

entraîne

$$|N_1^{(h+1)} - N_1| < L_1(\gamma_1 + \Phi) B \frac{(t-t_0)^{h+2}}{(h+2)!},$$

$$|N_2^{(h+1)} - N_2| < L_1(\gamma_2 + \Phi) B \frac{(t-t_0)^{h+2}}{(h+2)!}.$$

D'où, en raisonnant toujours comme plus haut et introduisant $C_1 > \begin{cases} L_1(\gamma_1 + \Phi), \\ L_1(\gamma_2 + \Phi), \end{cases}$

$$|N_1^{(h+1)}(t) - N_1(t)| < \frac{A_1}{C_1} \frac{[C_1(t_1 - t_0)]^{h+2}}{(h+2)!} \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

$$|N_2^{(h+1)}(t) - N_2(t)| < \frac{A_1}{C_1} \frac{[C_1(t_1 - t_0)]^{h+2}}{(h+2)!}$$

ce qui prouve que les suites $N_1^{(h)}$, $N_2^{(h)}$ tendent vers $N_1(t)$, $N_2(t)$.

Cette solution N_1, N_2 est donc celle obtenue par la méthode d'approximations successives, d'où la propriété d'unicité.

CONCLUSION.

HISTORIQUE. — BIBLIOGRAPHIE.

1, 2, 3. Vue d'ensemble sur l'étude qui précède. Remarques diverses. — 4. Vérifications expérimentales. — 5-9. Notice biologique et historique sur les associations et les équilibres biologiques. — 6. Biologie agraire. — 7. Épidémies. Paludisme. — 8. Hydrobiologie. — 9. Fluctuations.

1. L'étude qu'on vient de faire apparaît comme formée de *deux parties* bien distinctes. Dans la première on a étudié comment réagissent les espèces entre elles, mais en supposant toujours que les causes ont des effets immédiats; dans l'autre on a repris l'étude en tenant compte d'un retard dans les effets. Comme on l'a expliqué, le premier point de vue est bien moins conforme à la réalité, mais il a l'avantage d'être plus simple et de permettre des développements mathématiques plus faciles et plus complets; il donne la voie à une théorie plus générale en donnant des résultats que l'on s'efforce d'étendre.

2. Examinons d'abord la *première partie*. Après une courte étude de deux espèces qui se disputent la même nourriture, nous abordons le cas fondamental de deux espèces dont l'une se nourrit de l'autre. Il est important pour plusieurs raisons. D'abord la mise en équations la plus satisfaisante est basée sur la *méthode des rencontres* que par la suite on utilisera aussi souvent que possible et qui semble vraiment solide. D'autre part ce cas simple conduit facilement à trois *lois fondamentales*, des fluctuations, de la conservation des moyennes et de la perturbation des moyennes. Ces lois, dont l'intérêt pratique est évident, on cherchera constamment à les généraliser dans la suite, en examinant des cas de plus en plus compliqués, à chaque fois que l'on se trouvera en présence de plusieurs espèces coexistant indéfiniment. Ce seront même les résultats les plus importants sur les associations stables d'espèces. Ajoutons enfin que dans ce cas simple de deux espèces, on étudie les

petites fluctuations par un procédé qui sera toujours employé dans la suite; il consiste à négliger, comme en mécanique pour les petits mouvements, certaines quantités du second ordre devant d'autres considérées comme du premier ordre, de façon à se ramener à des équations linéaires à coefficients constants d'intégration immédiate. Le premier Chapitre se termine par l'examen des divers cas possibles pour deux espèces, où se trouvent mises en évidence les diverses circonstances de *disparition* de l'une ou des deux espèces. Ainsi se trouvent en puissance dans le premier Chapitre tous les résultats à venir. De plus se manifeste déjà, par le développement théorique au delà de toute limite d'une espèce dans certains cas, l'insuffisance de la mise en équations qui ne tient pas compte de l'influence retardatrice certaine de chaque espèce sur son propre développement quand elle devient trop nombreuse dans l'espace *borné* et délimité que l'on considère.

Dès le *second Chapitre* nous considérons un nombre quelconque d'espèces. Et si, dans le cas général où elles ont des actions réciproques directes, la même méthode des rencontres fournit aisément les équations différentielles de l'association biologique, ces équations sont trop générales pour qu'on puisse en tirer des conséquences sans hypothèse supplémentaire. Aussi faisons-nous d'abord celle des *équivalents*, vraisemblable au moins dans certains cas et qui impose une forme particulièrement commode au système différentiel par ce fait qu'on en peut déduire des intégrales premières. Alors apparaissent d'eux-mêmes deux cas bien distincts : 1° celui d'un nombre pair d'espèces d'après lequel, si un état stationnaire est possible, on peut généraliser les résultats relatifs au cas de deux espèces dont l'une dévore l'autre : on trouve des fluctuations bornées non amorties et des moyennes asymptotiques correspondant à l'état stationnaire; et la loi de perturbation des moyennes se généralise si chaque espèce est soit seulement dévorante, soit seulement dévorée; 2° celui d'un nombre impair d'espèces dans lequel toutes les espèces ne peuvent subsister en restant bornées. On pourrait s'étonner, au point de vue pratique, de cette importance de la parité. Mais ne peut-on répondre par exemple, dans le même domaine du simple bon sens, que dans un cas on peut accoupler deux à deux les espèces, et que, dans l'autre, il en resterait une toute seule pouvant de ce fait se composer de façon très différente?

Le *second Chapitre* se termine par l'étude d'un cas remarquable de trois espèces, qui met plus spécialement en évidence la nécessité de *retoucher à la mise en équations* afin de tenir compte de ce fait qu'une espèce dans un milieu *délimité* se développe plus difficilement dès

qu'elle devient très nombreuse ⁽¹⁾ parce que sa densité de répartition augmente au point de modifier notablement les conditions de vie; ce fait empêche la croissance infinie qui résulte dans certains cas des équations adoptées jusqu'à présent.

C'est avec cette idée nouvelle qu'on ouvre un *troisième Chapitre*. Pour introduire cette résistance au développement, analogue, en mécanique, au frottement qui croît avec la vitesse, on ajoutera à l'expression du coefficient d'accroissement $\frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt}$, linéaire par rapport aux N_r d'indice différent de i , et tel qu'on l'a pris au Chapitre II, un terme $-\lambda_i N_i$ ($\lambda_i > 0$) tendant à diminuer ce coefficient quand l'espèce devient nombreuse dans le milieu délimité toujours considéré. On constate tout de suite l'effet de limitation dû à ces termes. On démontre ensuite que si un état stationnaire est possible, il y a, comme au Chapitre II, des variations bornées, mais les fluctuations sont maintenant *amorties* et il y a un état limite qui est l'état stationnaire. Si les équations de l'état stationnaire admettent une seule racine négative, l'espèce correspondante doit disparaître. Mais dans tous ces raisonnements s'introduit très naturellement la forme quadratique définie positive $\sum \lambda_i N_i^2$ qui tend à faire décroître ce qu'on a appelé la « valeur de l'association biologique »; celle-ci, qui, lorsque les causes constantes d'accroissement sont nulles, resterait constante sans les λ_i , diminue à cause de ces facteurs avec une vitesse proportionnelle à la valeur de la forme quadratique. L'étude des petites fluctuations comme celle du cas particulier de trois espèces examiné au Chapitre précédent et repris avec un terme $-\lambda_i N_i$, montre bien le rôle d'*amortissement* de ces termes.

