$

$$-\,[y_0+h_1l_1+\cdots+h_nl_n]=\sum_{x_0}^{x_1}h_nD_n>F(x_2)-F_1(x_2)=k$$

qualunque sieno $h_1, h_2, \cdots, h_n$ il che è contrario alla ipotesi fatta. Analogamente si riconosce che se per il punto x_0, y_0 è verificata la condizione (1) per la funzione $f(x, y)$, e di più esiste una funzione $y = \mathrm{F}(x)$ che verifica la equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ si ha

$$\mathrm{F}(x) = \int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y).$$

Suppongasi che per x_0 ed x_1 fissi e per tutti i valori della y compresi fra y_1 e y_2 sia verificata la condizione (1) per la esistenza di

$$\int_{x_0 y}^{x_1} f(x, y),$$

potremo in tal caso considerare

$$\mathrm{F}(y) = \int_{x_0 y}^{x_1} f(x, y)$$

come funzione della y definita nell'intervallo (y_1, y_2).

Se preso σ piccolo ad arbitrio si ha in valore assoluto

$$\sum_{x_0 y}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n < \sigma,$$

quando tutte le h_n sono inferiori ad una certa quantità, per tutti i valori di y compresi nell'intervallo (y_1, y_2), la $\mathrm{F}(y)$ è continua rispetto ad y. Infatti prendendo $h_1, h_2, \cdots, h_n$ sufficientemente piccoli potremo avere per $y_2 > y_0 \geqq y_1$, $y_2 \geqq y_0 + \delta \geqq y_1$

$$\mathrm{F}(y_0) - \left[y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} f_n h_n \right] < \sigma$$

$$\mathrm{F}(y_0 + \delta) - \left[y_0 + \delta + \sum_{x_0 y_0 + \delta}^{x_1} f'_n h_n \right] < \sigma.$$

Ora f_1 è compreso fra il limite superiore ed inferiore dei valori della $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)(y_0 + \mathrm{M}h_1, y_0 - \mathrm{M}h_1)$ e f'_1 fra il limite superiore ed inferiore nel rettangolo $(x_0, x_0 + h_1)(y_0 + \delta + \mathrm{M}h_1, y_0 + \delta - \mathrm{M}h_1)$.

Quindi se δ è inferiore in valore assoluto alla minima delle quantità $2\mathrm{M}h_1, 2\mathrm{M}h_2, \cdots, 2\mathrm{M}h_n$, i due rettangoli hanno una porzione comune, quindi possiamo prendere $f_1 = f'_1$; f_2 può prendersi fra il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo $(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)(y_0 + h_1 f_1 + \mathrm{M}h_2, y_0 + h_1 f_1 - \mathrm{M}h_2)$ e f'_2 fra il limite superiore ed inferiore di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_0 + h_1, x_0 + h_1 + h_2)(y_0 + \delta + h_1 f_1 + \mathrm{M}h_2, y_0 + \delta + h_1 f_1 - \mathrm{M}h_2),$$

quindi possiamo prendere $f_2 = f'_2$, e così di seguito. Se ne deduce che

$$\mathrm{F}(y_0 + \delta) - \mathrm{F}(y_0) < 2\sigma + \delta,$$

in valore assoluto, il che prova la continuità di $\mathrm{F}(y)$.

Analogamente si può provare che, se

$$\int_{xy_0}^{x_2} f(x\,,y)$$

ha un significato per tutti i valori della x in un intervallo $(x_0\,,x_1)$ e di più si ha sempre che preso σ piccolo ad arbitrio si ha in valore assoluto

$$\sum_{xy_0}^{x_1} h_n\,\mathrm{D}_n < \sigma$$

per le h_n inferiori ad una certa quantità e x compreso nell'intervallo $(x_0\,,x_1)$, essa è funzione di x nello stesso intervallo finita e continua.

Se delle tre quantità $x_0\,,y_0\,,x_1$ nell'espressione

$$\int_{x_0\,y_0}^{x_1} f(x\,,y)$$

due qualunque possono variare in un dato campo a due dimensioni, nel campo stesso la espressione considerata può riguardarsi come funzione finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili e infine se tutte e tre le quantità $x_0\,,y_0\,,x_1$ possono variare in un certo campo a tre dimensioni la espressione considerata è una funzione finita e continua assolutamente rispetto a queste tre variabili purchè sia sempre verificata la solita condizione

$$\sum_{x_0\,y_0}^{x_1} h_n\,\mathrm{D}_n < \sigma\,,$$

essendo σ piccola ad arbitrio e le h_n inferiori ad un certo numero, per tutti i valori che $x_0\,y_0\,x_1$ possono assumere.

Se la x ed y possono variare in un certo campo C a due dimensioni la espressione

$$\int_{xy}^{x_1} f(x\,,y)$$

sarà una funzione $\psi(x\,,y)$ di x e y. In essa consideriamo y come funzione della x definita da

$$y_x = \int_{x_0\,y_0}^{x} f(x\,,y)$$

essendo $x_0\,y_0$ un punto del campo C e x compreso fra x_0 ed x_1.

Questa funzione $\psi(x\,,y_x)$ sarà costante ed eguale a

$$\int_{x_0\,y_0}^{x_1} f(x\,,y)\,.$$

Di qui si conclude che se la relazione $\psi(x\,,y) = \psi(x_0\,,y_0)$ che è evidentemente verificata per $x = x_0$, $y = y_0$ è capace a partire da questo punto fino ad un valore x_2 compreso nell'intervallo $(x_0 x_1)$ a definire una sola funzione implicita y della x, questa funzione è

$$\int_{x_0 y_0}^{x} f(x, y).$$

Quindi se oltre alle condizioni ora imposte la funzione $f(x, y)$ è continua assolutamente rispetto ad x ed y in tutti i punti del campo C la relazione

$$\psi(x, y) = \psi(x_0, y_0)$$

sarà una relazione integrale della equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Diamo alcuni casi di equazioni differenziali per le quali è verificata la condizione (1).

Se la funzione $f(x, y)$ è in un certo campo finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili ed ammette in tutti i punti un estremo oscillatorio in valore assoluto inferiore ad un certo numero finito A, si avrà sempre, se $x_0 y_0$ è un punto del campo, purchè si resti sempre nell'*interno* del campo stesso

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n = 0.$$

Infatti abbiamo, se la funzione $f(x, y)$ è continua assolutamente nel campo che si considera, che è possibile determinare un valore δ tale che la differenza fra due valori della funzione in due punti del campo situati alla distanza δ o a una distanza minore di δ, sia inferiore ad un numero arbitrario σ [17].

Ciò posto prendiamo $h_1 = h_2 = \cdots = h_n = \delta$, avremo

$$\mathrm{D}_1 \leqq 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma$$
$$\mathrm{D}_2 \leqq \mathrm{A}\,[(2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma) + 2\,\mathrm{M}]\,\delta + \sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathrm{D}_p \leqq \mathrm{A}\left[\sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n + 2\mathrm{M}\right]\delta + \sigma,$$

M essendo il massimo valore assoluto della funzione $f(x, y)$ nel campo che si considera. Se ne deduce

$$\sum_1^{p} \mathrm{D}_n < \mathrm{A}\left[\sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n + 2\,\mathrm{M}\right]\delta + \sigma + \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n$$
$$= \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n\,[\mathrm{A}\delta + 1] + 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma = \sum_1^{p-1} \mathrm{D}_n\,[\mathrm{A}\delta + 1] + \varepsilon,$$

in cui $\varepsilon = 2\,\mathrm{AM}\delta + \sigma$.

(17) Questa proprietà delle funzioni di due variabili continue assolutamente è una estensione di un teorema sulle funzioni continue di una variabile del sig. CANTOR (DINI, op. cit., p. 48). Essa può generalizzarsi anche alle funzioni di più variabili.

Quindi:

$$\sum_1^p D_n \leqq \varepsilon\,[(A\delta + 1)^{p-1} + (A\delta + 1)^{p-2} + \cdots + 1] = \varepsilon\,\frac{(A\delta + 1)^p - 1}{A\delta}\,,$$

e per conseguenza:

$$\sum_1^p h_n\, D_n \leqq \frac{\varepsilon}{A}\,[(A\delta + 1)^p - 1]\,.$$

Se p è il numero totale di intervalli contenuti in quello totale $(x_0\,, x_1)$ si deduce che:

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n\, D_n < \frac{\varepsilon}{A}\,\{\,e^{A\alpha} - 1\,\}$$

α essendo il valore assoluto di $x_1 - x_0$. Ciò prova il teorema enunciato.

Esso può generalizzarsi supponendo che nel piano per la funzione finita $f(x\,, y)$, escluso un numero finito o infinito di punti costituenti un gruppo di prima specie, o anche più generalmente un gruppo di punti rinchiudibili in un numero finito di strisce parallele all'asse delle y di cui la somma delle larghezze contate parallelamente all'asse delle x può rendersi inferiore a qualunque quantità assegnabile, in tutti gli altri punti siano verificate le condizioni del teorema precedente, intendendo sempre che i numeri A e σ non dipendano dalla larghezza delle strisce che si escludono.

Infatti supponiamo di prendere queste strisce di piano comprese respettivamente fra le rette

$$\begin{array}{lcl} x = x' & , & x = x' + K' \\ x = x'' & , & x = x'' + K'' \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x = x^{(p)} & , & x = x^{(p)} + K^{(p)}, \end{array}$$

e supponiamo inoltre di prendere fra i punti di divisione dell'intervallo $(x_0\,, x_1)$ i punti $x', x' + K', x'', x'' + K'', \cdots, x^{(p)}, x^{(p)} + K^{(p)}$.

Ammettiamo inoltre che tutti gli altri intervalli di divisione siano eguali a δ in modo che

$$\begin{aligned} x' - x_0 &= q_0\,\delta \\ x'' - (x' + K') &= q'\,\delta \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1 - (x^{(p)} + K^{(p)}) &= q^{(p)}\,\delta\,. \end{aligned}$$

Avremo, in modo analogo a quanto venne fatto precedentemente, che

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n\, D_n < 2\,MK'\,(1 + A\delta)^{q'' + q''' + \cdots + q^{(p)}} + 2\,MK''\,(1 + A\delta)^{q''' + q^{IV} + \cdots + q^{(p)}} + \cdots$$
$$+\, 2\,MK^{(p)}\,(1 + A\delta)^{q^{(p)}} + \frac{\varepsilon}{A}\,[(1 + A\delta)^z - 1],$$

quando si ponga:

$$\varepsilon = 2\,AM\delta + \sigma \quad , \quad z = q' + q'' + \cdots + q^{(p)}.$$

Ne segue che (essendo α eguale al valore assoluto di $x_1 - x_0$)

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n D_n < 2 M (K' + K'' + \cdots + K^{(p)}) e^{A\alpha} + \frac{\varepsilon}{A} (e^{A\alpha} - 1),$$

il che dimostra il teorema.

Si può dunque concludere:

Se si ha l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

ed il punto $x_0 y_0$ *è un punto arbitrario di un campo a due dimensioni in cui la* $f(x, y)$ *si mantiene sempre finita e di più è continua assolutamente rispetto ad* x *e ad* y *e ammette in tutti i punti un estremo oscillatorio rapporto ad* y *inferiore ad un numero finito* A, (*escluso per queste due ultime condizioni al più un numero finito o infinito di punti rinchiudibili in strisce di piano parallele ad* y *e di cui la somma delle larghezze contate parallelamente ad* x *può rendersi minore di qualunque quantità data*) *esiste sempre una funzione finita e continua* y *della* x *definita in un intorno del punto* x_0 *la quale per* $x = x_0$ *assume il valore* y_0 *e verifica la equazione differenziale data per tutti quei valori della* x *a cui corrispondono valori della* y *tali che nei punti* x, y *la funzione* $f(x, y)$ *è continua assolutamente rispetto ad* x *ed* y.

Se intendiamo ora *per integrale generale di una equazione differenziale* $dy/dx = f(x, y)$ *in un certo campo una funzione* $y = \varphi(x, y_0, x_0)$ *tale che per ogni sistema di valori di* $x_0 y_0$ *corrispondente ad un punto del campo che si considera risulta la* y *una funzione della* x (*che può chiamarsi un integrale particolare*) *definita in un certo intervallo che contiene il punto* x_0, *e che verifica l'equazione differenziale data e di più assume per* $x = x_0$ *il valore* y_0, e intendiamo *per integrale singolare di una equazione, che ammette già un integrale generale, qualunque funzione* $y = \psi(x)$ *definita in un certo intervallo* $(\alpha\beta)$ *la quale verifica l'equazione differenziale data, e non coincide in nessuna porzione finita dell'intervallo* $(\alpha\beta)$ *con un integrale particolare*, avremo che *se nell'integrale singolare al valore* x' *di* x *corrisponde il valore* y' *di* y, *esiste sempre un'altra funzione* $y = \theta(x)$ *che per* $x = x'$ *assume il valore* y' *e verifica l'equazione differenziale data*. Di qui si vede subito che colle condizioni imposte nel teorema precedente alla $f(x, y)$ supposto di più che essa sia continua in tutti i punti del campo, l'equazione differenziale ammette *un unico integrale generale* e non ammette *alcuna soluzione singolare*.

Se la $f(x, y)$ fosse sempre finita e continua e, escluso un numero finito o infinito di linee mediante dei campi che le racchiudono e i cui contorni siano infinitamente vicini alle linee stesse, in tutti gli altri punti del campo si verificassero le condizioni del teorema precedente, in tal caso la equazione differenziale non potrebbe ammettere (posto che ne avesse) per integrale singolare che alcune o tutte le funzioni y delle x corrispondenti alle linee singolari considerate.

Se quindi la $f(x, y)$ fosse finita e continua in un certo campo e avesse in tutto il campo una derivata rispetto alla y, $\partial f(x, y)/\partial y$, finita o no, ma continua rispetto alle due variabili x ed y e la relazione

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \infty$$

definisse implicitamente un numero finito o infinito di funzioni continue y della x, fra queste sole dovrebbero trovarsi gli integrali singolari della equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ nel campo che si considera dato che in questo stesso campo l'equazione differenziale avesse un integrale generale (18).

Quando si sappia solamente che la funzione $f(x, y)$ è finita e continua assolutamente rispetto alle due variabili x ed y, in tutti i punti di un certo campo, non si è sicuri della esistenza di integrali della equazione differenziale $dy/dx = f(x, y)$ nel campo che si considera. Però anche con queste sole condizioni, purchè la funzione $f(x, y)$ in tutto il campo sia sempre crescente o sempre decrescente rispetto ad y si può dimostrare l'esistenza di integrali generali della equazione differenziale in tutto il campo; anzi si può dimostrare che per ogni punto $x_0 y_0$ per cui non si verifica la condizione

$$\lim \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{D}_n = 0$$

esiste sempre più di una funzione che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data.

Suppongasi infatti la funzione $f(x, y)$ sempre crescente rapporto ad y, $x_0 y_0$ un punto del campo che si considera. Costruiscansi le note somme (purchè non si esca mai dal campo)

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n \mathrm{L}_n \quad \text{e} \quad y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n l_n,$$

e si passi al limite per le h_n tendenti a zero.

Indichiamo i due limiti con

$$y_1 = \Phi(x_1) \quad \text{e} \quad y_1' = \varphi(x_1);$$

avremo che ambedue queste funzioni tenderanno verso y_0 per $x_1 = x_0$. Se x_1' è il massimo valore che può assumere x_1 e

$$x_1 > x_2 > x_3 > x_0$$

si avrà

$$\sum_{x_0 y_0}^{x_2} h_n \mathrm{L}_n - \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n = (x_2 - x_3)\,\theta,$$

quando si supponga che l'intervallo (x_0, x_2) tanto nel fare l'una che l'altra somma si divida nello stesso modo, e θ sia una quantità compresa fra il massimo e il minimo di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_2, x_3), \left(y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n - \mathrm{M}(x_2 - x_3),\ y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_3} h_n \mathrm{L}_n + \mathrm{M}(x_2 - x_3)\right);$$

(18) Vedi Serret, op. cit., vol. II, p. 384.

se ne deduce che

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_3) = \theta_1 (x_2 - x_3),$$

θ_1 essendo compreso fra il massimo e il minimo di $f(x, y)$ nel rettangolo

$$(x_2, x_3), (\Phi(x_3) - M(x_2 - x_3), \Phi(x_3) + M(x_2 - x_3)),$$

ossia (ponendo $y_3 = \Phi(x_3)$)

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_3) = [f(x_3, y_3) + \varepsilon](x_2 - x_3),$$

ε essendo inferiore in valore assoluto alla oscillazione della funzione $f(x, y)$ nel rettangolo (x_2, x_3), $(\Phi(x_3) - M(x_2 - x_3), \Phi(x_3) + M(x_2 - x_3))$.

Ne segue che:

$$\lim_{x_2 = x_3} \frac{\Phi(x_2) - \Phi(x_3)}{x_2 - x_3} = f(x_3, y_3),$$

il che prova che la derivata a destra della funzione $\Phi(x)$ nel punto x_3 è $f(x_3, y_3)$. La derivata a sinistra si prova analogamente avere lo stesso valore e pure in modo analogo si dimostra (ponendo $y'_3 = \varphi(x_3)$) che

$$\left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=x_3} = f(x_3, y'_3)$$

il che prova che le due funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x)$ verificano nell'intervallo (x_0, x_1), qualunque sia x_0 purchè però sia preso convenientemente x_1 maggiore di x_0, la equazione differenziale data e si riducono a y_0 per $x = x_0$. Si riconosce facilmente che il teorema non è più valevole se $x_1 < x_0$.

È poi facile il provare che qualunque funzione $y = \theta(x)$ definita in una porzione dell'intervallo (x_0, x_1) che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data, deve soddisfare la relazione

$$\Phi(x) \geqq \theta(x) \geqq \varphi(x).$$

Se consideriamo le due funzioni $\Phi(x)$ e $\varphi(x)$ come funzioni anche del punto $x_0 y_0$ e le indichiamo con $\Phi(x, x_0, y_0)$, $\varphi(x, x_0, y_0)$ si può dimostrare che ambedue queste funzioni sono continue rispetto ad y_0.

Infatti se $y_0 > y'_0$ si deve avere, per essere la $f(x, y)$ crescente con y,

$$y_0 + \sum_{x_0 y_0}^{x_1} h_n L_n \geqq y'_0 + \sum_{x_0 y'_0}^{x_1} h_n L_n,$$

onde:

$$\Phi(x, x_0, y_0) \geqq \Phi(x, x_0, y'_0).$$

Se ne deduce che la $\Phi(x, x_0, y_0)$ è crescente con y_0 e analogamente si prova che la differenza

$$\Phi(x, x_0, y_0) - \Phi(x, x_0, y'_0)$$

cresce col crescere della x.

Dall'essere la $\Phi(x, x_0, y_0)$ crescente con y_0 si deduce che supposti x e x_0 fissi e qualunque esiste il limite di $\Phi(x, x_0, y_0)$ per $y_0 = y'_0$; indichiamolo con $\psi(x)$. Questa funzione assume per $x = x_0$ il valore y'_0 di più la differenza $\Phi(x, x_0, y_0) - \psi(x)$ cresce in valore assoluto col crescere della x. Consideriamo il rapporto

$$\frac{\psi(x + h) - \psi(x)}{h},$$

se h è inferiore ad un numero positivo h_0 avremo che

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = \frac{\Phi(x+h, x_0, y_0) - \Phi(x, x_0, y_0)}{h} + \frac{2\varepsilon}{h},$$

ε essendo in valore assoluto inferiore alla differenza $\Phi(x + h_0 x_0, y_0) -$ $- \psi(x + h_0)$ ossia, se h_0 resta fisso, ε è una quantità tendente allo zero soltanto con $y_0 - y'_0$. Ma

$$f(x + \delta h, \Phi(x + \delta h, x_0, y_0)) = \frac{\Phi(x+h, x_0, y_0) - \Phi(x, x_0, y_0)}{h},$$

δ essendo un numero compreso fra 0 e 1, e per la continuità della $f(x, y)$ si avrà, (β tendendo allo zero con $y_0 - y'_0$ e h)

$$f(x + \delta h, \Phi(x + \delta h, x_0, y_0)) = f(x, \psi(x)) + \beta.$$

Ne segue che:

$$\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h} = f(x, \psi(x)) + \frac{2\varepsilon}{h} + \beta,$$

il che prova che la $\psi(x)$ è una funzione continua della x che ha in tutti i punti la derivata eguale a $f(x, \psi(x))$. Essa adunque verifica l'equazione differenziale data.

Ma la $\psi(x)$ è in ogni punto superiore o eguale a $\Phi(x_1, x_0, y'_0)$, dunque deve aversi

$$\psi(x) = \Phi(x, x_0, y'_0),$$

ciò che prova la continuità della funzione $\Phi(x, x_0, y_0)$ rispetto ad y_0.

Ciò premesso si prova subito che qualunque sia il punto $x_0 y_0$ interno al campo in questione è sempre possibile trovare un valore x''_1 inferiore ad x_0 tale che esista una funzione y della x che nell'intervallo (x_0, x''_1) verifichi la equazione differenziale data e nel punto, x_0 assuma il valore y_0.

Infatti se $y'_1 > y_0 + (x_0 - x''_1)\mathrm{M}$ e $y''_1 < y_0 - (x_0 - x''_1)\mathrm{M}$, x''_1 essendo inferiore ad x_0; purchè non si esca mai dal campo avremo;

$$y'_1 + \sum_{x''_1\, y'_1}^{x_0} h_n \mathrm{L}_n > y_0 > y''_1 + \sum_{x''_1\, y''_1}^{x_0} h_n \mathrm{L}_n,$$

onde

$$\Phi(x_0, x''_1, y'_1) > y_0 > \Phi(x_0, x''_1, y''_1);$$

per quanto dunque è stato detto esisterà una funzione

$$\Phi(x, x''_1, y'''_1)$$

y'''_1 essendo compreso fra y_1 e y''_1, che per $x = x_0$ assume il valore y_0 e verifica l'equazione differenziale data mentre è definita fra $x''_1 < x_0$ e x_0.

Analogamente operando, se la funzione $f(x, y)$ fosse decrescente rispetto ad y si troverebbe che *se in un campo a due dimensioni la funzione $f(x, y)$ è sempre crescente o sempre decrescente rispetto ad y, preso un punto arbitrario $x_0 y_0$ si può sempre trovare un intorno (x''_1, x'_1) del punto x_0 in cui è definita una funzione y della x che verifica l'equazione differenziale data e assume il valore y_0 per $x = x_0$.*

IV.

Consideriamo ora il caso di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Si abbiano le funzioni finite:

$$\begin{array}{l} f'\ (x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \\ f''\ (x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \end{array}$$

definite in un campo a $n + 1$ dimensioni di cui un punto interno sia il punto $x_0, y'_0, y''_0, \cdots, y_0^{(n)}$.

Consideriamo le somme

$$\sum_1^n h_r \mathrm{L}_r^{(p)} \quad , \quad \sum_1^n h_r \mathrm{L}_r^{(p)}$$

per tutti i valori di p da 1 ad n, con $\mathrm{L}_r^{(p)}$ e $l_r^{(p)}$ si intendano rispettivamente il limite superiore ed il limite inferiore dei valori della funzione $f^{(p)}$ nel campo a $(n + 1)$ dimensioni:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & , & x_0 + h_r \\ y'_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t l'_t - h_r \mathrm{M}' & , & y'_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t \mathrm{L}'_t + h_r \mathrm{M}' \\ y''_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t l''_t - h_r \mathrm{M}'' & , & y''_0 + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t \mathrm{L}''_t + h_r \mathrm{M}'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n)} + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t l_t^{(n)} - h_r \mathrm{M}^{(n)} & , & y_0^{(n)} + \sum_{1}^{r-1}{}_t h_t \mathrm{L}_t^{(n)} + h_r \mathrm{M}^{(n)}, \end{array}\right.$$

sia $h_1 + h_2 + \ldots + h_m = x_1 - x_0$ avendosi $x_1 > x_0$ ed $\mathrm{M}^{(p)}$ sia il limite superiore dei valori assoluti della $f^{(p)}$ in tutto il campo in cui questa funzione viene considerata. Si dovrà evidentemente ammettere che x_1 e $h_1, h_2, \cdots, h_m$ siano tali che non si abbia mai da escire dal campo assegnato alle funzioni che si considerano.

Analogamente a quanto venne trovato nel § III si ha ora

$$\sum_1^m{}_r h_r \mathrm{L}_r^{(p)} + k_m \delta > \sum_1^{m_1}{}_r h_{r,1} \mathrm{L}_{r,1}^{(p)},$$

in cui k_m è un numero che dipende soltanto da m quando le $h_{r,1}$ sono nuove divisioni dell'intervallo $(x_0 x_1)$ inferiori tutte a $\delta/2$ in cui δ è quantità minore delle più piccole delle h_r, ed $\mathrm{L}_{r,1}^{(p)}$ ha rispetto ad $h_{r,1}$ lo stesso significato che L_r rispetto a h_r.

Si ha dunque che le somme

$$\sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{L}_r^{(p)} \quad , \quad \sum_{1}^{m}{}_r h_r l_r^{(p)}$$

hanno per le h_r tendenti insieme allo zero limiti determinati e finiti che sono respettivamente il limite inferiore ed il limite superiore delle somme stesse per tutti i possibili valori delle h_r. Proprietà analoghe si hanno se $x_1 < x_0$.

Quando si abbia per tutti i valori di p

$$(1) \qquad 0 = \lim \sum_{1}^{m} h_r \mathrm{D}_r^{(p)} \quad \text{per} \quad h_1 = h_2 = \cdots = h_m = 0,$$

in cui

$$\mathrm{D}_r^{(p)} = \mathrm{L}_r^{(p)} - l_r^{(p)},$$

allora le somme

$$(2) \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{L}_r^{(p)} \quad , \quad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r l_r^{(p)} \quad , \quad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r f_r^{(p)}$$

in cui $f_r^{(p)}$ è un valore qualunque compreso fra $\mathrm{L}_r^{(p)}$ e $l_r^{(p)}$, tendono coll'avvicinarsi insieme allo zero delle h_r verso uno stesso limite. Questo limite lo indicheremo per brevità con

$$\int_{x_0 y'_0 y''_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}).$$

Reciprocamente si ha: *affinchè le tre somme* (2) *abbiano per le h_r tendenti insieme allo zero uno stesso limite è necessario che sia:*

$$\lim \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{D}_r^{(p)} = 0,$$

per qualunque valore di p.

Supponiamo verificate le condizioni (1) per tutti i valori di p. Si hanno subito le formule, valevoli per tutti i valori di p, se $x_1 > x_0$,

$$(3) \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{L}_r^{(p)} \geqq \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} \geqq y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r l_r^{(p)},$$

e se $x_1 < x_0$:

$$(3') \qquad y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{L}_r^{(p)} \leqq \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} \leqq y_0^{(p)} + \sum_{1}^{m}{}_r h_r l_r^{(p)};$$

quindi in valore assoluto:

$$(4) \qquad \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} - y_0^{(p)} - \sum_{1}^{m}{}_r h_r f_r^{(p)} \leqq \sum_{1}^{m}{}_r h_r \mathrm{D}_r^{(p)}.$$

Se $x_1 > x_2 > x_0$ oppure $x_1 < x_2 < x_0$, e per qualunque valore di p

$$y_2^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_2} f^{(p)},$$

allora si ha:

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} = \int_{x_2 y'_2 y''_2 \cdots y_2^{(n)}}^{x_1} f^{(p)} . \tag{5}$$

Sia $x_1 > x_0 > x_2$ e oltre alle relazioni (1) si verificano le altre:

$$\lim \sum_{1}^{m_1}{}_r\, h_{r,1}\, D_{r,1}^{(p)} = 0,$$

$h_{r,1}$ essendo gli intervalli in cui è diviso (x_0, x_2), allora

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)}$$

considerato come funzione della x definita nell'intervallo (x_2, x_1), posto che per $x = x_0$ assuma il valore $y_0^{(p)}$, è una funzione finita e continua che in ogni punto x_3 ammette per estremi oscillatori quantità comprese fra i limiti superiore e inferiore [19] della $f^{(p)}$ nel punto

$$x = x_3 \quad , \quad y_3^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_3} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Questi estremi oscillatori resultano funzioni atte alla integrazione.

Se la funzione $f^{(p)}$ è in tutti i punti del campo in cui è definita continua assolutamente, allora

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)}$$

ammette in tutti i punti x_3 una derivata che è il valore della $f^{(p)}$ nel punto

$$x = x_3 \quad , \quad y^{(p)} = \int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x_3} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Se quindi tutte le funzioni $f', \cdots, f^{(n)}$ sono nel campo in cui vengono definite continue assolutamente, allora le funzioni

$$\int_{x_0 y'_0 \cdots y_0^{(n)}}^{x} f^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

(19) Intenderemo, analogamente a quanto fu detto innanzi, per *limite superiore* di una funzione di n variabili in un punto il limite verso cui tendono i limiti superiori della funzione in un intorno a n dimensioni del punto che si considera, quando questi intorni decrescono indefinitamente. Questo limite esiste sempre ed è indipendente dal modo con cui gli intorni decrescono.

sono integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', \cdots, y^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

e per $x = x_0$ assumono i valori

$$y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n).$$

Nessun altro sistema di funzioni che assumono questi valori per $x = x_0$ può verificare il sistema differenziale.

Abbiamo dunque il teorema:

Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(p)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

le $f^{(p)}$ essendo funzioni finite e continue assolutamente in un campo a $(n+1)$ dimensioni nel cui interno si trova un punto

$$x = x_0 \quad , \quad y^{(p)} = y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n),$$

se esistono due valori x_1 e x_2 tali che

$$x_1 > x_0 > x_2,$$

e

$$\lim \sum_1^m {}_r\, h_r \, D_r^{(p)} = \lim \sum_1^{m_1} {}_r\, h_{r,1} \, D_{r,1}^{(p)} = 0$$

qualunque sia p, ($h_1, h_2, \cdots, h_m$ e $h_{1,1}, h_{2,1}, \cdots, h_{m,1}$ essendo gli intervalli in cui sono divisi gli altri (x_0, x_1), (x_0, x_2) e $D_r^{(p)}$ e $D_{r,1}^{(p)}$ avendo sempre il solito significato) esiste sempre un unico sistema di funzioni

$$y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x)$$

definite fra x_2 e x_1 che verificano il sistema di equazioni differenziali date e assumono rispettivamente i valori

$$y_0', y_0'', \cdots, y_0^{(n)}$$

per $x = x_0$.

Le condizioni che abbiamo ora imposto per la esistenza degli integrali delle equazioni differenziali sono verificate per qualunque punto $x = x_0$, $y^{(p)} = y_0^{(p)}$, $(p = 1, 2, \cdots, n)$ quando gli estremi oscillatori delle funzioni $f^{(n)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)})$ rispetto ad $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ sono finite ed inferiori ad una data quantità A.

Infatti sia δ una quantità tale che due valori di una qualunque delle $f^{(p)}$ in due punti distanti fra loro di δ o meno di δ sia minore di σ. Prendiamo $h_1 = h_2 = h_3, \cdots, = h_n = \delta$, avremo analogamente a quanto venne fatto nel § III, se μ è una quantità maggiore di tutte le $M^{(p)}$,

$$\sum_1^s {}_r\, D_r^{(p)} < \left[\sum_1^{s-1} {}_r\, D_r^{(p)} + 2\mu \right] An\delta + \sigma + \sum_1^{s-1} {}_r\, D_r^{(p)},$$

quindi:

$$\sum_{1}^{s}{}_r D_r^{(p)} < \sum_{1}^{s-1} D_r^{(p)} [1 + An\delta] + \varepsilon ,$$

posto $\varepsilon = 2\,\mu A n \delta + \sigma$.

Per conseguenza:

$$\sum_{1}^{m}{}_r h_r D_r^{(p)} < \frac{\varepsilon}{A} (e^{An(x_1 - x_0)} - 1) ,$$

il che prova che:

$$\lim \sum_{1}^{m}{}_r h_r D_r^{(p)} = 0 .$$

Analogamente si dimostra che:

$$\lim \sum_{1}^{m_1}{}_r h_{r,1} D_{r,1}^{(p)} = 0 .$$

Se dunque chiamiamo [20] *integrale generale di un sistema di equazioni differenziali*

$$\frac{dy^{(p)}}{dx} = f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

un sistema di funzioni:

$$y^{(p)} = y^{(p)}(x, x_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n)}) \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

tali che per ogni sistema di valori di $x_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n)}$ *che definiscono un punto del campo* C, *resultino le* $y^{(p)}$ *funzioni della* x *definite in un intervallo che comprende il punto* x_0, *le quali verifichino il sistema dato e per* $x = x_0$ *assumano i valori*

$$y_0^{(p)} \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

avremo che *se le*

$$f^{(p)}(x, y', y'', \cdots, y^{(n)})$$

sono funzioni finite e continue assolutamente e hanno gli estremi oscillatori rispetto alle $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ *inferiori ad un numero finito, esiste sempre un unico sistema di integrali generali del sistema proposto* [21].

Analogamente a quanto abbiamo ora fatto possono generalizzarsi alcune altre delle proprietà trovate per le equazioni a due variabili.

Pisa, 21 aprile 1881.

(20) Vedi §, III.

(21) Vedi LIPSCHITZ, op. cit.

IV.

SOPRA ALCUNE CONDIZIONI CARATTERISTICHE DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE COMPLESSA (*)

« Annali di Matematica pura ed applicata », ser. 2, vol. XI, 1882, pp. 1–55.

Nella presente Nota viene risoluto il problema della determinazione di funzioni di variabile complessa definite, sotto certe condizioni al contorno in campi finiti. Queste soluzioni portano alla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ con date condizioni ai limiti, come è da prevedersi a causa del legame che passa fra i due problemi. È da notare come le formule trovate risolvono altrettante questioni di fisica relative alla distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti.

I.

È facile dimostrare che è sempre possibile costruire nell'interno di un circolo una ed una sola funzione di variabile complessa la quale verifichi le seguenti condizioni:

1° si mantenga finita in ogni campo situato internamente al cerchio in questione e in tutti i punti interni al cerchio sia monodroma e continua;

2° al contorno la sua parte reale (oppure la sua parte immaginaria) assuma valori dati arbitrariamente, colla condizione che anche al contorno essa si mantenga sempre finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti o un gruppo infinito di punti di prima specie; sarà per conseguenza necessario che i valori dati al contorno costituiscano una funzione finita e continua dell'arco del contorno, esclusi al più i punti singolari in questione;

3° in questi punti singolari la funzione di variabile complessa possa essere discontinua e in vicinanza di essi possa anche crescere indefinitamente, colla condizione peraltro che in un intorno sufficientemente piccolo del punto d'infinito la parte reale (oppure la parte immaginaria) moltiplicata per una potenza, inferiore all'unità, della distanza dal punto d'infinito si mantenga sempre inferiore ad un numero finito; per conseguenza i valori dati al contorno dovranno costituire una funzione dell'arco, che diviene infinita soltanto in un numero finito di punti di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo;

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

4° in un punto qualunque del campo la sua parte immaginaria (oppure la sua parte reale) assuma un dato valore arbitrario.

Ammetteremo come proprietà note le seguenti: Se la funzione $f(\theta)$ definita fra o e 2π, è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione:

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\theta$$

in cui r e α sono le coordinate polari di un punto del piano, è finita continua e verifica l'equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$ in ogni punto interno al cerchio di raggio R che ha il centro all'origine ed è continua nel punto del contorno di questo cerchio di coordinate R e θ_0 se la $f(\theta)$ è continua nel punto θ_0.

Supposta l'esistenza di una funzione u finita e continua e che verifica l'equazione $\Delta^2 u = 0$ in tutti i punti interni ad un cerchio, che diviene infinita di ordine inferiore ad un numero minore di 1 soltanto avvicinandosi ad un numero finito di punti del contorno ed è discontinua in un gruppo di punti di prima specie del contorno, mentre in tutti gli altri è finita e continua e assume dati valori, questa funzione è unica.

Ciò premesso sia la funzione $f(\theta)$ definita fra o e 2π, infinita al più in un numero finito di punti di un ordine inferiore a $\mu < 1$ e discontinua al più in un gruppo di punti di prima specie.

Consideriamo la funzione

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\theta$$

e determiniamo il modo con cui si comporta avvicinandosi ad un punto di infinito (R, α_1) del contorno.

È evidentemente possibile determinare il numero $\varepsilon < \pi/2$ e minore anche del minimo arco che separa due punti di infinito in modo che:

$$\left[\int_0^{\alpha_1 - \varepsilon} + \int_{\alpha_1 + \varepsilon}^{2\pi}\right]\left(f(\theta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}d\theta\right)$$

si mantenga inferiore in valore assoluto ad un numero finito M positivo per $\alpha_1 + \varepsilon/2 > \alpha > \alpha_1 - \varepsilon/2$.

Ora la funzione

$$\rho^{-\mu}\cos\mu\omega = F(r, \alpha)$$

in cui ρ e ω sono le coordinate polari riferite al punto (R, α_1) come origine e al raggio che passa per questo punto come asse polare, è finita continua e verifica l'equazione $\Delta^2 F = 0$ in tutti i punti del cerchio in questione e del contorno di esso, escluso il punto (R, α_1) in cui diviene infinita di ordine μ.

Per θ entro l'intervallo $(\alpha_1 - \varepsilon, \alpha_1 + \varepsilon)$

$$\frac{f(\theta)}{F(R, \theta)}$$

non supera in valore assoluto un numero finito positivo N; quindi in valore assoluto si ha:

$$\int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} f(\theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

$$= \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} \frac{f(\theta)}{F(R, \theta)} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

$$< N \int_{\alpha_1-\varepsilon}^{\alpha_1+\varepsilon} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ora esiste evidentemente un numero finito positivo P tale che in valore assoluto si ha:

$$\left[\int_0^{\alpha_1-\varepsilon} + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{2\pi}\right] \left(F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta\right) < P.$$

Quindi se $\alpha_1 + \varepsilon/2 > \alpha > \alpha_1 - \varepsilon/2$ in valore assoluto abbiamo:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + \frac{N}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ma per i lemmi enunciati deve aversi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(R, \theta) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta = F(r, \alpha)$$

per conseguenza in valore assoluto:

$$u(r, \alpha) < \frac{M}{2\pi} + \frac{NP}{2\pi} + NF(r, \alpha)$$

il che prova che nel punto (R, α_1) la $u(r, \alpha)$ è infinita di ordine non superiore a μ. Ciò dimostra evidentemente il teorema enunciato da principio.

Questo teorema si estende facilmente in molti casi a quei campi i quali ammettono una rappresentazione conforme nell'interno del cerchio.

II.

Per uno qualunque di tali campi è pure una condizione caratteristica di una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in ogni punto interno al campo e al contorno pure sempre finita e continua (esclusi al più un numero finito di punti nei quali essa diviene infinita, di un ordine inferiore ad $1/2$ meno un numero positivo, rispetto alla inversa delle distanze dal punto d'infinito stesso, ed esclusi pure al più un gruppo di punti di prima specie nei quali essa può essere discontinua) la conoscenza in una porzione del contorno della sua parte reale e nella rimanente della sua parte immaginaria [1].

Supponiamo infatti che in tutti i punti interni ad un dato campo (che si può rappresentare conformemente in un circolo) le due funzioni di variabile complessa

$$w = u + iv \quad , \quad w_1 = u_1 + iv_1$$

siano finite monodrome e continue.

Ammettiamo che la u e la u_1 in una porzione del contorno (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) siano finite e continue ed assumano gli stessi valori; nella porzione rimanente del contorno la v e la v_1 (esclusi sempre un numero finito di punti o un gruppo di prima specie) siano finite continue e prendano gli stessi valori.

Ammettiamo che se le w e w_1 divengono infinite lo siano in un numero finito di punti del contorno e moltiplicate per le distanze dai punti d'infinito elevate alla potenza $1/2 - \mu$ $(\mu > 0)$ rimangano sempre finite e inferiori ad un numero dato.

Consideriamo la funzione:

$$w_2 = (w - w_1)^2 = (u - u_1)^2 - (v - v_1)^2 + 2i(u - u_1)(v - v_1)$$

essa sarà finita monodroma e continua in tutti i punti nell'interno del campo; al contorno la sua parte immaginaria sarà (esclusi al più un numero finito o un gruppo di prima specie di punti) finita continua ed eguale a zero; inoltre diventerà infinita al più in un numero finito di punti del contorno di un ordine, rispetto alle inverse delle distanze da questi punti, inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Ne segue che w_2 non potrà essere che costante in tutto il campo e quindi come si vede subito eguale allo zero. Dunque in tutti i punti del campo sarà

$$w = w_1 .$$

(1) Da un esempio che dà il signor SCHWARZ, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, « Journal f. reine u. angew. Math. », t. 74, 1872, p. 237, si vede subito che può costruirsi in un cerchio una funzione di variabile complessa non costante che in un dato punto abbia per la parte immaginaria un dato valore e abbia la parte reale nulla lungo tutto il contorno, purchè in un punto di questo la funzione divenga infinita di 1^o ordine. La funzione $\sqrt{\frac{z - e^{i\theta}}{z - 1}}\, e^{-i\frac{\theta}{4}}$ ci offre l'esempio d'una funzione che ha in una porzione del contorno del circolo di raggio 1 la parte reale nulla, nella porzione rimanente nulla la parte immaginaria e diventa infinita soltanto nel punto $z = 1$ di ordine $1/2$, mentre in tutti i punti interni si mantiene monodroma finita e continua.

Si vede facilmente che questa stessa proprietà sarebbe verificata qualunque fosse il campo (anche molteplicemente connesso) e comunque fossero le funzioni date al contorno, purchè si avesse che i moduli di w e w_1 si mantenessero in tutto il campo sempre inferiori ad un numero finito e si avesse che la u e la u_1 si comportassero egualmente coll'avvicinarsi a tutti i punti di una porzione del contorno, e la v e la v_1 si comportassero pure egualmente avvicinandosi alla porzione rimanente del contorno.

III.

Ammessa l'esistenza di una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z avente il modulo sempre inferiore ad un numero finito, monodroma e continua in tutti i punti di un campo semplicemente connesso S che supporremo per semplicità avere il contorno s costituito da un numero finito di pezzi di curve analitiche (2) e ammesso che la w possieda la derivata prima finita e generalmente continua anche al contorno di S, cerchiamo di determinare la w conoscendo in un pezzo A del contorno la u e nel pezzo B rimanente la v.

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme del campo S sopra il quarto di piano $\zeta = \xi + i\eta$ dalla parte delle ξ e η positive in modo che, Ω essendo l'origine degli assi ξ e η, al pezzo del contorno A corrisponda l'asse $\eta_{+\infty}\Omega$ e al pezzo B l'asse $\Omega\xi_{+\infty}$. Questa rappresentazione conforme si eseguisca mediante la funzione di variabile complessa

$$\zeta = \zeta(z)$$

che è in tutti i punti del campo delle z monodroma finita e continua e di cui l'inversa

$$z = z(\zeta)$$

è pure in tutti i punti del quarto di piano monodroma finita e continua e al contorno possiede una derivata finita e generalmente continua.

Della funzione

$$w[z(\zeta)]$$

definita come funzione monodroma finita e continua in tutti i punti del quarto di piano ζ e che ammette al contorno una derivata finita e generalmente continua si conosce il valore della parte reale

$$u[s(\eta)]$$

lungo l'asse delle η, e il valore della parte immaginaria

$$v[s(\xi)]$$

(2) Vedi SCHWARZ, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

unter vorgeschriebenen Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen. «Monatsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin», October 1870.

lungo l'asse delle ξ; conosciamo quindi al contorno, lungo l'asse delle η:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{du}{ds}\,\frac{ds}{d\eta}$$

e lungo l'asse delle ξ;

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{d\xi}.$$

Ma $\partial u/\partial \eta$ è la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i\frac{dw}{d\zeta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + i\,\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

quindi conosciamo di questa funzione il valore della parte reale lungo il contorno del quarto di piano, dato come funzione generalmente continua dell'arco del contorno stesso. Poichè ora si sa eseguire la rappresentazione conforme del quarto di piano nel circolo, potremo determinare il valore di $i\,dw/d\zeta$ in ogni punto del quarto di piano a meno di una costante additiva. Il valore di questa costante dovrà scegliersi in modo che $i\,dw/d\zeta$ si annulli nel punto $\zeta = \infty$ perchè abbiamo supposto che la w sia sempre finita. Determinato così il $dw/d\zeta$ si otterrà con una quadratura il $w(\zeta)$ e quindi la funzione richiesta $w\,[\zeta\,(z)]$.

IV.

Applichiamo questo metodo al caso in cui il campo S sia un circolo di raggio 1. Per potere applicare il metodo generale che è stato indicato, alle funzioni date u e v dovremo imporre le seguenti condizioni:

1° che esista una funzione di variabile complessa che verifica alle condizioni volute al contorno e nell'interno del cerchio;

2° che le due funzioni date al contorno siano continue ed ammettano rispetto all'arco del contorno una derivata finita e generalmente continua.

Risolveremo il problema sotto queste due ipotesi; però trovata la formula risolutiva determineremo direttamente le proprietà della funzione di variabile complessa che risulta senza fare alcuna ipotesi sopra i valori dati di u e di v e così verranno a togliersi la maggior parte delle condizioni imposte alle u e alle v stesse.

La formula che dà la rappresentazione conforme del circolo di raggio 1 situato nel piano delle z sul mezzo piano situato dalla parte delle Y positive nel piano delle Z è

$$z = \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}$$

in cui Z_0 e Z_0' sono valori complessi coniugati e avendosi

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

è

$$Y_0 > 0\ ^{(3)}.$$

(3) Vedi CHRISTOFFEL, *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una superficie*. « Annali di Matematica », ser. II, t. 1, p. 94.

La rappresentazione conforme del mezzo piano delle Z sul quarto di piano delle ζ situato dalla parte delle ξ e η positive viene data da

$$\zeta = \sqrt{Z},$$

quindi si ha:

$$\zeta = \sqrt{\frac{z Z'_0 - Z_0}{z - 1}}$$

per la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano.

Sia $\theta = AB$ l'arco del circolo nei punti del quale è conosciuta la u, prendiamo per asse delle x la congiungente il centro col punto estremo A, (l'arco AB essendo contato in senso positivo); siano ρ e ω le coordinate polari di un punto del piano del circolo quando si prenda per origine il centro del circolo e l'asse x per asse polare. Pel modo col quale deve farsi nel nostro caso la rappresentazione conforme del circolo sul quarto di piano, le $Z_0 = e^{i\lambda}$ e $Z'_0 = e^{-i\lambda}$ si determineranno mediante la relazione:

$$e^{i\theta} Z'_0 - Z_0 = 0,$$

donde:

$$Z_0 = e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad Z'_0 = e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

Se ne deduce che al punto del contorno del circolo $z = e^{i\omega}$ corrisponde il valore di ζ:

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}},$$

quindi per $z = e^{i\omega}$ e $\omega < \theta$ si ha:

$$\xi = 0, \qquad \eta = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}},$$

per $z = e^{i\omega}$ e $\omega > \theta$ si ha:

$$\xi = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}, \qquad \eta = 0.$$

Di qui si deduce inversamente che per $\zeta = i\eta$,

$$z = e^{i\left(2 \operatorname{arco\ tang} \frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos\frac{\theta}{2}}\right)},$$

e per $\zeta = \xi$,

$$z = e^{i\left(2 \text{ arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2}\right)}.$$

Della $w(z)$, conosciamo $u(\omega)$ per $\omega < \theta$ e $v(\omega)$ per $\omega > \theta$ quindi della $w[z(\zeta)]$ conosciamo lungo l'asse η la parte reale

$$u\left(2 \text{ arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}}\right)$$

e lungo l'asse ξ il coefficiente della parte immaginaria

$$v\left(2 \text{ arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2}\right),$$

quindi lungo l'asse delle η:

$$\frac{du}{d\eta} = -4u'\left(2 \text{ arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}}\right) \frac{\eta \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \left(\eta^2 + \cos \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

e lungo l'asse delle ξ

$$\frac{dv}{d\xi} = -\frac{du}{d\eta} = 4v'\left(2 \text{ arco tang} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2}\right) \frac{\xi \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} + \left(\cos \frac{\theta}{2} - \xi^2\right)^2}.$$

Poniamo

$$i \frac{dw}{d\zeta} = w_1(\zeta)$$

e consideriamo la funzione

$$w_1[\zeta(z)].$$

Il valore della parte reale u_1 di questa funzione al contorno del circolo sarà:

per $\omega < \theta$

$$u_1(\omega) = -4u'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$$

e per $\omega > \theta$

$$u_1(\omega) = -4v'(\omega) \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) \operatorname{sen}^3 \frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}};$$

quindi essendo z un punto interno al circolo:

$$w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}\,d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}\,d\omega + C$$

in cui C è una costante (4), e poichè per $z = 1$ si ha $\zeta = \infty$, così:

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\omega}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\,d\omega + \frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\cdot\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\,d\omega,$$

onde:

$$i\frac{dw}{d\zeta} = w_1[\zeta(z)] = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)d\omega.$$

Ma si ha:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{i\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{4}}}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)^3}},$$

quindi:

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}^3\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)^3}}\,d\omega$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_\theta^{2\pi} v'(\omega)\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}^3\frac{\omega}{2}}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\left(\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}-\frac{e^{i\omega}+1}{e^{i\omega}-1}\right)\frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}\,d\omega$$

e integrando:

$$w = \frac{i}{\pi}\int_0^\theta u'(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v'(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega + C_1$$

(4) SCHWARZ, *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *für die Fläche eines Kreises*, XV Jahrgange der Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, p. 123.

in cui C_1 è una costante. Eseguendo una integrazione per parti si trova, C_2 essendo una costante,

$$w = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta u(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega$$

$$+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} v(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega + C_1 + C_2 .$$

V.

In ordine a quello che abbiamo detto sopra, studiamo, senza occuparci del modo con cui siamo giunti a determinarla, le proprietà della funzione della variabile complessa z:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} w(z) = &-\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\theta})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega \\ &+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega \end{aligned}\right.$$

in cui $f(\omega)$ e $f_1(\omega)$ sono funzioni reali della variabile reale ω, finite e atte alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}$, fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\right]_{z=e^{i\alpha}} = +2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{(\theta-\alpha)}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)},\ (\theta > \alpha > 0).$$

Si riconosce subito che la w è una funzione finita monodroma e continua in tutti i punti interni al cerchio di raggio 1, e che almeno quando la f e la f_1 sono continue ed hanno la derivata finita e atta alla integrazione, verifica certamente alla condizione di mantenersi finita anche avvicinandosi ai punti del contorno.

Per vedere le proprietà della funzione w quando la z si avvicina al contorno del circolo ci serviremo di un teorema del sig. DU BOIS-REYMOND (5) relativo agli integrali definiti che sono atti a rappresentare analiticamente una funzione (6).

(5) Vedi DU BOIS-REYMOND, « Journal f. reine u. angew. Math. », vol. 79, 1875, pp. 38-66, e prof. ULISSE DINI, *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche di una funzione di variabile reale*, p. 41.

(6) Faccio notare che il metodo che verrà ora adoperato potrebbe servire utilmente anche in altre analoghe verificazioni di proprietà ai limiti di funzioni note.

Chiamiamo rispettivamente con R (A) e I (A) la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria del numero complesso A. Avremo ponendo:

$$z = re^{i\alpha} \qquad (r < 1)$$

che:

$$R\left(\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z - e^{i\omega}}\right) = \frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{r^2+1-2r\cos(\alpha-\omega)},$$

quindi:

$$R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] = \frac{1}{\sqrt{r}}\operatorname{arco\ tang}\frac{2\sqrt{r}\operatorname{sen}\left(\frac{\omega_1-\alpha}{2}\right)}{r-1}.$$

Ne segue che supponendo

$$\omega_1 > \alpha \quad \text{e} \quad \omega_0 < \alpha$$

si ottiene:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\alpha}^{\omega_1} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] = \lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_0}^{\alpha} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\omega_2}^{\omega_3} \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] = 0$$

se ω_2 e ω_3 sono ambedue maggiori oppure ambedue minori di α.

Inoltre si ha che

$$\frac{(r-1)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{r^2+1-2r\cos(\omega-\alpha)}$$

si mantiene sempre negativo finchè si ha in valore assoluto

$$\omega - \alpha < \pi.$$

Di qui si deduce immediatamente supponendo $\theta > \alpha > 0$ e supponendo inoltre che nel punto α la $f(\omega)$ non abbia discontinuità di seconda specie:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_0^{\theta} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}\,\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}.$$

Di più si ha in valore assoluto

$$I\left[\int_0^{\theta} \frac{f(\omega)}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right] < M_0\log(1-r) + M,$$

essendo M e M_0 numeri finiti, e:

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = 2\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}},$$

quindi avremo per

$$\theta > \alpha > 0$$

che:

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = \frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2}.$$

Analogamente si trova supponendo $2\pi > \alpha > \theta$:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0,$$

$$I\left[\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\omega}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\right] < M_1$$

in valore assoluto, M_1 essendo un numero finito, e poichè in questo caso

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = -2i\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1} I\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0$$

per $2\pi > \alpha > \theta$.

Se $\theta > \alpha > 0$ si ha:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0$$

$$I\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] < M_2$$

in valore assoluto, M_2 essendo un numero finito; quindi:

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{z-e^{i\theta})(z-1)}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}d\omega\right] = 0.$$

Se $2\pi > \alpha > \theta$ e α non è un punto di discontinuità di seconda specie della $v(\omega)$ si trova:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}\,\frac{f_1(\alpha+0)+f_1(\alpha-0)}{\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}}$$

$$I\left[\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega\right] < M_3 \log(1-r)+M_4$$

in valore assoluto, M_3 e M_4 essendo finiti, e siccome

$$\lim_{r=1} \frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}} = -2i\sqrt{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}$$

così sarà:

$$\lim_{r=1} I\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega) \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega\right] = \frac{f_1(\alpha+0)+f_1(\alpha-0)}{2}\,.$$

La $w(z)$ data dalla (1) è dunque una funzione che in ogni porzione tutta interna al circolo che si considera si mantiene sempre finita monodroma e continua; avvicinandosi ai punti $(R\,,\,\alpha)$ dell'arco θ del contorno nei quali la $f(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie (gli estremi esclusi) secondo i raggi vettori che vanno ai punti stessi, la parte reale della funzione $w(z)$ tende verso la media dei valori del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $u(\omega)$ nel punto α; avvicinandosi ai punti $(R\,,\,\alpha_1)$ della porzione rimanente del contorno nei quali non si hanno discontinuità di seconda specie per la $f_1(\omega)$ (gli estremi esclusi), sempre nella direzione dei raggi, il coefficiente della parte immaginaria di $w(z)$ tende verso la media del limite a destra e di quello a sinistra dei valori della $f_1(\omega)$ nel punto α_1.

Si riconosce dunque così il modo di comportarsi della $w(z)$ in tutti i punti del contorno, esclusi quelli in cui la $f(\omega)$ o la $f_1(\omega)$ hanno discontinuità di seconda specie e gli estremi dell'arco θ.

Si noti ora, come può verificarsi applicando le considerazioni precedenti, che in tutti i punti dell'intervallo $(\lambda\,,\,\mu)$ interno all'altro $(\lambda_1\,,\,\mu_1)$ $(\theta > \mu_1 > \lambda_1 > 0)$ in cui la $f(\omega)$ si mantiene sempre continua, la parte reale della $w(z)$, avvicinandosi la z ai punti del contorno lungo la normale, tende con continuità ed in egual grado verso i valori della $f(\omega)$. Se ne conclude che la parte reale della $w(z)$ è continua assolutamente nei punti $e^{i\alpha}$ $(\mu > \alpha > \lambda)$ del contorno. Una analoga proprietà si ha per la parte immaginaria della $w(z)$. Si ha dunque che, quando la $f(\omega)$ e la $f_1(\omega)$ sono continue ed ammettono la derivata finita e atta alla integrazione, può dirsi che la $w(z)$ data dalla (1) è l'unica funzione che si mantenga finita e abbia la parte reale e la parte immaginaria che prendano al contorno con continuità, rispettivamente i valori $f(\omega)$ e $f_1(\omega)$, l'una fra 0 e θ, l'altra fra θ e 2π.

VI.

Consideriamo ora la funzione:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} w_1(z) = &-\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta-\omega}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega \\ &-\frac{1}{\pi}\int_\theta^{2\pi}\varphi(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega + Ci\end{aligned}\right.$$

in cui $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni reali dell'argomento reale ω finite e atte alla integrazione, e C è una costante reale. I valori dei radicali saranno fissati per mezzo della stessa relazione che ha servito allo stesso scopo nel paragrafo precedente.

La $w_1(z)$ è sempre finita monodroma e continua in ogni punto interno al cerchio di raggio 1.

Poichè si ha identicamente:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\log\frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}+\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}}-\sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\,d\omega$$

$$=\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^\omega\varphi(\omega)\,d\omega\right)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega + i\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\,d\omega,$$

si vede che la parte reale della $w_1(z)$ coll'avvicinarsi della $z = re^{i\alpha}$ ad un punto del contorno $(1, \alpha_1)$, $\theta > \alpha_1 > 0$ [la $f(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α_1] tende verso

$$\frac{f(\alpha_1+0)+f(\alpha_1-0)}{2}.$$

Ora, il campo di variabilità della z può evidentemente essere esteso oltre il circolo di raggio 1 senza che la funzione

$$w_2(z) = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\omega-\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}}}\,d\omega$$

cessi di mantenersi finita monodroma e continua in tutti i punti interni al campo, purchè seguiti ad essere un pezzo del contorno di esso l'arco $(0, \theta)$ del circolo di raggio 1; si ha quindi, poichè la $w_2(z)$ è reale nei punti dell'arco $(\theta, 2\pi)$ del circolo di raggio 1, per $2\pi > \alpha > \theta$

$$\left(\frac{\partial R[w_2(z)]}{\partial r}\right)_{r=1} = 0 .$$

Ma per $r < 1$:

$$\frac{\partial w_3(z)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{\pi}\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \log \frac{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} + \sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}{\sqrt{\frac{z-e^{i\theta}}{z-1}} - \sqrt{\frac{e^{i\omega}-e^{i\theta}}{e^{i\omega}-1}}}\, d\omega\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} i \frac{1}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} \int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{\theta}{4}+\frac{\omega}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega$$

e si ha, essendo $2\pi > \alpha > \theta$, [la $\varphi(\omega)$ non avendo discontinuità di seconda specie nel punto α]

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right]$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\varphi(\alpha+0)+\varphi(\alpha-0)] \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}\,;$$

$$I\left[\int_\theta^{2\pi} \varphi(\omega) \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\omega-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega}\; \frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] < P\log(1-r) + Q$$

in valore assoluto, P e Q essendo numeri finiti, e finalmente:

$$\lim_{r=1} \frac{e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\theta}{4}\right)}}{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}} = \frac{1}{-2i\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\theta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha}},$$

per conseguenza essendo $2\pi > \alpha > \theta$

$$\lim_{r=1} \frac{\partial}{\partial r}\{R[w_1(z)]\} = \lim_{r=1} \frac{\partial}{\partial r}\{R[w_3(z)]\} = \frac{\varphi(\alpha+0)+\varphi(\alpha-0)}{2}.$$

Si ha dunque, come facilmente si poteva prevedere, che la formula (2) ci dà una soluzione del problema di determinare una funzione di variabile complessa finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, di cui è noto il valore della parte reale in una porzione del contorno e nell'altra è noto il valore della derivata rispetto alla normale al contorno della parte reale.

Col separare la parte reale dalla parte immaginaria nella (2) si ottiene la soluzione del problema di determinare una funzione U di due variabili reali finita monodroma e continua in tutti i punti interni ad un cerchio, che verifica l'equazione differenziale:

$$\Delta^2 U = 0,$$

quando si conosca in una porzione del contorno il valore della funzione e nella porzione rimanente il valore della sua derivata rispetto alla normale al contorno.

Col fare nella (2) $\theta = 2\pi$ si trovano le note formule della teoria della integrazione della equazione $\Delta^2 U = 0$ (7).

VII.

La formula trovata (1) ci fornisce immediatamente per analogia la soluzione di un problema più generale di quello risoluto.

Suppongasi che di una funzione della variabile complessa z, definita come funzione finita monodroma e continua in tutti i punti di un circolo di raggio 1 si conosca il valore della parte reale u data come funzione dell'arco ω del contorno dal punto 0 al punto θ_1, il valore del coefficiente v della parte immaginaria dal punto θ_1 al punto θ_2, quello della parte reale dal punto θ_2 al punto θ_3, ecc. Finalmente quello del coefficiente della parte immaginaria dal punto θ_{2k-1} al punto 2π; si tratta di determinare la funzione di variabile complessa (*).

Consideriamo la funzione:

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
&w(z) = \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k}{}_s (z - e^{i\theta_s})}\; \sum_0^{k-1}{}_p \left\{ \int_{\theta_{2p}}^{2p+1} u_p(\omega) \frac{(-1)^p [i(1-z)]^{1-k} e^{i\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{(z - e^{i\omega})\sqrt{\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}}\, d\omega \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} v_p(\omega) \frac{(-1)^p \{i(1-z)\}^{1-k} e^{i\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{(z - e^{i\omega})\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s - \omega}{2}\right)}}\, d\omega \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

(7) Vedi SCHWARZ, terza opera citata.

(*) La formula (3) del testo è stata rettificata, tenendo conto di correzioni autografe dell'A. Va rilevato che, in questo paragrafo, l'A. non considera alcuna limitazione dell'ordine delle singolarità che $w(z)$ può presentare sul contorno del cerchio. D'altra parte non esamina il comportamento della funzione $w(z)$ nell'intorno dei punti θ_s. Quando si limita l'ordine di queste singolarità (per esempio, come al principio del paragrafo II, per ottenere il teorema di unicità) il problema posto (per $k > 1$) non ammette, in generale, soluzioni, in quanto le u e le v non possono essere scelte ad arbitrio. Ciò è stato notato da H. A. SCHWARZ nella sua recensione di questa Memoria (« J. ü. Fortschritte der Math. », vol. XV, 1883). A. SIGNORINI ha trattato completamente la questione ed ha ottenuto le relazioni, cui devono soddisfare le u e le v date. Cfr. « Ann. di Mat. », ser. 3, vol. XXV, 1916, p. 253. [N.d.R.].

in cui $\theta_0=0$, $\theta_{2k}=2\pi$, $u_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p} e θ_{2p+1} atta alla integrazione e $v_p(\omega)$ è una funzione definita fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} pure atta alla integrazione. Per valore della espressione $\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z-e^{i\theta_s})}$ fisseremo quello definito dalla relazione

$$\left[\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k} (z-e^{i\theta_s})}\right]_{z=e^{i\alpha}} = +2^k \sqrt{\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}\, e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha + \frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)} \quad (\theta_1 > \alpha > 0).$$

La $w(z)$ è una funzione di z monodroma finita e continua in ogni porzione tutta interna al circolo di raggio 1; vediamo come si comporta al contorno.

Si ha analogamente a quanto venne trovato precedentemente supponendo $z = re^{i\alpha}$ $(r<1)$

$$R\left[\int_\alpha^{\theta'} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] = r^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arco\,tang}\left[\frac{2r^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}{r-1}\right]$$

e quindi se $\theta' > \alpha > \theta''$

$$\lim_{r=1} R\left[\int_\alpha^{\theta'} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] = \lim_{r=1} R\left[\int_{\theta''}^{\alpha} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza se θ''' e θ^{IV} sono ambedue minori o ambedue maggiori di α

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\theta'''}^{\theta^{\mathrm{IV}}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] = 0.$$

Di più è da osservare che

$$R\left[\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\right] = \frac{(r-1)\cos\frac{1}{2}(\omega-\alpha)}{r^2+1-2r\cos(\omega-\alpha)},$$

espressione che in valore assoluto, se $\omega-\alpha<\pi$, è sempre negativa.

Ciò premesso si ha subito, poichè:

$$\prod_1^{2k}{}_s \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right) > 0$$

per ω compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1}, che:

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\, d\omega\right] = -\frac{\pi}{2}\, \frac{u_p(\alpha+0)+u_p(\alpha-0)}{\sqrt{\prod_1^{2k}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}} \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\alpha}{2}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p} e θ_{2p+1} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $u_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1} R\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\,\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]=0$$

se il punto α non è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ né coincide cogli estremi di questo.

Si ha inoltre in valore assoluto:

$$I\left[\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}} \frac{u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\,\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]<S_\alpha\log(1-r)+T_\alpha$$

S_α e T_α essendo numeri positivi finiti per tutti i valori di α diversi da θ_{2p} e θ_{2p+1} qualunque sia il valore di r.

Ora se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$, si ha

$$\lim_{r=1}\frac{\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}=(-1)^q\,2^k\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)},$$

mentre se α è compreso in un intervallo della forma $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ si ha invece

$$\lim_{r=1}\frac{\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}}{e^{i\left(\frac{k}{2}\alpha+\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}=-i(-1)^q\,2^k\sqrt{-\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}.$$

Ne segue che:

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}}\frac{(-1)^p[i(z-1)]^{1-k}u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\,\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\right.$$

$$=\frac{u_p(\alpha+0)+u_p(\alpha-0)}{2}$$

se α è compreso nell'intervallo $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la $u_p(\omega)$;

$$\lim_{r=1} R\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\,\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}\,d\omega\right]$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ $q \gtrless p$; e

$$\mathrm{n\,I}_{=1}\left[-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p}}^{\theta_{2p+1}}\frac{(-1)^p[i(1-z]^{1-k}u_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

se α è un punto dell'intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ $(q \gtreqless p$, esclusi i punti θ_{2p} e $\theta_{2p+1})$.

Analogamente si trova poichè:

$$-\prod_1^{2k}{}_s\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)>0,$$

per ω compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2}, che:

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=-\frac{\pi}{2}\frac{v_p(\alpha+0)+v_p(\alpha-0)}{\sqrt{-\prod_1^{2k}\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\alpha}{2}\right)}}\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}$$

se α è compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} (gli estremi esclusi) e non è un punto di discontinuità di seconda specie per la funzione $v_p(\omega)$, mentre

$$\lim_{r=1}\mathrm{R}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

se α è un punto esterno all'intervallo $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ e non coincide cogli estremi di questo. Di più si ha in valore assoluto

$$\mathrm{I}\left[\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\frac{1}{2}(\omega+\alpha)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]<\mathrm{S}'_\alpha\log(1-r)+\mathrm{T}'_\alpha$$

S'_α e T'_α essendo numeri finiti positivi per qualunque valore di r, essendo α differente da θ_{2p+1} e θ_{2p+2}. Ne segue che:

$$\mathrm{n\,I}_{=1}\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}{}_s(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]$$

$$=\frac{v_p(\alpha+0)+v_p(\alpha-0)}{2}$$

se il punto α è compreso fra θ_{2p+1} e θ_{2p+2} (questi due valori esclusi) e $v_p(\omega)$ non ha discontinuità di seconda specie nel punto α;

$$\mathrm{n\,I}_{=1}\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k\prod_1^{2k}{}_s(z-e^{i\theta_s})}\int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}}\frac{(-1)^p[i(1-z)]^{1-k}v_p(\omega)\,\mathrm{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k}{}_s\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}}\frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s\theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}}d\omega\right]=0$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q+1}, \theta_{2q+2})$ $q \gtrless p$;

$$\lim_{r=1} R\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{(-1)^k \prod_1^{2k}{}_s (z-e^{i\theta_s})} \int_{\theta_{2p+1}}^{\theta_{2p+2}} \frac{(-1)^p [i(1-z)]^{1-k} v_p(\omega) \operatorname{sen}^{k-1}\frac{\omega}{2}}{\sqrt{-\prod_1^{2k} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_s-\omega}{2}\right)}} \frac{e^{i\left(\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{4}\sum_1^{2k}{}_s \theta_s\right)}}{z-e^{i\omega}} d\omega\right] =$$

per α compreso in un intervallo $(\theta_{2q}, \theta_{2q+1})$ il punto α essendo però differente dagli estremi.

Abbiamo dunque che la $w(z)$ gode della proprietà che avvicinandosi il punto z lungo la normale al contorno ad un punto di questo appartenente ad un arco $(\theta_{2p}, \theta_{2p+1})$ (gli estremi esclusi) tale che la funzione $u_p(\omega)$ in quel punto non abbia discontinuità di seconda specie, la parte reale della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $u_p(\omega)$ in quel punto, mentre avvicinandosi il punto z, sempre lungo la normale al contorno, ad un punto di questo appartenente all'arco $(\theta_{2p+1}, \theta_{2p+2})$ (gli estremi esclusi) tale che la $v_p(\omega)$ non abbia in quel punto discontinuità di seconda specie, il coefficiente della parte immaginaria della $w(z)$ tende con continuità verso la media del limite a destra e del limite a sinistra dei valori della $v_p(\omega)$ in quel punto.

VIII.

Dalle formole trovate si possono dedurre subito le soluzioni dei problemi analoghi a quelli ora risoluti per il cerchio, nel caso generale di aree piane semplicemente connesse di cui si conosce la rappresentazione conforme nel cerchio. Alla conoscenza di questa rappresentazione può sostituirsi, come è noto, quella di una funzione reale, monodroma e continua che si annulla al contorno, in un punto interno qualunque diviene infinita di ordine logaritmico rispetto alle distanze da questo punto, mentre in tutti gli altri si mantiene finita, e verifica di più l'equazione $\Delta^2 = 0$ (8). La determinazione di questa funzione corrisponde a quella della funzione di GREEN (9) per un punto qualunque del campo.

Se per un dato campo S nel piano $\zeta = \xi + i\eta$, la funzione di GREEN di un certo punto P corrispondente al valore ζ_0 di ζ è $u(\xi, \eta)$, e

$$u_1(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\log[(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_1)^2]$$

e $u_1(\xi, \eta) + iv_1(\xi, \eta)$ è una funzione monodroma finita e continua della ζ in tutti i punti interni del campo che si ottiene aggiungendo al contorno σ di S una linea situata tutta internamente a questo campo che non taglia sè

(8) Vedi RIEMANN, *Dissertazione inaugurale*. «Annali di Matematica», ser. I, t. 2, p. 353 e la seconda Memoria già citata di SCHWARZ, p. 787.

(9) Vedi C. NEUMANN, *Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$. «Journal f. reine u. angew. Math.», vol. 59, 1861, pp. 335-366.

stessa ed unisce P con un punto di σ, si otterranno subito per il campo S le soluzioni dei problemi analoghi a quelli risoluti nel caso del cerchio sostituendo nelle formole (1), (2), (3) in luogo di z

$$F(\zeta) = e^{u_1(\xi,\eta) + iv_1(\xi,\eta)}$$

e $v_1[\xi(\sigma), \eta(\sigma)]$ invece di ω, intendendo con $\xi(\sigma)$ e $\eta(\sigma)$ i valori di ξ e η nel punto σ del contorno di S.

IX.

Con un metodo analogo a quello adoperato per risolvere il primo problema propostoci potrebbe risolversi il seguente:

Determinare una funzione $w = u + iv$ della variabile complessa z, monodroma finita e continua in tutti i punti di un cerchio di raggio 1 (il contorno incluso) e che nei punti dell'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno verifichi alla condizione

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F_p(\theta), \qquad (p = 1, 2, \cdots, n)$$

supponendo la circonferenza del cerchio divisa in n parti, essendo A_p e B_p numeri reali variabili con p soltanto e $F_p(\theta)$ una funzione reale finita, continua, avente la derivata finita e continua (*).

Eseguiamo perciò la rappresentazione conforme (il che può sempre farsi quando si supponga $n > 2$) del cerchio nel piano z, entro un poligono chiuso ad un solo strato e semplicemente connesso nel piano ζ in modo che all'arco (θ_p, θ_{p+1}) corrisponda un lato del poligono avente per equazione

$$A_p \xi + B_p \eta = \text{cost}\ ^{(10)}.$$

Sia

$$z = z(\zeta)$$

la funzione che dà questa rappresentazione conforme; poniamo:

$$w[z(\zeta)] = w_1(\zeta) = u_1 + iv_1 .$$

L'arco θ del contorno del cerchio può considerarsi come una funzione del corrispondente contorno s del poligono; determiniamo il valore di

$$\frac{dF_p[\theta(s)]}{ds}$$

per i valori s_p di s corrispondenti ai punti del lato p^{esimo} del poligono (gli estremi esclusi).

(*) Anche qui l'A. ha tralasciato lo studio delle singolarità che w può presentare sulla circonferenza. Conviene anche notare che, nell'analisi che segue, intervengono soltanto le derivate delle condizioni poste

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F_p(\theta).$$

Per tornare, dunque, al problema iniziale è necessaria una discussione, che del resto non è molto difficile. [N.d.R.].

(10) Vedi DINI, *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra.* « Annali di Matematica », ser. II, t. 8.

Avremo:

$$\frac{dF_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = A_p \frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} + B_p \frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p}.$$

Ora:

$$\frac{du[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s_p},$$

$$\frac{dv[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s_p} = -\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial s_p} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \eta}{\partial s_p},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_p} = \frac{\pm B_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s_p} = \frac{\mp A_p}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}},$$

onde

$$\frac{dF_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = \mp \sqrt{A_p^2 + B_p^2}\,\frac{\partial u_1}{\partial \eta}.$$

Si ha dunque che la parte reale della funzione di variabile complessa

$$i\frac{dw_1}{d\zeta} = w_2(\zeta)$$

al contorno del poligono (i vertici esclusi) è data da

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}}\frac{dF_p[\theta(s_p)]}{ds_p} = \frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}}\frac{dF(\theta)}{d\theta}\frac{d\theta(s_p)}{ds_p},$$

e nei vertici se diviene infinita è di ordine inferiore ad un numero minore di uno. Ne segue che la parte reale della funzione $w_2[\zeta(z)]$ nei punti interni all'arco (θ_p, θ_{p+1}) del contorno del circolo è:

$$\frac{\mp 1}{\sqrt{A_p^2 + B_p^2}}\frac{dF_p(\theta)}{d\theta}\frac{1}{\left(\frac{ds_p}{d\theta}\right)}$$

e se in qualche punto del contorno diviene infinita, è di ordine inferiore ad un numero minore dell'unità, quindi per mezzo di note formule si può determinare in tutti i punti interni al circolo il valore di

$$w_2[\zeta(z)] = i\frac{dw}{dz}\frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)}$$

e per conseguenza mediante una quadratura quello di w.

X.

Non starò a sviluppare la soluzione del problema col metodo precedente, perchè ne darò ora un altro per mezzo del quale si risolve un problema più generale, cioè di determinare quali sono le funzioni

$$w(z) = u + iv$$

che nell'interno di un dato campo si mantengono sempre monodrome, finite e continue ed avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno (escluso al più un gruppo di punti di prima specie $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$) lungo la normale al contorno in quel punto, sono tali che

$$f(s)\, u + \varphi(s)\, v$$

tende con continuità verso un limite $\Theta(s)$. Le funzioni $f(s)$ e $\varphi(s)$ sono reali, finite e continue, colle derivate prime e seconde determinate, atte alla integrazione ed inferiori ad un numero finito in tutti i punti, escluso un numero finito di punti; ammetteremo inoltre che $f(s)$ e $\varphi(s)$ non siano mai zero contemporaneamente e se s_1 è un punto [o (s_1, s_1') è un tratto] in cui la $\varphi(s)$ si annulla; la $\varphi(s)$ non cangi segno coll'attraversare il punto s_1 [o il tratto (s_1, s_1')], supporremo che la $f(s)$ non sia mai negativa.

La funzione $\Theta(s)$ è reale, finita, ed escluso un gruppo di punti di prima specie con degli intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, risulta in tutti gli intervalli rimanenti continua e con estremi oscillatori [11] inferiori ad un numero finito.

Fra i punti $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ esclusi in principio si intendano compresi quelli di singolarità delle funzioni $f(s)$, $\varphi(s)$ e $\Theta(s)$.

Premettiamo la dimostrazione dei seguenti teoremi [12]:

1° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra 0 e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ $(\varepsilon < \pi/2)$ e di più nello stesso intervallo ha gli estremi oscillatorii sempre inferiori in valore assoluto ad un numero finito positivo M, mentre fra 0 e $\theta_1 - \varepsilon$, e $\theta_1 + \varepsilon$ e 2π è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, il modulo della funzione di variabile complessa

$$w = u + iv$$

definita nei punti z del cerchio di raggio R dalla formula:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\theta$$

si mantiene sempre inferiore ad un numero finito in un intorno del punto (R, θ_1).

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi di z a $Re^{i\theta_1}$ tende con continuità verso $F(\theta_1)$; esiste dunque un intorno del punto (R, θ_1) in cui la u si mantiene in valore assoluto inferiore ad un certo numero finito; abbiamo poi ponendo $z = re^{i\alpha}$, $F(\alpha)$ essendo finito:

$$v(r, \alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [F(\theta) - F(\alpha)]\, \frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha - \theta)}\, d\theta.$$

(11) Vedi DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, p. 190 e sg.

(12) Alcuni di questi lemmi sono analoghi a teoremi dimostrati dal prof. DINI nella sua Memoria: *Sull'equazione* $\Delta^2 u = 0$. «Annali di Matematica», ser. II, t. 8.

Ora finchè la α è compresa nell'intervallo $\left(\theta_1 - \frac{\varepsilon}{2}, \theta_1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ si ha in valore assoluto:

$$\left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi}\right]\left\{[F(\theta) - F(\alpha)]\frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta)}d\theta\right\} < N$$

N essendo un numero positivo finito.

Abbiamo inoltre in valore assoluto per α sempre compreso fra gli stessi limiti

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}[F(\theta) - F(\alpha)]\frac{Rr \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\,d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta)}$$

$$= \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{F(\theta) - F(\alpha)}{\theta - \alpha}\,\frac{\theta-\alpha}{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\,\frac{Rr\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta)}d\theta$$

$$< M\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(\alpha-\theta)\,\frac{Rr\operatorname{sen}(\alpha-\theta)\,d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta)} < M\frac{\pi}{2},$$

in cui M è un numero finito. Quindi in valore assoluto:

$$v < \frac{N}{\pi} + \frac{1}{2}M.$$

Ne segue, che il modulo di $w(z)$ in un intorno del punto $Re^{i\theta_1}$ si mantiene inferiore ad un numero finito, come volevasi dimostrare.

2° Se la funzione $F(\theta)$, definita fra 0 e 2π, nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1)$ (gli estremi esclusi) è finita e continua ed ha gli estremi oscillatorî inferiori ad un numero finito e nell'intervallo $(\theta_1, \theta_1 + \varepsilon)$ gode delle stesse proprietà, mentre nel punto θ_1 ha una discontinuità di prima specie avendosi

$$F(\theta_1 + 0) - F(\theta_1 - 0) = k;$$

di più negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ è atta alla integrazione, anche ridotta ai suoi valori assoluti, la funzione della variabile complessa z

$$w = u + iv$$

definita dalla relazione

$$w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\,\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\,d\theta$$

per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R, nel punto $Re^{i\theta_1} = z_0$ diviene infinita come la funzione $\frac{ki}{\pi}\log(z - z_0)$, cioè:

$$-\frac{ki}{\pi}\log(z - z_0) + w(z) = w_1(z)$$

si mantiene finita in un intorno del punto (R, θ_1).

Esiste infatti un intorno del punto θ_1, tale che per θ compresa in questo intorno la parte reale di $w_1(Re^{i\theta})$ è sempre finita continua ed ha gli estremi oscillatorî sempre inferiori in valore assoluto ad un numero positivo finito.

3° Se la funzione $F(\theta)$ definita fra 0 e 2π è finita e continua nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ ed ammette in tutti i punti di questo intervallo una derivata $F'(\theta)$ determinata, inferiore in valore assoluto ad un numero finito e atta alla integrazione, e negli intervalli $(0, \theta_1 - \varepsilon)$ e $(\theta_1 + \varepsilon, 2\pi)$ la $F(\theta)$ è atta alla integrazione, anche ridotta ai valori assoluti, la funzione di variabile complessa:

$$w(z) = u + iv = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta$$

definita per tutti i valori di z nell'interno del circolo di raggio R, coll'avvicinarsi di z lungo la normale al contorno al punto $Re^{i\theta_1}$ tende con continuità verso un valore determinato e finito. Se prendiamo per valori della $w(z)$ al contorno del circolo i limiti (quando esistono) verso cui tende la funzione $w(z)$ coll'avvicinarsi ai punti del contorno lungo la normale, avremo che nei punti $Re^{i\alpha}$ (pei quali $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$) la $w(z)$ avrà valori determinati e finiti e sarà continua e monodroma.

Infatti sappiamo che la u coll'avvicinarsi della z al punto $Re^{i\theta_1}$ lungo la normale tende con continuità verso $F(\theta_1)$; dimostreremo che anche la v tende verso un limite determinato e finito.

Se $z = re^{i\theta_1}$ si ha:

$$v = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{Rr\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi} + \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\right]\left(F(\theta)\frac{Rr\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}\,d\theta\right).$$

La funzione

$$\left(\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi}\right)\left(F(\theta)\frac{Rr\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}\,d\theta\right)$$

è finita e continua per tutti i valori di r da 0 ad R (R incluso). Abbiamo poi:

$$2\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F(\theta)\frac{Rr\,\mathrm{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}\,d\theta$$

$$= [F(\theta_1+\varepsilon) - F(\theta_1-\varepsilon)]\log(R^2+r^2-2Rr\cos\varepsilon)$$

$$-\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta)\log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)]\,d\theta.$$

Ma

$$\frac{d}{dr}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta)\log[R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)]\,d\theta$$

$$= \frac{1}{r}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta)\frac{r^2-R^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)}\,d\theta + \frac{1}{r}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta)\,d\theta$$

quantità che si mantiene, per tutti i valori di r compresi fra un certo valore $r > 0$ e R, sempre inferiore ad un numero finito. Ne segue che

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F(\theta) \frac{Rr \operatorname{sen}(\theta-\theta_1)}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\theta_1)} d\theta$$

coll'avvicinarsi di r a R tende verso un limite determinato e finito e quindi anche v ha un limite pure determinato e finito per $r = R$. Si vede analogamente che esiste sempre un limite determinato e finito per $v(r, \alpha)$ quando r tende verso R e $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$.

Se il limite superiore dei valori di $F'(\theta)$ nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ è M si ha in valore assoluto:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log [R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha)] \, d\theta$$

$$-\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log [R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha)] \, d\theta < 2\frac{M}{r}(\varepsilon+\pi)(R-r).$$

Ciò prova che la funzione v è continua nei punti (R, α) e quindi anche w è continua negli stessi punti.

4° Se oltre tutte le condizioni imposte nel teorema precedente alla $F(\theta)$, si pone che nell'intervallo $(\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon)$ essa possieda la derivata seconda determinata inferiore ad un numero finito ed atta alla integrazione, avremo che la $v(R, \alpha)$ per $\theta_1 + \varepsilon > \alpha > \theta_1 - \varepsilon$ ammetterà una derivata determinata, finita e continua rispetto ad α.

Abbiamo infatti in valore assoluto, se $\varepsilon' < \pi/2$,

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log\left[\frac{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}{4R^2}\right] d\theta < \int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log\left[\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right] d\theta,$$

il che prova, che

$$\int_{\theta_1-\varepsilon'}^{\theta_1+\varepsilon'} \log [R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha)] \, d\theta$$

può rendersi, qualunque sia r, inferiore ad un numero piccolo ad arbitrio impiccolendo sufficientemente ε'. Si ha dunque che:

$$\lim_{r=R} \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log [R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\alpha)] \, d\theta$$

$$= \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon} F'(\theta) \log\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right] d\theta + [F(\theta_1+\varepsilon) - F(\theta_1-\varepsilon)] \log 4R^2;$$

e per conseguenza:

$$v(\mathrm{R}, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\theta_1-\varepsilon} + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi}\right]\left[\mathrm{F}(\theta)\cot\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta\right] - \frac{1}{2\pi}\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}'(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}[\mathrm{F}(\theta_1+\varepsilon) - \mathrm{F}(\theta_1-\varepsilon)]\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\varepsilon}{2}\right) \text{(13)}.$$

Ora:

$$\psi(\alpha) = \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}'(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta$$

$$= \mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta - \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\left[\mathrm{F}''(\theta)\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta}\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta\right]d\theta;$$

ma

$$\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta}\log\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right)\right]d\theta = \int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta-\alpha}\log\left[\operatorname{sen}^2\frac{\lambda}{2}\right]d\lambda,$$

quindi:

$$\psi(\alpha) = \mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta_1+\varepsilon-\alpha}\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda - \int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\left[\mathrm{F}''(\theta)\int_{\theta_1-\varepsilon-\alpha}^{\theta-\alpha}\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)d\lambda\right]d\theta,$$

il che dimostra che esiste la derivata di $\psi(\alpha)$ rispetto ad α ed è data dalla funzione continua:

$$\psi'(\alpha) = -\mathrm{F}'(\theta_1+\varepsilon)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta_1+\varepsilon-\alpha}{2}\right) + \mathrm{F}'(\theta_1-\varepsilon)\log\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1-\varepsilon-\alpha}{2}\right)$$

$$+\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1+\varepsilon}\mathrm{F}''(\theta)\log\left(\operatorname{sen}^2\frac{\theta-\alpha}{2}\right)d\theta.$$

Ne segue che $v(\mathrm{R}, \alpha)$ possiede una derivata determinata finita e continua rispetto ad α per $\theta_1+\varepsilon > \alpha > \theta_1-\varepsilon$.

Evidentemente questi teoremi si estendono ad un gran numero di campi pei quali si ha la rappresentazione conforme nel cerchio.

XI.

Ciò premesso nel caso in cui si tratti di uno di tali campi, passiamo alla risoluzione del problema enunciato. Consideriamo la funzione:

$$\psi(s) = -\text{arco tang}\frac{f(s)}{\varphi(s)},$$

quando si prenda per l'arco tang $\frac{f(s)}{\varphi(s)}$ il valore compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$, e

(13) Questa formula prova, indipendentemente dalla dimostrazione già fatta, la seconda parte del teorema precedente.

si assuma arco tang $\frac{A}{0} = \pm \frac{\pi}{2}$ in modo che la $\psi(s)$ risulti per tutti i valori di s finita e continua, esclusi al più un numero finito di punti corrispondenti ai punti singolari di $f(s)$ e $\varphi(s)$ in cui ha discontinuità di prima specie e fa salti inferiori in valore assoluto a π. Indicheremo tali punti con $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i salti che in essi hanno luogo con $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

La $\psi(s)$ viene a possedere le derivate prime e seconde determinate e inferiori ad un numero finito in tutti i punti, esclusi quelli di singolarità.

Sarà dunque possibile determinare la $w_1(z)$ finita, monodroma e continua in tutti i punti interni al campo in questione e in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, e tale che al contorno la parte reale prenda con continuità i valori $\psi(s)$ nei punti in cui questa funzione è continua. Avremo inoltre che nei punti del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$, la parte immaginaria, considerata come funzione dell'arco del contorno, possederà la derivata prima determinata, finita e continua. Nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ corrispondenti ai valori $z_1, z_2, \cdots, z_n$ di z la $w_1(z)$ diventerà infinita logaritmicamente rispettivamente come

$$\pm \frac{ia_1}{\pi} \log(z - z_1), \qquad \pm \frac{ia_2}{\pi} \log(z - z_2), \cdots \qquad \pm \frac{ia_n}{\pi} \log(z - z_n).$$

Consideriamo la funzione

$$w_2(z) = u_2 + iv_2 = e^{iw_1(z)};$$

essa sarà finita, diversa da zero, continua e monodroma in tutti i punti interni al campo in questione, e sarà pure finita, continua, monodroma e diversa da zero in tutti i punti del contorno, esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Inoltre la u_2 e la v_2, nei punti del contorno (esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$), considerate come funzioni dell'arco del contorno, possederanno la derivata prima finita e continua. In un intorno di uno qualunque dei punti singoli s_p avremo che $(z - z_p)^{\pm \frac{a_p}{\pi}} w_2(z)$ si manterrà sempre inferiore ad un numero finito in valore assoluto e discosto da zero più di una certa quantità.

Indichiamo con z_s i valori della z nei punti s del contorno, e con $u_2(s)$ e $v_2(s)$ i valori di u_2 e v_2 negli stessi punti; avremo, per tutti i valori di s diversi da $s_1, s_2, \cdots, s_n$,

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} \varphi(s) = u_2(s)$$

$$\frac{\operatorname{mod} w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s) + \varphi^2(s)}} f(s) = - v_2(s)$$

in cui i radicali debbono intendersi presi collo stesso segno di $\varphi(s)$.

Ora poichè $w_2(z)$ è finita e continua in tutti i punti del contorno (esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$) sarà mod $w_2(z_s)$ una funzione finita e continua dell'arco del contorno esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ nei quali, se diviene infinita, è di ordine non superiore in valore assoluto ad $\frac{a_1}{\pi}, \frac{a_2}{\pi}, \cdots, \frac{a_n}{\pi}$ che hanno tutti un valore inferiore all'unità.

Potrà dunque costruirsi una funzione $w_3(z)$ la quale sia monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo e coll'avvicinarsi della z ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale al contorno, la parte reale tenda con continuità verso

$$\frac{\mathrm{mod}\, w_2(z_s)}{\sqrt{f^2(s)+\varphi^2(s)}}\Theta(s)=\chi(s).$$

Nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, la parte reale della $w_3(z)$, se diviene infinita, sarà di ordine inferiore all'unità diminuita di un numero positivo. Inoltre poichè $\mathrm{mod}\, w_2(z_s)$ considerata come funzione di s possiede la derivata prima finita e continua in tutti i punti, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$, e $\Theta(s)$, escluso un gruppo di punti di prima specie, possiede estremi oscillatori inferiori ad un numero finito, la parte immaginaria di $w_3(z)$ si manterrà inferiore ad un certo numero A_s coll'avvicinarsi a ciascuno dei punti s del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$. Tutte le funzioni della forma

$$w_3(z)+Ci,$$

in cui C è una costante arbitraria reale, godono della stessa proprietà.

Consideriamo la funzione

$$u+iv=w(z)=\frac{w_3(z)+Ci}{w_2(z)};$$

essa sarà monodroma, finita e continua in tutti i punti interni al campo, e il suo modulo si manterrà inferiore ad un numero finito A'_s variabile con s, avvicinandosi al punto s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di singolarità della $\Theta(s)$]. Ora abbiamo:

$$R[w_3(z)]=uu_2-vv_2;$$

quindi avvicinandosi ad un punto qualunque s del contorno [esclusi i punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e quelli di discontinuità della $\Theta(s)$] lungo la normale, avremo che

$$uu_2-vv_2$$

tenderà con continuità verso $\chi(s)$. Ma u_2 e v_2 tendono con continuità verso $u_2(s)$ e $v_2(s)$, quindi:

$$u[u_2-u_2(s)]-v[v_2-v_2(s)]$$

tenderà verso zero avvicinandosi al punto s del contorno lungo la normale. Ne segue che

$$uu_2(s)-vv_2(s)$$

tende con continuità verso $\chi(s)$, ossia

$$\varphi(s)u+f(s)v$$

tende con continuità verso $\Theta(s)$.

Ciò prova l'esistenza di un numero infinito di funzioni che verificano le condizioni imposte e dà il modo di trovare un numero infinito di esse. È poi evidente che quando esistono delle funzioni $w(z)$ che nei punti $s_1, s_2, \cdots, s_n$, divengono infinite di ordine inferiore a $(\pi - a_n)/\pi$ diminuito di un numero positivo e negli altri punti singolari divengono infinite di ordine inferiore ad 1 diminuito di un numero positivo, esse appartengono a quelle delle funzioni $w(z)$ che sono date dalla espressione trovata

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}.$$

È facile quindi vedere quali altre condizioni vanno imposte alla w affinchè resulti completamente definita.

In ultimo è da osservare che se la $\Theta(s)$ oltre essere continua possiede la derivata prima atta alla integrazione ed inferiore ad un numero finito in tutti gli intervalli che si ottengono escludendo, con intervalli di cui la somma è arbitrariamente piccola, un gruppo di punti di prima specie, la $w(z)$ data da

$$\frac{w_3(z) + Ci}{w_2(z)}$$

in tutti i punti del contorno, esclusi $s_1, s_2, \cdots, s_n$ e i punti di singolarità della $\Theta(s)$, resulta finita e continua; e in questi punti, considerando la u e la v come funzioni di s, viene verificata la relazione (*):

$$u\varphi(s) + vf(s) = \Theta(s).$$

XII.

Facciamo l'applicazione al caso del cerchio di raggio 1.

Chiamiamo ω l'arco s del contorno, e poniamo $z = re^{i\alpha}$. Avremo:

$$w_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z}\, d\omega,$$

$$w_2(z) = e^{\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{e^{i\omega} + z}{e^{i\omega} - z}\, d\omega},$$

$$\mathrm{mod}\, w_2(z) = e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{r \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \alpha)}\, d\omega},$$

$$\chi(\alpha) = \Theta(\alpha) \frac{e^{\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \psi(\omega) \frac{r \operatorname{sen}(\omega - \alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \alpha)}\, d\omega\right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\alpha) + \varphi^2(\alpha)}},$$

(*) A questa stessa elegante analisi è pervenuto più tardi anche D. HILBERT (cfr. *Gött. Nach.*, 1905, p. 307) e spesso essa viene senz'altro attribuita a lui. Si potrà facilmente completare con lo studio delle singolarità di w al contorno. [N.d.R.].

e per conseguenza:

$$(4)\qquad w(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{e^{i\omega}+z}{e^{i\omega}-z}d\omega}\left[\int\limits_0^{2\pi}\Theta(\beta)\frac{e^{\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_0^{2\pi}\psi(\omega)\frac{r\,\mathrm{sen}\,(\omega-\beta)}{1+r^2-2r\cos(\omega-\beta)}d\omega\right]_{r=1}}}{\sqrt{f^2(\beta)+\varphi^2(\beta)}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta+Ci\right]$$

in cui C è una costante arbitraria reale.

La soluzione del problema già risoluto per altra via nel § IV, si ottiene subito da questa formula prendendo la funzione $\varphi(\omega)$ eguale a 1 fra 0 e θ ed eguale a 0 fra θ e 2π; la funzione $f(\alpha)$ eguale a 0 fra 0 e θ, eguale ad 1 fra θ e 2π. Si ottiene in questo caso che $\psi(\omega)$ è eguale a 0 fra 0 e θ ed è eguale a $-\pi/2$ fra θ e 2π, quindi:

$$w_1(z)=-i\log\sqrt{\frac{e^{i\theta}-z}{1-z}}+\frac{1}{4}(2\pi-\theta),$$

$$w_2(z)=i\sqrt{\frac{e^{i\theta}-z}{1-z}}\,e^{-i\frac{\theta}{4}},$$

$$w(z)=-\frac{i}{2\pi}\sqrt{\frac{1-z}{e^{i\theta}-z}}\,e^{i\frac{\theta}{4}}\left[\int\limits_0^{\theta}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta\right.$$

$$\left.-\int\limits_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\frac{z+e^{i\beta}}{z-e^{i\beta}}d\beta+Ci\right].$$

Prendendo

$$C=\int\limits_0^{\theta}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta-\beta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)}}\cot\frac{1}{2}(\theta-\beta)\,d\beta-\int\limits_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\sqrt{\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\beta-\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}}}\cot\frac{1}{2}(\beta-\theta)\,d\beta,$$

si trova:

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi}\sqrt{(1-z)(e^{i\theta}-z)}\left[\int\limits_0^{\theta}\Theta(\beta)\frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\;\mathrm{sen}\,\frac{\theta-\beta}{2}}}\frac{d\beta}{z-e^{i\beta}}\right.$$

$$\left.-\int\limits_\theta^{2\pi}\Theta(\beta)\frac{e^{i\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}}{\sqrt{\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\;\mathrm{sen}\,\frac{\beta-\theta}{2}}}\frac{d\beta}{z-e^{i\beta}}\right].$$

Servendosi della formula (4) si potrebbe risolvere il noto problema, già risoluto con altri metodi, di determinare la rappresentazione conforme di un poligono in un circolo [14].

(14) Vedi CHRISTOFFEL, op. cit.; H. A. SCHWARZ, *Ueber einige Abbildungsaufgaben.* « Journal f. reine u. angew. Math. », vol. 70, 1869, pp. 105–120; DINI, *Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra.* « Annali di Matematica », ser. II, t. 8.

XIII.

Il primo dei metodi esposti (§§ III e IX) per la risoluzione dei varî problemi trattati, non può evidentemente estendersi al caso in cui si vogliano considerare dei campi molteplicemente connessi, essendo fondato sulla rappresentazione conforme dei campi stessi entro un quarto di piano o un poligono semplicemente connesso. È molto facile vedere che il secondo metodo esposto (§ XI) può invece estendersi a un gran numero di casi in cui si hanno dei campi molteplicemente connessi. Però darò ora un altro metodo mediante il quale possono risolversi alcuni problemi analoghi a quelli già risoluti sulle funzioni di variabile complessa e sull'integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$, e che può applicarsi facilmente al caso di campi molteplicemente connessi.

La U e la φ siano funzioni di due variabili x e y finite, continue e aventi le derivate prime e seconde pure finite e continue in tutti i punti interni ad un campo C a due dimensioni e in tutti i punti del contorno; la U e la φ verifichino inoltre l'equazioni

$$\Delta^2 \mathrm{U} = 0 \quad , \quad \Delta^2 \varphi = 0.$$

Se r è la distanza fra il punto (x_1, y_1) interno a C e il punto (x, y), p è la normale diretta verso l'interno del campo, si ha:

$$\mathrm{U}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p} (\log r + \varphi) - \mathrm{U}\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds,$$

in cui l'integrale è esteso a tutto il contorno s del campo. Da questa formula si deduce, se $\mathrm{A}_m \gtrless 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \sum\nolimits_m \frac{1}{\mathrm{A}_m} \int_{s_m} \Big\{ \left(\mathrm{A}_m \frac{d\mathrm{U}}{dp} + \mathrm{B}_m \mathrm{U}\right)(\log r + \varphi) \\ - \mathrm{U}\left[\mathrm{B}_m (\log r + \varphi) + \mathrm{A}_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] \Big\} ds \\ + \frac{1}{2\pi} \sum\nolimits_n \int_{s'_n} \left[\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p} (\log r + \varphi) - \mathrm{U}\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds,\end{aligned}$$

quando si supponga diviso in una maniera qualunque il contorno totale s negli intervalli $s_1, s_2, \cdots, s_m, \cdots$; $s'_1, s'_2, \cdots, s'_n, \cdots$

Se dunque si può determinare la φ in modo che nella porzione s_m del contorno si abbia:

$$\mathrm{B}_m (\log r + \varphi) + \mathrm{A}_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0$$

e nella porzione s'_n

$$\log r + \varphi = 0,$$

si avrà:

$$(5)\quad \begin{cases} U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int\limits_{s_m} \left(A_m \frac{\partial U}{\partial p} + B_m U\right)(\log r + \varphi)\, ds \\ \qquad - \frac{1}{2\pi} \sum_n \int\limits_{s'_n} U \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) ds, \end{cases}$$

e quindi basterà conoscere al contorno il valore di

$$A_m \frac{\partial U}{\partial p} + B_m U$$

negli intervalli s_m e il valore di U negli intervalli s'_n per poter determinare la funzione U in un punto qualunque (x_1, y_1) interno al campo C. La funzione φ viene così a calcolarsi analogamente a quella di GREEN e a quella del chiarissimo prof. DINI (15).

È facile estendere una proprietà reciproca della funzione di GREEN (16) alle funzioni che abbiamo ora considerato. Indichi infatti r' la distanza di un punto (x_2, y_2) interno a C dal punto (x, y); φ' sia una funzione che rispetto al punto (x_2, y_2) goda delle stesse proprietà della φ rispetto ad (x_1, y_1). Avremo:

$$\varphi'(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int\limits_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi'\right)(\log r + \varphi)\, ds$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_n \int\limits_{s'_n} \varphi' \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) ds,$$

$$\varphi(x_2, y_2) = \frac{1}{2\pi} \sum_m \frac{1}{A_m} \int\limits_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi\right)(\log r' + \varphi')\, ds$$

$$- \frac{1}{2\pi} \sum_n \int\limits_{s'_n} \varphi \left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi'}{\partial p}\right) ds.$$

Ora osservando che si ha

$$\sum_m \frac{1}{A_m} \int\limits_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi'\right) \varphi\, ds - \sum_n \int\limits_{s'_n} \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial p}\, ds$$

$$- \sum_m \frac{1}{A_m} \int\limits_{s_m} \left(A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi\right) \varphi'\, ds + \sum_n \int\limits_{s'_n} \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial p}\, ds = 0,$$

nei tratti s_m si ha:

$$A_m \frac{\partial \varphi}{\partial p} + B_m \varphi = - A_m \frac{\partial \log r}{\partial p} B_m \log r,$$

$$A_m \frac{\partial \varphi'}{\partial p} + B_m \varphi' = - A_m \frac{\partial \log r'}{\partial p} - B_m \log r',$$

(15) Vedi DINI, *Su una funzione analoga a quella di Green*. Nota letta alla Reale Accademia dei Lincei il 6 febbraio 1876.

(16) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

e nei tratti s'_n si ha

$$\varphi = -\log r \quad , \quad \varphi' = -\log r',$$

si ottiene

$$\varphi'(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p}\log r - \frac{\partial \log r}{\partial p}\log r'\right) ds.$$

Ma è facile dimostrare che

$$\int_s \left(\frac{\partial \log r'}{\partial p}\log r - \frac{\partial \log r}{\partial p}\log r'\right) ds = 0,$$

quindi

$$\varphi'(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2) \text{ (17)}.$$

XIV.

Se $U + iV$ è una funzione della variabile complessa $x + iy$ monodroma finita e continua in tutti i punti del campo C (il contorno incluso), si ha, ricordando che:

$$\frac{\partial U}{\partial p} = -\frac{\partial V}{\partial s},$$

e integrando per parti:

$$\int_s \frac{\partial U}{\partial p}(\log r + \varphi)\, ds = \int_s V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) ds,$$

quindi:

$$U(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_s \left[V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_m \frac{1}{A_m}\int_{s_m} \Big\{ (A_m V + B_m U)\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)$$

$$- U\left[B_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right]\Big\} ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\sum_n \int_{s'_n} \left[V\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) - U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\right] ds.$$

Se è possibile determinare la φ in modo che negli intervalli s_m verifichi le relazioni

$$B_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) + A_m\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right) = 0$$

(17) La funzione del prof. DINI gode al pari di quella di GREEN e delle funzioni ora considerate di una proprietà reciproca. Essa può dedursi immediatamente da un teorema dimostrato nella mia Nota, *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione del calore e delle correnti galvaniche costanti*. «Nuovo Cimento», ser. III, t. 11. [In questo volume, V, p. 96].

e negli intervalli s'_n verifichi l'altra

$$\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

si trova:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} U(x_1, y_1) &= \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_m \frac{1}{A_m}\int_{s_m}(A_m V + B_m U)\left(\frac{\partial \log r}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)ds \\ &- \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_n \int_{s'_n} U\left(\frac{\partial \log r}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)ds. \end{aligned}\right.$$

Ciò prova che basterà conoscere nei tratti s_m del contorno il valore di

$$A_m V + B_m U$$

e nei tratti s'_n il valore di U per poter determinare in tutti i punti interni al campo C il valore di U.

Quando si sia determinata la U mediante la (5) o la (6) si avrà subito la V per mezzo delle note relazioni

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial y_1} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}.$$

XV.

Applichiamo le formule trovate nel § XIII al caso in cui il campo C sia lo spazio compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R_1 ($R > R_1$) e si voglia determinare la U conoscendone i valori sul cerchio di raggio R_1 e conoscendo i valori di $\partial U/\partial p$ sul cerchio di raggio R. Basterà perciò determinare una funzione φ monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde nel campo C che verifichi l'equazione $\Delta^2 \varphi = 0$, che sul cerchio di raggio R_1 sia eguale a $-\log r_1$ e sul cerchio di raggio R sia tale che $\partial\varphi/\partial p = -\partial \log r_1/\partial p$, r_1 essendo la distanza da un punto interno (x_1, y_1) al punto sul contorno.

Prendiamo l'origine nel centro comune ai due cerchi e poniamo:

$$x = \rho \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta,$$

$$x_1 = \rho_1 \cos \theta_1 \qquad y_1 = \rho_1 \operatorname{sen} \theta_1.$$

L'immagine del punto (x_1, y_1) nella trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto al cerchio di raggio R_1, avrà per coordinate:

$$x_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1}\cos \theta_1 \quad , \quad y_2 = \frac{R_1^2}{\rho_1}\operatorname{sen} \theta_1.$$

Sia $\varphi_1(\rho, \theta)$ la funzione del prof. DINI, [18] corrispondente al punto (x_1, y_1) rispetto ai due cerchi concentrici di raggi R e R_1^2/R, e $\varphi_2(\rho, \theta)$ quella corrispondente al punto (x_2, y_2). Poniamo:

$$\psi(\rho, \theta) = \log r_1 - \log r_2 + \varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta),$$

in cui r_1 è la distanza dal punto (x_1, y_1) al punto (x, y) e r_2 è la distanza dal punto (x_2, y_2) al punto (x, y).

Avremo che:

$$\varphi_1(\rho, \theta) - \varphi_2(\rho, \theta)$$

sarà una funzione definita fra i due cerchi di raggi R e R_1^2/R, monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde, e che verifica l'equazione $\Delta^2 = 0$; si avrà inoltre:

$$\left[\frac{\partial \psi(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right]_{\varrho = R} = \left[\frac{\partial \psi(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right]_{\varrho = \frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Consideriamo la funzione:

$$\psi(\rho, \theta) + \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \Theta(\rho, \theta);$$

essa sarà finita, monodroma e continua insieme alle derivate prime e seconde e verificherà l'equazione $\Delta^2 \Theta = 0$, in tutti i punti, al più esclusi (x_1, y_1) e (x_2, y_2); inoltre sarà:

$$\left[\frac{\partial \Theta(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right]_{\varrho = R} = \left[\frac{\partial \Theta(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right]_{\varrho = \frac{R_1^2}{R}} = 0.$$

Ora:

$$\log r_1(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \log(\rho_1^2 + \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1))$$

$$\log r_2(\rho, \theta) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{R_1^4}{\rho_1^2} + \rho^2 - 2\frac{R_1^2}{\rho_1}\rho \cos(\theta - \theta_1)\right)$$

quindi:

$$\log r_1(\rho, \theta) - \log r_2(\rho, \theta) + \log r_1\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) - \log r_2\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right) = \log \frac{\rho_1^2}{R_1^2}.$$

Ciò prova che la $\Theta(\rho, \theta)$ si mantiene monodroma, finita e continua insieme alle derivate prime e seconde anche nei punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2); quindi:

$$\Theta(\rho, \theta) = C$$

in cui C è una costante. Ma

$$\psi(\rho, \theta)_{\varrho = R_1} = \psi\left(\frac{R_1^2}{\rho}, \theta\right)_{\varrho = R_1},$$

(18) Vedi l'ultima Memoria citata del prof. DINI.

quindi:

$$\psi(\rho\,,\theta)_{\rho=R_1}=\frac{1}{2}C\,.$$

Si ha dunque che la funzione

$$-\log r_2+\varphi_1(\rho\,,\theta)-\varphi_2(\rho\,,\theta)-\frac{1}{2}C$$

gode delle proprietà della funzione $\varphi(\rho\,,\theta)$ cercata.

È da avvertire che si può riconoscere facilmente che la funzione φ è anche data da

$$\varphi(\rho\,,\theta)=\log r_3+\varphi'_1(\rho\,,\theta)+\varphi'_3(\rho\,,\theta)$$

in cui r_3 è la distanza fra i punti $(\rho\,,\theta)$ e $(\rho_3\,,\theta_3)$, immagine ottenuta colla trasformazione per raggi vettori reciproci rispetto alla circonferenza di raggio R del punto $(\rho_1\,,\theta_1)$; φ'_1 è la funzione di GREEN corrispondente al punto $(\rho_1\,,\theta_1)$ rispetto ai due cerchi di raggi R_1 e R_1^2/R; φ'_3 è la funzione di GREEN rispetto agli stessi cerchi corrispondente al punto $(\rho_3\,,\theta_1)$.

Ora si ha:

$$\varphi_1(\rho\,,\theta)=-\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}\log\rho-\sum_1^\infty\frac{\rho^{2n}\left[\rho_1^{2n}+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}(\rho_1^{2n}+R^{2n})}{n\rho^n\rho_1^n\left[R^{2n}-\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]}\cos n(\theta-\theta_1)+C_1$$

$$\varphi_2(\rho\,,\theta)=-\frac{\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}{R+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)}\log\rho-\sum_1^\infty\frac{\rho^{2n}\left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n}+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]+\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\left[\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^{2n}+R^{2n}\right]}{n\rho^n\left(\frac{R_1^2}{\rho_1}\right)^n\left[R^{2n}-\left(\frac{R_1^2}{R}\right)^{2n}\right]}\cos n(\theta-\theta_1)+C_2$$

in cui C_1 e C_2 sono costanti. Si vede subito che

$$-\log\frac{\rho_1}{R_1}+C_1-C_2-\frac{1}{2}C=0\,,$$

quindi:

$$\varphi(\rho\,,\theta)=-\frac{1}{2}\log\left[R_1^2+\frac{\rho_1^2\rho^2}{R_1^2}-2\rho_1\rho\cos(\theta-\theta_1)\right]+\sum_1^\infty\frac{(\rho^{2n}-R_1^{2n})(R_1^{2n}-\rho_1^{2n})}{n\rho^n\rho_1^n(R^{2n}+R_1^{2n})}\cos n(\theta-\theta_1)\,.$$

Se ne deduce, poichè le serie che qui compariscono sono derivabili termine a termine,

$$U(\rho_1\,,\theta_1)=\frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{R_1^2(\rho_1^2+R^2-2\rho_1R\cos(\theta-\theta_1)}{R_1^4+R^2\rho_1^2-2\rho_1RR_1^2\cos(\theta-\theta_1)}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty\frac{(R^{2n}-R_1^{2n})(R_1^{2n}-\rho_1^{2n})}{nR^n\rho_1^n(R^{2n}+R_1^{2n})}\cos n(\theta-\theta_1)\right]d\theta$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\left[\frac{R_1^2-\rho_1^2}{R_1^2+\rho_1^2-2R_1\rho_1\cos(\theta-\theta_1)}+2\sum_1^\infty\frac{R_1^n}{\rho_1^n}\left(\frac{R_1^{2n}-\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\cos n(\theta-\theta_1)\right]d\theta$$

essendo U_{R_1} i valori di U sulla circonferenza di raggio R_1 e $\partial U_R/\partial p$ i valori di $\partial U/\partial p$ sulla circonferenza di raggio R.

Applicando noti sviluppi in serie di FOURIER si trova:

$$U(\rho_1, \theta_1) = -\frac{R}{2\pi}\left(\log\frac{R\rho_1}{R_1}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta$$

$$+\frac{R}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R_1^{2n}-\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R^{2n}+\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}U_{R_1}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta.$$

Quindi ponendo $\rho_1 e^{i\theta_1} = z_1$ si ha:

$$U+iV=W(z_1)=\left[-\frac{R}{2\pi}\log\frac{R}{R_1}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta\right]$$

$$-\frac{R}{2\pi}\log z_1\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^n}{(R^{2n}+R_1^{2n})}\left[R_1^n\int_0^{2\pi}U_{R_1}e^{-ni\theta}\,d\theta\right.$$

$$\left.-\frac{R^{n+1}}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}e^{-ni\theta}\,d\theta\right]+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{z_1^n}\,\frac{R^n R_1^n}{(R^{2n}+R_1^{2n})}\left[\frac{RR_1^n}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}e^{ni\theta}\,d\theta\right.$$

$$\left.+R^n\int_0^{2\pi}U_{R_1}e^{ni\theta}\,d\theta\right]+Ci,$$

essendo C una costante arbitraria reale.

Ciò prova che è necessario che sia verificata la relazione

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial U_R}{\partial p}\,d\theta=0$$

affinchè la funzione di variabile complessa costruita resulti monodroma, come facilmente poteva riconoscersi *a priori*.

Dalle ultime due formule scritte si deduce subito, mediante una integrazione per parti, supponendo la $W(z_1)$ monodroma,

$$\left\{\begin{aligned}U&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U_{R_1}\,d\theta-\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R_1^{2n}-\rho_1^{2n}}{R^{2n}+\rho_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}V_R\,\mathrm{sen}\,n(\theta-\theta_1)\,d\theta\\&+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{R_1}{\rho_1}\right)^n\left(\frac{R^{2n}+\rho_1^{2n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\right)\int_0^{2\pi}U_{R_1}\cos n(\theta-\theta_1)\,d\theta,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} W(z_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_2^{2\pi} U_{R_1}\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_R\,d\theta \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty} \frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^n\int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{-ni\theta}\,d\theta + i\,R^n\int_0^{2\pi} V_R\, e^{-ni\theta}\,d\theta\right] \\ &+ \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{1}{z_1^n}\,\frac{R^n R_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^n\int_0^{2\pi} U_{R_1} e^{ni\theta}\,d\theta + iR_1^n\int_0^{2\pi} V_R\, e^{ni\theta}\,d\theta\right], \end{aligned}\right.$$

essendo V_R i valori di V nei punti della circonferenza di raggio R.

L'ultima formula si può anche porre sotto la forma

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i}\sum_0^{\infty}\frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^{2n}\int_{s_1} U\frac{dz}{z^{n+1}} + iR^{2n}\int_s V\frac{dz}{z^{n+1}}\right]$$

$$+\frac{1}{\pi i}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^{-n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^{2n}\int_{s_1} Uz^{n-1}\,dz + iR_1^{2n}\int_s Vz^{n-1}\,dz\right]$$

in cui s e s_1 sono rispettivamente le due circonferenze di raggi R e R_1.

Quando $A + B \gtrless 0$ si deduce subito da questa formula, l'altra

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i(A+B)}\sum_0^{\infty}\frac{z_1^n}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R_1^{2n}\int_{s_1}(AU + BiV)\frac{dz}{z^{n+1}}\right.$$

$$\left. + R^{2n}\int_s (BU + AiV)\frac{dz}{z^{n+1}}\right]$$

$$+\frac{1}{\pi i(A+B)}\sum_1^{\infty}\frac{z_1^{-n}}{R^{2n}+R_1^{2n}}\left[R^{2n}\int_{s_1}(AU + BiV)\,z^{n-1}\,dz\right.$$

$$\left. + R_1^{2n}\int_s (BU + AiV)\,z^{n-1}\,dz\right],$$

la quale diviene la nota formula di LAURENT quando si prende

$$A = B = 1.$$

Si avrebbero formule analoghe a quelle già trovate nel caso in cui si conoscessero i valori della U nei punti della circonferenza di raggio R e si conoscessero nei punti della circonferenza di raggio R_1 i valori di $\partial U/\partial p$.

È facile estendere il metodo adoperato per la determinazione della funzione φ, al caso in cui si ha un campo doppiamente connesso, di cui una sola delle linee chiuse costituenti il contorno è un cerchio.

XVI.

Dalle formule ottenute si passa con facilità ad altre che risolvono i problemi analoghi a quelli ora risoluti, nel caso di molti campi doppiamente connessi di cui è nota la rappresentazione conforme entro lo spazio compreso fra due cerchi concentrici. Per esempio, poichè si può, mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci, rappresentare conformemente lo spazio compreso fra due cerchi non concentrici e che non si tagliano né si toccano in quello compreso fra due cerchi concentrici, potranno con facilità generalizzarsi le formule trovate nel caso di un campo compreso fra due cerchi situati comunque, purchè non si taglino né si tocchino.

Quindi in molti casi potranno dirsi risoluti i problemi analoghi ai precedenti, se il campo dato è compreso fra due linee di livello [19], perchè si conosce la rappresentazione conforme di questi campi, in molti casi, nello spazio compreso fra due cerchi concentrici.

Quando si tratta, per esempio, del campo compreso fra due ellissi omofocali per i quali la distanza focale è 2δ e, essendo α e β i parametri isometrici di un doppio sistema di ellissi ed iperbole omofocali, α_0 e α_1 sono i parametri corrispondenti alle due ellissi contorno, si ha che la funzione

$$z = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}}{\delta},$$

in cui il radicale va preso positivo per z_1 positivo e maggiore di δ, ci dà la rappresentazione conforme dello spazio compreso fra le due ellissi situato sul piano delle z_1, nello spazio compreso fra due cerchi aventi il centro comune nell'origine del piano delle z, di raggi e^{α_0}, e e^{α_1} [20].

Quindi se si conosce, di una funzione di variabile complessa $W(z_1)$ definita come monodroma, finita e continua in tutti i punti del campo (il contorno incluso) compreso fra le due ellissi α_0 e α_1, il valore della parte reale U nei punti dell'ellisse α_0, e il valore della parte immaginaria V nei punti dell'ellisse α_1, si potrà determinare completamente la funzione $W(z)$ in tutti i punti interni al campo e si avrà:

$$W(z_1) = \frac{1}{\pi i} \sum_0^\infty \frac{\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n}{(e^{2n\alpha_0} + e^{2n\alpha_1})} \left[e^{2n\alpha_0} \int_{\alpha_0} U \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n} \right.$$

$$\left. + ie^{2n\alpha_1} \int_{\alpha_1} V \frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2 - \delta^2}\left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - \delta^2}\right)^n} \right] +$$

(19) Vedi NEUMANN, Memoria citata.

(20) Vedi DINI, *Sopra le funzioni di una variabile complessa.* « Annali di Matematica », ser. II, t. 4.

$$+\frac{1}{\pi i}\sum_{1}^{\infty}\frac{\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^{-n}}{(e^{2n\alpha_0}+e^{2n\alpha_1})}\left[e^{2n\alpha_1}\int_{\alpha_0} U\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^n\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2-\delta^2}}\right.$$

$$\left.+\,ie^{2n\alpha_0}\int_{\alpha_1} V\left(z_1+\sqrt{z_1^2-\delta^2}\right)^n\frac{dz_1}{\sqrt{z_1^2-\delta^2}}\right],$$

z_1 essendo un punto interno al campo compreso fra le due ellissi omofocali α_0 e α_1.

XVII.

Nel caso in cui si tratti di un campo compreso fra due cerchi concentrici, accenneremo all'applicazione di un metodo [21] per mezzo del quale si possono risolvere direttamente alcuni problemi simili a quelli già risoluti, e determinare alcune delle funzioni analoghe a quelle di GREEN e del chiarissimo prof. DINI.

Supponiamo che la funzione

$$w(z) = u + iv$$

definita in tutti i punti interni al campo compreso fra i due cerchi di raggi R′ e R aventi il centro all'origine, sia monodroma, finita e continua. Per un noto teorema di LAURENT, avremo, se $\rho e^{i\omega}$ è un punto compreso fra i due cerchi:

$$u = a_0 + \sum_{1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\omega + b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega) + \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(\alpha_n\cos n\omega + \beta_n\,\mathrm{sen}\,n\omega)$$

$$v = b_0 + \sum_{1}^{\infty}\rho^n(a_n\,\mathrm{sen}\,n\omega - b_n\cos n\omega) + \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}(-\alpha_n\,\mathrm{sen}\,n\omega + \beta_n\cos n\omega),$$

$$(m=1,2,\cdots,q_1)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m} &= \sum_{1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\rho^{n-m}(a_n\cos n\omega + b_n\,\mathrm{sen}\,n\omega)\\ &+\sum_{1}^{\infty} n(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}(\alpha_n\cos n\omega + \beta_n\,\mathrm{sen}\,n\omega),\end{aligned}\right.$$

$$(m=1,2,\cdots,q_2)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^m v}{\partial\rho^m} &= \sum_{1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\rho^{n-m}(a_n\,\mathrm{sen}\,n\omega - b_n\cos n\omega)\\ &+\sum_{1}^{\infty} n(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}(-\alpha_n\,\mathrm{sen}\,n\omega + \beta_n\cos n\omega),\end{aligned}\right.$$

in cui a_n, b_n, α_n, β_n sono costanti reali.

(21) Vedi NEUMANN, *Das Dirichlet'sche Princip...*, e DINI, *Sopra una funzione analoga a quella di Green.*

Supponiamo che tutte le serie scritte si mantengano convergenti in egual grado in tutti i punti dello spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso), e supponiamo di conoscere su ciascuna delle due circonferenze i valori di una espressione lineare in u, v e nelle derivate successive di queste quantità rispetto alla normale, cioè si abbia al contorno del circolo di raggio R,

$$M_0 u + N_0 v + \sum_1^{q_1}{}_m M_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2}{}_m N_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = f(\omega),$$

e al contorno del circolo di raggio R',

$$M'_0 u + N'_0 v + \sum_1^{q_1}{}_m M'_m \frac{\partial^m u}{\partial \rho^m} + \sum_1^{q_2}{}_m N'_m \frac{\partial^m v}{\partial \rho^m} = \varphi(\omega)$$

in cui M_m, N_m, M'_m, N'_m sono costanti note, e $f(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ sono funzioni note.

Dovremo avere per le ipotesi fatte:

$$\left\{\begin{aligned} M_0 a_0 + N_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\, d\omega \\ M'_0 a_0 + N'_0 b_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\, d\omega \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} l_n a_n + \lambda_n \alpha_n - m_n b_n + \mu_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\cos n\omega\, d\omega \\ m_n a_n - \mu_n \alpha_n + l_n b_n + \lambda_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega)\,\mathrm{sen}\, n\omega\, d\omega \\ l'_n a_n + \lambda'_n \alpha_n - m'_n b_n + \mu'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\cos n\omega\, d\omega \\ m'_n a_n - \mu'_n \alpha_n + l'_n b_n + \lambda'_n \beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\omega)\,\mathrm{sen}\, n\omega\, d\omega \end{aligned}\right.$$

in cui:

$$l_n = M_0 R^n + \sum_1^{q_1}{}_m M_m\, n(n-1)\cdots(n-m+1)\, R^{n-m}$$

$$\lambda_n = \frac{M_0}{R^n} + \sum_1^{q_1}{}_m M_m\, n(n+1)\cdots(n+m-1)\, \frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$m_n = N_0 R^n + \sum_1^{q_2}{}_m N_m\, n(n-1)\cdots(n-m+1)\, R^{n-m}$$

$$\mu_n = \frac{N_0}{R^n} + \sum_1^{q_2} N_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R^{n+m}}$$

$$l'_n = M'_0\, R'^n + \sum_1^{q_1} M'_m\, n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\, R'^{n-m}$$

$$\lambda'_n = \frac{M'_0}{R'^n} + \sum_1^{q_1} M'_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}$$

$$m'_n = N'_0\, R'^n + \sum_1^{q_2} N'_m\, n\,(n-1)\cdots(n-m+1)\, R'^{n-m}$$

$$\mu'_n = \frac{N'_0}{R'^n} + \sum_1^{q_2} N'_m\, n\,(n+1)\cdots(n+m-1)\,\frac{(-1)^m}{R'^{n+m}}\,.$$

Si ha dunque il modo, conoscendo la $f(\omega)$ e la $\varphi(\omega)$, di determinare le a_0, b_0, a_n, α_n, b_n, β_n e quindi di conoscere le espressioni in serie di u e v purchè queste serie resultino convergenti in egual grado anche nei punti del contorno, il determinante

$$\begin{vmatrix} l_n\,, & \lambda_n\,, & -m_n\,, & \mu_n \\ m_n\,, & -\mu_n\,, & l_n\,, & \lambda_n \\ l'_n\,, & \lambda'_n\,, & -m'_n\,, & \mu'_n \\ m'_n\,, & -\mu'_n\,, & l'_n\,, & \lambda'_n \end{vmatrix}$$

si mantenga diverso da zero per tutti i valori di n, e inoltre sia

$$\begin{vmatrix} M_0\,, & N_0 \\ M'_0\,, & N'_0 \end{vmatrix}$$

pure diverso da zero.

Quando sono verificate queste condizioni si ha che la soluzione del problema è unica.

Allorchè si avesse che il primo determinante scritto, per qualche valore di n, oppure il secondo determinante, si annullasse, allora evidentemente si avrebbe che il problema dato ammetterebbe un numero infinito di soluzioni oppure non ne ammetterebbe alcuna.

XVIII.

Se la u è una funzione monodroma, finita e continua, avente le derivate prime e seconde determinate, finite e continue nell'interno ed al contorno di un campo compreso fra due cerchi concentrici di raggi R e R′, di più la u verifica l'equazione $\Delta^2 u = 0$, si ha:

$$u = a + a' \log\rho + \sum_1^{\infty} \rho^n\,(a_n \cos n\omega + b_n \operatorname{sen} n\omega) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\rho_n}\,(\alpha_n \cos n\omega + \beta_n \operatorname{sen} n\omega)$$

$$(m=1,2,\cdots,q)\quad\left|\begin{aligned}&\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m}=\Pi(m-1)\frac{(-1)^{m-1}a'}{\rho^m}\\&+\sum_1^\infty n(n-1)\cdots(n-m+1)\rho^{n-m}(a_n\cos n\omega+b_n\operatorname{sen} n\omega)\\&+\sum_1^\infty n(n+1)\cdots(n+m-1)\frac{(-1)^m}{\rho^{n+m}}(\alpha_n\cos n\omega+\beta_n\operatorname{sen} n\omega),\end{aligned}\right.$$

$\rho e^{i\omega}$ essendo un punto compreso fra i due cerchi.

Supponendo che queste serie siano convergenti in egual grado in tutto lo spazio compreso fra i due cerchi (il contorno incluso) e posto al contorno del circolo di raggio R

$$M_0 u+\sum_1^q M_m\frac{\partial^n u}{\partial\rho^m}=f(\omega)$$

e al contorno del circolo di raggio R':

$$M'_0 u+\sum_1^q M'_m\frac{\partial^m u}{\partial\rho^m}=\varphi(\omega),$$

si trovano le equazioni:

$$\left\{\begin{aligned}&M_0 a+\left(M_0\log R+\sum_1^q\Pi(m-1)\frac{(-1)^{m-1}}{R^m}M_m\right)a'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)d\omega\\&M'_0 a+\left(M'_0\log R'+\sum_1^q\Pi(m-1)\frac{(-1)^{m-1}}{R'^m}M'_m\right)a'=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)d\omega\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}&l_n a_n+\lambda_n\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\cos n\omega\, d\omega\\&l'_n a_n+\lambda'_n\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\cos n\omega\, d\omega\\&l_n b_n+\lambda_n\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\omega)\operatorname{sen} n\omega\, d\omega\\&l'_n b_n+\lambda'_n\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega)\operatorname{sen} n\omega\, d\omega\end{aligned}\right.$$

in cui

$$l_n=M_0 R^n+\sum_1^q n(n-1)\cdots(n-m+1)R^{n-m}M_m$$

$$\lambda_n=\frac{M_0}{R^n}+\sum_1^q n(n+1)\cdots(n+m-1)\frac{(-1)^m}{R^{n+m}}M_m$$

$$l'_n = \mathrm{M}'_0 \mathrm{R}'^n + \sum_1^q n(n-1)\cdots(n-m+1)\,\mathrm{R}'^{n-m}\mathrm{M}'_m$$

$$\lambda'_n = \frac{\mathrm{M}'_0}{\mathrm{R}'^n} + \sum_1^q n(n+1)\cdots(n+m-1)\frac{(-1)^m}{\mathrm{R}'^{n+m}}\mathrm{M}'_m.$$

Per conseguenza quando i determinati

$$\left|\begin{matrix} \mathrm{M}_0 & , & \mathrm{M}_0 \log \mathrm{R} + \sum_1^q \Pi(m-1)\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}^m}\mathrm{M}_m \\ \mathrm{M}'_0 & , & \mathrm{M}'_0 \log \mathrm{R}' + \sum_1^q \Pi(m-1)\frac{(-1)^{m-1}}{\mathrm{R}'^m}\mathrm{M}'_m \end{matrix}\right|,$$

$$\left|\begin{matrix} l_n & , & \lambda_n \\ l'_n & , & \lambda'_n \end{matrix}\right|$$

sono sempre differenti da zero si può determinare in un modo solo la u, purchè la serie che risulta sia convergente in egual grado nel campo compreso fra i due cerchi (il contorno incluso). Affinchè la u risulti la parte reale di una funzione monodroma bisogna evidentemente che si abbia:

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{f(\omega)}{\mathrm{M}_0} - \frac{\varphi(\omega)}{\mathrm{M}'_0}\right)d\omega = 0.$$

XIX.

I metodi indicati nei due paragrafi precedenti rendono necessario di verificare la convergenza in egual grado di serie i cui termini sono funzioni di due variabili e che verificano l'equazione $\Delta^2 = 0$. In molti casi perciò potrà riescire utile applicare il seguente teorema:

Se $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s), \cdots$ sono funzioni dell'arco s del contorno di un campo C (connesso o no), se la serie

$$\sum_1^\infty{}_n\, f_n(s)$$

è convergente in egual grado per tutti i valori di s, e se è possibile determinare le funzioni $u_1, u_2, \cdots, u_n, \ldots$ definite in tutto il campo C finite, continue (il contorno incluso), che assumono al contorno rispettivamente i valori $f_1(s), f_2(s), \cdots, f_n(s), \cdots$ e che soddisfano l'equazione $\Delta^2 = 0$, saranno verificate le seguenti proprietà:

1° la serie

$$\sum_1^\infty{}_n\, u_n = \mathrm{V}$$

sarà convergente in egual grado entro tutto il campo C;

2° si potranno eseguire le derivazioni successive per serie della funzione V in tutti i punti interni a C ed in direzioni qualunque;

3° la funzione V verificherà l'equazione $\Delta^2 V = 0$ in tutti i punti interni al campo C.

Infatti dovranno esistere due valori s_1 e s_2 di s per cui si ha

$$\sum_p^m {}_n f_n(s_1) < \sum_p^m {}_n u_n(x, y) < \sum_p^m {}_n f_n(s_2),$$

qualunque sia il punto (x, y) interno a C. Ma si può prendere p così grande che si abbia qualunque sia s e qualunque sia $m > p$, in valore assoluto

$$\sum_p^m {}_n f_n(s) < \sigma$$

in cui σ è un numero piccolo ad arbitrio. Avremo quindi in valore assoluto:

$$\sum_p^m {}_n u_n(x, y) < \sigma,$$

per tutti i punti (x, y) interni a C. Ciò prova che la serie

$$\sum_1^\infty u_n = V$$

è convergente in egual grado in tutto il campo C.

Preso a considerare un cerchio qualunque c di raggio R, situato tutto internamente a C, e chiamando $u_{n,c}$ e V_c i valori di u_n e V al contorno di esso avremo in un punto qualunque interno ad esso di coordinate polari r e α riferite al centro del cerchio preso come origine:

$$u_n(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{n,c} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta,$$

quindi per quanto è stato ora dimostrato:

$$V(r, \alpha) = \sum_1^\infty {}_n u_n(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\sum_1^\infty {}_n \int_0^{2\pi} u_{n,c} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_c \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} d\theta.$$

Ne segue, indicando con $\left(\frac{\partial^n}{\partial a_1, \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,\alpha}$ la derivata di una funzione nel punto (r, α) di C presa rispetto alle direzioni $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$\left(\frac{\partial^n V}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_c \frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\right) d\theta$$

$$= \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_{n,c} \frac{\partial^n}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\right) d\theta = \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{\partial^n u_n}{\partial a_1 \partial a_2, \cdots, \partial a_n}\right)_{r,\alpha}.$$

Ciò evidentemente dimostra la seconda e la terza parte del teorema enunciato.

XX.

Può applicarsi il metodo del § XVIII per determinare la funzione φ analoga a quella di GREEN, volendo adoperare la formula (5) (vedi § XIII) nel caso in cui il campo nel quale è definita la U sia quello compreso fra i due cerchi concentrici di raggi R e R' $(R > R')$ e sia s_1 il contorno del circolo di raggio R, s_2 il contorno del circolo di raggio R'.

Ponendo l'origine delle coordinate nel centro comune dei due cerchi, prendendo le coordinate polari ρ e θ, e ricordando che si ha, se r rappresenta la distanza fra i punti (ρ, θ) e (ρ_1, θ_1):

$$\log r = \log \rho - \sum_1^\infty \frac{\rho_1^n}{n\rho^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho > \rho_1$, e

$$\log r = \log \rho_1 - \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{n\rho_1^n} \cos n(\theta - \theta_1)$$

per $\rho < \rho_1$, si trova che la φ viene data dalla serie,

$$a + a' \log \rho + \sum_1^\infty a_n \frac{\rho^n}{R^n} \cos n(\theta - \theta_1) + \sum_1^\infty \alpha_n \frac{R'^n}{\rho^n} \cos n(\theta - \theta_1);$$

i cui coefficienti vengono determinati dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} & B_1 a + \left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R}\right) a' = B_1 \log R - \frac{A_1}{R} \\ & B_2 a + \left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'}\right) a' = B_2 \log \rho_1 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} & \left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R}\right) a_n + \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right) \frac{R'^n}{R^n} \alpha_n = \frac{\rho_1^n}{nR^n} \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right), \\ & \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \frac{R'^n}{R^n} a_n + \left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'}\right) \alpha_n = \frac{R'^n}{n\rho_1^n} \left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \end{aligned}\right.$$

in cui le B e le A hanno lo stesso significato che venne loro attribuito nel § XIII, quando i determinanti

$$B_1\left(B_2 \log R' + \frac{A_2}{R'}\right) - B_2\left(B_1 \log R - \frac{A_1}{R}\right),$$

$$\left(\frac{B_1}{n} - \frac{A_1}{R}\right)\left(\frac{B_2}{n} - \frac{A_2}{R'}\right) - \left(\frac{B_1}{n} + \frac{A_1}{R}\right)\left(\frac{B_2}{n} + \frac{A_2}{R'}\right) \frac{R'^{2n}}{R^{2n}}$$

si mantengono sempre diversi da zero.

Infatti in questo caso si vede che la serie che dà il valore di φ risulta convergente in egual grado anche per ρ eguale a R e a R'.

Pisa, 15 gennaio 1882.

V.

SOPRA UNA LEGGE DI RECIPROCITÀ NELLA DISTRIBUZIONE DELLE TEMPERATURE E DELLE CORRENTI GALVANICHE COSTANTI IN UN CORPO QUALUNQUE (*)

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. XI, 1882; pp. 188–192.

Per il teorema di GREEN generalizzato dai signori THOMSON e TAIT (1), si ha, supponendo ψ_1, ψ_2 e α funzioni di x, y, z monodrome finite e continue insieme alle loro derivate prime e seconde, in un campo S a tre dimensioni limitato da un contorno σ formato da una o più superficie

$$\iiint_S \alpha^2 \left(\frac{d\psi_1}{dx}\frac{d\psi_2}{dx} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{d\psi_2}{dy} + \frac{d\psi_1}{dz}\frac{d\psi_2}{dz} \right) dS$$

$$= -\iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iiint_S \psi_1 \left(\frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dz}\right)}{dz} \right) dS$$

$$= -\iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma - \iiint_S \psi_2 \left(\frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dz}\right)}{dz} \right) dS,$$

in cui $d\psi/dn$ sta ad indicare la derivata della funzione ψ rispetto alla normale n al contorno σ diretta verso l'interno di S.

Poniamo

$$\frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_1}{dz}\right)}{dz} = f_1$$

$$\frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(\alpha^2 \frac{d\psi_2}{dz}\right)}{dz} = f_2,$$

avremo

$$(1) \qquad \iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_S (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)\, dS = 0,$$

(*) Nel titolo di questo lavoro al nome dell'A. segue la qualifica di « Allievo della R. Scuola Normale Superiore di Pisa ».

(1) *Handbuch der Theoretischen Physik* von W. THOMSON und P. G. TAIT. Bd. 1. Th. 1. s. 152.

da cui si deduce ponendo $\psi_2 = 1$,

$$\iint_\sigma \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_S f_1 \, dS = 0. \tag{2}$$

Supponiamo f_1 sempre finita e continua e ψ_1 pure sempre finita continua e monodroma insieme alle sue derivate, escluso il punto a interno ad S; suppongasi inoltre

$$\iint_{\sigma'} \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma' + \iiint_{S'} f_1 \, dS' = 1,$$

in cui σ' è una superficie qualunque che limita una porzione S′ di S nel cui interno è situato a. A causa della (2) avremo evidentemente, se σ'' è un altro contorno il quale limita una porzione S″ di S che contiene nell'interno a,

$$\iint_{\sigma''} \alpha^2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma'' + \iiint_{S''} f_1 \, dS'' = 1.$$

Sia s la superficie di una sfera situata tutta internamente ad S, avente per raggio r, per centro a; alla superficie di questa sfera $d\psi_1/dr$ conservi sempre lo stesso segno per tutti i valori della r sufficientemente piccoli. Supposta α sempre diversa da zero dovremo avere per tutti i valori di r, in valore assoluto,

$$r^2 \iint_\omega \frac{d\psi_1}{dr} d\omega < A, \tag{3}$$

in cui A è un numero finito e ω è la sfera di raggio 1. Risulterà quindi in valore assoluto

$$r^2 \iint_\omega \psi_1 \, d\omega < Br \tag{4}$$

essendo B un numero finito.

Ora si ha, a causa della (1)

$$\iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_{S_1} (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)) \, dS$$

$$= - \iint_s \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dr} ds + \iint \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dr} ds$$

essendo S_1 il campo S meno il campo rinchiuso dalla sfera s. Ne segue col fare impiccolire indefinitamente s, ponendo mente alle relazioni (3) e (4) e supponendo ψ_1 sempre dello stesso segno in vicinanza di a, che

$$\psi_2(a) = \iint_\sigma \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint_\sigma \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint_S (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1) \, dS \tag{5}$$

in cui $\psi_2(a)$ indica il valore di ψ_2 nel punto a. Se la ψ_2 oltre alla singolarità in a gode della proprietà che

$$\iint\limits_{\sigma'''} \alpha^2\left(\frac{d\psi_1}{dn}\right) d\sigma''' + \iiint\limits_{S'''} f_1\, dS''' = -1$$

in cui σ''' è il contorno di una porzione qualunque S''' di S nel cui interno è il punto b, e $d\psi_1/dn$ e ψ_1 al contorno di sfere sufficientemente prossime a b hanno sempre lo stesso segno, allora non ha più luogo la (5) ma si deve avere

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma + \iiint\limits_{S} (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)\, dS,$$

purchè si supponga la f_1 sempre finita e continua in tutto il campo S.

Moltiplichiamo ambo i membri per la costante M e sostituiamo a ψ_1 e a ψ_2, respettivamente $\psi_1 + P$ e $\psi_2 + P$, essendo P una costante, avremo:

$$M[\psi_2(a) - \psi_2(b)] = \iint\limits_{\sigma} \alpha^2 (\psi_1 + P)\left[M\frac{d\psi_2}{dn} + N(\psi_2 + P)\right] d\sigma$$

$$-\iint\limits_{\sigma} \alpha^2 (\psi_2 + P)\left[M\frac{d\psi_1}{dn} + N(\psi_1 + P)\right] d\sigma + \iiint\limits_{S} [(\psi_1 + P) f_2 - (\psi_2 + P) f_1]\, dS.$$

Suppongasi ora che la ψ_2 goda rispetto a due punti c e d delle stesse proprietà di cui gode la ψ_1 rispetto ai punti a e b. Allora la formula precedente varrà quando si sostituisca $\sigma + \sigma_c + \sigma_d$ a σ, e $S - S_c - S_d$ ad S, essendo σ_c e σ_d i contorni di campi semplicemente connessi S_c e S_d che racchiudono respettivamente i punti c e d.

Sia entro S

$$f_1 = f_2 = 0$$

e sopra σ

$$M\frac{d\psi_2}{dn} + N(\psi_2 + P) = M\frac{d\psi_1}{dn} + N(\psi_1 + P) = 0,$$

avremo

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \iint\limits_{\sigma_c + \sigma_d} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_c + \sigma_d} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma.$$

Ma

$$\iint\limits_{\sigma_c} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_c} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma = \psi_1(c)$$

$$\iint\limits_{\sigma_d} \alpha^2 \psi_1 \frac{d\psi_2}{dn} d\sigma - \iint\limits_{\sigma_d} \alpha^2 \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} d\sigma = -\psi_1(d),$$

quindi sarà

$$\psi_2(a) - \psi_2(b) = \psi_1(c) - \psi_1(d).$$

Alla stessa conclusione si giunge supponendo ψ_1 e ψ_2 funzioni di due variabili definite in un campo a due dimensioni e aventi le stesse singolarità nei punti a, b, c, d.

La eguaglianza precedente ci dimostra:

1° Se in un corpo qualunque di cui la conducibilità al calore varia con continuità da punto a punto, si hanno in due punti A e B due sorgenti di calore tali che la quantità di calore che entra dall'una sia eguale a quella che esce dall'altra, e in due punti C e D si ha una certa differenza di temperatura t, poste le due sorgenti di calore in C e in D si avrà in A e in B la stessa differenza di temperatura.

2° Se in un conduttore a due o a tre dimensioni di cui la conducibilità varia con continuità da punto a punto si fa passare una corrente di intensità I da un punto A ad un punto B, e in due punti C e D si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti A e B quando si faccia entrare da C e escire da D la stessa corrente d'intensità I [2].

Come conseguenza si ha:

3° Se i punti C e D appartengono a una linea o a una superficie di livello quando la corrente va da A a B, A e B apparterranno pure ad una linea o ad una superficie di livello quando la corrente si fa entrare da C e escire da D.

La prova sperimentale di questa proprietà nel caso di conduttori a due dimensioni riesce di grandissima facilità non richiedendosi nel conduttore nè una forma determinata nè la omogeneità.

Pisa, 12 maggio 1882.

(2) Vedi *A Treatise on Electricity and Magnetism by* JAMES CLERK MAXWELL, vol. I, p. 335.

VI.

SOPRA ALCUNI PROBLEMI DI IDRODINAMICA [1]

« Nuovo Cimento », ser. 3ª, vol. XII, 1882_2, pp. 65-96.

Nella presente Nota vengono risoluti alcuni problemi di idrodinamica con un metodo analogo a quello con cui vennero risoluti da Sir W. THOMSON alcuni problemi di elettrostatica applicando il principio delle immagini [2].

Colla risoluzione di questi problemi di idrodinamica si ottiene anche la soluzione di alcune questioni sulla distribuzione delle correnti elettriche stazionarie nei conduttori a tre dimensioni. Come è noto, nel caso di conduttori a due dimensioni è applicabile il principio delle immagini in modo del tutto simile al caso della elettrostatica [3], mentre ciò non avviene quando i conduttori sono a tre dimensioni [4].

Darò prima qualche teorema generale e considererò poi successivamente il caso di due sfere (che si tagliano o no) le quali si muovono in un fluido incompressibile e indefinito parallelamente alla retta dei centri, il caso di una sfera che si muove in un fluido incompressibile limitato da un piano indefinito o da una sfera fissa, il caso di sfere situate in un fluido le quali cambiano di raggio, e finalmente il caso di una o più sfere situate in un fluido nel quale esistono delle linee vorticose.

I.

Siano A e B due punti reciproci rispetto alla sfera σ di raggio R, di centro O. Sia concentrata nel punto A una massa a, nel punto B una massa b, e sulla retta [*] $OB = \rho_1$ una massa omogenea ad una dimensione colla densità c. Le funzioni potenziali di queste tre masse, se il punto potenziato E

(1) Questa Nota era già ultimata quando venni a conoscere che il sig. HICKS in due sue recenti Memorie (*Il moto di due sfere in un fluido*, London, « Phil. Trans. Roy. Soc. » 1880, part II; *Sopra il problema di due sfere pulsanti in un fluido e sopra la gravitazione degli atomi vorticosi*, « Proc. Camb. Phil. Soc. » 1879-80) aveva già applicato il metodo delle immagini alla risoluzione dei problemi di idrodinamica. Però alcune formule che vengono date nella presente Nota non si trovano nelle Memorie del sig. HICKS.

(2) *Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism by* WILLIAM THOMSON, § XIV.

(3) G. KIRCHHOFF, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 7.

(4) MAXWELL, *Electricity and Magnetism*, § 316.

(*) Qui, e talvolta anche in seguito, l'A. usa il vocabolo retta nel senso di segmento rettilineo [N.d.R.].

ha le coordinate ρ, θ, φ rispetto al centro della sfera come polo e alla retta OA come asse polare, saranno rispettivamente

$$\frac{a}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}},$$

$$\frac{b}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}},$$

$$c\log\frac{\rho_1 - \rho\cos\theta + \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}}{-\rho\cos\theta + \rho}.$$

Quindi la funzione potenziale delle tre masse sarà

$$f(\rho, \theta) = \frac{a}{\sqrt{\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}} + \frac{b}{\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}}$$

$$+ c\log\frac{\rho_1 - \rho\cos\theta + \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}}{-\rho\cos\theta + \rho}.$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial f}{\partial\rho} = -a\frac{\rho - \frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta}{\left(\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right)^{3/2}} - b\frac{\rho - \rho_1\cos\theta}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta)^{3/2}}$$

$$-c\frac{\rho_1}{\rho\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta}}.$$

Facendo $\rho = R$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)_{\rho=R} = -a\frac{\rho_1^2}{R^2}\frac{\rho_1 - R\cos\theta}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}} - b\frac{R - \rho_1\cos\theta}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}}$$

$$-c\frac{\rho_1}{R(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{1/2}} = -\frac{[a\rho_1^3 + bR^3 + cR\rho_1(R^2 + \rho_1^2)] - \rho_1 R(a\rho_1 + bR + 2cR\rho_1)\cos\theta}{R^2(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{3/2}}.$$

Ponendo

$$a\rho_1^3 + bR^3 + cR\rho_1(R^2 + \rho_1^2) = 0,$$

$$a\rho_1 + bR + 2cR\rho_1 = 0,$$

sí otterrà

$$b = \frac{\rho_1}{R}a \quad , \quad c = -\frac{1}{R}a.$$

Ciò prova il seguente teorema:

Se in A *è concentrata la massa a, in* B *la massa* $\frac{\rho_1}{R}a$, *e sulla retta* OB *si trova una massa ad una dimensione colla densità* $-\frac{1}{R}a$, *la funzione potenziale di queste masse ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale alla superficie* σ.

Supponiamo ora che in un punto A sia concentrata la massa $-a$, in un punto B la massa $+a$ e sia $AB = d$. Se, restando costante $ad = \mu$, A si avvicina indefinitamente a B, la funzione potenziale delle due masse tende verso quella di un *elemento magnetico* il cui asse è AB e il cui momento è μ [5]. Tale funzione potenziale sarà

$$-\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x},$$

se AB è l'asse delle x, r la distanza del punto potenziato da B, x, y, z le coordinate del punto potenziato.

Supponiamo che i punti A e A′, B e B′ siano rispettivamente reciproci rispetto ad una sfera σ di raggio R di centro O [*]. Poniamo:

$$OA' = \rho_1 \quad , \quad OB' = \rho_2 \quad , \quad AB = d.$$

Sia in A concentrata una massa $-a$, in B una massa a, in A′ una massa $-\frac{\rho_1}{R} a$, in B′ una massa $+\frac{\rho_2}{R} a$, sulla retta A′ B′ una massa avente la densità $\frac{a}{R}$.

Per il teorema precedente la funzione potenziale di tutte queste masse avrà, nei punti della superficie della sfera, la derivata rispetto alla normale nulla.

Facciamo avvicinare B indefinitamente ad A, in modo che resti costante

$$ad = \mu.$$

Le masse situate esternamente alla sfera si riducono ad un elemento magnetico concentrato nel punto A di momento μ, e di cui l'asse è OA. Le masse situate internamente alla sfera si riducono pure ad un elemento magnetico di momento

$$\mu' = -\mu \frac{\rho_1^3}{R^3}$$

concentrato in A′ e il cui asse è OA′.

Si ha dunque che *la funzione potenziale di questi due elementi magnetici ha nulla la derivata rispetto alla normale alla superficie della sfera.*

Questa proprietà si verifica direttamente con facilità.

Infatti la funzione potenziale dei due elementi magnetici A e A′ (se le coordinate cartesiane del punto potenziato sono x, y, z e le sue coordinate polari rispetto al polo O e alla polare OA sono ρ, θ, φ) sarà data da

$$f(\rho, \theta) = -\mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{\rho_1}\right)^2 + y^2 + z^2}} - \mu' \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x-\rho_1)^2 + y^2 + z^2}} =$$

(5) E. BETTI, *Teorica delle forze Newtoniane*, Cap. III, § 1.

(*) In più è sottinteso che A e B siano allineati con O, ecc. [N.d.R.].

$$= \mu \frac{x - \frac{R^2}{\rho_1}}{\left[\left(x - \frac{R^2}{\rho_1}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}} + \mu' \frac{x - \rho_1}{([x - \rho_1]^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \mu \frac{\rho \cos\theta - \frac{R^2}{\rho_1}}{\left(\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho \frac{R^2}{\rho_1} \cos\theta\right)^{3/2}} + \mu' \frac{\rho\cos\theta - \rho_1}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\theta)^{3/2}},$$

quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \mu \frac{\cos\theta\left(\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\rho\frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right) - 3\left(\rho - \frac{R^2}{\rho_1}\cos\theta\right)\left(\rho\cos\theta - \frac{R^2}{\rho_1}\right)}{\left(\rho^2 + \frac{R^4}{\rho_1^2} - 2\frac{R^2}{\rho_1}\rho\cos\theta\right)^{5/2}}$$

$$+ \mu' \frac{\cos\theta\,(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta) - 3\,(\rho - \rho_1\cos\theta)\,(\rho\cos\theta - \rho_1)}{(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1\cos\theta)^{5/2}}.$$

Facendo $\rho = R$, si ottiene:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \mu \frac{\rho_1^3}{R^3} \frac{\cos\theta\,(\rho_1^2 + R^2 - 2\rho_1 R\cos\theta) - 3\,(\rho_1 - R\cos\theta)\,(\rho_1\cos\theta - R)}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{5/2}}$$

$$+ \mu' \frac{\cos\theta\,(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta) - 3\,(R - \rho_1\cos\theta)\,(R\cos\theta - \rho_1)}{(R^2 + \rho_1^2 - 2R\rho_1\cos\theta)^{5/2}}.$$

Questa espressione è evidentemente nulla quando

$$\mu' = -\mu \frac{\rho_1^3}{R^3}.$$

Col far crescere indefinitamente il raggio R della sfera σ si può passare dalla considerazione della sfera a quella di un piano indefinito. Però si trovano più facilmente gli stessi resultati direttamente.

Abbiasi concentrata la massa $-a$ in ciascuno dei due punti A ed A′ simmetrici rispetto ad un piano α. La funzione potenziale di queste due masse avrà la derivata rispetto alla normale al piano nulla nei punti del piano stesso.

Nei punti B e B′ pure simmetrici rispetto ad α e situati sulla retta AA′ si concentri la massa $+a$. La funzione potenziale dei quattro punti A, A′, B e B′ avrà la derivata rispetto alla normale al piano nulla.

Ora si facciano avvicinare A e B indefinitamente e nello stesso tempo si faccia crescere a pure indefinitamente in modo che, posto $AB = d$, il prodotto

$$ad = \mu$$

si mantenga costante.

Le quattro masse verranno a costituire due elementi magnetici simmetrici rispetto ad α, concentrati in B e B′, di momenti μ e $-\mu$ e la cui funzione potenziale avrà la derivata rispetto alla normale ad α nei punti di questo piano nulla.

Abbiamo dunque:

La funzione potenziale di masse elettriche eguali e dello stesso segno situate simmetricamente rispetto ad un piano ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale al piano, mentre, *la funzione potenziale di elementi magnetici eguali e di momenti di segno opposto, situati simmetricamente rispetto ad un piano, con gli assi perpendicolari ad esso, ha eguale a zero la derivata rispetto alla normale al piano.*

Riprendiamo il caso di una sfera. Siano A e B due punti allineati col centro O della sfera σ di raggio R e situati esternamente alla sfera stessa; supponiamo che A sia il punto più vicino al centro della sfera.

Sia concentrata nel punto A la massa

$$m = a\delta$$

e distribuita sulla retta $AB = a$ una massa colla densità $-\delta$.

A causa del primo teorema dimostrato si avrà che sarà possibile distribuire nell'interno della sfera σ una massa, in modo che la derivata della funzione potenziale di questa massa e di quella situata esternamente alla sfera, presa rispetto alla normale alla superficie della sfera, sia nulla.

Vediamo di determinare applicando il primo teorema queste masse interne alla sfera.

Sia C un punto della retta AB compreso fra questi due punti; poniamo $OC = \rho$; potremo evidentemente considerare le masse situate esternamente alla sfera come costituite dalla massa concentrata in A e dalle masse

$$-\delta d\rho$$

concentrate in ciascun elemento C.

Cerchiamo successivamente quali masse vanno aggiunte nell'interno della sfera alla massa A e a ciascuna delle masse

$$-\delta d\rho$$

affinchè la derivata rispetto alla normale alla sfera della funzione potenziale resulti nulla.

Sia A′ il punto reciproco ad A rispetto alla sfera σ; poniamo $b = OA'$. È evidente che la massa concentrata in A, una massa $ab\delta/R$ concentrata in A′ ed una massa ad una dimensione distribuita colla densità $-a\delta/R$ sopra OA′, hanno la funzione potenziale colla derivata rispetto alla normale alla superficie nulla.

Sia C′ reciproco al punto C e $OC' = \rho'$. La massa

$$-\delta d\rho$$

concentrata in C, la massa

$$\frac{-\delta\rho'}{R} d\rho$$

omogenee ad una dimensione distribuite sulle rette OB ed OB′ colle densità

$$-\frac{u}{2} r^2 \frac{1}{R} \quad , \quad \frac{u}{2} r^2 \frac{1}{R} ;$$

si farà la somma di queste funzioni potenziali e si andrà al limite per $r = \infty$.

Passando al limite, le masse situate nell'interno della sfera vengono a costituire un elemento magnetico di momento

$$\frac{R^3 u}{2}$$

e il cui asse è l'asse delle x.

Di qui si deduce immediatamente *che se in un fluido le cui particelle a distanza infinita sono fisse si ha una sfera che si muove parallelamente ad una data direzione, il potenziale di velocità del fluido sarà eguale alla funzione potenziale di un elemento magnetico concentrato nel centro della sfera il cui asse coincide colla direzione del moto* [(6)].

Se in un fluido indefinito e incompressibile si hanno più sfere che si tagliano o no, fisse e coi centri disposti nella direzione della velocità che ha il fluido all'infinito, a causa delle proprietà ora dimostrate e del secondo teorema del § 1, si vede come si potrà applicare, per determinare il potenziale di velocità, il metodo delle immagini successive.

Quando si hanno due sfere che non si tagliano, le immagini verranno in numero infinito; se si tagliano sotto un angolo π/n, n essendo un numero intero, le immagini verranno in numero finito [(7)].

Evidentemente lo stesso metodo delle immagini successive potrà applicarsi quando le particelle del fluido situate a distanza infinita saranno fisse e le sfere si muoveranno nella direzione della retta dei centri colla medesima velocità o con velocità diversa.

Consideriamo il caso di due sfere che non si tagliano né si toccano e che si muovono lungo la retta dei centri colle velocità U ed U′. Supponiamo inoltre che le particelle del fluido situate a distanza infinita siano fisse.

Condotto un piano che passi per i centri delle due sfere, si ottengano delle sezioni le quali appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v [(8)]. Supponiamo che le due sezioni corrispondano a

$$u = \alpha > 0 \quad , \quad u = \alpha' < 0 .$$

Le coordinate dei centri m_0 e m_0' delle due sfere saranno:

$$v = 0 \quad , \quad u = 2\,\alpha ,$$
$$v = 0 \quad , \quad u = 2\,\alpha' ,$$

ed i raggi

$$R = \frac{a}{\operatorname{senh} \alpha} \quad , \quad R' = - \frac{a}{\operatorname{senh} \alpha'} ,$$

essendo $2a$ la distanza fra i due poli nel sistema di coordinate in questione.

(6) Vedi G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mathematische Physik. Mechanik*, p. 227.
(7) Vedi MAXWELL, op. cit., § 166.
(8) Vedi E. BETTI, op. cit., Cap. II, § VI.

L'immagine di m_0 rispetto alla sfera α' sia m_1, quella di m_1 rispetto alla sfera α sia m_2, ecc. L'immagine di m'_0 rispetto ad α sia m'_1, quella di m'_1 rispetto ad α' sia m'_2, ecc.

Ponendo $\alpha - \alpha' = \omega$, le coordinate dei punti

$$m_{2s} \quad , \quad m_{2s-1} \quad , \quad m'_{2s} \quad , \quad m'_{2s-1}$$

saranno

$$\begin{cases} v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha + 2s\omega \,, \\ v = 0 \quad , \quad u = -2s\omega \,, \\ v = 0 \quad , \quad u = 2\alpha' - 2s\omega \,, \\ v = 0 \quad , \quad u = 2s\omega \,. \end{cases}$$

Quindi i *parametri di Neumann* corrispondenti agli stessi punti resulteranno dati da

$$\begin{cases} \xi_{2\alpha+2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)} \,, \\ \xi_{-2s\omega,0} = -\dfrac{a}{\operatorname{senh} s\omega} \,, \\ \xi_{2\alpha'-2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh}(\alpha' - s\omega)} \,, \\ \xi_{2s\omega,0} = \dfrac{a}{\operatorname{senh} s\omega} \,. \end{cases}$$

Indicando con ρ_{2s} la distanza del punto m_{2s} dal punto m_0, con ρ_{2s-1} la distanza del punto m_{2s-1} dal punto m'_0, con ρ'_{2s} la distanza del punto m'_{2s} dal punto m'_0 e con ρ'_{2s-1} la distanza del punto m'_{2s-1} da m_0, avremo

$$\begin{cases} \rho_{2s} = a\dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh}(\alpha + s\omega)} \,, \\ \rho_{2s-1} = -a\dfrac{\operatorname{senh}[\alpha + (s-1)\omega]}{\operatorname{senh}\alpha' \operatorname{senh} s\omega} \,, \\ \rho'_{2s} = -a\dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}\alpha' \operatorname{senh}(s\omega - \alpha')} \,, \\ \rho'_{2s-1} = a\dfrac{\operatorname{senh}[(s-1)\omega - \alpha']}{\operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh} s\omega} \,, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{2s}}{R} = \dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)} \,, \\ \dfrac{\rho_{2s-1}}{R'} = \dfrac{\operatorname{senh}[\alpha + (s-1)\omega]}{\operatorname{senh} s\omega} \,, \\ \dfrac{\rho'_{2s}}{R'} = \dfrac{\operatorname{senh} s\omega}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')} \,, \\ \dfrac{\rho'_{2s-1}}{R} = \dfrac{\operatorname{senh}[(s-1)\omega - \alpha']}{\operatorname{senh} s\omega} \,. \end{cases}$$

Ora il momento dell'elemento magnetico che deve essere concentrato in m_0 è

$$\mu_0 = -\frac{U}{2} R^3 = -\frac{U}{2}\left(\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha}\right)^3,$$

e quello dell'elemento che deve essere concentrato in m'_0

$$\mu'_0 = -\frac{U'}{2} R'^3 = \frac{U'}{2}\left(\frac{a}{\operatorname{senh}\alpha'}\right)^3.$$

Chiamando $\mu_{2s}, \mu_{2s-1}, \mu'_{2s}, \mu'_{2s-1}$ i momenti degli elementi magnetici che devono essere concentrati nei punti $m_{2s}, m_{2s-1}, m'_{2s}, m'_{2s-1}$, avremo

$$\left\{\begin{aligned} \mu_{2s} &= -\frac{U}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha+s\omega)}, \\ \mu_{2s-1} &= \frac{U}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}, \\ \mu'_{2s} &= -\frac{U'}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega-\alpha')}, \\ \mu'_{2s-1} &= \frac{U'}{2} a^3 \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}. \end{aligned}\right.$$

Quindi chiamando r_p la distanza del punto m_p da un punto e esterno alle due sfere in questione, e r'_p la distanza dello stesso punto e dal punto m'_p, avremo che il potenziale di velocità del fluido nel punto e sarà dato da

$$\varphi_e = \frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha+s\omega)} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{U'a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega-\alpha')} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

quando si prenda per asse delle x la retta dei centri delle due sfere e si supponga che le coordinate del punto e siano x, y, z.

È stato così determinato il potenziale di velocità indipendentemente dal metodo dello sviluppo per funzioni sferiche (9).

La formola trovata presenta una grande analogia colla nota formola che dà la funzione potenziale nel caso della distribuzione dell'elettricità in equilibrio sopra due sfere conduttrici in presenza una dell'altra; soltanto la serie trovata nel nostro caso è più rapidamente convergente di quella che figura nella formula analoga di elettrostatica (10).

Si passa immediatamente dal caso ora considerato di due sfere esterne una all'altra, al caso di due sfere che si toccano e si muovono colla stessa velocità in direzione parallela alla retta dei centri. Come è noto basta sosti-

(9) Vedi KIRCHHOFF, op. cit., p. 228.
(10) Vedi E. BETTI, op. cit., cap. II, § VII.

tuire alle coordinate dipolari u e v le coordinate definite da $\mu a = \operatorname{senh} u/2$, $\nu a = \operatorname{sen} v/2$ e passare al limite per $a = 0$. Se i raggi delle due sfere sono R′ e R, si trova

$$\lim_{a=0} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}{a} = \frac{1}{R} + s\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{R' + s(R + R')}{RR'}.$$

Quindi il potenziale di velocità nel punto e resulta:

$$\varphi_e = \frac{U}{2} R^3 R'^3 \left(\sum_0^\infty {}_s \frac{1}{[R' + s(R+R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{[s(R+R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \right.$$
$$\left. + \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{[R + s(R+R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{[s(R+R')]^3} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \right).$$

Studiamo ora il moto di un solido formato da due callotte sferiche convesse maggiori ciascuna di una mezza sfera, entro un fluido indefinito incompressibile e senza attrito, parallelamente alla retta dei centri.

Conduciamo per la retta dei centri un piano; le due sezioni prodotte nelle sfere appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v. Supponiamo che le sezioni corrispondano a

$$v = \beta > 0 \quad , \quad v = \beta' < 0 .$$

Le coordinate dei centri m_0 e m'_0 saranno

$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta ,$$
$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta' ,$$

e i raggi delle due sfere

$$R = \frac{a}{\operatorname{sen}\beta} ,$$
$$R' = -\frac{a}{\operatorname{sen}\beta'} ,$$

essendo $2a$ la corda d'intersezione delle due circonferenze β e β'.

Prendiamo a considerare il caso in cui l'angolo secondo cui si tagliano le due sfere è π/n, essendo n un numero intero.

L'immagine di m_0 rispetto alla sfera β' sia m_1, quella di m_1 rispetto alla sfera β sia m_2, l'immagine di questo punto rispetto a β' sia m_3, ecc.

Avremo che tutte queste immagini fino a $m_{2(n-1)}$ saranno situate internamente alle due sfere e questo punto coinciderà con m'_0. Le coordinate dei punti m_{2s} e m_{2s-1}, saranno

$$u = 0 \quad , \quad v = 2\beta + 2s\vartheta ,$$
$$u = 0 \quad , \quad v = -2s\vartheta ,$$

quando si ponga

$$\vartheta = \beta - \beta' .$$

Passando ai *parametri di Neumann* si ottiene:

$$\xi_{0,2\beta+2s\vartheta} = \frac{a}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)},$$

$$\xi_{0,-2s\vartheta} = \frac{a}{-\operatorname{sen} s\vartheta},$$

onde, chiamando ρ_{2s} la distanza di m_0 da m_{2s} e ρ_{2s-1} quella di m_0 da m_{2s-1}, si ha

$$\begin{cases} \rho_{2s} = \dfrac{a \operatorname{sen} s\vartheta}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)\operatorname{sen}\beta}, \\[2ex] \rho_{2s-1} = -\dfrac{a\operatorname{sen}[\beta+(s-1)\vartheta]}{\operatorname{sen} s\vartheta \operatorname{sen}\beta'}, \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_{2s}}{R} = \dfrac{\operatorname{sen} s\vartheta}{\operatorname{sen}(\beta+s\vartheta)}, \\[2ex] \dfrac{\rho_{2s-1}}{R'} = \dfrac{\operatorname{sen}[\beta+(s-1)\vartheta]}{\operatorname{sen} s\vartheta}. \end{cases}$$

Indichiamo rispettivamente con μ_{2s} e μ_{2s-1} i momenti degli elementi magnetici che debbono venire concentrati in m_{2s} e m_{2s-1}; avremo, chiamando U la velocità con cui si muovono le due callotte nel fluido,

$$\mu_{2s} = -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3(\beta+s\vartheta)} = -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\dfrac{s\pi}{n}\right)}$$

$$\mu_{2s-1} = \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3 s\vartheta} = \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{sen}^3\dfrac{s\pi}{n}}.$$

Se quindi prendiamo per asse delle x la retta dei centri, il potenziale di velocità del fluido nel punto e di coordinate x, y, z sarà dato da

$$\varphi_e = \frac{U}{2}a^3\left(\sum_0^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\dfrac{s\pi}{n}\right)}\frac{\partial\dfrac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sen}^3\dfrac{s\pi}{n}}\frac{\partial\dfrac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

in cui r_p rappresenta la distanza del punto e dal punto m_p.

Si vede dunque come nel caso di due callotte che si tagliano sotto un angolo sottomultiplo di π, il potenziale di velocità resulta sotto forma finita.

Se le due callotte sferiche sono ortogonali, in tal caso gli elementi magnetici che dovranno supporsi concentrati nell'interno delle sfere saranno tre soltanto. Essi saranno concentrati rispettivamente nei centri A e B delle due sfere, e nel punto C d'intersezione del piano d'incontro delle due sfere e della retta dei centri AB. I loro momenti saranno

$$-\frac{R^3 U}{2}, \quad -\frac{R'^3 U}{2}, \quad \frac{R^3 R'^3 U}{2(R^2+R'^2)^{3/2}},$$

se R e R' saranno i raggi delle due sfere, U la velocità con cui si muovono. L'asse magnetico sarà la retta AB dei centri.

Questo resultato si verifica direttamente con grandissima facilità.

Dalle formule trovate si hanno immediatamente le equazioni delle linee di flusso nei diversi moti considerati delle sfere o delle callotte sferiche in un fluido.

Le linee di flusso saranno infatti, nei diversi casi considerati, delle linee situate in piani che passano per la retta dei centri delle sfere, ed in essi avranno per equazione [11]

$$\int y\left(\frac{\partial\varphi_e}{\partial x}\,dy-\frac{\partial\varphi_e}{\partial y}\,dx\right)=\text{cost.},$$

essendo φ_e il potenziale di velocità nel punto e di coordinate x e y.

Ora si riconosce facilmente che

$$\int y\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dy-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)dx\right]=\frac{\partial}{\partial x}\cos\psi,$$

in cui r rappresenta la distanza di un punto di coordinate x e y da un punto dell'asse delle x, e ψ rappresenta l'angolo che la retta che congiunge questi punti fa coll'asse delle x; quindi le linee di flusso, nel caso delle due sfere che non si tagliano né si toccano, saranno definite dalla equazione:

$$\frac{\mathrm{U}\,a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha+s\omega)}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\mathrm{U}'a^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega+\alpha')}\frac{\partial\cos\psi'_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\frac{\partial\cos\psi'_{2s-1}}{\partial x}\right)=\text{cost.};$$

nel caso in cui le due sfere si toccano da

$$\frac{\mathrm{UR}^3\,\mathrm{R}'^3}{2}\left(\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{[\mathrm{R}'+s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{[s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right.$$
$$\left.+\sum_0^\infty{}_s\frac{1}{[\mathrm{R}+s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi'_{2s}}{\partial x}-\sum_1^\infty{}_s\frac{1}{[s(\mathrm{R}+\mathrm{R}')]^3}\frac{\partial\cos\psi'_{2s-1}}{\partial x}\right)=\text{cost.}$$

e nel caso delle due calotte sferiche da

$$\frac{\mathrm{U}}{2}a^3\left[\sum_0^{n-1}{}_s\frac{1}{\operatorname{sen}^3\left(\beta+\frac{s\pi}{n}\right)}\frac{\partial\cos\psi_{2s}}{\partial x}-\sum_1^{n-1}{}_s\frac{1}{\operatorname{sen}^3\frac{s\pi}{n}}\frac{\partial\cos\psi_{2s-1}}{\partial x}\right]=\text{cost.}$$

Con ψ_p s'intende l'angolo che la retta congiungendo il punto e di coordinate x e y col punto m_p fa coll'asse x, con ψ'_p l'angolo della retta em'_p coll'asse x. È noto il significato che nei diversi casi hanno i punti m_p e m'_p.

Si può anche dedurre facilmente dalle espressioni trovate per il potenziale di velocità nei diversi casi considerati, il valore della forza viva del fluido.

Abbiamo infatti, se φ è il potenziale di velocità del fluido, μ la sua densità, che la sua forza viva è

$$\mathrm{T}=-\frac{\mu}{2}\int_\sigma\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma,$$

(11) Vedi E. Betti, op. cit., cap. I, § XXIII.

in cui σ è la superficie contorno del fluido, n la normale alla superficie σ diretta verso l'interno del fluido.

Consideriamo il caso delle due sfere esterne una all'altra. Abbiamo in un punto qualunque della superficie della sfera α

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathrm{U} \cos \theta ,$$

se con θ si indica l'angolo che il raggio che va al punto in questione fa colla direzione positiva dell'asse x. Alla superficie della sfera α' abbiamo analogamente in un punto qualunque

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathrm{U}' \cos \theta' ,$$

in cui θ' è l'angolo che il raggio che va al punto considerato fa colla direzione positiva dell'asse x.

Ne segue che la forza viva sarà data da:

$$\mathrm{T} = -\left(\mathrm{U} \int_{\alpha} \varphi \cos \theta \, d\sigma + \mathrm{U}' \int_{\alpha'} \varphi \cos \theta' \, d\sigma'\right) \frac{\mu}{2} .$$

Ora, se r_m indica la distanza di un punto della sfera α di coordinate x , y , z da un punto m situato sull'asse x alla distanza l dal centro della sfera α, abbiamo

$$\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r_m}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\mathrm{R}^3}{l^3}$$

se $l > \mathrm{R}$; e abbiamo

$$\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r_m}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi$$

se $l < \mathrm{R}$. Quindi:

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi , \\
&\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = -\frac{4}{3} \pi , \\
&\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\rho_{2s}^3}{\mathrm{R}^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{\operatorname{senh}^3 s\omega}{\operatorname{senh}^3 (\alpha + s\omega)} , \\
&\int_{\alpha} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} \cos \theta \, d\sigma = \frac{8}{3} \pi \frac{\rho'^3_{2s+1}}{\mathrm{R}^3} = \frac{8}{3} \pi \frac{\operatorname{senh}^3 (s\omega - \alpha')}{\operatorname{senh}^3 (s+1) \omega} ,
\end{aligned}\right.$$

e analogamente:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} \cos\theta'\, d\sigma' = \frac{8}{3}\pi \frac{\rho^3_{2s+1}}{R'^3} = \frac{8}{3}\pi \frac{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\,,\\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s-1}}}{\partial x} \cos\theta'\, d\sigma' = \frac{8}{3}\pi \frac{\rho'^3_{2s}}{R'^3} = \frac{8}{3}\pi \frac{\operatorname{senh}^3 s\omega}{\operatorname{senh}^3(s\omega - \alpha')}\,,\\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x} \cos\theta'\, d\sigma' = -\frac{4}{3}\pi\,,\\
&\int_{\alpha'} \frac{\partial \frac{1}{r'_{2s}}}{\partial x} \cos\theta'\, d\sigma' = -\frac{4}{3}\pi\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Ne segue

$$
\int_{\alpha} \varphi \cos\theta d\sigma = -\frac{2}{3}\pi U \frac{a^3}{\operatorname{senh}^3\alpha} - 2\pi U a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} + 2\pi U' a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\,,
$$

$$
\int_{\alpha'} \varphi \cos\theta' d\sigma' = 2\pi U a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} - 2\pi U' a^3 \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega - \alpha')} + \frac{2}{3}\pi U' \frac{a^3}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\,,
$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{3}\pi\mu a^3 \left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3\alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\right) + \pi U^2 a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}\\
+ \pi U'^2 a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s\omega - \alpha')} - 2\pi U U' a^3 \mu \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega}\,.
\end{aligned}
$$

Nel caso delle due sfere a contatto, essendo le velocità eguali, la espressione precedente diviene:

$$
\begin{aligned}
T' = \pi\mu U^2 R^3 R'^3 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R^3} + \frac{1}{R'^3}\right) - \sum_{1}^{\infty}{}_{s} \left(\frac{2}{[s(R + R')]^3} - \frac{1}{[R + s(R + R')]^3}\right.\right.\\
\left.\left. - \frac{1}{[R' + s(R + R')]^3}\right)\right].
\end{aligned}
$$

La forza viva T può anche porsi sotto altre forme.