Le rôle de la forme $\sum \lambda_i N_i^2$ nous conduit naturellement à envisager le cas *beaucoup plus général* où les coefficients d'accroissement sont des fonctions linéaires quelconques des N_i : on aboutirait d'ailleurs à des équations de cette forme en utilisant la théorie des rencontres, puis ajoutant des termes d'amortissement. En supposant qu'on puisse attribuer des valeurs positives aux individus de chaque espèce de façon qu'une certaine forme quadratique soit définie positive, il est possible de refaire presque exactement les calculs de la première partie du Chapitre, d'où les mêmes conclusions. De telles associations sont dites *dissipatives*, vu le rôle de la forme quadratique, tendant à diminuer la valeur globale de l'association biologique. Celles pour lesquelles on

(1) C'est ce qu'a vérifié expérimentalement M. Chapmann (voir plus loin n° 4).

pourrait trouver de la même façon une forme quadratique nulle, et qui sont celles du Chapitre II, sont dites *conservatives*.

Ces dénominations étaient tout indiquées, vu les façons bien distinctes étudiées respectivement aux Chapitres II et III, dont se comportent ces deux sortes d'associations qui, différentes, n'épuisent d'ailleurs pas tous les cas théoriquement possibles de la mise en équations sous la forme générale considérée. Il est donc tout naturel de chercher ensuite des critères et des propriétés de ces deux espèces d'association dont les dissipatives se rapprochent plus, en général, de celles de la réalité, les autres ne correspondant ordinairement qu'à des cas limites; de même qu'en mécanique, la dynamique sans frottement n'est qu'un cas idéal et une première approximation de la réalité qui peut d'ailleurs être très bonne dans certains cas. On termine enfin cette étude à base d'équations différentielles en s'occupant d'une part des perturbations que peut causer à une association stable, non plus une destruction continue, mais un apport unique d'individus d'espèces nouvelles, et d'autre part de l'influence des variations avec le temps du milieu où vivent les espèces, en se limitant au cas simple et fréquent de variations faibles et périodiques.

3. Dans la seconde partie, on introduit, systématiquement, les actions héréditaires, au sens spécial de ce terme sur lequel on a longuement insisté et l'on montre comment la théorie des rencontres et des considérations simples d'hérédité conduisent à des équations intégral-différentielles qu'on étudie dans le cas le plus simple d'une espèce dévorante et une espèce dévorée. C'est un retour au problème initial avec l'hérédité en plus, mais il n'est pas sans difficulté analytique de retrouver sous une forme voisine les trois lois fondamentales. Encore n'a-t-on pas introduit dans les équations de facteurs d'amortissement servant à rendre valables ces équations même pour des valeurs arbitrairement grandes des N ; de sorte que les fluctuations trouvées n'étant pas nécessairement bornées, il y a quelque restriction dans l'interprétation pratique des résultats (1).

Dès le début on a rapproché les problèmes biologiques de ceux de la mécanique héréditaire, étudiés dans diverses notes et mémoires par M. Volterra. La liaison est tout à fait étroite entre l'étude de la dynamique à un paramètre et du problème biologique à deux espèces précité dans l'hypothèse de fluctuations petites qui permet de simplifier les

(1) L'introduction de termes d'amortissement a pour effet de limiter supérieurement toutes les fluctuations et inférieurement celles de l'espèce dévorée (voir BRELOT, *loc. cit.*).

équations. M. Volterra, qui a étudié simultanément l'énergétique en mécanique et en biologie, n'a pas cru devoir séparer les études à cause de leurs analogies analytiques qui l'ont aidé dans ses recherches. Ces études, comme on l'a vu, se ramènent à celle d'un même système intégral-différentiel dans lequel il n'y aura plus qu'à particulariser certaines fonctions et constantes pour obtenir les deux cas; et ce serait souvent se répéter que d'étudier séparément le mouvement spontané en mécanique et le problème biologique en question. L'équation énergétique fondamentale a pour but de mettre en évidence des expressions de signe déterminé ou variant dans un même sens. On a vu toutes les conséquences qu'on en pouvait tirer surtout en mécanique. En biologie on en a déduit l'impossibilité d'une périodicité, et c'est là ce qui caractérise les actions héréditaires. On n'a guère fait qu'aborder les problèmes biologiques héréditaires; mais les difficultés d'analyse sont plus grandes que dans la première partie.

Encore, dans tous ces problèmes, n'a-t-on utilisé que l'hérédité linéaire; si dans les problèmes d'élasticité, d'électromagnétisme ou de biologie, elle est tout indiquée, il y a en dynamique un intérêt spécial à généraliser; on est ainsi conduit à des équations fonctionnelles plus générales que les équations intégral-différentielles (1).

4. A tous ces développements théoriques, quelles confirmations l'expérience va-t-elle donner? Les vérifications expérimentales sont à peine commencées. Nous avons parlé dans l'Introduction des plus importantes études statistiques sur la pêche.

Citons aussi les recherches du professeur Chapmann, qui a entrepris des études systématiques en expérimentant sur des insectes qui se prêtent à une observation facile (2). Il s'agit d'un scarabée de farine, le *Tribolium confusum*, qui vit dans la farine, milieu stable dont on peut mesurer facilement la température et le degré d'humidité. Un grand nombre d'insectes peuvent vivre dans un espace restreint et beaucoup de générations se succèdent en peu de temps. Il est facile de faire varier les conditions du milieu. Toutes ces expériences en cours ont déjà montré nettement l'existence d'un état limite, causé par la résistance du milieu,

(1) Pour cette extension voir une Note de M. VOLTERRA (*Rend. dei Lincei*, vol. XI, Ser. 6^a, 1930, p. 619).

(2) R. N. CHAPMANN, *The quantitative analysis of environmental factors* (*Ecology*, vol. IX, 1928, p. 111);

— *The trend of insect population from the viewpoint of biotic potential and environmental resistance* (manuscrit).

et qui est assez rapidement atteint. Cela s'accorde bien avec la mise en équation

$$\frac{dN}{dt} = (\epsilon - \lambda N)N,$$

dont nous avons parlé au début du Chapitre III et qui conduit à l'état limite $N = \frac{\epsilon}{\lambda}$.

On peut envisager même ici un problème plus compliqué, car les adultes mangent leurs œufs quand la nourriture fait défaut, de sorte qu'il faudrait introduire séparément les nombres d'œufs, d'adultes et même aussi de larves.