Ponendo mente ai valori trovati per μ_s e μ'_s, si ha

$$
T = -2\pi\mu \left[\frac{1}{3}(U\mu_0 + U'\mu'_0) + U \sum_{1}^{\infty}{}_{s} (\mu_{2s} + \mu'_{2s-1}) + U' \sum_{1}^{\infty}{}_{s} (\mu'_{2s} + \mu_{2s-1})\right].
$$

Le serie che qui compariscono nella espressione di T si sommano facilmente applicando il metodo dei residui. Si ottiene così la forza viva espressa per mezzo di integrali definiti.

Applicheremo a tale scopo la formula [12]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\varphi(z)\,w(z)\,dz-\sum_1^{m_n}{}_r\,\gamma_r=\sum_1^{n}{}_s\frac{\varphi(\lambda_s)}{u'(\lambda_s)},$$

nella quale $\varphi(z)$ e $w(z)$ sono funzioni della variabile complessa z, uniformi e senza singolarità essenziali; $u(z)=1/w(z)$; la $w(z)$ diviene infinita del primo ordine nei punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$; la $\varphi(z)$ non diviene infinita in questi punti; $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m_n}$ sono i residui della $\varphi(z)\,w(z)$ negli altri punti d'infinito; C_n è una curva che racchiude i punti $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ e quelli corrispondenti a $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m_n}$. Prendiamo

$$\varphi(z)=\frac{1}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)}\quad,\quad w(z)=\frac{1}{\operatorname{tang} z};$$

C_n eguale al rettangolo di cui due lati sono

$$y=\frac{\pi}{2\lambda}=\mu'\quad,\quad y=-\frac{\pi}{2\lambda},$$

e gli altri sono

$$x=\frac{\pi}{2}\qquad x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

Avremo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z}=\sum_1^{n}{}_s\frac{1}{\operatorname{senh}^3(a+s\lambda\pi)}.$$

Ora, se $a+\lambda\frac{\pi}{2}=\nu$,

$$\int_{C_n}\frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z}=\int_{(n+1/2)\pi}^{\pi/2}\frac{dx}{\operatorname{senh}^3\left(a+\lambda x+i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(x+i\mu')}$$

$$+\int_{\pi/2}^{(n+1/2)\pi}\frac{dx}{\operatorname{senh}^3\left(a+\lambda x-i\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tang}(x-i\mu')}$$

$$+\int_{\mu'}^{-\mu'}\frac{i\,dy}{\operatorname{senh}^3(\nu+iy\lambda)\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)}+\int_{-\mu'}^{\mu'}\frac{i\,dy}{\operatorname{senh}^3(\nu+\lambda n\pi+iy\lambda)\operatorname{tang}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+iy\right]}.$$

Ossia, chiamando ε l'ultimo termine,

$$\int_{C_n}\frac{dz}{\operatorname{senh}^3(a+\lambda z)\operatorname{tang} z}=-i\int_{\pi/2}^{(n+1/2)\pi}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(a+\lambda x)(\operatorname{senh}^2\mu'+\operatorname{sen}^2 x)}\,dx$$

$$+2i\int_0^{\mu'}\operatorname{tangh} y\,\frac{\operatorname{sen}\lambda y\cosh\nu\,(3\operatorname{senh}^2\nu\cos^2\lambda y-\cosh^2\nu\operatorname{sen}^2\lambda y)}{(\operatorname{senh}^2\nu+\operatorname{sen}^2\lambda y)^3}\,dy+\varepsilon=$$

(12) Vedi DINI, *Serie di Fourier*, p. 146.

$$= i \int_0^{n\pi} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(\nu+\lambda x)(\operatorname{senh}^2 \mu' + \cos^2 x)} dx$$

$$+ 2i \int_0^{\mu'} \operatorname{tangh} y \frac{\operatorname{sen} \lambda y \cosh \nu (3 \operatorname{senh}^2 \nu \cos^2 \lambda y - \cosh^2 \nu \operatorname{sen}^2 \lambda y)}{(\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \lambda y)^3} dy + \varepsilon .$$

Si ha dunque

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh^3(\nu+\lambda x)(\operatorname{senh}^2 \mu' + \cos^2 x)} dx$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\mu'} \frac{\operatorname{sen} \lambda y \cosh \nu (3 \operatorname{senh}^2 \nu \cos^2 \lambda y - \cosh^2 \nu \operatorname{sen}^2 \lambda y)}{(\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \lambda y)^3} \operatorname{tangh} y \, dy = \sum_1^{\infty} {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 (a + s\lambda\pi)} .$$

Se ne deduce la seguente espressione della forza viva per mezzo di integrali definiti:

$$T = \frac{1}{3} \pi a^3 \mu \left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3 \alpha'} \right) + \frac{1}{2} a^3 \mu \int_0^{\infty} \left(\frac{U^2}{\cosh^3(\nu+\lambda x)} + \frac{U'^2}{\cosh^3(\nu'+\lambda x)} \right.$$

$$\left. - \frac{2UU'}{\cosh^3(\nu''+\lambda x)} \right) \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{senh}^2 \mu' + \cos^2 x} dx + a^3 \mu \int_0^{\mu'} \left(\frac{U^2 \cosh \nu (3 \operatorname{senh}^2 \nu \cos^2 \lambda y - \cosh^2 \nu \operatorname{sen}^2 \lambda y)}{(\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \lambda y)^3} \right.$$

$$+ \frac{U'^2 \cosh \nu' (3 \operatorname{senh}^2 \nu' \cos^2 \lambda y - \cosh^2 \nu \operatorname{sen}^2 \lambda y)}{(\operatorname{senh}^2 \nu' + \operatorname{sen}^2 \lambda y)^3}$$

$$\left. - 2 \frac{UU' \cosh \nu'' (3 \operatorname{senh}^2 \nu'' \cos^2 \lambda y - \cosh^2 \nu \operatorname{sen}^2 \lambda y)}{(\operatorname{senh}^2 \nu'' + \operatorname{sen}^2 \lambda y)^3} \right) \operatorname{sen} \lambda y \operatorname{tangh} y \, dy,$$

nella quale si ha:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega}{\pi} , \\ \mu' &= \frac{\pi^2}{2\omega} , \\ \nu &= \alpha + \frac{\omega}{2} , \\ \nu' &= -\alpha' + \frac{\omega}{2} , \\ \nu'' &= \frac{\omega}{2} . \end{aligned} \right.$$

Se noi supponiamo le due sfere α ed α' ad una distanza grandissima rispetto ai loro raggi, avremo che α e $-\alpha'$ saranno grandissimi, quindi ω, ν, ν', ν'' saranno pure grandissimi, mentre μ' sarà piccolissimo. Ne segue che i tre termini costituenti l'ultimo integrale della espressione precedente di T sono tutti di un ordine inferiore di grandezza dei tre termini costituenti il primo integrale. Abbiamo quindi per T il seguente valore approssimato:

$$T_0 = \frac{1}{3}\pi a^3 \mu \left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3\alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\right) + \frac{1}{2} a^3 \mu \int_0^\infty \left(\frac{U^2}{\cosh^3(\nu+\lambda x)} + \frac{U'^2}{\cosh^3(\nu'+\lambda x)}\right.$$

$$\left. - \frac{2\,UU'}{\cosh^3(\nu''+\lambda x)}\right) \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{senh}^2\mu' + \cos^2 x}\, dx\,.$$

Se le due sfere hanno lo stesso raggio e si muovono colla stessa velocità e nella stessa direzione si deduce, dalla prima espressione trovata per T, il seguente valore per la forza viva del fluido:

$$T_1 = 2\,\pi\, a^3\, \mu\, U^2 \left(-\frac{2}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty {}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha}\right).$$

Per esprimere la serie contenuta in questa espressione mediante integrali definiti, poniamo nella formola citata della teoria dei residui

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{\operatorname{senh}^3\alpha z}\,, \\ w(z) &= \frac{-\pi}{\operatorname{sen}\pi z}\,, \end{aligned}\right.$$

e prendiamo per C_n il rettangolo che ha per lati

$$y = R \quad , \quad y = -R$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = n + \frac{1}{2}\,;$$

avremo

$$-\frac{1}{2i}\int_{C_n} \frac{dz}{\operatorname{senh}^3\alpha z \operatorname{sen}\pi z} = \sum_1^n {}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha}\,,$$

da cui (*) si deduce:

$$\sum_1^\infty {}_s \frac{(-1)^{s-1}}{\operatorname{senh}^3 s\alpha} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha y}{\cosh\pi y} \frac{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha y - 3\cosh^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\alpha y\right)}{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha y\right)^3}\,dy.$$

Abbiamo dunque

$$T_1 = 2\,\pi a^3\, \mu U^2 \left(-\frac{2}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \int_0^\infty \frac{\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha y}{\cosh\pi y} \frac{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha y - 3\cosh^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}^2\alpha y\right)}{\left(\operatorname{senh}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\alpha y\right)^3}\,dy \right).$$

Il valore della forza viva T nel caso generale può ottenersi sempre espresso per mezzo di integrali definiti, applicando un'altra formula della teoria dei residui ([13]), sotto una forma un poco diversa da quella ora trovata.

(*) Facendo tendere all'infinito anche R [N.d.R.].

(13) Vedi Dini, op. cit., p. 143.

La formula da cui si parte è:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \varphi(z)\, w^2(z)\, dz - \sum_{1}^{m_n}{}_r\, \gamma_r = \sum_{1}^{n}{}_s \frac{\varphi'(\lambda_s)\, u'(\lambda_s) - \varphi(\lambda_s)\, u''(\lambda_s)}{u'(\lambda_s)^3}$$

nella quale $\varphi(z)$, $w(z)$, ecc. hanno lo stesso significato di quello che hanno nella formula della teoria dei residui precedentemente considerata.

Prendiamo:

$$\begin{cases} w(z) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z} \\[2ex] \varphi(z) = \omega \operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z + \pi \cosh(\alpha + z\omega)\, \dfrac{1}{\cos^2 \pi z} \end{cases}$$

e per C_n il rettangolo che ha per lati

$$y = \frac{\pi}{\omega} = \mu \quad , \quad y = -\frac{\pi}{\omega}$$

$$x = \frac{1}{2} \quad , \quad x = n + \frac{1}{2}.$$

Avremo

$$\frac{\omega}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z}{[\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z]^2}\, dz + \frac{1}{2 i}\int_{C_n} \frac{\cosh(\alpha + z\omega)\dfrac{1}{\cos^2\pi z}}{[\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z]^2}\, dz$$

$$= -\frac{2\omega}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)},$$

ovvero

$$-\frac{1}{4i}\int_{C_n}\frac{dz}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)\operatorname{tang}\pi z} + \frac{\pi^2}{2\omega^2 i}\int_{C_n}\frac{1}{\operatorname{senh}(\alpha + z\omega)}\,\frac{\cos\pi z}{\operatorname{sen}^3\pi z}\, dz = \sum_{1}^{n}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)},$$

e quindi, ponendo

$$\nu = \frac{2\alpha + \omega}{2},$$

si avrà

$$\sum_{1}^{\infty}{}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} = \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{1}{\operatorname{senh}(\nu + \omega x)}\,\frac{\operatorname{senh} 2\mu\pi}{\operatorname{senh}^2\mu\pi + \cos^2\pi x}\, dx$$

$$-\frac{\pi^2}{\omega^2}\int_0^{\infty}\frac{\cosh\nu \operatorname{sen}\omega y}{\operatorname{senh}^2\nu + \operatorname{sen}^2\omega y}\,\frac{\operatorname{senh}\pi y}{\cosh^3\pi y}\, dy - \frac{1}{2}\int_0^{\mu}\frac{\cosh\nu \operatorname{sen}\omega y}{\operatorname{senh}^2\nu + \operatorname{sen}^2\omega y}\operatorname{tangh}\pi y\, dy.$$

Da questa formula si deduce:

$$T = \frac{1}{3}\pi a^3 \mu\left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}^3\alpha} - \frac{U'^2}{\operatorname{senh}^3\alpha'}\right) + \pi a^3 \mu\left[\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\left(\frac{U^2}{\operatorname{senh}(\nu + \omega x)} + \frac{U'^2}{\operatorname{senh}(\nu' + \omega x)}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{2UU'}{\operatorname{senh}(\nu'' + \omega x)}\right)\frac{\operatorname{senh} 2\mu\pi}{\operatorname{senh}^2\mu\pi + \cos^2\pi x}\, dx - \frac{\pi^2}{\omega^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\cosh\nu}{\operatorname{senh}^2\nu + \operatorname{sen}^2\omega y}\, U^2 + \right.$$

$$+\frac{\cosh \nu'}{\operatorname{senh}^2 \nu' + \operatorname{sen}^2 \omega y} U'^2 - 2\frac{\cosh \nu''}{\operatorname{senh}^2 \nu'' + \operatorname{sen}^2 \omega y} UU'\Big)\frac{\operatorname{sen} \pi y}{\cosh^3 \pi y} \operatorname{sen} \omega y \, dy$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\mu \Big(\frac{\cosh \nu}{\operatorname{senh}^2 \nu + \operatorname{sen}^2 \omega y} U^2 + \frac{\cosh \nu'}{\operatorname{senh}^2 \nu' + \operatorname{sen}^2 \omega y} U'^2$$

$$-\frac{2\cosh \nu'}{\operatorname{senh}^2 \nu'' + \operatorname{sen}^2 \omega y} UU'\Big) \operatorname{tangh} \pi y \operatorname{sen} \omega y \, dy\Big] .$$

La espressione della forza viva diviene molto semplice nel caso di due sfere eguali di raggio R che si muovono colla velocità U mantenendosi sempre fra loro tangenti. Essa risulta:

$$T' = 2\pi\mu U^2 R^3 \left(-\frac{2}{3} + \sum_1^\infty {}_s \frac{(-1)^s}{s^3}\right).$$

Ma si ha per la prima delle formule citate della teoria dei residui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\,dy}{\left(\frac{1}{2}+iy\right)^3 \operatorname{sen}\pi\left(\frac{1}{2}+iy\right)} = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty {}_s \frac{(-1)^s}{s^3},$$

ovvero

$$8\int_0^\infty \frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3}\frac{dy}{\cosh \pi y} = \sum_1^\infty {}_s \frac{(-1)^s}{s^3};$$

quindi, sostituendo,

$$T' = 2\mu\pi U^2 R^3 \left(-\frac{2}{3} + 8\int_0^\infty \frac{1-12y^2}{(1+4y^2)^3}\frac{dy}{\cosh \pi y}\right).$$

III.

Passiamo ora a considerare il caso del moto di una sfera in un fluido incompressibile limitato da un piano indefinito fisso. Supponiamo che il moto avvenga normalmente al piano colla velocità U, e supponiamo inoltre che le particelle del fluido situate a distanza infinita siano fisse. Conduciamo un piano che passi per il centro della sfera e sia normale al piano dato. Prendiamo in questo piano un sistema di coordinate dipolari u, v in modo che i poli siano disposti simmetricamente rispetto alla retta A B d'intersezione dei due piani, e la sezione della sfera sia una delle linee coordinate

$$u = \alpha = \text{cost.} > 0 .$$

Sia m_0 il centro di questa sezione, m'_0 sia il punto simmetrico rispetto ad A B; sia m_1 l'immagine di m'_0 rispetto ad α; m'_1 sia simmetrico rispetto ad A B; ecc.

Le coordinate dei punti $m_0, m_1, \cdots, m_s, \cdots$ saranno:

$$u = 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2(s+1)\alpha, \cdots; v = 0$$

e quelle dei punti $m'_0, m'_1, \cdots, m'_s, \cdots$ saranno:

$$u = -2\alpha, -4\alpha, \cdots -2(s+1)\alpha, \cdots; v = 0.$$

Chiamiamo ρ_s la distanza del punto m_s dal punto m_0, avremo:

$$\rho_s = \frac{a \operatorname{senh} s\alpha}{\operatorname{senh}\alpha \operatorname{senh}(s+1)\alpha}$$

in cui a è la distanza fra i due poli. Se R è il raggio della sfera, sarà

$$R = \frac{a}{\operatorname{senh}\alpha},$$

quindi:

$$\frac{\rho_s}{R} = \frac{\operatorname{senh} s\alpha}{\operatorname{senh}(s+1)\alpha}.$$

I momenti degli elementi magnetici che dovremo concentrare nei punti

$$m_0, m_1, \cdots, m_s, \cdots$$

saranno dunque

$$-\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3\alpha}, \quad -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 2\alpha}, \cdots -\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}, \cdots$$

e quelli degli elementi magnetici che dovremo concentrare in

$$m'_0, m'_1, \cdots, m'_s \cdots$$

saranno:

$$\frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3\alpha}, \quad \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3 2\alpha}, \cdots, \frac{U}{2}\frac{a^3}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}, \cdots$$

Per conseguenza se chiamiamo r_s la distanza di un punto e appartenente al fluido dal punto m_s, e r'_s la distanza di e dal punto m'_s, avremo che il potenziale di velocità del fluido nel punto e di coordinate x, y, z sarà

$$\varphi_e = \frac{U}{2} a^3 \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}\left(\frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r'_s}}{\partial x}\right),$$

quando si prenda per asse x la perpendicolare alla retta A B condotta pel centro m_0 della sfera.

Questa formula si può dedurre da quella trovata nel caso delle due sfere esterne una all'altra (§ 2), facendo in essa $U' = 0$, $\alpha' = 0$.

Le equazioni delle linee di flusso saranno date in questo caso da

$$\frac{U}{2} a^3 \sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}\left(\frac{\partial \cos\psi_s}{\partial x} - \frac{\partial \cos\psi'_s}{\partial x}\right) = \text{cost.}$$

in cui ψ_s e ψ'_s rappresentano gli angoli che le congiungenti il punto di coordinate x, y, z con m_s e m'_s fanno cogli assi.

Se nella formula trovata nel caso delle due sfere esterne una all'altra facciamo $U' = 0$ e supponiamo che α' sia positivo e minore di α invece di essere negativo, la formula che si ottiene

$$\varphi_e = \frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s}}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \frac{1}{r_{2s-1}}}{\partial x}\right),$$

ci rappresenterà il potenziale di velocità del fluido rinchiuso entro la sfera α' nel cui interno la sfera α si muove colla velocità U lungo un diametro.

Le linee di flusso sono date da:

$$\frac{Ua^3}{2}\left(\sum_0^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)} \frac{\partial \cos \psi_{2s}}{\partial x} - \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3 s\omega} \frac{\partial \cos \psi_{2s-1}}{\partial x}\right) = \text{cost.}$$

Anche in questi casi riesce molto facile calcolare la forza viva del fluido. Avremo, nel caso della sfera e del piano, che essa sarà data da

$$T = -\frac{\mu}{2}\int_\sigma \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = -\frac{\mu}{2}\int_\sigma \varphi U \cos\theta\, d\sigma,$$

in cui μ rappresenta la densità del fluido, θ è l'angolo che il raggio corrispondente ad un punto della sfera fa coll'asse x, gli integrali sono estesi alla superficie della sfera.

Se ne deduce

$$T = -\frac{\mu}{4} U^2 a^3 \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s + \alpha\, 1)} \int_\sigma \left(\frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r'_s}}{\partial x}\right)\cos\theta\, d\sigma.$$

Eseguendo le integrazioni si ha

$$T = \pi\mu U^2 a^3 \left(\frac{1}{3\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(s+1)\alpha}\right).$$

Sarebbe facile anche in questo caso ridurre la serie che qui comparisce ad integrali definiti.

Nel caso di una sfera interna all'altra, la forza viva risulterà evidentemente

$$T = \pi U^2 a^3 \mu \left(\frac{1}{3}\frac{1}{\operatorname{senh}^3\alpha} + \sum_1^\infty {}_s \frac{1}{\operatorname{senh}^3(\alpha + s\omega)}\right).$$

IV.

Se in un fluido incompressibile e indefinito sono immerse delle sfere di cui il raggio cambia, mentre i centri restano invariati, e se le particelle del fluido a distanza infinita sono fisse, il potenziale di velocità del fluido in un dato istante sarà una funzione che verifica l'equazione

$$\Delta^2 = 0\,.$$

si annulla insieme alle sue derivate all'infinito, e ha la derivata rispetto alla normale alla superficie di ciascuna sfera eguale ad una costante, variabile da sfera a sfera.

Consideriamo una sfera di raggio R immersa in un fluido indefinito, e in un dato istante supponiamo che il suo raggio cresca colla velocità U.

Per quanto è stato ora detto avremo che il potenziale di velocità in quell'istante, supponendo che le particelle del fluido a distanza infinita siano fisse, sarà eguale alla funzione potenziale di una massa

$$-R^2 U$$

concentrata nel centro della sfera. Se ora supponiamo che nel fluido sia immersa una seconda sfera fissa e col raggio fisso, il potenziale di velocità del fluido si potrà determinare col metodo delle immagini successive [14] cioè prendendo l'immagine L della massa $-R^2 U$ concentrata nel centro della prima sfera rispetto alla seconda sfera, quindi l'immagine L′ di L rispetto alla prima sfera e così di seguito; determinando quindi la funzione potenziale di tutte le immagini successive.

Evidentemente per il primo e per l'ultimo dei teoremi del § 1 ciascuna di queste immagini consisterà in una massa distribuita con densità uniforme sopra una porzione di retta e una concentrata in un punto, la somma delle due masse essendo nulla.

Il potenziale di velocità si ottiene così sotto forma di una serie convergente in egual grado insieme alle sue derivate.

Se anche l'altra sfera ha il raggio variabile, il potenziale di velocità si otterrà sommando i due potenziali che si hanno considerando successivamente ciascuna delle due sfere come fissa. Se poi, oltre a cambiare il raggio, cambiano anche le posizioni dei centri delle due sfere lungo la retta dei centri, bisognerà sommare i due potenziali di velocità che nascono per il movimento dei centri delle sfere e per il cambiamento dei raggi.

Supponiamo che le due sfere abbiano i centri m_0 e m'_0. Le sezioni che si ottengono con un piano che passa per i centri appartengano ad un sistema di coordinate dipolari u e v ed abbiano i parametri $\alpha > 0$ e $\alpha' < 0$. Supponiamo inoltre che la sfera α' sia fissa ed abbia il raggio fisso, mentre il raggio della sfera α cresca colla velocità U.

Siano m_0 e m_1 punti reciproci rispetto alla sfera α', m_1 e m_2 punti reciproci rispetto alla sfera α, m_2 e m_3 punti reciproci rispetto ad α', ecc.; siano m'_0 e m'_1 punti reciproci rispetto alla sfera α, m'_1 e m'_2 punti reciproci rispetto alla sfera α', ecc.

La distanza fra i due punti m_{2s} e m'_{2s-1} sarà

$$m_{2s}\, m'_{2s-1} = \frac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)\operatorname{senh} s\omega} \operatorname{senh} \alpha,$$

(14) In questo paragrafo si diranno immagini una dell'altra, rispetto ad una sfera, due masse distribuite in punti e su segmenti di retta tali, che la loro funzione potenziale abbia la derivata rispetto alla normale alla sfera nulla.

e la distanza fra i due punti m_{2s+1} e m'_{2s} sarà

$$m_{2s+1}\, m'_{2s} = \frac{a}{\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')\operatorname{senh}(s+1)\omega}\operatorname{senh}\alpha\,;$$

quindi l'immagine $2s^{\text{esima}}$ sarà costituita dalla massa

$$-\mathrm{UR}\frac{a}{\operatorname{senh}(\alpha + s\omega)}$$

concentrata nel punto m_{2s} e dalla massa colla densità

$$\mathrm{U}a\operatorname{senh} s\omega$$

distribuita uniformemente sul segmento $m_{2s}\, m'_{2s-1}$; l'immagine $(2s+1)^{\text{esima}}$ sarà costituita dalla massa

$$-\mathrm{UR}\frac{a}{\operatorname{senh}(s+1)\omega}$$

concentrata nel punto m_{2s+1} e dalla massa distribuita uniformemente colla densità

$$\mathrm{U}a\operatorname{senh}(s\omega - \alpha')$$

sulla retta $m_{2s+1}\, m'_{2s}$.

Chiamando dunque con X (a, b, e) la funzione potenziale di un segmento omogeneo di densità 1 limitato dai punti a e b, essendo e il punto potenziato, si avrà che il potenziale di velocità del fluido nel punto e sarà dato da:

$$-\mathrm{U\,R}a\left(\sum_{0}^{\infty}{}_s \frac{1}{r_{2s}\operatorname{senh}(s\omega + \alpha)} + \sum_{0}^{\infty}{}_s \frac{1}{r_{2s+1}\operatorname{senh}(s+1)\omega}\right)$$

$$+\mathrm{U}a\left[\sum_{1}^{\infty}{}_s \operatorname{senh} s\omega\, \mathrm{X}(m_{2s}, m'_{2s-1}, e) + \sum_{1}^{\infty}{}_s \operatorname{senh}((s-1)\omega - \alpha')\, \mathrm{X}(m_{2s-1}, m'_{2s-2}, e)\right]$$

in cui r_k sta ad indicare la distanza del punto m_k dal punto e.

V.

È per ultimo da notare come [osservando che le componenti della velocità delle particelle di un fluido indefinito, in cui non è immerso alcun solido e ove si hanno delle linee vorticose, possono esprimersi per mezzo della funzione potenziale di masse magnetiche] applicando i principii enunciati al § 1 possono con grandissima facilità determinarsi le componenti delle velocità delle diverse particelle di un fluido avente note linee vorticose in un dato istante, quando in esso sia immersa una sfera solida fissa, oppure avente un dato moto di traslazione, con un raggio costante, oppure con un raggio variabile con una data legge.

In casi particolari riesce facile applicare il metodo delle immagini successive se nel fluido è immersa più di una sfera.

Pisa, giugno 1882.

VII.

SULLE APPARENZE ELETTROCHIMICHE ALLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO

« Atti Acc. Scienze Torino », vol. XVIII, 1882, pp. 147–168 (*).

Per primo A. TRIBE [1] e successivamente il prof. A. ROITI [2] si occuparono dell'estensione e della forma dei depositi che si ottengono in una lastra metallica immersa in un elettrolita percorso da una corrente. Per quanto è a mia cognizione, tali fenomeni vennero finora studiati soltanto sperimentalmente.

Il prof. A. ROITI mi propose lo studio matematico del fenomeno nel caso in cui la corrente passasse in un elettrolita fra due lastre parallele metalliche in esso immerse e gli ioni venissero a depositarsi sopra un cilindro disposto parallelamente agli elettrodi.

Il fenomeno può supporsi avvenire come se l'elettrolita fosse un conduttore indefinito percorso da un flusso costante di elettricità ed il cilindro fosse pure indefinito e coll'asse diretto normalmente alla direzione della corrente principale. In tal caso la deposizione degli ioni avviene in modo che una striscia longitudinale del cilindro risulta coperta da uno di essi, un'altra striscia dall'altro ione; mentre restano scoperte due porzioni del cilindro comprese fra i due depositi. Gli ioni si vedono comparire dopo alcuni istanti da che è cominciato il passaggio della corrente ed il passaggio successivo di essa non fa che aumentare la grossezza degli strati depositati, senza sensibilmente variare l'ampiezza delle quattro regioni in cui viene a suddividersi la superficie del cilindro. Le correnti possono allora considerarsi come stazionarie.

1.

A fondamento dei calcoli venne presa l'ipotesi accennata dal prof. ROITI nella sua Memoria citata, e da esso confermata con diverse prove, che la causa degli spazi ove non si vede la deposizione degli ioni debba attribuirsi alla corrente secondaria di polarizzazione.

Non è ammissibile che la sede delle forze elettromotrici di polarizzazione, allorquando è raggiunto il periodo stazionario delle correnti, debba trovarsi *soltanto nei punti ove si vedono i depositi degli ioni*. Infatti, la

(*) Presentata dal Socio G. FERRARIS nell'adunanza del 17 dicembre 1882.

(1) « Philosophical Magazine », ser. 5, vol. XI, p. 446 (1881).

(2) « Nuovo Cimento », ser. 3, vol. X, p. 97 (1881).

corrente prodotta dalla forza elettromotrice di polarizzazione, che nasce nei punti ove i depositi sono visibili, *si aggiunge* alla corrente principale nelle porzioni della superficie del cilindro che appaiono scoperte; quindi se in queste parti non vi fosse alcuna forza elettromotrice, vi nascerebbe un deposito che cangerebbe lo stato delle correnti. *È dunque necessario ammettere nel periodo stazionario una forza elettromotrice distribuita sopra tutta la superficie del cilindro*, e per conseguenza *bisognerà che esista un deposito elettrolitico anche in quelle parti del cilindro che sembrano rimanere scoperte.*

2.

Ecco come può supporsi l'andamento del fenomeno nel periodo variabile, affinchè nel periodo stazionario lo stato del cilindro risulti quale si è dovuto ammettere nel paragrafo precedente.

Nel primo istante in cui avviene il passaggio della corrente principale si formano sopra tutta la superficie del cilindro (esclusi i punti delle generatrici a, b) i depositi elettrolitici, onde viene a generarsi una corrente secondaria di polarizzazione dovuta alla debole forza elettromotrice prodotta. Questa corrente però è sufficiente a vincere quella principale nelle porzioni del cilindro vicine alle generatrici a, b (fig. I), quindi nell'istante successivo il deposito avviene soltanto in porzioni del cilindro più vicine alle generatrici c, d, nelle quali parti del cilindro cresce la forza elettromotrice. Si ha dunque che le porzioni della superficie in cui avviene il deposito si restringono continuamente mentre crescono in esse le forze elettromotrici. È noto per altro che le forze elettromotrici di polarizzazione hanno un massimo, raggiunto il quale, il depositarsi successivo degli ioni non aumenta il loro valore. Ne segue che a partire dall'istante nel quale, nelle porzioni in cui avviene il deposito, le forze elettromotrici hanno raggiunto questo massimo, le correnti diventano stazionarie ed in queste porzioni soltanto seguitano ad avvenire i depositi.

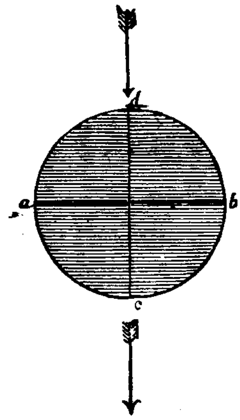


Fig. I.

Questo ci spiega l'apparenza del cilindro, perchè, mentre sarà visibile il deposito nelle parti in cui la forza elettromotrice ha raggiunto il valore massimo e in cui la grossezza degli strati depositati può aumentare continuamente, può non essere apprezzabile il velo sottilissimo aderente alle altre parti del cilindro.

3.

Il calcolo del fenomeno nel periodo variabile mi sembrò presentare troppe difficoltà; mi proposi invece di studiarlo a partire dall'istante in cui comincia il periodo stazionario, seguendo il concetto sopra accennato dello stato del cilindro in questo periodo.

Comincio dal cercare come deve essere distribuita la forza elettromotrice alla superficie del cilindro affinchè le correnti siano stazionarie; così vengo a trovare le condizioni a cui deve soddisfare la funzione potenziale della corrente di polarizzazione (§ 5). Da queste condizioni risulta che il problema ha un'unica soluzione (§ 6). Trasformate poi queste condizioni (§ 8) passo alla risoluzione del problema (§§ 9-10) [3]. Ottengo prima una relazione assai semplice per mezzo di integrali ellittici che lega *le ampiezze* dei depositi visibili, la *forza elettromotrice* di polarizzazione, la *densità* della corrente principale, la *conducibilità* del liquido e il *raggio* del cilindro. Un'altra formola mi dà poi il valore della forza elettromotrice nei diversi punti della superficie del cilindro (§ 12).

Il calcolo conduce a questi due risultati (§ 7):

1° Le ampiezze dei due depositi visibili sono sempre eguali fra loro, comunque siano le forze elettromotrici.

2° Queste ampiezze sono indipendenti dalla conducibilità del cilindro.

4.

Suppongasi un conduttore indefinito percorso da una corrente di intensità costante nella direzione negativa dell'asse delle y. Sia D la densità di questa corrente, μ la conducibilità del conduttore. In questo conduttore immergiamo un cilindro indefinito di conducibilità μ_1, di raggio R, in modo che il suo asse coincida coll'asse z.

Vediamo come viene modificata la corrente. Trattandosi di conduttori cilindrici la soluzione ci viene fornita per mezzo di una semplice applicazione del principio delle immagini [4].

Se indichiamo con $U(\rho, \theta)$ la funzione potenziale in un punto esterno al cilindro di coordinate cilindriche ρ, θ, z riferite all'asse z e al piano xOz, avremo:

$$U(\rho, \theta) = D\left[\frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 + \mu}\frac{R^2}{\rho} - \rho\right]\frac{\operatorname{sen}\theta}{\mu},$$

e se indichiamo con $U_1(\rho, \theta)$ la funzione potenziale in un punto (ρ, θ, z) interno al cilindro, avremo:

$$U_1(\rho, \theta) = -2D\left[\frac{1}{\mu + \mu_1}\rho \operatorname{sen}\theta\right].$$

(3) Questa risoluzione si appoggia sopra un metodo accennato nel § IX nella mia Nota, *Sopra alcune proprietà caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.* « Annali di Matematica », ser. II, vol XI, p. 1 (1882-83); [in questo volume: IV, pp. 49-95].

(4) Vedi J. C. MAXWELL, *Electricity and Magnetism*, vol. I, p. 367 (1873).

Ciò si verifica facilmente, infatti:

$$\lim_{y=\pm\infty}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial y}\right)=-D,$$

$$\begin{cases} U(\rho\,,\theta)_{\varrho=R}=-\dfrac{2\,D\,\text{sen}\,\theta}{\mu+\mu_1}R\,,\\ U_1(\rho\,,\theta)_{\varrho=R}=-\dfrac{2\,D\,\text{sen}\,\theta}{\mu+\mu_1}R\,,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\mu\dfrac{\partial U}{\partial\rho}\right)_{\varrho=R}=-\dfrac{2\mu_1}{\mu+\mu_1}D\,\text{sen}\,\theta\,,\\ \left(\mu_1\dfrac{\partial U_1}{\partial\rho}\right)_{\varrho=R}=-\dfrac{2\mu_1}{\mu+\mu_1}D\,\text{sen}\,\theta\,.\end{cases}$$

5.

Ciò premesso, vediamo come si deve distribuire alla superficie del cilindro una forza elettromotrice compresa fra due valori di segno opposto E e $-E_1$, in modo che nella porzione AB (fig. II) incognita della superficie del cilindro, la forza elettromotrice raggiunga il suo valore massimo E, nella porzione CD raggiunga il suo valore minimo $-E_1$; e nei tratti BD ed AC la componente normale della intensità della corrente prodotta dalla forza elettromotrice distribuita sul cilindro eguagli la componente normale della corrente principale; inoltre si abbia che nei tratti AB e CD la componente normale della corrente principale superi la componente normale della corrente prodotta dalla forza elettromotrice distribuita sul cilindro.

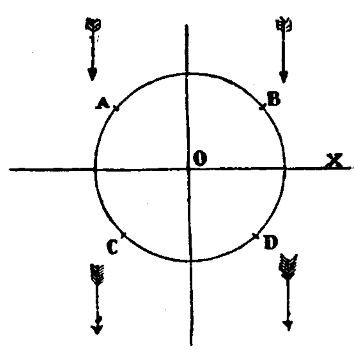


Fig. II.

Chiamiamo

$$V(\rho\,,\theta)$$

la funzione potenziale della corrente prodotta dalla forza elettromotrice incognita nei punti esterni al cilindro e

$$V_1(\rho\,,\theta)$$

la funzione potenziale della stessa corrente nei punti interni.

Poniamo

$$V'(\rho\,,\theta)=V\left(\frac{R^2}{\rho}\,,\theta\right),$$

e consideriamo la funzione

$$V_1(\rho\,,\theta)-V'(\rho\,,\theta)=\Theta(\rho\,,\theta).$$

Questa funzione sarà finita e continua e possiederà le seguenti proprietà:

1° verificherà l'equazione

$$\Delta^2 \Theta = 0,$$

2° nel tratto AB avremo:

$$\Theta = E,$$

e nel tratto CD

$$\Theta = -E_1,$$

3° nei tratti AC e BD avremo:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = P \operatorname{sen} \theta,$$

in cui n indica la normale al contorno diretta verso l'esterno e

$$P = \frac{2}{\mu} D.$$

Consideriamo ora la funzione

$$\mu V' + \mu_1 V_1 = \Omega(\rho, \theta).$$

Essa verificherà le condizioni seguenti:

1° avremo:

$$\Delta^2 \Omega = 0,$$

2° al contorno

$$\frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0.$$

Sarà per conseguenza

$$\Omega = \text{cost}.$$

La determinazione della legge secondo cui è distribuita la forza elettromotrice sul cilindro e della corrente da essa prodotta dipende quindi unicamente dalla determinazione della funzione Θ. Conosciuta questa funzione la costante Ω dovrà essere determinata in modo che il valore di V per $\rho = \infty$ sia lo zero.

6.

Vediamo se le tre condizioni imposte alla funzione Θ bastano a definirla univocamente, quando si osservi che deve aversi nei tratti AC e BD del contorno

$$E > \Theta > -E_1,$$

in AB

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} < \mathrm{P} \operatorname{sen} \theta$$

e in CD

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} > \mathrm{P} \operatorname{sen} \theta.$$

Supponiamo che due funzioni Θ_1 e Θ_2 verifichino contemporaneamente queste condizioni. Alla prima corrispondano i punti A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. III), alla seconda i punti A_2, B_2, C_2, D_2 (5). Consideriamo la loro differenza

$$\Theta_1 - \Theta_2 = \Theta_3 .$$

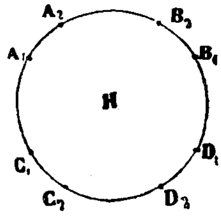


Fig. III.

Comunque siano disposti i punti $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$, avremo in alcune porzioni del contorno ($A_2 B_2$ e $C_2 D_2$ nella fig. III)

$$\Theta_3 = 0,$$

in altre ($A_1 C_1$ e $B_1 D_1$)

$$\frac{\partial \Theta_3}{\partial n} = 0,$$

e nelle rimanenti

$$\Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} < 0$$

come facilmente si può verificare.

Ne segue che

$$\int \Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} ds < 0$$

in cui l'integrale è esteso al contorno s del cerchio H.

Ora questa formola è evidentemente assurda, perchè è noto che

$$\int \Theta_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial n} ds = \iint \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)^2 \right] d\mathrm{H},$$

in cui il secondo integrale è esteso a tutto il cerchio H.

Le condizioni imposte alla Θ la definiscono quindi univocamente; però non si sa per ora nulla intorno alla sua esistenza.

7.

Cerchiamo ora di dimostrare che la coppia di punti AB deve essere simmetrica alla coppia CD rispetto all'asse x e la coppia AC simmetrica a

(5) È noto, che se i punti A_1, B_1, C_1, D_1 coincidessero rispettivamente con A_2, B_2, C_2, D_2, la Θ_1 e la Θ_2 non potrebbero differire l'una dall'altra.

BD rispetto all'asse y (fig. II), inoltre che la posizione di questi punti non dipende che dal valore di P e di $E + E_1$.

Infatti, se la funzione Θ' gode delle proprietà della Θ quando invece di E e di $-E_1$ si considerino

$$E' = \frac{E+E_1}{2} \quad , \quad -E' = -\frac{E+E_1}{2},$$

avremo evidentemente

$$\Theta = \Theta' + \frac{E-E_1}{2}$$

e per conseguenza i punti A', B', C', D' corrispondenti alla Θ' coincideranno coi punti A, B, C, D della Θ. Ora, per la Θ' la simmetria indicata dei punti A', B', C', D' è evidente, quindi questa simmetria riesce dimostrata per i punti A, B, C, D.

Osserviamo che da questa simmetria risulta subito che la Θ' è nulla lungo l'asse x e $\partial\Theta'/\partial\theta$ è zero lungo l'asse y.

8.

Per dimostrare l'esistenza della Θ', dalla quale si deduce subito quella di Θ, e per poterla determinare cerchiamo di trasformare le condizioni imposte.

Perciò dimostriamo che se $\psi(\rho, \theta)$, funzione finita e continua nell'interno e al contorno del cerchio di raggio R, gode delle seguenti proprietà

1° Si ha

$$\Delta^2 \psi = 0 \quad , \quad \psi(-x) = \psi(x) \quad , \quad \psi(-y) = -\psi(y),$$

2° nel tratto AB del contorno del cerchio

$$\psi = E',$$

nel tratto CD

$$\psi = -E',$$

3° in BD e in AC si ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = P \operatorname{sen}\theta,$$

4° le derivate

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} \quad e \quad \frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

si mantengono sempre inferiori ad un numero finito anche al contorno, e

$$\Delta^2 \psi = 0$$

anche nei punti del contorno, al più esclusi i punti A, B, C, D (fig. IV), la funzione ψ è appunto la funzione cercata Θ'.

Consideriamo infatti la funzione

$$\psi(\rho, \theta) - E' = \psi'(\rho, \theta)$$

definita entro tutto il cerchio, e l'altra

$$\psi'_1(\rho, \theta) = -\psi'\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right)$$

definita in tutti i punti esterni al cerchio.

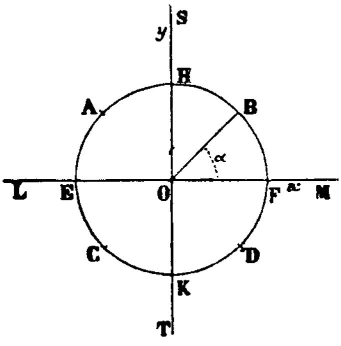


Fig. IV.

Dimostriamo che le due funzioni ψ' e ψ'_1 si attaccano senza nessuna singolarità lungo l'arco AB.

Infatti lungo l'arco AB abbiamo

$$\psi' = \psi'_1 = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = -\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\psi'\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right)\right)_{\varrho=R} = \left(\frac{\partial \psi'(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\psi'(\rho, \theta)\right)_{\varrho=R} - \frac{2}{R}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\psi'(\rho, \theta)\right)_{\varrho=R}.$$

Ma

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \theta^2} = 0,$$

quindi, poichè $\psi' =$ cost. sopra l'arco AB

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \psi'}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = 0,$$

e per conseguenza sull'arco AB

$$\left(\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R} = \left(\frac{\partial^2 \psi'}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R}.$$

Sia $\psi_2(\rho, \theta)$ una funzione eguale a ψ' entro il cerchio, eguale a ψ'_1 esternamente.

La funzione

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

sarà su tutto il piano (escluso l'arco AC DB) finita, continua, insieme alle derivate, e verificherà l'equazione

$$\Delta^2\left(\frac{\rho}{R}\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}\right) = 0$$ (6).

(6) Vedi U. DINI, «Annali di Matematica», ser. II, vol. V, p. 305 (1871–73).

Essa all'infinito si annullerà: infatti

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho} = \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \frac{R^2}{\rho}} \psi_2\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right).$$

Si ha dunque che nel mezzo piano LMS il massimo valore di

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

si avrà in uno dei punti degli archi EA ed FB, perchè ψ_2 è costante su LM, quindi

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial \psi_2}{\partial \rho}$$

è zero nei punti di questa retta. Ne segue che il massimo valore di questa funzione sarà

$$P \operatorname{sen} \alpha,$$

essendo α l'anomalia del punto B, e per conseguenza in un punto (R, θ) di AB il valore di

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \rho},$$

ossia il valore di

$$\frac{\partial \psi}{\partial n},$$

sarà sempre inferiore a $P \operatorname{sen} \alpha$ e a più forte ragione a $P \operatorname{sen} \theta$.

In modo del tutto analogo si dimostra che il valore di

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}$$

nei punti dell'arco CD è superiore a $P \operatorname{sen} \theta$.

Consideriamo ora la funzione.

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - P\rho \cos \theta = \varphi(\rho, \theta)$$

definita in tutti i punti interni al cerchio, e

$$\varphi_1(\rho, \theta) = \varphi\left(\frac{R^2}{\rho}, \theta\right)$$

definita nei punti esterni.

Queste funzioni si attaccano senza nessuna singolarità lungo gli archi BD ed AC.

Abbiamo infatti in uno dei punti di questi archi;

$$\varphi = \varphi_1$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = -\left(\frac{\partial \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} - P \operatorname{sen} \theta\right)_{\varrho=R} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R} = \left(\frac{\partial^2 \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R} + \frac{2}{R}\left(\frac{\partial \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = \left(\frac{\partial^2 \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2}\right)_{\varrho=R}.$$

Sia ora $\varphi_2(\rho, \theta)$ una funzione eguale a φ nei punti interni al cerchio ed eguale a φ_1 nei punti esterni. Questa funzione sarà finita, continua e verificherà l'equazione

$$\Delta^2 \varphi_2 = 0$$

in tutto il piano, esclusi al più i punti degli archi AB e CD. Essa si annullerà all'infinito e lungo la retta ST a causa della simmetria della funzione ψ rispetto a questa retta. Se consideriamo questa funzione nel mezzo piano STM avremo che i suoi massimi e minimi dovranno trovarsi sugli archi HB e KD, quindi la funzione stessa dovrà esser compresa fra 0 e $-$ PR $\cos\alpha$.

Quindi lungo BD la $\partial\psi/\partial\theta = \mathrm{PR}\cos\theta + \varphi(\rho, \theta)$ dovrà mantenersi sempre positiva e per conseguenza i valori della ψ lungo BD dovranno andare crescendo continuamente dal punto D, in cui prende il valore $-$ E′ fino al punto B in cui prende il valore E′.

9.

La questione è dunque ridotta a vedere se è possibile costruire la funzione ψ, la quale, se esiste, è definita univocamente dalle condizioni sopraccennate.

La determinazione di tale funzione ci servirà a trovare la posizione dei punti A, B, C, D, cioè la relazione che lega le quantità

$$E, E_1, D, \alpha,$$

la distribuzione della forza elettromotrice alla superficie del cilindro e quindi la funzione potenziale delle correnti prodotte da questa forza elettromotrice.

Sia $u(\rho, \theta)$ una funzione che verifica le proprietà volute per la ψ. Rappresentiamo conformemente il cerchio sopra un rettangolo A_1, B_1, C_1, D_1 (fig. V), in modo che i vertici corrispondano ai punti A, B, C, D, il centro O del cerchio corrisponda al centro O_1 del rettangolo, i diametri EF, HK del cerchio alle parallele ai lati E_1F_1, H_1K_1 nel rettangolo. Siano x, y le coordinate di un punto del piano del cerchio riferite a EF, HK come assi e ξ, η le coordinate di un punto nel piano del rettangolo riferite alle rette corrispondenti come assi.

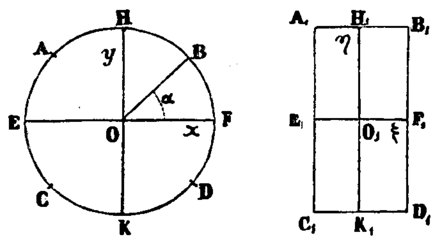


Fig. V.

Posto $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, la funzione che dà la rappresentazione conforme sarà [7]

$$\zeta = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z - \mathrm{R}e^{-i\alpha})(z - \mathrm{R}e^{i\alpha})(z - \mathrm{R}e^{i(\pi-\alpha)})(z - \mathrm{R}e^{i(\pi+\alpha)})}}$$

$$= \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - \mathrm{R}^2 e^{2i\alpha})(z^2 - \mathrm{R}^2 e^{-2i\alpha})}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^4 + \mathrm{R}^4 - 2\,\mathrm{R}^2 z^2 \cos 2\alpha}}.$$

(7) Vedi U. DINI, «Annali di Matematica», ser. II, vol. VIII, p. 161 (1877).

Potremo considerare reciprocamente z come funzione di ζ. Della forma di questa funzione inversa (8) non importa però tener conto.

Da essa si dedurrebbe

$$\rho = \rho(\xi, \eta) \quad , \quad \theta = \theta(\xi, \eta).$$

Mediante queste due funzioni riportiamo la $u(\rho, \theta)$ nel rettangolo. Essa risulterà una funzione

$$u_1(\xi, \eta)$$

finita, continua e che verificherà l'equazione

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

La

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = v_1(\xi, \eta)$$

sarà nulla sopra $A_1 B_1$ e $C_1 D_1$ e sarà eguale a

$$\frac{du_1}{d\rho}\frac{d\rho}{d\xi} = P \operatorname{sen}[\theta(\xi, \eta)] \cdot \frac{d\rho}{d\xi} = P \operatorname{sen}[\theta(\xi, \eta)] \cdot R \frac{d\theta}{d\eta}$$

sopra i lati $A_1 C_1$ e $B_1 D_1$. Riportiamo la funzione v_1 sopra il cerchio. Essa sarà una funzione $v(\rho, \theta)$ che risulterà eguale a zero sopra AB e CD e sopra AC e BD sarà eguale a

$$P \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)}.$$

Avremo quindi (9):

$$v(\rho, \theta) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} r\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right) d\theta + \frac{P}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} r\left(\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\right) d\theta,$$

in cui $r(M)$ sta ad indicare la parte reale del numero complesso M.

Sia

$$v'(\rho, \theta) + c,$$

(in cui c è una costante arbitraria reale) la funzione coniugata della $v(\rho, \theta)$, avremo:

$$v + i(v' + c) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} d\theta + \frac{P}{2\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z} d\theta + c_1 i$$

$$= \frac{P}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{R^2 e^{2i\theta}+z}{R^2 e^{2i\theta}-z} d\theta + c_1 i,$$

(8) Vedi E. B. CHRISTOFFEL, «Annali di Matematica», ser. II, vol. I, p. 89 (1867).

(9) Vedi H. A. SCHWARZ, *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich,* 15 ter Jahrgang, pp. 272–286 (1870); «Gesamm. math. Abhandl.», II, pp. 133–143, Berlin 1890.

essendo c_1 una costante arbitraria reale. Se

$$v'_1(\xi, \eta) + c$$

è la funzione coniugata della $v_1(\xi, \eta)$, avremo:

$$v_1 + (v'_1 + c)\, i = \frac{P}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2(\zeta)}{R^2 e^{2i\theta} - z^2(\zeta)}\, d\theta + c_1 i .$$

Sia la funzione u'_1 coniugata di u_1, avremo:

$$\frac{\partial [u_1 + iu'_1]}{\partial \xi} = \frac{d[u_1 + iu'_1]}{d\zeta} = v_1 + i(v'_1 + c),$$

quindi

$$u_1 + iu'_1 = \frac{P}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{R}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^{\zeta} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2(\zeta)}{R^2 e^{2i\theta} - z^2(\zeta)}\, d\zeta\, d\theta + c_1 i\zeta + h_1 + ih_2,$$

h_1 e h_2 essendo costanti arbitrarie reali.

Per conseguenza, se u' è la funzione coniugata di u, si ha

$$u + iu' = \frac{PR}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^{z} \frac{R^2 e^{2i\theta} + z^2}{R^2 e^{2i\theta} - z^2} \frac{d\zeta}{dz}\, dz\, d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2$$

$$= -4\frac{PR^3}{\pi} i \int_0^{\alpha} \operatorname{sen}\theta \frac{1}{\left(\frac{d\eta}{d\theta}\right)} \int_0^{z} \frac{z^2 \operatorname{sen}\theta}{R^4 + z^4 - 2R^2 z^2 \cos 2\theta} \frac{d\zeta}{dz}\, dz\, d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2 .$$

Ora se in $d\zeta/dz$ facciamo $z = Re^{i\theta}$ con

$$\alpha > \theta > 0,$$

si trova:

$$\frac{i\,d\eta}{Rie^{i\theta}\, d\theta} = \frac{1}{R^2 \sqrt{e^{4i\theta} + 1 - 2e^{i\theta}\cos 2\alpha}},$$

quindi:

$$\frac{d\eta}{d\theta} = \frac{1}{2R\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}} .$$

Ne segue che si potrà scrivere

$$u + iu' = -\frac{16\, PR^4}{\pi} i \int_0^{z} z^2 \frac{d\zeta}{dz}\, dz \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}}{(R^2 - z^2)^2 + 4R^2 z^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2 .$$

Ora abbiamo con facili calcoli, ponendo

$$x = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}},$$

$$\int_0^\alpha \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\theta}}{R^2 - z^2 + 4R^2z^2\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{2R^4}\,\frac{(R^2-z^2)^2 + 2R^2z^2\operatorname{sen}^2\alpha}{16z^4}$$

$$-\frac{(R^2-z^2)\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}}{16R^4z^4}\int_0^\infty \frac{\frac{1}{R^2-z^2}\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}\,dx}{1+\left(\frac{1}{R^2-z^2}\right)^2(R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha)x^2}.$$

Ma finchè il mod z è inferiore ad R

$$\frac{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}{(R^2-z^2)^2}$$

se è reale è positivo, quindi l'integrale che comparisce nel secondo membro della equazione precedente sarà finito ed eguale a $\pi/2$ o a $-\pi/2$. Ciò dipende dal segno della parte reale di $\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2}$.

Se si prende questo radicale positivo per $z = 0$, la sua parte reale si mantiene sempre positiva finchè mod $z < R$, e quindi l'integrale è sempre eguale a $\pi/2$. Ne segue, finchè mod $z < R$

$$u + iu' = -\frac{Pi}{2}\int_0^z \frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{(R^2-z^2)^2+2R^2z^2\operatorname{sen}^2\alpha}{z^2} - \frac{(R^2-z^2)\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}}{z^2}\right)dz + c_1 i\zeta(z) + h_1 + ih_2.$$

Ma l'espressione sotto l'integrale è una funzione senza nessuna singolarità, esclusi i punti A, B, C, D, nei quali il $d\zeta/dz$ diviene infinito d'ordine, $1/2$, quindi l'espressione precedente ci dà i valori di $u + iu'$, anche per mod $z = R$. Da essa si deduce

$$u = r\left[-\frac{Pi}{2}\int_0^z \frac{d\zeta}{dz}\left(\frac{(R^2-z^2)^2+2R^2z^2\operatorname{sen}^2\alpha}{z^2} - \frac{(R^2-z^2)\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}}{z^2}\right)dz\right] - c_1 y(\rho,\theta) + h_1.$$

10.

Nella precedente espressione di u compariscono le tre costanti α, c_1, h_1. Cerchiamo di determinarle per mezzo delle condizioni note. La h_1 è zero perchè u deve essere zero per $\rho = 0$. In tal modo la u viene a cambiar segno cambiando la y in $-y$.

Dobbiamo poi avere

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

sempre finite; ciò equivale a porre la condizione che

$$\frac{d(u+iu')}{dz}$$

si mantenga sempre finita. Infatti in tal caso saranno finiti

$$\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Abbiamo ora

$$\frac{d(u+iu')}{dz} = -\frac{Pi}{2}\frac{d\zeta}{dz}\left[\frac{(R^2-z^2)^2+2R^2z^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{z^2} - \frac{(R^2-z^2)\sqrt{R^4+z^4-2R^2z^2\cos 2\alpha}}{z^2}\right] + c_1 i\frac{d\zeta}{dz},$$

onde ricordando il valore noto di $d\zeta/dz$ si ottiene

$$\frac{d(u+iu')}{dz} = i\left[-\frac{P}{2}\frac{(R^2-z^2)^2+2R^2z^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{z^2}+c_1\right]\frac{d\zeta}{dz}+\frac{Pi}{2}\frac{R^2-z^2}{z^2}.$$

Si riconosce subito che questa espressione non può divenire infinita che dove diviene infinito $d\zeta/dz$. Perciò bisognerà porre la condizione che

$$-\frac{P}{2}\frac{(R^2-z^2)^2+2R^2z^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{z^2}+c_1,$$

per i valori di z eguali a $Re^{-i\alpha}$, $Re^{i\alpha}$, $Re^{i(\pi-\alpha)}$, $Re^{i(\pi-\alpha)}$ divenga infinitesima d'ordine superiore ad $1/2$.

Ciò evidentemente si verificherà quando si prenda

$$c_1 = -PR^2\,\mathrm{sen}^2\alpha.$$

Per determinare finalmente la costante α osserveremo che lungo l'arco AB il valore costante che deve assumere la u è E′, quindi porremo la condizione che la u nel punto B sia eguale ad E′.

Perciò calcoliamo il valore di u in un punto $(R\,,\,\omega)$ dell'arco FB. Osservando che in F u è zero, avremo

$$(1) \qquad [u+iu']_{Re^{i\omega}}$$

$$= -\frac{Pi}{2}R\int_0^\omega\left[\frac{(1-e^{2i\omega})^2+2e^{i\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha}{e^{2i\omega}} - \frac{(1-e^{2i\omega})\sqrt{(1-e^{2i\omega})^2+4e^{2i\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha}}{e^{2i\omega}}\right]\frac{ie^{2i\omega}\,d\omega}{\sqrt{(1-e^{2i\omega})^2+4e^{2i\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha}}$$

$$-\,i\,PR\,\mathrm{sen}^2\alpha\int_0^\omega\frac{ie^{i\omega}\,d\omega}{\sqrt{(1-e^{2i\omega})^2+4e^{2i\omega}\,\mathrm{sen}^2\alpha}}+hi$$

$$= PR\int_0^\omega\sqrt{\mathrm{sen}^2\alpha-\mathrm{sen}^2\omega}\,d\omega - PR\,i\cos\omega + h'i,$$

quindi

$$(u)_{Re^{i\omega}} = PR\int_0^\omega\sqrt{\mathrm{sen}^2\alpha-\mathrm{sen}^2\omega}\,d\omega.$$

La condizione che in B la u abbia il valore E' è quindi espressa da

$$E' = PR \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega$$

e ricordando che

$$P = \frac{2\,D}{\mu},$$

si ha

$$E' = \frac{2\,DR}{\mu} \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega .$$

Questa relazione ci fornisce il modo di determinare la posizione dei punti A , B , C , D conoscendo le forze elettromotrici E e $-E_1$, la densità D della corrente e la conducibilità μ dell'elettrolita.

Ricordando infatti che $E + E_1 = 2\,E'$, avremo

$$(2) \qquad E + E_1 = \frac{4\,DR}{\mu} \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega .$$

La forza elettromotrice E_ω nei punti (R , ω) dell'arco FB ci viene data dalla formula

$$(3) \qquad E_\omega = \frac{2\,DR}{\mu} \int_0^\omega \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega}\, d\omega + \frac{E - E_1}{2} .$$

II.

Una conferma che la espressione trovata per la u verifica alle condizioni imposte alla funzione Θ', ci viene fornita dalla espressione trovata (1) dei valori di $u + iu'$ al contorno. Abbiamo infatti per $-\alpha < \omega < \alpha$, oppure per $\pi - \alpha < \omega < \pi + \alpha$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\rho=R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u'}{\partial \omega}\right)_{\rho=R} = P \operatorname{sen} \omega;$$

per $\alpha < \omega < \pi - \alpha$, oppure per $\pi + \alpha < \omega < 2\,\pi - \alpha$,

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = 0;$$

per $-\alpha < \omega < \alpha$,

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = PR \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega} > 0;$$

per $\pi - \alpha < \omega < \pi + \alpha$,

$$\frac{\partial u}{d\omega} = -\,PR \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \omega} < 0;$$

per $\alpha < \omega < \pi - \alpha$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)_{\varrho=R} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u'}{\partial \omega}\right)_{\varrho=R} = P\,(\operatorname{sen}\omega - \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\alpha}) < P\operatorname{sen}\omega;$$

finalmente per $\pi + \alpha < \omega < 2\pi - \alpha$,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = P\,(\operatorname{sen}\omega + \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - \operatorname{sen}^2\alpha}) > P\operatorname{sen}\omega.$$

12.

Le formule (2) e (3) si esprimono facilmente per integrali ellittici. Ponendo infatti

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}\varphi,$$

$$k = \operatorname{sen}\alpha,$$

si ottiene

$$E + E_1 = \frac{4\,DR}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$E_\omega = \frac{2\,DR}{\mu}\int_0^{\varphi} \frac{k^2\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} + \frac{E - E_1}{2}$$

e quindi

$$E + E_1 = \frac{4\,DR}{\mu}(k^2 K - I) = \frac{4\,DR}{\mu}(\mathcal{E} - k'^2 K), \tag{4}$$

$$E_\omega = \frac{2\,DR}{\mu}(k^2 x - Z(x)) + \frac{E - E_1}{2}, \tag{5}$$

quando si ponga

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}\alpha} = sn\, x, \qquad \text{mod } k,$$

e si adottino le consuete notazioni: $k'^2 = 1 - k^2$,

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}, \qquad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\, d\varphi, \qquad Z(x) = \int_0^{x} k^2\, sn^2 x\, dx.$$

Le formule (4) e (5) si prestano con grandissima facilità ai calcoli numerici, e al confronto con i dati della esperienza.

Firenze, ottobre 1882.

VIII.

SOPRA ALCUNI PROBLEMI DELLA TEORIA DEL POTENZIALE (*)

« Annali della Scuola N. S. di Pisa » (Scienze fis. e mat.), vol. III, 1883, pp. 207–270.

Mi sono proposto lo studio di potenziali indipendenti da una delle coordinate [1], introducendo delle funzioni che facciano l'ufficio della funzione di GREEN. Perciò nel § 2 ho considerato in generale delle funzioni analoghe alle funzioni di GREEN, le quali possono servire nei diversi casi di elettrostatica, di calore, di idrodinamica e di magnetismo, e mediante le quali è possibile nei vari problemi che considero adoperare soltanto due coordinate in luogo di tre. Per queste funzioni ho sempre trovato verificato un principio di reciprocità, di cui è facile pervenire al significato fisico.

Ai potenziali indipendenti da una coordinata corrispondono le *funzioni associate* così chiamate dal chiarissimo prof. E. BELTRAMI nei suoi dottissimi lavori sui potenziali simmetrici. Le ho considerate nel § 1 ed ho trovato che anche nello studio di esse è possibile introdurre delle funzioni che facciano l'ufficio delle funzioni di GREEN.

Nel § 3 mi occupo della determinazione di tali funzioni.

I vari problemi studiati corrispondono ad altri sulla distribuzione della elettricità o del calore in mezzi non omogenei a due dimensioni. Lo studio di tali problemi viene fatto nel § 4.

Finalmente nel § 5 ho fatto vedere l'impiego che può essere fatto di potenziali negli spazi a più di tre dimensioni alla risoluzione di alcuni problemi sulla distribuzione dell'elettricità in corpi a tre o a due dimensioni non omogenei, quando i potenziali di cui si fa uso sono indipendenti da una o più coordinate.

§ 1. - FUNZIONI ASSOCIATE.

L'equazione differenziale $\Delta^2 V = 0$ trasformata in coordinate ortogonali ρ_1, ρ_2, ρ_3 prende la forma

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right)$$

(*) Estratto della Tesi di Abilitazione presentata alla R. Scuola Normale Superiore di Pisa

(1) Il considerare in generale il caso di potenziali indipendenti da una delle coordinate in luogo di quello particolare dei potenziali simmetrici non arreca complicazione nè maggiori difficoltà. Mi sono quindi attenuto il più possibile al caso generale, benchè per quanto è a mia cognizione non sia stata chiarita completamente la questione intorno al numero dei casi possibili dei potenziali che ho preso a considerare.

quando l'elemento lineare assume la forma

$$ds^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2 + H_3^2\, d\rho_3^2 .$$

Se la V è indipendente da una coordinata, per esempio dalla ρ_1, la equazione (1) diviene

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0 .$$

Tutte le volte che la H_1 sarà uguale al prodotto di una funzione della sola ρ_1 per una funzione H_1' di ρ_2 e ρ_3, e il rapporto H_2/H_3 sarà indipendente da ρ_1, la equazione precedente diverrà

$$(2') \qquad \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3 H_1'}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_2 H_1'}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0$$

e in essa non comparirà più traccia della ρ_1. Quindi se la (2) ammetterà degli integrali, questi saranno indipendenti dalla coordinata ρ_1. Questo sarà uno dei casi in cui potrà dirsi che al sistema di coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3 corrisponde un sistema di funzioni potenziali indipendenti da una delle coordinate.

La (2) prova l'esistenza della funzione associata W definita dalle equazioni

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial W}{\partial \rho_3}, \\ \frac{H_2 H_1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3} &= -\frac{\partial W}{\partial \rho_2} . \end{aligned}\right.$$

Siano v e w due funzioni che soddisfano le equazioni precedenti; avremo, per il determinante funzionale rispetto alle ρ_2 e ρ_3,

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial \rho_2}, & \dfrac{\partial v}{\partial \rho_3} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \rho_2}, & \dfrac{\partial w}{\partial \rho_3} \end{vmatrix} = \frac{H_3 H_1}{H_2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho_2}\right)^2 + \frac{H_1 H_2}{H_3}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho_3}\right)^2$$

$$= \frac{H_1 H_3}{H_2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{H_3}\right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho_3}\right)^2\right].$$

Se dunque $\partial v/\partial \rho_2$, $\partial v/\partial \rho_3$ saranno diverse da zero il determinante funzionale sarà pure diverso da zero e potremo considerare ρ_2 e ρ_3 come funzioni di v e w. Avremo perciò

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho_2} + \frac{\partial V}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial V}{\partial \rho_3} &= \frac{\partial V}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho_3} + \frac{\partial V}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \rho_3}, \end{aligned}\right.$$

e

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \rho_2} &= \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho_2} + \frac{\partial W}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial W}{\partial \rho_3} &= \frac{\partial W}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \rho_3} + \frac{\partial W}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial \rho_3} . \end{aligned}\right.$$

Quindi le (3) diventano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{H_1 H_3}{H_2}\left[\frac{\partial V}{\partial v}-\frac{\partial W}{\partial w}\right]\frac{\partial v}{\partial \rho_2}-\left[\frac{\partial V}{\partial w}H_1^2+\frac{\partial W}{\partial v}\right]\frac{\partial v}{\partial \rho_3}=0,\\ &\frac{H_3}{H_1 H_2}\left[\frac{\partial W}{\partial v}+H_1^2\frac{\partial V}{\partial w}\right]\frac{\partial v}{\partial \rho_2}+\left[\frac{\partial V}{\partial v}-\frac{\partial W}{\partial w}\right]\frac{\partial v}{\partial \rho_3}=0,\end{aligned}\right.$$

onde, poichè il determinante (4) è differente da zero,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial v}=\frac{\partial W}{\partial w},\\ &H_1^2\frac{\partial V}{\partial w}=-\frac{\partial W}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

Sopra una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ consideriamo un sistema di linee ortogonali e isoterme

$$\lambda=\lambda(\rho_2,\rho_3) \quad , \quad \mu=\mu(\rho_2,\rho_3).$$

Avremo

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}=\frac{\partial \mu}{\partial \rho_3},\\ &\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}=-\frac{\partial \mu}{\partial \rho_2}.\end{aligned}\right.$$

Consideriamo ρ_2 e ρ_3 come funzioni di λ e μ. Sarà

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial \rho_2}=\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}+\frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \rho_2},\\ &\frac{\partial V}{\partial \rho_3}=\frac{\partial V}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\frac{\partial V}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \rho_3},\end{aligned}\right.$$

e

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \rho_2}=\frac{\partial W}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}+\frac{\partial W}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \rho_2},\\ &\frac{\partial W}{\partial \rho_3}=\frac{\partial W}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\frac{\partial W}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \rho_3}.\end{aligned}\right.$$

Le (3) diventano quindi

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{H_3}{H_2}\left(H_1\frac{\partial V}{\partial \lambda}-\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}-\left(H_1\frac{\partial V}{\partial \mu}+\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}=0,\\ &\frac{H_2}{H_3}\left(H_1\frac{\partial V}{\partial \lambda}-\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}+\left(H_1\frac{\partial W}{\partial \mu}+\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}=0,\end{aligned}\right.$$

e, poichè abbiamo supposto di poter esprimere ρ_3 e ρ_2 come funzioni di λ e μ, dovrà essere diverso da zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{H_3}{H_2}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}, & -\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}\\[2ex] \dfrac{H_2}{H_3}\dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_3}, & \dfrac{\partial \lambda}{\partial \rho_2}\end{vmatrix}$$

e per conseguenza

$$
(5) \qquad \begin{cases} H_1 \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} = \dfrac{\partial W}{\partial \mu}, \\[2mm] H_1 \dfrac{\partial V}{\partial \mu} = - \dfrac{\partial W}{\partial \lambda}. \end{cases}
$$

Affinchè un sistema di linee $V = \text{cost.}$, $W = \text{cost.}$ possa essere un sistema di linee isoterme della superficie $\rho_1 = \text{cost.}$, dovremo avere, scegliendo convenientemente λ e μ,

$$
V = V(\lambda) \quad , \quad W = W(\mu);
$$

quindi, a causa della relazione

$$
H_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda} = \frac{\partial W}{\partial \mu},
$$

risulterà

$$
(6) \qquad H_1 = \varphi(\lambda)\, \psi(\mu),
$$

cioè la H_1 dovrà essere il prodotto di una funzione di λ per una di μ, o anche

$$
H_1 = \varphi_1(V)\, \psi_1(W).
$$

Reciprocamente, se la H_1 si potrà mettere sotto la forma (6), si potrà prendere una funzione di λ e una di μ in modo che soddisfino alle (5), quando le funzioni φ e ψ siano continue e φ sia diversa da zero.

Basterà infatti prendere

$$
(7) \qquad V_1 = a \int \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad , \quad W_1 = a \int \psi(\mu)\, d\mu.
$$

Sulla superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ consideriamo la linea $\varphi(\lambda, \mu) = \text{cost.}$, di cui l'arco sia s. Indichiamo con n una normale alla s. Avremo

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial n} = \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial n} + \dfrac{\partial V}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial n}, \\[2mm] \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{\partial V}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial s} + \dfrac{\partial V}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial s}, \end{cases}
$$

e

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial n} = \dfrac{\partial W}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial n} + \dfrac{\partial W}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial n}, \\[2mm] \dfrac{\partial W}{\partial s} = \dfrac{\partial W}{\partial \lambda} \dfrac{\partial \lambda}{\partial s} + \dfrac{\partial W}{\partial \mu} \dfrac{\partial \mu}{\partial s}: \end{cases}
$$

quindi, scegliendo convenientemente le direzioni positive di s ed n,

$$
(8) \qquad H_1 \frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial n} \quad , \quad H_1 \frac{\partial V}{\partial n} = - \frac{\partial W}{\partial s}.
$$

Le due funzioni V e W secondochè si considerano come funzioni di ρ_2 e ρ_3, v e w, λ e μ, soddisfano alle equazioni

$$
(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_2 H_1}{H_3} \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\frac{H_3}{H_2 H_1} \frac{\partial W}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\frac{H_2}{H_3 H_1} \frac{\partial W}{\partial \rho_3}\right) = 0; \end{aligned} \right.
$$

$$
(\beta) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial}{\partial w}\left(H_1^2 \frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0, \\ & \frac{\partial^2 V}{\partial w^2} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{l}{H_1^2} \frac{\partial W}{\partial v}\right) = 0; \end{aligned} \right.
$$

$$
(\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(H_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(H_1 \frac{\partial V}{\partial \mu}\right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial W}{\partial \mu}\right) = 0. \end{aligned} \right.
$$

Dalle (γ) si deduce per le V e W un altro significato. Esse rappresentano, eguagliate a delle costanti, le linee di livello e le linee di flusso della elettricità o del calore sulla superficie $\rho_1 =$ cost. se in essa la conducibilità viene espressa per la funzione $H_1(\lambda, \mu)$ (Vedi al § 4).

Quando la H_1 ha la forma (6), allora, oltre i valori (7) per V e W, si possono trovare alcune di queste funzioni che si possono esprimere per il prodotto di una funzione di λ per una funzione di μ, o anche per il prodotto di una funzione di V_1 per una funzione di W_1.

Infatti la prima delle (γ) diviene, ponendo

$$V = K_1(\lambda)\, K_2(\mu)$$

e supponendo sempre $\varphi(\lambda)$ e $\psi(\mu)$ diversi da zero,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial K_1(\lambda)}{\partial \lambda}\right)}{\varphi(\lambda) K_1(\lambda)} + \frac{\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\psi(\mu) \frac{\partial K_2(\mu)}{\partial \mu}\right)}{\psi(\mu) K_2(\mu)} = 0:$$

e questa sarà verificata prendendo

$$
\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial K_1(\lambda)}{\partial \lambda}\right) = a\varphi(\lambda) K_1(\lambda) \\ & \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\psi(\mu) \frac{\partial K_2(\mu)}{\partial \mu}\right) = - a\psi(\mu) K_2(\mu) \end{aligned} \right.
$$

in cui a è una costante.

Analogamente si ha per la W.

Sia $K_1(\lambda, a_p)$ il valore di K_1 quando a assume il valore a_p. Avremo

$$
\begin{aligned}
& (a_p - a_q)\, \varphi(\lambda)\, K_1(\lambda, a_p)\, K_1(\lambda, a_q) \\
= {} & K_1(\lambda, a_q) \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial K_1(\lambda, a_p)}{\partial \lambda}\right) - K_1(\lambda, a_p) \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial K_1(\lambda, a_q)}{\partial \lambda}\right) \\
= {} & \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\varphi(\lambda)\left\{ K_1(\lambda, a_q) \frac{\partial K_1(\lambda, a_p)}{\partial \lambda} - K_1(\lambda, a_p) \frac{\partial K_1(\lambda, a_q)}{\partial \lambda} \right\}\right];
\end{aligned}
$$

quindi, integrando su tutta la linea λ e supponendo che questa linea sia chiusa,

$$(a_p - a_q) \int_\lambda \varphi(\lambda) K_1(\lambda, a_p) K_1(\lambda, a_q) d\lambda = 0.$$

Analogamente, supponendo la linea μ chiusa, abbiamo

$$(a_p - a_q) \int_\lambda \psi(\mu) K_2(\mu, a_p) K_2(\mu, a_q) d\mu = 0.$$

Riprendiamo le equazioni (γ) nel caso in cui sia $H_1 = \varphi(\lambda)\,\psi(\mu)$. Avremo

$$\psi(\mu) \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\varphi(\lambda) \frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \varphi(\lambda) \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\psi(\mu) \frac{\partial V}{\partial\mu}\right) = 0$$

e questa equazione può scriversi, prendendo

$$\lambda_1 = \int \frac{\partial\lambda}{\varphi(\lambda)} \quad , \quad \mu_1 = \int \frac{\partial\mu}{\psi(\mu)} ,$$

$$\frac{1}{\varphi_1^2(\lambda_1)} \frac{\partial^2 V}{\partial\lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1^2(\mu_1)} \frac{\partial^2 V}{\partial\mu_1^2} = 0$$

in cui con $\psi_1(\lambda_1)$ e $\psi_1(\mu_1)$ si intende il risultato della sostituzione di $\lambda(\lambda_1)$ e $\mu(\mu_1)$ in $\varphi(\lambda)$ e $\psi(\mu)$.

Ponendo invece

$$\lambda_2 = \int \varphi(\lambda)\, d\lambda \quad , \quad \mu_2 = \int \psi(\mu)\, d\mu ,$$

si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\varphi_2^2(\lambda_2) \frac{\partial V}{\partial\lambda_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}\left(\psi_2^2(\mu_2) \frac{\partial V}{\partial\mu_2}\right) = 0.$$

La funzione associata W verifica le equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\dfrac{1}{\varphi_1^2(\lambda)} \dfrac{\partial W}{\partial\lambda_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\mu_1}\left(\dfrac{1}{\psi_1^2(\mu_1)} \dfrac{\partial W}{\partial\mu_1}\right) = 0, \\ \varphi_2^2(\lambda_2) \dfrac{\partial^2 W}{\partial\lambda_2^2} + \psi_2^2(\mu_2) \dfrac{\partial^2 W}{\partial\mu_2^2} = 0, \end{cases}$$

secondochè si considera come funzione di λ_1 e μ_1 oppure di λ_2 e μ_2.

§ 2. - FUNZIONI ANALOGHE A QUELLA DI GREEN.

In uno spazio a tre dimensioni S si abbia uno spazio s che possa essere a una, due o tre dimensioni.

Per il teorema di GREEN avremo, se V rappresenta una funzione che in S non ha alcuna singolarità e che verifica l'equazione $\Delta^2 V = 0$,

$$\frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n} \frac{1}{r} \right) d\sigma = V(x', y', z'),$$

in cui r rappresenta la distanza del punto x', y', z' appartenente ad s dal punto $x\ y\ z$ della superficie σ contorno di S; n è la normale a σ diretta verso l'interno di S. Sia ρ una funzione continua dei punti di s. Moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per $\rho(s)\,ds$ e integrando in tutto lo spazio s, avremo

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ V \frac{\partial}{\partial n}\int_s \frac{\rho(s)}{r}\,ds - \frac{\partial V}{\partial n}\int_s \frac{\rho(s)}{r}\,ds \right\} d\sigma = \int_s V\,(x'(s)\,y'(s)\,z'(s))\,\rho(s)\,ds\,.$$

Ora

$$\int_s \frac{\rho(s)\,ds}{r}$$

è la funzione potenziale di una massa di densità ρ distribuita nello spazio s. Chiamando questa funzione $\varphi(x, y, z)$ avremo [2]

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = \int_s V \rho(s)\,ds\,.$$

Posto

$$\int_s \rho(s)\,ds = m\,,$$

cioè chiamando m la massa distribuita nello spazio s, si avrà, supponendo la massa m diversa da zero,

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = \frac{\int_s V \rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds}\,.$$

Se $\rho = \text{cost.}$ si ha

$$m = \rho s \quad , \quad \varphi = \rho \int_s \frac{ds}{r}$$

e

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{4\pi s\rho}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = V',$$

in cui V' rappresenta la media dei valori che ha la funzione V nello spazio s. Se V è costante [3] ed eguale a V_1 lungo lo spazio s, si trova comunque sia ρ

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\varphi \right) d\sigma = V_1\,.$$

(2) Se lo spazio s è a tre o a due dimensioni la (1) si deduce subito dalla formula di GREEN.

(3) Questo caso non si presenterà altro che quando lo spazio s è a una o due dimensioni, altrimenti la V sarebbe sempre costante.

Sia la funzione ψ una funzione finita e continua insieme alle derivate prime nello spazio S, e verifichi nello spazio stesso all'equazione differenziale $\Delta^2 \psi = 0$.

Le (2), (3) e (4) dànno luogo subito alle altre:

$$(2') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi)\right] d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds},$$

$$(3') \qquad \frac{1}{4\pi s\rho}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi)\right] d\sigma = V',$$

$$(4') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi)\right] d\sigma = V_1 .$$

Nella (3') la ρ va considerata come costante.

Sia $\lambda(\sigma)$ una funzione dei punti del contorno. Avremo evidentemente che la (2'), la quale comprende le (3') e (4'), potrà scriversi

$$(2'') \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left[\left(V+\lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\left((\varphi+\psi)+\lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\right)\right] d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds}.$$

Si abbia

$$(5) \qquad \varphi+\psi+\lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} = 0;$$

la (2'') diverrà

$$(2_a) \qquad \frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(V+\lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_s V\rho(s)\,ds}{\int_s \rho(s)\,ds}.$$

Se in S, oltre lo spazio s, abbiamo un altro spazio s_1 in cui sia distribuita una massa m_1 colla densità ρ_1, e le φ_1 e ψ_1 sono le funzioni corrispondenti alle φ e ψ per questo spazio e si ha

$$(5') \qquad (\varphi_1+\psi_1)+\lambda(\sigma)\frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n} = 0,$$

sarà

$$(2_b) \qquad \frac{1}{4\pi m_1}\int_\sigma \left(V+\lambda(\sigma)\frac{\partial V}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_{s_1} V\rho_1(s_1)\,ds_1}{\int_{s_1} \rho_1(s_1)\,ds_1}.$$

Prendiamo nella (2_a) $V = \psi_1$ e nella (2_b) $V = \psi$. Avremo

$$\frac{1}{4\pi m}\int_\sigma \left(\psi_1 + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_s \psi_1 \rho(s)\, ds}{\int_s \rho(s)\, ds},$$

$$\frac{1}{4\pi m_1}\int_\sigma \left(\psi + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\frac{\partial(\varphi_1+\psi_1)}{\partial n}\, d\sigma = \frac{\int_{s_1} \psi \rho_1(s_1)\, ds_1}{\int_{s_1} \rho_1(s_1)\, ds_1}$$

e sottraendo si ottiene, avendo riguardo al teorema di GREEN,

$$\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left[\left(\psi_1 + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi_1}{\partial n}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \left(\psi + \lambda(\sigma)\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right] d\sigma$$

$$= \int_s \psi_1 \rho(s)\, ds - \int_s \psi \rho(s_1)\, ds_1 ;$$

quindi, per le (5) e (5'),

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = \int_s \psi_1 \rho(s)\, ds - \int_{s_1} \psi \rho_1(s_1)\, ds_1 .$$

Se σ' e σ'_1 sono due superficie che comprendono rispettivamente lo spazio s e lo spazio s_1, abbiamo

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'} \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'_1} \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma'_1 ,$$

e applicando alle due superficie σ' e σ'_1 la formula (1) avremo

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right) d\sigma = -\int_s \varphi_1 \rho(s)\, ds + \int_{s_1} \varphi \rho_1(s_1)\, ds_1 ,$$

onde

$$\int_s (\psi_1 + \varphi_1)\rho(s)\, ds = \int_{s_1} (\varphi + \psi)\rho_1(s_1)\, ds_1 . \tag{6}$$

Questa relazione comprende il *teorema di Gauss*. Se supponiamo infatti che lo spazio S si estenda indefinitamente si avrà che ψ_1 e ψ andranno a zero e la (6) diverrà

$$\int_s \varphi_1 \rho(s)\, ds = \int_{s_1} \varphi \rho_1(s_1)\, ds_1 .$$

Avremo per conseguenza anche la relazione

$$(6') \qquad \int_s \varphi_1 \rho(s)\, ds = \int_{s_1} \varphi \rho_1 (s_1)\, ds_1 .$$

La formula (6) si è dimostrata quando gli spazî s e s_1 erano interni ad S, ma è evidente che essa vale anche quando sono ambedue esterni.

È facile trovare i diversi significati fisici che può avere la formula (6).

Supponiamo diviso tutto lo spazio mediante le superficie $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ in q parti $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Almeno una di queste parti si dovrà estendere indefinitamente. Il contorno σ_r di S_r sia formato dalle superficie $\sigma_{r,1}$, $\sigma_{r,2}, \cdots, \sigma_{r,\mu_r}$.

Se s_r, in cui è distribuita una massa m_r colla densità ρ_r, è interno ad S_r, potremo applicare a questo spazio la formula (2') e avremo

$$(7) \qquad \frac{1}{4\pi} \sum_1^{\mu_r}{}_{\nu} \int_{\sigma_{r,\nu}} \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi) \right] d\sigma_{r,\nu} = \int_{s_r} V \rho_r (s_r)\, ds_r ,$$

la quale varrà anche se la massa m_r sarà uguale a zero.

Se le funzioni ψ e V e le loro derivate non hanno alcuna singolarità in nessun punto interno agli altri spazii S_l, avremo anche le $q-1$ equazioni

$$(7') \qquad \frac{1}{4\pi} \sum_1^{\mu_l}{}_{\nu} \int_{\sigma_{l,\nu}} \left[V \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}(\varphi+\psi) \right] d\sigma_{l,\nu} = 0.$$

Moltiplicando queste equazioni per i coefficienti costanti λ_l e sommandole colla precedente moltiplicata per λ_r, si deduce, supponendo V, φ, ψ continue in tutto lo spazio,

$$(8)_a \qquad \lambda_r \int_{s_r} V \rho_r (s_r)\, ds_r = \frac{1}{4\pi} \sum_1^{p}{}_{\nu} \int_{\sigma_\nu} d\sigma_\nu \left\{ V \left[\lambda_{\nu,1} \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}} \right] \right.$$
$$\left. - (\varphi+\psi) \left[\lambda_{\nu,1} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}} \right] \right\}$$

in cui sono indicati con $S_{\nu,1}$, $S_{\nu,2}$ i due campi divisi dalla superficie σ_ν, con

$$\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}} \quad , \quad \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}}$$

le derivate della funzione $\varphi+\psi$ prese rispetto alle normali a σ_ν dirette rispettivamente verso l'interno dei campi $S_{\nu,1}$ e $S_{\nu,2}$, con $\lambda_{\nu,1}$ e $\lambda_{\nu,2}$ i coefficienti λ corrispondenti ai due campi $S_{\nu,1}$, $S_{\nu,2}$.

Supponiamo sopra ogni superficie σ_ν

$$(9)_a \qquad \lambda_{\nu,1} \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial n_{\nu,2}} = 0.$$

In tale ipotesi la $(8)_a$ assume la forma

$$(8')_a \quad \lambda_r \int_{s_r} V\rho_r(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi + \psi) \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu .$$

Se in $S_{r'}$ abbiamo un altro spazio $s_{r'}$, in cui è distribuita una massa $m_{r'}$, di densità $\rho_{r'}$, di cui la funzione potenziale è φ', mentre ψ' è una funzione finita e continua in tutto lo spazio insieme alle derivate prime, escluse le superficie σ_ν ove si ha

$$(9)_b \qquad \lambda_{\nu,1} \frac{\partial(\varphi' + \psi')}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial(\varphi' + \psi')}{\partial n_{\nu,2}} = 0,$$

e che verifica in tutto lo spazio (escluse le superficie σ_ν) all'equazione $\Delta^2 \psi' = 0$, avremo evidentemente

$$(8')_b \quad \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} V\rho_{r'}(s_{r'})\, ds_{r'} = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi' + \psi') \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu .$$

Poniamo nella $(8')_a$

$$V = \psi'$$

e nella $(8')_b$ $V = \psi$. Avremo sottraendo

$$\lambda_r \int_{s_r} \psi' \rho_r(s_r)\, ds_r - \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} \psi \rho_{r'}(s_{r'})\, ds_{r'} = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi + \psi) \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \psi'}{\partial n_{\nu,1}} \right.$$

$$\left. + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial \psi'}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu + \frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} (\varphi' + \psi') \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \psi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial \psi}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \left\{ \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} \left[\psi \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \psi'}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial \psi'}{\partial n_{\nu,2}} \right) - \psi' \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \psi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial \psi}{\partial n_{\nu,2}} \right) \right] d\sigma_\nu \right.$$

$$\left. - \sum_1^p {}_\nu \int_{\sigma_\nu} \left[\varphi \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \varphi'}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial \varphi'}{\partial n_{\nu,2}} \right) - \varphi' \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial \varphi}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{d\varphi}{dn_{\nu,2}} \right) \right] d\sigma_\nu \right\}$$

$$= \frac{-1}{4\pi} \left\{ \sum_1^q {}_\mu \lambda_\mu \int_{\sigma_\mu} \left(\psi \frac{\partial \psi'}{\partial n} - \psi' \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma_\mu - \sum_1^q {}_\mu \lambda_\mu \int_{\sigma_\mu} \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma_\mu \right\}$$

$$= \frac{\lambda_r}{4\pi} \int_{\sigma_r} \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma_r + \frac{\lambda_{r'}}{4\pi} \int_{\sigma_{r'}} \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma_{r'}$$

$$= -\lambda_r \int_{s_r} \varphi' \rho_r\, ds_r + \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} \varphi \rho_{r'}\, ds_{r'} ,$$

onde

$$(10)\qquad \lambda_r \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, (s_r)\, ds_r = \lambda_{r'} \int_{s_{r'}} (\varphi + \psi)\, \rho_{r'}\, (s_{r'})\, ds_{r'}.$$

Questa equazione è del tutto analoga alla (6). Anche questa comprende il teorema di Gauss ed è facile ricavarne il significato.

Prendiamo $\lambda_r = \lambda_{r'}$; essa ci dice che se abbiamo due corpi A, B elettrizzati in presenza di un numero qualunque di dielettrici, il potenziale di uno di essi A e della elettricità indotta da esso nei dielettrici su B è eguale al potenziale di B e delle elettricità da esso indotte nei dielettrici sull'altro.

A questo teorema ne corrisponde uno analogo per il magnetismo.

Supposto $\lambda_r = \lambda'_r$, la (10) dà luogo anche all'altra analoga alla (6)

$$(10')\qquad \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, (s_r)\, ds_r = \int_{s_{r'}} (\varphi + \psi)\, \rho_{r'}\, (s_{r'})\, ds_{r'}.$$

Prendiamo $\lambda_r = 1$, $\lambda_l = 0$ per tutti gli altri valori di l, e $r' = r$. Avremo che le equazioni scritte divengono

$$(7)_1\qquad \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} \left[V \frac{\partial}{\partial n} (\varphi + \psi) - \frac{\partial V}{\partial n} (\varphi + \psi) \right] d\sigma'_r = \int_{s_r} V \rho_r\, ds_r,$$

$$(9_a)_1\qquad \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial n'_r} = 0, \qquad\qquad (9_b)_1\qquad \frac{\partial (\varphi' + \psi')}{\partial n'_r} = 0,$$

$$(8_a)_1\qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} (\varphi + \psi) \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma_r = \int_{s_r} V \rho_r\, ds_r,$$

$$(8_b)_1\qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma'_r} (\varphi' + \psi') \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma'_r = \int_{s'_r} V \rho'_r\, ds'_r,$$

$$(10)_1\qquad \int_{s_r} (\varphi' + \psi')\, \rho_r\, ds_r = \int_{s'_r} (\varphi + \psi)\, \rho'_r\, ds'_r.$$

Se la funzione V, invece di verificare l'equazione

$$\Delta^2 V = 0,$$

soddisfa all'altra

$$\Delta^2 V = f(x, y, z),$$

allora le (2_a), (8_a) e $(8_a)_1$ divengono

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi m} \displaystyle\int_\sigma \left(V + \lambda(\sigma) \frac{\partial V}{\partial n} \right) \frac{\partial (\varphi + \psi)}{\partial n}\, d\sigma - \frac{1}{m} \int_S (\varphi + \psi) f d S = \frac{\displaystyle\int_s V \rho(s)\, ds}{\displaystyle\int_s \rho(s)\, ds}; \\[2ex] \displaystyle\int_{s_r} V \rho(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi} \sum_1^p {}_{\nu} \int_{\sigma_\nu} (\varphi + \psi) \left(\lambda_{\nu,1} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,1}} + \lambda_{\nu,2} \frac{\partial V}{\partial n_{\nu,2}} \right) d\sigma_\nu \\[2ex] \displaystyle -\sum_1^q {}_{\mu} \lambda_\mu \int_{S_\mu} (\varphi + \psi) f d S_\mu\ ; \int_{s_r} V \rho(s_r)\, ds_r = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_r} (\varphi + \psi) \frac{\partial V}{\partial n} - \int_{S_r} (\psi + \varphi) f d S_r. \end{cases}$$

Queste formule possono servire a darci i valori di una funzione incognita V che verifica l'equazione differenziale

$$\Delta^2 V = f(x, y, z)$$

in S o in tutto lo spazio, quando si conoscano al contorno σ i valori di $V + \lambda(\sigma)\, \partial V/\partial n$ o i valori di $\partial V/\partial n$, o a determinare la V sapendo i valori di

$$\lambda_{r,1} \frac{\partial V}{\partial n_{r,1}} + \lambda_{r,2} \frac{\partial V}{\partial n_{r,2}}$$

sopra delle superficie in cui le derivate della funzione incognita non sono continue.

Il problema viene ridotto sempre a trovare delle funzioni φ e ψ che verificano alle relazioni (5), (9_a) e $(9_a)_1$ sopra le superficie in cui sono noti i dati caratteristici della V. Le funzioni ψ vengono così ad essere determinate in modo analogo alle funzioni di GREEN. Esse godono anche di proprietà reciproche pure analoghe alle note proprietà reciproche della funzione di GREEN espresse mediante le relazioni (6), (6'), (10), (10'), $(10)_1$, di cui è stato accennato il significato fisico.

Se nel campo s la densità è costante, le (11) ci daranno subito la media dei valori della funzione incognita nello stesso campo.

È più importante il caso in cui nello spazio s si sappia che la V ha un valore costante. Allora le (11) ci dànno subito il valore costante della funzione incognita nei punti dello spazio s, il quale, come è già stato osservato, deve essere in questo caso a due o una dimensione.

Si presentano spesso dei casi in cui si sa *a priori* che lungo date linee il valore della funzione incognita deve risultare costante ed allora per la φ potremo considerare la funzione potenziale di masse a una sola dimensione distribuite su queste linee nel modo il più conveniente per la determinazione della funzione ψ.

In questo caso rientra il problema della determinazione di funzioni potenziali che si sa essere indipendenti da una coordinata e di cui sono date delle condizioni caratteristiche del genere di quelle indicate. Se la funzione potenziale è indipendente dalla coordinata ρ_1, dovremo considerare per la φ la funzione potenziale di masse distribuite con una densità qualunque sopra una delle linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e determinare convenientemente la ψ. La legge con cui deve distribuirsi sulla linea $\rho_2 = \text{cost.}$, $\rho_3 = \text{cost.}$ la densità, si potrà cercare, quando sarà possibile, in modo che la funzione $\varphi + \psi$ venga a risultare anche essa indipendente dalla coordinata ρ_1. Il problema in tal caso può trattarsi coll'impiegare soltanto due coordinate ρ_2 e ρ_3.

Per potere applicare la terza delle (9) è stato necessario ammettere che la massa totale distribuita in s sia uguale allo zero, quando lo spazio S è finito.

In tal caso potremo prendere per s due linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e distribuire su esse due masse eguali e di segno opposto; così la terza delle (11) ci fornisce la differenza dei valori della V lungo le due linee che si considerano e ci dà quindi i valori della V all'infuori di una costante.

Se si osserva che nel caso delle coordinate cartesiane

$$\rho_1 = x \quad , \quad \rho_2 = y \quad , \quad \rho_3 = z$$

si ha $H_1 = 1$, avremo considerando le funzioni potenziali indipendenti da ρ_1 che le funzioni associate corrispondono sempre alle coordinate isoterme sulle superficie $\rho_1 = \text{cost.}$, quindi le considerazioni precedenti portano ai *potenziali logaritmici* per lo studio dei problemi di coordinate isoterme nel piano.

Quando si considerano le coordinate cilindriche

$$\rho_1 = \theta \quad , \quad \rho_2 = r \quad , \quad \rho_3 = z$$

si ha

$$H_1 = r \quad , \quad H_2 = 1 \quad , \quad H_3 = 1 .$$

Si vede quindi come potranno sussistere delle funzioni potenziali indipendenti dalla coordinata θ; saranno queste le *funzioni potenziali simmetriche* rispetto ad un asse. In tal caso per la funzione φ sarà da prendersi la funzione potenziale di una massa omogenea ad una dimensione distribuita sopra una circonferenza normale all'asse di simmetria e col centro su questo asse.

La funzione ψ convenientemente determinata nei vari casi sarà da sostituirsi alla ordinaria funzione di GREEN.

La funzione φ può porsi sotto la forma trovata dal ch. prof. BELTRAMI

$$\varphi = \frac{2\,\mathrm{M}}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda^2)\sqrt{s}} ,$$

in cui s è dato da

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda^2} - \frac{(z - z_0)^2}{\lambda^2} ;$$

λ_1 è la radice positiva dell'equazione $s = 0$; a è il raggio del cerchio su cui è distribuita la massa M e z_0 la distanza del cerchio dall'origine.

È da osservare che delle tre formule (11) la prima serve alla soluzione di problemi sul calore e sulla elettrostatica, la seconda ai problemi del magnetismo, e la terza ai problemi di idrodinamica ed elettrodinamica.

§ 3. – Formule e funzioni analoghe a quelle di Green per le funzioni associate a quelle potenziali.

Riprendiamo le formule (γ) del § 1. Supposte due funzioni associate W_1 e W_2 che in un dato campo a due dimensioni di λ e μ non hanno alcuna singolarità, avremo

$$\int_s \frac{1}{H_1}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) ds = 0 \tag{1}$$

in cui s rappresenta l'arco del contorno, n la normale.

Per tutti i punti di s si conducano le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

e si ottenga così una superficie chiusa σ, oppure una superficie aperta indefinita.

La (1) varrà per qualunque sezione prodotta in questa superficie con una superficie $\rho_1 = \text{cost}$. Moltiplicando quindi la (1) per $d\rho_1$ e integrando a tutti i valori di ρ_1 risulta

$$\int d\rho_1 \int_s \frac{1}{H_1}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) ds = 0$$

e osservando che l'elemento superficiale della superficie σ è $H_1 d\rho_1 ds$ avremo

$$\int_\sigma \frac{1}{H_1^2}\left(W_1 \frac{\partial W_2}{\partial n} - W_2 \frac{\partial W_1}{\partial n}\right) d\sigma = 0.$$

La (1) può anche porsi sotto un'altra forma ponendo mente alle equazioni (8) del § 1. Questa forma è

$$\int_s \left(W_1 \frac{\partial V_2}{\partial s} - W_2 \frac{\partial V_1}{\partial s}\right) ds = 0, \tag{1'}$$

in cui l'integrale è esteso ad un contorno chiuso qualunque che non ha nell'interno nessun punto di singolarità.

Di qui potrebbe dedursi che

$$\int_{\lambda_0, \mu_0}^{\lambda, \mu} \left(W_1 \frac{\partial V_2}{\partial s} - W_2 \frac{\partial V_1}{\partial s}\right) ds$$

(in cui la integrazione è estesa ad una linea aperta l che va da un punto di coordinate λ_0, μ_0 ad un punto di coordinate λ, μ) è indipendente dalla linea l che si percorre, ma dipende soltanto dai punti estremi (λ_0, μ_0), (λ, μ).

In modo analogo a quello con cui si giunge alla (1), si ha

$$\int_s \mathrm{H}_1\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial n} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds = 0,$$

che può anche scriversi

$$\int_s \left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial s} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial s}\right) ds = 0$$

quando la V_1 non ha alcuna singolarità entro il campo che si considera.

Le formule scritte precedentemente possono dedursi come conseguenze da questa. Se infatti supponiamo V_1, W_1, V_2, W_2 monodrome, l'equazione precedente ci dà per mezzo di una integrazione per parti

$$\int_s \left(\mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s} - \mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial s}\right) ds = 0,$$

che non è altro che la (1').

Supponiamo ora che girando intorno ad un punto a del campo che si considera la funzione finita V_2 sia polidroma ed il suo valore cresca di m ad ogni giro, mentre la $\partial \mathrm{V}_2/\partial n$, se coll'avvicinarsi di s ad a diviene infinita, lo sia di un ordine inferiore all'unità rispetto alla lunghezza della linea s; W_2 sia monodroma.

Se s_1 è una curva qualunque che include a avremo

$$\int_{s_1} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds_1 + \int_{s_1} \mathrm{H}_1\left(\mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial n} - \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial n}\right) ds_1$$

$$= \int_{s_1} \left[\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{V}_2}{\partial s_1} + \mathrm{V}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial s_1}\right) - \left(\mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial s_1} + \mathrm{V}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial s_1}\right)\right] ds_1$$

$$= \int_{s_1} \frac{d(\mathrm{V}_2 \mathrm{W}_1 - \mathrm{V}_1 \mathrm{W}_2)}{ds_1} ds_1 = \int_{s_1} \frac{d(\mathrm{V}_2 \mathrm{W}_1)}{ds_1} ds_1 .$$

Se la curva s_1 si avvicina indefinitamente ad a si otterrà

$$\lim \int_{s_1} \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds_1 = m \mathrm{W}_1^{(a)}$$

in cui $\mathrm{W}_1^{(a)}$ è il valore in a della funzione W_1.

Per le formule scritte precedentemente avremo dunque, quando sono verificate le indicate proprietà nel punto a,

$$\int_s \frac{1}{\mathrm{H}_1}\left(\mathrm{W}_1 \frac{\partial \mathrm{W}_2}{\partial n} - \mathrm{W}_2 \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial n}\right) ds = m \mathrm{W}_1^{(a)},$$

formula che ci dà il valore di W_1 nel punto a in funzione dei valori che essa e la sua derivata rispetto alla normale n prendono al contorno s, quando questo contorno limita un campo nel cui interno si trova a.

Se W_3 è una funzione associata senza alcuna singolarità, la formula precedente dà luogo subito all'altra

$$(2) \qquad \int_s \frac{1}{H_1}\left[W_1 \frac{\partial (W_2 + W_3)}{\partial n} - (W_2 + W_3)\frac{\partial W_1}{\partial n}\right] ds = m W_1^{(a)},$$

la quale, secondochè lungo s si ha

$$(3) \qquad \frac{\partial (W_2 + W_3)}{\partial n} = 0$$

oppure

$$(3') \qquad W_2 + W_3 = 0,$$

conduce alle due seguenti

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} & -\int_s \frac{1}{H_1}\frac{\partial W_1}{\partial n}(W_2 + W_3)\, ds = m W_1^{(a)}, \\ & \int_s \frac{1}{H_1} W_1 \frac{\partial (W_2 + W_3)}{\partial n}\, ds = m W_1^{(a)}. \end{aligned} \right.$$

La formula (2) può anche scriversi

$$\int_s \left[W_1 \frac{\partial (V_2 + V_3)}{\partial s} - (W_2 + W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m W_1^{(a)}$$

e per mezzo di una integrazione per parti

$$(4) \qquad \int_s \left[(V_2 + V_3) H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - (W_2 + W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(a)} - W_1'),$$

in cui W_1' è il valore di W_1 nel punto di s in cui si cominciano a contare gli archi nell'eseguire l'integrazione indicata nel primo membro.

Suppongasi che la funzione V_2', la cui funzione associata è W_2', goda rispetto al punto b interno al campo che si considera le stesse proprietà di V_2 rispetto ad a. Avremo allora evidentemente

$$(4') \qquad \int_s \left[V_2' H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - W_2' \frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(b)} - W_1').$$

Sottraendo la (4') dalla (4) si ottiene

$$(5) \qquad \int_s \left[(V_2 - V_2' + V_3) H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - (W_2 - W_2' + W_3)\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds = m\,(W_1^{(b)} - W_1^{(a)}).$$

Sia V_1 la funzione potenziale di masse distribuite sopra la superficie chiusa σ che si ottiene conducendo per tutti i punti di s le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

Avremo allora, indicando con n' il prolungamento di n dalla parte opposta di s se esternamente ad s le V_2, V'_2, W_2, W'_2 non hanno singolarità,

$$\int_s \left\{ (V_2 - V'_2) H_1 \frac{\partial V_1}{\partial n'} - (W_2 - W'_2) \frac{\partial V_1}{\partial s} \right\} ds = 0$$

e quindi indicando con $\rho(s)$ la densità superficiale

$$\frac{4\pi}{m} \int_s (V_2 - V'_2) H_1 \rho(s) ds = W_1^{(a)} - W_1^{(b)}. \tag{6}$$

La (6) valga per qualunque sezione prodotta sulla superficie σ da una superficie $\rho_1 = \text{cost.}$ Avremo allora

$$c \int_\sigma (V_2 - V'_2) \rho(\sigma) d\sigma = W_1^{(a)} - W_1^{(b)},$$

in cui c è una costante che si determina facilmente e $W_1^{(a)}$ e $W_1^{(b)}$ sono i valori costanti di W_1 lungo le linee

$$\rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.}$$

che passano fra i punti a e b.

La formula (5) ci dà, quando si conosce la funzione V_1, la sua associata W_1 all'infuori di una costante arbitraria per mezzo delle funzioni V_2, V'_2, V_3, W_2, W'_2, W_3 e di una sola quadratura. Vedremo alcuni casi in cui si possono determinare tali funzioni. Osserviamo intanto che esse debbono esser tali che la V_2 deve risultare polidroma e questo ci porta subito a ricercare se per la V_2 può prendersi la funzione potenziale delle azioni magnetiche di una corrente elettrica, o ciò che è lo stesso, il potenziale di velocità di un liquido che contiene un filetto vorticoso.

Se è possibile che lungo una linea $\rho_2 = \text{cost.}$, $\rho_3 = \text{cost.}$ esista una corrente elettrica la cui funzione potenziale elettromagnetica sia indipendente da ρ_1, questa potrà prendersi per la V_2 e la sua associata per la W_2 ogni qualvolta che per le derivate della V_2 in vicinanza dei punti percorsi dalla corrente siano verificate le condizioni imposte precedentemente. È facile trovare il significato fisico che debbono avere V_2 e V_3 quando sono verificate le (3), (3') e la V_2 si considera come il potenziale di velocità di un fluido con un filetto vorticoso.

Se le coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3, sono le coordinate cartesiane x, y, z, si vede che il filetto vorticoso da considerare sarà il filetto rettilineo indefinito parallelo all'asse x ($\rho_2 = y_0$, $\rho_3 = z_0$). Per la funzione $W_2(y, z)$ si ottiene quindi la funzione $\log r$ in cui r è la distanza del punto (y, z) dal punto (y_0, z_0).

Si ha infatti che in questo caso le due funzioni V_1 e W_1 verificano ad una stessa equazione differenziale.

Passiamo al caso delle funzioni potenziali simmetriche, cioè poniamo

$$\rho_1 = \theta \quad , \quad \rho_2 = r \quad , \quad \rho_3 = z.$$

La V_2 sarà la funzione potenziale di una corrente elettrica circolare col centro sull'asse di simmetria e normale ad esso; la

$$W_2 = \text{cost.}$$

ci darà le linee di flusso di un liquido che ha un filetto vorticoso circolare di sezione infinitesima.

Indichiamo con a il raggio del filetto, con z_0 la distanza del centro dall'origine.

HELMHOLTZ ha trovato che

$$W_2 = \frac{r}{2\pi} M \int_0^{2\pi} \frac{\cos e\, de}{\sqrt{(z-z_0)^2 + r^2 + a^2 - 2ra\cos e}}.$$

Questo integrale può trasformarsi in modo analogo a quello con cui il prof. BELTRAMI trasforma il potenziale di un anello circolare omogeneo.

Posto

$$a^2 + r^2 + (z-z_0)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad , \quad ar = \sigma_1 \sigma_2$$

si ha

$$W_2 = \frac{r}{\pi} M \int_0^{\pi} \frac{\cos e\, de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 \cos e}}.$$

Questo integrale mediante la trasformazione di LANDEN si riduce subito ad un integrale ellittico di seconda specie.

Infatti si ponga

$$\sigma_1 \operatorname{sen}(\varphi - e) = \sigma_2 \operatorname{sen}\varphi .$$

Si otterrà

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e} = \frac{\sigma_1 \operatorname{sen} e}{\operatorname{sen}\varphi}:$$

quindi

$$\frac{\cos e\, de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} + \frac{1}{\sigma_1}\cos\varphi\, de$$

$$= \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} + \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

e, integrando fra 0 e π,

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos e\, de}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\cos e}} = 2\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_2^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Quindi abbiamo W_2 sotto forma canonica,

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi}\frac{\sigma_2}{\sigma_1^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

o sotto le altre forme

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^2 \sqrt{(\sigma^2 - \sigma_1^2)(\sigma^2 - \sigma_2^2)}},$$

$$W_2 = \frac{2rM}{\pi} \sigma_1 \sigma_2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2 \sqrt{s}} = \frac{2Mar^2}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2 \sqrt{s}},$$

in cui σ_1 e σ_2 sono le radici positive ($\sigma_1 > \sigma_2$) della equazione

$$\frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{(z-z_0)^2}{\sigma^2 - a^2} = 1,$$

mentre

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2+\lambda^2} - \frac{(z-z_0)^2}{\lambda^2}$$

e λ_1 è la radice positiva di $s = 0$.

È facile ora passare a determinare la V_2. Partendo infatti dalla funzione potenziale simmetrica

$$V = 2\pi a^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F(s)\, d\lambda}{(a^2+\lambda^2)},$$

avremo, supponendo $F(0) = 0$,

$$-r \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi a^2 r^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{F'(s)\, d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2}.$$

Quindi, se

$$F(s) = \sqrt{s},$$

$$-r \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi a^2 r^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)^2 \sqrt{s}} = W_2$$

e per conseguenza

$$V_2 = \frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi a^2 (z-z_0) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda^2)\lambda^2 \sqrt{s}},$$

la quale è la funzione potenziale di una corrente elettrica circolare. Passando dalla variabile λ alla variabile σ, si ha

$$V_2 = -2\pi a^2 (z-z_0) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 (a^2+\lambda^2)(\lambda^2-\lambda_1^2)(\lambda^2-\lambda_2^2)}}$$

$$= -2\pi a^2 (z-z_0) \int_{\sigma_1}^{\infty} \frac{d\sigma}{(\sigma^2-a^2)\sqrt{(\sigma^2-\sigma_1^2)(\sigma^2-\sigma_2^2)}}$$

e finalmente, passando alla variabile φ,

$$V_2 = \frac{-2\pi a^2 (z - z_0)}{\sigma_1} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{(\sigma_1^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Per determinare in altro modo le due funzioni V_2 e W_2 basta partire dalla funzione potenziale di un disco omogeneo. Questa è data, se il raggio del disco è a, la distanza dell'origine dal centro è z_0, la densità è uguale ad 1, da

$$V = 2\pi a^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} f(s) \frac{d\lambda}{a^2 + \lambda^2},$$

ove

$$f(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^s \frac{d\nu}{\sqrt{s - \nu}} = \frac{2\sqrt{s}}{\pi},$$

$$s = 1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda^2} - \frac{(z - z_0)^2}{\lambda^2};$$

quindi

$$V = 4a^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \sqrt{s} \frac{d\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Derivando rispetto a z_0, ovvero rispetto a z e cambiando di segno, si otterrà la funzione potenziale di un doppio strato omogeneo di momento 1, cioè di una corrente elettrica circolare di raggio a il cui centro è in z_0.

Quindi

$$V_2 = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

$$W_2 = r \frac{\partial V}{\partial r}$$

e per conseguenza

$$\left\{ \begin{aligned} V_2 &= 4a^2 (z - z_0) \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 (a^2 + \lambda^2) \sqrt{s}}, \\ W_2 &= -4a^2 r^2 \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda^2)^2 \sqrt{s}}, \end{aligned} \right.$$

le quali si riducono subito alla forma canonica con operazioni inverse a quelle eseguite precedentemente.

Dalle formule trovate è facile dedurre che nel nostro caso le particolarità richieste per le derivate della funzione V_2 in prossimità dei punti della corrente sono verificate.

Vediamo ora di applicare la formula (5). Perciò bisogna considerare un campo rinchiuso da s nel cui interno capitino soltanto i due punti di polidromia a e b. Prendiamo perciò per s una linea qualunque chiusa posta tutta da una parte dell'asse di simmetria, oppure prendiamo per s una linea s_1 che termini in due punti dell'asse di simmetria più la porzione di questo asse compresa fra questi due punti.

Poniamo

$$W_3 = V_3 = 0:$$

si otterrà

$$W_1^{(a)} - W_1^{(b)} = \frac{r_a^2}{2\pi}\int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_a}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_a^2+\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds$$

$$-\frac{r_b^2}{2\pi}\int_{\lambda_b}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_b^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_b}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_b^2+\lambda^2}\frac{\partial V}{\partial s}\right] ds$$

in cui le quantità con indice a si riferiscono alla corrente circolare di raggio r_a e distante dall'origine di z_a, quelle con indice b alla corrente di raggio r_b e distante di z_b dall'origine.

Poiché r è zero sull'asse di simmetria si vede che gli integrali estesi ad s sono estesi alla curva chiusa o soltanto alla curva s_1.

Applicando la formola (4) si trova invece

$$W_1^{(a)} + C = \frac{r_a^2}{2\pi}\int_{\lambda_1}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r}{(r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\left[\frac{z-z_0}{\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial n} + \frac{r}{r_a^2+\lambda^2}\frac{\partial V_1}{\partial s}\right] ds$$

e l'integrale rispetto ad s va esteso come è indicato precedentemente.

Queste formule abbastanza semplici ci dànno il modo di passare subito dalla funzione potenziale alla sua associata per mezzo di una quadratura e di integrali ellittici.

Quando la V_1 è la funzione potenziale di una massa distribuita simmetricamente sopra una superficie di rivoluzione intorno ad un asse la cui curva meridiana è s, la formula (6) ci dà subito le linee di forza in funzione della densità superficiale ρ.

Abbiamo infatti in tal caso

$$W_1^{(a)} + C = 4a^2 \int_{\lambda_a}^{\infty} d\lambda \int_s \frac{r(z-z_0)}{\lambda^2 (r_a^2+\lambda^2)\sqrt{s_a}}\,\rho(s)\,ds,$$

formula che poteva ottenersi anche diversamente.

Osservando che è possibile disporre due linee vorticose circolari in un fluido in modo che siano coassiali ed esista una sfera nel fluido i punti della quale non abbiano velocità normale alla sfera, si vede come applicando le formule (2') si possono risolvere con facilità i problemi di determinare le funzioni associate nei punti interni ad una sfera quando sono note alcune fra le proprietà caratteristiche al contorno.

Le formule trovate ora possono farsi anche dipendere da alcuni teoremi generali assai semplici.

Se le quantità u, v, w funzioni di x, y, z finite e continue insieme alle loro derivate soddisfano alla condizione solenoidale

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

è noto che

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = 0,$$

essendo σ una superficie chiusa, α, β, γ i coseni degli angoli che la normale a σ fa cogli assi.

Segue di qui che se la superficie σ è aperta

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

dipende soltanto dal contorno di σ. Vediamo quindi di esprimere questo integrale in funzione soltanto di elementi che dipendono da questo contorno.

Per un teorema di JACOBI è sempre possibile trovare due funzioni μ e ν che soddisfano le equazioni differenziali

$$u = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial y}, & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial \nu}{\partial y}, & \frac{\partial \nu}{\partial z} \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial z}, & \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial \nu}{\partial z}, & \frac{\partial \nu}{\partial x} \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x}, & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x}, & \frac{\partial \nu}{\partial y} \end{vmatrix},$$

quindi

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma$$

$$= \int_\sigma \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial y}, & \frac{\partial \mu}{\partial z} \\ \frac{\partial \nu}{\partial y}, & \frac{\partial \nu}{\partial z} \end{vmatrix} \alpha + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial z}, & \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{\partial \nu}{\partial z}, & \frac{\partial \nu}{\partial x} \end{vmatrix} \beta + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x}, & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \nu}{\partial x}, & \frac{\partial \nu}{\partial y} \end{vmatrix} \gamma \right\} d\sigma.$$

Considerando z come funzione di x e y definita dall'equazione della superficie σ, abbiamo per conseguenza

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = -\int_{\sigma_1} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{\partial \nu}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) dx\, dy$$

se la direzione positiva della normale a σ è quella che fa un angolo acuto coll'asse z e σ_1 è la proiezione di σ sul piano xy; ammetteremo che questa proiezione copra una sola volta il piano xy.

Se ne deduce, se la funzione μ è monodroma e s è il contorno della superficie σ,

$$\int_\sigma (u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma = \int_s \mu \frac{d\nu}{ds}\, ds.$$

Ora se u, v, w ammettono un potenziale V, avremo

$$\int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = \int_s \mu \frac{d\nu}{ds} ds,$$

formula analoga ad una nota della teoria delle variabili complesse perché collega l'integrale di $\partial V / \partial n$ esteso ad una superficie coi valori che prendono al contorno di essa le funzioni che ci dànno le linee di forza.

Supposta nella linea chiusa s una corrente elettrica di cui U sia il potenziale elettromagnetico e detta σ_1 una superficie chiusa che includa σ, avremo

$$\int_{\sigma_1} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma_1 = 4 \pi m \int_\sigma \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma,$$

essendo m il momento della superficie magnetica che ha lo stesso potenziale della corrente.

Ne segue che

$$\int_{\sigma_1} \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma_1 = 4 \pi m \int_s \mu \frac{d\nu}{ds} ds.$$

Applichiamo questa formola al caso delle funzioni potenziali simmetriche. Prendiamo per s un cerchio col centro sull'asse e ad esso perpendicolare; sia ν l'angolo che un piano che passa per l'asse fa con un piano fisso. Posto $4 \pi m = 1$ avremo

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma$$

e le equazioni $\nu =$ cost. e $\mu =$ cost. ci daranno le linee di forza corrispondenti alla funzione potenziale V.

Osservando che, se s è la curva meridiana di σ, si ha

$$d\sigma = r ds d\theta,$$

l'equazione precedente può anche scriversi

$$\mu = \int_s r \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds.$$

Come siamo passati dalla (2) alle (2') si potrebbe passare senza alcuna difficoltà ad altre formule analoghe a quelle trovate nel § precedente.

Per le funzioni W_3 che soddisfano alle (3) e (3') è facile dimostrare delle proprietà reciproche analoghe a quelle dimostrate nel § precedente. Sarebbe pure facile in qualche caso trovare il significato fisico di tali proprietà. Si vedrebbe che in alcuni casi esse rientrerebbero nel teorema che si deduce subito da uno noto di HELMHOLTZ sulla distribuzione delle correnti elettriche.

Se in un liquido definito o indefinito in cui sono o no immersi dei solidi si ha un filetto vorticoso A, la quantità di liquido che in un dato istante passa per una superficie B sta alla quantità di liquido che passerebbe entro A, se invece del filetto A si avesse al contorno di B un filetto vorticoso, nello stesso rapporto della circolazione dei due filetti.

§ 4. – Distribuzione della elettricità in superficie conduttrici non omogenee.

Abbiamo trovato per le formule (γ) del § 1 che le V e W acquistavano questo significato: esse rappresentavano le linee di livello e di flusso dell'elettricità sopra una superficie ρ_1=cost. quando la conducibilità era rappresentata dalla funzione H_1. Così ogni problema che dà luogo ad una funzione potenziale simmetrica intorno ad un asse corrisponde ad un altro di distribuzione di correnti in un piano in cui la conducibilità varia proporzionalmente alla distanza da una retta.

Ora, poiché le λ = cost., μ = cost. sono linee isoterme della superficie ρ_1 = cost., la forma delle (γ) non cambia se si sostituiscono alle coordinate λ, μ le altre λ_1 e μ_1 definite dalla relazione

$$\lambda_1 + i\mu_1 = \varphi(\lambda + i\mu).$$

Questa osservazione aggiunta all'altra già fatta ci permette di determinare in varii casi la distribuzione di correnti elettriche stazionarie sopra delle superficie conduttrici non omogenee partendo da funzioni potenziali indipendenti da una coordinata.

Come applicazione studiamo il caso che risulta dalle funzioni potenziali simmetriche.

Se l'asse di simmetria è l'asse z e prendiamo le coordinate cilindriche (r, θ, z) si hanno per equazioni della funzione potenziale simmetrica V e della sua associata W

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

e se λ, μ è un sistema di coordinate isoterme nel piano

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(r(\lambda,\mu)\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(r(\lambda,\mu)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{r(\lambda,\mu)}\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{r(\lambda,\mu)}\frac{\partial W}{\partial\mu}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Vediamo quali sono le linee isoterme del piano le quali colla rotazione intorno all'asse di simmetria z dànno luogo ad un sistema di superficie di livello.

Queste linee potranno essere linee di livello nella distribuzione delle correnti nel piano, supposto questo omogeneo o colla conducibilità in ogni punto proporzionale alla distanza dall'asse z.

Per la formula (6) del § 1 dovremo avere affinché questo si verifichi

$$r(\lambda,\mu) = \varphi(\lambda)\,\psi(\mu)$$

e poiché

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial \mu^2} = 0,$$

dovrà essere

$$\psi \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + \varphi \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} = 0;$$

ossia, essendo c^2 una costante,

$$(1) \qquad \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} = c^2 \varphi \quad , \quad \frac{d^2 \psi}{d\mu^2} = - c^2 \psi.$$

Integrando si trova

$$\varphi = A e^{c\lambda} + A_1 e^{-c\lambda} \quad , \quad \psi = B \cos (c\mu + c_2),$$

e quindi

$$\begin{cases} r = C e^{c\lambda} \cos (c\mu + c_2) + C_1 e^{-c\lambda} \cos (c\mu + c_2), \\ z = C e^{c\lambda} \operatorname{sen} (c\mu + c_2) - C_1 e^{-c\lambda} \operatorname{sen} (c\mu + c_2). \end{cases}$$

Si deduce quindi

$$(2) \qquad r + iz = C' e^{c(\lambda + i\mu)} + C'_1 e^{-c(\lambda + i\mu)} = M \cosh [c (\lambda + i\mu) + N]$$

in cui M ed N sono costanti.

Questo ci dimostra che soltanto il sistema di ellissi ed iperbole omofocali godono della proprietà richiesta, oltre al sistema di rette parallele agli assi z e r che si otterrebbero prendendo nelle (1) la costante $c = 0$.

Si abbiano ora due piani, il piano $x + iy$ e il piano $\lambda + i\mu$. La funzione

$$(3) \qquad x + iy = \theta (\lambda + i\mu)$$

rappresenti conformemente una porzione del piano (x, y) sul piano (λ, μ). Sia V una funzione che soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial \left(\lambda \dfrac{\partial V}{\partial \lambda}\right)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \left(\lambda \dfrac{\partial V}{\partial \mu}\right)}{\partial \mu} = 0;$$

avremo per la osservazione già fatta

$$\frac{\partial \left(\lambda (x, y) \dfrac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\lambda (x, y) \dfrac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0.$$

V rappresenta quindi la funzione potenziale di una distribuzione di correnti elettriche stazionarie nel piano (x, y) in cui la conducibilità è costante lungo un sistema di linee che fa parte di un doppio sistema di linee isoterme, mentre la conducibilità varia da linea a linea con una legge data dalla funzione λ.

Si ha così il modo di ricondurre il problema generale della determinazione delle correnti elettriche in un piano in cui la conducibilità varia da punto a punto con una legge data dalla funzione $\lambda (x, y)$ che verifica l'equazione $\Delta^2 \lambda = 0$, quando sono note le caratteristiche al contorno, alla determinazione di una funzione potenziale simmetrica, col rappresentare conformemente la porzione data di piano in un'altra in cui alle linee $\lambda = \text{cost.}$ corrispondono delle linee rette.

Quando la conducibilità varia con questa legge esistono sempre dei sistemi di linee di livello che possono essere linee di livello anche supponendo il piano di conducibilità uniforme. Tali sistemi sono quelli che colla rappresentazione conforme ora studiata dànno luogo alle linee espresse dalle (2), cioè ad un sistema di ellissi ed iperbole omofocali.

Oltre a queste esistono le linee

$$\lambda = \text{cost.}$$

le quali godono pure della stessa proprietà.

Partendo dalle funzioni analoghe a quelle di Green per i potenziali indipendenti da una coordinata di cui abbiamo parlato al § II, è facile introdurre delle funzioni analoghe nel caso della distribuzione di correnti in superficie non omogenee, dalle quali possono dedursi i valori della funzione potenziale che ci dànno la legge della distribuzione delle correnti.

Le linee di flusso sono date da

$$W = \text{cost.}$$

in cui W soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda(xy)}\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda(xy)}\frac{\partial W}{\partial y}\right) = 0,$$

quindi esse corrispondono a linee di livello nel caso in cui la conducibilità è data da $1/\lambda(xy)$. Anche nel caso in cui la conducibilità sia data da questa funzione il problema può quindi ridursi ad uno di potenziali simmetrici ed anche in questo caso, introducendo le funzioni analoghe a quelle di Green studiate nel § 3 per le funzioni associate alle funzioni potenziali, si può giungere in alcuni casi facilmente a determinare le funzioni W che ci dànno la legge di distribuzione delle correnti quando siano noti i punti del piano per i quali entra ed esce la corrente e le *linee elettromotrici*.

Sempre applicando lo stesso processo di rappresentazione conforme possono essere anche studiati dei casi di superficie non piane conduttrici in cui la conducibilità varia da punto a punto, mantenendosi però costante lungo un sistema di linee isoterme.

§ 5. – Distribuzione delle correnti elettriche in corpi conduttori non omogenei.

Abbiamo trovato nel § precedente come da funzioni potenziali indipendenti da una coordinata si può dedurre la soluzione di varii problemi di distribuzione di correnti in superficie conduttrici non omogenee. Vediamo generalizzando se è possibile risolvere qualche problema analogo nel caso di corpi a tre dimensioni partendo da funzioni potenziali corrispondenti a spazî a più di tre dimensioni.

Sia V una funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e siano $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ funzioni di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ finite e continue insieme alle loro derivate e tali che

$$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \rho_r}\right)^2 = H_r^2 \quad , \quad \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial \rho_r} \frac{\partial x_i}{\partial \rho_s} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n \; ; \; s \neq r).$$

Avremo

$$\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_i \frac{1}{H_i^2} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right)^2$$

e applicando il noto metodo di JACOBI si ha

$$\sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \frac{1}{H_1 H_2 \cdots H_n} \sum_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{H_1 H_2 \cdots H_n}{H_i^2} \frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right).$$

Se la V è indipendente da $\rho_{p+1}, \rho_{p+2}, \cdots, \rho_n$, sarà

$$\sum_1^p {}_i \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\frac{H_1 H_2 \cdots H_p}{H_i^2} P \frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right) = 0,$$

in cui P sta ad indicare il prodotto

$$H_{p+1} H_{p+2} \cdots H_n .$$

Sia $p = 3$ e

$$H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2$$

rappresenti l'elemento lineare dello spazio euclideo riferito ad un sistema di coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3. Avremo allora che la V, la quale soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} P \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} P \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} P \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0,$$

sarà una funzione potenziale corrispondente ad una distribuzione di elettricità in un corpo a tre dimensioni la cui conducibilità è rappresentata da

$$P(\rho_1, \rho_2, \rho_3).$$

Come esempi consideriamo il caso in cui V dipenda da quattro coordinate x_1, x_2, x_3, x_4.

Colleghiamo le $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ a queste variabili per le relazioni

$$x_1 = \rho_1 \quad , \quad x_2 = \rho_2 \quad , \quad x_3 = \rho_3 \cos \rho_4 \quad , \quad x_3 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_4 .$$

Avremo

$$\sum_i dx_i^2 = d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + d\rho_3^2 + \rho_3^2 d\rho_4^2,$$

quindi se V è indipendente da ρ_4 soddisferà l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0.$$

In questo caso dunque, se poniamo

$$x = \rho_1 \quad , \quad y = \rho_2 \quad , \quad z = \rho_3 ,$$

avremo che V corrisponderà al caso in cui la conducibilità in ciascun punto è proporzionale alla distanza dal piano xy.

Consideriamo il caso in cui V dipenda da cinque coordinate $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5$ e si abbia

$$x_1 = \rho_1 , x_2 = \rho_2 \cos \rho_4 , x_3 = \rho_2 \operatorname{sen} \rho_4 , x_4 = \rho_3 \cos \rho_5 , x_5 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_5 .$$

Sarà

$$\sum_i dx_i^2 = d\rho_1^2 + d\rho_2^2 + d\rho_3^2 + \rho_2^2 d\rho_4^2 + \rho_3^2 d\rho_5^2$$

e se V è indipendente da ρ_4 e ρ_5 risulterà

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right) = 0 ,$$

quindi corrisponderà al caso in cui la conducibilità varia proporzionalmente al prodotto delle distanze dai piani xy , xz.

Finalmente quando V dipenda da sei coordinate $x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6$ e si abbia

$$x_1 = \rho_1 \cos \rho_4 \quad , \quad x_2 = \rho_1 \operatorname{sen} \rho_4 \quad , \quad x_3 = \rho_2 \cos \rho_5 ,$$

$$x_4 = \rho_2 \operatorname{sen} \rho_5 \quad , \quad x_5 = \rho_3 \cos \rho_6 \quad , \quad x_6 = \rho_3 \operatorname{sen} \rho_6 ,$$

se la V è indipendente da ρ_4 , ρ_5 , ρ_6 sarà

$$0 = \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_3}\left(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \frac{\partial V}{\partial \rho_3}\right)$$

e V corrisponderà a una conducibilità proporzionale al prodotto delle distanze dai piani coordinati.

Vediamo di introdurre anche in questi casi degli elementi che possano servire a risolvere dei problemi analoghi a quelli che si presentano nei casi ordinari in cui si tratta di corpi omogenei, degli elementi cioè che facciano l'ufficio delle ordinarie funzioni di GREEN.

È noto che la funzione

$$\varphi = [(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \cdots (x_n - x_n^0)^2]^{-\frac{n}{2}+1}$$

soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 ;$$

che se S_n è uno spazio ad n dimensioni e $\lambda (x_1 , x_2 , \cdots , x_n)$ è continua, posto

$$V = \int_{S_n} \lambda \varphi \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n = \int_{S_n} \lambda (\rho_1 , \cdots , \rho_n) \, \varphi (\rho_1 , \cdots , \rho_n) \, H_1 \, H_2 \cdots H_n \, d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_n$$

si ha

$$\sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = - n (n - 2) N \lambda (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) ;$$

che se S_{n-1} è uno spazio a $n-1$ dimensioni e p è l'elemento normale, se λ è una funzione continua dei punti di S_{n-1} e ora si pone

$$V=\int_{S_{n-1}}\lambda\varphi\, dS_{n-1},$$

V risulta continua e si ha

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_a+\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_b=-n(n-2)N\lambda, \tag{1}$$

in cui le due derivate sono prese rispetto alla normale allontanandosi dai punti dello spazio S_{n-1}; che finalmente, se si pone

$$V=\int_{S_{n-1}}\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial p}dS_{n-1},$$

si ha

$$V_a-V_b=n(n-2)N\lambda \tag{2}$$

e le derivate prime di V hanno valori eguali dalle due parti di S_{n-1}.

Si ha inoltre il teorema analogo a quello di GREEN, cioè, se la normale p ad S_{n-1} è diretta verso l'interno di S_{n-1},

$$\int_{S_{n-1}}\left(V\frac{\partial U}{\partial p}-U\frac{\partial V}{\partial p}\right)dS_{n-1}=\int_{S_n}\left(U\sum_i\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}-V\sum_i\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}\right)dS_n.$$

teorema che conduce, allorché $U=\varphi$, all'equazione

$$-\int_{S_n}\sum_i\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\varphi\, dS_n+\int_{S_{n-1}}\left(V\frac{\partial\varphi}{\partial p}-\varphi\frac{\partial V}{\partial p}\right)dS_{n-1}=n(n-2)NV(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0).$$

In tutte le formole scritte si ha, se n è pari

$$N=\frac{(2\pi)^{n/2}}{2\cdot 4\cdots n},$$

e se n è dispari

$$N=\frac{2\cdot(2\pi)^{(n-1)/2}}{3\cdot 5\cdots n}.$$

Se τ è uno spazio con un numero di dimensioni inferiore ad n interno ad S_n, di cui l'elemento è $d\tau$, e μ è una funzione continua dei punti di τ, avremo evidentemente, posto

$$\int_\tau \varphi\mu\, d\tau=\psi,$$

$$\frac{1}{n(n-2)N}\int_{S_{n-1}}\left[V\frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p}-(\psi+\psi_1)\frac{\partial V}{\partial p}\right]dS_{n-1}$$

$$-\frac{1}{n(n-2)N}\int_{S_n}(\psi+\psi_1)\sum_i\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}dS_n=\int_\tau V\mu\, d\tau.$$

in cui ψ_1 è una funzione che soddisfa l'equazione

$$\sum_i \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_i^2} = 0 .$$

Se in τ la V è costante ed eguale a V_1, si avrà

$$V_1 \int_\tau \mu\, d\tau = \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_{n-1}} \left[V \frac{\partial (\psi + \psi_1)}{\partial p} - (\psi + \psi_1) \frac{\partial V}{\partial p} \right] dS_{n-1}$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_n} (\psi + \psi_1) \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} dS_n .$$

Senza nessuna difficoltà si potrebbe per mezzo di queste formule generalizzare agli spazi a più di tre dimensioni le formule trovate nel § 2.

Suppongasi ora di esprimere tutte le diverse quantità considerate in funzione delle coordinate $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$. Sia V indipendente dalle coordinate $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$, lo spazio τ sia lo spazio ad $n-3$ dimensioni definito dalle relazioni

$$\rho_1 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_2 = \text{cost.} \quad , \quad \rho_3 = \text{cost.},$$

la μ sia tale che anche ψ risulti indipendente da $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$ e la ψ_1 goda della stessa proprietà. Supponiamo inoltre che il contorno S_{n-1} sia uno spazio ad $n-1$ dimensioni la cui equazione sia data da

$$\rho_1 = \rho_1(u, v) \quad , \quad \rho_2 = \rho_2(u, v) \quad , \quad \rho_3 = \rho_3(u, v),$$

cioè sia indipendente dalle coordinate $\rho_4, \rho_5, \cdots, \rho_n$.

Se l'elemento lineare dello spazio S_n è

$$ds^2 = H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + \cdots + H_n^2 d\rho_n^2 ,$$

avremo

$$dS_n = H_1 H_2 \cdots H_n d\rho_1 d\rho_2 \cdots d\rho_n$$

e

$$dS_{n-1} = \sqrt{EG}\, H_4 H_5 \cdots H_n\, du\, dv\, d\rho_4 d\rho_5 \cdots d\rho_n$$

quando si intenda

$$\left\{ \begin{aligned} E &= H_1^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{du}\right)^2 + H_2^2 \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial u}\right)^2 + H_3^2 \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial u}\right)^2 , \\ F &= H_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial u} \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + H_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial u} \frac{\partial \rho_2}{\partial v} + H_3^2 \frac{\partial \rho_3}{\partial u} \frac{\partial \rho_3}{\partial v} = 0, \\ G &= H_1^2 \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial v}\right)^2 + H_2^2 \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial v}\right)^2 + H_3^2 \left(\frac{\partial \rho_3}{\partial v}\right)^2 . \end{aligned} \right.$$

Si avrà quindi

$$V_1 \int_\tau \mu d\tau = \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_{n-1}} \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - (\psi+\psi_1) \frac{\partial V}{\partial p} \right] \sqrt{EG}\, du\, dv\, P d\rho_4\, d\rho_5 \cdots d\rho_n$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_{S_n} (\psi+\psi_1) \left[\frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(\frac{H_3 H_2}{H_1} P \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} P \frac{\partial V}{\partial\rho_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(\frac{H_2 H_1}{H_3} P \frac{\partial V}{\partial\rho_3} \right) \right] H_1 H_2 H_3\, d\rho_1\, d\rho_2\, d\rho_3\, P\, d\rho_4 \cdots d\rho_n,$$

in cui si è posto

$$H_4 H_5 \cdots H_n = P.$$

Sia $\mu = 1$, allora

$$\int_\tau \mu d\tau = \int_\tau H_4 H_5 \cdots H_n\, d\rho_4 \cdots d\rho_n,$$

e se supponiamo P e H_1, H_2, H_3 indipendenti da $\rho_4, \cdots, \rho_n$, e che

$$H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2 + H_3^2 d\rho_3^2$$

rappresenti l'elemento lineare nello spazio euclideo riferito alle coordinate ρ_1, ρ_2, ρ_3, avremo

$$V_1 = \frac{1}{n(n-2)N} \int_\sigma \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} (\psi+\psi_1) \right] d\sigma$$

$$- \frac{1}{n(n-2)N} \int_S (\psi+\psi_1) \left[\frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(P \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(P \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial V}{\partial\rho_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(P \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial V}{\partial\rho_3} \right) \right] dS,$$

in cui σ figura come il contorno dello spazio a tre dimensioni S in cui si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(P \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_2} \left(P \frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial\rho_3} \left(P \frac{H_2 H_1}{H_3} \frac{\partial\psi_1}{\partial\rho_3} \right).$$

È da osservare che lo spazio S_n che abbiamo considerato deve supporsi finito.

La formula trovata, quando V è la funzione potenziale corrispondente alla distribuzione di correnti elettriche in S ove la conducibilità viene data da P, diviene

$$V_1 = \frac{1}{n(n-2)N} \int_\sigma \left[V \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} - \frac{\partial V}{\partial p} (\psi+\psi_1) \right] d\sigma.$$

Questa formula è analoga alla formula ordinaria, che si ha nel caso della conducibilità costante, soltanto all'elemento $1/r$ viene sostituita la funzione ψ che si calcola facilmente. Nei diversi problemi che si possono presentare deve sostituirsi alla funzione di GREEN e alle funzioni analoghe la funzione ψ_1.

Valgono per questa evidentemente i noti teoremi di reciprocità analoghi a quelli trovati nel § 2.

Le formule (1) ci servono insieme alle (2) nei casi in cui sono note le superficie elettromotrici e i punti o le superficie di entrata ed uscita delle correnti che si studiano.

Allorché lo spazio S_{n-1} che figura nelle formule scritte precedentemente è uno spazio sferico, la determinazione della funzione ψ_1 si eseguisce con grande facilità, quando per questa funzione si impone una delle condizioni che si mettono ordinariamente:

$$\psi + \psi_1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial(\psi+\psi_1)}{\partial p} = 0.$$

Abbiamo detto che la ψ si ottiene senza difficoltà. Un caso in cui questa funzione assume una forma molto semplice si ha quando si tratta di un corpo in cui la conducibilità varia proporzionalmente alla distanza da un piano fisso.

Abbiamo già veduto che questo caso di ottiene partendo da uno spazio piano a quattro dimensioni (x_1, x_2, x_3, x_4) e prendendo delle coordinate analoghe alle coordinate cilindriche $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

In tal caso la ψ risulterà data da

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\rho_4}{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+\rho_3^2+\rho_3^{0\,2}-2\rho_3\rho_3^0\cos\rho_4}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+(\rho_3-\rho_3^0)^2}\sqrt{(\rho_1-\rho_1^0)^2+(\rho_2-\rho_2^0)^2+(\rho_3+\rho_3^0)^2}}$$

ovvero, indicando con r_1 e r_2 le distanze dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ dal punto ρ_1, ρ_2, ρ_3, avremo

$$\psi = \frac{2\pi}{r_1 r_2}.$$

La funzione ψ_1 tale che

$$\psi + \psi_1 = 0,$$

nei punti della superficie di una sfera col centro nell'origine degli assi, di raggio R, ci viene fornita immediatamente per mezzo della teoria delle immagini. Essa risulta data da

$$\psi_1 = -\frac{2\pi}{r_1' r_2'}\frac{R^2}{\rho^2},$$

in cui ρ è la distanza di uno dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ dall'origine e r_1', r_2' le distanze del punto (ρ_1, ρ_2, ρ_3) dalle immagini dei punti $(\rho_1^0, \rho_2^0, \rho_3^0)$, $(\rho_1^0, \rho_2^0, -\rho_3^0)$ prese rispetto alla sfera.

Nel § 4 sono state trovate le linee che possono essere linee di livello tanto se il conduttore piano è omogeneo, quanto se la conducibilità è diversa nei vari punti.

Vediamo di generalizzare questo ai casi che abbiamo considerato di corpi solidi non omogenei.

È facile dimostrare il teorema: *un sistema di ellissoidi o di iperboloidi omofocali può essere un sistema di superficie di livello tanto se la conducibilità del mezzo è uniforme, quanto se è variabile proporzionalmente alla distanza da uno, due o tre piani ortogonali.*

Infatti abbiasi un sistema di coordinate ortogonali ρ_1, ρ_2, ρ_3 e $\rho_1 =$ cost. siano le superficie di livello. La funzione che ci dà la conducibilità sia $\varphi(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$.

V sia la funzione potenziale indipendente da ρ_2 e ρ_3. Dovremo avere evidentemente

$$V = V(\rho_1)$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\varphi\frac{\partial V}{\partial \rho_1}\right) = 0,$$

ossia

$$\frac{H_2 H_3}{H_1}\varphi = \psi(\rho_1)\,\theta(\rho_2\,\rho_3).$$

Reciprocamente se è verificata questa condizione, si potrà, prendendo

$$V = \int \frac{d\rho_1}{\psi},$$

trovare una funzione V della sola ρ_1 che sia una funzione potenziale corrispondente ad una distribuzione di elettricità nel conduttore la cui conducibilità è data da φ.

Prendiamo per $\rho_1 = u$, $\rho_2 = v$, $\rho_3 = w$ le coordinate ellittiche definite dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1.$$

Avremo

$$H_1^2 = 4\,\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(u-v)(u-w)},$$

$$H_2^2 = 4\,\frac{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}{(v-w)(v-u)},$$

$$H_3^2 = 4\,\frac{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}{(w-u)(w-v)},$$

quindi

$$\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\right)^2 = -4 \frac{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)(v-w)^2},$$

$$\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\right)^2 = -4 \frac{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)(w-u)^2},$$

$$\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\right)^2 = -4 \frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)(u-v)^2}.$$

Ora, poiché

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

si ha subito il teorema enunciato.

Facciamo per ultimo osservare che si possono studiare partendo da funzioni potenziali a più di tre dimensioni altri problemi oltre quelli considerati di distribuzioni di correnti stazionarie sopra delle superficie non omogenee.

Così si potrebbe studiare il caso di un piano in cui la conducibilità variasse proporzionalmente alla distanza da due rette ortogonali, e da questa applicando il metodo della rappresentazione conforme si potrebbero dedurre altri casi di superficie eterogenee.

Reciprocamente poi partendo da alcuni di questi casi si potrebbe tornare alla considerazione di altri corpi oltre quelli considerati in cui la conducibilità variasse da punto a punto.

Per esempio se V è la funzione potenziale delle correnti in un piano in cui la conducibilità è data dalla funzione $\lambda\,(xy)$ dei vari punti, se facciamo rotare la porzione di piano in cui è definita la V intorno ad una retta del piano esterna a quella porzione e consideriamo V come funzione dei punti del solido di rivoluzione che si ottiene, essa corrisponderà alla distribuzione di correnti in questo corpo, quando la conducibilità in un punto sia data da λ/r in cui r è la distanza dall'asse di rotazione.

IX.

SULLE FIGURE ELETTROCHIMICHE DI A. GUÉBHARD

« Atti Acc. Scienze Torino », Vol. XVIII, 1883, p. 329-336 (*).

In un lavoro presentato all'Accademia nell'adunanza del 17 dicembre 1882 (**) io esponevo una teoria delle apparenze che si hanno alla superficie di un cilindro metallico immerso in un elettrolita [1]. Alla classe dei fenomeni considerati in tale lavoro è da ascriversi, come mi ha fatto osservare il prof. ROITI, quello recentemente studiato da A. GUÉBHARD degli anelli colorati, invariabili col tempo, che si ottengono sopra una lastra, la quale costituisce il fondo d'una vaschetta piena di un miscuglio di acetato di piombo e di acetato di rame, quando si immergono in esso i reofori di una pila fino a poca distanza dal fondo.

GUÉBHARD notò pel primo, quando i reofori sono scoperti in tutta la loro lunghezza e disposti normalmente al fondo, e la vaschetta ha per contorno un cilindro, la cui direttrice è precisamente il contorno della lastra, che gli anelli colorati coincidono molto approssimativamente colle linee equipotenziali che si avrebbero sulla lastra supposta isolata ed a contatto con i reofori.

I.

L'analogia fra i fenomeni elettrochimici considerati nel lavoro ora citato e questo di GUÉBHARD si comprende osservando che il regime stazionario delle correnti si stabilirà quando sulla lastra la componente normale della corrente di polarizzazione sarà eguale a quella della corrente principale. Però quando questa sarà abbastanza intensa, come avviene ordinariamente in tali esperienze, le forze elettromotrici di polarizzazione nei punti della lastra vicini agli elettrodi raggiungeranno il massimo: la corrente penetrerà ed escirà dalla lastra per questi punti. Volendo applicare il calcolo sono da distinguere due casi:

1° Quando si adoperano degli elettrodi perfettamente normali al fondo e scoperti per tutta la loro lunghezza.

2° Quando gli elettrodi sono coperti fino alle estremità, queste restando scoperte.

(*) Presentata dal Socio G. FERRARIS.

(**) In questo volume: VII, pp. 124-139.

(1) Il primo § della presente Nota fu presentato dapprima insieme al lavoro suddetto.

1° CASO. – Supponghasi una vaschetta V cilindrica (fig. I), il cui fondo metallico sottilissimo abbia una forma arbitraria; la vaschetta sia ripiena di un elettrolita ed in esso siano immersi un certo numero di elettrodi filiformi a, b, c, $\cdots$, scoperti e disposti normalmente al fondo, per i quali entri ed esca la corrente di una pila. Quando sarà raggiunto il periodo stazionario, avremo che, eccettuate delle piccole superficie A, B, C, $\cdots$, in vicinanza delle estremità di a, b, c, $\cdots$, in cui la forza elettromotrice di polarizzazione avrà raggiunto il massimo, e per le quali penetrerà ed uscirà la corrente nella lastra, negli altri punti di questa la componente normale della corrente di polarizzazione eguaglierà quella della corrente principale. Se le ampiezze degli spazi A, B, C, $\cdots$, sono trascurabili in modo che essi possano considerarsi come dei punti, come pure sono trascurabili le distanze delle estremità di a, b, c, $\cdots$, dal fondo, potremo ritenere molto approssimativamente che il fenomeno avvenga come se a, b, c, $\cdots$, toccassero il fondo e in tutti i punti di questo, esclusi quelli di contatto colle estremità di a, b, c, $\cdots$, la componente normale fosse nulla. Quindi se si prende l'asse coordinato z parallelo agli elettrodi, la funzione potenziale nel liquido sarà una funzione soltanto delle due coordinate x e y che verificherà l'equazione

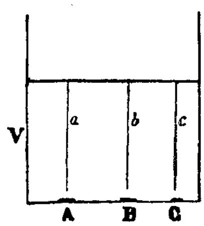


Fig. I.

$$\Delta^2 U = 0$$

e che avrà dei punti d'infinito logaritmico corrispondentemente alle intersezioni di a, b, c, $\cdots$, col piano xy. Se n è la normale al contorno della vaschetta sarà

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0.$$

Indicando con r_a, r_b, r_c, $\cdots$, le distanze dei punti d'infinito dal punto (x, y), la funzione potenziale in questo punto sarà data da

$$M_a \log r_a + M_b \log r_b + M_c \log r_c + \cdots + \varphi(x, y)$$

in cui $\varphi(x, y)$ è finita ed M_a, M_b, M_c, $\cdots$, sono proporzionali alle quantità di elettricità che entrano nel liquido dai rispettivi elettrodi.

La funzione potenziale U_1, nei punti della lastra, sarà pure una funzione delle due variabili x ed y, che verificherà a condizioni analoghe a quelle a cui soddisfa la U; quindi sarà essa pure della forma

$$M'_a \log r_a + M'_b \log r_b + M'_c \log r_c + \cdots + \varphi_1(x, y),$$

in cui M'_a, M'_b, M'_c, $\cdots$, sono proporzionali alle quantità di elettricità che entrano da A, B, C, $\cdots$, e $\varphi_1(x, y)$ è finita. Ma possiamo evidentemente assumere M'_a, M'_b, M'_c, $\cdots$, come proporzionali ad M_a, M_b, M_c, $\cdots$, onde risulterà

$$U = CU_1 + C_1,$$

in cui C e C_1 sono costanti.

Ora, le linee in cui la forza elettromotrice di polarizzazione avrà un valore costante, nelle quali quindi si sarà depositato uno strato di grossezza uniforme e che conseguentemente appariranno avere una stessa colorazione, sono date da

$$U - U_1 = \text{cost.},$$

quindi corrisponderanno alle linee $U_1 = \text{cost.}$

Ma, se supponiamo la lastra metallica isolata e delle correnti che entrino ed escano da $A, B, C, \cdots$, in modo che le quantità di elettricità che penetrano nella lastra siano proporzionali ad $M_a, M_b, M_c, \cdots$, la funzione potenziale sulla lastra sarà evidentemente una funzione proporzionale ad U_1, quindi è dimostrato che le linee di egual colorazione corrispondono alle linee di livello.

Questo risultato evidentemente non è che approssimativo avendo supposto trascurabili le grandezze delle superficie $A, B, C, \cdots$. Si comprende facilmente che quanto più saremo lontani da questi punti tanto più gli anelli colorati si accosteranno alle linee di livello (2). Sulla loro forma non avrà poi influenza l'altezza del liquido.

2° Caso. – Consideriamo una vaschetta, il cui fondo metallico abbia uno spessore eguale all'altezza del liquido in essa contenuto ed in vicinanza del fondo esistano dei punti $a, b, c, \cdots$, (fig. II) di entrata e di uscita della corrente. Quando sarà raggiunto il periodo stazionario, ammettendo che le superficie $A, B, C, \cdots$, per le quali entra la corrente nel fondo metallico possano considerarsi come dei punti coincidenti con $a, b, c, \cdots$, la funzione potenziale U nell'elettrolita soddisferà l'equazione

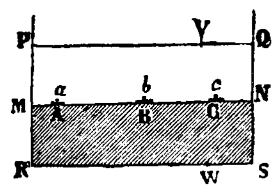


Fig. II.

$$\Delta^2 U = 0,$$

avrà dei punti d'infinito del 1° ordine in $a, b, c, \cdots$, ed in tutti gli altri punti del contorno verificherà la condizione

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0$$

in cui n è la normale al contorno.

Ad analoghe condizioni soddisferà la funzione potenziale U_1 nei punti del fondo metallico; quindi, i due campi in cui sono definite queste funzioni essendo eguali, si otterrà con una osservazione analoga a quella fatta precedentemente, quando si prenda il piano MN di separazione dei due mezzi per piano xy, che

$$U(x, y, z) = CU_1(x, y, -z) + C_1,$$

in cui C e C_1 sono costanti.

(2) Se H. Meyer («Wied. Ann. der Phys.», vol. XVIII, 1883, p. 136) trova il contrario misurando alcune lastre preparate dallo stesso Guébhard e confrontandole colle proprie determinazioni galvanometriche, ciò deriva probabilmente dalla circostanza che Guébhard adagiava il più delle volte le sue lastre sul fondo, alquanto più esteso, della vasca, e non le verniciava a tergo: e d'altra parte nella figura riferita dal Meyer le superficie corrispondenti ad $A, B, C, \cdots$, sono molto estese.

Perciò sarà

$$U - U_1 = \text{cost.}$$

nei punti ove è

$$U_1 = \text{cost.}$$

In questo caso quindi gli anelli colorati dànno approssimativamente le intersezioni del piano MN colle superficie di livello nel conduttore MNRS supposto isolato, oppure (come si riconosce facilmente) nel conduttore PQRS supposto omogeneo.

Analogamente si avrebbe se i punti $a, b, c, \cdots$, fossero soltanto punti di entrata della corrente e due punti V e W simmetrici rispetto ad MN fossero in comunicazione col suolo.

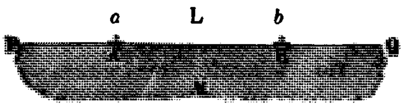


Fig. III.

Per esempio, se si suppone il liquido L indefinito e il fondo metallico M pure indefinito, a e b (fig. III) i punti di entrata della corrente, e si suppone che due punti di L e di M a distanza infinita comunichino col suolo, si otterranno sulla superficie P Q gli anelli colorati che dovranno assumere la nota forma simile a delle Cassinoidi [3].

II.

Il fenomeno della coincidenza degli anelli di A. GUÉBHARD colle linee di livello nella distribuzione della elettricità si può presentare anche in altre circostanze diverse da quelle che per quanto io so sono state studiate finora sperimentalmente.

Ne cito alcune:

1° Sia nota in tutti i punti di un piano P (fig. IV) una funzione V che verifica l'equazione

$$\Delta^2 V = 0.$$

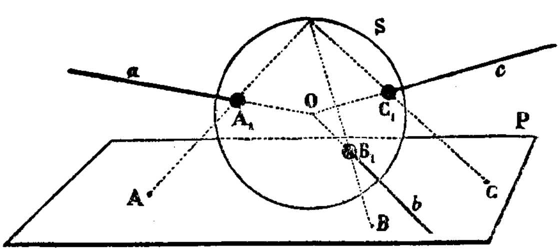


Fig. IV.

Mediante la proiezione stereografica, si rappresenti conformemente il piano sulla sfera S in modo che la V possa considerarsi come una funzione V_1 dei punti della sfera. Se prendiamo un sistema di coordinate polari (r, θ, φ) coll'origine nel centro della sfera avremo evidentemente, considerando la V_1 come funzione di r, θ, φ,

$$\Delta^2 V_1 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V_1}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial V_1}{\partial \theta}\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\varphi^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} = 0.$$

(3) Vedi il disegno in W. THOMSON und P. G. TAIT, *Handbuch der Theoretischen Physik*. Bd. I, Th. 2, 1874, s. 53.

Se $A, B, C, \cdots$, sono punti d'infinito logaritmico di V e $A_1, B_1, C_1, \cdots$, sono i punti corrispondenti della sfera S, la V_1 sarà infinita logaritmicamente nei punti dei raggi $OA_1, OB_1, OC_1, \cdots$.

Sia S coibente e tutto lo spazio esterno alla sfera sia conduttore. Una corrente elettrica entri ed esca per gli elettrodi $a, b, c, \cdots$, in modo che da ogni punto di ciascuno di essi penetri nel conduttore una stessa quantità di elettricità rispettivamente proporzionale al coefficiente del termine d'infinito corrispondente ad $A, B, C, \cdots$ Avremo che V_1 sarà la funzione potenziale.

Supponiamo ora invece che la superficie della sfera coibente S sia costituita da uno strato sottilissimo metallico ed il conduttore esterno sia il noto elettrolita adoperato da A. GUÉBHARD. Gli elettrodi $a, b, c, \cdots$, giungano fino a poca distanza dalla superficie sferica. Se la corrente sarà abbastanza intensa, allorchè sarà raggiunto il periodo stazionario, la corrente penetrerà ed escirà nello strato sferico per delle superficie $A_1, B_1, C_1, \cdots$, prossime agli estremi di $a, b, c, \cdots$, e in tutti gli altri punti della superficie sferica si stabilirà l'equilibrio fra la corrente principale e quella di polarizzazione, onde ripetendo il ragionamento fatto nei casi considerati precedentemente, avremo che gli anelli colorati che si presenteranno dovranno approssimativamente coincidere colle linee di livello della superficie sferica conduttrice supposta isolata ed a contatto con gli elettrodi.

Invece di una sfera se ne potrebbe considerare una porzione soltanto, purchè si limitasse corrispondentemente lo spazio occupato dall'elettrolita.

2° Un recipiente isolante, avente la forma di un solido di rivoluzione, sia diviso con un piano diametrale metallico ABC (fig. V) sottilissimo, di cui la conducibilità in ogni punto sia proporzionale alla sua distanza dall'asse CD. Una delle due parti in cui viene così diviso il recipiente contenga il noto elettrolita del GUÉBHARD e si faccia penetrare ed escire la corrente da due archi circolari a, b normali all'asse, aventi il centro su esso e di cui gli estremi siano a poca distanza dalla lamina metallica. Se la corrente sarà abbastanza intensa gli anelli colorati che si otterranno sulla lastra metallica rappresenteranno approssimativamente le linee equipotenziali della lastra stessa isolata posta a contatto con gli elettrodi a, b.

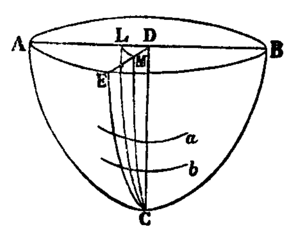


Fig. V.

Evidentemente il fenomeno dovrà avvenire egualmente se si limiterà lo spazio occupato dal liquido allo spazio ADEC mediante una superficie piana coibente DEC ed una porzione LMC di una superficie di rivoluzione avente per asse C D [4].

Credo che questi fatti si possano verificare sperimentalmente, anzi il dott. Luigi PASQUALINI vi si è già accinto.

(4) È evidente che il fenomeno di GUÉBHARD e questi analoghi corrispondono a dei casi di potenziali indipendenti da una coordinata.

X.

SULL'EQUILIBRIO DELLE SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

Nota I.

« Transunti Lincei » (*), ser. 3ª, vol. VIII, 1883-84, pp. 214-218.

1. Il problema dell'equilibrio di una superficie flessibile e inestendibile venne recentemente ripreso in esame dal ch. prof. BELTRAMI, il quale, partendo dal principio delle velocità virtuali e dalla condizione della inestendibilità espressa mediante la invariabilità dell'elemento lineare, pervenne in modo molto semplice ed elegante a stabilire le equazioni dell'equilibrio, e queste sono in pieno accordo con i risultati ai quali era giunto il sig. LECORNU per mezzo di considerazioni geometriche. Le formule in tal modo ottenute si prestano con grande facilità alla ricerca della distribuzione delle tensioni sugli elementi di una superficie flessibile e inestendibile in equilibrio. A questo importante studio vennero infatti impiegate dal ch. prof. BELTRAMI nella sua bella Memoria *Sull'equilibrio delle sup. fless. e inest.*

Un problema che presenta pure interesse è quello di determinare i criteri, onde riconoscere quando date forze applicate ai punti di una superficie si fanno equilibrio. Avendo in mira lo studio di questo problema ed essendomisi presentato il dubbio circa la possibile esistenza di casi di equilibrio non contemplati nelle formule fino ad ora note, ho cercato stabilire, per una via alquanto diversa da quelle tenute da altri fin qui, le condizioni per l'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. È noto il vantaggio che si ha in ogni questione di Meccanica prendendo in considerazione gli elementi caratteristici dello spostamento infinitamente piccolo del sistema di cui si studia il moto o l'equilibrio, ossiano gli elementi necessari e sufficienti a determinare un tale spostamento. Ho perciò cominciato da tale ricerca che rientra nella cinematica di una superficie flessibile e inestendibile.

2. JELLET chiamando δx, δy, δz le componenti dello spostamento infinitamente piccolo di un punto di una superficie flessibile e inestendibile $z = z(xy)$, e ponendo $u = \delta x + p\delta z$, $v = \delta y + q\delta z$, $w = \delta z$, pervenne alle formule

$$\frac{\partial u}{\partial x} = rw \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2sw \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = tw,$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

donde:

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Sono partito da questa equazione differenziale per lo studio propostomi. Questa equazione presenta molte proprietà e ad essa ho potuto applicare la ben nota analisi di GREEN impiegata per la integrazione della equazione $\Delta^2 = 0$.

Per lo studio della equazione (1) riesce vantaggioso introdurre una funzione che chiamo *funzione coniugata* alla w, della quale può con facilità determinarsi il significato rispetto alla deformazione della superficie. Definisco questa funzione coniugata $\bar\omega$ ponendo:

$$\frac{\partial \bar\omega}{\partial x} = r\frac{\partial w}{\partial y} - s\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad -\frac{\partial \bar\omega}{\partial y} = t\frac{\partial w}{\partial x} - s\frac{\partial w}{\partial y}\,.$$

In tal modo ottengo che $\bar\omega$ e $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ non possono differire che per una costante. Il significato della funzione coniugata $\bar\omega$ si ottiene colle seguenti considerazioni. Deformando la superficie, un elemento $d\sigma$ qualunque di essa si sposterà. Trascuriamo le deformazioni che subisce $d\sigma$ e vediamo come si sposta questo elemento supposto rigido. Partendo dalle formule che dànno le componenti dello spostamento di un punto d'un sistema rigido,

$$\begin{cases} \delta x = \delta a + \rho\,(y - b) - \chi\,(z - c), \\ \delta y = \delta b + \pi\,(z - c) - \rho\,(x - a), \\ \delta z = \delta c + \chi\,(x - a) - \pi\,(y - b), \end{cases}$$

in cui è noto il significato delle diverse quantità che vi compariscono, e considerando gli spostamenti dei punti dell'elemento di superficie $d\sigma$ supposto rigido, si trova:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\,(\delta x + p\,\delta z)}{\partial y} - \frac{\partial\,(\delta y + q\,\delta z)}{\partial x}\right] = \rho - p\pi - q\chi\,;$$

onde ricordando i valori di u e v, nel nostro caso si ha

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho - p\pi - q\chi\,,$$

quindi $\bar\omega$ non differisce da $\rho - p\pi - q\chi$ che per una costante. Si ha dunque che *se decomponiamo la rotazione dell'elemento $d\sigma$ in due direzioni, una secondo l'asse z, l'altra nel piano tangente a σ, la funzione $\bar\omega$ differisce dalla prima soltanto per una costante arbitraria.*

Considerando $\bar\omega$ come funzione di p e q si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \bar\omega}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \bar\omega}{\partial p}\,,$$

le quali sono equivalenti alla equazione (1). È da notare l'analogia che passa fra queste equazioni e quelle che si presentano nella teoria delle funzioni di variabili complesse. Eseguendo la trasformazione di LEGENDRE $z_1 = z - px - qy$, e ponendo:

$$r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial p^2} \quad , \quad s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial p \, \partial q} \quad , \quad t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial q^2} ,$$

si trova:

$$(1') \qquad t_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} - 2 s_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \, \partial q} + r_1 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} = 0.$$

Se w e w_1 sono due integrali della (1), $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$ le funzioni coniugate, esprimendo $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$ per w e w_1, si trova che $\tilde{\omega} dw_1 - \tilde{\omega}_1 dw$ è un differenziale esatto dZ e ponendo

$$R = \frac{\partial^2 Z}{\partial w^2} \quad , \quad S = \frac{\partial^2 Z}{\partial w \, \partial w_1} \quad , \quad T = \frac{\partial^2 Z}{\partial w_1^2} ,$$

risulta:

$$RT - S^2 = rt - s^2.$$

Se W e Π sono due funzioni coniugate, abbiamo

$$\frac{\partial W}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial \Pi}{\partial p} ,$$

onde considerandole rispettivamente come funzioni di w e w_1 e di $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}_1$, si trova

$$\frac{\partial W}{\partial w} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}_1} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial w_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}}$$

e per conseguenza

$$(2) \qquad R \frac{\partial^2 W}{\partial w_1^2} - 2 S \frac{\partial^2 W}{\partial w \, \partial w_1} + T \frac{\partial^2 W}{\partial w_1^2} = 0,$$

quindi gli integrali delle equazioni (1) e (2) si deducono gli uni dagli altri.

Se W e Π sono funzioni coniugate, come pure, w e $\tilde{\omega}$, e se esprimiamo W e Π in funzione di w e $\tilde{\omega}$, risulta

$$\frac{\partial W}{\partial w} = \frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\omega}} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial \tilde{\omega}} = - \frac{1}{rt - s^2} \frac{\partial \Pi}{\partial w} ,$$

onde:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial w^2} + \frac{\partial \left[(rt - s^2) \frac{\partial W}{\partial \tilde{\omega}} \right]}{\partial \tilde{\omega}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \tilde{\omega}^2} + \frac{\partial \left[\frac{1}{rt - s^2} \frac{\partial \Pi}{\partial w} \right]}{\partial w} = 0.$$

Questa forma sotto la quale possono porsi la (1) e la (1') è analoga a quella delle equazioni differenziali che compariscono nella teoria del calore, ed è la più appropriata e vantaggiosa per la integrazione. Così esse si integrano ogni qual volta è $rt - s^2 =$ cost., $rt - s^2 = ap + bq + c$ in cui a, b, c sono costanti, ecc. È poi da prendere in particolare considerazione il caso in cui è $rt - s^2 = \varphi(w) \psi(\tilde{\omega})$.

La equazione (1) si integra anche con facilità nel caso in cui la superficie z è di secondo grado. Sono giunto a questo risultato partendo dall'integrale della equazione differenziale delle superficie d'area minima mediante una trasformazione di LEGENDRE [1]. La stessa equazione si integra nel caso in cui la superficie z è sviluppabile.

Veniamo, ora allo studio della equazione differenziale (1) o della più generale

$$r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(xy),$$

col metodo di GREEN. Chiamo σ la proiezione della superficie sul piano xy (suppongo che questa proiezione copra una sola volta il piano xy), c quella del contorno, n la normale a c; pongo

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2s\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + t\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \underset{z}{\Delta}^2 w\,; \\[2ex] r\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial w_1}{\partial y} - s\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w_1}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right) + t\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \underset{z}{\Delta}(w\,,w_1)\,. \end{cases}$$

Nella ipotesi che le funzioni w_1 e w_2 siano finite, continue e monodrome si hanno le formule:

$$\begin{aligned}\iint_\sigma w_1\,\underset{z}{\Delta}^2 w_2\,dx\,dy &= -\int_c w_1\left[\left(r\frac{\partial w_2}{\partial y} - s\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(t\frac{\partial w_2}{\partial x} - s\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\right]dc \\ -\iint_\sigma \underset{z}{\Delta}(w_1,w_2)\,dx\,dy &= -\int_c w_1\left(\frac{\partial w_2}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\right)dc - \iint_\sigma \underset{z}{\Delta}(w_1,w_2)\,dx\,dy\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_\sigma (w_1\,\underset{z}{\Delta}^2 w_2 - w_2\,\underset{z}{\Delta}^2 w_1)\,dx\,dy = -\int_c \Bigg\{ & w_1\left[\left(r\frac{\partial w_2}{\partial y} - s\frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(t\frac{\partial w_2}{\partial x} - s\frac{\partial w_2}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\right] \\ & - w_2\left[\left(r\frac{\partial w_1}{\partial y} - s\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(t\frac{\partial w_1}{\partial x} - s\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial n}\right]\Bigg\}dc\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_\sigma w_1\,\underset{z}{\Delta}^2 w_1\,dx\,dy &= -\int_c w_1\left[\left(r\frac{\partial w_1}{\partial y} - s\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial n} + \left(t\frac{\partial w_1}{\partial x} - s\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)\frac{dx}{dn}\right]dc \\ -\iint_\sigma \underset{z}{\Delta}(w_1,w_1)\,dx\,dy &= -\int_c w_1\left(\frac{\partial w_1}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\right)dc - \iint_\sigma \underset{z}{\Delta}(w_1,w_1)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Se $\underset{z}{\Delta}^2 w_2 = \underset{z}{\Delta}^2 w_1 = 0$ e $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$ sono le funzioni coniugate di $\tilde{\omega}_1$ e $\tilde{\omega}_2$, si ottiene:

$$\begin{cases} \displaystyle\iint_\sigma \underset{z}{\Delta}(w_1\,,w_2)\,dx\,dy = -\int_c w_1\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial c}dc = -\int_c w_2\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial c}dc \\[2ex] \displaystyle\iint_\sigma \Delta(w_1\,,w_1)\,dx\,dy = -\int_c w_1\frac{\partial\tilde{\omega}_1}{\partial c}dc\,. \end{cases}$$

Da queste formule si deducono immediatamente i teoremi: *Se due funzioni* w_1 e w_2, *finite continue e monodrome insieme alle loro derivate, che soddi-*

(1) Sono dolente che non mi sia nota una Memoria del sig. MOUTARD relativa alla teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali, i cui risultati sono stati recentemente applicati dal sig. DARBOUX alla ricerca degli spostamenti di una superficie flessibile e inestendibile.

sfano alla equazione differenziale $\Delta^2_z w = f(xy)$, (essendo la superficie z a curvatura positiva o sviluppabile) *hanno i medesimi valori lungo una linea chiusa della superficie, sono eguali in tutti i punti della superficie interni alla linea.*

Se le funzioni coniugate alle w_1 e w_2 *hanno gli stessi valori lungo una linea chiusa della superficie* z, w_1 *e* w_2 *non possono differire che per una quantità costante.*

Se fra tutte le funzioni monodrome finite continue insieme alle derivate e che lungo i punti del contorno di una superficie a curvatura positiva $z(xy)$ *hanno dati valori, ve ne è una per cui*

$$\int_\sigma [\Delta_z (w_1, w_1) + 2 w_1 f(xy)] \, dx \, dy \tag{3}$$

è un minimo, questa soddisfa l'equazione differenziale $\Delta^2_z w_1 = f(xy)$ *e reciprocamente, se* w_1 *soddisfa l'equazione* $\Delta^2_z w_1 = f(xy)$ *essa è tale che*

$$\int_\sigma [\Delta_z (w_1, w_1) + 2 w_1 f(xy)] \, dx \, dy$$

(se questa quantità è finita) *risulta un minimo rispetto alle funzioni che hanno al contorno gli stessi valori di* w_1. Questo teorema è analogo al noto principio di RIEMANN-DIRICHLET.

Da questi teoremi si deduce che una funzione w_1 che soddisfa l'equazione

$$\Delta^2_z w_1 = f(xy)$$

è definita quando ne sono noti i valori al contorno, se la superficie è a curvatura positiva, e questi valori potranno scegliersi ad arbitrio purché siano tali che non debba escludersi la possibilità della esistenza di un minimo dell'integrale (3).

La funzione w che soddisfa l'equazione $\Delta^2_z w = 0$, sarà pure definita all'infuori di una costante addittiva quando saranno noti al contorno i valori della funzione coniugata $\bar{\omega}$, e anche tali valori con una limitazione analoga alla precedente potranno scegliersi ad arbitrio. La determinazione della funzione w, quando sono dati i valori di w o di $\bar{\omega}$ al contorno, ci viene fornita immediatamente per mezzo delle formule scritte precedentemente. A tal fine, basterà determinare un integrale particolare della equazione differenziale $\Delta^2_z w = 0$ il quale divenga infinito in un punto della superficie dello stesso ordine del logaritmo delle distanze a questo punto, ed una funzione analoga alla nota funzione di GREEN che comparisce nella teoria delle funzioni potenziali. - Quando al contorno siano dati i valori di w e di $\frac{dw}{dy}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{dw}{dx}\frac{\partial q}{\partial c}$ per riconoscere se è possibile costruire una funzione che corrisponda ai dati valori basta la sola conoscenza dell'integrale particolare che diviene infinito logaritmicamente. - Non insisto su questo punto, vista l'analogia che presenta questo problema con quello della teoria della funzione potenziale in cui si tratta di conoscere se è possibile costruire una funzione potenziale che prenda dati valori al contorno di un certo campo e la cui derivata rispetto alla normale al contorno assuma pure dati valori.

Nota II.

Ibidem (*), pp. 244–246.

3. Applicando i teoremi precedenti alle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili e inestendibili, abbiamo:

La deformazione infinitesima di una superficie flessibile e inestendibile a curvatura positiva è definita nei seguenti casi: 1° *quando sono note le componenti degli spostamenti dei punti del contorno parallelamente ad una data direzione*; 2° *quando sono note le componenti della rotazione di ogni elemento del contorno rispetto ad una data direzione* (supponendo decomposta la rotazione totale secondo la data direzione ed una direzione del piano tangente alla superficie); 3° *quando sono note le componenti della rotazione degli elementi del contorno rispetto alla normale alla superficie.*

Gli elementi caratteristici della deformazione infinitesima di una superficie flessibile e inestendibile potranno ritenersi essere le componenti degli spostamenti dei punti del contorno parallelamente ad una data direzione, o le componenti delle rotazioni dei punti del contorno rispetto ad una data direzione o alla normale alla superficie; peraltro con una limitazione che risulta immediatamente dai teoremi sopra citati.