5. A côté des références surtout d'ordre mathématique données dans l'introduction, il convient de passer en revue d'une façon plus complète les idées des zoologues sur les causes déterminantes des variations chez les espèces animales coexistantes (1). L'importance de cette coexistence dans la limitation des nombres d'individus est bien connue des zoologues.

Déjà Darwin dans son *Origine des espèces par sélection naturelle* place parmi les facteurs les plus importants de l'évolution des espèces animales la lutte pour l'existence, qui consiste précisément dans la concurrence entre les individus des diverses espèces, surtout pour se nourrir. Darwin fait remarquer que l'accroissement d'une espèce ne dépend pas seulement de la nourriture qui est à sa disposition, mais qu'il dépend aussi de la possibilité d'être la proie d'autres espèces. C'est pourquoi tout ce qui fait diminuer les espèces qui se nourrissent des autres contribue à l'accroissement de celles-ci. Il donne l'exemple de la chasse qui est quelquefois favorable à l'augmentation du gibier parce qu'elle détruit les oiseaux de proie (2).

(1) Les notices bibliographiques et historiques qui suivent ont été rédigées par M. D'Ancona.

(2) La quantité de nourriture détermine, cela va sans dire, la limite extrême de la multiplication de chaque espèce; mais, le plus ordinairement, ce qui détermine le nombre moyen des individus d'une espèce, ce n'est pas la difficulté d'obtenir des aliments, mais la facilité avec laquelle ces individus deviennent la proie d'autres animaux. Ainsi, il semble hors de doute que la quantité de perdrix, de grouses et de lièvres qui peut exister dans un grand parc dépend principalement du soin avec lequel on détruit leurs ennemis. Si l'on ne tuait pas une seule tête de gibier en Angleterre pendant vingt ans, mais qu'en même temps on ne détruisit aucun de leurs ennemis, il y aurait alors probablement moins de gibier qu'il n'y en a aujourd'hui, bien qu'on en

On pourrait envisager ces mots comme une vague intuition des faits que maintenant on doit regarder comme une conséquence de la loi de perturbation des moyennes par destruction (voir p. 25 et 50).

La complexité des rapports entre les individus des diverses espèces coexistantes a été ensuite mise en relief par Möbius (1), dont l'étude des bancs d'huîtres du Schleswig-Holstein l'a conduit au concept de *biocénose* ou *association biologique*, pour désigner un ensemble d'espèces et d'individus coexistants dans un même milieu avec des échanges de nourriture ou autres. Il met aussi en évidence l'influence des divers facteurs du milieu sur la composition d'une association et considère l'espace et la nourriture comme les éléments essentiels à la base de toute association. Enfin, il reconnaît que dans chaque biocénose s'établit, entre les différentes espèces, un état d'équilibre qui peut être modifié par la variation de certains des facteurs du milieu.

Ce serait un travail pénible, et ici superflu, que mentionner tous les auteurs qui, par la suite, se sont occupés des associations biologiques et ont relevé le fait de la limitation réciproque des espèces coexistantes. Citons seulement parmi les ouvrages de caractère le plus compréhensif, ceux de Doflein (2), Cuénot (3), Hesse (4), Elton (5) et le traité récent de Friederichs dont on parlera plus loin. Tous ces auteurs indiquent qu'il existe un état d'équilibre correspondant à certains rapports entre les nombres d'individus des diverses espèces de l'association et que cet état est soumis à des variations. L'existence de ces rapports mutuels se manifeste en particulier quand on les modifie, par exemple, par l'introduction de nouvelles espèces. Dans les ouvrages cités, on trouvera de nombreux cas très connus et bien des exemples d'une telle influence de l'apport de nouvelles espèces dans une association, ou de la destruction de certaines de celles qui la constituaient. Mentionnons encore l'ouvrage de Lotka (6) qui a traité le problème des équilibres interspécifiques sur des bases mathématiques.

tue des centaines de mille chaque année. [DARWIN, Ch.. *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la lutte pour l'existence dans la nature*. Paris, Reinwald, 1887, p. 74.

(1) K. MÖBIUS, *Die Auster und die Austerwirtschaft* (Berlin, 1877).

(2) F. DOFLEIN, *Das Tier als Glied des Naturganzen*, in HESSE und DOFLEIN, *Tierbau und Tierleben* (Leipzig und Berlin, 1914).

(3) L. CUÉNOT, *La genèse des espèces animales*, 2^e édition (Paris, 1921).

(4) R. HESSE, *Tiergeographie auf ökologischer Grundlage* (Iena, 1924).

(5) C. S. ELTON, *Animal Ecology* (London, 1927).

(6) A. LOTKA, *Elements of physical biology* (Baltimore, 1925).

6. L'importance des équilibres biologiques a été particulièrement mise en évidence à propos des animaux nuisibles ou utiles à l'agriculture, justement parce que, dans cette branche de la biologie appliquée, on peut mieux apprécier l'utilité de l'étude de ces problèmes.

Déjà Marchal (1) avait mis en relief l'existence d'états d'équilibre numérique chez des espèces d'insectes et leurs parasites, en considérant plus particulièrement les espèces nuisibles à l'agriculture. Il reconnaît même l'existence d'oscillations périodiques du nombre des insectes eux-mêmes et, le premier, en cherche la cause dans les rapports des insectes avec leurs parasites.

Ghigi (2) dans une leçon d'ouverture à l'Université de Bologne, distingue en *externes* et *internes* les causes aptes à modifier un équilibre biologique; les premières sont dues à des phénomènes physiques qui modifient le milieu, les secondes aux rapports de nutrition et à la variabilité des êtres coexistants. Au point de vue entomologique agraire, il mentionne le système formé de plantes, d'insectes phytophages et de leurs ennemis. Entre ces trois éléments de l'association s'établit un équilibre qui peut en partie être modifié par l'action de l'homme.

Du même sujet s'est occupé Berlese (3) qui met aussi en évidence l'existence d'oscillations des équilibres biologiques et en recherche les causes, d'une part dans les conditions du milieu, d'autre part dans les variations des rapports entre les espèces.

Caullery (4) aussi souligne l'importance des insectes entomophages dans la limitation de la multiplication d'autres insectes et cite de nombreux exemples. Récemment Thompson (5) a beaucoup étudié la ques-

(1) P. MARCHAL, *L'équilibre numérique des espèces et ses relations avec les parasites chez les Insectes* (C. R. Soc. Biol., t. XLIX, 1897, p. 129).

(2) A. GHIGI, *L'equilibrio degli organismi in rapporto all'agricoltura*. Prelezione, al corso di Zoologia ed Entomologia Agraria nell'Università di Bologna (Bologne, 1903).

(3) A. BERLESE, *Considerazioni sui rapporti tra piante, loro insetti nemici e cause nemiche di questi* (Redia, vol. IV, 1906, p. 198).

(4) M. CAULLERY, *Le parasitisme et la symbiose* (Paris, 1922).

(5) W. R. THOMPSON, *Théorie de l'action des parasites entomophages. Les formules mathématiques du parasitisme cyclique* (C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922, p. 1201) — *Étude mathématique de l'action des parasites entomophages. — Durée du cycle parasitaire et accroissement de la proportion d'hôtes parasités* (C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922, p. 1433).

— *Étude des quelques cas simples de parasitisme cyclique chez les Insectes entomophages* (C. R. Acad. Sc., t. 174, 1922, p. 1647);

— *La théorie mathématique de l'action des parasites entomophages* (Revue générale des Sciences, t. XXXIV, 1923, p. 202);

tion de la lutte biologique contre les insectes nuisibles aux plantes. Il remarque que le procédé d'introduction dans certaines régions, d'ennemis naturels des insectes nuisibles, a donné de meilleurs résultats dans les régions insulaires que dans les régions continentales. En général, même dans les régions continentales, l'introduction d'un ennemi naturel réussit à rétablir bien souvent l'équilibre biologique altéré par l'importation d'une espèce nuisible. Il étudie quantitativement le développement de quelques-uns des plus importants insectes parasites des plantes cultivées et plus spécialement les facteurs qui, en Europe, limitent la multiplication de la *Pyrausta mirabilis*; il observe que cette limitation ne provient pas d'une seule cause mais d'un ensemble de facteurs agricoles, météorologiques et parasitaires, ensemble variable avec le lieu et le temps; avec des variations de ces facteurs, on peut avoir des variations de l'équilibre naturel, et en conséquence, des fluctuations dans la multiplication des espèces considérées. Thompson a aussi étudié mathématiquement le rapport entre les nombres d'individus d'une espèce et de ses parasites.

Citons ici les recherches récentes de Chapmann dont nous avons parlé plus haut (voir n° 4).

Bodenheimer (1) s'est occupé aussi des équilibres biologiques des insectes; il pense que les équilibres eux-mêmes ne sont pas déterminés par l'action des parasites, des ennemis et des maladies, ni par la limitation de la nourriture; il attribue au contraire une importance prépondérante aux phénomènes climatiques. Mais Friederichs, en exposant ces recherches (2), estime que les causes abiotiques ne sont pas exclusives à déterminer les invasions d'insectes. Le même Friederichs, dans

— *La théorie mathématique de l'action des parasites entomophages et le facteur du hasard* (Ann. Faculté des Sciences de Marseille, 2^e série, t. II, 1924, p. 69);

— *On the relative value of parasites and predators in the biological control of insect pests* (Bull. Entom. Res., vol. XIX, 1929, p. 343);

— *A contribution to the study of biological control and parasitic introduction in continental area* (Parasitology, vol. XX, 1928, p. 90)

— *On the effect of random oviposition on the action of entomophagous parasites as agents of natural control* (Parasitology, vol. XXI, 1929, p. 180)

— *On natural control* (Parasitology, vol. XXI, 1929, p. 269).

— *On the part played by parasites in the control of insects living in protected situations* (Bull. Entom. Res., vol. XX, 1930, p. 457).

W. R. THOMPSON and H. L. PARKER, *The problem of host relations with special reference to entomophagous parasites* (Parasitology, vol. XIX, 1927).

(1) F. S. BODENHEIMER, *Welche Faktoren regulieren die Individuenzahl einer Insektenart in der Natur?* (Biol. Zentralbl., Bd XLVIII, 1928, p. 714).

(2) K. FRIEDERICHS, *Welche Faktoren regeln die Individuenzahl einer Insektenart in der Natur?* Ein kritisches Referat (Anz. Schädlingkunde, Bd V, 1929, p. 119).

son récent traité ⁽¹⁾, donne de longs développements sur tout ce problème complexe des milieux des associations et des équilibres biologiques et examine à ce point de vue les invasions d'insectes et d'autres animaux nuisibles.

Dans le domaine de l'entomologie agraire, l'importance des équilibres biologiques est largement reconnue; et l'on emploie fréquemment le procédé de la lutte biologique, d'abord utilisé aux États-Unis, pour combattre certains insectes nuisibles aux plantes. Un exemple classique de telle lutte biologique est celui de l'*Icerya purchasi*, cochenille parasite de fruits acides tels que citrons, oranges, etc., qu'on a arrêtée dans sa diffusion en répandant dans les régions infestées le petit coléoptère *Novius cardinalis* qui en détruit les larves. En Italie, l'emploi de la *Prospaltella Berlese* fut recommandé par Berlese pour combattre le parasite du mûrier *Diaspis pentagona*.

Citons encore que, cette fois contre un rongeur nuisible, le *Pitymysi Savii*, sorte de campagnol (en italien *arvicola*), Splendore ⁽²⁾ a obtenu de beaux résultats pendant l'été de 1916 dans les Pouilles, en répandant une bactérie qu'il avait isolée, la *Bacterium pitymysi*.

7. Le problème des équilibres biologiques s'est posé aussi dans l'étude des épidémies, en particulier du paludisme.

Ross ⁽³⁾ a établi des équations pour définir le cours de l'épidémie paludique chez des populations humaines par rapport aux nombres des piqûres des moustiques infectés.

Lotka ⁽⁴⁾ a repris et étudié ces équations avec plus de détail; il a tenu compte aussi du retard de la période d'incubation.

Martini ⁽⁵⁾ s'est occupé aussi de ce sujet et a établi des équations qui représentent l'allure des maladies immunisantes, dans lesquelles s'éta-

⁽¹⁾ K. FRIEDERICH, *Die Grundfragen und Gesetzmässigkeiten der land-und forstwirtschaftlichen Zoologie insbesondere der Entomologie* (Berlin, 1930).

⁽²⁾ A. SPLENDORE, *Intorno alle malattie delle arvicole. Relazione sulle ricerche fatte per conto del Ministero di Agricoltura (Bollettino Minist. Agricolt., Sér. B, 1917);*

— *Studi nell'interesse di una lotta biologica contro le arvicole (Bollettino minist. Agricolt., Sér. B, 1918).*

⁽³⁾ R. ROSS, *The prevention of malaria*, seconde édition (London, 1911).

⁽⁴⁾ A. J. LOTKA and F. R. SHARPE, *Contribution to the analysis of malaria epidemiology (Americ. Journal Hygiène, vol. III, 1923, p. 1).*

⁽⁵⁾ E. MARTINI, *Berechnungen und Beobachtungen zur Epidemiologie der Malaria* (Hambourg, 1921).

Voir à ce sujet: A. J. LOTKA, *Martini's equations for the epidemiology of immunising diseases (Nature, vol. CXI, 1923, p. 633)*; G. N. WATSON, *Martini's equations for the epidemiology of immunising diseases (Nature, vol. CXI, 1923, p. 808).*

blit, pour ainsi dire, un équilibre entre le germe pathogène et son action immunisante. Dans certains cas se produisent de part et d'autre de l'état final d'équilibre des oscillations pour lesquelles apparaissent une suite de vagues épidémiques.

Puis Sella ⁽¹⁾, en collaboration avec Lucaroni, a cherché à évaluer, en se reportant aux équations de Ross, l'influence des animaux domestiques sur le régime paludique.