Veniamo all'equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili. – Denotiamo con $X dx\, dy$, $Y dx\, dy$, $Z dx\, dy$ le componenti secondo gli assi della forza applicata all'elemento della superficie la cui proiezione sul piano xy è $dx\, dy$ e con $X_c\, dc$, $Y_c\, dc$, $Z_c\, dc$ le componenti della forza applicata sull'elemento del contorno la cui proiezione è dc. Applicando il principio delle velocità virtuali e adottando le notazioni di JELLETT si ha

$$\int_\sigma [X(u - pw) + Y(v - qw) + Zw]\, dx\, dy$$

$$+ \int_c [X_c (u_c - pw_c) + Y_c (v_c - qw_c) + Z_c w_c]\, dc = \Omega = 0$$

per ogni sistema di valori di u, v, w corrispondenti ad uno spostamento virtuale della superficie. Poniamo

$$\Delta^2 A = X \quad , \quad \Delta^2 B = Y \quad , \quad P = \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \quad , \quad Q = -\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\mathfrak{L}_\gamma = \int_0^\gamma \left(X_c - \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{\partial B}{\partial c}\right) dc \quad , \quad \mathfrak{M}_\gamma = \int_0^\gamma \left(Y_c + \frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial B}{\partial n}\right) dc,$$

$$L = \int_c \left(X_c - \frac{\partial A}{\partial n} - \frac{\partial B}{\partial c}\right) dc \;,\; M = \int_c \left(Y_c + \frac{\partial A}{\partial c} - \frac{\partial B}{\partial n}\right) dc \;,\; N = \int_c \left(\mathfrak{L}_\gamma \frac{dy}{dc} - \mathfrak{M}_\gamma \frac{dx}{dc}\right) dc\,,$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

in cui con $\int\limits_0^\gamma$ si intende l'integrale esteso da un punto fisso della proiezione del contorno lungo l'arco γ di questa proiezione; e per $\int\limits_c$ si intende l'integrale esteso a tutta la proiezione c del contorno. Si otterrà:

$$\Omega = -\iint\limits_\sigma w\,[2\,\mathrm{P}s - \mathrm{Q}(r-t) + \mathrm{X}p + \mathrm{Y}q - \mathrm{Z}]\,dx\,dy$$

$$-\int\limits_c \left(\frac{\partial p}{\partial c}\mathfrak{L}_\gamma + \frac{\partial q}{\partial c}\mathfrak{M}_\gamma + \mathrm{X}_c p + \mathrm{Y}_c q - \mathrm{Z}_c\right) w_c\,dc - \int\limits_c \left(\mathfrak{L}_\gamma \frac{\partial y}{\partial c} - \mathfrak{M}_\gamma \frac{\partial x}{\partial c}\right)\bar{\omega}_c\,dc$$

$$+ \mathrm{L}a_1 + \mathrm{M}a_2 + \mathrm{N}a_3$$

in cui $a_1\,a_2\,a_3$ indicano tre costanti. Ora, osservando che gli spostamenti w non sono arbitrarî, ma debbono soddisfare la condizione $\Delta^2_z w = 0$, e, se la superficie è a curvatura positiva, la w è determinata quando si conoscono al contorno i valori della funzione coniugata $\bar{\omega}$, avremo che l'equazione delle velocità virtuali diverrà

$$\Omega + \iint\limits_\sigma \lambda \Delta^2_z w\,dx\,dy = 0$$

nella quale potremo ritenere w e $\bar{\omega}$ come arbitrarie e λ come una funzione incognita di x e y. Questa equazione può scriversi:

$$\Omega + \iint\limits_\sigma w \Delta^2_z \lambda\,dx\,dy + \int\limits_c w\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\right]dc + \int\limits_c \bar{\omega}\frac{\partial\lambda}{\partial c} = 0,$$

onde avremo che le condizioni dell'equilibrio saranno date, dalla equazione

$$2\,\mathrm{P}s - \mathrm{Q}(r-t) + \mathrm{X}p + \mathrm{Y}q - \mathrm{Z} = \Delta^2_z \lambda$$

per i punti interni della superficie; dalle equazioni

$$\frac{\partial p}{\partial c}\mathfrak{L}_\gamma + \frac{\partial q}{\partial c}\mathfrak{M}_\gamma + p\mathrm{X}_c + \mathrm{Y}_c q - \mathrm{Z}_c = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial c}\,,\quad \mathfrak{L}_\gamma\frac{\partial y}{\partial c} - \mathfrak{M}_\gamma\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial\lambda}{\partial c}$$

per i punti del contorno e dalle equazioni $\mathrm{L} = \mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{O}$. Queste equazioni non sono altro che tre delle condizioni affinché le forze si facciano equilibrio supposta la superficie rigida. Avremo dunque il teorema:

Una superficie a curvatura positiva può stare in equilibrio sotto l'azione di forze arbitrarie applicate nei punti interni. Per mantenerla in equilibrio bisogna però applicare delle forze al contorno. Delle tre componenti di queste forze due possono scegliersi arbitrariamente purché verifichino alle condizioni a cui dovrebbero soddisfare nell'ipotesi della superficie rigida (e colle limitazioni che è stato necessario introdurre per il rigore del principio sopra enunciato analogo a quello di RIEMANN-DIRICHLET); *l'altra componente risulta determinata in un modo unico.*

Per riconoscere se date forze applicate negli elementi di una superficie si fanno equilibrio, quando questa ha una data forma, basterà determinare se è possibile costruire una funzione che soddisfi alle tre condizioni trovate e questa ricerca, come è stato indicato, si riduce alla determinazione di un integrale particolare della equazione $\underset{z}{\Delta}^2 w = 0$. Abbiamo indicato precedentemente vari casi in cui è possibile integrare questa equazione differenziale, quindi in questi casi saranno da cercare le condizioni di equilibrio che si deducono applicando il metodo che abbiamo ora sommariamente accennato.

Gli integrali generali della equazione differenziale $\underset{z}{\Delta}^2 w = 0$ ci forniranno le espressioni di tutti i sistemi di forze possibili, che applicate ai punti del contorno della superficie flessibile e inestendibile la mantengono in equilibrio.

XI.

SOPRA UN PROBLEMA DI ELETTROSTATICA

« Nuovo Cimento », ser. 3ª, vol. XVI, 1884; pp. 49-57 (*).

Ad una classe di problemi che si hanno frequentemente da risolvere appartiene il seguente: trovare una funzione $f(\alpha)$ atta alla integrazione, tale che sia:

$$\varphi(x) = \int_0^a f(\alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq a$$

in cui $\varphi(x)$ e $F(\alpha, x)$ sono funzioni note (quest'ultima è una funzione di α atta alla integrazione).

Supponiamo la $F(\alpha, x)$ simmetrica rispetto ad α e ad x e $\varphi(x)$ atta alla integrazione; allora il problema precedente si riduce all'altro: determinare la $f(x)$ in modo che la variazione prima di

$$P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a f(\alpha) f(x) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \, dx - \int_0^a \varphi(x) f(x) \, dx$$

sia nulla, e tale questione in molti casi rientrerà in quella della determinazione dei massimi e minimi di P. Infatti, applicando il calcolo delle variazioni, abbiamo:

$$\delta P = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta f(\alpha) \cdot f(x) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \, dx + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a \delta f(x) \cdot f(\alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \, dx$$

$$- \int_0^a \varphi(x) \, \delta f(x) \, dx = \int_0^a \delta f(x) \left[\int_0^a f(\alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha - \varphi(x) \right] dx ,$$

e affinché sia $\delta P = 0$, dovremo avere:

$$\int_0^a f(\alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha - \varphi(x) = 0 .$$

(*) Questo stesso lavoro, ad esclusione della Nota finale, era già stato pubblicato nei « Transunti dell'Acc. dei Lincei », ser. 3, vol. VIII, 1884, pp. 315-318.

Supponiamo di conoscere la funzione $\lambda(z, \alpha)$ atta alla integrazione, tale che si abbia:

$$\psi(x, z) = \int_0^z \lambda(z, \alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq z \leqq a$$

e supponiamo che la funzione richiesta $f(\alpha)$ possa porsi sotto la forma:

$$(1) \qquad f(\alpha) = \int_\alpha^a \vartheta(z) \, \lambda(z, \alpha) \, dz + k\lambda(a, \alpha) = f_1(\alpha) + k\lambda(a, \alpha),$$

in cui $\vartheta(z)$ è una funzione da determinarsi e k una costante.

Poniamo:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + k\psi(x, a),$$

si otterrà:

$$\varphi_1(x) = \int_0^a f_1(\alpha) \, F(\alpha, x) \, d\alpha.$$

Basterà quindi determinare $f_1(\alpha)$ in modo che si annulli la variazione prima di

$$P_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a f_1(\alpha) f_1(x) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \, dx - \int_0^a \varphi_1(x) f_1(x) \, dx.$$

Ora si ha mediante il principio di DIRICHLET (supponendo verificate le condizioni affinché sia applicabile questo principio)

$$Q_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^a f_1(\alpha) f_1(x) \, F(\alpha, x) \, d\alpha \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a \vartheta(z) \, dz \int_0^a \vartheta(z') \, dz' \int_0^z d\alpha \int_0^{z'} \lambda(z, \alpha) \, \lambda(z', x) \, F(\alpha, x) \, dx,$$

onde posto:

$$\int_0^z d\alpha \int_0^{z'} \lambda(z, \alpha) \, \lambda(z', x) \, F(\alpha, x) \, dx = \tilde{\omega}(z, z'),$$

avremo:

$$Q_1 = \int_0^a \vartheta(z) \, dz \int_0^z \vartheta(z') \, \tilde{\omega}(z, z') \, dz'.$$

Abbiamo inoltre:

$$R_1 = \int_0^a f_1(x) \, \varphi_1(x) \, dx$$

$$= \int_0^a \vartheta(z) \, dz \int_0^z \varphi(x) \, \lambda(z, x) \, dx - k \int_0^a \vartheta(z) \, dz \int_0^z \psi(x, a) \, \lambda(z, x) \, dx,$$

onde:

$$P_1 = Q_1 - R_1 = \int_0^a \vartheta(z)\,dz \int_0^z \vartheta(z')\,\tilde{\omega}(z\,,z')\,dz' - \int_0^a \vartheta(z)\,dz \int_0^z \varphi(x)\,\lambda(z\,,x)\,dx$$

$$+\ k \int_0^a \vartheta(z)\,dz \int_0^z \psi(x\,,a)\,\lambda(z\,,x)\,dx\,.$$

Supponiamo $\psi(x\,,z)$ indipendente da z e sia $\psi(x\,,z) = \nu(x)$, funzione finita ed atta alla integrazione; ammesso che sia $z' < z$, avremo:

$$\tilde{\omega}(z\,,z') = \int_0^z \lambda(z',x)\,\psi(x\,,z)\,dx = \int_0^{z'} \lambda(z',x)\,\nu(x)\,dx = \theta(z')\,.$$

Poniamo:

$$\int_0^z \varphi(x)\,\lambda(z\,,x)\,dx = \mu(z) \quad , \quad \int_0^z \vartheta(z')\,\theta(z')\,dz' = \rho(z)\,,$$

si otterrà:

$$P_1 = \int_0^a \vartheta(z)\,dz \int_0^z \vartheta(z')\,\theta(z')\,dz' - \int_0^a \vartheta(z)\,\mu(z)\,dz + k\int_0^a \vartheta(z)\,\theta(z)\,dz$$

$$= \int_0^a \left[\frac{\rho'(z)\,\rho(z)}{\theta(z)} - \frac{\rho'(z)\,\mu(z)}{\theta(z)} + k\rho'(z)\right] dz\,,$$

e per conseguenza eseguendo la variazione:

$$\delta P_1 = \int_0^a \left[\frac{\rho'(z)}{\theta(z)}\,\delta\rho(z) + \frac{\rho(z)}{\theta(z)}\,\delta\rho'(z) - \frac{\mu(z)}{\theta(z)}\,\delta\rho'(z) + k\delta\rho'(z)\right] dz\,.$$

Mediante integrazioni per parti si trova:

$$\delta P_1 = \left[\left(\frac{\rho(z)}{\theta(z)} - \frac{\mu(z)}{\theta(z)} + k\right)\delta\rho(z)\right]_0^a + \int_0^a \delta\rho(z)\left[\frac{\rho'(z)}{\theta(z)} - \frac{d}{dz}\,\frac{\rho(z)}{\theta(z)} + \frac{d}{dz}\,\frac{\mu(z)}{\theta(z)}\right] dz\,.$$

Dobbiamo porre $\delta P_1 = 0$; ora siccome per $z = 0$, ρ è sempre zero e quindi anche $\delta\rho = 0$, avremo:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\rho(z)}{\theta(z)}\right)_a - \left(\dfrac{\mu(z)}{\theta(z)}\right)_a + k = 0 \\[2ex] \dfrac{\rho'(z)}{\theta(z)} - \dfrac{d}{dz}\,\dfrac{\rho(z)}{\theta(z)} + \dfrac{d}{dz}\,\dfrac{\mu(z)}{\theta(z)} = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda di queste eguaglianze si deduce:

$$\rho(z) = -\frac{\mu'(z)\,\theta(z)}{\theta'(z)} + \mu(z),$$

per conseguenza:

$$\begin{cases} k = \left(\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \\ \vartheta(z) = -\dfrac{d}{dz}\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)} \end{cases}$$

e quindi a cagione della (1):

$$f(\alpha) = -\int_\alpha^a \frac{d}{dz}\frac{\mu'(z)}{\theta'(z)} \cdot \lambda(z, \alpha)\,dz + \left(\frac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \lambda(a, \alpha). \tag{2}$$

Questa formula potrà semplicizzarsi, mediante una integrazione per parti, quando $\frac{d}{dz}\lambda(z, \alpha)$ sarà atta alla integrazione.

Avremo dunque:

Il problema di determinare una funzione $f(z, \alpha)$ che soddisfi la condizione:

$$\varphi(x) = \int_0^z f(z, \alpha)\,F(x, \alpha)\,d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq z \leqq a$$

in cui $F(x, \alpha)$ è una funzione simmetrica di x e α potrà risolversi, qualunque sia $\varphi(x)$, quando si conosca una funzione $\lambda(z, \alpha)$ che soddisfi alla equazione precedente allorché si prende per la $\varphi(x)$ una funzione speciale $\nu(x)$, purché si possa porre:

$$f(z, \alpha) = \int_\alpha^{z} \vartheta(z')\,\lambda(z', \alpha)\,dz' + k\lambda(z, \alpha).$$

La formula (2) ci risolve la questione.

Il problema dell'equilibrio della elettricità sopra le calotte di una superficie conduttrice di rivoluzione, soggette all'induzione di coibenti elettrizzati, disposti simmetricamente rispetto all'asse di rivoluzione, rientra nel problema generale ora considerato.

Supponiamo che le calotte abbiano una capacità finita e siano tali che un sistema qualunque di masse elettriche indotte, distribuite simmetricamente sulle calotte, possa considerarsi come la sovrapposizione di tanti strati di livello; in tal caso, *se sarà nota la distribuzione della elettricità in equilibrio sopra tutte le calotte non soggette ad alcuna induzione esterna, si potrà determinare la distribuzione dell'elettricità sopra le stesse calotte sotto l'azione di un sistema qualunque di coibenti elettrizzati, situati simmetricamente rispetto all'asse di rivoluzione.*

Risulta come conseguenza, che si potrà anche determinare la legge della distribuzione dell'elettricità sotto l'azione di masse induttrici simmetriche sulle calotte, che si ottengono mediante trasformazioni per raggi vettori reciproci, prendendo per centro di inversione un punto qualunque dell'asse di simmetria.

L'applicazione delle formule precedenti al caso del disco conduce immediatamente ai noti resultati riguardo alla induzione della elettricità sopra un disco o una calotta sferica.

Per mezzo di metodi analoghi a quelli ora adoperati, in vari altri casi si giunge alla risoluzione di questioni simili a quelle ora considerate.

NOTA

Dopo la presentazione della comunicazione precedente alla R. Accademia dei Lincei venni a sapere dal ch. prof. DINI che egli aveva trattato nel secondo volume (in corso di stampa) della sua opera: *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale*, con un fine diverso dal mio e con un metodo pure alquanto diverso, un problema analogo a quello che io avevo considerato.

Per la gentilezza del prof. DINI potei prender cognizione del problema da lui risoluto e del metodo adoperato: avendone avuta l'autorizzazione, credo opportuno di far notare le relazioni che passano fra i due problemi.

Il prof. DINI considera la questione: determinare una funzione $f(x, \xi)$ in modo che sia

$$\int_c^\xi f(x, \xi)\, \lambda(x, \xi)\, dx = \rho(\xi) - \rho(c).$$

A tal fine basterà prendere

$$f(x, \xi) = \frac{\psi(x, \xi)}{\lambda(x, \xi)} \int_c^x \rho'(y)\, \theta(y, x)\, dy$$

ove $\psi(x, \xi)$ e $\theta(y, x)$ sono due funzioni che soddisfano la condizione

$$\int_y^\xi \psi(x, \xi)\, \theta(y, x)\, dx = 1$$

nella ipotesi che le funzioni considerate siano atte alla integrazione e si possa applicare il principio d'inversione di DIRICHLET.

Supponiamo ora che si debba determinare la funzione $f(\alpha)$ in modo che si abbia:

$$\varphi(x) = \int_0^a f(\alpha)\, F(x, \alpha)\, d\alpha \qquad 0 \leqq x \leqq a. \tag{1}$$

Ammettiamo nota una funzione $\lambda(z, \alpha)$, tale che sia

$$\nu(x) = \int_0^z \lambda(z, \alpha) \, \mathrm{F}(x, \alpha) \, d\alpha \tag{2}$$

e supponiamo $\mathrm{F}(x, \alpha)$ simmetrica rispetto ad α e ad x. In tal caso non si potrà applicare direttamente il metodo ora accennato per la determinazione della funzione cercata. Onde applicare il metodo del prof. DINI al problema che si considera, nelle ipotesi sopra enunciate, è necessario prima trasformare convenientemente la (1) mediante la (2).

Supponiamo che sia possibile porre:

$$f(\alpha) = \int_\alpha^a \lambda(z', \alpha) \, \vartheta(z') \, dz' + k\lambda(a, \alpha)$$

in cui k è una costante: avremo

$$\varphi(x) = \int_0^a \mathrm{F}(\alpha, x) \, d\alpha \int_\alpha^a \lambda(z', \alpha) \, \vartheta(z') \, dz' + k \int_0^a \lambda(a, \alpha) \, \mathrm{F}(\alpha, x) \, d\alpha$$

e mediante il principio di inversione di DIRICHLET (supponendolo applicabile) si otterrà:

$$\varphi(x) = \int_0^a \vartheta(z') \, dz' \int_0^{z'} \mathrm{F}(\alpha, x) \, \lambda(z', \alpha) \, d\alpha + k\nu(x).$$

Poniamo:

$$\int_0^{z'} \lambda(z', \alpha) \, \mathrm{F}(\alpha, x) \, d\alpha = \chi(z', x),$$

avremo se $z' > x$

$$\chi(z', x) = \nu(x), \tag{3}$$

quindi

$$\varphi(x) = \int_0^x \vartheta(z') \, \chi(z', x) \, dz' + \int_x^a \vartheta(z') \, \nu(x) \, dz' + k\nu(x)$$

e se

$$\int_x^a \vartheta(z') \, dz' = \mathrm{C}(x),$$

sarà

$$\vartheta(z') = -\mathrm{C}'(z')$$

onde

$$\varphi(x) = -\int_0^x \mathrm{C}'(z') \, \chi(z', x) \, dz' + \nu(x) \, \mathrm{C}(x) + k\nu(x).$$

Mediante una integrazione per parti abbiamo

$$\varphi(x) = \int_0^x C(z') \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dz' + k\nu(x)$$

ovvero

$$\varphi(x) - k\nu(x) = \int_0^x C(z') \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dz'. \tag{4}$$

A questo punto è possibile applicare il metodo del prof. DINI: l'arbitrarietà della costante k ci servirà per determinare la $C(x)$ in modo che per $x = a$ si annulli la $C(x)$.

Osserviamo infatti che si ha:

$$M = \int_{z'}^{z} \lambda(z, x) \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dx = \int_0^z \lambda(z, x) \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dx - \int_0^{z'} \lambda(z, x) \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dx.$$

Ora nel secondo termine del 2° membro si ha $x < z'$, quindi a cagione della (3)

$$\chi(z', x) = \nu(x)$$

e

$$\frac{d\chi(z', x)}{dz'} = 0;$$

perciò

$$M = \int_0^z \lambda(z, x) \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dx = \frac{d}{dz'} \int_0^z \lambda(z, x)\, dx \int_0^{z'} \lambda(z', \alpha)\, F(\alpha, x)\, d\alpha$$

$$= \frac{d}{dz'} \int_0^{z'} \lambda(z', \alpha)\, d\alpha \int_0^z \lambda(z, x)\, F(\alpha, x)\, dx.$$

Poniamo

$$\int_0^{z'} \lambda(z, \alpha)\, \nu(\alpha)\, dz = \theta(z');$$

supponendo $z > z'$, a cagione della simmetria di $F(\alpha, x)$, avremo,

$$M = \frac{d}{dz'} \int_0^{z'} \lambda(z', \alpha)\, \nu(\alpha)\, d\alpha = \frac{d\theta(z')}{dz'}.$$

Moltiplicando ambo i membri della (4) per $\lambda(z, x)\, dx$ e integrando fra 0 e z si ottiene

$$\int_0^z \varphi(x) \lambda(z, x)\, dx - k \int_0^z \nu(x) \lambda(z, x)\, dx = \int_0^z \lambda(z, x)\, dx \int_0^x C(z') \frac{d}{dz'} \chi(z', x)\, dz'$$

e mediante il principio di DIRICHLET

$$\int_0^z \varphi(x)\lambda(z,x)dx - k\theta(z) = \int_0^z C(z')\,dz' \int_{z'}^z \lambda(z',x)\frac{d}{dz}\chi(z',x)\,dx = \int_0^z C(z')\frac{d\theta(z')}{dz'}\,dz'.$$

Ponendo

$$\int_0^z \varphi(x)\,\lambda(z,x)\,dx = \mu(z)$$

abbiamo dalla equazione precedente, derivandola,

$$\frac{d\mu(z)}{dz} - k\frac{d\theta(z)}{dz} = C(z)\frac{d\theta(z)}{dz},$$

onde

$$C(z) = \frac{\dfrac{d\mu(z)}{dz}}{\dfrac{d\theta(z)}{dz}} - k.$$

Si ha dunque

$$\begin{cases} k = \left(\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}\right)_a \\ \vartheta(z) = -\dfrac{d}{dz}\dfrac{\mu'(z)}{\theta'(z)}. \end{cases}$$

Si giunge quindi allo stesso risultato a cui siamo pervenuti direttamente per altra via.

XII.

SULLA DEFORMAZIONE DELLE SUPERFICIE FLESSIBILI ED INESTENDIBILI

« Rend. Lincei » (*), ser. 4ª, vol. I, 1885, pp. 274–278.

In due Note che ebbi l'onore di presentare l'anno scorso a cotesta illustre Accademia (**), ho accennato come il problema della ricerca degli spostamenti infinitesimi di una superficie flessibile e inestendibile (la cui equazione era $z = z(x, y)$) consisteva nell'integrare il sistema di equazioni differenziali a derivate parziali

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x} \quad , \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{1}$$

in cui w e $\bar{\omega}$ (che ho chiamato funzioni coniugate) erano rispettivamente funzioni di x e y, p e q. Ho anche indicato come, trovata una soluzione particolare w_1, $\bar{\omega}_1$ del sistema (1), onde avere la w bastava integrare l'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1'^2} + \frac{\partial \left[(rt - s^2) \dfrac{\partial w}{\partial \bar{\omega}_1}\right]}{\partial \bar{\omega}_1} = 0 \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad , \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right). \tag{2}$$

Per ottenere le componenti δx, δy, δz dello spostamento più generale infinitesimo della superficie bastava prima calcolare la funzione coniugata $\bar{\omega}$ della w e quindi si aveva:

$$\delta x = \int (w dp + \bar{\omega} dy) \quad , \quad \delta y = \int (w dq - \bar{\omega} dx) \quad , \quad \delta z = w .$$

Ho fatto osservare nella seconda delle Note anzidette, come il problema dell'equilibrio conduce a equazioni differenziali analoghe a quelle che si hanno nel problema della deformazione e ho notato le relazioni che passano fra i due problemi.

Per varie classi di superficie la integrazione della equazione (2), dopo avere determinata una conveniente soluzione particolare del sistema (1), si eseguisce con grande facilità. Mi propongo di indicare alcuni dei casi in cui ho eseguita la integrazione.

(*) Presentata dal Socio E. Betti.
(**) In questo volume: X, pp. 180–187.

1. *Superficie del secondo grado.* Supponiamo che la superficie possieda un centro, e poniamo la sua equazione sotto la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,; \tag{3}$$

si avrà:

$$rt-s^2=\frac{c^6}{a^2\,b^2}\,\frac{1}{z^4},$$

ed esprimendo z in funzione di x e di q:

$$rt-s^2=\frac{c^2}{a^2\,b^2}\left[\frac{\left(1+\frac{b^2}{c^2}q^2\right)}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\right]^2.$$

Prendiamo come soluzione particolare del sistema (1) $w_1=x$, $\tilde{\omega}_1=-q$; la equazione (2) da integrare diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial\left\{\frac{c^2}{a^2\,b^2}\left(\frac{1+\frac{b^2}{c^2}q^2}{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2\frac{\partial w}{\partial q}\right\}}{\partial q}=0,$$

o anche, ponendo $x=ax_1$, $q=c/bq_1$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\left(\frac{1+q_1^2}{1-x_1^2}\,\frac{\partial w}{\partial q_1}\right)}{\partial q_1}=0.$$

Si trova dunque la stessa equazione differenziale per tutte le superficie aventi per equazione la (3). Basterà dunque conoscere tutte le deformazioni che può prendere una speciale superficie di questa classe perché il problema sia risoluto per tutte. Determiniamole quindi per tutte le superficie sferiche di raggio 1. In questo caso prendiamo come soluzione particolare del sistema (1) $w_1=y-ix$, $\tilde{\omega}_1=p+iq$, avremo:

$$rt-s^2=\frac{\tilde{\omega}_1^4}{w_1^4},$$

onde la equazione (2) prenderà la forma:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2}+\frac{\partial\left(\frac{\tilde{\omega}_1^4}{w_1^4}\,\frac{\partial w}{\partial\tilde{\omega}_1}\right)}{\partial\tilde{\omega}_1}=0.$$

Se poniamo:

$$\xi=\log\left(-\frac{1}{w_1}-\frac{i}{\tilde{\omega}_1}\right)\quad,\quad \eta=\log\left(-\frac{1}{w_1}+\frac{i}{\tilde{\omega}_1}\right),$$

la equazione precedente diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{\operatorname{senh}(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}-\frac{\partial w}{\partial\eta}\right)=0.$$

Questa equazione si integra immediatamente col noto metodo EULERO-LAPLACE e in tal modo si ottiene:

$$w = \psi(\xi) + \varphi(\eta) - [\psi'(\xi) - \varphi'(\eta)] \frac{\cosh(\xi - \eta) - 1}{\operatorname{senh}(\xi - \eta)},$$

in cui φ e ψ sono funzioni arbitrarie.

Si ottiene dunque w espresso mediante x e y:

$$w = \psi\left(\frac{x + iy}{z - 1}\right) + \varphi\left(\frac{x - iy}{z - 1}\right) - [(x + iy)\psi' + (x - iy)\varphi'] \frac{z}{z - 1}$$

e mediante semplici quadrature:

$$\tilde{\omega} = i\left\{\psi\left(\frac{x + iy}{z - 1}\right) + \varphi\left(\frac{x - iy}{z - 1}\right) + [(x + iy)\psi' + (x - iy)\varphi'] \frac{1}{z(z - 1)}\right\}.$$

La determinazione delle tre componenti δx, δy, δz dello spostamento di ciascun punto è quindi ridotta a semplici quadrature.

Nel caso in cui la superficie non possieda centro e possa porsi la sua equazione sotto la forma:

$$z = \mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E}y + \mathrm{C},$$

abbiamo $r = 2\mathrm{A}$, $s = 0$, $t = 2\mathrm{B}$, onde $rt - s^2 = 4\mathrm{AB}$ e quindi l'equazione da integrarsi si riduce immediatamente a $\Delta^2 w = 0$.

È inutile considerare il caso in cui la superficie è un cono o un cilindro.

Possiamo dunque considerare come risoluto il problema generale della deformazione infinitesima di una superficie qualunque del secondo grado.

2. *Pseudosfera.* Poste le equazioni della pseudosfera sotto la forma:

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{1 - e^{2u}} \quad , \quad x = e^u \cos v \quad , \quad y = e^u \operatorname{sen} v,$$

si trova:

$$rt - s^2 = -e^{-4u}.$$

Ora una soluzione particolare del sistema (1) è:

$$w_1 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad , \quad \tilde{\omega}_1 = \operatorname{arco tang} \frac{p}{q};$$

quindi basta integrare l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial\left(\frac{1}{(w_1^2 - 1)^2} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1}\right)}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0.$$

Ponendo:

$$w_2 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\omega}_1 + \frac{1}{2}\log\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right) \quad , \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2}\left(-\tilde{\omega}_1 + \frac{1}{2}\log\frac{w_1 - 1}{w_1 + 1}\right)$$

si trova:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_2 \partial \tilde{\omega}_2} + \coth(w_2 + \tilde{\omega}_2)\left(\frac{\partial w}{\partial w_2} + \frac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_2}\right) = 0;$$

e facendo:

$$\operatorname{senh}(w_2 + \tilde{\omega}_2)\, w = \mathrm{F},$$

si ottiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial w_2\, \partial \tilde{\omega}_2} = F,$$

o anche, se

$$w_3 = w_2 + \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \tilde{\omega}_3 = w - \tilde{\omega}_2,$$

$$\Delta^2 F = F,$$

che è una equazione molto nota nell'analisi:

3. *Elicoidi del Dini a curvatura costante.* Presa per equazione di questa superficie:

$$z = \int \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}\, d\rho + m \operatorname{arco\ tang} \frac{y}{x} \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

si trova:

$$rt - s^2 = \frac{1 + m^2}{\rho^4}.$$

La soluzione particolare del sistema (1) da prendersi in questo caso è:

$$w_1 = \sqrt{1 - \rho^2} \quad , \quad \tilde{\omega}_1 = -m\,(m^2 + 1) \int \frac{d\rho}{\rho \sqrt{1 - \rho^2}\,(1 + m^2 - \rho^2)} - \operatorname{arco\ tang} \frac{p}{q},$$

onde la (2) diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial \left[\dfrac{1 + m^2}{(1 - w_1^2)^2} \dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1} \right]}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0,$$

ossia, ponendo:

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\sqrt{1 + m^2}} = \tilde{\omega}_2,$$

si ha:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial \left[\dfrac{1}{(1 - w_1^2)^2} \dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_2} \right]}{\partial \tilde{\omega}_2} = 0,$$

che è la stessa equazione differenziale che abbiamo trovata nel caso della pseudosfera.

4. *Superficie conoidi.* La equazione di queste superficie è:

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

onde:

$$rt - s^2 = -f'^2 \frac{1}{y^4}.$$

Prendiamo $w_1 = y$, $\tilde{\omega}_1 = p = f' \frac{1}{y}$; si trova:

$$rt - s^2 = -\frac{\tilde{\omega}_1^2}{w_1^2},$$

onde la (2) diviene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial w_1^2} - \frac{\partial\left(\dfrac{\tilde{\omega}_1^2}{w_1^2}\dfrac{\partial w}{\partial \tilde{\omega}_1}\right)}{\partial \tilde{\omega}_1} = 0 .$$

Posto:

$$w_2 = \log (w_1 \tilde{\omega}_1) \quad , \quad \tilde{\omega}_2 = \log \frac{w_1}{\tilde{\omega}_1} ,$$

si ottiene:

$$\frac{\partial w}{\partial w_2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial w_2 \, \partial \tilde{\omega}_2} = 0 ,$$

e quindi:

$$w = \sqrt{\frac{y}{p}}\, \theta (py) + \psi\left(\frac{y}{p}\right),$$

in cui θ e ψ sono funzioni arbitrarie.

Si ottengono quindi le due funzioni coniugate sotto la forma:

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{y}{p}}\, \theta (py) - \frac{y}{p} \varphi'\left(\frac{y}{p}\right) + \varphi\left(\frac{y}{p}\right), \\ \tilde{\omega} &= \sqrt{\frac{p}{y}}\, \theta (py) + \varphi'\left(\frac{y}{p}\right) \end{aligned} \right.$$

in cui θ e φ sono funzioni arbitrarie, ovvero:

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \frac{y}{\sqrt{f'}}\, \theta (f') - \frac{y^2}{f'} \varphi'\left(\frac{y^2}{f'}\right) + \varphi\left(\frac{y^2}{f'}\right) \\ \tilde{\omega} &= \frac{\sqrt{f'}}{y}\, \theta (f') + \varphi'\left(\frac{y^2}{f'}\right), \end{aligned} \right.$$

da cui risultano immediatamente i valori delle componenti dello spostamento, mediante semplici quadrature.

XIII.

INTEGRAZIONE DI ALCUNE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE

« Rend. Lincei » (*), ser. 4ª, vol. I, 1885, pp. 303–306.

Abbiasi una equazione differenziale della forma

$$\alpha)\qquad rt - s^2 = f(p, q),$$

in cui

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}\ ,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y}\ ,\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Cerchiamo se fra le superficie infinitamente prossime alla superficie $z = z(xy)$ ed applicabili sopra essa, ve ne sono di quelle per cui la funzione coniugata $\bar{\omega}$ dello spostamento $w = \delta z$ parallelamente all'asse z, può rappresentarsi mediante una funzione $\bar{\omega}(x, y, p, q)$ (1). La $\bar{\omega}$ dovrà soddisfare l'equazione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial q}\right) = 0$$

in cui nell'eseguire le derivate $\partial\bar{\omega}/\partial p$ e $\partial\bar{\omega}/\partial q$, $\bar{\omega}$ va considerata come funzione di p e di q: e nell'eseguire poi le derivate rispetto a x e a y le $\partial\bar{\omega}/\partial p$ e $\partial\bar{\omega}/\partial q$ vanno considerate come funzioni di x e y.

Se $\bar{\omega} = \bar{\omega}(x, y, p, q)$, avremo, eseguendo convenientemente le derivazioni:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial q}\right) = 2\left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial p\,\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial q\,\partial y}\right) - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{f} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{f}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial p^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2}\right) r + \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial q^2} + \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2}\right) t + \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial p\,\partial q} - \frac{1}{f}\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x\,\partial y}\right) 2s,$$

onde porremo:

$$(1)\qquad 2\left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial p\,\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial q\,\partial y}\right) - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)}{f} - \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{f} = 0,$$

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

(1) Vedi una mia Nota: *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* [in questo volume: X, pp. 180–187].

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} + \dfrac{1}{f} \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} + \dfrac{1}{f} \dfrac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p\, \partial q} - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial y} = 0 .$$

È facile trasformare queste condizioni a cui deve soddisfare $\tilde{\omega}$ nelle seguenti altre.

Pongasi:

$$\frac{\partial f}{\partial q} x - \frac{\partial f}{\partial p} y = \Omega ,$$

$$(4) \qquad \tilde{\omega} = \varphi(\Omega , p , q) + \frac{af}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial p}\right)} x + \frac{bf}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)} y ,$$

in cui a e b sono due costanti; φ dovrà soddisfare alle condizioni (2), (3) e alla seguente:

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial p} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y\, \partial q} = \frac{a+b}{2} .$$

Supponiamo che sia possibile determinare la $\tilde{\omega}$ in modo che siano soddisfatte le condizioni volute; osserviamo che essa rappresenta la funzione coniugata dello spostamento della superficie z parallelamente all'asse z per una deformazione infinitesima che la conserva applicabile sopra sé stessa, e rappresenta un tale spostamento per le superficie che soddisfano la equazione (α) o una più generale di quella.

Ciò premesso fra gli spostamenti possibili di tutte le superficie, vi sono quelli ai quali corrisponde per la w il valore $Ay - Bx + C_1$ ove A, B, C_1 sono costanti (cioè uno spostamento senza deformazione) e per cui si ha $\tilde{\omega} = Ap + Bq + C$. Quindi, ponendo

$$\tilde{\omega} = Ap + Bq + C$$

ed integrando questa equazione a derivate parziali del primo ordine, troveremo degli integrali particolari della equazione (α) o di una più generale di essa.

Supponiamo che si abbia $a + b = 0$. Avremo

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q\, \partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial q} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \partial q} - \frac{1}{f} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x\, \partial y} = 0 .$$

Quindi sono verificate le condizioni affinché esista una funzione $w(x, y, p, q)$ tale che

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = f\frac{\partial w}{\partial q} \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = -f\frac{\partial w}{\partial p};$$

da cui si deduce, considerando $\tilde{\omega}$ come funzione di p e q e w di x e y,

$$\left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad , \quad \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q}\right) = -\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

cioè w e $\tilde{\omega}$ sono funzioni coniugate. In questo caso gli integrali richiesti saranno integrali comuni delle due equazioni differenziali

$$\tilde{\omega} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C} \quad , \quad w = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x + \mathrm{C}_1,$$

i quali soddisfano, a cagione delle (β) e (γ), alla equazione alternata di POISSON:

$$[\tilde{\omega}, w] = 0.$$

Dunque la determinazione dell'integrale richiesto è ridotta a semplici quadrature. Come esempio, applicheremo questo risultato per dimostrare che l'equazione differenziale

$$rt - s^2 = f(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq),$$

in cui g, h, k, m, n sono costanti, ammette sempre una classe di integrali particolari con 4 costanti arbitrarie i quali si possono determinare, qualunque sia f, mediante sole quadrature. Osserviamo che in questo caso si può prendere

$$\Omega = (2hq + kp + n)x - (2gp + kq + m)y$$

e dalla (4) in questo caso si deduce

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Omega^2} = 0,$$

onde

$$\tilde{\omega} = \lambda(p, q)\{(2hq + kp + n)x - (2gp + kq + m)y\}$$

$$+ \frac{af}{f'(2gp + kq + m)}x + \frac{bf}{f'(2hq + kp + n)}y$$

e quindi:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x \partial y} = 0.$$

A cagione delle relazioni (2) e (3) abbiamo dunque:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial p \, \partial q} = 0,$$

ossia $\tilde{\omega}$ è di primo grado in p e q, cioè:

$$\tilde{\omega} = (\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C})x + (\mathrm{A}_1 p + \mathrm{B}_1 q + \mathrm{C}_1)y + \mathrm{A}_2 p + \mathrm{B}_2 q + \mathrm{C}_2 .$$

Applicando la (4) si deduce:

$$a + b = 0,$$

$$\tilde{\omega} = \mathrm{M}\{(kp + 2hq + n)x - (kq + 2gp + m)y\}$$

trascurando la parte indipendente da x e y ed indicando con M una costante. Essendo $a + b = 0$, potremo determinare w.

Posto:

$$\mathrm{F}(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{f(\alpha)},$$

avremo:

$$w = \mathrm{M}\{-kx^2 - gy^2 + kxy + \mathrm{F}(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq)\}.$$

Esiste dunque una classe di integrali particolari della equazione data, la quale è un integrale comune delle due equazioni differenziali simultanee:

$$(kp + 2hq + n)x - (kq + 2gp + m)y = \mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C},$$

$$\mathrm{F}(gp^2 + hq^2 + kpq + mp + nq) - hx^2 - gy^2 + kxy = \mathrm{A}y - \mathrm{B}x + \mathrm{C}_1,$$

i quali formano un sistema Jacobiano.

Risolvendo queste equazioni rispetto a p e a q, si avrà:

$$p = \theta(xy) \quad , \quad q = \theta_1(xy)$$

e quindi:

$$z = \int (\theta \, dx + \theta_1 \, dy).$$

XIV.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DI UNA CLASSE DI FUNZIONI TRASCENDENTI

« Rend. Acc. Lincei », ser. IV, vol. II, 1886, pp. 211–214 (*).

TEOREMA. – *Abbiansi* $m+n$ *variabili* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *legate fra loro dalle* m *equazioni algebriche*

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \end{cases}$$

e siano $f_1, f_2, \cdots, f_n$, n *funzioni razionali delle* $m+n$ *variabili, tali che*

$$f_1\,dx_1 + f_2\,dx_2 + \cdots + f_n\,dx_n = d\mathrm{F}$$

sia un differenziale esatto.

Si costruiscano ora n *equazioni algebriche*

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0 \\ \psi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m, u_1, u_2, \cdots, u_k) = 0, \end{cases}$$

le quali, oltre al contenere razionalmente le variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *contengano pure razionalmente le* k *variabili* $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Il sistema delle $m+n$ *equazioni algebriche* (I) *e* (II) *possegga, per ogni sistema di valori delle* $u_1, u_2, \cdots, u_k$, p *sistemi di soluzioni che denoteremo con*

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}, y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots, y_m^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_m^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)}, y_1^{(p)}, y_2^{(p)}, \cdots, y_m^{(p)}. \end{cases}$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

Nella funzione

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

si sostituiscano in luogo delle $m+n$ *variabili successivamente i* p *sistemi di soluzioni* (III). *Otterremo* p *funzioni che denoteremo con*

$$F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots, F^{(p)},$$

le quali saranno funzioni di $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Abbiamo sempre che

$$F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots + F^{(p)}$$

è una funzione algebrica e logaritmica di $u_1, u_2, \cdots, u_k$ *il cui differenziale è razionale in* $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Un metodo che può seguirsi nella dimostrazione del teorema è il seguente.

Supponiamo che il campo di variabilità di ciascuna delle variabili complesse $u_1, u_2, \cdots, u_k$ sia un piano indefinito ad un solo foglio.

Facciamo partire queste variabili da un sistema di valori arbitrarî $u_1^0, u_2^0, \cdots, u_k^0$ e facciamole tornare agli stessi valori iniziali, dopo che ciascuna variabile ha eseguito nel suo piano un giro qualunque.

Se consideriamo i sistemi di valori (III) come funzioni delle $u_1, u_2, \cdots, u_k$, quando queste variabili torneranno ai valori iniziali dovrà evidentemente verificarsi uno dei tre casi seguenti:

1° ciascuna linea del quadro (III) ritornerà in sé stessa;

2° alcune linee soltanto del quadro (III) torneranno in loro stesse, e le rimanenti si scambieranno fra loro;

3° tutte le linee del quadro (III) si scambieranno le une nelle altre.

Analogamente consideriamo il sistema di valori $u_1 + du_1, u_2 + du_2, \cdots, u_k + du_k$ i quali, partendo dai valori $u_1^0 + du_1^0, u_2^0 + du_2^0, \cdots, u_k^0 + du_k^0$ tornino ai valori iniziali stessi.

Se ad essi corrispondono per le $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$ i p sistemi di soluzioni

$$(\mathrm{III}')\quad \left\{\begin{array}{l} x_1^{(1)} + dx_1^{(1)}, x_2^{(1)} + dx_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)} + dx_n^{(1)}, y_1^{(1)} + dy_1^{(1)}, y_2^{(1)} + dy_2^{(1)}, \cdots, y_m^{(1)} + dy_m^{(1)} \\ x_1^{(2)} + dx^{(2)}, x_2^{(2)} + dx_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)} + dx_n^{(2)}, y_1^{(2)} + dy_1^{(2)}, y_2^{(2)} + dy_2^{(2)}, \cdots, y_m^{(2)} + dy_m^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(p)} + dx_1^{(p)}, x_2^{(p)} + dx_2^{(p)}, \cdots, x_n^{(p)} + dx_n^{(p)}, y_1^{(p)} + dy_1^{(p)}, y_2^{(p)} + dy_2^{(p)}, \cdots, y_m^{(p)} + dy_m^{(p)} \end{array}\right.$$

e se si suppone che i cammini descritti dai punti $u_1, u_2, \cdots, u_k$ evitino quei sistemi di valori per cui alcune delle radici distinte del quadro (III) divengono fra loro eguali, è evidente, per la continuità, che ad ogni scambio di linee nel sistema (III) corrisponderà un eguale scambio di linee nel sistema (III').

Ciò premesso, consideriamo la espressione differenziale

$$dF^{(1)} + dF^{(2)} + \cdots + dF^{(p)} = \sum_{1}^{p}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s f_s^{(i)} dx_s^{(i)}$$

la quale, quando si riguardino le

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}, y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_m^{(i)}$$

come funzioni di $u_1, u_2, \cdots, u_k$, potrà scriversi sotto la forma

$$\sum_{1}^{k}{}_t \Phi_t (u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t .$$

Se facciamo muovere le $u_1, u_2, \cdots, u_k, u_1 + du_1, u_2 + du_2, \cdots, u_k + du_k$ (ciascuna di esse nel suo piano) partendo da un sistema di valori arbitrario $u_1^0, u_2^0, \cdots, u_k^0, u_1^0 + du_1^0, u_2^0 + du_2^0, \cdots, u_k^0 + du_k^0$ fino a ritornare ai valori stessi (ed evitando quei sistemi di valori per cui alcune delle radici distinte del quadro (III) divengono fra loro eguali), per ciò che si è detto, le $dF^{(1)}$, $dF^{(2)}, \cdots, dF^{(p)}$ non faranno altro che riprendere i loro valori iniziali o scambiarsi fra loro, lasciando quindi inalterata la loro somma.

Ne segue che l'espressione differenziale

$$\sum_{1}^{k}{}_t \Phi_t (u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t$$

dovrà essere monodroma. Da questo risultato e da una semplice ispezione delle funzioni Φ_t risulta che l'espressione differenziale dovrà essere razionale in $u_1, u_2, \cdots, u_k$, come appunto dovevasi dimostrare.

Se F *è tale che non diviene mai infinita per nessun sistema di valori di* $x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m$, *è evidente allora che*

$$F^{(1)} + F^{(2)} + \cdots + F^{(p)}$$

dovrà risultare costante e quindi dovremo avere

$$\Phi_t = 0 \qquad (t = 1, 2, \cdots, k).$$

Supponiamo che $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ siano funzioni razionali delle $x_1, x_2, \cdots, x_n$, $y_1, y_2, \cdots, y_m$ senza che

$$\theta_1 dx_1 + \theta_2 dx_2 + \cdots + \theta_n dx_n$$

sia un differenziale esatto. Potremo evidentemente applicare alle θ lo stesso ragionamento già applicato alle f, onde *posto*

$$\sum_{1}^{p}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s \theta_s^{(i)} dx_s^{(i)} = \sum_{1}^{k}{}_t \Psi_t (u_1, u_2, \cdots, u_k)\, du_t ,$$

avremo che il secondo membro dovrà risultare razionale in $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Supponiamo di mantenere costanti le $u_1, u_2, \cdots, u_{l-1}, u_{l+1}, \cdots, u_k$ e di far variare la sola u_l. In questa ipotesi avremo che

$$\sum_{1}^{p}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{s} \theta_s^{(i)} \, dx_s^{(i)} = \frac{\partial F_l(u_1, u_2, \cdots, u_k)}{\partial u_l} du_l,$$

e per la F_l potremo prendere una funzione algebrica e logaritmica di $u_1, u_2, \cdots, u_k$.

Se quindi le θ_s sono tali che le F_l debbano conservarsi sempre finite, avremo che le Ψ_t dovranno esser nulle.

Il teorema enunciato da principio può ritenersi come una estensione del teorema d'ABEL.

Dalle considerazioni svolte dopo, può dedursi come caso particolare un risultato enunciato da H. POINCARÉ in una Nota pubblicata nei « Comptes Rendus » nel gennaio 1885.

XV.

SUI FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

«Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL)», serie III, vol. VI, n. 8, anno 1887 (*).

PARTE PRIMA.

INTRODUZIONE

1. Nell'analisi la derivazione e l'integrazione si considerano come le due operazioni infinitesimali fondamentali; esse si definiscono in modo indipendente l'una dall'altra e si dimostra che l'una operazione è inversa all'altra.

Il mezzo che mi son proposto per studiare le equazioni differenziali lineari parte dalla considerazione di due analoghe operazioni fondamentali infinitesimali le quali rispettivamente dànno il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale lineare ai coefficienti della stessa ed inversamente dai coefficienti della equazione differenziale agli integrali fondamentali.

2. Eccomi ad esporre in succinto come si ottengono tali operazioni.

Se sopra una variabile qualunque u si eseguiscono successivamente due sostituzioni lineari i cui coefficienti sono rispettivamente $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$, ciò equivale ad eseguire una sola sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix}$ che si usa chiamare il prodotto delle due. Si scrive

$$\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}.$$

È noto che, se

$$\begin{pmatrix}\alpha_3, \beta_3 \\ \gamma_3, \delta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$$

si avrà in generale

$$\begin{pmatrix}\alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}\alpha_3, \beta_3 \\ \gamma_3, \delta_3\end{pmatrix} \text{(1)}.$$

(*) Presentata dai Soci E. BETTI ed E. FERGOLA.

(1) Ora ed in seguito il segno $\neq$ starà a significare *differente*.

Prescindiamo dalla variabile u sopra cui debbono eseguirsi le sostituzioni e consideriamo soltanto le relazioni fra i coefficienti delle sostituzioni. Supporremo le sostituzioni a determinante uguale ad 1.

3. Dalla operazione fondamentale considerata del prodotto di due sostituzioni possono farsi dipendere come casi particolari la somma, la moltiplicazione, la sottrazione e la divisione ordinarie.

Infatti, come è noto, avremo

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \beta, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ \alpha + \beta, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ \alpha, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ \beta, 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ \alpha - \beta, 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha, 0 \\ 0, \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta, 0 \\ 0, \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta}, 0 \\ 0, \frac{\beta}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

4. Supponiamo ora di avere una sostituzione i cui elementi siano funzioni di una variabile: chiameremo la sostituzione *funzione* di quella variabile, e se gli elementi saranno funzioni continue si chiamerà pure *continua* la sostituzione. Mediante tale considerazione si passa subito ad ottenere una operazione infinitesimale colle sostituzioni.

Infatti, se $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ è una sostituzione continua di x, avremo che le due sostituzioni

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_x^{-1},$$

e

$$\text{(II)} \qquad \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_x^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_{x+\Delta x},$$

quando Δx tenderà a zero, tenderanno indefinitamente verso la identità in modo che, *sotto certe condizioni*, le sostituzioni (I) e (II) potranno rispettivamente scriversi, col trascurare infinitesimi d'ordine superiore al primo,

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 \Delta x, & \beta_1 \Delta x \\ \gamma_1 \Delta x & , 1 + \delta_1 \Delta x \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 \Delta x, & \beta_2 \Delta x \\ \gamma_2 \Delta x & , 1 + \delta_2 \Delta x \end{pmatrix},$$

essendo

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix}$$

due sostituzioni funzioni di x.

Queste operazioni fondamentali infinitesimali le chiamerò rispettivamente *derivazione a sinistra* e *a destra* della sostituzione primitiva $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$.

Analogamente partendo da una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \alpha + \delta = 0,$$

(a determinante eguale o no ad uno) funzione di x definita in un intervallo $(p \cdots q)$, considererò questo intervallo diviso in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$. Formerò i due prodotti:

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 h_2, & \beta_2 h_2 \\ \gamma_2 h_2 & , 1 + \delta_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1 \\ \gamma_1 h_1 & , 1 + \delta_1 h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 h_2, & \beta_2 h_2 \\ \gamma_2 h_2 & , 1 + \delta_2 h_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 + \alpha_n h_n, & \beta_n h_n \\ \gamma_n h_n & , 1 + \delta_n h_n \end{pmatrix}$$

in cui $\begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix}$ rappresenta il valore della sostituzione per un valore di x compreso nell'intervallo h_i. Considererò quindi i limiti, se esistono, di questi due prodotti quando $h_1, h_2, \cdots, h_n$ vanno indefinitamente impiccolendo e chiamerò rispettivamente i due limiti *integrale destro* e *integrale sinistro* della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ nell'intervallo $(p \cdots q)$.

Dimostrerò che le due operazioni della derivazione e della integrazione delle sostituzioni possono ritenersi come operazioni inverse.

Esse fanno parte di quella *classe di operazioni infinitesimali* a cui alludevo fin da principio; perché, come dimostrerò, dànno appunto *il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale del second'ordine ai coefficienti della stessa e inversamente dai coefficienti agli integrali fondamentali.*

Per ottenere la generalizzazione delle stesse operazioni al caso di una equazione differenziale d'ordine n, basterà considerare una sostituzione

$$S = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{Bmatrix},$$

di ordine n ed estendere, come è facile, a questa le due operazioni fondamentali di derivazione e di integrazione.

In altri termini *il calcolo differenziale ed integrale relativo alle sostituzione ci fornisce la teoria generale delle equazioni differenziali lineari.*

5. Se si tien presente quanto dicemmo nell'art. 3 si vede che la derivazione e la integrazione ordinaria, come pure la derivazione logaritmica e la sua operazione inversa, possono ritenersi casi particolari della derivazione e della integrazione di sostituzioni.

6. Nella prima parte di questo lavoro mi occupo dello studio delle due operazioni fondamentali, a cui ho accennato precedentemente, sulle sostituzioni funzioni di variabili reali.

Nel § 1 studio le derivate delle sostituzioni del secondo ordine, le condizioni per la loro esistenza, le loro proprietà e le regole per la derivazione dei prodotti di sostituzioni.

Il § 2 è relativo alla integrazione delle sostituzioni e alle relazioni che passano fra la derivazione e la integrazione.

Nel § 3 mi occupo delle sostituzioni funzioni di più variabili e dei loro differenziali del primo e del secondo ordine e trovo le condizioni affinché una espressione differenziale data per sostituzioni sia un differenziale esatto d'una sostituzione.

Il § 4 si riferisce alla integrazione delle espressioni differenziali, e nel § 5 si trova un cenno circa alle variazioni delle sostituzioni.

Nel § 6, dopo definita la integrazione multipla, viene dato un teorema che trasforma l'integrale curvilineo di una sostituzione in un integrale doppio; da questa trasformazione risulta la condizione di monodromia di una sostituzione funzione di due variabili ottenuta integrando un differenziale esatto.

Nel § 7 viene eseguito un breve studio sopra una sostituzione di due variabili che gode di proprietà analoghe al parametro differenziale secondo di una funzione.

Questi primi sette paragrafi (per rendere più semplice la esposizione della presente teoria) sono relativi alle sostituzioni del secondo ordine, la generalizzazione ad una sostituzione di ordine n viene eseguita nel § 8.

Nelle parti che faranno seguito alla presente verranno considerate le sostituzioni funzioni di variabili complesse. Per esse vale un teorema analogo a quello di CAUCHY relativo ai residui.

Si considereranno poi le sostituzioni algebriche, cioè quelle sostituzioni monodrome sopra una superficie di RIEMANN e che non posseggono che poli, ed i loro integrali. Si ottiene in tal modo una classe di sostituzioni che chiamo *sostituzioni abeliane* e che per le loro proprietà possono dividersi in varie categorie. Queste sostituzioni hanno la proprietà di essere definite sopra una superficie di RIEMANN sezionata mediante i tagli normali, in modo che i due valori della sostituzione alle due rive di ciascun taglio si ottengono l'uno dall'altro moltiplicando a destra, o a sinistra, o da ambo le parti uno dei due valori per sostituzioni costanti lungo ciascun taglio o ciascuna porzione di taglio compresa fra nodi consecutivi.

Faranno seguito alcune analogie fra i teoremi delle funzioni algebriche e degli integrali abeliani e le proprietà delle sostituzioni algebriche e abeliane le quali resultano da uno studio sul teorema di ABEL.

Verranno poi considerate alcune classi speciali di sostituzioni abeliane.

Finalmente un'ultima parte riguarderà l'applicazione dei resultati trovati alla teoria delle equazioni differenziali lineari e mostrerà appunto il nesso di questa teoria con quella della derivazione e della integrazione delle sostituzioni.

PRELIMINARI

§ 1. - FORMULE PRELIMINARI DELLA TEORIA DELLE SOSTITUZIONI. - NOTAZIONI.

1. Ricorderò le formole seguenti:

Si ha

$$S = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & , & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & , & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

e in generale, se

$$S = \begin{Bmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{Bmatrix},$$

si ha

$$S = \begin{Bmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn} \end{Bmatrix}$$

con

$$c_{hk} = \sum_{1}^{n}{}_i \, b_{hi} \, a_{ik} .$$

2. Se

$$S = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 ,$$

si ha

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & , -b \\ -c & , \ a \end{pmatrix},$$

e in generale, se

$$S = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{Bmatrix} \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix} = 1 ,$$

$$S^{-1} = \begin{Bmatrix} A_{11}, A_{21}, \cdots, A_{n1} \\ A_{12}, A_{22}, \cdots, A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n}, A_{2n}, \cdots, A_{nn} \end{Bmatrix}$$

essendo A_{rs} l'elemento reciproco ad a_{rs} nel determinante D.

3. Se si hanno due sostituzioni τ e σ, si chiama

$$s = \tau^{-1} \sigma \tau$$

la *trasformata di σ mediante τ*, mentre

$$s' = \tau \sigma \tau^{-1}$$

la chiameremo la *trasformata inversa di σ mediante τ*.

Ponendo

$$\sigma = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad , \quad \tau = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$$

e supponendo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ e $ad - bc$ qualunque, avremo

$$\text{(I)} \qquad s = \begin{pmatrix} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d & , & \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta d \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c - \gamma^2 b + \alpha\gamma d & , & -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d \end{pmatrix},$$

$$\text{(I')} \qquad s' = \begin{pmatrix} \delta\alpha a + \delta\beta c - \gamma\alpha b - \beta\gamma d & , & -\beta\alpha a - \beta^2 c + \alpha^2 b + \beta\alpha d \\ \delta\gamma a + \delta^2 c - \gamma^2 b - \delta\gamma d & , & -\gamma\beta a - \delta\beta c + \alpha\gamma b + \alpha\delta d \end{pmatrix}.$$

In generale, se

$$\tau = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{Bmatrix} \quad , \quad \sigma = \begin{Bmatrix} b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{nn} \end{Bmatrix},$$

e

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{vmatrix} = 1,$$

avremo

$$\text{(II)} \quad s = \tau^{-1}\sigma\tau = \begin{Bmatrix} c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}, c_{n2}, \cdots, c_{nn} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II')} \quad s' = \tau\sigma\tau^{-1} = \begin{Bmatrix} d_{11}, d_{12}, \cdots, d_{1n} \\ d_{21}, d_{22}, \cdots, d_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_{n1}, d_{n2}, \cdots, d_{nn} \end{Bmatrix}$$

con

$$c_{is} = \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_l a_{ts} A_{li} b_{lt} \quad , \quad d_{is} = \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_l A_{st} a_{il} b_{lt},$$

essendo A_{li} l'elemento reciproco ad a_{li} nel determinante D.

Facciamo la somma dei termini in diagonale nelle (I) (I'); avremo

$$\begin{aligned} &(\alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma d) + (-\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta d) \\ &= (\delta\alpha a + \delta\beta c - \gamma\alpha b - \beta\gamma d) + (-\gamma\beta a - \delta\beta c + \gamma\alpha b + \alpha\delta d) \\ &= (a + d)(\alpha\delta - \beta\gamma) = a + d. \end{aligned}$$

Analogamente formando la somma dei termini in diagonale nelle (II) e (II') avremo

$$\sum_1^n{}_i c_{ii} = \sum_1^n{}_i d_{ii} = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_t \sum_1^n{}_l a_{ti} A_{li} b_{lt} = \sum_t \sum_l b_{lt} \sum_i a_{ti} A_{li} = \sum_1^n{}_t b_{tt}.$$

Quindi si ottiene il teorema:

La trasformata di una sostituzione qualunque ha la somma dei termini lungo la diagonale eguale alla somma dei termini lungo la diagonale nella sostituzione primitiva.

5. Ricorderò la *proprietà associativa* del prodotto di sostituzioni che può esprimersi nel modo seguente.

Se si ha il prodotto delle sostituzioni

$$U = S_1 S_2 \cdots S_{i-2} S_{i-1} S_i S_{i+1} \cdots S_n,$$

posto $S_{i-1} S_i = T$, si avrà

$$U = S_1 S_2 \cdots S_{i-2} T S_{i+1} \cdots S_n .$$

6. Accennerò che nel corso del lavoro ho adoperato qualche volta il simbolo

$$\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2 \\ c_1 \pm c_2, d_1 \pm d_2 \end{pmatrix}.$$

7. Quando nel parlare di una sostituzione sarà necessario di aver riguardo al valore del determinante della sostituzione, scriveremo dopo la sostituzione il valore del suo determinante col simbolo (det. D). Analogamente il simbolo (som. A) dopo una sostituzione indicherà che la somma dei termini in diagonale è A.

8. Siano

$$\text{(III)} \qquad A_i = \begin{Bmatrix} a_{11}^{(i)}, a_{12}^{(i)}, \cdots, a_{1n_i}^{(i)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n_i 1}^{(i)}, a_{n_i 2}^{(i)}, \cdots, a_{n_i n_i}^{(i)} \end{Bmatrix} \qquad (i = 1, 2 \cdots p)$$

p sostituzioni di ordini n_i. Rappresenteremo con

$$\text{(IV)} \qquad \begin{Bmatrix} A_1, 0, \cdots, 0 \\ 0, A_2, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, A_p \end{Bmatrix} = S$$

la sostituzione

$$\text{(V)} \qquad S = \begin{Bmatrix} b_{11}, \cdots, b_{1N} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{N1}, \cdots, b_{NN} \end{Bmatrix}$$

di ordine $N = \sum_1^p {}_i n_i$ la quale si ottiene scrivendo nella (IV) al posto di $A_1, A_2, \cdots, A_p$ i secondi membri delle (III) e completando le linee e le colonne con tanti zeri. In altri termini, se avremo contemporaneamente

$$\text{(VI)} \qquad \sum_1^q {}_i n_i > r \geqq \sum_1^{q+1} {}_i n_i \quad , \quad \sum_1^q {}_i n_i > s \geqq \sum_1^{q+1} {}_i n_i ,$$

prenderemo

$$b_{rs} = a_{kl}^{q+1}, \; k = r - \sum_1^q {}_i n_i, \; l = s - \sum_1^q {}_i n_i;$$

se le r e s non soddisferanno contemporaneamente alle relazioni (VI), prenderemo

$$b_{rs} = 0.$$

Per rappresentare la sostituzione (V), oltre al simbolo (IV) adotteremo ancora gli altri

$$\overline{\underline{\left\{ A_1 A_2 \cdots A_p \right\}}}, \quad \overline{\underline{\left\{ \prod_1^p {}_i A_i \right\}}}.$$

9. Se in una sostituzione qualunque

$$S = \begin{pmatrix} 1+a, & b \\ c & , 1+d \end{pmatrix}$$

a, b, c, d, sono minori di m, la sostituzione si dirà *minore* di m.

Se due sostituzioni $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$ sono tali che $a - a_1, b - b_1, c - c_1$, $d - d_1$, sono minori di m si dirà che le due sostituzioni *differiscono meno di m.*

1. *Se la sostituzione* S (det. Δ) *minore di m differisce dalla sostituzione* S' *per meno di* ε, *avremo che* $S^{-1} S'$ *e* $S' S^{-1}$ *saranno minori di* $\frac{\varepsilon(1+2m)}{\Delta}$ e reciprocamente *se* $S' S^{-1}$ *è minore di* ε *e* S' *è minore di m*, S *e* S' *differiranno fra loro meno di* $\varepsilon(1+2m)$.

2. *Se si trasforma una sostituzione* τ *inferiore ad* ε *mediante una sostituzione* σ (det. Δ) *inferiore ad m, la trasformata sarà inferiore a* $\frac{\varepsilon(1+2m)^2}{\Delta}$.

3. *Se* $S = \begin{pmatrix} 1+a, & b \\ c & , 1+d \end{pmatrix}$ *(det.* Δ*) e* $S' = \begin{pmatrix} 1+a', & b' \\ c' & , 1+d' \end{pmatrix}$ *(det.* Δ*) sono rispettivamente minori di m e m' e se* $S'' = \begin{pmatrix} 1+a+a', & b+b' \\ c+c' & , 1+d+d' \end{pmatrix}$ *(det,* Δ''*), avremo che* SS' *differirà da* S'' *meno di* $2mm'$; e che $SS'S''^{-1}$ *sarà minore di*

$$\frac{2mm'[1+2(m+m')]^2}{\Delta''}.$$

10. Se una sostituzione $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ è funzione di x in un intervallo $(p \cdots q)$, la massima oscillazione dei suoi elementi si chiamerà *l'oscillazione della sostituzione nell'intervallo.*

§ 2. - Sulla riduzione delle sostituzioni alla forma normale.

1. Avremo spesso bisogno nel corso del lavoro di porre le sostituzioni sotto una forma speciale che chiameremo la *forma normale.*

Ci varremo a tal fine di un teorema di K. WEIERSTRASS da questi dato nella Memoria *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (2).

(2) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 18 Mai 1868.

Il teorema a cui si allude è il seguente:

Se per mezzo delle sostituzioni

$$x_i = \sum_{1}^{n}{}_\gamma\, h_{i\gamma}\, u_\gamma \quad , \quad y_i = \sum_{1}^{n}{}_\gamma\, k_{i\gamma}\, v_\gamma ,$$

ove le $h_{i\gamma}$, $k_{i\gamma}$ *sono costanti e le* x_i, y_i, u_γ, v_γ *sono variabili, le due forme bilineari*

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum\nolimits_{\alpha,\beta} \mathrm{A}_{\alpha,\beta}\, x_\alpha\, y_\beta ,$$

$$\mathrm{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) = \sum\nolimits_{\alpha,\beta} \mathrm{B}_{\alpha,\beta}\, x_\alpha\, y_\beta$$

si trasformano in due altre

$$\mathrm{P}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum\nolimits_{\alpha,\beta} \mathrm{A}'_{\alpha,\beta}\, u_\alpha\, v_\beta ,$$

$$\mathrm{Q}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) = \sum\nolimits_{\alpha,\beta} \mathrm{B}'_{\alpha,\beta}\, u_\alpha\, v_\beta$$

e se i due determinanti

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_{11}, \cdots, h_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}, \cdots, h_{nn} \end{vmatrix} \quad , \quad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} k_{11}, \cdots, k_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}, \cdots, k_{nn} \end{vmatrix}$$

non sono nulli, avremo che i DIVISORI ELEMENTARI *dei determinanti delle due forme*

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \,,\, p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

coincideranno fra loro.

RECIPROCAMENTE *se le due coppie di forme bilineari*

$$\mathrm{P}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n) \,,\, \mathrm{Q}(x_1, x_2, \cdots, x_n \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

e

$$\mathrm{P}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n) \,,\, \mathrm{Q}'(u_1, u_2, \cdots, u_n \mid v_1, v_2, \cdots, v_n)$$

sono tali che i determinanti delle due forme

$$p\mathrm{P} + q\mathrm{Q} \,,\, p\mathrm{P}' + q\mathrm{Q}'$$

hanno i medesimi divisori elementari, si potranno trovare $2\,n^2$ *costanti* $(h_{11} \cdots h_{nn})$, $(k_{11} \cdots k_{nn})$ *per le quali*

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} h_{11}, \cdots, h_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}, \cdots, h_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ; \quad \mathrm{K} = \begin{vmatrix} k_{11}, \cdots, k_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ k_{n1}, \cdots, k_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

in modo che le sostituzioni

$$x_l = \sum_{1}^{n}{}_\gamma\, h_{l\gamma}\, u_\gamma \quad , \quad y_l = \sum_{1}^{n}{}_\gamma\, k_{l\gamma}\, v_\gamma$$

trasformino contemporaneamente P in P′ e Q in Q′.

Il WEIERSTRASS dà il significato seguente ai *divisori elementari* del determinante della forma $pP + qQ$, che indica col simbolo $[P, Q]$.

Questo determinante è una funzione omogenea di grado n in p e q; esso potrà quindi considerarsi (se si esclude il caso in cui tutti i coefficienti delle forme P e Q siano nulli) come il prodotto di n fattori lineari, e omogenei di p e q. Sia $ap + bq$ uno di questi fattori ed l l'esponente della più alta potenza di questo fattore che divide $[P, Q]$; $l^{(\varkappa)}$ l'esponente della più alta potenza dello stesso fattore che divide *tutti* i determinanti minori di $[P, Q]$ di ordine $n - \varkappa$. Avremo

$$l > l^{(1)} > l^{(2)} \dots > l^{(r-1)} > 0$$

supposto $l^{(r)} = 0$. Posto

$$l - l^{(1)} = e \,, l^{(1)} - l^{(2)} = e^{(1)} \,, \dots \,, l^{(r-1)} = e^{(r-1)}$$

avremo

$$(ap + bq)^l = (ap + bq)^e \, (ap + bq)^{e^{(1)}} \,, \dots \,, (ap + bq)^{e^{(r-1)}} .$$

Ciascuno dei fattori $(ap + bq)^{e^{(\varkappa)}}$ che comparisce nell'ultimo prodotto viene chiamato da WEIERSTRASS un *divisore elementare.*

2. Si considerino ora le sostituzioni

$$S_1 = \begin{vmatrix} A_{11} \,, A_{12} \,, \dots \,, A_{1n} \\ A_{21} \,, A_{22} \,, \dots \,, A_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_{n1} \,, A_{n2} \,, \dots \,, A_{nn} \end{vmatrix} \,, \quad S'_1 = \begin{vmatrix} A'_{11} \,, A'_{12} \,, \dots \,, A'_{1n} \\ A'_{21} \,, A'_{22} \,, \dots \,, A'_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A'_{n1} \,, A'_{n2} \,, \dots \,, A'_{nn} \end{vmatrix} \,,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} B_{11} \,, B_{12} \,, \dots \,, B_{1n} \\ B_{21} \,, B_{22} \,, \dots \,, B_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{n1} \,, B_{n2} \,, \dots \,, B_{nn} \end{vmatrix} \,, \quad S'_2 = \begin{vmatrix} B'_{11} \,, B'_{12} \,, \dots \,, B'_{1n} \\ B'_{21} \,, B'_{22} \,, \dots \,, B'_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ B'_{n1} \,, B'_{n2} \,, \dots \,, B'_{nn} \end{vmatrix} \,,$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} h_{11} \,, h_{21} \,, \dots \,, h_{n1} \\ h_{12} \,, h_{22} \,, \dots \,, h_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ h_{1n} \,, h_{2n} \,, \dots \,, h_{nn} \end{vmatrix} \,, \quad T_1 = \begin{vmatrix} k_{11} \,, k_{12} \,, \dots \,, k_{1n} \\ k_{21} \,, k_{22} \,, \dots \,, k_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{n1} \,, k_{n2} \,, \dots \,, k_{nn} \end{vmatrix} \,,$$

essendo queste ultime due a determinante diverso da zero. Il teorema di WEIERSTRASS può enunciarsi nel modo seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$T_2 \, S_1 \, T_1 = S'_1 \,,$$

$$T_2 \, S_2 \, T_1 = S'_2 \,,$$

è che le due sostituzioni

$$S_1 - \omega S_2 = \begin{Bmatrix} A_{11} - \omega B_{11}, \cdots, A_{1n} - \omega B_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1} - \omega B_{n1}, \cdots, A_{nn} - \omega B_{nn} \end{Bmatrix},$$

$$S'_1 - \omega S'_2 = \begin{Bmatrix} A'_{11} - \omega B'_{11}, \cdots, A'_{1n} - \omega B'_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n1} - \omega B'_{n1}, \cdots, A'_{nn} - \omega B'_{nn} \end{Bmatrix}$$

abbiano i determinanti con i medesimi divisori elementari.

3. Ciò premesso prendiamo per S_2 e S'_2 l'identità, cioè

$$S_2 = S'_2 = \begin{Bmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{Bmatrix};$$

avremo

$$T_1 T_2 = \begin{Bmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \\ 0, 1, \cdots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 0, 0, \cdots, 1 \end{Bmatrix},$$

quindi

$$T_2 = T_1^{-1}.$$

Potremo sempre ridurre la sostituzione T_1 ad avere il determinante eguale ad 1, ed avremo che fra S_1 e S'_1 passerà la relazione

$$T_1^{-1} S_1 T_1 = S'_1,$$

cioè l'una sarà la trasformata dell'altra per mezzo della sostituzione T_1. Dal teorema dell'Art. 2, si deduce quindi:

La condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia

$$T_1^{-1} S_1 T_1 = S'_1$$

essendo Det. $T_1 = 1$, *è che i determinanti*

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} - \omega, A_{12}, \cdots, A_{1n} \\ A_{21}, A_{22} - \omega, \cdots, A_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}, A_{n2}, \cdots, A_{nn} - \omega \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} A'_{11} - \omega, A'_{12}, \cdots, A'_{1n} \\ A'_{21}, A'_{22} - \omega, \cdots, A'_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A'_{n1}, A'_{n2}, \cdots, A'_{nn} - \omega \end{vmatrix}$$

abbiano i medesimi divisori elementari.

Chiameremo il determinante D relativo alla sostituzione S il determinante *caratteristico della sostituzione* e *divisori elementari della sostituzione* quelli relativi al suo determinante caratteristico.

4. Prendasi ora una sostituzione

$$S = \left\{ \begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{matrix} \right\}$$

e si considerino le radici $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ dell'equazione di grado n

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12} & , \cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , a_{22} - \omega & , \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & , a_{n2} & , \cdots, & a_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 .$$

Se esse saranno tutte diverse fra loro, avremo che

$$D' = \begin{vmatrix} \omega_1 - \omega, & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , \omega_2 - \omega & , \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , 0 & , \cdots, & \omega_n - \omega \end{vmatrix}$$

avrà i medesimi divisori elementari di D; quindi potremo scrivere

$$(1) \qquad S = T_1^{-1} \left\{ \begin{matrix} \omega_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & \omega_2, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & \omega_n \end{matrix} \right\} T_1 \qquad (\mathrm{Det}\, T_1 = 1).$$

Si supponga invece che alcune delle radici siano eguali fra loro. Si abbiano l_i radici eguali ad ω_i e i fattori elementari corrispondenti siano

$$(\omega - \omega_i)^{e_i^{(1)}}, (\omega - \omega_i)^{e_i^{(2)}}, \cdots, (\omega - \omega_i)^{e_i^{(r_i)}}; \qquad (i = 1, 2 \cdots p)$$

$$e_i^{(1)} \geqq e_i^{(2)} \geqq e_i^{(3)} \geqq \cdots \geqq e_i^{(r_i)} .$$

Si formino le sostituzioni di ordine $e_i^{(\varkappa)}$

$$E_i^{(\varkappa)} = \left\{ \begin{matrix} \omega_i - \omega, & 0 & , & 0 & , & 0 & , \cdots, & 0 \\ 1 & , \omega_i - \omega, & & 0 & , & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , & 1 & , \omega_i - \omega, & & 0 & , \cdots, & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 1 & , \omega_i - \omega, & \cdots, & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & \cdots & , \cdots, 1, \omega_i - \omega \end{matrix} \right\},$$

$$S_i^{(\varkappa)} = \begin{Bmatrix} \omega_i, & 0, & 0, & \cdots, & 0 \\ 1, & \omega_i, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 1, & \omega_i, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & \omega_i \end{Bmatrix},$$

e quindi (vedi § prec. Art. 8)

$$E = \overline{\left\{ \prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\varkappa E_i^{(\varkappa)} \right\}},$$

$$V = \overline{\left\{ \prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)} \right\}}.$$

È facile riconoscere che V ha i medesimi divisori elementari di S, quindi potremo scrivere

$$\text{(2)} \qquad S = T_1^{-1} \overline{\left\{ \prod_1^p{}_i \prod_1^{r_i}{}_\varkappa S_i^{(\varkappa)} \right\}} T_1 \qquad (\text{Det. } T_1 = 1).$$

La formola (1) rientra nella precedente, basterà supporre in essa

$$e_i^{(\varkappa)} = 1 \quad , \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \quad , \quad \varkappa = 1 .$$

La sostituzione S posta sotto la forma (2) si dirà sotto la *forma normale*.

Una applicazione della riduzione di una sostituzione alla forma normale verrà fatta nel § 8 di questa prima parte, ma le applicazioni principali verranno fatte nella seconda parte del presente lavoro.

SOSTITUZIONI FUNZIONI DI VARIABILI REALI

§ 1. – Derivazione di una sostituzione.

1. Abbiasi una *sostituzione funzione di una variabile reale x* che supporremo sempre a determinante eguale ad 1. Ammettiamo inoltre che gli elementi della sostituzione siano finiti: diremo in questo caso che *la sostituzione è finita*. Se poi gli elementi per un dato valore della variabile saranno continui, diremo che la *sostituzione è continua* per quel valore della variabile.

Sia $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ una sostituzione finita e continua di x nel punto x_0. Si formino i due prodotti di sostituzioni

$$S_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0+\Delta x} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1},$$

$$S'_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_{x_0+\Delta x}$$

con Δx positivo o negativo.

I due prodotti coll'impiccolire indefinito di Δx tenderanno verso l'identità. Si ponga

$$S_{x_0+\Delta x, x_0} = \begin{pmatrix} 1+\lambda, & \mu \\ \nu & , 1+\rho \end{pmatrix},$$

$$S'_{x_0, x_0+\Delta x} = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1, & \mu_1 \\ \nu_1 & , 1+\rho_1 \end{pmatrix}$$

e si considerino le due sostituzioni

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\lambda}{\Delta x}, & \dfrac{\mu}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu}{\Delta x}, & \dfrac{\rho}{\Delta x} \end{matrix} \right\} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\lambda_1}{\Delta x}, & \dfrac{\mu_1}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu_1}{\Delta x}, & \dfrac{\rho_1}{\Delta x} \end{matrix} \right\}.$$

Cerchiamo le condizioni affinché coll'impiccolire indefinito di Δx, queste due sostituzioni tendano verso due sostituzioni limiti

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Vale perciò il seguente teorema:

TEOREMA I. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché esistano i due limiti richiesti è che le funzioni* A, B, C, D, *ammettano nel punto* x_0 *una derivata determinata e finita.*

Abbiamo infatti

$$S_{x_0+\Delta x, x_0} = \left\{ \begin{matrix} A_{x_0} + \Delta A, & B_{x_0} + \Delta B \\ C_{x_0} + \Delta C, & D_{x_0} + \Delta C \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{matrix} \right\}^{-1},$$

$$S'_{x_0, x_0+\Delta x} = \left\{ \begin{matrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{matrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{matrix} A_{x_0} + \Delta A, & B_{x_0} + \Delta B \\ C_{x_0} + \Delta C, & D_{x_0} + \Delta D \end{matrix} \right\},$$

ove

$$\Delta A = A_{x_0+\Delta x} - A_{x_0},$$

$$\Delta B = B_{x_0+\Delta x} - B_{x_0},$$

$$\Delta C = C_{x_0+\Delta x} - C_{x_0},$$

$$\Delta D = D_{x_0+\Delta x} - D_{x_0},$$

da cui si deduce

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda, & \mu \\ \nu & , 1+\rho \end{pmatrix} = S_{x_0+\Delta x, x_0} = \left\{ \begin{matrix} 1 + (D_{x_0}\Delta A - C_{x_0}\Delta B), & (A_{x_0}\Delta B - B_{x_0}\Delta A) \\ (D_{x_0}\Delta C - C_{x_0}\Delta D) & , 1 + (A_{x_0}\Delta D - B_{x_0}\Delta C) \end{matrix} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda_1, & \mu_1 \\ \nu_1 & , 1+\rho_1 \end{pmatrix} = S_{x_0, x_0+\Delta x} = \left\{ \begin{matrix} 1 + (D_{x_0}\Delta A - B_{x_0}\Delta C), & (D_{x_0}\Delta B - B_{x_0}\Delta D) \\ (A_{x_0}\Delta C - C_{x_0}\Delta A) & , 1 + (A_{x_0}\Delta D - C_{x_0}\Delta B) \end{matrix} \right\},$$

e

$$\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\lambda}{\Delta x}, & \dfrac{\mu}{\Delta x} \\ \dfrac{\nu}{\Delta x}, & \dfrac{\rho}{\Delta x} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} D_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x}, & A_{x_0}\dfrac{\Delta B}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta A}{\Delta x} \\ D_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x} - C_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x}, & A_{x_0}\dfrac{\Delta D}{\Delta x} - B_{x_0}\dfrac{\Delta C}{\Delta x} \end{matrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\Delta A}{\Delta x}, & \dfrac{\Delta B}{\Delta x} \\ \dfrac{\Delta C}{\Delta x}, & \dfrac{\Delta D}{\Delta x} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} A_{x_0}, & B_{x_0} \\ C_{x_0}, & D_{x_0} \end{matrix} \right\}^{-1};$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\lambda_1}{\Delta x}, \frac{\mu_1}{\Delta x} \\ \frac{\nu_1}{\Delta x}, \frac{\rho_1}{\Delta x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_{x_0}\frac{\Delta A}{\Delta x} - B_{x_0}\frac{\Delta C}{\Delta x}, D_{x_0}\frac{\Delta B}{\Delta x} - B_{x_0}\frac{\Delta D}{\Delta x} \\ A_{x_0}\frac{\Delta C}{\Delta x} - C_{x_0}\frac{\Delta A}{\Delta x}, A_{x_0}\frac{\Delta D}{\Delta x} - C_{x_0}\frac{\Delta B}{\Delta x} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} A_{x_0}, B_{x_0} \\ C_{x_0}, D_{x_0} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta A}{\Delta x}, \frac{\Delta B}{\Delta x} \\ \frac{\Delta C}{\Delta x}, \frac{\Delta D}{\Delta x} \end{Bmatrix}.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché esistano i limiti delle due sostituzioni

$$\begin{Bmatrix} \frac{\lambda}{\Delta x}, \frac{\mu}{\Delta x} \\ \frac{\nu}{\Delta x}, \frac{\rho}{\Delta x} \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \frac{\lambda_1}{\Delta x}, \frac{\mu_1}{\Delta x} \\ \frac{\nu_1}{\Delta x}, \frac{\rho_1}{\Delta x} \end{Bmatrix}$$

è quindi che esistano i limiti di

$$\frac{\Delta A}{\Delta x}, \frac{\Delta B}{\Delta x}, \frac{\Delta C}{\Delta x}, \frac{\Delta D}{\Delta x}.$$

il che dimostra il teorema.

Noi supporremo sempre che gli elementi della sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ oltre esser finiti e continui ammettano anche le derivate prime determinate e finite. In questa ipotesi le due sostituzioni limiti

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$$

saranno date rispettivamente da

$$\begin{Bmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A', B' \\ C', D' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} = \begin{Bmatrix} DA' - CB', AB' - BA' \\ DC' - CD', AD' - BC' \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A', B' \\ C', D' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} DA' - BC', DB' - BD' \\ AC' - CA', AD' - CB' \end{Bmatrix},$$

ove gli apici sostituiscono i segni di derivazione.

Consideriamo i prodotti

$$S_{x_0+dx, x_0} = \begin{Bmatrix} A + dA, B + dB \\ C + dC, D + dD \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$S'_{x_0, x+dx_0} = \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} A + dA, B + dB \\ C + dC, D + dD \end{Bmatrix}.$$

Si otterrà

$$S_{x_0+dx_0, x_0} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - CdB, & AdB - BdA \\ DdC - CdD & , 1 + AdD - BdC \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \alpha dx, & \beta dx \\ \gamma dx & , 1 + \delta dx \end{Bmatrix},$$

$$S'_{x_0+dx_0, x_0} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - BdC, & DdB - BdD \\ AdC - CdA & , 1 + AdD - CdB \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \alpha_1 dx, & \beta_1 dx \\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx \end{Bmatrix}.$$

2. Introdurremo le seguenti denominazioni:

Chiameremo *derivata sinistra nel punto* x della sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ la sostituzione limite $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ e chiameremo *derivata destra* di $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ la sostituzione limite $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$.

La sostituzione infinitesima S_{x_0+dx, x_0} si chiamerà il *differenziale sinistro* di $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ nel punto x_0 e S'_{x_0, x_0+dx} si chiamerà il *differenziale destro.*

Adopreremo i simboli seguenti:

(1) (differenziale sinistro) $d \begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - CdB, & AdB - BdA \\ DdC - CdD &, 1 + AdD - BdC \end{Bmatrix}$,

(2) (differenziale destro) $\begin{Bmatrix} A, B \\ C, D \end{Bmatrix} d = \begin{Bmatrix} 1 + DdA - BdC, & DdB - BdD \\ AdC - CdA &, 1 + AdD - CdB \end{Bmatrix}$,

(3) (derivata sinistra) $\dfrac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DA' - CB', AB' - BA' \\ DC' - CD', AD' - BC' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}^{-1}$,

(4) (derivata destra) $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \dfrac{d}{dx} = \begin{pmatrix} DA' - BC', DB' - BD' \\ AC' - CA', AD' - CB' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix}$,

$$d \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} dx,$$

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} d = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \cdot dx.$$

Avremo poi subito le formole

$$\left\{ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{pmatrix} A', B' \\ C', D' \end{pmatrix}.$$

3. Come è facile il prevedere, ad ogni teorema relativo alle *derivate sinistre* ne corrisponde uno *correlativo* per le *derivate destre* che si ottiene dal primo scambiando dappertutto nell'enunciato la parola *destra* colla parola *sinistra,* e *trasformata* colla *trasformata inversa.*

Il più delle volte quindi non enunceremo che uno solo dei due teoremi *correlativi,* avvertendo fin d'ora che non si avrà nessuna difficoltà a stabilire l'altro.

4. Cominciamo dallo stabilire subito il *teorema fondamentale* sulla derivazione delle sostituzioni, il quale, come vedremo in seguito, ci dà il legame della presente teoria con quella delle equazioni differenziali lineari.

TEOREMA II. - *La derivata a sinistra di una sostituzione* (det. 1) *non cambia se si moltiplica* A DESTRA *la sostituzione per una sostituzione costante* (det. 1).

TEOREMA CORRELATIVO. - *La derivata a destra di una sostituzione* (det. 1) *non cambia se si moltiplica* A SINISTRA *la sostituzione per una sostituzione costante* (det. 1).

Infatti se $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ è una sostituzione costante e $\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}$ è una sostituzione funzione della x, avremo

$$\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta\\ c\alpha + d\gamma, c\beta + d\delta\end{pmatrix}$$

e derivando a sinistra

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}a'\alpha + b'\gamma, a'\beta + b'\delta\\ c'\alpha + d'\gamma, c'\beta + d'\delta\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}.$$

Analogamente

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d\\ \gamma a + \delta c, \gamma b + \delta d\end{pmatrix}$$

e derivando a destra

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\right\}\frac{d}{dx} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha a' + \beta c', \alpha b' + \beta d'\\ \gamma a' + \delta c', \gamma b' + \delta b'\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}a', b'\\ c', d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}.$$

5. TEOREMA III. – *Il differenziale* (destro o sinistro) *di una sostituzione* (det. 1) *ha il determinante eguale ad* 1 *a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al differenziale della variabile indipendente.*

Infatti avendosi

$$d\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 + D dA - C dB, & A dB - B dA\\ D dC - C dD & , 1 + A dD - B dC\end{pmatrix},$$

il determinante delle sostituzioni sarà, trascurando infinitesimi d'ordine superiore al dx,

$$1 + D dA - C dB + A dD - B dC = 1 + d(AD - BC) = 1.$$

TEOREMA IV. – *Ogni sostituzione*

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$$

non può esser derivata (destra o sinistra) *d'un'altra sostituzione* (det. 1) a *meno che non sia* $\alpha + \delta = 0$.

Posto

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

oppure

$$\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

avremo

$$\alpha = da' - cb' \quad , \quad \delta = ad' - bc',$$

oppure

$$\alpha = da' - bc' \quad , \quad \delta = ad' - cb',$$

quindi in ambedue i casi

$$\alpha + \delta = da' + ad' - bc' - cb' = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a, b \\ c, d \end{vmatrix} = 0.$$

Dimostreremo in seguito (§ 2) che se $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ è continua, la condizione posta $\alpha + \delta = 0$ è anche sufficiente perché la sostituzione sia la derivata di una sostituzione (det. 1).

TEOREMA V. - *La derivata a destra e la derivata a sinistra di una sostituzione*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \text{ (det. 1)}$$

hanno lo stesso determinante, che è eguale a

$$\begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

Abbiamo trovato che

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix}$$

quindi

$$\text{Det.}\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \cdot \text{Det.}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

Ma

$$\text{Det.}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = 1,$$

quindi

$$\text{Det.}\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} = \text{Det.}\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\} = \begin{vmatrix} a', b' \\ c', d' \end{vmatrix}.$$

TEOREMA VI. - *La derivata a destra è la trasformata della derivata a sinistra mediante la sostituzione primitiva.*

Infatti dalla relazione

$$\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\}$$

si deduce

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}.$$

TEOREMA VII. - *Si hanno le relazioni*

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = -\left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \frac{d}{dx} = -\left\{ \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\}.$$

Abbiamo

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d'a - b'c, & d'b - b'd \\ a'c - c'a, & a'd - c'b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} dd' - bc', & db' - bd' \\ ac' - ca', & ad' - cb' \end{pmatrix},$$

quindi

$$\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\right\} + \left\{\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\right\} = \begin{pmatrix} 0\,, 0 \\ 0\,, 0\end{pmatrix}$$

donde il teorema enunciato.

6. Passiamo ora allo studio delle derivate dei prodotti di sostituzioni. Valgono perciò i seguenti teoremi.

Teorema VIII. - *Se* $\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) *è costante e* $\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}$ (det. 1) *è funzione di* x, *si ha*

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\right\}\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\right\}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix},$$

cioè la derivata a destra del secondo prodotto considerato è la trasformata della derivata della sostituzione variabile mediante la sostituzione costante, e la derivata a sinistra del primo prodotto considerato è la trasformata inversa della derivata della sostituzione variabile mediante quella costante.

Infatti

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\right\} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha a + \beta c\,, \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c\,, \gamma b + \delta d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a' + \beta c'\,, \alpha b' + \beta d' \\ \gamma a' + \delta c'\,, \gamma b' + \delta d'\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'\,, b' \\ c'\,, d'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}^{-1}.$$

Teorema IX. - *Se* $\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}$ (det. 1) e $\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) *sono due sostituzioni funzioni di* x, *si ha*

$$d\left\{\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\right\} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}dx \cdot \left\{\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d\end{pmatrix}^{-1}\right\}dx. \tag{7}$$

Questo teorema si dimostra immediatamente osservando che il differenziale del primo membro si otterrà facendo il prodotto dei differenziali che si hanno supponendo successivamente costante l'una e variabile l'altra sostituzione.

La formula precedente è una delle fondamentali della presente teoria e per le applicazioni che ne faremo è opportuno presentarla sotto varie altre forme.

Premetteremo alcuni lemmi:

1° Lemma. - *A meno di infinitesimi d'ordine superiore a* dx, *si avrà*:

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 dx\,, & \beta_1 dx \\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 dx\,, & \beta_2 dx \\ \gamma_2 dx & , 1 + \delta_2 dx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 dx\,, & \beta_2 dx \\ \gamma_2 dx & , 1 + \delta_2 dx\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 dx\,, & \beta_1 dx \\ \gamma_1 dx & , 1 + \delta_1 dx\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 dx + \alpha_2 dx\,, & \beta_1 dx + \beta_2 dx \\ \gamma_1 dx + \gamma_2 dx & , 1 + \delta_1 dx + \delta_2 dx\end{pmatrix}.$$

2° Lemma. - *Se* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ *ha il det.* 1, *e se*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1, B_1 \\ C_1, D_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2, B_2 \\ C_2, D_2 \end{pmatrix},$$

avremo

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & , & \beta_1 + \beta_2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 & , & \delta_1 + \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + A_2 & , & B_1 + B_2 \\ C_1 + C_2 & , & D_1 + D_2 \end{pmatrix},$$

ovvero, per una notazione stabilita precedentemente,

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}.$$

3° Lemma. - *Dato* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *e posto*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix},$$

si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \alpha, & \beta \\ \gamma & , 1 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + A, & B \\ C & , 1 + D \end{pmatrix}.$$

Per i primi due lemmi non vi è bisogno di dimostrazione; il terzo è una immediata conseguenza del secondo, supponendo $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$.

Ciò premesso, risulta subito che la formola del teorema IX potrà scriversi

$$d \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \left\{ d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ d \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}; \tag{8}$$

e poiché pel teorema VI

$$d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1},$$

avremo anche

$$d \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d \cdot d \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}. \tag{9}$$

Passando dai differenziali alle derivate, si otterranno le seguenti formule equivalenti al teorema IX:

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}, \tag{11}$$

vale a dire se

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \pi \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l+\lambda, m+\mu \\ n+\nu, p+\pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}. \tag{12}$$

Teorema X. – *Se* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1) *e* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ (det. 1) *sono funzioni di* x, *si ha*:

$$d\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\left[\left\{d\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\right\}^{-1} \cdot d\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}, \tag{13}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} - \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}, \tag{14}$$

vale a dire

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \lambda-l, \mu-m \\ \nu-n, \pi-p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \tag{15}$$

se

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \pi \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Infatti per la formula (11) avremo

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix};$$

ma, pel teorema VII, si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\frac{d}{dx} = -\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\right\},$$

da cui la (14). Applicando il primo lemma, si ha

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} d = \left\{d\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\right\}^{-1},$$

quindi la formula (13) resta dimostrata.

Se $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ si suppone costante, si ottiene come conseguenza la formula

$$-\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1}\left\{\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}, \tag{17}$$

la quale si sarebbe potuta ottenere anche direttamente con grande facilità.

Teorema XI. – *Abbiasi un prodotto di sostituzioni*

$$S_1 S_2 \cdots S_n = U$$

tutte a determinante eguale ad 1.

Si ponga

$$\begin{aligned} S_1 S_2 \cdots S_{n-1} &= T_{n-1}, \\ S_1 S_2 \cdots S_{n-2} &= T_{n-2}, \\ &\cdots\cdots \\ S_1 S_2 \cdots S_i &= T_i, \\ &\cdots\cdots \\ S_1 &= T_1 . \end{aligned}$$

Avremo

$$(18) \qquad d\,[S_1 S_2 \cdots S_n]$$

$$= dS_1 \cdot T_1 (dS_2) T_1^{-1} \cdot T_2 (dS_2) T_2^{-1} \cdots T_{i-1} (dS_i) T_{i-1}^{-1} \cdots T_{n-1} (dS_n) T_{n-1}^{-1},$$

ovvero

$$(19) \qquad \frac{d}{dx}(S_1 S_2 \cdots S_n) = \frac{dS_1}{dx} + T_1 \left(\frac{dS_2}{dx}\right) T_1^{-1}$$

$$+ T_2 \left(\frac{dS_3}{dx}\right) T_2^{-1} + \cdots + T_{i-1} \left(\frac{dS_i}{dx}\right) T_{i-1}^{-1} + \cdots + T_{n-1} \left(\frac{dS_n}{dx}\right) T_{n-1}^{-1} .$$

Questo teorema si dimostra immediatamente osservando che esso è stato dimostrato per $n = 2$, e tenendo conto del teorema IX, si ha che, se esso è verificato per $n = m$, risulta vero per $n = m + 1$.

7° Lemma. – *Se pel prodotto di due sostituzioni* $\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *si ha*

$$\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

è necessario che sia

$$\begin{pmatrix} m, n \\ p, q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} .$$

Infatti dovendosi avere

$$am + cn = 0 \quad , \quad ap + cq = 0,$$

$$bm + dn = 0 \quad , \quad bp + dq = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a, c \\ b, d \end{vmatrix} = 1,$$

è necessario che sia

$$m = n = p = q = 0.$$

Teorema XII. – *Se per* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1), *si ha*

$$d \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

avremo che $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ *sarà costante.*

Infatti dovrebbe essere

$$\begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

quindi per il lemma precedente

$$a' = b' = c' = d' = 0.$$

TEOREMA XIII. - *Se due sostituzioni* $\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$ (det. 1) *e* $\begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix}$ (det. 1) *hanno la stessa derivata sinistra, esse non possono differire che per una sostituzione moltiplicativa costante a destra.*

Sia

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

avremo pel teorema X

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha - \alpha, \beta - \beta \\ \gamma - \gamma, \delta - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

onde pel teorema XII

$$\begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix},$$

essendo $\begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix}$ costante. Quindi

$$\begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l, m \\ n, p \end{pmatrix}.$$

TEOREMA XIV (teorema correlativo del prec.). - *Se due sostituzioni* (det. 1) *hanno la stessa derivata destra, esse non possono differire che per una sostituzione moltiplicativa costante a sinistra.*

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente.

8. Supponiamo che la sostituzione $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. 1) funzione di x, abbia la forma

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix};$$

applicando le formole (3) e (4), avremo

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c', 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ c, 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c', 0 \end{pmatrix}.$$

Se la sostituzione ha invece la forma

$$\begin{Bmatrix} a, 0 \\ 0, \frac{1}{a} \end{Bmatrix},$$

avremo

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a, & 0 \\ 0, & \frac{1}{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{a'}{a}, & 0 \\ 0, & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a, & 0 \\ 0, & \frac{1}{a} \end{vmatrix}\frac{d}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{a'}{a}, & 0 \\ 0, & -\frac{a'}{a} \end{vmatrix}.$$

Quindi, come era facilmente prevedibile, la derivazione ordinaria e la derivazione logaritmica risultano essere casi particolari della derivazione di una sostituzione.

9. Applichiamo alcune delle formule precedenti per calcolare la derivata di alcune sostituzioni e ottenere delle formule di cui avremo in seguito bisogno.

Se $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ è costante, avremo

$$d\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

Se λ è costante

$$d\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda dx, & 0 \\ 0, & 1-\lambda dx \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & -\lambda \end{pmatrix};$$

quindi, se $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ (det. 1) è costante, avremo

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & -\lambda \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Per il teorema VIII, avremo poi

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha\delta+\beta\gamma), & -2\lambda\alpha\beta \\ -2\lambda\gamma\delta, & -\lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) \end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) &= a \\ -2\lambda\alpha\beta &= b \\ 2\lambda\gamma\delta &= c \\ -\lambda(\alpha\delta+\beta\gamma) &= d \end{aligned}\right\} a+d=0,$$

si avrà

$$ad-bc = -\lambda^2(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 = -\lambda^2,$$

$$\lambda = \sqrt{bc-ad};$$

e, supponendo $ad - bc \neq 0$, avremo

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= -\frac{1}{\alpha}\frac{b}{2\lambda} \\ \gamma &= \alpha\frac{c}{a+\lambda} \\ \delta &= \frac{1}{\alpha}\frac{a+\lambda}{2\lambda}, \end{aligned}\right.$$

onde se $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ (det. 1) è costante

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\begin{pmatrix} \alpha & , & -\frac{1}{\alpha}\frac{b}{2\lambda} \\ \alpha\frac{c}{a+\lambda} & , & \frac{1}{\alpha}\frac{a+\lambda}{2\lambda}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda x}, & 0 \\ 0, & e^{-\lambda x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d\end{pmatrix} \\ &a + d = 0 \\ &\lambda = \sqrt{bc - ad} \end{aligned}\right.$$

purché il determinante della sostituzione costante $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d\end{pmatrix}$ sia diverso da zero.

Osserviamo ora che si ha, supponendo c costante,

$$(22)\qquad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} 1, 0 \\ cx, 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ c, 0\end{pmatrix}.$$

Quindi per i teoremi II e VIII se $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (det. 1) e $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ (det. 1) sono costanti, avremo

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, 0 \\ x, 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\delta\beta, & -\beta^2 \\ \delta^2, & -\delta\beta\end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} \delta\beta &= a \\ -\beta^2 &= b \\ \delta^2 &= c \\ -\delta\beta &= d \end{aligned}\right\}, \quad a + d = 0 \quad , \quad ad - bc = 0,$$

si avrà

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ \beta &= \sqrt{-b} \\ \gamma &= \frac{\alpha\sqrt{c} - 1}{\sqrt{-b}} \\ \delta &= \sqrt{c} \end{aligned}\right.$$

onde, essendo $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ costante,

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} \alpha & , \sqrt{-b} \\ \dfrac{\alpha\sqrt{c}-1}{\sqrt{-b}} & , \sqrt{c} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1, 0 \\ x, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \\ a + d = 0 \qquad b \neq 0. \\ ad - bc = 0 \end{cases}$$

Le formole (21), (22) e (23) ci dànno la forma delle *sostituzioni più generali la cui derivata sinistra è una sostituzione costante senza che tutti gli elementi sian nulli.* Nel caso in cui gli elementi della derivata sono nulli, sappiamo già che la sostituzione che deve derivarsi è costante.

10. Se la sostituzione $\begin{pmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{B} \\ \mathrm{C}, \mathrm{D} \end{pmatrix}$ è funzione di y, e questa variabile è funzione di x, posto

$$\frac{d}{dy}\begin{pmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{B} \\ \mathrm{C}, \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

avremo evidentemente che

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{B} \\ \mathrm{C}, \mathrm{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y', \beta y' \\ \gamma y', \delta y' \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule precedenti ci dànno immediatamente la forma delle sostituzioni più generali la cui derivata è

$$\begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{(som. 0)}.$$

Si avrà

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} a & , -\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{b}{2\lambda} \\ \alpha\dfrac{c}{a+\lambda} & , \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{a+\lambda}{2\lambda} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda\varphi(x)}, & 0 \\ 0 & , e^{-\lambda\varphi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix} \\ a + d = 0 \\ \lambda = \sqrt{bc - ad} \neq 0 \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\begin{Bmatrix} \alpha & , \sqrt{-b} \\ \dfrac{\alpha\sqrt{c}-1}{\sqrt{-b}} & , \sqrt{c} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & , 0 \\ \varphi(x) & , 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a\varphi'(x), b\varphi'(x) \\ c\varphi'(x), d\varphi'(x) \end{pmatrix} \\ a + d = 0 \\ ad - bc = 0 \end{cases}$$

in cui α è costante e $\begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix}$ (det. 1) è costante.

§ 2. - Integrazione di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ funzione di un argomento reale x variabile in un intervallo $(p \cdots q)$, $p < q$. Dividiamo questo intervallo in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ (a cominciare dal limite inferiore p dell'intervallo) e denotiamo con $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ qualunque compresi fra il limite superiore e l'inferiore di queste quantità nell'intervallo h_i.

Formiamo i prodotti delle sostituzioni

$$A_n = \prod_1^n {}_i\begin{pmatrix}1+\alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha_n h_n, & \beta_n h_n\\ \gamma_n h_n & , 1+\delta_n h_n\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1+\alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1\\ \gamma_1 h_1 & , 1+\delta_1 h_1\end{pmatrix},$$

$$A'_n = \prod_n^1 {}_i\begin{pmatrix}1+\alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha_1 h_1, & \beta_1 h_1\\ \gamma_1 h_1 & , 1+\delta_1 h_1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1+\alpha_n h_n, & \beta_n h_n\\ \gamma_n h_n & , 1+\delta_n h_n\end{pmatrix}.$$

Se, facendo impiccolire indefinitamente tutti gli intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$, A_n e A'_n tendono verso due sostituzioni limiti S e S', queste si chiameranno rispettivamente *l'integrale sinistro* e *l'integrale destro di* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ *nell'intervallo* $(p \cdots q)$ e si adotteranno i simboli

$$\text{(Integrale sinistro)}\quad S = \int_p^q \begin{pmatrix}1+\alpha dx, & \beta dx\\ \gamma dx & , 1+\delta dx\end{pmatrix} = \int_p^q \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx,$$

$$\text{(Integrale destro)}\quad S' = \begin{pmatrix}1+\alpha dx, & \beta dx\\ \gamma dx & , 1+\delta dx\end{pmatrix} \int_p^q = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \int_p^q.$$

2. La determinazione della condizione d'integrabilità di una sostituzione è molto analoga a quella della condizione di integrabilità di una funzione. Si potrebbe quindi enunciare il resultato lasciandone la dimostrazione; ma per non rendere da questo lato incompleto il presente studio dedicheremo questo articolo ad accennare la dimostrazione in questione.

Premetteremo alcuni Lemmi.

1° Lemma. - *Se si ha il prodotto delle sostituzioni*

$$\begin{pmatrix}1+A, & B\\ C & , 1+D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+a_n, & b_n\\ c_n & , 1+d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+a_{n-1}, & b_{n-1}\\ c_{n-1} & , 1+d_{n-1}\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1+a_1, & b_1\\ c_1 & , 1+d_1\end{pmatrix}$$

e se $\begin{pmatrix}1+a_i, & b_i\\ c_i & , 1+d_i\end{pmatrix}$ *è inferiore ad* m_i, *il prodotto sarà inferiore a*

$$\frac{\prod_1^n {}_i(1+2m_i) - 1}{2}.$$

Infatti la sostituzione

$$\begin{pmatrix}1+A_1, & B_1\\ C_1 & , 1+D_1\end{pmatrix} = \prod_1^n {}_i\begin{pmatrix}1+m_i, & m_i\\ m_i & , 1+m_i\end{pmatrix}$$

avrà ciascun elemento A_1, B_1, C_1, D_1 superiore in valore assoluto all'elemento corrispondente A, B, C, D. Ora

$$\begin{pmatrix} 1+m_i, & m_i \\ m_i & , 1+m_i \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix},$$

quindi

$$\begin{pmatrix} 1+A_1, & B_1 \\ C_1 & , 1+D_1 \end{pmatrix} = \prod_1^n{}_i \left[\begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix} \right]$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \left\{ \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+2m_i, & 0 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \prod_1^n{}_i (1+2m_i), & 0 \\ 0 & , 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & , & 1 \\ -1/2 & , & 1/2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1+\frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i)-1\right) & , & \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i)-1\right) \\ \frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i)-1\right) & , & 1+\frac{1}{2}\left(\prod_1^n{}_i (1+2m_i)-1\right) \end{Bmatrix}.$$

2° Lemma. - *Se si hanno i due prodotti di sostituzioni*

$$U = S_n S_{n-1} \cdots S_2 S_1 = \prod_1^n{}_i S_i,$$

$$U' = S'_n S'_{n-1} \cdots S'_2 S'_1 = \prod_1^n{}_i S'_i,$$

avremo

$$UU'^{-1} = \prod_n^1{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1},$$

posto

$$T_i = \prod_{i+1}^n{}_s S_s \quad , \quad T_n = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha infatti

$$\prod_1^n{}_i S_i \left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_2^n{}_i S_i \cdot S_1 S_1'^{-1} \cdot \left(\prod_2^n{}'_i S'_i\right)^{-1} = T_1 (S_1 S_1'^{-1}) T_1^{-1} \prod_2^n{}_i S_i \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1},$$

e analogamente

$$\prod_2^n{}_i S_i \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_3^n{}_i S_i S_2 S_2'^{-1} \left(\prod_2^n{}_i S'_i\right)^{-1} = T_2 (S_2 S_2'^{-1}) T_2^{-1} \cdot \prod_3^n{}_i S_i \left(\prod_3^n{}_i S'_i\right)^{-1},$$

e così seguitando si ha

$$\prod_1^n S_i \left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1} = \prod_n^1{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}.$$

3° Lemma. - *Se le sostituzioni* S_i *sono inferiori a* m_i *e i loro determinanti sono superiori a* Δ_i, *mentre ciascuna* $S_i S_i'^{-1}$ *è minore di* ε_i, *la sostituzione*

$$UU'^{-1} = \left(\prod_1^n{}_i S_i\right)\left(\prod_1^n{}_i S'_i\right)^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{\prod_1^n{}_i \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{1+i}^n{}_s \left[\frac{(1+2m_s)^2}{\Delta_s}\right] \right\} - 1}{2}.$$

Per il lemma precedente, avremo

$$UU'^{-1} = \prod_n^1{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}.$$

Ora

$$S_i S_i'^{-1} \text{ è inferiore a } \varepsilon_i,$$

$$T_i \text{ è inferiore a } \frac{\prod_{1+i}^n{}_s (1+2m_s) - 1}{2},$$

$$\text{e det. } T_i > \prod_{1+i}^n{}_s \Delta_s,$$

quindi

$$T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1} \text{ sarà inferiore a } \varepsilon_i \frac{\prod_{1+i}^n{}_s (1+2m_s)^2}{\prod_{1+i}^n{}_s \Delta_s},$$

e finalmente

$$\prod_1^n{}_i T_i (S_i S_i'^{-1}) T_i^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{\prod_1^n{}_i \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{1+i}^n{}_s \left(\frac{(1+2m_s)^2}{\Delta_s}\right) \right\} - 1}{2}.$$

In particolare se $m_s < 1/2$, *avremo* $\Delta_s > 1 - 2m_s$ *e quindi* UU'^{-1} *sarà inferiore a*

$$\frac{\prod_1^n{}_i \left\{ 1 + 2\varepsilon_i \prod_{1+i}^n{}_s \frac{(1+2m_s)^2}{(1-2m_s)} \right\} - 1}{2}.$$

4° Lemma. - *Se* $S_i = \begin{pmatrix} 1+\alpha_i, & \beta_i \\ \gamma_i, & 1+\delta_i \end{pmatrix}$ *è inferiore ad* $m_i < 1/2n$ *e*

$$T_0 = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_1^n{}_i \alpha_i, & \sum_1^n{}_i \beta_i \\ \sum_1^n{}_i \gamma_i, & 1 + \sum_1^n{}_i \delta_i \end{Bmatrix}, \quad U = \prod_1^n{}_i S_i,$$

avremo che UT_0^{-1} *sarà inferiore a* $\dfrac{\prod_1^n{}_i \left\{ 1 + 4m\, m_i \left(\dfrac{1+2m}{1-2m}\right)^2 \right\} - 1}{2}$ *posto* $m = \sum_1^n{}_i m_i$.

Infatti, posto

$$T_i = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_{i+1}^{n} {}_s \alpha_s & , & \sum_{i+1}^{n} {}_s \beta_s \\ \sum_{i+1}^{n} {}_s \gamma_s & , & 1 + \sum_{i+1}^{n} {}_s \delta_s \end{Bmatrix} \quad , \quad T_n = \begin{pmatrix} 1 , 0 \\ 0 , 1 \end{pmatrix},$$

avremo

$$UT_0^{-1} = \prod_{1}^{n} {}_i (T_i S_i T_{i-1}^{-1}) .$$

Ora

$$T_i \text{ è inferiore a } \sum_{i+1}^{n} {}_s m_s ,$$

$$S_i \text{ è inferiore a } m_i ,$$

$$\text{det. } T_{i-1} \text{ è maggiore di } 1 - 2 \sum_{i}^{n} {}_s m_s ,$$

quindi

$T_i S_i T_{i-1}^{-1}$ sarà inferiore a

$$2\, m_i \sum_{i+1}^{n} m_s \left[\frac{1 + 2 \sum_{i}^{n} m_s}{1 - 2 \sum_{i}^{n} m_s} \right]^2 < 2\, m_i\, m \left(\frac{1 + 2\, m}{1 - 2\, m} \right)^2$$

e per conseguenza $U T_0^{-1}$ sarà inferiore a

$$\frac{\prod_{1}^{n} {}_i \left\{ 1 + 4\, m_i\, m \left(\frac{1 + 2\, m}{1 - 2\, m} \right)^2 \right\} - 1}{2} .$$

5° Lemma. - *Se si ha il prodotto*

$$P = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$$

con $a_1\, a_2 \cdots a_n$ *positive e*

$$a_1 < a < \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_{1}^{n} {}_i\, a_i \leqq l ,$$

avremo

$$1 < P < e^{l(1+a)} ,$$

e se

$$l(1 + a) < 1 ,$$

avremo

$$1 < P < 1 + 2\, l(1 + a) .$$

Prendendo i logaritmi si avrà

$$\log (1 + a_i) < a_i + a_i^2 ,$$

$$\sum_{1}^{n} {}_i \log (1 + a_i) < l + \sum_{1}^{n} {}_i\, a_i^2 < l\, (1 + a)$$

onde

$$1 < P < e^{l(1+a)} = 1 + \frac{l(1+a)}{1} + \frac{l^2(1+a)^2}{1\cdot 2} + \frac{l^3(1+a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

e se $l(1+a) < 1$, avremo

$$1 < P < 1 + l(1+a)\left(1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\right) < 1 + 2l(1+a).$$

Ciò premesso passiamo a studiare la condizione di integrabilità di una sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

di cui supporremo tutti gli elementi inferiori ad un dato valore m.

Dividiamo l'intervallo d'integrazione $(p \cdots q)$ negli n intervalli $h_1, h_2 \cdots h_n$ che potremo supporre tutti inferiori ad $h < 1/4m$. Poniamo $q - p = l > 0$.

Dal primo lemma risulta subito che tutti i possibili prodotti

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

si conserveranno inferiori ad un certo valore M.

Infatti ciascuna sostituzione

$$\begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

sarà inferiore ad $mh_i < mh < 1/4$ e quindi

$$\prod_1^n{}_i \begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

sarà inferiore a

$$\text{(A)}\qquad \frac{\prod_1^n{}_i (1 + 2mh_i) - 1}{2} < \frac{1}{2}\left(e^{2ml(1+2mh)} - 1\right) = M.$$

Consideriamo ora due suddivisioni diverse $h_1, h_2 \cdots h_n$ $(h_i < h < 1/4)$ e $h'_1, h'_2 \cdots h'_n$ $(h'_i < h' < 1/4m)$ e formiamo una terza suddivisione $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_r$, tale che i punti di divisione ad essa corrispondenti siano quelli della prima e della seconda suddivisione.

Se nell'intervallo h_i sono racchiusi gli intervalli $\rho_{s+1}, \rho_{s+2} \cdots \rho_{s+t}$, e se denotiamo con $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{\delta}_i$, valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ compresi fra il limite superiore ed inferiore di queste quantità in ρ_i, prendiamo a considerare le tre sostituzioni

$$S_i = \begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix},$$

$$T_i = \left\{\begin{matrix} 1 + \sum_1^t{}_g \bar{\alpha}_{g+s}\rho_{g+s} & , & \sum_1^t{}_g \bar{\beta}_{g+s}\rho_{g+s}\\ \sum_1^t{}_g \bar{\gamma}_{g+s}\rho_{g+s} & , & 1 + \sum_1^t{}_g \bar{\delta}_{g+s}\rho_{g+s}\end{matrix}\right\},$$

$$U_i = \prod_1^t{}_g \left\{\begin{matrix} 1 + \bar{\alpha}_{g+s}\rho_{g+s} & , & \bar{\beta}_{g+s}\rho_{g+s}\\ \bar{\gamma}_{g+s}\rho_{g+s} & , & 1 + \bar{\delta}_{g+s}\rho_{g+s}\end{matrix}\right\}.$$

Per il lemma 4° avremo che $U_i T_i^{-1}$ è inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{\prod_{1}^{i}{}_g\left(1+4m^2\rho_{g+s}h_i\left(\frac{1+2mh_i}{1-2mh_i}\right)^2\right)-1\right\},$$

onde per il lemma 5° (supponendo $mh < 1/8$) $U_i T_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{-1+e^{4m^2h^2\left(\frac{1+2mh_i}{1-2mh_i}\right)^2\left[1+4m^2\rho h_i\left(\frac{1+2mh_i}{1-2mh_i}\right)^2\right]}\right\}$$

essendo ρ la maggiore di tutte le $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_r$.

Si vede ora che per $mh < 1/8$ l'esponente che comparisce nella espressione precedente risulta minore di 1, quindi avremo che $U_i T_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$4m^2h_i^2\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2\left\{1+4m^2\rho h_i\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2\right\}.$$

Se D_i è l'oscillazione della sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ nell'intervallo h_i, avremo che T_i e S_i differiranno fra loro meno di $D_i h_i$, onde $T_i S_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$D_i h_i\left(\frac{1+2mh_i}{1-2mh_i}\right) < D_i h_i\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2$$

e perciò

$$U_i T_i^{-1} T_i S_i^{-1} = U_i S_i^{-1}$$

sarà inferiore a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &(D_i h_i + 4m^2h_i^2)\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2+16m^4h_i^3\rho\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^4\\ &+4m^2h_i^3\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^4\left\{1+4m^2\rho h_i\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2\right\}D_i = D_i h_i\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2+\varepsilon_i\end{aligned}\right.$$

e avremo evidentemente

$$\lim \Sigma_i \varepsilon_i = 0$$

quando le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tenderanno a zero.

Per il lemma 3° avremo

$$\left(\prod_{1}^{n}{}_i U_i\right)\left(\prod_{1}^{n}{}_i S_i\right)^{-1}$$

inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{\prod_{1}^{n}{}_i\left[1+\left\{2D_i h_i\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)^2+2\varepsilon_i\right\}\prod_{1}^{n}{}_s\left(\frac{(1+2mh_s)^2}{1-2mh_s}\right)\right]-1\right\}.$$

Ora

$$\prod_{1}^{n}{}_s\frac{(1+2mh_s)^2}{1-2mh_s}<\prod_{1}^{n}{}_s\left(\frac{1+2mh_s}{1-2mh_s}\right)^2<\left\{\prod_{1}^{n}{}_s\left(1+\frac{4mh_s}{1-2mh}\right)\right\}^2$$

e se $mh < 1/16$

$$(2)\qquad \prod_{1}^{n}{}_s\frac{(1+2mh_s)^2}{1-2mh}<e^{\frac{8ml}{1-2mh}\left(1+\frac{4mh}{1-2mh}\right)}<e^{\frac{2^{10}}{7^2}ml}=e^{Cml}=P,$$

onde

$$\left(\prod_1^n {}_i \mathrm{U}_i\right)\left(\prod_1^n {}_i \mathrm{S}_i\right)^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{Q}} - 1\right)$$

ove

$$\mathrm{Q} = \left(2\,\Sigma_i\,\mathrm{D}_i\,h_i\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right)^2 + 2\,\Sigma_i\,\varepsilon_i\right)\mathrm{P}\left\{1 + 2\,\mathrm{P}\left(\mathrm{D}h\left(\frac{1+2\,mh}{1-2\,mh}\right) + \varepsilon\right)\right\}$$

essendo ε la maggiore delle ε_i e D la maggiore delle D_i e supponendo che $\Sigma_i\,\mathrm{D}_i\,h_i$ coll'impiccolire delle h_i divenga inferiore ad $1/4$. Potremo porre

$$\mathrm{Q} = 2\,\mathrm{P}\Sigma_i\,\mathrm{D}_i\,h_i + \Sigma_i\,\eta_i$$

ed evidentemente $\Sigma_i\,\eta_i$ tenderà a zero coll'impiccolire indefinitamente delle h_i. Ne segue che

$$\prod_1^n {}_i \mathrm{S}_i \quad \text{e} \quad \prod_1^n {}_i \mathrm{U}_i = \prod_1^r {}_g \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_g\,\rho_g\,, & \bar{\beta}_g\,\rho_g \\ \bar{\gamma}_g\,\rho_g & ,\ 1 + \bar{\delta}_g\,\rho_g \end{Bmatrix}$$

differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,\mathrm{M}}{2}\right)\left(e^{2\,\mathrm{P}\Sigma_i\mathrm{D}_i h_i + \Sigma_i \eta_i} - 1\right).$$

Analogamente si vede che

$$\prod_1^{n'} {}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha'_i h'_i\,, & \beta'_i\,h'_i \\ \gamma'_i\,h'_i & ,\ 1 + \delta'_i\,h'_i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \prod_1^r {}_g \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_g\,\rho_g\,, & \bar{\beta}_g\,\rho_g \\ \bar{\gamma}_g\,\rho_g & ,\ 1 + \bar{\delta}_g\,\rho_g \end{Bmatrix}$$

(se mh' sarà inferiore a $1/16$) differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,\mathrm{M}}{2}\right)\left(e^{2\,\mathrm{P}\Sigma_i\mathrm{D}'_i h'_i + \Sigma_i \eta'_i} - 1\right)$$

ove D′ è l'oscillazione di $\begin{pmatrix}\alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta\end{pmatrix}$ entro h'_i e $\Sigma_i\,\eta'_i$ tende a zero colle h'_i. Dunque

$$\prod_1^n {}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i h_i\,, & \beta_i\,h_i \\ \gamma_i\,h_i & ,\ 1 + \delta_i\,h_i \end{pmatrix}\,, \quad \prod_1^{n'} {}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha'_i h'_i\,, & \beta'_i\,h'_i \\ \gamma'_i\,h'_i & ,\ 1 + \delta'_i\,h'_i \end{pmatrix}$$

differiranno fra loro meno di

$$\left(\frac{1+2\,\mathrm{M}}{2}\right)\left(e^{2\,\mathrm{P}\Sigma_i\mathrm{D}_i h_i + \Sigma_i \eta_i} - 2 + e^{2\,\mathrm{P}\Sigma_i\mathrm{D}_i h'_i + \Sigma_i \eta'_i}\right),$$

Se supponiamo

$$\lim \Sigma_i\,\mathrm{D}_i\,h_i = 0\,,$$

si potrà concludere, con identico ragionamento di quello che si segue pel caso della integrazione di una funzione, che esisterà un limite determinato e finito per

$$\prod_1^n {}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i\,h_i\,, & \beta_i\,h_i \\ \gamma_i\,h_i & ,\ 1 + \delta_i\,h_i \end{pmatrix}.$$

Analogamente si vedrebbe che esiste pure il limite del prodotto

$$\prod_n^1{}_i \begin{pmatrix} 1+\alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i \end{pmatrix}$$

quando le h_i tendono a zero, se si verifica la condizione

$$\lim \Sigma_i D_i h_i = 0.$$

Possiamo quindi enunciare quanto segue.

TEOREMA I. – *Se* D_i *denota la oscillazione della sostituzione finita*

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$$

nell'intervallo h_i *e se*

$$\lim \sum_1^n{}_i h_i D_i = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_i h_i = q - p$$

per l'impiccolire indefinito di tutte le h_i, *esisteranno e saranno finiti l'integrale destro e l'integrale sinistro della sostituzione* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ *nell'intervallo totale* $(p \cdots q)$ *ed in una porzione qualunque di questo intervallo.*

Come conseguenza si deduce:

Nel caso in cui $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ *sia sempre finita e continua o abbia un numero finito di punti di discontinuità essa sarà sempre integrabile tanto a destra quanto a sinistra.*

Perciò quando si tratterà di una sostituzione da integrarsi la supporremo sempre *finita e continua*, a meno che non si avverta esplicitamente il contrario.

3. TEOREMA II. – *Se* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ *è tale che* $\alpha + \delta = 0$ *le sostituzioni*

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \int_p^q$$

qualunque sia l'intervallo $(p \cdots q)$ *saranno a determinante eguale all'unità.*

Avremo infatti

$$\text{Det.} \begin{pmatrix} 1+\alpha_i h_i, & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i \end{pmatrix} = 1 + (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i) h_i^2$$

supponendo di prendere i valori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \delta_i$ nello stesso punto dell'intervallo h_i.

Ora, poiché supponiamo $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ finita e continua

$$\lim \prod_1^n{}_i [1 + (\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i) h_i^2] = 1$$

supponendo di fare impiccolire indefinitamente le h_i.

4. La proprietà associativa del prodotto di sostituzioni ci conduce immediatamente al teorema.

TEOREMA III. – *Se r è un punto intermedio fra p e q,*

$$\int_p^q \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \int_r^q \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \cdot \int_p^r \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx .$$

Analogamente a quanto si fa per la integrazione delle funzioni, si può estendere il concetto di integrazione di una sostituzione ad un intervallo negativo. Se $q > p$, supposto diviso l'intervallo $(p \cdots q)$ a cominciare da p negli intervalli $h_1, h_2 \cdots h_n$ si intenderà per $\int_q^p \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx$ il

$$\lim \prod_n^1{}_i \begin{pmatrix}1 - \alpha_i h_i, & -\beta_i h_i\\ -\gamma_i h_i & , 1 - \delta_i h_i\end{pmatrix}$$

per le $h_1, h_2 \cdots h_n$ tendenti a zero. Se $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ corrispondono allo stesso valore di x e se $\alpha_i + \delta_i = 0$, e $\Delta_i = \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i$, avremo

$$\prod_n^1{}_i \begin{pmatrix}1 - \alpha_i h_i, & -\beta_i h_i\\ -\gamma^i h^i & , 1 - \delta_i h_i\end{pmatrix} = \left[\prod_1^n{}_i \begin{Bmatrix}\dfrac{1 + \alpha_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} & , & \dfrac{\beta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2}\\ \dfrac{\gamma_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} & , & \dfrac{1 + \delta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2}\end{Bmatrix}\right]^{-1}.$$

Ora

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{1 + \alpha_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} & , & \dfrac{\beta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2}\\ \dfrac{\gamma_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2} & , & \dfrac{1 + \delta_i h_i}{1 + \Delta_i h_i^2}\end{Bmatrix}$$

differisce da $\begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}$ per infinitesimi d'ordine superiore ad h_i, quindi per il Lemma 3° dell'Art. 2°, avremo

$$\lim \prod_n^1{}_i \begin{pmatrix}1 - \alpha_i h_i, & -\beta_i h_i\\ -\gamma_i h_i & , 1 - \delta_i h_i\end{pmatrix} = \left\{\lim \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix}1 + \alpha_i h_i, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i\end{pmatrix}\right\}^{-1}.$$

In tal modo si ottiene la formula

$$(3) \qquad \int_q^p \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \left\{\int_p^q \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx\right\}^{-1} = \begin{pmatrix}-\alpha, -\beta\\ -\gamma, -\delta\end{pmatrix} dx \int_p^q$$

e la formula del teorema precedente viene così a valere anche se r non è intermedio fra p e q.

5. Sia $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ $(\alpha + \delta = 0)$ una sostituzione finita e continua nell'intervallo $(p \cdots q)$ e sia x un punto intermedio fra p e q. Se consideriamo le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix} = \int_x^p \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix}a' , b' \\ c' , d'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \int_x^p$$

esse potranno considerarsi come sostituzioni funzioni di x.

Per esse vale il teorema seguente:

TEOREMA IV. – *Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione* (som. $= 0$) *sono sostituzioni continue* (det. 1) *del loro limite superiore; la derivata sinistra dell'integrale sinistro e la derivata destra dell'integrale destro rispetto al limite superiore sono eguali alla sostituzione che si integra.*

1° Che gli integrali destro e sinistro abbiano il det. eguale ad 1 risulta dal teorema secondo.

2° Per dimostrare che gli integrali sono continui, supponiamo che la sostituzione da integrarsi sia $\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}$ (i cui elementi supporremo inferiori a m).

Posto

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix} = \int_p^x \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix},$$

avremo

$$\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}_x^{-1} = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx .$$

Ora per la formula (A) dell'art. 2°, avremo che

$$\int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx$$

sarà inferiore a $1/2\ (e^{2m\cdot\Delta x (1+2m\cdot\Delta x)} - 1)$.

Ciò dimostra la continuità di $\begin{pmatrix}a , b \\ c , d\end{pmatrix}$.

Analogamente si vedrebbe verificata la stessa proprietà per l'integrale destro.

È evidente che per dimostrare la continuità degli integrali non è necessario supporre la continuità nella sostituzione da integrarsi.

3° Dalla formula (1) dell'Art. 2°, posto

$$S_i = \begin{pmatrix}1 + \alpha_x \cdot \Delta x , & \beta_x \cdot \Delta x \\ \gamma_x \cdot \Delta x & , 1 + \delta_x \cdot \Delta x\end{pmatrix} \quad , \quad U_i = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx$$

e chiamando D l'oscillazione di $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ nell'intervallo Δx, si deduce che $U_i S_i^{-1}$ sarà inferiore a

$$(D \cdot \Delta x + 4\, m^2 \cdot \Delta x^2)\left(\frac{1 + 2\, m \cdot \Delta x}{1 - 2\, m \cdot \Delta x}\right)^2 + 4\, m^2 \cdot \Delta x^3 \left(\frac{1 + 2\, m \cdot \Delta x}{1 - 2\, m\, \Delta x}\right)^2 D = \varepsilon$$

supponendo $m \cdot \Delta x > 1/4$. Quindi U_i e S_i differiranno fra loro meno di

$$(1 + 2\, m\, \Delta x)\, \varepsilon = \eta\,.$$

Potremo dunque porre (essendo $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ numeri compresi fra $+1$ e -1)

$$\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}_{x+\Delta x} \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}_x^{-1} = \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}1 + \alpha_x \cdot \Delta x + \eta\theta_1\,, & \beta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_2\\ \gamma_x \cdot \Delta x + \eta\theta_3\,, & 1 + \delta_x\, \Delta x + \eta\theta_4\end{pmatrix}.$$

Ora per Δx tendente a zero

$$\lim \frac{\eta}{\Delta x} = 0,$$

quindi

$$\lim \begin{Bmatrix}\dfrac{\alpha_x \cdot \Delta x + \eta\theta_1}{\Delta x}\,, & \dfrac{\beta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_2}{\Delta x}\\[2ex] \dfrac{\gamma_x \cdot \Delta x + \eta\theta_3}{\Delta x}\,, & \dfrac{\delta_x \cdot \Delta x + \eta\theta_4}{\Delta x}\end{Bmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_x, \beta_x\\ \gamma_x, \delta_x\end{pmatrix}$$

come dovevasi dimostrare.

Analogamente si opererebbe per la derivata destra dell'integrale destro.

TEOREMA V. - *La condizione necessaria e sufficiente affinché una sostituzione continua* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ *sia derivata di una sostituzione* (det. 1) *è che sia* $\alpha + \delta = 0$.

(Vedasi il teorema IV del § 1).

TEOREMA VI. - *Abbiasi* $\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}$ (det. 1) *e*

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix},$$

si avrà

$$\int_p^q \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}_q \begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}_p^{-1}$$

supponendo $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ *continua.*

Infatti, posto

$$\int_p^x \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix},$$

avremo

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}A, B\\ C, D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \frac{d}{dx}\begin{pmatrix}a, b\\ c, d\end{pmatrix}$$

quindi, per il teorema XIII del § precedente, sarà

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_x S. \tag{4}$$

essendo S una sostituzione costante. Segue che

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_q \cdot S;$$

ma per $x = p$ la (4) diviene

$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_p \cdot S,$$

quindi

$$S = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_p^{-1},$$

onde

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}_p^{-1}.$$

6. Teorema VII. – *Se* $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$ *è costante e* $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (som. $= 0$) *è funzione di* x, *si avrà*

$$\int_p^q \left\{ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} dx = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

vale a dire l'integrale della trasformata di una sostituzione è eguale alla trasformata dell'integrale, se la sostituzione trasformatrice è costante.

Infatti, pel teorema VIII del § 1, posto

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

si avrà

$$\frac{d}{dx} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

quindi

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \right\}_q \left\{ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} \right\}_p^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}_p^{-1} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix},$$

come si doveva dimostrare.

TEOREMA VIII. - *Abbiansi le due sostituzioni variabili*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} (\text{som.} = 0) \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} (\text{det.} = 1).$$

Avremo

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_q^{-1} \left[\int_p^q \left\{ \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} + \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} dx \right] \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p,$$

vale a dire, se

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi, \chi \\ \rho, \theta \end{pmatrix},$$

$$\int_p^q \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_q^{-1} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p.$$

Poniamo

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_x^{-1} \left\{ \int_p^x \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} dx \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}_p.$$

Pel teorema X, § 1, avremo

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} a+\pi, b+\chi \\ c+\rho, d+\theta \end{pmatrix} - \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}.$$

Se facciamo poi $x = p$, si avrà

$$\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix};$$

il teorema è quindi dimostrato.

7. La regola che daremo in questo articolo presenta analogia con quella della *integrazione per parti*.

Abbiasi da calcolare

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dx = \int_p^x \begin{pmatrix} \alpha+\alpha_1, \beta+\beta_1 \\ \gamma+\gamma_1, \delta+\delta_1 \end{pmatrix} dx.$$

Basterà eseguire

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix},$$

poi

$$\int_p^x \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, d_1 \end{pmatrix}$$

e avremo

$$\int_p^x \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix} .$$

Per dimostrare la regola precedente osserviamo che si ha (Teorema IX, § 1)

$$d \left\{ \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ d \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \left\{ d \begin{pmatrix} a_1 , b_1 \\ c_1 , d_1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \begin{pmatrix} \alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1 \end{pmatrix} dx .$$

8. Fino ad ora abbiamo considerato gli integrali come funzioni dei loro limiti superiori.

Riguardiamo invece

$$\int_x^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \int_x^q \quad , \quad (\alpha + \delta = 0)$$

come funzioni del loro limite inferiore x.

Si otterrà il teorema seguente:

TEOREMA IX. – *Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione* (som. $= 0$) *sono funzioni continue del loro limite inferiore; la derivata destra dell'integrale sinistro e la derivata sinistra dell'integrale destro rispetto al limite inferiore sono eguali alla sostituzione che si ottiene cambiando di segno tutti gli elementi della sostituzione integrata.*

1° La continuità si dimostra del tutto similmente alla analoga proprietà contenuta nel teorema IV.

2° Sia $\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}$ la sostituzione da integrarsi. Si ponga

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x = \int_x^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx .$$

Avremo

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} = \int_{x+\Delta x}^q \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx ,$$

e quindi

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} \cdot \int_x^{x+\Delta x} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx$$

e

$$\int_{x+\Delta x}^x \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_x^{-1} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}_{x+\Delta x} .$$

Ora si vede facilmente che

$$\int_{x+\Delta x}^{x}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix}1-\alpha\cdot\Delta x+\eta_1, & -\beta\cdot\Delta x+\eta_2 \\ -\gamma\cdot\Delta x+\eta_3, & 1-\delta\cdot\Delta x+\eta_4\end{pmatrix},$$

con

$$\lim \frac{\eta_i}{\Delta x} = 0 \quad \text{per} \quad \Delta x = 0,$$

quindi

$$\begin{pmatrix}-\alpha, -\beta \\ -\gamma, -\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}\frac{d}{dx}.$$

Analogamente si ha

$$\frac{d}{dx}\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \int_{x}^{q}\right\} = \begin{pmatrix}-\alpha, -\beta \\ -\gamma, -\delta\end{pmatrix};$$

come dovevasi dimostrare

Del resto il teorema poteva dedursi direttamente dalla formula (3).

9. Abbiasi una sostituzione continua $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (som. 0). Tutte le sostituzioni che hanno per derivata sinistra $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ potranno porsi sotto la forma

$$S = \int_{p}^{x}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \cdot \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}$$

essendo $\begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}$ *una sostituzione costante arbitraria* (det. 1). La sostituzione S la chiameremo *l'integrale indefinito sinistro* o semplicemente *l'integrale sinistro di* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$.

Analogamente tutte le sostituzioni la cui derivata destra è $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ potranno porsi so to la forma

$$S_1 = \begin{pmatrix}a, b \\ c, d\end{pmatrix}\cdot\left\{\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx \int_{p}^{x}\right\}$$

e S_1 si chiamerà *l'integrale indefinito destro* o *l'integrale destro di* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$.

10. TEOREMA X. – *Se si ha* $y = \varphi(x)$, $(\alpha + \delta = 0)$, *avremo*

$$\int_{y}^{y_1}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dy = \int_{x_0}^{x_1}\begin{pmatrix}\alpha\varphi'(x), & \beta\varphi'(x) \\ \gamma\varphi'(x), & \delta\varphi'(x)\end{pmatrix} dx,$$

in cui

$$y_0 = \varphi(x_0) \quad , \quad y_1 = \varphi(x_1).$$

Infatti, se $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ (det. $= 1$) ha per derivata a sinistra, rispetto ad y, $\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}$, avremo (Art. 9°, § 1°)

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\varphi'(x), & \beta\varphi'(x) \\ \gamma\varphi'(x), & \delta\varphi'(x) \end{pmatrix}$$

il che dimostra il teorema.

TEOREMA XI. - *Se tutti gli elementi della sostituzione*

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \quad , \quad (\alpha + \delta = 0)$$

diventano infiniti per $x = x_1$ soltanto, e di ordine inferiore ad un numero minore di 1, si avrà che

$$\lim_{x = x_1} \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx$$

esisterà e sarà finito.

Supponiamo infatti che $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, divengano per $x = x_1$ infiniti di ordine non superiore a $1 - \varepsilon$. Posto

$$\alpha = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\alpha_1,$$
$$\beta = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\beta_1,$$
$$\gamma = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\gamma_1,$$
$$\delta = (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\delta_1,$$

avremo che $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ saranno sempre finiti per tutti i valori di x, anche per $x = x_1$.

Essi saranno inoltre continui e si avrà

$$\alpha_1 + \delta_1 = 0.$$

Avremo

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\alpha_1, & (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\beta_1 \\ (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\gamma_1, & (x - x_1)^{-1+\varepsilon}\,\delta_1 \end{pmatrix} dx.$$

Poniamo

$$x - x_1 = (\varepsilon z)^{1/\varepsilon},$$

si avrà

$$z = \frac{1}{\varepsilon}(x - x_1)^{\varepsilon},$$

$$\frac{dx}{dz} = (x - x_1)^{1-\varepsilon},$$

$$z_0 = \frac{1}{\varepsilon}(x_0 - x_1)^{\varepsilon};$$

quindi pel teorema precedente

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} dx = \int_{z_0}^{z} \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} dz.$$

Ma al limite

$$\lim_{\tau=0} \int_{z_0}^{z} \begin{pmatrix} \alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1 \end{pmatrix} dz = \int_{z_0}^{0} \begin{pmatrix} \alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1 \end{pmatrix} dz$$

sostituzione determinata e finita. Ne segue che esisterà il limite determinato e finito di

$$\int_{x_0}^{x} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx \qquad \text{per} \quad x = x_1$$

come si voleva dimostrare

Questo limite si chiamerà *l'integrale fra* x_0 e x_1 *di* $\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix}$ e si scriverà col simbolo

$$\int_{x_0}^{x_1} \begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} dx.$$

11. Diamo finalmente un teorema di cui vedremo in seguito le conseguenze (Parte 2ª).

TEOREMA XII. - *Se si hanno le due sostituzioni*

$$\begin{Bmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{Bmatrix} (\text{som.} = 0) \quad , \quad \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} , \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} , \bar{\delta} \end{Bmatrix} (\text{som.} = 0),$$

le quali differiscono fra loro meno di ε; *e se* $\alpha , \beta , \gamma , \delta , \alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1 , \delta_1$, *sono inferiori ad* m, *avremo che*

$$\int_{p}^{q} \begin{Bmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{Bmatrix} dx \qquad \text{e} \qquad \int_{p}^{q} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha} , \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} , \bar{\delta} \end{Bmatrix} dx$$

differiranno fra loro meno di

$$\frac{1}{2} e^{ml} \{ e^{2\varepsilon l P} - 1 \}$$

con $P = e^{Cml}$ *e* C *è un numero indipendente dalle sostituzioni date.*

Diviso $(p \cdots q)$, $(q - p = l)$, negli intervalli $h_1 , h_2 \cdots h_n$, avremo che

$$\begin{Bmatrix} 1 + \alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_i h_i , & \bar{\beta}_i h_i \\ \bar{\gamma}_i h_i & 1 + \bar{\delta}_i h_i \end{Bmatrix}^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\varepsilon h_i \left(\frac{1 + 2 m h_i}{1 - 2 m h_i} \right)$$

onde per il Lemma 3°, avremo che

$$(5) \qquad \prod_{1}^{n}{}_i \begin{Bmatrix} 1 + \alpha_i h_i , & \beta_i h_i \\ \gamma_i h_i & , 1 + \delta_i h_i \end{Bmatrix} \cdot \left[\prod_{1}^{n}{}_i \begin{Bmatrix} 1 + \bar{\alpha}_i h_i , & \bar{\beta}_i h_i \\ \bar{\gamma}_i h_i & , 1 + \bar{\delta}_i h_i \end{Bmatrix} \right]^{-1}$$

sarà inferiore a

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\prod_1^n{}_i\left\{1 + 2\varepsilon h_i\left(\frac{1+2mh_i}{1-2mh_i}\right)\prod_1^n{}_i\left(\frac{(1+2mh_i)^2}{1-2mh_i}\right)\right\} - 1\right]$$

supposte le h_i sufficientemente piccole.

Ma per la formula (2) Art. 2°

$$\prod_1^n{}_i\frac{(1+2mh_i)^2}{1-2mh_i} < \mathrm{P} = e_i^{\mathrm{C}ml}$$

quindi μ sarà inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{e^{2\varepsilon l\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)\mathrm{P}\alpha} - 1\right\},$$

ove

$$\alpha = 1 + 2\varepsilon h\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)\mathrm{P},$$

essendo h la maggiore delle h_i. Ne segue, poiché ciascuno dei due prodotti (5) è inferiore a $(e^{2ml(1+2mh)} - 1)/2$, che

$$\prod_1^n{}_i\left\{\begin{matrix}1+\alpha_i h_i\,, & \beta_i h_i\\ \gamma_i h_i & , 1+\delta_i h_i\end{matrix}\right\} \quad \text{e} \quad \prod_1^n{}_i\left\{\begin{matrix}1+\bar{\alpha}_i h_i\,, & \bar{\beta}_i h_i\\ \bar{\gamma}_i h_i & , 1+\bar{\delta}_i h_i\end{matrix}\right\}$$

differiranno meno di

$$\frac{1}{2}e^{2ml(1+2mh)}\left\{e^{2\varepsilon l\left(\frac{1+2mh}{1-2mh}\right)\mathrm{P}\alpha} - 1\right\}.$$

Al limite coll'impiccolire indefinito delle h_i risulta che

$$\int_p^q\left\{\begin{matrix}\alpha\,, & \beta\\ \gamma\,, & \delta\end{matrix}\right\}dx \quad \text{e} \quad \int_p^q\left\{\begin{matrix}\bar{\alpha}\,, & \bar{\beta}\\ \bar{\gamma}\,, & \bar{\delta}\end{matrix}\right\}dx$$

differiranno fra loro meno di

$$\frac{1}{2}e^{2ml}\left\{e^{2\varepsilon l\mathrm{P}} - 1\right\}.$$

§ 3. - Sulle sostituzioni a più variabili. - Differenziali totali. - Derivate successive di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione i cui elementi sono funzioni di più variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$, diremo che *la sostituzione è funzione di quelle variabili.* Se gli elementi sono continui separatamente rispetto a ciascuna variabile, chiameremo *la sostituzione continua separatamente* rispetto alle diverse variabili. Finalmente, se tutti gli elementi possiederanno la continuità assoluta rispetto alle n variabili, esprimeremo questa proprietà dicendo che *la sostituzione è continua assolutamente.*

Non enuncio le proprietà delle sostituzioni continue separatamente rispetto alle variabili e continue assolutamente per la loro analogia colle proprietà simili delle funzioni.

2. Sia $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$ (det. 1) una sostituzione funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e supponiamo che gli elementi ammettano le derivate parziali determinate e finite rispetto a tutte le variabili.

Dati alle variabili gli accrescimenti infinitesimi $dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$, consideriamo la sostituzione

$$\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}_{x_1+dx_1, x_2+dx_2, \cdots, x_n+dx_n} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}^{-1}_{x_1, x_2 \cdots x_n}.$$

Trascurando infinitesimi d'ordine superiore a $dx_1, \cdots, dx_n$, avremo che il prodotto precedente potrà scriversi sotto una delle forme seguenti:

$$\text{(I)} \qquad \begin{pmatrix} 1 + D dA - C dB , & A dB - B dA \\ D dC - C dD , & 1 + A dD - B dC \end{pmatrix}$$

$$\text{(II)} \qquad = \begin{Bmatrix} 1 + \sum_1^n{}_i \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i} \right) dx_i , & \sum_1^n{}_i \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i} \right) dx_i \\ \sum_1^n{}_i \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i} \right) dx_i , & 1 + \sum_1^n{}_i \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i} \right) dx_i \end{Bmatrix}$$

$$\text{(III)} \qquad = \prod_1^n{}_i \begin{Bmatrix} 1 + \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i} \right) dx_i , & \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i} \right) dx_i \\ \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i} \right) dx_i , & 1 + \left(A \frac{dD}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i} \right) dx_i \end{Bmatrix}.$$

L'ultima di queste eguaglianze è vera soltanto a meno di infinitesimi di ordine superiore.

Le tre precedenti sostituzioni le denoteremo col simbolo

$$d \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$$

e le chiameremo il *differenziale totale sinistro di* $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$.

La sostituzione

$$\text{(IV)} \qquad \begin{Bmatrix} \left(D \frac{dA}{dx_i} - C \frac{dB}{dx_i} \right) , & \left(A \frac{dB}{dx_i} - B \frac{dA}{dx_i} \right) \\ \left(D \frac{dC}{dx_i} - C \frac{dD}{dx_i} \right) , & \left(A \frac{dD}{dx_i} - B \frac{dC}{dx_i} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{dA}{dx_i} , & \frac{dB}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_i} , & \frac{dD}{dx_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A , B \\ C , D \end{Bmatrix}^{-1}$$

la chiameremo la *derivata parziale sinistra di* $\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}$ *rispetto ad* x_i *e la denoteremo col simbolo*

$$\frac{d}{dx_i} \begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix}.$$

Finalmente la sostituzione

$$(\mathrm{V})\qquad \begin{pmatrix} 1+\left(D\dfrac{dA}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right)dx_i & , & \left(A\dfrac{dB}{dx_i}-B\dfrac{dA}{dx_i}\right)dx_i \\ \left(D\dfrac{dC}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right)dx_i & , & 1+\left(A\dfrac{dD}{dx_i}-B\dfrac{dC}{dx_i}\right)dx_i \end{pmatrix}$$

si chiamerà il *differenziale parziale sinistro rispetto ad* x_i e si indicherà col simbolo

$$(\mathrm{VI})\qquad d_{x_i}\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} = \frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} dx_i .$$

Avremo la formula fondamentale

$$(\mathrm{VII})\qquad d\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} = \prod_1^n {}_i \frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} dx_i .$$

Analoghe definizioni e formule pure analoghe si avrebbero per i *differenziali destri.*

3. Supponiamo ora che gli elementi della sostituzione

$$\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} \text{(det. 1)}$$

oltre alle derivate prime posseggano ancora le derivate seconde. Si formi il differenziale primo sinistro della sostituzione, avremo

$$d\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + DdA - CdB , & AdB - BdA \\ DdC - CdD & , 1 + AdD - BdC \end{pmatrix}.$$

Formiamo ora il differenziale sinistro di questo differenziale primo. Se si trascureranno infinitesimi d'ordine superiore al secondo, otterremo

$$\begin{pmatrix} 1 + d(DdA - CdB) , & d(AdB - BdA) \\ d(DdC - CdD) & , 1 + d(AdD - BdC) \end{pmatrix}.$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti se si fosse determinato (a meno d'infinitesimi d'ordine superiore al secondo) il differenziale destro del differenziale primo sinistro; avremo quindi *un solo differenziale secondo sinistro,* come pure si potrebbe analogamente ottenere *un solo differenziale secondo destro.*

Si scriverà

$$d^2\begin{pmatrix} A , B \\ C , D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + d(DdA - CdB) , & d(AdB - BdA) \\ d(DdC - CdD) & , 1 + d(AdD - BdC) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + Dd^2 A - Cd^2 B + dDdA - dCdB , & Ad^2 B - Bd^2 A \\ Dd^2 C - Cd^2 D & , 1 + Ad^2 D - Bd^2 C + dAdD - dBdC \end{pmatrix}.$$

Ora

$$AD - BC = 1.$$

Differenziando si ottiene

$$AdD + DdA - BdC - CdB = 0\,;$$

$$2\,(dA\,dD - dB\,dC) = Bd^2C + Cd^2B - Ad^2D - Dd^2A\,;$$

$$dA\,dD - dB\,dC + Dd^2A - Cd^2B = \frac{1}{2}\,(Bd^2C - Ad^2D - Cd^2B + Dd^2A)\,;$$

$$dA\,dD - dB\,dC + Ad^2D - Bd^2C = \frac{1}{2}\,(Cd^2B - Dd^2A + Ad^2D - Bd^2C)\,;$$

quindi avremo ancora

$$d^2\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}(Bd^2C - Ad^2D - Cd^2B + Dd^2A)\,, & (Ad^2B - Bd^2A) \\ (Dd^2C - Cd^2D) & ,\ 1 + \frac{1}{2}(Cd^2B - Dd^2A - Bd^2C + Ad^2D)\end{matrix}\right\}.$$

4. Supponiamo $\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix}$ funzione della sola variabile x, avremo

$$d^2\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (DA'' - CB'' + D'A' - C'B')\,dx^2\,, & (AB'' - BA'')\,dx^2 \\ (DC'' - CD'')\,dx^2 & ,\ 1 + (AD'' - BC'' + A'D' - B'C')\,dx^2\end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}(BC'' - AD'' - CB'' + DA'')\,dx^2 & , & (AB'' - BA'')\,dx^2 \\ (DC'' - CD'')\,dx^2 & , & 1 + \frac{1}{2}(CB'' - DA'' - BC'' + AD'')\,dx^2\end{matrix}\right\}.$$

Porremo

$$\frac{d^2}{dx^2}\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}(BC'' - AD'' - CB'' + DA'')\,, & (AB'' - BA'') \\ (DC'' - CD'') & ,\ \frac{1}{2}(CB'' - DA'' - BC'' + AD'')\end{matrix}\right\}$$

e chiameremo questa sostituzione la *derivata seconda a sinistra* di $\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix}$ rispetto ad x.

5. Supponiamo ora $\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix}$ funzione di n variabili $x_1\,, x_2 \cdots x_n$. Poniamo

$$\frac{d^2}{dx_c^2}\begin{pmatrix}A\,, & B\\ C\,, & D\end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{matrix} \frac{1}{2}\left(B\frac{d^2C}{dx_c^2} - C\frac{d^2B}{dx_c^2} + D\frac{d^2A}{dx_c^2} - A\frac{d^2D}{dx_c^2}\right)\,, & \left(A\frac{d^2B}{dx_c^2} - B\frac{d^2A}{dx_c^2}\right) \\ \left(D\frac{d^2C}{dx_c^2} - C\frac{d^2D}{dx_c^2}\right) & ,\ \frac{1}{2}\left(C\frac{d^2B}{dx_c^2} - B\frac{d^2C}{dx_c^2} + A\frac{d^2D}{dx_c^2} - D\frac{d^2A}{dx_c^2}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} D\frac{d^2A}{dx_c^2} - C\frac{d^2B}{dx_c^2} + \frac{dD}{dx_c}\frac{dA}{dx_c} - \frac{dC}{dx_c}\frac{dB}{dx_c}\,, & A\frac{d^2B}{dx_c^2} - B\frac{d^2A}{dx_c^2} \\ D\frac{d^2C}{dx_c^2} - C\frac{d^2D}{dx_c^2} & ,\ A\frac{d^2D}{dx_c^2} - B\frac{d^2C}{dx_c^2} + \frac{dA}{dx_c}\frac{dD}{dx_c} - \frac{dB}{dx_c}\frac{dC}{dx_c}\end{matrix}\right\};$$

$$\frac{d^2}{d(x_r x_s)} = \frac{d^2}{d(x_s x_r)}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\left(B\frac{d^2 C}{dx_r dx_s} - C\frac{d^2 B}{dx_r dx_s} + D\frac{d^2 A}{dx_r dx_s} - A\frac{d^2 D}{dx_r dx_s}\right), & \left(A\frac{d^2 B}{dx_r dx_s} - B\frac{d^2 A}{dx_r dx_s}\right) \\ \left(D\frac{d^2 C}{dx_r dx_s} - C\frac{d^2 D}{dx_r dx_s}\right) & , \frac{1}{2}\left(C\frac{d^2 B}{dx_r dx_s} - B\frac{d^2 C}{dx_r dx_s} + A\frac{d^2 D}{dx_r dx_s} - D\frac{d^2 A}{dx_r dx_s}\right) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} D\frac{d^2 A}{dx_r dx_s} - C\frac{d^2 B}{dx_r dx_s} + \frac{1}{2}\left(\frac{dD}{dx_r}\frac{dA}{dx_s} + \frac{dD}{dx_s}\frac{dA}{dx_r} - \frac{dC}{dx_r}\frac{dB}{dx_s} - \frac{dC}{dx_s}\frac{dB}{dx_r}\right) & , A\frac{d^2 B}{dx_s dx_r} - B\frac{d^2 A}{dx_r dx_s} \\ D\frac{d^2 C}{dx_r dx_s} - C\frac{d^2 D}{dx_r dx_s} & , A\frac{d^2 D}{dx_r dx_s} - B\frac{d^2 C}{dx_r dx_s} + \frac{1}{2}\left(\frac{dA}{dx_r}\frac{dD}{dx_s} - \frac{dB}{dx_r}\frac{dC}{dx_s} + \frac{dA}{dx_s}\frac{dD}{dx_r} - \frac{dB}{dx_s}\frac{dC}{dx_r}\right) \end{Bmatrix}$$

Adottiamo inoltre i simboli

$$\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx_i^2 \quad \text{e} \quad 2\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx_i\, dx_s$$

per denotare le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha dx_i^2 , & \beta dx_i^2 \\ \delta dx_i^2 & , 1 + \delta dx_i^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha dx_i dx_s , & 2\beta dx_i dx_s \\ 2\gamma dx_i dx_s & , 1 + 2\delta dx_i dx_s \end{pmatrix}.$$

Potremo scrivere

$$(1) \qquad d^2\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \prod_1^n{}_c \frac{d^2}{dx_c^2}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_c^2 \cdot \prod{}_{i,s} 2\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i\, dx_s .$$

La formula (1) ci dà l'espressione generale del differenziale secondo della sostituzione $\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix}$.

Ora

$$(2) \qquad \frac{d^2}{dx_i^2}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i^2 = d_{x_i}^2 \begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix},$$

cioè *il primo membro non è altro che il differenziale secondo della sostituzione quando si suppone variabile la sola x_i e le rimanenti x_s si suppongano costanti.*

Consideriamo invece

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} dx_i\, dx_s ;$$

è facile vedere che *essa non è eguale in generale al differenziale che si ottiene differenziando successivamente la sostituzione rispetto alle due variabili x_i* e x_s.

Infatti si avrà

$$d_{x_s} \cdot d_{x_i}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{d}{dx_s}\left(D\frac{dA}{dx_i} - C\frac{dB}{dx_i}\right) dx_i\, dx_s , & \frac{d}{dx_s}\left(A\frac{dB}{dx_i} - B\frac{dA}{dx_i}\right) dx_i\, dx_s \\ \frac{d}{dx_s}\left(D\frac{dC}{dx_i} - C\frac{dD}{dx_i}\right) dx_i\, dx_s & , 1 + \frac{d}{dx_s}\left(A\frac{dD}{dx_i} - B\frac{dC}{dx_i}\right) dx_i\, dx_s \end{Bmatrix},$$

$$d_{x_i} \cdot d_{x_s}\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + \frac{d}{dx_i}\left(D\frac{dA}{dx_s} - C\frac{dB}{dx_s}\right) dx_i\, dx_s , & \frac{d}{dx_i}\left(A\frac{dB}{dx_s} - B\frac{dA}{dx_s}\right) dx_i\, dx_s \\ \frac{d}{dx_i}\left(D\frac{dC}{dx_s} - C\frac{dD}{dx_s}\right) dx_i\, dx_s & , 1 + \frac{d}{dx_i}\left(A\frac{dD}{dx_s} - B\frac{dC}{dx_s}\right) dx_i\, dx_s \end{Bmatrix}$$

Porremo

$$\frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d}{dx_s}\left(D\dfrac{dA}{dx_i}-C\dfrac{dB}{dx_i}\right) & , & \dfrac{d}{dx_s}\left(A\dfrac{dB}{dx_i}-B\dfrac{dA}{dx_i}\right)\\ \dfrac{d}{dx_s}\left(D\dfrac{dC}{dx_i}-C\dfrac{dD}{dx_i}\right) & , & \dfrac{d}{dx_s}\left(A\dfrac{dD}{dx_i}-B\dfrac{dC}{dx_i}\right)\end{matrix}\right\},$$

$$\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d}{dx_i}\left(D\dfrac{dA}{dx_s}-C\dfrac{dB}{dx_s}\right) & , & \dfrac{d}{dx_i}\left(A\dfrac{dB}{dx_s}-B\dfrac{dA}{dx_s}\right)\\ \dfrac{d}{dx_i}\left(D\dfrac{dC}{dx_s}-C\dfrac{dD}{dx_s}\right) & , & \dfrac{d}{dx_i}\left(A\dfrac{dD}{dx_s}-B\dfrac{dC}{dx_s}\right)\end{matrix}\right\}$$

e avremo in generale che

$$\frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}\neq\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}\neq\frac{d^2}{d(x_i\,x_s)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\frac{d^2}{d(x_s\,x_i)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}.$$

Nel nostro caso quindi non vale la *legge di permutabilità* nella derivazione, né la legge di formazione del differenziale secondo analoga a quella per le funzioni.

6. È utile per il seguito vedere le relazioni che passano tra le diverse derivate seconde di $\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}$ rispetto a x_i e x_s.

Poniamo

$$\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_i\,,\beta_i\\\gamma_i\,,\delta_i\end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_s\,,\beta_s\\\gamma_s\,,\delta_s\end{pmatrix}.$$

Avremo

$$\frac{d}{dx_s}\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_i}{dx_s}\,, & \dfrac{d\beta_i}{dx_s}\\ \dfrac{d\gamma_i}{dx_s}\,, & \dfrac{d\delta_i}{dx_s}\end{matrix}\right\},\tag{3}$$

$$\frac{d}{dx_i}\frac{d}{dx_s}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_s}{dx_i}\,, & \dfrac{d\beta_s}{dx_i}\\ \dfrac{d\gamma_s}{dx_i}\,, & \dfrac{d\delta_s}{dx_i}\end{matrix}\right\},\tag{4}$$

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix}A\,,B\\C\,,D\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_i}{dx_s}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dA}{dx_s}-\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}+\dfrac{dC}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}-\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dA}{dx_i}\right), & \dfrac{d\beta_i}{dx_s}+\left(\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}-\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}\right)\\ \dfrac{d\gamma_i}{dx_s}+\left(\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}\right) & ,\dfrac{d\delta_i}{dx_s}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dB}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}-\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dD}{dx_i}+\dfrac{dB}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}\dfrac{d\alpha_s}{dx_i}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dD}{dx_s}\dfrac{dA}{dx_i}-\dfrac{dC}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}+\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dA}{dx_s}\right), & \dfrac{d\beta_s}{dx_i}+\left(\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dB}{dx_i}-\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dB}{dx_s}\right)\\ \dfrac{d\gamma_s}{dx_i}+\left(\dfrac{dC}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}-\dfrac{dD}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}\right) & ,\dfrac{d\delta_s}{dx_i}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dA}{dx_s}\dfrac{dD}{dx_i}-\dfrac{dB}{dx_s}\dfrac{dC}{dx_i}-\dfrac{dA}{dx_i}\dfrac{dD}{dx_s}+\dfrac{dB}{dx_i}\dfrac{dC}{dx_s}\right)\end{matrix}\right\}.$$

Ora

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_s}, \frac{dB}{dx_s} \\ \frac{dC}{dx_i}, \frac{dD}{dx_i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_i}, \frac{dB}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_s}, \frac{dD}{dx_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = (-\beta_s\gamma_i + \alpha_s\delta_i + \beta_i\gamma_s - \alpha_i\delta_s) = (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i).$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx_s}, \frac{dB}{dx_s} \\ \frac{dA}{dx_i}, \frac{dB}{dx_i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = -\beta_s\alpha_i + \alpha_s\beta_i \quad , \quad \begin{vmatrix} \frac{dC}{dx_i}, \frac{dD}{dx_i} \\ \frac{dC}{dx_s}, \frac{dD}{dx_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B, -A \\ D, -C \end{vmatrix} = -\delta_i\gamma_s + \gamma_i\delta_s;$$

quindi si ottiene

$$(5) \qquad \frac{d^2}{d(x_i x_s)} \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\beta_i\alpha_s - \beta_s\alpha_i) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{Bmatrix}.$$

7. Valendoci delle formule ora trovate, passiamo a risolvere una questione fondamentale di questa teoria:

Dato un prodotto di sostituzioni infinitesime della forma

$$(6) \qquad \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1 + \alpha_i dx_i, & \beta_i dx_i \\ \gamma_i dx_i & , 1 + \delta_i dx_i \end{pmatrix} = \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix} dx_i$$

determinare a quali condizioni esse debbono soddisfare, affinché il prodotto rappresenti il differenziale esatto totale sinistro di una sostituzione.

In altri termini: *Data una espressione differenziale, trovare la condizione affinché essa sia un differenziale esatto totale sinistro.*

La soluzione di questa questione può ottenersi direttamente come viene mostrato in una Nota (*), ma essa può dedursi immediatamente dai risultati trovati precedentemente.

Se la (6) è il differenziale esatto sinistro di una sostituzione $\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$, dovremo avere

$$\frac{d}{dx_i}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i, \beta_i \\ \gamma_i, \delta_i \end{pmatrix},$$

quindi avremo intanto che dovranno essere soddisfatte le n relazioni

$$(7) \qquad \alpha_i + \delta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

(*) Vedi la Nota a questo articolo inserita alla fine di questa *prima parte*.

Dovremo avere inoltre (formula (5))

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{Bmatrix},$$

$$\frac{d^2}{d(x_i x_s)}\begin{pmatrix} A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{Bmatrix},$$

dalle quali si deducono le $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni fra sostituzioni

$$(8)\qquad \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) & , & \frac{d\beta_i}{dx_s} + (\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} + (\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) & , & \frac{d\delta_i}{dx_s} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) & , & \frac{d\beta_s}{dx_i} + (\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_s}{dx_i} + (\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) & , & \frac{d\delta_s}{dx_i} + \frac{1}{2}(\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{Bmatrix} \quad (i, s = 1, 2, \cdots, n)$$

che possono anche scriversi

$$(9)\quad \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} - \frac{d\alpha_s}{dx_i} + (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \, , & \frac{d\beta_i}{dx_s} - \frac{d\beta_s}{dx_i} + 2(\alpha_i\beta_s - \alpha_s\beta_i) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} - \frac{d\gamma_s}{dx_i} + 2(\delta_i\gamma_s - \delta_s\gamma_i) \, , & \frac{d\delta_i}{dx_s} - \frac{d\delta_s}{dx_i} + (\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Queste $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni equivalgono alle $\frac{4(n-1)n}{2}$ relazioni che si ottengono eguagliando a zero gli elementi della sostituzione (9).

Di queste $\frac{4(n-1)n}{2}$ relazioni $\frac{n(n-1)}{2}$ sono conseguenza delle altre, come risulta immediatamente osservando che in forza delle relazioni (7) la somma dei termini in diagonale nelle (9) è nulla.

8. Analogamente si troverebbe che le condizioni affinché la espressione (6) fosse un differenziale esatto *destro* sarebbero date, oltre che dalle (7), dalle altre

$$(9')\quad \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_i}{dx_s} - \frac{d\alpha_s}{dx_i} + (\beta_s\gamma_i - \beta_i\gamma_s) \, , & \frac{d\beta_i}{dx_s} - \frac{d\beta_s}{dx_i} + 2(\alpha_s\beta_i - \alpha_i\beta_s) \\ \frac{d\gamma_i}{dx_s} - \frac{d\gamma_s}{dx_i} + 2(\delta_s\gamma_i - \delta_i\gamma_s) \, , & \frac{d\delta_i}{dx_s} - \frac{d\delta_s}{dx_i} + (\beta_i\gamma_s - \beta_s\gamma_i) \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

9. Adotteremo il simbolo

$$\Delta' \left\{ \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} \right\}_{x, y}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} + (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) & , & \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\beta}{dy} + 2(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1) \\ \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\gamma}{dy} + 2(\delta_1\gamma - \delta\gamma_1) & , & \frac{d\delta_1}{dx} - \frac{d\delta}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \end{Bmatrix}$$

ed il simbolo

$$\Delta''\left\{\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1\end{pmatrix}\right\}_{x,y}$$

per denotare la sostituzione

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) & , & \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\beta}{dy} + 2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) \\ \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\gamma}{dy} + 2(\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma) & , & \frac{d\delta_1}{dx} - \frac{d\delta}{dy} + (\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta) \end{Bmatrix}$$

La condizione affinché

$$\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix} dx \begin{pmatrix}\alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1\end{pmatrix} dy$$

sia un differenziale *sinistro* verrà espressa da

$$\Delta'\left\{\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1\end{pmatrix}\right\}_{x,y} = \begin{pmatrix}0 , 0 \\ 0 , 0\end{pmatrix};$$

mentre la condizione affinché sia un differenziale destro sarà data da

$$\Delta''\left\{\begin{pmatrix}\alpha , \beta \\ \gamma , \delta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha_1 , \beta_1 \\ \gamma_1 , \delta_1\end{pmatrix}\right\}_{x,y} = \begin{pmatrix}0 , 0 \\ 0 , 0\end{pmatrix}.$$

§ 4. – SULLE SOSTITUZIONI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI. – INTEGRAZIONE DI DIFFERENZIALI TOTALI.

1. Abbiasi una sostituzione S funzione di $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Avremo (vedi paragrafo precedente)

$$\text{(I)} \qquad dS = \prod_1^n {}_i \, X_i \, dx_i$$

in cui le sostituzioni X_i, hanno la somma dei termini in diagonale eguale allo zero.

Abbiamo trovato nel paragrafo precedente (Art. 7) delle condizioni *necessarie* a cui debbono soddisfare le sostituzioni X_i. Queste condizioni sono espresse mediante le equazioni simboliche

$$\text{(II)} \qquad \Delta'(X_i\, X_s)_{x_i x_s} = \begin{pmatrix}0 , 0 \\ 0 , 0\end{pmatrix} \qquad (i, s = 1, 2, \cdots, n).$$

Risolviamo ora la questione: *Data la espressione differenziale* (I) *i cui fattori soddisfano le relazioni* (II), *costruire, se è possibile, la sostituzione integrale* S.

Questo ci servirà a dimostrare che le condizioni (II) trovate come *necessarie*, sono anche *sufficienti* affinché la (I) sia un differenziale esatto *sinistro*.

2. A ciò premetteremo la dimostrazione di alcuni teoremi che ci serviranno anche in altre occasioni (*).

TEOREMA I. - *Siano* X (som. o), Y (som. o) *due sostituzioni funzioni di* x *e* y *e sia*

$$S=\int X\,dx \quad , \quad X_1=\frac{dS}{dy}\,.$$

Si ponga

$$\begin{pmatrix} M\,, N \\ P\,, Q \end{pmatrix} = S^{-1}(Y-X_1)\,S\,.$$

Avremo

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{dM}{dx}\,, \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dP}{dx}\,, \dfrac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = S^{-1}[\Delta'(X\,,Y)_{x,y}]\,S\,.$$

Infatti supponiamo che sia

$$X=\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} \quad , \quad Y=\begin{pmatrix} \alpha_1\,, \beta_1 \\ \gamma_1\,, \delta_1 \end{pmatrix} \quad , \quad S=\begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}.$$

Avremo

$$\begin{pmatrix} M\,, N \\ P\,, Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1-(da'_y-cb'_y)\,, & \beta_1-(ab'_y-ba'_y) \\ \gamma_1-(dc'_y-cd'_y)\,, & \delta_1-(ad'_y-bc'_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix},$$

vale a dire

$$\begin{aligned}
M &= (\alpha_1-da'_y+cb'_y)\,ad+(\beta_1-ab'_y+ba'_y)\,cd-(\gamma_1-dc'_y+cd'_y)\,ab-(\delta_1-ad'_y+bc'_y)\,bc\,,\\
N &= (\alpha_1-da'_y+cb'_y)\,bd+(\beta_1-ab'_y+ba'_y)\,d^2-(\gamma_1-dc'+cd'_y)\,b^2-(\delta_1-ad'_y+bc'_y)\,bd\,,\\
P &= -(\alpha_1-da'_y+cb'_y)\,ac-(\beta_1-ab'_y+ba'_y)\,c^2+(\gamma_1-dc'_y+cd'_y)\,a^2+(\delta_1-ad'_y+bc'_y)\,ac\,,\\
Q &= -(\alpha_1-da'_y+cb'_y)\,bc-(\beta_1-ab'_y+ba'_y)\,cd+(\gamma_1-dc'_y+cd'_y)\,ab+(\delta_1-ad'_y+bc'_y)\,ad
\end{aligned}$$

e quindi, con un calcolo che non presenta difficoltà e che perciò crediamo di poter sopprimere, segue

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{dM}{dx}\,, \dfrac{dN}{dx} \\ \dfrac{dP}{dx}\,, \dfrac{dQ}{dx} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dx}-\dfrac{d\alpha}{dy}+\gamma\beta_1-\beta\gamma_1 & , & \dfrac{d\beta_1}{dx}-\dfrac{d\beta}{dy}+2\,(\beta_1\,\delta-\gamma_1\,\beta) \\ \dfrac{d\gamma_1}{dx}-\dfrac{d\gamma}{dy}+2\,(\gamma_1\,\alpha-\alpha_1\,\gamma) & , & \dfrac{d\delta_1}{dx}-\dfrac{d\delta}{dy}+(\gamma_1\,\beta-\beta_1\,\gamma) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}^{-1} [\Delta'(X\,,Y)_{x,y}] \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix}$$

come si voleva dimostrare.

(*) Vedi le dimostrazioni degli stessi teoremi pel caso di sostituzioni di ordine qualunque nel § 8.