Depuis quelque temps, on utilise, contre le paludisme aussi, la lutte biologique qui a donné particulièrement de bons résultats en employant, comme larviphage, un petit poisson, la *Gambusia*.

Rappelons aussi les travaux d'Elton ⁽²⁾ qui signale l'existence, chez les Mammifères sauvages, d'épidémies qui en limitent la multiplication. La périodicité de ces formes épidémiques et les fluctuations du nombre des individus des espèces mammifères étudiées sont attribuées par l'auteur à des variations climatiques périodiques.

8. Dans le domaine de l'hydrobiologie l'importance des biocénoses et des équilibres biologiques fut, après Möbius, soulignée par maints auteurs.

Monti ⁽³⁾ et Thienemann ⁽⁴⁾ se sont occupés des équilibres biologiques des lacs; Brunelli ⁽⁵⁾ a relevé leur importance dans le repeuplement des lacs.

Dans les mers nord-européennes, spécialement, on a fait des études de cette nature dans le but d'évaluer la productivité marine; il serait trop long de citer toutes les recherches de ce genre; nous nous contenterons de rappeler les noms de Mc. Intosh, Hensen, Petersen qui se sont particulièrement occupés de ces problèmes.

⁽¹⁾ M. SELLA, *Relazione della campagna antianofelica di Fiumicino (1919), con speciale riguardo alla biologia degli anofeli ed agli anofeli infetti. In B. GRASSI e M. SELLA, Seconda relazione della lotta antimalarica a Fiumicino (Roma) (Roma, 1920).*

⁽²⁾ C. S. ELTON, *Plague and the regulation of numbers in wild mammals (Journ. Hygiène, vol. XXIV, 1925, p. 138).*

⁽³⁾ M^{me} R. MONTI, *La circolazione della vita nei laghi (Natura, Milano, 1910);*
— *La graduale estinzione della vita nel lago d'Orta (Rend. Ist. Lomb., Sc. Lett., vol. LXIII, 1930).*

⁽⁴⁾ A. THIENEMANN, *Lebensgemeinschaft und Lebensraum (Naturwiss. Wochenschr., Bd XVII, 1918, p. 282-297);*

— *Lebensraum und Lebensgemeinschaft (Aus der Heimat, Jhrg. XLI, 1928, p. 33)*

⁽⁵⁾ G. BRUNELLI, *Dell'equilibrio biologico nel ripopolamento dei laghi (Nuovi Annali Min. Agricolt., Anno I, 1921, p. 116).*

D'Ancona (1) a le premier observé que la pêche peut agir en modifiant l'équilibre biologique naturel. Ses recherches déjà citées dans l'introduction ont été confirmées par Marchi (2) à Cagliari.

Les recherches statistiques de D'Ancona (voir Introduction) concernent les marchés de poisson de Venise, Trieste et Fiume, qui représentent presque toute la production de la pêche en haute Adriatique. En particulier pour les espèces de fond qui sont pêchées avec des filets traînés par des barques à voiles et aussi maintenant par des petits vapeurs, il trouve que dans les années suivant immédiatement la guerre et où la pêche était reprise librement, il n'y a pas eu, sur le marché, une plus grande abondance globale qu'avant la guerre, mais pour certaines espèces une augmentation relative, pour d'autres une diminution relative. L'auteur remarque que la majeure partie des espèces qui ont augmenté sont des espèces voraces (en particulier des Sélaciens) qui se nourrissent d'autres poissons et, qu'au contraire, la majeure partie des espèces qui ont diminué est constituée d'espèces qui se nourrissent de végétaux, d'invertébrés et qui sont souvent la proie d'espèces voraces. L'auteur interprète ce fait en admettant que la diminution de la pêche de 1914 à 1918 a temporairement déplacé l'équilibre biologique de la haute Adriatique, en favorisant, parmi les espèces économiquement importantes, les plus voraces au préjudice de celles qui sont le moins armées. Il pense que l'équilibre biologique qui s'était établi naturellement entre les espèces comestibles de la haute Adriatique a été déplacé par la pêche au filet traînant à l'avantage des espèces les moins bien protégées; l'arrêt de la pêche pendant la guerre a tout ramené à l'état primitif. Il y a donc, d'après l'auteur, un *optimum* d'intensité de la pêche; en pêchant moins, on favorise les espèces plus voraces aux dépens des autres, d'où des conditions économiquement moins avantageuses; en pêchant plus, on fait diminuer toutes les espèces de plus en plus, en dépeuplant la mer.

9: L'existence de fluctuations périodiques ou irrégulières chez des

(1) U. D'ANCONA, *Dell'influenza della stasi peschereccia del periodo 1914-1918 sul patrimonio ittico dell'Alto Adriatico* (R. Comitato Talassografico italiano, Memoria CXXVI; Venise, 1926).

(2) C. MARCHI, *Osservazioni sulla statistica della pesca di mare e di stagno a Cagliari dal 1912 al 1927* (Scritti biologici, vol. IV, 1928, p. 37);

— *Verifica pratica delle leggi teoriche di Vito Volterra sulle fluttuazioni del numero di individui in specie animali conviventi* (R. Com. Talassogr. Ital. Mem. CLIV, 1929).

espèces coexistantes a été bien souvent observée et soulignée par les biologistes.

Ainsi Elton (1), déjà cité, a signalé des fluctuations au nombre des Mammifères sauvages. On connaît bien le phénomène des apparitions périodiques de certaines maladies. Citons seulement l'ouvrage de Celli (2) qui montre les alternances de recrudescence du paludisme dans la campagne romaine. Bien connues aussi sont les fluctuations de la densité chez certaines espèces, et par exemple les invasions fréquentes de sauterelles et d'autres insectes nuisibles. Dans les bancs d'huîtres, tant sur les côtes occidentales du Schleswig (3) qu'au Danemark (Limfjord) (4), on a également observé de semblables fluctuations, et dans certains cas, on a relevé l'importance des animaux qui vivent en concurrence (étoiles de mer, moules, etc.). On sait aussi qu'il y a des fluctuations périodiques chez certaines espèces de poissons utiles (5). Au Danemark, en particulier, Jacobsen et Johansen (6) ont observé des fluctuations d'espèces comestibles; ils en attribuent les causes en partie à l'influence de l'homme, en partie aux facteurs physiques. De Buen (7) en Espagne observe des fluctuations analogues pour les poissons migrateurs, en particulier pour la sardine et lui aussi attribue ce

(1) C. S. ELTON, *Periodic fluctuations in the numbers of animals: their causes and effects* (Brit. Journal Exper. Biol., vol. II, 1924, p. 119).

(2) A. CELLI, *Storia della malaria nell'agro romano* (Mem. R. Acc. Lincei, Sér. 6, vol. I, 1926, p. 73).

(3) A. HAGMEIER und R. KÄNDLER, *Neue Untersuchungen im nordfriesischen Wattenmeer und auf den fiskalischen Austernbänken* (Wiss. Meeresunters. Abt. Helgoland.-N. F. Bd XVI, 1927).