TEOREMA II. – *Se si hanno le due sostituzioni*

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, g \end{pmatrix} = \mathrm{X}\ (\text{som. } 0) \quad , \quad \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, g_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Y}\ (\text{som. } 0)$$

funzioni di x e di y e se

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} (\text{det. } 1)$$

è tale che

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, \mu \\ \nu, \rho \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{d}{dy}\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1, \mu_1 \\ \nu_1, \rho_1 \end{pmatrix}$$

avremo

$$\Delta'[\mathrm{S}^{-1}\mathrm{XS}\ ,\ \mathrm{S}^{-1}\mathrm{YS}]_{x,y} =$$

$$\mathrm{S}^{-1}\left\{\Delta'[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]_{x,y} + \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1 & , & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + a\nu_1 - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) & , & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\right\}\mathrm{S}.$$

Infatti

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{XS} = \begin{pmatrix} \alpha\delta a - \alpha\beta c + \gamma\delta b - \beta\gamma g & , & \beta\delta a - \beta^2 c + \delta^2 b - \beta\delta g \\ -\alpha\gamma a + \alpha^2 c_1 - \gamma^2 b + \alpha\gamma g & , & -\gamma\beta a + \alpha\beta c - \gamma\delta b + \alpha\delta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p, q \\ r, s \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{YS} = \begin{pmatrix} \alpha\delta a_1 - \alpha\beta c_1 + \gamma\delta b_1 - \beta\gamma g_1 & , & \beta\delta a_1 - \beta^2 c_1 + \delta^2 b_1 - \beta\delta g_1 \\ -\alpha\gamma a_1 + \alpha^2 c_1 - \gamma^2 b_1 + \alpha\gamma g_1 & , & -\gamma\beta a_1 + \alpha\beta c_1 - \gamma\delta b_1 + \alpha\delta g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1, q_1 \\ r_1, s_1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} rq_1 - r_1 q & , & 2(q_1 s - qs_1) \\ 2(r_1 p - rp_1) & . & r_1 q - rq_1 \end{pmatrix} = \mathrm{S}^{-1}\begin{pmatrix} cb_1 - bc_1 & , & 2(b_1 g - bg_1) \\ 2(c_1 a - ca_1) & , & bc_1 - b_1 c \end{pmatrix}\mathrm{S}.$$

Avremo poi

$$\left\{\begin{matrix} \frac{dp_1}{dx} - \frac{dp}{dy} & , & \frac{dq_1}{dx} - \frac{dq}{dy} \\ \frac{dr_1}{dx} - \frac{dr}{dy} & , & \frac{ds_1}{dx} - \frac{ds}{dy} \end{matrix}\right\} = \mathrm{S}^{-1}\left\{\begin{matrix} \frac{da_1}{dx} - \frac{da}{dy} & , & \frac{db_1}{dx} - \frac{db}{dy} \\ \frac{dc_1}{dx} - \frac{dc}{dy} & , & \frac{dg_1}{dx} - \frac{dg}{dy} \end{matrix}\right\}\mathrm{S}$$

$$+\left\{\begin{matrix} a_1\frac{d(\alpha\delta)}{dx} - a\frac{d(\alpha\delta)}{dy} - c_1\frac{d(\alpha\beta)}{dx} + c\frac{d(\alpha\beta)}{dy} + b_1\frac{d(\gamma\delta)}{dx} - b\frac{d(\gamma\delta)}{dy} - g_1\frac{d(\beta\gamma)}{dx} + g\frac{d(\beta\gamma)}{dy}, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \cdots \end{matrix}\right\}.$$

Ora

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= \alpha\lambda + \gamma\mu \\ \frac{d\beta}{dx} &= \delta\mu + \beta\lambda \\ \frac{d\gamma}{dx} &= \alpha\nu + \gamma\rho \\ \frac{d\delta}{dx} &= \delta\rho + \beta\nu \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dy} &= \alpha\lambda_1 + \gamma\mu_1 \\ \frac{d\beta}{dy} &= \delta\mu_1 + \beta\lambda_1 \\ \frac{d\gamma}{dy} &= \alpha\nu_1 + \gamma\rho_1 \\ \frac{d\delta}{dy} &= \delta\rho_1 + \beta\nu_1 \end{aligned}\right.$$

quindi

$$a_1 \frac{d(\alpha\delta)}{dx} - a\frac{d(\alpha\delta)}{dy} - c_1\frac{d(\alpha\beta)}{dx} + c\frac{d(\alpha\beta)}{dy} + b_1\frac{d(\gamma\delta)}{dx} - b\frac{d(\gamma\delta)}{dy} - g_1\frac{d(\beta\gamma)}{dx} + g\frac{d(\beta\gamma)}{dy}$$

$$= \alpha\delta(c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1) - 2\alpha\beta(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu a_1 - \nu a_1)$$

$$+ 2\gamma\delta(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu) + \beta\gamma(b_1\nu - b\nu_1 + \mu_1 c - \mu c_1).$$

Analogamente si ottengono gli altri elementi dell'ultima sostituzione scritta; quindi

$$\begin{Bmatrix} \frac{dp_1}{dx} - \frac{dp}{dy}, & \frac{dq_1}{dx} - \frac{dq}{dy} \\ \frac{dr_1}{dx} - \frac{dr}{dy}, & \frac{ds_1}{dx} - \frac{ds}{dy} \end{Bmatrix}$$

$$= S^{-1}\left[\begin{Bmatrix} \frac{da_1}{dx} - \frac{da}{dy}, & \frac{db_1}{dx} - \frac{db}{dy} \\ \frac{dc_1}{dx} - \frac{dc}{dy}, & \frac{dg_1}{dx} - \frac{dg}{dy} \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b\nu_1, & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu_1 a - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu), & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\right] S$$

e finalmente

$$\Delta'(S^{-1}XS, S^{-1}YS)_{x,y} = S^{-1}\Big\{\Delta'(X, Y)_{x,y}$$

$$+ \begin{pmatrix} c\mu_1 - c_1\mu + b_1\nu - b_1\nu, & 2(c_1\lambda - c\lambda_1 + \nu_1 a - a_1\nu) \\ 2(b_1\rho - b\rho_1 + g\mu_1 - g_1\mu), & c_1\mu - c\mu_1 + b\nu_1 - b_1\nu \end{pmatrix}\Big\} S$$

come si voleva dimostrare.

TEOREMA III. - *Supponendo che sia*

$$X = \begin{pmatrix} a, b \\ c, g \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} a_1, b_1 \\ c_1, g_1 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix},$$

si avrà

$$\Delta'(X + X_1, Y + Y_1)_{x,y} = \Delta'(X, Y)_{x,y} + \Delta'(X_1, Y_1)_{x,y}$$

$$- \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c, & 2(a\beta_1 + a_1\beta - \alpha_1 b - \alpha b_1) \\ 2(g\gamma_1 + g_1\gamma - \delta c_1 - \delta_1 c), & \beta_1 c + \beta c_1 - \gamma b_1 - \gamma_1 b \end{pmatrix}.$$

Infatti posto

$$\Delta'(X + X_1, Y + Y_1)_{x,y} = \begin{pmatrix} M, N \\ P, Q \end{pmatrix}$$

otterremo

$$M = \left(\frac{d\alpha}{dx} - \frac{da}{dy} + c\beta - \gamma b\right) + \left(\frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{da_1}{dy} + c_1\beta_1 - b_1\gamma_1\right) - (\gamma b + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c),$$

$$N = \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{db}{dy} + 2(\alpha b - \beta a)\right) + \left(\frac{d\beta_1}{dx} - \frac{db}{dy} + 2(\alpha_1 b_1 - \beta_1 a_1)\right) - 2(a\beta_1 + a_1\beta - \alpha_1 b - \alpha b_1),$$

$$P = \left(\frac{d\gamma}{dx} - \frac{dc}{dy} + 2(c\delta - \gamma g)\right) + \left(\frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{dc_1}{dy} + 2(c_1\delta_1 - \gamma_1 g_1)\right) - 2(g\gamma_1 + g_1\gamma - \delta c_1 - \delta_1 c),$$

$$Q = \left(\frac{d\delta}{dx} - \frac{dg}{dy} + b\gamma - \beta c\right) + \left(\frac{d\delta_1}{dx} - \frac{dg}{dy} + b_1\gamma_1 - \beta_1 c_1\right) - (\beta_1 c + \beta c_1 - b_1\gamma - b\gamma_1))$$

e per conseguenza

$$\begin{pmatrix} M, N \\ P, Q \end{pmatrix} = \Delta'(XY)_{x,y} + \Delta'(X_1, Y_1)_{x,y} - \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c & , 2(a\beta_1 + a_1 \beta - \alpha_1 b - \alpha b_1) \\ 2(g\gamma_1 + g_1 \gamma - \delta c_1 - \delta_1 c) \, , & \beta_1 c + \beta c_1 - b_1 \gamma - b\gamma_1 \end{pmatrix}$$

come si voleva dimostrare.

Da questo teorema si deduce immediatamente la formula

$$\Delta'(X - X_1, Y - Y_1)_{x,y} = \Delta'(X, Y)_{x,y} - \Delta'(X_1, Y_1)_{x,y}$$
$$+ \begin{pmatrix} \gamma b_1 + \gamma_1 b - \beta c_1 - \beta_1 c - 2(b_1 \gamma_1 - c_1 \beta_1) & , 2[a\beta_1 + \alpha_1 b - \alpha_1 b - \alpha b_1 - 2(\beta_1 a_1 - \alpha_1 b_1)] \\ 2[g\gamma_1 + g_1 \gamma - \delta c_1 - \delta_1 c - 2(\gamma_1 g_1 - c_1 \delta_1)] \, , & \beta_1 c + \beta c_1 - \gamma b_1 - \gamma_1 b - 2(\beta_1 c_1 - b_1 \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente si avrà il

TEOREMA IV. - *Siano* X (som. o), Y (som. o) *e* Z (som. o), *tre sostituzioni funzioni di x, y e z e sia*

$$S = \int X \, dx \quad , \quad X_2 = \frac{dS}{dy} \quad , \quad X_3 = \frac{dS}{dz}.$$

Si avrà

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2) S \, , \, S^{-1}(Z - X_3) S]_{y,z} = S^{-1} [\Delta'(Y, Z)_{y,z}] S.$$

Infatti, poniamo

$$Y = \begin{pmatrix} a_2, b_2 \\ c_2, d_2 \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \begin{pmatrix} a_3, b_3 \\ c_3, d_3 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2, \beta_2 \\ \gamma_2, \delta_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3, \beta_3 \\ \gamma_3, \delta_3 \end{pmatrix}.$$

Avremo (vedi teoremi precedenti)

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2) S \, , S^{-1}(Z - X_3) S]_{y,z} = S^{-1} [\Delta'(Y - X_2, Z - X_3)_{y,z}] S$$
$$+ S^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} (c_2 - \gamma_2)\beta_3 - (c_3 - \gamma_3)\beta_2 + (b_3 - \beta_3)\gamma_2 - (b_2 - \beta_2)\gamma_3 \, , \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \, , \cdots \end{pmatrix} \right\} S$$
$$= S^{-1} \left\{ \Delta'(Y, Z)_{y,z} - \Delta'(X_2, X_3)_{y,z} + \begin{pmatrix} c_3 \beta_2 - c_2 \beta_3 + b_2 \gamma_3 - b_3 \gamma_2 - 2(\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \, , \cdots \end{pmatrix} \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} (c_2 - \gamma_2)\beta_3 - (c_3 - \gamma_3)\beta_2 + (b_3 - \beta_3)\gamma_2 - (b_2 - \beta_2)\gamma_3, \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \, , \cdots \end{pmatrix} \right\} S$$
$$= S^{-1} \{ \Delta'(Y - Z)_{y,z} - \Delta'(X_2, X_3)_{y,z} \} S.$$

Ma

$$\Delta'(X_2, X_3)_{y,z} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\Delta'[S^{-1}(Y - X_2) S \, , S^{-1}(Z - X_3) S]_{y,z} = S^{-1} [\Delta'(Y, Z)_{y,z}] S,$$

come si voleva dimostrare.

3. Cominciamo dal considerare il caso in cui si abbiano due sole variabili indipendenti e l'espressione differenziale sia

$$dS = X dx \cdot Y dy$$

con

$$(1) \qquad \Delta'(X, Y)_{x \cdot y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Si formi

$$S_1 = \int X dx,$$

in cui nell'eseguire la integrazione deve supporsi y costante. Avremo

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS_1}{dx} = X,$$

onde per un noto teorema (§ 1, teorema XIII, p. 231) S e S_1 dovranno essere eguali a meno di un *fattore a destra* indipendente dalla x.

Ne segue che

$$S = S_1 T,$$

essendo T funzione della sola y. Quindi

$$S_1^{-1} S = T,$$

e derivando rispetto ad y, avremo

$$\frac{d}{dy}(S_1^{-1} S) = \frac{dT}{dy},$$

o anche, per un noto teorema (§ 1, teorema X, formula (14), p. 229), l'equazione precedente potrà scriversi

$$S_1^{-1}\left(\frac{dS}{dy} - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1 = \frac{dT}{dy},$$

vale a dire

$$(2) \qquad S_1^{-1}\left(Y - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1 = \frac{dT}{dy}.$$

Bisognerà dimostrare che essendo soddisfatta la (1) il primo membro della precedente equazione è indipendente da x. Perciò osserviamo che ponendo il primo membro eguale a $\begin{pmatrix} M, N \\ P, Q \end{pmatrix}$, pel teorema I di questo paragrafo, si avrà

$$\begin{Bmatrix} \frac{dM}{dx}, \frac{dN}{dx} \\ \frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = S_1^{-1} (\Delta'(Y, X)_{y, x}) S_1$$

onde per la (1)

$$\begin{Bmatrix} \frac{dM}{dx}, \frac{dN}{dx} \\ \frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Questo ci dimostra che il primo membro della (2) è indipendente da x. Integrando avremo

$$T = \int S_1^{-1}\left(Y - \frac{dS_1}{dy}\right) S_1\, dy$$

e per conseguenza

$$S = S_1 \cdot \int \left\{ S_1^{-1}\left[Y - \left(\frac{dS_1}{dy}\right)\right] S_1 \right\} dy.$$

4. Consideriamo ora il caso generale in cui si abbiano n variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e l'espressione differenziale sia

$$dS = \prod_{1}^{n}{}_i\, X_i\, dx_i$$

con

$$\Delta'(X_i\, X_s)_{x_i x_s} = \begin{pmatrix} 0\,, 0 \\ 0\,, 0 \end{pmatrix} \qquad (i\,, s = 1\,, 2\,, \cdots, n). \tag{3}$$

Si formi

$$\int X_1\, dx_1 = S_1$$

e nell'eseguire la integrazione si suppongano $x_2, x_3, \cdots, x_n$, costanti.

Avremo

$$\frac{dS}{dx_1} = \frac{dS_1}{dx_1} = X_1$$

e per conseguenza (§ 1, teorema XIII)

$$S = S_1 T_1$$

con T funzione di $x_2, x_3, \cdots, x_n$ soltanto.

Quindi

$$S_1^{-1} S = T_1$$

e derivando rispetto ad x_i $(i = 2, 3, \cdots, n)$ (§ 1, formula 14)

$$U_{1,i} = S_1^{-1}\left(X_i - \frac{dS_1}{dx_i}\right) S_1 = \frac{dT_1}{dx_i}.$$

Bisognerà dimostrare che

1) $U_{1,i}$ *è indipendente da* x_i,

2) $\Delta'(U_{1,i} U_{1,i})_{x_i x_s} = \begin{pmatrix} 0\,, 0 \\ 0\,, 0 \end{pmatrix}$ $(i\,, s = 2\,, 3\,, \cdots, n)$.

quando sono soddisfatte le (3).

Ora che le $U_{1,i}$ siano indipendenti da x_1 risulta immediatamente dal teorema I di questo paragrafo.

Abbiamo poi pel teorema IV

$$\Delta'(U_{1,i}, U_{1,s})_{x_i x_s} = S_1^{-1}\left(\Delta'(X_i\, X_s)_{x_i x_s}\right) S_1 = \begin{pmatrix} 0\,, 0 \\ 0\,, 0 \end{pmatrix}.$$

Resta quindi dimostrato che se le condizioni (3) sono sufficienti per $n = m$, saranno pure sufficienti per $n = m + 1$, il che prova quanto ci eravamo proposto.

Abbiamo così anche una regola per la integrazione dei differenziali totali di sostituzioni perfettamente analoga a quella che si dà nel calcolo per la integrazione dei differenziali esatti.

§ 5. - Variazione dell'integrale di una sostituzione.

1. Teorema I. - *Se si hanno le due sostituzioni*

$$X\,(\text{som. } 0) \quad , \quad X_1\,(\text{som. } 0)$$

avremo

$$\left(\int_p^q X_1\,dx\right)\cdot\left(\int_p^q X\,dx\right)^{-1} = (T\,(X_1 - X)\,T^{-1})\,dx\int_p^q$$

ove

$$T = \int_x^q X_1\,dx\,.$$

Infatti, dividiamo l'intervallo $(p \cdots q)$ in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ a cominciare dall'estremo p.

Supponendo

$$X = \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{pmatrix} a', b' \\ c', d' \end{pmatrix},$$

potremo scegliere gli intervalli h_r così piccoli che si abbia

$$\int_p^q X\,dx = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1\,, & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & , 1+\varepsilon_4 \end{pmatrix} \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1+d_i h_i \end{pmatrix}$$

$$\int_p^q X_1\,dx = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon'_1\,, & \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 & , 1+\varepsilon'_4 \end{pmatrix} \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1+d'_i h_i \end{pmatrix}$$

e in modo che le ε siano tutte inferiori a un numero dato σ.

Ne segue per il lemma 2° del § 2, Art. 2,

$$\left(\int_p^q X_1\,dx\right)\left(\int_p^q X\,dx\right)^{-1} = \eta' \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1+d'_i h_i \end{pmatrix} \left\{ \prod_1^n{}_i \begin{pmatrix} 1+a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1+d_i h_i \end{pmatrix} \right\}^{-1} \eta$$

$$= \eta' \prod_n^1{}_i \left\{ T'_i \begin{pmatrix} 1+a'_i h_i\,, & b'_i h_i \\ c'_i h_i & , 1+d'_i h_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+a_i h_i\,, & b_i h_i \\ c_i h_i & , 1+d_i a_i \end{pmatrix}^{-1} T_i'^{-1} \right\} \eta,$$

ove si è posto

$$\eta = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 , & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & , 1+\varepsilon_4 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\eta' = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon'_1 , & \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 & , 1+\varepsilon'_4 \end{pmatrix},$$

$$T'_i = \prod_{i+1}^{n}{}_s \begin{pmatrix} 1+a'_s h_s , & b'_s h_s \\ c'_s h_s & , 1+d'_s h_s \end{pmatrix}.$$

Passando al limite, per le h_i infinitamente decrescenti, si ottiene

$$\left(\int_p^q X_1 dx\right)\left(\int_p^q X dx\right)^{-1} = (T(X_1 - X)T^{-1})\, dx \int_p^q$$

come si voleva dimostrare.

La formula precedente può verificarsi facilmente derivando a sinistra ambo i membri rispetto a p.

2. Se agli elementi di una sostituzione $\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$ (det. 1) diamo delle variazioni infinitesime δa, δb, δc, δd, si chiamerà *variazione sinistra* della sostituzione, la sostituzione

$$\delta \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\delta a , & b+\delta b \\ c+\delta c , & d+\delta d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1}$$

e *variazione destra*, la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} \delta = \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a+\delta a , & b+\delta b \\ c+\delta c , & d+\delta d \end{pmatrix}.$$

Si tratta di trovare la variazione di un integrale definito di una sostituzione.

Supponiamo di avere $\begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix}$ (som. 0) e

$$S = \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx .$$

Diamo una variazione a tutti gli elementi della sostituzione ed ai limiti, in modo però che

$$\delta(a+d) = 0;$$

avremo

TEOREMA II.

$$\delta S = \delta \int_p^q \begin{pmatrix} a , b \\ c , d \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} 1+a\delta q , & b\delta q \\ c\delta q & , 1+d\delta q \end{pmatrix}_q S \begin{pmatrix} 1-a\delta p , & -b\delta p \\ -c\delta p & , 1-d\delta p \end{pmatrix}_p S^{-1} \cdot \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a , \delta b \\ \delta c , \delta d \end{pmatrix} T^{-1} \right\} dx \int_p^q$$

essendo

$$T = \int_x^q \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} dx\,.$$

Infatti

$$\delta S = \left\{ \int_{p+\delta p}^{q+\delta q} \begin{pmatrix} a+\delta a\,, b+\delta b \\ c+\delta c\,, d+\delta d \end{pmatrix} dx \right\} \left\{ \int_p^q \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} dx \right\}^{-1}$$

onde posto

$$\begin{pmatrix} a+\delta a\,, b+\delta b \\ c+\delta c\,, d+\delta d \end{pmatrix} = V_1 \quad , \quad \begin{pmatrix} a\,, b \\ c\,, d \end{pmatrix} = V,$$

si troverà

$$\delta S = \left(\int_{p+\delta p}^{q+\delta q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx\right)^{-1}\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)^{-1}\left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)^{-1}\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p}^{q} V dx\right)^{-1}.$$

Ora a meno d'infinitesimi d'ordine superiore si ha

$$\left(\int_{p+\delta p}^{q+\delta q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx\right)^{-1} = \int_q^{q+\delta q} V_1\, dx = \begin{pmatrix} 1+a\delta q\,, & b\delta q \\ c\delta q & , 1+d\delta q \end{pmatrix}_q$$

$$\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)^{-1}\left(\int_{p+\delta p}^{q} V_1\, dx\right) = \int_{p+\delta p}^{p} V_1\, dx = \begin{pmatrix} 1-a\delta p\,, & -b\delta p \\ -c\delta p & , 1-d\delta p \end{pmatrix}_p$$

$$\left(\int_{p}^{q} V_1\, dx\right)\left(\int_{p}^{q} V dx\right)^{-1} = \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a\,, \delta b \\ \delta c\,, \delta d \end{pmatrix} T^{-1}\, dx \right\} \int_p^q,$$

quindi a meno di infinitesimi d'ordine superiore

$$\delta S = \begin{pmatrix} 1+a\delta q\,, & b\delta q \\ c\delta q & , 1+d\delta q \end{pmatrix}_q S \begin{pmatrix} 1-a\delta p\,, & -b\delta p \\ -c\delta p & , 1-d\delta p \end{pmatrix}_p S^{-1} \cdot \left\{ T \begin{pmatrix} \delta a\,, \delta b \\ \delta c\,, \delta d \end{pmatrix} T^{-1} \right\} dx \int_p^q$$

come si voleva appunto dimostrare.

§ 6. - Integrazione multipla di una sostituzione. - Relazione fra integrali curvilinei e integrali doppî.

1. Relativamente alla integrazione multipla ci limiteremo ai soli integrali doppî.

Abbiasi una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \gamma\,, \delta \end{pmatrix} \text{ (som. o)}$$

funzione di due variabili x, y e definita in un campo σ nel piano delle variabili x, y che supporremo tale che ogni parallela all'asse x ne incontri il contorno s al più in due punti.

Ammettiamo che la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ sia continua e che il contorno s sia una linea continua.

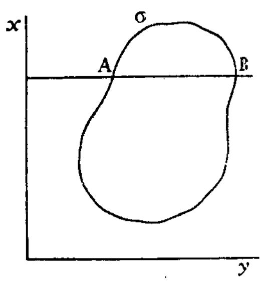


Fig. 1.

La parallela all'asse x che dista di y da questa retta tagli il contorno nei punti A e B. Si formi la sostituzione

$$\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \int_A^B \alpha dx & , & \int_A^B \beta dx \\ \int_A^B \gamma dx & , & \int_A^B \delta dx \end{vmatrix}$$

avremo che $\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix}$ sarà funzione continua della sola y e sarà $\alpha_1 + \delta_\iota = 0$. Siano y_0 e y_1 rispettivamente le distanze minima e massima che passano fra i punti di s e l'asse x.

Si formi

$$\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \int_{y_0}^{y_1} \begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} dy$$

avremo che $\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix}$ sarà a (det. 1); essa si chiamerà l'*integrale doppio sinistro della sostituzione* $\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ *eseguita prima rispetto ad x, poi rispetto ad y ed estesa a tutti i punti del campo* σ. Si scriverà

$$\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} = \iint_\sigma \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dx\, dy.$$

Se le parallele all'asse y incontreranno s in due soli punti al massimo, potremo considerare la sostituzione

$$\begin{pmatrix}A_1, B_1 \\ C_1, D_1\end{pmatrix} = \iint_\sigma \begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} dy\, dx$$

e avremo *in generale*

$$\begin{pmatrix}A, B \\ C, D\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}A_1, B_1 \\ C_1, D_1\end{pmatrix}.$$

Limitiamo il campo σ_1, fra il contorno di σ e due rette rispettivamente parallele agli assi x e y e che si tagliano nel punto di coordinate x_1, y_1 (la parte tratteggiata della figura 2).

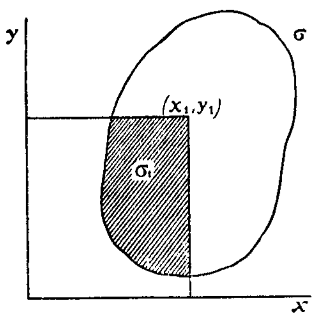


Fig. 2.

Poniamo

$$\binom{a\,,b}{c\,,d} = \iint_{\sigma_1} \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} dx\, dy$$

$$\binom{a_1\,,b_1}{c_1\,,d_1} = \iint_{\sigma_1} \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} dy\, dx\,.$$

Se manterremo tutto fisso, soltanto varieremo le due rette che passano per $(x_1\, y_1)$ collo spostare questo punto entro σ, ambedue le sostituzioni $\binom{a\,,b}{c\,,d}$, $\binom{a_1\,,b_1}{c_1\,,d_1}$ potranno considerarsi come funzioni di x_1 e di y_1 e avremo evidentemente (vedi § 3)

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\binom{a\,,b}{c\,,d} = \frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\binom{a_1\,,b_1}{c_1\,,d_1} = \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta}.$$

2. Analogamente a quanto si fa per le funzioni studieremo gli *integrali curvilinei* delle sostituzioni. Se la sostituzione $\binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta}$ (som. o) è definita per tutti i punti di un arco di curva s, potremo considerare (presi due punti A e B sulla curva)

$$\int_A^B \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} ds$$

e analogamente avremo un *integrale destro curvilineo*.

Se la curva s giace nel piano delle x e y entro il campo di variabilità di due sostituzioni $\binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta}$ (som. o), $\binom{\alpha_1\,,\beta_1}{\gamma_1\,,\delta_1}$ (som. o) funzioni di $x\,,y$, potremo considerare la sostituzione

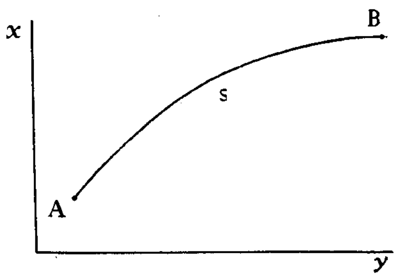


Fig. 3.

$$\int_A^B \begin{pmatrix} \alpha\frac{dx}{ds} + \alpha_1\frac{dy}{ds} & , & \beta\frac{dx}{ds} + \beta_1\frac{dy}{ds} \\ \gamma\frac{dx}{ds} + \gamma_1\frac{dy}{ds} & , & \delta\frac{dx}{ds} + \delta_1\frac{dy}{ds} \end{pmatrix} ds$$

che scriveremo col simbolo

$$\int_A^B \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} dx \cdot \binom{\alpha_1\,,\beta_1}{\gamma_1\,,\delta_1} dy.$$

Si avrà

$$\int_A^B \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} dx \cdot \binom{\alpha_1\,,\beta_1}{\gamma_1\,,\delta_1} dy = \left[\int_B^A \binom{\alpha\,,\beta}{\gamma\,,\delta} dx \cdot \binom{\alpha_1\,,\beta_1}{\gamma_1\,,\delta_1} dy\right]^{-1}.$$

3. Il teorema che ora vogliamo dimostrare si riferisce alla relazione che passa fra integrali curvilinei e integrali doppî.

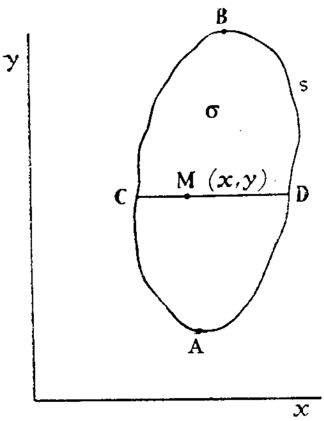


Fig. 4.

TEOREMA I. – *Siano* X e Y (som. o) *due sostituzioni funzioni di x e di y definite nell'interno di un dato campo σ del piano xy e al contorno s* (incontrato dalle parallele ad x al più in due punti). *Preso un punto qualunque* M (di coordinate x , y) *entro σ, si formi*

$$\int_C^M \mathrm{X}\,dx \cdot \int_A^C \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy = \mathrm{S}_1$$

essendo MC *parallela ad x* , A *il punto di s più vicino all'asse x. Avremo che*

$$\int_\sigma (\mathrm{S}_1^{-1}\,\Delta'(\mathrm{X}\,,\,\mathrm{Y})_{x,y}\,\mathrm{S}_1)\,dx\,dy = \int_s \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy$$

supponendo che la integrazione lungo la linea s sia eseguita partendo da A *e ritornando allo stesso punto lasciando sempre a sinistra il campo σ.*

Per dimostrare questo teorema si osservi che pel teorema I, del § 4°, posto

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}\,,\,\mathrm{N} \\ \mathrm{P}\,,\,\mathrm{Q} \end{pmatrix} = \mathrm{S}_1^{-1}\left(\mathrm{Y} - \frac{d\mathrm{S}_1}{dy}\right)\mathrm{S}_1$$

resulterà

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d\mathrm{M}}{dx}\,, & \dfrac{d\mathrm{N}}{dx} \\[2mm] \dfrac{d\mathrm{P}}{dx}\,, & \dfrac{d\mathrm{Q}}{dx} \end{Bmatrix} = \mathrm{S}_1^{-1}\,\Delta'(\mathrm{Y}\,,\mathrm{X})_{x,y}\,\mathrm{S}_1\,.$$

Ora dal paragrafo precedente si deduce facilmente

$$\begin{pmatrix} \mathrm{M}\,,\,\mathrm{N} \\ \mathrm{P}\,,\,\mathrm{Q} \end{pmatrix}_{\mathrm{C}} = \mathrm{S}_1^{-1}(\mathrm{Y_C} - \mathrm{Y_C})\,\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 0\,,\,0 \\ 0\,,\,0 \end{pmatrix},$$

quindi (vedi Art. prec.)

$$\int_\sigma (\mathrm{S}_1^{-1}\,\Delta'(\mathrm{X}\,,\mathrm{Y})_{x,y}\,\mathrm{S}_1)\,dx\cdot dy = \int_A^B \left\{ \mathrm{S}_1^{-1}\left(\mathrm{Y}\,dy\cdot\left(\frac{d\mathrm{S}_1}{dy}\right)^{-1} dy\right)\mathrm{S}_1 \right\}_{\mathrm{D}},$$

ove B è il punto di s più distante dall'asse x; e l'indice D posto nella quantità sotto il segno d'integrazione nel secondo membro denota che il valore della quantità stessa va preso nei punti dalla parte D del contorno (vedi figura 4).

Formiamo ora

$$\mathrm{U} = (\mathrm{S}_1)_{\mathrm{D}} \int_A^D \left\{ \mathrm{S}_1^{-1}\left(\mathrm{Y}\,dy\cdot\left(\frac{d\mathrm{S}_1}{dy}\right)^{-1} dy\right)\mathrm{S}_1 \right\}_{\mathrm{D}}$$

e facciamone il differenziale. Otterremo

$$d\mathrm{U} = d\mathrm{S}_1\cdot\mathrm{S}_1 \left\{ \mathrm{S}_1^{-1}\left(\mathrm{Y}\,dy\cdot\left(\frac{d\mathrm{S}_1}{dy}\right)^{-1} dy\right)\mathrm{S}_1 \right\} \mathrm{S}_1^{-1} = d\mathrm{S}_1\cdot\mathrm{Y}\,dy\cdot\left(\frac{d\mathrm{S}_1}{dy}\right)^{-1} dy.$$

Ma

$$dS_1 = \frac{dS_1}{dy} dy \cdot X\, dx,$$

quindi

$$dU = (X\, dx \cdot Y\, dy)_D$$

e perciò

$$\int_{ADB} (X\, dx \cdot Y\, dy)_D = (S_1)_B \int_A^B \left\{ S_1^{-1} \left(Y\, dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy \right) S_1 \right\}_D.$$

Si ha

$$(S_1)_B = \int_{ACB} (X\, dx \cdot Y\, dy),$$

per conseguenza

$$\int_{BCA} X\, dx \cdot Y\, dy \cdot \int_{ADB} X\, dx \cdot Y\, dy = \int_A^B \left\{ S_1^{-1} \left(Y\, dy \cdot \left(\frac{dS_1}{dy}\right)^{-1} dy \right) S_1 \right\}_D$$

e finalmente

$$\int_s (X\, dx \cdot Y\, dy) = \int_\sigma (S_1^{-1}\, \Delta'(X\,,\, Y)_{x,y}\, S_1)\, dx\, dy$$

come volevasi dimostrare.

4. Supponiamo ora che in un dato campo Σ semplicemente connesso nel piano delle due variabili x e y le due sostituzioni X e Y funzioni di x e y siano finite e continue e le derivate dei loro elementi siano finite e atte alle integrazione; inoltre si abbia

$$\Delta'(X\,,\, Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Presa entro Σ una linea s chiusa incontrata dalle parallele ad x in due punti soli, pel teorema precedente sarà

$$\text{(1)} \qquad \int_s X\, dx \cdot Y\, dy = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$$

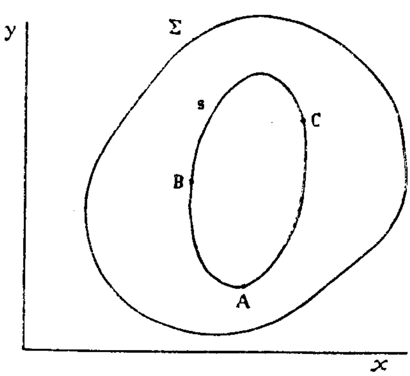


Fig. 5.

in cui la integrazione deve supporsi eseguita a cominciare dal punto A di s più vicino ad x. Suppongasi ora di cominciare la integrazione da un altro punto B qualunque di s. Avremo

$$\int_{BACB} X\, dx \cdot Y\, dy = \left(\int_A^B X\, dx \cdot Y\, dy \right) \left(\int_{ACBA} X\, dx \cdot Y\, dy \right) \left(\int_A^B X\, dx \cdot Y\, dy \right)^{-1}$$

$$= \left(\int_A^B X\, dx \cdot Y\, dy \right) \left(\int_A^B X\, dx \cdot Y\, dy \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la relazione (1) vale qualunque sia il punto di s da cui si principia la integrazione.

Suppongasi ora di avere entro Σ una linea chiusa s la quale possa esser tagliata dalle parallele all'asse x in più di due punti.

Sarà evidentemente possibile spezzare il campo racchiuso entro s in altri, ciascuno dei quali abbia il contorno incontrato in due punti soli dalle parallele all'asse x e tale spezzamento potrà sempre eseguirsi mediante delle linee che partano da un punto del contorno. Nel caso particolare rappresentato dalla figura 6, basterà tirare due sole linee AGB e CHB e otterremo il campo racchiuso da s spezzato nei tre σ_1, σ_2, σ_3 e ciascuno dei loro contorni

$$s_1 = \mathrm{CIDBC} \quad , \quad s_2 = \mathrm{ACBGA} \quad , \quad s_3 = \mathrm{AGBFA}$$

sarà incontrato dalle parallele ad x al più in due punti.

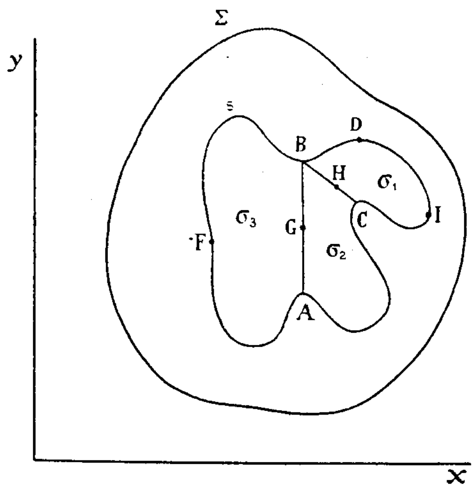


Fig. 6.

Avremo ora

$$\int_s = \int_{AC+CIB+BFA} = \int_{BFA} \cdot \int_{CIB} \cdot \int_{AC} = \left(\int_{AB} \cdot\right)^{-1} \left(\int_{AB} \cdot \int_{BFA}\right) \cdot \left(\int_{CIB} \cdot \int_{BC}\right) \cdot \left(\int_{CB} \int_{AC} \int_{BA}\right) \cdot \int_{AB}$$

$$= \left(\int_{AB}\right)^{-1} \int_{s_3} \cdot \int_{s_1} \cdot \int_{s_2} \left(\int_{AB}\right) = \left(\int_{AB}\right)^{-1} \left(\int_{AB}\right) = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la relazione (1) vale qualunque sia la linea s racchiusa nel campo Σ.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

TEOREMA II. - *Se* X *e* Y (som. 0) *sono due sostituzioni funzioni di x e y definite entro un campo semplicemente connesso Σ nel piano delle x, y ed esse e le derivate dei loro elementi sono finite e continue; e se*

$$\Delta'(\mathrm{X}, \mathrm{Y})_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

avremo, qualunque sia la linea s chiusa che si prenda entro Σ,

$$\int_s \mathrm{X}\, dx \cdot \mathrm{Y}\, dy = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Da questo teorema si deduce immediatamente l'altro:

TEOREMA III. - *Se per le* X *e* Y *valgono le stesse condizioni stabilite precedentemente e si prendono entro Σ due punti qualunque* A, B *il valore dell'integrale*

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{X}\, dx \cdot \mathrm{Y}\, dy.$$

esteso ai punti di una linea che va dal punto A *al punto* B *sarà indipendente da questa linea, purchè essa sia tutta racchiusa entro il campo* Σ *e ne restino invariati gli estremi.*

Questo teorema è equivalente all'altro:

TEOREMA IV. – *Se per le* X *e* Y *valgono le solite condizioni, preso entro* Σ *un punto arbitrario fisso* A *ed un punto di coordinate* x, y *correnti, avremo che*

$$\int_{A}^{(x,y)} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy$$

sarà una sostituzione (det. 1) *funzione monodroma di* x *e di* y.

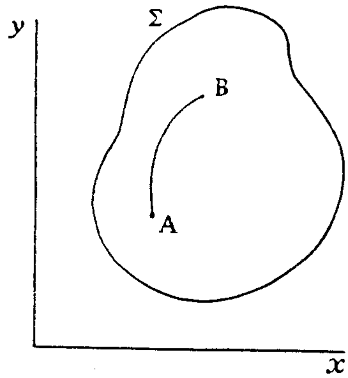


Fig. 7.

5. Supponiamo ora di avere un campo Σ più volte connesso; mediante i tagli normali si riduca la superficie Σ ad essere semplicemente connessa.

Se X (som. 0) e Y (som. 0) sono due sostituzioni che soddisfano alla condizione

$$\Delta'(\mathrm{X}\,,\,\mathrm{Y})_{x,y} = \begin{pmatrix} 0\,,\,0 \\ 0\,,\,0 \end{pmatrix}$$

e oltre ad esser finite e continue hanno le derivate degli elementi pure finite e continue, consideriamo

$$\int_{A}^{(x,y)} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}dy = \mathrm{S},$$

essendo A un punto fisso qualunque di Σ.

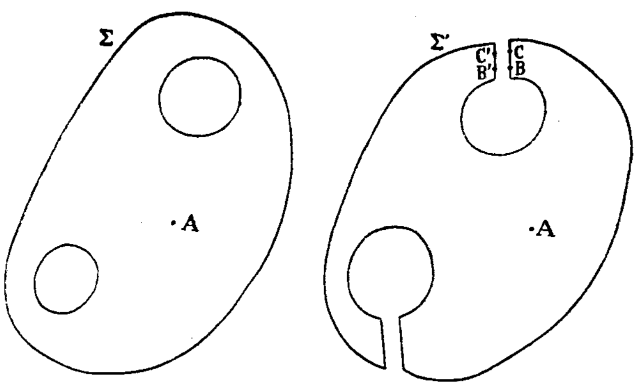


Fig. 8.

Entro Σ' la sostituzione S sarà monodroma; ma non sarà tale più entro Σ. Per studiarne la polidromia vediamo le relazioni che passano fra i valori di S alle due rive di ciascuno dei tagli costruiti.

Prendiamo a considerare due coppie di punti BB′, CC′ opposte alle due rive di uno dei tagli costruiti; avremo entro Σ'

$$\mathrm{S_B} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \quad , \quad \mathrm{S_{B'}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

$$\mathrm{S_C} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \quad , \quad \mathrm{S_{C'}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

da cui risulta,

$$\mathrm{S_C} = \Big(\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \Big) \mathrm{S_B},$$

$$\mathrm{S_{C'}} = \Big(\int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy \Big) \mathrm{S_{B'}}.$$

Ma

$$\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{C}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy = \int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \int_{\mathrm{B'}}^{\mathrm{C'}} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy,$$

quindi,

$$\mathrm{S_{C'}^{-1}}\,\mathrm{S_C} = \mathrm{S_{B'}^{-1}}\,\mathrm{S_B} = \mathrm{T}$$

e per conseguenza

$$\mathrm{S_C} = \mathrm{S_{C'}}\,\mathrm{T},$$
$$\mathrm{S_B} = \mathrm{S_{B'}}\,\mathrm{T}.$$

Possiamo quindi enunciare il teorema seguente.

TEOREMA V. – *Se entro una superficie più volte connessa* Σ *si hanno due sostituzioni* X (som. 0), Y (som. 0), *finite e continue insieme alle derivate degli elementi e tali che*

$$\Delta'(\mathrm{X}\,,\,\mathrm{Y})_{x,y} = \begin{pmatrix} 0\,,\,0 \\ 0\,,\,0 \end{pmatrix},$$

la sostituzione

$$\mathrm{S} = \int_{\mathrm{A}}^{(x,y)} \mathrm{X}\,dx \cdot \mathrm{Y}\,dy$$

non sarà in generale monodroma. Eseguiti i tagli che rendono Σ *una superficie semplicemente connessa* Σ' *e considerando* S *entro* Σ', *avremo che esisterà per ogni taglio una sostituzione costante, tale che i valori di* S *ad una delle rive del taglio saranno eguali a quelli di* S *all'altra riva moltiplicati a destra per la sostituzione costante.*

6. Non si avrebbe difficoltà a ritrovare i teoremi correlativi ai precedenti relativamente agli integrali destri.

§ 7. – Parametri differenziali del secondo ordine di una sostituzione.

1. Abbiasi una sostituzione $S = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ (det. 1) funzione di due variabili x e y. Si formino

$$X = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = \frac{dS}{dx} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = \frac{dS}{dy} ,$$

avremo (vedi § 3, Art. 9)

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri

$$\Delta'(-Y, X)_{x,y}$$

che rappresenteremo col simbolo

$$\Delta'_2 S ,$$

o anche col simbolo

$$\Delta'_2 S_{x,y}.$$

Analogamente, posto

$$X_1 = S\frac{d}{dx} \quad , \quad Y_1 = S\frac{d}{dy} ,$$

si consideri

$$\Delta''(-Y_1, X_1)_{x,y} = \Delta''_2 S.$$

Chiameremo $\Delta'_2 S$ e $\Delta''_2 S$ i *parametri differenziali secondi* di S *sinistro* o *destro.*

Avremo

$$\text{(I)} \quad \Delta'_2 S = \Delta'(-Y, X)_{x,y} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha_1}{dy} - (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \ , & \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta_1}{dy} - 2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) \\ \frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\gamma_1}{dy} - 2(\delta\gamma_1 - \delta_1\gamma) \ , & \frac{d\delta}{dx} + \frac{d\delta_1}{dy} - (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) \end{Bmatrix};$$

ma

$$\begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix} = \Delta'(X, Y)_{x,y} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha_1}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} + (\beta_1\gamma - \beta\gamma_1) \ , & \frac{d\beta_1}{dx} - \frac{d\beta}{dy} + 2(\alpha_1\beta - \alpha\beta_1) \\ \frac{d\gamma_1}{dx} - \frac{d\gamma}{dy} + 2(\delta_1\gamma - \delta\gamma_1) \ , & \frac{d\delta_1}{dx} - \frac{d\delta}{dy} + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma) \end{Bmatrix}$$

quindi si otterrà un'altra espressione per $\Delta'_2 S$

$$\text{(II)} \quad \Delta'_2 S = \begin{Bmatrix} \frac{d(\alpha - \alpha_1)}{dx} + \frac{d(\alpha + \alpha_1)}{dy} \ , & \frac{d(\beta - \beta_1)}{dx} + \frac{d(\beta + \beta_1)}{dy} \\ \frac{d(\gamma - \gamma_1)}{dx} + \frac{d(\gamma + \gamma_1)}{dy} \ , & \frac{d(\delta - \delta_1)}{dx} + \frac{d(\delta + \delta_1)}{dy} \end{Bmatrix}.$$

Se finalmente sostituiamo per $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$, i loro valori espressi mediante A, B, C, D e le loro derivate, avremo una terza espressione per $\Delta'_2 S$, cioè

(III) $$\Delta'_2 S$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(D\Delta^2 A - A\Delta^2 D + B\Delta^2 C - C\Delta^2 B) + \frac{d(A,D)}{d(x,y)} - \frac{d(B,C)}{d(x,y)}, & A\Delta^2 B - B\Delta^2 A + 2\frac{d(A,B)}{d(x,y)} \\ D\Delta^2 C - C\Delta^2 D + 2\frac{d(D,C)}{d(x,y)}, & \frac{1}{2}(A\Delta^2 D - D\Delta^2 A + C\Delta^2 B - B\Delta^2 C) + \frac{d(B,C)}{d(x,y)} - \frac{d(A,D)}{d(x,y)} \end{Bmatrix}$$

ove si è denotato col simbolo $\Delta^2 f$ la espressione $\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{d^2 f}{dy^2}$, e col simbolo $\frac{d(f,\varphi)}{d(x,y)}$, il determinante funzionale delle f e φ rispetto ad x e y.

2. Cominciamo dalla trasformazione di $\Delta'_2 S$.

TEOREMA I. - *Sia*

$$\xi + i\eta = f(x+iy) \quad , \quad \rho = \text{mod.}\frac{df(x+iy)}{d(x+iy)};$$

$$\Delta'_2 S_{x,y} = \begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} \quad , \quad \Delta'_2 S_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix};$$

avremo

$$\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2\alpha, \rho^2\beta \\ \rho^2\gamma, \rho^2\delta \end{pmatrix}$$

che si potrà anche scrivere simbolicamente

$$\Delta'_2 S_{x,y} = \rho^2 \Delta'_2 S_{\xi,\eta}.$$

Questo teorema risulta immediatamente dalla forma (III) sotto cui fu posto $\Delta'_2 S$ nell'articolo precedente.

Se ne deduce immediatamente:

TEOREMA II. - *Se due campi Σ e Σ' sono rappresentati in modo conforme l'uno sull'altro, ogni sostituzione* S *funzione dei punti del campo Σ che soddisfa in Σ alla condizione $\Delta_2 S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$ conserva, trasportata in Σ', il medesimo carattere.*

3. Sia $S = \begin{pmatrix} A, B \\ C, D \end{pmatrix}$ (det. 1) una sostituzione funzione di x e di y tale che

$$\Delta'_2 S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix};$$

posto

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} = X = \frac{dS}{dx} \quad , \quad \begin{pmatrix} \alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1 \end{pmatrix} = Y = \frac{dS}{dx},$$

avremo

$$\Delta'(-Y, X)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Supponendo che X , Y siano finite insieme alle derivate dei loro elementi entro un campo σ il cui contorno sia s, sarà

$$\int_s X\,dy\,(-Y)\,dx = \begin{pmatrix} 0\,,\,1 \\ 1\,,\,0 \end{pmatrix}.$$

Ora se n è la normale ad s e le direzioni positive di n ed s sono tali che la coppia $(n\,,\,s)$ è congruente ad $(x\,,y)$, avremo

$$X\,dy\cdot(-Y)\,dx = \begin{Bmatrix} 1+\left(\alpha\frac{dy}{ds}-\alpha_1\frac{dx}{ds}\right)ds & , & \left(\beta\frac{dy}{ds}-\beta_1\frac{dx}{ds}\right)ds \\ \left(\gamma\frac{dy}{ds}-\gamma_1\frac{dx}{ds}\right)ds & , & 1+\left(\delta\frac{dy}{ds}-\delta_1\frac{dx}{ds}\right)ds \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1+\left(\alpha\frac{dx}{dn}+\alpha_1\frac{dy}{dn}\right)ds & , & \left(\beta\frac{dx}{dn}+\beta_1\frac{dy}{dn}\right)ds \\ \left(\gamma\frac{dx}{dn}+\gamma_1\frac{dy}{dn}\right)ds & , & 1+\left(\delta\frac{dx}{dn}+\delta_1\frac{dy}{dn}\right)ds \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1+\left(D\frac{dA}{dn}-C\frac{dB}{dn}\right)ds & , & \left(A\frac{dB}{dn}-B\frac{dA}{dn}\right)ds \\ \left(A\frac{dC}{dn}-C\frac{dA}{dn}\right)ds & , & 1+\left(A\frac{dD}{dn}-B\frac{dC}{dn}\right)ds \end{Bmatrix} = \frac{dS}{dn}\,ds;$$

quindi

$$\int_s \frac{dS}{dn}\,ds = \begin{pmatrix} 1\,,\,0 \\ 0\,,\,1 \end{pmatrix},$$

da cui il teorema:

TEOREMA III. – *Se si ha una sostituzione* S (det. 1) *definita in un campo* Σ *limitato da un contorno s entro cui essa e le derivate prime e seconde dei suoi elementi sono finite e continue, e se*

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0\,,\,0 \\ 0\,,\,0 \end{pmatrix},$$

avremo

$$\int_s \frac{dS}{dn}\,ds = \begin{pmatrix} 1\,,\,0 \\ 0\,,\,1 \end{pmatrix},$$

ove n denota la normale ad s.

4. Se si ha la sostituzione S (det. 1), tale che

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0\,,\,0 \\ 0\,,\,0 \end{pmatrix}$$

posto

$$\frac{dS}{dx} = X \quad , \quad \frac{dS}{dy} = Y,$$

risulterà

$$\Delta_2'(-Y, X)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix},$$

quindi (vedi § 3, Art. 9)

$$Xdy \cdot (-Y)\, dx$$

sarà un differenziale esatto. Poniamo

$$\int Xdy \cdot (-Y)\, dx = S_1,$$

avremo

$$\frac{dS_1}{dx} = X_1 = -Y \quad , \quad \frac{dS_1}{dy} = Y_1 = X,$$

quindi

$$\Delta_2' S_1 = \Delta'(-Y_1, X_1)_{x,y} = \Delta'(-X, -Y)_{x,y} = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}.$$

Donde il teorema:

TEOREMA IV. - *Se si ha la sostituzione* S (det. 1) *tale che*

$$\Delta_2' S = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

esisterà sempre una sostituzione coniugata S_1 (det. 1) *tale che*

$$\Delta_2' S_1 = \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS_1}{dy} \quad , \quad \frac{dS}{dy} = -\frac{dS_1}{dx}.$$

5. Non si avrebbe nessuna difficoltà a trovare, per il parametro differenziale secondo destro, i teoremi *correlativi* a quelli enunciati precedentemente.

§ 8. - Generalizzazione al caso di una sostituzione qualunque.

1. Nei precedenti paragrafi ci siamo limitati (per presentare da principio il caso più semplice) alle sostituzioni del secondo ordine; i risultati trovati si possono però estendere alle sostituzioni di ordine n senza alcuna difficoltà. Daremo qui un cenno di tale estensione.

2. Abbiasi una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \text{(det. 1)}$$

i cui elementi supporremo possedere una derivata determinata e finita. Denoteremo col nome di *differenziale sinistro* e *destro* di S le sostituzioni:

$$dS = \begin{pmatrix} a_{11} + da_{11}, & a_{12} + da_{12}, & \cdots, & a_{1n} + da_{1n} \\ a_{21} + da_{21}, & a_{22} + da_{22}, & \cdots, & a_{2n} + da_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + da_{n1}, & a_{n2} + da_{n2}, & \cdots, & a_{nn} + da_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1},$$

$$Sd = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} + da_{11}, & \cdots, & a_{1n} + da_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + da_{n1}, & \cdots, & a_{nn} + da_{nn} \end{pmatrix}.$$

Se A_{is} è l'elemento reciproco ad a_{is} nel determinante di S, avremo

$$dS = \begin{pmatrix} 1 + \Sigma_i A_{1i}\, da_{1i}, & \Sigma_i A_{2i}\, da_{1i}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\, da'_{1i} \\ \Sigma_i A_{1i}\, da_{2i}, & 1 + \Sigma_i A_{2i}\, da_{2i}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni}\, da_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{1i}\, da_{ni}, & \Sigma_i A_{2i}\, da_{ni}, & \cdots, & 1 + \Sigma_i A_{ni}\, da_{ni} \end{pmatrix},$$

$$Sd = \begin{pmatrix} 1 + \Sigma_i A_{i1}\, da_{i1}, & \Sigma_i A_{i1}\, da_{i2}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i1}\, da_{in} \\ \Sigma_i A_{i2}\, da_{i1}, & 1 + \Sigma_i A_{i2}\, da_{i2}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i2}\, da_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{in}\, da_{i1}, & \Sigma_i A_{in}\, da_{i2}, & \cdots, & 1 + \Sigma_i A_{in}\, da_{in} \end{pmatrix}.$$

Chiameremo rispettivamente *derivata a sinistra* e *derivata a destra* le sostituzioni

$$\text{(I)} \qquad \frac{dS}{dx} = \begin{pmatrix} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{1i}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx} \\ \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{2i}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{2i}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{2i}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx}, & \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{ni}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx} \end{pmatrix},$$

$$\text{(II)} \qquad S\frac{d}{dx} = \begin{pmatrix} \Sigma_i A_{i1} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{i1} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i1} \frac{d\alpha_{in}}{dx} \\ \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{i2} \frac{da_{in}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Sigma_i A_{in} \frac{da_{i1}}{dx}, & \Sigma_i A_{in} \frac{da_{i2}}{dx}, & \cdots, & \Sigma_i A_{in} \frac{da_{in}}{dx} \end{pmatrix}.$$

e avremo

$$\text{som.}\left(\frac{d}{dx} S\right) = \Sigma_s \Sigma_i A_{si} \frac{da_{si}}{dx} = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots, & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{som.}\left(S \frac{d}{dx}\right) = \Sigma_s \Sigma_i A_{is} \frac{da_{is}}{dx} = 0.$$

Le (I) e (II) potranno scriversi

$$\frac{dS}{dx} = \begin{Bmatrix} \frac{da_{11}}{dx}, & \frac{da_{12}}{dx}, \dots, & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{n1}}{dx}, & \frac{da_{n2}}{dx}, \dots, & \frac{da_{nn}}{dx} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \dots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1},$$

$$S\frac{d}{dx} = \begin{Bmatrix} a_{11}, & a_{12}, \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, \dots, & a_{nn} \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{da_{11}}{dx}, & \frac{da_{12}}{dx}, \dots, & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{da_{n1}}{dx}, & \frac{da_{n2}}{dx}, \dots, & \frac{da_{1n}}{dx} \end{Bmatrix}.$$

I teoremi dimostrati nel § 1 *valgono evidentemente senza modificazione anche nel caso in cui si tratti di una sostituzione d'ordine qualunque.*

Per trovare, come abbiamo fatto nell'Art. 9, § 1, tutte le sostituzioni la cui derivata sinistra è una sostituzione costante, osserviamo che se

$$S = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & 0, & 0, \dots, 0 \\ 0, & e^{\lambda_2 x}, & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \dots, e^{\lambda_n x} \end{Bmatrix}, \quad \sum_1^n {}_i \lambda_i = 0,$$

avremo

$$\frac{dS}{dx} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0, & 0, \dots, 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0, \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, \dots, \lambda_n \end{Bmatrix}.$$

In generale, posto

$$S^{(r_i)} = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_i x}, & 0, & 0, & 0, & \dots, 0 \\ xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & 0, & 0, & \dots, 0 \\ \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{\lambda_i x}, & xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & 0, & \dots, 0 \\ \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{\lambda_i x}, & xe^{\lambda_i x}, & e^{\lambda_i x}, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-3}}{(r_i-3)!}e^{\lambda_i x}, & \frac{x^{r_i-4}}{(r_i-4)!}e^{\lambda_i x}, & \dots, e^{\lambda_i x} \end{Bmatrix}$$

e

$$S = \left\{ \overline{\underline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \dots S_p^{(r_p)}}} \right\}, \quad \sum_1^p {}_i r_i \lambda_i = 0,$$

si avrà

$$S^{-1} = \left\{ \overline{\underline{U_1^{(r_1)} U_2^{(r_2)} \dots U_p^{(r_p)}}} \right\}$$

ove

$$U_i^{(r_i)} = \begin{Vmatrix} e^{-\lambda_i x} & , & 0 & , & 0 & ,\cdots, 0 \\ -xe^{-\lambda_i x} & , & e^{-\lambda_i x} & , & 0 & ,\cdots, 0 \\ \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{-\lambda_i x} & , & -xe^{-\lambda_i x} & , & e^{-\lambda_i x} & ,\cdots, 0 \\ \frac{-x^3}{1\cdot 2\cdot 3}e^{-\lambda_i x} & , & \frac{x^2}{1\cdot 2}e^{-\lambda_i x} & , & -xe^{-\lambda_i x} & ,\cdots, 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \cdots \\ (-1)^{r_i-1}\frac{x^{r_i-1}}{(r_i-1)!}e^{-\lambda_i x} & , & (-1)^{r_i-2}\frac{x^{r_i-2}}{(r_i-2)!}e^{-\lambda_i x} & , & (-1)^{r_i-3}\frac{x^{r_i-2}}{(r_i-3)!}e^{-\lambda_i x} & ,\cdots, e^{-\lambda_i x} \end{Vmatrix}$$

e quindi

$$\frac{dS}{dx} = T$$

ove

$$T = \left\{ \overline{\underline{T_1^{(r_1)} T_2^{(r_2)} \cdots T_p^{(r_p)}}} \right\}$$

e la sostituzione $T_i^{(r_i)}$ è di ordine r_i ed è data da

$$T_i^{(r_i)} = \begin{Vmatrix} \lambda_i & , & 0 & , & 0 & ,\cdots, & 0 & , & 0 \\ 1 & , & \lambda_i & , & 0 & ,\cdots, & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 1 & , & \lambda_i & ,\cdots, & 0 & , & 0 \\ \cdots \\ 0 & , & 0 & , & & ,\cdots, & 1 & , & \lambda_i \end{Vmatrix}.$$

Abbiasi ora una sostituzione costante qualunque

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & , & a_{12} & ,\cdots, & a_{1n} \\ a_{21} & , & a_{22} & ,\cdots, & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & , & a_{n2} & ,\cdots, & a_{nn} \end{Vmatrix} (\text{som.} = 0).$$

Poniamo A sotto la forma normale; avremo

$$A = B^{-1} \left\{ \overline{\underline{T_1^{(r_1)} T_2^{(r_2)} \cdots T_p^{(r_p)}}} \right\} B$$

ove B è una sostituzione costante a determinante eguale ad 1. Ne seguirà che

$$\frac{d}{dx}\left[B^{-1} \left\{ \overline{\underline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \cdots S_p^{(r_p)}}} \right\} C \right] = A,$$

e quindi la sostituzione più generale la cui derivata sinistra è A, risulterà

$$V = B^{-1} \left\{ \overline{\underline{S_1^{(r_1)} S_2^{(r_2)} \cdots S_p^{(r_p)}}} \right\} C,$$

ove C è una sostituzione costante arbitraria (det. 1). Le λ_i sono radici dell'equazione di grado n

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda\,, & a_{12}\,, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}\,, & a_{22}-\lambda\,, & \cdots, & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\,, & a_{n1}\,, & \cdots, & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

In particolare se questa equazione ha tutte le radici $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$ diverse fra loro, la V prenderà forma

$$V = B^{-1} \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x}\,, & 0\,, & \cdots, & 0 \\ 0\,, & e^{\lambda_2 x}\,, & \cdots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\,, & 0\,, & \cdots, & e^{\lambda_n x} \end{Bmatrix} C.$$

3. Il concetto di integrale *destro* e *sinistro* di una sostituzione può egualmente estendersi alle sostituzioni d'ordine n; così se si avrà la sostituzione

$$(3) \qquad \begin{Bmatrix} \alpha_{11}\,, & \alpha_{12}\,, & \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\,, & \alpha_{22}\,, & \cdots \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1}\,, & \alpha_{n2}\,, & \cdots \alpha_{nn} \end{Bmatrix} (\text{som. } 0)$$

definita per tutti i valori di x in un intervallo $(p \cdots q)$, diviso (a partire da p) questo intervallo in n parti $h_1, h_2 \cdots h_n$, denotando con $(\alpha_{is})_r$ un valore di α_{is} compreso nell'intervallo h_r, formeremo i due prodotti

$$\prod_1^n{}_r \begin{Bmatrix} 1+(\alpha_{11})_r h_r\,, & (\alpha_{12})_r h_r\,, \cdots, & (\alpha_{1n})_r h_r \\ (\alpha_{21})_r h_r\,, & 1+(\alpha_{22})_r h_r\,, \cdots, & (\alpha_{2n})_r h_r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_{n1})_r h_r\,, & (\alpha_{n2})_r h_r\,, \cdots, & 1+(\alpha_{nn})_r h_r \end{Bmatrix}$$

$$\prod_n^1{}_r \begin{Bmatrix} 1+(\alpha_{11})_r h_r\,, & (\alpha_{12})_r h_r\,, \cdots, & (\alpha_{1n})_r h_r \\ (\alpha_{21})_r h_r\,, & 1+(\alpha_{22})_r h_r\,, \cdots, & (\alpha_{2n})_r h_r \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_{n1})_r h_r\,, & (\alpha_{n2})_r h_r\,, \cdots, & 1+(\alpha_{nn})_r h_r \end{Bmatrix}$$

e ne cercheremo i limiti, quando le $h_1, h_2, \cdots, h_n$ tenderanno a zero. Se questi limiti esisteranno, essi saranno rispettivamente l'integrale sinistro e l'integrale destro della sostituzione (3). *I teoremi del* § 2 *possono estendersi senza modificazione alle sostituzioni d'ordine n.*

4. Per le sostituzioni di più variabili e di ordine n, avremo che il differenziale primo potrà porsi sotto la forma

$$dS = \prod_1^n{}_i S_i \, dx_i\,,$$

essendo le sostituzioni S_i sostituzioni d'ordine n con la somma dei termini in diagonale eguale allo zero.

Se

$$S = \left\{ \begin{matrix} a_{11} \ , \ a_{12} \ , \cdots , a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ , \ a_{n2} \ , \cdots , a_{nn} \end{matrix} \right\},$$

risulterà

$$S_r = \frac{dS}{dx_r} = \left\{ \begin{matrix} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx_r} \ , \ \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{1i}}{dx_r} , \cdots , \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx_r} \ , \ \Sigma_i A_{2i} \frac{da_{ni}}{dx_r} , \cdots , \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx_r} \end{matrix} \right\}.$$

Analogamente a quanto venne fatto nel § 3, art. 5, avremo

$$\frac{d}{dx_r} \cdot \frac{d}{dx_s} S = \left\{ \begin{matrix} \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx_s}\right) \ , \ \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{2i} \frac{da_{1i}}{dx_s}\right), \cdots , \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx_s}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx_s}\right) \ , \ \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{2i} \frac{da_{ni}}{dx_s}\right), \cdots , \frac{d}{dx_r}\left(\Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx_s}\right) \end{matrix} \right\},$$

mentre, posto

$$d^2 S = \prod_1^n {}_i \frac{d^2 S}{dx_i^2} dx_i^2 \cdot \prod_{r<s}^{1,n} 2 \frac{d^2 S}{d(x_r x_s)} dx_r dx_s ,$$

si avrà

$$\frac{d^2 S}{d(x_r x_s)}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{1i}}{dx_r}\right), \cdots , \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r} \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s} \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{1i}}{dx_r}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s} \Sigma_i A_{1i} \frac{da_{ni}}{dx_r}\right), \cdots , \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx_r} \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx_s} + \frac{d}{dx_s} \Sigma_i A_{ni} \frac{da_{ni}}{dx_r}\right) \end{matrix} \right\}.$$

Da queste formule si deduce immediatamente *la condizione affinché una espressione differenziale sia un differenziale esatto* (1).

Dinotiamo infatti rispettivamente con $\alpha_{i,k}^{(r)}$ l'elemento della linea i della colonna k della sostituzione $\frac{dS}{dx_r}$ e con λ_{ik} l'elemento della linea i e della colonna k della sostituzione $\frac{d^2 S}{d(x_r x_s)}$, avremo

$$(4) \qquad \alpha_{ik}^{(r)} = \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dx_r} \quad , \quad (5) \quad \lambda_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} + \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r}\right).$$

(1) Vedi la nota inserita alla fine (p. 289).

Ora

$$\frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \Sigma_g\left(\frac{dA_{kg}}{dx_s}\frac{da_{ig}}{dx_r} - \frac{dA_{kg}}{dx_r}\frac{da_{ig}}{dx_s}\right).$$

Dalle (4) si deduce

$$\frac{da_{ig}}{dx_r} = \Sigma_t\, a_{tg}\, \alpha_{it}^{(r)},$$

quindi

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s}\frac{da_{ig}}{dx_r} = \Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s}\Sigma_t\, a_{tg}\,\alpha_{it}^{(r)} = \Sigma_t\,\alpha_{it}^{(r)}\,\Sigma_g\, a_{tg}\frac{dA_{kg}}{dx_s}.$$

Ma

$$\Sigma_g\, a_{tg}\, A_{kg} = \begin{cases} 1\ (\text{se } t = k), \\ 0\ (\text{se } t \neq k), \end{cases}$$

onde derivando rispetto ad x_s

$$\Sigma_g \frac{da_{tg}}{dx_s} A_{kg} + \Sigma_g\, a_{tg}\frac{dA_{kg}}{dx_s} = 0$$

e

$$\Sigma_g\, a_{tg}\frac{dA_{kg}}{dx_s} = -\Sigma_g \frac{da_{tg}}{dx_s} A_{kg} = -\alpha_{tk}^{(s)},$$

da cui

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_s}\frac{da_{ig}}{dx_r} = -\Sigma_t\,\alpha_{it}^{(r)}\,\alpha_{tk}^{(s)},$$

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx_r}\frac{da_{ig}}{dx_s} = -\Sigma_t\,\alpha_{it}^{(s)}\,\alpha_{tk}^{(r)},$$

$$\Sigma_g\left(\frac{dA_{kg}}{dx_s}\frac{da_{ig}}{dx_r} - \frac{dA_{kg}}{dx_r}\frac{da_{ig}}{da_s}\right) = \Sigma_t\left(\alpha_{it}^{(s)}\,\alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)}\,\alpha_{tk}^{(s)}\right).$$

Avremo dunque

$$\lambda_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \frac{1}{2}\Sigma_t\left(\alpha_{it}^{(s)}\,\alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)}\,\alpha_{tk}^{(s)}\right)$$

come pure

$$\lambda_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} - \frac{1}{2}\Sigma_t\left(\alpha_{it}^{(r)}\,\alpha_{tk}^{(s)} - \alpha_{it}^{(s)}\,\alpha_{tk}^{(r)}\right).$$

Ne segue che le condizioni affinché

$$\prod_1^m{}_r\, S_r\, dx_r, \tag{6}$$

sia un differenziale esatto di una sostituzione dS, risulteranno

$$\mu_{ik} = \frac{d\alpha_{ik}^{(r)}}{dx_s} - \frac{d\alpha_{ik}^{(s)}}{dx_r} - \Sigma_t\left(\alpha_{it}^{(s)}\,\alpha_{tk}^{(r)} - \alpha_{it}^{(r)}\,\alpha_{tk}^{(s)}\right) = 0 \qquad \begin{matrix}(r, s = 1, 2 \cdots m, r \neq s)\\ (i, k = 1, 2 \cdots n).\end{matrix}$$

Denotiamo ora con T'_x la sostituzione che si ottiene da T derivandone tutti gli elementi rispetto ad x, e supponendo X , Y sostituzioni funzioni di x e y, poniamo

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = Y'_x - X'_y + YX - XY.$$

In tal modo otterremo

$$\Delta'(S_s, S_r)_{x_s, x_r} = \begin{Bmatrix} \mu_{11}, & \mu_{12}, & \cdots, & \mu_{1n} \\ \mu_{21}, & \mu_{22}, & \cdots, & \mu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n1}, & \mu_{n2}, & \cdots, & \mu_{nn} \end{Bmatrix},$$

quindi le condizioni affinché la (6) sia un differenziale esatto si esprimeranno con

$$\Delta'(S_r, S_s)_{x_r, x_s} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n),$$

ove col simbolo o si intende di rappresentare una sostituzione i cui elementi sono tutti nulli.

5. Posto $X = \dfrac{dS}{dx}$ si otterranno immediatamente le formule

$$(S^{-1}TS)'_x = S^{-1}(T'_x + TX - XT)S, \tag{7}$$

e posto $T = \dfrac{dS}{dy} = X_1$,

$$(S^{-1}X_1S)'_x = S^{-1}(X'_{1x} + X_1X - XX_1)S;$$

essendo $X = \dfrac{dS}{dx}$

$$0 = \Delta'(X, X_1)_{x,y} = X'_{1x} - X'_y + X_1X - XX_1,$$

quindi

$$(S^{-1}X_1S)'_x = S^{-1}(X'_y)S.$$

Ma

$$(S^{-1}YS)'_x = S^{-1}(Y'_x + YX - XY),$$

onde sottraendo

$$(S^{-1}(Y - X_1)S)'_x = S^{-1}(\Delta'(X, Y)_{x,y})S. \tag{8}$$

Questa formula comprende come caso particolare il teorema I del § 4. Analogamente si ottengono le formule che comprendono gli altri teoremi di quel paragrafo.

Sarà quindi facile riconoscere che queste condizioni, oltre essere necessarie, sono anche sufficienti affinché la (6) sia un differenziale esatto.

In modo pure perfettamente analogo si generalizzano le condizioni di monodromia di una sostituzione di due variabili ottenuta integrando un differenziale esatto, come pure ciò che si riferisce alla integrazione multipla.

6. Resta ancora da vedere la forma che assume il parametro differenziale secondo sinistro di una sostituzione funzione di due variabili nel caso in cui l'ordine sia n.

Perciò pongasi (essendo S funzione di x e y)

$$X = \frac{dS}{dx} \quad , \quad Y = \frac{dS}{dy}$$

$$X = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \cdots, \alpha_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \cdots, \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \quad , \quad Y = \begin{Vmatrix} \beta_{11}, \beta_{12}, \cdots, \beta_{1n} \\ \beta_{21}, \beta_{22}, \cdots, \beta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_{n1}, \beta_{n2}, \cdots, \beta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Avremo

$$\Delta'(X, Y)_{x,y} = 0,$$

$$\Delta'_2 S = \Delta'(-Y, X)_{x,y}$$

e quindi (vedi Art. 3)

$$\Delta'_2 S = \begin{Vmatrix} \frac{d(\alpha_{11} - \beta_{11})}{dx} + \frac{d(\alpha_{11} + \beta_{11})}{dy}, \cdots, \frac{d(\alpha_{1n} - \beta_{1n})}{dx} + \frac{d(\alpha_{1n} + \beta_{1n})}{dy} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d(\alpha_{n1} - \beta_{n1})}{dx} + \frac{d(\alpha_{n1} + \beta_{n1})}{dy}, \cdots, \frac{d(\alpha_{nn} - \beta_{nn})}{dx} + \frac{d(\alpha_{nn} + \beta_{nn})}{dy} \end{Vmatrix}.$$

Ora se

$$S = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{Vmatrix},$$

avremo

$$\alpha_{ik} = \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dx} \quad , \quad \beta_{ik} = \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dy};$$

$$\frac{d(\alpha_{ik} - \beta_{ik})}{dx} + \frac{d(\alpha_{ik} + \beta_{ik})}{dy}$$

$$= \Sigma_g A_{kg} \Delta^2 a_{ik} + \Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dx} \frac{da_{ig}}{dx} + \frac{dA_{kg}}{dy} \frac{da_{ig}}{dy}\right) + \Sigma_g \left(\frac{dA_{kg}}{dy} \frac{da_{ig}}{dx} - \frac{dA_{kg}}{dx} \frac{da_{ig}}{dy}\right).$$

Si ha inoltre

$$\Sigma_g a_{ig} A_{kg} = \begin{cases} 0 \ (k \neq i) \\ 1 \ (k = i), \end{cases}$$

e derivando

$$\Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx} a_{ig} + \Sigma_g A_{kg} \frac{da_{ig}}{dx} = 0,$$

$$\Sigma_g \frac{d^2 A_{kg}}{dx^2} a_{ig} + \Sigma_g A_{kg} \frac{d^2 a_{ig}}{dx^2} + 2 \Sigma_g \frac{dA_{kg}}{dx} \frac{da_{ig}}{dx} = 0,$$

onde

$$\Sigma_g\left(\frac{dA_{kg}}{dx}\frac{da_{ig}}{dx}+\frac{dA_{kg}}{dy}\frac{da_{ig}}{dy}\right)=-\frac{1}{2}\Sigma_g\, a_{ig}\,\Delta^2 A_{kg}-\frac{1}{2}\Sigma_g A_{kg}\,\Delta^2 a_{ig}.$$

Ne segue che

$$\frac{d(\alpha_{ik}-\beta_{ik})}{dx}+\frac{d(\alpha_{ik}+\beta_{ik})}{dy}=\frac{1}{2}\Sigma_g(A_{kg}\,\Delta^2 a_{ig}-a_{ig}\,\Delta^2 A_{kg})+\Sigma_g\frac{d(a_{ig},A_{kg})}{d(x,y)}.$$

Avremo dunque che il parametro differenziale secondo sinistro d'una sostituzione potrà scriversi

$$\Delta_2' S=\begin{Bmatrix} \nu_{11}, & \nu_{12}, & \cdots, & \nu_{1n} \\ \nu_{21}, & \nu_{22}, & \cdots, & \nu_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \nu_{n1}, & \nu_{n2}, & \cdots, & \nu_{nn} \end{Bmatrix}$$

con

$$\nu_{ik}=\frac{1}{2}\Sigma_g(A_{kg}\,\Delta^2 a_{ig}-a_{ig}\,\Delta^2 A_{kg})+\Sigma_g\frac{d(a_{ig},A_{kg})}{d(x,y)}.$$

Nota al § 3, Art. 7 e al § 8, Art. 4.

Si tratta di risolvere la questione: *Dato un prodotto di sostituzioni infinitesime*

$$\prod_{1}^{n}{}_i\, X_i\, dx_i$$

trovare le condizioni affinché esso sia il differenziale di una sostituzione S.

Denotiamo con S'_{x_r} la sostituzione che si ottiene da S derivandone tutti gli elementi rispetto ad x_r; dovremo avere

$$X_r=\frac{dS}{dx_r}=S'_{x_r}\,S^{-1}$$

onde

$$S'_{x_r}=X_r\,S$$

e derivando rispetto ad x_s

$$(S'_{x_r})'_{x_s}=(X_r)'_{x_s}S+X_r S'_{x_s}=(X_r)'_{x_s}S+X_r X_s S=[(X_r)'_{x_s}+X_r X_s]\,S;$$

scambiando x_r con x_s il primo membro non deve cambiare, quindi

$$[(X_r)'_{x_s}+X_r X_s]\,S=[(X_s)'_{x_r}+X_s X_r)\,S,$$

vale a dire

$$(X_r)'_{x_s}-(X_s)'_{x_r}+X_r X_s-X_s X_r=\Delta'(X_s X_r)_{x_s x_r}=0.$$

INDICE

XVI.

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

« Rend. Acc. Lincei », 4, 3, 1887, pp. 393-396 (*)

Nella Memoria *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* F (α, β, γ, $\varkappa$) *darstellbaren Functionen* (1) RIEMANN tracciò la via da seguirsi nello studio degli integrali delle equazioni differenziali lineari, studio che egli stesso iniziò in una Memoria scritta nel 1857 e che lasciò inedita (2).

Il metodo tenuto dal RIEMANN in questa questione è simile a quello applicato con tanto successo agli integrali abeliani. Egli mise in evidenza l'analogia fra le proprietà degli integrali di funzioni monodrome in dati campi e quelle dei sistemi di integrali di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti pure monodromi: mentre i primi hanno delle discontinuità che consistono in differenze costanti dei loro valori dalle due parti di certe linee, i sistemi di integrali fondamentali delle equazioni differenziali lineari lungo le linee di discontinuità sono tali, che i valori da una parte si deducono da quelli dall'altra per mezzo di *sostituzioni lineari a coefficienti costanti*, e tali sostituzioni caratterizzano il modo di comportarsi degli integrali intorno ai punti di diramazione.

Inversamente RIEMANN dimostrò che ogni sistema di funzioni aventi discontinuità di questa specie, è un sistema di integrali di equazioni differenziali lineari a coefficienti monodromi.

Sono ben noti i progressi fatti in questi ultimi anni dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, dovuti fra gli altri ai lavori di FUCHS e di KLEIN, i quali hanno condotto questa teoria ad un alto grado di sviluppo. Essi diedero origine ai fecondi studî del POINCARÉ che hanno aperto un nuovo e vasto campo di ricerche.

Se si segue la teoria delle equazioni differenziali nel suo svolgersi, si può notare che già nelle Memorie di RIEMANN si manifesta il suo stretto legame colla teoria delle sostituzioni, e che i successivi lavori sullo stesso argomento hanno sempre più posto in evidenza tale relazione. Nei lavori di FUCHS, KLEIN, POINCARÉ, JORDAN e di molti altri, si ha continuamente ricorso alla teoria delle sostituzioni per trattare delle questioni sulle equazioni differenziali.

(*) Nota presentata dal Presidente F. BRIOSCHI a nome del Socio E. BETTI.

(1) « Abh. d. Gesellschaft. d. Wiss. zu Göttingen. », Bd. VII, 1857.

(2) Riemann's Werke — Nachlass — s. 357.

Il legame fra le due teorie è però molto più intimo di quanto può risultare a primo aspetto, perché si può dimostrare che vi è una dipendenza diretta dell'una dall'altra, la quale pone anche in chiaro la stretta analogia che sussiste fra la integrazione delle funzioni e quella delle equazioni differenziali lineari. Si possono infatti trovare due operazioni infinitesimali sulle sostituzioni (i cui elementi si immaginano variabili) analoghe alla derivazione e alla integrazione ordinarie, le quali danno direttamente il passaggio dagli integrali fondamentali di una equazione differenziale lineare ai suoi coefficienti, e inversamente dai coefficienti agli integrali fondamentali.

Abbiasi una sostituzione lineare S di ordine n (a determinante sempre diverso da zero) i cui elementi sono funzioni finite e continue di una variabile x derivabili rispetto a questa variabile, e si consideri la sostituzione per due valori infinitamente vicini della variabile: x e $x+dx$. Denoteremo le due sostituzioni rispettivamente con S_x e S_{x+dx}.

Formiamo

$$S_x^{-1}\, S_{x+dx} \quad , \quad S_{x+dx}\, S_x^{-1} ;$$

queste saranno due sostituzioni infinitamente prossime alla identità, vale a dire tutti i loro elementi saranno infinitamente piccoli eccettuati quelli lungo la diagonale che differiranno infinitamente poco dalla unità. Tolta l'unità da questi elementi, dividiamo ogni termine per dx e passiamo al limite col far tendere il dx a zero. È facile dimostrare che le due sostituzioni limiti esistono, ed esse possono considerarsi come le due *derivate* della sostituzione S_x rapporto ad x, prese rispettivamente *a destra* e *a sinistra*.

Inversamente data una sostituzione T i cui elementi sono funzioni continue di una variabile x, si può dividere l'intervallo in cui essa è definita in n parti $h_1, h_2, \cdots, h_n$ e considerare le sostituzioni $T_1, T_2, \cdots, T_n$ corrispondenti a n valori di x compresi negli intervalli suddetti. Moltiplicati gli elementi di T_i per h_i e aggiunta l'unità a quelli in diagonale, si otterrà una sostituzione R_i che si avvicinerà indefinitamente alla identità coll'impiccolire indefinito di h_i.

Peraltro i due prodotti di sostituzioni

$$R_1\, R_2 \cdots R_n \quad , \quad R_n\, R_{n-1} \cdots R_2\, R_1$$

coll'impiccolire indefinito di $h_1\, h_2 \cdots h_n$ tenderanno in generale verso due sostituzioni limiti diverse dalla identità.

Questa operazione può chiamarsi *integrazione di una sostituzione* ed è evidente che, come la derivazione, essa può eseguirsi in due modi diversi che possono rispettivamente denotarsi con *integrazione a destra* e *a sinistra.*

Le operazioni così stabilite di derivazione e di integrazione sono inverse una dell'altra, vale a dire *se si integra a destra una sostituzione, e poi considerando la sostituzione integrale come funzione del limite superiore dell'intervallo di integrazione, si deriva a destra, si ritrova la sostituzione primitiva,* e lo stesso vale per le integrazioni e derivazioni a sinistra.

Come teorema fondamentale si ha che *la derivata a destra di una sostituzione non varia se si moltiplica a sinistra la sostituzione per una sostituzione costante, e che tutte le sostituzioni che hanno per derivata a destra una stessa sostituzione, debbono differire per sostituzioni costanti che moltiplicano a sinistra.*

Un teorema correlativo si ottiene per la derivazione a sinistra. Si ha inoltre la proprietà:

Derivando o integrando a destra o a sinistra la trasformata di una sostituzione variabile mediante una sostituzione costante, si ottiene come risultato la trasformata mediante la sostituzione costante della derivata o dell'integrale di quella variabile.

La proposizione che lega la teoria della integrazione e della derivazione delle sostituzioni colla teoria delle equazioni differenziali lineari è la seguente:

La integrazione di una equazione differenziale lineare omogenea di un ordine qualunque può ridursi alla integrazione di una sostituzione. Così l'integrale *sinistro* della sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \cdots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \cdots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \cdots, & 0, & 1 \\ p_n, & p_{n-1}, & p_{n-2}, & \cdots, & p_2, & 0 \end{pmatrix}$$

ove $p_2, p_3, \cdots p_n$ sono funzioni di x, è la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3, & \cdots, & v_{n-1}, & v_n \\ v'_1, & v'_2, & v'_3, & \cdots, & v'_{n-1}, & v'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{(n-1)}, & v_2^{(n-1)}, & v_3^{(n-1)}, & \cdots, & v_{n-1}^{(n-1)}, & v_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ove $v_1, v_2, \cdots, v_n$ rappresentano un sistema di integrali fondamentali della equazione differenziale

$$y^{(n)} = p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y.$$

Adoperando i simboli analoghi a quelli che si usano nel calcolo scriveremo

$$S = \int T \, dx \quad , \quad T = \frac{dS}{dx}.$$

Riconosciuto in tal modo il legame fra la teoria delle due operazioni infinitesimali sulle sostituzioni e quella delle equazioni differenziali lineari, risulta naturale il pensare che possa fondarsi una teoria delle equazioni differenziali lineari avente a base il *calcolo differenziale ed integrale delle sostituzioni*. - Con la scorta dei teoremi del calcolo e con metodo analogo a quello che si segue nello studio degli integrali delle funzioni, si potrà cercare quali dei teoremi già noti potranno estendersi alle sostituzioni, e con tale generalizzazione quali modificazioni subiranno; i teoremi così ottenuti potranno interpretarsi come altrettante proprietà relative alle equazioni differenziali lineari.

XVII.

SOPRA LE FUNZIONI CHE DIPENDONO DA ALTRE FUNZIONI

Nota I.

«Rend. Lincei», ser. IV, vol. III, 1887, pp.97-105 (*).

Mi permetto di accennare in questa Nota ad alcune considerazioni le quali servono a chiarire dei concetti che credo necessari introdurre per una estensione della teoria di RIEMANN sulle funzioni di variabili complesse, e che penso possano tornar giovevoli anche in varie altre ricerche.

§ 1. - FUNZIONI DIPENDENTI DA ALTRE FUNZIONI.

1. Seguendo il ben noto concetto del DIRICHLET si definisce attualmente una funzione nel seguente modo: una variabile è funzione di un'altra se, per ogni valore che questa prende entro certi limiti, la prima assume un dato valore.

Un tal concetto, che non implica nessuna relazione analitica fra l'una variabile e l'altra, discende molto naturalmente dalla considerazione di fenomeni nei quali due grandezze variano simultaneamente in modo che i valori dell'una dipendono da quelli dell'altra.

2. Così stabilito il concetto di funzione, si è portati molto naturalmente ad estenderlo.

Infatti in molte questioni di Fisica e di Meccanica, e nella integrazione di equazioni differenziali alle derivate parziali, capita di dover considerare delle quantità, che dipendono *da tutti i valori* che una o più funzioni di una variabile prendono in dati intervalli, o una o più funzioni di più variabili prendono in dati campi. Così per esempio la temperatura in un punto di una lamina conduttrice dipende da tutti i valori che la temperatura ha al contorno; lo spostamento infinitesimo di un punto di una superficie flessibile e inestendibile, dipende da tutte le componenti degli spostamenti dei punti del contorno, parallelamente ad una certa direzione.

In generale non si potrà dire che esista una legge, esprimibile analiticamente, mediante la quale il valore della quantità, che si considera, si deduca da tutti i valori della funzione data; ma talvolta potrà sussistere una tale dipendenza analitica, come per esempio nel caso in cui mediante delle qua-

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

drature o delle integrazioni di equazioni differenziali, nelle quali comparisce la funzione data, si può passare dai valori di questa al valore della quantità, che si considera.

Come è facile comprendere la estensione del concetto di funzione di cui ora parliamo differisce essenzialmente da quello ordinario di *funzione di funzione*.

3. Quando una quantità y dipenderà da tutti i valori di una funzione $\varphi(x)$ definita in un certo intervallo $(A \cdots B)$, diremo che *y dipende da $\varphi(x)$ entro* $(A \cdots B)$ e scriveremo

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} \right] \right|$$

o più semplicemente

$$y = y \left| [\varphi(x)] \right| .$$

Se y, oltre a dipendere dalla $\varphi(x)$, è una funzione di una variabile t, scriveremo

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}}, t \right] \right| .$$

Se una quantità y dipenderà da più funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ definite entro gli intervalli $A_1 B_1, A_2 B_2, \cdots$ rispettivamente, e da più variabili $t_1, t_2, \cdots$, porremo

$$y = y \left| \left[\varphi_1 \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}}, \varphi_2 \underset{A_2}{\overset{B_2}{(x)}}, \cdots, t_1, t_2, \cdots \right] \right| .$$

In tutto il corso di queste considerazioni ammetteremo sempre che le funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ da cui dipendono le quantità che si studiano, siano funzioni continue e che subiscano sempre delle variazioni continue.

Analogamente può considerarsi il caso in cui y dipenda da una funzione di più variabili $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ entro un campo σ; scriveremo allora

$$y = y \left| [\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)] \right| .$$

§ 2. - Variazione di una funzione che dipende da un'altra funzione.

4. Sia

$$y = y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} \right] \right| ;$$

diremo che y è continua se, data a $\varphi(x)$ una variazione $\psi(x)$ tale che in valore assoluto $\psi(x)$ sia sempre inferiore ad ε, la variazione corrispondente di y può rendersi inferiore a σ, piccolo ad arbitrio.

Se si suppone in generale che sia

$$y = y \left| \left[\varphi_1 \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}}, \varphi_2 \underset{A_2}{\overset{B_2}{(x)}}, \cdots \varphi_n \underset{A_n}{\overset{B_n}{(x)}}, t_1, t_2, \cdots, t_m \right] \right|$$

diremo che y è continua se, date alle $\varphi_i(x)$ delle variazioni $\psi_i(x)$ e alle t_i delle variazioni τ_i, tutte inferiori a ε in valore assoluto, la variazione corrispondente di y può rendersi inferiore a σ, piccolo ad arbitrio.

5. Per la y dipendente dalla $\varphi(x)$, oltre alla condizione della continuità, ammetteremo altre condizioni.

Preso un intervallo $h = mn$ entro AB, diamo alla $\varphi(x)$ una variazione continua $\theta(x)$ entro h, tale che $\theta(x)$ sia in valore assoluto inferiore ad ε, e denotiamo con δy la variazione corrispondente di y. Ammetteremo:

I. Che il rapporto $\delta y/\varepsilon h$ sia sempre inferiore ad un numero finito M.

Supponghasi ora $\theta(x)$ sempre dello stesso segno e si ponga $\int_m^n \theta(x)\,dx = \sigma$. Se rappresentiamo la funzione $\varphi(x)$ mediante una curva $z = \varphi(x)$, avremo che σ sarà l'area compresa fra questa curva e la curva variata. Porremo le condizioni:

II. Che facendo impiccolire indefinitamente ε ed h, in modo che questo intervallo contenga sempre nel suo interno un punto G di indice t, esista il limite determinato e finito del rapporto $\delta y/\sigma$.

III. Che il rapporto $\delta y/\sigma$ tenda verso il suo limite uniformemente rispetto a tutte le possibili funzioni $\varphi(x)$ e agli indici t.

Il limite $\delta y/\sigma$ dipenderà dalla $\varphi(x)$ e dall'indice t del punto G; lo denoteremo con

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$$

e lo chiameremo *derivata prima di y*. Ammetteremo:

IV. Che $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$ sia continua rispetto a $\varphi(x)$ e a t.

6. Ciò premesso passeremo a studiare la questione seguente:

Diamo alla $\varphi(x)$ una variazione continua nell'intervallo AB, variazione che denoteremo con $\varepsilon\psi(x)$; la variazione corrispondente di y indichiamola con Δy. Se facciamo variare ε potremo considerare Δy come funzione di ε. Si tratta di studiare il

$$\lim \frac{\Delta y}{\varepsilon}$$

per ε tendente indefinitamente a zero, ovvero

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon = 0}.$$

A tal fine consideriamo i tratti di AB nei quali $\psi(x)$ non è costantemente eguale a zero. In questi, mediante un numero finito di intervalli la cui somma può rendersi minore di un numero δ arbitrariamente piccolo, si possono togliere tutti i punti in cui $\psi(x)$ è eguale a zero. Dividiamo i tratti rimanenti in tanti intervalli $h_1, h_2, \cdots, h_n$.

In ciascuno di essi evidentemente la $\psi(x)$ conserva sempre un medesimo segno. Spezziamo ciascun intervallo $h_i = \mathrm{E}_i\,\mathrm{F}_i$ in tre parti k_i, l_i, m_i, e formiamo una funzione θ_i continua e sempre dello stesso segno, la quale sia nulla negli intervalli AE_i e $\mathrm{F}_i\,\mathrm{B}$, sia eguale a $\psi(x)$ entro l'intervallo l_i, e nei due intervalli adiacenti k_i e m_i sia sempre crescente o decrescente.

Prendiamo

$$\sum_1^n k_i + \sum_1^n m_i < \delta,$$

e si ponga

$$\psi(x) - \sum_1^n \theta_i(x) = \alpha(x).$$

La somma degli intervalli in cui $\alpha(x)$ è diversa da zero sarà inferiore a 2δ, quindi a cagione della condizione I, avremo in valore assoluto

$$y\,|[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)]| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^n \theta_i(x)\right]\right| < 2\,\delta \mathrm{MP}\varepsilon \tag{1}$$

denotando con P il massimo valore assoluto di $\psi(x)$.

Ora si ha

$$y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^n \theta_i(x)\right]\right| - y\,|[\varphi(x)]| \tag{2}$$

$$= \sum_1^n{}_r \left\{ y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^r{}_i\, \theta_i(x)\right]\right| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x)\right]\right| \right\}$$

ove

$$\sum_1^0{}_i\, \theta_i(x) = 0.$$

Poniamo

$$\int_A^B \theta_r(x)\,dx = \int_{E_r}^{F_r} \theta_r(x)\,dx = \sigma_r,$$

avremo

$$y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^r{}_i\, \theta_i(x)\right]\right| - y\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x)\right]\right|$$

$$= \varepsilon\sigma_r \left\{ y'\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1}{}_i\, \theta_i(x),\, t_r\right]\right| + \eta_r \right\},$$

ove t_r denota un punto compreso nell'intervallo h_r e, a cagione della condizione III, sarà possibile rendere η_r minore di un numero η piccolo ad arbitrio, purché ε e h_r siano inferiori ad un numero μ sufficientemente piccolo indipendente da r.

Per la continuità della derivata prima (condizione IV) avremo poi

$$y'\left|\left[\varphi(x) + \varepsilon\sum_1^{r-1} \theta_i(x),\, t_r\right]\right| = y'\left|\left[\varphi(x),\, t_r\right]\right| + \zeta_r,$$

e le ζ_r potranno rendersi tutte inferiori ad un numero ζ piccolo ad arbitrio, purché ε si prenda sufficientemente piccolo.

Ne segue che le relazioni (1) e (2) potranno scriversi

$$
(3) \qquad y \,|\, [\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] \,|\, - y \,|\, [\varphi(x)] \,|
$$

$$
= \varepsilon \sum_1^n{}_r \sigma_r \cdot y' \,|\, [\varphi(x), t_r] \,|\, + \varepsilon \sum_1^n \sigma_r (\eta_r + \zeta_r) + \vartheta (2\,\delta \mathrm{MP}\,\varepsilon),
$$

in cui ϑ è un numero compreso fra $+1$ e -1.

Ora

$$
\sigma_r = h_r \psi(t_r) + \tau (h_r \mathrm{D}_r + (k_r + m_r) \mathrm{P})
$$

essendo D_r l'oscillazione di $\psi(x)$ entro h_r e τ un numero compreso fra -1 e 1.

La (3) potrà quindi trasformarsi in

$$
y \,|\, [\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] \,|\, - y \,|\, [\varphi(x)] \,|
$$

$$
= \varepsilon \sum_1^n{}_r h_r \cdot \psi(t_r) y' \,|\, [\varphi(x), t_r] \,|\, + \varepsilon \sum_1^n \sigma_r (\eta_r + \zeta_r) + \vartheta' \xi\varepsilon
$$

ove

$$
\xi = (2\mathrm{M} + 1)\,\delta \mathrm{P} + \sum_1^n h_r \mathrm{D}_r .
$$

Dividendo per ε e passando al limite per $\varepsilon, \delta, h_1, h_2, \cdots, h_n$ tendenti tutte a zero, avremo

$$
(4) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \frac{y \,|\, [\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] \,|\, - y \,|\, [\varphi] \,|}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta y}{\varepsilon}
$$

$$
= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \psi(t) \cdot y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, dt.
$$

Il limite cercato è quindi ottenuto.

Il risultato trovato può anche esprimersi diversamente. La equazione precedente può scriversi

$$
\Delta y = \varepsilon \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \psi(t) \cdot y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, dt + \rho,
$$

ove ρ è un infinitesimo d'ordine superiore ad ε. La parte di primo ordine di Δy è quindi

$$
\varepsilon \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \psi(t) \cdot y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, dt
$$

che potremo denotare con

$$
\delta y \,|\, [\varphi(x)] \,| \quad \text{o} \quad \delta y.
$$

Posto

$$
\varepsilon\psi(t) = \delta\varphi(x),
$$

avremo

$$\delta y \,|\, [\varphi(x)] \,| = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| \cdot \delta\varphi(x) \cdot dt,$$

che si chiamerà la *variazione prima di y*.

7. Consideriamo ora

$$y' = y' \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t] \,|.$$

Manteniamo fisso t e facciamo variare $\varphi(x)$, e sottoponiamo $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$ a delle condizioni analoghe a quelle stabilite precedentemente; avremo che esisterà una derivata di y che potremo scrivere

$$y'' = y'' \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t, t_1] \,|$$

e che chiameremo la *derivata seconda di y*. Essa conterrà due parametri t e t_1.

Dimostreremo nel paragrafo seguente che y'' è simmetrica rispetto ai due parametri. Ponendo delle nuove condizioni, sempre analoghe alle precedenti, si troveranno le derivate terza, quarta, ecc. n^{esima}.

Questa dipenderà da n parametri

$$y^{(n)} = y^{(n)} \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t, t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}] \,|$$

e, come dimostreremo, sarà simmetrica rispetto a $t, t_1, \cdots, t_{n-1}$.

Abbiamo trovato

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \psi(t)\, dt.$$

Analogamente avremo

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{d^2 y}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} = \displaystyle\int_A^B \psi(t)\, dt \int_A^B y'' \,|\, [\varphi(x), t, t_1] \,|\, \psi(t_1)\, dt_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} = \displaystyle\int_A^B \psi(t)\, dt \int_A^B \psi(t_1)\, dt_1 \cdots \int_A^B \psi(t_n) \cdot y^{(n)} \,|\, [\varphi(x), t \cdots t_{n-1}] \,|\, dt_{n-1}; \end{array} \right.$$

che potremo scrivere ancora

$$(6)\quad \left(\frac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} \int\!\!\int_A^B \cdots \int \prod_1^n{}_i\, \psi(t_i) \cdot y^{(n)} \,|\, [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_n] \,|\, dt_1 \cdots dt_n.$$

§ 3. – Estensione della formola del Taylor.

8. Abbiasi

$$y \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}} \right] \right|$$

e diamo a $\varphi(x)$ un accrescimento $\psi(x)$.

Posto

$$y = y \left| \left[\varphi(x) + \varepsilon\psi(x) \right] \right|$$

e supponendo ε variabile fra 0 e 1, avremo

$$y(\varepsilon)_{\varepsilon=0} = y \left| \left[\varphi(x) \right] \right|,$$
$$y(\varepsilon)_{\varepsilon=1} = y \left| \left[\varphi(x) + \psi(x) \right] \right|.$$

Quindi per un noto teorema

$$y \left| \left[\varphi(x) + \psi(x) \right] \right| - y \left| \left[\varphi(x) \right] \right| = \left(\frac{dy}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\theta},$$

essendo θ un numero compreso fra 0 e 1.

Poniamo

$$\varepsilon = \theta + \varepsilon',$$

avremo

$$\left(\frac{dy}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\theta} = \left(\frac{dy}{d\varepsilon'} \right)_{\varepsilon'=0} = \int_A^B y' \left| \left[\varphi(x) + \theta\psi(x), t \right] \right| \psi(t)\, dt,$$

e per conseguenza

$$y \left| \left[\varphi(x) + \psi(x) \right] \right| - y \left| \left[\varphi(x) \right] \right| = \int_A^B y' \left| \left[\varphi(x) + \theta\psi(x), t \right] \right| \psi(t)\, dt.$$

Supponiamo $\psi(x)$ sempre dello stesso segno e diverso da zero solo nell'intervallo $A_1 B_1$ entro AB, avremo

$$y \left| \left[\varphi(x) + \psi(x) \right] \right| - y \left| \left[\varphi(x) \right] \right| = y' \left| \left[\varphi(x) + \theta\psi(x), t_1 \right] \right| \int_A^B \psi(t)\, dt,$$

essendo t_1 un punto intermedio fra A_1 e B_1.

Ora

$$\int_A^B \psi(t)\, dt = S$$

è l'area compresa fra le due curve

$$z = \varphi(x) \qquad \text{e} \qquad z = \varphi(x) + \psi(x),$$

quindi

$$y \left| \left[\varphi(x) + \psi(x) \right] \right| - y \left| \left[\varphi(x) \right] \right| = y' \left| \left[\varphi(x) + \theta\psi(x), t \right] \right| \cdot S. \tag{7}$$

9. Consideriamo due intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ entro AB e due funzioni continue $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ che non mutano mai segno e sono diverse da zero solo entro i due intervalli precedenti ciascuna rispettivamente.

Formiamo la espressione

$$M = y|[\varphi(x)+\psi_1(x)+\psi_2(x)]| - y|[\varphi(x)+\psi_1(x)]| - y|[\varphi(x)+\psi_2(x)]| + y|[\varphi(x)]|;$$

essa potrà scriversi in due modi diversi

$$M = u|[\varphi(x)+\psi_2(x)]| - u|[\varphi(x)]|,$$

$$M = v|[\varphi(x)+\psi_1(x)]| - v|[\varphi(x)]|,$$

ove si è posto

$$u|[\varphi(x)]| = y|[\varphi(x)+\psi_1(x)] - y|[\varphi(x)]|,$$

$$v|[\varphi(x)]| = y|[\varphi(x)+\psi_2(x)] - y|[\varphi(x)]|.$$

Denotando con S_1 e S_2 le aree rispettivamente comprese fra le curve

$$z = \varphi(x) \quad , \quad z = \varphi(x) + \psi_1(x),$$

$$z = \varphi(x) \quad , \quad z = \varphi(x) + \psi_2(x),$$

e applicando la formola (7) avremo

$$u|[\varphi(x)+\psi_2(x)]| - u|[\varphi(x)]| = u'|[\varphi(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2]|S_2,$$

$$v|[\varphi(x)+\psi_1(x)]| - v|[\varphi(x)]| = v'|[\varphi(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1]|S_1,$$

ove θ'_2 o θ'_1 denotano due numeri compresi fra 0 e 1, e t'_1 e t'_2 sono due valori fra A_1 e B_1, A_2 e B_2.

Ora

$$u'|[\varphi(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2]| = y'|[\varphi(x)+\psi_1(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2]|$$
$$- y'|[\varphi(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2]|,$$

$$v'|[\varphi(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1]| = y'|[\varphi(x)+\psi_2(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1]|$$
$$- y'|[\varphi(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1]|;$$

onde applicando nuovamente la formula (7) avremo

$$u'|[\varphi(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2]| = y''|[\varphi(x)+\theta''_1\psi_1(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2, t''_1]|\cdot S_1,$$

$$v'|[\varphi(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1]| = y''|[\varphi(x)+\theta''_2\psi_2(x)+\theta'_1\psi_1(x), t'_1, t''_2]|\cdot S_2,$$

essendo al solito θ''_1 e θ''_2 numeri compresi fra 0 e 1, e t''_1 e t''_2 dei valori compresi negli intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$. Ne segue che

$$M = y''|[\varphi(x)+\theta''_1\psi_1(x)+\theta'_2\psi_2(x), t'_2, t''_1]|S_1 S_2,$$

$$M = y''|[\varphi(x)+\theta'_1\psi_1(x)+\theta''_2\psi_2(x), t'_1, t''_2]|S_1 S_2,$$

quindi

$$y'' \mid [\varphi(x) + \theta_1'' \psi_1(x) + \theta_2' \psi_2(x), t_2', t_1''] \mid = \mid [\varphi(x) + \theta_1' \psi_1(x) + \theta_2'' \psi_2(x), t_1' t_2''] \mid,$$

Si supponga ora che

$$y'' \mid [\varphi(x), t_1, t_2] \mid$$

sia continua rispetto a $\varphi(x), t_1, t_2$; facendo impiccolire indefinitamente le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ e i due intervalli $A_1 B_1$ e $A_2 B_2$ e facendoli tendere verso due punti t_1 e t_2, per la formula precedente, avremo

$$y'' \mid [\varphi(x), t_1, t_2] \mid = y'' \mid [\varphi(x), t_2, t_1] \mid,$$

il che dimostra la simmetria della derivata seconda rispetto ai due parametri t_1 e t_2.

Analogamente si dimostrerebbe la simmetria rispetto ai parametri che compariscono nelle derivate successive.

10. Consideriamo ora

$$y \mid [\varphi(x) + \varepsilon\psi(x)] \mid$$

come una funzione di ε e supponiamo che $y \mid [\varphi(x)] \mid$ ammetta le successive derivate colle condizioni precedentemente stabilite.

Applicando la formula del TAYLOR avremo

$$y_{\varepsilon=1} = y_{\varepsilon=0} + \left(\frac{dy}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} + \cdots + \frac{1}{\pi(n)}\left(\frac{d^n y}{d\varepsilon^n}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{1}{\pi(n+1)}\left(\frac{d^{n+1} y}{d\varepsilon^{n+1}}\right)_{\varepsilon=\theta}$$

con θ compreso tra 0 e 1.

Quindi per le (3) del § 2, si avrà

$$(8) \qquad y \mid [\varphi(x) + \psi(x)] \mid = y \mid [\varphi(x)] \mid$$
$$+ \sum_1^n \frac{1}{\pi(i)} \int\!\!\int_A^B \cdots \int y^{(i)} \mid [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_i] \mid \prod_1^i{}_r \psi(t_r) \cdot dt_1 \cdots dt_i$$
$$+ \frac{1}{\pi(n+1)} \int\!\!\int_A^B \cdots \int y^{(n+1)} \mid [\varphi(x) + \theta\psi(x), t_1 \cdots t_{n+1}] \mid \prod_1^{n+1}{}_r \psi(t_r)\, dt_1 \cdots dt_{n+1}.$$

Se il limite dell'ultimo termine è zero per $n = \infty$, avremo,

$$(9) \qquad y \mid [\varphi(x) + \psi(x)] \mid = y \mid [\varphi(x)] \mid$$
$$+ \sum_1^\infty \frac{1}{\pi(n)} \int\!\!\int_A^B \cdots \int y^{(n)} \mid [\varphi(x), t_1, t_2 \cdots t_n] \mid \prod_1^n{}_r \psi(t_r) \cdot dt_1\, dt_2 \cdots dt_n,$$

che è una estensione della serie del TAYLOR. Colle condizioni poste abbiamo quindi una espressione mediante integrali definiti di una quantità che dipende da una funzione $\psi(x)$, giacché nella formula precedente possiamo supporre $\varphi(x)$ invariabile e $\psi(x)$ variabile.

Nota II.

Ibidem, pp. 141–146 (*).

§ 4. Funzioni dipendenti da un'altra funzione con punti eccezionali.

11. Nei paragrafi precedenti, studiando

$$y = y \left| [\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}}] \right|$$

abbiamo assoggettato la $\varphi(x)$ alla sola condizione di essere continua. È facile vedere che i risultati già trovati non subirebbero modificazioni supponendo che $\varphi(x)$ e le sue variazioni dovessero avere le derivate prime, seconde, terze, ecc.

12. Abbiamo pure supposto nei § precedenti che y dipendesse dai valori di $\varphi(x)$ entro AB in modo tale (condizione I, § 2) che, variando $\varphi(x)$ entro un intervallo h di meno di ε e facendo impiccolire indefinitamente ε e h, la variazione corrispondente della y fosse un infinitesimo d'ordine non inferiore a εh.

Peraltro può presentarsi il caso che per gli intorni di certi punti entro AB questa condizione non si verifichi. Supporremo che se si esclude dall'intervallo AB il punto C, mediante un intorno arbitrariamente piccolo di questo punto, nelle parti rimanenti vengano soddisfatte le condizioni stabilite nei paragrafi precedenti, e considereremo varî casi.

13. 1° *Caso.* - *Preso un intorno h del punto* C *e in esso variando $\varphi(x)$ meno di ε, sia*

$$\lim_{\substack{h=0 \\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = 0, \tag{10}$$

essendo Δy l'accrescimento corrispondente di y.

Preso un valore di t diverso dal valore dell'indice x_1 del punto C, la

$$y' \left| [\varphi(x), t] \right|$$

sarà finita e continua rispetto a t. Cominciamo dal dimostrare che se $\psi(x)$ è continua ed è sempre inferiore ad un valore finito M

$$\int_A^B y' \left| [\varphi(x), t] \right| \psi(t)\, dt$$

esiste ed ha un valore determinato e finito.

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

Infatti, mediante un intorno $h = mn$ di x_1, separiamo questo punto dai rimanenti dell'intervallo AB. A cagione della condizione (10), basterà prendere ε e h minori di un valore δ, perché si abbia

$$\frac{\Delta y}{\varepsilon} < \sigma,$$

essendo σ piccolo ad arbitrio. Prendiamo pertanto un intervallo $(mn) < \delta$ e fissiamo due punti p, q compresi fra m e x_1, oppure fra x_1 e n. Diamo a $\varphi(x)$ una variazione *continua* $\eta\theta(x)$, tale che $\theta(x)$ sia nulla fra A e p e fra q e B, eguale a $\psi(t)$ fra $p+k$ e $q-k$ e sempre crescente o sempre decrescente nei due intervalli $(p, p+k)$, e $(q-k, q)$. Basterà che si abbia

$$\eta < \frac{\delta}{M},$$

in valore assoluto, perché sia

$$\frac{y\,|[\varphi(x) + \eta\theta(x)]| - y\,|[\varphi(x)]|}{\eta M} < \sigma$$

ovvero

$$\frac{y\,|[\varphi(x) + \eta\theta(x)]| - y\,|[\varphi(x)]|}{\eta} < M\sigma.$$

Facciamo tendere η a zero, avremo al limite

$$\int_p^q y'\,|[\varphi(x), t]|\,\theta(t)\,dt \leq M\sigma,$$

ovvero

$$\int_{p+k}^{q-k} y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt + 2\vartheta k L M \leq M\sigma,$$

essendo L il limite superiore dei valori assoluti di $y'\,|[\varphi(x), t]|$ entro (pq) e ϑ essendo compreso fra -1 e $+1$. Poiché la relazione precedente vale qualunque sia k, così dovremo avere

$$\int_p^q y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt \leq M\sigma.$$

Questa relazione ci dimostra che gli integrali definiti singolari soddisfano alla condizione voluta, affinché

$$\int_A^B y'\,|[\varphi(x), t]|\,\psi(t)\,dt$$

esista e sia determinato e finito.

Ciò premesso abbiasi

$$y\,|[\varphi(x) + \eta\psi(x)]|.$$

Si prenda un intorno $m_1 n_1$ di x_1 entro mn e $\theta(x)$ eguale a $\psi(x)$ fra A e m e fra n e B, eguale a zero fra m_1 e n_1 e sempre crescente o sempre decrescente negli intervalli $mm_1 = nn_1 = k$. Avremo

$$\psi(x) = \theta(x) + \alpha(x),$$

e $\alpha(x)$ potrà essere diversa da zero soltanto nell'intervallo mn, ove avrà un valore non superiore a $2\mathrm{M}$.

Ora

$$y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|$$

$$= y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| + y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|.$$

Prendasi

$$\eta < \frac{\delta}{2\mathrm{M}} \qquad \text{e} \qquad mn < \delta,$$

avremo in valore assoluto

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta} < 2\mathrm{M}\sigma.$$

Si ha poi

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x)]\,|}{\eta} = \int_{\mathrm{A}}^{m_1} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x), t]\,|\,\theta(t)\,dt$$

$$+ \int_{n_1}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x), t]\,|\,\theta(t)\,dt,$$

essendo ϑ compreso fra -1 e 1; quindi

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta} = \int_{\mathrm{A}}^{m} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt$$

$$+ \int_{n}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x) + \eta\alpha(x) + \vartheta\eta\theta(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt + \vartheta_1(2\mathrm{M}\sigma + 2k\mathrm{LM}),$$

in cui L denota il limite superiore dei valori di $y'\,|\,[\varphi(x) + \lambda(x), t]\,|$ negli intervalli mm_1 e nn_1. Facciamo ora impiccolire indefinitamente η e contemporaneamente anche k, si potrà fare in modo che il rapporto

$$\frac{y\,|\,[\varphi(x) + \eta\psi(x)]\,| - y\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\eta}$$

venga a differire da

$$\int_{\mathrm{A}}^{m} y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt + \int_{n}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt$$

meno di $2\mathrm{M}\sigma$; ma possiamo prendere $\delta > mn$ così piccolo, che la somma precedente differisca tanto poco quanto si vuole da

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} y'\,|\,[\varphi(x), t]\,|\,\psi(t)\,dt,$$

e σ si riduca minore di qualunque quantità assegnabile. Dunque

$$\lim_{\eta=0} \frac{y \,|\, [\varphi(x) + \eta\psi(x)] \,|\, - y \,|\, [\varphi(x)] \,|}{\eta} = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \, \psi(t) \, dt;$$

e quindi anche in questo caso potremo porre

$$\delta y \,|\, [\varphi(x)] \,| = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t) \, dt.$$

Se la singolarità considerata invece di presentarsi nel punto C soltanto si verificasse in più punti entro AB, purché fosse sempre per tutti soddisfatta la condizione (10), si giungerebbe pure ai precedenti risultati.

14. 2^o *Caso. - Diamo in un intorno h di* C *(indice x_1) un accrescimento alla $\varphi(x)$ minore di ε, tale che in x_1 il valore dell'accrescimento sia ρ e supponiamo che coll'impiccolire indefinito di ε e di h sia*

$$\lim_{\substack{h=0\\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = a_1 \lim \frac{\rho}{\varepsilon},$$

essendo a_1 un valore determinato e finito.

Per trattare questo secondo caso consideriamo

$$z \,|\, [\varphi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi(x)] \,| - a_1 \varphi(x_1).$$

Diamo a $\varphi(x)$ nell'intorno h di x_1 l'accrescimento $\psi(x)$ eguale a ρ nel punto x_1 e inferiore a ε, avremo

$$\Delta z = z \,|\, [\varphi(x) + \psi(x)] \,| - z \,|\, [\varphi(x)] \,| = \Delta y - a_1 \rho,$$

quindi

$$\frac{\Delta z}{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{\varepsilon} - a_1 \frac{\rho}{\varepsilon},$$

e perciò

$$\lim_{\substack{h=0\\ \varepsilon=0}} \frac{\Delta z}{\varepsilon} = 0,$$

il che riconduce per la $z \,|\, [\varphi(x)] \,|$ al caso precedente. Ora è evidente che per

$$t \gtrless x_1, \; z' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|,$$

quindi

$$\delta z = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi \cdot dt$$

e dalla relazione

$$\delta z = \delta y - a_1 \, \delta\varphi(x_1)$$

segue

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t) \cdot dt + a_1 \,\delta\varphi(x).$$

Quando ci troveremo in questo secondo caso, per mettere in evidenza la proprietà che ha la y in x_1, si porrà

$$y = y \,|\, [\varphi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}] \,|\, (\varphi(x_1))$$

e si dirà che y *oltre che da* $\varphi(x)$ *in tutto* AB, *dipende specialmente dal valore di* $\varphi(x)$ in x_1.

In generale la quantità a_1 dipenderà da $\varphi(x)$; la denoteremo con

$$y'_{\varphi(x_1)} \,|\, [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}] \,|$$

e quindi

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|\, \delta\varphi(t) \cdot dt + y'_{\varphi(x_1)} \,\delta\varphi(x_1).$$

Se ciò che vale pel punto x_1 valesse anche per i punti $x_2, x_3, \ldots x_n$ entro AB, porremmo

$$y = y \,|\, [\varphi(x)] \,|\, (\varphi(x_1), (\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n))$$

e

$$\delta y = \int_A^B y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| \cdot \delta\varphi(t)\, dt + \sum_1^n y'_{\varphi(x_i)} \,\delta\varphi(x_i).$$

15. 3° *Caso.* — *Supponiamo che* $\varphi(x)$ *e le sue variazioni debbano possedere le prime* m_1 *derivate. Diamo a* $\varphi(x)$ *una variazione entro un intorno* h *di* x_1 *tale che la variazione stessa e le sue prime* m_1 *derivate siano inferiori a* ε *e rispettivamente eguali a* $\rho_0, \rho_1 \cdots \rho_{m_1}$ in x_1. *Facciamo impiccolire indefinitamente* ε *ed* h *in modo che, se* ρ_i/ε *tende verso* k_i, *denotando con* Δy *l'accrescimento di* y, *sia:*

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ h=0}} \frac{\Delta y}{\varepsilon} = \sum_0^{m_1} a_p\, k_p$$

essendo a_p *valori determinati e finiti.*

Se poniamo

$$z \,|\, [\varphi(x)] \,| = y \,|\, [\varphi(x)] \,| - \sum_0^{m_1} a_p\, \varphi^{(p)}(x_1)$$

e diamo a $\varphi(x)$ un accrescimento $\psi(x)$ diverso da zero solo entro h, inferiore ad ε e tale che $\psi^{(p)}(x_1) = \rho_p$ avremo

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ h=0}} \frac{\Delta z}{\varepsilon} = \lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ h=0}} \frac{z\,|\,[\varphi(x)+\psi(x)]\,| - z\,|\,[\varphi(x)]\,|}{\varepsilon} = 0.$$

La $z\,|\,[\varphi(x)]\,|$ soddisfa quindi alle condizioni poste nel primo caso trattato, per conseguenza

$$\delta z = \int_A^B z'\,|\,[\varphi(x)\,,\,t]\,|\,\delta\varphi(t)\,dt$$

e poiché per $t \gtrless x_1$

$$z'\,|\,[\varphi(x)\,,\,t]\,| = y'\,|\,[\varphi(x)\,,\,t]\,|,$$

così

$$\delta y = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x)\,,\,t]\,|\,\delta\varphi(t)\,dt + \sum_0^{m_1} a_p \cdot \delta\varphi^{(p)}(x_1).$$

Se ciò che vale pel punto x_1, valesse anche analogamente per i punti $x_2\,, x_3\,,\cdots, x_n$, allora

$$\delta y = \int_A^B y'\,|\,[\varphi(x)\,,\,t]\,|\,\delta\varphi(t)\cdot dt + \sum_1^n{}_i \sum_1^{m_i}{}_p\, a_{pi}\,\delta\varphi^{(p)}(x_i),$$

e si scriverebbe

$$y = y\,|\,[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}]\,|\,(\varphi(x_1)\,,\,\varphi'(x_1)\cdots\varphi^{m_1}(x_1)\cdots\varphi(x_n)\cdots\varphi^{m_n}(x_n)),$$

cioè y oltre che da $\varphi(x)$ in tutto AB, dipenderebbe *specialmente* dai valori di $\varphi(x)$ nei punti $x_1\,, x_2\cdots x_n$ e dalle sue derivate, rispettivamente degli ordini $m_1\,, m_2\cdots m_n$, prese nei punti stessi.

Le a_{pi} dipendono da $\varphi(x)$. Porremo

$$a_{pi} = y'_{\varphi^{(p)}(x_i)}\,|\,[\varphi(x)]\,|.$$

Le quantità $y'_{\varphi^{(p)}(x_i)}$ godono di varie notevoli proprietà, ma per brevità tralasceremo di esporle, accennando invece a qualche esempio per chiarire ciò che fu detto fin qui.

Nota III.

Ibidem, pp. 153-158 (*).

§ 5. - QUESTIONI PARTICOLARI.

17. Cominciamo dal supporre

$$y' \left| \left[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}} , t \right] \right|$$

sempre eguale a zero per tutti i valori di t e di $\varphi(x)$. In tal caso se y *non* dipende *specialmente* da valori di $\varphi(x)$ e delle sue derivate in punti dell'intervallo (AB), avremo che

$$y \left| \left[\varphi(x) \right] \right|$$

sarà costante per ogni possibile $\varphi(x)$.

18. Supponiamo ora che

$$y' \left| \left[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}} , t \right] \right|$$

sia nullo, ma che y dipenda dai valori di $\varphi(x)$ e delle derivate $\varphi'(x)$, $\varphi''(x) \cdots \varphi^{m_i}(x)$ nei punti x_i, $(i = 1, 2 \cdots n)$. In questo caso avremo che y sarà una funzione nel senso ordinario di $\varphi(x_i)$, $\varphi'(x_i) \cdots \varphi^{m_i}(x_i)$, $(i = 1, 2 \cdots n)$.

19. Se si considera la derivata prima di

$$y' \left| \left[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}} , t \right] \right| ,$$

può avvenire che essa dipenda *specialmente* dai valori di $\varphi(x)$ e delle sue derivate in certi punti dell'intervallo AB; in particolare può avvenire che dipenda *specialmente* dal valore di $\varphi(x)$ e delle sue derivate nel punto t.

Suppongasi

$$y' \left| \left[\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}} , t \right] \right| = F(\varphi(t))$$

ove F è il simbolo di una funzione ordinaria.

Pongasi $F(z) = d\Psi / dz$, e

$$\eta = \int_A^B \Psi(\varphi(t)\, dt.$$

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

Avremo

$$\delta\eta = \int_A^B F(\varphi(t))\,\delta\varphi(t)\,dt,$$

quindi

$$\eta' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$$

e (vedi Art. 17)

$$y = \eta + C$$

essendo C costante. Ne segue che

$$y = C + \int_A^B \Psi(\varphi(t))\,dt.$$

In generale se si ha

$$y = \int_A^B F(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots \varphi^{(m)}(t))\,dt$$

avremo, come è ben noto,

$$\delta y = \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} + \cdots \pm \frac{d^m}{dt^m}\frac{\partial F}{\partial \varphi^{(m)}}\right)\delta\varphi(t)\,dt + \sum_0^{m-1} N_p\,\delta\varphi^{(p)}(B) - \sum_0^{m-1} M_p\,\delta\varphi^{(p)}(A)$$

e quindi

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} + \cdots\right)_{x=t}.$$

20. Abbiasi

$$y \,|\, [\varphi(x)] \,| = \int_A^B dt \int_A^B F(\varphi(t), \varphi(t_1))\,dt_1.$$

Per calcolare $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$, osserviamo che, posto $\varphi(t) = z$, $\varphi(t_1) = z_1$, si ha

$$\delta y = \int_A^B dt \int_A^B \left(\frac{\partial F}{\partial z}\,\delta\varphi(t) + \frac{\partial F}{\partial z_1}\,\delta\varphi(t_1)\right) dt_1.$$

Poniamo

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \Phi(z, z_1) \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = \Phi_1(z, z_1)$$

avremo

$$\delta y = \int_A^B \delta\varphi(t)\,dt \int_A^B \Phi(z, z_1)\,dt_1 + \int_A^B \delta\varphi(t_1)\,dt_1 \int_A^B \Phi_1(z, z_1)\,dt.$$

Chiamando $\overline{\Phi}_1(z, z_1)$ la funzione che si ottiene da $\Phi_1(z, z_1)$ scambiando z con z_1, avremo

$$\delta y = \int_A^B \delta\varphi(t)\, dt \int_A^B \left\{ \Phi(z, z_1) + \overline{\Phi}_1(z, z_1) \right\} dt_1$$

e quindi

$$y' \,|\, [\varphi(x), t] \,| = \int_A^B \left\{ \Phi(z, z_1) + \overline{\Phi}_1(z, z_1) \right\} dt_1 .$$

Manteniamo ora fisso t e facciamo variare $\varphi(x)$, avremo

$$\delta y' \,|\, [\varphi(x), t] = \int_A^B \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z} \right) \delta\varphi(t) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} \right) \delta\varphi(t_1) \right\} dt_1$$

$$= \delta\varphi(t) \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z} \right) dt_1 + \int_A^B \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} \right) \cdot \delta\varphi(t_1) \cdot dt_1 .$$

Avremo dunque che $y' \,|\, [\varphi(x), t] \,|$, oltre a dipendere da $\varphi(x)$ in generale, dipenderà specialmente dal valore di $\varphi(x)$ nel punto t.

Si avrà

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t, t_1] \,| = \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} .$$

Ora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_1} = \Psi(z, z_1)$$

e $\dfrac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1}$ si otterrà da $\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial z_1}$ scambiando z con z_1, dunque

$$\frac{\partial \overline{\Phi}_1}{\partial z_1} = \overline{\Psi}(z, z_1)$$

e perciò

$$y'' \,|\, [\varphi(x), t, t_1] \,| = \Psi(z, z_1) + \overline{\Psi}(z, z_1)$$

il che dimostra la simmetria di y'' rispetto a t e a t_1.

21. Abbiasi una equazione differenziale in y

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \cdots \frac{d^n y}{dx^n}, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots \varphi^{(m)}(x)\right) = 0 \tag{11}$$

in cui $\varphi(x)$ è una funzione arbitraria. Se supponiamo dati i valori di $y, y', \cdots y^{(n-1)}$ nel punto $x = A$, il valore Y di y in un dato punto B dipenderà dalla $\varphi(x)$ in tutto l'intervallo AB, e potremo quindi porre

$$Y = Y \,|\, [\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}}] \,| .$$

La questione che vogliamo risolvere consiste nel determinare $Y' \left| [\varphi \overset{B}{\underset{A}{(x)}}, t] \right|$.
Questa questione comprende come caso particolare l'altra considerata nel § 19.

Variamo la equazione data. Posto

$$\frac{df}{dy^{(i)}} = a_i \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi^{(i)}} = b_i \,,$$

avremo

$$\sum_0^n a_i \frac{d^i \delta y}{dx^i} + \sum_0^m b_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} = 0.$$

Moltiplichiamo per una funzione indeterminata λ e integriamo fra A e B, avremo

$$\int_A^B \lambda \left\{ \sum_0^n{}_i\, a_i \frac{d^i \delta y}{dx^i} + \sum_0^m b_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \right\} dx = 0$$

e mediante integrazioni per parti

$$0 = \left[\sum_0^{n-1}{}_i\, p_i \frac{d^i \delta y}{dx} \right]_A^B + \left[\sum_0^{m-1}{}_i\, q_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \right]_A^B$$

$$+ \int_A^B \left\{ \delta y \sum_0^n (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda a_i) + \delta\varphi \sum_0^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda b_i) \right\} dx$$

ove

$$p_r = \sum_1^{n-r}{}_i (-1)^{n-r-i} \frac{d^{n-r-i}}{dx^{n-r-i}} (\lambda a_{n-i+1})$$

$$q_r = \sum_1^{m-r}{}_i (-1)^{m-r-i} \frac{d^{m-r-i}}{dx^{m-r-i}} (\lambda a_{m-i+1}).$$

Ora

$$\left(\frac{d^i \delta y}{dx^i} \right)_{x=A} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \cdots, n-1),$$

e poiché λ è in nostro arbitrio scegliamolo in modo che sia soddisfatta la equazione

$$\sum_0^n{}_i (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda a_i) = 0; \tag{12}$$

avremo

$$\sum_0^{n-1}{}_i\, P_i \frac{d^i \delta Y}{dB^i} = - \left[\sum_0^{m-1}{}_i\, q_i \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i} \right]_A^B - \int_A^B \delta\varphi \sum_0^m (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} (\lambda b_i)\, dx \tag{13}$$

ove P_i è il valore di p_i per $x = B$.

La funzione λ soddisfa alla equazione differenziale lineare e omogenea (12) di ordine n. Scegliamo un sistema di integrali fondamentali di essa e denotiamoli con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1}$. Avremo

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_0 & , \dfrac{d\lambda_0}{dx}, \ldots, & \dfrac{d^{n-1}\lambda_0}{dx^{n-1}} \\ \lambda_1 & , \dfrac{d\lambda_1}{dx}, \ldots, & \dfrac{d^{n-1}\lambda_1}{dx^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n-1}, & \dfrac{d\lambda_{n-1}}{dx}, \ldots, & \dfrac{d^{n-1}\lambda_{n-1}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

La (13) sussisterà sostituendo successivamente $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{n-1}$ in luogo di λ. Denotiamo con P_{is} il valore di P_i quando si pone in esso λ_s in luogo di λ. Otterremo in tal modo n equazioni lineari i cui secondi membri potremo ritenere come noti e nei quali

$$\delta Y \quad , \quad \frac{d}{dB}\delta Y, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dB^{n-1}}\delta Y$$

figureranno come incognite.

Il determinante dei coefficienti sarà

$$\begin{vmatrix} P_{00} & , P_{01} & , \ldots, P_{0,n-1} \\ P_{10} & , P_{11} & , \ldots, P_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1,0}, & P_{n-1,1}, & \ldots, P_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \pm A_n^n D,$$

quindi diverso da zero. Se chiamiamo M_{is} il determinante reciproco di P_{is}, avremo

$$\delta Y = -\frac{1}{\pm A_n^n D}\left[\sum_0^{m-1}{}_i \sum_0^{n-1}{}_s q_{is} M_{s0} \frac{d^i \delta\varphi}{dx^i}\right]_A^B$$

$$-\frac{1}{\pm A_n^n D}\int_A^B \left\{ \sum_0^m{}_i \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda_s b_i)\cdot M_{s0} \right\} \delta\varphi \cdot dx.$$

La Y dipende dunque *specialmente* dai valori di $\delta\varphi$ e delle sue derivate fino alle $(n-1)^{esime}$ nei punti A e B, e si ha poi,

$$Y' \mid [\varphi(t), x] \mid = -\frac{1}{\pm A_n^n D}\left\{ \sum_0^m{}_i \sum_0^{n-1}{}_s (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}(\lambda_s b_i)\cdot M_{s0} \right\}.$$

La determinazione di Y′ è quindi ridotta alla integrazione della equazione differenziale (12).

22. Le formule trovate conducono molto semplicemente alla risoluzione del problema del cambiamento della *funzione* da cui dipende una data quantità. Così se due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ saranno legate da una relazione differenziale

$$F(\varphi^{(n)}(x), \varphi^{(n-1)}(x), \ldots, \varphi(x), \psi^{(m)}(x), \psi^{(m-1)}(x), \ldots, \psi(x)) \; 0$$

troveremo in generale, applicando le dette formule, $y' \left| \left[\psi \underset{A_1}{\overset{B_1}{(x)}}, t \right] \right|$ quando si conosce $y' \left| \left[\varphi \underset{A}{\overset{B}{(x)}}, t \right] \right|$ e reciprocamente.

XVIII.

SOPRA LE FUNZIONI DIPENDENTI DA LINEE

Nota I.

« Rend. Lincei », ser. IV, vol. III 1887, pp. 225-230 (*)

Art. I.

1. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare recentemente [1], ho considerato le quantità che dipendono dai valori di una funzione continua in un dato intervallo. Lo studio di tale dipendenza è analogo a quello delle funzioni di una variabile. Ora è ben nota l'utilità della rappresentazione geometrica del campo di variabilità d'una funzione. È perciò che invece di parlare di funzioni di una variabile reale, si usa spesso parlare di funzioni dei punti di una linea e invece di parlare di funzioni di due o di tre variabili, è utile parlare di funzioni dei punti di un campo a due o a tre dimensioni.

2. Una immagine geometrica analoga si potrà avere per le funzioni che dipendono da un'altra funzione. Così per esempio preso un certo campo a due dimensioni potremo considerare tutte le linee continue che possono tracciarsi in esso e ad ognuna di tali linee potremo far corrispondere un valore di una variabile. Otterremo ciò che si chiamerà una *funzione di una linea entro il campo* S. Potremmo porre la condizione che queste linee dovessero essere rientranti, in tal caso si avrebbe una *funzione delle linee chiuse del campo.*

Analogamente prendiamo un campo a tre dimensioni e consideriamo tutte le linee chiuse possibili che possono tracciarsi entro di esso, e ad ognuna di tali linee percorsa in una certa direzione facciamo corrispondere il valore di una variabile; avremo ciò che potrà chiamarsi una *funzione delle linee chiuse del campo a tre dimensioni.*

Una tale idea è famigliare ai fisici; essa si presenta spontaneamente quando si pensa a certi fenomeni elettrici.

Si consideri una corrente elettrica che percorra un circuito lineare chiuso con intensità eguale ad 1 e che si trovi in un campo magnetico. La energia potenziale della corrente dipenderà soltanto dalla forma, dalla posizione del circuito e dal senso in cui la corrente lo percorre; quindi ad ogni linea chiusa

(*) Presentata dal Socio E. Betti.

(1) « Rend. Lincei », ser. IV, vol. III, 1887, pp. 97-105, 141-146, 153-158; [in questo vol. XVII, pp. 293-313].

che si traccerà nel campo magnetico percorsa in una certa direzione, corrisponderà un valore della energia potenziale. Siamo per conseguenza nel caso di una funzione delle linee chiuse di un campo a tre dimensioni.

3. Per alcuni studi che spero di poter comunicare quanto prima, giova considerare le funzioni delle linee di un campo a tre dimensioni. È perciò che mi permetto di darne qui qualche cenno.

Le linee che considereremo le supporremo sempre chiuse o, nel caso in cui si tratti di campi limitati da superficie, le supporremo chiuse o che finiscano al contorno. Inoltre ammetteremo che queste linee non abbiano nodi, e che, escluso un numero finito di punti singolari, in tutti i rimanenti possiedano una tangente. Ad ognuna di tali linee. che denoteremo con L, corrisponderà il valore di una variabile reale φ. Scriveremo, per denotare questa dipendenza,

$$\varphi = \varphi \,|\, [\mathrm{L}] \,|\, .$$

Prendiamo una linea L e una linea ad essa concatenata; se spostiamo questa linea conservandola sempre concatenata alla L, essa descriverà una superficie tubulare σ nel cui interno giacerà la L. Lo spazio S racchiuso entro la superficie σ si dirà un *intorno della linea* L. Ogni altra linea la quale, come L, traversa longitudinalmente lo spazio tubolare S si dirà una *linea longitudinale* di S.

La funzione φ, *funzione delle linee* L, sarà continua se, preso un numero δ piccolo ad arbitrio, potrà trovarsi un intorno S di L tale che i valori di φ corrispondenti a tutte le linee longitudinali di S differiscano dal valore di φ in L meno di δ.

4. Riferiamoci ora ad una terna di assi ortogonali x, y, z. Prendiamo un arco $l = \mathrm{AB}$ della curva L e conduciamo per tutti i punti di l un segmento eguale ad ε parallelo all'asse delle x. Il luogo degli estremi di questi segmenti sia CD. Alla curva che si ottiene da L sostituendo all'arco di curva l la linea spezzata ACDB, corrisponderà per la funzione φ il valore $\varphi_1 + \Delta_x \varphi$, supponendo che alla L corrisponda il valore φ_1. Facciamo impiccolire indefinitamente ε ed l in modo che l'arco l contenga sempre nel suo interno un punto G; supporremo che esista

$$\lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ l = 0}} \frac{\Delta_x \varphi}{\varepsilon l} = \mathrm{X}. \tag{1}$$

Il valore di X dipenderà in generale dalla curva L e dal punto G della curva; la posizione di G sulla curva potrà essere determinata dalla lunghezza dell'arco s della curva L compreso fra un punto fisso e il punto G, contato nel senso in cui deve percorrersi la curva. Quindi avremo

$$\mathrm{X} = \mathrm{X} \,|\, [\mathrm{L}, s] \,|\, .$$

Ammetteremo che il rapporto $\Delta_x \varphi / \varepsilon l$ tenda verso il suo limite uniformemente rispetto a tutti i punti G e a tutte le curve L; inoltre supporremo che X sia continuo rispetto alla L e alla s.

Analogamente supponendo di condurre i segmenti ε parallelamente all'asse y e considerando il limite analogo a quello precedente otterremo

$$Y = Y \mid [L, s] \mid$$

e così pure potremo ottenere rispetto all'asse z

$$Z = Z \mid [L, s] \mid$$

per i quali porremo le stesse condizioni precedentemente stabilite. Finalmente supporremo che $\varphi \mid [L] \mid - \varphi \mid [L_1] \mid$ possa ridursi minore di un numero arbitrariamente piccolo, quando le aree comprese fra le proiezioni delle curve L e L_1 sui piani coordinati si siano rese inferiori a dati valori. Ciò premesso è facile risolvere la seguente questione.

5. Si prenda una curva L_1 e si facciano corrispondere univocamente e con continuità i punti delle due curve L e L_1. Al punto di coordinate x, y, z di L sia coniugato sulla L_1 un punto di coordinate x_1, y_1, z_1 e la corrispondenza sia tale che, mentre (x, y, x) percorre L nella direzione fissata per questa curva, (x_1, y_1, z_1) si muova nel senso stabilito per la L_1. Avremo

$$\begin{array}{lll} x = x(s) & y = y(s) & z = z(s) \\ x_1 = x_1(s) & y_1 = y_1(s) & z_1 = z_1(s) \\ \delta x = x_1 - x & \delta y = y_1 - y & \delta z = z_1 - z . \end{array}$$

Poniamo

$$\delta x = \varepsilon \xi \quad , \quad \delta y = \varepsilon \eta \quad , \quad \delta z = \varepsilon \zeta$$

e facciamo impiccolire indefinitamente ε; avremo che la curva L_1 si avvicinerà indefinitamente ad L. Denotiamo con $\Delta\varphi$ la differenza fra i valori di φ corrispondenti alle due curve L e L_1; si tratta di trovare

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon} .$$

Il risultato a cui si giunge è il seguente:

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\varepsilon} = \int_L (X\xi + Y\eta + Z\xi)\, ds \tag{2}$$

in cui con $\int_L$ si intende l'integrale esteso a tutta la curva L nel senso in cui essa deve percorrersi.

Tralasceremo la dimostrazione di questo teorema, essendo essa perfettamente analoga a quella esposta nel 2° Art. della Nota I, citata precedentemente.

La proprietà ora enunciata può esprimersi anche osservando che la parte del primo ordine dell'infinitesimo $\Delta\varphi$ è

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, ds \tag{3}$$

che potrà chiamarsi *la variazione prima* di φ. Analogamente X, Y, Z, potranno chiamarsi le *derivate di* φ *rispetto ad* x , y , z e indicarsi con

$$X = \varphi'_x \quad , \quad Y = \varphi'_y \quad , \quad Z = \varphi'_z .$$

6. Le tre quantità X , Y , Z non sono fra loro indipendenti, esse soddisfano ad una condizione che può trovarsi nel seguente modo.

Prendiamo la curva L_1 coincidente colla curva L in posizione e direzione, ma i punti (x_1 , y_1 , z_1) e (x , y , z) non coincidenti fra loro. Ciò equivale a far corrispondere univocamente i punti di L con altri punti di L stessa. In questo caso sarà $\Delta\varphi = 0$, quindi

$$\int_L (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, ds = 0.$$

Ora si ha in questo caso

$$\frac{\xi}{\cos t_1 x} = \frac{\eta}{\cos t_2 y} = \frac{\xi}{\cos t_3 z} = K$$

essendo t_i le tangenti alla curva L, in punti compresi entro l'arco che da (x , y , z) va a (x_1 , y_1 , z_1). Quindi

$$\int_L K\,(X \cos t_1 x + Y \cos t_2 y + Z \cos t_3 z)\, ds = 0.$$

Poiché questa relazione deve valere qualunque sia la corrispondenza fra i punti (x , y , z) e (x_1 , y_1 , z_1), così dovremo avere

$$X \cos tx + Y \cos ty + Z \cos tz = 0$$

in cui t rappresenta la tangente ad L nel punto s in cui sono presi i valori di X , Y , Z .

Prendendo nella direzione degli assi x , y , z tre segmenti eguali a X, Y, Z e poi tre segmenti eguali a δx , δy , δz, otterremo due resultanti R e δr. Avremo evidentemente

$$\delta\varphi = \int_L R\delta r \cdot \cos (R \cdot \delta r)\, ds.$$

Da questa formula si deduce facilmente che cambiando gli assi coordinati e da x , y , z passando a x_1 , y_1 , z_1 le quantità X_1 , Y_1 , Z_1 corrispondenti alle X , Y , Z saranno legate a queste dalle relazioni

$$X_1 = X \cos (x_1 x) + Y \cos (x_1 z) + Z \cos (x_1 z), \text{ ecc.}$$

Riferendoci per ogni punto della curva L alla terna di rette formata dalla tangente t dalla normale principale n e dalla binormale b, avremo che le quantità analoghe alle X , Y , Z, relative a questa terna saranno

$$T = 0$$

$$N = X \cos nx + Y \cos ny + Z \cos nz$$

$$B = X \cos bx + Y \cos by + Z \cos bz.$$

Si conduca ora per ogni punto di L un piano perpendicolare ad R. Ognuno di questi piani conterrà la tangente alla curva ed essi inviluppperanno una superficie che passerà per L. A tutti gli spostamenti infinitesimi di L sopra questa superficie corrisponderanno delle variazioni nulle di φ.

7. Se si considerano le tre quantità

$$X\,|\,[L\,,s]\,| \quad , \quad Y\,|\,[L\,,s]\,| \quad , \quad Z\,|\,[L\,,s]\,|$$

e mantenendo fisso s si fa variare L, avremo che a ciascuna di esse potremo applicare le considerazioni fatte per la φ, supponendo verificate per ognuna le condizioni precedentemente poste per la φ. Quindi sussisteranno le nove quantità

$$\begin{array}{ccccc} X'_x\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & X'_y\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & X'_z\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| \\ Y'_x\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & Y'_y\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & Y'_z\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| \\ Z'_x\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & Z'_y\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| & , & Z'_z\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| \end{array}$$

cioè le derivate di X , Y , Z, rispetto ad $x\,,y\,,z$. Supponendole continue rispetto a tutti gli elementi da cui dipendono, esse godranno delle seguenti proprietà:

1° $\quad X'_x\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| \quad , \quad Y'_y\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| \quad , \quad |\,Z'_z\,[L\,,s\,,s_1]\,|$

saranno funzioni simmetriche di s e s_1.

2° Si avrà

$$(4) \qquad \begin{cases} X'_y\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| = Y'_x\,|\,[L\,,s_1\,,s]\,| \\ X'_z\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| = Z'_x\,|\,[L\,,s_1\,,s]\,| \\ Y'_z\,|\,[L\,,s\,,s_1]\,| = Z'_y\,|\,[L\,,s_1\,,s]\,|\,. \end{cases}$$

3° Denotando con t e t_1 rispettivamente le tangenti in s e s_1, avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} X'_x \cos t_1 x + X'_y \cos t_1 y + X'_z \cos t_1 z = 0 \\ Y'_x \cos t_1 x + Y'_y \cos t_1 y + Y'_z \cos t_1 z = 0 \\ Z'_x \cos t_1 x + Z'_y \cos t_1 y + Z'_z \cos t_1 z = 0\,. \end{cases}$$

8. Resta finalmente da considerare il caso in cui esistano dei punti eccezionali per i quali la condizione (1) non sia verificata, come pure non siano soddisfatte le condizioni analoghe relative all'asse y e all'asse z.

Se si ha

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ l=0}} \frac{\Delta_x \varphi}{l} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\Delta_y \varphi}{l} = 0 \quad , \quad \lim \frac{\Delta_z \varphi}{l} = 0$$

in tal caso le formule (2) e (3) seguitano a sussistere. Ma se per gli intorni di certi punti s_i si ha invece

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ l=0}} \frac{\Delta_x \varphi}{l} = L_i \quad , \quad \lim \frac{\Delta_y \varphi}{l} = M_i \quad , \quad \lim \frac{\Delta_z \varphi}{l} = N_i\,,$$

allora sussisterà la formula

$$\delta\varphi = \int_{L} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, ds + \sum_{1}^{n}{}_{i} (L_i\, \delta x_i + M_i\, \delta y_i + N_i\, \delta z_i)\,.$$

In modo analogo si otterrebbero le formule nel caso in cui φ dipendesse in modo speciale dalle coordinate e dalle derivate delle coordinate di un punto della curva. Per queste considerazioni rimando alla Nota II, citata precedentemente, ove sono trattate delle questioni analoghe.

Nota II.

Ibidem, pp. 274–281 (*).

ART. II.

1. Se X , Y , Z sono le derivate di una funzione φ delle linee L di un campo, abbiamo dimostrato che si ha

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0,$$

ove α , β , γ sono i coseni degli angoli che la tangente alla curva L fa con gli assi coordinati. Potremo quindi porre:

$$X = \gamma B - \beta C$$
$$Y = \alpha C - \gamma A$$
$$Z = \beta A - \alpha B .$$

Le A , B , C non saranno determinate dalle precedenti equazioni. Se A_1 , B_1 , C_1 soddisfano ad esse, tutti gli altri sistemi di soluzioni saranno dati da

$$A_1 + k\alpha \quad , \quad B_1 + k\beta \quad , \quad C_1 + k\gamma .$$

con k arbitrario.

Diamo ora a ciascun punto di L uno spostamento (δx , δy , δz). Avremo che la variazione corrispondente di φ risulterà

$$\delta\varphi = \int_L (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, ds ,$$

essendo s l'arco di L. Quindi:

$$\delta\varphi = \int_L \Big\{ A(\beta\delta z - \gamma\delta y) + B(\gamma\delta x - \alpha\delta z) + C(\alpha\delta y - \beta\delta x) \Big\} ds .$$

Si consideri ora il parallelogrammo infinitesimo descritto dall'arco ds per lo spostamento subìto e si supponga di percorrerne il perimetro muovendosi lungo l'arco ds nel senso positivo. Si conduca la normale n al parallelogrammo in modo che un osservatore disposto nella direzione positiva veda percorrere il perimetro nel senso in cui si muovono gli indici di un orologio. Avremo:

$$(\beta\delta z - \gamma\delta y)\, ds = d\sigma\cdot\cos nx$$
$$(\gamma\delta x - \alpha\delta z)\, ds = d\sigma\cdot\cos ny$$
$$(\alpha\delta y - \beta\delta x)\, ds = d\sigma\cdot\cos nz,$$

ove $d\sigma$ denota l'area del parallelogrammo descritto da ds.

(*) Presentata dal Socio E. BETTI.

Se ora si considera la striscia infinitamente sottile di superficie formata dalle congiungenti i punti di L con le posizioni da essi occupate dopo lo spostamento, n rappresenterà la normale a questa striscia e $d\sigma$ ne sarà l'elemento d'area, e avremo:

$$\delta\varphi = \int (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\sigma .$$

Abbiansi ora due curve L_1 e L_2. Si deformi con continuità la L_1 finché venga a coincidere con la L_2 in posizione ed in direzione. Si sarà in tal modo descritta una superficie anulare Σ di cui L_1 e L_2 formeranno gli orli e si dirà che si è *condotta una superficie* per L_1 e L_2. Se tracciamo le traiettorie descritte dai punti L_1 per andare nei corrispondenti di L_2, avremo sopra Σ due sistemi di curve formate rispettivamente dalle varie posizioni della L e dalle traiettorie ora considerate.

Preso un punto qualunque di Σ, ad esso corrisponderà un sistema di valori per A , B , C ed una normale n a Σ presa nella direzione indicata. Denotando con φ_1 e φ_2 i valori di φ corrispondenti alle linee L_1 e L_2, avremo:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\Sigma} (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\Sigma .$$

2. Quando si studiano delle funzioni φ di linee L è importante fare la seguente distinzione:

Si considerino due linee L_1 e L_2 che hanno un tratto l a comune, e si supponga che le direzioni di L_1 e L_2 siano tali che il tratto l debba venir percorso in senso opposto secondo che si ritiene essere appartenente all'una o all'altra linea. Tolto l le porzioni di L_1 e L_2 formeranno un'unica linea L_3 e ambedue le porzioni verranno percorse in uno stesso senso che si fisserà come direzione della L_3. Scriveremo:

$$\mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2 .$$

Ora può darsi che si abbia:

$$\varphi\,|\,[\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2]\,| = \varphi\,|\,[\mathrm{L}_1]\,| + \varphi\,|\,[\mathrm{L}_2]\,| ,$$

ovvero

$$\varphi\,|\,[\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2]\,| \gtrless \varphi\,|\,[\mathrm{L}_1]\,| + \varphi\,|\,[\mathrm{L}_2]\,| .$$

Se la prima condizione si verifica sempre, allora si dirà che φ è una funzione *semplice* delle linee.

3. Prendiamo a studiare più specialmente il caso di *funzioni semplici* di linee.

Consideriamo un punto M pel quale passano due linee L_1 e L_2, denotiamo con ds_1 e ds_2 gli elementi degli archi delle due curve che partono da M e con $(\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1)$, $(\alpha_2 , \beta_2 , \gamma_2)$ i loro coseni di direzione. Supponiamo di dare a ciascun punto di ds_2 uno spostamento eguale e parallelo a ds_1: la variazione subìta da φ, a meno di infinitesimi di ordine superiore, sarà:

$$\delta_1 \varphi = (X_1 \alpha_2 + Y_1 \beta_2 + Z_1 \gamma_2)\, ds_1 \cdot ds_2$$

ove X_1, Y_1, Z_1, denotano i valori di $\varphi'_x \cdot \varphi'_y$, φ'_z corrispondenti alla linea L_1 nel punto M.

Analogamente supponendo di dare a ciascun punto di ds_2 uno spostamento eguale e parallelo a ds_1, avremo per variazione di φ, a meno d'infinitesimi di ordine superiore,

$$\delta_2 \varphi = (X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1)\, ds_1 \cdot ds_2 ,$$

essendo X_2, Y_2, Z_2 i valori di φ'_x, φ'_y, φ'_z, corrispondenti ad L_2 nel punto M.

Ora se φ è una funzione *semplice* deve aversi a meno d'infinitesimi d'ordine superiore:

$$\delta_1 \varphi = \delta_2 \varphi .$$

Quindi:

$$X_1 \alpha_2 + Y_1 \beta_2 + Z_1 \gamma_2 = X_2 \alpha_1 + Y_2 \beta_1 + Z_2 \gamma_1 ;$$

ovvero indicando con (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2) i valori di A, B, C, corrispondenti alle due linee L_1 e L_2 nel punto M

$$(A_1 - A_2)(\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) = 0 .$$

Se n è la normale comune alle due linee L_1 e L_2 in M, avremo:

$$(1) \qquad (A_1 - A_2) \cos nx + (B_1 - B_2) \cos ny + (C_1 - C_2) \cos nz = 0 .$$

Prendiamo ora tre curve L_x, L_y, L_z, che passino per M, ed i cui elementi in M siano rispettivamente paralleli agli assi x, y, z. Denotiamo con (A_x, B_x, C_x), (A_y, B_y, C_y), (A_z, B_z, C_z) rispettivamente i valori di A, B, C, corrispondenti alle tre curve L_x, L_y, L_z in M.

Applicando la (1) alle coppie di linee (L_y, L_z), (L_z, L_x), (L_x, L_y) si otterrà:

$$\begin{cases} A_y = A_z , \\ B_z = B_x , \\ C_x = C_y . \end{cases}$$

Poniamo

$$A_y = A_z = P \quad , \quad B_z = B_x = Q \quad , \quad C_x = C_y = R .$$

Si conduca una linea qualunque L per M e supponiamo che l'elemento che passa per M abbia la direzione α, β, γ. Siano A, B, C i valori corrispondenti alla linea L nel punto M. Per applicare la (1) alle due linee L e L_z, bisognerà prendere:

$$\cos nx = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad , \quad \cos ny = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} \quad , \quad \cos nz = 0$$

e avremo:

$$(A - P)\beta - (B - Q)\gamma = 0 .$$

Analogamente applicando la (1) alle coppie di linee L, L_x e L, L_y, avremo:

$$(B - Q)\gamma - (A - P)\alpha = 0$$

$$(C - R)\alpha - (B - Q)\beta = 0$$

onde

$$P = A + ka \quad , \quad Q = B + k\beta \quad , \quad R = C + k\gamma .$$

Per tutte le linee che passano per M potremo dunque prendere i valori di A , B , C in M eguali a P , Q , R. Quindi si ha:

Se φ *è una funzione semplice delle linee di un campo a tre dimensioni, esistono per ogni punto del campo tre valori* P , Q , R *che possono rispettivamente prendersi come valori di* A , B , C *in quel punto per tutte le linee che vi passano.*

4. *Conduciamo una superficie* Σ per le due linee L_1 e L_2 (se ciò è possibile) e tracciamo le normali n ad essa nei suoi vari punti nel modo indicato (art. II, § 1). Avremo:

$$\varphi \mid [L_2] \mid - \varphi \mid [L_1] \mid = \int_\Sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\Sigma.$$

Se la linea L_1 può ridursi ad un punto, avremo al limite

$$\varphi \mid [L_1] \mid = 0$$

quindi

$$\varphi \mid [L_2] \mid = \int_\Sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\Sigma.$$

In questo caso Σ è una superficie semplicemente connessa il cui contorno è formato dalla linea L_2. La direzione della normale n in un punto M è quella in cui disponendosi un osservatore vede girare nel senso degli indici di un orologio una linea che da M va ad un punto mobile sul contorno nel senso in cui esso deve esser percorso.

Se la superficie Σ va impiccolendosi indefinitamente riducendosi ad un punto M, avremo:

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz ,$$

in cui i valori di P , Q , R corrispondono al punto M. Scriveremo:

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = \frac{d\varphi}{d\Sigma} .$$

Il segno di $d\varphi/d\Sigma$ sarà noto soltanto quando si sia stabilita la direzione della normale n a Σ.

Se Σ fosse piana e normale ad x si avrebbe:

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = P$$

mentre se fosse normale a y o a z

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = Q$$

$$\lim \frac{\varphi \mid [L_2] \mid}{\Sigma} = R .$$

È perciò che si possono rappresentare P, Q, R rispettivamente coi simboli:

$$\frac{d\varphi}{d(y,z)} \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(z,x)} \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(x,y)} .$$

5. Conduciamo ora una superficie chiusa qualunque σ; si dovrà avere:

$$\int_\sigma (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma = 0 .$$

Quindi P, Q, R dovranno soddisfare alla condizione:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 , \tag{2}$$

ovvero

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{d(y,z)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{d\varphi}{d(z,x)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{d(x,y)} = 0 .$$

Reciprocamente se P, Q, R soddisferanno alla condizione (2) esisterà sempre una funzione delle linee del campo φ tale che

$$\frac{d\varphi}{d(y,z)} = P \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(z,x)} = Q \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(x,y)} = R .$$

La φ sarà determinata dalle P, Q, R a meno di una costante arbitraria.

6. Supponiamo di stabilire una corrispondenza univoca fra due campi a tre dimensioni mediante le relazioni:

$$x = x(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad y = y(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) .$$

Ad una funzione di linee nel primo campo corrisponderà una funzione di linee nel secondo. Si tratta di trovare le relazioni fra

$$\frac{d\varphi}{d(y,z)} \;,\; \frac{d\varphi}{d(z,x)} \;,\; \frac{d\varphi}{d(x,y)} \quad \text{e} \quad \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)} \;,\; \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)} \;,\; \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)} .$$

A tal fine prendiamo una superficie S nel primo campo il cui contorno sia L, ad essa corrisponderà nel secondo una superficie Σ il cui contorno sarà Λ. I punti della superficie definiamoli mediante due parametri u, v. Avremo:

$$\varphi \mid [L] \mid = \int_S (P \cos nx + Q \cos ny + R \cos nz)\, d\sigma$$

ovvero:

$$\varphi \,|\, [L] \,| = \int_S \left\{ P \frac{d(y,z)}{d(u,v)} + Q \frac{d(z,x)}{d(u,v)} + R \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right\} du\, dv\,,$$

in cui $d(y, z)/d(u, v)$, ecc., denotano i determinanti funzionali di y, z rispetto ad u, v, ecc.

Quindi posto

$$\pi = P \frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + Q \frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + R \frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}$$

$$\chi = P \frac{d(y,z)}{d(\zeta.\xi)} + Q \frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + R \frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}$$

$$\rho = P \frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + Q \frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + R \frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}$$

avremo

$$\varphi \,|\, [L] \,| = \int_S \left(\pi \frac{d(\eta.\zeta)}{d(u,v)} + \chi \frac{d(\zeta,\xi)}{d(u,v)} + \rho \frac{d(\xi,\eta)}{d(u,v)} \right) du\, dv$$

$$= \int_\Sigma (\pi \cos \nu\xi + \chi \cos \nu\eta + \rho \cos \nu\zeta)\, d\Sigma\,,$$

essendo ν la normale a Σ.

Ma $\varphi \,|\, [L] \,| = \varphi \,|\, [\Lambda] \,|$, quindi

$$\pi = \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)} \quad , \quad \chi = \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)} \quad , \quad \rho = \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)}\,,$$

onde

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)} \frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)} \frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)} \frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} \\ \frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)} \frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)} \frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)} \frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)} \\ \frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)} &= \frac{d\varphi}{d(y,z)} \frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\varphi}{d(z,x)} \frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\varphi}{d(x,y)} \frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\,. \end{aligned} \right.$$

ART. III.

1. Se $\varphi \,|\, [L]$ è una funzione dipendente dalle linee L ed è semplice, posto

$$\frac{d\varphi}{d(y,z)} = P \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(z,x)} = Q \quad , \quad \frac{d\varphi}{d(z,y)} = R\,,$$

avremo

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Potremo quindi trovare due funzioni λ e μ di x, y, z le quali soddisfanno alle condizioni

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)} = P \\ \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)} = Q \\ \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x} &= \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)} = R\,. \end{aligned} \right.$$

A tal fine come è ben noto dalla teoria del moltiplicatore di Jacobi, basterà cominciare dal determinare una funzione μ la quale soddisfi alla condizione

$$\mathrm{P}\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mathrm{Q}\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mathrm{R}\frac{\partial\mu}{\partial z}=0$$

e quindi prendere

$$\lambda=\int\frac{1}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)}(\mathrm{P}\,dy-\mathrm{Q}\,dx)+f(\mu), \tag{2}$$

essendo f una funzione arbitraria (Vedi JACOBI, *Vorl. ueb. Dynamik*, pag. 78).

2. Supponiamo ora di eseguire un cambiamento di variabili e di passare dalle x, y, z alle ξ, η, ζ lasciando inalterate le due funzioni λ e μ. Avremo

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\eta,\zeta)}=\frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)}+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)}+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}$$

$$=\mathrm{P}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)}+\mathrm{Q}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)}+\mathrm{R}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}=\frac{d\varphi}{d(\eta,\zeta)}=\pi$$

e analogamente

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\zeta,\xi)}=\frac{d\varphi}{d(\zeta,\xi)}=\chi$$

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\xi,\eta)}=\frac{d\varphi}{d(\xi,\eta)}=\rho,$$

quindi le due funzioni λ e μ sono collegate alle derivate di φ dalle stesse relazioni, qualunque sia il sistema di coordinate che si sceglie.

3. Prendiamo una superficie qualunque σ e su di essa un sistema di coordinate curvilinee u, v, tali che il quadrato dell'elemento lineare sia

$$ds^2=\mathrm{E}\,du^2+2\,\mathrm{F}\,du\,dv+\mathrm{G}\,dv^2$$

e consideriamo $d\varphi/d\sigma$. Avremo

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=\mathrm{P}\cos nx+\mathrm{Q}\cos ny+\mathrm{R}\cos nz=\frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\cos nx$$

$$+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\cos ny+\frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\cos nz.$$

Quindi

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\frac{d(\lambda,\mu)}{d(u,v)}. \tag{3}$$

4. Dalla formula precedente risulta che se sopra una superficie σ si ha $\lambda=\text{cost}$, oppure $\mu=\text{cost}$, ne viene che $d\varphi/d\sigma=0$ e quindi φ è costante per tutte le linee della superficie. Dimostriamo ora reciprocamente che se φ è costante per tutte le linee della superficie σ, potremo fare in modo che

una almeno delle due funzioni λ o μ sopra σ abbia un valore costante arbitrario. Infatti se $d\varphi/d\sigma = 0$, avremo:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\mu}{\partial v} - \frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial\mu}{\partial u} = 0.$$

Supponendo che μ non sia costante sopra σ, potremo scrivere:

$$\frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial u}\right)} = \frac{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}\right)}{\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)}$$

e quindi lungo σ sarà

$$\lambda = f(\mu).$$

Ne segue che se invece di λ prendiamo

$$\lambda' = \lambda - f(\mu) + C$$

(con C costante arbitraria) il che è permesso (vedi Art. III. § 1), avremo che λ' avrà sopra σ il valore costante C.

5. Poniamo

$$\lambda\frac{\partial\mu}{\partial x} = a \quad , \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial y} = b \quad , \quad \lambda\frac{\partial\mu}{\partial z} = c,$$

avremo:

$$\frac{\partial c}{dy} - \frac{\partial b}{dz} = P \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = Q \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = R,$$

quindi presa una superficie σ limitata dalla linea L, si otterrà:

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_\sigma (P\cos nx + Q\cos ny + R\cos nz)\,d\sigma$$

$$= \int_\sigma \left\{ \left(\frac{\partial c}{dy} - \frac{\partial b}{\partial z}\right)\cos nx + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right)\cos ny + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)\cos nz \right\} d\sigma$$

e applicando il teorema di Stokes

$$\varphi\,|\,[L]\,| = \int_L (adx + bdy + cdz) = \int_L \lambda\,d\mu.$$

XIX.

SOPRA UNA ESTENSIONE DELLA TEORIA DI RIEMANN SULLE FUNZIONI DI VARIABILI COMPLESSE

Nota I.

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4ª, vol. III_2, 1887_2; pp. 281-287 (*)

1. Il fondamento del metodo di RIEMANN per lo studio delle funzioni di variabili complesse consiste, come è ben noto, in questo:

Si prende una superficie chiusa una o più volte connessa (oppure un pezzo di superficie) e si considerano due variabili complesse f e φ funzioni continue dei punti di essa, escluso un certo numero di luoghi singolari.

Ad un punto M (non singolare) preso sulla superficie corrisponderanno due valori complessi f e φ. Ad un punto N corrisponderanno i valori $f + \Delta f$, $\varphi + \Delta\varphi$. Se coll'avvicinarsi indefinito di N ad M si ha che

$$\lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta f}$$

esiste ed è indipendente dal modo con cui N si approssima ad M, si dice, secondo RIEMANN, che φ è una funzione della variabile complessa f.

Da questa definizione RIEMANN dedusse prima di ogni altra cosa la relazione che passa fra la teoria delle funzioni di variabili complesse e quella, della equazione $\Delta^2 = 0$ il che gli servì di base alla teoria delle caratteristiche [1].

2. Le considerazioni di RIEMANN, che si riferiscono ad uno spazio a due dimensioni, possono estendersi agli spazî a tre dimensioni, purché invece di partire da funzioni dei punti dello spazio, si parta da *funzioni che dipendono dalle linee dello spazio a tre dimensioni* [2]. Mi propongo in questa Nota di esporre appunto i fondamenti di tale estensione.

3. Si abbiano due variabili complesse funzioni continue dipendenti dalle linee di un campo a tre dimensioni, tali cioè che ad ogni linea chiusa interna

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

(1) *Grundlangen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse.* — Riemann's Werke, p. 4.

(2) Vedi la mia Nota: *Sopra le funzioni dipendenti da linee*, pubblicata in questi Rendiconti »; [in questo vol.: XVIII, pp. 314-327].

al campo, oppure ad ogni linea che finisce al contorno del campo, corrisponda un valore di ciascuna delle due variabili complesse.

Supporremo che le due funzioni di linee siano *semplici* (3) e stabiliremo fra di esse un legame analogo a quello posto da RIEMANN per le funzioni dei punti di una superficie.

A tal fine si consideri una curva L alla quale corrispondono i valori F e Φ per le due funzioni, e si deformi un tratto della curva nel cui interno trovasi un punto M. Le variazioni di F e Φ corrispondenti a questa deformazione siano ΔF e $\Delta\Phi$. Se coll'impiccolire indefinitamente della deformazione e del tratto deformato, il limite del rapporto

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta F}$$

esiste e dipende soltanto dalla posizione del punto M, si dirà che *le due funzioni* F e Φ *sono collegate fra loro nel senso riemanniano.*

Risulta immediatamente da questa definizione che se Φ e Ψ sono collegate ad F, Φ è collegata a Ψ.

4. Vediamo di stabilire le proprietà fondamentali che si deducono da questa definizione.

Separiamo in F e in Φ la parte reale da quella immaginaria. Avremo:

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 \quad , \quad F = F_1 + iF_2 \, ,$$

e poniamo (4):

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{dF_1}{d(y,z)} = p_1 \quad , & \dfrac{dF_1}{d(z,x)} = q_1 \quad , & \dfrac{dF_1}{d(x,y)} = r_1 \\[2ex]
\dfrac{dF_2}{d(y,z)} = p_2 \quad , & \dfrac{dF_2}{d(z,x)} = q_2 \quad , & \dfrac{dF_2}{d(x,y)} = r_2 \\[2ex]
\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1 \quad , & \dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1 \quad , & \dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1 \\[2ex]
\dfrac{d\Phi_2}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_2 \quad , & \dfrac{d\Phi_2}{d(z,x)} = \chi_2 \quad , & \dfrac{d\Phi_2}{d(x,y)} = \rho_2 .
\end{array}$$

Affinché sia soddisfatta la condizione posta dovrà essere per uno stesso punto dello spazio

$$\frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\cos nx + (\chi_1 + i\chi_2)\cos ny + (\rho_1 + i\rho_2)\cos nz}{(p_1 + ip_2)\cos nx + (q_1 + iq_2)\cos ny + (r_1 + ir_2)\cos nz}$$

indipendente dalla direzione n (5).

Perciò sussisteranno le relazioni:

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2} \, .$$

(3) Vedi Nota citata, Art. II, § 3.
(4) Vedi Nota citata, Art. II, § 4.
(5) Vedi Nota citata, Art. II. § 4.

Da questa si deducono le altre:

$$
(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&q_1\tilde{\omega}_1 - q_2\tilde{\omega}_2 = p_1\chi_1 - p_2\chi_2 \quad , \quad && q_2\tilde{\omega}_1 + q_1\tilde{\omega}_2 = p_2\chi_1 + p_1\chi_2\\
&r_1\chi_1 - r_2\chi_2 = q_1\rho_1 - q_2\rho_2 \quad , \quad && r_2\chi_1 + r_1\chi_2 = q_2\rho_1 + q_1\rho_2\\
&p_1\rho_1 - p_2\rho_2 = r_1\tilde{\omega}_1 - r_2\tilde{\omega}_2 \quad , \quad && p_2\rho_1 + p_1\rho_2 = r_2\tilde{\omega}_1 + r_1\tilde{\omega}_2
\end{aligned}\right.
$$

e risolvendole rispetto a $\tilde{\omega}_2$, χ_2, ρ_2 otterremo:

$$
(1')\quad \left\{\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2 &= \frac{(p_1^2+p_2^2)\chi_1 - (p_1q_1+p_2q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2q_1 - p_1q_2} = -\frac{(p_1^2+p_2^2)\rho_1 - (p_1r_1+p_2r_2)\tilde{\omega}_1}{r_2p_1 - p_2r_1}\\
\chi_2 &= \frac{(q_1^2+q_2^2)\rho_1 - (q_1r_1+q_2r_2)\chi_1}{q_2r_1 - q_1r_2} = -\frac{(q_1^2+q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (q_1p_1+q_2p_2)\chi_1}{p_2q_1 - q_2p_1}\\
\rho_2 &= \frac{(r_1^2+r_2^2)\tilde{\omega}_1 - (r_1p_1+r_2p_2)\rho_1}{r_2p_1 - r_1p_2} = -\frac{(r_1^2+r_2^2)\chi_1 - (r_1q_1+r_2q_2)\rho_1}{q_2r_1 - r_2q_1}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Porremo

$$
(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&p_1^2+p_2^2 = E_{11} \quad , && q_1^2+q_2^2 = E_{22} \quad , && r_1^2+r_2^2 = E_{33}\\
&q_1r_1+q_2r_2 = E_{23} = E_{32} \quad , && r_1p_1+r_2p_2 = E_{31} = E_{13} \quad , && p_1q_1+p_2q_2 = E_{12} = E_{21}\\
&q_2r_1 - q_1r_2 = D_1 \quad , && r_2p_1 - r_1p_2 = D_2 \quad , && p_2q_1 - p_1q_2 = D_3
\end{aligned}\right.
$$

e avremo le relazioni

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
E_{11}D_1 + E_{12}D_2 + E_{13}D_3 &= 0\\
E_{21}D_1 + E_{22}D_2 + E_{23}D_3 &= 0\\
E_{31}D_1 + E_{32}D_2 + E_{33}D_3 &= 0
\end{aligned}\right.
\qquad
(4)\quad \left\{\begin{aligned}
D_1^2 &= E_{22}E_{33} - E_{23}^2\\
D_2^2 &= E_{33}E_{11} - E_{31}^2\\
D_3^2 &= E_{11}E_{22} - E_{12}^2
\end{aligned}\right.
$$

$$
(4')\quad \left\{\begin{aligned}
D_2D_3 &= E_{12}E_{13} - E_{11}E_{23}\\
D_3D_1 &= E_{23}E_{21} - E_{22}E_{31}\\
D_1D_2 &= E_{31}E_{32} - E_{33}E_{12}
\end{aligned}\right.
$$

e le equazioni (1′) diverranno

$$
\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2 &= \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3} = -\frac{E_{11}\rho_1 - E_{13}\tilde{\omega}_1}{D_2}\\
\chi_2 &= \frac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = -\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\chi_1}{D_3}\\
\rho_2 &= \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = -\frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\,.
\end{aligned}
$$

Tenendo conto delle (3) esse possono scriversi ancora

$$
(A_1)\quad \left\{\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2 &= \frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{13}\tilde{\omega}_1 - E_{11}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3}\\
\chi_2 &= \frac{E_{22}\rho_1 - E_{23}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{21}\chi_1 - E_{22}\tilde{\omega}_1}{D_3}\\
\rho_2 &= \frac{E_{32}\rho_1 - E_{33}\chi_1}{D_1} = \frac{E_{33}\tilde{\omega}_1 - E_{31}\rho_1}{D_2} = \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}\,.
\end{aligned}\right.
$$

Se si risolvessero le (1) rispetto a $\tilde{\omega}_1$, χ_1, ρ_1 si otterrebbe invece

$$(A_2)\qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \dfrac{E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{11}\rho_2 - E_{13}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D_3} \\[2ex] \chi_1 = \dfrac{E_{23}\chi_2 - E_{22}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{22}\tilde{\omega}_2 - E_{21}\chi_2}{D_3} \\[2ex] \rho_1 = \dfrac{E_{33}\chi_2 - E_{32}\rho_2}{D_1} = \dfrac{E_{31}\rho_2 - E_{33}\tilde{\omega}_2}{D_2} = \dfrac{E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{32}\chi_2}{D_3}. \end{cases}$$

5. Dalle (A_2) si ha

$$\tilde{\omega}_1 D_1 = E_{13}\chi_2 - E_{12}\rho_2$$
$$\chi_1 D_2 = E_{21}\rho_2 - E_{23}\tilde{\omega}_2$$
$$\rho_1 D_3 = E_{32}\tilde{\omega}_2 - E_{31}\chi_2,$$

quindi sommando

$$(B_1)\qquad D_1\tilde{\omega}_1 + D_2\chi_1 + D_3\rho_1 = 0.$$

Analogamente si avrebbe

$$(B_2)\qquad D_1\tilde{\omega}_2 + D_2\chi_2 + D_3\rho_2 = 0.$$

Abbiamo poi dalle (A_1) e (A_2), tenendo conto delle (3),

$$\Theta = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} \chi_2, \rho_2 \\ \chi_1, \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} = \frac{E_{22}\rho_2^2 - 2E_{23}\rho_2\chi_2 + E_{33}\chi_2^2}{D_1^2}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}[D_1 E_{11}\chi_1\rho_1 + D_2 E_{22}\rho_1\tilde{\omega}_1 + D_3 E_{33}\tilde{\omega}_1\chi_1]$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}[D_1 E_{11}\chi_2\rho_2 + D_2 E_{22}\rho_2\tilde{\omega}_2 + D_3 E_{33}\rho_2\tilde{\omega}_2].$$

Quindi, ponendo

$$\chi_2\rho_1 - \chi_1\rho_2 = \Delta_1 \quad , \quad \rho_2\tilde{\omega}_1 - \rho_1\tilde{\omega}_2 = \Delta_2 \quad , \quad \tilde{\omega}_2\chi_1 - \tilde{\omega}_1\chi_2 = \Delta_3,$$

si avrà per la simmetria delle ultime formule

$$(C)\qquad \begin{cases} \Theta = \dfrac{\Delta_1}{D_1} = \dfrac{\Delta_2}{D_2} = \dfrac{\Delta_3}{D_3} = \dfrac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} \\[2ex] = \dfrac{E_{33}\tilde{\omega}_1^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_1\rho_1 + E_{11}\rho_1^2}{D_2^2} = \dfrac{E_{11}\chi_1^2 - 2E_{12}\chi_1\tilde{\omega}_1 + E_{22}\tilde{\omega}_1^2}{D_3^2} \\[2ex] = \dfrac{E_{22}\rho_2^2 - 2E_{23}\rho_2\chi_2 + E_{33}\chi_2^2}{D_1^2} = \dfrac{E_{33}\tilde{\omega}_2^2 - 2E_{31}\tilde{\omega}_2\rho_2 + E_{11}\rho_2^2}{D_2^2} \\[2ex] = \dfrac{E_{11}\chi_2^2 - 2E_{12}\chi_2\tilde{\omega}_2 + E_{22}\tilde{\omega}_2^2}{D_3^2} = \dfrac{(q_1\rho_1 - r_1\chi_1)^2 + (q_2\rho_1 - r_2\chi_1)^2}{D_1^2} \\[2ex] = \dfrac{(r_1\tilde{\omega}_1 - p_1\rho_1)^2 + (r_2\tilde{\omega}_1 - p_2\rho_1)^2}{D_2^2} = \dfrac{(p_1\chi_1 - q_1\tilde{\omega}_1)_2 + (p_2\chi_1 - q_2\tilde{\omega}_1)^2}{D_3^2}. \end{cases}$$

6. Il parametro Θ funziona nella presente teoria da *parametro differenziale del primo ordine*. Esso potrà scriversi, usando le notazioni adottate nella Nota già citata,

$$\Theta = \frac{E_{22}\left(\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\right)^2 - 2E_{23}\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\cdot\frac{d\Phi_1}{d(z,x)} + E_{33}\left(\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{ecc.}$$

$$= \frac{E_{22}\left(\frac{d\Phi_2}{d(x,y)}\right)^2 - 2E_{23}\frac{d\Phi_2}{d(x,y)}\cdot\frac{d\Phi_2}{d(z,x)} + E_{33}\left(\frac{d\Phi_2}{d(z,x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{ecc.}$$

Dalle formule (C) risulta immediatamente che il parametro Θ è una quantità *positiva*.

Dimostriamo che esso è *invariante* per un cambiamento delle variabili x, y, z. A tal fine dalle x, y, z passiamo alle x', y', z'. Poniamo un apice a tutte le quantità analoghe a quelle considerate relative a x, y, z, quando ci si riferisce invece alle x', y', z'. Come è stato trovato nella Nota citata (Art. II, § 6) avremo:

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} p'_1 &= p_1\frac{d(y,z)}{d(y',z')} + q_1\frac{d(z,x)}{d(y',z')} + r_1\frac{d(x,y)}{d(y',z')} \\ q'_1 &= p_1\frac{d(y,z)}{d(z',x')} + q_1\frac{d(z,x)}{d(z',x')} + r_1\frac{d(x,y)}{d(z',x')} \\ r'_1 &= p_1\frac{d(y,z)}{d(x',y')} + q_1\frac{d(z,x)}{d(x',y')} + r_1\frac{d(x,y)}{d(x',y')}, \end{aligned}\right.$$

onde, con un calcolo che non presenta difficoltà,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} D'_1 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\frac{dx}{dx'} + D_2\frac{dy}{dx'} + D_3\frac{dz}{dx'}\right) \\ D'_2 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\frac{dx}{dy'} + D_2\frac{dy}{dy'} + D_3\frac{dz}{dy'}\right) \\ D'_3 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(D_1\frac{dx}{dz'} + D_2\frac{dy}{dz'} + D_3\frac{dz}{dz'}\right), \end{aligned}\right.$$

ove $\frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}$ rappresenta il determinante funzionale delle x, y, z rispetto alle x', y', z'. Analogamente si ottiene:

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta'_1 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\frac{dx}{dx'} + \Delta_2\frac{dy}{dx'} + \Delta_3\frac{dz}{dx'}\right) \\ \Delta'_2 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\frac{dx}{dy'} + \Delta_2\frac{dy}{dy'} + \Delta_3\frac{dz}{dy'}\right) \\ \Delta'_3 &= \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}\left(\Delta_1\frac{dx}{dz'} + \Delta_2\frac{dy}{dz'} + \Delta_3\frac{dz}{dz'}\right), \end{aligned}\right.$$

onde a cagione delle (C)

$$\frac{\Delta'_1}{D'_1} = \frac{\Delta_1\frac{dx}{dx'} + \Delta_2\frac{dy}{dx'} + \Delta_3\frac{dz}{dx'}}{D_1\frac{dx}{dx'} + D_2\frac{dy}{dx'} + D_3\frac{dz}{dx'}} = \frac{\Delta_1}{D_1},$$

quindi

$$\frac{\Delta'_1}{D'_1} = \frac{\Delta'_2}{D'_2} = \frac{\Delta'_3}{D'_3} = \frac{\Delta_1}{D_1} = \frac{\Delta_2}{D_2} = \frac{\Delta_3}{D_3};$$

ciò dimostra che

$$\Theta' = \Theta.$$

7. Teniamo ora conto (vedi Nota cit., Art. II, § 5) che le $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ debbono soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0;$$

avremo quindi la equazione (vedi formule (A_1))

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}\right) = 0,$$

la quale potrà scriversi sotto varie altre forme tutte equivalenti tenendo conto delle relazioni (A_1). Ad una analoga relazione dovranno soddisfare le $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. La (D) potrà scriversi ancora

$$\text{(D')} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{D_2}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{D_3}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

o sotto altra forma tenendo conto delle (A_1). Alla stessa equazione differenziale dovrà soddisfare Φ_2. Potremo dunque stabilire che tanto la parte reale quanto la parte immaginaria debbono soddisfare alle seguenti condizioni (vedi formule (B_1) (B_2)):

$$\text{(E)} \quad \left\{ \begin{aligned} &D_1\frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2\frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3\frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Reciprocamente, se Ψ è una funzione reale semplice delle linee di un campo a tre dimensioni, la quale soddisfa alle precedenti condizioni, essa potrà considerarsi come la parte reale o come la parte immaginaria di una funzione *collegata ad* F nel senso riemanniano. Infatti per la seconda delle (E) avremo (vedi Nota cit., Art. II, § 5) che dovrà esistere una funzione reale P delle linee, tale che

$$
(17) \quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{dP}{d(y,z)} &= \frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1} \\
\frac{dP}{d(z,x)} &= \frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2} \\
\frac{dP}{d(x,y)} &= \frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}
\end{aligned}
\right.
$$

Da queste formule, tenendo conto della prima delle (E), e con un calcolo inverso a quello eseguito nel § 4, si giunge alle relazioni

$$
\frac{\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} + i\dfrac{dP}{d(y,z)}}{p_1 + ip_2} = \frac{\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} + i\dfrac{dP}{d(z,x)}}{q_1 + iq_2} = \frac{\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} + i\dfrac{dP}{d(x,y)}}{r_1 + ir_2}
$$

onde, posto $\Psi + iP = \Lambda$, avremo che il rapporto

$$
\frac{\dfrac{d\Lambda}{d(y,z)}\cos nx + \dfrac{d\Lambda}{d(z,x)}\cos ny + \dfrac{d\Lambda}{d(x,y)}\cos nz}{\dfrac{dF}{d(y,z)}\cos nx + \dfrac{dF}{d(z,x)}\cos ny + \dfrac{dF}{d(x,y)}\cos nz}
$$

sarà indipendente dalla direzione n, il che dimostra la proposizione enunciata.

La presente teoria è quindi intimamente legata allo studio delle equazioni (E), le quali appunto nel nostro caso funzionano come la equazione differenziale $\Delta^2 = 0$ nella teoria di RIEMANN.

NOTA II.

Ibidem, s. 4, vol. IV_1, 1888_1; pp. 107–115 (*).

1. In una Nota che ebbi l'onore di presentare recentemente, ho esposto i fondamenti della estensione della teoria di RIEMANN. Nella presente mi propongo di stabilire la teoria delle *caratteristiche* relativa alle *funzioni collegate nel senso riemanniano*.

Dalle formule (6) trovate nella Nota citata si ricava

$$\text{(1)} \qquad D_1\,dx + D_2\,dy + D_3\,dz = \frac{d(x,y,z)}{d(x',y',z')}(D'_1\,dx' + D'_2\,dy' + D'_3\,dz').$$

L'espressione differenziale lineare $D_1\,dx + D_2\,dy + D_3\,dz$ gode quindi di una proprietà invariantiva.

Distingueremo due casi: quello cioè in cui

$$\text{(2)} \qquad D_1\,dx + D_2\,dy + D_3\,dz = 0$$

è integrabile, dal caso in cui non è integrabile.

1° CASO – 2. Nella ipotesi della (2) integrabile avremo

$$\text{(3)} \qquad D_1\,dx + D_2\,dy + D_3\,dz = \lambda\,d\mu.$$

Abbiasi una funzione Φ dipendente da linee e supponiamo che sia

$$\text{(4)} \qquad D_1\frac{d\Phi}{d(y,z)} + D_2\frac{d\Phi}{d(z,x)} + D_3\frac{d\Phi}{d(x,y)} = 0.$$

Poniamo

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \tilde{\omega} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho,$$

avremo

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\omega} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\chi + \frac{\partial\mu}{\partial z}\rho = 0,$$

quindi (vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 1) si potrà trovare una funzione θ la quale soddisfa alle condizioni

$$\text{(5)} \qquad \frac{d(\theta,\mu)}{d(y,z)} = \tilde{\omega} \quad , \quad \frac{d(\theta,\mu)}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d(\theta,\mu)}{d(x,y)} = \rho.$$

Le funzioni θ e μ rimangono inalterate eseguendo un cambiamento di variabili. Se sopra una superficie σ sarà $d\Phi/d\sigma = 0$, nei tratti di essa ove μ non è costante potremo prendere $\theta = 0$. (Vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 2, 4).

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

3. Ricaviamo prima di tutto dalle formule precedenti un teorema analogo a quello di GREEN. A tal fine consideriamo due funzioni Φ_1 e Φ_2 dipendenti da linee le quali soddisfino alla condizione (4). Esisteranno due funzioni θ_1 e θ_2 tali che

$$(6_1)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}&=\tilde\omega_1=\frac{d\Phi_1}{d(y,z)}\\
\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}&=\chi_1=\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\\
\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\theta_1}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}&=\rho_1=\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}
\end{aligned}\right.
\qquad
(6_2)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial y}&=\tilde\omega_2=\frac{d\Phi_2}{d(y,z)}\\
\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial x}-\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial z}&=\chi_2=\frac{d\Phi_2}{d(z,x)}\\
\frac{\partial\theta_2}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{\partial\theta_2}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial x}&=\rho_2=\frac{d\Phi_2}{d(x,y)}.
\end{aligned}\right.$$

Essendo noto il μ, potremo limitarci a considerare una porzione di spazio T entro il quale, comunque siano $\tilde\omega_1$, χ_1, ρ_1; $\tilde\omega_2$, χ_2, ρ_2, purché monodrome, finite e continue, le (6_1) e (6_2) si possano soddisfare mediante delle funzioni θ_1 e θ_2 pure monodrome finite e continue.

Dando alle E_{is} lo stesso significato attribuito loro nella Nota precedente, avremo:

$$(7)\qquad H_{\Phi_1\,\Phi_2}=\frac{E_{22}\,\rho_1\,\rho_2-E_{23}(\rho_1\chi_2+\rho_2\chi_1)+E_{33}\,\chi_1\,\chi_2}{D_1^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{E_{13}\chi_2-E_{12}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\left(\frac{E_{23}\chi_2-E_{22}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\left(\frac{E_{33}\chi_2-E_{32}\rho_2}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left\{\left(\frac{E_{13}\chi_1-E_{12}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial x}+\left(\frac{E_{23}\chi_1-E_{22}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial y}+\left(\frac{E_{33}\chi_1-E_{32}\rho_1}{D_1}\right)\frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right\}.$$

Se lo spazio limitato dal contorno σ fa parte di quello T in cui si considerano Φ_1 e Φ_2, si ottiene facilmente dalle formule precedenti, mediante integrazione per parti, denotando con n la normale a σ diretta verso l'esterno di S,

$$(A)\qquad \int_S \lambda H_{\Phi_1\,\Phi_2}\,dS$$

$$=\int_\sigma\theta_2\left\{\frac{E_{13}\chi_1-E_{12}\rho_1}{D_1}\cos nx+\frac{E_{23}\chi_1-E_{22}\rho_1}{D_1}\cos ny+\frac{E_{33}\chi_1-E_{32}\rho_1}{D_1}\cos nz\right\}d\sigma$$

$$-\int_S\theta_2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_1-E_{12}\rho_1}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_1-E_{22}\rho_1}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_1-E_{23}\rho_1}{D_1}\right)\right\}dS$$

$$=\int_\sigma\theta_1\left\{\frac{E_{13}\chi_2-E_{12}\rho_2}{D_1}\cos nx+\frac{E_{23}\chi_2-E_{22}\rho_2}{D_1}\cos ny+\frac{E_{33}\chi_2-E_{32}\rho_2}{D_1}\cos nz\right\}d\sigma$$

$$-\int_S\theta_1\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_2-E_{12}\rho_2}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_2-E_{22}\rho_2}{D_1}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_2-E_{23}\rho_2}{D_1}\right)\right\}dS.$$

Queste formule ci forniscono evidentemente il teorema analogo a quello di GREEN.

Altre formule che è utile stabilire sono le seguenti

$$\Theta_{\Phi_1\,\Phi_2} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix}\chi_2, \rho_2\\ \chi_1, \rho_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix}\rho_2, \tilde\omega_2\\ \rho_1, \tilde\omega_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix}\tilde\omega_2, \chi_2\\ \tilde\omega_1, \chi_1\end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[\tilde\omega_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \chi_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \rho_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial z}\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\tilde\omega_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \chi_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \rho_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right],$$

da cui si deduce, mediante integrazioni per parti,

$$\text{(B)} \qquad \int_S \lambda\Theta_{\Phi_1\,\Phi_2}\, dS = \int_\sigma \theta_2 (\tilde\omega_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz)\, d\sigma = \int_\sigma \theta_2 \frac{d\Phi_1}{\partial\sigma} d\sigma$$

$$= \int_\sigma \theta_1 (\tilde\omega_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz)\, d\sigma = \int_\sigma \theta_1 \frac{d\Phi_2}{d\sigma}\, d\sigma.$$

4. Possiamo dare subito una applicazione della formula (A) dimostrando il seguente teorema:

Se la funzione reale Ψ, *dipendente da linee, soddisfa alle condizioni*

$$\text{(C)} \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_2}\right] \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right] = 0 \\ &D_1 \frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0 \end{aligned}\right.$$

e si conoscono i valori di Ψ *corrispondenti a tutte le linee del contorno* σ *del campo* S (*entro il quale* λ *conserva sempre lo stesso segno e che è interno a* T), *la* Ψ *è completamente determinata per tutte le linee chiuse del campo* S.

Infatti supponiamo che esistano due funzioni Ψ' e Ψ'' le quali soddisfino alle condizioni poste; anche la loro differenza Ψ''' dovrà soddisfare alle condizioni (C) ed inoltre essa dovrà avere corrispondentemente alle linee del contorno un valore nullo. Applichiamo ora la formula (A) prendendo, $\Phi_1 = \Phi_2 = \Psi'''$; si avrà

$$\int_S \lambda\, H_{\Psi'''\,\Psi'''}\, dS$$

$$= \int_\sigma \theta_1 \left\{\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\cos nx + \frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\cos ny + \frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\cos nz\right\} d\sigma.$$

Ma al contorno σ si ha $d\Psi'''/d\sigma = 0$, quindi (vedi § 2) potremo prendere $\theta_1 = 0$ lungo σ, nei tratti in cui μ non è costante, mentre negli altri tratti avremo

$$\text{(8)} \qquad \cos nx : \cos ny : \cos nz = \frac{\partial\mu}{\partial x} : \frac{\partial\mu}{\partial y} : \frac{\partial\mu}{\partial z};$$

perciò la equazione precedente diverrà

$$\int_S \lambda H_{\Psi'''\,\Psi'''}\, dS = 0$$

da cui risulta $H_{\Psi''' \Psi'''} = 0$ e quindi Ψ''' costante (vedi Nota prec., § 6). La Ψ''' dovendo esser nulla al contorno, sarà sempre nulla e perciò $\Psi' = \Psi''$.

Basterà dunque conoscere i valori corrispondenti alle linee del contorno di S *della parte reale o della parte immaginaria di una funzione collegata alla* F *nel senso riemanniano, perché la funzione stessa sia nota.*

Il teorema precedente può dimostrarsi anche applicando la (B) e supponendo in essa $\Phi_1 + i\Phi_1$ collegata ad F nel senso riemanniano.

5. Riprendiamo la formula (6) e poniamo $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi$. Avremo:

$$I = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi\Phi}\, dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_1}\, dS + \int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_2} + \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_2\Phi_2}\, dS.$$

Supponendo Φ_2 nullo per tutte le linee del contorno σ, potremo assumere $\theta_2 = 0$ lungo σ ove μ non è costante, mentre negli altri tratti ove $\mu = \text{cost.}$, avremo soddisfatte le (8), onde applicando la (A) otterremo

$$I = \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_1\Phi_1}\, dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda H_{\Phi_2\Phi_2}\, dS - \int_S \theta_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi_1 - E_{12}\rho_1}{D_1}\right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi_1 - E_{22}\rho_1}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi_1 - E_{32}\rho_1}{D_1}\right)\right\} dS.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché I risulti massimo o minimo, per dati valori di Φ corrispondenti alle linee del contorno, e supponendo λ sempre dello stesso segno in S, sarà quindi data da

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_{13}\chi - E_{12}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E_{23}\chi - E_{22}\rho}{D_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E_{33}\chi - E_{32}\rho}{D_1}\right) = 0 \tag{9}$$

e si avrà per I un minimo od un massimo secondoché λ sarà positivo o negativo.

Dall'esser soddisfatta la (9) insieme alla (4) segue (vedi Nota prec., § 7) che esisterà una funzione Φ' tale che $\Phi + i\Phi'$ sarà collegata alla F nel senso riemanniano. È palese l'analogia fra le presenti considerazioni e quelle su cui si basa il così detto *principio di Riemann-Dirichlet.*

6. Se $\Phi_1 + i\Phi_2$ è collegato ad F nel senso riemanniano, esisteranno le due funzioni θ_1 e θ_2 (vedi § 2) le quali soddisfano le equazioni (5).

Troviamo ora quali relazioni sussistono fra queste funzioni. Tenendo conto delle equazioni (A_1) della Nota prec., § 4, avremo

$$\tag{10} \left\{ \begin{aligned} D_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} &= E_{11}\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \\ D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} &= E_{21}\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \\ D_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} &= E_{31}\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial \theta_2}{\partial x}, \end{aligned} \right.$$

come pure le equazioni equivalenti

$$D_3\frac{\partial\theta_2}{\partial y}-D_2\frac{\partial\theta_2}{\partial z}=-\left(E_{11}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+E_{13}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)$$

$$D_1\frac{\partial\theta_2}{\partial z}-D_3\frac{\partial\theta_2}{\partial x}=-\left(E_{21}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right)$$

$$D_2\frac{\partial\theta_2}{\partial x}-D_1\frac{\partial\theta_2}{\partial y}=-\left(E_{31}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\theta_1}{\partial z}\right).$$

Le due funzioni θ_1 e θ_2 debbono dunque soddisfare ad una stessa equazione differenziale che è la seguente

$$\text{(D)}\quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{11}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E_{13}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{21}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{31}\frac{\partial\theta}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\theta}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right]=0$$

e lungo una superficie qualunque σ, per la quale il quadrato dell'elemento lineare è $ds^2=E du^2+2F du\,dv+G dv^2$, dovrà aversi (vedi: *Sopra le funz. dip. da linee*, Art. III, § 3)

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{d(\theta_1\mu)}{d(u,v)}\quad,\quad\frac{d\theta_2}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{d(\theta_2\mu)}{d(u,v)}.$$

7. Le

$$p_1=\frac{dF_1}{d(y,z)}\quad,\quad q_1=\frac{dF_1}{d(z,x)}\quad,\quad r_1=\frac{dF_1}{d(x,y)}$$

$$p_2=\frac{dF_2}{d(y,z)}\quad,\quad q_2=\frac{dF_2}{d(z,x)}\quad,\quad r_2=\frac{dF_2}{d(x,y)}$$

soddisfano anche esse alle condizioni (vedi Nota prec., § 4)

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial q_1}{\partial y}+\frac{\partial r_1}{\partial z}=0\\ D_1p_1+D_2q_1+D_3r_1=0\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{\partial q_2}{\partial y}+\frac{\partial r_2}{\partial z}=0\\ D_1p_2+D_2q_2+D_3r_2=0\,;\end{array}\right.$$

quindi potremo porre

$$(11)\quad\left\{\begin{array}{lll}\frac{d(t_1,\mu)}{d(y,z)}=p_1\quad, & \frac{d(t_1,\mu)}{d(z,x)}=q_1\quad, & \frac{d(t_1,\mu)}{d(x,y)}=r_1\\ \frac{d(t_2,\mu)}{d(y,z)}=p_2\quad, & \frac{d(t_2,\mu)}{d(z,x)}=q_2\quad, & \frac{d(t_2,\mu)}{d(x,y)}=r_2\,.\end{array}\right.$$

Se ne deduce

$$D_1=-\frac{d(t_1,t_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial x}\quad,\quad D_2=-\frac{d(t_1,t_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial y}\quad,\quad D_3=-\frac{d(t_1,t_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial z}\,;$$

$$\lambda=-\frac{d(t_1,t_2,\mu)}{d(x,y,z)}\,.$$

Eseguiamo un cambiamento di variabili e prendiamo invece di x, y, z un sistema di variabili x', y', z', tali che $x'=t_1$, $y'=t_2$, $z'=\mu$. Avremo

$$E_{11}=1\ ,\ E_{22}=1\ ,\ E_{33}=0\quad;\quad E_{23}=0\ ,\ E_{31}=0\ ,\ E_{12}=0$$

$$D_1=0\quad,\quad D_2=0\quad,\quad D_3=-1$$

e le equazioni (10) diverranno

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y'} = -\frac{\partial\theta_2}{\partial x'} \quad , \quad \frac{\partial\theta_1}{\partial x'} = \frac{\partial\theta_2}{\partial y'} .$$

Ne segue che

$$\theta_1 + i\theta_2 = G(t_1 + it_2 , \mu). \tag{12}$$

Nell'Art. III, § 5 della Nota: *Sopra le funz. dip. da linee,* abbiamo dimostrato che se sono soddisfatte le (6_1) (6_2) (11) si ha

$$\int_\sigma (p_1 \cos nx + q_1 \cos ny + r_1 \cos nz)\, d\sigma = \int_L t_1\, d\mu$$

$$\int_\sigma (p_2 \cos nx + q_2 \cos ny + r_2 \cos nz)\, d\sigma = \int_L t_2\, d\mu$$

$$\int_\sigma (\tilde{\omega}_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz)\, d\sigma = \int_L \theta_1\, d\mu$$

$$\int_\sigma (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz)\, d\sigma = \int_L \theta_2\, d\mu$$

essendo L la linea contorno della superficie σ.

Ne segue che

$$F\,|\,[L]\,| = \int_L (t_1 + it_2)\, d\mu \quad , \quad \Phi\,|\,[L]\,| = \int_L (\theta_1 + i\theta_2)\, d\mu ;$$

e reciprocamente, se le funzioni complesse F e Φ dipendenti da linee saranno ottenute colle formule precedenti da $t_1 + it_2$ e $\theta_2 + i\theta_2$, legate dalla (12), esse saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

Si ha dunque il modo di costruire le funzioni complesse di linee collegate fra loro nel senso riemanniano nel caso in cui la (2) sia integrabile. Basta perciò prendere tre funzioni finite continue e monodrome t_1 , t_2 , μ di x , y , z, tali che $d(t_1 , t_2 , \mu)/d(x , y , z) \gtrless 0$ e quindi una funzione finita continua e monodroma $G(\zeta , \mu)$ di $\zeta = t_1 + it_2$ e di μ. Presa una linea qualunque L e posto

$$F\,|\,[L]\,| = \int_L \zeta\, d\mu \quad , \quad \Phi\,|\,[L]\,| = \int_L G\, d\mu$$

avremo che F e Φ saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

2° CASO. - Consideriamo ora il caso in cui la (2) non sia integrabile. Adottando le solite notazioni, relativamente alle due funzioni F e Φ collegate fra loro nel senso riemanniano, si determinino φ_1 e φ_2 in modo che siano soddisfatte le equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} & E_{11} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = k\tilde{\omega}_1 \\ & E_{21} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = k\chi_1 \\ & E_{31} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + D_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = k\rho_1 , \end{aligned} \right. \tag{13_1}$$

in cui k è una funzione che lasceremo per ora indeterminata. Supporremo di rimanere entro un campo T in cui le equazioni precedenti possono essere soddisfatte da funzioni φ_1, φ_2 monodrome, finite e continue, comunque siano k, ω_1, χ_1, ρ_1 purché anche esse monodrome, finite e continue. A cagione delle relazioni (3) e (B_1) (vedi Nota I) avremo che, delle equazioni precedenti, una risulta conseguenza delle altre due. Da esse si ricava, tenendo conto delle formule (A_1), (3), (4') della Nota I,

$$(13_2)\qquad \left\{\begin{aligned} &E_{11}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{13}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=k\omega_2\\ &E_{21}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+D_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=k\chi_2\\ &E_{31}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+D_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=k\rho_2.\end{aligned}\right.$$

Moltiplicando le (13_2) per i e sommandole colle (13_1), posto $\varphi_1+i\varphi_2=\varphi$ e denotando con p', q', r' i valori coniugati di p, q, r, avremo con un calcolo facile:

$$p'\frac{\partial\varphi}{\partial x}+q'\frac{\partial\varphi}{\partial y}+r'\frac{\partial\varphi}{\partial z}=k\frac{\omega}{p}=k\frac{\chi}{q}=k\frac{\rho}{r}\,.$$

Se ora eseguiamo un cambiamento di variabili e passiamo dalle x, y, z alle x', y', z', si dimostra senza difficoltà che basterà prender k in modo che $k(x',y',z')=k(x,y,z)\,d(x,y,z)/d(x',y',z')$ affinché colle stesse φ_1 e φ_2 le (13_1) e (13_2) valgano qualunque siano le coordinate x, y, z.

Abbiasi ora un'altra funzione $\Phi'=\Phi'_1+i\Phi'_2$ collegata alle precedenti nel senso riemanniano e a cui corrispondono $\omega'_1, \chi'_1, \rho'_1$; $\omega'_2, \chi'_2, \rho'_2$ e le funzioni φ'_1, φ'_2, tali che fra esse passino le relazioni analoghe alle (13_1) e (13_2).

Formiamo

$$\begin{aligned} H_{\Phi_1\Phi'_1}&=\frac{1}{D_1}\begin{vmatrix}\chi'_2, \rho'_2\\ \chi_1, \rho_1\end{vmatrix}=\frac{1}{D_2}\begin{vmatrix}\rho'_2, \omega'_2\\ \rho_1, \omega_1\end{vmatrix}=\frac{1}{D_3}\begin{vmatrix}\omega'_2, \chi'_2\\ \omega_1, \chi_1\end{vmatrix}\\ &=\frac{E_{22}\rho_1\rho'_1-E_{23}(\rho_1\chi'_1+\rho'_1\chi_1)+E_{33}\chi_1\chi'_1}{D_1^2}\\ &=\frac{E_{33}\omega_1\omega'_1-E_{31}(\omega_1\rho'_1+\omega'_1\rho_1)+E_{11}\rho_1\rho'_1}{D_2^2}\\ &=\frac{E_{11}\chi_1\chi'_1-E_{12}(\chi_1\omega'_1+\chi'_1\omega_1)+E_{22}\omega_1\omega'_1}{D_3^2}.\end{aligned}$$

Si otterrà facilmente

$$(14)\qquad \begin{aligned} H&=\frac{1}{k}\left\{\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\omega'_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi'_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho'_2\right]+\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\omega'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi'_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho'_1\right]\right\}\\ &=\frac{1}{k}\left\{\left[\frac{\partial\varphi'_1}{\partial x}\omega_2+\frac{\partial\varphi'_1}{\partial y}\chi_2+\frac{\partial\varphi'_1}{\partial z}\rho_2\right]+\left[\frac{\partial\varphi'_2}{\partial x}\omega_1+\frac{\partial\varphi'_2}{\partial y}\chi_1+\frac{\partial\varphi'_2}{\partial z}\rho_1\right]\right\}.\end{aligned}$$

Moltiplicando la (14) per $k\,dS$ ed estendendo la integrazione ad un campo S, interno a T, entro il quale le funzioni che compariscono non hanno alcuna singolarità, otterremo, mediante integrazione per parti,

$$(15)\qquad \int_S kH\,dS=\int_\sigma\left(\varphi'_1\frac{d\Phi_2}{d\sigma}+\varphi'_2\frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right)d\sigma=\int_\sigma\left(\varphi_1\frac{d\Phi'_2}{d\sigma}+\varphi_2\frac{d\Phi'_1}{d\sigma}\right)d\sigma,$$

in cui le derivazioni rispetto a σ sono eseguite in modo che la normale sia diretta verso l'esterno di S. In particolare, prendendo $\tilde{\omega}_1=\tilde{\omega}_1'$, $\chi_1=\chi_1'$, $\rho_1=\rho_1'$, avremo $\mathrm{H}=\Theta$ (vedi Nota I, § 5); onde

$$(16)\qquad \int_S k\Theta\, dS=\int_\sigma\left(\varphi_1\frac{d\Phi_2}{d\sigma}+\varphi_2\frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

11. Dalle (14) si deduce facilmente la espressione di H per mezzo di $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$, che denoteremo con $\mathrm{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2')$, e quella di Θ mediante φ_1 e φ_2, che si indicherà con $\Theta(\varphi_1, \varphi_2)$.

Si ponga

$$\Gamma(\varphi_1, \varphi_2)=\Sigma\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{k}\left(\mathrm{E}_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\mathrm{E}_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\mathrm{E}_{13}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\mathrm{D}_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\mathrm{D}_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right],$$

essendo la somma del 2° membro costituita da tre termini che si ottengono ruotando. Le equazioni a cui dovranno soddisfare φ_1 e φ_3 saranno

$$(17)\qquad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2)=0 \qquad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1)=0.$$

Reciprocamente, se φ_1 e φ_2 soddisfaranno alle equazioni precedenti, le $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1; \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ dedotte dalle (13_1), e (13_2) verificheranno le condizioni (E) della Nota I.

Le (17) dipendono da un problema di calcolo delle variazioni. Infatti si consideri

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2)\, dS$$

e si formi

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1+\psi_1, \varphi_2+\psi_2)\, dS=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2)\, dS+\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\psi_1, \psi_2)\, dS$$
$$+\int_S k\mathrm{H}(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)\, dS.$$

Supponendo ψ_1 e ψ_2 nulli al contorno, avremo mediante integrazioni per parti

$$\mathrm{I}_1=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1, \varphi_2)\, dS+\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\psi_1\, \psi_2)\, dS-\int_S(\psi_1\Gamma(\varphi_1, \varphi_2)+\psi_2\Gamma(\varphi_2, -\varphi_1))\, dS.$$

Quindi (supponendo k sempre dello stesso segno) affinché sia I massimo o minimo, per dati valori al contorno di φ_1 e φ_2, bisognerà che siano soddisfatte le equazioni (17). Dalle formule precedenti si deduce pure facilmente che *dati i valori di* φ_1 e φ_2 *al contorno del campo* S, *le funzioni stesse sono determinate dalle condizioni* (17).

12. Riprendiamo la formula (15) e supponiamo k sempre dello stesso segno entro tutto il campo S. Se esistessero due funzioni complesse di linee Φ' e Φ'' collegate ad F nel senso riemanniano e che per le linee del contorno di S avessero gli stessi valori, posto $\Phi'-\Phi''=\Phi$ risulterebbe lungo σ, $0=\frac{d\Phi}{d\sigma}=\frac{d\Phi_1}{d\sigma}+i\frac{d\Phi_2}{d\sigma}$, quindi per la (15) si avrebbe $\Theta=0$ e perciò Φ sarebbe nullo per tutte le linee del campo S. Se ne conclude che i valori al contorno di S di una funzione Φ collegata ad F nel senso riemanniano definiscono completamente la funzione.

NOTA III.

Ibidem, pp. 196–202 (*).

1. Nella Nota precedente su questo argomento venne esposta la estensione della teoria delle caratteristiche alle funzioni di linee collegate fra loro nel senso riemanniano. Nella Nota che ho l'onore di presentare viene brevemente trattata la teoria delle operazioni di derivazione e di integrazione relative alle funzioni stesse.

Per questo studio è necessario introdurre delle funzioni complesse dei punti dello spazio collegate opportunamente alle funzioni fin qui considerate.

Riprendiamo pertanto la definizione di RIEMANN relativa alle funzioni di variabili complesse. Due variabili complesse φ e ψ (funzioni dei punti di un piano, i quali si riferiscono alle coordinate cartesiane x, y) sono funzioni l'una dell'altra quando

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial(-x)}=0.$$

Questa definizione è equivalente a quella enunciata nella Nota I, ed essa può estendersi allo spazio. Infatti si abbiano due variabili complesse F e f, la prima delle quali sia funzione delle linee e la seconda sia funzione dei punti dello spazio. Diremo che F è collegata ad f nel senso riemanniano, quando

$$\frac{dF}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{dF}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{dF}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Stabiliremo di rappresentare le funzioni di linee mediante delle lettere maiuscole e quelle di punti colle lettere minuscole.

2. Ciò premesso, si possono dimostrare facilmente le seguenti proposizioni:

1ª Se una funzione f è collegata ad F essa lo sarà a tutte le funzioni Φ collegate ad F nel senso riemanniano (vedi la Nota I).

Infatti, posto

$$\frac{dF}{d(y,z)}=p\ ,\quad \frac{dF}{d(z,x)}=q\ ,\quad \frac{dF}{d(x,y)}=r,$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)}=\tilde{\omega}\ ,\quad \frac{d\Phi}{d(z,x)}=\chi\ ,\quad \frac{d\Phi}{d(x,y)}=\rho,$$

avremo

$$\frac{\tilde{\omega}}{p}=\frac{\chi}{q}=\frac{\rho}{r},$$

onde:

$$\tilde{\omega}\frac{\partial f}{\partial x}+\chi\frac{\partial f}{\partial y}+\rho\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

(*) Presentata dal Socio U. DINI.

2ª Le condizioni affinché più funzioni f_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, siano collegate ad una stessa funzione F sono date da

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x}, & \frac{\partial f_r}{\partial x}, & \frac{\partial f_s}{\partial x} \\ \frac{\partial f_i}{\partial y}, & \frac{\partial f_r}{\partial y}, & \frac{\partial f_s}{\partial y} \\ \frac{\partial f_i}{\partial z}, & \frac{\partial f_r}{\partial z}, & \frac{\partial f_s}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0 \qquad (i, r, s = 1, 2, \cdots n).$$

Infatti dalle

$$p\frac{\partial f_i}{\partial x} + q\frac{\partial f_i}{\partial y} + r\frac{\partial f_i}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

risultano come conseguenze le (2).

Se, mantenendo fissi i ed r (supposto f_i e f_r indipendenti) e dando ad s tutti i valori $1, 2, \cdots, n$, esclusi i ed r, è sempre soddisfatta la (2), essa sarà soddisfatta evidentemente per una combinazione qualunque di i, r, s.

3. Quando si avrà un sistema di funzioni f_i che soddisfano alle (2) si dirà che esse sono *collegate fra loro nel senso riemanniano.*

Si giustifica facilmente la ragione di questa denominazione, osservando che porre la condizione (2) equivale a stabilire ciò che segue:

Si prenda un punto M ove le tre funzioni hanno i valori f_1, f_2, f_3 e due punti N e P infinitamente vicini ad esso: si denotino con $f_i + \Delta' f_i$, $f_s + \Delta' f_s$, $f_r + \Delta' f_r$ i valori di f_i, f_s, f_r in N e con $f_i + \Delta'' f_i$, $f_s + \Delta'' f_s$, $f_r + \Delta'' f_r$ i loro valori in P e si ponga la condizione che i rapporti fra i determinanti

$$\begin{vmatrix} \Delta' f_i, \Delta'' f_i \\ \Delta' f_s, \Delta'' f_s \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Delta' f_s, \Delta'' f_s \\ \Delta' f_r, \Delta'' f_r \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Delta' f_r, \Delta'' f_r \\ \Delta' f_i, \Delta'' f_i \end{vmatrix}$$

abbiano dei limiti indipendenti dal modo con cui i punti N e P si avvicinano ad M indefinitamente.

4. Abbiasi un sistema qualunque di funzioni Φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano e si prenda una funzione f collegata ad esse; sia cioè

$$\frac{d\Phi_i}{d(y, z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\Phi_i}{d(z, x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\Phi_i}{d(x, y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Si potranno trovare delle funzioni φ_i tali che

$$(3)\qquad \frac{d\Phi_i}{d(y, z)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi_i}{d(z, x)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi_i}{d(x, y)} = \frac{d(f, \varphi_i)}{d(x, y)}.$$

Le funzioni φ_i saranno evidentemente collegate alle Φ_i, alla f e saranno pure collegate fra loro.

Reciprocamente, se si ha un sistema di funzioni φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano, posto

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_{is}, \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(z, x)} = \chi_{is}, \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s)}{d(x, y)} = \rho_{is},$$

avremo

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_{is}}{\partial x} + \frac{\partial \chi_{is}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_{is}}{\partial z} = 0.$$

Esisterà dunque una funzione complessa Φ_{is} che soddisfa alle condizioni

$$\frac{d\Phi_{is}}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{is} \quad , \quad \frac{d\Phi_{is}}{\partial(z,x)} = \chi_{is} \quad , \quad \frac{d\Phi_{is}}{d(x,y)} = \rho_{is} \, .$$

Le Φ_{is} sono fra loro collegate nel senso riemanniano.

Infatti dalle relazioni

$$\frac{d(\varphi_i, \varphi_s, \varphi_r)}{d(x,y,z)} = 0 \quad , \quad \frac{d(\varphi_i, \varphi_s, \varphi_t)}{d(x,y,z)} = 0$$

segue che

$$\frac{\tilde{\omega}_{is}}{\tilde{\omega}_{rt}} = \frac{\chi_{is}}{\chi_{rt}} = \frac{\rho_{is}}{\rho_{rt}} \, .$$

Inoltre il sistema delle Φ_{is} sarà collegato alle φ_i. Quando fra Φ_i e f e φ_i passano le relazioni (3) si dirà che Φ_i è *coniugata* alle f e φ_i e, reciprocamente, f e φ_i coniugate a Φ_i. In questa ipotesi il valore di Φ_i corrispondente ad una linea L sarà dato da

$$\Phi_i \,|\, [\mathrm{L}] \,| = \int_{\mathrm{L}} \varphi_i \, df \, . \tag{4}$$

(V. *Sopra le funz. dip. da linee*, Nota II) supponendo che L faccia parte di una porzione dello spazio in cui f e φ_i sono monodrome.

Si consideri una superficie σ; fissato il senso positivo della normale n sarà determinato

$$\frac{d\Phi_{is}}{d\rho} = \tilde{\omega}_{is} \cos nx + \chi_{is} \cos ny + \rho_{is} \cos nz \, .$$

Ora se si prende sopra σ un sistema di coordinate curvilinee $u\, v$, tali che le direzioni $u\,,v\,,n$ siano disposte come le $x\,,y\,,z$ e che il quadrato dell'elemento lineare della superficie sia $ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$, avremo

$$\frac{d\Phi_{is}}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u} \,, & \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial u} \,, & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} . \tag{5}$$

5. Ciò premesso si può passare allo studio delle operazioni di derivazione e d'integrazione. Siano F e Φ collegate fra loro nel senso riemanniano. Posto come precedentemente

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)} = p \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)} = q \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)} = r \, ;$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \tilde{\omega} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho ,$$

e preso in un punto un elemento qualunque di superficie $d\sigma$, avremo

$$\frac{\left(\dfrac{d\Phi}{d\sigma}\right)}{\left(\dfrac{d\mathrm{F}}{d\sigma}\right)} = \frac{\tilde{\omega}}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\rho}{r} \, .$$

Questo rapporto indipendente da $d\sigma$ lo denoteremo col simbolo $d\Phi/d\mathrm{F}$ e col nome di *derivata di* Φ *rispetto ad F*. Essa sarà una funzione complessa dei punti dello spazio. Come proprietà fondamentale può dimostrarsi che la *derivata di* Φ *rispetto ad* F *è collegata alle due funzioni* Φ *ed* F *nel senso riemanniano*. Infatti, posto

$$\frac{d\Phi}{d\mathrm{F}} = \varphi,$$

si avrà

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x} - \varphi\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad q\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial q}{\partial y} \quad , \quad r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - \varphi\frac{\partial r}{\partial z}$$

e quindi

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) - \varphi\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

6. Sia ora f collegata ad F e σ una superficie aperta o chiusa nello spazio in cui sono definite le due funzioni; fissata la direzione della normale n a σ è definito $d\mathrm{F}/d\sigma$ e quindi è pure definito

$$\int_\sigma f\frac{d\mathrm{F}}{d\sigma}\,d\sigma,$$

che rappresenteremo col simbolo

$$\int_\sigma f d\mathrm{F}.$$

Col cambiare il senso della normale cambierà il segno dell'integrale. Se σ non è chiusa, fissiamone la direzione dei contorni in modo che un osservatore, disposto nel senso positivo di uno qualunque di essi e rivolto verso la superficie, veda la direzione positiva della normale andare dalla sinistra alla destra. Con questa convenzione, quando è stabilito il senso dei contorni, è fissato il segno dell'integrale.

Si supponga σ chiusa e tale che formi da sola il contorno di uno spazio S entro il quale la f e la F non abbiano singolarità. Avremo,

$$\begin{aligned}\int_\sigma f d\mathrm{F} &= \int_\sigma f\left(\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)}\cos nx + \frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)}\cos ny + \frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}\cos nz\right)d\sigma \\ &= \int_\mathrm{S}\left\{f\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathrm{F}}{d(y,z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial(z,x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{d\mathrm{F}}{\partial(x,y)}\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)}\right)\right\}d\mathrm{S} = 0.\end{aligned}$$

Quindi si ha il teorema espresso dalla formula

$$\int_\sigma f d\mathrm{F} = 0. \tag{6}$$

Se invece di una sola superficie σ si hanno le superficie σ_i $(i = 1, 2 \cdots n)$, che limitano lo spazio S, entro il quale non sussistono singolarità per f e F, si avrà la formula

$$(6') \qquad \sum_1^n {}_i \int_{\sigma_i} f d\mathrm{F} = 0$$

in cui le normali alle σ_i sono tutte prese nella direzione dall'esterno all'interno di S.

Il teorema contenuto nella formula precedente non è altro che la estensione del teorema di CAUCHY.

È noto che il prof. MORERA ha dato un teorema inverso a quello di CAUCHY [1]; esso pure può estendersi al nostro caso. Sia cioè soddisfatta la (6) per ogni superficie σ chiusa che limita uno spazio S, escluso per quelle che hanno nell'interno dei punti o delle linee singolari di f o di F: se ne potrà concludere che f e F sono collegate fra loro nel senso riemanniano. Si potrebbe stabilire la precedente condizione come definizione del collegamento riemanniano fra una funzione di linee ed una di punti.

7. Si abbia un sistema di funzioni φ_i collegate fra loro nel senso riemanniano. Prese due qualunque di esse φ_i e φ_s, se ne trovi la coniugata Φ_{is}. Si fissi il senso positivo della normale n a una superficie σ; sarà determinato il valore di $\int_\sigma \varphi_r \, d\,\Phi_{is}$, e avremo applicando la (5)

$$(7) \qquad \int_\sigma \varphi_r \, d\Phi_{is} = \int_\sigma \varphi_r \frac{d\Phi_{is}}{d\sigma} \, d\sigma = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u} , & \dfrac{\partial \varphi_s}{du} \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial v} , & \dfrac{\partial \varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du \, dv,$$

in cui u e v sono un sistema di coordinate curvilinee tali che le direzioni della terna u, v, n siano diposte come le x, y, z. Se denotiamo con d gli accrescimenti nel senso delle linee u e con δ quelli nel senso delle linee v, l'integrale precedente potrà scriversi

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i , d\varphi_s \\ \delta\varphi_i , \delta\varphi_s \end{vmatrix} .$$

Supponiamo σ chiusa e che limiti da sola uno spazio S nel quale nessuna delle funzioni abbia singolarità; in tal caso l'integrale (7) sarà nullo e quindi

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i , d\varphi_s \\ \delta\varphi_i , \delta\varphi_s \end{vmatrix} = 0$$

che è *un'altra forma sotto cui può enunciarsi il teorema precedente analogo a quello di* CAUCHY. Così pure vale anche sotto questa forma il teorema reciproco, cioè l'analogo del teorema di MORERA.

(1) « Rend. del R. Istit. Lomb. », Serie 2ª, vol. XIX, fasc. VII.

8. Si tolgano, mediante delle superficie convenienti, dal campo in cui sono definite due funzioni f e F (collegate fra loro) tutti quei punti e quelle linee in cui le due funzioni presentano delle singolarità, e per mezzo di opportune *sezioni lineari* si renda superficialmente il campo rimanente semplicemente connesso. Ciò fatto ogni superficie chiusa che potrà tracciarsi sarà contorno completo di uno spazio ove le due funzioni f e F non avranno singolarità.

Si prendano due linee L_0 e L_1 aventi ciascuna una data direzione, tali che *si possa condurre* per $-L_0$ [2] e L_1 una superficie σ (vedi *Sopra le funz. dip. da linee*, Nota II). Si determini il senso della normale a σ relativamente alle direzioni di $-L_0$ e L_1 nel modo indicato nel § 6. Sarà allora determinato

$$\int_\sigma \varphi d\mathrm{F}. \tag{9}$$

È facile dimostrare che il valore dell'integrale precedente non dipenderà dalla superficie condotta σ, ma dipenderà solo dalle linee $-L_0$ e L_1. Infatti, condotta per le due linee un'altra superficie σ_1, avremo che l'insieme di σ e σ_1 formerà una superficie chiusa, quindi per le ipotesi fatte

$$\int_{\sigma+\sigma_1} \varphi d\mathrm{F} = 0$$

donde la proprietà enunciata. Perciò l'integrale (9) potrà indicarsi con

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi d\mathrm{F}\,.$$

Cambiando il senso della normale n cambia il segno dell'integrale (10) (vedi § 6) per conseguenza si avrà

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi d\mathrm{F} = -\int_{L_1}^{L_0} \varphi d\mathrm{F}\,.$$

Se tenendo fissa la curva L_0 si muta la L_1, l'integrale (10) potrà ritenersi come una funzione *dipendente dalla linea* L_1 e quindi potremo porre

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi d\mathrm{F} = \Phi \mid [L_1] \mid .$$

La funzione Φ sarà collegata ad F nel senso riemanniano e avremo

$$\frac{d\Phi}{d\mathrm{F}} = \varphi$$

(2) Con $-L_0$ si intende la linea L_0 presa in direzione opposta.

vale a dire le due operazioni di integrazione e di derivazione si elidono scambievolmente. Analogamente se le φ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ saranno collegate fra loro, otteremo

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi_i \begin{vmatrix} d\varphi_s, & d\varphi_r \\ \delta\varphi_s, & \delta\varphi_r \end{vmatrix} = \psi \,|\, [L_1] \,|$$

e $\psi \,|\, [L_1] \,|$ sarà collegata alle φ_i nel senso riemanniano.

Supponiamo che f e φ siano coniugate ad F; in questo caso avremo

$$F \,|\, [L_1] \,| - F \,|\, [L_0] \,| = \int_{L_0}^{L_1} \begin{vmatrix} df & d\varphi \\ \delta f & \delta\varphi \end{vmatrix}.$$

9. Le equazioni (2) che passano fra le derivate delle f_i, f_r, f_s provano che queste variabili, prese tre a tre, debbono esser legate da relazioni

$$F_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0.$$

Reciprocamente ogni qualvolta fra le tre variabili f_i, f_r, f_s passerà una relazione $F_{i,r,s}(f_i, f_r, f_s) = 0$, ovvero sarà $f_i = \varphi(f_r, f_s)$, risulterà soddisfatta la (2) e perciò le tre variabili f_i, f_r, f_s, saranno collegate fra loro nel senso riemanniano.

Ciò prova che la teoria esposta in questa Nota e nelle due precedenti è strettamente legata allo studio delle funzioni di due variabili complesse ed ai loro integrali, onde credo che le idee brevemente accennate potranno mettere in evidenza la utilità di introdurre le funzioni dipendenti da linee nello studio delle funzioni di due variabili complesse.

Il sig. POINCARÉ in una importantissima Memoria pubblicata nel volume IX degli « Acta Mathematica » ha esteso il teorema di CAUCHY agli integrali doppî: il teorema enunciato nel § 7 coincide colla estensione del teorema di CAUCHY data dal sig. POINCARÉ. Questo teorema è stato il punto di partenza delle mie ricerche.

Una ulteriore estensione della teoria di RIEMANN alle funzioni di un numero qualunque di variabili complesse può eseguirsi senza gravi difficoltà purché le considerazioni, limitate in queste Note agli spazî a tre dimensioni, si estendano ad uno spazio ad n dimensioni, e il concetto di funzione dipendente da linee si generalizzi alle funzioni dipendenti da iperspazî immersi nello spazio ad n dimensioni.

XX.

SULLA TEORIA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI

« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo »,
tomo II (1888), pp. 69–75.

1. In una Nota pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (1) ho accennato come la teoria delle equazioni differenziali lineari possa ridursi al calcolo infinitesimale relativo alle sostituzioni, e nella prima parte di una Memoria pubblicata dalla « Società dei XL » (2) ho esposto il calcolo infinitesimale delle sostituzioni nel caso in cui esse fossero funzioni di variabili reali.

Queste ricerche costituiscono uno studio preliminare alla teoria delle sostituzioni i cui elementi sono funzioni di una variabile complessa.

Mi pregio di presentare a cotesta Onorevole Società alcuni risultati ottenuti nello studio delle sostituzioni funzioni di una variabile complessa.

2. Chiamo *sostituzione olomorfa* in un campo σ *una sostituzione* S i cui elementi considerati come funzioni di una variabile complessa z sono olomorfi entro il campo σ di variabilità della z.

Estendendo il concetto di integrazione (dato nella Memoria citata, pel caso di sostituzioni funzioni di variabili reali) al caso di una sostituzione funzione di una variabile complessa, si ottiene una generalizzazione del teorema di CAUCHY che può enunciarsi:

Se T (som. o) *è una sostituzione olomorfa di z entro un campo semplicemente connesso σ, e s una linea chiusa contenuta entro σ, si ha*

$$\int_s \mathrm{T}\, dz = 1,$$

rappresentando col simbolo 1 *la identità.*

La dimostrazione di questa proposizione si ottiene applicando i teoremi dati nel § 4 della Memoria citata.

Consideriamo ora il caso in cui entro σ esistono dei luoghi singolari della sostituzione T. Si prendano due linee qualunque s_1 e s_2 nel cui interno giac-

(1) *Sulle equazioni differenziali lineari* « Rend. Acc. Lincei », ser. 4ª, vol. III (1887), 1º semestre, pagine 393–396; [in questo vol.: XVI, pp. 290–292].

(2) « Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) », ser. 3ª, volume VI. n. 8; [in questo vol.: XV, pp. 209–289]. Per i termini ed i simboli usati nella presente Nota rimando a questa Memoria.

ciono gli stessi punti singolari, e percorrendole nello stesso senso, si formino

$$S_1 = \int_{s_1} T\,dz \quad , \quad S_2 = \int_{s_2} T\,dz\,.$$

Questi due integrali saranno in generale diversi dalla identità e diversi fra loro; ma se essi si riducono alla forma normale (Vedi Memoria citata § 2: preliminari) avremo

$$S_1 = V_1 \overline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{h} S_i^{(h)} \right\}} V_1^{-1}$$

$$S_2 = V_2 \overline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{h} S_i^{(h)} \right\}} V_2^{-1}$$

e le $S_i^{(h)}$ saranno le stesse tanto nell'una quanto nell'altra formula.

La sostituzione

$$W = \overline{\left\{ \prod_{1}^{p}{}_{i} \prod_{1}^{r_i}{}_{h} S_i^{(h)} \right\}}$$

si chiamerà la *caratteristica delle sostituzioni* integrali S_1 e S_2, quindi:

Gli integrali estesi nello stesso senso a linee nel cui interno si trovano gli stessi punti singolari hanno eguali caratteristiche.

Si ha pure il teorema correlativo per gli integrali destri e le caratteristiche relative agli integrali destri si ottengono immediatamente, note quelle degli integrali sinistri.

Se entro s_1 e s_2 giace un solo punto singolare, la caratteristica comune agli integrali estesi alle linee s_1 e s_2, percorse in modo da lasciare a sinistra il campo che esse racchiudono, si chiama *il residuo del punto singolare.*

Se gli elementi di T hanno in un dato punto un polo del primo ordine, *il residuo della sostituzione non dipende che dai residui degli elementi e, noti questi, può calcolarsi il residuo della sostituzione.*

3. Una sostituzione viene chiamata monodroma sopra una superficie di RIEMANN se i suoi elementi sono monodromi sulla superficie stessa. Gli integrali destro e sinistro di una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN li chiamo sostituzioni abeliane semplici e le distinguo fra loro col nome di *sostituzione abeliana sinistra* e *sostituzione abeliana destra.*

Eseguiti sulla superficie di RIEMANN i tagli normali si ha il teorema:

Se si considera un taglio o una porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, i valori della sostituzione abeliana sinistra su uno degli orli del taglio saranno eguali ai valori sull'altro orlo moltiplicati a destra per una sostituzione costante.

Per le sostituzioni abeliane destre vale il teorema correlativo. Il teorema reciproco si trova pure verificato, cioè *se si ha una sostituzione tale che su* *di una superficie di* RIEMANN *(convenientemente sezionata) si conserva monodroma e i valori lungo un orlo di un taglio sono eguali ai valori lungo l'orlo opposto moltiplicati a destra per una sostituzione costante lungo tutto il taglio o la porzione di taglio compresa fra due nodi consecutivi, la sostituzione sarà abeliana sinistra.*

Fra le sostituzioni abeliane destra e sinistra passa poi la relazione che *la sostituzione inversa di una sostituzione abeliana sinistra è una sostituzione abeliana destra, e reciprocamente.*

4. È evidente l'analogia che presentano le sostituzioni abeliane semplici cogli integrali abeliani e più in generale cogli integrali di funzioni monodrome sopra superficie di RIEMANN. Però le sostituzioni abeliane dànno luogo ad altre classi di sostituzioni di cui le corrispondenti non esistono per gli integrali abeliani o per dir meglio si confondono colle funzioni monodrome sopra le superficie di RIEMANN e cogli integrali stessi.

Le sostituzioni a cui alludo sono le *sostituzioni abeliane doppie* e le *sostituzioni trasformanti.*

Sotto il nome di *sostituzione abeliana doppia* intendo una sostituzione i cui valori ai due orli di ciascun taglio eseguito sulla superficie di RIEMANN si ottengono gli uni dagli altri mediante la moltiplicazione a destra e a sinistra per sostituzioni costanti (a det. $= 1$) lungo tutto il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi. Nel caso in cui i valori lungo un orlo si ottengono da quelli sull'altro eseguendo una trasformazione mediante una sostituzione costante (det. $= 1$) lungo il taglio o la porzione compresa fra nodi consecutivi, chiamo la sostituzione una *sostituzione abeliana trasformante.*

I teoremi fondamentali per queste due classi di sostituzioni sono i seguenti:

Le derivate destra e sinistra di una sostituzione abeliana doppia sono sostituzioni trasformanti.

Gli integrali destro e sinistro di sostituzioni abeliane trasformanti, sono sostituzioni abeliane doppie.

Moltiplicando a destra una sostituzione abeliana semplice destra per una sostituzione abeliana semplice sinistra si ottiene una sostituzione abeliana doppia.

Trasformando una sostituzione monodroma mediante una sostituzione abeliana sinistra, si ottiene una sostituzione trasformante.

5. È utile distinguere le sostituzioni abeliane semplici in due classi: le *sostituzioni abeliane apparenti* e quelle *essenziali.* Se una sostituzione i cui elementi sono funzioni di h variabili $y_1, y_2, \cdots, y_h$, è tale che, se si sostituiscono in luogo di queste variabili un sistema qualunque di integrali di funzioni monodrome sopra una stessa superficie di RIEMANN, la sostituzione diviene abeliana semplice destra o sinistra, diremo che la sostituzione abeliana è apparente. Ogni sostituzione abeliana semplice che non può farsi rientrare in una classe di sostituzioni abeliane apparenti, la diremo una sostituzione abeliana essenziale.

Per esempio le sostituzioni del 2° ordine

$$\left\{\begin{matrix} y+1 , & 1 \\ y & , 1 \end{matrix}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{matrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{matrix}\right\},$$

in cui y è l'integrale di una funzione monodroma, sono sostituzioni abeliane apparenti; mentre se fra le tre funzioni $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, monodrome sopra una stessa superficie di RIEMANN, non passa nessuna relazione lineare

$$A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + A_3\varphi_3 = 0$$

con A_1, A_2, A_3 costanti, avremo che

$$\int \left\{\begin{matrix} \varphi_1 , & \varphi_1 \\ \varphi_3 , & -\varphi_2 \end{matrix}\right\} dz$$

sarà una sostituzione abeliana essenziale.

Tutte le sostituzioni abeliane sinistre apparenti sono date da

$$S = \int \prod_1^h {}_i T_i \, dy_i$$

ove le T (som. 0) *sono sostituzioni costanti.*

Ora, se le T_i sono costanti, affinché

$$\prod_1^h {}_i T_i \, dy_i$$

sia un differenziale esatto destro o sinistro, è necessario e sufficiente che *le* T_i *siano sostituzioni fra loro permutabili.* Ciò premesso si ha facilmente

$$S = \prod_1^h S_i(y_i) \cdot C$$

ove

$$S_i = \int_{y_i^0}^{y_i} T_i \, dy_i$$

e C è una sostituzione costante.

6. Le considerazioni precedenti conducono alle sostituzioni fra loro permutabili. Giova in un tale studio il teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le sostituzioni permutabili con una sostituzione data siano permutabili fra loro, è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.

Una sostituzione che soddisfa alla precedente condizione la chiameremo una *sostituzione elementare.* Posto questo si hanno i teoremi:

Se la derivata sinistra (o destra) di una sostituzione abeliana sinistra (o destra) è permutabile con una sostituzione elementare costante, la sostituzione sarà abeliana apparente.

Fra le sostituzioni abeliane non vi sono che quelle apparenti le quali trasformino un gruppo di sostituzioni costanti (fra le quali si trova una sostituzione elementare) in un gruppo isomorfo formato da sostituzioni pure costanti.

Presa una sostituzione abeliana apparente si potranno sempre trovare due gruppi isomorfi di sostituzioni costanti trasformabili mediante essa l'uno nell'altro.

Se una sostituzione monodroma sopra una superficie di RIEMANN *è permutabile con una sostituzione elementare costante, gli integrali destro e sinistro si otterranno mediante quadrature da funzioni monodrome.*

Sul modo di eseguire i tagli normali sopra una superficie di RIEMANN mi riferirò all'opera di C. NEUMANN, *Vorlesungen über Riemann's Theorie der* ABEL'SCHEN *Integrale.*

Eseguiremo tre sistemi di tagli, i tagli a_i, b_i, c_i (3). Questi ultimi a differenza di quanto fa il NEUMANN, li faremo partire da un punto O della superficie di RIEMANN fino a giungere ai tagli a_i.

Finalmente eseguiremo un taglio l, il quale partendo da O attraversi tutti i punti singolari della sostituzione abeliana che si considera e non tolga la connessione alla superficie di RIEMANN già sezionata mediante i tagli a_i, b_i, c_i.

La sostituzione costante, per cui devonsi moltiplicare i valori della sostituzione abeliana lungo l'orlo sinistro, per ottenere i valori sull'orlo destro, si chiamerà la costante del taglio. Ad ogni taglio a_i, corrispondono due costanti, ad ogni taglio b_i e c_i una sola costante. Queste costanti sono legate dalle relazioni:

Delle due sostituzioni costanti corrispondenti ad uno stesso taglio a_i l'una è la trasformata dell'altra mediante la costante del taglio b_i.

La sostituzione costante corrispondente ad un taglio c_i è il prodotto della sostituzione costante corrispondente ad una porzione del taglio a_i, moltiplicata per la inversa della costante corrispondente all'altra porzione dello stesso taglio a_i.

La costante corrispondente alla porzione di L *adiacente ad* O *è il prodotto delle costanti dei tagli c_i.*

Dai teoremi dimostrati nel paragrafo precedente si deduce finalmente:

Se le costanti dei tagli di una sostituzione abeliana saranno permutabili con una stessa sostituzione elementare, la sostituzione abeliana sarà apparente.

Pisa, 10 marzo 1888.

(3) NEUMANN, opera citata, pag. 175 e seguenti.

XXI.

SULLE FUNZIONI ANALITICHE POLIDROME

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4^a, vol. IV_2, 1888_2, pp. 355-361.

1. Alle parole *funzione analitica*, *comportarsi regolarmente di una funzione nell'intorno di un punto*, *elemento di una funzione*, *valore di una funzione, in un punto*, *singolarità*, darò il significato che, seguendo WEIERSTRASS, viene oramai dato a quelle denominazioni in tutti i corsi di analisi (1).

Ammetterò pure come noto che una funzione analitica è completamente definita quando se ne conosce un elemento $p(x \mid a)$ e che ogni altro elemento si otterrà da quello dato mediante l'operazione del *prolungamento della funzione*, la quale consiste nel prendere entro il cerchio di convergenza dell'elemento iniziale un punto a_1 e formare l'elemento $p(x \mid a, a_1)$, quindi prendendo il punto a_2 entro il cerchio di convergenza del secondo elemento formare un terzo elemento $p(x \mid a, a_1, a_2)$ e così di seguito; per modo che riterrò per definizione che due elementi P, Q appartengono ad una stessa funzione analitica, quando è possibile considerarli come facenti parte di una serie finita di elementi

$$p_1(x \mid a_1) = \mathrm{P}, p_2(x \mid a_2), \cdots, p_n(x \mid a_n) = \mathrm{Q}$$

tali che il centro a_n di ciascuno di essi giaccia entro il cerchio di convergenza del precedente, e ciascun elemento sia un prolungamento del precedente.

2. Mi permetto di dare ancora alcune altre definizioni che serviranno per enunciare con semplicità i teoremi stabiliti in questa Nota.

Abbiasi una funzione analitica $f(z)$ ottenuta prolungando col metodo di WEIERSTRASS un elemento dato *senza mai escire da un cerchio* σ. Entro questo cerchio possano esistere un numero finito o anche infinito di singolarità essenziali o non essenziali. Faremo solo due ipotesi; la prima, che chiameremo la ipotesi (A), ossia la ipotesi di *monodromia* entro σ, è la seguente: *che ad uno stesso punto non possa corrispondere più che un solo elemento*. La seconda ipotesi, che chiameremo la ipotesi (B), ossia la ipotesi dell'*assenza di spazi lacunari entro* σ, è la seguente: *che preso entro* σ *un nuovo campo qualunque* σ', *entro di esso possa sempre trovarsi un elemento della funzione*.

(1) Faccio notare che nel corollario al teorema III (vedi § 8) io considero solo i valori delle funzioni analitiche nei punti nei cui intorni esse si comportano regolarmente.

Ingrandiamo ora il cerchio σ, senza mutarne il centro, finché è possibile in modo che entro esso $f(z)$ goda sempre delle proprietà (A) e (B). Chiameremo la funzione così ottenuta entro il cerchio massimo una *porzione monodroma della funzione* $f(z)$ e il cerchio stesso il *dominio di monodromia* del suo centro M relativamente a quella porzione monodroma della funzione. Il punto M potrà essere un punto singolare o meno. È evidente che, presa una funzione analitica qualunque e prolungandola finché è possibile nel piano complesso, potrà avvenire che uno stesso punto appartenga a più porzioni monodrome distinte della funzione. Ad uno stesso punto potranno quindi corrispondere più dominii di monodromia a seconda delle porzioni monodrome della funzione a cui si riferiscono. Considereremo come distinti due dominii di monodromia, anche se consistenti in due cerchi coincidenti, quando essi corrispondano a due porzioni monodrome diverse della funzione.

3. Partendo da un elemento, supponiamo di estendere finché è possibile una funzione analitica *senza mai escire da un cerchio* σ. Ammettiamo che, escluso il solo centro M di σ, al quale *non corrisponde alcun dominio di monodromia*, ad ogni altro punto corrispondano uno o più dominii di monodromia (2) i quali o taglino il contorno del campo σ, o passino pel punto M. Diremo in questo caso che è verificata la proprietà (C). Ingrandiamo ora, finché è possibile, il cerchio, mantenendone il centro in M, in modo che entro esso la proprietà (C) sia sempre verificata. Chiameremo il cerchio massimo costruito il *dominio di diramazione* del punto M e la funzione ottenuta entro di esso una *porzione di diramazione della funzione*.

Giova anche in questo caso fare una osservazione, analoga a quella fatta precedentemente, cioè che riterremo come distinti due dominii di diramazione, anche se costituiti da due cerchi coincidenti, se essi corrispondono a due *diverse porzioni di diramazione* della funzione.

4. Abbiansi due dominii α e α_1 (ciascuno dei quali sia indifferentemente o *di monodromia* o *di diramazione*) che posseggano una parte di piano a comune, ed in questa la porzione della funzione corrispondente ad α abbia un elemento a comune colla porzione della funzione corrispondente a β; diremo in questo caso che β è un prolungamento di α.

Un insieme di dominii tali che, mediante un numero finito di prolungamenti, si possa passare da uno ad un altro qualunque di essi, si dirà che formano un *insieme connesso*.

5. Un punto in quanto è centro di un certo dominio (di monodromia o di diramazione) lo chiameremo un *punto analitico*, e considereremo come *distinti* due punti analitici, anche se coincidenti, purché siano centri di due dominii distinti. In uno stesso punto dovranno dunque coincidere tanti punti analitici

(2) Vedremo che resulta necessario che ad ogni altro punto corrispondano più dominii di monodromia.

distinti, quanti saranno i dominii di monodromia e di diramazione corrispondenti a quel punto. In un punto analitico, centro di un dominio di monodromia, diremo che *la funzione si comporta in modo monodromo*, mentre chiameremo *punto regolare di diramazione* un punto analitico centro di un dominio di diramazione.

Se un punto analitico M centro del dominio α, giace nell'interno o al contorno di un dominio β, che è un prolungamento di α, diremo che *il punto analitico* M *è contenuto nell'interno o al contorno del dominio* β.

Ad ogni elemento di una funzione analitica corrisponde un certo cerchio di convergenza; se riterremo come distinti due cerchi di convergenza, corrispondenti a due elementi diversi, potremo estendere ai cerchi di convergenza le definizioni introdotte relativamente ai dominii di monodromia, e quindi senz'altro intenderemo il significato da attribuire alle parole *due cerchi di convergenza uno prolungamento dell'altro; sistema connesso di cerchi di convergenza; punto analitico contenuto in un cerchio di convergenza.*

7. Sia σ un cerchio di raggio r, tanto piccolo quanto si vuole e di centro M, situato entro il dominio di diramazione del punto regolare di diramazione M. Supponiamo che, partendo da un elemento della porzione di diramazione della funzione relativa ad un punto situato entro σ, si eseguisca la estensione della funzione senza uscire dall'interno del cerchio σ.

È facile dimostrare:

1° *che ad ogni punto del cerchio* σ *devono corrispondere più dominii di monodromia*;

2° *che se ad un punto del cerchio* σ *corrisponde un numero finito* m *di dominii di monodromia, ad ogni altro punto del cerchio stesso deve corrispondere un egual numero di dominii di monodromia, e se ad un punto del cerchio* σ *corrisponde un numero infinito di dominii di monodromia, pure lo stesso deve avvenire per tutti gli altri punti del cerchio* σ;

3° *che il numero* m (*anche per* $m = \infty$) *per uno stesso punto regolare di diramazione è indipendente dal cerchio* σ.

8. Ciò premesso, ecco quali sono i teoremi che mi propongo di dimostrare.

TEOREMA I. - *Presa una funzione analitica qualunque, prolungata col metodo di* WEIERSTRASS *finché è possibile, si potrà sempre scegliere un insieme enumerabile di dominii di monodromia fra loro connessi, tali che ogni punto analitico ove la funzione si comporta in modo monodromo sia contenuto nell'interno di uno di essi, ed ogni punto regolare di diramazione sia contenuto al contorno di alcuni di essi.*

TEOREMA. II. - *Si può sempre scegliere un insieme enumerabile di cerchi di convergenza fra loro connessi, tali che ogni punto analitico, ove la funzione si comporta regolarmente, sia contenuto nell'interno di uno almeno di essi.*

TEOREMA III. - *Ad ogni punto del piano complesso corrisponde o nessuno, o un insieme enumerabile di punti analitici in esso coincidenti.*

Corollario [3]. - *Ad uno stesso punto del piano complesso corrisponde o nessuno, oppure un insieme enumerabile di valori della funzione.*

TEOREMA IV. - *In ogni parte del piano complesso, entro la quale è possibile estendere la funzione, esistono dei punti tali che in tutti i punti analitici ad essi corrispondenti, la funzione si comporta regolarmente.*

TEOREMA V. - *I punti regolari di diramazione formano un insieme enumerabile.*

9. Onde dimostrare i teoremi precedenti cominciamo dallo stabilire un lemma. Partiamo da una porzione monodroma di una funzione analitica $f(z)$ relativa al dominio di monodromia α di un punto A. Prendiamo i dominii di monodromia di tutti i punti razionali [4] interni ad α, che si ottengono prolungando il dominio α. Avremo così un insieme di cerchi che chiameremo i cerchi α_1. Presi i punti razionali interni ai cerchi α_1 costruiamo i loro domini di monodromia che si ottengono prolungando i dominii α_1. Avrmo un insieme di nuovi dominii α_2. Operando su questi, come sui dominii α_1 otterremo dei nuovi dominii α_3, e così di seguito indefinitamente.

Il lemma da dimostrare è il seguente:

L'insieme di tutti i dominii di monodromia $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \cdots$ *è un insieme enumerabile.*

Infatti, come è ben noto, i punti razionali interni ad α formeranno un insieme enumerabile, quindi potremo enumerare tutti i domini α_1 disponendoli in una serie come la seguente: $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \cdots \alpha_1^n, \cdots$

Ora i punti razionali contenuti entro α_1^n formano un insieme numerabile, e per conseguenza potremo prendere tutti questi punti disponendoli nell'ordine seguente:

$$P_1^{n,1}, P_1^{n,2}, \cdots P_1^{n,m}, \cdots$$

Consideriamo tutti i possibili punti $P_1^{n,m}$. Ad uno stesso valore della somma $m+n$ corrisponde un numero finito di punti $P_1^{n,m}$, quindi potremo ordinare i punti stessi per ordine di grandezza della somma $m+n$. I punti $P_1^{n,m}$ e per conseguenza i domini α_2 formeranno un insieme enumerabile. Nello stesso modo si ha che i domini α_3 formeranno un insieme enumerabile, e così di seguito. In generale tutti i dominii α_n si potranno disporre in una serie $\alpha_n^1, \alpha_n^2, \cdots \alpha_n^m, \cdots$

Prendiamo ora tutti i dominii α_n^m e ordiniamoli per ordine di grandezza della somma $m+n$; in tal modo potremo enumerare tutti i dominii costruiti; solamente avremo che uno stesso dominio potrà essere contato più volte, perché è evidente che un dominio che appartiene agli α_n, è ripetuto anche nei dominii α_n^1, se $n' > n$. Ma si vede immediatamente che, se percorrendo

(3) Questa proprietà è dovuta al prof. G. CANTOR, che la comunicò senza dimostrazione al dott. G. VIVANTI.

(4) Chiameremo *punto razionale* un punto $z = x + iy$ del piano complesso, quando x ed y saranno dei numeri razionali.

l'intera serie di dominii, così enumerati, si toglieranno man mano quelli che si saranno precedentemente incontrati, si otterranno enumerati tutti i dominii e ciascuno di essi verrà contato una volta sola.

Il lemma resta così dimostrato. Poiché l'insieme dei dominii α, α_1, $\alpha_2 \cdots$ è numerabile potremo ordinarli (prendendo ciascun dominio una volta sola) in una serie che indicheremo con

$$(\mathrm{I}) \equiv \alpha , \alpha' , \alpha'' , \alpha''' , \cdots \alpha^{(p)} , \cdots$$

10. Se invece di partire da un dominio di monodromia α partiremo da un cerchio di convergenza β, è evidente che potremo ripetere le stesse operazioni fatte precedentemente sopra dei cerchi di convergenza, invece che sopra dei dominii di monodromia.

Otterremo in tal modo la serie di cerchi di convergenza β, β_1, $\beta_2 \cdots$ che (senza mai essere ripetuti) potranno disporsi in una serie enumerabile

$$(\mathrm{II}) \equiv \beta , \beta' , \beta'' , \cdots , \beta^{(p)} , \cdots$$

11. *Dimostrazione del Teorema I.* – La dimostrazione di questo teorema consisterà nel provare che, preso un punto analitico qualunque della funzione, ove si comporta in modo monodromo, esisterà almeno un dominio appartenente alla serie (I) che lo conterrà internamente, e che, preso un punto regolare di diramazione, esisterà un dominio della serie (I) che lo conterrà al contorno.

Infatti abbiasi il punto analitico M a cui corrisponda un dominio σ (di monodromia o di diramazione) di raggio r. Prendiamo un punto analitico in esso contenuto, distante da M meno di $r/4$, ove la funzione si comporti regolarmente. Esso sia centro di un corrispondente cerchio di convergenza Q.

Si prenda inoltre un punto analitico contenuto in α centro di un corrispondente cerchio di convergenza P. Per quanto fu detto precedentemente (Art. 1) dovrà trovarsi un sistema finito di cerchi di convergenza $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\cdots \tilde{\omega}_n$, tali che $\tilde{\omega}_1 = \mathrm{P}$, $\tilde{\omega}_n = \mathrm{Q}$ e ciascuno abbia il centro nel precedente e ne sia un prolungamento. Sia ρ_i il raggio di $\tilde{\omega}_{i_1}$, N_i il punto analitico contenuto nel suo centro, 2ε una quantità inferiore alla minima delle differenze $\rho_i - \mathrm{N}_i \mathrm{N}_{i+1}$.

Supponiamo che i punti analitici N_1, $\mathrm{N}_2 \cdots \mathrm{N}_{i_1}$ siano contenuti entro α. Si prenda nello spazio comune ai due cerchi α e $\tilde{\omega}_{i_1}$ un punto razionale M_1 distante da N_{i_1} meno di ε. Se costruiamo il dominio di monodromia di M_1, prolungando il dominio α otterremo uno dei dominii α_1 che denoteremo con α_1^*, che dovrà contenere internamente il punto analitico N_{i_1+1}. Siano ora N_{i_1+1}, $\mathrm{N}_{i_1+2}, \cdots \mathrm{N}_{i_2}$ contenuti entro α_1^*.

Prendiamo nella porzione di piano comune a $\tilde{\omega}_{i_2}$ e ad α_1^* un punto razionale M_2 distante da N_{i_2} meno di ε e costruiamo il dominio di monodromia di M_2 prolungando il dominio α_1^*. Otterremo in tal modo uno dei cerchi α_2 che denoteremo con α_2^* e che conterrà nell'interno il punto analitico N_{i_2+1}.

Supponiamo di operare sopra α_2^* come fu fatto precedentemente su α_1^* e così proseguire di seguito. Dopo un numero finito di tali operazioni giungeremo evidentemente a trovare un dominio di monodromia α_{p-1}^* il quale dovrà contenere il punto analitico N_n. Nella parte comune ad α^*_{p-1} ed a $\tilde{\omega}_n = Q$ prendiamo un punto razionale M_{p-1} distante da N_n meno di $r/4$ e formiamone il dominio di monodromia prolungando il dominio α^*_{p-1}.

Otterremo un dominio α^*_p appartenente ai dominii α_p e quindi alla serie (I), il quale, se in M la funzione si comporterà in modo monodromo, conterrà internamente il punto M, mentre, se M sarà un punto regolare di diramazione, conterrà il punto stesso al contorno.

12. *Dimostrazione del teorema II.* - Questa dimostrazione si otterrà ripetendo per i cerchi di convergenza, quello che si è detto nella dimostrazione precedente per i dominii di monodromia e considerando invece dei dominii $\alpha, \alpha_1, \cdots \alpha_n, \cdots$ i dominii $\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n, \cdots$ e la corrispondente serie II.

13. *Dimostrazione del teorema III.* - Ciascuno dei punti analitici, coincidenti in un punto M del piano complesso, deve essere contenuto in un diverso dominio della serie (I), quindi i punti analitici coincidenti in M dovranno formare un insieme enumerabile.

14. *Dimostrazione del Corollario.* - Ad ogni valore della funzione in un punto deve corrispondere un punto analitico ove la funzione si comporta regolarmente. Poiché i punti analitici coincidenti in un punto formano un insieme enumerabile, così anche i valori della funzione in un punto dovranno formare un insieme enumerabile.

15. *Dimostrazione del teorema IV.* - Denotiamo con f_p la porzione monodroma della funzione analitica che si considera corrispondente al dominio α_p della serie (I).

Sia θ una parte del piano complesso entro la quale è possibile estendere la funzione analitica, e sia α_i il primo dominio che si incontra percorrendo la serie (I) entro cui giacciano dei punti interni al campo θ. Prendiamo (il che sarà sempre possibile) un cerchio θ' situato tutto internamente alla parte comune ad α_i ed a θ, tale che in tutti i punti di esso f_i si comporti regolarmente. Sia $\alpha_{i'}$ il primo dominio della serie (I) che si incontra dopo α_i che abbia una parte a comune con θ' e dentro di essa prendiamo un cerchio θ'' nel cui interno $f_{i'}$ si comporti regolarmente, e così si proceda finché è possibile.

In tal modo avremo che si prenderà dalla serie (I) una serie di dominii

$$(\mathrm{I}') \equiv \alpha_i, \alpha_{i'}, \alpha_{i''}, \cdots$$

e che corrispondentemente otterremo una serie di cerchi $\theta', \theta'', \theta''' \cdots$ situati tutti internamente uno all'altro. Dovrà dunque esistere almeno un punto M interno a tutti i cerchi $\theta^{(p)}$ e quindi interno al campo θ. Dico che in tutti i punti analitici corrispondenti ad M, la funzione si comporterà regolarmente. Infatti:

1° nessun punto analitico corrispondente a M potrà essere un punto regolare di diramazione, perché M non giace al contorno di nessuno dei dominii della serie (I);

2° preso un punto analitico corrispondente ad M, in esso la funzione si comporterà in modo monodromo, quindi dovrà essere contenuto (pel teorema I) entro uno dei dominii della serie (I). Se questo è α_p, esso dovrà appartenere alla serie (I′), quindi f_p si dovrà comportare regolarmente in M ciò che dimostra il teorema.

16. *Dimostrazione del teorema V.* – Dal teorema I risulta che, preso un punto qualunque regolare di diramazione deve esistere un dominio α_p della serie (I) che lo contiene al contorno. Ora, preso un dominio α_p, consideriamo tutti i punti regolari di diramazione $M^{(p)}$ che esso *contiene* al contorno. Essi dovranno formare un insieme isolato. Infatti il dominio di diramazione di uno qualunque di essi separerà sulla circonferenza del cerchio α_p un arco entro il quale non potranno esistere altri punti del gruppo $M^{(p)}$. Ne segue che i punti $M^{(p)}$ formeranno un insieme enumerabile e perciò potremo prenderli tutti ordinandoli in una serie

$$M_1^{(p)}, M_2^{(p)} \dots M_q^{(p)} \dots$$

Prendiamo ora tutti i punti $M_q^{(p)}$ ed ordiniamoli secondo l'ordine di grandezza della somma $p + q$; avremo così enumerato tutti i punti regolari di diramazione.

XXII.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

I^er Mémoire

«Acta Mathematica», t. 12, 1889, pp. 233–286.

INTRODUCTION.

La représentation des fonctions de trois variables indépendantes par les *fonctions des points d'un espace à trois dimensions* est d'un usage très répandu parmi les analystes. Mais les points ne sont pas les seuls éléments géométriques de l'espace. Il y a aussi les lignes et les surfaces et l'on peut, de la même façon, faire correspondre à chaque point ou à chaque ligne ou à chaque surface les valeurs d'une variable. On obtient de la sorte des *fonctions des points* et aussi ce qu'on peut appeler des *fonctions des lignes* et des *fonctions des surfaces* de l'espace. On n'a appliqué jusqu'ici l'analyse qu'aux fonctions des points, mais il est bien intéressant aussi d'étudier les fonctions des lignes et les fonctions des surfaces. Ces fonctions se présentent dans plusieurs questions de physique. Par exemple l'énergie d'un courant qui parcourt un fil métallique; qui peut se déplacer et se déformer dans un champ magnétique, est une fonction d'une ligne. Elles peuvent se rattacher aussi à des questions analytiques, par exemple on en trouve une application en généralisant la théorie des fonctions envisagée du point de vue de DIRICHLET [1] ou en cher-

(1) Voir ma Note *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*, « Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei », s. IV, vol. III_2, 1887_2, pp. 97–105, 141–156, 153–158 [in questo vol.: XVII, pp. 293–313]. C'est en poursuivant ce but que j'ai été amené aux idées qui forment la base de ce mémoire. Je me permets donc d'exposer en peu de mots le point de départ de mes recherches sur la généralisation de la théorie des fonctions.

D'après la définition de DIRICHLET, on dit qu'une variable est fonction d'une autre variable, si à chaque valeur de cette quantité, entre des limites données, correspond une valeur de la première quantité. On est amené bien naturellement à cette définition, qui est indépendante de tout rapport analytique entre les variables, en considérant des phénomènes où il y a deux quantités qui changent simultanément de telle façon que les valeurs de l'une dépendent de celles de l'autre.

En se plaçant à un tel point de vue on est conduit aisément à généraliser l'idée de fonction parce que dans plusieurs questions de physique et d'analyse on trouve des *quantités qui dépendent de toutes les valeurs d'une fonction ordinaire ou de plusieurs fonctions ordinaires* tout à fait arbitraires. Par exemple la température dans un point d'une lame, qui est chauffée au bord, dépend de toutes les valeurs de la température au bord de la lame. Les fonctions chant à étendre aux intégrales doubles la théorie JACOBI-HAMILTON sur le calcul des variations. À présent je me borne à montrer l'usage qu'on peut en faire dans la théorie des fonctions des variables imaginaires.

Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, on suppose, en quelque sorte, que les valeurs des variables imaginaires sont étendues sur une surface, avec la condition que les rapports différentiels des variables ne dépendent que des points de la surface. C'est ainsi qu'on peut exprimer la condition de monogénéité établie par CAUCHY et que la théorie des variables imaginaires peut se rattacher à l'étude des paramètres différentiels et à l'étude des éléments caractéristiques.

Est-ce qu'on peut généraliser cette théorie en se rapportant à un espace à trois dimensions ? Voilà le problème que je me suis proposé.

On peut résoudre la question, mais pour l'aborder il faut recourir à ce que je viens d'appeler les fonctions d'une ligne. En effet on obtient la généralisation en faisant correspondre à chaque ligne fermée de l'espace les valeurs de deux variables imaginaires liées entre elles par une condition différentielle tout à fait semblable à la condition de monogénéité de la théorie ordinaire.

Dans le mémoire qui va suivre je me suis borné à étendre la théorie aux espaces à trois dimensions, mais on peut aller plus loin dans la généralisation. La théorie des hyperespaces est depuis longtemps connue et beaucoup de mathématiciens sont à présent familiarisés avec les mots empruntés à la géométrie des espaces à n dimensions, qui peuvent représenter d'une manière claire et frappante des propriétés analytiques. Cette considération m'a poussé à

des lignes offrent un autre exemple d'une telle dépendance. Il est bien clair que, lorsque on parle d'une quantité qui dépend de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs variables, on entend quelque chose de bien différent d'une fonction de fonction.

J'ai tâché d'étudier la dépendance dont je viens de parler. En général on ne sait pas si, en partant de la fonction, on peut parvenir, par des procédés analytiques, à la quantité qui en dépend. Pourtant, sous certaines conditions, qui sont tout à fait semblables aux conditions nécessaires pour le développement en série de TAYLOR, on peut parvenir à généraliser cette série au cas que nous considérons. Par exemple, bornons-nous au cas le plus simple, c'est à dire d'une quantité y qui dépend de toutes les valeurs d'une fonction $f(x)$, définie pour les valeurs de x comprises entre les limites a, b. Sous certaines conditions on peut donner pour y l'expression analytique

$$y = y_0 + \int_a^b f(t_1)\,\theta_1(t_1)\,dt_1 + \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b f(t_1)f(t_2)\,\theta_2(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2$$

$$+ \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^b\int_a^b\int_a^b f(t_1)f(t_2)f(t_3)\,\theta_3(t_1, t_2, t_3)\,dt_1\,dt_2\,dt_3 + \cdots$$

où y_0 est une constante et les fonctions $\theta_n(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ sont des fonctions symétriques des variables $t_1, t_2, \cdots, t_n$.

La série qu'on vient d'écrire n'est autre chose que la généralisation de la série de TAYLOR.

aborder même la théorie générale pour les hyperespaces dans un mémoire que je publierai plus tard. En se posant à un tel point de vue, les fonctions des lignes ne suffisent pas. Il faut recourir à une notion moins simple, c'est à dire aux *fonctions* des hyperespaces.

A quelle théorie connue va se rattacher la généralisation dont je viens de parler?

Il est bien aisé de montrer qu'elle se rattache à la théorie des fonctions de plusieurs variables imaginaires. Il y a presque une année, M. POINCARÉ a publié dans ce journal un très beau mémoire sur la généralisation du théorème de CAUCHY pour les fonctions de deux variables imaginaires. Je vais montrer comment le remarquable théorème de M. POINCARÉ fait ressortir, tout de suite, une liaison entre la théorie que je me propose d'exposer et la théorie des fonctions de deux variables imaginaires.

Soit donnée une fonction de la variable $z = x + \sqrt{-1}\, y$ continue et uniforme dans une aire limitée par un seul contour. On déduit du théorème de CAUCHY que l'intégrale d'une telle fonction prise entre des limites imaginaires dépend des limites seulement. On obtient donc, par l'intégration d'une fonction des points du plan complexe, une nouvelle fonction des points. Est-ce la même chose pour les intégrales doubles?

M. POINCARÉ, en généralisant le théorème de CAUCHY, à démontré que l'intégrale d'une fonction uniforme de deux variables imaginaires prise sur une surface fermée est nulle, si l'on peut déformer et réduire la surface à un point sans rencontrer de singularités. On peut déduire de là que, si la surface d'intégration n'est pas fermée, l'intégrale dépend des lignes qui forment le contour de la surface. Donc on voit que l'intégration des fonctions de deux variables conduit aux fonctions des lignes. Les fonctions des lignes que j'ai étudiées, correspondent à tous les cas qui se présentent dans les intégrales doubles prises de la manière indiquée par M. POINCARÉ. Puisque ces fonctions des lignes dépendent seulement du bord de la surface d'intégration, j'ai donné *leur expression analytique par des éléments qui dépendent seulement du bord*, c'est à dire j'ai montré qu'elles peuvent s'exprimer par *des intégrales simples étendues à la ligne qui forme le bord.*

Il est bien aisé de voir que la généralisation de la théorie des intégrales abéliennes aux intégrales doubles, est une question liée aux principes fondamentaux que je vais exposer dans ce qui suit.

J'ai consacré le 1^er^ chapitre du Mémoire à la théorie des fonctions des lignes. Le 2^ème^ chapitre est partagé en cinq articles. Dans le 1^er^ article, après avoir établi la généralisation de la condition de monogénéité pour les fonctions des lignes, je trouve une relation différentielle analogue à $\Delta_2 = 0$. Dans le 3^ème^ et 4^ème^ article, en étudiant cette relation, j'essaie une théorie des propriétés caractéristiques des fonctions des lignes. Enfin le 5^ème^ article contient la théorie des opérations différentielles.

Dans ce mémoire je n'ai pas abordé le cas d'un espace fermé d'une connexion multiple ni la généralisation du théorème d'ABEL qui en suit. Je remplirai cette lacune dans un autre mémoire.

CHAPITRE I.

Les fonctiones des lignes.

Article I.

1. Nous commencerons par quelques études générales sur les *fonctions des lignes* dans un espace à trois dimensions. Je me bornerai à considérer des lignes fermées qui n'ont pas de noeuds. Je ferai l'hypothèse que les coordonnées x, y, z des points de chaque ligne soient des fonctions continues de l'arc s de la courbe.

À chaque ligne L parcourue dans une direction donnée, correspondra la valeur d'une variable Φ. On doit supposer qu'en général en changeant la direction de la ligne, même sans la déplacer, la valeur correspondante de la variable Φ change aussi. Je désignerai cette correspondance par le *symbole*

$$\Phi = \Phi \mid [L] \mid .$$

On va trouver des variables Ψ dont les valeurs ne dépendent pas seulement des lignes L, mais aussi de la position d'un point variable A pris sur la ligne. On désignera une telle fonction par

$$\Psi = \Psi \mid [L, A] \mid .$$

Si la position du point est définie par la longueur s de l'arc compris entre le point variable et un point fixé sur L, on écrira aussi

$$\Psi = \Psi \mid [L, s] \mid .$$

2. Comment peut-on étendre aux fonctions des lignes les définitions de continuité et de dérivation?

C'est en poursuivant ce but, que je vais définir le *domaine* d'une ligne.

Une ligne fermée, enchaînée à L, en se déplaçant le long de L jusqu'à revenir dans sa première position, décrit une surface tubulaire. Le volume S compris dans une telle surface est ce que j'appelle un domaine de L. Toute ligne, comme L, qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal est une *ligne longitudinale* de S [2]. Je dirai que $\Phi \mid [L] \mid$ est *continue* si, quelque petite que soit la quantité ε, on peut toujours déterminer un domaine S de L, tel que, pour toute ligne longitudinale L′ de S, on ait

$$\mathrm{mod} \mid \Phi \mid [L'] \mid - \Phi \mid [L] \mid \mid < \varepsilon .$$

(2) Voilà ce que j'entends par une ligne fermée qui parcourt le tube S dans le sens longitudinal. Soit σ une section transversale du tube. Déplaçons σ de sorte qu'elle vienne engendrer le tube S, et supposons que dans le même temps un point A, pris dans l'aire σ, se déplace jusqu'à revenir dans sa position initiale. Nous dirons que la ligne décrite par A est une ligne qui parcourt le tube dans le sens longitudinal.

Pour ce qui va suivre la condition de *continuité*, telle qu'on vient de la poser, n'est pas suffisante. Soient σ_1, σ_2, σ_3 les aires comprises entre les projections des deux courbes sur les plans coordonnés, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$. Il faut supposer que le rapport

$$\frac{\bmod |\Phi|[L']| - \Phi|[L]||}{\sigma}$$

ne surpasse jamais une limite finie M.

Lorsqu'on a affaire à une fonction $\Phi|[L, s]|$, il y aura à considérer la continuité par rapport à la variable s, c'est à dire en laissant fixe la courbe L et supposant que le point A se déplace. Mais il faudra examiner aussi la condition de continuité lorsqu'on change A et L à la fois. Si A est un point situé à l'intérieur d'un champ T à trois dimensions, nous appellerons T un domaine de A. Nous dirons qu'il y a continuité, si quelque petite que soit ε, on peut toujours déterminer un domaine S de L et un domaine S' de A, tels que, pour toute ligne longitudinale L' de S et pour chaque point A' de L' situé à l'intérieur de S', on ait

$$\bmod |\Phi|[L', A']| - \Phi|[L, A]|| < \varepsilon.$$

3. Passons maintenant à la dérivation. Faisons passer par chaque point d'un arc $l = AB$ de L un segment de longueur Δx, parallèle à l'axe x. Le lieu des extrémités de ces segments est un arc CD. Soit

$$\Phi + \Delta_x \Phi$$

la valeur de la fonction qui correspond à la ligne, qu'on déduit de L en remplaçant l'arc AB par la ligne ACDB formée des droites AC, BD et de l'arc CD. Supposons que Δx et l tendent vers zéro en laissant A fixe et que

$$\frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \cdot l} \tag{1}$$

tende vers une limite X. On appellera une telle limite la *dérivée de Φ par rapport à x.* Nous supposerons que cette limite ne dépende pas du côté de B par rapport à A, ni de la manière dont Δx et l tendent vers zéro. Nous ferons encore l'hypothèse que, quelque petite que soit η, on peut déterminer une quantité ω, telle que pour toute ligne L et pour tout point A l'on ait

$$\bmod \left| \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x \cdot l} - X \right| < \eta$$

pour toutes les valeurs de Δx et de l comprises entre $-\omega$ et ω. En un mot nous supposerons que le rapport (1) tend vers la limite X *avec uniformité.*

Il est clair que la limite X dépendra en général de la ligne L et du point A. Nous la désignerons par

$$\Phi'_x|[L, s]|.$$

On trouvera de même les dérivées de Φ par rapport à y et par rapport à z, qu'on désignera par

$$\Phi'_y|[L, s]| \quad , \quad \Phi'_z|[L, s]|.$$

Nous supposons les trois dérivées continues.

4. Soit $\xi(s)$ une fonction continue. Déplaçons chaque point d'une ligne L parallèlement à l'axe x d'une quantité

$$\delta x = \varepsilon\xi(s).$$

On trouvera une ligne L'. Nous allons chercher

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi\,|\,[L']\,|-\Phi\,|\,[L]\,|}{\varepsilon}.$$

Partageons la ligne L en $2n$ parties $h_1, k_1, h_2, k_2, \cdots, h_n, k_n$ de sorte que tout intervalle $h_i = a_i b_i$ soit compris entre les intervalles k_{i-1}, k_i. Posons

$$\sum_1^n k_i = \delta.$$

Soit s_i la longueur de l'arc compris entre les points $a_i a_1$ compté dans la direction $(a_i a_{i+1} \cdots a_1)$. Par chaque point de l'arc h_i conduisons un segment de longueur $\varepsilon\xi(s_i)$ parallèle à l'axe x. On trouvera un arc $h'_i = a'_i b'_i$. Remplaçons les arcs h_i $(i = 1, 2, \cdots, p)$ par les lignes formées des droites $a_i a'_i$, $b_i b'_i$ et de l'arc h'_i. On aura une ligne L_p. Il est clair qu'on peut écrire

$$\Phi\,|\,[L_n]\,|-\Phi\,|\,[L]\,| = \sum_1^n \{\Phi\,|\,[L_p]\,|-|\,[L_{p-1}]\,|\}$$

où L_0 signifie L.

Mais

$$\Phi\,|\,[L_p]\,|-\Phi\,|\,[L_{p-1}]\,| = \varepsilon\, h_p\, \xi(s_p)\,\{\Phi'_x\,|\,[L_{p-1}, s_p]\,| + \eta_p\}.$$

Il suffit de prendre $\varepsilon < \omega/N$, $h_p < \omega$, N étant le maximum de $\xi(s)$, pour que

$$\operatorname{mod} \eta_p < \eta.$$

On aura aussi

$$\Phi'_x\,|\,[L_{p-1}, s_p]\,| = \Phi'_x\,|\,[L, s_p]\,| + \eta'_p$$

et, en prenant ω suffisamment petit, en vertu de la continuité de la dérivée, on aura

$$\operatorname{mod} \eta'_p < \eta.$$

Par la condition qu'on a posée après la continuité de Φ (§ 2) on peut écrire

$$\operatorname{mod}\,|\,\Phi\,|\,[L']\,|-\Phi\,|\,[L_n]\,|\,| < M\left(\delta\varepsilon N + \sum_1^n h_p D_p\right)$$

en désignant par D_p l'oscillation de la fonction $\xi(s)$ dans l'intervalle h_p. On en déduit

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi\,|\,[L']\,|-\Phi\,|\,[L]\,|}{\varepsilon} = \int_L \xi(s)\,\Phi'_x\,|\,[L, s]\,|\,ds.$$

De même si on donne à chaque point de L un déplacement

$$\delta y = \varepsilon\eta(s)$$

parallèlement à l'axe y, en passant de la courbe L à la courbe L'' on trouvera

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi\,|\,[L'']\,|-\Phi\,|\,[L]\,|}{\varepsilon} = \int_L \eta(s)\, \Phi'_y\,|\,[L\,,s]\,|\,ds\,.$$

Enfin, en supposant que par des déplacements $\delta z = \varepsilon\zeta(s)$ parallèles à l'axe z on obtient la courbe L''', nous pouvons écrire

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi\,|\,[L''']\,|-\Phi\,|\,[L]\,|}{\varepsilon} = \int_L \zeta(s)\, \Phi'_z\,|\,[L\,,s]\,|\,ds\,.$$

5. Supposons maintenant que les déplacements des points de L aient pour composantes dans les directions des trois axes

$$\delta x = \varepsilon\xi(s) \quad , \quad \delta y = \varepsilon\eta(s) \quad , \quad \delta z = \varepsilon\zeta(s)$$

et qu'on trouve d'une telle façon une courbe L^{IV}. On peut démontrer bien aisément que

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Phi\,|\,[L^{IV}]\,|-\Phi\,|\,[L]\,|}{\varepsilon} = \int_L (\Phi'_x\xi + \Phi'_y\eta + \Phi'_z\zeta)\,ds\,.$$

Le résultat que nous venons de trouver peut s'énoncer aussi de la manière suivante.

Soit

$$\text{(A)} \qquad \delta\Phi = \int_L (\Phi'_x\,\delta x + \Phi'_y\,\delta y + \Phi'_z\,\delta z)\,ds\,,$$

la quantité

$$\delta\Phi - \{\Phi\,|\,[L^{IV}]\,| - \Phi\,|\,[L]\,|\}$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur à ε.

C'est pourquoi on appelera $\delta\Phi$ la *variation de* Φ.

6. Nous allons chercher maintenant à quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées $\Phi'_x\,,\Phi'_y\,,\Phi'_z$.

Si par le déplacement infiniment petit des points de la ligne L cette ligne ne change pas, on aura $\delta\Phi = 0$. En posant

$$\delta x = \lambda\frac{dx}{ds}ds \quad , \quad \delta y = \lambda\frac{dy}{ds}ds \quad , \quad \delta z = \lambda\frac{dz}{ds}ds\,,$$

on aura donc, pour une valeur arbitraire de λ,

$$0 = \int_L \left(\Phi'_x\frac{dx}{ds} + \Phi'_y\frac{dy}{ds} + \Phi'_z\frac{dz}{ps}\right)\lambda ds.$$

On tirera de là

$$\Phi'_x\frac{dx}{ds} + \Phi'_y\frac{dy}{ds} + \Phi'_z\frac{dz}{ds} = 0\,,$$

c'est à dire, si t est la tangente de L,

$$\alpha = \cos tx = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \beta = \cos ty = \frac{dy}{ds} \quad , \quad \gamma = \cos tz = \frac{dz}{ds} \, ,$$

on aura

$$\Phi'_x \alpha + \Phi'_y \beta + \Phi'_z \gamma = 0 . \tag{2}$$

L'égalité qu'on vient de trouver n'est pas la seule condition à laquelle les trois dérivées doivent satisfaire, mais c'est la seule dont nous nous servirons dans le cours du mémoire. Il est bien intéressant de déterminer d'autres propriétés des dérivées par exemple celles qu'on trouve en introduisant les dérivées d'ordre supérieur (3).

Article 2.

1. L'égalité (2) de l'article 1 permet de poser les équations

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi'_x &= \gamma B - \beta C \, , \\ \Phi'_y &= \alpha C - \gamma A \, , \\ \Phi'_z &= \beta A - \alpha B \, . \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Les inconnues A , B , C ne sont pas déterminées par les égalités (3). Si A_1 , B_1 , C_1 vérifient ces équations, les solutions générales sont

$$A = A_1 + k\alpha \quad , \quad B = B_1 + k\beta \quad , \quad C = C_1 + k\gamma \, ,$$

k étant une quantité arbitraire.

D'après les égalités (3) on pourra remplacer (A) par

$$\delta\Phi = \int_L \{ A (\beta\delta z - \gamma\delta y) + B (\gamma\delta x - \alpha\delta z) + C (\alpha\delta y - \beta\delta x) \} \, ds \, . \tag{A'}$$

2. Par le déplacement (δx , δy , δz) l'arc ds décrit un parallélogramme infiniment petit.

Supposons qu'un point en parcoure le périmètre de sorte qu'il se déplace sur ds dans la direction positive. Soit $d\sigma$ l'aire du parallélogramme. Si l'on conduit la normale n au parallélogramme en prenant pour direction positive celle d'un observateur qui voit le point mobile se déplacer dans le sens des aiguilles d'une montre, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} (\beta\delta z - \gamma\delta y) \, ds &= \cos nx \cdot d\sigma \, , \\ (\gamma\delta x - \alpha\delta z) \, ds &= \cos ny \cdot d\sigma \, , \\ (\alpha\delta y - \beta\delta x) \, ds &= \cos nz \cdot d\sigma \, . \end{aligned} \right.$$

Examinons maintenant la bande infiniment petite σ décrite de la ligne L par

(3) Voir la Note citée et l'autre: *Sopra le funzioni dipendenti da linee.* « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », s. IV, vol. III_2, 1887_2, pp. 225-230, 274-281 [in questo vol.: XVIII, pp. 314-327].

le déplacement. n en sera la normale et $d\sigma$ la différentielle de l'aire. On aura donc

$$\delta\Phi = \int_\sigma (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\sigma\,. \tag{4}$$

3. Soient L_1 et L_2 deux courbes. Si on déplace L_1 jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec L_2, méme en direction, L_1 décrira une surface Σ. J'appelle cette opération *mener une surface par* L_1 *et* L_2.

En suivant L_1 dans son mouvement, on peut déterminer pour tout point de la surface Σ des valeurs pour A , B , C. On peut supposer que le déplacement total soit résultant de déplacements infiniment petits.

Appliquant à chaque déplacement infiniment petit la formule (4), on trouvera

$$\Phi \,|\, [\mathrm{L}_2] \,| - \Phi \,|\, [\mathrm{L}_1] \,| = \int_\Sigma (\mathrm{A} \cos nx + \mathrm{B} \cos ny + \mathrm{C} \cos nz)\, d\Sigma\,. \tag{5}$$

Article 3.

1. Il faut maintenant distinguer deux cas qui se présentent dans l'étude des fonctions des lignes. Soient L_1 et L_2 deux lignes qui ont un arc l commun. Si on doit parcourir l en directions contraires en supposant qu'il appartienne aux deux lignes, on pourra retrancher l et obtenir une courbe L_3 dont la direction même sera déterminée. On écrira

$$\mathrm{L}_3 = \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2\,.$$

Le premier cas se présentera si l'égalité

$$\Phi \,|\, [\mathrm{L}_3] \,| = \Phi \,|\, [\mathrm{L}_1] \,| + \Phi \,|\, [\mathrm{L}_2] \,| \tag{6}$$

est toujours réalisée. J'appelle dans un tel cas Φ une *fonction du* 1^er^ *degré*.

Le deuxième cas se présentera si l'égalité (6) n'est pas toujours vérifiée. Nous allons borner nos recherches aux fonctions du 1^er^ degré. Supposons que deux lignes L_1 et L_2 se coupent dans un point M. Soient ds_1, ds_2 les éléments linéaires des deux lignes en M. Posons

$$\begin{array}{lll}
\Phi'_x \,|\, [\mathrm{L}_1, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{X}_1 \,, & \Phi'_y \,|\, [\mathrm{L}_1, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{Y}_1 \,, & \Phi'_z \,|\, [\mathrm{L}_1, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{Z}_1 \,, \\
\Phi'_x \,|\, [\mathrm{L}_2, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{X}_2 \,, & \Phi'_y \,|\, [\mathrm{L}_2, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{Y}_2 \,, & \Phi'_z \,|\, [\mathrm{L}_2, \mathrm{M}] \,| = \mathrm{Z}_2 \,, \\
\cos(ds_1, x) = \alpha_1 \,, & \cos(ds_1, y) = \beta_1 \,, & \cos(ds_1, z) = \gamma_1 \,, \\
\cos(ds_2, x) = \alpha_2 \,, & \cos(ds_2, y) = \beta_2 \,, & \cos(ds_2, z) = \gamma_2 \,.
\end{array}$$

On donne à tout point de l'arc ds_1 un déplacement ds_2. Nous nous proposons de chercher quelle est la variation de Φ. Si on appelle cette variation $\delta_{12}\Phi$, on aura

$$\delta_{12}\Phi = (\mathrm{X}_1 \alpha_2 + \mathrm{Y}_1 \beta_2 + \mathrm{Z}_1 \gamma_2)\, ds_2\, ds_1\,.$$

De même la variation de Φ correspondante au déplacement ds_1 des points de l'arc ds_2 sera donnée par

$$\delta_{21}\Phi = (X_2\alpha_1 + Y_2\beta_1 + Z_2\gamma_1)\, ds_1\, ds_2 .$$

Je nomme λ le contour du parallélogramme dont les côtés sont ds_1 et ds_2. Si Φ est du 1er degré, on aura

$$-\delta_{12}\Phi = \delta_{21}\Phi = \Phi\,|\,[\lambda]\,|$$

d'où

$$(7) \qquad 0 = X_1\alpha_2 + Y_1\beta_2 + Z_1\gamma_2 + X_2\alpha_1 + Y_2\beta_1 + Z_2\gamma_1 .$$

Mais on peut écrire

$$X_1 = \gamma_1 B_1 - \beta_1 C_1 \quad , \quad Y_1 = \alpha_1 C_1 - \gamma_1 A_1 \quad , \quad Z_1 = \beta_1 A_1 - \alpha_1 B_1 ,$$
$$X_2 = \gamma_2 B_2 - \beta_2 C_2 \quad , \quad Y_2 = \alpha_2 C_2 - \gamma_2 A_2 \quad , \quad Z_2 = \beta_2 A_2 - \alpha_2 B_2 .$$

Par suite l'égalite (7) pourra s'écrire

$$(8) \qquad 0 = (A_1 - A_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (B_1 - B_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (C_1 - C_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)$$

d'où

$$(8') \qquad (A_1 - A_2)\cos nx + (B_1 - B_2)\cos ny + (C_1 - C_2)\cos nz = 0 ,$$

n étant la normale aux lignes L_1, L_2 en M.

2. Cela posé, prenons trois lignes L_x, L_y, L_z qui se coupent en M, dont les tangentes en M sont parallèles aux axes coordonnées. On aura

$$\Phi'_y\,|\,[L_x , M]\,| = C_x \quad , \quad \Phi'_z\,|\,[L_x , M]\,| = - B_x ,$$
$$\Phi'_z\,|\,[L_y , M]\,| = A_y \quad , \quad \Phi'_x\,|\,[L_y , M]\,| = - C_y ,$$
$$\Phi'_x\,|\,[L_z , M]\,| = B_z \quad , \quad \Phi'_y\,|\,[L_z , M]\,| = - A_z .$$

L'égalité (8') appliquée aux couples de lignes (L_y , L_z) , (L_z , L_x) , (L_x , L_y) donne

$$A_y = A_z \quad , \quad B_z = B_x \quad , \quad C_x = C_y .$$

Nous posons

$$A_y = A_z = p \quad , \quad B_z = B_x = q \quad , \quad C_x = C_y = r .$$

Soit L une ligne arbitraire qui passe par M. Supposons réalisées les égalités (3) et posons

$$\cos(L , x) = \alpha \quad , \quad \cos(L , y) = \beta \quad , \quad \cos(L , z) = \gamma .$$

En appliquant l'égalité (8') aux couples de lignes (L , L_x) , (L , L_y) , (L , L_z), il est bien clair qu'on trouve

$$(B - q)\gamma - (C - r)\beta = 0 ,$$
$$(C - r)\alpha - (A - p)\gamma = 0 ,$$
$$(A - p)\beta - (B - q)\alpha = 0 ,$$

d'où

$$p = A + k\alpha \quad , \quad q = B + k\beta \quad , \quad r = C + k\gamma .$$

Nous pouvons donc remplacer A , B , C par p , q , r dans les équations (3). On en déduit le théorème:

Soit Φ *une fonction du* 1[er] *degré des lignes, on peut déterminer pour tout point* M *de l'espace trois quantités* p , q , r *telles que les conditions*

$$\Phi'_x \,|\, [L , M] \,| = q\gamma - r\beta ,$$
$$\Phi'_y \,|\, [L , M] \,| = r\alpha - p\gamma ,$$
$$\Phi'_z \,|\, [L , M] \,| = p\beta - q\alpha$$

soient remplies pour toute ligne qui passe par M.

3. Par deux lignes L_1 , L_2 menons une surface Σ. On tire de l'égalité (5)

(B) $$\Phi \,|\, [L_2] \,| - \Phi \,|\, [L_1] \,| = \int_\Sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\Sigma .$$

Si L_1 en décroissant indéfiniment tend vers un point, on aura

$$\lim \Phi \,|\, [L_1] \,| = 0 ,$$

d'où

(B') $$\Phi \,|\, [L_2] \,| = \int_\Sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\Sigma .$$

Dans un tel cas L_2 est le contour de la surface Σ. Pour déterminer la direction positive de n par rapport à L_2 imaginons, comme on fait en électrodynamique, L_2 personnifié par une poupée qui regarde la surface; n ira de la droite à la gauche. Supposons de nouveau que la surface Σ en décroissant tende vers un point M. On aura

$$\lim \frac{\Phi \,|\, [L_2] \,|}{\Sigma} = p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz,$$

en prenant les valeurs p , q , r qui correspondent au point M. On appellera $\lim \Phi \,|\, [L_2] \,| / \Sigma$ la *dérivée de* Φ *par rapport a* Σ et on la représentera par $d\Phi/d\Sigma$. Il est évident que le signe dont la dérivée est affectée n'est déterminé que lorsqu'on connaît la direction positive de la normale à la surface Σ. Prenons la derivée de Φ par rapport à une surface Σ normale à l'axe x en M; on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma} = p.$$

De même si Σ_1 et Σ_2 sont des surfaces normales aux axes y et z, on aura

$$\frac{d\Phi}{d\Sigma_1} = q \quad , \quad \frac{d\Phi}{d\Sigma_2} = r .$$

C'est pourquoi on peut désigner p , q , r par

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} ,$$

et on peut les appeler les *dérivées de* Φ *par rapport aux plans coordonnés*.

4. À quelles conditions doivent satisfaire les trois dérivées p, q, r? Conduisons une surface σ limitée par un contour L. On aura

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\sigma.$$

Si l'on fait diminuer L jusqu'à devenir un point, σ devient une surface fermée. D'ailleurs $\Phi\,|\,[L]\,|$ tend vers zéro. On aura donc, si σ est une surface fermée,

$$\int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\sigma = 0.$$

Soit S le volume limité par σ, on aura, par une transformation bien connue,

$$\int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\sigma = \pm \int_S \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) dS$$

et en conséquence

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Réciproquement il est bien clair que si l'on suppose l'égalité (C) réalisée par p, q, r, on peut trouver, dans toute portion de l'espace limitée par un seul contour où p, q, r n'ont pas de singularités, une fonction de 1er degré dont p, q, r sont les dérivées prises par rapport aux plans coordonnées.

Par les symboles introduits dans cet article on peut donc écrire

$$\text{(C')} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{d\Phi}{d(y, z)} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{d\Phi}{d(z, x)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{d(x, y)} = 0.$$

Article 4.

1. Proposons-nous la question de la transformation des dérivées

$$\frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

par le changement des coordonnées.

Supposons que, par les équations

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta),$$

on établisse une correspondance continue et univoque entre deux espaces limités ou illimités. À chaque ligne L du premier espace (x, y, z) correspond une ligne Λ dans l'autre (ξ, η, ζ). Par suite à une fonction $\Phi\,|\,[L]\,|$ de 1er degré dans l'espace (x, y, z) correspond une fonction $\Phi\,|\,[\Lambda]\,|$ de 1er degré dans l'autre (ξ, η, ζ). Il faut chercher les relations qui ont lieu entre

$$p = \frac{d\Phi}{d(y, z)}, \quad q = \frac{d\Phi}{d(z, x)}, \quad r = \frac{d\Phi}{d(x, y)}$$

et

$$\frac{d\Phi}{d(\eta, \zeta)}, \quad \frac{d\Phi}{d(\zeta, \xi)}, \quad \frac{d\Phi}{d(\xi, \eta)}.$$

À cet effet prenons une surface S limitée par L et la surface correspondante Σ dans l'autre espace qui sera limitée par Λ. Individualisons les points de la surface par deux paramètres u, v. On aura

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_S [p \cos(nx) + q \cos(ny) + r \cos(nz)]\, dS\,.$$

Posons (4)

$$\frac{d(y,z)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{d(z,x)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

On trouvera

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_S \left\{ p\,\frac{d(y,z)}{d(u,v)} + q\,\frac{d(z,x)}{d(u,v)} + r\,\frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right\} du\, dv.$$

Soit

$$\tilde{\omega} = p\,\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + q\,\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + r\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}\,,$$

$$\chi = p\,\frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + q\,\frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + r\,\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}\,,$$

$$\rho = p\,\frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + q\,\frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + r\,\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}.$$

L'équation (B') peut s'écrire

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \int_S \left\{ \tilde{\omega}\,\frac{d(\eta,\zeta)}{d(u,v)} + \chi\,\frac{d(\zeta,\xi)}{d(u,v)} + \rho\,\frac{d(\xi,\eta)}{d(u,v)} \right\} du\, dv.$$

Mais on a

$$\Phi\,|\,[L]\,| = \Phi\,|\,[\Lambda]\,|\,;$$

par suite, si ν est normale à Σ, on aura

$$\Phi\,|\,[\Lambda]\,| = \int_\Sigma \{ \tilde{\omega} \cos(\nu\xi) + \chi \cos(\nu\eta) + \rho \cos(\nu\zeta) \}\, d\Sigma,$$

d'où

$$\tilde{\omega} = \frac{d\Phi}{d(\eta,\zeta)} \quad , \quad \chi = \frac{d\Phi}{d(\zeta,\xi)} \quad , \quad \rho = \frac{d\Phi}{d(\xi,\eta)}\,.$$

Voilà donc les relations qu'on cherchait:

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\Phi}{d(\eta,\zeta)} &= \frac{d\Phi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\Phi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)}\,, \\ \frac{d\Phi}{d(\zeta,\xi)} &= \frac{d\Phi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\Phi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\zeta,\xi)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\zeta,\xi)}\,, \\ \frac{d\Phi}{d(\xi,\eta)} &= \frac{d\Phi}{d(y,z)}\,\frac{d(y,z)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\Phi}{d(z,x)}\,\frac{d(z,x)}{d(\xi,\eta)} + \frac{d\Phi}{d(x,y)}\,\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}\,. \end{aligned} \right.$$

(4) Dans ce mémoire nous représenterons toujours le déterminant fonctionel des variables $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ par rapport à $x_1, x_2, \cdots, x_n$ par $d(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)/d(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

Article 5.

1. On sait qu'en posant

$$p = \frac{d\Phi}{d(y,z)} \quad , \quad q = \frac{d\Phi}{d(z,x)} \quad , \quad r = \frac{d\Phi}{d(x,y)},$$

on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Il sera donc possible de trouver deux fonctions λ, μ par les conditions

$$(9) \qquad \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)} = p \quad , \quad \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)} = q \quad , \quad \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)} = r.$$

À cet effet il suffit d'employer la méthode donnée par JACOBI dans la théorie du *multiplicateur*. On prend μ de sorte que

$$p\frac{\partial \mu}{\partial x} + q\frac{\partial \mu}{\partial y} + r\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,$$

et puis

$$\lambda = \int \frac{1}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)}(pdy - qdx) + \mathrm{F}(\mu),$$

F étant une fonction arbitraire. (Voir JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, Gesammelte Werke, Supplementband, page 78). Si on prend des variables ξ, η, ζ au lieu de x, y, z, on trouvera

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\eta,\zeta)} = \frac{d(\lambda,\mu)}{d(y,z)}\frac{d(y,z)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d(\lambda,\mu)}{d(z,x)}\frac{d(z,x)}{d(\eta,\zeta)} + \frac{d(\lambda,\mu)}{d(x,y)}\frac{d(x,y)}{d(\eta,\zeta)} = \tilde{\omega}.$$

De même

$$\frac{d(\lambda,\mu)}{d(\zeta,\xi)} = \chi = \frac{d\Phi}{d(\zeta,\xi)} \quad , \quad \frac{d(\lambda,\mu)}{d(\xi,\eta)} = \rho = \frac{d\Phi}{d(\xi,\eta)}.$$

On en déduit que les relations entre λ, μ et les dérivées de Φ ne changent pas par un changement de variables.

2. Sur une surface σ prenons les coordonnées curvilignes u, v. Soit $ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\,\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2$ le carré de l'élément linéaire. On aura

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} = p\cos nx + q\cos ny + r\cos nz = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\frac{d(\lambda,\mu)}{d(u,v)}.$$

Il est évident que sur une surface où $\lambda = \text{const.}$ on a $d\Phi/d\sigma = 0$.

3. Posons

$$\lambda\frac{\partial \mu}{\partial x} = a \quad , \quad \lambda\frac{\partial \mu}{\partial y} = b \quad , \quad \lambda\frac{\partial \mu}{\partial z} = c,$$

on aura

$$\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} = p \quad , \quad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} = q \quad , \quad \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} = r.$$

Soit L le contour d'une surface σ, on peut écrire

$$\Phi\,|[L]| = \int_\sigma (p \cos nx + q \cos ny + r \cos nz)\, d\sigma,$$

d'où, par le théorème de STOKES,

$$\text{(E)} \qquad \Phi\,|[L]| = \int_L adx + bdy + cdz) = \int_L \lambda\, d\mu.$$

CAPITRE II.

Liaison d'isogénéité.

Article I.

1. Pour généraliser la théorie ordinaire des fonctions monogènes aux espaces à trois dimensions, supposons que nous ayons deux variables imaginaires qui soient des fonctions de 1er degré des lignes de l'espace. Nous allons établir une condition tout à fait semblable à la condition de *monogénéité*. À cet effet soient F et Φ les valeurs des deux fonctions correspondantes à une ligne L. Déformons un arc AB de L et désignons par ΔF et $\Delta\Phi$ les variations de F et de Φ. Si en diminuant indéfiniment la déformation et la distance entre B et le point fixe A, le rapport $\Delta F/\Delta\Phi$ tend vers une limite qui dépend seulement du point A, on dira que les deux variables ont une *liaison d'isogénéité*, ou qu'elles sont *isogènes*.

Il est bien clair que si Φ et Ψ ont une liaison d'isogénéité avec F, Φ et Ψ sont isogènes.

2. Il faut chercher maintenant les propriétés qu'on peut déduire de la définition qu'on a posée.

Les relations qu'on va trouver sont tout à fait semblables à celles qu'on a dans le cas de deux variables imaginaires liées par la condition ordinaire de monogénéité. On trouvera même une relation différentielle qui est analogue à l'équation différentielle $\Delta_2 = 0$. Je vais rappeler en peu de mots la méthode qu'on peut suivre dans le cas ordinaire, pour trouver ces relations, pour en montrer l'analogie avec la marche que je suivrai dans le cas des fonctions des lignes.

Soient f et φ deux variables imaginaires fonctions des points d'une surface. On supposera les points de cette surface rapportés à des coordonnées curvilignes u et v. Décomposons f et φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$f = f_1 + if_2 \quad , \quad \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 .$$

Posons

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = p_1 \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial v} = q_1 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = p_2 \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial v} = q_2 ,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \chi_1 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = \chi_2 .$$

En prenant les dérivées de f et de φ dans une direction quelconque s on aura

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (p_1 + ip_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2)\frac{\partial v}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2)\frac{\partial v}{\partial s}.$$

Si maintenant φ est une fonction monogène de f, le rapport

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} : \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{(\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (\chi_1 + i\chi_2)\frac{\partial v}{\partial s}}{(p_1 + ip_2)\frac{\partial u}{\partial s} + (q_1 + iq_2)\frac{\partial v}{\partial s}}$$

doit être indépendant de la direction s. On en déduit

$$\frac{\tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2}.$$

On tire de là par des calculs bien simples

$$(2^*) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\tilde{\omega}_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}, \\[2ex] \chi_2 = -\dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde{\omega}_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\chi_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2}. \end{cases}$$

En posant pour abréger

$$(3^*) \qquad \begin{cases} p_1^2 + p_2^2 = E_{11}, \quad p_1 q_1 + p_2 q_2 = E_{12}, \quad q_1^2 + q_2^2 = E_{22}, \\ p_2 q_1 - p_1 q_2 = D, \end{cases}$$

on aura

$$(A_1^*) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_2 = \dfrac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D}, \\[2ex] \chi_2 = -\dfrac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D}. \end{cases}$$

De même on trouve

$$(A_2^*) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}_1 = \dfrac{E_{12}\tilde{\omega}_2 - E_{11}\chi_2}{D}, \\[2ex] \chi_1 = -\dfrac{E_{12}\chi_2 - E_{22}\tilde{\omega}_2}{D}. \end{cases}$$

Les quantités $\tilde{\omega}_2$, χ_2 satisfont à la condition

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial v} - \frac{\partial \chi_2}{\partial u} = 0;$$

c'est pourquoi on aura

$$(5^*) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1 - E_{12}\chi_1}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\chi_1 - E_{12}\tilde{\omega}_1}{D}\right] = 0,$$

c'est à dire

$$(C^*) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - E_{12}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - E_{12}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}}{D}\right] = 0.$$

Cette équation est la condition $\Delta_2 \varphi_1 = 0$. De même on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{E_{22}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} - E_{12}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v}}{D}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E_{11}\frac{\partial \varphi_2}{\partial v} - E_{12}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}}{D}\right] = 0,$$

c'est à dire $\Delta_2 \varphi_2 = 0$.

Il est bien facile de démontrer que, si φ_1 est une fonction qui satisfait à l'équation (C*), on peut toujours déterminer une fonction φ_2, telle que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$.

Les coefficients E_{11}, E_{12}, E_{22} sont en général des fonctions de u et v, mais il est toujours possible, par un changement des coordonnées u, v, de rendre ces coefficients constants. En particulier on peut ramener l'équation (C*) à la forme $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial v^2} = 0$.

3. Passons maintenant aux calculs analogues pour les deux variables imaginaires F et Φ qui ont une liaison d'isogénéité.

A cet effet décomposons F et Φ dans leurs parties réelles et imaginaires. On aura

$$\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2 \quad , \quad F = F_1 + iF_2 .$$

Posons

$$\frac{dF_1}{d(y,z)} = p_1 \quad , \quad \frac{dF_1}{d(z,x)} = q_1 \quad , \quad \frac{dF_1}{d(x,y)} = r_1 ,$$
$$\frac{dF_2}{d(y,z)} = p_2 \quad , \quad \frac{dF_2}{d(z,x)} = q_2 \quad , \quad \frac{dF_2}{d(x,y)} = r_2 ,$$
$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde\omega_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1 ,$$
$$\frac{d\Phi_2}{d(y,z)} = \tilde\omega_2 \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d(z,x)} = \chi_2 \quad , \quad \frac{d\Phi_2}{d(x,y)} = \rho_2 .$$

Pour réaliser la condition de monogénéité, il faut que le rapport

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} : \frac{dF}{d\sigma} = \frac{(\tilde\omega_1 + i\tilde\omega_2)\cos nx + (\chi_1 + i\chi_2)\cos ny + (\rho_1 + i\rho_2)\cos nz}{(p_1 + ip_2)\cos nx + (q_1 + iq_2)\cos ny + (r_1 + ir_2)\cos nz}$$

soit indépendant de la direction n. C'est pourquoi il faut poser

$$\frac{\tilde\omega_1 + i\tilde\omega_2}{p_1 + ip_2} = \frac{\chi_1 + i\chi_2}{q_1 + iq_2} = \frac{\rho_1 + i\rho_2}{r_1 + ir_2},$$

d'où

$$(1) \quad \begin{cases} q_1\tilde\omega_1 - q_2\tilde\omega_2 = p_1\chi_1 - p_2\chi_2 \quad , \quad q_2\tilde\omega_1 + q_1\tilde\omega_2 = p_2\chi_1 + p_1\chi_2 , \\ r_1\chi_1 - r_2\chi_2 = q_1\rho_1 - q_2\rho_2 \quad , \quad r_2\chi_1 + r_1\chi_2 = q_2\rho_1 + q_1\rho_2 , \\ p_1\rho_1 - p_2\rho_2 = r_1\tilde\omega_1 - r_2\tilde\omega_2 \quad , \quad p_2\rho_1 + p_1\rho_2 = r_2\tilde\omega_1 + r_1\tilde\omega_2 . \end{cases}$$

4. En résolvant ces équations par rapport à $\tilde\omega_2$, χ_2, ρ_2, on trouve

$$(2) \quad \begin{cases} \tilde\omega_2 = \dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\chi_1 - (p_1 q_1 + p_2 q_2)\tilde\omega_1}{p_2 q_1 - p_1 q_2} = -\dfrac{(p_1^2 + p_2^2)\rho_1 - (p_1 r_1 + p_2 r_2)\tilde\omega_1}{r_2 p_1 - p_2 r_1}, \\ \chi_2 = \dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\rho_1 - (q_1 r_1 + q_2 r_2)\chi_1}{q_2 r_1 - q_1 r_2} = -\dfrac{(q_1^2 + q_2^2)\tilde\omega_1 - (q_1 p_1 + q_2 p_2)\chi_1}{p_2 q_1 - q_2 p_1}, \\ \rho_2 = \dfrac{(r_1^2 + r_2^2)\tilde\omega_1 - (r_1 p_1 + r_2 p_2)\rho_1}{r_2 p_1 - r_1 p_2} = -\dfrac{(r_1^2 + r_2^2)\chi_1 - (r_1 q_1 + r_2 q_2)\rho_1}{q_2 r_1 - r_2 q_1} . \end{cases}$$

Posons pour abréger

$$
(3) \quad \left\{
\begin{array}{l}
p_1^2+p_2^2=E_{11}\quad,\quad q_1^2+q_2^2=E_{22}\quad,\quad r_1^2+r_2^2=E_{33}\,,\\
q_1r_1+q_2r_2=E_{23}=E_{32}\quad,\quad r_1p_1+r_2p_2=E_{31}=E_{13}\,,\\
\qquad\qquad p_1q_1+p_2q_2=E_{12}=E_{21}\,,\\
q_2r_1-q_1r_2=D_1\quad,\quad r_2p_1-r_1p_2=D_2\quad,\quad p_2q_1-p_1q_2=D_3\,,
\end{array}
\right.
$$

on aura

$$
(4) \quad \left\{
\begin{array}{l}
E_{11}D_1+E_{12}D_2+E_{13}D_3=0\,,\\
E_{21}D_1+E_{22}D_2+E_{23}D_3=0\,,\\
E_{31}D_1+E_{32}D_2+E_{33}D_3=0\,,
\end{array}
\right.
$$

$$
(4') \left\{
\begin{array}{l}
D_1^2=E_{22}E_{33}-E_{23}^2\,,\\
D_2^2=E_{33}E_{11}-E_{31}^2\,,\\
D_3^2=E_{11}E_{22}-E_{12}^2\,,
\end{array}
\right.
\qquad
(4'') \left\{
\begin{array}{l}
D_2D_3=E_{12}E_{13}-E_{11}E_{23}\,,\\
D_3D_1=E_{23}E_{21}-E_{22}E_{31}\,,\\
D_1D_2=E_{31}E_{32}-E_{33}E_{12}\,.
\end{array}
\right.
$$

Substituons les valeurs (3) dans les formules (2), on trouvera

$$
\tilde{\omega}_2=\frac{E_{11}\chi_1-E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3}=-\frac{E_{11}\rho_1-E_{13}\tilde{\omega}_1}{D_2}\,,
$$

$$
\chi_2=\frac{E_{22}\rho_1-E_{23}\chi_1}{D_1}=-\frac{E_{22}\tilde{\omega}_1-E_{21}\chi_1}{D_3}\,,
$$

$$
\rho_2=\frac{E_{33}\tilde{\omega}_1-E_{31}\rho_1}{D_2}=-\frac{E_{33}\chi_1-E_{32}\rho_1}{D_1}\,,
$$

En employant les équations (4) on pourra écrire

$$
(A_1) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\tilde{\omega}_2=\dfrac{E_{12}\rho_1-E_{13}\chi^1}{D_1}=\dfrac{E_{13}\tilde{\omega}_1-E_{11}\rho_1}{D_2}=\dfrac{E_{11}\chi_1-E_{12}\tilde{\omega}_1}{D_3}\,,\\
\chi_2=\dfrac{E_{22}\rho_1-E_{23}\chi_1}{D_1}=\dfrac{E_{23}\tilde{\omega}_1-E_{21}\rho_1}{D_2}=\dfrac{E_{21}\chi_1-E_{22}\tilde{\omega}_1}{D_3}\,,\\
\rho_2=\dfrac{E_{32}\rho_1-E_{33}\chi_1}{D_1}=\dfrac{E_{33}\tilde{\omega}_1-E_{31}\rho_1}{D_2}=\dfrac{E_{31}\chi_1-E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3}\,.
\end{array}
\right.
$$

On a de même

$$
(A_2) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\tilde{\omega}_1=\dfrac{E_{13}\chi_2-E_{12}\rho_2}{D_1}=\dfrac{E_{11}\rho_2-E_{13}\tilde{\omega}_2}{D_2}=\dfrac{E_{12}\tilde{\omega}_2-E_{11}\chi_2}{D_3}\,,\\
\chi_1=\dfrac{E_{23}\chi_2-E_{22}\rho_2}{D_1}=\dfrac{E_{21}\rho_2-E_{23}\tilde{\omega}_2}{D_2}=\dfrac{E_{22}\tilde{\omega}_2-E_{21}\chi_2}{D_3}\,,\\
\rho_1=\dfrac{E_{33}\chi_2-E_{32}\rho_2}{D_1}=\dfrac{E_{31}\rho_2-E_{33}\tilde{\omega}_2}{D_2}=\dfrac{E_{32}\tilde{\omega}_2-E_{31}\chi_2}{D_3}\,.
\end{array}
\right.
$$

On déduit des égalités (A_2)

$$
\tilde{\omega}_1D_1=E_{13}\chi_2-E_{12}\rho_2\,,
$$

$$
\chi_1D_2=E_{21}\rho_2-E_{23}\tilde{\omega}_2\,,
$$

$$
\rho_1D_3=E_{32}\tilde{\omega}_2-E_{31}\chi_2\,,
$$

d'où

$$
(B_1) \qquad D_1\tilde{\omega}_1+D_2\chi_1+D_3\rho_1=0\,.
$$

De même on a

$$(\mathrm{B}_2) \qquad \mathrm{D}_1 \tilde{\omega}_2 + \mathrm{D}_2 \chi_2 + \mathrm{D}_3 \rho_2 = 0 .$$

5. On a démontré (voir Chap. I, article 3) que les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent remplir les conditions

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0 ;$$

on aura donc d'après (A_1)

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{E}_{12}\rho_1 - \mathrm{E}_{13}\chi_1}{\mathrm{D}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{E}_{23}\tilde{\omega}_1 - \mathrm{E}_{21}\rho_1}{\mathrm{D}_2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{E}_{31}\chi_1 - \mathrm{E}_{32}\tilde{\omega}_1}{\mathrm{D}_3}\right) = 0 .$$

Par les égalités (A_1) on voit que cette équation peut s'écrire d'autres façons équivalentes. De même les quantités $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ doivent satisfaire à une équation analogue à l'équation (5).

L'équation (5) peut s'écrire, par les symboles du premier chapitre,

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{E}_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} - \mathrm{E}_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{\mathrm{D}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{E}_{23}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)} - \mathrm{E}_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{\mathrm{D}_2}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{E}_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} - \mathrm{E}_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{\mathrm{D}_3}\right) = 0$$

et Φ_2 remplira la même condition. On peut donc énoncer la proposition:

Si Φ *et* F *ont une liaison d'isogénéité, en décomposant* Φ *en ses parties réelle et imaginaire, on trouve deux fonctions qui remplissent les mêmes conditions. Ces conditions sont les suivantes*

$$(\mathrm{D}) \qquad \mathrm{D}_1 \frac{d\Psi}{d(y,z)} + \mathrm{D}_2 \frac{d\Psi}{d(z,x)} + \mathrm{D}_3 \frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0 ,$$

$$(\mathrm{C}) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{E}_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - \mathrm{E}_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{\mathrm{D}_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{E}_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - \mathrm{E}_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{\mathrm{D}_2}\right)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{E}_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - \mathrm{E}_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{\mathrm{D}_3}\right) = 0.$$

Réciproquement:

Si Ψ *est une fonction réelle des lignes qui remplit les conditions* (D), (C) *on peut déterminer une fonction réelle* P *des lignes, telle que* $\Psi + i\mathrm{P}$ *et* F *soient isogènes.*

En effet, en vertu de l'égalité (C) on pourra poser

$$\frac{d\mathrm{P}}{d(y,z)} = \frac{\mathrm{E}_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - \mathrm{E}_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{\mathrm{D}_1} ,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d(z,x)} = \frac{\mathrm{E}_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - \mathrm{E}_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{\mathrm{D}_2} ,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d(x,y)} = \frac{\mathrm{E}_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - \mathrm{E}_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{\mathrm{D}_3} .$$

On tire de là, en vertu de l'équation (D),

$$\frac{\frac{d\Psi}{d(y,z)}+i\frac{dP}{d(y,z)}}{p_1+ip_2}=\frac{\frac{d\Psi}{d(z,x)}+i\frac{dP}{d(z,x)}}{q_1+iq_2}=\frac{\frac{d\Psi}{d(x,y)}+i\frac{dP}{d(x,y)}}{r_1+ir_2};$$

par conséquent le rapport

$$\frac{\frac{d\Lambda}{d(y,z)}\cos nx+\frac{d\Lambda}{d(z,x)}\cos ny+\frac{d\Lambda}{d(x,y)}\cos nz}{\frac{dF}{d(y,z)}\cos nx+\frac{dF}{d(z,x)}\cos ny+\frac{dF}{d(x,y)}\cos nz}$$

est indépendant de la direction n, Λ étant égal à $\Psi + iP$.

C. Q. F. D.

On voit donc que la théorie que nous venons d'exposer est liée à celle des équations (D) et (C), de même que la théorie ordinaire se rapporte à celle de l'équation $\Delta_2 = 0$.

6. Soit maintenant Φ_1 une fonction des lignes du 1^er^ degré telle que la condition (D) soit réalisée.

Supposons qu'on ne sache pas si elle remplit la condition (C). Quelles sont les formules des paragraphes précédents qu'on pourra toujours conserver? Posons

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)}=\tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)}=\chi_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(z,y)}=\rho_1 .$$

Il est bien clair que toutes les formules des §§ 3 et 4 peuvent être conservées. Il faut remarquer seulement *qu'on ne saura pas si les quantités* $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ *qui se trouvent dans ces formules sont les dérivées d'une fonction des lignes prises par rapport aux plans coordonnées.* Si, au contraire la condition (C) est remplie, alors seulement la condition de l'intégrabilité

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial z}+\frac{\partial\chi_2}{\partial y}+\frac{\partial\rho_2}{\partial z}=0$$

sera remplie aussi, et par suite $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ seront les dérivées d'une fonction Φ_2 telle que $\Phi_1 + i\Phi_2$ et F aient une liaison d'isogénéité. Nous allons employer cette remarque dans les articles suivants.

Article 2.

1. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire il y a deux paramètres différentiels du premier ordre qui jouent un rôle bien important.

Si on se rapporte aux notations du § 2, article 1^er^, les deux paramètres sont les suivants

$$\Delta_1\Psi=\frac{E_{22}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial u}\right)^2-2E_{12}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}+E_{11}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial v}\right)^2}{D^2},$$

$$\Delta_1\Psi\Theta=\frac{E_{22}\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial u}-E_{12}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial\Theta}{\partial v}+\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)+E_{11}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial\Theta}{\partial v}}{D}.$$

Les propriétés de ces paramètres sont bien connues. En supposant, comme dans le § 2, article 1, que $\varphi_1 + i\varphi_2$ soit une fonction monogène de $f_1 + if_2$, on a

$$\Delta_1 \varphi_1 = \Delta_1 \varphi_2 .$$

Il est aussi bien connu que le problème suivant du calcul des variations – déterminer la fonction Ψ, dont les valeurs sont connues au contour du champ σ, en sorte que $I = \frac{1}{2}\int_\sigma D\,\Delta_1 \Psi\, du\, dv$ soit minimum – conduit à l'équation

$$\Delta_2 \Psi = 0$$

lorsque le problème peut se résoudre par une fonction Ψ finie dont les dérivées secondes sont intégrables.

2. Nous allons examiner deux paramètres différentiels qui dans notre théorie jouent le rôle des paramètres différentiels du 1[er] ordre dans la théorie ordinaire. A cet effet supposons que les deux fonctions réelles Φ_1, Φ'_1 remplissent les conditions

$$D_1 \frac{d\Phi_1}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = 0, \tag{6}$$

$$D_1 \frac{d\Phi'_1}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Phi'_1}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} = 0. \tag{6'}$$

Posons

$$\frac{d\Phi_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(z,x)} = \chi_1 \quad , \quad \frac{d\Phi_1}{d(x,y)} = \rho_1 ,$$
$$\frac{d\Phi'_1}{d(y,z)} = \tilde{\omega}'_1 \quad , \quad \frac{d\Phi'_1}{d(z,x)} = \chi'_1 \quad , \quad \frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} = \rho'_1 .$$

En vertu de ce qu'on vient de dire à la fin de l'article précédent, on pourra écrire toutes les formules des §§ 3 et 4 et même celles qu'on obtient de ces formules en posant un suffixe aux lettres $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. Posons

$$H_{\Phi_1 \Phi'_1} = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi'_2 , \rho'_2 \\ \chi_1 , \rho_1 \end{vmatrix} .$$

Nous aurons par les formules (A_1)

$$H = -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{23}\, \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}'_1 + D_2 E_{31}\, \chi_1 \chi'_1 + D_3 E_{12}\, \rho_1 \rho'_1 \} \tag{E'}$$
$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} \{ D_1 E_{23}\, \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}'_2 + D_2 E_{31}\, \chi_2 \chi'_2 + D_3 E_{12}\, \rho_2 \rho'_2 \} .$$

On tire de là

$$H = \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi'_2 , \rho'_2 \\ \chi_1 , \rho_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} \rho'_2 , \tilde{\omega}'_2 \\ \rho_1 , \tilde{\omega}_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}'_2 , \chi'_2 \\ \tilde{\omega}_1 , \chi_1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{D_1} \begin{vmatrix} \chi_2 , \rho_2 \\ \chi'_1 , \rho'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_2} \begin{vmatrix} \rho_2 , \tilde{\omega}_2 \\ \rho'_1 , \tilde{\omega}'_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{D_3} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_2 , \chi_2 \\ \tilde{\omega}'_1 , \chi'_1 \end{vmatrix} .$$

Par suite on trouve

$$(\mathrm{E}'') \qquad H = \frac{1}{2\,D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{11}(\rho_1\chi'_1+\rho'_1\chi_1)+D_2 E_{22}(\tilde\omega_1\rho'_1+\tilde\omega'_1\rho_1)+D_3 E_{33}(\chi_1\tilde\omega'_1+\chi'_1\tilde\omega_1)$$

$$= \frac{1}{2\,D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{11}(\rho_2\chi'_2+\rho'_2\chi_2)+D_2 E_{22}(\tilde\omega_2\rho'_2+\tilde\omega'_2\rho_2)+D_3 E_{33}(\chi_2\tilde\omega'_2+\chi'_2\tilde\omega_2)\}$$

$$= \frac{E_{22}\rho_1\rho'_1 - E_{23}(\rho_1\chi'_1+\chi_1\rho'_1)+E_{33}\chi_1\chi'_1}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde\omega_1\tilde\omega'_1 - E_{31}(\tilde\omega_1\rho'_1+\rho_1\tilde\omega'_1)+E_{11}\rho_1\rho'_1}{D_2^2}$$

$$= \frac{E_{11}\chi_1\chi'_1 - E_{12}(\chi_1\tilde\omega'_1+\tilde\omega_1\chi'_1)+E_{22}\tilde\omega_1\tilde\omega'_1}{D_3^2} = \frac{E_{22}\rho_2\rho'_2 - E_{23}(\rho_2\chi'_2+\chi_2\rho'_2)+E_{33}\chi_2\chi'_2}{D_1^2}$$

$$= \frac{E_{33}\tilde\omega_2\tilde\omega'_2 - E_{31}(\tilde\omega_2\rho'_2+\rho_2\tilde\omega'_2)+E_{11}\rho_2\rho'_2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_2\chi'_2 - E_{12}(\chi_2\tilde\omega'_2+\tilde\omega_2\chi'_2)+E_{22}\tilde\omega_2\tilde\omega'_2}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\rho'_1 - r_1\chi'_1)(q_1\rho_1 - r_1\chi_1)+(q_2\rho'_1 - r_2\chi'_1)(q_2\rho_1 - r_2\chi_1)}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\tilde\omega'_1 - p_1\rho'_1)(r_1\tilde\omega_1 - p_1\rho_1)+(r_2\tilde\omega'_1 - p_2\rho'_1)(r_2\tilde\omega_1 - p_2\rho_1)}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\chi'_1 - q_1\tilde\omega'_1)(p_1\chi_1 - q_1\tilde\omega_1)+(p_2\chi'_1 - q_2\tilde\omega'_1)(p_2\chi_1 - q_2\tilde\omega_1)}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\rho'_2 - r_1\chi'_2)(q_1\rho_2 - r_1\chi_2)+(q_2\rho'_2 - r_2\chi'_2)(q_2\rho_2 - r_2\chi_2)}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\tilde\omega'_2 - p_1\rho'_2)(r_1\tilde\omega_2 - p_1\rho_2)+(r_2\tilde\omega'_2 - p_2\rho'_2)(r_2\tilde\omega_2 - p_2\rho_2)}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\chi'_2 - q_1\tilde\omega'_2)(p_1\chi_2 - q_1\tilde\omega_2)+(p_2\chi'_2 - q_2\tilde\omega'_2)(p_2\chi_2 - q_2\tilde\omega_2)}{D_3^2}.$$

En employant les symboles introduits dans le 1[er] chapitre on pourra écrire

$$H_{\Phi_1\Phi'_1} = \frac{1}{D_1^2}\left\{E_{22}\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\frac{d\Phi'_1}{d(x,y)} - E_{23}\left(\frac{d\Phi_1}{d(x,y)}\frac{d\Phi'_1}{d(z,x)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\frac{d\Phi'_1}{d(x,y)}\right)+E_{33}\frac{d\Phi_1}{d(z,x)}\frac{d\Phi'_1}{d(z,x)}\right\} = \text{etc.}$$

3. Posons maintenant $\Phi'_1 = \Phi_1$ et remplaçons H par Θ_{Φ_1}. On trouvera

$$(\mathrm{F}) \qquad \Theta_{\Phi_1} = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix}\chi_2, \rho_2\\ \chi_1, \rho_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_2}\begin{vmatrix}\rho_2, \tilde\omega_2\\ \rho_1, \tilde\omega_1\end{vmatrix} = \frac{1}{D_3}\begin{vmatrix}\tilde\omega_2, \chi_2\\ \tilde\omega_1, \chi_1\end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde\omega_1^2 + D_2 E_{31}\chi_1^2 + D_3 E_{12}\rho_1^2\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{23}\tilde\omega_2^2 + D_2 E_{31}\chi_2^2 + D_3 E_{12}\rho_2^2\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3} D_1 E_{11}\chi_1\rho_1 + D_2 E_{22}\rho_1\tilde\omega_1 + D_3 E_{33}\tilde\omega_1\chi_1\}$$

$$= -\frac{1}{D_1 D_2 D_3}\{D_1 E_{11}\chi_2\rho_2 + D_2 E_{22}\rho_2\tilde\omega_2 + D_3 E_{33}\tilde\omega_2\chi_2\}$$

$$= \frac{E_{22}\rho_1^2 - 2E_{23}\rho_1\chi_1 + E_{33}\chi_1^2}{D_1^2} = \frac{E_{33}\tilde\omega_1^2 - 2E_{31}\tilde\omega_1\rho_1 + E_{11}\rho_1^2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\chi_1^2 - 2E_{12}\chi_1\tilde\omega_1 + E_{22}\tilde\omega_1^2}{D_3^2}$$

$$= \frac{E_{22}\,\rho_2^2 - 2\,E_{23}\,\rho_2\,\chi_2 + E_{33}\,\chi_2^2}{D_1^2} = \frac{E_{33}\,\tilde\omega_2^2 - 2\,E_{31}\,\tilde\omega_2\,\rho_2 + E_{11}\,\rho_2^2}{D_2^2} = \frac{E_{11}\,\chi_2^2 - 2\,E_{12}\chi_2\,\tilde\omega_2 + E_{22}\,\tilde\omega_2^2}{D_3^2}$$

$$= \frac{(q_1\,\rho_1 - r_1\,\chi_1)^2 + (q_2\,\rho_1 - r_2\,\chi_1)^2}{D_1^2} = \frac{(r_1\,\tilde\omega_1 - p_1\,\rho_1)^2 + (r_2\,\tilde\omega_1 - p_2\,\rho_1)^2}{D_2^2}$$

$$= \frac{(p_1\,\chi_1 - q_1\,\tilde\omega_1)^2 + (p_2\,\chi_1 - q_2\,\tilde\omega_1)^2}{D} = \frac{(q_1\,\rho_2 - r_1\,\chi_2)^2 + (q_2\,\rho_2 - r_2\,\chi_2)^2}{D_1^2}$$

$$= \frac{(r_1\,\tilde\omega_2 - p_1\,\rho_2)^2 + (r_2\,\tilde\omega_2 - p_2\,\rho_2)^2}{D_2^2} = \frac{(p_1\,\chi_2 - q_1\,\tilde\omega_2)^2 + (p_2\,\chi_2 - q_2\,\tilde\omega_2)^2}{D_3^2}.$$

Il est évident, par les dernières formules, que Θ_{Φ_1} est une quantité positive.

A l'aide des symboles du premier chapitre on peut écrire

$$\Theta_{\Phi_1} = \frac{E_{22}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(x\,,y)}\right)^2 - 2\,E_{23}\,\dfrac{d\Phi_1}{d(x\,,y)}\,\dfrac{d\Phi_1}{d(z\,,x)} + E_{33}\left(\dfrac{d\Phi_1}{d(z\,,x)}\right)^2}{D_1^2} = \text{etc.}$$

4. Il faut démontrer maintenant que H et Θ ne changent pas par un changement de variables. Soient $\bar x\,, \bar y\,, \bar z$ les nouvelles variables. Désignons les quantités relatives aux nouvelles variables par les mêmes lettres qui désignent les quantités analogues qui ont rapport aux variables $x\,,\ y\,,\ z\,,$ en plaçant un trait horizontal au dessus de chaque lettre. Des formules trouvées dans le 1[er] chapitre, article 4, on déduira par un calcul très simple

$$(7)\qquad \begin{cases} \bar D_1 = \dfrac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(D_1\,\dfrac{\partial x}{\partial \bar x} + D_2\,\dfrac{\partial y}{\partial \bar x} + D_3\,\dfrac{\partial z}{\partial \bar x}\right) \\[2ex] \bar D_2 = \dfrac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(D_1\,\dfrac{\partial x}{\partial \bar x} + D_2\,\dfrac{\partial y}{\partial \bar y} + D_3\,\dfrac{\partial z}{\partial \bar y}\right) \\[2ex] \bar D_3 = \dfrac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(D_1\,\dfrac{\partial x}{\partial \bar z} + D_2\,\dfrac{\partial y}{\partial \bar z} + D_3\,\dfrac{\partial z}{\partial \bar z}\right). \end{cases}$$

De même en posant

$$M_1 = \chi_2'\,\rho_1 - \rho_2'\,\chi_1\quad,\quad M_2 = \rho_2'\,\tilde\omega_1 - \tilde\omega_2'\,\rho_1\quad,\quad M_3 = \tilde\omega_2'\,\chi_1 - \chi_2'\,\tilde\omega_1\,,$$

$$\Delta_1 = \chi_2\,\rho_1 - \rho_2\,\chi_1\quad,\quad \Delta_2 = \rho_2\,\tilde\omega_1 - \tilde\omega_2\,\rho_1\quad,\quad \Delta_3 = \tilde\omega_2\,\chi_1 - \chi_2\,\tilde\omega_1\,,$$

on trouvera

$$\bar M_1 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(M_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar x} + M_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar x} + M_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar x}\right),$$

$$\bar M_2 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(M_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar y} + M_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar y} + M_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar y}\right),$$

$$\bar M_3 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(M_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar z} + M_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar z} + M_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar z}\right),$$

$$\bar\Delta_1 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,.\bar y\,,\bar z)}\left(\Delta_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar x} + \Delta_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar x} + \Delta_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar x}\right),$$

$$\bar\Delta_2 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z}\left(\Delta_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar y} + \Delta_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar y} + \Delta_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar y}\right),$$

$$\bar\Delta_3 = \frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\left(\Delta_1\,\frac{\partial x}{\partial \bar z} + \Delta_2\,\frac{\partial y}{\partial \bar z} + \Delta_3\,\frac{\partial z}{\partial \bar z}\right).$$

Par suite, en vertu des relations (E′) on aura

$$\overline{H} = \frac{\overline{M}_1}{\overline{D}_1} = \frac{M_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + M_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + M_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}}{D_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}} = \frac{M_1}{D_1} = H,$$

$$\overline{\Theta} = \frac{\overline{\Delta}_1}{\overline{D}_1} = \frac{\Delta_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + \Delta_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + \Delta_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}}{D_1 \frac{\partial x}{\partial \overline{x}} + D_2 \frac{\partial y}{\partial \overline{x}} + D_3 \frac{\partial z}{\partial \overline{x}}} = \frac{\Delta_1}{D_1} = \Theta.$$

C. Q. F. D.

5. Si Φ_1 et Φ_1' remplissent la condition (C) on peut déterminer Φ_2, Φ_2' de manière que $\Phi_1 + i\Phi_2$, $\Phi_1' + i\Phi_2'$, F aient une liaison d'isogénéité. On a, lorsque ce cas se présente,

$$H_{\Phi_1 \Phi_1'} = H_{\Phi_2 \Phi_2'} \quad , \quad H_{\Phi_1 \Phi_2'} = - H_{\Phi_2 \Phi_1'} .$$
$$\Theta_{\Phi_1} = \Theta_{\Phi_2} .$$

Article 3.

1. On tire des formules (7)

$$\overline{D}_1 d\overline{x} + \overline{D}_2 d\overline{y} + \overline{D}_3 d\overline{z} = \frac{d(x, y, z)}{d(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})} (D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz). \tag{8}$$

Cette égalité démontre que si l'équation

$$D_1 dx + D_2 dy + D_3 dz = 0 \tag{9}$$

est intégrable, cette propriété se maintient après le changement des variables.

Nous nous proposons d'examiner dans cet article le cas général. Nous examinerons dans l'article suivant le cas qui se présente si l'équation (9) est intégrable.

2. Supposons réalisées les conditions (6) et (6′) du 1er paragraphe de l'article précédent. Posons les équations différentielles

$$\left\{ \begin{aligned} & E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\tilde{\omega}_1 , \\ & E_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\chi_1 , \\ & E_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\rho_1 , \end{aligned} \right. \tag{10}$$

k étant une fonction que nous laisserons indéterminée. Il est bien clair (voir form. (4) et (B_1)) que la troisième équation est une conséquence des deux premières. Bornons-nous à examiner une portion T de l'espace où, si k, $\tilde{\omega}_1$, χ_1, ρ_1, sont des fonctions monodromes finies et continues, même les intégrales φ_1 et φ_2 des équations (10) jouissent de ces propriétés. On déduit des formules (10), par les formules (A_1), (4), (4″)

$$(10')\qquad \left\{\begin{aligned} &E_{11}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{13}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=k\tilde\omega_2\,,\\ &E_{21}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+D_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=k\chi_2\,,\\ &E_{31}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+D_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=k\rho_2\,. \end{aligned}\right.$$

3. Si on remplace les variables $x\,,y\,,z$ par $\bar x\,,\bar y\,,\bar z$ et que l'on suppose

$$k(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)=k(x\,,y\,,z)\frac{d(x\,,y\,,z)}{d(\bar x\,,\bar y\,,\bar z)}\,,$$

on trouve que les fonctions φ_1 et φ_2 sont liées aux quantités $\bar{\tilde\omega}_1\,,\bar\chi_1\,,\bar\rho_1\,,$ $\bar{\tilde\omega}_2\,,\bar\chi_2\,,\bar\rho_2\,,$ par des équations analogues aux équations (10), (10′).

4. A quelles conditions doivent satisfaire φ_1 et φ_2? Posons

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi_1\,,\varphi_2)=&\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{11}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+E_{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+E_{13}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-D_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right\}\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{21}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+E_{22}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+E_{23}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}-D_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)\right\}\\ &+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{k}\left(E_{31}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+E_{32}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+E_{33}\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+D_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}-D_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Éliminant $\tilde\omega_1\,,\chi_1\,,\rho_1$ entre les équations (10) on trouve

$$(G)\qquad \Gamma(\varphi_1\,,\varphi_2)=0\,.$$

Réciproquement, si la condition (G) est vérifiée, les quantités $\tilde\omega_1\,,\chi_1\,,\rho_1$ remplissent les conditions du 1er paragraphe de l'article précédent.

5. Supposons maintenant que les équations (10), (10′) soient vérifiées par les fonctions φ_1', φ_2' en remplaçant à droite $\tilde\omega_1\,,\chi_1\,,\rho_1\,,\tilde\omega_2\,,\chi_2\,,\rho_2$ par $\tilde\omega_1'\,,\chi_1'\,,\rho_1'\,,\tilde\omega_2'\,,\chi_2'\,,\rho_2'$. En employant les formules (E′) on trouve par un calcul très simple

$$(11)\qquad \begin{aligned} H=&\frac{1}{k}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde\omega_2'+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi_2'+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho_2'\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tilde\omega_1'+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi_1'+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho_1'\right)\right\}\\ =&\frac{1}{k}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x}\tilde\omega_2+\frac{\partial\varphi_2'}{\partial y}\chi_2+\frac{\partial\varphi_2'}{\partial z}\rho_2\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x}\tilde\omega_1+\frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}\chi_1+\frac{\partial\varphi_1'}{\partial z}\rho_1\right)\right\}.\end{aligned}$$

Évaluons $\int_S kH\,dS$ en supposant que le champ S de l'intégration soit compris dans la région T. Nous aurons

$$\begin{aligned}\int_S kH\,dS=&\int_S\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde\omega_2'+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi_2'+\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho_2'\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\tilde\omega_1'+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\chi_1'+\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\rho_1'\right)\right\}dS\\ =&\int_S\left\{\left(\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x}\tilde\omega_2+\frac{\partial\varphi_2'}{\partial y}\chi_2+\frac{\partial\varphi_2'}{\partial z}\rho_2\right)+\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x}\tilde\omega_1+\frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}\chi_1+\frac{\partial\varphi_1'}{\partial y}\rho_1\right)\right\}dS.\end{aligned}$$

Appliquons aux dernières intégrales le procédé de l'intégration par parties. Supposant que S soit limité par la surface σ et que n soit la normale à σ dirigée au dehors de S, on aura

$$\int_S kH\, dS = \int_\sigma \left\{ \varphi_2 (\tilde{\omega}'_2 \cos nx + \chi'_2 \cos ny + \rho'_2\, nz) + \varphi_1 \frac{d\Phi'_1}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$-\int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} \right) dS = \int_\sigma \left\{ \varphi'_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) + \varphi'_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$-\int_S \varphi'_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

Cette formule peut s'écrire

$$\text{(I)} \qquad \int_S kH\, dS = \int_\sigma \left\{ \varphi_2 \left(\frac{E_{12}\rho'_1 - E_{13}\chi'_1}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}'_1 - E_{21}\rho'_1}{D_2} \cos ny \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{E_{31}\chi'_1 - E_{32}\tilde{\omega}'_1}{D_3} \cos nz \right) + \varphi_1 \frac{d\Phi'_1}{d\sigma} \right\} - \int_S \varphi_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12}\rho'_1 - E_{13}\chi'_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}'_1 - E_{21}\rho'_1}{D_2} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31}\chi'_1 - E_{32}\tilde{\omega}'_1}{D_3} \right) \right\} dS = \int_\sigma \left\{ \varphi'_2 \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \cos nx + \frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \cos ny \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \cos nz \right) + \varphi'_1 \frac{d\Theta_1}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$-\int_S \varphi'_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_{12}\rho_1 - E_{13}\chi_1}{D_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E_{23}\tilde{\omega}_1 - E_{21}\rho_1}{D_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{E_{31}\chi_1 - E_{32}\tilde{\omega}_1}{D_3} \right) \right\} dS.$$

La formule qu'on vient de trouver est tout à fait analogue à la formule de GREEN.

Prenons $\Phi_1 = \Phi'_1$. On trouvera $H = \Theta$ et

$$\text{(K)} \qquad \int_S k\Theta\, dS = \int_\sigma \left\{ \varphi_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} \right\} d\sigma$$

$$-\int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} \right) dS.$$

6. Cherchons ce que deviennent les formules qu'on vient de trouver, lorsque les fonctions Φ_1 et Φ'_1 remplissent la condition (C). On aura lorsque ce cas se présente

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{d\Phi_2}{d(y,z)} \quad , \quad \chi_2 = \frac{d\Phi_2}{d(z,x)} \quad , \quad \rho_2 = \frac{d\Phi_2}{d(x,y)} \,;$$

$$\tilde{\omega}'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(y,z)} \quad , \quad \chi'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(z,x)} \quad , \quad \rho'_2 = \frac{d\Phi'_2}{d(x,y)} \,;$$

$$\text{(12)} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0, \qquad \text{(12')} \quad \frac{\partial \tilde{\omega}'_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi'_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho'_2}{\partial z} = 0.$$

Par suite

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \int_S k \mathrm{H}\, d\mathrm{S} = \int_\sigma \left(\varphi_2 \frac{d\Phi_2'}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma}\right) d\sigma = \int_\sigma \left(\varphi_2' \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi_1' \frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right) d\sigma,$$

$$\text{(K}'\text{)} \qquad \int_S k \Theta\, d\mathrm{S} = \int_\sigma \left(\varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} + \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma}\right) d\sigma.$$

Nous allons donner tout de suite une application de la dernière formule en démontrant le théorème suivant:

Supposons que $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ *et* F *soient isogènes et que* Φ *soit sans singularités en* S. *Si on connaît les valeurs de* $\Phi_1 + i\Phi_2$ *pour les lignes de la surface* σ, *cette fonction est déterminée pour toutes les lignes du champ* S.

En effet soient Φ' et Φ'' deux fonctions qui remplissent les conditions posées pour Φ. Posons

$$\Phi' - \Phi'' = \Phi''' = \Phi_1''' + i\Phi_2'''.$$

On aura

$$\frac{d\Phi_1'''}{d\sigma} = 0 \quad , \quad \frac{d\Phi_2'''}{d\sigma} = 0.$$

C'est pourquoi (form. (K'))

$$\int_S k \Theta_{\Phi_1'''}\, d\mathrm{S} = 0;$$

k est arbitraire, par suite, on peut supposer qu'il soit positif, Θ est toujours positif.

Il faut donc qu'on ait

$$\Theta_{\Phi_1'''} = 0,$$

d'où

$$\Phi_1''' = 0.$$

C. Q. F. D.

7. Supposons que Φ_1 vérifie l'égalité (C), on aura l'équation (12) et par suite en éliminant $\tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ entre les équations (10') on trouve que les fonctions φ_1, φ_2 doivent vérifier les équations différentielles

$$\text{(G)} \qquad \Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad\qquad \text{(G}'\text{)} \qquad \Gamma(\varphi_2, -\varphi_1) = 0.$$

Réciproquement si φ_1, φ_2 remplissent les conditions (G), (G') les quantités $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$ obtenues par les équations (10), (10') satisfont aux équations

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} + \frac{\partial \chi_1}{\partial y} + \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0.$$

Cela posé nous allons démontrer que les équations (G), (G') dépendent d'un problème du calcul des variations.

On obtiendra aisément par ce qui précède l'expression de H et de Θ par les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$. Nous désignons ces expressions par

$$\mathrm{H}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'), \; \Theta(\varphi_1, \varphi_2).$$

Laissons les fonctions φ_1, φ_2, φ'_1, φ'_2 tout à fait arbitraires. On pourra écrire

$$\Theta(\varphi_1+\psi_1\,,\varphi_2+\psi_2)=\Theta(\varphi_1\,,\varphi_2)+2\,\mathrm{H}(\varphi_1\,,\varphi_2\,,\psi_1\,,\psi_2)+\Theta(\psi_1\,,\psi_2)$$

et par suite

$$\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1+\psi_1\,,\varphi_2+\psi_2)\,dS$$
$$=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1\,,\varphi_2)\,dS+\int_S k\mathrm{H}(\varphi_1\,,\varphi_2\,,\psi_1\,,\psi_2)\,dS+\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\psi_1\,,\psi_2)\,dS\,.$$

Supposons maintenant $\psi_1=0$, $\psi_2=0$ sur la surface σ qui forme la limite de S. Par le procédé de l'intégration par parties, on peut écrire

$$(13)\qquad \int_S k\mathrm{H}(\varphi_1\,,\varphi_2\,,\psi_1\,,\psi_2)\,dS=-\int_S[\psi_1\,\Gamma(\varphi_1\,,\varphi_2)+\psi_2\,\Gamma(\varphi_2\,,-\varphi_1)]\,dS$$

d'ou

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\int_S k\,\Theta(\varphi_1+\psi_1\,,\varphi_2+\psi_2)\,dS$$
$$=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1\,,\varphi_2)\,dS+\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\psi_1\,,\psi_2)\,dS-\int_S[\psi_1\,\Gamma(\varphi_1\,,\varphi_2)+\psi_2\,\Gamma(\varphi_2\,,-\varphi_1)]\,dS\,.$$

Soit k une quantité toujours affectée du même signe. Proposons-nous le problème:

Etant données les valeurs de φ_1 et φ_2 sur la surface σ, déterminer ces fonctions de sorte que l'intégrale

$$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_S k\Theta(\varphi_1\,,\varphi_2)\,dS$$

soit maximum ou minimum.

Pour résoudre cette question, employons la formule (14). Il faudra prendre

$$\Gamma(\varphi_1\,,\varphi_2)=0\quad,\quad\Gamma(\varphi_2\,,-\varphi_1)=0$$

et I sera maximum si k est négatif, minimum si k est positif.

8. Si les fonctions φ_1 et φ_2 sont assujetties aux équations (G), (G') et qu'on en donne les valeurs sur σ, est-ce que les fonctions Φ_1, Φ_2 seront déterminées? Il est bien aisé de démontrer qu'elles seront déterminées pour toutes les lignes fermées qui peuvent se réduire à un point par déformation continue, sans sortir de la région S. Mais si le champ S n'est pas simplement connexe, il y a aussi des groupes de lignes fermées qui ne peuvent pas se réduire à un point sans sortir de la région S. Les valeurs des fonctions Φ_1 et Φ_2 pour les lignes de ces groupes renferment une constante arbitraire. Pour démontrer cette proposition il suffit de prouver que les conditions données suffisent pour déterminer $\tilde{\omega}_1, \chi_1, \rho_1, \tilde{\omega}_2, \chi_2, \rho_2$. En effet supposons que

les conditions énoncées soient remplies par les fonctions φ'_1, et φ'_2, de même que par les fonctions φ''_1 et φ''_2. En posant $\varphi'_1 - \varphi''_1 = \varphi'''_1$, $\varphi'_2 - \varphi''_2 = \varphi'''_2$, on aura $\Gamma(\varphi'''_1, \varphi'''_2) = 0$, $\Gamma(\varphi'''_2, -\varphi'''_1) = 0$ et sur la surface σ, $\varphi'''_1 = \varphi'''_2 = 0$. En employant la formule (13) où l'on doit supposer

$$\varphi_1 = \psi_1 = \varphi'''_1 \quad , \quad \varphi_2 = \psi_2 = \varphi'''_2,$$

on trouve donc

$$\int_S k\Theta\, dS = 0$$

et par suite

$$\Theta = 0.$$

C. Q. F. D.

Article 4.

1. Examinons maintenant le cas qui se présente lorsque l'équation (9) est intégrable [5]. On pourra poser

$$D_1\, dx + D_2\, dy + D_3\, dz = \lambda d\mu.$$

Il est aisé de démontrer que dans ce cas on peut satisfaire aux équations (10) en prenant $\varphi_1 = 0$, $k = \lambda$. En effet ces équations deviennent

$$(15) \qquad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(z, x)} = \chi_1 \quad , \quad \frac{d(\mu, \varphi_2)}{d(x, y)} = \rho_1 .$$

Mais on a

$$D_1\, \tilde{\omega}_1 + D_2\, \chi_1 + D_3\, \rho_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}\tilde{\omega}_1 + \frac{\partial\mu}{\partial y}\chi_1 + \frac{\partial\mu}{\partial z}\rho_1 = 0;$$

on peut donc (voir chapitre I, article 5) satisfaire aux équations (15). On voit aisément que μ et φ_2 ne changent pas en changeant les variables x, y, z. De même on peut prendre $\varphi'_1 = 0$ et l'on peut écrire

$$(15') \qquad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}'_1 \quad , \quad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(z, x)} = \chi'_1 \quad , \quad \frac{d(\mu, \varphi'_2)}{d(x, y)} = \rho'_1 .$$

2. Qu'est-ce que deviennent les équations (11), (I), (K) de l'article précédent? On trouve

$$(16) \qquad H = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\tilde{\omega}'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\chi'_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\rho'_2\right\} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial\varphi'_2}{\partial x}\tilde{\omega}_2 + \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y}\chi_2 + \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z}\rho_2\right\},$$

(5) C'est dans ce cas seulement qu'on pourra rendre constants les coefficients $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{33}, D_1, D_2, D_3$ par un changement des variables. (Voir § 1, article 3).

(L) $$\int_S \lambda H\, dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2 (\tilde{\omega}_2' \cos nx + \chi_2' \cos ny + \rho_2' \cos nz) d\sigma - \int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2'}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2'}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2'}{\partial z}\right) dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2' (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma - \int_S \varphi_2' \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

(M) $$\int_S \lambda \Theta\, dS$$

$$= \int_\sigma \varphi_2 (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz) d\sigma - \int_S \varphi_2 \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

Si la condition (C) est réalisée, lorque nous remplaçons Ψ par Φ_1 et Φ_1' on a

(L′) $$\int_S \lambda H_{\Phi_1 \Phi_1'} dS = \int_\sigma \varphi_2 \frac{d\Phi_2'}{d\sigma} d\sigma = \int_\sigma \varphi_2' \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma,$$

(M′) $$\int_S \lambda \Theta_{\Phi_1} dS = \int_\sigma \varphi_2 \frac{d\Phi_2}{d\sigma} d\sigma.$$

3. Dans le cas qui se présente si Φ_1 remplit la condition (C), il y a aussi d'autres formules que nous allons trouver.

En effet si l'on a

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \chi_2}{\partial y} + \frac{\partial \rho_2}{\partial z} = 0$$

on peut satisfaire aux équations (10), (10′) en prenant $\varphi_2 = 0$, $k = \lambda$. On a

$$E_{11} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \tilde{\omega}_1 \quad , \quad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(y, z)} = \tilde{\omega}_2,$$

$$E_{21} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \chi_1 \quad , \quad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(z, x)} = \chi_2,$$

$$E_{31} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \lambda \rho_1 \quad , \quad \frac{d(\varphi_1, \mu)}{d(x, y)} = \rho_2,$$

par suite

$$H_{\Phi_1 \Phi_1'} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi_1' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho_1'\right),$$

$$\Theta_{\Phi_1} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \tilde{\omega}_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \chi_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \rho_1\right),$$

d'où

(L″) $$\int_S \lambda H_{\Phi_1 \Phi_1'} dS = \int_\sigma \varphi_1 \frac{d\Phi_1'}{d\sigma} d\sigma,$$

(M″) $$\int_S \lambda \Theta_{\Phi_1} dS = \int_\sigma \varphi_1 \frac{d\Phi_1}{d\sigma} d\sigma.$$

Voilà une application de la dernière formule.

Si la fonction Ψ, *sans singularités dans le champ* T, *remplit les conditions*

$$D_1 \frac{d\Psi}{d(y,z)} + D_2 \frac{d\Psi}{d(z,x)} + D_3 \frac{d\Psi}{d(x,y)} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E_{12}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)}}{D_1}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{E_{23}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Psi}{d(x,y)}}{D_1}\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_{31}\dfrac{d\Psi}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Psi}{d(y,z)}}{D_3}\right\} = 0,$$

et que l'on connaisse les valeurs de Ψ *pour les lignes de* σ, *la fonction* Ψ *est déterminée pour toute ligne du champ* S (*compris dans* T) *en supposant que* λ *soit toujours affecté du même signe en* S.

En effet si Ψ' et Ψ'_1 réalisent ces conditions, posons $\Psi'_1 - \Psi' = \Phi_1$. On pourra appliquer la formule (M"). Mais sur la surface σ on a

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma} = 0;$$

par suite on aura

$$\int_S \lambda\Theta\, dS = 0,$$

d'où

$$\Theta = 0 \quad , \quad \Phi_1 = 0 \quad , \quad \Psi' = \Psi'_1 .$$

C. Q. F. D.

On tire de là:

Si $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ *et* F *ont une liaison d'isogénéité il suffit de connaître les valeurs de* Φ_1 *ou de* Φ_2 *sur la surface limite de* S, *pour que* Φ *soit déterminé en* S.

4. On déduit aisément la formule

$$\text{(N)} \qquad \Theta_{\Phi_1+\Phi'_1} = \Theta_{\Phi_1} + 2\,H_{\Phi_1\,\Phi'_1} + \Theta_{\Phi'_1};$$

par suite on a

$$\frac{1}{2}\int_S \lambda\Theta_{\Phi_1+\Phi'_1}\, dS = \frac{1}{2}\int_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\, dS + \int_S \lambda H_{\Phi_1\,\Phi'_1}\, dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda\Theta_{\Phi'_1}\, dS$$

$$= \frac{1}{2}\int_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\, dS + \frac{1}{2}\int_S \lambda\Theta_{\Phi'_1}\, dS + \int_\sigma \varphi'_2\,(\tilde\omega_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz)\, d\sigma$$

$$- \int_S \varphi'_2\left(\frac{\partial\tilde\omega_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right) dS.$$

Si on prend sur la surface σ, $\varphi_2' = 0$, on a sur σ, $\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1$, et la formule précédente devient

$$\frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1+\Phi_1'}\,dS = \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1'}\,dS - \int\limits_S \varphi_2'\left(\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right)dS.$$

On en déduit:

Pour que $\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\,dS$ *soit maximum ou minimum lorsque les valeurs de* Φ_1 *sont données pour les lignes de la surface* σ, *il faut que*

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial\chi_2}{\partial y} + \frac{\partial\rho_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E_{12}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)} - E_{13}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)}}{D_1}\right\} \tag{17}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{E_{23}\dfrac{\partial\Phi_1}{d(y,z)} - E_{21}\dfrac{d\Phi_1}{d(x,y)}}{D_2}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{E_{31}\dfrac{d\Phi_1}{d(z,x)} - E_{32}\dfrac{d\Phi_1}{d(y,z)}}{D_3}\right\} = 0;$$

Φ_1 *étant une fonction qui réalise la condition* (6).

Réciproquement supposons vérifiée les conditions (6), (17), et que Θ_1 soit une fonction qui n'a pas de singularités dans le champ T.