(4) R. SPARCK, *Studies on the biology of the oyster (Ostrea edulis) 2-4* (Rep. Danish Biol. Stat. XXXIII, p. 43, 1927);

— *Studies on the biology of the oyster (Ostrea edulis). 5. Further investigations of the fluctuation in the oyster stock in the Limfjord.* (Rep. Danish Biol. Stat. XXXIV, p. 3, 1928).

(5) G. C. L. HOWELL, *Ocean research and the great fisheries* (Oxford, 1921).

(6) J. P. JACOBSEN and A. C. JOHANSEN, *On the causes of the fluctuation in the yield of some of our fisheries: I. The salmon and sea trout fisheries* (Medd. Komm. Havunders. København Fiskeri, Bd VI, n° 5, 1921);

— *On the causes of the fluctuations in the yield of some of our fisheries: II. The eel fisheries* (Medd. Komm. Havunders København Fiskeri, Bd VI, n° 9, 1922).

A. C. JOHANSEN, *On the fluctuations in the quantity of young fry among plaice and certain other species of fish and causes of the same* (Rep. Dan. Biol. Stat. Copenhagen, t. XXXIII, 1927, p. 14).

(7) F. DE BUEN, *Sustitucion alternativa de las especies emigrantes* (Boletin Pesca, Madrid, nov. 1927)

— *La alternancia en la pesca de peces emigrantes* (Trab. Inst. Esp. Ocean, n° 1, Madrid, 1929)

— *Fluctuaciones en la sardina. Sardina pilchardus* (Walb.). *Pesca medidas* (Notas y Resum, Ser. II, n° 35; Madrid, 1929).

fait à des facteurs du milieu. D'autre part, Sella (1) a mis en évidence des fluctuations à longue et à brève période dans la pêche du thon, tant en Méditerranée que dans l'Atlantique. Enfin dans une récente publication du Conseil international pour l'exploration des mers (2), il y a bien 19 notes d'auteurs divers qui se sont occupés des fluctuations de plusieurs espèces de poissons utiles; et d'autre part, Schostakowitch (3) a publié des données statistiques d'où ressort une certaine périodicité dans la capture de diverses espèces de poissons.

Comme on voit, les biologistes ont recherché de préférence dans la variation des facteurs physiques du milieu la cause des fluctuations. De l'ouvrage de M. Volterra, il ressort que cependant le seul fait de la coexistence de plusieurs espèces puisse entraîner des fluctuations. Naturellement, on ne peut exclure que, dans la nature, l'une comme l'autre de ces sortes de causes puisse concourir à déterminer les fluctuations, et il est à espérer que cela pourra être démontré par l'observation et l'expérience. De toute façon, le fait remarqué par D'Ancona, de l'augmentation relative des espèces plus voraces correspondant à une suspension de la pêche, trouve seulement une explication lorsqu'on admet qu'entre les espèces dévorantes et dévorées, il s'établit des fluctuations même dans un milieu invariable.

(1) M. SELLA, *Biologia e pesca del tonno (Thunnus thynnus L.) (Atti Conv. Biol. Marina Messina, 1928, XIV, 1929).*

— *Migrazioni e habitat del tonno (Thunnus thynnus L.) studiati col metodo degli ami, con osservazioni su l'accrescimento, sul regime delle tonnare ecc. (R. Com. Talassogr. Ital. Mem. CLVI, 1929).*

(2) *Fluctuations in the abundance of the various year-classes of food fishes (Rapp. Proc.-verb. Cons. Int. Expl. Mer., t. LXV, 1930).*

(3) W. B. SCHOSTAKOWITCH, *Die periodische Schwankungen einiger biologischen Erscheinungen (Intern. Revue Hydrobiol., Hydrogr., Bd XXIII, 1929, p. 139).*

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE.....	V
INTRODUCTION.....	I
1. But de l'Ouvrage.....	1
2. Intérêt pratique de ces questions.....	2
3. Travaux mathématiques publiés sur le sujet.....	3
4, 5, 6. Méthodes employées dans l'Ouvrage. Hypothèses fondamentales et mise en équations. Étude mathématique et interprétation des résultats.....	4

CHAPITRE I.

COEXISTENCE DE DEUX ESPÈCES.

I. 1. Deux espèces se disputant la même nourriture.....	14
II. Deux espèces dont l'une se nourrit de l'autre.....	14
2. Mise en équations.....	14
3. Étude générale des fluctuations. Loi du cycle périodique et de la conservation des moyennes.....	15
4. Petites fluctuations.....	20
5. Diagrammes dans le cas général.....	22
6. Perturbation des moyennes par destruction. Loi fondamentale.....	25
III. Deux espèces dans les divers cas d'actions mutuelles.....	27
7. Tracé des diverses courbes $\varphi(N_1, N_2) = 0$	27
8. Déplacement sur ces courbes.....	29
9. Un cas de passage et les divers cas dans la destruction des espèces relative au paragraphe II.....	33

CHAPITRE II.

PREMIÈRE ÉTUDE DE LA COEXISTENCE D'UN NOMBRE QUELCONQUE D'ESPÈCES.

I. 1. Espèces se disputant la même nourriture.....	36
II. Espèces qui s'entre-dévoient.....	38
2. Notions d'équivalents; système différentiel de l'association biologique avec l'hypothèse générale des équivalents que l'on gardera.....	38
3. Quelques conséquences immédiates.....	41

	Pages.
III. <i>Cas d'un nombre pair d'espèces qui s'entre-dévorent</i>	42
4. Relation entre les nombres d'individus.....	42
5, 6, 7. Dans le cas où il y a possibilité théorique d'équilibre, les fluctuations sont bornées et non amorties.....	45
8. Loi des moyennes asymptotiques.....	49
9. Perturbation des moyennes par destruction.....	50
10. Petites fluctuations.....	52
11. Dans le cas général, diverses possibilités.....	56
12. Cas particulier où les coefficients d'accroissement sont tous nuls.....	57
IV. <i>Cas d'un nombre impair d'espèces s'entre-dévorant</i>	58
13. Il est impossible que toutes les espèces subsistent avec des variations bornées, en général.....	58
14. Cas particulier où les coefficients d'accroissement ϵ_r sont tous nuls....	59
15. Sur un cas particulier à trois espèces.....	63
<i>Note mathématique</i>	68
16. Propriétés essentielles des déterminants.....	68
17. Déterminants symétriques gauches.....	70
18. Équations linéaires.....	72
19. Formes linéaires.....	76

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE LA COEXISTENCE DE n ESPÈCES AVEC DES HYPOTHÈSES PLUS LARGES.
SYSTÈMES CONSERVATIFS ET DISSIPATIFS.