En appliquant la formule (N) on aura

$$\frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1+\Phi_1'}\,dS = \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1'}\,dS - \int\limits_\sigma \varphi_1\frac{d\Phi_1'}{d\sigma}\,d\sigma.$$

Pour que l'on ait sur la surface σ

$$\Phi_1 + \Phi_1' = \Phi_1,$$

il faut et il suffit que

$$\frac{d\Phi_1'}{d\sigma} = 0.$$

On aura donc, lorsque cette condition est réalisée,

$$\frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1+\Phi_1'}\,dS = \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\,dS + \frac{1}{2}\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1'}\,dS.$$

On en déduit:

Il suffit que la condition (17) *soit remplie et que* Φ_1 *n'ait pas de singularités dans le champ* T, *pour que l'intégrale*

$$\int\limits_S \lambda\Theta_{\Phi_1}\,dS$$

soit un maximum ou un minimum entre toutes les intégrales $\int\limits_S \lambda\Theta_\Psi\,dS$, Ψ *étant une fonction qui vérifie la condition* (6) *et qui est égale à* Φ_1 *sur* σ. *On aura un maximum si* λ *est négatif et un minimum si* λ *est positif.*

5. Supposons que $\Phi_1 + i\Phi'_1$ et F aient une liaison d'isogénéité c'est-à-dire que

$$\tilde{\omega}'_1 = \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \chi'_1 = \chi_2 \quad , \quad \rho'_1 = \rho_2 \quad ; \quad -\tilde{\omega}'_2 = \tilde{\omega}_1 \quad , \quad -\chi'_2 = \chi_1 \quad , \quad -\rho'_2 = \rho_1 .$$

D'après les équations (10') de l'article précédent on aura

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} D_2 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} &= E_{11} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} , \\ D_3 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z} &= E_{21} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} , \\ D_1 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial\varphi'_2}{\partial x} &= E_{31} \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} , \end{aligned} \right.$$

$$(18') \quad \left\{ \begin{aligned} D_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} &= E_{11} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial x} + E_{12} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} + E_{13} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z} , \\ D_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= E_{21} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial x} + E_{22} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} + E_{23} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z} , \\ D_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} &= E_{31} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial x} + E_{32} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial y} + E_{33} \frac{\partial\varphi'_2}{\partial z} . \end{aligned} \right.$$

Les fonctions φ_2 et φ'_2 doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + E_{13}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + E_{23}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\lambda}\left(E_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + E_{32}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + E_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] = 0 .$$

6. Soit $F = F_1 + iF_2$; les quantités

$$p_1 = \frac{dF_1}{d(y,z)} \quad , \quad q_1 = \frac{dF_1}{d(z,x)} \quad , \quad r_1 = \frac{dF_1}{d(x,y)} ,$$
$$p_2 = \frac{dF_2}{d(y,z)} \quad , \quad q_2 = \frac{dF_2}{d(z,x)} \quad , \quad r_2 = \frac{dF_2}{d(x,y)}$$

jouissent des propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial r_1}{\partial z} &= 0, \\ D_1 p_1 + D_2 q_1 + D_3 r_1 &= 0, \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial r_2}{\partial z} &= 0, \\ D_1 p_2 + D_2 q_2 + D_3 r_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

On peut donc déterminer deux fonctions f_2, f'_2, telles que

$$\frac{d(\mu,f_2)}{d(y,z)} = p_1 \quad , \quad \frac{d(\mu,f_2)}{d(z,x)} = q_1 \quad , \quad \frac{d(\mu,f_2)}{d(x,y)} = r_1 ,$$
$$\frac{d(\mu,f'_2)}{d(y,z)} = p_2 \quad , \quad \frac{d(\mu,f'_2)}{d(z,x)} = q_2 \quad , \quad \frac{d(\mu,f'_2)}{d(x,y)} = r_2 ;$$

par suite

$$\lambda = -\frac{d(f_2,f'_2,\mu)}{d(x,y,z)} ,$$

$$D_1 = -\frac{d(f_2,f'_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial x} \quad , \quad D_2 = -\frac{d(f_2,f'_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial y} \quad , \quad D_3 = -\frac{d(f_2,f'_2,\mu)}{d(x,y,z)}\frac{\partial\mu}{\partial z} .$$

En changeant les variables x, y, z et en prenant $\bar{x} = f_2, \bar{y} = f'_2, \bar{z} = \mu$, on trouve

$$\bar{E}_{11} = 1 \quad , \quad \bar{E}_{22} = 1 \quad , \quad \bar{E}_{33} = 0 \quad ; \quad \bar{E}_{23} = 0 \quad , \quad \bar{E}_{31} = 0 \quad , \quad \bar{E}_{12} = 0;$$

$$\bar{D}_1 = 0 \quad , \quad \bar{D}_2 = 0 \quad , \quad \bar{D}_3 = -1.$$

Les équations (18), (18') deviendront

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial f_2} = \frac{\partial \varphi'_2}{\partial f'_2} \quad , \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial f'_2} = -\frac{\partial \varphi'_2}{\partial f_2};$$

d'où

$$\varphi_2 + i\varphi'_2 = G(f_2 + if'_2, \mu). \tag{20}$$

Employons la formule (E) du 1[er] chapitre.

On aura

$$F_1 |[L]| = \int_\sigma (p_1 \cos nx + q_1 \cos ny + r_1 \cos nz)\, d\sigma = -\int_L f_2\, d\mu,$$

$$F_2 |[L]| = \int_\sigma (p_2 \cos nx + q_2 \cos ny + r_2 \cos nz)\, d\sigma = -\int_L f'_2\, d\mu,$$

$$\Phi_1 |[L]| = \int_\sigma (\tilde{\omega}_1 \cos nx + \chi_1 \cos ny + \rho_1 \cos nz)\, d\sigma = -\int_L \varphi_2\, d\mu,$$

$$\Phi_2 |[L]| = \int_\sigma (\tilde{\omega}_2 \cos nx + \chi_2 \cos ny + \rho_2 \cos nz)\, d\sigma = -\int_L \varphi'_2\, d\mu,$$

L étant le contour de σ. On en déduit

$$F |[L]| = -\int_L (f_2 + if'_2)\, d\mu \quad , \quad \Phi |[L]| = -\int_L G\, d\mu.$$

Réciproquement si $F |[L]|$ et $\Phi |[L]|$ sont données par les formules (21), l'égalité (20) étant satisfaite, elles ont une liaison d'isogénéité.

7. Proposons-nous la question: *quelles conditions doivent être remplies pour qu'on puisse poser dans les équations* (10) *de l'article précédent* $\varphi_1 = 0$ *en prenant* φ_2 *arbitrairement?*

On peut démontrer aisément, par des considérations bien simples, que la condition de l'intégrabilité de l'équation (9) est nécessaire. En effet, soit

$$D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = k\tilde{\omega}_1 \quad , \quad D_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = k\chi_1 \quad , \quad D_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = k\rho_1$$

on aura

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{D_2}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{D_3}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{D_3}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{D_1}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D_1}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{D_2}{k}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right]$$

et par suite

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_3}{k} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_2}{k}\right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{D_1}{k} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_3}{k}\right] + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{D_2}{k} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{D_1}{k}\right] = 0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{D_3}{k} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_2}{k} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{D_1}{k} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_3}{k} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{D_2}{k} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{D_1}{k} = 0.$$

C. Q. F. D.

Article 5.

1. Nous allons maintenant examiner les opérations de dérivation et d'intégration sur les fonctions des lignes qui ont une liaison d'isogénéité. C'est par là qu'on va voir comment ces recherches se rattachent à celles de M. POINCARÉ. A cet effet il faut introduire des fonctions des points de l'espace liées aux fonctions des lignes. Remarquons que la définition des fonctions des variables imaginaires peut se donner de la façon suivante: soient φ et ψ deux variables imaginaires fonctions des points d'un plan; l'une sera fonction de l'autre, si

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial (-x)} = 0.$$

Généralisons cette définition pour l'espace. Soit F une fonction des lignes et f une fonction des points de l'espace. On dira que F et f ont une liaison d'isogénéité si

$$\frac{dF}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dF}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dF}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{22}$$

On désignera toujours par des lettres majuscules les fonctions des lignes et par des lettres minuscules les fonctions des points.

2. Cela posé, il est bien aisé de démontrer les propositions suivantes:

1° *Si entre f et* F, *et entre* F *et* Φ *il y a une liaison d'isogénéité, f et Φ ont aussi une liaison d'isogénéité.*

2° *Si l'on a des fonctions f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ qui ont une liaison d'isogénéité avec* F, *il faut que*

$$\frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0 \qquad (i, r, s = 1, 2, \cdots, n). \tag{23}$$

Lorsque on aura des fonctions f_i qui remplissent les conditions (23) on dira qu'elles ont une liaison d'isogénéité entre elles.

3. Supposons que les fonctions Φ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ soient isogènes et que f ait une liaison d'isogénéité avec Φ_i, on aura

$$\frac{d\Phi_i}{d(y,z)}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d\Phi_i}{d(z,x)}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d\Phi_i}{d(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

On pourra donc (voir chap. I, art. 5) déterminer des fonctions φ_i, telles que

$$(24) \qquad \frac{d\Phi_i}{d(y,z)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(y,z)} \quad , \quad \frac{d\Phi_i}{d(z,x)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(z,x)} \quad , \quad \frac{d\Phi_i}{d(x,y)} = \frac{d(f,\varphi_i)}{d(x,y)}$$

et il y aura une liaison d'isogénéité entre φ_i et Φ_i.

Réciproquement soient φ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ des fonctions ayant une liaison d'isogénéité. Posons

$$\frac{d(\varphi_i,\varphi_s)}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{i,s} \quad , \quad \frac{d(\varphi_i,\varphi_s)}{d(z,x)} = \chi_{i,s} \quad , \quad \frac{d(\varphi_i,\varphi_s)}{d(x,y)} = \rho_{i,s},$$

on aura

$$\frac{\partial\tilde{\omega}_{i,s}}{\partial x} + \frac{\partial\chi_{i,s}}{\partial y} + \frac{\partial\rho_{i,s}}{\partial z} = 0.$$

Par suite on pourra déterminer des fonctions $\Phi_{i,s}$ telles qu'elles satisfassent aux conditions

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d(y,z)} = \tilde{\omega}_{i,s} \quad , \quad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(z,x)} = \chi_{i,s} \quad , \quad \frac{d\Phi_{i,s}}{d(x,y)} = \rho_{i,s}.$$

Il est bien clair que les fonctions $\Phi_{i,s}$ ont entre elles et avec φ_i une liaison d'isogénéité.

4. Lorsque on a les égalités (24) on appellera la fonction Φ_i conjuguée à f et φ_i, et réciproquement les fonctions f et φ_i conjuguées à Φ_i.

Si L est une ligne dans un champ où f et φ_i sont des fonctions monodromes, on aura

$$\Phi_i\,|[\mathrm{L}]| = \int_{\mathrm{L}} \varphi_i\, df.$$

Supposons fixée la direction positive de la normale n à une surface σ; on aura

$$\frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \tilde{\omega}_{i,s} \cos nx + \chi_{i,s} \cos ny + \rho_{i,s} \cos nz.$$

Prenons sur σ des coordonnées curvilignes, telles que les directions u, v, n soient disposées comme les directions x, y, z. Si le carré de l'élément linéaire est $ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$, on aura

$$(25) \qquad \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u} \, , & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial u} \, , & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

5. Cela posé on peut examiner les opérations de dérivation et d'intégration. Supposons que Φ et F soient isogènes. Posons

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(y,z)} = p \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(z,x)} = q \quad , \quad \frac{d\mathrm{F}}{d(x,y)} = r,$$

$$\frac{d\Phi}{d(y,z)} = \tilde{\omega} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(z,x)} = \chi \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x,y)} = \rho;$$

on aura

$$\frac{\left(\dfrac{d\Phi}{d\sigma}\right)}{\left(\dfrac{dF}{d\sigma}\right)} = \frac{\tilde{\omega}}{p} = \frac{\chi}{q} = \frac{\rho}{r},$$

σ étant une surface arbitraire. Nous désignerons le rapport qu'on vient de trouver et qui ne dépend pas de la direction $d\sigma$ par le symbole $d\Phi/dF$ et nous l'appellerons *la dérivée de* Φ *par rapport à* F. Cette dérivée est une fonction des points de l'espace. On peut démontrer que *la dérivée de* Φ *par rapport à* F *et les fonctions* F *et* Φ *ont une liaison d'isogénéité.*

En effet posons

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi,$$

on aura

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} - \varphi\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \quad q\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\chi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial q}{\partial y} \quad , \quad r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\rho}{\partial z} - \varphi\frac{\partial r}{\partial z};$$

par suite

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \left(\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x} + \frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\right) - \varphi\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) = 0.$$

6. Supposons que f et F aient une liaison d'isogénéité. Soit σ une surface. Lorsque on a établi la direction de la normale n, le signe de $dF/d\sigma$ est déterminé. La quantité

$$\int_\sigma f\frac{dF}{d\sigma}d\sigma$$

est donc tout à fait définie. Nous la désignerons par le symbole

$$\int_\sigma f dF.$$

Si on change la direction positive de la normale, le signe dont est affectée l'intégrale change aussi. Si la surface n'est pas fermée nous conserverons entre la direction de la normale et les directions des contours la relation établie au 1[er] chapitre. Dans ce cas, par conséquent, la direction des contours donne le signe de l'intégrale.

Si, au contraire, σ est une surface fermée formant la limite d'un champ S dans lequel ni f ni F n'ont de singularités, nous aurons

$$\begin{aligned}\int_\sigma f dF &= \int_\sigma f\left(\frac{dF}{d(y,z)}\cos nx + \frac{dF}{d(z,x)}\cos ny + \frac{dF}{d(x,y)}\cos nz\right)d\sigma \\ &= \int_S \left\{ f\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{dF}{d(y,z)} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{dF}{d(z,x)} + \frac{\partial}{\partial z}\,\frac{dF}{d(x,y)}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dF}{d(x,z)} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dF}{d(z,x)} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{dF}{d(x,y)}\right\} dS = 0.\end{aligned}$$

On a donc le théorème exprimé par la formule

$$\int_\sigma f\,dF = 0. \tag{26}$$

Si le champ S n'est pas limité par une seule surface, mais par les surfaces σ_i $(i = 1, \cdots, n)$, on aura

$$\sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} f\,dF = 0. \tag{26'}$$

Le théorème exprimé par les formules (26), (26') *est une généralisation du théorème de* CAUCHY.

7. Supposons que les fonctions φ_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ aient une liaison d'isogénéité. On pourra écrire

$$I = \int_\sigma \varphi_r\, d\Phi_{i,s} = \int_\sigma \varphi_r \frac{d\Phi_{i,s}}{d\sigma} d\sigma = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial u} & , & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial v} & , & \dfrac{\partial\varphi_s}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv, \tag{27}$$

u, v étant des coordonnées curvilignes dont les directions par rapport à celle de la normale n sont disposées comme on a établi au § 4. En posant

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial u} du = d\varphi_i \quad , \quad \frac{\partial\varphi_s}{\partial u} du = d\varphi_s ,$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial v} dv = \delta\varphi_i \quad , \quad \frac{\partial\varphi_s}{\partial v} dv = \delta\varphi_s ,$$

on aura

$$I = \int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i & , & d\varphi_s \\ \delta\varphi_i & , & \delta\varphi_s \end{vmatrix}.$$

Si σ est une surface fermée qui renferme un champ S où il n'y a pas de singularités des fonctions φ_i, on aura

$$\int_\sigma \varphi_r \begin{vmatrix} d\varphi_i & , & d\varphi_s \\ \delta\varphi_i & , & \delta\varphi_s \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Voilà une nouvelle expression du théorème de CAUCHY *généralisé.*

8. Retranchons par des surfaces fermées les parties du champ où les fonctions f et F ont des singularités. Par des *sections linéaires* on restitue au champ la connection superficielle simple. Cela posé, il est clair que toute surface fermée sera la limite d'un champ où f et F n'ont pas de singularités. Soient L_0 et L_1 deux lignes fermées dont la direction est connue. Appelons

— L_0 une ligne qui coïncide avec L_0 mais qui est prise dans la direction contraire de L_0. Supposons que, dans l'espace *sectionné*, on puisse mener une surface par $-L_0$ et L_1 (voir chap. I, art, 2, § 3).

Prenons la direction de la normale n à σ par rapport aux directions des lignes $-L_0$ et L_1 de la manière qu'on l'a établi (voir chap. I, art. 3, § 3). L'intégrale

$$\int_\sigma f dF \tag{29}$$

sera déterminée. Il est aisé de démontrer que *la valeur de l'intégrale* (29) *ne dépend pas de la surface* σ, *mais dépend seulement des lignes* L_0 *et* L_1. En effet si l'on mène par $-L_0$ et L_1 une surface σ_1 qui ne coïncide pas avec σ, les surfaces σ *et* σ_1 formeront une ou plusieurs surfaces fermées. Par suite

$$\int_{\sigma+\sigma_1} f dF = 0,$$

d'où résulte la propriété énoncée. C'est pourquoi l'intégrale (29) peut être désignée par

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF. \tag{30}$$

En changeant la direction de la normale n on change aussi le signe de l'intégrale. Par suite

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = -\int_{L_1}^{L_0} f dF.$$

Supposons qu'on rend la courbe L_0 fixe, en laissant L_1 variable; l'intégrale (30) deviendra une fonction de la ligne L_1. On pourra donc écrire

$$\int_{L_0}^{L_1} f dF = \Phi \,|[L_1]|\,.$$

Φ et F ont une liaison d'isogénéité et on aura

$$\frac{d\Phi}{dF} = f.$$

Cela démontre que *la dérivation* et *l'intégration*, telles qu'on vient de les définir, *sont deux opérations inverses*.

De même si les fonctions φ_i ont une liaison d'isogénéité, on aura

$$\int_{L_0}^{L_1} \varphi_i \begin{vmatrix} d\varphi_s & , & d\varphi_r \\ \delta\varphi_s & , & \delta\varphi_r \end{vmatrix} = \Psi \,|[L_1]|$$

et $\Psi \,|[L_1]|$ aura une liaison d'isogénéité avec les fonctions φ_i.

Soient f et φ deux fonctions conjuguées à la fonction F, ou pourra écrire

$$F\,|[L_1]| - F\,|[L_0]| = \int_{L_1}^{L_0} \begin{vmatrix} df & , & d\varphi \\ \delta f & , & \delta\varphi \end{vmatrix} .$$

Nous avons achevé le mémoire en montrant dans le dernier article que, lorsqu'on a un système de fonctions de lignes qui ont une liaison d'isogénéité, on obtient par le procédé de la dérivation des fonctions de points f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ qui sont liées par les relations

$$\frac{d(f_i, f_r, f_s)}{d(x, y, z)} = 0.$$

C'est pour cela que les variables f_i, f_r, f_s doivent êtres liées par des relations

$$\text{(P)} \qquad \varphi_{i,r,s}\,(f_i, f_r, f_s) = 0.$$

Réciproquement si on a des variables liées par des relations (P), il est bien aisé de voir qu'il y a entre elles une liaison d'isogénéité. Voilà le point par où ces recherches se rattachent à celles de M. POINCARÉ. Le théorème que nous avons énoncé au § 7, de l'article 5 est équivalent au théorème donné par M. POINCARÉ dans le mémoire sur les résidus des intégrales doubles.

On voit même aisément comment les fonctions des lignes peuvent se rattacher à une généralisation des intégrales abéliennes. Mais je crois qu'avant d'aborder une telle question il est utile, pour n'être pas obligé de traiter des cas particuliers, d'étendre aux hyperespaces les considérations que je viens d'exposer. Ce n'est pas là une généralisation où il n'y aurait qu'un pas à faire pour atteindre le but. On trouve au contraire quelques difficultés. En premier lieu, dans un espace à n dimensions on doit considérer des fonctions des espaces à $1, 2, \cdots, n-1$ dimensions. En second lieu, tandis que les systèmes d'équations (9) (chap. I, art. 5) peuvent toujours s'intégrer, les systèmes analogues qu'on trouve lorsqu'on étend la question aux hyperespaces n'ont pas toujours des intégrales communes. Pour traiter la question dans le cas général, il faut recourir à la théorie des intégrales communes aux systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles. Il faut que certaines conditions soient remplies, afin que les fonctions du 1^er^ degré des hyperespaces puissent s'obtenir par l'intégration des fonctions des points, tandis que pour les fonctions des lignes dans l'espace les formules du § 8 sont toujours vérifiées. On voit donc que, dans le cas des hyperespaces, on doit trouver des catégories de fonctions qui ne se présentent pas dans le cas des espaces ordinaires.

XXIII.

DELLE VARIABILI COMPLESSE NEGLI IPERSPAZI

Nota I.

« Rend. Accad. dei Lincei », ser. IV, vol. V_1, 1889_1; pp. 158–165.

1. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare a cotesta Accademia, ho considerato prima le funzioni dipendenti da altre funzioni, poi quelle dipendenti da linee, e da ultimo ho rivolto tali ricerche alla estensione della teoria delle funzioni di variabili complesse negli spazî a tre dimensioni (1).

Quest'ultimo studio è relativo a variabili complesse dipendenti dalle linee di un campo a tre dimensioni legate fra loro da una condizione analoga a quella di *monogeneità* ed è uno studio preliminare necessario per la estensione della teoria di RIEMANN sugli integrali abeliani agli integrali multipli. Ciò si comprende osservando che la integrazione di funzioni di due variabili complesse dà luogo ad integrali estesi a superficie. Ora per questi integrali, come ha dimostrato POINCARÉ, vale il teorema analogo a quello di CAUCHY; perciò gli integrali stessi debbono dipendere dalle linee che limitano le superficie di integrazione. La integrazione doppia deve dunque condurre a considerare quelle funzioni che ho denominato funzioni di linee.

2. Però, come si vede facilmente, limitandosi alla estensione agli spazî a tre dimensioni si viene a restringere lo studio degli integrali multipli ad un caso molto particolare. Perciò ho creduto opportuno di generalizzare i risultati trovati agli iperspazî; in tal modo si viene a prendere in esame il caso più generale degli integrali multipli.

Mi permetto di presentare succintamente a cotesta Accademia alcuni dei resultati ottenuti nello studio generale che ho fatto delle variabili complesse negli iperspazî. Allorché si passa dallo spazio ordinario agli iperspazî non basta considerare delle funzioni di linee, ma bisogna esaminare le funzioni degli iperspazî immersi nello spazio totale. Quindi, se ci riferiamo ad uno spazio ad n dimensioni, dovremo considerare delle funzioni degli spazî a $0, 1, \cdots, n-1$ dimensioni in esso immersi. Onde procedere allo studio delle funzioni di iperspazî è necessario, innanzi tutto, estendere a queste funzioni i concetti di continuità e di derivazione.

(1) « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », vol. III_2, 1887, fasc. 4, 6, 7, 9, 10; vol. IV_1, 1888, fasc. 3, 5. [In questo vol.: XVII, XVIII, XIX, pp. 294–350].

3. Ecco come si ottiene questa estensione. Una variabile φ si dirà *funzione* degli iperspazî S_r (ad r dimensioni) immersi in un iperspazio S_n se ad ogni possibile iperspazio S_r entro S_n, avente una certa direzione (2), corrisponderà un valore di φ. Questa dipendenza si denoterà col simbolo $\varphi = \varphi \,|[S_r]|$. Supporremo di considerare sempre degli iperspazî *chiusi*. Scelto un punto P di S_r si conduca per esso un iperspazio S_{n-r} normale ad S_r ed in S_{n-r} si prenda un intorno s di P. Facciamo percorrere a P tutti i punti di S_r; avremo che s genererà una porzione di spazio ad n dimensioni che si chiamerà un intorno di S_r. Consideriamo un punto P' di s: mentre P

(2) La parola *direzione* attribuita ad un iperspazio va intesa nel modo seguente. Un iperspazio (ad n dimensioni) è caratterizzato dalla varietà di valori di n variabili indipendenti $x_1, x_2 \cdots x_n$. Un iperspazio S_r ad r dimensioni ($r < n$) in esso immerso corrisponde alla varietà di valori che assumono le $x_1, x_2 \cdots x_n$, quando esse sono legate fra loro da $n-r$ relazioni indipendenti, ovvero quando esse dipendono da r variabili indipendenti $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r$ a cui sono legate da n relazioni

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r) \qquad i - 1, 2 \cdots n.$$

Ammessa la differenziabilità delle precedenti relazioni formiamo la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_1}, \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_1}, \cdots \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \omega_r}, \dfrac{\partial x_2}{\partial \omega_r}, \cdots \dfrac{\partial x_n}{\partial \omega_r} \end{matrix} \right\|.$$

Sia Δ^2 il quadrato di questa matrice; ammetteremo che esso sia tale che fissato in un punto il segno di Δ, il segno stesso, per la continuità, resti fissato in tutti i punti. Quando si sarà stabilito il segno di Δ, si dirà che si è stabilita la *direzione* dell'iperspazio S_r. La quantità $dS = \Delta d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_r$ si dirà l'*elemento dell'iperspazio*. Prendiamo un determinante minore della matrice

$$\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \Sigma \pm \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} \cdots \frac{\partial x_{i_r}}{\partial \omega_r}$$

e formiamo $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r} = \dfrac{\Delta_{i_1 i_2 \cdots i_r}}{\Delta}$. Le $\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ non muteranno sostituendo alle $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r$ altre variabili legate alle prime da relazioni qualunque, e il segno delle α cambierà mutando la direzione dell'iperspazio: esse si chiameranno i *coseni di direzione* dell'iperspazio, e soddisfaranno alle relazioni seguenti

$$\sum\nolimits_i \alpha^2_{i_1 i_2 \cdots i_r} = 1,$$

$$\sum_s^{r+1} (-1)^s \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}} \alpha_{i_s h_2 \cdots h_r} = 0$$

in cui Σ_i è una somma estesa a tutte le combinazioni degli indici $i_1 i_2 \cdots i_r$. Se uno spazio S_{n-r} ad $n-r$ dimensioni ha i coseni $\beta_{h_1 \cdots h_{n-r}}$ e in un punto comune con S_r si ha $\alpha_{i_1 \cdots i_r} = \beta_{h_1 \cdots h_{n-r}}$, essendo tutte le i differenti dalle h e la serie di numeri $i_1 \cdots i_r h_1 \cdots h_{n-r}$ una permutazione sempre pari o sempre dispari dei numeri $1, 2 \cdots n$, si dirà che i due iperspazî S_r e S_{n-r} sono fra loro normali.

descrive S_r, P' descriverà un nuovo iperspazio S'_r che si dirà appartenere all'intorno di S_r. La funzione $\varphi \mid [S_r] \mid$ sarà continua se, preso un numero σ piccolo ad arbitrio, si potrà trovare un intorno di S_r, tale che

$$\operatorname{mod} [\varphi \mid [S'_r] \mid - \varphi \mid [S_r] \mid] < \sigma,$$

appartenendo S'_r all'intorno scelto.

Oltre alla continuità di $\varphi \mid [S_r] \mid$ ammetteremo soddisfatta la seguente condizione. Si passi dall'iperspazio S_r all'iperspazio S'_r dando ad ogni punto di S_r uno spostamento ε variabile con continuità da punto a punto. Il luogo degli intervalli ε è un iperspazio ad $r + 1$ dimensioni di ampiezza σ.

Ammetteremo che si possa rendere $\operatorname{mod} [\varphi \mid [S'_r] \mid - \varphi \mid [S_r] \mid]$ minore di un numero scelto ad arbitrio, purché σ sia minore di un certo valore σ_0.

4. Ciò premesso, preso in S_r un intorno s di un punto P, diamo ad s uno spostamento di ampiezza δx_i parallelamente ad x_i. Denotiamo con $\delta\varphi$ la variazione corrispondente di φ.

Supporremo che esista

$$\lim_{\substack{s=0 \\ \delta x_i = 0}} \frac{\delta\varphi}{s \cdot \delta x_i} = \varphi'_{x_i} \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Chiameremo φ'_{x_i} la *derivata* di φ *rispetto ad* x_i *nel punto* P *relativa ad* S_r. Ammettendo che il rapporto che comparisce nel primo membro della equazione precedente tenda uniformemente verso il suo limite, rispetto a tutti i possibili punti P ed iperspazî S_r, e ammettendo inoltre che questo limite sia continuo, si ha facilmente che, dando ad ogni punto di S_r uno spostamento risultante di $\delta x_1, \delta x_2 \cdots \delta x_n$, la variazione corrispondente di φ è data, a meno di infinitesimi d'ordine superiore alle δx_i, da

$$(1) \qquad \delta\varphi = \int_{S_r} \sum_{1}^{n}{}_i \, \varphi'_{x_i} \delta x_i \, dS_r .$$

Le φ'_{x_i} debbono soddisfare alla condizione che per tutti quei sistemi di spostamenti δx_i che portano lo spazio S_r in sè stesso, $\delta\varphi$ deve risultare nullo. Mediante questa osservazione si trova che le φ'_{x_i}, possono esprimersi mediante dei paramenti $\lambda_{q_1, q_2 \cdots q_{r+1}}$ che soddisfano alla condizione di cambiar segno per ogni trasposizione degli indici, nella maniera seguente:

$$(2) \qquad \varphi'_{x_i} = \Sigma_q \, \lambda_{i, q_1 \cdots q_r} \, \alpha_{q_1 q_2 \cdots q_r},$$

in cui Σ_q è estesa a tutte le combinazioni degli indici $q_1 \cdots q_r$ e $\alpha_{q_1 q_2 \cdots q_r}$ sono i coseni di direzione dell'iperspazio S_r. I parametri $\lambda_{q_1 \cdots q_{r+1}}$, oltre a dipendere dall'iperspazio S_r, dipendono anche dal punto in cui si prende la derivata.

5. Siano S'_r e S''_r due iperspazî aventi una porzione s a comune, la cui direzione sia differente, secondoché si ritiene appartenente al primo o al secondo iperspazio. Denotiamo con S'''_r l'iperspazio che si ottiene togliendo s dall'insieme di S'_r e S''_r e che ha per direzione quella dei due iperspazî.

Se è soddisfatta la condizione

$$\varphi \mid [S'''_r] \mid = \varphi \mid [S'_r] \mid + \varphi \mid [S''_r] \mid$$

diremo che φ è di *primo grado* (semplice). Quando è soddisfatta la precedente condizione si ha immediatamente che, se l'ampiezza di S_r diminuisce indefinitamente,

$$\lim \varphi \mid [S_r] \mid = 0. \tag{3}$$

Si può inoltre dimostrare il seguente teorema:

Se φ è una funzione di primo grado degli iperspazî S_r, immersi in un iperspazio S_n, esistono per ogni punto di S_n un sistema di valori che possono prendersi come parametri $\lambda_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}}$ per tutti gli iperspazî che passano per quel punto.

Dalle formule (1), (2) e (3), denotando con $\Lambda_{q_1, q_2 \dots q_{r+1}}$, questi valori indipendenti da S_r che possono prendersi come parametri $\lambda_{q_1, q_2 \dots q_{r+1}}$, si ha la formula

$$\varphi \mid [S_r] \mid = \int_{S_{r+1}} \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}} dS_{r+1}$$

in cui S_{r+1} è un iperspazio aperto ad $r+1$ dimensioni limitato dall'iperspazio S_r, e avente $\beta_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}}$ per coseni di direzione.

Se S_{r+1} si impiccolisce indefinitamente riducendosi ad un punto P, posto

$$S_{r+1} = \int_{S_{r+1}} dS_{r+1},$$

si avrà

$$\lim \frac{\varphi \mid [S_{r+1}] \mid}{S_{r+1}} = \Sigma_q \Lambda_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}} \beta_{q_1 q_2 \dots q_{r+1}} = \frac{d\varphi}{dS_{r+1}}$$

in cui le β rappresentano i coseni di direzione di S_{r+1} in P. Prendiamo S_{r+1} tale che in P tutti i coseni β siano nulli, eccettuato $\beta_{i_1 i_2 \dots i_{r+1}} = 1$; avremo

$$\lim \frac{\varphi \mid [S_{r+1}] \mid}{S_{r+1}} = \Lambda_{i_1, i_2 \dots i_{r+1}}.$$

Perciò porremo

$$\Lambda_{i_1 i_2 \dots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}})}$$

e la chiameremo la *derivata di φ rispetto a $x_{i_1}, x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}}$*.

6. Per procedere alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare queste derivate è necessario estendere il teorema di STOKES al caso degli iperspazî. Una tale estensione si ottiene senza dif-

ficoltà. Siano $L_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ delle funzioni *dei punti* di un iperspazio S_n finite e continue insieme alle loro derivate prime e tali che ogni trasposizione degli indici ne muti il segno.

Si formi

$$M_{i_1, i_2 \ldots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial L_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} .$$

Denotiamo con S_r il contorno di un iperspazio S_{r+1} ad $r+1$ dimensioni aperto ed immerso in S_n; con $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}}$ i coseni di direzione di S_{r+1} e con $\beta_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ quelli di S_r.

La estensione del teorema di STOKES consiste nella formula seguente

$$\int_{S_{r+1}} \Sigma_i M_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{r+1}} dS_{r+1} = \int_{S_r} \Sigma_i L_{i_1 i_2 \ldots i_r} \beta_{i_1 i_2 \ldots i_r} dS_r .$$

Così stabilita questa formula fondamentale, se ne deduce che le condizioni *necessarie* e *sufficienti* a cui debbono soddisfare le derivate di una funzione di primo grado $\varphi\,|\,[S_r]\,|$ sono le seguenti:

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})} = 0 \cdot$$

Queste condizioni si chiameranno le *condizioni di integrabilità* a cui debbono soddisfare le derivate di una funzione di primo grado.

7. Adottiamo il simbolo $\frac{d(y_1 y_2 \cdots y_n)}{d(x_1 x_2 \cdots x_n)}$ per denotare il determinante funzionale delle variabili y rispetto alle variabili x. Le formule ad un cambiamento di variabili per le funzioni di iperspazî possono allora scriversi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x'_{h_1} x'_{h_2} \cdots x'_{h_{r+1}})} = \Sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} \frac{d(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})}{d(x'_{h_1} x'_{h_2} \cdots x'_{h_{r+1}})} .$$

8. Passiamo ora ad estendere alle funzioni di iperspazî il concetto fondamentale della *monogeneità*. A tal fine basterà considerare due funzioni f e φ complesse e di primo grado degli iperspazî S_r immersi in S_n, tali che, in un punto P qualunque dell'iperspazio totale S_n, il rapporto

$$\frac{d\varphi}{dS_{r+1}} : \frac{df}{dS_{r+1}}$$

dipenda da P soltanto. Il collegamento fra le due funzioni f e φ espresso dalla precedente condizione si dirà un *collegamento di isogeneità* o altrimenti si diranno *isogene* le due variabili complesse f e φ.

Poniamo, col separare le parti reali dalle immaginarie,

$$\frac{\partial f}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \ldots i_{r+1}} + i q_{i_1 \ldots i_{r+1}} = p_1 + i q_1 ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \tilde{\omega}_{i_1 \ldots i_{r+1}} + i \chi_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \tilde{\omega}_1 + i \chi_1 ,$$

denotando l'insieme degli indici $i_1 \cdots i_{r+1}$ con I, cioè ponendo $(i_1 i_2 \cdots i_{r+1}) \equiv \mathrm{I}$.

La condizione necessaria e sufficiente affinché f e φ siano *isogene* sarà

$$\frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} + i\chi_{\mathrm{I}}}{p_{\mathrm{I}} + iq_{\mathrm{I}}} = \frac{\tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + i\chi_{\mathrm{H}}}{p_{\mathrm{H}} + iq_{\mathrm{H}}}$$

essendo $\mathrm{H} \equiv (h_1, h_2 \cdots h_n)$ un'altra combinazione qualunque degli indici. Dalla equazione precedente si deduce

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} - \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} p_{\mathrm{I}} &= \chi_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - \chi_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}} &= \chi_{\mathrm{H}} p_{\mathrm{I}} - \chi_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} . \end{aligned} \right.$$

Poniamo

$$p_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} = \mathrm{E}_{\mathrm{I},\mathrm{H}}$$

$$p_{\mathrm{I}} q_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{H}} q_{\mathrm{I}} = \mathrm{D}_{\mathrm{I},\mathrm{H}} .$$

Fra le E e D passeranno le relazioni

$$\mathrm{D}_{\mathrm{IH}} \mathrm{E}_{\mathrm{LK}} + \mathrm{E}_{\mathrm{HK}} \mathrm{E}_{\mathrm{LI}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}} \mathrm{E}_{\mathrm{LH}} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{E}_{\mathrm{IH}} , \mathrm{E}_{\mathrm{IL}} \\ \mathrm{E}_{\mathrm{KH}} , \mathrm{E}_{\mathrm{KL}} \end{vmatrix} = \mathrm{D}_{\mathrm{IK}} \mathrm{D}_{\mathrm{HL}} .$$

Risolvendo le (4) rispetto a $\tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$ e χ_{I} si otterrà

$$(5) \qquad \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}} \chi_{\mathrm{L}} - \mathrm{E}_{\mathrm{II}} \chi_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{HI}}} \quad , \quad \chi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} - \mathrm{E}_{\mathrm{II}} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{IH}}} .$$

Osservando ora che il primo membro delle precedenti equazioni è indipendente da H, mediante un calcolo semplice avremo

$$\tilde{\omega}_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}} \chi_{\mathrm{K}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}} \chi_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{HK}}} \quad , \quad \chi_{\mathrm{I}} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}} \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{KH}}} .$$

Dalle formule precedenti si deduce che, comunque si prendano I, H, K, si ha sempre

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{D}_{\mathrm{HK}} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + \mathrm{D}_{\mathrm{IH}} \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} &= 0 \\ \mathrm{D}_{\mathrm{HK}} \chi_{\mathrm{I}} + \mathrm{D}_{\mathrm{KI}} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} + \mathrm{D}_{\mathrm{IH}} \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} &= 0 . \end{aligned} \right.$$

9. Riprendiamo le equazioni (5); da esse si deduce

$$(7) \qquad \Theta_{\mathrm{IL}} = \frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} , \chi_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{L}} , \chi_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{IH}} \chi_{\mathrm{K}} \chi_{\mathrm{L}} - \mathrm{E}_{\mathrm{IK}} \chi_{\mathrm{H}} \chi_{\mathrm{L}} + \mathrm{E}_{\mathrm{LK}} \chi_{\mathrm{H}} \chi_{\mathrm{I}} - \mathrm{E}_{\mathrm{LH}} \chi_{\mathrm{K}} \chi_{\mathrm{I}}}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}} \mathrm{D}_{\mathrm{HK}}} .$$

Scambiando I con H e L con K, l'ultimo membro della equazione precedente non muta. Quindi avremo

$$\frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{I}} , \chi_{\mathrm{I}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{L}} , \chi_{\mathrm{L}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathrm{D}_{\mathrm{HK}}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_{\mathrm{H}} , \chi_{\mathrm{H}} \\ \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} , \chi_{\mathrm{K}} \end{vmatrix}$$

vale a dire le Θ_{IL} sono indipendenti da I e da L e perciò le denoteremo tutte con Θ. Prendiamo nella (7) $\mathrm{I} \equiv \mathrm{H}$, $\mathrm{L} \equiv \mathrm{K}$; si avrà

$$\Theta = \frac{\mathrm{E}_{\mathrm{II}} \chi_{\mathrm{L}}^2 - 2\, \mathrm{E}_{\mathrm{IL}} \chi_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{L}} + \mathrm{E}_{\mathrm{LL}} \chi_{\mathrm{I}}^2}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}^2} = \frac{(p_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{L}} - p_{\mathrm{L}} \chi_{\mathrm{I}})^2 + (q_{\mathrm{I}} \chi_{\mathrm{L}} - q_{\mathrm{L}} \chi_{\mathrm{I}})^2}{\mathrm{D}_{\mathrm{IL}}^2} .$$

Questa formula dimostra che Θ è una quantità *positiva*.

Scambiando nella (7) $\tilde{\omega}$ con χ e p con q, la Θ non muta; avremo quindi per Θ l'altra espressione

$$\Theta = \frac{E_{IH}\,\tilde{\omega}_K\,\tilde{\omega}_L - E_{IK}\,\tilde{\omega}_H\,\tilde{\omega}_L + E_{LK}\,\tilde{\omega}_H\,\tilde{\omega}_I - E_{LH}\,\tilde{\omega}_K\,\tilde{\omega}_I}{D_{IL}\,D_{HK}}\,.$$

Separiamo in $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$ la parte reale da quella immaginaria, e poniamo, adoperando i simboli già introdotti,

$$\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial (x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial (x_I)}$$

$$\chi_I = \chi_{i_1 \ldots i_{r+1}} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial (x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial (x_I)}$$

ove (x_I) sostituisce $(x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})$, ponendo cioè $(x_I) \equiv (x_{i_1}\,x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})$. Le espressioni di Θ potranno scriversi

$$\Theta = \frac{E_{IH}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_K)}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_L)} - E_{IK}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_H)}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_L)} + E_{LK}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_H)}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_I)} - E_{LH}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_K)}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_I)}}{D_{IL}\,D_{HK}}$$

ove in luogo di ψ può porsi tanto φ_1 quanto φ_2.

10. Teniamo ora conto che le $\tilde{\omega}$ e le χ debbono soddisfare le condizioni di integrabilità (§ 6)

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_s}\,\tilde{\omega}_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}} = 0\,, \quad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_s}\,\chi_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}} = 0;$$

avremo quindi, a cagione delle (5),

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_s} \left\{ \frac{\chi_K\,E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,H} - \chi_H\,E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,K}}{D_{HK}} \right\} = 0 \\ &\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_s} \left\{ \frac{\tilde{\omega}_K\,E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,H} - \tilde{\omega}_H\,E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,K}}{D_{HK}} \right\} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Adoperando dunque i noti simboli, si ha che tanto φ_1 quanto φ_2 dovranno soddisfare le equazioni seguenti (vedi form. 6)

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial}{\partial x_s} \left\{ \frac{E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,H}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_K)} - E_{i_1 \ldots i_{s-1}\,i_{s+1} \ldots i_{r+2}\,,\,K}\,\dfrac{\partial \psi}{\partial (x_H)}}{D_{HK}} \right\} = 0 \\ &D_{HK}\,\frac{\partial \psi}{\partial (x_I)} + D_{KI}\,\frac{\partial \psi}{\partial (x_H)} + D_{IH}\,\frac{\partial \psi}{\partial (x_K)} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Reciprocamente può dimostrarsi che se $\psi \mid [S_r] \mid$ funzione di primo grado reale soddisfa alle precedenti equazioni, essa potrà considerarsi come la parte reale di una funzione $\psi + i\theta$ che possiede un legame di isogeneità con f. Le equazioni (8) funzionano nel nostro caso come la equazione $\Delta^2 = 0$ nella ordinaria teoria delle funzioni di variabile complessa e le equazioni (E) da me date nella Nota I cit. *Sopra una estensione della teoria di Riemann* ecc.

11. La parte della teoria esposta sino a questo punto si mostra del tutto simile a quella che diedi già nelle Note citate per le funzioni di linee nello spazio ordinario. Però se si cercano le condizioni necessarie pel collegamento di isogeneità risulta chiaramente la differenza che passa fra il modo di comportarsi delle funzioni di linee nello spazio ordinario e quello delle funzioni generali negli iperspazî. Infatti mentre per le prime fu trovato che le dette condizioni si riducono solo a quella di essere funzioni di primo grado (semplici), per le altre una tale condizione non risulta più sufficiente.

Una funzione di primo grado negli iperspazî è suscettibile del collegamento di isogeneità solo quando esistono integrali comuni ad un certo sistema di equazioni lineari e omogenee alle derivate parziali.

La esposizione dello studio di un tale sistema, della estensione del collegamento di isogeneità fra funzioni di spazî di un numero diverso di dimensioni e finalmente la estensione al caso generale del teorema di CAUCHY spero potranno formare argomento di un'altra Nota.

Nota II.

Ibidem, pp. 291–299.

1. Alla fine di una Nota, che ebbi l'onore di presentare nella seduta precedente, ho accennato che nel cercare le condizioni necessarie pel collegamento di isogeneità risulta la differenza che passa fra il modo di comportarsi delle funzioni di linee nello spazio ordinario e quello delle funzioni generali negli iperspazî.

Abbiansi infatti due funzioni $F\,|\,[S_r]\,|$, $\Phi\,|\,[S_r]\,|$ isogene; posto

$$(1)\qquad \frac{dF}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1\cdots i_{r+1}}\quad,\quad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r+1}})} = \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{r+1}},$$

dovremo avere

$$(2)\qquad \frac{\tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{r+1}}}{p_{i_1\cdots i_{r+1}}} = f,$$

ove f è una funzione dei punti dell'iperspazio totale indipendente dagli indici $i_1\ldots i_{r+1}$. Ne segue che

$$(3)\qquad \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{r+1}} = f p_{i_1\cdots i_{r+1}},$$

onde

$$(4)\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s+1}\cdots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Se ne conclude che *affinché* F *sia collegabile in modo isogeno ad altre funzioni, è necessario e sufficiente che esista un integrale comune al sistema di equazioni differenziali lineari simultanee* (4).

2. Denotiamo con $H_{i_1 i_2\cdots i_{r+2}}$ i primi membri delle equazioni (4). È facile dimostrare il teorema:

Se, oltre alle condizioni di integrabilità

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

le p soddisfano alle altre condizioni

$$(5)\qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_s h_1\cdots h_r} p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+2}} = 0,$$

il sistema di equazioni differenziali

$$(6)\qquad H_{i_1 i_2\cdots i_{r+2}} = 0,$$

è un sistema completo.

La dimostrazione si fa osservando: 1° che se $p_{i_1 i_2 \cdots i_{r+1}}$ è diversa da zero, tutte le equazioni (6) sono una conseguenza delle equazioni indipendenti fra loro

$$(7) \qquad H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_1} = 0 \quad , \quad H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_2} = 0 , \cdots , H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_{n-r-1}} = 0 ,$$

in cui le $h_1, h_2, \cdots h_{n-r-1}$ sono differenti fra loro e dalle i; 2° che le funzioni alternate del POISSON

$$(H_{i_1 \cdots i_{r+1} h_t} \quad , \quad H_{i_1 \cdots i_{r+1}, h_v})$$

sono identicamente eguali a zero, cioè che il sistema (7) è Jacobiano.

Quando sono soddisfatte le (5), la funzione $F \mid [S_r] \mid$ si chiamerà *elementare*.

Il sistema (6), ovvero il sistema (7), dovrà ammettere $r + 1$ integrali indipendenti

$$\varphi , \varphi_1 , \varphi_2 \cdots \varphi_r .$$

Ne segue che il rapporto

$$\theta = \frac{p_{i_1 \cdots i_{r+1}}}{\left[\dfrac{d(\varphi , \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{r+1}})}\right]}$$

dovrà essere indipendente dagli indici $i_1 i_2 \ldots i_{r+1}$. Ora applicando la (4), dalla equazione precedente segue che

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial\theta}{\partial x_{i_s}} \frac{d(\varphi , \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+1}})} = 0 .$$

θ dovrà dunque essere una funzione di φ, $\varphi_1 \cdots \varphi_r$, e posto $\dfrac{\partial\varphi_0}{\partial\varphi} = 0$, avremo

$$p_{i_1 \cdots i_{r+1}} = \frac{d(\varphi_0 , \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} .$$

Si ottengono quindi i teoremi:

1° *Se* $F \mid [S_r] \mid$ *è una funzione elementare, si avrà*

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} = \frac{d(\varphi_0 , \varphi_1 , \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

ove $\varphi_0 , \varphi_1 \cdots \varphi_r$ *sono* $r + 1$ *integrali indipendenti comuni al sistema di equazioni differenziali*

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Reciprocamente:

2° *Prese* $r + 1$ *funzioni indipendenti* $\varphi_0 , \varphi_1 \cdots \varphi_r$ *e posto*

$$\frac{d(\varphi_0 , \varphi_1 \cdots \varphi_r)}{d(x_{i_1} \ldots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

avremo che le $p_{i_1 \cdots i_{r+1}}$ *saranno derivate di una funzione elementare* $F \mid [S_r] \mid$.

3° *Tutte le funzioni isogene ad una funzione elementare, sono funzioni elementari.*

Applicando alle funzioni elementari il teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES (vedi Nota precedente, art. 6), otterremo per esse l'espressione analitica

$$F \mid [S_r] \mid = \int_{S_r} \varphi \frac{d(\varphi_1, \cdots \varphi_r)}{d(\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r)} d\omega_1 d\omega_2 \cdots d\omega_r ,$$

essendo

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_r) \qquad (i = 1, 2 \cdots n)$$

le equazioni dell'iperspazio S_r.

Le funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_r$ si diranno *coniugate* alla F. Le funzioni elementari godono quindi della notevole proprietà di essere le sole funzioni coniugate ad un sistema di funzioni di punti, proprietà che nello spazio ordinario si verifica per tutte le funzioni di linee di primo grado.

3. Alle funzioni di primo grado negli iperspazî è applicabile una speciale operazione di *composizione* di cui daremo ora un cenno.

Si abbiano le due funzioni $F \mid [S_r] \mid$, e $\Phi \mid [S_{t-r}] \mid$ di primo grado e si ponga

$$\frac{dF}{d(x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} = p_{h_1 \cdots h_{r+1}} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x_{h_{r+2}} \cdots x_{h_{t+2}})} = q_{h_{r+2} \cdots h_{t+2}}$$

$$m_{i_1 \cdots i_{t+2}} = \sum_h p_{h_1 \cdots h_{r+1}} q_{h_{r+2} \cdots h_{t+2}} \tag{8}$$

in cui $h_1 \cdots h_{t+2}$ è una permutazione, sempre pari, di $i_1 \cdots i_{t+2}$ e Σ_h è una somma estesa a tutte le combinazioni dei $t+2$ indici $i_1 \cdots i_{t+2}$ $r+1$ a $r+1$. Ciò premesso si può dimostrare il teorema:

Esiste una funzione di primo grado $\Psi \mid [S_{t+1}] \mid$ *tale che*

$$\frac{d\Psi}{\partial(x_{i_1} \cdots x_{i_{t+2}})} = m_{i_1 \cdots i_{t+2}} .$$

Per denotare che fra le derivate delle tre funzioni F, Φ, Ψ, passa la relazione (8), scriveremo

$$\Psi \equiv (F, \Phi).$$

In generale, se le $F^{(t)} \mid [S_{r_t}] \mid$ sono funzioni di primo grado, intenderemo per

$$P \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots F^{(K)})$$

una funzione di iperspazî $S_R \left(R = \sum_1^K r_t + K - 1 \right)$ ottenuta mediante le seguenti operazioni

$$\Phi_2 \equiv (F^{(1)}, F^{(2)}), \Phi_3 \equiv (\Phi_2, F^{(3)}), \cdots P \equiv (\Phi_{K-1}, F^{(K)}).$$

Diremo che P è *composta* delle $F^{(1)}, F^{(2)}, \cdots F^{(K)}$. La operazione della composizione gode evidentemente della proprietà *associativa*. La inversione degli elementi $F^{(s)}$ non potrà produrre che delle mutazioni di segno. Le $F^{(s)}$ si potranno chiamare i divisori di P, per modo che, se una funzione di iperspazî non ammette altro divisore che sé stessa, potrà dirsi *prima*. È facile riconoscere che ogni funzione di primo grado che non è prima, può decomporsi in divisori primi e questa decomposizione può effettuarsi anche in più modi. Se una funzione dividerà uno dei divisori di una funzione, dividerà la funzione stessa.

Due funzioni F *e* Φ *saranno isogene quando si abbia*

$$F \equiv (\Psi, f) \quad , \quad \Phi = (\Psi, \varphi)$$

con f *e* φ *funzioni di punti ed* f *funzione di* φ. *Se* F *e* Φ *sono isogene lo saranno pure* (F, Θ) *e* (Φ, Θ). *Una funzione elementare si potrà sempre decomporre in divisori funzioni di punti.*

4. Siano F e Φ due funzioni elementari isogene. Posto

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = a_{i_1 \cdots i_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = b_{i_1 \cdots i_{r+1}} ,$$

avremo

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} b_{i_s h_1 \cdots h_r} = 0 . \tag{9}$$

Reciprocamente è facile riconoscere che, se le a e le b soddisfano alle equazioni precedenti, le due funzioni F e Φ debbono risultare elementari ed isogene. Le equazioni di condizione (9) stabiliscono dunque, per le due funzioni, qualche cosa di più che il solo legame di isogeneità fra loro. Ora le equazioni di condizione (9) possono estendersi al caso di due funzioni di iperspazî di un numero diverso di dimensioni. Si abbiano infatti le due funzioni di primo grado $F \mid [S_r] \mid$, $\Phi \mid [S_t] \mid$ con $r > t$. Poniamo

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = a_{i_1 \cdots i_{r+1}} \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})} = b_{i_1 \cdots i_{t+1}}$$

e stabiliamo che

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s a_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} b_{i_s h_1 \cdots h_t} = 0 . \tag{10}$$

Nel caso che consideriamo di $r > t$, non è sempre necessaria la condizione che le due funzioni siano elementari, affinché siano soddisfatte le precedenti equazioni. Nel caso di $r > t$, diremo che le (10) ci stabiliscono le condizioni affinché F e Φ siano *isogene*.

Si può dimostrare facilmente il seguente teorema:

Ogni funzione che ammette per divisore F *è isogena a* Φ.

5. Si abbiano due funzioni di primo grado $F \mid [S_r] \mid$, $\Phi \mid [S_r] \mid$ isogene. Avremo che

$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS_{r+1}} : \frac{dF}{dS_{r+1}}$$

dipenderà soltanto dal punto dello spazio in cui si sono prese le derivate. Sarà dunque φ una funzione dei punti dello spazio totale ad n dimensioni. Si denoterà φ col simbolo $d\Phi/dF$ e col nome di *derivata* di Φ rispetto ad F. Come teorema fondamentale si può dimostrare che *la derivata di* Φ *rispetto ad* F *è isogena alle due funzioni* Φ *ed* F.

Questa proposizione risulta immediatamente dalla formula (4) dell'art. 1, tenendo conto della definizione data nell'articolo precedente.

6. Sia ora f, funzione dei punti dello spazio totale, isogena alla $F \mid [S_r] \mid$. Fissata la direzione dell'iperspazio S_{r+1} sarà definito dF/dS_{r+1}, quindi sarà pure definito $\int\limits_{S_{r+2}} f \frac{dF}{\partial S_{r+1}} dS_{r+1}$. Questo integrale lo rappresenteremo col simbolo

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF .$$

Col cambiare la direzione dell'iperspazio S_{r+1} cambierà evidentemente il segno dell'integrale.

Si supponga che l'iperspazio S_{r+1} sia chiuso e tale che formi da solo il contorno di un iperspazio S_{r+1} immerso nell'iperspazio totale ed entro il quale né la f, né la F abbiano alcuna singolarità. Avremo

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = \int\limits_{S_{r+1}} f \Sigma \frac{\partial F}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} \alpha_{i_1 \ldots i_{r+1}} dS_{r+1} = \int\limits_{S_{r+1}} f \Sigma p_{i_1 \ldots i_{r+1}} \alpha_{i_1 \ldots i_{r+1}} dS_{r+1}$$

ove le α sono i coseni di direzione dell'iperspazio S_{r+1}. Scegliendo convenientemente la direzione dell'iperspazio S_{r+2}, i cui coseni denoteremo con $\beta_{i_1 \ldots i_{r+2}}$, ed applicando il teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES (vedi Nota precedente, art. 6), si otterrà

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma_i \beta_{i_1 \ldots i_{r+2}} \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{\partial (f p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}})}{\partial x_{i_s}} dS_{r+2} =$$

$$= \int\limits_{S_{r+2}} \Sigma_i \beta_{i_1 \ldots i_{r+2}} \left\{ \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} + \right.$$

$$\left. + f \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_{r+2} .$$

E per conseguenza

$$\int\limits_{S_{r+1}} f dF = 0. \tag{11}$$

Se invece di un solo iperspazio S_{r+1} si avranno gli iperspazî $S^{(i)}_{r+1}$ $(i = 1, 2 \cdots m)$ che limitano lo spazio S_{r+2}, entro il quale non sussistono singolarità per f e F, si avrà la formula

$$(12) \qquad \sum_1^m {}_i \int_{S^{(i)}_{r+1}} f dF = 0,$$

scegliendo convenientemente le direzioni degli iperspazî $S^{(i)}_{r+1}$. *Il teorema contenuto nelle due formule* (11) *e* (12) *non è altro che una estensione del teorema* di CAUCHY.

7. Mediante dei contorni convenienti si tolgano dall'iperspazio totale tutte le porzioni dell'iperspazio stesso in cui f e F hanno delle singolarità. Quindi si eseguiscano delle sezioni in modo che ogni iperspazio chiuso S_{r+1} possa esser preso come contorno completo di un iperspazio S_{r+2}. Si prendano due iperspazî S^0_r, S^1_r, tali che si possa condurre un iperspazio S_{r+1} avente i suddetti iperspazî per contorno.

Per il teorema ottenuto come estensione di quello di STOKES, avremo che certi integrali estesi all'iperspazio S_{r+1} potranno trasformarsi in integrali estesi ad S^0_r e S^1_r. Gli integrali dovranno essere estesi in modo, che, stabilita la direzione di S_{r+1}, restano determinate quelle di S^0_r e S^1_r, e reciprocamente, stabilite le direzioni di questi iperspazî, resta fissata quella di S_{r+1}.

Noi supporremo che le direzioni dei tre iperspazî S^0_r, S^1_r, S_{r+1} siano fra loro nella relazione voluta affinché sia ad essi applicabile la trasformazione di cui ora si è fatto parola. Ciò premesso risulta immediatamente dal teorema dimostrato nell'articolo precedente che

$$\int_{S_{r+1}} f dF$$

non muta cambiando l'iperspazio S_{r+1}, purché si conservino inalterati gli iperspazî S^0_r, S^1_r e le loro direzioni. È perciò che l'integrale precedente si scriverà

$$(13) \qquad \int_{S^1_r}^{S^1_r} f dF,$$

denotando con S^2_r un iperspazio coincidente con S^0_r, ma avente opposta direzione. Si ha immediatamente la formula

$$\int_{S^2_r}^{S^1_r} f dF = - \int_{S^1_r}^{S^2_r} f dF.$$

Se tenendo fisso l'iperspazio S_r^2 si muta l'iperspazio S_r^1, l'integrale (13) potrà ritenersi come una funzione di primo grado di S_r^1, e quindi potremo porre

$$\int_{S_r^2}^{S_r^1} f dF = \Phi \,|\, [S_r^1] \,|.$$

Oltre a ciò Φ *ed* F *saranno isogene e avremo*

$$\frac{d\Phi}{dF} = f$$

vale a dire *le due operazioni di derivazione e di integrazione nel senso considerato sono reciproche l'una all'altra.*

8. Una funzione elementare di iperspazî S_r ad r dimensioni si dirà *d'ordine r*; e diremo poi che un sistema di funzioni elementari è un *sistema isogeno d'ordine p*, quando tutte le funzioni di ordine eguale o superiore a p che si ottengono dalle funzioni del sistema mediante l'operazione della composizione (vedi art. 3) sono nulle, mentre ve ne ha di quelle d'ordine $p-1$ diverse da zero. Tutte le funzioni $\Phi \,|\, [S_t] \,|$ del sistema dovranno dipendere da certe funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_k \cdots$ dei punti dell'iperspazio totale in modo che (vedi art. 2)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})} = \frac{d(\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2} \cdots \varphi_{l_{t+1}})}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{t+1}})},$$

cioè

$$\Phi \equiv (\varphi_{l_1}, \varphi_{l_2} \cdots \varphi_{l_{t+1}}).$$

Si hanno con facilità i teoremi seguenti:

1° *La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema isogeno sia d'ordine r, è che si abbia*

$$\frac{d(\varphi_{l_1} \cdots \varphi_{l_{r+1}})}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r+1}})} = 0 \tag{14}$$

per ogni possibile combinazione degli indici $l_1 \cdots l_{r+1}, i_1 \cdots i_{r+1}$.

2° *Una funzione del sistema d'ordine* $r-1$ *è sempre isogena ad una altra funzione qualunque del sistema.*

3° *Ogni funzione del sistema d'ordine* $r-1$ *ammette come divisore un'altra funzione qualunque del sistema d'ordine inferiore.*

Consideriamo in particolare le funzioni di punti $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_k \cdots$; esse potranno considerarsi come funzioni appartenenti al sistema zero.

A cagione delle relazioni (14) può dedursi:

Fra le funzioni del sistema d'ordine zero debbono esisterne, r, $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$, *indipendenti, di cui tutte le altre sono funzioni*, e, reciprocamente, *ogni funzione d'ordine zero ottenuta prendendo una funzione arbitraria di quelle r indipendenti, apparterrà al sistema.*

Le $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ potranno chiamarsi le *variabili indipendenti del sistema isogeno.*

Se dunque teniamo conto dei teoremi sopra dimostrati e di quello dell'art. 5 potremo dedurre che, se $\Phi \mid [S_{r-1}] \mid$, $F \mid [S_{r-1}] \mid$ appartengono al sistema, si ha

$$\frac{d\Phi}{dF} = \varphi(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r),$$

ove φ è una certa funzione delle r funzioni indipendenti d'ordine zero del sistema $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$.

Se f è una funzione arbitraria di $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ avremo

$$\int_{S_r} f dF = 0, \tag{15}$$

ove S_r, è uno spazio chiuso che forma il contorno completo di uno spazio S_{r+1} entro il quale f e F non hanno alcuna singolarità. Se

$$F \equiv (\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)$$

la equazione precedente (15) potrà scriversi

$$\int_{S_r} f \frac{d(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{d(\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_r)} d\omega_1 \, d\omega_2 \cdots d\omega_r = 0, \tag{16}$$

supponendo di porre le equazioni dell'iperspazio S_r sotto la forma

$$x_i = x_i(\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_r).$$

Posto

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial \omega_s} d\omega_s = d_s \varphi_t,$$

la (16) potrà porsi sotto la forma

$$\int_{S_r} F(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r) \begin{vmatrix} d_1 \varphi_1, d_2 \varphi_1 \cdots d_r \varphi_1 \\ d_1 \varphi_2, d_2 \varphi_2 \cdots d_r \varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1 \varphi_r, d_2 \varphi_r \cdots d_r \varphi_r \end{vmatrix} = 0. \tag{17}$$

Il teorema contenuto in questa formula corrisponde al teorema che abbiamo dato come estensione di quello di CAUCHY nel caso in cui si tratti di funzioni elementari.

Se S_r non è chiuso, ma è limitato da due iperspazî S^0_{r-1} e S^1_{r-1}, dopo che si siano tolti dall'iperspazio totale i luoghi di singolarità e si siano eseguiti i tagli convenienti, di cui si è fatto cenno nell'articolo 7, avremo che l'integrale che comparisce nel primo membro delle (17) non sarà più in generale nullo. Una volta stabilite le direzioni degli ipespazî S^0_{r-1}, S^1_{r-1}, S_r nel modo indicato nell'art. 7, avremo che l'integrale stesso non dipenderà da S_r ma solo da S^0_{r-1}

e S^1_{r-1}; onde denotando, come nell'articolo citato, S^2_{r-1} un iperspazio coincidente con S^0_{r-1} ma preso in direzione contraria, potremo scrivere l'integrale precedente

$$\Phi = \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_n) \begin{vmatrix} d_1\varphi_1, d_2\varphi_1 \cdots d_r\varphi_1 \\ d_1 d_2, d_2\varphi_2 \cdots d_r\varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1\varphi_r, d_2\varphi_r \cdots d_r\varphi_r \end{vmatrix}.$$

Mantenendo fisso S^2_{r-1} e mutando S^1_{r-1}, avremo che Φ sarà una funzione elementare di ordine r appartenente ad un sistema isogeno d'ordine r di cui $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r$ sono le variabili indipendenti.

Potremo dunque, tenendo conto dei precedenti teoremi, enunciare la proposizione:

Sia $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m$ *un sistema di variabili indipendenti funzioni di* $x_1, x_2 \cdots x_n$ $(n > m > r)$. *Posto*

$$\Phi \,|\, [S_{r-1}] \,| = \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r) \begin{vmatrix} d_1\varphi_1, d_2\varphi_1, \cdots d_r\varphi_1 \\ d_1\varphi_2, d_2\varphi_2, \cdots d_r\varphi_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1\varphi_r, d_2\varphi_r, \cdots d_r\varphi_r \end{vmatrix} =$$

$$= \int_{S^2_{r-1}}^{S^1_{r-1}} f(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)\, d\varphi_1 d\varphi_2 \cdots d\varphi_r,$$

avremo che Φ *apparterrà al sistema isogeno di cui* $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_m$ *sono le variabili indipendenti*, e, reciprocamente, *ogni funzione appartenente al sistema isogeno di cui* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ *sono le variabili indipendenti potrà ottenersi dalle variabili indipendenti mediante una integrazione multipla, come è indicato nella formula precedente.*

Questa proposizione rivela il legame esistente fra le funzioni di iperspazî e le funzioni di più variabili complesse indipendenti. Essa prova infatti che la integrazione multipla delle funzioni di m variabili indipendenti dà luogo ad un sistema isogeno d'ordine m tale che quelle m variabili indipendenti sono appunto le *variabili indipendenti del sistema.*

XXIV.

SULLE FUNZIONI CONIUGATE

« Rend. Accad. dei Lincei »; ser. IV, vol. V_1, 1889_1; pp. 599-611.

1. È ben noto il legame esistente fra la teoria della equazione differenziale

$$(a) \qquad \Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

e la teoria delle funzioni di una variabile complessa. CAUCHY mise in evidenza una tale relazione che servì di fondamento alle ricerche di RIEMANN.

Si sa che, se si parte dalla (a), ad ogni integrale u_1 corrisponde una funzione coniugata v_1, tale che $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = - \frac{\partial v_1}{\partial x}$, e se u_2 è un altro integrale della (a) e v_2 ne è la corrispondente funzione coniugata $u_1 + iv_1$ risulta una funzione *monogena* di $u_2 + iv_2$.

Ora, se da uno spazio a due dimensioni si passa ad uno a tre dimensioni, alla equazione differenziale (a) viene a corrispondere l'altra

$$(b) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

La teoria di questa equazione differenziale ha preceduto quella su mentovata; anzi i metodi di GAUSS, di DIRICHLET e di GREEN relativi alla (b) hanno dato origine a quelli applicati alla (a) da RIEMANN, NEUMANN ecc. Però, nel caso dello spazio a tre dimensioni, allo studio della funzione u non venne mai collegato, in generale, lo studio di un'altra funzione coniugata. Solo nel caso dei potenziali simmetrici fu riconosciuta la esistenza di una funzione che, sotto il nome di *funzione associata*, venne elegantemente applicata dal prof. BELTRAMI in varie ricerche.

Se si passa dalle tre alle quattro e in generale alle n variabili si ottiene la equazione differenziale

$$\sum_1^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0.$$

Le ricerche fatte su di essa da BELTRAMI, KRONECKER ecc., sono state eseguite senza prendere in considerazione nessuna funzione coniugata alla u. Lo stesso si dica per gli spazi curvi: l'equazione differenziale che si ottiene annullando il parametro differenziale del 2° ordine ha dato luogo allo studio di una funzione coniugata solo nel caso in cui lo spazio curvo fosse a due dimensioni.

La teoria delle funzioni coniugate è però suscettibile di essere estesa al caso generale delle n variabili e una tale generalizzazione forma appunto il soggetto della presente ota. Nel caso di $n = 2$ essa dà la teoria ordinaria delle funzioni coniugate e nel caso dei potenziali simmetrici porta alle funzioni associate del prof. BELTRAMI.

2. Prenderò le mosse dal caso di uno spazio ordinario a tre dimensioni mediante le considerazioni seguenti.

Nell'elettromagnetismo si esaminano due elementi, cioè i poli magnetici e le correnti elettriche. Ogni polo magnetico è individuato dalla posizione di un punto dello spazio e dalla massa magnetica in esso concentrata, mentre ogni corrente elettrica è individuata da una linea chiusa che è il circuito che essa percorre e dalla intensità della corrente.

Abbiasi ora un sistema qualunque di masse magnetiche. Prendiamone il potenziale rispetto ad un polo di massa 1 e di posizione variabile nello spazio; si otterrà una funzione dei punti dello spazio tale che la sua derivata secondo una direzione qualunque sarà la componente dell'azione magnetica in quella direzione.

Analogamente, prendiamo il potenziale delle stesse masse sopra una corrente di intensità 1 il cui circuito sia una linea chiusa qualunque dello spazio. Otterremo una funzione che, secondo una denominazione che ho adottato in alcune ricerche [1], potrà chiamarsi una funzione delle linee dello spazio. Ora da un dato circuito passiamo ad un altro infinitamente prossimo deformando di infinitamente poco il circuito iniziale in prossimità di un certo punto. Una tale deformazione si potrà evidentemente ottenere facendo descrivere ad un elemento d'arco del circuito un'area piana infinitesima.

Consideriamo il rapporto della variazione del potenziale alla detta area piana infinitesima. Il limite di esso può per analogia chiamarsi la derivata della funzione di linee rispetto all'area piana considerata. Ora, come è ben noto, il rapporto al limite diviene eguale alla componente dell'azione magnetica secondo la normale all'area suddetta. Dunque il potenziale magnetico sul polo e quello sulla corrente, considerati rispettivamente come funzioni di punti e di linee dello spazio, godono della proprietà caratteristica delle funzioni coniugate; cioè adottando i simboli usati nella Nota citata per denotare le derivate delle funzioni di linee, avremo

$$\frac{dF}{d\sigma} = \frac{df}{dn},$$

ove F rappresenta il potenziale sulla corrente, f quello sul polo, σ l'elemento di superficie normale alla direzione n.

(1) « Atti d. R. Acc. d. Lincei », vol. III_2, fasc. 9–10. [In questo vol.: XVIII, pp. 315–328].

In particolare, prendendo un sistema di assi coordinati, avremo,

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{d(y\,,z)} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{dF}{d(z\,,x)} = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{dF}{d(x\,,y)} = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Vediamo che cosa corrisponde, nel caso del piano, a ciò che venne qui esposto. Nel caso del piano al potenziale newtoniano corrisponde il potenziale logaritmico ad una corrente elettrica un *punto vorticoso* (2). Si comprende dunque perché, nel caso del piano, la funzione e la sua coniugata siano ambedue funzioni di punti.

Nel caso dei potenziali simmetrici, se ci limitiamo a considerare la F per le sole linee circolari normali all'asse di simmetria ed aventi il centro su di esso, otteniamo una funzione che dipende dai due soli parametri che individuano i detti cerchi; essa non è altro che la funzione *associata* alla funzione potenziale.

Per trattare in generale la teoria delle funzioni coniugate, noi partiremo dalla definizione seguente:

In uno spazio ad n dimensioni diremo che le due funzioni di primo grado $F \mid [S_{r-1}] \mid , \Phi \mid [S_{n-r-1}] \mid$ (3) *sono coniugate quando*

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}$$

essendo $i_1 \cdots i_n$ *una permutazione pari dei numeri* $1\,, 2 \cdots n$; *ciò che rappresenteremo scrivendo* $(i_1 \cdots i_n) \equiv (1\,, 2 \cdots n)$.

Da questa definizione risulta che, essendo S_r e S_{n-r} due iperspazii normali fra loro in un punto comune, scegliendo convenientemente le loro direzioni, si ha

$$\frac{dF}{dS_r} = \frac{d\Phi}{dS_{n-r}}\,.$$

3. Prima di procedere allo studio delle proprietà delle funzioni coniugate ed alla loro effettiva costruzione dimostreremo alcuni teoremi fondamentali sopra dei sistemi di equazioni differenziali simultanee alle derivate parziali.

TEOREMA 1°. – *La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema di equazioni differenziali simultanee*

$$(1) \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1\, i_2 \cdots i_{r+1}}$$

(2) F. KLEIN, *Ueb. Riemann's Theorie d. algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, § 2.

(3) « Atti d. R. Acc. d. Lincei », vol. V_1, p. 159. [In questo vol.: XXIII, p. 404].

sia integrabile, è che si abbia

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \tag{2}$$

supponendo che le x_i *siano in numero di* n, $(x_1, x_2 \cdots x_n)$, *e le* (1) *siano ottenute per tutte le combinazioni* $r+1$ *a* $r+1$ *degli indici* $1, 2, \cdots, n$; *oltre a ciò le* p *e le* P *mutino segno per una trasposizione degli indici* [4].

Che la condizione sia necessaria risulta dall'osservare che, se sono soddisfatte le (1), si ha

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= \sum_{1}^{r+2}{}_s(-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left[\sum_{1}^{s-1}{}_t(-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1}\, i_{t+1} \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}} \right.$$

$$\left. - \sum_{s+1}^{r+2}{}_t(-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1}\, i_{s+1} \cdots i_{t-1}\, i_{t+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}} \right] = 0 .$$

Dimostriamo ora che la condizione posta è anche sufficiente.

Prendiamo $M_{h_1 h_2 \ldots h_{r-1}, n}$ arbitrarie e $M_{h_1 h_2 \ldots h_r}$ (con $h_1, h_2 \cdots h_r \gtrless n$) date da

$$\frac{\partial M_{h_1 \cdots h_r}}{\partial x_n} = (-1)^{r+1} \left\{ p_{h_1 \cdots h_r n} - \sum_{1}^{r}{}_s(-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1}\, h_{s+1} \cdots h_r\, n}}{\partial x_{h_s}} \right\} .$$

Otterremo in tal modo le $M_{h_1 h_2 \ldots h_r}$ determinate a meno di funzioni arbitrarie di $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$.

Ora avremo

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{1}^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1}\, h_{s+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}}$$

$$= (-1)^{r+1} \sum_{1}^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial p_{h_1 \cdots h_{s-1}\, h_{s+1} \cdots h_{r+1}\, n}}{\partial x_{h_s}} = \frac{\partial p_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}}{\partial x_n} ,$$

onde

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial M_{h_1 \cdots h_{s-1}\, h_{s+1} \cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}} = p_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}} + p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}$$

essendo $p'_{h_1 h_2 \cdots h_{r+1}}$ una funzione di $x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$ soltanto. Ma in virtù delle (2), dalle equazioni precedenti si ottiene

$$\sum_{1}^{r+2}(-1)^s \frac{\partial p'_{h_1 \cdots h_{s-1}\, h_{s+1} \cdots h_{r+2}}}{\partial x_{h_s}} = 0. \tag{2'}$$

(4) Qui, come in seguito, supporremo sempre che i vari elementi *mutino segno per una trasposizione degli indici.*

Affinché dunque si possano trovare le P che soddisfino le (1) basterà poter determinare le P' tali che si abbia

$$(3)\qquad \sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial P'_{i_1\cdots i_{s-1}i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \qquad (\text{per } i_{r+1} = n)$$

$$(1')\qquad \sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial P'_{h_1\cdots h_{s-1}h_{s+1}\cdots h_{r+1}}}{\partial x_{h_s}} = p'_{h_1 h_2\cdots h_{r+1}} \qquad (\text{per } h_1 h_2\cdots h_{r+1} \gtrless n)$$

perché, se queste equazioni saranno verificate, prendendo

$$P_{h_1\cdots h_r} = M_{h_1\cdots h_r} + P'_{h_1\cdots h_r}$$

risulteranno soddisfatte le (1).

Ora per soddisfare le (3) prenderemo $P'_{h_1\cdots h_{r-1}n} = 0$, $P'_{h_1 h_2\cdots h_r}$ funzione di $x_1 x_2\cdots x_{n-1}$ soltanto, e quindi basterà tener conto solo delle (1') nelle quali non comparisce più la variabile x_n nelle funzioni incognite, e nei termini noti $p'_{h_1 h_2\cdots h_{r+1}}$.

La questione quindi di vedere se si possono integrare le (1) colle condizioni (2) è ricondotta a cercare se si possono integrare le equazioni analoghe (1') colle condizioni (2') nelle quali comparisce una variabile di meno. Si può ora ricondurre questo problema a vedere se si può integrare un sistema di equazioni analoghe alle (1'), con delle condizioni analoghe alla (2') e in cui manchino le variabili x_n e x_{n-1}. Così procedendo si ridurrà la questione a riconoscere se possono determinarsi le $P^{(\nu)}$ ($\nu = n - r - 1$) funzioni di $x_1 x_2\cdots x_{r+1}$, tali che soddisfino l'unica equazione

$$\sum_1^{r+1}{}_s(-1)^s \frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2\cdots s-1\, s+1\cdots r+1}}{\partial x_s} = p^{(\nu)}_{1,2\cdots r+1}$$

essendo $p^{(\nu)}_{1,2\cdots r+1}$ funzione soltanto di $x_1, x_2\cdots x_{r+1}$. Ora ciò è evidentemente possibile prendendo $P^{(\nu)}_{1,2\cdots s-1,s+1\cdots r+1}$ arbitrariamente e determinando quindi $P^{(\nu)}_{1,2\cdots r}$ in modo che

$$\frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2\cdots r}}{\partial x_{r+1}} = (-1)^{r+1}\left\{ p^{(\nu)}_{1,2\cdots r+1} - \sum_1^{r}{}_s(-1)^s \frac{\partial P^{(\nu)}_{1,2\cdots s-1,s+1\cdots r+1}}{\partial x_s}\right\}.$$

Il processo di dimostrazione che ha servito a provare il teorema, ci mostra anche che le $P_{1,2\cdots r}$ *possono determinarsi con sole quadrature.*

Cominciamo dal dare alcune conseguenze del teorema ora dimostrato.

COROLLARIO 1°. — *Affinchè si possa porre*

$$(4)\qquad q_{i_1\cdots i_r} = \sum_1^{n}{}_t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

è necessario e sufficiente che si abbia

$$(5)\qquad \sum_1^{n}{}_s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Poniamo infatti

$$Q_{i_1\cdots i_{r+1}} = P_{i_{r+2}\cdots i_n} \qquad (i_1\, i_2 \cdots i_n \equiv 1\,,\, 2 \cdots n).$$
$$q_{i_1\cdots i_r} = p_{i_{r+1}\cdots i_n}$$

Avremo che le (4) e (5) potranno scriversi

$$p_{i_{r+1}\cdots i_n} = (-1)^{r+1} \sum_{r+1}^{n}{}_t (-1)^t \frac{P_{i_{r+1}\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_t}}$$

$$\sum_{r}^{n} (-1)^s \frac{\partial p_{i_r\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

il che dimostra il teorema.

COROLLARIO 2°. - *Ogni funzione di primo grado di iperspazii* S_r *potrà esprimersi mediante un integrale multiplo esteso agli iperspazii* S_r.

Sia infatti $F\,|\,[S_r]\,|$ la funzione che si considera.

Poniamo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = p_{i_1\cdots i_{r+1}},$$

avremo

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$ [5]

onde, pel teorema 1°, potremo porre

$$p_{i_1\cdots i_{r+1}} = \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}}.$$

Ora, se S_{r+1} è un iperspazio avente per contorno S_r, si avrà [6]

$$F\,|\,[S_r]\,| = \int \Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_{r+1}}\, \alpha_{i_1\cdots i_{r+1}}\, dS_{r+1},$$

essendo $\alpha_{i_1\cdots i_{r+1}}$ i coseni di direzione dell'iperspazio S_{r+1}. Pel teorema che abbiamo dato come estensione di quello di STOKES [7] avremo quindi

$$F\,|\,[S_r]\,| = \int \Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_r}\, \beta_{i_1\cdots i_r}\, dS_r,$$

in cui $\beta_{i_1\cdots i_r}$ rappresentano i coseni di direzione dell'iperspazio S_r.

Reciprocamente si ha che *ogni integrale multiplo dato da una espressione come la precedente è una funzione di primo grado di iperspazii* S_r.

(5) «Atti Acc. Lincei», vol. V_1, p. 162. [In questo vol.: XXIII, p. 407].
(6) Ibid., p. 161. [In questo vol.: p. 406].
(7) Ibid., p. 162. [In questo vol.: p, 407].

TEOREMA 2°. - *Posto*

$$p_{i_1\cdots i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}}$$

avremo

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^{r+1} \Delta^2 P_{i_1\cdots i_r} + \sum_1^r{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}}.$$

Infatti abbiamo

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_s}} = \sum_1^n{}_s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^r{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_t}} + (-1)^{r+1} \sum_1^n{}_s \frac{\partial^2 P_{i_1\cdots i_r}}{\partial x_{i_s}^2}$$

$$= (-1)^{r+1} \Delta^2 P_{i_1\cdots i_r} + \sum_1^r{}_t (-1)^t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \sum_1^n{}_s \frac{\partial P_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_r\, i_s}}{\partial x_{i_s}}.$$

TEOREMA 3°. - *Posto*

$$q_{i_1\cdots i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_r\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

avremo

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{r+1} \Delta^2 Q_{i_1\cdots i_{r+1}} + \sum_1^n{}_{i_{r+2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \sum_1^{r+2}{}_t (-1)^t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}}.$$

Si ponga

$$\left.\begin{aligned} q_{i_1\cdots i_r} &= p_{i_{r+1}\cdots i_n} \\ Q_{i_1\cdots i_{r+1}} &= P_{i_{r+2}\cdots i_n} \end{aligned}\right\} \quad (i_1\, i_2 \cdots i_n \equiv 1\,,\, 2 \cdots n)$$

sarà

$$p_{i_{r+1}\cdots i_n} = -\sum_{r+1}^n{}_t (-1)^{t-r} \frac{\partial P_{i_{r+1}\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_t}},$$

onde pel teorema 2°,

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{n+r+1} \Delta^2 P_{i_{r+2}\cdots i_n} - \sum_{r+2}^n{}_s (-1)^{s-r-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_{r+2}\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_n\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

e per conseguenza

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^n \sum_1^n{}_s \frac{\partial p_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}}$$

$$= (-1)^{r+1} \Delta^2 P_{i_{r+2}\cdots i_n} + (-1)^{n+r} \sum_{r+2}^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n{}_t \frac{\partial P_{i_{r+2}\cdots i_{s+1}\cdots i_n\, i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$= (-1)^{r+1} \Delta^2 Q_{i_1\cdots i_{r+1}} + \sum_1^n{}_{i_{r+2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}} \sum_1^{r+2}{}_t (-1)^t \frac{\partial Q_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_t}}.$$

4. Possiamo ora procedere alla costruzione effettiva delle funzioni coniugate mediante il teorema seguente:

Se le funzioni $M_{i_1 \dots i_r}$ sono *tali che*

$$\Delta^2 M_{i_1 \dots i_r} = 0,$$

e se poniamo

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_1^n {}_t \dfrac{\partial M_{i_1 \dots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P_{i_1 \dots i_{r-1}}, & \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \dfrac{\partial M_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = Q_{i_1 \dots i_{r+1}} \\ \sum_1^r {}_s (-1)^s \dfrac{\partial P_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \dots i_r}, & \sum_1^n {}_t \dfrac{\partial Q_{i_1 \dots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} = q_{i_{r+1} \dots i_n}, \end{cases}$$

si ha:

1° *le* $p_{i_1 \dots i_r}$, $q_{i_{r+1} \dots i_n}$ *soddisfano alle condizioni di integrabilità, onde si può porre*

$$(7)\qquad p_{i_1 \dots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} \quad , \quad q_{i_1 \dots i_{n-r}} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{n-r}})};$$

2° *le due funzioni* F *e* Φ *sono coniugate.*

Infatti, dal teorema primo e dal corollario 1° al teorema 1°, si deduce

$$\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_1^{n-r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial q_{i_1 \dots i_{r-1} i_{s+1} \dots i_{n-r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

il che prova che sono soddisfatte le condizioni affinché si possano stabilire le (7). Pel teorema 2° abbiamo poi

$$q_{i_{r+1} \dots i_n} = (-1)^{r-1} \Delta^2 M_{i_1 \dots i_r} + \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \sum_1^n {}_t \frac{\partial M_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$= \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \dots i_{s-1} s+1 \dots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \dots i_r}$$

il che dimostra che F e Φ sono coniugate.

5. Il teorema precedente prova la effettiva esistenza delle funzioni coniugate in ogni iperspazio; anzi, poiché se si ha

$$F = F\,|[S_{r-1}]|\,, \text{ deve risultare } \Phi = \Phi\,|[S_{n-r-1}]|\,,$$

segue che se $n = 2\mu$, oppure $n = 2\mu + 1$, si avranno μ specie di funzioni coniugate.

Prima di passare al teorema reciproco di quello dato nel paragrafo precedente dimostriamo alcune proprietà delle funzioni coniugate.

1° *Se*

$$F\,|[S_{r-1}]| \quad , \quad \Phi\,|[S_{n-r-1}]|$$

sono coniugate, saranno funzioni coniugate

$$\Phi\,|[S_{n-r-1}]| \quad , \quad F\,|[S_{r-1}]|\,,$$

se $r(n-r)$ è pari; e saranno invece funzioni coniugate

$$\Phi\,|[S_{n-r-1}]| \quad , \quad -F\,[S_{r-1}]|\,,$$

se $r(n-r)$ è dispari.

Posto infatti

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}=p_{i_1\cdots i_r} \quad , \quad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{n-r}})}q_{i_1\cdots i_{n-r}} \tag{8}$$

deve aversi

$$p_{i_1\cdots i_r}=q_{i_{r+1}\cdots i_n} \quad \text{se} \quad i_1\ldots i_n\equiv 1\,,\,2\ldots n$$

onde, se $r(n-r)$ è pari, sarà

$$q_{i_1\cdots i_{n-r}}=p_{i_{n-r+1}\cdots i_n};$$

mentre se $r(n-r)$ è dispari sarà

$$q_{i_1\cdots i_{n-r}}=-p_{i_{n-r+1}\cdots i_n}.$$

2° *Se* F $|[S_{r-1}]|$ *e* Φ $|[S_{n-r-1}]|$ *sono coniugate e si fanno le posizioni* (8) *dovrà aversi*

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_t\,\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1}\,i_t}}{\partial x_{i_t}}=0\\ &\sum_1^{r+1}{}_t\,(-1)^s\,\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=0\end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_1^n{}_t\,\frac{\partial q_{i_1\cdots i_{n-r-1}\,i_t}}{\partial x_{i_t}}=0\\ &\sum_1^{n-r-1}(-1)^s\,\frac{\partial q_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{n-r-1}}}{\partial x_{i_s}}=0\end{aligned}\right. \tag{9'}$$

$$\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r}=0 \quad , \quad \Delta^2 q_{i_1\cdots i_{n-r}}=0\,. \tag{10}$$

Reciprocamente se le p soddisfaranno le (9), *avremo che esisterà una funzione* Φ *coniugata alla* F.

Le relazioni (9) e (9') risultano immediatamente dalle condizioni di integrabilità a cui debbono soddisfare le p e le q; così pure il teorema reciproco. Per trovare le (10) osserviamo che, posto

$$0=\sum_1^{r+1}{}_s\,(-1)^s\,\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=\tilde\omega_{i_1\cdots i_{r+1}}\,,$$

pel teorema secondo, si avrà

$$0=\sum_1^n{}_t\,\frac{\partial\tilde\omega_{i_1\cdots i_r\,i_t}}{\partial x_{i_t}}=(-1)^{r+1}\,\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r}+\sum_1^r(-1)^s\,\frac{\partial}{\partial x_{i_s}}\sum_1^n{}_t\,\frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_r\,i_t}}{\partial x_{i_t}}$$

$$=(-1)^{r+1}\,\Delta^2 p_{i_1\cdots i_r}\,.$$

Analogamente si trova l'altra delle (10).

6. Possiamo ora dimostrare il teorema reciproco di quello del § 4; cioè, *se* F *e* Φ *sono due funzioni coniugate, possono sempre trovarsi le* $M_{i_1 \dots i_r}$ *da cui esse dipendono mediante le* (6) *e* (7).

Per provar ciò basterà poter risolvere la seguente questione:

Se le $p_{i_1 \dots i_r}$ *soddisfano le condizioni*

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

determinare le $M_{i_1 \dots i_r}$ *in modo che*

$$\Delta^2 M_{i_1 \dots i_r} = 0$$

$$\sum_1^n {}_s \frac{\partial M_{i_1 \dots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P_{i_1 \dots i_{r-1}} \qquad \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \dots i_r}.$$

Infatti, se si porrà

$$\sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = Q_{i_1 \dots i_{r+1}},$$

avremo

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial Q_{i_1 \dots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1 \dots i_r}.$$

Cominciamo dal risolvere la questione precedente nei casi in cui le p abbiano un solo indice, oppure due indici.

Caso 1°. - Si abbiano le p_i che verificano le condizioni

$$\sum_1^n {}_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad -\frac{\partial p_{i_2}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_1}}{\partial x_{i_2}} = 0.$$

Esisterà una funzione P, che soddisfa alla condizione $\Delta^2 P = 0$, tale che

$$p_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Quindi si potranno determinare le $M_1, M_2 \cdots M_n$, in modo che $\Delta^2 M_i = 0$ e

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial M_n}{\partial x_n} = P.$$

Le $M_1, M_2, \cdots M_n$ saranno in questo caso le funzioni richieste.

Caso 2°. - Sono le $p_{i,s}$ tali che

$$(11) \qquad \sum_1^n {}_s \frac{\partial p_{is}}{\partial x_s} = 0, \qquad (12) \qquad -\frac{\partial p_{i_2 i_3}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p_{i_1 i_3}}{\partial x_{i_2}} - \frac{\partial p_{i_1 i_2}}{\partial x_{i_3}} = 0.$$

Mediante le operazioni di quadratura indicate nella dimostrazione del teorema 1° potremo determinare le P'_i, in modo che

$$(13) \qquad p_{is} = -\frac{\partial P'_s}{\partial x_i} + \frac{\partial P'_i}{\partial x_s}.$$

Se le funzioni arbitrarie che debbono introdursi si sceglieranno tali da soddisfare alla equazione $\Delta^2 = 0$, come debbono soddisfarvi per dato le $p_{i,s}$, otterremo le P'_i che verificheranno anche esse le equazioni differenziali

$$(13') \qquad \Delta^2 P'_i = 0.$$

Sostituendo nelle (11) avremo quindi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_1^n \frac{\partial P'_s}{\partial x_s} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n),$$

onde, essendo c una costante,

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial P'_s}{\partial x_s} = c.$$

Le (13) e (13') restano soddisfatte prendendo, invece delle P'_s, le P_s date da

$$P_s = P'_s + a_s x_s$$

essendo le a_s delle costanti arbitrarie. Ora abbiamo

$$\sum_1^n \frac{\partial P_s}{\partial x_s} = c + \sum_1^n a_s.$$

Basterà dunque scegliere le costanti a_s in modo che sia $\sum_1^n a_s = -c$, perché si abbia

$$\sum_1^n{}_s \frac{\partial P_s}{\partial x_s} = 0.$$

Pel teorema 1° potremo dunque prendere le M_{is} tali che

$$P_i = \sum_1^n{}_s \frac{\partial M_{is}}{\partial x_s}$$

e, come nel caso precedente, se sceglieremo le funzioni arbitrarie che è necessario introdurre, in modo che verifichino la condizione $\Delta^2 = 0$, otterremo le M che soddisfaranno questa equazione e quindi il problema propostoci sarà risoluto anche in questo caso.

Caso generale. - Per trattare la questione nel caso delle p con r indici supporremo di averla già risoluta nel caso delle p con $r - 2$ indici, e mostreremo che la soluzione nel caso degli r indici si può far dipendere dall'altra. Essendo dunque già sciolto il problema nel caso di $r = 1$ e di $r = 2$, potremo ritenerlo risoluto nel caso generale.

Partiamo dalle $p_{i_1 \ldots i_r}$ ed eseguiamo su di esse le operazioni di quadratura indicate nella dimostrazione del teorema 1° per trovare le $p_{i_1 \ldots i_{r-1}}$ che soddisfano le equazioni

$$\sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \ldots i_r}.$$

Se al solito si sceglieranno le funzioni arbitrarie che man mano debbono introdursi in modo da verificare la equazione $\Delta^2 = 0$, come debbono soddisfarvi per dato le $p_{i_1 \ldots i_r}$, otterremo le $P_{i_1 \ldots i_{r-1}}$ che soddisfaranno anche esse alla stessa equazione differenziale.

Poniamo

$$\sum_1^n \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{r-2} i}}{\partial x_{i_t}} = p'_{i_1 \ldots i_{r-2}},$$

troveremo

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial p'_{i_1 \ldots i_{r-3} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

$$\sum_1^{r-1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_s}} = (-1)^{r-s} \Delta^2 P_{i_1 \ldots i_{r-1}}$$

$$+ \sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} \sum_1^r {}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_t}} = \sum_1^n {}_s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Dunque, le p' essendo con $r - 2$ indici, per l'ipotesi fatta avremo che potranno trovarsi le M', tali che

$$\Delta^2 M'_{i_1 \ldots i_{r-2}} = 0$$

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial M'_{i_1 \ldots i_{r-3} i_t}}{\partial x_{i_t}} = P'_{i_1 \ldots i_{r-3}} \quad , \quad \sum_1^{r-2} {}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{i_1 \cdots {}_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-2}}}{\partial x_{i_s}} = p'_{i_1 \ldots i_{r-2}}.$$

Poniamo

$$\sum_1^{r-1} {}_s (-1)^s \frac{\partial M'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_s}} = Q'_{i_1 \ldots i_{r-1}},$$

risulterà

$$\sum_1^r (-1)^s \frac{\partial Q'_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = 0 \qquad \sum_1^n {}_t \frac{\partial Q'_{i_1 \ldots i_{r-2} i_t}}{\partial x_{i_t}} = p'_{i_1 \ldots i_{r-2}},$$

onde, se

$$\pi_{i_1 \ldots i_{r-1}} = P_{i_1 \ldots i_{r-1}} - Q'_{i_1 \ldots i_{r-1}},$$

avremo

$$\sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial \pi_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1 \ldots i_r} \tag{14}$$

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial \pi_{i_1 \cdots i_{r-2} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0. \tag{15}$$

Pel corollario 1° potremo quindi, a cagione delle (15), determinare le $M_{i_1 \ldots i_r}$, tali che soddisfino le equazioni

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial M_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = \pi_{i_1 \ldots i_{r-1}}$$

e se le funzioni arbitrarie che dovremo man mano introdurre le sceglieremo in modo da verificare la condizione $\Delta^2 = 0$ otterremo le M che soddisfaranno questa equazione, e la questione propostaci sarà così risoluta.

7. I teoremi che abbiamo dimostrato, facendo dipendere le funzioni coniugate da funzioni ordinarie di n variabili, ci dànno modo di interpretare le proprietà relative alle funzioni coniugate senza abbandonare le ordinarie funzioni.

In una Nota, che spero di potere presentare prossimamente, mi propongo di esporre una estensione del teorema di GREEN ed alcune altre conseguenze dei risultati ora esposti.

XXV.

SULLE FUNZIONI DI IPERSPAZÎ E SUI LORO PARAMETRI DIFFERENZIALI

« Rend. Accad. dei Lincei », ser. IV, vol. V_1, 1889_1, pp. 630–640.

1. Nella Memoria *Sulla teoria generale dei parametri differenziali* [1] il prof. BELTRAMI ha esteso il teorema di GREEN al caso degli iperspazî. Questo teorema può enunciarsi nella maniera seguente:

Siano $p_1, p_2 \cdots p_n$; $p'_1, p'_2 \cdots p'_n$ delle funzioni di $x_1, x_2 \cdots x_n$ che soddisfano le relazioni

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial p'_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p'_s}{\partial x_i} ,$$

tali cioè che si abbia $p_i = -\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$ e $p'_i = -\dfrac{\partial P'}{\partial x_i}$.

Sia S_n uno spazio ad n dimensioni entro cui le P, P', p_i, p'_i sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate. Denotiamo con S_{n-1} il contorno di S_n, con ν la normale ad S_{n-1} diretta verso l'interno di S_n. Avremo

$$\int_{S_n} \sum_1^n {}_i\, p_i p'_i \, dS_n = \int_{S_{n-1}} P \sum_1^n {}_i\, p'_i \cos(\nu x_i)\, dS_{n-1} + \int_{S_n} P \sum_1^n {}_i \frac{\partial p'_i}{\partial x_i}\, dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} P' \sum_1^n {}_i\, p_i \cos(\nu x_i)\, dS_{n-1} + \int_{S_n} P' \sum_1^n {}_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i}\, dS_n .$$

Si può osservare ora che quando si passa dallo spazio a due o a tre dimensioni ad uno spazio ad n dimensioni possono ottenersi, come estensione del teorema di GREEN, oltre che il teorema citato, anche altri (di cui daremo in appresso (§ 4) l'interpretazione riferendoci alle funzioni d'iperspazî) i quali possono comprendersi nei due seguenti:

TEOREMA 1°. – *Siano* $p_{i_1 \ldots i_r}$ *e* $p'_{i_1 \ldots i_r}$ *tali che soddisfino le condizioni*

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

(1) « Mem. dell'Acc. delle Sc. dell'Ist. di Bologna », ser. 2ª, t. VIII (1868); « Opere mat. », t. II, Milano, Hoepli, 1911; pp. 74–118.

Potremo allora [2] *porre*

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} \quad , \quad p'_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} .$$

Se entro S_n *le* P, P', p, p' *sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate si avrà*

$$(2) \qquad (-1)^{r-1} \int_{S_n} \Sigma_i \, p_{i_1 \cdots i_r} p'_{i \cdots i_r} dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i \, P_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \, p'_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1} + \int_{S_n} \Sigma_i \, P_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} \right\} dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i \, P'_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \, p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1} + \int_{S_n} \Sigma_i \, P'_{i_1 \cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} \right\} dS_n .$$

Nel caso delle p e p' con un solo indice questo teorema diviene quello precedentemente citato.

Per dimostrarlo osserviamo che

$$\int_{S_n} \Sigma_i \, p_{i_1 \cdots i_r} p'_{i_1 \cdots i_r} dS_n = \int_{S_n} \Sigma_i \, p'_{i_1 \cdots i_r} \left\{ \sum_1^r {}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n$$

$$= (-1)^r \int_{S_n} \Sigma_i \sum_1^n {}_i \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{r-1}}}{\partial x_{i_t}} \, p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t} dS_n .$$

Mediante una integrazione per parti si otterrà quindi la formula contenuta nel teorema precedente.

TEOREMA 2°. - *Siano* $p_{i_1 \cdots i_r}$, $p'_{i_1 \cdots i_r}$ *tali che soddisfino le condizioni*

$$(1') \qquad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \quad , \quad \sum_1^n {}_t \frac{\partial p'_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 .$$

Potremo in tal caso porre [3]

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^n {}_t \frac{\partial Q_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} \quad , \quad p'_{i_1 \cdots i_r} = \sum_1^n {}_t \frac{\partial Q'_{i_1 \cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} .$$

Se entro S_n *le* Q, Q', p, p' *sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, si avrà*

$$(2') \qquad (-1)^r \int_{S_n} \Sigma_i \, p_{i_1 \cdots i_r} p'_{i_1 \cdots i_r} dS_n =$$

(2) Vedi il teorema 1° della Nota: *Sulle funzioni coniugate*, pubblicata nel fasc. prec. [In questo vol.: XXIV, pp. 420-432].

(3) Teorema 2° della Nota citata.

$$= \int\limits_{S_{n-1}} \Sigma_i Q_{i_1\cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p'_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-1}$$

$$+ \int\limits_{S_n} \Sigma_i Q_{i_1\cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n$$

$$= \int\limits_{S_{n-1}} \Sigma_i Q'_{i_1\cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-1}$$

$$+ \int\limits_{S_n} \Sigma_i Q'_{i_1\cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n .$$

Ponendo infatti $p_{i_1\cdots i_r} = q_{i_{r+1}\cdots i_n}$, questa formula risulta come conseguenza della (2).

2. Se le p e p' sono funzioni monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, saremo sicuri che le stesse proprietà valgono per le P e le P′ quando il campo in cui le p e le p' sono date sia per esempio un campo T ad n dimensioni limitato fra i valori x_i^0 e x_i^1 delle x_i. Supporremo perciò nel seguito di questa Nota che *il campo* S_n *sia interno ad un tal campo* T.

Supponiamo ora che siano contemporaneamente soddisfatte le (1) e (1′), e si prendano le p eguali alle p'; otterremo

$$(3) \qquad (-1)^{r-1} \int\limits_{S_n} \Sigma_i p^2_{i_1\ldots i_r} dS_n = \int\limits_{S_{n-1}} \Sigma_i P_{i_1\cdots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1}$$

$$= -\int\limits_{S_{n-1}} \Sigma_i Q_{i_1\cdots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_n .$$

Da questa formula segue immediatamente il teorema:

Se le $p_{i_1\cdots i_r}$ *soddisfano le equazioni differenziali simultanee*

$$(4) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 ,$$

esse sono definite nello spazio S_n, *quando si conoscono al contorno i valori delle quantità*

$$(5) \qquad \sum_1^n{}_t p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = a_{i_1\cdots i_{r-1}} ,$$

oppure quando si conoscono al contorno i valori delle quantità

$$(6) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1\ldots i_{r+1}} .$$

Infatti se le p e le p' soddisfacessero alle condizioni (4) e (5) poste per le p, si avrebbe che le $p'''=p'-p''$, oltre a verificare le (4), sarebbero tali che

$$\sum_1^n {}_t\, p'''_{i_1 \dots i_{r-1} i_t} \cos (\nu x_{i_t}) = 0 ,$$

onde per la (3) risulterebbe

$$\int_{S_n} \Sigma_i\, p_i'''^2\, dS_n = 0$$

e quindi $p_i'''=p_i'-p_i''=0$. Allo stesso risultato si giungerebbe supponendo che le p' e le p'' soddisfacessero le (4) e (6).

3. Proponiamoci la questione:

Dati nello spazio S_{n-1} i valori delle $b_{i_1 \dots i_{r+1}}$ e supponendo che le p verifichino le equazioni

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

determinare le p in modo che

$$V = \frac{1}{2} \int_{S_n} \Sigma_i\, p^2_{i_1 \dots i_r}\, dS_n$$

sia massimo o minimo.

Dovremo perciò porre

$$\delta V = \int_{S_n} \Sigma_i\, p_{i_1 \dots i_r}\, \delta p_{i_1 \dots i_r}\, dS_n = 0 .$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori, a cagione delle (1), si troverà

$$0 = \int_{S_n} \Bigg[\Sigma_i\, p_{i_1 \dots i_r}\, \delta p_{i_1 \dots i_r}$$

$$+ (-1)^{r+1} \Sigma_i\, \lambda_{i_1 \dots i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s \frac{\partial \delta p_{i_1 \dots i_{s-1} i_{s+1} \dots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} \Bigg] dS_n$$

$$= \int_{S_n} \left[\Sigma_i\, p_{i_1 \dots i_r}\, \delta p_{i_1 \dots i_r} + \Sigma_i \sum_1^n {}_t \frac{\partial \delta p_{i_1 \dots i_r}}{\partial x_{i_t}} \lambda_{i_1 \dots i_r i_t} \right] dS_n ,$$

onde con una integrazione per parti

$$0 = \int_{S_n} \Sigma_i\, \delta p_{i_1 \dots i_r} \left\{ p_{i_1 \dots i_r} - \sum_1^n {}_t \frac{\partial \lambda_{i_1 \dots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}} \right\} dS_n + (-1)^r \int_{S_{n-1}} \Sigma_i\, \lambda_{i_1 \dots i_{r+1}}\, \delta b_{i_1 \dots i_{r+1}}\, dS_{n-1}$$

e, poiché il secondo integrale è nullo, avremo

$$p_{i_1\cdots i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial \lambda_{i_1\cdots i_r i_t}}{\partial x_{i_t}};$$

quindi pel corollario 1° della Nota citata,

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 .$$

Analogamente, *dati nello spazio* S_{n-1} *i valori delle* $a_{i_1\cdots i_{r-1}}$, *e supponendo*

$$(1') \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 ,$$

volendo determinare le $p_{i_1\cdots i_r}$ *in modo che sia*

$$V = \frac{1}{2}\int_{S_n} \Sigma_i\, p^2_{i_1\ldots i_r}\, dS_n$$

massimo o minimo, si trovano le condizioni

$$(1) \qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 .$$

Si può dimostrare *che in ambedue i casi si ottiene per* V *un minimo assoluto*.

Infatti supponiamo che le p soddisfino contemporaneamente le (4), mentre le p' soddisfino le

$$(7) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}_t \frac{\partial p'_{i_1\ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 \\ \displaystyle\sum_1^n{}_t\, p'_{i_1\ldots i_{r-1} i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = 0 \end{cases}$$

oppure le

$$(8) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \\ \displaystyle\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s\, p'_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = 0 . \end{cases}$$

Applicando le (2) o le (2'), avremo

$$(9) \qquad \int_{S_n} \Sigma_i\, (p_{i_1\ldots i_r} + p'_{i_1\ldots i_r})^2\, dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_i\, p^2_{i_1\ldots i_r}\, dS_n + 2\int_{S_n} \Sigma_i\, p_{i_1\ldots i_r}\, p'_{i_1\ldots i_r}\, dS_n + \int_{S_n} p'^2_{i_1\ldots i_r}\, dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_i\, p^2_{i_1\ldots i_r}\, dS_n + \int_{S_n} \Sigma_i\, p'^2_{i_1\ldots i_r}\, dS_n$$

il che dimostra la proposizione enunciata.

4. Passiamo ad interpretare i risultati ottenuti mediante la considerazione delle funzioni di iperspazii e delle funzioni coniugate [4].

Le (1) esprimono le condizioni di integrabilità, cioè le condizioni affinché esistano le funzioni $F\,|[S_{r-1}]|$, $F'\,|[S_{r-1}]|$, tali che

$$p_{i_1\ldots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \quad , \quad p'_{i_1\cdots i_r} = \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \, .$$

Sia σ un iperspazio parallelo alle direzioni $x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}$, ν. I suoi coseni di direzione saranno

$$\alpha_{i_1\cdots i_{r-1} i_t} = \frac{\cos(\nu x_{i_t})}{\sqrt{\sum\limits_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} ,$$

mentre tutti gli altri saranno nulli, onde

$$\frac{dF}{d\sigma} = \sum_1^n {}_t\, p_{i_1\cdots i_{r-1} i_t} \frac{\cos(\nu x_{i_t})}{\sqrt{\sum\limits_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} = \frac{a_{i_1\cdots i_{r-1}}}{\sqrt{\sum\limits_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})}} \, .$$

Rappresenteremo quindi $a_{i_1\cdots i_{r-1}}$ con

$$\sqrt{\sum_r^n \cos^2(\nu x_{i_t})} \cdot \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}\nu)} \, .$$

Denotiamo con $S_{i_1\cdots i_{r+1}}$ un iperspazio ad r dimensioni normale alle direzioni ν , $x_{i_{r+2}},\cdots x_{i_n}$. Esso sarà tangente all'iperspazio S_{n-1}. I suoi coseni di direzione saranno

$$\alpha_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}} = (-1)^s \frac{\cos(\nu x_{i_s})}{\sqrt{\sum\limits_1^{r+1} {}_s \cos^2(\nu x_{i_s})}} ,$$

mentre tutti gli altri saranno nulli; onde

$$\sqrt{\sum_1^{r+1} {}_s \cos^2 \nu x_{i_s}}\, \frac{dF}{dS_{i_1\cdots i_{r+1}}} = \sum_1^{r+1} {}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s-1} i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) = b_{i_1\cdots i_{r+1}} \, .$$

La formula (2) può quindi scriversi

$$(10) \qquad (-1)^{r-1} \int_{S_n} \Sigma \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \cdot \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}\, dS_n$$

$$= \int_{S_{n-1}} \Sigma_i\, P_{i_1\cdots i_{r-1}} \frac{dF'}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r-1}}\nu)} \sqrt{\sum_r^n \cos^2 \nu x_{i_t}}\, dS_{n-1}$$

(4) Vedi Nota precedentemente citata.

$$+\int\limits_{S_n} \Sigma_i \, P_{i_1 \ldots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF'}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} \right\} dS_n$$

$$= \int\limits_{S_{n-1}} \Sigma_i \, P'_{i_1 \ldots i_{r-1}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)} \sqrt{\sum_1^n \cos^2 \nu x_{i_t}} \, dS_{n-1}$$

$$+\int\limits_{S_n} \Sigma_i \, P'_{i_1 \ldots i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n {}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} \right\} dS_n .$$

Tenendo conto che le (4) (vedi Nota citata) sono le condizioni affinché esista una funzione Φ coniugata ad F, il teorema contenuto nel § 2 può enunciarsi nella maniera seguente: *Se* F *e* Φ *sono coniugate, basterà conoscere al contorno di* S_n *i valori delle* $\dfrac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)}$, *oppure delle* $\dfrac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}}$, *perché le due funzioni coniugate siano determinate a meno di costanti additive.*

Osservando poi che gli iperspazî $S_{i_1 \ldots i_{r+1}}$ sono tangenti ad S_{n-1}, si ha che *basterà conoscere al contorno* S_{n-1} *i valori di* F, *perché questa sia determinata, e la* Φ *sia determinata a meno di una costante additiva.*

5. Le espressioni

$$\sum_1^n {}_t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})}$$

hanno, nella teoria che andiamo esponendo, un ufficio analogo a quello del parametro differenziale secondo nella ordinaria teoria; come pure

$$\Sigma_i \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} \cdot \frac{dF'}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})}$$

ha l'ufficio del parametro differenziale misto.

Passiamo a trasformare le equazioni differenziali

$$\sum_1^n \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} x_{i_t})} = 0 \tag{11}$$

in coordinate curvilinee qualunque. Sia

$$ds^2 = \sum_1^n {}_i \, dx_i^2 = \Sigma_r \, \Sigma_s \, E_{rs} \, d\xi_r \, d\xi_s .$$

Dimostreremo che *le equazioni trasformate dipendono soltanto dai coefficienti* E_{rs} *del quadrato dell'elemento lineare.*

Per eseguire la trasformazione seguirò il seguente processo che mi sembra abbastanza rapido.

Se le equazioni (11) sono soddisfatte, ciò significa che esiste una funzione Φ coniugata alla F, onde, posto

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}=p_{i_1\cdots i_r}\quad,\quad\frac{d\Phi}{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}=q_{i_{r+1}\cdots i_n},$$

avremo

$$p_{i_1\cdots i_r}=q_{i_{r+1}\cdots i_n}.$$

Poniamo

$$\frac{dF}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}=\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}\quad,\quad\frac{d\Phi}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}=\chi_{h_{r+1}\cdots h_n},$$

avremo (5)

$$(12)\quad\begin{cases}\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}=\Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r}\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})},\\[2ex] \chi_{h_{r+1}\cdots h_n}=\Sigma_i\, q_{i_{r+1}i_n}\dfrac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}=\Sigma_i\, p_{i_1\cdots i_r}\dfrac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}.\end{cases}$$

Moltiplicando le ultime equazioni per $\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}$ e sommando per tutte le combinazioni degli indici $h_1,\cdots h$, si ottiene

$$\Sigma_h\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\chi_{h_{r+1}\cdots h_n}=p_{i_1\cdots i_r}\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})},$$

onde

$$p_{i_1\cdots i_r}=\frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}}\Sigma_k\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}\chi_{k_{r+1}\cdots k_n}.$$

Sostituendo questi valori nelle (12), abbiamo

$$\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}=\frac{1}{\dfrac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}}\Sigma_k\,\chi_{k_r\cdots k_n}\Sigma_i\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\cdot\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}.$$

Ora si ha

$$\Sigma\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}\cdot\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})}{d(\xi_{k_1}\cdots\xi_{k_r})}=\begin{vmatrix}E_{h_1k_1},\cdots E_{h_1k_r}\\ \cdots\cdots\cdots\\ E_{h_rk_1},\cdots E_{h_rk_r}\end{vmatrix}$$

$$\left[\frac{d(x_{i_1}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_n})}\right]^2=\begin{vmatrix}E_{11}\cdots E_{1n}\\ \cdots\cdots\\ E_{n1}\cdots E_{nn}\end{vmatrix}=D.$$

Adottando per semplicità il simbolo

$$\begin{bmatrix}h_1\cdots h_r\\ k_1\cdots k_r\end{bmatrix}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}E_{h_1k_1}\cdots E_{h_1k_r}\\ \cdots\cdots\cdots\\ E_{h_rk_1}\cdots E_{h_rk_r}\end{vmatrix}$$

(5) «Atti Acc. Lincei», vol. V, 1° sem., p. 162. [In questo vol.: XXIII, p. 407].

potremo scrivere

$$\tilde{\omega}_{h_1\dots h_r} = \sqrt{D}\,\Sigma_k \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} \chi_{k_{r+1}\dots k_n}\,. \tag{14}$$

Analogamente si troverebbe

$$\chi_{k_{r+1}\dots k_n} = \sqrt{D}\,\Sigma_h \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\dots h_r}\,. \tag{14}$$

Ora per le condizioni di integrabilità a cui debbono soddisfare le χ si ottiene

$$\sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_k \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s-1}\,,\ k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \right\} = 0. \tag{11'}$$

Queste equazioni non sono altro che le trasformate delle equazioni (11).

6. Nasce ora spontaneamente il pensiero di studiare le espressioni differenziali

$$\Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})} \tag{15}$$

$$\sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s-1}\, k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \right\} = \theta_{k_r\dots k_n}\,, \tag{16}$$

nelle quali si ritengono le $F\,|\,[S_{r-1}]\,|$, $F'\,|\,[S_{r-1}]\,|$ due funzioni arbitrarie di primo grado, in relazione alla forma quadratica differenziale

$$\Sigma_r \Sigma_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s = ds^2, \tag{17}$$

senza che si ponga alcuna restrizione per i coefficienti E_{rs}, salvo quella di essere $E_{rs} = E_{sr}$.

Cominciamo dal dimostrare che l'espressione (15) è un invariante differenziale della forma (17).

Supponiamo infatti che sia

$$\Sigma_r \Sigma_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s = \Sigma_r \Sigma_s E'_{rs}\, d\xi'_r\, d\xi'_s\,.$$

Avremo

$$\frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} = \Sigma_l \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \cdot \frac{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})}$$

$$\frac{dF'}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} = \Sigma_m \frac{dF'}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})} \frac{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})}\,.$$

Onde

$$\Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \frac{dF'}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})}$$

$$= \Sigma_l \Sigma_m \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \frac{dF'}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})} \Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \frac{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})}\,.$$

Ma, con un calcolo semplice, si ottiene

$$\Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \cdot \frac{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})} = \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}',$$

mettendo un apice al simbolo analogo a quello introdotto precedentemente per denotare che ci si riferisce ai coefficienti E'_{rs} invece che ai coefficienti E_{rs}.

Quindi

$$(18) \qquad \Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_r})}$$

$$= \Sigma_l \Sigma_m \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \cdot \frac{dF'}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_r})}$$

il che dimostra la proprietà invariantiva enunciata.

7. Poniamo, il che è possibile,

$$\frac{dF'}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} = \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{h_1 \cdots h_{s-1} h_{s+1} \cdots h_r}}{\partial \xi_{h_s}}$$

$$(19) \qquad \Pi'_{l_1 \cdots l_{r-1}} = \Sigma_h P'_{h_1 \cdots h_{r-1}} \frac{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_{r-1}})}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_{r-1}})}.$$

Con un calcolo facile avremo

$$\frac{dF'}{d(\xi'_1 \cdots \xi'_{l_r})} = \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial \Pi'_{l_1 \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_r}}{\partial \xi'_{l_s}}.$$

Ciò premesso dalla (18) si deduce

$$(20) \qquad \int_{S_n} \Sigma_h \Sigma_k \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots h_n \\ k_{r+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{k_1 \cdots k_{s-1} k_{s+1} \cdots k_r}}{\partial \xi_{k_s}} dS_n$$

$$= \int_{S_n} \Sigma_l \Sigma_m \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots l_n \\ m_{r+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial \Pi'_{m_1 \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_r}}{d\xi'_{m_s}} dS'_n,$$

$$\text{essendo} \quad dS_n = \sqrt{D}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n \quad , \quad dS'_n = \sqrt{D'}\, d\xi'_1 \cdots d\xi'_n.$$

Ora, con integrazioni per parti, l'integrale a sinistra può trasformarsi in

$$-\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \sum_{r}^{n}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{k_s}} \left\{ \Sigma_k \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s-1} k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi'_{h_1} \cdots \xi'_{h_r})} \right\} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

$$= -\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \theta_{k_r \cdots k_1}\, d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

supponendo le P′ nulle al contorno di S_n. Analogamente l'integrale del secondo membro della (20) si trasforma in

$$-\int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{m_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D'} \begin{bmatrix} l_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ m_r \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \right\} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n$$

$$= -\int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \theta'_{m_r \cdots m_n} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n .$$

Ne segue che

$$\int_{S_n} \Sigma_k P'_{k_1 \cdots k_{r-1}} \theta_{k_r \cdots k_n} d\xi_1 \cdots d\xi_n = \int_{S_n} \Sigma_m \Pi'_{m_1 \cdots m_{r-1}} \theta'_{m_r \cdots m_n} d\xi'_1 \cdots d\xi'_n .$$

Possiamo sostituire nella precedente equazione alle Π′ i loro valori (19), e poiché le P′ sono funzioni arbitrarie, così avremo

$$\theta_{k_r \cdots k_n} = \frac{1}{\dfrac{(d\xi_1 \cdots \xi_n)}{d(\xi'_1 \cdots \xi'_n)}} \left\{ \Sigma_m \frac{d(\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_{r-1}})}{d(\xi'_{m_1} \cdots \xi'_{m_{r-1}})} \theta'_{m_1 \cdots m_n} \right\} = \Sigma_m \frac{d(\xi'_{m_r} \cdots \xi'_{m_n})}{d(\xi_{k_r} \cdots \xi_{k_n})} \theta'_{m_r \cdots m_n} .$$

Ora può porsi

$$\theta_{k_r \cdots k_n} = \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{d\xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots h_n \\ k_r \cdots k_{s+1} k_{s+1} \cdots k_n \end{bmatrix} \frac{dF}{d(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_r})} \right. = \frac{d\Psi}{d(\xi_{k_r} \cdots \xi_{k_n})} ,$$

quindi per la formula precedente, avremo

$$\theta'_{m_r \cdots m_n} = \sum_r^n {}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi'_{m_s}} \left\{ \Sigma_l \sqrt{D'} \begin{bmatrix} m_r \cdots m_{s-1} m_{s+1} \cdots m_n \\ l_{r+1} \cdots\cdots\cdots\cdots l_n \end{bmatrix}' \frac{dF}{d(\xi'_{l_1} \cdots \xi'_{l_r})} \right. = \frac{d\Psi}{d(\xi'_{m_r} \cdots \xi'_{m_n})} .$$

La funzione $\Psi \,|[S_{n-r}]|$ gode dunque, rispetto alla forma quadratica differenziale (17), delle seguenti proprietà:

1° *Le sue derivate si esprimono mediante le derivate della* F *ed i coefficienti della forma differenziale* (17);

2° *l'espressione, mediante questi elementi, delle derivate non muta forma per un cambiamento qualunque delle variabili.*

8. Chiuderò questa Nota accennando che può risolversi completamente il problema della integrazione del sistema di equazioni differenziali (4) quando si conoscono al contorno i valori delle a, oppure delle b, nel caso in cui lo spazio S_n sia uno spazio sferico. È chiaro che questa questione comprende come caso particolare gli ordinari problemi sull'integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 = 0$.

XXVI.

SULLA INTEGRAZIONE DI UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI CHE SI PRESENTA NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI CONIUGATE

« Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. III, 1889; pp. 260–272.

1. In una Nota recentemente pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » [1], dopo aver considerato dei parametri differenziali i quali hanno rispetto alle funzioni di iperspazî un ufficio analogo a quello dei noti parametri differenziali rispetto alle ordinarie funzioni, ho accennato alla possibilità di integrare un sistema di equazioni differenziali con date condizioni ai limiti, problema che comprende come caso particolare le ordinarie questioni sulla integrazione della equazione differenziale $\Delta^2 = 0$, e che risolve una questione fondamentale relativamente alle funzioni coniugate le più generali [2].

Mi permetto ora di tornare nuovamente sul problema e di svilupparne la soluzione.

Il sistema di equazioni differenziali è il seguente

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \tag{1}$$

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial p_{i_1 \cdots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0 . \tag{1'}$$

In queste equazioni $x_1 x_2 \cdots x_n$ sono le variabili indipendenti e le $p_{i_1 \cdots i_r}$, ottenute per tutte le combinazioni r ad r degli indici $i_1 \cdots i_n \equiv 1, 2 \cdots n$, sono le funzioni incognite. Supporremo le p tali che mutino segno per una trasposizione degli indici. Le (1) sono ottenute per tutte le combinazioni degli indici $r+1$ a $r+1$, e le (1') per le combinazioni $r-1$ a $r-1$.

Nella mia Nota *Sulle funzioni coniugate* ho dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinché siano soddisfatte le (1), è che si possa porre

$$p_{i_1 \cdots i_r} = \sum_{1}^{r}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_r}}{\partial x_{i_t}} ,$$

(1) « Rend. R. Acc. Lincei », 5 maggio 1889. [In questo vol.: XXV, pp. 433–443].
(2) Ibid., 28 aprile 1889. [In questo vol.: XXIV, pp. 420–432].

e ho dimostrato pure che le P possono ottenersi dalle p con sole operazioni di quadratura (3). Se quindi si tien conto del teorema 2° della Nota ora citata, avremo che alle (1) e (1′) potranno sostituirsi le equazioni seguenti

$$(2) \qquad (-1)^r \Delta^2 P_{i_1 \ldots i_{r-1}} + \sum_{1}^{r-1}{}_t (-1)^t \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \sum_{1}^{n}{}_s \frac{\partial P_{i_1 \cdots i_{t-1} i_{t+1} \cdots i_{r-1} i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

2. Passiamo alle condizioni al contorno che definiscono le $p_{i_1 \ldots i_r}$.

Sia il campo S_n una porzione di uno spazio piano ad n dimensioni entro il quale le p e le P sono monodrome finite e continue insieme alle loro derivate, e denotiamo il contorno di S_n con S_{n-1} di cui ν sia la normale diretta verso l'interno di S_n. Pongasi

$$(3) \qquad \sum_{1}^{n}{}_t \, p_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t} \cos \nu x_{i_t} = a_{i_1 \ldots i_{r-1}}$$

$$(3') \qquad \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = b_{i_1 \ldots i_{r+1}},$$

per un teorema dimostrato nella citata Nota, avremo che entro S_n le p sono determinate quando sono noti al contorno i valori delle a oppure delle b.

Noi ci proponiamo ora di eseguire la effettiva determinazione delle p quando siano note le a o le b nel caso in cui lo spazio S_n sia un campo sferico.

3. Prima di procedere oltre vediamo come può interpretarsi questa questione nella teoria generale delle funzioni coniugate.

Siano $F[S_{r-1}]$, e $\Phi[S_{n-r-1}]$ due funzioni coniugate. Poniamo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_r})} = p_{i_1 \ldots i_r};$$

adottando le notazioni della Nota più volte citata (4), avremo

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)} = \frac{a_{i_1 \cdots i_{r-1}}}{\sqrt{\sum_{r}^{n} \cos^2 (\nu x_{i_t})}}$$

$$\frac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}} = \frac{b_{i_1 \cdots i_{s+1}}}{\sqrt{\sum_{1}^{r+1}{}_s \cos^2 (\nu x_{i_s})}}$$

Quindi il problema che ci proponiamo risolvere consiste nel determinare le due funzioni coniugate F e Φ entro uno spazio sferico, essendo nota al contorno la

$$\frac{dF}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{r-1}} \nu)}, \quad \text{oppure la} \quad \frac{dF}{dS_{i_1 \cdots i_{r+1}}}.$$

(3) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 602. [In questo vol.: XXIV, p. 423].
(4) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 635. [In questo vol.: XXV, p. 438].

4. Cominceremo dal ricercare le condizioni alle quali devono soddisfare le a e le b e questa ricerca la condurremo senza supporre che S_n sia un campo sferico, ma ammettendolo qualunque.

Due condizioni possono ottenersi subito; infatti dovremo evidentemente avere:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{1}^{n}{}_t\, a_{i_1 \ldots i_{r-2} i_t} \cos \nu x_{i_t} = 0$$

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s\, b_{i_1 \ldots i_{s-1} i_{s+1} \ldots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = 0 .$$

Prendiamo poi nella formula (2) della citata Nota [5], la $P'_{i_1 \ldots i_{r-1}} = 1$ e tutte le altre P' uguali a zero. Si otterrà:

$$\int_{S_{n-1}} a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\, dS_{n-1} + \int_{S_n} \sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial p_{i_1 \ldots i_{r-1} i_t}}{\partial x_{i_t}}\, dS_n = 0 ;$$

dovremo dunque avere

$$\text{(II)} \qquad \int_{S_{n-1}} a_{i_1 \ldots i_{r-1}}\, dS_{n-1} = 0 .$$

In modo analogo si troverebbe:

$$\text{(II}'\text{)} \qquad \int_{S_{n-1}} b_{i_1 \ldots i_{r+1}}\, dS_{n-1} = 0 .$$

Prendiamo ora un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ per individuare i punti dell'iperspazio S_{n-1} e denotiamo come sempre con ν la normale ad esso.

Poniamo:

$$\xi_1 = u_1 , \xi_2 = u_2 , \cdots , \xi_{n-1} = u_{n-1} , \xi_n = \nu .$$

Sia

$$\sum_{1}^{n-1}{}_r \sum_{1}^{n-1}{}_s E_{rs}\, du_r\, du_s$$

il quadrato dell'elemento lineare di S_{n-1}.

Quello di S_n risulterà dato da

$$\sum_{1}^{n-1}{}_r \sum_{1}^{n-1}{}_s E_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2 .$$

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 631. [In questo vol.: XXV, p. 434].

Poniamo, come sopra,

$$p_{i_1\ldots i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} \quad , \quad \tilde{\omega}_{i_1\ldots i_r} = \frac{dF}{d(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_r})},$$

avremo

$$(4) \qquad p_{i_1\ldots i_r} = \Sigma_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \frac{d(\xi_{h_1}\cdots\xi_{h_r})}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_r})} = \Sigma_h \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r},$$

essendo

$$D = \left\{ \frac{d(x_1\cdots x_n)}{d(\xi_1\cdots\xi_n)} \right\}^2 = \begin{vmatrix} E_{1,1}\cdots\cdots E_{1,n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{n-1,1}\cdots E_{n-1,n-1} \end{vmatrix},$$

onde, scegliendo opportunamente in ciascuna formola il segno di $\sqrt{D}$, avremo

$$b_{i_1\ldots i_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \Sigma_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \sum_1^{r+1}{}_s \frac{d(x_{i_s} x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})} \cos(\nu x_{i_s})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \Sigma_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \sum_1^{n}{}_s \frac{d(x_{i_s} x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})} \cos \nu x_{i_s}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \Sigma_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \sum_{r+1}^{n}{}_l (-1)^l \frac{d\, x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_{l-1}}\, \xi_{h_{l+1}}\cdots\xi_{h_n})} \sum_1^{n}{}_s \frac{\partial x_{i_s}}{\partial \xi_{h_l}} \cos(\nu x_{i_s}).$$

Ora

$$\sum_1^n \frac{\partial x_{i_s}}{\partial \xi_{h_l}} \cos(\nu x_{i_s})$$

è eguale ad 1 se $h_l = n$, altrimenti è nulla. Quindi:

$$b_{i_1\ldots i_{r+1}} = \frac{1}{\sqrt{D}} \Sigma'_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})},$$

ove Σ'_h si intende estesa a tutte le combinazioni degli indici $1, 2, \cdots, n-1$, r ad r e $h_1\cdots h_{n-1} \equiv 1, 2\cdots n-1$.

Ne segue che

$$\Sigma_i\, b_{i_1\ldots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D}} \Sigma'_h\, \tilde{\omega}_{h_1\ldots h_r} \Sigma_i \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})} \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}.$$

Ma

$$\Sigma_i \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{h_{r+1}}\cdots u_{h_{n-1}})} \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})} = \begin{vmatrix} E_{h_{r+1},k_{r+1}}\cdots E_{h_{n-1},k_{r+1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E_{h_{r+1},k_{n-1}}\cdots E_{h_{n-1},k_{n-1}} \end{vmatrix};$$

onde, adoperando una notazione già usata [6], potremo rappresentare la precedente espressione col simbolo

$$\mathrm{D}\begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix},$$

e per conseguenza avremo

$$(5)\qquad \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})} = \Sigma'_h \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r}.$$

Da questa relazione si deduce

$$(6)\qquad \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = \Sigma'_k \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_1\cdots h_r \\ k_1\cdots k_r\end{bmatrix} \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})},$$

onde vediamo che le b debbono soddisfare ancora alle condizioni

$$(\mathrm{III})\qquad \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{h_s}} \left\{ \Sigma'_k \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_1\cdots h_{s-1}\, h_{s+1}\cdots h_{r+1} \\ k_1\cdots k_r\end{bmatrix} \Sigma_i\, b_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d\,(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})} \right\} = 0.$$

Queste equazioni sono tante quante sono le combinazioni degli indici $1, 2\cdots n-1$, $r+1$ a $r+1$.

Osserviamo ora che, posto

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s + d\xi_n^2 = \sum_1^{n}{}_r \sum_1^{n}{}_s \mathrm{E}_{rs}\, d\xi_r\, d\xi_s,$$

avremo

$$\mathrm{E}_{sn} = \mathrm{E}_{ns} = 0\ (s \gtrless n) \quad , \quad \mathrm{E}_{n,n} = 1,$$

onde

$$\begin{vmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_{r+1}\cdots k_n \end{vmatrix} = 0$$

se uno degli h (o k) è uguale ad n, mentre tutti gli indici k (o h) sono diversi da n, e

$$\begin{bmatrix} h_{r+1},\cdots h_{n-1}, n \\ k_{r+1},\cdots k_{n-1}, n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_{n-1} \\ k_{r+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix}$$

se tutti gli indici h e k sono diversi da n.

Consideriamo le espressioni che nella citata Nota [7] ho indicato con $\theta_{k_r\cdots k_n}$, cioè

$$\sum_r^n{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial \xi_{k_s}} \left\{ \Sigma_h \sqrt{\mathrm{D}} \begin{bmatrix} h_{r+1}\cdots h_n \\ k_r\cdots k_{s-1}\, k_{s+1}\cdots k_n \end{bmatrix} \tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} \right\}.$$

(6) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 637. [In questo vol.: XXV, p. 440].

(7) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, 1° sem., p. 638. [In questo vol.: XXV, p. 441].

Nel nostro caso avremo

$$(7)\qquad \theta_{k_r\cdots k_{n-1},n}=\sum_r^{n-1}{}_s(-1)^s\frac{\partial}{\partial u_{k_s}}\left\{\Sigma'_h\sqrt{D}\begin{bmatrix}h_{r+1}\cdots h_{n-1}\\ k_r\cdots k_{s-1}\,k_{s+1}\cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\right\}$$

$$+(-1)^r\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\Sigma''_h\sqrt{D}\begin{bmatrix}h_r\cdots h_{n-1}\\ k_r\cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n}\right\},\qquad (k_r\cdots k_{n-1}\gtrless n)$$

$$(8)\qquad \theta_{h_r\cdots k_n}$$

$$=\sum_r^{n}{}_s(-1)^s\frac{\partial}{\partial u_{k_s}}\left\{\Sigma''_h\sqrt{D}\begin{bmatrix}h_r\cdots h_{n-1}\\ k_r\cdots k_{s-1}\,k_{s+1}\cdots k_n\end{bmatrix}\tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n}\right\},\qquad (k_r,\cdots k_n\gtrless n)$$

in cui Σ''_h è una somma estesa a tutte le combinazioni degli indici $1,2\cdots n-1$, $r-1$ a $r-1$, e $(h_1\cdots h_{n-1})\equiv(1,2\cdots n-1)$.

Le a sono date da

$$a_{i_1\cdots i_{r-1}}=\sum_1^n{}_t\,p_{i_1\cdots i_{r-1}\,i_t}\cos(\nu x_{i_t})$$

$$=\sum_r^n{}_t(-1)^{t-r}\Sigma_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_r}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_{t-1}}\,x_{i_{t+1}}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_{r+1}}\cdots\xi_{h_n})}\cos\nu x_{i_t}$$

$$=\Sigma''_h\,\tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n}\frac{1}{\sqrt{D}}\frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{h_r}\cdots\xi_{h_{n-1}}\,\xi_n)},$$

quindi

$$\Sigma_i\,a_{i_1\cdots i_{r-1}}\frac{d(x_{i_r}\cdots x_{i_n})}{d(\xi_{k_r}\cdots\xi_{k_{n-1}}\,\xi_n)}=\Sigma''_h\sqrt{D}\begin{bmatrix}h_r\cdots h_{n-1}\\ k_r\cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde\omega_{h_1\cdots h_{r-1},n}.$$

Se sono soddisfatte le (1) e (1′) deve aversi [8]

$$\theta_{k_r\cdots k_n}=0.$$

Dalla (8) si deducono dunque le seguenti condizioni per le a,

$$(\mathrm{IV})\qquad \Sigma_i\sum_r^n{}_s(-1)^s\frac{\partial}{\partial u_{k_s}}\left(\sum_1^r{}_t(-1)^t\,a_{i_1\cdots i_{t-1}\,i_{t+1}\cdots i_r}\cos(\nu x_{i_t})\right)$$

$$\times\frac{d(x_{i_{r+1}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{s-1}}\,u_{k_{s+1}}\cdots u_{k_n})}=0.$$

5. Ciò premesso passiamo alla risoluzione della questione propostaci. In primo luogo si potrà osservare che i due problemi di determinare le p quando si conoscono le a, oppure le b, rientrano l'uno nell'altro.

Ponendo infatti

$$p_{i_1\cdots i_r}=q_{i_{r+1}\cdots i_n},$$

(8) Ibid.

risulta

$$a_{i_1\cdots i_{r-1}} = \sum_{1}^{n}{}_t\, p_{i_1\cdots i_{t-1}\, i_t} \cos(\nu x_{i_t}) = \sum_{r}^{n}{}_t (-1)^{t-r} q_{i_r\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n} \cos(\nu x_{i_t})$$

$$b_{i_1\cdots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \cos \nu x_{i_s} = (-1)^n \sum_{1}^{n} q_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s} \cos \nu x_{i_s}$$

e le q soddisfano alle equazioni differenziali

$$\sum_{r}^{n} (-1)^{t-r} \frac{dq_{i_r\cdots i_{t-1}\, i_{t+1}\cdots i_n}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

$$\sum_{1}^{n}{}_s \frac{\partial q_{i_{r+2}\cdots i_n\, i_s}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

perfettamente analoghe alle (1) e (1').

Ci limiteremo perciò a risolvere la questione ammettendo date le b al contorno.

Prendiamo come unità di lunghezza il raggio del campo sferico S_n limitato dal contorno S_{n-1} e denotiamo con ρ la distanza dei punti di S_n dall'origine, centro dello spazio sferico.

Poniamo

$$B_{i_1\cdots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}\, x_{i_s},$$

avremo

$$\Delta^2 B_{i_1\cdots i_{r+1}} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s (x_{i_s} \Delta^2 p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}} + p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}} \Delta^2 x_{i_s})$$

$$+ \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

Ora al contorno S_{n-1} si ha

$$B_{i_1\cdots i_{r+1}} = -b_{i_1\cdots i_{r+1}},$$

per conseguenza le funzioni B potranno immediatamente determinarsi con sole operazioni di quadratura (9).

Poiché le b debbono soddisfare le condizioni (II'), così avremo che le B/ρ si conserveranno sempre finite, onde potremo porre

$$B_{i_1\cdots i_{r+1}} = -\rho \mathbf{B}_{i_1\cdots i_{r+1}}.$$

(9) Vedi una Nota del prof. TONELLI pubblicata nei « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Gottinga », 1875.

I punti del contorno S_{n-1} li supporremo individuati, come precedentemente, per mezzo di un sistema di coordinate curvilinee $u_1, u_2 \cdots u_{n-1}$ e supporremo sempre che

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s E_{rs}\, du_r\, du_s$$

sia il quadrato dell'elemento lineare dello spazio S_{n-1}. Ogni punto dello spazio S_n potrà essere proiettato dall'origine sopra S_{n-1} e quindi sarà individuato dalle coordinate $u_1, u_2 \cdots u_{n-1}$ della proiezione e dalla sua distanza ρ dall'origine. Se poniamo $x_i = \rho y_i$, avremo che le y_i, saranno le coordinate della proiezione.

Conduciamo per un punto qualunque di S_n un iperspazio sferico T_{n-1} concentrico a S_{n-1} di raggio ρ. Esso racchiuderà nel suo interno un certo spazio T_n.

Il quadrato dell'elemento lineare di T_{n-1} sarà

$$\sum_1^{n-1}{}_r \sum_1^{n-1}{}_s \mathbf{E}_{rs}\, du_r\, du_s$$

ove

$$\mathbf{E}_{rs} = \rho^2\, E_{rs}.$$

La normale a T_{n-1}, diretta verso l'interno di T_n, sarà $-\rho$ e i coseni di direzione della normale stessa risulteranno

$$-\frac{x_1}{\rho}\,,\ -\frac{x_2}{\rho}\,, \ldots -\frac{x_n}{\rho}\,.$$

Noi possiamo considerare T_{n-1} come il contorno dello spazio T_n; quindi le formule trovate nel § 4 potranno applicarsi a T_{n-1} invece che ad S_{n-1}. Basterà osservare che dovremo porre invece delle $b_{i_1 \cdots i_{r+1}}$, $B_{i_1 \cdots i_{r+1}}/\rho = \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}}$, prendendo i valori di queste funzioni nei punti di T_{n-1}, e a ν dovremo sostituire $-\rho$. Oltre a ciò in luogo di D dovremo porre

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_{1,1} & \cdots & \mathbf{E}_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{E}_{n-1,1} & \cdots & \mathbf{E}_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \rho^{2(n-1)} \begin{vmatrix} E_{1,1} & \cdots & E_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E_{n-1,1} & \cdots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

cioè dovremo sostituire a D, $\rho^{2(n-1}$ D e così analogamente invece di

$$\begin{bmatrix} h_1 \cdots h_q \\ k_1 \cdots k_q \end{bmatrix}$$

dovremo porre

$$\rho^{-2(n-q-1)} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_q \\ k_1 \cdots k_q \end{bmatrix}.$$

Applichiamo ora le (6). Scegliendo convenientemente il segno di $\sqrt{D}$, otterremo

$$\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_r} = -\rho^r \Sigma'_k \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} \Sigma_i \mathbf{B}_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d(y_{i_{r+2}}\cdots y_{i_n})}{d(u_{k_{r+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}, \qquad (h_1\cdots h_r \gtrless n).$$

Se teniamo conto delle equazioni $\theta_{k_r\cdots k_{n-1},n} = 0$, le (7) e (5) dànno

$$(-1)^r \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho^{n-2r+1}\Sigma''_h \sqrt{D}\begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_{r-1},n}\right\}$$

$$= \Sigma_i \sum_r^{n-1}{}_s (-1)^s \frac{\partial}{\partial u_{k_s}} \mathbf{B}_{i_1\cdots i_{r+1}} \frac{d(x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{s-1}} u_{k_{s+1}}\cdots u_{k_{n-1}})}$$

$$= (-1)^r \Sigma_i \frac{d(\mathbf{B}_{i_1\cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}}\cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{n-1}})}\rho^{n-r-1}.$$

Prendiamo

$$\int_0^\rho \rho^{n-r-1}\mathbf{B}_{i_1\cdots i_{r+1}}\,d\rho;$$

otterremo delle funzioni che per $\rho = 0$ si annullano almeno d'ordine $n - r$; onde potremo scriverle eguali a

$$\rho^{n-r} C_{i_1\cdots i_{r+1}},$$

essendo le C delle funzioni sempre finite. Quindi:

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\rho^{n-2r+1}\Sigma''_h \sqrt{D}\begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_{r-1}\,n}\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\Sigma_i \frac{d(C_{i_1\cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}}\cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{n-1}})}\rho^{n-r}\right\}.$$

Integrando si otterrà

$$\Sigma''_h \sqrt{D}\begin{bmatrix} h_r \cdots h_{n-1} \\ k_r \cdots k_{n-1}\end{bmatrix}\tilde{\omega}_{h_1\cdots h_{r-1}\,n}$$

$$= \Sigma_i \frac{d(C_{i_1\cdots i_{r+1}}, y_{i_{r+2}}\cdots y_{i_n})}{d(u_{k_r}\cdots u_{k_{n-1}})}\rho^{r-1} + K_{k_r\cdots k_{n-1}}\rho^{2r-n-1},$$

essendo le K delle costanti arbitrarie.

Da questa formula, tenendo conto delle (8), segue immediatamente che le equazioni

$$\theta_{k_r\cdots k_n} = 0$$

risultano identicamente soddisfatte.

Dalle equazioni precedenti si deduce:

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\, n} = \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} \Sigma_i \frac{d\,(C_{i_1 \cdots i_{r+1}}\,,\, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d\,(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})}\, \rho^{r-1}$$

$$+ \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} K_{k_r \cdots k_{n-1}}\, \rho^{2r-n-1}\,.$$

Ora, tenendo conto delle (4), si ha che, affinché le p si conservino sempre finite è necessario e sufficiente che le $\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_r}$ siano, rispetto a ρ, infinitesime almeno d'ordine r e le $\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\,,\, n}$ almeno d'ordine $r-1$. Ciò non può succedere altro che prendendo le costanti arbitrarie K nulle. Quindi otterremo:

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_r} = -\rho^r\, \Sigma_k' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_r \\ k_1 \cdots k_r \end{bmatrix} \Sigma_i\, \mathbf{B}_{i_1 \cdots i_{r+1}} \frac{d\,(y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d\,(u_{k_{r+1}} \cdots u_{k_{n-1}})}\,, \qquad (h_1 \cdots h_r \gtrless n)$$

$$\tilde{\omega}_{h_1 \cdots h_{r-1}\,,\, n} = \rho^{r-1}\, \Sigma_k'' \sqrt{D} \begin{bmatrix} h_1 \cdots h_{r-1} \\ k_1 \cdots k_{r-1} \end{bmatrix} \Sigma_i \frac{d\,(C_{i_1 \cdots i_{r+1}}\,, y_{i_{r+2}} \cdots y_{i_n})}{d\,(u_{k_r} \cdots u_{k_{n-1}})}\,, \quad (h_1 \cdots h_{r-1} \gtrless n).$$

Queste formule risolvono completamente la questione propostaci. Il processo seguìto prova che, *almeno nel caso in cui* S_{n-1} *sia uno spazio sferico le equazioni* (I') (II') e (III) *dànno le condizioni necessarie e sufficienti a cui debbono soddisfare le b affinché possano corrispondere ad esse delle p che soddisfacciano le* (1) *e* (1').

Pisa, ottobre 1889.

XXVII.

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CHE PROVENGONO DA QUESTIONI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

« Rend. Lincei », ser. IV, vol. VI_1, 1890_1, pp. 43-54.

In una ricerca, che spero di poter comunicare a cotesta Accademia, mi è necessario considerare gli integrali di un sistema di equazioni differenziali, che provengono dall'annullare la variazione prima di un integrale multiplo come dipendenti da certi elementi dati ai limiti dell'integrale stesso. Perciò mi permetto di presentare in questa Nota alcuni studi sulle equazioni differenziali che provengono dai problemi del calcolo delle variazioni, fra cui un contributo ai criteri atti a riconoscere se il dare certi elementi ai limiti è sufficiente perché siano definite le funzioni incognite del problema. Non entrerò nella questione di cercare se gli elementi dati ai limiti sono *caratteristici*. Questa questione che presenta grande difficoltà può ritenersi risoluta solo in pochi casi, fra i quali quelli notevolissimi trattati da SCHWARZ e recentemente generalizzati da PICARD in una interessante Memoria pubblicata negli « Acta Mathematica ».

JACOBI ha osservato che le equazioni differenziali che si trovano annullando la variazione prima di un integrale semplice possono trasformarsi e ridursi ad una forma eguale a quella alla quale era pervenuto HAMILTON per le equazioni della dinamica. In modo analogo si possono ridurre ad una stessa forma le equazioni differenziali che provengono dall'annullare la variazione prima degli integrali multipli. Questa forma comprende come caso particolare la forma canonica di JACOBI. Nella presente Nota mi sono servito delle equazioni differenziali poste sotto questa forma.

I.

1. Siano $y_1, y_2, \cdots, y_p$ delle funzioni di n variabili $x_1, x_2, \cdots, x_n$, ed abbiasi una funzione F di $x_1, x_2, \cdots, x_n$, di $y_1, y_2, \cdots, y_p$ e delle loro derivate parziali.

Potremo supporre che le $y_1, y_2, \cdots, y_p$ siano fra loro indipendenti, oppure che siano legate da certe relazioni

$$(1) \qquad F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \cdots, F_r = 0.$$

Introduciamo come variabili ausiliarie le derivate parziali delle $y_1, y_2, \cdots, y_p$ di ordine *inferiore* a quelle che compariscono con un indice di derivazione massimo in F e nelle equazioni date di condizione, vale a dire consideriamo tutte le

$$z_h = \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} y_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \cdots \partial x_n^{k_n}} = Y^{(i)}_{k_1 k_2 \cdots k_n}$$

tali che esistano nella F e nelle (1) le $Y^{(i)}_{h_1 h_2 \cdots h_n}$, per cui si abbia

$$h_1 \geqq k_1 \quad , \quad h_2 \geqq k_2, \cdots, h_n \geqq k_n$$
$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n > k_1 + k_2 + \cdots + k_n .$$

Si potrà considerare F come funzione di $z_1, z_2, \cdots, z_n$ e delle loro derivate prime

$$z_h^{(i)} = \frac{\partial z_i}{\partial x_h},$$

mentre fra le z_i e le $z_h^{(i)}$ passeranno certe relazioni

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \cdots, F_r = 0 \quad , \quad F_{r+1} = 0, \cdots, F_s = 0.$$

Di queste, le prime r potremo supporre essere le relazioni date (1), le altre saranno evidentemente delle relazioni lineari fra le z_i e le $z_h^{(i)}$.

2. Consideriamo ora il problema di annullare la variazione prima di

$$I = \int F \, dx_1 \cdots dx_n .$$

Posto

$$\Phi = F + \sum_1^s {}_t \lambda_t F_t, \tag{2}$$

otterremo le equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_1^n {}_h \frac{\partial}{\partial x_h} \frac{\partial \Phi}{\partial z_h^{(i)}} - \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0 \\ & F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \cdots, F_s = 0. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Supponiamo che in Φ, delle $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \cdots, z_n^{(i)}$, compariscano soltanto le $z_{i_1}^{(i)}, z_{i_2}^{(i)}, \cdots, z_{i_t}^{(i)}$. Potremo scrivere le equazioni precedenti sotto la forma

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_1}^{(i)}} + \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_2}^{(i)}} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_{i_t}} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_t}^{(i)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} \\ & F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \cdots, F_s = 0. \end{aligned} \right.$$

Poniamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_1}^{(i)}} = p_{i_1}^{(i)} \;,\; \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_2}^{(i)}} = p_{i_2}^{(i)}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_t}^{(i)}} = p_{i_t}^{(i)} \tag{4}$$

e ammettiamo che il sistema di equazioni (4) insieme alle

$$F_1 = 0 \quad , \quad F_2 = 0, \cdots, F_s = 0 \tag{1}$$

possa risolversi rispetto alle $z^{(i)}_{i_l}$ e alle λ_h, vale a dire che il Jacobiano delle $\partial\Phi/\partial z^{(i)}_{i_l}$ e F_h rispetto alle $z^{(i)}_{i_l}$ e alle λ_h sia differente da zero. Sostituiamo i valori che si ottengono mediante questa risoluzione in

$$H = \Phi - \sum_1^m {}_i \left[z^{(i)}_{i_1} p^{(i)}_{i_1} + z^{(i)}_{i_2} p^{(i)}_{i_2} + \cdots + z^{(i)}_{i_t} p^{(i)}_{i_t}\right]. \tag{5}$$

Variando ambo i membri otterremo

$$\begin{aligned}
&\sum_1^m {}_i \left[\frac{\partial H}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_1}}\delta p^{(i)}_{i_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_t}}\delta p^{(i)}_{i_t}\right]\\
&= \sum_1^m {}_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\delta z_i - z^{(i)}_{i_1}\delta p^{(i)}_{i_1} - \cdots - z^{(i)}_{i_t}\delta p^{(i)}_{i_t}\right]\\
&+ \sum_1^m {}_i \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z^{(i)}_{i_1}} - p^{(i)}_{i_1}\right)\delta z^{(i)}_{i_1} + \cdots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z^{(i)}_{i_t}} - p^{(i)}_{i_t}\right)\delta z^{(i)}_{i_t}\right]\\
&+ \sum_1^s {}_h F_h \,\delta\lambda_h .
\end{aligned}$$

Se quindi teniamo conto delle (4) e (1) avremo

$$\begin{aligned}
&\sum_1^m {}_i \left[\frac{\partial H}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_1}}\delta p^{(i)}_{i_1} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_t}}\delta p^{(i)}_{i_t}\right]\\
&= \sum_1^m {}_i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}\delta z_i - z^{(i)}_{i_1}\delta p^{(i)}_{i_1} - \cdots - z^{(i)}_{i_t}\delta p^{(i)}_{i_t}\right]
\end{aligned}$$

d'onde

$$\frac{\partial H}{\partial z_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_l}} = -z^{(i)}_{i_l}.$$

Alle equazioni (3) può quindi sostituirsi il sistema di equazioni

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial p^{(i)}_{i_1}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial p^{(i)}_{i_2}}{\partial x_{i_2}} + \cdots + \frac{\partial p^{(i)}_{i_t}}{\partial x_{i_t}} = \frac{\partial H}{\partial z_i}\\
&\frac{\partial z_i}{\partial x_{i_1}} = -\frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_1}}\\
&\frac{\partial z_i}{\partial x_{i_2}} = -\frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial z_i}{\partial x_{i_t}} = -\frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_t}}
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m).$$

Questo sistema di equazioni ha una forma analoga a quella delle equazioni canoniche, soltanto ad ogni funzione z_i sono coniugate in generale più funzioni, cioè le $p^{(i)}_{i_1}, \cdots, p^{(i)}_{i_t}$, invece che una sola funzione come nelle equazioni canoniche ordinarie.

3. Abbiamo veduto come le equazioni differenziali che provengono dall'annullare la variazione prima di un integrale possono porsi sotto la forma (6). Si può reciprocamente dimostrare che ogni sistema di equazioni della forma (6), in cui H è una funzione delle z_i e delle $p^{(i)}_{i_l}$, può farsi dipendere da un problema di calcolo delle variazioni. Consideriamo infatti

$$\int\left[\sum_1^m {}_i\, z_i\left(\frac{\partial p^{(i)}_{i_1}}{\partial x_{i_1}}+\frac{\partial p^{(i)}_{i_2}}{\partial x_{i_2}}+\cdots+\frac{\partial p^{(i)}_{i_t}}{\partial x_{i_t}}\right)-\mathrm{H}\right]dx_1\cdots dx_n .$$

Le condizioni affinché la variazione prima di questo integrale si annulli, supponendo le z_i e $p^{(i)}_{i_l}$ fra loro indipendenti, sono appunto le (6).

II.

4. Fra la funzione H e le funzioni Φ, F, $\mathrm{F}_1, \cdots, \mathrm{F}_r$ passano delle relazioni notevoli. Dalle (6) segue, se Φ contiene la $z^{(h)}_{h_l}$,

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^{(h)}_{h_l}} = -z^{(h)}_{h_l} .$$

Possiamo scrivere per conseguenza

$$\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_i}z_i-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^{(i)}_{i_1}}p^{(i)}_{i_1}-\cdots-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^{(i)}_{i_t}}p^{(i)}_{i_t}\right]$$

$$=\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \Phi}{\partial z_i}z_i+\frac{\partial \Phi}{\partial z^{(i)}_{i_1}}z^{(i)}_{i_1}+\cdots+\frac{\partial \Phi}{\partial z^{(i)}_{i_t}}z^{(i)}_{i_t}\right]$$

$$=\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_i}z_i+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z^{(i)}_{i_1}}z^{(i)}_{i_1}+\cdots+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z^{(i)}_{i_t}}z^{(i)}_{i_t}\right]$$

$$+\sum_1^s {}_h\,\lambda_h\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z_i}z_i+\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z^{(i)}_{i_1}}z^{(i)}_{i_1}+\cdots+\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z^{(i)}_{i_t}}z^{(i)}_{i_t}\right].$$

Ma $\mathrm{F}_{r+1}, \cdots, \mathrm{F}_s$ sono funzioni omogenee di primo grado, quindi

$$\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_i}z_i-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^{(i)}_{i_1}}p^{(i)}_{i_1}-\cdots-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p^{(i)}_{i_t}}p^{(i)}_{i_t}\right] \tag{7}$$

$$=\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_i}z_i+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z^{(i)}_{i_1}}z^{(i)}_{i_1}+\cdots+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z^{(i)}_{i_t}}z^{(i)}_{i_t}\right]$$

$$+\sum_1^r {}_h\,\lambda_h\sum_1^m {}_i\left[\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z_i}z_i+\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z^{(i)}_{i_1}}z^{(i)}_{i_1}+\cdots+\frac{\partial \mathrm{F}_h}{\partial z^{(i)}_{i_t}}z^{(i)}_{i_t}\right].$$

Se tutte le F_h fossero funzioni omogenee l'ultimo termine nel secondo membro della equazione precedente sparirebbe.

5. Consideriamo due sistemi di soluzioni delle (6) cioè $z_i, p_{i_l}^{(i)}$ e u_i, $q_{i_l}^{(i)}$ e poniamo $u_i - z_i = \zeta_i$, $q_{i_l}^{(i)} - p_{i_l}^{(i)} = \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)}$; avremo

$$u_{i_l}^{(i)} - z_{i_l}^{(i)} = \zeta_{i_l}^{(i)}.$$

Dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_{i_l}^{(i)}} = p_{i_l}^{(i)}, \; z_{i_l}^{(i)} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)}}, \; \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z_i};$$

segue, applicando la formula del TAYLOR,

$$(8) \qquad \sum_1^m {}_h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{i_l}^{(i)} \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{i_l}^{(i)} \partial z_{h_1}} \zeta_{h_1}^{(h)} + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{i_l}^{(i)} \partial z_{h_t}} \zeta_{h_t}^{(h)}\right] + \varphi_{i_l}^{(i)} = \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)}$$

$$(8') \qquad \zeta_{i_l}^{(i)} = -\sum_1^m {}_h \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_1}^{(h)}} \tilde{\omega}_{h_1}^{(h)} + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_t}^{(h)}} \tilde{\omega}_{h_t}^{(h)}\right] + \psi_{i_l}^{(i)}$$

$$(8'') \qquad \sum_1^m {}_h \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_{h_1}^{(h)}} \zeta_{h_1}^{(h)} + \cdots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_{h_t}^{(h)}} \zeta_{h_t}^{(h)}\right] + \varphi_i$$

$$= \sum_1^m {}_h \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z_i \partial p_{h_1}^{(h)}} \tilde{\omega}_{h_1}^{(h)} + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z_i \partial p_{h_t}^{(h)}} \tilde{\omega}_{h_t}^{(h)}\right] + \psi_i,$$

in cui $\varphi_{i_l}^{(i)}, \varphi_i$ sono funzioni omogenee e di secondo grado delle ζ_h e $\zeta_{h_\lambda}^{(h)}$ i cui coefficienti sono le derivate terze di Φ prese per valori intermedi delle variabili fra i valori $z_h, z_{h_\lambda}^{(h)}$ e $u_h, u_{h_\lambda}^{(h)}$, mentre le $\psi_{i_l}^{(i)}, \psi_i$ sono funzioni omogenee e di secondo grado delle $\zeta_h, p_{h_\lambda}^{(h)}$ i cui coefficienti sono le derivate terze di H prese per valori intermedi delle variabili fra i valori $z_h, p_{\lambda_h}^{(h)}$ e $u_h, q_{k_\lambda}^{(h)}$.

Moltiplicando fra loro membro a membro le (8) e (8') e moltiplicando le (8'') per ζ_i e sommando si trova

$$(9) \qquad \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h + \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_{i_l}^{(i)} \partial z_{h_\lambda}^{(h)}} \zeta_{i_l}^{(i)} \zeta_{h_\lambda}^{(h)} + \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_i \partial z_{h_\lambda}^{(h)}} \zeta_i \zeta_{h_\lambda}^{(h)} + \varphi$$

$$= \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_\lambda}^{(h)}} \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)} \tilde{\omega}_{h_\lambda}^{(h)} + \psi,$$

in cui φ è una funzione omogenea di terzo grado nelle $\zeta_i, \zeta_{i_l}^{(i)}$ e ψ è pure omogenea e di terzo grado nelle $\zeta_i, \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)}$. Denotiamo le z_i e $z_{i_l}^{(i)}$ contenute in Φ con $v_1, v_2, \cdots, v_g$ e le corrispondenti u_i e $u_{i_l}^{(i)}$ con $w_1, w_2, \cdots, w_g$, posto

$$w_i - v_i = \nu_i,$$

e ricordando che le $\mathrm{F}_{r+1}, \cdots, \mathrm{F}_s$ sono funzioni lineari, avremo che l'equazione precedente potrà scriversi

$$(10) \qquad \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v_i \partial v_h} \nu_i \nu_h + \varphi = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_\lambda}^{(h)}} \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)} \tilde{\omega}_{h_\lambda}^{(h)} + \psi$$

$$= \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial v_i \partial v_h} \nu_i \nu_h + \sum_1^r \lambda_g \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \mathrm{F}_g}{\partial v_i \partial v_h} \nu_i \nu_h + \varphi.$$

III.

6. Riprendiamo le equazioni fondamentali (6). Denotiamo, come precedentemente con z_i, $p_{i_l}^{(i)}$ un sistema di integrali, e con u_i, $q_{i_l}^{(i)}$ un altro sistema di integrali.

Sia S_n un campo ad n dimensioni limitato dal contorno S_{n-1}, entro il quale i due precedenti sistemi di integrali sono funzioni finite e continue insieme alle loro derivate.

Moltiplicando ordinatamente le (6) membro a membro per u_i, $-q_{i_l}^{(i)}$, sommando e integrando a tutto S_n, si ottiene

$$\int_{S_n} \sum_1^m \left[u_i \frac{\partial H}{\partial z_i} + q_{i_1}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_1}^{(i)}} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_t}^{(i)}} \right] dS_n$$

$$= \int_{S_n} \left[\sum_1^m u_i \left(\frac{\partial p_{i_1}^{(i)}}{\partial x_{i_1}} + \cdots + \frac{\partial p_{i_t}^{(i)}}{\partial x_{i_t}} \right) - \sum_1^m \left(q_{i_1}^{(i)} \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_1}} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \frac{\partial z_i}{\partial x_{i_t}} \right) \right] dS_n$$

$$= -\int_{S_{n-1}} \sum_1^m u_i (p_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t}) \, dS_{n-1}$$

$$+ \int_{S_{n-1}} \sum_1^m z_i (q_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t}) \, dS_{n-1}$$

$$- \int_{S_n} \left[\sum_1^m \left(p_{i_1}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i_1}} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \frac{\partial u_i}{\partial x_{i_t}} \right) - z_i \left(\frac{\partial q_{i_1}^{(i)}}{\partial x_{i_1}} + \cdots + \frac{\partial q_{i_t}^{(i)}}{\partial x_{i_t}} \right) \right] dS_n ,$$

essendo ν la normale di S_{n-1} diretta verso l'interno di S_n. Avremo dunque

$$\begin{aligned}
(11) \qquad & \int_{S_{n-1}} \sum_1^m z_i (q_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t}) \, dS_{n-1} \\
& - \int_{S_{n-1}} \sum_1^m u_i (p_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t}) \, dS_{n-1} \\
& = \int_{S_n} \sum_1^m \left(u_i \frac{\partial H}{\partial z_i} + q_{i_1}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_1}^{(i)}} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial p_{i_t}^{(i)}} \right) dS_n \\
& - \int_{S_n} \sum_1^m \left(z_i \frac{\partial H}{\partial u_i} + p_{i_1}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial q_{i_1}^{(i)}} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \frac{\partial H}{\partial q_{i_t}^{(i)}} \right) dS_n .
\end{aligned}$$

Questa relazione è analoga a quella di GREEN.

Nel caso in cui H sia una funzione razionale intera omogenea di 2° grado, il secondo membro sparisce. Da essa può dedursi il teorema fondamentale della elasticità del prof. BETTI.

7. Moltiplicando ordinatamente membro a membro le (6) per z_i, $p^{(i)}_{i_1}, \cdots, p^{(i)}_{i_t}$ sommando e integrando in S_n, si trova

$$\int_{S_n} \sum_1^m \left(z_i \frac{\partial H}{\partial z_i} - p^{(i)}_{i_1} \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_1}} - \cdots - p^{(i)}_{i_t} \frac{\partial H}{\partial p^{(i)}_{i_t}} \right) dS_n$$

$$= \int_{S_n} \sum_1^m \left(\frac{\partial \left(z_i p^{(i)}_{i_1} \right)}{\partial x_{i_1}} + \cdots + \frac{\partial \left(z p^{(i)}_{i_t} \right)}{\partial x_{i_t}} \right) dS_n$$

$$= - \int_{S_{n-1}} \sum_1^m z_i \left(p^{(i)}_{i_1} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + p^{(i)}_{i_t} \cos \nu x_{i_t} \right) dS_{n-1} .$$

Tenendo conto della (7) e supponendo $F, F_1, \cdots, F_r$ omogenee e la F di grado k, avremo

$$k_1 I = k \int_{S_n} F dS_n = - \int_{S_{n-1}} \sum_1^m z_i \left(p^{(i)}_{i_1} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + p^{(i)}_{i_t} \cos \nu x_{i_t} \right) dS_{n-1} .$$

8. Dalle formule trovate nel § 5 segue

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \tilde\omega^{(i)}_{i_1}}{\partial x_{i_1}} + \cdots + \frac{\partial \tilde\omega^{(i)}_{i_t}}{\partial x_{i_t}} = \sum_1^m {}_h \left(\frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial p^{(h)}_{h_1}} \tilde\omega^{(h)}_{h_1} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial p^{(h)}_{h_t}} \tilde\omega^{(h)}_{h_t} \right) + \psi_i \\ &\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_{i_1}} = - \sum_1^m {}_h \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_1} \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_1} \partial p^{(h)}_{h_1}} \tilde\omega^{(h)}_{h_1} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_1} \partial p^{(h)}_{h_t}} \tilde\omega^{(h)}_{h_t} \right) + \psi^{(i)}_{i_1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_{i_t}} = - \sum_1^m {}_h \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_t} \partial z_h} \zeta_h + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_t} \partial p^{(h)}_{h_1}} \tilde\omega^{(h)}_{h_1} + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_t} \partial p^{(h)}_{h_t}} \tilde\omega^{(h)}_{h_t} \right) + \psi^{(i)}_{i_t} \end{aligned} \right.$$

onde

$$\int_{S_n} \left(\Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma \Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_l} \partial p^{(h)}_{h_\lambda}} \tilde\omega^{(i)}_{i_l} \tilde\omega^{(h)}_{h_\lambda} + \psi \right) dS_n$$

$$= \int_{S_n} \sum_1^m {}_i \left(\frac{\partial \left(\zeta_i \tilde\omega^{(i)}_{i_1} \right)}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial \left(\zeta_i \tilde\omega^{(i)}_{i_2} \right)}{\partial x_{i_2}} + \cdots + \frac{\partial \left(\zeta_i \tilde\omega^{(i)}_{i_t} \right)}{\partial x_{i_t}} \right) dS_n ,$$

da cui finalmente si ha la formula

$$(13) \quad - \int_{S_{n-1}} \sum_1^m {}_i \zeta_i \left(\tilde\omega^{(i)}_{i_1} \cos \nu x_{i_1} + \tilde\omega^{(i)}_{i_2} \cos \nu x_{i_2} + \cdots + \tilde\omega^{(i)}_{i_t} \cos \nu x_{i_t} \right) dS_{n-1}$$

$$= \int_{S_n} \left(\Sigma \Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma \Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_l} \partial p^{(h)}_{h_\lambda}} \tilde\omega^{(i)}_{i_l} \tilde\omega^{(h)}_{h_\lambda} + \psi \right) dS_n$$

$$= \int_{S_n} \left(\Sigma \Sigma \frac{\partial^2 \left(F + \sum_1^r \lambda_g F_g \right)}{\partial v_i \partial v_h} \nu_i \nu_h + \varphi \right) dS_n .$$

IV.

9. L'ultima formula del paragrafo precedente ci fornisce un teorema fondamentale relativamente alle equazioni (6).

Se $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{p}_{i_l}^{(i)}$ *formano un sistema di integrali delle* (6) *tali che le due forme quadratiche*

$$\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{z}_i \partial \mathbf{z}_h} \alpha_i \alpha_h \quad , \quad \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}_{i_l}^{(i)} \partial \mathbf{p}_{h_\lambda}^{(h)}} \beta_{i_l}^{(i)} \beta_{h_\lambda}^{(h)}$$

siano definite e di segno contrario, tutti gli integrali z_i, $p_{i_l}^{(i)}$ *i quali entro un campo* S_n *differiscono rispettivamente dalle* $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{p}_{i_l}^{(i)}$ *per meno di un certo valore, saranno determinati quando si conosceranno al contorno* S_{n-1} *i valori delle* z_i *oppure quelli delle somme*

$$p_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + p_{i_2}^{(i)} \cos \nu x_{i_2} + \cdots + p_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t} = P_i ;$$

o più in generale saranno determinati quando si conosceranno in ogni punto del contorno i valori di $z_1, z_2, \cdots, z_k$ *e delle rimanenti* $P_{k+1}, \cdots, P_m$.

Infatti siano z_i, $p_{i_l}^{(i)}$ e u_i, $q_{i_l}^{(i)}$ due sistemi di integrali delle (6) tali che in ogni punto di S_{n-1} si abbia

$$z_1 = u_1 , z_2 = u_2 , \cdots , z_k = u_k , P_{k+1} = Q_{k+1} , \cdots , P_m = Q_m ,$$

in cui

$$Q_i = q_{i_1}^{(i)} \cos \nu x_{i_1} + \cdots + q_{i_t}^{(i)} \cos \nu x_{i_t} .$$

Applicando la (13) troviamo

$$(14) \qquad \int_{S_n} \left(\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_\lambda}^{(h)}} \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)} \tilde{\omega}_{h_\lambda}^{(h)} + \psi \right) dS_n = 0 .$$

Ora se le z_i, u_i, $p_{i_l}^{(i)}$, $q_{i_l}^{(i)}$ differiscono dalle $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{p}_{i_l}^{(i)}$ per meno di un certo valore M, avremo

$$|\zeta_i| < 2M \quad , \quad \left|\tilde{\omega}_{i_l}^{(i)}\right| < 2M .$$

Potremo quindi determinare un valore μ di M, tale che

1° la forma

$$f = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_h} \zeta_i \zeta_h - \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p_{i_l}^{(i)} \partial p_{h_\lambda}^{(h)}} \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)} \tilde{\omega}_{h_\lambda}^{(h)}$$

sia definita;

2° la forma omogenea ψ di terzo grado nelle ζ_i, $\tilde{\omega}_{i_l}^{(i)}$ assuma sempre valori assoluti inferiori ad $|f|$ (escluso per $\zeta_i = \tilde{\omega}_{i_l}^{(i)} = 0$).

In tale ipotesi la relazione (14) non sarà soddisfatta altro che da

$$\zeta_i = \tilde{\omega}^{(i)}_{i_l} = 0$$

entro tutto il campo S_n, il che dimostra il teorema.

10. Supponiamo che H *sia indipendente dalle* $z_1, z_2, \cdots, z_m$. In tale ipotesi il precedente teorema va modificato nella maniera seguente:

Se $\mathbf{z}_i$, $\mathbf{p}^{(i)}_{i_l}$ *formano un sistema di integrali delle* (6) *e le* $\mathbf{p}^{(i)}_{i_l}$ *sono tali che la forma quadratica*

$$\Sigma\,\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{p}^{(i)}_{i_l}\, \partial \mathbf{p}^{(h)}_{h_\lambda}} \beta^{(i)}_{i_l} \beta^{(h)}_{h_\lambda}$$

sia definita, tutti gli integrali z_i, $p^{(i)}_{i_l}$ *tali che le* $p^{(i)}_{i_l}$ *entro un campo* S_n *differiscono rispettivamente dalle* $\mathbf{p}^{(i)}_{i_l}$ *per meno di un certo valore saranno determinati quando si conosceranno al contorno* S_{n-1} *i valori delle* z_i.

Infatti se z_i ed u_i sono tali che al contorno sia $z_i = u_i$, avremo

$$\int\limits_{S_n} \left(\Sigma\,\Sigma \frac{\partial^2 H}{\partial p^{(i)}_{i_l}\, \partial p^{(h)}_{h_\lambda}} \tilde{\omega}^{(i)}_{i_l} \tilde{\omega}^{(h)}_{h_\lambda} + \psi \right) dS_n = 0 .$$

Ripetendo quindi il ragionamento fatto nel paragrafo precedente, si ricaverà che se $p^{(i)}_{il}$ e $q^{(i)}_{i_l}$ non si scosteranno da $\mathbf{p}^{(i)}_{i_l}$ più di un certo valore dovrà risultare

$$\tilde{\omega}^{(i)}_{i_l} = 0$$

affinché la precedente eguaglianza possa essere soddisfatta. Ma dalle (12) segue

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_{i_l}} = 0$$

onde ζ_i deve essere indipendente da x_{i_l}. Ora ogni parallela all'asse x_{i_l} incontra S_{n-1}, ove ζ_i è nullo, quindi le ζ_i sono nulle e per conseguenza avremo entro S_n

$$p^{(i)}_{i_l} = q^{(i)}_{i_l} \quad , \quad z_i = u_i$$

il che dimostra il teorema.

11. Il teorema del § 10 può anche interpretarsi in un altro modo.

Se $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots, \mathbf{z}_m, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ *sono un sistema di integrali delle equazioni* (3) *tali che la forma quadratica*

$$\Sigma\,\Sigma \frac{\partial^2 \left(F + \sum_1^r {}_\gamma \lambda_\gamma F_\gamma \right)}{\partial \mathbf{v}_i\, \partial \mathbf{v}_h} \alpha_i\, \alpha_h \text{ (1)}$$

(1) Le $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_g$ denotano le $\mathbf{z}_i$ e $\mathbf{z}^{(i)}_{i_l}$ contenute in Φ (§ 5).

sia definita, tutti gli integrali $z_1, \cdots, z_m$, *tali che entro un campo* S_n *differiscono rispettivamente dalle* $\mathbf{z}_1, \cdots, \mathbf{z}_m$ *per meno di un certo valore, saranno determinati quando se ne conosceranno i valori al contorno* S_{n-1}.

Infatti se $z_1, \cdots, z_m$ e $u_1, \cdots, u_m$ saranno due sistemi di integrali delle (3) tali che al contorno si abbia $z_i = u_i$ dalla formola (13) potrà dedursi

$$\int\limits_{S_n} \left(\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \left(F + \sum\limits_1^r \lambda_\gamma F_\gamma \right)}{\partial v_i \, \partial v_h} \nu_i \nu_h + \varphi \right) dS_n = 0 .$$

Ripetendo quindi un ragionamento fatto precedentemente, si giunge alla conclusione che, se le z_i ed u_i differiscono dalle $\mathbf{z}_i$ per meno di un certo valore, affinché la precedente equazione sia soddisfatta deve essere

$$\nu_i = 0 ,$$

onde (vedi § 5) le z_i e $z_h^{(i)}$ che compariscono in $F, F_1, \cdots, F_g$ risulteranno entro S_n eguali alle corrispondenti u_i, $u_h^{(i)}$. Ma se

$$z_h^{(i)} - u_h^{(i)} = \frac{\partial (z_i - u_i)}{\partial x_h} = 0$$

risulterà

$$z_i - u_i = \text{cost.}$$

lungo tutte le parallele all'asse x_h e siccome queste incontrano il contorno S_{n-1}, ove $z_i = u_i$, così dovremo avere in tutti i punti entro S_n, $z_i = u_i$, il che dimostra il teorema.

XXVIII.

SOPRA UNA ESTENSIONE DELLA TEORIA JACOBI-HAMILTON DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4, vol. VI_1, 1890_1; pp. 127-138.

Le Memorie di HAMILTON pubblicate nelle *Philosophical Transactions* della Società reale di Londra negli anni 1834 e 1835 furono il punto di partenza di una serie di ricerche che figurano fra gli studi più belli fatti nel nostro secolo nel campo dell'analisi e della meccanica. Si deve a JACOBI di aver generalizzato e modificato i risultati di HAMILTON in modo da renderne palese la importanza e la fecondità. Il teorema fondamentale da principio limitato alle questioni della dinamica venne da JACOBI stesso esteso al caso dei problemi isoperimetrici in cui le derivate della funzione incognita compariscono sotto all'integrale soltanto fino al primo ordine [1]. In seguito CLEBSCH [2] dimostrò che il procedimento tenuto da JACOBI era applicabile alla questione generale dell'annullare la variazione prima di un integrale semplice con più funzioni incognite, mentre fra queste funzioni sussistono delle relazioni differenziali; questione alla quale può ricondursi ogni problema del calcolo delle variazioni relativo ad integrazioni semplici.

Nessun tentativo è stato fatto, che io sappia, per estendere la teoria JACOBI-HAMILTON al caso in cui si abbia da annullare la variazione prima degli integrali multipli. Allorché ci si propone una tale generalizzazione si incontra subito una difficoltà. Accennerò in poche parole in che cosa essa consista. Il procedimento JACOBI-HAMILTON si fonda sull'esame dell'integrale semplice (di cui si vuole annullare la variazione) considerato come funzione dei suoi limiti e dei valori assegnati ad arbitrio alle funzioni incognite nei limiti stessi. È una tale funzione (la funzione caratteristica) che soddisfa alle equazioni differenziali a derivate parziali scoperte da HAMILTON e che fornisce gli integrali del problema mediante operazioni di derivazione. Se si passa dagli integrali semplici al caso degli integrali doppi, invece dei due limiti dell'integrale, abbiamo una o più *linee* che formano il contorno del campo di integrazione e lungo queste debbono darsi i *valori arbitrarii* delle funzioni incognite. Quindi in questo caso non è più possibile ottenere una *funzione ordinaria* analoga alla *funzione caratteristica* di HAMILTON.

(1) JACOBI, *Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen.* « Giornale di Crelle », T. 17.

(2) *Ueber diejenigen Probleme der Variations-Rechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten.* « Giornale di Crelle », T. 55.

Peraltro la difficoltà a cui abbiamo ora accennato può superarsi. In alcune Note che ebbi l'onore di presentare a cotesta Accademia ho mostrato come per alcune ricerche fosse utile introdurre delle funzioni che, invece di dipendere come le ordinarie funzioni dai punti dello spazio, dipendessero da linee, e in generale come potessero considerarsi delle quantità dipendenti da tutti i valori di una o più funzioni in dati intervalli.

Ora nella questione sopra esaminata si presenta spontaneamente il pensiero di costruire un elemento analogo alla funzione caratteristica ricorrendo all'impiego della nuova specie di funzioni ora ricordata. In questo modo si trova che la teoria JACOBI-HAMILTON è suscettibile di essere estesa agli integrali multipli. Una tale generalizzazione ha formato il soggetto di alcune mie ricerche delle quali mi permetto di presentare un saggio nella presente Nota.

1. In questa Nota però, oltre al non escire dal caso degli integrali doppî, mi limiterò a considerare quei problemi del calcolo delle variazioni in cui si tratta di annullare la variazione prima di un integrale

$$\mathrm{I} = \int\int \mathrm{U}\, du\, dv,$$

in cui U è una funzione di $x_1, x_2 \cdots x_n$, di u e v, e dei determinanti

$$\frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)},$$

essendo $x_1 \cdots x_n$ le funzioni incognite di u e v.

Questa classe di problemi relativi agli integrali doppî si avvicina a quella dei problemi degli isoperimetri.

Vediamo sotto che forma possono mettersi le equazioni differenziali del problema. Posto

$$\frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \xi_{is},$$

avremo

$$\delta\mathrm{I} = \int\int\left(\Sigma \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{is}}\,\delta\xi_{is} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}\,\delta x_i\right) du\, dv = 0$$

onde, supponendo nulle le variazioni dx_i ai limiti, con integrazioni per parti si trova

$$(1) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} - \sum_1^n{}_h \frac{d\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{ih}}, x_h\right)}{d(u, v)} = 0 \qquad (i = 1, 2 \cdots n).$$

Poniamo

$$(2) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \xi_{ih}} = p_{ih} \quad , \quad p_{i,i} = 0,$$

avremo

$$\sum_1^n{}_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i}.$$

Sia ora

$$H = -U + \Sigma p_{ih} \xi_{ih}.$$

Supponiamo che le (2) possano risolversi rispetto alla ξ_{ih}. Troveremo queste quantità espresse mediante le $x_1 \cdots x_n$, le p_{ih}, la u e la v. Sostituendo tali valori in H otterremo

$$H = H(x_1 \cdots x_n, p_{ih} \cdots u, v),$$

onde variando, col supporre u e v costanti,

$$\delta H = -\sum \frac{\partial U}{\partial \xi_{ih}} \delta \xi_{ih} - \sum_1^n{}_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \sum p_{ih} \delta \xi_{ih} + \sum \xi_{ih} \delta p_{ih}$$

$$= -\sum_1^n \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \xi_{ih} \delta p_{ih}$$

ossia

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} = \xi_{ih}.$$

Al sistema di equazioni (1) può quindi sostituirsi l'altro

$$\text{(I)} \qquad \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \quad , \quad \sum_1^n{}_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

il quale ha una forma perfettamente analoga alla forma canonica data da HAMILTON alle equazioni della dinamica.

Consideriamo ora il sistema (I) di equazioni differenziali, in cui H è una funzione qualunque delle p_{ih}, delle $x_1, x_2 \cdots x_n$, di u e di v. Si può facilmente provare il teorema reciproco di quello ora dimostrato, cioè che le equazioni (I) possono farsi dipendere sempre da un problema di calcolo delle variazioni. Si consideri infatti

$$J = \iint \left(\Sigma p_{ih} \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} - H \right) du\, dv.$$

Affinché sia $\delta J = 0$, supponendo nulle le dx_i ai limiti, debbono aversi le equazioni (I).

2. Nello studio che ora faremo partiremo dal sistema (I) supponendo che le variabili x_i siano in numero di *tre*. Ammettiamo che il sistema (I) sia tale che le funzioni incognite siano definite quando si conoscano i valori delle x_1, x_2, x_3 al contorno di un campo $\mathfrak{S}$ in cui si suppongono variabili le u e v. Il campo $\mathfrak{S}$ nel piano u, v sia limitato da m linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$. L'equazione di ciascuna di esse $\mathfrak{L}_i$ consideriamola sotto la forma

$$u = f_i(t_i) \quad , \quad v = \varphi_i(t_i) \quad , \quad T_i \geqq t_i \geqq 0$$

e denotiamo i valori di x_1, x_2, x_3 assegnati lungo la $\mathfrak{L}_i$ con $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$. Queste funzioni, insieme colle f_i e φ_i supponiamole continue, periodiche col periodo T_i e generalmente derivabili. Ammettiamo che i detti elementi siano *elementi caratteristici* delle funzioni incognite, almeno finché le linee $\mathfrak{L}_i$ e i valori arbitrarî assegnati alle x al contorno restano compresi entro certi limiti.

Vediamo in tale ipotesi come possono considerarsi gli integrali del problema.

Ciascuno di essi: 1° sarà una funzione delle variabili u, v; 2° dipenderà dalle funzioni $f_i(t_i)$, $\varphi_i(t_i)$, $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$ [3].

Consideriamo uno spazio a cinque dimensioni i cui punti si riferiscono alle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ed in esso le linee Λ_i aventi per equazione

$$y_1 = f_i(t_i) \quad , \quad y_2 = \varphi_i(t_i) \quad , \quad y_3 = \psi_i(t_i) \quad , \quad y_4 = \chi_i(t_i) \quad , \quad y_5 = \theta_i(t_i).$$

Gli integrali delle (I) potranno ritenersi come quantità dipendenti dalle linee $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m$ e dai due parametri u e v, cioè adottando delle notazioni usate già in altra occasione, potremo scrivere

$$(4) \quad x_i = x_i \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m, u, v] \,| \qquad (4') \quad p_{ih} = p_{ih} \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m, u, v] \,| .$$

In uno spazio a tre dimensioni, i cui punti abbiano per coordinate x_1, x_2, x_3, consideriamo le linee L_i aventi per equazioni

$$x_1 = \psi_i(t_i) \quad , \quad x_2 = \chi_i(t_i) \quad , \quad x_3 = \theta_i(t_i).$$

È facile riconoscere che gli integrali delle (I) non possono ritenersi come dipendenti separatamente dalle linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$, $L_1, L_2 \cdots L_m$, e dai parametri u e v [4].

3. Ciò premesso in

$$\text{(II)} \qquad V = \iint_S \left[\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H\right] du\, dv$$

sostituiamo in luogo delle x_i e delle p_{ih} le (4) e (4'). Denotiamo con W la V dopo eseguita la sostituzione. Avremo evidentemente

$$W = W \,|\, [\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m] \,| .$$

Da ciò segue che se diamo alle linee $\Lambda_1, \Lambda_2 \cdots \Lambda_m$ degli spostamenti infinitesimi, ossia se variamo di infinitamente poco le funzioni $f_s(t_s)$, $\varphi_s(t_s)$, $\psi_s(t_s)$, $\chi_s(t_s)$, $\theta_s(t_s)$, avremo che la variazione di W sarà espressa da

$$(5) \qquad \delta W = \sum_1^m{}_s \int_{\Lambda_s} \{ (W'_{y_1})_s\, \delta f_s + (W'_{y_2})_s\, \delta\varphi_s + (W'_{y_3})_s\, \delta\psi_s + (W'_{y_4})_s\, \delta\chi_s + (W'_{y_5})_s\, \delta\theta_s \} \, dt_s$$

(3) «Rendiconti R. Acc. d. Lincei», vol. III, fasc. 4° [In questo vol.: XVII, pp. 294-314].

(4) Perchè ciò fosse bisognerebbe che le x_i e p_{ih} si mantenessero inalterate spostando una qualunque L_i lungo sè stessa e conservando inalterata la corrispondente $\mathfrak{L}_i$.

in cui W'_{y_i} è indipendente dalle $\delta f_s \cdots \delta\theta_s$ ed è ciò che abbiamo chiamato *la derivata di* W *rispetto ad* y_i *relativamente a* Λ_i [5].

Siccome spostando le Λ_s lungo loro stesse la W non deve cambiare, così dovremo avere

$$(6)\qquad (W'_{y_1})_s \frac{df_s}{dt_s} + (W'_{y_2})_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} + (W'_{y_3})_s \frac{d\Psi_s}{dt_s} + (W'_{y_4})_s \frac{d\chi_s}{dt_s} + (W'_{y_5})_s \frac{d\theta_s}{dt_s} = 0 .$$

Si supponga ora di mutare di infinitamente poco le funzioni $\psi_i(t_i)$, $\chi_i(t_i)$, $\theta_i(t_i)$, lasciando inalterate le $f_i(t_i)$, $\varphi_i(t_i)$, cioè mantenendo inalterate le $\mathfrak{L}_i$. Otterremo in tale ipotesi

$$\delta W = \iint_S \left\{ \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \delta p_{ih} + \Sigma\, \delta \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} \delta p_{ih} - \Sigma \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i \right\} du\, dv$$

$$= \iint_S \left\{ \Sigma\, \delta \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - \Sigma_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta x_i \right\} du\, dv ,$$

ovvero a cagione delle (I)

$$\delta W = \iint_S \left\{ \Sigma\, \delta \frac{d(x_i, x_h)}{d(u, v)} p_{ih} + \Sigma_i \Sigma_h \frac{d(p_{ih} x_h)}{d(u, v)} \delta x_i \right\} du\, dv$$

da cui segue, con un calcolo che non presenta difficoltà

$$\delta W = \iint_S \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} , \dfrac{\partial x_h}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial v} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u} , \dfrac{\partial x_h}{\partial u} \end{vmatrix} \right\} du\, dv$$

$$= \sum_1^m{}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} , \dfrac{\partial x_h}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{\delta v}{\delta t_s} + \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial u} , \dfrac{\partial x_h}{\partial u} \end{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t_s} \right\} dt_s$$

onde finalmente

$$(7)\qquad \delta W = \sum_1^m{}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \Sigma\, p_{ih} \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial t_s} , \dfrac{\partial x_h}{\partial t_s} \end{vmatrix} dt_s .$$

Cerchiamo il significato dei determinanti

$$\begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial t_s} , \dfrac{\partial x_h}{\partial t_s} \end{vmatrix} dt_s = \begin{vmatrix} \delta x_i , \delta x_h \\ dx_i , dx_h \end{vmatrix}_s = \Delta^{(s)}_{ih} .$$

A tal fine osserviamo che per lo spostamento infinitesimo dato a ciascun punto della curva L_s, ogni elemento dL_s d'arco della curva stessa descrive un area infinitesima $d\sigma_s$. Denotiamo con n_s la normale a quest'area; le proiezioni di $d\sigma_s$ sui piani coordinati $x_2 x_3$, $x_3 x_1$, $x_1 x_2$ saranno rispettivamente

$$d\sigma_s \cos(n_s x_1) \quad , \quad d\sigma_s \cos(n_s x_2) \quad , \quad d\sigma_s \cos(n_s x_3).$$

(5) « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, p. 160 [in questo vol.: XXIII, p. 405].

Ma, essendo $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ le componenti dello spostamento secondo gli assi coordinati, e dx_1, dx_2, dx_3 le componenti di dL_s, avremo che le proiezioni di $d\sigma_s$ sui piani coordinati saranno date anche da $\Delta_{23}^{(s)}, \Delta_{31}^{(s)}, \Delta_{12}^{(s)}$; quindi avremo

$$\left|\begin{matrix}\delta x_2, \delta x_3\\ dx_2, dx_3\end{matrix}\right|_s = d\sigma_s \cos(n_s x_1), \quad \left|\begin{matrix}\delta x_3, \delta x_1\\ dx_3, dx_1\end{matrix}\right|_s = d\sigma_s \cos(n_s x_2),$$

$$\left|\begin{matrix}\delta x_1, \delta x_2\\ dx_1, dx_2\end{matrix}\right|_s = d\sigma_s \cos(n_s x_3).$$

La formula (7) potrà quindi scriversi

$$\text{(III)} \qquad \delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} (p_{23} \cos n_s x_1 + p_{31} \cos n_s x_2 + p_{12} \cos n_s x_3)\, d\sigma_s.$$

5. Riprendiamo la formula (7). Essa può scriversi

$$\delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \delta x_1 \left|\begin{matrix} p_{12}, & p_{31} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_s}, & \frac{\partial x_2}{\partial t_s}\end{matrix}\right| + \delta x_2 \left|\begin{matrix} p_{23}, & p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_s}, & \frac{\partial x_3}{\partial t_s}\end{matrix}\right| + \delta x_3 \left|\begin{matrix} p_{31}, & p_{23} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_s}, & \frac{\partial x_1}{\partial t_s}\end{matrix}\right| \right\} dt_s$$

$$= \sum_1^m \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \delta\psi_s \left|\begin{matrix} p_{12}, & p_{31} \\ \frac{d\theta_s}{dt_s}, & \frac{d\chi_s}{dt_s}\end{matrix}\right| + \delta\chi_s \left|\begin{matrix} p_{23}, & p_{12} \\ \frac{d\psi_s}{dt_s}, & \frac{d\theta_s}{dt_v}\end{matrix}\right| + \delta\theta_s \left|\begin{matrix} p_{31}, & p_{23} \\ \frac{d\chi_s}{dt_s}, & \frac{d\psi_s}{dt_s}\end{matrix}\right| \right\} dt_s.$$

Se confrontiamo questa formula colla (5) si trova

$$\text{(8)} \qquad (W'_{y_3})_s = \left|\begin{matrix} p_{12}, & p_{31} \\ \frac{d\theta_s}{dt_s}, & \frac{d\chi_s}{dt_s}\end{matrix}\right|, (W'_{y_4})_s = \left|\begin{matrix} p_{23}, & p_{12} \\ \frac{d\psi_s}{dt_s}, & \frac{d\theta_s}{dt_s}\end{matrix}\right|, (W'_{y_5})_s = \left|\begin{matrix} p_{31}, & p_{23} \\ \frac{d\chi_s}{dt_s}, & \frac{d\psi_s}{dt_s}\end{matrix}\right|$$

onde

$$\text{(9)} \qquad (W'_{y_3})_s \frac{d\psi_s}{dt_s} + (W'_{y_4})_s \frac{\delta\chi_s}{dt_s} + (W'_{y_5})_s \frac{d\theta_s}{dt_s} = 0$$

e per conseguenza, a cagione della (6),

$$\text{(9')} \qquad (W'_{y_1})_s \frac{df_s}{dt_s} + (W'_{y_2})_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} = 0.$$

Le due precedenti equazioni dimostrano che se spostiamo le linee L_s e $\mathfrak{L}_s$ lungo loro stesse ed indipendentemente l'una dall'altra la W non cambia. Questo risultato conduce ad enunciare il teorema seguente:

La W *è una quantità che dipende separatamente dalle linee* $L_1, L_2 \cdots L_m$, $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$. *Potremo quindi scrivere, adottando i noti simboli,*

$$W = W \,|\, [L_1, L_2 \cdots L_m, \mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m] \,|.$$

La W non è una funzione di primo grado delle linee L_s, ma se prendiamo la formula (III), si vede immediatamente che, estendendo una notazione già usata in altra occasione (6), potremo scrivere

$$(16)\qquad (p_{23})_s = \left(\frac{dW}{d(x_2, x_3)}\right)_s \quad , \quad (p_{31})_s = \left(\frac{dW}{d(x_3, x_1)}\right)_s \quad , \quad (p_{12})_s = \left(\frac{dW}{d(x_1, x_2)}\right)_s$$

in cui $(p_{23})_s$, $(p_{31})_s$, $(p_{12})_s$ denotano i valori delle p_{23}, p_{31}, p_{12} per i valori di u e v lungo la linea $\mathfrak{L}_s$.

Se nella (5) facciamo $\delta\psi_s = \delta\chi_s = \delta\theta_s = 0$, avremo

$$(11)\qquad \delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \{ (W'_{y_1})_s \, \delta f_s + (W'_{y_2})_s \, \delta\varphi_s \} \, dt_s .$$

Dalla (6) segue

$$(12)\qquad \frac{(W'_{y_1})_s}{\left(\dfrac{d\varphi_s}{dt_s}\right)} = - \frac{(W'_{y_2})_s}{\left(\dfrac{df_s}{dt_s}\right)} .$$

Chiamando questo rapporto M_s, avremo che la (11) potrà scriversi

$$\delta W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} M_s \begin{vmatrix} \delta f_s \, , \, \delta\varphi_s \\ \dfrac{df_s}{dt_s} \, , \, \dfrac{d\varphi_s}{dt_s} \end{vmatrix} dt_s = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} M_s \, d\tau_s ,$$

in cui $d\tau_s$ denota l'elemento d'area descritta dall'elemento $d\mathfrak{L}_s$ per lo spostamento infinitesimo della curva $\mathfrak{L}_s$. Potremo quindi scrivere, adottando una notazione analoga a quella precedentemente impiegata,

$$(13)\qquad M_s = \left(\frac{dW}{d(u, v)}\right)_s .$$

6. Se si suppongono integrate le equazioni (I) si ottengono le x_1, x_2, x_3 espresse come funzioni di u e v per tutti i valori di queste variabili nel campo $\mathfrak{S}$. Tali funzioni

$$x_1 = x_1(u, v) \quad , \quad x_2 = x_2(u, v) \quad , \quad x_3 = x_3(u, v)$$

definiscono una superficie contenuta nello spazio (x_1, x_2, x_3) che chiameremo S, per modo che ad ogni punto del pezzo di piano $\mathfrak{S}$ corrisponderà un punto della superfice S e così ad una linea qualunque $\mathfrak{G}$ contenuta in $\mathfrak{S}$ corrisponderà una linea G contenuta in S. Chiameremo G una linea *corrispondente* a $\mathfrak{G}$. In particolare alle linee contorno $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ di $\mathfrak{S}$ corrisponderanno le linee L_1, $L_2 \cdots L_m$ che formano il contorno di S.

Si varino ora le linee $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ e si mutino contemporaneamente le L_1, $L_2 \cdots L_m$ in modo che la superficie S mutando pure di grandezza non cambi di posizione nello spazio, vale a dire mutiamo le $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2 \cdots \mathfrak{L}_m$ e scegliamo per L_1, $L_2 \cdots L_m$ le linee corrispondenti sopra S a queste linee va-

(6) Vedi *Acta Mathematica*. vol. XII, p. 247 [in questo vol.: XXII, p. 373]; « Rend. R. Acc. Lincei », vol. V, p. 161 [in questo vol.: XXIII, p. 406].

riate. A tal fine, se diamo alle f_s e φ_s le variazioni δf_s e $\delta\varphi_s$, bisognerà dare alle ψ_s, χ_s, θ_s le variazioni

$$\delta\psi_s = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s \quad , \quad \delta\chi_s = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s ,$$

$$\delta\theta_s = \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)_s \delta f_s + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)_s \delta\varphi_s$$

in cui le derivate parziali di x_1, x_2, x_3 rispetto ad u e v sono ricavate dalle (4) ed i loro valori sono presi nei punti del contorno $\mathfrak{L}_s$.

Da queste relazioni, applicando le (5) e (8), segue che la variazione che subìsce W risulterà

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ \left[(W'_{y_1})_s - \begin{vmatrix} p_{23} , & p_{31} , & p_{12} \\ \frac{\partial\psi_s}{\partial t_s} , & \frac{\partial\chi_s}{\partial t_s} , & \frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} \end{vmatrix} \right] \delta f_s + \left[(W'_{y_2})_s - \begin{vmatrix} p_{23} , & p_{31} , & p_{12} \\ \frac{\partial\psi_s}{\partial t_s} , & \frac{\partial\chi_s}{\partial t_s} , & \frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right] \delta\varphi_s \right\} dt_s .$$

Ma

$$\frac{\partial\psi_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{df_s}{dt_s} + \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{dt_s}$$

$$\frac{\partial\chi_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial t_s} + \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{dt_s}$$

$$\frac{\partial\theta_s}{\partial t_s} = \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t_s} + \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t_s} = \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial f_s}{\partial t_s} + \frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{d\varphi_s}{dt_s}$$

quindi

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ M_s + \begin{vmatrix} p_{23} , & p_{31} , & p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\} \left(\delta f_s \frac{d\varphi_s}{dt_s} - \delta\varphi_s \frac{df_s}{dt_s}\right) dt_s$$

$$= \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left\{ M_s + \begin{vmatrix} p_{23} , & p_{31} , & p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\} d\tau_s$$

in cui M_s rappresenta il rapporto (13) e $d\tau_s$ è l'area infinitesima descritta dall'elemento $d\mathfrak{L}_s$ durante lo spostamento infinitesimo della curva $\mathfrak{L}_s$.

Ma dalla (II) si ricava immediatamente

$$\delta' W = \sum_1^m {}_s \int_{\mathfrak{L}_s} \left[\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ip}} p_{ih} - H \right] d\tau_s ,$$

quindi, poichè le deformazioni delle curve $\mathfrak{L}_s$ sono arbitrarie, avremo

$$M_s + \begin{vmatrix} p_{23} , & p_{31} , & p_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H$$

ovvero, tenendo conto delle prime fra le relazioni (I),

$$M_s + \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{ih}} p_{ih} - H$$

d'onde finalmente

$$M_s + H = 0 \qquad (s = 1, 2 \cdots m).$$

7. Osserviamo ora che a cagione delle (10) e (13) le equazioni precedenti si possono scrivere

$$\text{(IV)} \qquad 0 = \left(\frac{dW}{d(u,v)}\right)_s + H\left(\left(\frac{\partial W}{\partial(x_2,x_3)}\right)_s, \left(\frac{\partial W}{\partial(x_3,x_1)}\right)_s, \left(\frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}\right)_s, x_1, x_2, x_3, u, v\right)$$

in cui si è sostituito in H in luogo delle p_{23}, p_{31}, p_{12} i loro valori dati dalle (10) e la s ha i valori $1, 2 \cdots m$.

Si ha dunque che W considerato come dipendente dalle linee $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots \mathfrak{L}_m$, $L_1, L_2, \cdots L_m$ deve soddisfare alle m relazioni differenziali precedenti che sono perfettamente analoghe alle equazioni a derivate parziali alle quali si giunge nella ordinaria teoria delle equazioni differenziali poste sotto la forma canonica (7).

8. La funzione W di linee che in tal modo è stata ottenuta non è in generale una funzione di primo grado. Si supponga ora H indipendente da u e da v; potremo dimostrare il teorema:

Noti gli integrali delle equazioni differenziali

$$\text{(I')} \qquad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u,v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}}, \qquad \Sigma \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u,v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

si potrà determinare una funzione di primo grado W, *la quale soddisfa la relazione*

$$\text{(IV')} \qquad H\left(\frac{\partial W}{\partial(x_2,x_3)}, \frac{\partial W}{\partial(x_3,x_1)}, \frac{\partial W}{\partial(x_1,x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) + h = 0$$

in cui h è una costante, e le derivate della funzione W *sono sostituite alle p in* H.

Premetteremo il seguente lemma:

Gli integrali delle equazioni (I') *soddisfano la condizione*

$$H = \text{cost.}$$

Abbiamo infatti

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial u} + \Sigma_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = \Sigma \frac{d(x_i, x_s)}{d(u,v)} \frac{\partial p_{is}}{\partial u} - \Sigma_i \Sigma_h \frac{\partial(p_{ih}, x_h)}{\partial(u,v)} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0.$$

Analogamente si trova $\frac{\partial H}{\partial v} = 0$, il che dimostra il lemma.

Supponiamo di avere trovato gli integrali

$$\text{(14)} \qquad x_i = x_i(u, v, C, C_1) \qquad\qquad \text{(14')} \qquad p_{is} = p_{is}(u, v, C, C_1)$$

(7) Vedi lezioni di dinamica di JACOBI. Lezione 19.

delle equazioni (I'). Sostituendoli in H, questa si ridurrà eguale ad una costante h, onde avremo

$$H(p_{23}, p_{31}, p_{12}, x_1, x_2, x_3) = \varphi(C, C_1) = h.$$

Risolviamo l'equazione precedente rispetto a C_1 e sostituiamo il valore che si ottiene nelle (14) e (14'). Avremo

(15) $\quad x_i = x_i(u, v, C, h) \qquad$ (15') $\quad p_{is} = p_{is}(u, v, C, h).$

Supponiamo che

$$\frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(C, u, v)} \gtrless 0. \tag{16}$$

Risolvendo le (15) rispetto ad u, v, C e sostituendo i valori che si ottengono nelle (15'), otterremo

$$p_{is} = p_{is}(x_1, x_2, x_3, h). \tag{17}$$

Poniamo questi valori in H e denotiamo questa funzione, dopo eseguita la sostituzione, con H'. Avremo $H' = H'(x_1, x_2, x_3, C, h)$.

Se in luogo di x_1, x_2, x_3 poniamo i valori (15) la H' deve ridursi identicamente eguale ad h, quindi

$$\Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial C} = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0 \quad , \quad \Sigma \frac{\partial H'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0$$

da cui segue, per la (16) $\frac{\partial H'}{\partial x_i} = 0$, onde deve aversi identicamente

$$H' = h. \tag{18}$$

Sostenendo le (17) nelle (I') si trova

$$-\frac{\partial H}{\partial x_i} = \Sigma_h \frac{d(p_{ih}, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma_h \Sigma_s \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_s} \frac{d(x_s, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma_h \Sigma_s \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_s} \frac{\partial H}{\partial p_{sh}}$$

quindi

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}}\left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{13}} \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0.$$

Ma essendo $H' = h$, avremo

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}} \frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{31}} \frac{\partial p_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial p_{12}} \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$$

da cui segue

$$\frac{\partial H}{\partial p_{23}}\left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Analogamente si avrebbe

$$\frac{\partial H}{\partial p_{31}}\left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_{12}}\left(\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3}\right) = 0$$

e quindi

$$\frac{\partial p_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} = 0.$$

Esisterà dunque una funzione di linee W di primo grado, di cui le derivate sono le p_{23}, p_{31}, p_{12} e che a cagione della (18) soddisferà la condizione (IV′).

9. Passiamo ora a dimostrare la proposizione reciproca:

Sia W *una funzione di primo grado di linee nello spazio* x_1, x_2, x_3 che *soddisfa la equazione*

$$\text{(IV}''\text{)} \qquad H\left(\frac{\partial W}{\partial (x_2, x_3)}, \frac{\partial W}{\partial (x_3, x_1)}, \frac{\partial W}{\partial (x_1, x_2)}, x_1, x_2, x_3\right) = h$$

in cui h è una costante. Pongasi

$$\frac{\partial W}{\partial (x_2, x_3)} = p_{23} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial (x_3, x_1)} = p_{31} \quad , \quad \frac{\partial W}{\partial (x_1, x_2)} = p_{12}.$$

Se sostituendo i detti valori nelle equazioni

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} = \frac{\partial H}{\partial p_{is}},$$

queste sono compatibili, allora saranno suddisfatte anche le equazioni

$$\text{(I}_2\text{)} \qquad \Sigma_h \frac{\partial (p_{ih}, x_h)}{\partial (u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Oltre a ciò potremo dimostrare:

Se W *dipende da un parametro costante a, posto* $W' = \dfrac{\partial W}{\partial a}$, $W'' = \dfrac{\partial W}{\partial h}$, W′ *e* W″ *saranno due funzioni di linee* L *nello spazio* x_1, x_2, x_3. *Spostando la linea* L *sopra una qualunque delle superficie*

$$\text{(19)} \qquad x_1 = x_1(u, v) \quad , \quad x_2 = x_2(u, v) \quad , \quad x_3 = x_3(u, v)$$

che si ottiene integrando le (I₁), *avremo*

$$\text{(20)} \quad W' \,|\, [L] \,| = \frac{\partial W}{\partial a} = a', \qquad \text{(20}'\text{)} \quad W'' \,|\, [L] \,| = \frac{\partial W}{\partial h} = \iint_\sigma du\, dv + h',$$

essendo σ la porzione della superficie (19) *racchiusa entro la linea* L *ed essendo* a' *e* h' *due costanti.*

Infatti, sostituendo gli integrali (19) delle (I₁) nelle p_{ih}, avremo

$$\Sigma_h \frac{\partial (p_{ih}, x_h)}{\partial (u, v)} = \Sigma_h \Sigma_r \frac{\partial p_{ih}}{\partial x_r} \frac{d(x_r, x_h)}{d(u, v)} = \Sigma \Sigma \frac{d(x_r, x_h)}{d(u, v)} \left(\frac{\partial p_{ih}}{\partial x_r} + \frac{\partial p_{ri}}{\partial x_h}\right) = \Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{rh}} \frac{\partial p_{rh}}{\partial x_i}.$$

Ma siccome si ha H = cost., sarà

$$\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{rh}} \frac{\partial p_{rh}}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

onde

$$\Sigma_h \frac{\partial(p_{ih}, x_h)}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Per dimostrare le (20) e (20'), consideriamo due linee $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ appartenenti alla superficie (19) fra le quali sia racchiusa una porzione σ' della superficie stessa. Per una nota formula [8] avremo

$$W'|[\mathfrak{L}_1]| - W'|[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'}\left(\frac{\partial W'}{\partial(x_2, x_3)}\cos nx_1 + \frac{\partial W'}{\partial(x_3, x_1)}\cos nx_2 + \frac{\partial W'}{\partial(x_1, x_2)}\cos nx_3\right)d\sigma,$$

$$W''|[\mathfrak{L}_1]| - W''|[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'}\left(\frac{\partial W''}{\partial(x_2, x_3)}\cos nx_1 + \frac{\partial W''}{\partial(x_3, x_1)}\cos nx_2 + \frac{\partial W''}{\partial(x_1, x_2)}\cos nx_3\right)d\sigma,$$

essendo n la normale a σ'. Quindi

$$W'|[\mathfrak{L}_1]| - W'|[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'}\Sigma \frac{\partial W'}{\partial(x_i, x_s)} \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} du\,dv$$

$$= \int_{\sigma'}\Sigma \frac{dH}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial a} du\,dv = \int_{\sigma'} \frac{\partial H}{\partial a} du\,dv = 0$$

$$W''|[\mathfrak{L}_1]| - W''|[\mathfrak{L}_2]| = \int_{\sigma'}\Sigma \frac{\partial W''}{\partial(x_i, x_s)} \frac{d(x_i, x_s)}{d(u, v)} du\,dv$$

$$= \int_{\sigma'}\Sigma \frac{\partial H}{\partial p_{is}} \frac{\partial p_{is}}{\partial h} du\,dv = \int_{\sigma'} \frac{\partial H}{\partial h} du\,dv = \int_{\sigma'} du\,dv.$$

10. Se $H = 1/2\,(p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2)$, le equazioni (I) si riferiscono al problema delle superficie d'area minima. In questo caso la formola (III) dà luogo ad un ben noto teorema di GAUSS. Interpretiamo i teoremi dei § 8 e 9.

Abbiasi un sistema doppiamente infinito di linee. Tutte quelle che partono dai punti del contorno di un'area infinitesima costituiscono un piccolo tubo che si può chiamare un *filetto*.

Il teorema del § 8 può enunciarsi nel modo seguente.

Le traiettorie ortogonali di un sistema di superficie d'area minima formano un sistema di filetti a sezione costante.

Il teorema del § 9 dà luogo alla proposizione.

Se un sistema di filetti a sezione costante ammette delle superficie ortogonali, queste sono superficie d'area minima.

Questi due teoremi furono dati dal prof. PADOVA nella sua Nota *Sulla teoria delle coordinate curvilinee* [9].

(8) Vedi « Rend. Acc. Lincei », vol. III, 2° sem., p. 277 [in questo vol.: XVIII, p. 324].
(9) « Rend. Acc. Lincei », vol. IV, p. 373.

XXIX.

SULLE VARIABILI COMPLESSE NEGLI IPERSPAZÎ

« Rend. Acc. Lincei », ser. 4, vol. VI_2, 1890_2; pp. 241-252.

1. In due Note inserite l'anno scorso nei « Rendiconti » di questa Accademia ho esposto i fondamenti di una estensione della teoria delle funzioni di variabili complesse negli iperspazî (*). La teoria stessa venne più ampiamente sviluppata pel caso degli spazi a tre dimensioni in una Memoria pubblicata negli « Acta Mathematica » (**). In questa Nota mi propongo di mostrare come possano estendersi al caso degli iperspazî le considerazioni svolte nell'art. 3 del 2° capitolo della predetta Memoria, e come possa estendersi il teorema di CAUCHY ad un caso più generale di quello considerato nel § 6 della seconda delle due Note citate.

2. Essendo $F\,|[S_r]|$ una funzione di primo grado degli iperspazî S_r immersi nell'iperspazio S_n, si ponga

$$\frac{\partial F}{\partial (x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \frac{\partial F}{\partial (x_{\mathrm{I}})} = p_{\mathrm{I}} + i q_{\mathrm{I}}$$

rappresentando con I il simbolo $(i_1 \cdots i_{r+1})$.

Si ponga pure

$$(1) \qquad \begin{cases} p_{\mathrm{I}}\, p_{\mathrm{H}} + q_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} = E_{\mathrm{IH}}\,, \\ p_{\mathrm{I}}\, q_{\mathrm{H}} - p_{\mathrm{H}}\, q_{\mathrm{I}} = D_{\mathrm{IH}}\,. \end{cases}$$

Sia ora $\varphi\,|\,[S_r]\,|$ una funzione di primo grado reale; poniamo

$$\frac{d\varphi}{d(x_{\mathrm{I}})} = \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$$

e supponiamo che si abbia

$$(2) \qquad \tilde{\omega}_{\mathrm{I}}\, D_{\mathrm{HK}} + \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}\, D_{\mathrm{KI}} + \tilde{\omega}_{\mathrm{K}}\, D_{\mathrm{IH}} = 0$$

per tutte le possibili combinazioni degli indici I, H, K. Supponendo che una almeno delle D_{HK} sia diversa da zero (per esempio $D_{\mathrm{H'K'}}$) è facile riconoscere che due sole delle $\tilde{\omega}_{\mathrm{I}}$ sono fra loro indipendenti (cioè $\tilde{\omega}_{\mathrm{H'}}$ e $\tilde{\omega}_{\mathrm{K'}}$).

Si formino ora le quantità

$$\frac{E_{\mathrm{IH}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{K}} - E_{\mathrm{IK}}\, \tilde{\omega}_{\mathrm{H}}}{D_{\mathrm{KH}}}\,.$$

(*) In questo vol.: XXIII, pp. 403-419.
(**) In questo vol.: XXII, pp. 363-402.

È facile dimostrare che esse sono indipendenti dagli indici H e K. Potremo quindi denotarle con χ_I. Si ricava allora

$$\chi_I D_{HK} + \chi_H D_{KI} + \chi_K D_{IH} = 0 \tag{3}$$

$$\tilde{\omega}_I = \frac{E_{IH}\chi_K - E_{IK}\chi_H}{D_{HK}}. \tag{4}$$

Può pure dedursi che il rapporto $\dfrac{\tilde{\omega}_I + i\chi_I}{p_I + iq_I}$ è indipendente dall'indice I.

Se esistesse una funzione ψ di cui le χ_I fossero le derivate, in tal caso la funzione $\varphi + i\psi$, secondo una denominazione introdotta nelle note precedentemente citate, si chiamerebbe *isogena* alla F [1].

3. Se eseguiamo un cambiamento di variabili ed in luogo delle $x_1, x_2 \cdots x_n$ ne sostituiamo altre $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n$, le relazioni (2), (3) e (4) restano invariate, come pure resta invariato il rapporto $\dfrac{\tilde{\omega}_I + i\chi_I}{p_I + iq_I}$ e la quantità [2]

$$\Theta_\varphi = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H, & \tilde{\omega}_K \\ \chi_H, & \chi_K \end{vmatrix} = \frac{(p_H\chi_K - p_K\chi_H)^2 + (q_H\chi_K - q_K\chi_H)^2}{D^2_{HK}} \tag{5}$$

$$= \frac{E_{IH}\tilde{\omega}_K\tilde{\omega}_L - E_{IK}\tilde{\omega}_H\tilde{\omega}_L + E_{LK}\tilde{\omega}_H\tilde{\omega}_K - E_{LH}\tilde{\omega}_K\tilde{\omega}_I}{D_{IL}D_{HK}}$$

la quale è indipendente dagli indici H e K.

Sia $\varphi' \mid [S_r] \mid$ una funzione reale di primo grado e ammettiamo che essa pure soddisfi l'equazione

$$\tilde{\omega}'_I D_{HK} + \tilde{\omega}'_H D_{KI} + \tilde{\omega}'_K D_{IH} = 0$$

rappresentando con $\tilde{\omega}'_I$ la derivata $\dfrac{d\varphi'}{d(x_I)}$.

Denotiamo con χ'_I la quantità analoga alla χ_I rispetto alla nuova funzione φ'.

Posto

$$H_{\varphi\varphi'} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H, & \tilde{\omega}_K \\ \chi'_H, & \chi'_K \end{vmatrix} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}'_H, & \tilde{\omega}'_K \\ \chi_H, & \chi_K \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= \frac{E_{KK}\tilde{\omega}_H\tilde{\omega}'_H - E_{HK}(\tilde{\omega}_H\tilde{\omega}'_K + \tilde{\omega}_K\tilde{\omega}'_H) + E_{HH}\tilde{\omega}_K\tilde{\omega}'_K}{D^2_{HK}},$$

si vede facilmente che esso è indipendente dagli indici H e K e che

$$H_{\varphi\varphi'} = H_{\varphi'\varphi}.$$

Abbiamo ora

$$\Theta_{\varphi+\varphi'} = \Theta_\varphi + 2H_{\varphi\varphi'} + \Theta_{\varphi'}. \tag{7}$$

Si ha dunque che anche la $H_{\varphi\varphi'}$ resta invariata cambiando le variabili $x_1 \cdots x_n$ nelle $\overline{x}_1 \cdots \overline{x}_n$.

(1) «Rend. Acc. Lincei», vol. V, 1° sem., p. 162 [in questo vol.: XXIII, p. 407].
(2) Ibid., p. 164 [in questo vol.: p. 409].

4. Nell'iperspazio totale S_n a n dimensioni consideriamone uno S_m ad m dimensioni, essendo

$$n \geqq m \geqq r + 2,$$

ottenuto ponendo

$$x_{m+1} = \text{cost.}, \cdots x_n = \text{cost.}$$

I punti dell'iperspazio S_m saranno individuati dai valori di $x_1, x_2 \cdots x_m$ e le funzioni F, φ, φ' potranno considerarsi come funzioni di primo grado degli iperspazî S_r immersi entro S_m.

Si ponga

$$L \equiv (l_1 \cdots l_{r+1}) \qquad L' \equiv (l_{r+2} \cdots l_m)$$
$$(l_1 \cdots l_m) \equiv (1, 2 \cdots m).$$

Nei paragrafi seguenti fino al § 12 noi ammetteremo che i gruppi di indici che si denotano con I, H, K$\cdots$ siano costituiti da indici non superiori ad m.

Vogliamo dimostrare che è possibile determinare le funzioni $\Phi \mid [S_{m-r-2}] \mid$, $\Psi \mid [S_{m-r-2}] \mid$ in modo tale che sia

$$\tilde{\omega}_I = \Sigma_l D_{LI} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LI} \frac{\partial\Psi}{d(x_{L'})}. \tag{8}$$

Avremo infatti che le (2) resulteranno verificate, perchè dalla formula precedente segue

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega}_I D_{HK} + \tilde{\omega}_H D_{KI} + \tilde{\omega}_K D_{IH}\\ &= \Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} (D_{LI} D_{HK} + D_{LH} D_{KI} + D_{LK} D_{IH})\\ &+ \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} (E_{LI} D_{HK} + E_{LH} D_{KI} + E_{LK} D_{IH}) = 0.\end{aligned}$$

Basterà dunque che si possa porre (supponendo $D_{HK} \gtrless 0$)

$$\left\{\begin{aligned}\tilde{\omega}_H &= \Sigma_l D_{LH} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LH} \frac{\partial\Psi}{\partial(x_{L'})}\\ \tilde{\omega}_K &= \Sigma_l D_{LK} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l E_{LK} \frac{\partial\Psi}{d(x_{L'})}\end{aligned}\right. \tag{9}$$

per le due sole combinazioni di indici H e K perchè la (8) sia soddisfatto per una qualunque delle combinazioni I.

Si ponga ora [3]

$$\frac{d\Phi}{d(x_{L'})} = \frac{d\Phi}{d(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}} \tag{10}$$

$$\frac{d\Psi}{d(x_{L'})} = \frac{d\Psi}{d(x_{l_{r+2}} \cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial Q_{l_{r+2} \cdots l_{s-1} l_{s+1} \cdots l_m}}{\partial x_{l_s}} \tag{11}$$

(3) Ibid., p. 602 [in questo vol.: XXIV, pp. 422-423].

nelle equazioni (9). Basterà determinare delle funzioni P e Q che soddisfino le due equazioni differenziali (9) perché le (8) vengano verificate.

5. Posto le $\tilde{\omega}_I$ sotto la forma (8), possono calcolarsi le χ_I. Si ottiene

$$\chi_I = \Sigma_l \frac{(D_{LK}\, E_{IH} - D_{LH}\, E_{IK})}{D_{KH}} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l \frac{(E_{LK}\, E_{IH} - E_{LH}\, E_{IK})}{D_{KH}} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})}$$

onde

$$\chi_I = - \Sigma_l\, E_{LI} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma_l\, D_{LI} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})}\,. \tag{12}$$

Le formule (8) e (12) possono scriversi ancora sotto un'altra forma tenendo conto delle (1). Si ottiene

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_I &= q_I\, \Sigma p_L \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} - p_I\, \Sigma q_L \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \\
&\quad + q_I\, \Sigma p_L \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} + p_I\, \Sigma q_L \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \\
\chi_I &= q_I\, \Sigma p_L \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} - p_I\, \Sigma q_L \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \\
&\quad - q_I\, \Sigma p_L \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} - p_I\, \Sigma q_L \frac{d\Phi}{d(x_{L'})}\,.
\end{aligned}$$

Queste equazioni sono equivalenti all'altra

$$\tilde{\omega}_I - i\chi_I = (p_I - iq_I)\, \Sigma\, (p_L + iq_L) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(x_{L'})}\,. \tag{13}$$

Poste le (8) sotto questa forma, è facile dimostrare che esse sono soddisfatte sempre dalle stesse funzioni Φ e Ψ anche se si cangiano le variabili $x_1, x_2 \cdots x_m$ nelle $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_m$ in modo che $\dfrac{d(x_1, x_2 \cdots x_m)}{d(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_m)} = 1$.

Infatti se denotiamo le derivate rispetto alle nuove variabili cogli stessi simboli usati precedentemente, solo ponendo sopra di essi una linea orizzontale, abbiamo (§ 3)

$$\frac{\tilde{\omega}_I - i\chi_I}{p_I - iq_I} = \frac{\bar{\tilde{\omega}}_I - i\bar{\chi}_I}{\bar{p}_I - i\bar{q}_I}$$

e

$$\begin{aligned}
\Sigma\, (p_L + iq_L) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(x_{L'})} &= \Sigma \left\{ \Sigma\, (\bar{p}_H + i\bar{q}_H) \frac{d(\bar{x}_H)}{d(x_L)} \right\} \left\{ \Sigma \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{K'})} \frac{d(\bar{x}_{K'})}{d(\bar{x}_{L'})} \right\} \\
&= \Sigma\, (\bar{p}_H + i\bar{q}_H) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{H'})} \cdot \frac{d(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_m)}{d(x_1 \cdots x_m)}
\end{aligned}$$

onde

$$(\bar{\tilde{\omega}}_I - i\bar{\chi}_I) = (\bar{p}_I - i\bar{q}_I)\, \Sigma\, (\bar{p}_L + i\bar{q}_L) \frac{d(\Psi + i\Phi)}{d(\bar{x}_{L'})}\,.$$

6. Si ponga, in modo analogo alla (8),

$$\tilde{\omega}'_I = \Sigma_l\, D_{LI} \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} + \Sigma_l\, E_{LI} \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \tag{14}$$

e passiamo a calcolare il parametro differenziale

$$H_{\varphi,\varphi'}$$

mediante

$$\Phi, \Psi, \Phi', \Psi'.$$

Avremo

$$H_{\varphi\varphi'} = \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \tilde{\omega}_H, \tilde{\omega}_K \\ \chi'_H, \chi'_K \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{D_{HK}} \begin{vmatrix} \Sigma D_{LH} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma E_{LH} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} & , & \Sigma D_{LK} \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} + \Sigma E_{LK} \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \\ \chi'_H & , & \chi'_K \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma \left\{ \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \left(\frac{D_{LH}\chi'_K - D_{LK}\chi'_H}{D_{HK}} \right) + \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \left(\frac{E_{LH}\chi'_K - E_{LK}\chi'_H}{D_{HK}} \right) \right\}$$

onde

$$H_{\varphi\varphi'} = -\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L \tag{15}$$

e in modo perfettamente analogo

$$H_{\varphi\varphi'} = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L . \tag{16}$$

Dalle formule precedenti segue l'altra

$$\Theta = -\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L . \tag{17}$$

7. Le due relazioni (15) e (16) dànno luogo alla seguente

$$-\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \chi'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \chi_L + \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L . \tag{18}$$

Si consideri ora

$$M_{\varphi\varphi'} = \Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \chi'_L .$$

A cagione della (14) potremo scrivere

$$M_{\varphi\varphi'} = \Sigma\Sigma \left\{ D_{IL} \left(\frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi'}{d(x_{I'})} + \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi'}{d(x_{I'})} \right) \right.$$
$$\left. + E_{IL} \left(\frac{\partial\Phi}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi'}{d(x_{I'})} - \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi'}{d(x_{I'})} \right) \right\} .$$

Scambiando φ con φ' si ottiene

$$M_{\varphi\varphi} = \Sigma\Sigma \left\{ D_{IL} \left(\frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi}{d(x_{I'})} + \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi}{d(x_{I'})} \right) \right.$$
$$\left. + E_{IL} \left(\frac{\partial\Phi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Psi}{d(x_{I'})} - \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \frac{d\Phi}{d(x_{I'})} \right) \right\}$$

onde

$$M_{\varphi\varphi'} = -M_{\varphi'\varphi}$$

vale a dire

$$\Sigma \frac{d\Phi}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}'_L + \Sigma \frac{d\Psi}{d(x_{L'})} \chi'_L = -\Sigma \frac{d\Phi'}{d(x_{L'})} \tilde{\omega}_L - \Sigma \frac{d\Psi'}{d(x_{L'})} \chi_L \tag{19}$$

relazione analoga alla (18). Combinando insieme le equazioni (18) e (19) si trova

$$(20) \quad H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi'\varphi} = \Sigma\,(\tilde{\omega}_L + i\chi_L)\left(\frac{d\,(\Psi' + i\Phi')}{d\,(x_{L'})}\right) = \Sigma\,(\tilde{\omega}'_L - i\chi'_L)\left(\frac{d\,(\Psi - i\Phi)}{d\,(x_{L'})}\right).$$

Quest'ultima equazione poteva ottenersi anche direttamente dalla (13) e dalla analoga relativa alla funzione φ'.

8. Teniamo ora conto delle relazioni (10) e (11) e delle analoghe

$$\frac{d\Phi'}{d\,(x_{L'})} = \frac{d\Phi'}{d\,(x_{l_{r+2}}\cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s\,(-1)^s\,\frac{\partial P'_{l_{r+2}\cdots l_{s-1}\,l_{s+1}\cdots l_m}}{\partial x_{l_s}}$$

$$\frac{d\Psi'}{d\,(x_{L'})} = \frac{d\Psi'}{d\,(x_{l_{r+2}}\cdots x_{l_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s\,(-1)^s\,\frac{\partial Q'_{l_{r+2}\cdots l_{s-1}\,l_{s+1}\cdots l_m}}{\partial x_{l_s}}$$

nell'eseguire gli integrali

$$\int_{S'_m} H_{\varphi\varphi'}\,dS'_m \quad , \quad \int_{S'_m} \Theta\,dS'_m \quad , \quad \int_{S'_m} (H_{\varphi\varphi'} + iM_{\varphi\varphi'})\,dS'_m$$

essendo S'_m un iperspazio ad m dimensioni immerso entro S_n. Si ottiene in tal modo

$$(21) \qquad \int_{S'_m} H_{\varphi\varphi'}\,dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\,P_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}\cos\nu x_{i_s}\right)dS'_{m-1}$$

$$-\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\,Q_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\tilde{\omega}'_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}\cos\nu x_{i_s}\right)dS'_{m-1}$$

$$+\int_{S'_m} \Sigma_i\,P_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\frac{\partial\chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right)dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\,P'_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\chi_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}\cos\nu x_{i_s}\right)dS'_{m-1}$$

$$-\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\,Q'_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}\cos\nu x_{i_s}\right)dS'_{m-1}$$

$$+\int_{S'_m} \Sigma_i\,P'_{i_{r+3}\cdots i_m}\left(\sum_{1}^{r+2}{}_s\,(-1)^s\,\frac{\partial\chi_{i_1\cdots i_{s-1}\,i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right)dS'_m$$

essendo S'_{m-1} il contorno di S'_m e ν la normale a S'_{m-1} diretta verso l'esterno di S'_m.

La formula precedente è analoga alla nota formula di GREEN. Abbiamo inoltre

$$(22) \qquad \int_{S'_m} \Theta\, dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, P_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$- \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i\, Q_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$+ \int_{S'_m} \Sigma_i\, P_{i_{r+3}\cdots i_m} \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right) dS'_m .$$

Finalmente può scriversi la formula

$$(23) \qquad \int_{S'_m} (H_{\varphi\varphi'} + i M_{\varphi\varphi'})\, dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i (Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + i P'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s (\tilde{\omega}_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} + i\chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$+ i \int_{S'_m} \Sigma_i (Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + i P'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right) dS'_m$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i (Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - i P_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s (\tilde{\omega}'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}} - i\chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}) \cos \nu x_{i_s}\right) dS'_{m-1}$$

$$- i \int_{S'_m} \Sigma_i (Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - i P_{i_{r+3}\cdots i_m}) \left(\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}}\right) dS'_m .$$

9. Supponiamo

$$(24) \qquad \sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0 \quad , \quad \sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial \chi'_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

allora (vedi § 2) le tre funzioni $\varphi + i\psi$, $\varphi' + i\psi'$, F saranno isogene ed in ciascuna delle precedenti formule verranno a mancare gli ultimi termini.

10. Passiamo a dare una applicazione alla formula (22). Supponiamo in essa $m = r + 2$ e verificate le prime fra le equazioni (24). In tal caso esisterà una sola P ed una sola Q che scriveremo senza alcun indice.

Denotiamo con

$$x_1 = x_1(\omega_1 \cdots \omega_{r+1}), \cdots, x_{r+2} = x_{r+2}(\omega_1 \cdots \omega_{r+1})$$

le equazioni dell'iperspazio S'_{m-1} e supponiamo scelte queste equazioni (il che sarà sempre possibile) in modo che

$$\Sigma_s \left\{ \frac{d(x_1 \cdots x_{s-1} x_{s+1} \cdots x_{r+2})}{d(\omega_1 \cdots \cdots \cdots \omega_{r+2})} \right\}^2 = 1.$$

Avremo

$$\cos \nu x_{i_s} = (-1)^s \frac{d(x_{i_1} \cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}} \cdots x_{i_{r+2}})}{d(\omega_1 \cdots \cdots \cdots \omega_{r+1})}$$

onde

$$\Sigma_s (-1)^s \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = \frac{d\varphi}{dS'_{m-1}}$$

$$\Sigma_s (-1)^s \chi_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}} \cos \nu x_{i_s} = \frac{d\psi}{dS'_{m-1}}.$$

La (22) diverrà quindi

$$\int_{S'_m} \Theta \, dS'_m = \int_{S'_{m-1}} \left(P \frac{d\psi}{dS'_{m-1}} - Q \frac{d\varphi}{dS'_{m-1}} \right) dS'_{m-1}.$$

Ciò premesso consideriamo due funzioni $\varphi' + i\psi'$, $\varphi'' + i\psi''$ isogene alla F le quali siano eguali fra loro per tutti gli iperspazî chiusi S'_r contenuti in S'_{m-1}. Posto

$$\varphi' - \varphi'' = \varphi, \ \psi' - \psi'' = \psi,$$

avremo, sopra S'_{m-1}, $\dfrac{d\psi}{dS'_{m-1}} = \dfrac{d\varphi}{dS'_{m-1}} = 0$, onde

$$\int_{S'_m} \Theta \, dS'_m = 0$$

da cui segue che

$$\varphi' + i\psi' = \varphi'' + i\psi''$$

in tutti gli iperspazî S'_m *aventi per contorno* S'_{m-1}.

11. Si supponga $m = n$. Mediante le (10) e (11) potremo ottenere le $\tilde{\omega}_H$ e χ_H espresse per mezzo delle P e delle Q e quindi potremo avere la Θ espressa pure per le P e Q stesse. In modo analogo potremo ottenere la H in funzione delle P, Q, P′, Q′. Rappresenteremo le dette funzioni in questo caso con

$$\tilde{\omega}_H(P, Q) \quad , \quad \chi_H(P, Q) \quad , \quad \Theta(P, Q) \quad , \quad H(P, Q, P', Q').$$

È evidente che lasciando affatto arbitrarie le funzione P e Q le $\tilde{\omega}_H$, χ_H non soddisfano alle condizioni di integrabilità

$$(25) \qquad \sum_1^{r+2} {}_s (-1)^s \frac{\partial \tilde{\omega}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0$$

$$(26) \qquad \sum_1^{r+2} {}_s (-1)^s \frac{\partial \chi_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0 ;$$

però le relazioni (2), (3) e (4) fra di loro sussisteranno sempre, come pure saranno verificate le equazioni

$$\chi_H (P, Q) = \tilde{\omega}_H (Q, -P)$$

$$H (P, Q, P', Q') = H (P', Q', P, Q)$$

$$(27) \qquad \Theta (P + P', Q + Q') = \Theta (P, Q) + 2 H (P, Q, P', Q') + \Theta (P' + Q').$$

Oltre a ciò Θ sarà sempre positiva.

Le P e Q sono in numero di

$$2 n_{n-r-2} = 2 n_{r+2} .$$

Ogni qual volta esse soddisferanno le $2n_{r+2}$ equazioni (25) e (26), avremo verificate le condizioni di integrabilità ed esisterà quindi corrispondentemente alle P e Q stesse una funzione $\varphi + i\psi$ isogena alla F.

Denotiamo con $\Gamma_T (P, Q)$ il primo membro della (25) in cui $T \equiv i_1, \cdots i_{r+2}$. Il primo membro della (26) sarà $\Gamma_T (Q, -P)$. Ciò premesso dalla (27) segue

$$\int_{S_n} \Theta (P + P', Q + Q')\, dS_n = \int_{S_n} \Theta (P, Q)\, dS_n + 2 \int_{S_n} H (P, Q, P', Q')\, dS_n$$

$$+ \int_{S_n} \Theta (P', Q')\, dS_n .$$

Se supponiamo P′ e Q′ nulli al contorno S_{n-1} di S_n, mediante una integrazione per parti, come abbiamo eseguito nel § 8, otterremo

$$\int_{S_n} \Theta (P + P', Q + Q')\, dS_n = \int_{S_n} \Theta (P, Q)\, dS_n + \int_{S_n} \Theta (P', Q')\, dS_n$$

$$+ \int_{S_n} \Sigma_i \{ P'_{T'} \Gamma_T (Q, -P) - Q'_{T'} \Gamma_T (P, Q) \} dS_n .$$

Questa formula conduce alla conseguenza che $\Theta (P, Q)$, per dati valori delle P e Q al contorno, sarà minimo quando saranno soddisfatte le equazioni

$$(28) \qquad \Gamma_T (Q, -P) = 0 \quad , \quad \Gamma_T (P, Q) = 0 .$$

Le funzioni isogene ad una data possono quindi, come le ordinarie funzioni di una variabile complessa, farsi corrispondere ad un problema di minimo.

È facile provare che dati i valori delle P e Q al contorno, se esse soddisfano le equazioni (28) le $\tilde{\omega}_{H}$ e χ_{H} restano determinate. Infatti mediante le solite integrazioni per parti si proverebbe che, se le P' e Q' e le P'' e Q'' soddisfacessero alle dette condizioni e fossero rispettivamente eguali fra loro al contorno, posto le $P' - P'' = P'''$ e le $Q' - Q'' = Q'''$, si avrebbe

$$\int_{S_n} \Theta\,(P''', Q''')\, dS_n = 0$$

e quindi $\Theta = 0$; relazione che non può essere soddisfatta se $\tilde{\omega}_{H}'''$ e χ_{H}''' non fossero nulle (vedi formula (5)).

12. Se supponiamo soddisfatte le condizioni (24), esisteranno le funzioni $\varphi + i\psi$, $\varphi' + i\psi'$ isogene alla F e la equazione (20) potrà esser scritta

$$\Sigma \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x_L)} \frac{d(\Psi' + i\Phi')}{d(x_{L'})} = \Sigma \frac{d(\varphi' - i\psi')}{d(x_L)} \frac{d(\Psi' - i\Phi)}{d(x_{L'})} \tag{29}$$

e la (23) diverrà

$$\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + iP'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}\cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s} dS'_{m-1} \tag{30}$$

$$= \int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q_{i_{r+3}\cdots i_m} - iP_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{d(\varphi' - i\psi')}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}\cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s} dS'_{m-1}\,.$$

Ammettendo $\varphi' + i\psi' = 0$, $\varphi + i\psi = F$ le precedenti equazioni divengono

$$\Sigma \frac{dF}{d(x_L)} \frac{d(\Psi' + i\Phi')}{d(x_{L'})} = 0$$

$$\int_{S'_{m-1}} \Sigma_i \,(Q'_{i_{r+3}\cdots i_m} + iP'_{i_{r+3}\cdots i_m}) \sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{s-1}} x_{i_{s+1}}\cdots x_{i_{r+2}})} \cos \nu x_{i_s} dS'_{m-1} = 0.$$

La formula che ora abbiamo trovato corrisponde ad una estensione del teorema di CAUCHY di cui ci occuperemo nel paragrafo seguente.

13. Si abbiano le due funzioni di iperspazî

$$F\,|\,[S_r]\,| \quad e \quad \mathfrak{F}\,|\,[S_{m-r-2}]\,|$$

di primo grado tali che

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\cdots x_{i_{r+1}})} = \sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial V_{i_1\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{i_{r+2}}\cdots x_{i_m})} = \sum_{r+2}^{m}{}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{B}_{i_{r+2}\cdots i_{s-1}\, i_{s+1}\cdots i_m}}{\partial x_{i_s}}.$$

Posto

$$\mathrm{I}_{i_1 \cdots i_{m-1}} = \Sigma_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_r+1})} \mathfrak{B}_{h_r+2 \cdots h_{m-1}}$$

$$\mathfrak{J}_{i_1 \cdots i_{m-1}} = \Sigma_h \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_r+1} \cdots x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1 \cdots h_r}$$

avremo evidentemente

$$\sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial \mathrm{I}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}} = \Sigma_h \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_r+2})} \sum_{r+2}^m {}_t (-1)^t \frac{\partial \mathfrak{B}_{h_r+2 \cdots h_{t-1} h_{t+1} \cdots h_m}}{\partial x_{h_t}} \right)$$

$$= \Sigma_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_r+1})} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_r+2} \cdots x_{h_m})}$$

$$= \Sigma_h \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_r+2} \cdots x_{h_m})} \sum_1^{r+1} {}_t (-1)^t \frac{\partial \mathrm{V}_{h_1 \cdots h_{t-1} h_{t+1} \cdots h_r+1}}{\partial x_{h_t}} \right)$$

$$= \sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{J}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

essendo $h_1 \cdots h_m \equiv i_1 \cdots i_m$.

Da ciò segue, posto

$$\frac{\partial f}{\partial (x_{i_1} \cdots x_{i_m})} = \sum_1^m {}_s (-1)^s \frac{\partial \mathrm{I}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}} = \sum_1^m (-1)^s \frac{\partial \mathfrak{F}_{i_1 \cdots i_{s-1} i_{s+1} \cdots i_m}}{\partial x_{i_s}},$$

che [(4)]:

$$f \equiv (\mathrm{F}, \mathfrak{F}).$$

Queste stesse proprietà possono esprimersi ancora in un altro modo.

Denotiamo con S_{m-1} un iperspazio chiuso ad $m = 1$ dimensioni contenuto in S_n e che restando entro S_n può ridursi ad un punto senza incontrare singolarità delle funzioni F e $\mathfrak{F}$. Siano $\alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}}$ i suoi coseni di direzione; avremo

(31) $$f \,\|[\mathrm{S}_{m-1}]\| =$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma_h \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_r+1})} \mathfrak{B}_{h_r+2 \cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, d\mathrm{S}_{m-1}$$

$$= \int_{\mathrm{S}_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma_h \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_r+1} \cdots x_{h_{m-1}})} \mathrm{V}_{h_1 \cdots h_r} \right) \alpha_{i_1 \cdots i_{m-1}} \, d\mathrm{S}_{m-1}$$

essendo $h_1 \cdots h_{m-1} \equiv i_1 \cdots i_{m-1}$.

Quindi se

$$(\mathrm{F}, \mathfrak{F}) \equiv 0$$

(4) Ibid., p. 293 [in questo vol.: XXIII, p. 413].

sarà

$$(32)\qquad \int\limits_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\Sigma \frac{\partial F}{\partial (x_{h_1} \cdots x_{h_{r+1}})} \mathfrak{B}_{h_{r+2} \cdots h_{m-1}} \right) \alpha_{i_1 \dots i_{m-1}} dS_{m-1}$$

$$= \int\limits_{S_{m-1}} \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial (x_{h_{r+1}} \cdots x_{h_{m-1}})} V_{h_1 \dots h_r} \right) \alpha_{i_1 \dots i_{m-1}} dS_{m-1} = 0 .$$

La formula (30) può dedursi dalla precedente.

Se supponiamo che $\mathfrak{F}$ sia una funzione di punti, allora il teorema contenuto nella formula (32) diviene quello dato nel § 6 della seconda Nota citata, come generalizzazione del teorema di CAUCHY.

La forma (32) dà quindi una estensione del teorema di CAUCHY ad un caso più generale di quello già contemplato nel teorema nella Nota suddetta.

14. Procediamo a considerare un caso in cui è applicabile il teorema ora trovato. Daremo perciò la seguente proposizione:

Se F *e* $\mathfrak{F}$ *contengono un divisore comune* (5), *il quale è una funzione di un iperspazio di ordine pari, allora si ha*

$$(F , \mathfrak{F}) \equiv 0 .$$

Infatti se λ è una funzione di 1° grado di un iperspazio d'ordine pari, avremo $(\lambda , \lambda) \equiv 0$, perchè la somma $\Sigma_i l_{i_1 \dots i_t} l_{i_{t+1} \dots i_{2t}}$, in cui $l_{i_1 \dots i_t} = \dfrac{d\lambda}{d(x_{i_1} \cdots x_{i_t})}$, conterrà termini due a due eguali e di segno contrario quando t sarà un numero dispari. Applicando quindi la proprietà associativa della operazione di composizione delle funzioni di iperspazî (6) si otterrà il teorema enunciato.

15. Se invece di avere una sola coppia di funzioni F e $\mathfrak{F}$ ne abbiamo più F_k e $\mathfrak{F}_k$ alle quali corrispondono rispettivamente le $V^{(k)}_{h_1 \dots h_r}$ e $\mathfrak{B}^{(k)}_{h_{r+2} \dots h_{m-1}}$ nello stesso modo che le V e $\mathfrak{B}$ corrispondono alle F e $\mathfrak{F}$; allora, posto

$$f \equiv \Sigma_k (F_k , \mathfrak{F}_k),$$

avremo che la f potrà esprimersi mediante due somme di integrali analoghi a quelli che compariscono nella formula (31) e se sarà $f \equiv 0$ avremo che le due somme di integrali saranno nulle.

(5) Ibid., p. 294 [in questo vol.: XXIII, p. 414].
(6) Ibid., pag. 294 [in questo vol.: XXIII, p. 414].

XXX.

SOPRA LE EQUAZIONI DI HERTZ

«Nuovo Cimento», ser. 3, vol. XXIX, 1891, pp. 53-63.

1. In una Memoria, la cui traduzione è comparsa nel fascicolo precedente di questo giornale, HERTZ ha ricavato da uno stesso sistema di equazioni differenziali le leggi note della elettrostatica, del magnetismo e della elettrodinamica pel caso dei corpi in quiete. In una Memoria stampata nell'ottobre scorso negli «Annali di Wiedemann» lo stesso Autore ha stabilito delle equazioni differenziali analoghe pel caso dei corpi in moto. La ipotesi da cui egli è partito per giungere a queste ultime equazioni è la seguente:

Nel caso dei corpi in quiete la variazione istantanea dello stato magnetico dipende unicamente dalla ripartizione della forza elettrica nelle vicinanze del punto. In un corpo in movimento a questa variazione se ne aggiunge una seconda che si sovrappone in ogni istante alla prima e che proviene dalla deformazione che ha luogo nelle vicinanze del punto per il movimento. Ammetteremo che l'influenza del movimento sia tale che, se essa agisse da sola, le linee di forza magnetiche sarebbero trasportate dal corpo nel suo moto. Lo stesso ammetteremo per la variazione della polarizzazione elettrica dovuta al movimento »[1].

Partendo da tale ipotesi HERTZ è giunto alle sue equazioni nelle quali egli fa comparire, come in quelle per i corpi in quiete, le componenti della forza magnetica, quelle della forza elettrica, le componenti delle polarizzazioni elettriche e magnetiche e le componenti della corrente elettrica.

La detta ipotesi fondamentale di HERTZ, essendo relativa alle linee di forza elettriche e magnetiche, mi sono proposto di ottenere le equazioni fondamentali della elettrodinamica pel caso dei corpi in quiete, in modo da porre in evidenza gli elementi proprî ad individuare le dette linee di forza. In tal modo ricorrendo ad un sistema di coordinate curvilinee si giunge ad *un sistema di equazioni differenziali, le quali, seguendo la ipotesi di* HERTZ, *si estendono senza alcuna modificazione al caso dei corpi in moto.* Le variabili indipendenti relative allo spazio che in esse compariscono sono quei parametri che individuano sempre le medesime particelle dei corpi che si considerano, analoghi a quei parametri che si scelgono come variabili indipendenti nelle equazioni della idrodinamica di LAGRANGE[2].

(1) «Wied. Ann.», Bd XLI, s. 372.
(2) Vedi KIRCHHOFF, *Mechanik*, 2. e Auflage, s. 163.

Mi sembra che le equazioni (V), (V′) della presente Nota, le quali sotto la stessa forma rappresentano le equazioni fondamentali della elettrodinamica, tanto nel caso di corpi in moto, quanto nel caso dei corpi in quiete esprimano analiticamente in maniera evidente la ipotesi fondamentale di HERTZ.

2. Denotiamo con

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3 \ ; \ \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3 \ ; \ X_1, X_2, X_3 \ ; \ L_1, L_2, L_3 \ ; \ w_1, w_2, w_3,$$

le componenti della forza elettrica, della forza magnetica, della polarizzazione elettrica, di quella magnetica e le componenti della corrente elettrica.

Queste quantità saranno legate fra loro dalle relazioni lineari

$$\text{(I′)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{X}_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 \quad , & \mathrm{L}_1 = \beta_{11} L_1 + \beta_{12} L_2 + \beta_{13} L_3 , \\ \mathrm{X}_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \alpha_{23} X_3 \quad , & \mathrm{L}_2 = \beta_{21} L_1 + \beta_{22} L_2 + \beta_{23} L_3 , \\ \mathrm{X}_3 = \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \alpha_{33} X_3 \quad , & \mathrm{L}_3 = \beta_{31} L_1 + \beta_{32} L_2 + \beta_{33} L_3 , \\ \multicolumn{2}{c}{w_1 = \gamma_{11} X_1 + \gamma_{12} X_2 + \gamma_{13} X_3 + w_1^0} \\ \multicolumn{2}{c}{w_2 = \gamma_{21} X_1 + \gamma_{22} X_2 + \gamma_{23} X_3 + w_2^0} \\ \multicolumn{2}{c}{w_3 = \gamma_{31} X_1 + \gamma_{32} X_2 + \gamma_{33} X_3 + w_3^0} \end{array} \right.$$

essendo $\alpha_{is} = \alpha_{si}$, $\beta_{is} = \beta_{si}$, $\gamma_{is} = \gamma_{si}$. Le w_1^0, w_2^0, w_3^0 sono delle quantità dipendenti solo dalle forze elettromotrici nei varii punti dello spazio.

Si ponga, chiamando x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane [3],

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)} \\[2ex] X_2 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)} \\[2ex] X_3 = \varphi \dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)} \end{array} \right. \qquad \text{(II′)} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_2, x_3)} \\[2ex] L_2 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_3, x_1)} \\[2ex] L_3 = \psi \dfrac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(x_1, x_2)} . \end{array} \right.$$

Avremo

$$X_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} X +_2 \frac{d\varphi_1}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} = 0 \quad , \quad X_1 \frac{d\varphi_2}{dx_1} + X_2 \frac{d\varphi_2}{dx_2} + X_3 \frac{d\varphi_2}{dx_3} = 0$$

$$L_1 \frac{d\psi_1}{dx_1} + L_2 \frac{d\psi_1}{dx_2} + L_3 \frac{d\psi_1}{dx_3} = 0 \quad , \quad L_1 \frac{d\psi_2}{dx_1} + L_2 \frac{d\psi_2}{dx_2} + L_3 \frac{d\psi_2}{dx_3} = 0$$

quindi le linee

$$\varphi_1 = \text{cost} \quad , \quad \varphi_2 = \text{cost}$$

saranno le linee di forza elettriche e le

$$\psi_1 = \text{cost} \quad , \quad \psi_2 = \text{cost}$$

le linee di forza magnetiche.

(3) Col simbolo $\dfrac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_i, x_s)}$ intenderemo denotare il *determinante funzionale* delle φ_1, φ_2 rispetto alle variabili x_i, x_s. Lo stesso si dica dei simboli analoghi usati appresso.

Se denotiamo con F la risultante di X_1, X_2, X_3, preso un tubo di forza formato dalle superficie

$$\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2 \quad , \quad \varphi_1 + d\varphi_1 \quad , \quad \varphi_2 + d\varphi_2 ,$$

sarà

$$\varphi \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 = \mathrm{F} d\sigma$$

essendo $d\sigma$ la sezione del tubo di forza.

3. Prendendo un sistema di coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3 e ponendo

$$\mathrm{D} = \frac{d(x_1, x_2, x_3)}{d(u_1, u_2, u_3)},$$

avremo

$$X_i = \varphi \left[\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_2, u_3)} \frac{d(u_2, u_3)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_3, u_1)} \frac{d(u_3, u_1)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_1, u_2)} \frac{d(u_1, u_2)}{d(x_{i+1}, x_{i+2})} \right]$$
$$= \frac{\varphi}{\mathrm{D}} \left[\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_2, u_3)} \frac{dx_i}{du_1} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_3, u_1)} \frac{dx_i}{du_2} + \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_1, u_2)} \frac{dx_i}{du_3} \right].$$

Quindi ponendo per semplicità

(1) $$U_i = \frac{\varphi}{\mathrm{D}} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}$$

avremo

(2) $$X_h = \Sigma_i \, U_i \frac{dx_h}{du_i}.$$

Avremo pure con un calcolo identico, ponendo

(1′) $$V_i = \frac{\psi}{\mathrm{D}} \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u_{i+1}, u_{i+2})}$$

(2′) $$L_h = \Sigma_i \, V_i \frac{dx_h}{du_i}.$$

4. Esaminiamo ora la forma quadratica

$$f = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \, \alpha_{rs} \, X_r \, X_s .$$

Chiamando A_{rs} i coefficienti della forma trasformata nelle variabili U_i, si otterrà

$$f = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \, \mathrm{A}_{rs} \, U_r \, U_s .$$

Quindi

$$\Sigma_r \frac{df}{dX_r} dx_r = \Sigma_r \frac{df}{dU_r} du_r .$$

Ora per le (I′)

$$\Sigma_r \frac{df}{dX_r} dx_r = \Sigma_r \, \mathrm{X}_r \, dx_r .$$

Ponendo analogamente

(3) $$\frac{df}{dU_r} = \Sigma_s \, \mathrm{A}_{rs} \, U_s = \mathrm{U}_r ,$$

risulterà

(4)
$$\Sigma_r X_r dx_r = \Sigma_r U_r du_r .$$

In modo del tutto simile considerando la forma quadratica

$$f' = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \beta_{rs} L_r L_s = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s B_{rs} V_r V_s$$

e ponendo

(3')
$$\Sigma_s B_{rs} V_s = V_r ,$$

otterremo

(4')
$$\Sigma_r L_r dx_r = \Sigma_r V_r du_r .$$

Finalmente consideriamo la forma quadratica

$$f'' = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \gamma_{rs} X_r X_s = \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Gamma_{rs} U_r U_s .$$

Avremo

$$\Sigma_r \frac{df''}{dX_r} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s \frac{df''}{dU_s} \Sigma_r \frac{dU_s}{dX_r} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} .$$

Ora dalle (2) segue

$$\frac{dU_s}{dX_r} = \frac{du_s}{dx_r} = \frac{1}{D} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{s+1}, u_{s+2})} .$$

Quindi

$$\Sigma_r \frac{dU_s}{dX_r} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \frac{1}{D} \Sigma_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{s+1}, u_{s+2})} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{vmatrix} H_{s+1\, h+1}, & H_{s+1\, h+2} \\ H_{s+2\, h+1}, & H_{s+2\, h+2} \end{vmatrix} = K_{sh}$$

denotando con

$$ds^2 = H_{11} du_1^2 + H_{22} du_2^2 + H_{33} du_3^2 + 2 H_{23} du_2 du_3 + 2 H_{31} du_3 du_1 + 2 H_{12} du_1 du_2$$

il quadrato dell'elemento lineare dello spazio espresso in coordinate curvilinee u_1, u_2, u_3.

Ne segue

$$\Sigma_r \frac{df''}{dX_r} \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_r (w_r - w_r^0) \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})}$$

$$= \Sigma_s \frac{df''}{dU_s} K_{sh} = \Sigma_s K_{sh} W'_s$$

avendo posto

$$W'_s = \frac{df''}{dU_s} = \Sigma_r \Gamma_{rs} U_r .$$

Per conseguenza

$$\Sigma_r w_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s K_{s,h} (W'_s + W_s^0)$$

in cui W_s^0 dipende solo dalle forze elettromotrici nei varii punti dello spazio.

Ponendo

$$W_s = W'_s + W^0_s,$$

otterremo

$$(3'') \qquad W_s = \Sigma_r \Gamma_{rs} U_r + W^0_s$$

$$(4'') \qquad \Sigma_r w_r \frac{d(x_{r+1}, x_{r+2})}{d(u_{h+1}, u_{h+2})} = \Sigma_s K_{sh} W_s .$$

5. Ciò premesso teniamo presente che le equazioni fondamentali della elettrodinamica nel caso dei corpi in quiete legano fra loro le diverse quantità (I) mediante le relazioni

$$(III) \quad \begin{cases} A \dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{dL_2}{dx_3} - \dfrac{dL_3}{dx_2} - 4\pi A w_1 \\[2mm] A \dfrac{dX_2}{dt} = \dfrac{dL_3}{dx_1} - \dfrac{dL_1}{dx_3} - 4\pi A w_2 \\[2mm] A \dfrac{dX_3}{dt} = \dfrac{dL_1}{dx_2} - \dfrac{dL_2}{dx_1} - 4\pi A w_3 \end{cases} \qquad (III') \quad \begin{cases} A \dfrac{dL_1}{dt} = \dfrac{dX_3}{dx_2} - \dfrac{dX_2}{dx_3} \\[2mm] A \dfrac{dL_2}{dt} = \dfrac{dX_1}{dx_3} - \dfrac{dX_3}{dx_1} \\[2mm] A \dfrac{dL_3}{dt} = \dfrac{dX_2}{dx_1} - \dfrac{dX_1}{dx_2} . \end{cases}$$

Immaginiamo tracciata una curva arbitraria s come contorno di un pezzo di superficie σ. Denotiamo con n la normale a questa superficie, con u, v un sistema di coordinate curvilinee relative alla superficie stessa. Moltiplicando le (III) e (III′) rispettivamente per

$$\cos nx_1 \, d\sigma = \frac{d(x_2, x_3)}{d(u, v)} du\, dv$$

$$\cos nx_2 \, d\sigma = \frac{d(x_3, x_1)}{d(u, v)} du\, dv$$

$$\cos nx_3 \, d\sigma = \frac{d(x_1, x_2)}{d(u, v)} du\, dv$$

sommando e integrando alla superficie σ, si otterrà, mediante l'applicazione del teorema di STOKES,

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \Sigma_i X_i \cos nx_i \, d\sigma = \int_s \Sigma_i L_i \, dx_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i w_i \frac{d(x_{i+1}, x_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv$$

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \Sigma_i L_i \cos nx_i \, d\sigma = - \int_s \Sigma_i X_i \, dx_i$$

Ora a cagione delle (II), (II′)

$$\Sigma_i X_i \cos nx_i \, d\sigma = \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u, v)} du\, dv \quad , \quad \Sigma_i L_i \cos nx_1 \, d\sigma = \psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u, v)} du\, dv ;$$

quindi le formule precedenti potranno scriversi

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u, v)} du\, dv = \int_s \Sigma_i L_i \, dx_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i w_i \frac{d(x_{i+1}, x_{i+2})}{d(u, v)} du\, dv$$

$$A \frac{d}{dt} \int_\sigma \psi \frac{d(\psi_1, \psi_2)}{d(u, v)} du\, dv = - \int_s \Sigma_i X_i \, dx_i$$

ovvero a cagione delle (4), (4'), (4'')

$$(5) \qquad A\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(u,v)}du\,dv = \int_s \Sigma_i V_i\,du_i - 4\pi A\int_\sigma \Sigma_i(\Sigma_s K_{si} W_s)\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv$$

$$(5') \qquad A\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\frac{d(\psi_1,\psi_2)}{d(u,v)}du\,dv = -\int \Sigma_i U_i\,du.$$

Applicando di nuovo il teorema di STOKES, dalle equazioni precedenti si deduce

$$A\frac{d}{dt}\int_\sigma \Sigma_i U_i D\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv = \int_s \Sigma_i\left(\frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+2}}{du_{i+2}}\right)\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv$$

$$-4\pi A\int_\sigma \Sigma_i(\Sigma_s K_{si} W_s)\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv$$

$$A\frac{d}{dt}\int_\sigma \Sigma_i V_i D\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv = \int_\sigma \Sigma_i\left(\frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}\right)\frac{d(u_{i+1},u_{i+2})}{d(u,v)}du\,dv.$$

La superficie σ essendo qualunque, si avrà dunque

$$(IV) \qquad A\frac{d(DU_i)}{dt} = \frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+1}}{du_{i+1}} - 4\pi A\,\Sigma_s K_{si} W_s$$

$$(IV') \qquad A\frac{d(DV_i)}{dt} = \frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}$$

ovvero

$$(V) \qquad A\frac{d}{dt}\left(\varphi\frac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(u_{i+1},u_{i+2})}\right) = \frac{dV_{i+1}}{du_{i+2}} - \frac{dV_{i+2}}{du_{i+1}} - 4\pi A\,\Sigma_s K_{si} W_s$$

$$(V') \qquad A\frac{d}{dt}\left(\psi\frac{d(\psi_1,\psi_2)}{d(u_{i+1},u_{i+2})}\right) = \frac{dU_{i+2}}{du_{i+1}} - \frac{dU_{i+1}}{du_{i+2}}.$$

Le equazioni (IV) e (IV') ovvero le (V) e (V') si potranno sostituire alle equazioni fondamentali (III) e (III') della elettrodinamica. In esse si ha riepilogando le (3), (3'), (3''),

$$(VI) \qquad \begin{cases} U_r = \Sigma_i A_{ri} U_i = \dfrac{\varphi}{D}\Sigma_i A_{ri}\dfrac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(u_{i+1},u_{i+2})} \\ V_r = \Sigma_i B_{ri} V_i = \dfrac{\psi}{D}\Sigma_i B_{ri}\dfrac{d(\psi_1,\psi_2)}{d(u_{i+1},u_{i+2})} \\ W_r = \Sigma_i \Gamma_{ri} U_i + W_r^\circ = \dfrac{\varphi}{D}\Sigma_i \Gamma_{ri}\dfrac{d(\varphi_1,\varphi_2)}{d(u_{i+1},u_{i+2})} + W_r^\circ \\ D^2 = \begin{vmatrix} H_{11}, H_{12}, H_{13} \\ H_{21}, H_{22}, H_{23} \\ H_{31}, H_{32}, H_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

6. Nelle formule (V) e (V') che abbiamo ora ottenuto compariscono in evidenza gli elementi proprii ad individuare le linee di forza elettriche e magnetiche (vedi § 2). Il vantaggio che si ha sostituendo le equazioni (V)

e (V′) alle equazioni (III) e (III′) consiste in questo, che, secondo l'ipotesi di HERTZ, *esse valgono sotto la medesima forma anche per i corpi in movimento.* Basterà perciò supporre nelle equazioni stesse che le u_1, u_2, u_3 denotino le coordinate di una particella del corpo in movimento in un istante determinato; in altri termini basterà supporre che le u_1, u_2, u_3 siano dei *parametri qualunque che individuano sempre la medesima particella del corpo in movimento.*

Si riconosce immediatamente come dalle equazioni (V) e (V′) possano ricavarsi le formule (1_a) e (1_b) della citata Memoria di HERTZ [4].

Denotiamo infatti con v_1, v_2, v_3 le coordinate della particella al tempo t. Avremo

$$(6) \quad v_1 = v_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad v_2 = v_2(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad v_3 = v_3(u_1, u_2, u_3, t).$$

Considerando i valori di $\varphi, \varphi_1, \varphi_2; \psi, \psi_1, \psi_2$, corrispondenti sempre ad uno stesso punto v_1, v_2, v_3 fisso nello spazio, risulterà

$$\varphi = \varphi(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_1(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_2(v_1, v_2, v_3, t)$$
$$\psi = \psi(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \psi_1 = \psi_1(v_1, v_2, v_3, t) \quad , \quad \psi_2 = \psi_2(v_1, v_2, v_3, t).$$

Sostituendo in queste formule per le v_h le loro espressioni (6) si otterranno i valori

$$\varphi = \varphi(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \varphi_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \varphi_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3, t)$$
$$\psi = \psi(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \psi_1 = \psi_1(u_1, u_2, u_3, t) \quad , \quad \psi_2 = \psi_2(u_1, u_2, u_3, t)$$

corrispondenti sempre alla stessa particella mobile.

Denotiamo ora rispettivamente

$$\frac{d\varphi_i(u_1, u_2, u_3, t)}{dt} \quad \text{con} \quad \frac{d\varphi_i}{dt}$$
$$\frac{d\varphi_i(v_1, v_2, v_3, t)}{dt} \quad \text{con} \quad \frac{\delta\varphi_i}{\delta t}$$

e le analoghe notazioni usiamo per le ψ_i. Poniamo poi

$$v_i' = \frac{dv_i(u_1, u_2, u_3, t)}{dt}.$$

Si avrà

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}\right] = \Sigma_s \frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] \frac{d(v_{s+1}, v_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}$$
$$+ \Sigma_s \varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\left(\frac{d(v'_{s+1}, v_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})} + \frac{d(v_{s+1}, v'_{s+2})}{d(u_{r+1}, u_{r+2})}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] = \frac{\delta}{\delta t}\left[\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right] + \Sigma_h \frac{d}{dv_h}\left(\varphi \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(v_{s+1}, v_{s+2})}\right) v'_h.$$

(4) « Wied. Ann. », Bd. XLI, s. 374.

Supponendo che nell'istante t le u_1, u_2, u_3 coincidano colle v_1, v_2, v_3 avremo quindi

$$\frac{d}{dt}(DU_r) = \frac{\delta}{\delta t}(DU_r) + \Sigma_h \frac{d}{du_h}(DU_r)\, v'_h + D\left\{U_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}} + \frac{dv_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left. - U_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}} - U_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\}$$

e analogamente si otterrà l'espressione di $\frac{d}{dt}(DV_r)$. Quindi le equazioni (V) e (V') potranno scriversi

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\delta}{\delta t}(DU_r) + \Sigma_h \frac{d}{du_h}(DU_r)\, v'_h + D\left\{U_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}} + \frac{dv'_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left. - U_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}} - U_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\} = \frac{dV_{r+1}}{du_{r+2}} - \frac{dV_{r+2}}{du_{r+1}} - 4\pi A \Sigma_s K_{rs} W_s$$

$$\text{(VI')}\qquad \frac{\delta}{\delta t}(DV_r) + \Sigma_h \frac{d}{du_h}(DV_r)\, v'_h + D\left\{V_r\left(\frac{dv'_{r+1}}{du_{r+1}} + \frac{dv'_{r+2}}{du_{r+2}}\right)\right.$$
$$\left. - V_{r+1}\frac{dv'_r}{du_{r+1}} - V_{r+2}\frac{dv'_r}{du_{r+2}}\right\} = \frac{dU_{r+2}}{du_{r+1}} - \frac{dU_{r+1}}{du_{r+2}}$$

le quali si riducono alle formule (I_a) e (I_b) di HERTZ nel caso delle coordinate cartesiane. Le equazioni (V) e (V') hanno in certo modo le loro corrispettive nelle equazioni della idrodinamica di LAGRANGE, mentre le (VI) e (VI') in quelle di EULERO.

7. Il principio della conservazione dell'elettricità e del magnetismo viene espresso (derivando le (V) e (VI') rispetto ad u_i e poi sommando) dalle formule

$$\text{(VII)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{d(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)}{d(u_1, u_2, u_3)} + 4\pi \Sigma_i \frac{d}{du_i}\Sigma_s K_{is} W_s = 0 \\ &\frac{d}{dt}\frac{d(\psi, \psi_1, \psi_2)}{d(u_1, u_2, u_3)} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le (5) e (5') possono ancora scriversi

$$\text{(VIII)}\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = \int_s \Sigma_i V_i\, du_i - 4\pi A \int_\sigma \Sigma_i (\Sigma_s K_{si} W_s)\frac{d(u_{i+1}, u_{i+2})}{d(u, v)}\, du\, dv \\ &A\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi\, d\psi_1\, d\psi_2 = -\int_s \Sigma_i U_i\, du_i. \end{aligned}\right.$$

Esse sono equivalenti alle (V) e (V') e valgono tanto pei corpi mobili quanto per quelli in quiete.

Supponendo le W_s nulle sopra σ, la prima di esse diviene

$$\text{(IX)}\qquad A\frac{d}{dt}\int_\sigma \varphi\, d\varphi_1\, d\varphi_2 = \int_s \Sigma_i V_i\, du_i$$

che esprime la legge dell'induzione nei circuiti chiusi mobili o no.

XXXI.

SOPRA LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA ELETTRODINAMICA

« Nuovo Cimento », ser. 3, vol. XXIX, 1891, pp. 147-154.

Come le questioni di dinamica dipendono da un unico sistema di equazioni differenziali (le equazioni di LAGRANGE) così, secondo quanto ha mostrato HERTZ, tutte le questioni di elettrodinamica si riducono a dipendere da un unico sistema di equazioni differenziali [1]. Le equazioni della dinamica di LAGRANGE (quando le forze ammettono un potenziale) possono ricondursi a dipendere da un unico principio di calcolo delle variazioni (il principio di HAMILTON). Mi sono proposto analogamente di ricondurre le equazioni fondamentali della elettrodinamica da cui è partito HERTZ nel caso dei sistemi in quiete, a dipendere da una questione di calcolo delle variazioni.

Questo risultato, come mostreremo può conseguirsi in infiniti modi ricorrendo a delle variabili ausiliarie da cui dipendono le componenti della forza elettrica e della forza magnetica.

§ 1.

Siano ε_{rs}, μ_{rs}, λ_{rs}, $(r, s = 1, 2, 3)$ delle funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, tali che

$$\varepsilon_{rs} = \varepsilon_{sr} \quad , \quad \mu_{rs} = \mu_{sr} \quad , \quad \lambda_{rs} = \lambda_{sr}$$

e siano X_1, X_2, X_3; L_1, L_2, L_3 delle funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, t. Queste funzioni siano definite in un campo S a tre dimensioni rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 e per i valori di t compresi fra t_0 e t_1.

Si ponga

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s \, \varepsilon_{rs} \, X_s - \frac{dL_{r+1}}{dx_{r+2}} + \frac{dL_{r+2}}{dx_{r+1}} + 4\pi \, \Sigma_h \, \lambda_{rh} \, X_h \\ \eta_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s \, \mu_{rs} \, L_s - \frac{dX_{r+2}}{dx_{r+1}} + \frac{dX_{r+1}}{dx_{r+2}} . \end{aligned} \right.$$

Denotando con Y_r e M_r delle nuove funzioni di x_1, x_2, x_3, t, moltiplichiamo le relazioni precedenti per δY_r e δM_r, sommiamo e integriamo a tutto lo

(1) Vedi « Nuovo Cimento », ser. 3, vol. XXVIII, p. 193.

spazio S rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 e per i valori di t compresi fra t_0 e t_1. Si otterrà

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Sigma_r (\xi_r\, \delta Y_r + \eta_r\, \delta M_r)\, dS = -\int_{t_0}^{t_1}\int_S \Sigma_r (X_r\, \delta u_r + L_r\, \delta v_r)\, dS \\ &+ \left[\int_S \Sigma_{r,s} (\varepsilon_{rs}\, X_s\, \delta Y_r + \mu_{rs}\, L_s\, \delta M_r)\, dS\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_r \int_\sigma (L_{r+1}\, \delta Y_{r+2} \\ &- L_{r+2}\, \delta Y_{r+1} + X_{r+2}\, \delta M_{r+1} - X_{r+1}\, \delta M_{r+2}) \cos nx_r\, d\sigma \text{ (2)} \end{aligned}\right.$$

denotando con σ la superficie contorno di S e con n la sua normale diretta verso l'esterno, e ponendo

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} u_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s\, \varepsilon_{rs}\, Y_s - \frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} + \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} - 4\pi\, \Sigma_h\, \lambda_{rh}\, Y_h \\ v_r &= \frac{d}{dt} \Sigma_s\, \mu_{rs} M_s - \frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}} + \frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}}. \end{aligned}\right.$$

Ciò premesso consideriamo le quantità

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr} \quad , \quad \beta_{rs} = \beta_{sr}, \qquad r, s = 1, 2, 3,$$

supponiamole funzioni di x_1, x_2, x_3, e tali che

$$(4)\qquad a = \begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0 \quad , \quad b = \begin{vmatrix} \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13} \\ \beta_{21}, \beta_{22}, \beta_{23} \\ \beta_{31}, \beta_{32}, \beta_{33} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Pongasi

$$a_{rs} = \frac{d \log a}{d\alpha_{rs}} \quad , \quad b_{rs} = \frac{d \log b}{d\beta_{rs}}$$

$$(5)\qquad \Sigma_s\, a_{rs}\, u_s = Z_r \quad , \quad \Sigma_s\, b_{rs}\, v_s = N_r.$$

Avremo

$$\Sigma_r (X_r\, \delta u_r + L_r\, \delta v_r) = \Sigma_{r,s}\, \alpha_{rs}\, X_r\, \delta Z_s + \Sigma_{r,s}\, \beta_{rs}\, L_r\, \delta N_s.$$

L'equazione (1) potrà dunque scriversi

$$(\mathrm{I})\qquad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S (\Sigma_{r,s}\, \alpha_{rs}\, X_r\, \delta Z_s + \Sigma_{r,s}\, \beta_{rs}\, L_r\, \delta N_s)\, dS =$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \Sigma_r (\xi_r\, \delta Y_r + \eta_r\, \delta M_r)\, dS + \left[\int_S \Sigma_{r,s} (\varepsilon_{rs}\, X_s\, \delta Y_r + \mu_{rs}\, L_s\, \delta M_r)\, dS\right]_{t_0}^{t_1}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_\sigma \Sigma_r (L_{r+1}\, \delta Y_{r+2} - L_{r+2}\, \delta Y_{r+1} + X_{r+2}\, \delta M_{r+1} - X_{r+1}\, \delta M_{r+2}) \cos nx_r\, d\sigma.$$

(2) Il simbolo $\Sigma_{r,s}$ denota la doppia somma $\Sigma_r\, \Sigma_s$ in tutto il corso della presente nota.

§ 2.

L'ultima formula del paragrafo precedente fornisce subito il modo per risolvere la questione propostaci.

Poniamo infatti

$$(6) \qquad Z_r = X_r \quad , \quad N_r = L_r ,$$

in tale ipotesi il primo membro della equazione precedente diviene

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P \, dt$$

in cui

$$P = \frac{1}{2} \int_S \Sigma_{r,s} (\alpha_{rs} X_r X_s + \Sigma_{r,s} \beta_{rs} L_r L_s) \, dS$$

e la condizione

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} P \, dt = 0$$

condurrà alle equazioni

$$(7) \qquad \xi_r = 0 \quad , \quad \eta_r = 0,$$

che sono appunto le equazioni fondamentali della elettrodinamica dei sistemi in quiete, quando si supponga che X_1, X_2, X_3 siano le componenti della forza elettrica, L_1, L_2, L_3 quelle della forza magnetica secondo gli assi coordinati x_1, x_2, x_3, le ε_{rs} i coefficienti della polarizzazione elettrica, μ_{rs} quelli della polarizzazione magnetica e λ_{rs} i coefficienti della conducibilità elettrica.

Nella espressione di P compariscono le α_{rs}, β_{rs} che sono quantità le quali possono scegliersi arbitrariamente, salvo a supporre soddisfatte le (3) e (4). Si ha quindi che le equazioni (7) possono farsi dipendere in infiniti modi da questioni di calcolo delle variazioni.

In particolare potremo fare in modo che P sia uguale alla energia elettromagnetica del sistema. A tal fine basterà prendere

$$\varepsilon_{rs} = \alpha_{rs} \quad , \quad \mu_{rs} = \beta_{rs}$$

e avremo

$$P = \frac{1}{2} \int_S \Sigma_{r,s} (\varepsilon_{rs} X_r X_s + \mu_{rs} L_r L_s).$$

Prendiamo invece

$$\alpha_{rs} = \varepsilon_{rs} \quad , \quad \beta_{rs} = -\mu_{rs} ,$$

si otterrà

$$\frac{1}{2} \Sigma_{r,s} \alpha_{rs} X_r X_s = \frac{1}{2} \Sigma_{r,s} a_{rs} u_r u_s = \frac{1}{2} \Sigma_{r,s} \varepsilon_{rs} \frac{dY_r}{dt} \frac{dY_s}{dt}$$

$$+ \frac{1}{2} \Sigma_{r,s} a_{rs} \left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} + 4\pi \Sigma_h \lambda_{rh} Y_h \right) \left(\frac{dM_{s+1}}{dx_{s+2}} - \frac{dM_{s+2}}{dx_{s+1}} + 4\pi \Sigma_h \lambda_{sh} Y_h \right)$$

$$- \frac{1}{2} \Sigma_r \frac{dY_r}{dt} \left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}} - \frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}} \right) - 2\pi \Sigma_{r,s} \lambda_{rs} \frac{dY_r}{dt} Y_s ;$$

$$\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\beta_{rs}L_r L_s = \frac{1}{2}\Sigma_{r,s} b_{rs} v_r v_s = -\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\mu_{rs}\frac{dM_r}{dt}\frac{dM_s}{dt}$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma_{r,s} b_{rs}\left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}}-\frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}}\right)\left(\frac{dY_{s+1}}{dx_{s+2}}-\frac{dY_{s+2}}{dx_{s+1}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\Sigma_r\frac{dM_r}{dt}\left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}}-\frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}}\right).$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\alpha_{rs}X_r X_s+\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\beta_{rs}L_r L_s = G-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\Sigma_r Y_r\left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}}-\frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}}\right)\right.$$
$$\left.-2\pi\Sigma_{r,s}\lambda_{rs}Y_r Y_s\right]+\frac{1}{2}\Sigma_r\frac{d}{dx_r}\left(Y_{r+1}\frac{dM_{r+2}}{dt}-Y_{r+2}\frac{dM_{r+1}}{dt}\right) \tag{8}$$

essendo

$$G=\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\varepsilon_{rs}\frac{dY_r}{dt}\frac{dY_s}{dt}-\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}\varepsilon_{rs}\frac{dM_r}{dt}\frac{dM_s}{dt}$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}a_{rs}\left(\frac{dM_{r+1}}{dx_{r+2}}-\frac{dM_{r+2}}{dx_{r+1}}+4\pi\Sigma_h\lambda_{rh}Y_h\right)\left(\frac{dM_{s+1}}{dx_{s+2}}-\frac{dM_{s+2}}{dx_{s+1}}+4\pi\Sigma_h\lambda_{sh}Y_h\right)$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma_{r,s}b_{rs}\left(\frac{dY_{r+1}}{dx_{r+2}}-\frac{dY_{r+2}}{dx_{r+1}}\right)\left(\frac{dY_{s+1}}{dx_{s+2}}-\frac{dY_{s+2}}{dx_{s+1}}\right).$$

Formando in questo caso l'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} P\,dt$$

avremo che tutti i termini del secondo membro della equazione (8) i quali sono delle derivate esatte rispetto alle variabili t, x_1, x_2, x_3, dànno luogo ad una somma di integrali estesi al contorno dello spazio S e di termini i cui valori vanno presi ai limiti t_0 e t_1.

Se trascuriamo questa somma otterremo

$$\int_{t_0}^{t_1} Q\,dt \quad \text{in cui} \quad Q=\int_S G\,dt.$$

Come è ben noto dalla teoria del calcolo delle variazioni, se annulliamo la variazione di $\int_{t_0}^{t_1} Q\,dt$ otteniamo le stesse equazioni indefinite come annullando la variazione di $\int_{t_0}^{t_1} P\,dt$. Ne segue che le equazioni fondamentali della elettrodinamica potranno ottenersi dalla variazione dell'integrale

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\int_S G\,dS.$$

Nella espressione di G sono separati i termini che contengono le derivate delle Y_r ed M_r rapporto a t (i quali formano una funzione omogenea di 2° grado rispetto alle derivate stesse) dagli altri termini, come ha luogo nella espressione dell'azione di HAMILTON che si trova nella dinamica.

§ 3.

Dalle (1) si ricava

$$\Sigma_i\left(\xi_i \frac{dY_i}{dt} + \eta_i \frac{dM_i}{dt}\right) = \Sigma_s \frac{dX_s}{dt} \Sigma_i\, \varepsilon_{is} \frac{dY_i}{dt} + \Sigma_s \frac{dL_s}{dt} \Sigma_i\, \mu_{is} \frac{dM_i}{dt}$$

$$-\Sigma_i \frac{dY_i}{dt}\left(\frac{dL_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dL_{i+2}}{dx_{i+1}}\right) + \Sigma_i \frac{dM_i}{dt}\left(\frac{dX_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dX_{i+2}}{dx_{i+1}}\right) + 4\pi\, \Sigma_{i,h}\, \lambda_{ih}\, X_h \frac{dY_i}{dt}\,.$$

Quindi a cagione delle (2)

$$= \Sigma_i\left(u_i \frac{dX_i}{dt} + v_i \frac{dL_i}{dt}\right) - \Sigma_i\left[\frac{dL_i}{dt}\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right) + \frac{dY_i}{dt}\left(\frac{dL_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dL_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]$$

$$+ \Sigma_i\left[\frac{dX_i}{dt}\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right) + \frac{dM_i}{dt}\left(\frac{dX_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dX_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right]$$

$$+ 4\pi\, \Sigma_{i,h}\, \lambda_{ih}\left(X_h \frac{dY_i}{dt} + Y_i \frac{dX_h}{dt}\right)$$

ovvero per le (5) e (6)

$$= \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\Sigma_{i,s}\left(\alpha_{is}\, X_i\, X_s + \beta_{is}\, L_i\, L_s\right) - \Sigma_i\left[L_i\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - X_i\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right] + 4\pi\, \Sigma_{i,h}\, \lambda_{ih}\, X_h\, Y_i\right\}$$

$$+ \Sigma_i \frac{d}{dx_i}\left\{L_{i+1} \frac{dY_{i+1}}{dt} - L_{i+2} \frac{dY_{i+1}}{dt} - X_{i+1} \frac{dM_{i+2}}{dt} + X_{i+2} \frac{dM_{i+1}}{dt}\right\}.$$

Integrando a tutto lo spazio S e supponendo soddisfatte le equazioni

$$\xi_i = 0 \quad , \quad \eta_i = 0\,,$$

otterremo

$$\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{1}{2}\Sigma_{i,s}\left(\alpha_{is}\, X_i\, X_s + \beta_{is}\, L_i\, L_s\right) - \Sigma_i\left[L_i\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - X_i\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right] + \Sigma_{i,h}\, 4\pi\, \lambda_{ih}\, X_h\, Y_i\right\} dS$$

$$= \int \Sigma_i\left(X_{i+1} \frac{dM_{i+2}}{dt} - X_{i+2} \frac{dM_{i+1}}{dt} - L_{i+1} \frac{dY_{i+2}}{dt} + L_{i+2} \frac{dY_{i+1}}{dt}\right) \cos nx_i\, d\sigma.$$

Nel caso in cui S rappresenti lo spazio indefinito e le X_i, L_i a distanza infinita siano infinitesimi di terzo ordine, allora il secondo membro va a zero e otteniamo l'integrale

$$\int\left\{\frac{1}{2}\left(\Sigma_{i,s}\, \alpha_{is}\, X_i\, X_s + \beta_{is}\, L_i\, L_s\right) - \Sigma_i\left[L_i\left(\frac{dY_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - X_i\left(\frac{dM_{i+1}}{dx_{i+2}} - \frac{dM_{i+2}}{dx_{i+1}}\right)\right] + 4\pi\, \Sigma_{i,h}\, \lambda_{ih}\, X_h\, Y_i\right\} dS = \text{cost}.$$

§ 4.

Consideriamo due sistemi di valori per le X_i, L_i, Y_i, M_i, ξ_i, η_i, u_i, v_i, L_i, N_i che distingueremo ponendo uno o due apici alle quantità stesse.

Avremo dalle (1)

$$\Sigma_i (Y_i'' \xi_i' + M_i'' \eta_i' - Y_i' \xi_i'' - M_i' \eta_i'')$$

$$= \Sigma_{i,s} \left[\varepsilon_{is} \left(\frac{dX_s'}{dt} Y_i'' - \frac{dX_s''}{dt} Y_i' \right) + \mu_{is} \left(\frac{dL_s'}{dt} M_i'' - \frac{dL_s''}{dt} M_i' \right) \right]$$

$$- \Sigma_i \left[Y_i'' \left(\frac{dL_{i+1}'}{dx_{i+2}} - \frac{dL_{i+2}'}{dx_{i+1}} \right) - Y_i' \left(\frac{dL_{i+1}''}{dx_{i+2}} - \frac{dL_{i+2}''}{dx_{i+1}} \right) \right] + \Sigma_i \left[M_i'' \left(\frac{dX_{i+1}'}{dx_{i+2}} - \frac{dX_{i+2}'}{dx_{i+1}} \right) \right.$$

$$\left. - M_i' \left(\frac{dX_{i+1}''}{dx_{i+2}} - \frac{dX_{i+2}''}{dx_{i+1}} \right) \right] + 4\pi \Sigma_{i,h} \lambda_{ih} (X_h' Y_i'' - X_h'' Y_i')$$

$$= \frac{d}{dt} \Sigma_{i,s} [\varepsilon_{is} (X_s' Y_i'' - X_s'' Y_i') + \mu_{is} (L_s' M_i'' - L_s'' M_i')]$$

$$- \Sigma_i \frac{d}{dx_i} (Y_{i+1}'' L_{i+2}' - Y_{i+2}'' L_{i+1}' - Y_{i+1}' L_{i+2}'' + Y_{i+2}' L_{i+1}''$$

$$- M_{i+1}'' X_{i+2}' + M_{i+2}'' X_{i+1}' + M_{i+1}' X_{i+2}'' - M_{i+2}' X_{i+1}'')$$

$$- \Sigma_i X_i' \left\{ \Sigma_s \varepsilon_{is} \frac{dY_s''}{dt} - \frac{dM_{i+1}''}{dx_{i+2}} + \frac{dM_{i+2}''}{dx_{i+1}} - 4\pi \Sigma_h \lambda_{ih} Y_h'' \right\}$$

$$- \Sigma_i L_i' \left\{ \Sigma_s \mu_{is} \frac{dM_s''}{dt} + \frac{dY_{i+1}''}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}''}{dx_{i+1}} \right\} + \Sigma_i X_i'' \left\{ \Sigma_s \varepsilon_{is} \frac{dY_s'}{dt} - \frac{dM_{i+1}'}{dx_{i+2}} \right.$$

$$\left. + \frac{dM_{i+2}'}{dx_{i+1}} - 4\pi \Sigma_h \lambda_{ih} Y_h' \right\} + \Sigma_i L_i'' \left\{ \Sigma_s \mu_{is} \frac{dM_s'}{dt} + \frac{dY_{i+1}'}{dx_{i+2}} - \frac{dY_{i+2}'}{dx_{i+1}} \right\}.$$

Quindi tenendo presenti le (2) e (5) si otterrà

$$= \frac{d}{dt} \Sigma_{i,s} [\varepsilon_{is} (X_s' Y_i'' - X_s'' Y_i') + \mu_{is} (L_s' M_i'' - L_s'' M_i')]$$

$$- \Sigma_i \frac{d}{dx_i} (Y_{i+1}'' L_{i+2}' - Y_{i+2}'' L_{i+1}' - Y_{i+1}' L_{i+2}'' + Y_{i+2}' L_{i+1}''$$

$$- M_{i+1}'' X_{i+2}' + M_{i+2}'' X_{i+1}' + M_{i+1}' X_{i+2}'' - M_{i+2}' X_{i+1}'')$$

$$- \Sigma_{i,s} [\alpha_{is} (X_i' Z_s'' - X_s'' Z_i') + \beta_{is} (L_i' N_s'' - L_s'' N_i')].$$

Se sono soddisfatte le (6) e (7) avremo

$$X_i' = Z_i' \quad , \quad X_i'' = Z_i'' \quad , \quad L_i' = N_i' \quad , \quad L_i'' = N_i''$$

$$\xi_i' = \eta_i' = \xi_i'' = \eta_i'' = 0,$$

onde integrando a tutto lo spazio S

$$\frac{d}{dt} \int_S \Sigma_{i,s} [\varepsilon_{is} (X_s' Y_i'' - X_s'' Y_i') + \mu_{is} (L_s' M_i'' - L_s'' M_i')] \, dS$$

$$= \int_\sigma \Sigma_i (Y_{i+1}'' L_{i+2}' - Y_{i+2}'' L_{i+1}' - Y_{i+1}' L_{i+2}'' + Y_{i+2}' L_{i+1}''$$

$$- M_{i+1}'' X_{i+2}' + M_{i+2}'' X_{i+1}' + M_{i+1}' X_{i+2}'' - M_{i+2}' X_{i+1}'') \cos nx_i \, d\sigma$$

la qual formula corrisponde nel nostro caso al lemma di GREEN.

XXXII.

SOPRA LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLA ELETTRODINAMICA

« Rend. Lincei », ser. 4, vol. VII_1, 1891_1, pp. 177–188.

In una recente pubblicazione HERTZ [1] ha ricavato le leggi note della elettrostatica, del magnetismo e della elettrodinamica nel caso dei corpi in quiete da un sistema di equazioni differenziali. Ci si può ora proporre il problema analitico di studiare quelle questioni del calcolo delle variazioni che possono dare origine alle dette equazioni. In tal modo i problemi della elettricità e del magnetismo si ridurranno a *rendere stazionario* un integrale definito, come appunto avviene per quelli della meccanica che dipendono dal principio dell'azione stazionaria. In questa Nota mi propongo di esaminare sotto questo aspetto le equazioni di HERTZ.

Possono ottenersi varie questioni del calcolo delle variazioni che in casi particolari conducono alle equazioni di HERTZ. Nel § 3 ne è considerata una che conduce alle equazioni stesse nel caso il più generale. È evidente che in ciascun caso potranno stabilirsi dei teoremi analoghi ai noti teoremi di GREEN e del prof. BETTI, giacché questo può farsi in ogni questione di calcolo delle variazioni [2] e potranno applicarsi i noti procedimenti impiegati per varie classi di equazioni lineari alle derivate parziali provenienti da problemi di calcolo delle variazioni. Di ciò spero potermi occupare in un'altra comunicazione.

Faccio osservare per ultimo che in ogni questione fisica la determinazione del potenziale cinetico [3] è subordinata alla ricerca della dipendenza delle equazioni relative alla questione stessa da un problema di calcolo delle variazioni. Ottenuto il potenziale cinetico, una sua decomposizione in due termini (la cui differenza è l'energia del sistema) uno dei quali omogeneo e del 2° grado rispetto alle derivate prime (prese relativamente al tempo) dei parametri che individuano lo stato del sistema, l'altro indipendente dalle derivate stesse, dà una interpretazione meccanica della questione, perché la collega a delle equazioni differenziali aventi la forma data da LAGRANGE alle equazioni della dinamica. Se in tal modo si giunge a trovare che la questione

(1) Nachrichten von der k. Ges. zu Göttingen, 19 März 1890.

(2) Vedi in questi « Rendiconti » (1890) la mia Nota sul calcolo delle variazioni [in questo vol. XXVII, pp. 454–463].

(3) HELMHOLTZ, *Ueb. die phys. Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung*. Crelle, Bd. 100.

comporta una interpretazione meccanica essa, come osserva acutamente il POINCARÉ, è suscettibile di averne infinite altre [4].

Perciò non ho approfondito nessuna di quelle che discendono immediatamente dalle questioni di calcolo delle variazioni considerate in questa Nota.

§ 1.

1. Siano $f_1 \cdots f_m$, m funzioni delle variabili $x_1 \cdots x_n$. Poniamo

$$f_i^{(s)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}$$

e consideriamo la funzione

$$F\,(f_1 \cdots f_m\,, f_1^{(1)} \cdots f_i^{(s)} \cdots x_1 \cdots x_n).$$

È facile dimostrare il teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinché le equazioni differenziali che provengono dall'annullare la variazione prima di

$$V = \int F\, dx_1 \cdots dx_n$$

siano del primo ordine è che si abbia

$$F = F_0 + \Sigma_i \Sigma_h F_i^{(h)} f_i^{(h)} + \Sigma_i \Sigma_h F_{i_1 i_2}^{h_1 h_2} \frac{d\,(f_{i_1}, f_{i_2})}{d\,(x_{h_1}, x_{h_2})} + \cdots + F_{i_1 \cdots i_r}^{h_1 \cdots h_r} \frac{d\,(f_{i_1} \cdots f_{i_r})}{d\,(x_{h_1} \cdots x_{h_r})}$$

essendo le

$$F_0\,,\ F_i^{(h)}\,,\ F_{i_1 i_2}^{h_1 h_2} \cdots$$

funzioni delle $f_1 \cdots f_m$ e delle $x_1 \cdots x_m$ soltanto, le quali mutano segno per una trasposizione degli indici o degli apici.

Nella ipotesi che F abbia la detta forma, le equazioni differenziali a cui dà luogo il problema di calcolo delle variazioni divengono

$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial f_i} - \Sigma_h \frac{\partial F_i^{(h)}}{\partial x_h} + \Sigma_r \Sigma_h \left\{ \frac{\partial F_r^h}{\partial f_i} - \frac{\partial F_i^h}{\partial f_r} - \Sigma_s \frac{\partial F_{ir}^{sh}}{\partial x_s} \right\} f_r^{(h)} +$$

$$\cdots + \Sigma_r \Sigma_h \left(\frac{\partial F_{r_1 r_2}^{h_1 h_2}}{\partial f_i} + \frac{\partial F_{r_2 i}^{h_1 h_2}}{\partial f_{r_1}} + \frac{\partial F_{i r_1}^{h_1 h_2}}{\partial f_{r_2}} - \Sigma_s \frac{\partial F_{i r_1 r_2}^{s h_1 h_2}}{\partial x_s} \right) \frac{d\,(f_{r_1}, f_{r_2})}{d\,(x_{h_1}, x_{h_2})} + \cdots$$

2. Si supponga ora che le variabili indipendenti siano t, x_1, x_2, x_3, e le funzioni incognite siano $X_1, X_2, X_3, L_1, L_2, L_3$. Prendiamo

$$F = F_0 + \Sigma_i F_i^0 \frac{\partial X_i}{\partial t} + \Sigma_i \varphi_i^0 \frac{\partial L_i}{\partial t} + \Sigma_i \Sigma_h F_i^{(h)} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} + \Sigma_i \Sigma_h \varphi_i^{(h)} \frac{\partial L_i}{\partial x_h}$$

supponendo $F_0, F_i^0, \varphi_i^0, F_i^{(h)}, \varphi_i^{(h)}$ funzioni delle X_r, L_r, x_r, t.

(4) POINCARÉ, *Electricité et Optique*, pp. XIV, XV.

Cerchiamo le condizioni affinché le equazioni che si ottengono in questo caso siano soddisfatte dalle relazioni di HERTZ:

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{
\begin{aligned}
& \lambda_{r,r}\frac{\partial X_r}{\partial t}+\lambda_{r,r+1}\frac{\partial X_{r+1}}{\partial t}+\lambda_{r,r+2}\frac{\partial X_{r+2}}{\partial t}=\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}} \\
& \qquad +\nu_{r,r}X_r+\nu_{r,r+1}X_{r+1}+\nu_{r,r+2}X_{r+2}, \\
& \mu_{r,r}\frac{\partial L_r}{\partial t}+\mu_{r,r+1}\frac{\partial L_{r+1}}{\partial t}+\mu_{r,r+2}\frac{\partial L_{r+2}}{\partial t}=\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}},
\end{aligned}
\right.
$$

$$(\lambda_{s,r}=\lambda_{r,s} \quad , \quad \mu_{r,s}=\mu_{s,r} \quad , \quad \nu_{r,s}=\nu_{s,r})\ ^{(5)}$$

ammettendo le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$, $\nu_{r,s}$ funzioni finite e continue insieme alle loro derivate in tutto lo spazio ed indipendenti dalla variabile t.

Le condizioni necessarie e sufficienti risultano

$$(1) \qquad \frac{\lambda_{r,s}}{a}=\frac{\mu_{r,s}}{b}=\frac{\nu_{r,s}}{c}=a_{rs}$$

essendo a, b, c tre coefficienti costanti. Si ottiene poi

$$
\begin{aligned}
F = & \left\{\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X_r\frac{\partial L_h}{\partial t}-\frac{1}{2b}\Sigma_r\,X_r\left(\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right. \\
& \left.-\frac{1}{2a}\Sigma_r\,L_r\left(\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\}e^{-\frac{c}{a}t}+\psi,
\end{aligned}
$$

in cui ψ denota una somma di derivate di funzioni arbitrarie, prese rispetto alle variabili t, x_1, x_2, x_3. Questa somma può togliersi da F senza alterare la questione di calcolo delle variazioni che si considera.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Nel caso in cui sono soddisfatte le equazioni di condizione (1), *le equazioni* (I) *possono ricavarsi dall'annullare la variazione prima dell'integrale*

$$
\begin{aligned}
W = \int_{t_0}^{t}\int_S & \left\{\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X_r\frac{\partial L_h}{\partial t}-\frac{1}{2b}\Sigma_r\,X_r\left(\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right. \\
& \left.-\frac{1}{2a}\Sigma_r\,L_r\left(\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\}e^{-\frac{c}{a}t}\,dS\,dt
\end{aligned}
$$

ammettendo nulle le variazioni delle L_s *ai limiti* t_0 *e* t, *supponendo che* S *rappresenti tutto lo spazio e le* X_r *e* L_r *siano infinitesimi del* 2° *ordine a distanza infinita.*

Se si ammettono soddisfatte le equazioni (I) la espressione di W può mettersi sotto la forma

$$W=e^{-\frac{c}{a}t}\int_S\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,(X_r\,L_h)_t\,dS-e^{-\frac{c}{a}t_0}\int_S\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,(X_r\,L_h)_{t_0}\,dS$$

denotando con l'indice t e con l'indice t_0 i valori delle quantità X_r, L_r prese rispettivamente pei valori t e t_0 della variabile t (ai tempi t e t_0).

(5) Due indici r, s, tali che $r \equiv s$ mod 3 si ritengono equivalenti.

3. È facile pervenire ad un teorema analogo a quello di GREEN. Denotiamo con X'_i, L'_i e con X''_i, L''_i due sistemi di integrali delle equazioni (I). Si ha

$$\int_{t_0}^{t}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X'_h\,e^{-\frac{c}{a}t}\frac{\partial L''_r}{\partial t}\,dS\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,X''_r\,e^{-\frac{c}{a}t}\frac{\partial L'_r}{\partial t}\,dS\,dt$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,L''_r\,\frac{\partial\left(X'_h e^{-\frac{c}{a}t}\right)}{\partial t}\,dS\,dt=\int_{t_0}^{t}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,L'_r\,\frac{\partial\left(X''_h e^{-\frac{c}{a}t}\right)}{\partial t}\,dS\,dt$$

onde sommando

$$e^{-\frac{c}{a}t}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,(X'_h\,L''_r-X''_h\,L'_r)_t\,dS=e^{-\frac{c}{a}t_0}\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,(X'_h\,L''_r-X''_h\,L'_r)_{t_0}\,dS$$

ovvero

$$\int_{S}\Sigma_r\,\Sigma_h\,a_{r,h}\,(X'_h\,L''_r-X''_h\,L'_r)\,dS=Ce^{\frac{c}{a}t}$$

denotando con C una costante.

§ 2.

1. Supponiamo che delle relazioni (1) sia soddisfatta la

$$\frac{\lambda_{r,s}}{a}=\frac{\nu_{r,s}}{c} \tag{2}$$

soltanto.

In tale ipotesi le equazioni (I) potranno scriversi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\lambda_{r,r}e^{-\frac{c}{a}t}\right)X_r+\left(\lambda_{r,r+1}e^{-\frac{c}{a}t}\right)X_{r+1}+\left(\lambda_{r,r+2}e^{-\frac{c}{a}t}\right)X_{r+2}\right]$$
$$=\frac{\partial\left(e^{-\frac{c}{a}t}L_{r+1}\right)}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial\left(e^{-\frac{c}{a}t}L_{r+2}\right)}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\mu_{r,r}e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t}L_r\right)+\left(\mu_{r,r+1}e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t}L_{r+1}\right)+\left(\mu_{r,r+2}e^{\frac{c}{a}t}\right)\left(e^{-\frac{c}{a}t}L_{r+2}\right)\right]$$
$$=\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}};$$

essi quindi assumono la stessa forma come nel caso in cui le $\nu_{r,s}$ sono nulle.

Noi considereremo in questo paragrafo le equazioni differenziali

$$\text{(I')}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}[\lambda_{r,r}X_r+\lambda_{r,r+1}X_{r+1}+\lambda_{r,r+2}X_{r+2}]=\dfrac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\dfrac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\\[2ex]\dfrac{\partial}{\partial t}[\mu_{r,r}L_r+\mu_{r,r+1}L_{r+1}+\mu_{r,r+2}L_{r+2}]=\dfrac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\dfrac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\end{cases}$$

tenendo presente che nel caso in cui le $\nu_{r,s}$ sono nulle (mezzo coibente) le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$ rappresentano i coefficienti delle equazioni di HERTZ, mentre nel caso in cui le ν_{rs} sono diverse da zero (mezzo conduttore) essendo però soddisfatte le (2), le $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$ rappresentano i coefficienti stessi moltiplicati rispettivamente per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}$, $e^{\frac{c}{a}t}$. Partendo dalla ipotesi che i coefficienti delle equazioni di HERTZ siano tali che le forme quadratiche

$$\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} a_r a_s \quad , \quad \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} a_r a_s$$

siano positive, la stessa proprietà sussisterà anche prendendo le λ_{rs} e μ_{rs} eguali ai detti coefficienti per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}$, $e^{\frac{c}{a}t}$.

2. Si ponga

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} + X'_r$$

$$L_r = \frac{\partial V}{\partial x_r} + L'_r$$

le (I') diverranno

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s) = \frac{\partial L'_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L'_{r+2}}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \mu_{r,s} L'_s) = \frac{\partial X'_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X'_{r+1}}{\partial x_{r+2}}$$

e quindi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} L'_s\right\} = 0.$$

Integrando avremo

$$\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s} + \Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s = e$$

$$\Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s} + \Sigma_r \frac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \mu_{r,s} L'_s = \varepsilon$$

essendo e ed ε delle costanti rispetto alla variabile t.

Ammesso di prendere queste due quantità funzioni finite e continue dei punti dello spazio e tali che all'infinito divengano infinitesime del terzo ordine, mentre le λ_{rs} e μ_{rs} si conservano sempre finite, prendiamo U e V in modo che risulti

$$(3) \qquad \begin{cases} \Sigma_r \dfrac{\partial}{\partial x_r} \Sigma_s \lambda_{r,s} \dfrac{\partial U}{\partial x_s} = e \\ \Sigma_r \dfrac{\partial}{\partial x_r} \Sigma \mu_{r,s} \dfrac{\partial V}{\partial x_s} = \varepsilon . \end{cases}$$

Potremo allora porre

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_s = \dfrac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \dfrac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \\ \Sigma_s \mu_{r,s} L'_s = \dfrac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \dfrac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \end{cases}$$

e se le X'_r, L'_r saranno all'infinito infinitesime del 2° ordine, potremo prendere le U_r, V_r infinitesime del 1° ordine all'infinito.

Poniamo

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \end{vmatrix} = D \quad , \quad \begin{vmatrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23} \\ \mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Lambda_{rs} = \frac{\partial \log D}{\partial \lambda_{r,s}} \quad , \quad M_{rs} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial \mu_{r,s}}$$

avremo

$$(5) \qquad \begin{cases} X'_r = \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\dfrac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \dfrac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) \\ L'_r = \Sigma_s M_{r,s}\left(\dfrac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \dfrac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right). \end{cases}$$

Essendo e ed ε indipendenti da t, λ_{rs} e μ_{rs} pure indipendenti da t, o uguali a delle quantità indipendenti da t moltiplicate per gli esponenziali $e^{-\frac{c}{a}t}, e^{\frac{c}{a}t}$, dalle equazioni (3) si deduce

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_s} = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_s} = 0 ;$$

quindi alle equazioni (I') potremo sostituire le altre

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\Sigma_s M_{r+2,s}\left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\Sigma_s M_{r+1,s}\left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right)$$

$$(6') \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\Sigma_s \Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\Sigma_s \Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right)$$

insieme alle equazioni (3). Poste le equazioni sotto questa forma esse si possono dedurre subito da un problema di calcolo delle variazioni.

Le (3) infatti possono ricavarsi, come è ben noto, dal rendere minimi

$$P = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} + Ue \right\} dS$$

$$Q = \int_S \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} + Ve \right\} dS$$

mentre le (6) (6') possono dedursi invece dall'annullare la variazione prima di

$$\int_{t_0}^{t} (F + T)\, dt,$$

essendo

$$F = -\int_S \left\{ \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right\} dS$$

$$T = \int_S \left\{ \Sigma_r \frac{\partial V_r}{\partial t} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \right\} dS$$

col supporre le variazioni di V_r nulle ai tempi estremi t_0 e t.

Ne segue che potremo ricavare le equazioni differenziali (3), (6), (6') col rendere stazionario

$$\int_{t_0}^{t} R_{\alpha,\beta,\gamma}\, dt,$$

essendo

$$\text{(II)} \qquad R_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha P + \beta Q + \gamma (F + T)$$

ed α, β, γ dei coefficienti costanti arbitrarî.

3. Abbiamo evidentemente

$$-F = \frac{1}{2} \int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right.$$

$$\left. + \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) \left(\frac{\partial V_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial V_{s+1}}{\partial x_{s+2}} \right) \right\} dS$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \{ \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} X'_r X'_s + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} L'_r L'_s \} dS.$$

Se supponiamo soddisfatte le (3) si ha

$$P = -\frac{1}{2} \int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} dS$$

$$Q = -\frac{1}{2} \int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} dS.$$

Abbiamo poi

$$\int_S \Sigma_r \frac{\partial U}{\partial x_r} \Sigma_s (\lambda_{r,s} X'_s)\, dS = \int_S \Sigma_r \frac{\partial U}{\partial x_r} \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) dS = 0$$

$$\int_S \Sigma_r \frac{\partial V}{\partial x_r} \Sigma_s (\mu_{r,s} L'_s)\, dS = \int_S \Sigma_r \frac{\partial V}{\partial x_r} \left(\frac{\partial V_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial V_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right) dS = 0.$$

Quindi

$$-(\mathrm{F}+\mathrm{P}+\mathrm{Q})$$

$$=\frac{1}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_r}+\mathrm{X}'_r\right)\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_s}+\mathrm{X}'_s\right)+\Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_r}+\mathrm{L}'_r\right)\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_s}+\mathrm{L}'_s\right)\right\} d\mathrm{S}$$

$$=\frac{1}{2}\int_S \{\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \mathrm{X}_r \mathrm{X}_s+\Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \mathrm{L}_r \mathrm{L}_s\} d\mathrm{S}.$$

Ne segue che

$$-(\mathrm{F}+\mathrm{P}+\mathrm{Q})\, e^{\frac{c}{a}t}$$

rappresenta la energia secondo HERTZ.

4. Mediante una integrazione per parti, la espressione di T può scriversi

$$\mathrm{T}=\int_S \left\{ \Sigma_r \mathrm{U}_r \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial \mathrm{V}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\right\} d\mathrm{S}.$$

Supponendo soddisfatte le (6′) avremo quindi

$$\mathrm{T}=\int_S \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial \mathrm{U}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial \mathrm{U}_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) d\mathrm{S}=\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \mathrm{X}'_r \mathrm{X}'_s.$$

Ponendo dunque

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \mathrm{X}'_r \mathrm{X}'_s d\mathrm{S}=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial \mathrm{U}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial \mathrm{U}_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) d\mathrm{S}$$

$$\Theta_2=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \mathrm{L}'_r \mathrm{L}'_s d\mathrm{S}=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{M}_{r,s}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial \mathrm{V}_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial \mathrm{V}_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) d\mathrm{S}$$

avremo

$$\mathrm{F}+\mathrm{T}=\Theta_1-\Theta_2.$$

5. Tenendo conto delle (5) le (6) e (6′) possono scriversi

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{r+2}}{\partial t}+\mathrm{L}'_{r+2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\frac{\partial \mathrm{U}_{r+1}}{\partial t}+\mathrm{L}'_{r+1}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{r+2}}{\partial t}+\mathrm{X}'_{r+2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left(\frac{\partial \mathrm{V}_{r+1}}{\partial t}-\mathrm{X}'_{r+1}\right)$$

onde

$$\mathrm{X}'_r=\frac{\partial \mathrm{V}_r}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \quad , \quad \mathrm{L}'_r=-\frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial x_s}.$$

Ne segue

$$\Theta_1=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial \mathrm{V}_r}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{V}_s}{\partial t} d\mathrm{S}-\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}$$

$$\Theta_2=\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial \mathrm{U}_r}{\partial t}\frac{\partial \mathrm{U}_s}{\partial t} d\mathrm{S}-\frac{1}{2}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial \psi}{\partial x_r}\frac{\partial \psi}{\partial x_s}$$

e quindi

$$F+T=-\frac{1}{2}\int_S\left\{\Sigma_r\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t}-\Sigma_r\Sigma_s\,\Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right.$$
$$\left.-\Sigma_r\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial\psi}{\partial x_r}\frac{\partial\psi}{\partial x_s}\right\}dS\,.$$

Prendendo in quest'ultima formula

$$V=-\psi,$$

si otterrà

$$\text{(III)}\qquad G_{\alpha,\beta}=-\alpha(F+T+Q)+\beta P=\frac{\alpha}{2}\int_S\left\{\Sigma_r\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t}\right.$$
$$\left.-\Sigma_r\Sigma_s\,\Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}dS$$
$$+\beta\int_S\left\{\frac{1}{2}\Sigma_r\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{\partial U}{\partial x_s}+eU\right\}dS\,.$$

6. Annulliamo la variazione prima di

$$(7)\qquad \int_t^t G_{\alpha,\beta}\,dt$$

ammettendo nulle le variazioni delle U_r ai limiti, otterremo

$$o=\delta\int_{t_0}^t G_{\alpha,\beta}\,dt$$
$$=\alpha\int_{t_0}^t\int_S-\Sigma_r\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial U_s}{\partial t}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}\right]\delta U_r\,dS$$
$$+\beta\int_{t_0}^t\int_S-\left[\Sigma_r\frac{\partial}{\partial x_r}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s}-e\right]\delta U\,d\,S\,dt$$

d'onde

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial U_s}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}\\&\quad-\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\},\\\Sigma_r\frac{\partial}{\partial x_r}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s}&=e.\end{aligned}\right.$$

Come abbiamo già osservato precedentemente, si deduce dalla precedente equazione

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial U}{\partial x_s}=o\,;$$

ponendo dunque

$$L_r = -\frac{\partial U_r}{\partial t}$$

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} + \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)$$

dalle (8) segue

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \lambda_{r,s} X_s) = \frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma_s \mu_{r,s} L_s) = \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}$$

che non sono altro che le (I'). Queste equazioni possono quindi ottenersi dall'annullare la variazione prima dell'integrale (7).

La energia sarà data da

$$(8') \qquad \frac{e^{\frac{c}{a}t}}{2}\int_S \left\{ \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial U_r}{\partial t}\frac{\partial U_s}{\partial t} + \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial U_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial U_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) + \Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{\partial U}{\partial x_s} \right\} dS = E.$$

§ 3.

1. Consideriamo ora le equazioni (I) nel caso generale, in cui cioè si ammettono arbitrarî i coefficienti $\lambda_{r,s}$, $\mu_{r,s}$, $\nu_{r,s}$ salvo al supporli indipendenti dalla variabile t e finiti e continui rispetto alle loro derivate prese relativamente alle variabili x_1, x_2, x_3, e tali che $\lambda_{r,s} = \lambda_{s,r}$, $\mu_{r,s} = \mu_{s,r}$, $\nu_{r,s} = \nu_{s,r}$.

Esaminiamo l'integrale

$$(IV) \qquad P = \frac{1}{2}\int_S \left\{ -\Sigma_r \Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial A_r}{\partial t}\frac{\partial A_s}{\partial t} + \Sigma_r \Sigma_s \mu_{r,s} \frac{\partial B_r}{\partial t}\frac{\partial B_s}{\partial t} - \Sigma_r \Sigma_s \Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial B_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial B_{r+1}}{\partial x_{r+2}} - \Sigma_h \nu_{rh} A_h\right)\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}} - \Sigma_h \nu_{sh} A_h\right) + \Sigma_r \Sigma_s M_{r,s}\left(\frac{\partial A_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right) \right\} dS$$

ammettendo le A_r, B_r infinitesime del secondo ordine a distanza infinita.

Supposte nulle le variazioni ai limiti t_0 e t delle A_r e B_r, poniamo

$$(9) \qquad \delta \int_{t_0}^{t} P\, dt = 0.$$

Otterremo le equazioni

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s \lambda_{r,s} \frac{\partial A_s}{\partial t}\right) = -\Sigma_h \nu_{r,h} \Sigma_s \Lambda_{h,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}} - \Sigma_k \nu_{sk} A_k\right) + \frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s M_{r+1,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s M_{r+2,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}} - \frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right)\right\}$$

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x_{r+2}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+1,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_{r+1}}\left\{\Sigma_s\,\Lambda_{r+2,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)\right\}.$$

2. Ciò premesso poniamo

$$X_r=\frac{\partial A_r}{\partial t}-\Sigma_s\,\Lambda_{r,s}\left(\frac{\partial B_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial B_{s+1}}{\partial x_{s+2}}-\Sigma_h\,\nu_{sh}\,A_h\right)$$
$$L_r=\frac{\partial B_r}{\partial t}+\Sigma_s\,M_{r,s}\left(\frac{\partial A_{s+2}}{\partial x_{s+1}}-\frac{\partial A_{s+1}}{\partial x_{s+2}}\right).$$

Si avrà

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\,X_s=\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\frac{\partial A_s}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial B_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\Sigma_h\,\nu_{rh}\,A_h\right)$$

onde a cagione della (10)

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\lambda_{r,s}\,X_s=\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}=\Sigma_h\,\nu_{r,h}\,X_h.$$

In modo analogo avremo

$$\frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\mu_{r,s}\,L_s=\frac{\partial}{\partial t}\left(\Sigma_s\,\mu_{r,s}\frac{\partial B_s}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial A_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)$$

talché per la (11)

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Sigma_s\,\mu_{r,s}\,L_s=\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}.$$

Quindi le equazioni (12) e (13) che sono le equazioni di HERTZ, nel caso più generale, potranno ricavarsi dall'annullare la variazione prima (9) nella ipotesi che siano nulle le variazioni delle A_r e B_r ai tempi estremi t_0 e t.

§ 4.

1. Quando si ha $\nu_{r,s}=0$, per modo che $c=0$, abbiamo che le equazioni differenziali di HERTZ possono dipendere dall'annullare la variazione prima di $\int_{t_0}^{t} G_{1,-1}\,dt$, mentre l'energia è E (vedi (8')). Da quanto si è detto nella introduzione questa osservazione potrebbe condurre immediatamente a delle interpretazioni meccaniche della questione.

2. Nel caso in cui il mezzo sia isotropo avremo

$$\lambda_{r,s}=\mu_{r,s}=\nu_{r,s}=\Lambda_{r,s}=M_{r,s}=0\qquad r\gtrless s$$
$$\lambda_{11}=\lambda_{22}=\lambda_{33}=\lambda\quad,\quad \mu_{11}=\mu_{22}=\mu_{33}=\mu\quad,\quad \nu_{11}=\nu_{22}=\nu_{33}=\nu$$
$$\Lambda_{11}=\Lambda_{22}=\Lambda_{33}=\frac{1}{\lambda}\quad,\quad M_{11}=M_{22}=M_{33}=\frac{1}{\mu}$$

e quindi le espressioni di $R_{\alpha,\beta,\gamma}$, $G_{\alpha,\beta}$, P si semplicizzano (vedi (II), (III), (IV)).

Consideriamo in particolare la espressione di $G_{\alpha,\beta}$. Avremo

$$G_{\alpha,\beta} = \frac{\alpha}{2}\int_S \left\{ \mu \Sigma_r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\lambda} \Sigma_r \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)^2 \right\} dS$$

$$+ \beta \int_S \left\{ \frac{\lambda}{2} \Sigma_r \left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right)^2 + eU \right\} dS$$

onde

$$(14) \qquad \int_{t_0}^{t} G_{1,0}\, dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{2} \int_S \left\{ \mu \Sigma_r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{\lambda} \Sigma_r \left(\frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right)^2 \right\} dS.$$

Se λ è costante, si avrà

$$\int_{t_0}^{t} G_{1,0}\, dt = \int_{t_0}^{t} dt \int_S \left\{ \frac{\mu}{2} \Sigma_r \left(\frac{\partial U_r}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{\lambda} \left[\Sigma \frac{\partial U_r}{\partial x_r}\right]^2 \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda} \Sigma \left[\left(\frac{\partial U_r}{\partial x_r}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{r+1}}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial U_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right)^2 \right] \right\} dS .$$

XXXIII.

SUR LES VIBRATIONS LUMINEUSES DANS LES MILIEUX BIRÉFRINGENTS

« Acta mathematica », t. 16, 1892, pp. 153–215.

INTRODUCTION.

1. LAMÉ a consacré la 22ème et la 23ème de ses leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité à des recherches sur la possibilité d'un seul centre d'ébranlement dans la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents. Il observe que « lors d'une seule onde progressive produite à l'origine des coordonnées, centre unique d'ébranlement, un point M dont les coordonnées sont (x, y, z) sera agité à deux époques différentes

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}}$$

où

$$R = \Sigma x^2 \quad , \quad P = \Sigma a^2 x^2 \quad , \quad Q = \Sigma a^2 (b^2 + c^2) x^2 \quad , \quad q = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c, étant les axes d'élasticité.

« Si le centre d'ébranlement exécute une suite indéfinie de vibrations, le déplacement y sera représenté par les projections

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & X_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + X_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\ & Y_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + Y_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\ & Z_1 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + Z_2 \cos 2\pi \frac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}}, \end{aligned} \right.$$

(X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) étant des fonctions de (x, y, z) qui devront donner pour $x = 0, y = 0, z = 0$

$$X_1 + X_2 = X_0 \quad , \quad Y_1 + Y_2 = Y_0 \quad , \quad Z_1 + Z_2 = Z_0 \text{ ».}$$

Par suite LAMÉ s'est proposé de chercher les intégrales des équations

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & c^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - b^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & a^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ & b^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) - a^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

qui ont la forme (1).

Par un calcul fort laborieux, conduit avec une grande habileté, il atteint le but de déterminer les fonctions inconnues X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2.

LAMÉ observe que ces fonctions sont indéterminées le long des parallèles aux axes optiques conduites par l'origine et sont infinies à l'origine.

En remplaçant dans les formules (1) les fonctions

$$\cos\frac{2\pi(t-\lambda_1)}{\mathfrak{T}} \quad , \quad \cos\frac{2\pi(t-\lambda_2)}{\mathfrak{T}}$$

par

$$F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1) \quad , \quad F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2),$$

F_1, φ_1, F_2, φ_2 étant des fonctions arbitraires, u, v, w restent toujours des intégrales des équations (2).

Donc, on a que

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} u &= X_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+X_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\},\\ v &= Y_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+Y_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\},\\ w &= Z_1\{F_1(t+\lambda_1)+\varphi_1(t-\lambda_1)\}+Z_2\{F_2(t+\lambda_2)+\varphi_2(t-\lambda_2)\}\end{aligned}\right.$$

vérifient les équations de LAMÉ.

2. Les vibrations lumineuses dans un milieu isotrope dépendent de l'équation différentielle

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

dont on a l'integrale

$$(5)\qquad u = \frac{F(r+Vt)}{r}+\frac{\varphi(r-Vt)}{r}$$

où

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

et F, φ sont des fonctions arbitraires. Cette intégrale présente une analogie avec les intégrales (3) et, comme elles, devient infinie à l'origine.

Il est connu qu'on peut déduire l'intégrale générale de l'équation (4) sous la forme donnée par POISSON, en partant de l'intégrale (5) et en supposant vérifié *a priori* le principe de HUYGHENS. C'est par là que M. POINCARÉ démontre dans ses leçons d'optique la vérité du principe de HUYGHENS. On peut maintenant se poser la question: Qu'est-ce qu'on trouve en appliquant le même procédé, lorsqu'on part des intégrales (3) et qu'on suppose vérifié le principe de HUYGHENS? Nous avons montré dans l'article 5 de ce mémoire, qu'on tire de là les fonctions que M^me^ KOWALEVSKI a données comme intégrales générales des équations de LAMÉ. Si l'on pouvait vérifier que les formules trouvées de cette façon satisfont les équations de LAMÉ, on aurait justifié l'emploi du principe de HUYGHENS.

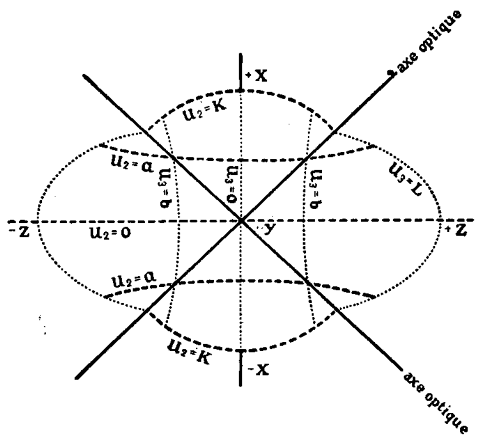
Mais nous avons montré dans l'article 5 que cette vérification n'est pas possible. D'où ressort ce résultat qui à première vue semble bien singulier?

3. Pour trouver le noeud de la question, il faut avoir devant les yeux la surface des ondes où l'on ait dessiné les systèmes des lignes sphériques et elliptiques qui forment les coordonnées curvilignes considérées par M. WEBER. (Voir article 3).

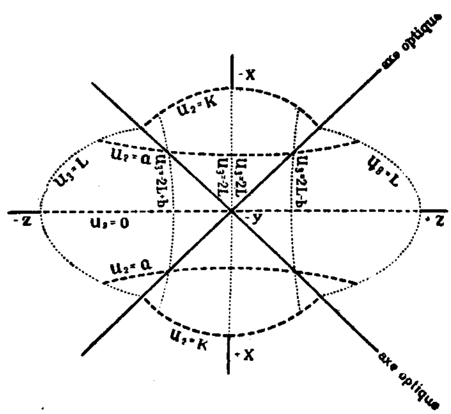
Prenons comme fait M. WEBER

$$x = b\,\mathrm{sn}\,(u_2\,,\,k)\,\mathrm{dn}\,(u_3\,,\,\mu)\,, \qquad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}\,,$$
$$y = a\,\mathrm{cn}\,(u_2\,,\,k)\,\mathrm{cn}\,(u_3\,,\,\mu)\,,$$
$$z = a\,\mathrm{dn}\,(u_2\,,\,k)\,\mathrm{sn}\,(u_3\,,\,\mu)\,, \qquad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}\,.$$

Voici ce qu'on verrait en regardant la nappe extérieure de la surface des ondes du côté des y positives (1).



Voici au contraire ce qu'on verrait en regardant la même nappe du côté des y négatives.



(1) 4 K et 4 L sont les périodes réelles correspondantes aux modules k, u.

Ces figures montrent que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$.

Prenons maintenant les premiers termes des intégrales (3). Nous avons trouvé dans ce mémoire (article 4) ces intégrales par un procédé tout à fait différent de celui suivi par LAMÉ. Les expressions sous lesquelles résultent les quantités X_1, Y_1, Z_1 sont

$$(6) \qquad -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}, \qquad -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}, \qquad \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta},$$

où

$$\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1) \operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3$$

et u_1 remplace le paramètre λ_1 de LAMÉ.

Ces expressions sont telles qu'en prenant garde aux figures que nous avons dessinées, on voit bien aisément que X_1, Z_1 sont des fonctions polydromes des coordonnées x, y, z des points de l'espace. Pareillement on a que X_2, Z_2 sont des fonctions polydromes. Cette propriété ne s'aperçoit guère au premier abord, lorsqu'on examine ces quantités sous la forme que leur avait donnée LAMÉ.

C'est pourquoi il s'était trompé lorsqu'il avait cru qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses provenantes d'un centre d'ébranlement.

Ce sont les mêmes fonctions (6) qui paraîssent dans le mémoire de M^me^ KOWALEVSKI. Lorsqu'on s'aperçoit qu'elles sont polydromes, on voit aussi que la méthode découverte par M. WEIERSTRASS pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles ne peut être appliquée pour intégrer les équations de LAMÉ en se servant des coordonnées de M. WEBER.

4. Le premier article de ce mémoire est consacré à la transformation des équations de l'optique de LAMÉ en coordonnées curvilignes.

J'applique les formules trouvées au cas particulier des coordonnées de M. WEBER. De cette façon je trouve, par un procédé (2) bien plus court que celui suivi par LAMÉ, les intégrales (3) sous la forme que je viens d'indiquer. La discussion de ces intégrales est faite dans l'article 5. Dans l'article suivant je trouve un théorème analogue à celui de GREEN et j'y applique la méthode employée par KIRCHHOFF pour généraliser le principe de HUYGHENS. Enfin les derniers articles sont consacrés à trouver les intégrales générales des équations de l'optique en partant des intégrales de LAMÉ et en prenant garde à leur polydromie.

(2) Ce procédé ne diffère pas essentiellement de la méthode suivie par M. BRILL dans un mémoire [« Math. Ann. », I^er^ Vol.] que j'ai connu seulement après avoir rédigé mon travail.

ART. I. – TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DE LAMÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES.

1. Soient u, v, w les composantes du déplacement d'un point (x, y, z) d'un milieu élastique homogène.

En posant

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \\ V &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \\ W &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

les composantes des rotations des éléments du milieu seront données par

$$\frac{1}{2}U \quad , \quad \frac{1}{2}V \quad , \quad \frac{1}{2}W.$$

Prenons les axes coordonnées x, y, z parallèles aux directions des axes d'élasticité, et soient

$$a > b > c$$

les axes d'élasticité.

On écrira les équations de LAMÉ de la manière suivante (3)

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial W}{\partial y} - b^2 \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial U}{\partial z} - c^2 \frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial V}{\partial x} - a^2 \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations peuvent s'obtenir en annullant la variation d'une intégrale.

En effet, si l'on pose

$$(3)\qquad P = a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2,$$

$$(4)\qquad T = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2,$$

$$(5)\qquad I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_S (T - P)\, dS\, dt,$$

t_0, t_1 étant un intervalle arbitraire de temps, on aura

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_S \Big[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}$$

$$- \left\{ a^2 U\left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} - \frac{\partial \delta w}{\partial y}\right) + b^2 V\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial z}\right) + c^2 W\left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)\right\}\Big] dS\, dt.$$

(3) LAMÉ, *Leçons sur l'élasticité*, dix-septième leçon.

Supposons que les variations δu , δv , δw soient nulles aux limites des intégrales. Par des intégrations par partie on déduit de l'équation précédente

$$\delta \mathrm{I} = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathrm{S}} \left[\delta u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} + b^2\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right) + \delta v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} + c^2\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left. + \delta w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + a^2\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)\right] d\mathrm{S}\, dt.$$

On tire de là les équations (2) en posant

$$\delta \mathrm{I} = 0.$$

2. Considérons maintenant un système de coordonnées curvilignes u_1 , u_2 , u_3. Soit

$$ds^2 = \mathrm{H}_{11} du_1^2 + \mathrm{H}_{22} du_2^2 + \mathrm{H}_{33} du_3^2 + 2\mathrm{H}_{23} du_2 du_3 + 2\mathrm{H}_{31} du_3 du_1 + 2\mathrm{H}_{12} du_1 du_2$$

le carré de l'élément linéaire.

Posons

$$\mathrm{D}^2 = \left\{\frac{d(x, y, z)}{d(u_1, u_2, u_3)}\right\}^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{11}, \mathrm{H}_{12}, \mathrm{H}_{13} \\ \mathrm{H}_{21}, \mathrm{H}_{22}, \mathrm{H}_{23} \\ \mathrm{H}_{31}, \mathrm{H}_{32}, \mathrm{H}_{33} \end{vmatrix}.$$

Désignons par t_1 , t_2 , t_3 les tangentes aux lignes

$$u_2 = \text{const} \quad , \quad u_3 = \text{const};$$
$$u_3 = \text{const} \quad , \quad u_1 = \text{const};$$
$$u_1 = \text{const} \quad , \quad u_2 = \text{const}.$$

Les composantes des déplacements des points du milieu dans les directions t_1 , t_2 , t_3 étant v_1 , v_2 , v_3, on aura

$$u = v_1 \cos t_1 x + v_2 \cos t_2 x + v_3 \cos t_3 x = \frac{v_1}{\sqrt{\mathrm{H}_{11}}}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{\mathrm{H}_{22}}}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{\mathrm{H}_{33}}}\frac{\partial x}{\partial u_3},$$

$$v = v_1 \cos t_1 y + v_2 \cos t_2 y + v_3 \cos t_3 y = \frac{v_1}{\sqrt{\mathrm{H}_{11}}}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{\mathrm{H}_{22}}}\frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{\mathrm{H}_{33}}}\frac{\partial y}{\partial u_3},$$

$$w = v_1 \cos t_1 z + v_2 \cos t_2 z + v_3 \cos t_3 z = \frac{v_1}{\sqrt{\mathrm{H}_{11}}}\frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{\mathrm{H}_{22}}}\frac{\partial z}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{\mathrm{H}_{33}}}\frac{\partial z}{\partial u_3}.$$

Si l'on pose

$$(6) \qquad p_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\mathrm{H}_{11}}} \quad , \quad p_2 = \frac{v_2}{\sqrt{\mathrm{H}_{22}}} \quad , \quad p_3 = \frac{v_3}{\sqrt{\mathrm{H}_{33}}},$$

on trouvera

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= p_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v &= p_1\frac{\partial y}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial y}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w &= p_1\frac{\partial z}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial z}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial z}{\partial u_3}. \end{aligned}\right.$$

Par un théorème bien connu on peut toujours trouver trois fonctions

$$\lambda\,,\ \mu\,,\ \nu\,,$$

telles que

$$(8)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\lambda}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\,, \\[2mm] v = \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\,, \\[2mm] w = \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial z}\,, \end{cases}$$

d'où

$$U = \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(y\,,z)}\quad,\quad V = \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(z\,,x)}\quad,\quad W = \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(x\,,y)}\,.$$

On aura donc

$$\begin{aligned} U &= \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\,\frac{d(u_2\,,u_3)}{d(y\,,z)} + \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\,\frac{d(u_3\,,u_1)}{d(y\,,z)} + \frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\,\frac{d(u_1\,,u_2)}{d(y\,,z)} \\ &= \frac{1}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\,\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{1}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\,\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{1}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\,\frac{\partial x}{\partial u_3} \\ &= \frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\cos t_1 x + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\cos t_2 x + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\cos t_3 x\,. \end{aligned}$$

De même on trouve

$$V = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\cos t_1 y + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\cos t_2 y + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\cos t_3 y,$$

$$W = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\cos t_1 z + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\cos t_2 z + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\cos t_3 z.$$

C'est pourquoi les composantes des rotations des éléments du milieu dans les directions $t_1\,,t_2\,,t_3$, seront données par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}\,, \\ \frac{1}{2}V_2 &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}\,, \\ \frac{1}{2}V_3 &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\,\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}\,. \end{aligned}$$

On tire des équations (8) et (7)

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u_1} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial u_1} = u\dfrac{\partial x}{\partial u_1} + v\dfrac{\partial y}{\partial u_1} + w\dfrac{\partial z}{\partial u_1} = H_{11}p_1 + H_{12}p_2 + H_{13}p_3 = q_1\,, \\[2mm] \dfrac{\partial\lambda}{\partial u_2} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial u_2} = u\dfrac{\partial x}{\partial u_2} + v\dfrac{\partial y}{\partial u_2} + w\dfrac{\partial z}{\partial u_2} = H_{12}p_1 + H_{22}p_2 + H_{23}p_3 = q_2\,, \\[2mm] \dfrac{\partial\lambda}{\partial u_3} + \nu\dfrac{\partial\mu}{\partial u_3} = u\dfrac{\partial x}{\partial u_3} + v\dfrac{\partial y}{\partial u_3} + w\dfrac{\partial z}{\partial u_3} = H_{13}p_1 + H_{23}p_2 + H_{33}p_3 = q_3\,, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_2,u_3)} = \frac{\partial q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial q_3}{\partial u_2},$$

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_3,u_1)} = \frac{\partial q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial q_1}{\partial u_3},$$

$$\frac{d(\mu,\nu)}{d(u_1,u_2)} = \frac{\partial q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u_1},$$

et par suite

$$V_1 = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\left(\frac{\partial q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right),$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\left(\frac{\partial q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial q_1}{\partial u_3}\right),$$

$$V_3 = \frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\left(\frac{\partial q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial q_2}{\partial u_1}\right).$$

Posons

$$(10) \qquad P_1 = \frac{V_1}{\sqrt{H_{11}}} \quad , \quad P_2 = \frac{V_2}{\sqrt{H_{22}}} \quad , \quad P_3 = \frac{V_3}{\sqrt{H_{33}}}.$$

On aura pour les rotations des formules parfaitement analogues aux équations (7) que nous avons établies pour les déplacements:

$$(11) \qquad \begin{cases} U = P_1 \dfrac{\partial x}{\partial u_1} + P_2 \dfrac{\partial x}{\partial u_2} + P_3 \dfrac{\partial x}{\partial u_3}, \\ V = P_1 \dfrac{\partial y}{\partial u_1} + P_2 \dfrac{\partial y}{\partial u_2} + P_3 \dfrac{\partial y}{\partial u_3}, \\ W = P_1 \dfrac{\partial z}{\partial u_1} + P_2 \dfrac{\partial z}{\partial u_2} + P_3 \dfrac{\partial z}{\partial u_3}. \end{cases}$$

3. Nous nous proposons maintenant d'exprimer les quantités T et P par les fonctions p_1, p_2, p_3; P_1, P_2, P_3. Il est bien facile de déduire des équations (7)

$$T = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = H_{11}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)^2 + H_{22}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)^2$$
$$+ H_{33}\left(\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)^2 + 2\,H_{23}\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial p_3}{\partial t} + 2\,H_{31}\frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t} + 2\,H_{12}\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

De même, en posant

$$K_{11} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$K_{22} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$K_{33} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_3}\right)^2,$$

$$K_{23} = a^2\frac{\partial x}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_3} + b^2\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3} + c^2\frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_3},$$

$$K_{31} = a^2 \frac{\partial x}{\partial u_3} \frac{\partial x}{\partial u_1} + b^2 \frac{\partial y}{\partial u_3} \frac{\partial y}{\partial u_1} + c^2 \frac{\partial z}{\partial u_3} \frac{\partial z}{\partial u_1},$$

$$K_{12} = a^2 \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} + b^2 \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial y}{\partial u_2} + c^2 \frac{\partial z}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_2},$$

on trouve

$$P = a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2$$

$$= K_{11} P_1^2 + K_{22} P_2^2 + K_{33} P_3^2 + 2 K_{23} P_2 P_3 + 2 K_{31} P_3 P_1 + 2 K_{12} P_1 P_2 .$$

4. On peut maintenant transformer les équations de LAMÉ en coordonnées curvilignes.

En effet, on aura

$$\frac{1}{2} \delta T = \frac{\partial p_1}{\partial t} \delta \left(H_{11} \frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{12} \frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{13} \frac{\partial p_3}{\partial t} \right)$$

$$+ \frac{\partial p_2}{\partial t} \delta \left(H_{21} \frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{22} \frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{22} \frac{\partial p_3}{\partial t} \right) + \frac{\partial p_3}{\partial t} \delta \left(H_{31} \frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{32} \frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{33} \frac{\partial p_3}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{\partial p_1}{\partial t} \frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t} \frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t} \frac{\partial \delta q_3}{\partial t} .$$

$$\frac{1}{2} \delta P = (K_{11} P_1 + K_{12} P_2 + K_{13} P_3) \delta P_1 + (K_{21} P_1 + K_{22} P_2 + K_{23} P_3) \delta P_2$$
$$+ (K_{31} P_1 + K_{32} P_2 + K_{33} P_3) \delta P_3$$

et en posant

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} K_{11} P_1 + K_{12} P_2 + K_{13} P_3 = Q_1, \\ K_{21} P_1 + K_{22} P_3 + K_{23} P_3 = Q_2, \\ K_{31} P_1 + K_{32} P_2 + K_{33} P_3 = Q_3 \end{array} \right.$$

on trouvera

$$\frac{1}{2} \delta P = \frac{1}{D} \left[Q_1 \left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2} \right) + Q_2 \left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3} \right) + Q_3 \left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1} \right) \right] .$$

Par suite

$$(13) \qquad \delta I = \delta \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S (T - P) D du_1 du_2 du_3$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ D \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} \frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t} \frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t} \frac{\partial \delta q_3}{\partial t} \right] \right.$$

$$\left. - Q_1 \left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2} \right) - Q_2 \left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3} \right) - Q_3 \left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1} \right) \right\} du_1 du_2 du_3 .$$

Les variations δq_1, δq_2, δq_3 étant nulles aux limites des intégrales, l'équation précédente peut être remplacée par

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ \delta q_1 \left[D \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_3}{\partial u_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial u_3} \right] + \delta q_2 \left[D \frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1}{\partial u_3} + \frac{\partial Q_3}{\partial u_1} \right] \right.$$

$$\left. + \delta q_3 \left[D \frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial u_2} \right] \right\} dS .$$

Donc, si $\delta I = 0$, on aura

$$(14)\qquad \begin{cases} D\dfrac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_3}{\partial u_2} - \dfrac{\partial Q_2}{\partial u_3}, \\[2mm] D\dfrac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_1}{\partial u_3} - \dfrac{\partial Q_3}{\partial u_1}, \\[2mm] D\dfrac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} = \dfrac{\partial Q_2}{\partial u_1} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial u_2}. \end{cases}$$

Voilà les équations de LAMÉ transformées en coordonnées curvilignes.

5. Nous donnerons ici quelques formules dont nous nous servirons dans les articles suivants.

Les équations (9) résolues par rapport à u, v, w, donnent

$$(15)\qquad \begin{cases} u = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial x}, \\[2mm] v = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial y}, \\[2mm] w = q_1\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + q_2\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + q_3\dfrac{\partial u_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Ajoutons les équations (12) après les avoir multipliées par $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \dfrac{\partial u_3}{\partial x}$. On trouvera

$$Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x} = P_1\left(K_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$$

$$+ P_2\left(K_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) + P_3\left(K_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{32}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)$$

$$= a^2\left[P_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial x}{\partial u_3}\right]$$

d'où

$$(16')\qquad a^2 U = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

De même on aura

$$(16'')\qquad b^2 V = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

$$(16''')\qquad c^2 W = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

6. Nous venons de transformer les équations de LAMÉ en suivant la méthode ordinaire, c'est a dire en reconduisant la question par les principes du calcul des variations à la transformation d'une intégrale. On peut faire la transformation par un autre procédé très simple que je vais exposer en peu de mots.

Soit σ une surface quelconque dont le bord est formé par la ligne s et soit n la normale à cette surface. Désignons par λ et μ des coordonnées curvilignes des points de la surface. En multipliant les équations (1), (2) par

$$\cos nx\, d\sigma = \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos ny\, d\sigma = \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos nz\, d\sigma = \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} d\lambda\, d\mu$$

et en intégrant sur toute la surface σ, on trouve par le théorème de STOKES

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \left[\mathrm{U} \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{V} \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{W} \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ \qquad \displaystyle = \int_s (udx + vdy + wdz), \\ \displaystyle\frac{d^2}{dt^2}\int_\sigma \left[u \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + v \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + w \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)} \right] d\lambda\, d\mu \\ \qquad \displaystyle = \int_s (a^2\, \mathrm{U}dx + b^2\, \mathrm{V}dy + c^2\, \mathrm{W}dz). \end{cases}$$

Si nous posons

$$\begin{cases} \mathrm{U} = \mathrm{P}_1 \dfrac{\partial x}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \dfrac{\partial x}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \dfrac{\partial x}{\partial u_3}, \\ \mathrm{V} = \mathrm{P}_1 \dfrac{\partial y}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \dfrac{\partial y}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \dfrac{\partial y}{\partial u_3}, \\ \mathrm{W} = \mathrm{P}_1 \dfrac{\partial z}{\partial u_1} + \mathrm{P}_2 \dfrac{\partial z}{\partial u_2} + \mathrm{P}_3 \dfrac{\partial z}{\partial u_3}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = p_1 \dfrac{\partial x}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial x}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v = p_1 \dfrac{\partial y}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial y}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w = p_1 \dfrac{\partial z}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial z}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial z}{\partial u_3} \end{cases}$$

il est évident qu'on trouve

$$\mathrm{U} \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{V} \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{W} \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)}$$

$$= \mathrm{D} \left[\mathrm{P}_1 \frac{d(u_2,u_3)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{P}_2 \frac{d(u_3,u_1)}{d(\lambda,\mu)} + \mathrm{P}_3 \frac{d(u_1,u_2)}{d(\lambda,\mu)} \right],$$

$$u \frac{d(y,z)}{d(\lambda,\mu)} + v \frac{d(z,x)}{d(\lambda,\mu)} + w \frac{d(x,y)}{d(\lambda,\mu)}$$

$$= \mathrm{D} \left[p_1 \frac{d(u_2,u_3)}{d(\lambda,\mu)} + p_2 \frac{d(u_3,u_1)}{d(\lambda,\mu)} + p_3 \frac{d(u_1,u_2)}{d(\lambda,\mu)} \right].$$

Examinons les deux formes quadratiques

$$2f = u^2 + v^2 + w^2$$

$$= \mathrm{H}_{11} p_1^2 + \mathrm{H}_{22} p_2^2 + \mathrm{H}_{33} p_3^2 + 2\,\mathrm{H}_{23} p_2 p_3 + 2\,\mathrm{H}_{31} p_3 p_1 + 2\,\mathrm{H}_{12} p_1 p_2,$$

$$2\varphi = a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2$$
$$= K_{11} P_1^2 + K_{22} P_2^2 + K_{33} P_3^2 + 2 K_{23} P_2 P_3 + 2 K_{31} P_3 P_1 + 2 K_{12} P_1 P_2 .$$

Par des théorèmes bien connus on aura

$$\frac{\partial f}{\partial u} dx + \frac{\partial f}{\partial v} dy + \frac{\partial f}{\partial w} dz = \frac{\partial f}{\partial p_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} du_2 + \frac{\partial f}{\partial p_3} du_3 ,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial U} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial V} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial W} dz = \frac{\partial \varphi}{\partial P_1} du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_2} du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_3} du_3 .$$

Par suite, en posant

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} = q_1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_2} = q_2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial p_3} = q_3 ,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = Q_1 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_2} = Q_2 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_3} = Q_3 ,$$

on trouvera

$$u dx + v dy + w dz = q_1 du_1 + q_2 du_2 + q_3 du_3 ,$$
$$a^2 U dx + b^2 V dy + c^2 W dz = Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3 .$$

On pourra donc substituer aux équations (17) les deux équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_\sigma D\left[P_1 \frac{d(u_2, u_3)}{d(\lambda, \mu)} + P_2 \frac{d(u_3, u_1)}{d(\lambda, \mu)} + P_3 \frac{d(u_1, u_2)}{d(\lambda, \mu)}\right] d\lambda\, d\mu \\
&\qquad = \int_s (q_1 du_1 + q_2 du_2 + q_3 du) , \\
&\frac{d^2}{dt^2} \int_\sigma D\left[p_1 \frac{d(u_2, u_3)}{d(\lambda, \mu)} + p_2 \frac{d(u_3, u_1)}{d(\lambda, \mu)} + p_3 \frac{d(u_1, u_2)}{d(\lambda, \mu)}\right] d\lambda\, d\mu \\
&\qquad = \int_s (Q_1 du_1 + Q_2 du_2 + Q_3 du_3) .
\end{aligned}\right.$$

De ces équations, par le théorème de STOKES découlent tout de suite les équations (10) et (14).

ART. 2. – LES ÉQUATIONS DE LAMÉ ET LEURS ÉQUATIONS CONJUGUÉES.

1. La transformation des équations de LAMÉ en coordonnées curvilignes nous a conduit aux équations

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned}
&D \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = \frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} , \\
&Q_i = \Sigma_s K_{is} P_s , \\
&P_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right) , \\
&q_i = \Sigma_s H_{is} p_s .
\end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, 3)$$

Posons

$$m_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right):$$

on aura

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} = - m_s .$$

Par conséquent, si

$$\Sigma_s H_{is} m_s = n_i ,$$

on trouvera

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = - n_i ,$$

d'où

$$D \frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2} = \frac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}} .$$

En remplaçant P_s par M_s, et Q_s par N_s on pourra écrire le système d'équations

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} D \frac{\partial^2 M_s}{\partial t^2} &= \frac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}} , \\ n_i &= \Sigma_s H_{is} m_s , \\ m_s &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial N_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial N_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right), \\ N_i &= \Sigma_s K_{is} M_s . \end{aligned}\right. \qquad (s = 1, 2, 3)$$

2. Lorsqu'on connait un système d'intégrales

$$p_s , P_s , q_s , Q_s$$

des équations (1) on aura tout de suite des intégrales des équations (2).

Il suffit pour cela de prendre

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} M_s &= P_s \quad , & N_s &= Q_s , \\ m_s &= - \frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2} \quad , & n_s &= - \Sigma_i H_{is} \frac{\partial^2 p_i}{\partial t^2} . \end{aligned}\right.$$

Réciproquement à toute intégrale des équations (2) correspond une intégrale du système (1). En effet en prenant

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} p_s &= m_s \quad , & q_s &= n_s , \\ P_s &= - \frac{\partial^2 M_s}{\partial t^2} \quad , & Q_s &= - \Sigma_i K_{is} \frac{\partial^2 M_i}{\partial t^2} \end{aligned}\right.$$

on aura que ces fonctions satisfont aux équations (1).

3. On peut maintenant poser la question:

A quelles intégrales

$$p_s , q_s , P_s , Q_s$$

des équations (1) correspondent des intégrales

$$m_s , n_s , M_s , N_s$$

du système (2) telles que les relations (4) soient vérifiées?

Il est facile de démontrer qu'il suffit de la condition

$$\frac{\partial (Dp_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (Dp_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (Dp_3)}{\partial u_3} = 0 \tag{5}$$

pour que les équations (4) soient satisfaites.

En effet, il ressort de (5) que l'on pourra poser

$$p_s = m_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial N_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \frac{\partial N_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right),$$

d'où découlent les équations (4). De même à tout système d'intégrales

$$m_s\,,\ n_s\,,\ M_s\,,\ N_s$$

des équations (2) telles que

$$\frac{\partial (DM_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (DM_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (DM_3)}{\partial u_3} = 0 \tag{6}$$

correspond un système d'intégrales des équations (1) lié au précédent par les relations (3).

4. Il est aisé de démontrer que si l'équation (5) est vérifiée les vibrations sont transversales.

En effet soit

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

En multipliant cette quantité par une fonction λ indéterminée et en intégrant sur un espace S quelconque, on trouve

$$\int_S \lambda\Theta\, dx\, dy\, dz = -\int_S \left(u\frac{\partial \lambda}{\partial x} + v\frac{\partial \lambda}{\partial y} + w\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) dS,$$

λ étant nulle au contour de l'espace S. Mais

$$u\frac{\partial \lambda}{\partial x} + v\frac{\partial \lambda}{\partial y} + w\frac{\partial \lambda}{\partial z} = p_1\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial \lambda}{\partial u_3}.$$

Par suite

$$\int_S \lambda\Theta\, dx\, dy\, dz = -\int_S \left(p_1\frac{\partial \lambda}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial \lambda}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial \lambda}{\partial u_3}\right) D\, du_1\, du_2\, du_3.$$

D'où

$$\int_S \lambda\Theta\, dx\, dy\, dz = \int_S \lambda\left(\frac{\partial (Dp_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (Dp_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (Dp_3)}{\partial u_3}\right)\frac{1}{D}\, dx\, dy\, dz.$$

Puisque λ est indéterminée, on déduit

$$\Theta = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial (Dp_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial (Dp_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial (Dp_3)}{\partial u_3}\right].$$

5. Nous appellerons les équations (2) les équations conjuguées aux équations de LAMÉ. Il est connu que les équations de LAMÉ se rapportent

à l'hypothèse de NEUMANN. C'est à dire pour trouver ces équations il faut supposer que les vibrations des particules du milieu élastique ont lieu dans le plan de polarisation. FRESNEL au contraire a supposé que la direction des vibrations soit normale au plan de polarisation. Il serait aisé de voir que les équations (2) sont les équations du mouvement dans l'hypothèse de FRESNEL. Il suffit pour cela de supposer que $\sqrt{H_{11}}\,M_1$, $\sqrt{H_{22}}\,M_2$, $\sqrt{H_{33}}\,M_3$ représentent les composantes des déplacements dans les directions t_1, t_2, t_3

ART. 3. - LES COORDONNÉES DE WEBER. TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS DE LAMÉ EN COORDONNÉES DE WEBER.

1. M. WEBER a démontré que si l'on a

$$(1)\qquad \begin{cases} x = b\,\mathrm{sn}\,(u_2\,,k)\,\mathrm{dn}\,(u_3\,,\mu), \\ y = a\,\mathrm{cn}\,(u_2\,,k)\,\mathrm{cn}\,(u_3\,,\mu), \\ z = a\,\mathrm{dn}\,(u_2\,,k)\,\mathrm{sn}\,(u_3\,,\mu), \end{cases}$$

où

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\quad,\quad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2},$$

on obtient par l'élimination de u_2, u_3

$$(2)\qquad \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-a^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-b^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-c^2}=1,$$

qui est l'équation de la surface des ondes (4).

Au lieu de

$$\begin{matrix} \mathrm{sn}\,(u_2\,,k) & , & \mathrm{cn}\,(u_2\,,k) & , & \mathrm{dn}\,(u_2\,,k), \\ \mathrm{sn}\,(u_3\,,\mu) & , & \mathrm{cn}\,(u_3\,,\mu) & , & \mathrm{dn}\,(u_3\,,\mu) \end{matrix}$$

nous écrirons, pour simplifier,

$$\begin{matrix} \mathrm{sn}\,u_2 & , & \mathrm{cn}\,u_2 & , & \mathrm{dn}\,u_2, \\ \mathrm{sn}\,u_3 & , & \mathrm{cn}\,u_3 & , & \mathrm{dn}\,u_3, \end{matrix}$$

en supprimant les modules $(k\,,\mu)$ suffisamment rappelés par les indices des arguments u_2, u_3. Soit $4\,K$ la période réelle corréspondant au module k; $4\,L$ la même période correspondant au module μ.