I. <i>Première extension</i> . — On fait dépendre du nombre de ses individus le coefficient d'accroissement de chaque espèce vivant seule (en conservant l'hypothèse des équivalents).....	77
1. Nouvelles équations différentielles.....	78
2. Premières conséquences.....	79
3. Cas de possibilité d'un état stationnaire : il y a alors un état limite qui est celui-là.....	80
4. Rôle d'amortissement d'une certaine forme quadratique.....	83
5. Petites variations.....	84
6. Cas d'impossibilité d'un état stationnaire.....	86
7. Extension aux hypothèses précisées adoptées dans I.....	88
8. Reprise de l'étude du cas de trois espèces examiné au Chapitre II.....	89
II. <i>Théorie beaucoup plus générale</i> . — On prend pour expression de $\frac{1}{N_i} \frac{dN_i}{dt}$ une fonction linéaire quelconque de N_j . Extension des résultats précédents.....	96
9. Équations différentielles.....	96
10. Hypothèse de l'existence d'une forme quadratique définie positive jouant le rôle de celle du paragraphe I et entraînant la résolubilité du système de l'état stationnaire.....	97
11. Cas où toutes les racines de ce système sont positives et petites variations. Autres cas.....	101

	Pages.
III. <i>Associations conservatives et dissipatives</i>	104
12. Systèmes conservatifs. Définition et conditions caractéristiques. Ce sont ceux étudiés au Chapitre II (§ II, III, IV).....	104
13. Théorèmes sur la valeur d'une association conservative.....	108
14. Systèmes dissipatifs. Définition et recherche de conditions caractéristiques. Ce sont ceux étudiés dans les deux paragraphes précédents..	109
15. Propriétés de la valeur d'une association dissipative.....	116
16. Perturbation dans un système variant au voisinage d'un état d'équilibre stable par l'apport d'individus, en petits nombres, d'espèces nouvelles.....	118
17. Applications de cette dernière étude.....	123
18. Nouvelle extension des hypothèses fondamentales.....	127
IV. <i>Introduction de l'hypothèse de variation des conditions extérieures</i>	131
19. Dans le cas de petites variations. Superposition des variations propres et des fluctuations dues à des causes externes périodiques.....	131
<i>Note mathématique</i>	135
20. Sur les formes quadratiques.....	135

CHAPITRE IV.

SUR LES ACTIONS HÉRÉDITAIRES COMPARÉES EN BIOLOGIE
ET EN MÉCANIQUE.

I. <i>Notion d'hérédité et sa traduction mathématique</i>	141
1. Idée d'hérédité; sa signification spéciale.....	141
2. Équations de l'évolution de deux espèces avec des hypothèses simples d'hérédité.....	143
3. Notions de mécanique héréditaire.....	146
4. Analogies.....	150
5. L'idée la plus générale d'hérédité et sa forme mathématique.....	152
II. <i>Étude de la coexistence d'une espèce dévorante et une espèce dévorée dans l'hypothèse d'une hérédité invariable et linéaire</i>	159
6. Principe des fluctuations.....	159
7. Propriétés de limitation pour ces fluctuations.....	162
8. Lois de conservation et perturbation des moyennes.....	165
III. <i>Énergétique héréditaire en biologie (cas précédent avec petites fluctuations) et en mécanique à un seul paramètre</i>	169
9. Équation énergétique fondamentale.....	169
10. Conséquences mécaniques et biologiques.....	171
11. Mouvement spontané en mécanique et problème biologique.....	173
12. Recherche de la périodicité.....	177
13. Problèmes avec hérédité postérieure à un certain instant et généralisations.....	183

	Pages.
<i>Note mathématique</i>	188
14. Équations intégrales de Volterra.....	188
15. Système intégré-différentiel commun au problème mécanique et au problème biologique des petites fluctuations.....	190
16. Système intégré-différentiel du problème biologique général.....	191

CONCLUSION.
HISTORIQUE. BIBLIOGRAPHIE.

1, 2, 3. Vue d'ensemble sur l'étude qui précède. — Remarques diverses.....	197
4. Vérifications expérimentales.....	201
5-9. Notice biologique et historique sur les associations et les équilibres biologiques.....	202
6. Biologie agraire.....	204
7. Épidémies. Paludisme.....	206
8. Hydrobiologie.....	207
9. Fluctuations.....	209
TABLE DES MATIÈRES.....	211





GAUTHIER-VILLARS & C^{ie}
Imprimeurs-Éditeurs
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)
Tél. : DANTON 50-14 et 50-15 R.C. Seine 22520

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris
Frais de port en sus (Cheques postaux : Paris 29.323).

OUVRAGES PARUS DANS LA COLLECTION DES
CAHIERS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE I. — Leçons sur quelques Types simples d'Équations aux dérivées partielles, avec des Applications à la Physique mathématique, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 214 pages, avec 73 figures..... 35 fr.

FASCICULE II. — Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, par E. CARTAN, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 273 pages..... 60 fr.

FASCICULE III. — Leçons sur quelques Équations fonctionnelles, avec des Applications à divers Problèmes d'Analyse et de Physique mathématique, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris, rédigées par Eugène BLANC, Agrégé de l'Université.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 184 pages, avec 61 figures..... 40 fr.

FASCICULE IV. — Leçons sur les Systèmes d'Équations aux dérivées partielles, par Maurice JANET, Professeur à l'Université de Caen.

Un volume in-8 raisin (25-16) de VIII-124 pages..... 30 fr.

FASCICULE V. — Leçons sur quelques Problèmes aux limites de la Théorie des Équations différentielles, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris, rédigées par M. Marcel BRELOT, ancien Élève de l'École Normale supérieure.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 271 pages..... 60 fr.

FASCICULE VI. — Principes géométriques d'Analyse. 1^{re} PARTIE. Leçons faites à la Sorbonne par Gaston JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par Marcel BRELOT et René DE POSSEL, Agrégés de l'Université, anciens Élèves de l'École Normale supérieure.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 116 pages..... 25 fr.

FASCICULE VII. — Leçons sur la Théorie mathématique de la Lutte pour la vie, par Vito VOLTERRA, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Rome, rédigées par Marcel BRELOT, ancien Élève de l'École Normale supérieure.

Un volume in-8 raisin (25-16) de 210 pages.

FASCICULE VIII. — Leçons sur le Problème de la Représentation conforme, par M. Gaston JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris..... (Sous presse.)

FASCICULE IX. — Quelques Applications analytiques de la Théorie des courbes et des surfaces algébriques, par Émile PICARD, de l'Académie française, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur à l'Université de Paris. (S. presse.)



GAUTHIER-VILLARS & Co

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

Tél. : DANTON 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22 520.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus (Chèques postaux : Paris 29 323).

Collection de monographies sur la Théorie des fonctions, publiée sous la direction d'ÉMILE BOREL, Membre de l'Institut. Volumes in-8 (25-16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (Éléments et principes de la théorie des ensembles; applications à la théorie des fonctions), par ÉMILE BOREL. 3^e édition..... 25 fr.