En donnant à u_2 toutes les valeurs réelles comprises entre $-K$ et K et à u_3 toutes les valeurs réelles comprises entre $-2L$ et $2L$, on obtient par les formules (1) tous les points de la nappe extérieure de la surface des ondes qu'on appellera σ'.

2. Examinons maintenant comment sont disposées les lignes

$$u_2 = \text{const.}\quad,\quad u_3 = \text{const.}$$

sur σ'.

(4) « Journal de Crelle ». T. 84, page 353.

Conduisons par l'origine les parallèles T_1, T_2 aux axes optiques. Elles découpent le plan xz en quatre parties qui contiennent respectivement les parties positives et négatives des axes x, z. Nous les désignerons par ω_x, ω_{-x}, ω_z, ω_{-z}.

En faisant $u_2 = -K$, on trouve

$$x = -b \operatorname{dn} u_2 \quad , y = 0 \quad , \quad z = b\mu \operatorname{sn} u_3 .$$

Cette ligne est la partie de l'intersection du plan xz avec σ' comprise dans ω_{-x}. De même on voit que la ligne $u_2 = K$ est la partie de la même intersection comprise dans ω_x. Les lignes

$$u_3 = -L \quad , \quad u_3 = L$$

sont les parties de l'intersection de σ' avec le plan xz comprises dans ω_{-z} et ω_z.

Ajoutons les équations (1) après en avoir élevé les deux membres au carré. On obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sn}^2 u_2 . \tag{3}$$

L'intersection de σ' avec la sphère (3) est formée de deux courbes situées des deux côtés du plan yz. Si la courbe qui est du côté des x positives correspond à $u_2 = a_2$, on aura

$$K > a_2 > 0.$$

L'autre courbe correspondra alors à

$$u_2 = -a_2 .$$

De même on trouve

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 [b^2 - (b^2 - c^2) \operatorname{sn}^2 u_3]. \tag{4}$$

Considérons les deux plans xz, xy. Ils partagent l'espace en quatre parties que nous désignerons par

$$S_{y,z} , S_{-y,z} , S_{y,-z} , S_{-y,-z} \tag{5}$$

en mettant en évidence le signe des coordonnées y, z de leurs points.

L'intersection de l'ellipsoïde (4) avec σ' est formée de deux courbes qui sont situées des deux côtés du plan xy et dont chacune est coupée par le plan xz.

On pourra donc considérer les quatre parties $L_{y,z}$, $L_{-y,z}$, $L_{y,-z}$, $L_{-y,-z}$ de cette intersection qui sont contenues dans les quatre parties (5) de l'espace.

Si $L_{y,z}$ correspond à $u_3 = a_3$, on aura

$$L \geqq a_3 \geqq 0$$

et

$L_{-y,z}$ correspondra à $u_3 = 2L - a_3$,

$L_{y,-z}$ correspondra à $u_3 = -a_3$,

$L_{-y,-z}$ correspondra à $u_3 = 2L + a_3$.

On tire de là que u_2 considérée comme fonction des points de la surface σ' est continue, tandis que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = -K$, $u_2 = K$. La somme des valeurs de u_3 des deux côtés de ces lignes est toujours égale à $2L$. u_3 est aussi discontinue le long de la partie Λ de l'intersection du plan xy avec σ' qui est du côté des y négatives. La différence des valeurs de u_3 le long de la ligne Λ est constante et égale à $4L$.

Par conséquent les fonctions elliptiques

$$\operatorname{sn} u_2 \,, \operatorname{cn} u_2 \,, \operatorname{dn} u_2 \,, \operatorname{sn} u_3 \,, \operatorname{dn} u_3 \tag{6}$$

seront continues sur la surface σ', mais

$$\operatorname{cn} u_3$$

sera discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$. Ses valeurs sur les deux côtés de ces lignes seront égales et de signe contraire.

3. Posons maintenant

$$(7)\quad \begin{cases} x = bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3 \,, \\ y = au_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \,, \\ z = au_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \,, \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} \infty > u_1 \geqq 0 \,, \\ K \geqq u_2 \geqq -K \,, \\ 2L \geqq u_3 > -2L \,. \end{cases}$$

Les surfaces

$$u_1 = \text{const.}$$

seront les nappes extérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques. Les surfaces

$$u_2 = \text{const.} \quad , \quad u_3 = \text{const.}$$

seront des cônes dont le sommet est à l'origine, et dont les directrices sont les lignes $u_2 = \text{const.}$, $u_3 = \text{const.}$, que nous avons déjà examinées sur la surface σ'. Les fonctions elliptiques (6), considérées comme fonctions des points de l'espace, seront continues, tandis que $\operatorname{cn} u_3$ sera discontinue le long des parties ω_x, ω_{-x} du plan xz.

4. A tout système de valeurs de x, y, z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs pour u_1, u_2, u_3 qui satisfont aux conditions (7), (8). On appellera ces valeurs les coordonnées de WEBER du point x, y, z.

De même si l'on a deux points $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ et $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ nous poserons

$$x_2 - x_1 = x \quad , \quad y_2 - y_1 = y \quad , \quad z_2 - z_1 = z \,.$$

Le système des valeurs de u_1, u_2, u_3 qui vérifient les conditions (7), (8) seront les coordonnées de WEBER du point A_2 par rapport au point A_1.

Il est aisé de voir que les coordonnées de WEBER du point A_1 par rapport au point A_2, seront

$$u_1 \,, -u_2 \,, -2L + u_3$$

si $u_3 > 0$, et

$$u_1\,,\ -u_2\,,\ 2\mathrm{L}+u_3\,,$$

si $u_3 \leqq 0$.

Calculons le carré de l'élément linéaire de l'espace en fonctions des coordonnées u_1, u_2, u_3.

On trouve par un calcul très simple

$$(9)\qquad \begin{cases} \mathrm{H}_{11} = a^2\,\mathrm{cn}^2 u_2 + b^2\,\mathrm{sn}^2 u_2\,, \\ \mathrm{H}_{22} = u_1^2\,[(a^2-b^2)\,\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{dn}^2 u_2 + b^2 - b^2 k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - b^2\mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,, \\ \mathrm{H}_{33} = a^2 u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,, \\ \mathrm{H}_{12} = u_1\,(b^2-a^2)\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2\,, \\ \mathrm{H}_{23} = \mathrm{H}_{31} = 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{H}_{11}\,, \mathrm{H}_{12}\,, \mathrm{H}_{13} \\ \mathrm{H}_{21}\,, \mathrm{H}_{22}\,, \mathrm{H}_{23} \\ \mathrm{H}_{31}\,, \mathrm{H}_{32}\,, \mathrm{H}_{33} \end{vmatrix}^{1/2}$$

$$= a^2 b u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,.$$

5. Pour établir les équations de LAMÉ en coordonnées de WEBER, il suffit de calculer les quantités K_{is}.

On obtient

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{K}_{11} = a^2\,[b^2\,\mathrm{cn}^2 u_3 + c^2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{22} = a^2 b^2 u_1^2\,[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{33} = a^2 u_1^2\,[(b^2-c^2)\,\mathrm{sn}^2 u_3\,\mathrm{dn}^2 u_3 + c^2 - c^2 k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - c^2\mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3]\,, \\ \mathrm{K}_{13} = a^2 u_1\,(c^2-b^2)\,\mathrm{sn}\,u_3\,\mathrm{cn}\,u_3\,\mathrm{dn}\,u_3\,, \\ \mathrm{K}_{23} = \mathrm{K}_{12} = 0. \end{cases}$$

En posant

$$(11)\qquad \Delta = 1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u_2 - \mu^2\,\mathrm{sn}^2 u_3 + (\mu^2+k^2-1)\,\mathrm{sn}^2 u_2\,\mathrm{sn}^2 u_3\,,$$

on aura

$$(12)\qquad \mathrm{H}_{33} = a^2 u_1^2\,\Delta \quad , \quad \mathrm{D} = a^2 b u_1^2\,\Delta \quad , \quad \mathrm{K}_{22} = a^2 b^2 u_1^2\,\Delta\,.$$

6. Si au lieu des équations (7) on pose les équations

$$(13)\qquad \begin{cases} x = c\bar{u}_1\,\mathrm{sn}\,(\bar{u}_3\,,\bar{\mu})\,\mathrm{dn}\,(\bar{u}_2\,,\bar{k})\,, \\ y = c\bar{u}_1\,\mathrm{cn}\,(\bar{u}_3\,,\bar{\mu})\,\mathrm{cn}\,(\bar{u}_2\,,\bar{k})\,, \\ z = b\bar{u}_1\,\mathrm{dn}\,(\bar{u}_3\,,\bar{\mu})\,\mathrm{sn}\,(\bar{u}_2\,,\bar{k})\,, \end{cases}$$

où

$$\bar{\mu}^2 = \frac{c^2}{b^2}\,\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2} \quad , \quad \bar{k}^2 = \frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\,,$$

on obtient tous les points de l'espace en donnant à $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ toutes les valeurs réelles, telles que

$$(14) \qquad \begin{cases} \infty > \bar{u}_1 \geqq 0, \\ \bar{K} \geqq \bar{u}_2 \geqq -\bar{K}, \\ 2\bar{L} \geqq \bar{u}_3 > -2\bar{L}, \end{cases}$$

$4\bar{K}$ et $4\bar{L}$ étant les périodes réelles correspondantes aux modules $\bar{k}, \bar{\mu}$. Les surfaces $\bar{u}_1 =$ const. sont les nappes intérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques, auxquelles appartient la surface (2). Les surfaces $\bar{u}_2 =$ const., $\bar{u}_3 =$ const. sont des cônes dont le sommet est à l'origine et dont les directrices sont des lignes sphériques et elliptiques de ces nappes.

Il est facile de vérifier que, si les conditions (13), (14) sont remplies,

$$\operatorname{sn} \bar{u}_2, \operatorname{cn} \bar{u}_2, \operatorname{dn} \bar{u}_2, \operatorname{sn} \bar{u}_3, \operatorname{dn} \bar{u}_3$$

sont des fonctions continues des points de l'espace, tandis que

$$\operatorname{cn} \bar{u}_3$$

est discontinue le long des parties ω_z, ω_{-z} du plan xz, puisque cette quantité prend des valeurs égales et de signes contraires sur les deux côtés de ces surfaces.

A tout système de valeurs de x, y, z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ qui vérifient les conditions (13), (14). Nous appellerons ces valeurs les coordonnées de WEBER de la 2de espèce du point $A \equiv (x, y, z)$. En posant

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1 \quad , \quad z = z_2 - z_1,$$

u_1, u_2, u_3 seront les coordonnées de WEBER de la 2de espèce du point $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ par rapport au point $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$.

7. Pour transformer les équations de LAMÉ en coordonnées $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, il suffit de calculer les quantités H_{is}, K_{is} par rapport à ces variables. Nous les désignerons par $\bar{H}_{is}, \bar{K}_{is}$. En posant

$$(15) \qquad \bar{\Delta} = 1 - \bar{k}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_2 - \bar{\mu}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_3 + (\bar{\mu}^2 + \bar{k}^2 - 1) \operatorname{sn}^2 \bar{u}_2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_3$$

on trouve

$$(16) \qquad \bar{H}_{22} = c^2 \bar{u}_1^2 \bar{\Delta} \quad , \quad \bar{D} = c^2 b \bar{u}_1^2 \bar{\Delta} \quad , \quad \bar{K}_{33} = c^2 b^2 \bar{u}_1^2 \bar{\Delta},$$

$$(17) \qquad \bar{H}_{23} = \bar{H}_{31} = \bar{K}_{23} = \bar{K}_{12} = 0.$$

ART. 4. – LES INTÉGRALES DE LAMÉ.

1. On peut trouver bien facilement deux intégrales des équations de LAMÉ, après les avoir transformées en coordonnées de WEBER.

Examinons d'abord ce qu'on trouve en prenant les coordonnées de WEBER de première espèce.

Les équations de LAMÉ seront vérifiées par les valeurs

$$p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = 0.$$

En effet en rappelant les équations (1) du 2ème article et les équations (9) de l'article précédent, on trouve

$$q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \quad , \quad q_3 = H_{33} p_3 ,$$

$$P_1 = -\frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2} \quad , \quad P_2 = \frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} \quad , \quad P_3 = 0,$$

$$Q_1 = -\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2} \quad , \quad Q_2 = \frac{K_{22}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} = b\frac{\partial q_3}{\partial u_1} \quad , \quad Q_3 = -\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2},$$

$$D p_3 = b q_3 .$$

Par suite les équations de LAMÉ se réduisent aux suivantes

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1 \partial u_3}, \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right], \\ b\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} &= b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2} - \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Supposons q_3 fonction de t et de u_1 seulement. Les deux premières équations (1) seront satisfaites; la troisième deviendra

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2}$$

dont l'intégrale générale est

$$q_3 = f(t + u_1) + \varphi(t - u_1),$$

f, φ étant deux fonctions arbitraires. On a donc l'intégrale suivante des équations de LAMÉ

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & q_1 = 0 \quad , \quad q_2 = 0 \quad , \quad q_3 = f(t+u_1) + \varphi(t-u_1), \\ & p_1 = 0 \quad , \quad p_2 = 0 \quad , \quad p_3 = \frac{1}{a^2 u_1^2 \Delta}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)], \\ & Q_1 = 0 \quad , \quad Q_2 = b[f'(t+u_1) - \varphi'(t-u_1)] \quad , \quad Q_3 = 0, \\ & P_1 = 0 \quad , \quad P_2 = \frac{1}{a^2 b u_1^2 \Delta}[f'(t+u_1) - \varphi'(t-u_1)] \quad , \quad P_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

où Δ a la valeur (11), art. 3.

2. En rappelant les équations (15) du premier article on trouve

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial u_3}{\partial x}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)], \\ v &= \frac{\partial u_3}{\partial y}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_3)], \\ w &= \frac{\partial u_3}{\partial z}[f(t+u_1) + \varphi(t-u_1)]. \end{aligned} \right.$$

Des équations (7) du même article, on déduit aussi les expressions équivalentes

$$(4)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)], \\ v = -\dfrac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)], \\ w = \dfrac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)]. \end{cases}$$

Enfin les équations (16) et (11) du premier article conduisent aux formules suivantes

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{b}{a^2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)] \\ \quad = \dfrac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)], \\ \mathrm{V} = \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial u_2}{\partial y}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)] \\ \quad = -\dfrac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{ab u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)], \\ \mathrm{W} = \dfrac{b}{c^2}\dfrac{\partial u_2}{\partial z}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)] \\ \quad = -\dfrac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{ab u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]. \end{cases}$$

3. Considérons maintenant les coordonnées de WEBER de la seconde espèce. Le procédé par lequel on est parvenu aux intégrales (2) peut être appliqué à ces coordonnées. On trouve ainsi l'intégrale suivante

$$(6)\quad \begin{cases} \bar{q}_1 = 0 \;, \quad \bar{q}_2 = 0 \;, \quad \bar{q}_3 = \bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1), \\ \bar{p}_1 = 0 \;, \quad \bar{p}_2 = 0 \;, \quad \bar{p}_3 = \dfrac{1}{c^2 \bar{u}_1^2 \Delta}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \\ \bar{\mathrm{Q}}_1 = 0 \;, \quad \bar{\mathrm{Q}}_2 = b[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \;, \quad \bar{\mathrm{Q}}_3 = 0, \\ \bar{\mathrm{P}}_1 = 0 \;, \quad \bar{\mathrm{P}}_2 = \dfrac{1}{c^2 b \bar{u}_1^2 \bar{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \;, \quad \bar{\mathrm{P}}_3 = 0, \end{cases}$$

$\bar{f}$ et $\bar{\varphi}$ étant des fonctions arbitraires.

On en tire

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{u} = \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial x}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)] \\ \quad = \dfrac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \\ \bar{v} = \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial y}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t+\bar{u}_1)] \\ \quad = -\dfrac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \Delta}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\varphi(t-\bar{u}_1)], \\ \bar{w} = \dfrac{\partial \bar{u}_3}{\partial z}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)] \\ \quad = -\dfrac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \end{cases}$$

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\overline{\mathrm{U}} &= \frac{b}{a^2}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\bar{k}^2 \operatorname{sn}\bar{u}_2 \operatorname{cn}\bar{u}_2 \operatorname{sn}\bar{u}_3}{cb\bar{u}_1\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \\
\overline{\mathrm{V}} &= \frac{1}{b}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\operatorname{sn}\bar{u}_2 \operatorname{dn}\bar{u}_2 \operatorname{cn}\bar{u}_3}{cb\bar{u}_1\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \\
\overline{\mathrm{W}} &= \frac{b}{c^2}\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= \frac{\operatorname{cn}\bar{u}_2 \operatorname{dn}\bar{u}_2 \operatorname{dn}\bar{u}_3}{c^2\bar{u}_1\overline{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u})].
\end{aligned}\right.
$$

4. Nous avons vu (art. 2) qu'à toute intégrale des équations de LAMÉ correspond une intégrale des équations conjuguées liée à la précédente par les équations (3) du 2ème article.

On aura donc, en partant des formules (2), (6), les deux intégrales suivantes des équations conjuguées à celles de LAMÉ:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{M}_1 = 0, \quad \mathrm{M}_2 = \frac{1}{a^2 b u_1^2 \Delta}[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)], \quad \mathrm{M}_3 = 0, \\
&\mathrm{N}_1 = 0, \quad \mathrm{N}_2 = b[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)], \quad \mathrm{N}_3 = 0, \\
&m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad m_3 = \frac{1}{a^2 u_1^2 \Delta}[\psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1)], \\
&n_1 = 0, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = \psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\overline{\mathrm{M}}_1 = 0, \quad \overline{\mathrm{M}}_2 = \frac{1}{c^2 b \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}}[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)], \quad \overline{\mathrm{M}}_3 = 0, \\
&\overline{\mathrm{N}}_1 = 0, \quad \overline{\mathrm{N}}_2 = b[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)], \quad \overline{\mathrm{N}}_3 = 0, \\
&\bar{m}_1 = 0, \quad \bar{m}_2 = 0, \quad \bar{m}_3 = \frac{1}{c^2 \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}}[\bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1)], \\
&\bar{n}_1 = 0, \quad \bar{n}_2 = 0, \quad \bar{n}_3 = \bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1),
\end{aligned}\right.
$$

$\psi, \chi, \bar{\psi}, \bar{\chi}$ étant des fonctions arbitraires.

De même on sait que des intégrales précédentes on pourrait déduire des intégrales des équations de LAMÉ. Mais il est aisé de voir qu'en partant des formules (9), (10) on ne trouverait pas de nouvelles intégrales, car on reviendrait aux formules (2), (6).

5. Nous remarquerons enfin que les intégrales des équations de LAMÉ que nous venons de trouver vérifient la condition (5) de l'article 2 et par suite correspondent à des vibrations transversales.

6. On peut maintenant se poser la question. Est-ce qu'on peut trouver d'autres intégrales des équations de LAMÉ de la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} u = u_\alpha f(t + u_1) + u_\beta\, \varphi(t + \bar{u}_1), \\ v = v_\alpha f(t + u_1) + v_\beta\, \varphi(t + \bar{u}_1), \\ w = w_\alpha f(t + u_1) + w_\beta\, \varphi(t + \bar{u}_1) \end{cases}$$

où $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$; $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ sont indépendantes de t et $f(\alpha)$ est une fonction arbitraire, tandis que $\varphi(a)$ est une fonction arbitraire ou dépend d'une manière quelconque de $f(a)$?

Si (11) est une intégrale des équations de LAMÉ, on doit trouver par la substitution dans les équations différentielles, trois équations de la forme

$$A_0 f + B_0\varphi + A_1 f' + B_1\varphi' + A_2 f'' + B_2\varphi'' = 0$$

où $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t.

Il est aisé de se persuader que ces coefficients doivent être nuls. En effet si cela n'arrivait pas, on aurait

$$\begin{vmatrix} f, & \varphi, & f', & \varphi', & f'', & \varphi'' \\ f', & \varphi', & f'', & \varphi'', & f''', & \varphi''' \\ f'', & \varphi'', & f''', & \varphi''', & f^{IV}, & \varphi^{IV} \\ f''', & \varphi''', & f^{IV}, & \varphi^{IV}, & f^{V}, & \varphi^{V} \\ f^{IV}, & \varphi^{IV}, & f^{V}, & \varphi^{V}, & f^{VI}, & \varphi^{VI} \\ f^{V}, & \varphi^{V}, & f^{VI}, & \varphi^{VI}, & f^{VII}, & \varphi^{VII} \end{vmatrix} = 0.$$

Posons $t + u_1 = \alpha$, $t + \bar{u}_1 = \beta$, on aura $f = f(\alpha)$, $\varphi = \varphi(\beta)$ et l'on pourra regarder α et β comme des variables indépendantes. Mais f est une fonctions arbitraire, par suite le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi, & \varphi', & \varphi'' \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''' \\ \varphi'', & \varphi''', & \varphi^{IV} \end{vmatrix}$$

devrait être nul. Donc φ ne serait une fonction arbitraire ni dépendrait de f.

On tire de la que

$$(12)\quad \begin{cases} u_\alpha f(t + u_1), \\ v_\alpha f(t + u_1), \\ w_\alpha f(t + u_1) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (12')\quad \begin{cases} u_\beta\,\varphi(t + \bar{u}_1), \\ v_\beta\,\varphi(t + \bar{u}_1), \\ w_\beta\,\varphi(t + \bar{u}_1) \end{cases}$$

doivent former deux intégrales des équations de LAMÉ. En prenant les coordonnées de WEBER de la première espèce, à l'intégrale (12) doit correspondre l'intégrale suivante des équations transformées:

$$\begin{cases} p_1 = p_{1\alpha} f(t + u_1), \\ p_2 = p_{2\alpha} f(t + u_1), \\ p_3 = p_{3\alpha} f(t + u_1), \end{cases}$$

où $p_{1\alpha}, p_{2\alpha}, p_{3\alpha}$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t. En remarquant que

$$H_{13} = H_{23} = K_{12} = K_{23} = 0$$

on trouve

$$\left\{\begin{aligned} q_1 &= (H_{11} p_{1\alpha} + H_{12} p_{2\alpha}) f = q_{1\alpha} f, \\ q_2 &= (H_{21} p_{1\alpha} + H_{22} p_{2\alpha}) f = q_{2\alpha} f, \\ q_3 &= H_{33} p_{3\alpha} f \qquad\qquad\quad\; = q_{3\alpha} f, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{2\alpha}}{\partial u_3} - \frac{\partial q_{3\alpha}}{\partial u_2}\right) f &&= P_{1\alpha} f, \\ P_2 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{3\alpha}}{\partial u_1} - \frac{\partial q_{1\alpha}}{\partial u_3}\right) f + \frac{q_{3\alpha}}{D} f' &&= P_{2\alpha} f + \frac{q_{3\alpha}}{D} f', \\ P_3 &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{1\alpha}}{\partial u_2} - \frac{\partial q_{2\alpha}}{\partial u_1}\right) f - \frac{q_{2\alpha}}{D} f' &&= P_{3\alpha} f - \frac{q_{2\alpha}}{D} f', \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= (K_{11} P_{1\alpha} + K_{13} P_{3\alpha}) f - \frac{1}{D} K_{13} q_{2\alpha} f' &&= Q_{1\alpha} f - \frac{K_{13}}{D} q_{2\alpha} f', \\ Q_2 &= K_{22} P_{2\alpha} f + \frac{1}{D} K_{22} q_{3\alpha} f' &&= Q_{2\alpha} f + \frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha} f', \\ Q_3 &= (K_{31} P_{1\alpha} + K_{33} P_{3\alpha}) f - \frac{1}{D} K_{33} q_{2\alpha} f' &&= Q_{3\alpha} f - \frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha} f', \end{aligned}\right.$$

$$D p_{1\alpha} f'' + \left(\frac{\partial Q_{2\alpha}}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_{3\alpha}}{\partial u_2}\right) f + \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha}\right)\right] f' = 0,$$

$$\left(D p_{2\alpha} - \frac{K_{33}}{D} q_{2\alpha}\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_{3\alpha}}{\partial u_1} - \frac{\partial Q_{1\alpha}}{\partial u_3}\right) f + \left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{13}\, q_{2\alpha}}{D}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{33}\, q_{2\alpha}}{D}\right)\right] f' = 0,$$

$$\left(D p_{3\alpha} - \frac{K_{22}}{D} q_{3\alpha}\right) f'' + \left(\frac{\partial Q_{1\alpha}}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_{2\alpha}}{\partial u_1}\right) f - \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{22}\, q_{3\alpha}}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{13}\, q_{2\alpha}}{D}\right)\right] f' = 0.$$

Puisque f est une fonction arbitraire, il faudra égaler à zéro les coefficients de f'', f', f.

Par suite on aura

$$q_{1\alpha} = 0 \quad , \quad q_{2\alpha} = 0 \quad , \quad q_{3\alpha} = \text{const.}$$

On revient donc aux intégrales qu'on a déjà trouvées.

De même on aurait un résultat tout à fait semblable, en partant des intégrales (12').

Il n'y a donc que les intégrales que nous avons trouvées dans les paragraphes précédents de cet article qui aient la forme (11).

ART. 5. – PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES DE LAMÉ.

1. En se rappelant la discussion que nous avons faite dans l'article 3, il est aisé de voir que la deuxième des fonctions (4) (voir l'art. précédent) est une fonction continue des points de l'espace, tandis que la première et la troisième de ces fonctions sont discontinues le long des surfaces ω_x et ω_{-x}.

Substituons dans les seconds membres des équations (4) aux quantités u_1, u_2, u_3 leurs expressions en fonction de x, y, z et regardons t comme une quantité constante. On trouvera

$$u = \varphi_1(x, y, z) \quad , \quad v = \varphi_2(x, y, z) \quad , \quad w = \varphi_3(x, y, z).$$

D'après ce que nous venons de dire, φ_2 sera une fonction monodrome, mais φ_1 et φ_3 seront polydromes. Si l'on part d'un point quelconque et qu'on prenne les valeurs de φ_1 et φ_3 qui se suivent avec continuité en parcourant une ligne qui entoure un axe optique, on revient au point de départ avec les valeurs initiales changées de signe.

Cette propriété est commune aussi aux fonctions V, $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{V}$ de l'article précédent, considérées comme fonctions de x, y, z.

Au contraire, U, W, v, $\bar{U}$, W sont des fonctions monodromes.

Puisque $u_1 = 0$ à l'origine, les douze fonctions $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, U, V, W, $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$, deviendront infinies pour $x = y = z = 0$.

Les mêmes fonctions deviennent indéterminées dans les points des parallèles aux axes optique T_1, T_2 conduites par l'origine.

Posons

$$x = x_2 - x_1 \quad , \quad y = y_2 - y_1 \quad , \quad z = z_2 - z_1 .$$

On aura

$$\varphi_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_1(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$
$$\varphi_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_2(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$
$$\varphi_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_3(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Même $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ changent de signe par la permutation de x_1, y_1, z_1 avec x_2, y_2, z_2. Au contraire U, V, W; $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$, ne changent pas en effectuant cette permutation.

2. LAMÉ avait trouvé par un procédé tout à fait différent les intégrales (4) et (6) dans lesquelles on suppose

$$f(\alpha) = 0 \quad , \quad \bar{f}(\alpha) = 0 \quad , \quad \varphi(\alpha) = \cos\frac{2\pi\alpha}{T} \quad , \quad \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\cos 2\pi\alpha}{T} .$$

Ne s'étant pas aperçu de la polydromie de ces intégrales, il croyait qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses produites par un centre d'ébranlement situé à l'origine.

D'après la discussion que nous venons de faire il est évident que cela n'est pas vrai. Des vibrations lumineuses correspondant aux formules (4) et (6) ne pourraient être produites que par une couche de centres d'ébranlements situés sur les surfaces ω_x et ω_{-x}, ou ω_z et ω_{-z}, ou sur toute autre surface qui coupe l'espace de sorte qu'on doive nécessairement la rencontrer lorsqu'on tourne autour des droites T_1, T_2.

3. Mais envisageons pour un instant la question au point de vue de LAMÉ, en supposant que ses conclusions soient vraies. On peut alors, en par-

tant de ses intégrales, procéder de la même façon qu'a suivie M. POINCARÉ pour trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta^2 u \ (2).$$

Rappelons que M. POINCARÉ part de l'intégrale $\frac{F(r - Vt)}{r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et qu'il cherche à quoi conduit l'application du principe de HUYGHENS.

Supposons qu'à l'origine des temps toutes les molécules du milieu soient ébranlées. Soit σ_t la surface des ondes dont le centre est le point x_0, y_0, z_0 et les paramètres sont at, bt, ct. Dans l'intervalle de temps qui découle entre l'instant t et l'instant $t + dt$, le point x_0, y_0, z_0 aura reçu, selon le principe de HUYGHENS, les ébranlements provenant de tous les points compris entre les surfaces σ_t et σ_{t+dt}. En suivant donc les idées de LAMÉ sur le centre d'ébranlement, on pourrait représenter par

$$d\xi = \int_S -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$
$$+ \int_{\bar S} \frac{\operatorname{dn} \bar u_2 \operatorname{cn} \bar u_3 \operatorname{dn} \bar u_3}{c \bar u_1 \bar\Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z)\, d\bar S,$$

$$d\eta = \int_S -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$
$$+ \int_{\bar S} -\frac{\operatorname{cn} \bar u_2 \operatorname{sn} \bar u_3 \operatorname{dn} \bar u_3}{c \bar u_1 \Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z)\, d\bar S,$$

$$d\zeta = \int_S \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, dS$$
$$+ \int_{\bar S} -\frac{\bar\mu^2 b \operatorname{sn} \bar u_2 \operatorname{sn} \bar u_3 \operatorname{cn} \bar u_3}{c^2 \bar u_1 \bar\Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z)\, d\bar S$$

les variations des composantes du déplacement du point x_0, y_0, z_0, qui ont lieu dans l'intervalle de temps dt. Il suffit pour cela de supposer:

1° que S soit la partie de l'espace comprise entre les nappes extérieures des deux surfaces des ondes σ_t et σ_{t+dt}, et $\bar S$ la partie comprise entre les nappes intérieures des mêmes surfaces;

2° que $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$ soient les coordonnées des points de S et $x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z$ celles des points de $\bar S$;

3° que u_1, u_2, u_3 soient les coordonnées de la 1ère espèce de WEBER du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$; et que $\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3$ soient les coordonnées de WEBER de la 2de espèce du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z$;

4° enfin que les fonctions $F(x, y, z)$, $\bar F(\bar x, \bar y, \bar z)$ ne dépendent que de l'état initial du milieu.

(2) *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, p. 87.

Mais

$$dS = D\,du_1\,du_2\,du_3 = a^2 b u_1^2 \Delta\, du_1\,du_2\,du_3,$$

$$d\overline{S} = \overline{D}\,d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\,d\bar{u}_3 = c^2 b \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}\, d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\,d\bar{u}_3,$$

$$u_1 = \bar{u}_1 = t,$$

$$du_1 = d\bar{u}_1 = dt,$$

donc

$$\frac{1}{b}\frac{d\xi}{dt} = \rho_1 = t\int_{\sigma'} -\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3\, F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} c \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3\, \overline{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\eta}{dt} = \rho_2 = t\int_{\sigma'} -a \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3\, F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} -c \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3\, \overline{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\zeta}{dt} = \rho_3 = t\int_{\sigma'} a \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3\, F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z)\, du_2\, du_3$$

$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} -\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3\, \overline{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z})\, du_2\, du_3.$$

Puisque les équations de LAMÉ sont linéaires, les formules précédentes devraient donner des intégrales de ces équations.

On obtient ainsi les mêmes formules de Mme KOWALEVSKI (3). Mais il est aisé de se persuader que les fonctions qu'on vient de trouver ne sont pas des intégrales des équations de LAMÉ.

En effet on voit qu'en faisant $t = 0$, les fonctions $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \frac{d\rho_1}{dt}, \frac{d\rho_2}{dt}, \frac{d\rho_3}{dt}$, s'annulent. Mais si l'on a un système d'intégrales des équations de LAMÉ qui s'annulent avec leurs dérivées par rapport à t, pour $t = 0$, elles seraient toujours nulles, ce qui n'a pas lieu pour ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Ce résultat n'a rien de contradictoire et s'explique parfaitement, en se rappelant qu'on a trouvé les formules précédentes en supposant justes les idées de LAMÉ, tandis qu'on a prouvé le contraire.

ART. 6. – GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GREEN. APPLICATION DE LA MÉTHODE DE KIRCHHOFF.

1. Désignons par

$$(1) \qquad p_s, Q_s, P_s, q_s \quad ; \quad p'_s, Q'_s, P'_s, q'_s$$

deux systèmes d'intégrales des équations de LAMÉ. (Voir article 2, formule (1)).

(3) « Acta Mathematica », tome 6.

On aura

$$\Sigma_r \Sigma_s \mathrm{DH}_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2} p_s\right) = \mathrm{D}\Sigma_r\left(q'_r \frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} - q_r \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2}\right)$$

$$= \Sigma_r\left[q'_r\left(\frac{\partial \mathrm{Q}_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{Q}_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right) - q_r\left(\frac{\partial \mathrm{Q}'_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial \mathrm{Q}'_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right)\right].$$

Multiplions cette équation par $du_1\, du_2\, du_3$ et intégrons à un espace S limité par un contour σ. Supposons que les fonctions (1), soient finies, continues et monodromes dans l'espace S.

Si $u\,,v$ est un système de coordonnées de la surface σ, on obtient

$$(2)\quad \int_S \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{H}_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2} p_s\right) d\mathrm{S} = \int_\sigma \Sigma_r\left[q'_r\left\{\mathrm{Q}_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - \mathrm{Q}_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. - q_r\left\{\mathrm{Q}'_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - \mathrm{Q}'_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right] du\, dv$$

$$- \int_S \Sigma_r\left[\mathrm{Q}_r\left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - \mathrm{Q}'_r\left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right)\right] du_1\, du_2\, du_3.$$

La dernière intégrale est nulle. En effet on a

$$\int_S \Sigma_r\left[\mathrm{Q}_r\left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - \mathrm{Q}'_r\left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right)\right] du_1\, du_2\, du_3$$

$$= \int_S \Sigma_r\left[\mathrm{Q}_r \mathrm{P}'_r - \mathrm{Q}'_r \mathrm{P}_r\right] d\mathrm{S} = \int_S \Sigma_r \Sigma_s (\mathrm{K}_{rs} \mathrm{P}_s \mathrm{P}'_r - \mathrm{K}_{rs} \mathrm{P}'_s \mathrm{P}_r)\, d\mathrm{S} = 0.$$

Par suite l'équation (2) peut être remplacée par l'autre

$$(3)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{H}_{rs}\left(\frac{\partial p_r}{\partial t} p'_s - \frac{\partial p'_s}{\partial t} p_r\right) d\mathrm{S}$$

$$= \int_\sigma \Sigma_r\left[q'_r\left\{\mathrm{Q}_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - \mathrm{Q}_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. + \mathrm{Q}'_r\left\{q_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - q_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right] du\, dv.$$

2. Pareillement supposons que

$$(4)\qquad \mathrm{M}_s\,,m_s\,,\mathrm{N}_s\,,n_s \quad ; \quad \mathrm{M}'_s\,,m'_s\,,\mathrm{N}'_s\,,n'_s$$

soient deux intégrales des équations conjuguées à celles de LAMÉ (voir article 2, formule (2)). Si les fonctions (4) sont finies, continues et monodromes dans l'espace S on a

$$(5)\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_S \Sigma_r \Sigma_s \mathrm{K}_{rs}\left(\frac{\partial \mathrm{M}_r}{\partial t}\mathrm{M}'_s - \frac{\partial \mathrm{M}'_s}{dt}\mathrm{M}_r\right) d\mathrm{S}$$

$$= \int_\sigma \Sigma_r\left[\mathrm{N}'_r\left\{n_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - n_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right.$$

$$\left. + n'_r\left\{\mathrm{N}_{r+2}\frac{d(u_{r+2}\,,u_r)}{d(u\,,v)} - \mathrm{N}_{r+1}\frac{d(u_r\,,u_{r+1})}{d(u\,,v)}\right\}\right] du\, dv.$$

Les formules (3) et (5) peuvent être considérées comme une généralisation du théorème de GREEN.

3. Prenons maintenant pour lignes coordonnées les coordonnées de WEBER de la première espèce et posons pour

$$p'_s \,,\, Q'_s \,,\, P'_s \,,\, q'_s$$

la première des intégrales de LAMÉ que nous avons trouvée dans l'article 4 (voir formule (2)).

Afin que ces fonctions soient finies et continues dans l'espace S, il faut exclure l'origine et les surfaces $\omega_x \,,\, \omega_{-x}$.

Soit σ une surface qui renferme l'origine. Conduisons deux cônes

$$u_2 = \mathrm{K} - \varepsilon \quad , \quad u_2 = -\mathrm{K} + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

qu'on appellera $\alpha_1 \,,\, \alpha_2$ et la nappe extérieure ω de la surface des ondes $u_1 = \varepsilon'$.

Quelque petites que soient les quantités $\varepsilon \,,\, \varepsilon'$, les fonctions $p'_s \,,\, P'_s \,,\, Q'_s \,,\, q'_s$, rempliront toujours les conditions suffisantes pour l'application de la formule (3) dans l'espace S_1 renfermé entre $\sigma \,,\, \alpha_1 \,,\, \alpha_2 \,,\, \omega$. La surface σ_1 qui limite S_1 sera formée de quatre parties, qui appartiennent respectivement à $\sigma \,,\, \alpha_1 \,,\, \alpha_2 \,,\, \omega$ et qu'on désignera par $\sigma' \,,\, \alpha'_1 \,,\, \alpha'_2 \,,\, \omega'$. La formule (3) peut être appliquée en remplaçant S par S_1 et σ par σ_1. Les lignes $u \,,\, v$ seront les coordonnées curvilignes de la surface σ_1. Considérons, sur la ligne $u =$ const., la direction dans laquelle v croit. On l'appellera la direction positive de la ligne $u =$ const. De même considérons la direction dans laquelle u croît comme direction positive de la ligne $v =$ const. Alors en regardant la surface du côté extérieur à l'espace S_1 on devra faire tourner la direction positive de la ligne $v =$ const. d'un angle $< \pi$, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour la faire coïncider avec la direction positive de la ligne $u =$ const. D'après cela on peut choisir pour coordonnées curvilignes $v =$ const., $u =$ const., sur le cône α_1 les lignes $u_1 =$ const., $u_3 =$ const. de cette surface, et sur le cône α_2 les lignes $u_3 =$ const., $u_1 =$ const. De même sur la surface ω on choisira les lignes $u_2 =$ const., $u_3 =$ const. pour les lignes coordonnées $v \,,\, u$. Donc, en posant pour simplicité d'écriture

$$f\,(t + u_1) + \varphi\,(t - u_1) = \mathrm{F},$$

$$f'(t + u_1) - \varphi'(t - u_1) = \mathrm{F}_1 ,$$

on aura

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, b \int_{S_1} \mathrm{H}_{33} \left[\mathrm{F} \frac{\partial p_3}{\partial t} - \mathrm{F}_1\, p_3 \right] d\mathrm{S}$$

$$= \int_{\sigma'} \left[\mathrm{F} \left\{ \mathrm{Q}_2 \frac{d(u_2 \,,\, u_3)}{d(u \,,\, v)} - \mathrm{Q}_1 \frac{d(u_3 \,,\, u_1)}{d(u \,,\, v)} \right\} + b\mathrm{F}_1 \left\{ q_1 \frac{d(u_1 \,,\, u_2)}{d(u \,,\, v)} - q_3 \frac{d(u_2 \,,\, u_3)}{d(u \,,\, v)} \right\} \right] du\, dv$$

$$- \int_{\alpha'_1} \mathrm{F}\mathrm{Q}_1\, du_1\, du_3 + \int_{\alpha'_2} \mathrm{F}\mathrm{Q}_1\, du_1\, du_3 - \int_{\omega'} (\mathrm{F}\mathrm{Q}_2 - b\mathrm{F}_1\, q_3)\, du_2\, du_3 .$$

Q_1 est une fonction de u_1, u_2, u_3, t. Pour mettre cela en évidence nous écrirons $Q_1(u_1, u_2, u_3 \mid t)$. Par suite

$$\int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, K-\varepsilon, u_3 \mid t)\, du_1,$$

où la limite supérieure u_1 de la première intégrale est la coordonnée u_1 du point où la génératrice $u_3 = \text{const.}$ du cône α_1 rencontre la surface σ.

De même

$$\int_{\alpha_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, -K+\varepsilon, u_3 \mid t)\, du_1.$$

On aura aussi

$$\int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3)\, du_2\, du_3$$

$$= \int_{-K+\varepsilon}^{K-\varepsilon} du_2 \int_{-2L}^{2L} \{FQ_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) - bF_1 q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t)\}\, du_3.$$

Faisons tendre ε' vers zéro. En prenant garde que

$$\lim_{\varepsilon'=0} Q_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon'=0} q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0;$$

on obtient

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3)\, du_2\, du_3 = 0.$$

Supposons que même ε tende vers zéro.

Alors le cône α_1' tend vers une double couche qui couvre la partie α_x de ω_x comprise entre l'origine et la surface σ. Pareillement le cône α_2' tend vers une double couche qui couvre la partie α_{-x} de ω_{-x} comprise entre l'origine et la surface σ. On trouvera

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t)\, du_1.$$

Mais par la continuité de Q_1 le long des surfaces ω_x, ω_{-x}, on aura

$$\text{si} \quad u_3 > 0 \begin{cases} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, K, 2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, -K, 2L - u_3 \mid t), \end{cases}$$

$$\text{si} \quad u_3 < 0 \begin{cases} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, K, -2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, -K, -2L - u_3 \mid t). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\int_{-2L}^{-L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{-L}^{0} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

$$\int_{L}^{2L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{0}^{L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

d'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{\alpha_x} FQ_1\, du_1\, du_3 .$$

De même

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_{0}^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{\alpha_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3 .$$

La formule (6) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\, b \int_{S} H_{33}\left[F\frac{\partial p_3}{\partial t} - F_1 p_3\right] dS \tag{7}$$

$$= \int_{\sigma} \left[F \left\{ Q_2 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1 \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right\} + bF_1 \left\{ q_1 \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - q_3 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right\} \right] du\, dv$$

$$- 2\int_{\alpha_x} FQ_1\, du_1\, du_3 + 2\int_{\alpha_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3 .$$

4. Prenons (4)

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

$$f(\alpha) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2 \alpha^2}$$

et intégrons la formule précédente par rapport à t entre le temps négatif t_1 et le temps positif t_2.

On trouve, par une intégration par parties,

$$\left[b \int_{S} H_{33} \left\{ f(t+u_1) \frac{\partial p_3}{\partial t} - f'(t+u_1) p_3 \right\} dS \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\sigma} \left[f(t+u_1) \left\{ Q_2 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1 \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right\} - \right.$$

(4) Voir KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* « Wied. Ann. », Bd. 18. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Math. Optik*, p. 24.

Nous avons employé ici le même procédé suivi par KIRCHHOFF pour trouver sa formule, mais on pourrait aussi atteindre le but par une autre méthode semblable à celle découverte par M. BELTRAMI (voir « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », ser. 2, vol. 22, fasc. 10) pour démontrer la formule de KIRCHHOFF.

$$- bf(t+u_1)\left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t}\frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - \frac{\partial q_3}{\partial t}\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} \right\}\Bigg] du\, dv$$

$$+ \left[\int_\sigma bf(t+u_1) \left\{ q_1 \frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - q_3 \frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} \right\} du\, dv \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$- 2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\alpha_x} f(t+u_1)\, Q_1\, du_1\, du_3 + 2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\alpha_{-x}} f(t+u_1)\, Q_1\, du_1\, du_3 .$$

Si nous faisons croître μ indéfiniment, la formule précédente à la limite devient

$$(8) \qquad \int_{\alpha_x} Q_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1)\, du_1\, du_3 - \int_{\alpha_{-x}} Q_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1)\, du_1\, du_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_\sigma \left\{ Q_2(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} - Q_1(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_3,u_1)}{d(u,v)} \right.$$

$$\left. + b\chi_3(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} - b\chi_1(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_1,u_3)}{d(u,v)} \right\} du\, dv$$

où

$$\chi_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t} \quad , \quad \chi_3 = \frac{\partial q_3}{\partial t} .$$

5. Par le même procédé, en partant de la formule (5) et en se servant des coordonnées de WEBER de la première espèce et des intégrales (9) de l'article 4, on trouve

$$(9) \qquad \int_{\alpha_x} \nu_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1)\, du_1\, du_3 - \int_{\alpha_{-x}} \nu_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1)\, du_1\, du_3$$

$$= \frac{1}{2}\int_\sigma \left\{ bn_1(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_1,u_2)}{d(u,v)} - bn_3(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} \right.$$

$$\left. + \nu_1(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_3,u_1)}{d(u,v)} - \nu_2(u_1,u_2,u_3 \mid -u_1)\frac{d(u_2,u_3)}{d(u,v)} \right\} du\, dv$$

où

$$\nu_1 = \frac{\partial N_1}{\partial t} \quad , \quad \nu_2 = \frac{\partial N_2}{\partial t} .$$

On peut trouver des formules tout a fait semblables, en faisant usage des coordonnées de WEBER de la seconde espèce et des intégrales (6), (10) que nous avons trouvées dans l'article 4.

6. Supposons que la surface σ soit la nappe extérieure de la surface des ondes dont l'équation est

$$u_1 = t.$$

La formule (8) dans ce cas deviendra

$$(10)\qquad \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, K, u_3 \,|\, -u_1)\, du_1 - \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, -K, u_3 \,|\, -u_1)\, du_1$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{-K}^{K} \{Q_2(t, u_2, u_3 \,|\, -t) + b\chi_3(t, u_2, u_3 \,|\, -t)\}\, du_2 .$$

7. Les formules (8), (9) ont une analogie avec celle que KIRCHHOFF a donnée comme une généralisation du principe de HUYGHENS.

ART. 7. – NOUVELLES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DE LAMÉ.

1. En prenant dans les équations (4) de l'article 4

$$\varphi = 0$$

et en désignant par $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ les coefficients de la fonction arbitraire, on pourra écrire ces formules de la manière suivante

$$-\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t + u_1) = \psi_1 f(t + u_1),$$

$$-\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \qquad = \psi_2 f(t + u_1),$$

$$\frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \qquad = \psi_3 f(t + u_1).$$

Substituons $x - \xi$, $z - \zeta$ à la place de x, z; on obtiendra

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi_1(x-\xi, y, z-\zeta) f(t+u_1), \\ \psi_2(x-\xi, y, z-\zeta) f(t+u_1), \\ \psi_3(x-\xi, y, z-\zeta) f(t+u_1). \end{array}\right.$$

Désignons par S_{+y}, S_{-y} les deux parties de l'espace dans lesquelles $y > 0$, $y < 0$. Il est aisé de voir que les fonctions (1) sont finies, continues et monodromes dans S_{+y} et dans S_{-y}. Elles deviennent infinies dans les point $\xi, 0, \zeta$ et la première et la troisième sont discontinues sur le plan xz.

2. Supposons que f depende des deux variables ξ, ζ; c'est à dire qu'elle soit une fonction arbitraire de $t + u_1$, ξ, ζ. En multipliant par $d\xi d\zeta$ et en intégrant, on obtiendra les trois fonctions

$$u' = \int \psi_1(x-\xi, y, z-\zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi d\zeta,$$

$$v' = \int \psi_2(x-\xi, y, z-\zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi d\zeta,$$

$$w' = \int \psi_3(x-\xi, y, z-\zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi d\zeta.$$

Elles constituent un système d'intégrales des équations de LAMÉ. Elles n'ont pas de discontinuités dans les deux parties de l'espace S_{+y} et S_{-y}, mais sont discontinues sur le plan xz.

En partant des intégrales (7) de l'article 4 on trouve évidemment une intégrale parfaitement analogue à celle que nous venons d'obtenir et que l'on peut écrire

$$\bar{u}' = \int \bar{\psi}_1 (x-\xi, y, z-\zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$\bar{v}' = \int \bar{\psi}_2 (x-\xi, y, z-\zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$\bar{w}' = \int \bar{\psi}_3 (x-\xi, y, z-\zeta) \bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

On peut donc conclure: u_1, u_2, u_3, étant les coordonnées de WEBER de la première espèce du point x, y, z par rapport au point $\xi, 0, \zeta$, et $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ les coordonnées de WEBER de la seconde espèce du premier point par rapport au second, on aura les intégrales suivantes des équations de LAMÉ

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
u &= \int -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
v &= \int -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
w &= \int \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta
\end{aligned}\right.$$

où $f(t+u_1, \xi, \zeta)$, $\bar{f}'(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)$ sont deux fonctions arbitraires. Les intégrales (2) seront finies continues et monodromes en S_{+y} et S_{-y} et seront discontinues sur le plan xz.

3. Il est bien aisé d'obtenir les rotations U, V, W correspondant aux déplacements (2) (voir article 1). Il suffit pour cela d'appliquer les formules (5) et (8) de l'article 4. On trouve ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
U &= \int \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\bar{k}^2 \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3}{c b \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
V &= \int -\frac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c b \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\
W &= \int -\frac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \\
&\quad + \int \frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.
\end{aligned}\right.$$

4. Voyons maintenant les valeurs qu'on trouve pour les quantités u, v, w, U, V, W lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. Indiquons par le symbole

$$\lim_{y=+0}$$

la limite qu'on obtient lorsqu'on s'approche d'un point du plan xz du côté S_{+y} et par

$$\lim_{y=-0}$$

la limite qu'on trouve en s'approchant du même point du côté S_{-y}. Conduisons par un point quelconque du plan xz deux droites parallèles aux axes optiques. Le plan xz sera partagé en quatre parties $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ qu'on peut faire coïncider par une simple translation avec $\omega_{+z}, \omega_{+x}, \omega_{-z}, \omega_{-x}$. Nous répresenterons par

$$\int_{\sigma_h \pm \sigma_k}$$

la somme ou la différence de deux intégrales étendue aux deux parties du plan xz qu'on a indiquées par σ_h, σ_k.

Remarquons que la coordonnée u_3 de la $1^{\text{ère}}$ espèce de WEBER d'un point du plan xz par rapport à un autre point du même plan peut être donnée par u_3 ou par $\pm 2L - u_3$. (Voir article 3). Convenons maintenant de prendre, lorsque les deux points sont sur le plan xz,

$$L \geqq u_3 \geqq -L.$$

De même convenons de prendre la coordonnée $\bar{u}_3$ de la seconde espèce relative à deux points du plan xz, telle que

$$\bar{L} \geqq \bar{u}_3 \geqq -\bar{L}.$$

Cela posé, il est bien aisé de déduire des formules (2) les équations suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\lim_{y=+0} u = -\lim_{y=-0} u &= \int_{\sigma_2-\sigma_4} b\mu \operatorname{sn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\
&\quad + \int_{\sigma_1+\sigma_3} b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3, \\
\lim_{y=+0} v = \lim_{y=-0} v &= \int_{\sigma_1-\sigma_3} bf(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\
&\quad + \int_{\sigma_2-\sigma_4} b\bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2, \\
\lim_{y=+0} w = -\lim_{y=-0} w &= \int_{\sigma_2+\sigma_4} b \operatorname{dn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\
&\quad + \int_{\sigma_1-\sigma_3} b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3.
\end{aligned}\right.$$

Pareillement on obtient les limites de U , V , W lorsqu'on s'approche du plan xz. On a

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lim_{y=+0} \mathrm{U} = \lim_{y=-0} \mathrm{U} &= \int\limits_{\sigma_1+\sigma_3} \frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\
&+ \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{\bar{k}}{a} \operatorname{sn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2, \\
\lim_{y=+0} \mathrm{V} = -\lim_{y=-0} \mathrm{V} &= \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_3 \\
&+ \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3, \\
\lim_{y=+0} \mathrm{W} = \lim_{y=-0} \mathrm{W} &= \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1\, du_2 \\
&+ \int\limits_{\sigma_2+\sigma_4} \frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1)\, du_1\, du_2 .
\end{aligned}
\right.
$$

5. Enfin nous remarquerons que les intégrales des équations de LAMÉ que nous avons trouvées (formules (2)) vérifient la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

c'est à dire elles correspondent à des vibrations transversales du milieu élastique.

Cela ressort de l'observation que nous avons faite dans le § 5 de l'article 4.

ART. 8. – INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE L'OPTIQUE.

1. Si les vibrations du milieu élastique sont transversales il faut adjoindre aux équations (2) du 1[er] article l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

On peut alors éliminer la fonction v et l'on trouve les deux équations

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \Delta u + (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Soient $\tilde{\omega}$, σ un système d'intégrales des équations

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} &= c^2 \Delta \tilde{\omega} + (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} &= a^2 \Delta \sigma + (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Il suffit de prendre

$$(3) \qquad u = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

pour obtenir un système d'intégrales des équations (2) du premier article qui satisfont à la condition (1) posée ci-dessus.

Réciproquement démontrons qu'à tout système d'intégrales u, v, w des équations de LAMÉ, qui vérifie la condition (1), correspondent deux fonctions $\tilde{\omega}, \sigma$ qui satisfont aux équations (2) et qui sont liées à u, v, w par les relations (3).

En effet, u, v, w étant données, prenons deux fonctions $\tilde{\omega}_1, \sigma_1$ telles que

$$(4) \qquad u = \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} .$$

On pourra ajouter à $\tilde{\omega}_1$ et σ_1 deux fonctions $\tilde{\omega}_2(x, z)$, $\sigma_2(x, z)$ qui remplissent la condition

$$\frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = 0$$

sans que les relations (4) soient altérées.

C'est pourquoi, en posant

$$\tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 \quad , \quad \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2 ,$$

on aura

$$u = \frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \tilde{\omega}_3}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} \quad , \quad w = \frac{\partial \sigma_3}{\partial y} .$$

En substituant les valeurs (4) dans les équations de LAMÉ, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right]$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right)\right] = 0 .$$

Par suite

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_1 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right) = f(x, z) ,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_1}{\partial z}\right) = \varphi(x, z) ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 .$$

Mais il est toujours possible de prendre $\tilde{\omega}_2, \sigma_2$, telles que

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \tilde{\omega}_2 - (c^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z}\right) = -f(x, z) ,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_2 - (b^2 - a^2) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial z}\right) = -\varphi(x, z) .$$

Donc on aura que $\tilde{\omega}_3, \sigma_3$ rempliront les équations (2), ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après cela on conclut qu'il suffit d'intégrer le système (2) pour intégrer les équations de l'optique. Appliquons les formules (2) de l'article précédent. On aura que

$$(5)\quad \begin{cases} u = u' + u'' = \int \psi_1 f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \overline{\psi}_1 \overline{f}(t + \overline{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta, \\ v = v' + v'' = \int \psi_2 f(t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta + \int \overline{\psi}_2 \overline{f}(t + \overline{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta \end{cases}$$

formeront un système d'intégrales des équations (2).

Même

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$$

seront des intégrales des équations (2). Pour calculer ces quantités, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \quad W + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -U + \frac{\partial v}{\partial z}$$

où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (v' + v'')}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial (v' + v'')}{\partial z}.$$

Mais

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} [\psi_2 f(u_1 + t, \xi, \zeta)]\, d\xi\, d\zeta$$

$$= \int \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(u_1 + t, \xi, \zeta) + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] d\xi\, d\zeta.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \quad , \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi}.$$

Par suite

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \left[-\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} f(t + u_1, \xi, \zeta) - \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right] d\xi\, d\zeta.$$

En supposant f continue et nulle pour ξ, ζ infinies, on aura par une intégration par parties

$$(6)\qquad \frac{\partial v'}{\partial x} = \int \psi_2 f'_\xi (t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Un calcul tout à fait analogue nous conduit aux équations

$$(6')\qquad \frac{\partial v''}{\partial x} = \int \overline{\psi}_2 \overline{f}'_\xi (t + \overline{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial v'}{\partial z} = \int \psi_2 f'_\zeta (t + u_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta,$$

$$(7')\qquad \frac{\partial v''}{\partial z} = \int \overline{\psi}_2 \overline{f}'_\zeta (t + \overline{u}_1, \xi, \zeta)\, d\xi\, d\zeta.$$

Dans les formules précédentes on a désigné par

$$f'_\xi\,,\,\bar{f}'_\xi\,,\,f'_\zeta\,,\,\bar{f}'_\zeta\,,$$

les dérivées partielles des fonctions $f\,,\,\bar{f}$ par rapport à $\xi\,,\,\zeta$ calculées en regardant $u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta$ comme des variables indépendentes.

On aura donc

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \mathrm{W} + \int \psi_2 f'_\xi(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\xi(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\xi\,d\zeta\,,\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= -\,\mathrm{U} + \int \psi_2 f'_\zeta(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\xi\,d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\zeta(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\xi\,d\zeta\,.\end{aligned}\right.$$

Par l'addition des expression (5) avec les expressions (8) dans lesquelles on ait remplacé les fonctions arbitraires f et $\bar{f}$ par les autres fonctions arbitraires $g\,,\,\bar{g}$ on trouvera les intégrales suivantes des équations (2)

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \tilde{\omega} = &\int\Big[-\frac{\mu^2 b}{a}\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_3 f(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta) - \frac{k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_2\,\frac{\partial}{\partial t}g(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\\ &\qquad -\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3\,g'_\xi(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\Big]\frac{\mathrm{sn}\,u_3}{a u_1 \Delta}\,d\xi\,d\zeta\\ &+\int\Big[\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_3\,\bar{f}(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta) + \frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\\ &\qquad -\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}'_\xi(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\Big]\frac{\mathrm{dn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}}\,d\xi\,d\zeta\,,\\ \sigma = &\int\Big[\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{cn}\,u_3 f(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta) - \frac{\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_2}{a}\,\frac{\partial}{\partial t}g(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\\ &\qquad -\,\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3\,g'_\zeta(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\Big]\frac{\mathrm{dn}\,u_3}{a u_1 \Delta}\,d\xi\,d\zeta\\ &+\int\Big[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_3\,\bar{f}(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta) + \frac{\bar{k}^2}{b}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\frac{\partial}{\partial t}g(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\\ &\qquad -\,\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}'_\zeta(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\Big]\frac{\mathrm{sn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\Delta}\,d\xi\,d\zeta.\end{aligned}\right.$$

3. Il suffit maintenant de se rappeler que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (c^2-b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (b^2-a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right]$$

pour calculer les dérivées

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\,,\;\frac{\partial\sigma}{\partial y}\,.$$

En supposant que les dérivées $f'_\xi\,,\,\bar{f}'_\xi\,,f'_\zeta\,,\,\bar{f}'_\zeta\,,g'_\xi\,,\,\bar{g}'_\xi\,,g'_\zeta\,,\,\bar{g}'_\zeta$, soient continues dérivables et s'annullent pour $\xi\,,\,\zeta$ infinies on trouvera par des intégrations par parties

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y} = \int\Big\{\Big[-\frac{k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,u_2 f'_t - \mathrm{dn}\,u_3 f'_\xi\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3}{au_1\Delta} \\
+\frac{1}{c^2}\Big[-\frac{\mu^2 b}{a}\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3(g''_t - c^2 g''_\xi - b^2 g''_\zeta) - (c^2-b^2)\,\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3 g''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_3}{au_1\Delta}\Big\}d\xi\,d\zeta \\
+\int\Big\{\Big[\frac{1}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\bar{f}'_t - \mathrm{sn}\,\bar{u}_3\bar{f}'_\xi\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}} + \frac{1}{c^2}\Big[\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3(\bar{g}''_t - c^2\bar{g}''_\xi - b^2\bar{g}''_\zeta) \\
+(c^2-b^2)\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}\bar{\Delta}}\Big\}d\xi\,d\zeta, \\
\frac{\partial\sigma}{\partial y} = \int\Big\{\Big[-\frac{1}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2 f'_t - \mathrm{sn}\,u_3 f'_\zeta\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3}{au_1\Delta} \\
+\frac{1}{a^2}\Big[\mathrm{dn}\,u_2\,\mathrm{dn}\,u_3(g''_t - b^2 g''_\xi - a^2 g''_\zeta) - \frac{\mu^2 b}{a}(b^2-a^2)\,\mathrm{sn}\,u_2\,\mathrm{sn}\,u_3 g''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,u_3}{au_1\Delta}\Big\}d\xi\,d\zeta \\
+\int\Big\{\Big[\frac{k^2}{b}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\bar{f}'_t - \mathrm{dn}\,\bar{u}_3\bar{f}'_\zeta\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}} + \frac{1}{a^2}\Big[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3(\bar{g}''_t - b^2\bar{g}''_\xi - a^2\bar{g}''_\zeta) \\
+(b^2-a^2)\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\,\bar{g}''_{\xi\zeta}\Big]\frac{\mathrm{cn}\,\bar{u}_2}{c\bar{u}_1\bar{\Delta}}\Big\}d\xi\,d\zeta
\end{aligned}
\right.
$$

où $g''_t, g''_\xi, g''_{\xi\zeta}$, etc. sont les dérivées partielles du 2^e ordre de la fonction g par rapport aux variables t, ξ, ζ, en supposant u_1, ξ, ζ des variables indépendantes.

4. Il est aisé maintenant de déterminer les limites de $\omega, \sigma, \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}, \frac{\partial\sigma}{\partial y}$ lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. On a (voir article 7, § 4.)

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad \lim_{y=\pm 0}\tilde{\omega} = \int_{\sigma_1}\Big[\Big(\frac{k}{c}\,\mathrm{sn}\,u_2 g'_t + bg'_\xi\Big)du_1\,du_2 \pm b\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\bar{f}d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big] \\
+\int_{\sigma_2}\Big[\pm b\mu\,\mathrm{sn}\,u_3 f du_1\,du_3 + \Big(\frac{b}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\bar{g}'_t + b\bar{g}'_\xi\Big)d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big] \\
+\int_{\sigma_3}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_3\bar{f}d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3 - \Big(bg'_\xi + \frac{k}{c}\,\mathrm{sn}\,u_2 g'_t\Big)du_1\,du_2\Big] \\
+\int_{\sigma_4}\Big[\mp b\mu\,\mathrm{sn}\,u_3 f du_1\,du_3 + \Big(\frac{b}{c}\,\mathrm{dn}\,\bar{u}_2\bar{g}'_t - b\bar{g}'_\xi\Big)d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad \lim_{y=\pm 0}\sigma = \int_{\sigma_1}\Big[\Big(-\frac{b}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2 g'_t + bg'_\zeta\Big)du_1\,du_2 \pm b\bar{\mu}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\bar{f}d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big] \\
+\int_{\sigma_2}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,u_3 f du_1\,du_3 + \Big(-\frac{\bar{k}}{a}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\bar{g}'_t + b\bar{g}'_\zeta\Big)d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big] \\
+\int_{\sigma_3}\Big[\Big(-\frac{b}{a}\,\mathrm{dn}\,u_2 g'_t - bg'_\zeta\Big)du_1\,du_2 \mp b\bar{\mu}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_3\bar{f}d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big] \\
+\int_{\sigma_4}\Big[\pm b\,\mathrm{dn}\,u_3 f du_1\,du_3 + \Big(\frac{\bar{k}}{a}\,\mathrm{sn}\,\bar{u}_2\bar{g}'_t - b\bar{g}'_\zeta\Big)d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big],
\end{aligned}
$$

$$(13) \qquad \lim_{y=\pm 0} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = \int_{\sigma_1}\!\!\Big\{ \left[\frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 f_t' + b f_\xi'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \left[\frac{b}{c^2} \operatorname{dn} \bar{u}_3 (\bar{g}_t'' - c^2 \bar{g}_\xi'' - b^2 \bar{g}_\zeta'') - \frac{c^2 - b^2}{c^2} b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{g}_{\xi\zeta}''\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_2}\!\!\Big\{ \pm \left[\frac{b\mu}{c^2} \operatorname{sn} u_3 (g_t'' - c^2 g_\xi'' - b^2 g_\zeta'') - \frac{c^2 - b^2}{c^2} b \operatorname{dn} u_3 g_{\xi\zeta}''\right] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{f}_t' + b\bar{f}_\xi'\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2 \Big\} + \int_{\sigma_3}\!\!\Big\{ - \left[\frac{k}{c} \operatorname{sn} u_2 f_t' + b f_\xi'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \left[\frac{b}{c^2} \operatorname{dn} \bar{u}_3 (\bar{g}_t'' - c^2 \bar{g}_\xi'' - b^2 \bar{g}_\zeta'') + \frac{c^2 - b^2}{c^2} b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{g}_{\xi\zeta}''\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_4}\!\!\Big\{ \mp \left[\frac{b\mu}{c^2} \operatorname{sn} u_3 (g_t'' - c^2 g_\xi'' - b^2 g_\zeta'') + \frac{c^2 - b^2}{c^2} b \operatorname{dn} u_3 g_{\xi\zeta}''\right] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{b}{c} \operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{f}_t' - b\bar{f}_\xi'\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2 \Big\},$$

$$(14) \qquad \lim_{y=\pm 0} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = \int_{\sigma_1}\!\!\Big\{ \left[-\frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 f_t' + b f_\zeta'\right] du_1\, du_2$$

$$\pm \frac{1}{a^2} [b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 (\bar{g}_t'' - b^2 \bar{g}_\xi'' - a^2 \bar{g}_\zeta'') + (b^2 - a^2) b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{g}_{\xi\zeta}''] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_2}\!\!\Big\{ \pm \frac{1}{a^2} [b \operatorname{dn} u_3 (g_t'' - b^2 g_\xi'' - a^2 g_\zeta'') + b\mu (b^2 - a^2) \operatorname{sn} u_3 g_{\xi\zeta}''] du_1\, du_3$$

$$+ \left[-\frac{k}{a} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \bar{f}_t' + b\bar{f}_\zeta'\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2 \Big\} + \int_{\sigma_3}\!\!\Big\{ \left[-\frac{b}{a} \operatorname{dn} u_2 f_t' - b f_\zeta'\right] du_1\, du_2$$

$$\mp \frac{1}{a^2} [b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 (\bar{g}_t'' - b^2 \bar{g}_\xi'' - a^2 \bar{g}_\zeta'') - (b^2 - a^2) b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{g}_{\xi\zeta}''] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \Big\}$$

$$+ \int_{\sigma_4}\!\!\Big\{ \pm \frac{1}{a^2} [b \operatorname{dn} u_3 (g_t'' - b^2 g_\xi'' - a^2 g_\zeta'') - b\mu (b^2 - a^2) \operatorname{sn} u_3 g_{\xi\zeta}''] du_1\, du_3$$

$$+ \left[\frac{k}{a} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \bar{f}_t' - b\bar{f}_\zeta'\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2 \Big\} .$$

5. On peut conclure que les fonctions (9) remplissent les conditions suivantes:

1° Elles sont finies monodromes et continues pour toutes les valeurs de x, z et pour $y > 0$.

2° Elles satisfont aux équations différentielles (2).

3° Les valeurs de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport à y, pour $y = 0$ dépendent de quatre fonctions arbitraires f, $\bar{f}$, g, $\bar{g}$ de trois variables indépendentes.

Pour prouver tout à fait rigoureusement qu'on a trouvé ainsi les intégrales générales, il faudrait démontrer que les valeurs de $\tilde{\omega}$ et de σ et de leurs dérivées par rapport à y pour $y = 0$ sont arbitraires. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguité, nous faisons noter que lorsque nous avons parlé dans l'introduction d'intégrales générales, nous avons entendu les intégrales qui satisfont aux trois conditions précédentes.

ART. 9. – APPLICATION AUX ÉQUATIONS DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

1. L'expérience montre que les cristaux transparents peuvent être regardés approximativement comme des corps isotropes pour le magnétisme. Dans la théorie électromagnétique de la lumière on prouve que les équations de l'électrodynamique dans le cas d'un milieu qui n'est pas conducteur et qui est électriquement anisotrope et magnétiquement isotrope se réduisent aux équations de LAMÉ (5).

Il est tout à fait aisé de montrer que l'on peut appliquer les résultats que nous avons trouvés aux équations de l'électrodynamique pour un milieu qui n'est pas conducteur, même s'il n'est pas isotrope pour le magnétisme, pourvu que l'on suppose, comme fait M. HERTZ, que les axes de symétrie de l'énergie électrique et magnétique coïncident entre eux.

Partons des équations (20 *a*), (20 *b*) données par M. HERTZ dans son mémoire sur les équations de l'électrodynamique pour les corps en repos (6):

$$(1\,a)\qquad \left\{\begin{aligned} A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\mu_2 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\mu_3 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

$$(1\,b)\qquad \left\{\begin{aligned} A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut ajouter

$$(2\,a)\qquad \mu_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial M}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

$$(2\,b)\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$\sqrt{\mu_1}\, X = X' \quad , \quad \sqrt{\mu_2}\, Y = Y' \quad , \quad \sqrt{\mu_3}\, Z = Z',$$

$$\mu_1 \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, L = u \quad , \quad \mu_2 \sqrt{\mu_3 \mu_1}\, M = v \quad , \quad \mu_3 \sqrt{\mu_1 \mu_2}\, N = w,$$

$$\sqrt{\mu_1}\, \xi = x \quad , \quad \sqrt{\mu_2}\, \eta = y \quad , \quad \sqrt{\mu_3}\, \zeta = z;$$

(5) Voir VOLKMANN, *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes*, § 56.
(6) « Göttinger Nachr. », v. 19 März 1890. « Wiedemanns Ann. », T. 40: p. 577.

on aura

$$A\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial Z'}{\partial \eta}-\frac{\partial Y'}{\partial \zeta},$$

$$A\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial X'}{\partial \zeta}-\frac{\partial Z'}{\partial \xi},$$

$$A\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial Y'}{\partial \xi}-\frac{\partial X'}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_1\mu_2\mu_3\frac{\partial X'}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial \zeta}-\frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_2\mu_3\mu_1\frac{\partial Y'}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$A\varepsilon_3\mu_1\mu_2\frac{\partial Z'}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Remplaçons

$$A^2\varepsilon_1\mu_2\mu_3 \quad , \quad A^2\varepsilon_2\mu_3\mu_1 \quad , \quad A^2\varepsilon_3\mu_1\mu_2$$

par

$$\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2}.$$

Les égalités précédentes deviendront

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial W}{\partial \eta}-b^2\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial U}{\partial \zeta}-c^2\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial V}{\partial \xi}-a^2\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$U=\frac{\partial v}{\partial \zeta}-\frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$V=\frac{\partial w}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$W=\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

et l'égalité (2 a) pourra s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial w}{\partial \zeta}=0.$$

Par conséquent on trouve les équations de LAMÉ.

2. Examinons maintenant un cas plus général. Supposons que le corps soit conducteur et les axes de symétrie par rapport à la conductibilité coïncident avec ceux relatifs aux énergies électrique et magnétique. En prenant les lignes x, y, z parallèles à ces axes, les équations (7 a), (7 b) du mémoire de M. HERTZ pourront s'écrire

$$
(3\,a) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\
A\mu_2 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\
A\mu_3 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3\,b) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda_1 (X - X') &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\
A\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda_2 (Y - Y') &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\
A\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda_3 (Z - Z') &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_3}\, X = u \quad , \quad \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_3 \varepsilon_1}\, Y = v \quad , \quad \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\, Z = w ,
$$

$$
\sqrt{\varepsilon_1}\, L = L' \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_2}\, M = M' \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_3}\, N = N',
$$

$$
\sqrt{\varepsilon_1}\, \xi = x \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_2}\, \eta = y \quad , \quad \sqrt{\varepsilon_3}\, \zeta = z ,
$$

$$
A^2 \mu_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{1}{a^2} \quad , \quad A^2 \mu_2 \varepsilon_3 \varepsilon_1 = \frac{1}{b^2} \quad , \quad A^2 \mu_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \frac{1}{c^2},
$$

$$
4\pi \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} = k_1 \quad , \quad 4\pi \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} = k_2 \quad , \quad 4\pi \frac{\lambda_3}{\varepsilon_3} = k_3 ;
$$

on trouvera par le même procédé que nous avons suivi dans le paragraphe précédent

$$
(4\,a) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1 \frac{\partial u}{\partial t} &= b^2 \frac{\partial V}{\partial \zeta} - c^2 \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_2 \frac{\partial v}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} - a^2 \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_3 \frac{\partial w}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial U}{\partial \eta} - b^2 \frac{\partial V}{\partial \xi},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4\,b) \qquad \left\{
\begin{aligned}
U &= \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \\
V &= \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \xi}, \\
W &= \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons

$$
k_1 = k_2 = k_3 = k.
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
u &= f(t)\, u_1(\xi , \eta , \zeta), \\
v &= f(t)\, v_1(\xi , \eta , \zeta), \\
w &= f(t)\, w_1(\xi , \eta , \zeta),
\end{aligned}
$$

u_1 , v_1 , w_1, étant des fonctions indépendantes de t.

En substituant ces valeurs dans les équations (4 *a*), (4 *b*) on trouvera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k\frac{\partial f}{\partial t} + \alpha f = 0,$$

$$(5\,a) \qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \alpha u_1 + b^2\frac{\partial V_1}{\partial \zeta} - c^2\frac{\partial W_1}{\partial \eta}, \\ 0 &= \alpha v_1 + c^2\frac{\partial W_1}{\partial \xi} - a^2\frac{\partial U_1}{\partial \zeta}, \\ 0 &= \alpha w_1 + a^2\frac{\partial U_1}{\partial \eta} - b^2\frac{\partial V_1}{c\xi}, \end{aligned}\right.$$

$$(5\,b) \qquad \left\{\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \frac{\partial v_1}{\partial \zeta}, \\ V_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\ W_1 &= \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \end{aligned}\right.$$

où α est une quantité constante.

Même les équations de LAMÉ se réduisent à la forme précédente en posant

$$u = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,u_1,$$

$$v = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,v_1,$$

$$w = e^{\sqrt{-\alpha}\,t}\,w_1.$$

Particularisons les fonctions arbitraires qui paraissent dans les intégrales de LAMÉ en prenant

$$f(x) = \bar{f}(x) = e^{\sqrt{-\alpha}\,x},$$

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) = 0$$

on trouvera, après avoir divisé par $e^{\sqrt{-\alpha}\,t}$, des intégrales des équations (5 *a*), (5 *b*) et par là on aura des intégrales des équations (4 *a*), (4 *b*). On pourra appliquer évidemment le même procédé aux intégrales trouvées dans le art. 8 et par une méthode bien connue on obtiendra ainsi l'intégration des équations (4 *a*), (4 *b*).

Les résultats qu'on a trouvés dans les articles précédents peuvent donc s'étendre aisément aux équations de l'électrodynamique lorsque les rapports k_1, k_2, k_3 sont egaux.

XXXIV.

SULLE VIBRAZIONI LUMINOSE NEI MEZZI ISOTROPI

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5, vol. I_2, 1892_2, pp. 161–170.

1. Nel 1882 Kirchhoff [1], mediante una ingegnosa applicazione del teorema di GREEN, ha stabilito una formula, ormai celebre, che comprende in sé il principio di HUYGHENS, e la cui importanza risulta principalmente dalla applicazione fattane alla teoria della diffrazione.

È ben noto che il processo tenuto da Kirchhoff ha la sua base nella esistenza dell'integrale di EULERO

$$\frac{f(r+at)}{r}$$

della equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \tag{1}$$

in cui f è una funzione arbitraria ed

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nel caso delle onde cilindriche, la equazione (1) si riduce all'altra

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) \tag{1'}$$

della quale manca un integrale analogo a quello di EULERO, cioè un integrale avente la forma

$$\lambda f(r + at) \tag{2}$$

in cui

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e λ è una funzione della sola r.

Se si cercano anzi i casi nei quali l'equazione generale

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \sum_1^m{}_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} \tag{3}$$

ammette degli integrali aventi la forma

$$\lambda f(r + at) \tag{4}$$

in cui

$$r = \left(\sum_1^m x_i^2\right)^{1/2}$$

(1) *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, « Sitzb. d. Berliner Ak. », 1882.

e λ è funzione della sola r, si trova che essi si limitano a due soli; a quello cioè in cui $m = 1$, ed all'altro in cui $m = 3$; al primo dei quali corrisponde il noto integrale di D'ALEMBERT; al secondo quello di EULERO [2].

Ordinariamente quindi non si stabilisce pel caso delle onde cilindriche una formula simile a quella di KIRCHHOFF, né si estende questa medesima formula al caso generale della equazione (3).

2. L'equazione (1'), ed in generale l'equazione (3), ammettono degli integrali aventi la forma (4), quando si esclude la condizione che λ debba esser funzione della sola r, ma si può provare che (all'infuori dei soliti due casi in cui $m = 1$, $m = 3$) λ risulta una funzione polidroma, o una funzione che possiede delle singolarità, oltre che nel punto $r = 0$, anche in altri punti.

Si consideri infatti l'equazione (1'). Essa ammette gl'integrali

$$(5) \qquad \frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{r}} f(r + at) \quad , \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \alpha}{\sqrt{r}} f(r + at),$$

essendo

$$x = r \cos \alpha \quad , \quad y = r \operatorname{sen} \alpha,$$

i quali sono manifestamente polidromi.

Partendo da questi integrali è possibile procedere innanzi nel modo tenuto da KIRCHHOFF; ma è necessario fare una osservazione, la quale muta in modo sostanziale il risultato a cui si giunge.

Avendo infatti presente il metodo tenuto da KIRCHHOFF, si ricorderà che allorquando si applica il lemma di GREEN ad un campo nel cui interno si trova il punto $r = 0$, si deve escludere il punto stesso nel quale l'integrale di EULERO diviene infinito. Allorché si applica il lemma di GREEN per due variabili facendo uso di una delle funzioni (5) è necessario, non solo di escludere dal campo che si considera il punto $r = 0$, ma anche di eseguire un taglio che da questo punto vada al contorno del campo stesso in modo da impedire che si possa girare attorno al punto $r = 0$ che costituisce il punto di diramazione di ognuna delle due funzioni (5).

Si vede quindi che le formule, che in tal modo si trovano, restano affette da termini che non compariscono in quella di KIRCHHOFF. Dunque, benché ottenute con un uguale procedimento, le formole stesse non possono usarsi per ricavare il valore di un integrale regolare V della (1') in un punto, mediante i valori di V e delle sue derivate nei punti del contorno di un campo che racchiude il punto stesso.

Noi non staremo ad esporre i risultati che si trovano in questo modo, giacché procederemo per altra via per ottenere delle formule analoghe a quella di KIRCHHOFF nel caso delle onde cilindriche, e per stabilire quindi delle formule generali da cui queste e quella di KIRCHHOFF possono ricavarsi come casi particolari.

(2) DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique.* Cours professé en 1890–91. Tome second, livre II, chap. VIII.

3. Per semplicità supponiamo nella (1') $a = 1$, cioè di aver scelto le unità in modo che la velocità di propagazione delle onde sia eguale ad 1, il che è evidentemente sempre possibile.

Supponendo V funzione di r e di t soltanto, potremo scrivere la (1')

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Consideriamo gli integrali di questa equazione aventi la forma

$$\text{(I)} \qquad V_1 = \int_r^\infty f(t+u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}},$$

$$\text{(II)} \qquad V_2 = \int_r^\infty f(t-u) \frac{du}{\sqrt{u^2 - r^2}},$$

$$\text{(III)} \qquad V_3 = \int_{-r}^{r} f(t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}},$$

$$\text{(IV)} \qquad V_4 = \int_{-r}^{r} f(t+u) \log\left(\frac{r^2 - u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2 - u^2}}$$

i quali possono scriversi ancora

$$\text{(I')} \qquad V_1 = \int_0^\infty f(t + r\cosh u)\, du$$

$$\text{(II')} \qquad V_2 = \int_0^\infty f(t - r\cosh u)\, du$$

$$\text{(III')} \qquad V_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t + r \operatorname{sen} u)\, du$$

$$\text{(IV')} \qquad V_4 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t + r \operatorname{sen} u) \log(r\cos^2 u)\, du.$$

Affinché l'integrale (I) sia finito, supporremo che la funzione arbitraria $f(l)$, per valori dell'argomento superiori ad un certo limite, si annulli, mentre, affinché l'integrale (II) sia finito, ammetteremo che $f(l)$ si annulli per valori dell'argomento inferiori ad un certo limite. Gli integrali (III') e (IV') non sono altro che quelli dati da POISSON [3].

È facile dimostrare che se f è una funzione regolare, l'integrale V_3 è pure regolare, mentre gli integrali V_1, V_2, V_4 si conservano regolari pei valori di r diversi da zero, e si ha:

(3) « Journal de l'École Polytechnique », XIX Cahier.

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_1\right)=-f(t)\quad,\quad\lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_1}{\partial r}\right)=-f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_2\right)=-f(t)\quad,\quad\lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)=-f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left(\frac{1}{\log r}V_4\right)=\pi f(t)\quad,\quad\lim_{r=0}\left(r\frac{\partial V_4}{\partial r}\right)=\pi f(t).$$

4. Ciò premesso indichiamo succintamente la via che può seguirsi per stabilire le formule a cui alludevamo precedentemente.

Siano $\psi(x, y, t)$, $\chi(x, y, t)$ due integrali della (1′) regolari entro un campo σ a due dimensioni limitato da un contorno s. Per il lemma di GREEN avremo

$$\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\chi-\frac{\partial\chi}{\partial n}\psi\right)ds=\int_\sigma(\psi\Delta^2\chi-\chi\Delta^2\psi)\,d\sigma=\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\sigma$$

essendo n la normale ad s diretta verso l'interno di σ. Prendiamo $\chi=V_1$, in cui r denota la distanza contata da un punto x, y, fisso nell'interno di σ. Onde poter applicare l'equazione precedente, bisognerà escludere il punto x, y ove V_1 cessa di esser regolare. Questa esclusione potrà farsi mediante un piccolo cerchio col centro nel punto stesso. Facendo decrescere indefinitamente il raggio di questo cerchio, otterremo al limite

$$2\pi\psi(x, y, t)f(t)+\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}V_1-\frac{\partial V_1}{\partial n}\psi\right)ds=\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left(\psi\frac{\partial V_1}{\partial t}-V_1\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\sigma.$$

Si supponga ora che la funzione ψ si annulli in tutti i punti del campo σ per valori di t inferiori ad un certo limite. Per l'ipotesi fatta circa $f(t)$, avremo che V_1 si annullerà per valori di t superiori ad un certo limite; quindi moltiplicando l'equazione precedente per dt e integrando fra $-\infty$ e ∞ otterremo

$$\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\psi(x, y, t)f(t)\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_s\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}V_1-\frac{\partial V_1}{\partial n}\psi\right)dz=0.$$

Poniamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=\psi_1(\xi, \eta, t)\quad,\quad\frac{\partial\psi}{\partial t}=\psi_2(\xi, \eta, t)$$

denotando con ξ, η le coordinate dei punti del contorno s; allora, con facili trasformazioni di calcolo, la formola precedente può scriversi

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\psi(x, y, t)f(t)dt+\int_s ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\psi_1(\xi, \eta, t)\int_r f(t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{-\infty}^{\infty}dt\,\psi_2(\xi, \eta, t)\int_r f(t+u)\frac{u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Possiamo ora stabilire la formula di trasformazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(t)\,dt\int_{r}^{\infty}f(t+u)\,\mu(u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt\int_{r}^{\infty}\lambda(t-u)\,\mu(u)\,du.$$

Applicandola alla equazione precedente essa diviene

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dt\left[2\pi\psi(x,y,t)+\int_{s}ds\left\{\int_{r}^{\infty}\psi_1(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{r}^{\infty}\psi_2(\xi,\eta,t-u)\frac{udu}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}\right]=0$$

e, siccome $f(t)$ è una funzione arbitraria, così avremo

$$2\pi\psi(x,y,t)+\int_{s}ds\left\{\int_{r}^{\infty}\psi_1(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\int_{r}^{\infty}\psi_2(\xi,\eta,t-u)\frac{udu}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}=0.$$

Usiamo i due simboli $\partial/\partial n$ e $\delta/\delta n$ per rappresentare le derivate rispetto ad n di una funzione di ξ,η,r prese supponendo rispettivamente r costante e ξ,η costanti; cioè

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial n}$$

$$\frac{\delta}{\delta n}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}.$$

Allora la formula precedente si potrà scrivere

$$\text{(A)}\qquad 2\pi\psi(x,y,t)=\int_{s}ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_{r}^{\infty}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\int_{r}^{\infty}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

È evidente la analogia che passa fra questa formula e quella di KIRCHHOFF, ponendo mente all'integrale (I) da cui siamo partiti, il quale corrisponde alla linea luminosa, come quello di EULERO corrisponde al centro luminoso.

Invece di far uso dell'integrale (I), possiamo impiegare l'integrale (II). Supponendo ora che la funzione $\psi(x,y,t)$ per valori di t superiori ad un certo limite si annulli, otteniamo la formula

$$\text{(B)}\qquad 2\pi\psi(x,y,t)=\int_{s}ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_{r}^{\infty}\psi(\xi,\eta,t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial n}\int_{r}^{\infty}\psi(\xi,\eta,t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Partiamo dall'integrale (III) lasciando da parte le ipotesi fatte precedentemente riguardo ai valori di $\psi(x, y, t)$ per valori di t inferiori o superiori a certi limiti.

Avremo allora

$$\text{(C)} \qquad 0 = \int_s ds \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} - \frac{\partial}{\partial n} \int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t+u) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right\}.$$

Finalmente partiamo dall'integrale (IV), pure tralasciando le ipotesi circa ai valori di ψ per t superiore o inferiore a certi limiti. Si troverà

$$\text{(D)} \qquad 2\pi^2 \psi(x, y, t) = \int_s ds \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\delta n} \left(\int_{-r}^{r} \psi(\xi, \eta, t-u) \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right) \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \right) \right\}.$$

5. Abbiamo così ottenuto quattro formule diverse; per vederne chiaramente il significato, immaginiamo che t rappresenti una terza coordinata, per modo che $\psi(x, y, t)$ possa considerarsi come una funzione dei punti di uno spazio a tre dimensioni riferito al sistema di assi cartesiani x, y, t.

Supponendo s costituita da una sola linea, immaginiamo un cilindro avente per direttrice questa linea e le cui generatrici siano parallele all'asse t. Si prenda un punto x, y, t nell'interno di questo cilindro e si conduca per esso un piano parallelo al piano xy. Quindi su ogni generatrice, al di sopra e al disotto di questo piano, si tagliano due segmenti uguali alla distanza del punto x, y, t dalla generatrice stessa.

Gli estremi di questi segmenti costituiranno due linee L_1, L_2, le quali divideranno il cilindro in tre parti distinte. La formola (D) dà il valore di $\psi(x, y, t)$ espresso mediante i valori di ψ e di $\partial\psi/\partial n$ nei punti del cilindro compresi fra le due curve L_1, L_2, mentre ciascuna delle formule (A), (B) dà il valore di $\psi(x, y, t)$ espresso mediante i valori di ψ e di $\partial\psi/\partial n$ in una delle due altre regioni in cui il cilindro è stato diviso.

Finalmente la formula (C) stabilisce una relazione che è la estensione di quella ben nota

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0,$$

a cui soddisfano le derivate normali lungo un contorno s, di una funzione armonica V regolare entro lo spazio racchiuso da s.

Quando si supponga che le vibrazioni siano armoniche le formule (C) e (D) conducono a delle formule date da WEBER [(4)], le quali hanno rispetto

(4) «Mathematische Annalen», vol. I, 1869, p. 1.

alle (C) e (D) stesse la medesima relazione che una ben nota formula di HELMHOLTZ [5] ha con quella di KIRCHHOFF.

6. Esponiamo ora in poche parole la estensione alla equazione generale (3). È necessario distinguere due casi, secondoché m è dispari o pari. Nel primo caso posto $m = 2p + 1$, abbiamo che

$$W = \sum_{1}^{p} {}_h (-2)^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!(h-1)!} \frac{f^{(h-1)}(r \pm t)}{r^{2p-h}}$$

in cui f è una funzione arbitraria e

$$f', f'', \cdots f^{(p-1)}$$

ne sono le derivate, è un integrale della equazione differenziale (3).

Applicando ora il procedimento di KIRCHHOFF si giunge a stabilire il teorema seguente:

Sia $\psi(x_1 \cdots x_m t)$ *un integrale regolare della* (3) *ed* S_m *un campo a* m *dimensioni limitato dal contorno* S_{m-1} *e che racchiude il punto* $x_1 x_2 \cdots x_m$. *Poniamo*

$$\psi_h = \frac{\partial^h \psi}{\partial t^h}$$

e chiamiamo $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_m$ *le coordinate dei punti del contorno* S_{m-1}, n *la sua normale. Avremo allora, se* $m = 2p + 1$,

$$(\mathrm{E}) \qquad (4\pi)^p \psi(x_1 \cdots x_m, t) = \int_{S_{2p}} \sum_{1}^{p} {}_h 2^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!\,h!} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \left[\psi_{h-1} \frac{(\xi_1 \cdots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\psi_{h-1}(\xi_1 \cdots \xi_m, t-r)}{r^{2p-h}} \right] \right\} dS_{2p}.$$

I due simboli di derivazione rispetto alla n hanno l'analogo significato che avevano nelle formule precedenti, cioè

$$\frac{\delta}{\delta n} = \sum_{1}^{m} {}_h \frac{\partial}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial n} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Nel caso di m pari la formula precedente non è evidentemente applicabile. Stabiliremo ora delle formule le quali valgono tanto se m è pari, quanto se è dispari.

A tal fine prenderemo gli integrali

$$(\mathrm{I}_a) \qquad W_1 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^\infty f^{(m-2)}(t+u)(u^2 - r^2)^{\frac{m-3}{2}} du$$

(5) *Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden.* « Wiss. Abhandlungen » vol. I.

$$(\mathrm{II}_a) \qquad W_2 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} f^{(m-2)}(t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du$$

$$(\mathrm{III}_a) \qquad W_3 = \frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^{r} f(t+u)\,(r^2-u^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du$$

della equazione (3) in cui f denota una funzione arbitraria. Soltanto ammetteremo, affinché il primo integrale sia finito, che f si annulli per valori di f superiori ad un certo limite, e perché il secondo integrale sia finito, supporremo che f si annulli per valori di t inferiori ad un certo limite.

Applicando ora un metodo analogo a quello seguito nel § 4 si giunge al teorema seguente:

Restando le stesse condizioni poste nel teorema precedente, solo non facendo più l'ipotesi che m sia dispari, si ha

$$(\mathrm{A}_a) \qquad 2\pi^{\frac{1}{2}m} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)} \psi(x_1 \cdots x_m, t)$$

$$= \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} \psi_{m-2}(\xi_1 \cdots \xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} \psi_{m-2}(\xi_1 \cdots \xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \right] \right\}$$

$$(\mathrm{B}_a) \qquad 2\pi^{\frac{1}{2}m} \frac{\Gamma(m-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)} \psi(x_1 \cdots x_m, t)$$

$$= \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} \psi_{m-2}(\xi_1 \cdots \xi_m, t+u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_r^{\infty} \psi_{m-2}(\xi_1 \cdots \xi_m, t+u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \right] \right\}$$

$$(\mathrm{C}_a) \qquad 0 = \int_{S_{m-1}} dS_{m-1} \left\{ \frac{\delta}{\delta n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^{r} \psi(\xi_1 \cdots \xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,du \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r^{m-2}} \int_{-r}^{r} \psi(\xi_1 \cdots \xi_m, t-u)\,(u^2-r^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dS \right] \right\}$$

nella prima delle quali si suppone che ψ si annulli per valori di t inferiori ad un certo limite, e nella seconda si suppone invece che ψ si annulli per valori di t superiori ad un certo limite. La formula (A_a) si riduce alla (E) nel caso di m dispari; soltanto è da osservare che nello stabilire la (E) non si è fatta alcuna ipotesi circa ai valori di ψ per valori di t inferiori ad un certo limite.

7. Nel caso di m pari, la equazione (3) ammette anche un quarto integrale oltre (I_a), (II_a), (III_a) da cui può ricavarsi una formula analoga alla (D). Denotiamo col simbolo ∇ la operazione $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Allora questo quarto integrale potrà scriversi

$$(IV_a) \qquad W_4 = \nabla^{p-1}\int_{-r}^{r} f(t+u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\cdot$$

Si riconosce facilmente che

$$\lim_{r=0}\{r^{3p-2}\,W_4\} = \pi(-2)^{p-2}(p-2)!\,f(t)$$

$$\lim_{r=0}\left\{r^{2p-1}\frac{\partial W_4}{\partial r}\right\} = \pi(-2)^{p-1}(p-1)!\,f(t)$$

ed applicando un procedimento simile a quello seguito nei paragrafi precedenti si giunge al seguente teorema:

Restando le stesse le condizioni del 1° *teorema del* § 6, *supponendo soltanto che m, invece di esser dispari, sia pari ed eguale a $2p$, si ha*

$$(D_a) \qquad 2^p(-\pi)^{p+1}\psi(x_1, x_2\cdots x_{2p}, t)$$

$$= \int_{S_{2p-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial n}\nabla^{p-1}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\delta}{\delta n}\nabla^{p-1}\int_{-r}^{r}\psi(\xi_1\cdots\xi_{2p}, t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\,dS_{2p-1}\right.\,.$$

XXXV.

SULLE ONDE CILINDRICHE NEI MEZZI ISOTROPI

« Rend. Lincei » ser. 5, vol. I_2, 1892_2, pp. 265–277.

1. In una Nota presentata nel luglio scorso all'Accademia (*), ho stabilito per le onde cilindriche nei mezzi isotropi alcune formule, le quali esprimono analiticamente un principio analogo a quello che KIRCHHOFF ha dato per precisare e per estendere il principio di HUYGHENS.

Queste formule sono le seguenti:

$$
(\mathrm{I})\quad\left\{
\begin{aligned}
&(1)\quad \psi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{\infty}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial n}\int_r^{\infty}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}\\
&(2)\quad \psi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{\infty}\psi(\xi,\eta,t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{\partial}{\partial n}\int_r^{\infty}\psi(\xi,\eta,t+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}\\
&(3)\quad \psi(x,y,t)=\frac{1}{2\pi^2}\int_s ds\left\{\frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^{r}\psi(\xi,\eta,t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^{r}\psi(\xi,\eta,t-u)\log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right\}\\
&(4)\qquad\quad 0\quad=\quad\int_s ds\left\{\frac{\partial}{\partial n}\int_{-r}^{r}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{\delta}{\delta n}\int_{-r}^{r}\psi(\xi,\eta,t-u)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}}\right\}
\end{aligned}
\right.
$$

(*) In questo volume: XXXIV, pp. 559–567 [N.d.R.].

in cui ψ denota un integrale della equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{5}$$

regolare entro il campo σ limitato dal contorno s.

Per la validità della prima formula abbiamo supposto che ψ si annullasse per valori di t sufficientemente piccoli, mentreché, onde la seconda formula fosse valida, abbiamo supposto ψ nulla per valori di t superiori ad un certo limite [1].

Nella Nota citata ho esposto come possono interpretarsi le dette formule onde vederne chiaramente il significato analitico (vedi § 5).

L'integrale generale della equazione (5) sotto la forma data da POISSON o prima ancora di lui da PARSEVAL, costituisce una formula essenzialmente distinta dalle precedenti. Ciò si riconosce facilmente quando si osserva che, mentre per mezzo di una qualunque delle prime tre formule (I) si ottiene il valore di ψ in un punto interno al campo σ espressa mediante i valori di ψ e delle sue derivate al contorno s, la formula di POISSON dà il valore di $\psi(x, y, t)$ quando sono noti quelli di ψ e della sua derivata rispetto a t per $t = 0$ in tutti i punti di un cerchio di raggio eguale a t col centro nel punto x, y. La formula di POISSON può scriversi infatti, mediante una semplice trasformazione,

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^t \psi(x + z\cos\varphi, y + z \operatorname{sen}\varphi, 0) \frac{z\,dz}{\sqrt{t^2 - z^2}} \tag{6}$$
$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^t \psi_2(x + z\cos\varphi, y + z \operatorname{sen}\varphi, 0) \frac{z\,dz}{\sqrt{t^2 - z^2}}$$

in cui ψ_2 rappresenta la derivata di ψ rispetto a t.

Scopo della presente Nota è di collegare le due formule (1) e (2) con questa di POISSON. Stabilirò infatti una formula generale da cui le (1), (2) e (6) discendono come casi particolari.

Così avremo un nuovo procedimento per ottenere le dette formule, il quale è più semplice di quello esposto nella Nota citata per trovare le (1) e (2), ed è pure più breve e più diretto di quello ordinariamente seguìto per ottenere la formula di POISSON.

Con un metodo analogo troverò poi delle formule più generali delle (3) e (4).

2. Consideriamo x, y, t come le coordinate di un punto dello spazio riferito ad un sistema di assi cartesiani. Sia S un campo scelto in questo spazio, e limitato da un contorno Σ. Se ψ e χ sono due integrali della (5)

(1) Pel significato dei simboli $\frac{\delta}{\delta n}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ e per le altre notazioni mi riferisco a quanto fu detto nella Nota citata. È evidente che le condizioni poste per la validità degli integrali considerati sono sufficienti, non necessarie.

regolari entro S, avremo

$$(7)\qquad 0=\int_S \left\{\psi\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right)-\chi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\right\}dS$$

$$=-\int_\Sigma \left\{\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left.-\chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\Sigma$$

denotando con n la normale a Σ diretta verso l'interno di S.

Scegliamo il campo S nella maniera seguente. Si conduca per un punto x_1, y_1, t_1 come vertice un cono di rotazione C avente l'asse a parallelo all'asse t e per apertura 90°. Mediante una superficie σ si limiti entro il cono uno spazio adiacente al vertice, e si tolga dal solido così ottenuto lo spazio racchiuso entro un cilindro di rotazione c di raggio ε avente lo stesso asse del cono.

Otterremo in tal modo un solido S la cui sezione con un piano passante per a sarà rappresentata dalla fig. 1 o dalla fig. 2.

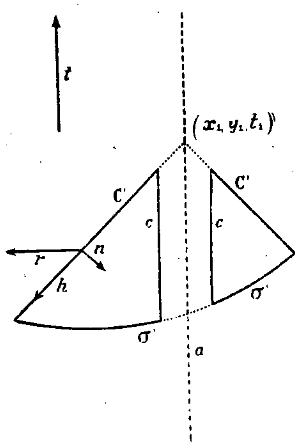


Fig. 1.

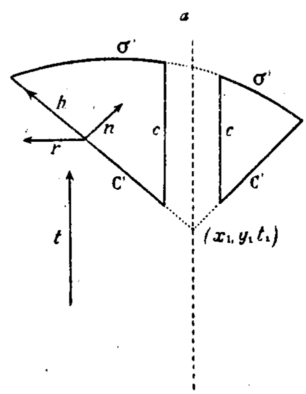


Fig. 2.

Questi due casi saranno caratterizzati dall'essere la coordinata t_1 maggiore o minore della coordinata t di ciascun punto di S.

Il contorno Σ di S sarà formato dalle tre superficie c, C', σ', essendo quest'ultime le porzioni residue di C e di σ, quando si tolgano quelle parti incluse nel cilindro c.

Chiamiamo r la distanza di un punto x, y, t dall'asse a, e h la generatrice che passa fra ciascun punto di C.

Sopra C avremo

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial h}+\frac{\partial\chi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial h}=\frac{\partial\chi}{\partial h}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial t}{\partial h}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial h}=\frac{\partial\psi}{\partial h}.$$

Sopra c avremo invece

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=-\frac{\partial\chi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}=-\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Quindi ponendo

$$\Omega=\int_{\sigma'}\left\{\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)-\chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma$$

potremo scrivere la formula (7) nella maniera seguente

$$\Omega=\int_{C'}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial h}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)dC-\int_{c}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc=0. \tag{8}$$

3. Prendiamo ora a considerare gli integrali della (5) i quali sono funzioni di $t/r=\theta$.

Ammesso ψ funzione della sola θ, la (5) si trasforma in

$$(1-\theta^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=0$$

e integrando avremo

$$\psi=\log\left(\theta+\sqrt{\theta^2-1}\right) \tag{9}$$

se $\theta>1$; e

$$\psi=\text{arco sen}\,\theta \tag{10}$$

se $\theta<1$.

4. Ciò premesso osserviamo che si potrà prendere nella (8)

$$\chi=\log\left(\frac{\pm(t_1-t)}{r}+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)$$

avvertendo di prendere il segno superiore o il segno inferiore secondoché siamo nel primo o nel secondo caso, affinché la funzione risulti reale.

Ma sopra C abbiamo

$$\pm(t_1-t)=r,$$

quindi

$$\chi=0\quad,\quad\frac{\partial\chi}{\partial h}=0;$$

onde la (8) si riduce a

$$\int_c\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc=\Omega$$

ovvero

$$\int_c\left\{\psi\frac{\mp\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\log\left(\frac{\pm(t_1-t)}{\varepsilon}+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)^2-1}\right)\right\}dc=\Omega. \tag{11}$$

Facciamo tendere indefinitamente verso zero il raggio ε del cilindro c. Avremo

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_c\left\{\psi\frac{\mp\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{(t_1-t)^2-\varepsilon^2}}-\frac{\partial\psi}{\partial r}\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{\varepsilon}\right)^2-1}\right)\right\}dc$$

$$=\mp 2\pi\int_{t_0}^{t_1}\psi(x_1,y_1,t)\,dt\,,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\Omega=\int_\sigma\left\{\psi\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n}\pm\frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left.-\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma$$

chiamando t_0 la coordinata t del punto d'incontro dell'asse a colla superficie σ.

La formula (11) diviene quindi al limite

$$\mp 2\pi\int_{t_0}^{t_1}\psi(x_1,y_1,t)\,dt=\int_\sigma\left\{\psi\left(\frac{\mp 1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n}\pm\frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\right.$$

$$\left.-\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma.$$

Derivando rispetto a t_1 si otterrà

$$\psi(x_1,y_1,t_1)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\psi\left(\frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{t_1-t}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\frac{\partial r}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$\pm\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\left\{\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma.$$

Ora osserviamo che

$$\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)$$

è nullo lungo il contorno di σ, quindi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\left\{\log\left(\pm\left(\frac{t_1-t}{r}\right)+\sqrt{\left(\frac{t_1-t}{r}\right)^2-1}\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}d\sigma$$

$$=\pm\int_\sigma\frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

e perciò la formula precedente si potrà scrivere

$$\psi(x_1,y_1,t_1)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma\frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{t_1-t}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\,d\sigma \tag{12}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma.$$

È questa la formula generale a cui volevamo pervenire. Essa esprime $\psi(x_1 y_1 t_1)$ mediante i valori di ψ e delle sue derivate lungo la superficie σ.

5. Mostriamo ora che la formula di POISSON è un caso particolare della (12), come pure sono casi particolari della formula stessa le (1) e (2).

Si supponga dapprima che la superficie σ sia il piano xy.

Avremo allora che σ si ridurrà ad un cerchio di raggio $|t_1|$. Oltre a ciò si avrà sopra σ

$$\frac{\partial t}{\partial n} = \pm 1 \qquad \frac{\partial r}{\partial n} = 0;$$

per conseguenza la (12) diverrà

$$\psi(x_1, y_1, t_1) =$$

$$\pm \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - r^2}}\psi\, d\sigma \pm \frac{1}{2\pi}\int \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - r^2}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\sigma$$

che non è altro che la formula (6).

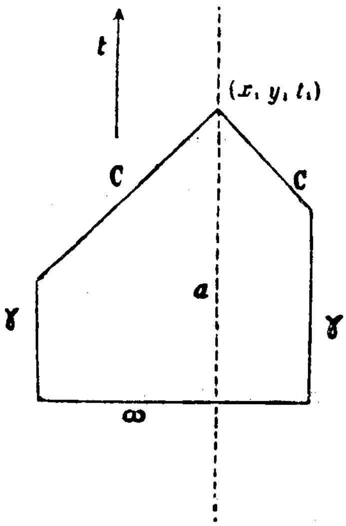


Fig. 3.

6. Si supponga ora di essere nel primo caso e che σ si riduca ad un cilindro γ colle generatrici parallele all'asse t, limitato da un piano ω normale alle generatrici stesse come lo indica la fig. 3 che rappresenta una sezione fatta con un piano passante per a. Inoltre si ammetta che la intersezione di σ col cono C appartenga al cilindro γ.

In tali ipotesi avremo sopra γ

$$\frac{\partial t}{\partial n} = 0$$

e sopra ω

$$t = \text{cost.} = t_0 \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0 \qquad \frac{\partial t}{\partial n} = 1.$$

Quindi chiamando s il contorno di ω, la (12) diverrà

$$(13) \qquad \psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\psi\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}}\frac{t - t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\psi\, d\gamma - \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\psi\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t_0)^2 - r^2}}\frac{\partial \psi}{\partial t}\, d\omega$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_s ds \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial n}\int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{t - t_1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}}\psi\, dt - \int_{t_0}^{t_1 - r} \frac{1}{\sqrt{(t_1 - t)^2 - r^2}}\frac{\partial \psi}{\partial n}\, dt \right\}.$$

Ponendo $t_1 - t = u$, abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_1-r} \frac{1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}} \frac{\partial\psi}{\partial n} dt = \int_r^{t_1-t_0} \frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} \psi_2(x\,,y\,,t_1-u) = \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_1-t_0} \psi(x\,,y\,,t_1-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_0}^{t_1-r} \frac{t-t_1}{\sqrt{(t_1-t)^2-r^2}}\psi\, dt = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_r^{t_1-t_0}\frac{-u\,du}{\sqrt{u^2-r^2}}\psi(x\,,y\,,t_1-u)$$

$$= \frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_1-t_0}\psi(x\,,y\,,t_1-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}$$

e per conseguenza la (13) potrà scriversi

$$(14)\qquad \psi(x_1\,,y_1\,,t_1) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}}\psi(x\,,y\,,t_0)\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}}\psi_2(x\,,y\,,t_0)\,du$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_1-t_0}\psi(x\,,y\,,t_1-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_1-t_0}\psi(x\,,y\,,t_1-u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

7. Supponiamo che σ si riduca ad un cilindro γ limitato da un piano ω e che la intersezione di σ con C appartenga *a* γ, ma ammettiamo di essere nel secondo caso come lo indica la fig. 4; allora, ripetendo un calcolo perfettamente analogo a quello fatto nel paragrafo precedente, si giunge alla formula

$$(15)\qquad \psi(x_1\,,y_1\,,t_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}}\psi(x\,,y\,,t_0)\,d\omega$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\omega \frac{1}{\sqrt{(t_1-t_0)^2-r^2}}\psi_2(x\,,y\,,t_0)\,d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_s ds\left\{\frac{\delta}{\delta n}\int_r^{t_0-t_1}\psi(x\,,y\,,t_1+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}} - \frac{\partial}{\partial n}\int_r^{t_0-t_1}\psi(x\,,y\,,t_1+u)\frac{du}{\sqrt{u^2-r^2}}\right\}.$$

Le formule (14) e (15) che abbiamo ora ottenute comprendono evidentemente le (1) e (2).

Supponiamo dapprima che per valori di t inferiori ad un certo limite, $\psi(x\,,y\,,t)$ si annulli; allora basterà prendere nella (14) $t_0 = -\infty$ perché essa si riduca alla (1).

Se ammettiamo poi che $\psi(x\,,y\,,t)$ sia eguale a 0 per valori di t sufficientemente grandi la (15) dà luogo alla (2) prendendo $t_0 = \infty$.

8. Passiamo ora a dare delle formule più generali delle (3) e (4) procedendo con un metodo analogo a quello seguito nei precedenti paragrafi.

A tal fine mediante una superficie σ limitiamo uno spazio esterno al cono C adiacente al vertice e togliamo da esso la porzione inclusa nel cilindro c di rotazione di raggio ε avente per asse a. Chiamiamo S il solido così ottenuto.

Il piano α avente per equazione $t = t_1$ divide ciascuna delle figure S, σ, c, C in due parti che distingueremo ponendo alla lettera corrispondente uno o due apici. Faremo la convenzione che i punti corrispondenti alle parti

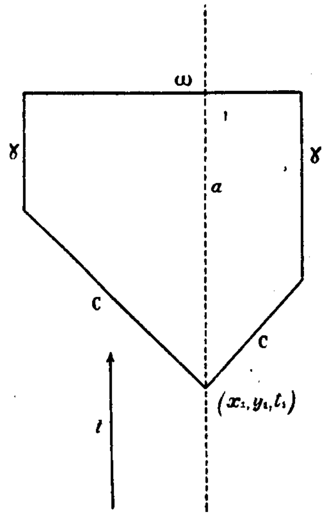


Fig. 4.

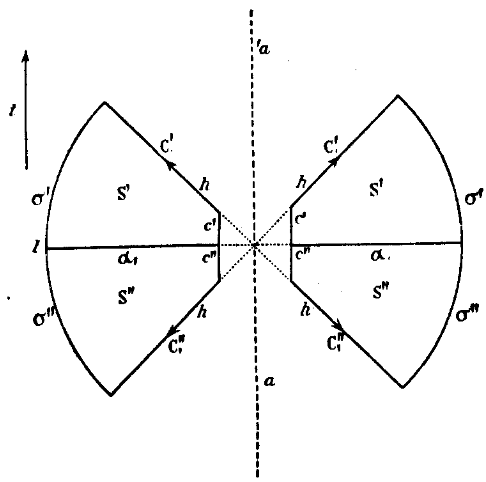


Fig. 5.

contrassegnate con un apice abbiano una coordinata t superiore a t_1; quelli corrispondenti alle parti contrassegnate con due apici abbiano una coordinata t inferiore a t_1 (2).

Ciò premesso la formula (7) applicata agli spazî S′ e S″ dà

$$(16)\quad 0 = \int_{\sigma'}\left[\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) - \chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right]d\sigma'$$

$$-\int_{C_1'}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial h} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)dC_1' - \int_{c'}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc' + \int_{\alpha_1}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\alpha_1,$$

$$(17)\quad 0 = \int_{\sigma''}\left[\psi\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) - \chi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right]d\sigma''$$

$$-\int_{C_1''}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial h} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial h}\right)dC_1'' - \int_{c''}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial r} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)dc'' - \int_{\alpha_1}\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)d\alpha_1,$$

chiamando C_1', C_1'', α_1 le parti residue di C', C'', α togliendo quelle incluse entro c.

(2) Vedi la fig. 5 che rappresenta una sezione di S eseguita con un piano passante per a.

Prendiamo ora nella (16)

$$\chi = \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r} - \frac{\pi}{2}$$

(Vedi § 3, form. (10)). Avremo sopra C'

$$\chi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \chi}{\partial h} = 0.$$

Quindi chiamando Ω' il primo integrale che comparisce nella (16) potremo scrivere questa equazione

$$0 = \Omega' + \int_{c'} \left[\psi \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - (t-t_1)^2}} \frac{t-t_1}{\varepsilon} + \left(\text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial \psi}{\partial r}\right] dc'$$

$$+ \int_{\alpha_1} \left(\psi \frac{1}{r} + \frac{\pi}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha_1 .$$

Facendo impiccolire indefinitamente ε, il secondo termine della espressione precedente tende verso zero, perciò al limite avremo

$$0 = \Omega' + \int_{\alpha} \left(\psi \frac{1}{r} + \frac{\pi}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha. \tag{16'}$$

Analogamente poniamo nella (17)

$$\chi = \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r} + \frac{\pi}{2}$$

si otterrà analogamente

$$0 = \Omega'' - \int_{\alpha} \left(\psi \frac{1}{r} - \frac{\pi}{2}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) d\alpha \tag{17'}$$

chiamando Ω'' il primo integrale che comparisce nella (17). Sommando membro a membro le equazioni (16') e (17') si otterrà

$$\Omega' + \Omega'' + \pi \int_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\alpha = 0, \tag{18}$$

nella quale potremo scrivere

$$\Omega' + \Omega'' = \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 - (t-t_1)^2}} \left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi \right. \tag{19}$$

$$\left. - \text{arco sen}\,\frac{t-t_1}{r}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} d\sigma$$

$$+ \frac{\pi}{2}\left\{\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma' - \int_{\sigma''}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma''\right\}.$$

Osserviamo ora che la (18) vale comunque si prenda t_1. Derivandola rispetto a t_1 otterremo dunque

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\Omega' + \Omega'') + \pi \frac{\partial}{\partial t_1}\int_{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} d\alpha = 0. \tag{20}$$

Ma, come risulta facilmente,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial t}\,d\alpha = \int_l \frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial n}\,\frac{dl}{\operatorname{sen}(\widehat{tn})} + \int_\alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\alpha$$

denotando con l la intersezione di σ con α.

Tenendo presente la (19) avremo poi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\Omega' + \Omega'') = -\pi\int_l \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}(\widehat{tn})}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{2}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\,d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Perciò la (20) si scriverà

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\,d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$+ \pi\left\{\int_l \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}(\widehat{tn})} + \int_\alpha \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,d\alpha\right\} = 0.$$

Abbiamo

$$(22)\quad \frac{\partial x}{\partial n}\,\frac{1}{\operatorname{sen}(tn)} = \frac{\cos nx}{\operatorname{sen}(tn)} = \cos \nu x = \frac{\partial x}{\partial \nu}\,;\ \frac{\partial y}{\partial n}\,\frac{1}{\operatorname{sen}(tn)} = \frac{\cos ny}{\operatorname{sen}(tn)} = \cos \nu y = \frac{\partial y}{\partial \nu}$$

essendo ν la normale ad l situata nel piano α, diretta verso l'interno di α. Tenendo conto della relazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

l'ultimo termine della (21) si scriverà

$$\pi\left\{\int_l \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\,dl + \int_\alpha\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)d\alpha\right\}$$

che per il lemma di GREEN sappiamo essere eguale a zero. Otteniamo dunque la formula

$$(23)\qquad \frac{\partial}{\partial t_1}\int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\,d\sigma$$

$$+ \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

9. Poniamo

$$\int_0^\theta \log(1-\theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} = f(\theta).$$

Si verifica facilmente che

$$\chi_1 = \int_0^{t-t_1} \log\left(\frac{r^2-u^2}{r}\right)\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = f\left(\frac{t-t_1}{r}\right) + \log r \cdot \operatorname{arco\,sen}\frac{t-t_1}{r}$$

soddisfa l'equazione (5). Quindi potremo prendere nella (16)

$$\chi = \chi_1 - f(1) - \frac{\pi}{2}\log r.$$

Poiché χ risulta nullo sopra C', così nella (16) sparirà il secondo integrale. Facendo impiccolire indefinitamente ε, il terzo integrale tenderà verso zero; quindi chiamando Π' il primo integrale, avremo

$$(16'') \qquad \Pi' + \int_\alpha \left[\frac{\log r}{r}\psi + \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] d\alpha = 0.$$

Analogamente prendendo nella (17)

$$\chi = \chi_1 + f(1) + \frac{\pi}{2}\log r$$

e chiamando Π'' il primo integrale otterremo

$$\Pi'' - \int_\alpha \left[\frac{\log r}{r}\psi - \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\right] d\alpha = 0,$$

onde sommando questa equazione membro a membro colle (16'') risulterà

$$(24) \qquad \Pi' + \Pi'' + 2\int_\alpha \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\alpha = 0.$$

Ma questa eguaglianza vale qualunque sia t_1; perciò derivando rapporto a t_1, si avrà

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial t_1}(\Pi' + \Pi'') + 2\frac{\partial}{\partial t_1}\int_\alpha \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}\, d\alpha = 0.$$

Abbiamo ora

$$\begin{aligned}
\Pi' + \Pi'' = \int_\alpha \Bigg\{ &\left[\log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\operatorname{arco\,sen}\frac{t-t_1}{r}\right]\psi \\
&- \left[f\left(\frac{t-t_1}{r}\right) + \log r \operatorname{arco\,sen}\frac{t-t_1}{r}\right]\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\Bigg\} d\sigma \\
&+ \frac{\pi}{2}\left\{\int_{\sigma'} \psi\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma' - \int_{\sigma''} \psi\frac{\partial \log r}{\partial n}\, d\sigma''\right\} \\
&+ \int_{\sigma'} \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma' \\
&- \int_{\sigma''} \left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right) d\sigma'';
\end{aligned}$$

quindi derivando otterremo

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\Pi' + \Pi'') = \frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$-\pi\int\limits_l \psi\frac{\partial \log r}{\partial n}\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)} - 2\int\limits_l\left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)}.$$

Inoltre si ha

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\alpha\left(f(1) + \frac{\pi}{2}\log r\right)\frac{\partial\psi}{\partial t}d\alpha = f(1)\left\{\int\limits_\alpha \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}\frac{dl}{\operatorname{sen}(tn)} + \int\limits_\alpha\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}d\alpha\right\}$$

$$+\frac{\pi}{2}\left\{\int\limits_l \log r\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n}\frac{ds}{\operatorname{sen}(tn)} + \int\limits_\alpha \log r\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}d\alpha\right\}.$$

Avuto riguardo alle relazioni (22) ed al lemma di GREEN, la (25) potrà quindi scriversi

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma \tag{26}$$

$$+\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi\, d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma$$

$$+\pi\left\{\int\limits_l\left(\log r\frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi\frac{\partial\log r}{\partial\nu}\right)dl + \int\limits_\alpha \log r\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)d\alpha\right\} = 0.$$

Ma pel teorema di GREEN, il termine scritto nell'ultima linea è eguale a $2\pi^2\psi(x_1, y_1, t_1)$; per conseguenza otteniamo finalmente la formula

$$-2\pi^2\psi(x_1, y_1, t_1) = \frac{\partial}{\partial t_1}\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial t}{\partial n} + \frac{t-t_1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\right)\psi\, d\sigma \tag{27}$$

$$+\int\limits_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\psi\, d\sigma$$

$$+\int\limits_\sigma \log\left(\frac{r^2-(t-t_1)^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{r^2-(t-t_1)^2}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Supponendo che la superficie σ si riduca ad una superficie cilindrica avente le generatrici parallele all'asse t le due formule (27) e (23) si riducono immediatamente alle (3) e (4).

XXXVI.

SUL PRINCIPIO DI HUYGHENS

«Nuovo Cimento» ser. 3ª, vol. XXXI, 1892, pp. 244–255; vol. XXXII, 1892, pp. 59–65; vol. XXXIII, 1893, pp. 32–36 e pp. 71–77.

Avendo la Direzione di questo giornale desiderato un resoconto delle pubblicazioni di KIRCHHOFF, BELTRAMI, POINCARÈ, uscite recentemente, nelle quali si tratta del principio di HUYGHENS, pubblico la seguente lezione di un corso fatto in quest'anno sulla elasticità e l'ottica, la quale riassume i detti lavori. Per norma dei lettori, osservo che la presente lezione faceva parte del capitolo sulle vibrazioni dei fluidi elastici, seguiva la teoria delle onde piane e sferiche, ed era premessa al capitolo in cui doveva esporsi la teoria di HELMHOLTZ, sui tubi sonori. L'applicazione all'ottica dei risultati ottenuti derivava immediatamente dalla dimostrazione che anche le vibrazioni trasversali nei mezzi isotropi dipendono dalla equazione differenziale (1).

Prof. VITO VOLTERRA.

1. L'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \theta \tag{1}$$

a cui soddisfano il potenziale di velocità ed il potenziale degli spostamenti di un fluido elastico vibrante, ammette l'integrale trovato da EULERO

$$\theta = \frac{f(r+at) + \varphi(r-at)}{r}$$

essendo $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ e denotando con f e φ due funzioni arbitrarie. Questo integrale corrisponde ad onde sferiche progressive e regressive il cui centro è il punto $x_0\, y_0\, z_0$, le quali si propagano colla velocità a.

Cambiando il centro e la funzione arbitraria φ, otterremo infiniti integrali particolari della (1), e siccome questa equazione è lineare, così potremo avere un nuovo integrale sommando un numero qualunque di queste soluzioni particolari. Si avrà dunque come integrale della (1)

$$\theta = \sum_1^n{}_i \frac{\varphi_i(r_i - at)}{r_i} \tag{2}$$

essendo $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$ e rappresentando con φ_i delle funzioni arbitrarie. Se queste funzioni saranno regolari, θ e le sue derivate non avranno delle singolarità che nei centri $x_i\, y_i\, z_i$.

Consideriamo il caso di due soli centri A, B. Siano $x_1 y_1 z_1$ le coordinate di A, e si denoti con s_1 il segmento AB, con α, β, γ i suoi coseni di direzione.

Le coordinate di B saranno allora

$$x_2 = x_1 + \alpha s_1 \quad , \quad y_2 = y_1 + \beta s_1 \quad , \quad z_2 = z_1 + \gamma s_1$$

quindi

$$\theta = \frac{\varphi_1 (r_1 - at)}{r_1} + \frac{\varphi_2 (r_2 - at)}{r_2} .$$

Si prenda

$$-\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\varphi}{s_1} .$$

Avremo

$$\theta = \frac{1}{s_1} \left[\frac{\varphi (r_2 - at)}{r_2} - \frac{\varphi (r_1 - at)}{r_1} \right] .$$

Facciamo ora avvicinare indefinitamente il punto B al punto A diminuendo s_1 e conservando costanti α, β, γ. Otterremo

$$\theta_1 = \lim_{s_1 = 0} \theta = \lim_{s_1 = 0} \frac{1}{s_1} \left[\frac{\varphi (r_2 - at)}{r_2} - \frac{\varphi (r_1 - at)}{r_1} \right] = \frac{d}{ds_1} \frac{\varphi (r_1 - at)}{r_1}$$

$$= \left[\frac{\varphi' (r_1 - at)}{r_1} - \frac{\varphi (r_1 - at)}{r_1^2} \right] \left[\frac{(x_1 - x) \alpha + (y_1 - y) \beta + (z_1 - z) \gamma}{r_1} \right] .$$

Si trova in tal modo un nuovo integrale della equazione (1). Se esaminiamo il moto corrispondente al potenziale di velocità θ_1, si vede facilmente che esso è un movimento che si propaga per onde sferiche il cui centro è il punto $x_1 y_1 z_1$. Nello stesso modo calcolando

$$\theta_2 = \frac{d\theta_1}{ds_2}$$

essendo s_2 una direzione eguale o diversa da s_1, otterremo un nuovo integrale della equazione il quale corrisponderà ad un movimento che esso pure si propaga dallo stesso centro per onde sferiche. Si vede dunque che può ottenersi una generalizzazione dei moti che si propagano per onde sferiche prendendo per potenziale di velocità

$$\theta_p = \frac{d^p}{ds_1 \, ds_2 \cdots ds_p} \theta$$

essendo $\theta = \varphi (r_1 - at)/r_1$, ed $s_1, s_2 \cdots s_p$ p direzioni arbitrarie. Se ammettiamo la funzione φ regolare, avremo che θ_p sarà una funzione regolare in tutto lo spazio, escluso il punto $r_1 = 0$. Seguiteremo a chiamare questo punto il centro delle onde sferiche, senonché lo diremo un *centro multiplo* di ordine p, per distinguere il caso in cui il potenziale di velocità è θ, e in cui diremo che il punto $r_1 = 0$ è un *centro semplice*. Un centro multiplo è caratterizzato non solo dalla sua posizione, ma anche dalle p direzioni $s_1 s_2 \cdots s_p$. In particolare un centro doppio sarà caratterizzato dalla sua posizione e dalla direzione s_1 secondo la quale si sono avvicinati indefinitamente i due centri semplici che lo costituiscono.

2. Nella formula (2) distinguiamo la funzione arbitraria corrispondente al centro $x_i \, y_i \, z_i$, scrivendola

$$\varphi_i (r_i - at) = \varphi (x_i , y_i , z_i , r_i - at).$$

Avremo allora

$$\theta = \sum_1^n {}_i \frac{\varphi(x_i, y_i, z_i, r_i - at)}{r_i}.$$

Invece di considerare una somma come la precedente che corrisponde ad un numero finito di centri, consideriamo una espressione analoga corrispondente ad un sistema continuo di centri distribuiti in un certo spazio a tre dimensioni S o sopra una superficie σ o una linea s. Otterremo in tal modo le funzioni

$$\theta(x, y, z, t) = \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} dS,$$

$$\theta(x, y, z, t) = \int_\sigma \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} d\sigma \quad , \quad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right)$$

$$\theta(x, y, z, t) = \int_s \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} ds,$$

in cui ξ, η, ζ denotano rispettivamente le coordinate dei punti dello spazio S, o della superficie σ, o della linea s, di cui dS, $d\sigma$, ds sono rispettivamente gli elementi di volume, d'area o di lunghezza.

Le funzioni così trovate soddisfaranno evidentemente, in tutti i punti esterni agli spazî S, σ, s, la equazione differenziale (1), quando si ammetta che le funzioni $\varphi(\xi, \eta, \zeta, l)$ abbiano rispetto ad l la derivata seconda finita e continua. Analogamente potremo ottenere infiniti altri integrali della equazione (1) considerando, invece delle distribuzioni continue di centri semplici, delle distribuzioni continue di centri multipli in modo che si abbia

$$\theta(x, y, z, t) = \int_\Sigma \frac{d^p}{ds_1 ds_2 \cdots ds_p} \left(\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r}\right) d\Sigma$$

in cui Σ denota uno spazio a una, due o tre dimensioni. Si noti che in questa formula le derivate rispetto a $s_1 s_2 \cdots s_p$ vanno eseguite ritenendo $\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)/r$ come funzione di $s_1 s_2 \cdots s_p$ per mezzo di r; cioè le ξ, η, ζ che compariscono esplicitamente in φ vanno considerate come costanti nell'eseguire le dette derivazioni.

La θ così ottenuta soddisfarà evidentemente l'equazione differenziale (1) in tutti i punti esterni allo spazio Σ.

3. Delle infinite funzioni che si possono costruire in questa guisa noi esamineremo in particolare le seguenti:

1° le distribuzioni di centri semplici entro spazî a tre dimensioni;

2° le distribuzioni di centri semplici sopra superficie;

3° le distribuzioni di centri doppî sopra superficie; essendo le direzioni corrispondenti ai centri doppî normali alle superficie stesse.

È evidente l'analogia fra la teoria che andiamo ora svolgendo e quella della funzione potenziale newtoniana. In questa ultima teoria si ha la funzione potenziale elementare $1/r$, e da essa si ricavano le funzioni potenziali dei corpi a tre dimensioni, delle superficie e dei doppî strati. Queste funzioni sono simili a quelle che si ottengono dalle distribuzioni che vogliamo esaminare. Affinché queste ultime funzioni si riducano alle dette funzioni potenziali, basterà supporre che $\varphi(\xi, \eta, \zeta, l)$ sia indipendente da l. Allora φ rappresenta la densità.

4. Cominciamo dall'estendere la formula di POISSON (Vedi BETTI, *Teorica delle forze newtoniane*, Cap. I, § IX). A tal fine ammettiamo che la funzione $\varphi(\xi, \eta, \zeta, l)$ oltre ad avere la derivata seconda rispetto ad l finita e continua goda rispetto a ξ, η, ζ delle proprietà richieste affinché considerata come una densità (cioè ritenendo l costante) si possa applicare il teorema di POISSON. Si ha

$$\theta = \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} dS = \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS$$
$$+ \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS .$$

Posto

$$\theta_1 = \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS \quad , \quad \theta_2 = \int_S \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} dS$$

risulterà

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 .$$

Ora supponendo t costante, θ_1 è una ordinaria funzione potenziale, quindi per le condizioni poste, a cagione della formula di POISSON,

$$\Delta_2 \theta_1 = - 4 \pi \varphi(x, y, z, -at)$$

essendo x, y, z un punto interno allo spazio S.

Poniamo

$$\frac{d\varphi}{dl} = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, l) \quad , \quad \frac{d^2 \varphi}{dl^2} = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, l).$$

La funzione

$$G = \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r} = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \vartheta r - at)$$

(in cui $1 > \vartheta > 0$) è finita e continua anche per $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Derivandola si otterrà

$$(3) \qquad \frac{\partial G}{\partial x} = \left(\frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta, r - at)}{r} - \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$= \left(\frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta, r - at) - \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \vartheta r - at)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x}$$
$$= (1 - \vartheta) \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \vartheta_1 r - at) \frac{\partial r}{\partial x} \qquad (1 > \vartheta_1 > \vartheta)$$

quindi $\partial G / \partial x$ è finita anche per $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$.

Analogamente si vede che anche $\partial G/\partial y$, $\partial G/\partial z$ godono delle stesse proprietà. Derivando nuovamente la (3) avremo

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = (1-\vartheta)\,\varphi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r - at)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \Big(\frac{\varphi_2(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r} - \frac{2\,\varphi_1(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r^2}$$

$$+ 2\,\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r^3}\Big)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$$

$$= (1-\vartheta)\,\varphi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r - at)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$+\left(\frac{\varphi_2(\xi,\eta,\zeta,r-at) - 2(1-\vartheta)\,\varphi_2(\xi,\eta,\zeta,\vartheta_1 r - at)}{r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2;$$

quindi $\partial^2 G/\partial x^2$, può tutto al più divenire infinita del 1^{o} ordine per $\xi = x$, $\eta = y$, $\zeta = z$. Lo stesso può dirsi per $\partial^2 G/\partial y^2$, $\partial^2 G/\partial z^2$. Dalle formule precedenti segue che $\theta_2 = \int G\,dS$ e le sue derivate prime e seconde sono funzioni finite e continue, e che per calcolare il $\Delta^2\theta_2$, basta applicare la regola di derivazione sotto il segno. Si otterrà dunque

$$\Delta^2\theta_2 = \int_S \left\{\frac{1}{r}\Delta^2\varphi + 2\,\Delta\left(\varphi,\frac{1}{r}\right)\right\} dS = \int_S \left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\Delta r + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Delta^2 r\right) + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Delta\left(r,\frac{1}{r}\right)\right] dS\,.$$

Ma

$$\Delta r = 1 \quad , \quad \Delta^2 r = \frac{2}{r} \quad , \quad \Delta\left(r,\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2};$$

quindi

$$\Delta^2\theta_2 = \int_S \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} dS = \int_S \frac{1}{r}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} dS = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_S \frac{\varphi}{r} dS = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,.$$

Ne segue

$$\Delta^2\theta = \Delta^2\theta_1 + \Delta^2\theta_2 = -4\pi\varphi(x,y,z,-at) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

vale a dire

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - a^2\Delta^2\theta = 4\pi a^2\varphi(x,y,z,-at) \tag{4}$$

in tutti i punti x, y, z dello spazio S.

In questa formula consiste la generalizzazione cercata della formula di Poisson.

5. Passiamo ora ad esaminare una distribuzione superficiale di centri semplici. Ammettiamo la superficie senza punti singolari e supponiamo che $\varphi(\xi,\eta,\zeta,l)$ considerata come funzione di ξ,η,ζ (l ritenuto costante) goda delle proprietà che si attribuiscono alle densità superficiali nella teoria delle forze newtoniane (vedi Betti, op. cit., § VIII); supporremo inoltre, come precedentemente, che essa ammetta la derivata seconda rispetto ad l finita e

continua. Sarà quindi applicabile anche in questo caso la formula (3). Si avrà

$$\theta(x,y,z,t)=\int_\sigma \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\,d\sigma=$$

$$=\int_\sigma \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\,d\sigma+\int_\sigma \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\,d\sigma .$$

Posto

$$\theta_1=\int_\sigma \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\,d\sigma \quad , \quad \theta_2=\int \frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\,d\sigma$$

potremo scrivere

$$\theta=\theta_1+\theta_2 . \tag{5}$$

Chiamiamo n_1 e n_2 le normali alla superficie σ dalle due parti di essa, le cui direzioni sono quelle secondo le quali ci si allontana dalla superficie stessa. Si avrà:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n_1}+\frac{\partial\theta_1}{\partial n_2}=-4\pi\varphi(x,y,z,-at). \tag{6}$$

La funzione G che comparisce sotto al segno d'integrazione nella espressione di θ_2 e le derivate $\partial G/\partial x$, $\partial G/\partial y$, $\partial G/\partial z$ sono finite (vedi formula (3)) anche per $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$; quindi θ_2 e le sue derivate prime si mantengono finite e continue anche attraversando la superficie σ. Dalle (5) e (6) si deduce dunque:

$$\frac{\partial\theta}{\partial n_1}+\frac{\partial\theta}{\partial n_2}=-4\pi\varphi(x,y,z,-at). \tag{7}$$

(Cfr. la formula (6) del paragrafo citato del BETTI).

6. Consideriamo finalmente una distribuzione di centri doppî sopra una superficie σ, disposti normalmente ad essa. Avremo

$$\theta=\int_\sigma \frac{d}{dn}\,\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\,d\sigma=\int_\sigma \varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma+\int_\sigma \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma$$

$$=\int_\sigma \varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma$$

$$+\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma$$

essendo n normale a σ.

Posto

$$\theta_1=\int_\sigma \varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma,$$

$$\theta_2=\int_\sigma\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)-\varphi(\xi,\eta,\zeta,-at)}{r}\right]\frac{1}{r}\,\frac{\partial r}{\partial n}\,d\sigma$$

risulterà

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 .$$

Ora θ_1 (supponendo t costante) è una funzione potenziale ordinaria di un doppio strato; quindi ammettendo che $\varphi(\xi, \eta, \zeta, t)$, considerata come funzione di ξ, η, ζ, goda delle proprietà che si attribuiscono alle densità dei doppî strati (BETTI, op. cit., § XII), avremo

$$(\theta_1)_e - (\theta_1)_i = 4\pi\varphi(x, y, z, -at), \tag{8}$$

denotando con $(\theta_1)_e$ il valore che prende la funzione θ_1 nel punto x, y, z dalla parte di σ da cui esce la direzione positiva di n e con $(\theta_1)_i$ il valore di θ_1 nello stesso punto x, y, z, ma dalla parte di σ da cui entra la direzione positiva di n; mentre

$$\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\right)_e = \left(\frac{\partial\theta_1}{\partial n}\right)_i . \tag{9}$$

Avremo poi che la funzione

$$H = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r-at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r}\right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

è finita anche per $x = \xi, y = \eta, z = \zeta$. Infatti può scriversi

$$\begin{aligned} H &= [\varphi_1(\xi, \eta, \zeta, r-at) - \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \vartheta r - at)] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= (1-\vartheta)\, \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \vartheta_1 r - at) \frac{\partial r}{\partial n} . \end{aligned}$$

Ne segue che $\theta_2 = \int_\sigma H\, d\sigma$ si conserverà continua anche attraversando la superficie σ.

Avremo poi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r-at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r}\right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &+ \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r-at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r^2}\right] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &+ \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r-at) - \varphi(\xi, \eta, \zeta, -at)}{r}\right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &= [-2(1-\vartheta)\,\varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \vartheta_1 r - at) + \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, r-at)] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &+ (1-\vartheta)\,\varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \vartheta_1 r - at) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial n} . \end{aligned}$$

Quindi $\partial H/\partial x$ potrà al più divenire infinita del 1° ordine per $x = \xi$, $y = \eta, z = \zeta$. Lo stesso vale evidentemente per $\partial H/\partial y$, $\partial H/\partial z$. Se ne conclude che anche le derivate prime di θ_2 si manterranno continue attraversando la superficie σ. Dunque

$$(\theta_2)_e - (\theta_2)_i = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial n}\right)_i = 0$$

e per conseguenza, tenendo presenti le (8), (9),

$$
(10) \qquad \begin{cases} (\theta)_e - (\theta)_i = 4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta, -at) \\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)_i = 0. \end{cases}
$$

7. Veduta così mediante le formule (4) (7) (10) la estensione della teoria ordinaria della funzione potenziale alle distribuzioni continue di centri semplici e doppî, ricordiamo che la formula di GREEN conduce immediatamente al teorema seguente: *Ogni funzione armonica* [1] *regolare entro uno spazio s può ritenersi come la funzione potenziale di una superficie e di un doppio strato distribuiti sul contorno* σ.

Infatti se V è una funzione armonica regolare entro S, la formula di GREEN dà (Vedi BETTI, op. cit., § XI form. (8))

$$
(11) \qquad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn} \frac{1}{r} \right) d\sigma
$$

in cui $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ (essendo ξ, η, ζ il punto variabile sopra la superficie σ) e in cui n è la normale (interna ad S) alla superficie stessa. Ponendo

$$
\frac{V(\xi, \eta, \zeta)}{4\pi} = f(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad -\frac{1}{4\pi} \frac{dV}{dn} = \varphi(\xi, \eta, \zeta)
$$

la formula precedente diviene

$$
V(x, y, z) = \int_\sigma f(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \int_\sigma \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r} d\sigma
$$

la quale mostra chiaramente il significato che abbiamo attribuito al teorema di GREEN.

Sovrapponiamo ora nel contorno σ dello spazio S due distribuzioni di centri semplici e di centri doppî normali a σ. Otterremo in tal modo

$$
(12) \qquad \theta(x, y, z, t) = \int_\sigma \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta, r-at)}{r} d\sigma + \int_\sigma \frac{d}{dn} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, r-at)}{r} d\sigma.
$$

La funzione $\theta(x, y, z, t)$ soddisfa evidentemente in tutti i punti interni ad S l'equazione (1). Proponiamoci ora di vedere se il teorema precedentemente enunciato per le funzioni armoniche può estendersi agli integrali regolari della (1), cioè *se tutte le funzioni regolari entro* S *che soddisfano la* (1) *possono porsi sotto la forma* (12).

Per ottenere questa estensione seguiremo un procedimento analogo a quello col quale nella teoria della funzione potenziale si giunge alla formula (11) partendo dal lemma di GREEN.

(1) Per funzione armonica intendiamo una funzione che soddisfa la equazione differenziale $\Delta^2 = 0$.

Se ψ e χ sono due funzioni regolari entro il campo S, limitato dal contorno σ, il detto lemma ci dà

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\chi - \frac{\partial\chi}{\partial n}\psi\right)d\sigma = \int_S (\psi\Delta^2\chi - \chi\Delta^2\psi)\,dS.$$

Supponiamo ora che si abbia

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - a^2\Delta^2\psi + \Psi(x, y, z, t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} - a^2\Delta^2\chi + X(x, y, z, t) = 0;$$

allora l'equazione precedente diviene

$$(13) \quad \int_\sigma \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\chi - \frac{\partial\chi}{\partial n}\psi\right)d\sigma = \frac{1}{a^2}\int_S \left(\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\psi - \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\chi\right)dS - \frac{1}{a^2}\int_S (\Psi\chi - X\psi)\,dS$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\chi\right)dS - \frac{1}{a^2}\int_S (\Psi\chi - X\psi)\,dS.$$

Se prendiamo $\chi = f(r + at)/r$, ove con r si denotano le distanze contate da un punto fisso x_0, y_0, z_0 interno allo spazio S, questa funzione non sarà regolare nel punto x_0, y_0, z_0 stesso, mentre se f è una funzione regolare, tale sarà χ in tutti gli altri punti di S. Volendo dunque applicare la (13) bisognerà escludere il detto punto x_0, y_0, z_0. Faremo questo mediante una sfera ω avente il centro in x_0, y_0, z_0 ed il raggio R. Chiamando quindi S' lo spazio S da cui si sia tolto lo spazio racchiuso entro la sfera ω, si avrà, osservando che $X = 0$,

$$(14) \quad \int_\sigma \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{f(r + at)}{r} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(r + at)}{r}\right)\psi\right]d\sigma$$

$$+ \int_\omega \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{f(r + at)}{r} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(r + at)}{r}\right)\psi\right]d\omega + \frac{1}{a^2}\int_{S'} \Psi\frac{f(r + at)}{r}\,dS'$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S'} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(r + at)}{r}\right)\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{f(r + at)}{r}\right]dS'.$$

Consideriamo ora in particolare il secondo integrale del primo membro. Chiamando $d\alpha$ l'elemento della sfera di raggio 1, avremo

$$d\omega = R^2\,d\alpha\,,$$

quindi il detto integrale potrà scriversi

$$J = \int_\alpha \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{f(R + at)}{R} - \psi\frac{f'(R + at)}{R} + \psi\frac{f(R + at)}{R^2}\right]R^2\,d\alpha$$

$$= R\int_\alpha \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}f(R + at) - \psi f'(R + at)\right]d\alpha + \int_\alpha \psi f(R + at)\,d\alpha$$

onde facendo impiccolire indefinitamente R,

$$(15) \quad \lim_{R=0} J = 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t)\,f(at).$$

La formula (14) potrà dunque scriversi, osservando che l'ultimo integrale del primo membro è proprio,

$$4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at) + \int_\sigma \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{f(r+at)}{r} - \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(r+at)}{r}\right)\psi\right] d\sigma$$

$$+ \frac{1}{a^2}\int_S \Psi' \frac{f(r+at)}{r} dS = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(r+at)}{r}\right)\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{f(r+at)}{r}\right] dS.$$

Abbiamo ora

$$\psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{f(r+at)}{r}\right) = \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} f(r+at) + \frac{1}{r}\psi f'(r+at)\frac{\partial r}{\partial n}$$

$$= \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} f(r+at) - \frac{1}{ar}\frac{\partial\psi}{\partial t} f(r+at)\frac{\partial r}{\partial n} + \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\psi f(r+at)\frac{\partial r}{\partial n}\right)$$

quindi

$$4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at) + \int_\sigma \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{1}{r} - \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{ar}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right] f(r+at)\, d\sigma$$

$$+ \frac{1}{a^2}\int_S \Psi' \frac{1}{r} f(r+at)\, dS = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{a^2}\int_S \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(r+at)}{r}\right)\psi - \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{f(r+at)}{r}\right] dS\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a}\int_\sigma \frac{1}{r}\psi f(r+at)\frac{\partial r}{\partial n}\, d\sigma\right\}.$$

Supponga si che la funzione $f(x)$ che per ora abbiamo lasciata indeterminata si annulli per tutti i valori dell'argomento superiori ad un certo limite N e per tutti quelli inferiori al limite $-$ N; allora moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per dt e integrando fra $-\infty$ e $+\infty$, il secondo membro andrà a zero, e per conseguenza otterremo

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4\pi\psi(x_0, y_0, z_0, t) f(at)\, dt \tag{16}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_\sigma \left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\frac{1}{r} - \psi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{1}{ar}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right] f(r+at)\, d\sigma + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{a^2}\int_S \Psi' \frac{1}{r} f(r+at)\, dS = 0.$$

Denotiamo con ξ, η, ζ, le coordinate dei punti del contorno σ e con x, y, z quelle dei punti di S. Le quantità che compariscono nei due ultimi integrali saranno

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial n} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = \psi_1(\xi, \eta, \zeta, t) \tag{17}$$

$$\psi = \psi(\xi, \eta, \zeta, t) \tag{17'}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} = \psi_2(\xi, \eta, \zeta, t) \tag{17''}$$

$$\Psi' = \Psi'(x, y, z, t) \tag{17'''}$$

onde se nei due detti integrali poniamo in luogo di t, $t-\frac{r}{a}$, la loro somma diverrà

$$K=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{\sigma}\left\{\psi_1\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{1}{r}-\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{ar}\psi_2\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial r}{\partial n}\right\}f(at)\,d\sigma+\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{S}\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{a^2r}f(at)\,dS$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\,dt\left\{\int_{\sigma}\left[\psi_1\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{1}{r}-\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}\right]d\sigma+\frac{1}{a^2}\int_{S}\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS\right\}$$

Ora se rappresentiamo con $\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]$ la derivata presa rispetto ad n del rapporto $\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}$, ritenendo le ξ,η,ζ, che compariscono esplicitamente, come costanti e la sola r funzione di n (Cfr. il § 2) avremo

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]=\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}$$

$\psi_1\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)$ rappresenta invece la derivata di $\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)$ rispetto ad n, ritenendo r costante e soltanto le ξ,η,ζ che compariscono esplicitamente come funzioni di n [(Vedi formula (17)]. Per distinguere la derivata rispetto ad n presa in questa ipotesi, da quella che abbiamo indicata precedentemente col simbolo $\partial/\partial n$, la denoteremo col simbolo $\delta/\delta n$. Per conseguenza

$$K=\int_{-\infty}f(at)\,dt\left\{\int_{\sigma}\left(\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]-\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]\right)d\sigma\right.$$

$$\left.+\frac{1}{a^2}\int_{S}^{\infty}\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS\right\}$$

e la equazione (16) potrà scriversi

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(at)\,dt\left\{4\pi\psi(x_0,y_0,z_0,t)+\int_{\sigma}\left(\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]-\right.\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right]\Bigg)d\sigma+\frac{1}{a^2}\int_S\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS\Bigg\}=0.$$

Ora $f(at)$ è una funzione arbitraria. Affinchè dunque la formula precedente possa sussistere, bisognerà che si abbia

$$4\pi\psi(x_0,y_0,z_0,t)+\int_\sigma\left\{\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)\right\}d\sigma$$

$$+\frac{1}{a^2}\int_S\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS=0$$

d'onde

$$\psi(x_0,y_0,z_0,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)\right. \tag{18}$$

$$\left.-\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)\right\}d\sigma-\frac{1}{4\pi a^2}\int_S\frac{\Psi\left(x,y,z,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS.$$

Questa formula è dovuta al BELTRAMI. Supponendo che ψ sia un integrale della equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=a^2\Delta^2\theta$$

Ψ si riduce eguale a zero, e si ottiene la formula di KIRCHHOFF

$$\psi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)-\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right)\right\}d\sigma \tag{18'}$$

in cui si è posto x, y, z in luogo di x_0, y_0, z_0 che compariscono nella formula precedente.

Essa è appunto la generalizzazione della formula (11) che cercavamo. Si ponga

$$\frac{1}{4\pi}\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)=\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at),$$

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\delta\psi\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)}{\delta n}=-\frac{1}{4\pi}\psi_1\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)=f(\xi,\eta,\zeta,r-at)$$

la (18') potrà scriversi

$$\psi(x,y,z,t)=\int_\sigma\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\varphi(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\right)+\frac{f(\xi,\eta,\zeta,r-at)}{r}\right\}d\sigma. \tag{19}$$

Avremo quindi il teorema:

Ogni funzione $\psi(x, y, z, t)$ *regolare entro un campo finito* S *e che soddisfa l'equazione differenziale*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \psi$$

potrà considerarsi come il potenziale di velocità (o come il potenziale degli spostamenti) dovuto a due distribuzioni sopra il contorno σ: *l'una di centri semplici, l'altra di centri doppî normali a* σ *stesso.*

8. Nello stabilire la formula (18′) si è supposto che il punto x, y, z fosse un punto interno al campo S. Se il punto fosse esterno al campo la funzione $f(r + at)/r$ sarebbe regolare entro tutto il campo stesso; quindi nell'applicare il lemma di GREEN non sarebbe più necessario escludere alcuna porzione di S. Nella (14) mancherebbe dunque l'integrale esteso ad ω e perciò si giungerebbe alla formula

$$(18'') \qquad 0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\right] - \frac{\delta\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{\delta n}\frac{1}{r}\right\} d\sigma .$$

Finalmente se il punto x, y, z facesse parte del contorno σ, nella (14) dovrebbe limitarsi il secondo integrale che comparisce nel primo membro alla porzione della sfera ω che giace nell'interno di S onde alla equazione (15) dovrebbe sostituirsi l'altra

$$\lim_{R=0} J = v\psi(x, y, z, t) f(at),$$

essendo v ciò che si suol chiamare l'angolo visuale del contorno σ relativo al punto x, y, z. Quindi in questo caso invece della (18′) avremo la formula

$$(20) \quad v\psi(x, y, z, t) = \int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\right] - \frac{\delta\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{\delta n}\frac{1}{r}\right\} d\sigma .$$

Questa formula comprende le due precedenti (18′) e (18″) quando si ritenga (come si suol fare ordinariamente) che l'angolo visuale di σ rispetto ad un punto interno sia 4π, e rispetto ad un punto esterno sia zero.

9. Le formule trovate valgono quando σ sia un contorno formato da una o da più superficie finite che limitano lo spazio finito S entro il quale la funzione ψ è regolare e soddisfa la (1). Supponiamo ora che lo spazio S entro il quale la funzione ψ è regolare e soddisfa la (1), si estenda all'infinito e sia limitato a distanza finita da una o da più superficie chiuse il cui insieme denoteremo sempre con σ. Ammettiamo inoltre che la funzione $\psi(x, y, z, t)$ per tutti i valori di t inferiori ad un certo limite T sia sempre nulla. Si conduca col centro nell'origine una sfera Ω di raggio R la quale includa tutto

l'insieme di superficie σ e il punto x, y, z, e consideriamo lo spazio S' limitato da σ e da Ω. Applicando la formula (18') allo spazio S' avremo

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\right] - \frac{\delta}{\delta n}\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)\cdot\frac{1}{r}\right\} d\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial N}\left[\frac{\psi\left(\xi', \eta', \zeta', t - \frac{r'}{a}\right)}{r'}\right] - \frac{\delta}{\delta n}\psi\left(\xi', \eta', \zeta', t - \frac{r'}{a}\right)\cdot\frac{1}{r'}\right\} d\Omega$$

chiamando ξ', η', ζ' le coordinate dei punti di Ω; r' le distanze dei punti di Ω dal punto x, y, z; N la normale ad Ω diretta verso l'interno di S'. Con n si intenderà sempre la normale a σ diretta verso l'interno di S. Si prenda il raggio della sfera Ω così grande che i valori $t - \frac{r'}{a}$ risultino tutti inferiori a T. Avremo allora che il secondo integrale contenuto nel secondo membro della formula precedente sparirà, onde la formula (18') si potrà applicare anche nel caso in cui lo spazio S si estenda all'infinito. Il teorema precedente varrà dunque anche nel caso di uno spazio infinito limitato a distanza finita da una o da più superficie chiuse, quando si aggiunga la condizione che ψ si annulli per valori di t inferiori ad un certo limite.

Ammettendo sempre soddisfatte le condizioni stabilite in questo teorema, sussisterà anche la formula (18'') quando il punto x, y, z sia esterno allo spazio S, ed in generale potremo scrivere la formula (20) considerando come contorno completo dello spazio S, l'insieme di superficie σ e la sfera all'infinito.

10. Sia $\psi(x, y, z, t)$ una funzione regolare di x, y, z, t in tutto lo spazio la quale si annulli per tutti i valori di t inferiori ad un certo limite e soddisfi l'equazione differenziale (1). Consideriamo un punto qualunque x, y, z esterno ad una superficie chiusa σ. A cagione della (18'') avremo

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{d}{dn}\left[\frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r}\right] - \frac{\delta}{\delta n}\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)\cdot\frac{1}{r}\right\} d\sigma.$$

Ma, essendo ψ regolare anche nello spazio esterno a σ ed annullandosi per valori di t inferiori ad un certo limite, il secondo membro della formula precedente esprimerà il valore di $\psi(x, y, z, t)$. Se ne conclude che la funzione ψ è sempre eguale a zero. Quindi si avrà il teorema: *una funzione regolare in tutto lo spazio che si annulla per valori di t inferiori ad un certo limite e soddisfa la* (1) *è sempre nulla.*

11. In tutto ciò che segue ammetteremo sempre soddisfatta la condizione che le funzioni $\psi(x, y, z, t)$ che si considerano si annullino per valori di t inferiori ad un certo limite, anche quando non diremo questa condizione esplicitamente.

Ciò premesso i teoremi dei paragrafi precedenti 7, 9 potranno enunciarsi nel modo seguente.

Abbiasi il moto di un fluido dovuto ad onde emananti da un sistema qualunque di centri. Per esaminare il moto in un punto qualunque potrà sempre sostituirsi ai centri dati un sistema di altri centri distribuiti sopra una superficie, o un sistema di superficie σ *qualunque che separi i centri dati dal punto in cui si vuol studiare il moto.*

Gli elementi relativi al moto (potenziale di velocità, potenziale degli spostamenti) in un dato istante nel punto che si considera dipenderanno dagli elementi relativi al movimento (potenziale degli spostamenti, di velocità, ecc.) nei punti delle dette superficie σ in istanti anteriori. Per precisare tale dipendenza riprendiamo la formula di KIRCHHOFF sotto la forma

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ -\psi_2\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)\frac{1}{ar}\frac{\partial r}{\partial n} \right. \tag{21}$$

$$\left. + \psi\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \psi_1\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{a}\right)\frac{1}{r} \right\} d\sigma.$$

Supponiamo che $\psi(x, y, z, t)$ rappresenti un potenziale di spostamento; allora (vedi (17)) $\psi_2(\xi, \eta, \zeta, t)$ rappresenterà il potenziale di velocità e $\psi_1(\xi, \eta, \zeta, t)$ (vedi (17)) rappresenterà la componente dello spostamento nel senso normale al contorno σ.

Supponiamo invece che $\psi(x, y, z, t)$ rappresenti un potenziale di velocità; in tale ipotesi $\psi_2(\xi, \eta, \zeta, t)$ sarà eguale ad $a^2\,\Theta$, essendo Θ il coefficiente di dilatazione e $\psi_1(\xi, \eta, \zeta, t)$ rappresenterà la componente normale a σ della velocità nei punti di σ. Potremo quindi enunciare la proposizione:

Il potenziale degli spostamenti [potenziale di velocità] *in un istante t nel punto* $M \equiv (x, y, z)$ *dipende dal potenziale degli spostamenti* [potenziale di velocità], *dal potenziale di velocità* [pressione, ovvero coefficiente di dilatazione] *e dalla componente normale a* σ *dello spostamento* [velocità] *in ciascun punto* A *di* σ *in un istante* t' *anteriore all'istante* t; *e l'intervallo di tempo che decorre da* t' *a* t *è uguale ad* r/a, *cioè è proporzionale alla distanza* r *del punto* A *del contorno dal punto* M.

Questa stessa proposizione, in una con la precedente, può enunciarsi con altre parole.

Sia $\varphi(r+at)/r$ il potenziale degli spostamenti [o di velocità] corrispondente ad un centro semplice: diremo che l'onda partita nell'istante t' dal centro $r=0$ è giunta nell'istante $t = t' + \frac{r}{a}$ nel punto r, e tale onda è individuata dal valore $\varphi(-at')$.

Analogamente, nel caso di un centro doppio in cui il potenziale degli spostamenti [o di velocità] è $\left(\frac{\varphi'(r-at)}{r} - \frac{\varphi(r-at)}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial s}$ (vedi il § 1), diremo che l'onda partita nell'istante t dal centro e che giunge nell'istante $t = t' + \frac{r}{a}$ nel punto r, è individuata dai valori $\varphi(-at')$, $\varphi'(-at')$.

Ciò premesso il teorema precedente potrà enunciarsi: *Gli spostamenti* [le velocità] *del punto* $M \equiv (x, y, z)$ *in un istante* t *possono considerarsi come dovuti ad onde partite dai punti* A *come centri negli istanti* $t' = t - \frac{r}{a}$ *e gli elementi che individuano queste onde sono il valore del potenziale degli spostamenti* [potenziale di velocità], *del potenziale di velocità* [pressione ovvero coefficiente di dilatazione], *dello spostamento normale a* σ [velocità normale a σ] *nei punti* A *negli istanti* $t' = t - \frac{r}{a}$.

12. Supponiamo ora che σ sia una sfera col centro nel punto x, y, z. Prendendo la formula di KIRCHHOFF sotto la forma (21) dovremo porre

$$\frac{\partial r}{\partial n} = -1 \quad , \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2}$$

quindi

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\int_\sigma \frac{\psi_2\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} d\sigma$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{\psi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r^2} - \frac{\psi_1\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{a}\right)}{r} \right\} d\sigma$$

e supponendo il raggio r della sfera $= at$

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a}\int_\sigma \frac{\psi_2(\xi, \eta, \zeta, 0)}{r} d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left\{ \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, 0)}{r^2} - \frac{\psi_1(\xi, \eta, \zeta, 0)}{r} \right\} d\sigma. \tag{22}$$

Si consideri

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, 0)}{r} d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha \psi(\xi, \eta, \zeta, 0)\, r\, d\alpha = \frac{\partial}{\partial t}\int_\alpha \psi(\xi, \eta, \zeta, 0)\, at\, d\alpha$$

essendo α la sfera di raggio 1. Avremo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta, 0)}{r} d\sigma = \int_\alpha \left\{ \psi(\xi, \eta, \zeta, 0)\, a\, d\alpha + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) at \right\} d\alpha.$$

Ma

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial (at)} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial (at)} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial (at)} \right)$$

$$= a\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = -a\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) = -a\psi_1(\xi, \eta, \zeta, 0);$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta,0)}{r}\,d\sigma = a\int_\alpha \{\psi(\xi,\eta,\zeta,0) - \psi_1(\xi,\eta,\zeta,0)\,at\}\,d\alpha$$

$$= a\int_\sigma \left\{\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta,0)}{r^2} - \frac{\psi_1(\xi,\eta,\zeta,0)}{r}\right\} d\sigma$$

onde tenendo presente la (22)

$$\psi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a}\left\{\int_\sigma \frac{\psi_2(\xi,\eta,\zeta,0)}{r}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \frac{\psi(\xi,\eta,\zeta,0)}{r}\,d\sigma\right\}. \tag{23}$$

Siccome i punti ξ,η,ζ appartengono alla sfera di raggio at e di centro x,y,z, potremo scrivere

$$\xi = x + at \operatorname{sen}\omega\cos\varphi \quad , \quad \eta = y + at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \zeta = z + at\cos\omega \quad ,$$

$$d\sigma = r^2 \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi = a^2 t^2 \operatorname{sen}\omega\, d\omega\, d\varphi,$$

onde

$$\psi(x,y,z,t) \tag{24}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\int_0^\pi d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\psi_2(x+at\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\,,\,y+at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\,,\,z+at\cos\omega\,,\,0)\,t\operatorname{sen}\omega\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi\cdot\psi(x+at\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\,,\,y+at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\,,\,z+at\cos\omega\,,\,0)\,t\operatorname{sen}\omega\right\}.$$

13. La formula ora ottenuta è dovuta al POISSON. Essa ci dà l'integrale generale della equazione differenziale (1), giacché ci esprime la $\psi(x,y,z,t)$ mediante $\psi(x,y,z,0)$ e $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=0}$. Verifichiamo direttamente il risultato che abbiamo ottenuto come caso particolare della formula di KIRCHHOFF.

Dimostriamo cioè direttamente il teorema:

Essendo $\Phi(x,y,z)$, $\Phi_1(x,y,z)$ due funzioni arbitrarie finite e continue insieme alle derivate prime e seconde, la funzione

$$\psi(x,y,z,t) \tag{25}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi\,\Phi_1(x+at\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\,,\,y+at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\,,\,z+at\cos\omega)\,t\operatorname{sen}\omega$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\omega\int_0^{2\pi} d\varphi\,\Phi(x+at\operatorname{sen}\omega\cos\varphi\,,\,y+at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi\,,\,z+at\cos\omega)\,t\operatorname{sen}\omega$$

gode delle proprietà seguenti:

1° *soddisfa l'equazione differenziale*

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\Delta^2\psi \tag{26}$$

2° *soddisfa le condizioni*

$$\psi(x, y, z, t)_{t=0} = \Phi(x, y, z)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = \Phi_1(x, y, z).$$

Cominciamo dal provare che

$$\psi'(x, y, z, t) \tag{27}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi\, \Phi_1(x + at \operatorname{sen}\omega\cos\varphi, y + at \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varphi, z + at\cos\omega)\, t \operatorname{sen}\omega$$

soddisfa l'equazione (26).

Si ponga per semplicità

$$\xi = x + at \operatorname{sen}\omega\cos\varphi, \quad \eta = y + at\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi, \quad \zeta = z + at\cos\omega, \qquad at = r \tag{28}$$

e si chiami α la sfera si raggio 1. Allora potrà scriversi

$$\psi'(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi}\int_\alpha \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha \tag{29}$$

e derivando rispetto a t

$$\frac{\partial \psi'(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int_\alpha \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha + \frac{t}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha. \tag{30}$$

Ora

$$t\int_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha = at\int_\alpha \frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha = \frac{1}{r}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\sigma = \frac{1}{r}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS$$

chiamando σ la superficie sferica di raggio r e S lo spazio in essa racchiuso. Quindi

$$\frac{\partial \psi'(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\int_\alpha \Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha + \frac{1}{4\pi r}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS;$$

derivando nuovamente rispetto a t troveremo,

$$\frac{\partial^2 \psi'(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi}\int_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha - \frac{a}{4\pi r^2}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS + \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS.$$

Ma

$$\frac{1}{4\pi}\int_\alpha \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\alpha = \frac{a}{4\pi r^2}\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\sigma$$

e perciò

$$\frac{\partial^2 \psi'(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \frac{a}{4\pi r^2}\left\{\int_\sigma \frac{\partial}{\partial r}\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)\, d\sigma - \int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS\right\}$$

$$+ \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS = \frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \Delta^2 \Phi_1\, dS.$$

Abbiamo ora, chiamando ρ il raggio vettore,

$$\int_S \Delta^2 \Phi_1 \, dS = \int_0^r \rho^2 \, d\rho \int_\alpha \Delta^2 \Phi_1 \, d\alpha = \int_0^{at} \rho^2 \, d\rho \int_\alpha \Delta^2 \Phi_1 \, d\alpha$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S \Delta^2 \Phi_1 \, dS = ar^2 \int_\alpha \Delta^2 \Phi_1 \, d\alpha$$

d'onde

$$(31) \qquad \frac{\partial^2 \psi'(x, y, z, t)}{\partial t^2} = \frac{ar}{4\pi} \int_\alpha \Delta^2 \Phi_1 \, d\alpha = \frac{a^2 t}{4\pi} \int_\alpha \Delta^2 \Phi_1 \, d\alpha .$$

Il Δ^2 che comparisce nelle formule precedenti è

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} ;$$

a cagione delle (28) avremo evidentemente

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

onde l'operazione Δ^2 potrà essere permutata con l'operazione $\int_\alpha$ e quindi

$$\frac{\partial^2 \psi'(x, x, z, t)}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 \left\{ \frac{t}{4\pi} \int_\alpha \Phi_1 (\xi, \eta, \zeta) \, d\alpha \right\} = a^2 \Delta^2 \psi' . \qquad \text{C. D. D.}$$

Facciamo nelle (29), (30), (31), $t = 0$, si troverà

$$(32) \begin{cases} (32') & \psi'(x, y, z, t)_{t=0} = 0 \\ (32'') & \left[\dfrac{\partial \psi'(x, y, z, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \dfrac{1}{4\pi} \Phi_1 (x, y, z) \displaystyle\int_\sigma d\alpha = \Phi_1 (x, y, z) \\ (32''') & \left[\dfrac{\partial^2 \psi'(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right]_{t=0} = 0 . \end{cases}$$

Si ponga ora

$$\psi''(x, y, z, t)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \, \Phi (x + at \operatorname{sen} \omega \cos \varphi, y + at \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \varphi, z + at \cos \omega) \, t \operatorname{sen} \omega .$$

Questa funzione sarà perfettamente analoga alla (27), solo invece di dipendere dalla funzione arbitraria Φ_1 dipenderà da Φ. Essa godrà quindi di tutte le proprietà analoghe a quelle della (27) e perciò essa pure soddisfarà l'equazione (26) e (vedi (32))

$$(33) \qquad \begin{cases} \psi''(x, y, z, t)_{t=0} = 0 . \\ \left[\dfrac{\partial \psi''(x, y, z, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \Phi (x, y, z) \\ \left[\dfrac{\partial^2 \psi''(x, y, z, t)}{\partial t^2}\right]_{t=0} = 0 . \end{cases}$$

Ma noi abbiamo (vedi (25))

$$\psi(x, y, z, t) = \psi'(x, y, z, t) + \frac{\partial}{\partial t}\psi''(x, y, z, t);$$

dunque anche ψ verificherà la (26) e a cagione delle (32) e (33) sarà

$$\psi(x, y, z, t)_{t=0} = \Phi(x, y, z)$$

$$\left[\frac{\partial\psi(x, y, z, t)}{\partial t}\right]_{t=0} = \Phi_1(x, y, z) \qquad \text{C. D. D.}$$

Relativamente al significato della formula di POISSON basta riferirsi a quello che si disse riguardo alle formule di KIRCHHOFF (vedi il § 11). Quindi *ogni qual volta si valuta il potenziale degli spostamenti e il potenziale di velocità mediante la formula di* POISSON, *ciò significa che si riguarda il moto in un punto* A *in un dato istante t come dovuto alla sovrapposizione di un doppio sistema di onde partite nel tempo iniziale dai punti di una superficie sferica di raggio at, col centro in* A, *le quali sono individuate dagli elementi relativi allo stato di moto dei punti della superficie sferica nell'origine dei tempi* (*).

(*) Nell'originale di questa Nota è qui preannunciata una « continuazione » che non figura in alcuno dei successivi volumi del « Nuovo Cimento ». [N. d. R.].

XXXVII.

ENRICO BETTI

«Nuovo Cimento» ser. 3ª, vol. XXXII 1892, pp. 5-7.

La morte del prof. ENRICO BETTI, avvenuta l'11 agosto scorso, fu una grave perdita per la scienza, per l'insegnamento, per la patria.

La figura di Lui sotto qualunque aspetto si guardi, si presenta nobile e generosa quanto semplice e modesta. I servizî da Lui prestati alla patria, prima come soldato nella guerra di indipendenza, poi come legislatore ed amministratore lo mettono fra i benemeriti del nostro paese; i lavori scientifici gli danno un posto eminente fra i matematici del nostro tempo; e l'alta efficacia dell'opera sua come maestro ed educatore può solo essere pienamente compresa da chi fu suo allievo.

Il BETTI nacque a Pistoia il 21 ottobre 1823 e nel 1846 ottenne la laurea in matematiche pure ed applicate. Nel 1849 fu nominato professore al Liceo di Pistoia, nel 1854 al Liceo di Firenze e alla fine del 1857 ebbe la cattedra all'Università di Pisa, carica che a partire dal 1865 tenne unita a quella di Direttore della Scuola Normale Superiore.

La carriera scientifica del BETTI può esser divisa in tre fasi distinte, le quali sono in rapporto coll'insegnamento da lui professato.

Il decennio che scorse dal 1850 al 1860 fu dedicato dal BETTI quasi esclusivamente alle ricerche algebriche, le quali per prime diedero fama al suo nome e lo collocarono fra quelli che fecero maggiormente progredire le teorie create da ABEL e da GALOIS e lasciate da questi grandi geometri incomplete, poco note e non ben chiare alla maggior parte dei matematici della loro epoca. Le opere del BETTI su questo argomento hanno già da lungo tempo preso posto accanto ai classici lavori dei più chiari matematici dei nostri giorni, e costituiscono un monumento del sapere e della forza intellettuale del giovane matematico.

Nel secondo periodo il BETTI si è applicato all'analisi, quale la si intende oggigiorno, e più specialmente alla teoria delle funzioni. La teorica delle funzioni ellittiche e sue applicazioni e quella sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa sono infatti le memorie che egli pubblicò dal 1860 al 1862. Il primo di questi due lavori, che disgraziatamente è restato incompleto, mostra che fino da quell'epoca Egli possedeva ed aveva introdotto nell'insegnamento quei metodi che solo recentemente sono stati divulgati e resi comuni ed hanno manifestato, mercè la scuola dell'illustre WEIESTRASS che ne fu l'iniziatore, la loro grande portata e la loro fecondità. La teoria delle funzioni ellittiche venne più tardi ripresa dal BETTI con un altro metodo che risente dell'influenza su di Lui esercitata dalle idee di RIEMANN, il quale visse qualche tempo a Pisa e gli fu legato da vincoli di stima e di sincera amicizia. Tale influenza si mostra e con maggior vantaggio nei risultati, anche in successivi lavori di Fisica matematica.

A questi e alle teorie meccaniche si dedicò interamente il BETTI nell'ultimo periodo che, dal 1863 circa, va fino ai nostri giorni.

I lettori di questo periodico hanno potuto seguire lo svolgimento del suo pensiero scientifico in questa sua ultima fase giacchè la maggior parte delle memorie scritte in questo tempo vennero o pubblicate originalmente nel «Nuovo Cimento» o qui riprodotte da Atti accademici.

Quasi tutti i rami della Fisica matematica e della Meccanica vennero da Lui coltivati: la teoria del potenziale, quella della propagazione del calore, la termodinamica, la elettricità, il magnetismo, la capillarità, la elasticità, la idrodinamica, il problema degli *n* corpi.

Alla teoria del potenziale Egli dedicò molti anni di studio, e frutto delle sue ricerche fu l'opera sulla Teorica delle forze Newtoniane e sue applicazioni alla elettrostatica e al magnetismo, modello di eleganza e rigore nella trattazione di quelle discipline.

Le lezioni sulla elasticità vennero pubblicate in questo giornale nel 1872. Esse costituiscono un'opera di capitale importanza e segnano una data memorabile nella storia di questa teoria.

Infatti per primo il BETTI applicò con pieno successo alla integrazione delle equazioni differenziali dell'equilibrio dei solidi elastici quei metodi che già si erano manifestati così fecondi per la equazione di LAPLACE. A base del suo processo di integrazione pose un teorema che ormai nella scienza è conosciuto sotto il suo nome e che formerebbe da solo, per la sua profondità e per la importanza delle sue applicazioni, un titolo non comune di gloria. La portata del metodo iniziato dal BETTI si è resa e si va rendendo sempre più manifesta, mercè i lavori dei matematici che lo perfezionarono, e lo applicarono ai più importanti problemi non ancora rigorosamente risoluti.

Troppo lungo sarebbe il volere accennare anche di volo a tutte le opere del BETTI. Ne diamo solo l'elenco alla fine di questo cenno biografico (*). I

(*) Segue (loc. cit., pp. 190–192) un «Elenco delle opere pubblicate dal prof. ENRICO BETTI».

Dello stesso BETTI il VOLTERRA ha pubblicato un altro «Cenno necrologico» più breve in «Rivista scientifico industriale (del Vimercati)», Firenze, XXIV, 1892, pp. 211–212 (non firmato). – Basterà qui trascriverne le seguenti righe, che forniscono qualche complemento alla Necrologia precedente.

«Nel 1848» il BETTI «fece parte del Battaglione universitario che combattè sui campi di Lombardia...

«Venne eletto più volte Deputato al Parlamento, e tenne la carica di Segretario generale della Pubblica Istruzione sotto il Ministero Minghetti del 1874. Dal 1884 faceva parte del Senato del Regno».

«Come maestro il BETTI fu insuperabile, e i molti allievi, che egli guidò alla ricerca del vero, ebbero in lui l'esempio di instancabile operosità e di coscienzioso e disinteressato adempimento del dovere».

«Modesto, benchè forte d'incontrastata autorità, dovuta solo alla superiorità della sua mente e del suo carattere, egli visse venerato e tranquillo, consacrando la sua nobile vita quasi esclusivamente agli studi prediletti». (N.d.R.).

quale non sapremmo chiudere che con un augurio, ed è che seguendo l'esempio di quello che gli stranieri sogliono fare per le opere dei loro grandi, i matematici italiani provvedano a riunire tutte le memorie scritte dal BETTI e sparse in giornali ed in atti accademici difficili a rintracciarsi, in un unico volume che sarà il più bel monumento che possa erigersi alla memoria di un uomo il quale, schivo da ogni volgare vanità, pose a capo dei suoi pensieri l'amore sincero e disinteressato alla scienza.

INDICE

FINITO DI STAMPARE NELLA
TIPOGRAFIA DELL'ACCADEMIA
NAZIONALE DEI LINCEI IN ROMA
NEL SETTEMBRE 1954