Leçons sur les fonctions entières. 2^e édition, avec une Note de GEORGES VALIRON..... 25 fr.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, par ÉMILE BOREL; recueillies et rédigées par ROBERT D'ADHÉMAR. 25 fr.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France, par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par LUDOVIC ZORETTI.... 25 fr.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE. 2^e édition..... 60 fr.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes, professées à l'École Normale supérieure, par ÉMILE BOREL et rédigées par MAURICE FRÉCHET, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE. 2^e édition, revue et corrigée avec le concours de M. A. ROUSSEL..... 25 fr.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, rédigées par A. Denjoy..... 25 fr.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF..... 25 fr.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE; 2^e édition..... (Sous presse.)

Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles de premier ordre, professées au Collège de France, par PIERRE BOUTROUX, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier; avec une Note de PAUL PAINLEVÉ..... 25 fr.

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par OTTO BLUMENTHAL..... 25 fr.

Leçons sur la théorie de la croissance, professées à la F^u des Sciences de Paris, par É. BOREL, recueillies et rédigées par A. Denjoy... 25 fr.

Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe, par PAUL MONTEL..... 25 fr.

Leçons sur le prolongement analytique, professées au Collège de France, par LUDOVIC ZORETTI..... 25 fr.

Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, professées à la Faculté des Sciences de Rome en 1910 par VITO VOLTERRA, publiées par M. Tomassetti et F.-S. Zarlatti..... 25 fr.

Leçons sur les singularités des fonctions analytiques, professées à l'Université de Budapest, par PAUL DIENES..... 25 fr.

VOLTERRA.

- Leçons sur les fonctions de lignes*, professées à la Sorbonne en 1911, par VITO VOLTERRA, recueillies et rédigées par J. PÉRÈS..... 25 fr.
- Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues*, par FRÉDÉRIC RIESZ..... 25 fr.
- Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, par C. DE LA VALLÉE POUSSIN..... 25 fr.
- Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*, professées à la Sorbonne en 1913-1914, par MAXIME BÔCHER, recueillies et rédigées par GASTON JULIA..... 25 fr.
- Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe*, par ÉMILE BOREL rédigées par G. JULIA..... 25 fr.
- Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne par C. DE LA VALLÉE POUSSIN..... 25 fr.
- Leçons sur les fonctions automorphes. Fonctions automorphes de n variables. Fonctions de Poincaré*, par GEORGES GIRAUD..... 25 fr.
- Méthodes et problèmes de Théorie des Fonctions*, par É. BOREL. 25 fr.
- Leçons d'analyse fonctionnelle*, professées au Collège de France, par PAUL LÉVY, Professeur à l'École Polytechnique, avec une Préface de J. HADAMARD, Membre de l'Institut..... 50 fr.
- Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, professées au Collège de France par GASTON JULIA, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, rédigées par P. FLAMANT..... 25 fr.
- L'Analysis Situs et la Géométrie algébrique*, par S. LEFSCHETZ. 25 fr.
- Leçons sur les fonctions quasi analytiques*, professées au Collège de France par T. CARLEMAN, Professeur à l'Université de Stockholm. 40 fr.
- Leçons sur la Composition et les Fonctions permutables*, par VITO VOLTERRA, Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Rome, et JOSEPH PÉRÈS, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille..... 25 fr.
- Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne par SERGE BERNSTEIN, Correspondant de l'Institut, Membre de l'Académie des Sciences d'Ukraine..... 50 fr.
- Leçons sur les Séries d'interpolation*, par N.-E. NÖRLUND, Professeur à l'Université de Copenhague, Membre correspondant de l'Institut de France, rédigées par RENÉ LAGRANGE..... 50 fr.
- Leçons sur les Familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, par P. MONTEL, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, recueillies et rédigées par J. BARBOTTE..... 50 fr.
- Leçons sur les nombres transfinis*, par W. SIERPINSKI, Membre de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres, Professeur à l'Université de Varsovie..... 40 fr.
- Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, par ROLF NEVANLINNA, Professeur à l'Université de Helsingfors. In-8 de VII-174 pages..... 35 fr.
- Leçons sur les équations linéaires aux différences finies*, par NÖRLUND (N. E.), rédigées par René Lagrange, Professeur à l'Université de Dijon. In-8 de VII-154 pages..... 50 fr.
- Les problèmes des Isopérimètres et des Isephanes*, par BONNESEN (T.), Professeur à l'École Polytechnique de Copenhague. In-8 de 175 p. 40 fr.
- Leçons sur les Séries divergentes*, par ÉMILE BOREL..... 40 fr.
- Les Espaces abstraits et leurs théories*, par FRÉCHET..... 50 fr.
- Leçons sur les Ensembles analytiques*, par LUSIN..... 60 fr.



GAUTHIER-VILLARS & C^o

Imprimeurs-Éditeurs

55, Quai des Grands-Augustins, PARIS (6^e)

Tél. DANTON 50-14 et 50-15.

R. C. Seine 22520.

Envoi dans toute la France et l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.
Frais de port en sus (chèques postaux : Paris 29323). R. C. Seine 22520.

Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications

COLLECTION D'OUVRAGES SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PUBLIÉE PAR

Émile BOREL

Professeur de Calcul des Probabilités et Physique mathématique
à la Faculté des Sciences de Paris, Membre de l'Institut.

AVEC LA COLLABORATION DE

C.-V.-L. CHARLIER, R. DELTHEIL, P. DUBREIL, M. FRÉCHET, H. GALBRUN,
J. HAAG, R. LAGRANGE, F. PERRIN, P. TRAYNARD, RISSER.

TOME I. — Les principes de la Théorie des probabilités.

1. Principes et formules classiques, par E. BOREL, rédigé par R. LAGRANGE. 25 fr.
2. Erreurs et moindres carrés, par Robert DELTHEIL. 30 fr.
3. Recherches théoriques modernes, par M. FRÉCHET.
4. Les principes de la statistique mathématique, par C.-E. TRAYNARD.

TOME II. — Les applications de la Théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques.

1. Applications à l'arithmétique et à la théorie des fonctions, par Emile BOREL, rédigé par DUBREIL..... 25 fr.
2. Probabilités géométriques, par Robert DELTHEIL..... 30 fr.
3. Mécanique statistique classique, par Emile BOREL, rédigé par Francis PERRIN. 25 fr.
4. Applications à l'astronomie, par C.-V.-L. CHARLIER.
5. Applications aux théories physiques actuelles, par Emile BOREL et Francis PERRIN.

TOME III. — Les applications de la Théorie des probabilités aux sciences économiques et aux sciences biologiques.

1. Assurances sur la vie. Calcul des primes, par Henri GALBRUN..... 45 fr.
2. Assurances sur la vie. Calcul des réserves, par Henri GALBRUN... 40 fr.
3. Applications à la biologie. Variations continues et Biométrie, par C.-E. TRAYNARD et RISSER.

TOME IV. — Applications diverses et conclusion.

1. Applications au tir, par J. HAAG..... 35 fr.
2. Applications aux jeux de hasard, par Emile BOREL.
3. Compléments divers.
4. Conclusion : la portée philosophique de la théorie des probabilités, par Emile BOREL.