

systèmes de valeurs

$$x_1^1 \dots x_n^1; x_1^2 \dots x_n^2; \dots; x_1^p \dots x_n^p; \dots,$$

F tendrait vers zéro; d'après la proposition qui précède, cela exigerait que tous les $x_i^p (i = 1, 2, \dots, n)$ tendent vers zéro quand p tend vers l'infini, et cela est incompatible avec la restriction imposée aux valeurs qu'on peut donner aux variables.

Pour terminer cet exposé sur les formes quadratiques, qui, s'il est incomplet, suffit à l'intelligence du chapitre, établissons en quelques mots cette propriété utilisée au cours du n° 14 que *si les coefficients d'une forme quadratique réelle varient d'une façon continue de sorte que le nombre des carrés de décomposition reste invariant, les nombres des carrés positifs et des carrés négatifs sont aussi invariants.*

En effet, l'équation en S aura toujours le même nombre N de racines différentes de zéro (N , nombre des carrés de décomposition). En vertu de la continuité des racines d'une équation à coefficients variables, dans un voisinage ⁽¹⁾ assez petit défini par $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ de toute valeur θ de l'intervalle (t_0, t_1) de variation du paramètre t dont dépendent les coefficients, les racines de l'équation en S seront assez voisines de celles correspondant à θ pour que les nombres de racines positives et négatives restent invariants dans le voisinage considéré. Considérons l'ensemble des intervalles $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ correspondant à tous les nombres θ de (t_0, t_1) . Du lemme célèbre de Borel-Lebesgue ⁽²⁾, il résulte qu'on peut extraire un nombre fini de ces intervalles, tel que chaque point de (t_0, t_1) soit compris entre les extrémités de l'un d'eux et l'on peut supposer que chacun n'est pas contenu dans un autre. Considérons alors ces intervalles I_k rangés par ordre non décroissant des abscisses des extrémités antérieures. Deux consécutifs auront une partie commune et par suite les nombres de carrés positifs et de carrés négatifs seront les mêmes dans ces deux intervalles. On en déduit, en considérant la chaîne des intervalles, le théorème annoncé.

⁽¹⁾ Ce voisinage est l'ensemble des valeurs de t commun à (t_0, t_1) et $(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$.

⁽²⁾ Ce lemme s'énonce ainsi : « Si un ensemble d'intervalles est tel que tout point de (t_0, t_1) est intérieur à l'un d'eux au moins (au sens étroit; c'est-à-dire compris entre les extrémités, celles-ci exclues), on peut extraire de cet ensemble un autre ensemble jouissant de la même propriété, mais comprenant seulement un nombre fini d'intervalles

CHAPITRE IV.

SUR LES ACTIONS HÉRÉDITAIRES COMPARÉES EN BIOLOGIE ET EN MÉCANIQUE.

- I, *Notion d'hérédité et sa traduction mathématique* : 1. Idée d'hérédité; sa signification spéciale. — 2. Équations de l'évolution de deux espèces avec des hypothèses simples d'hérédité. — 3. Notions de mécanique héréditaire. — 4. Analogies. — 5. L'idée la plus générale d'hérédité et sa forme mathématique.
- II. *Étude de la coexistence d'une espèce dévorante et une espèce dévorée dans l'hypothèse d'une hérédité invariable et linéaire* : 6. Principe des fluctuations. — 7. Propriétés de limitation pour ces fluctuations. — 8. Lois de conservation et perturbation des moyennes.
- III. *Énergétique héréditaire en biologie (cas précédent avec petites fluctuations) et en mécanique à un seul paramètre* : 9. Équation énergétique fondamentale. — 10. Conséquences mécaniques et biologiques. — 11. Mouvement spontané en mécanique et problème biologique. — 12. Recherche de la périodicité. — 13. Problèmes avec hérédité postérieure à un certain instant et généralisations.
- Note mathématique* : 14. Équations intégrales de Volterra. — 15. Système intégro-différentiel commun au problème mécanique et au problème biologique des petites fluctuations. — 16. Système intégro-différentiel du problème biologique général.

I. — NOTION D'HÉRÉDITÉ ET SA TRADUCTION MATHÉMATIQUE.

1. Dans tout ce qui précède, nous avons toujours raisonné comme si l'évolution future d'un système biologique était complètement déterminée par la connaissance de son état actuel, ou si l'on veut, comme si le passé n'avait pas d'influence. Mais rappelons-nous que, dans la mise en équation de l'évolution d'un système biologique par la théorie des rencontres, nous avons supposé que les rencontres, quand elles n'étaient pas indifférentes entre individus d'espèces distinctes, avaient

un effet immédiat se traduisant par une variation instantanée du nombre d'individus; et si cela est légitime pour l'espèce détruite, il n'en est plus de même pour celle qui profite de la rencontre; et il est évident qu'au contraire, l'effet favorable de la rencontre ne peut se manifester qu'avec un certain retard. L'état d'un système biologique à un moment donné semble donc bien devoir dépendre des rencontres ayant eu lieu pendant une période plus ou moins longue précédant ce moment; et dans les chapitres qu'on vient de développer, on a, somme toute, négligé la durée de cette période. Il convient de tenir compte maintenant de l'influence du passé.

On rencontre, *en physique*, dans l'étude de l'élasticité, du magnétisme, de l'électricité, bien des phénomènes analogues de retard, traînage ou hystérésis. On peut dire que dans le monde inorganique il existe aussi une mémoire du passé, comme la mémoire du fil de torsion dont la déformation actuelle dépend des états antérieurs. Pour marquer la distinction entre de tels phénomènes et ceux de la mécanique classique, de la mécanique céleste où, avec la plus grande exactitude, les conditions initiales (fonctions et vitesses) déterminent l'avenir, M. Picard a qualifié d'*héréditaire* la physique des premiers phénomènes (1). Ainsi s'est introduit en mécanique ce mot d'hérédité sans aucun malentendu possible sur sa signification.

Mais lorsqu'en physique l'hérédité entre en jeu, les équations différentielles et aux dérivées partielles ne peuvent plus suffire; sinon les données initiales détermineraient l'avenir. Pour faire jouer un rôle à la *suite continue* des états antérieurs (infinité de paramètres ayant la puissance du continu), il a fallu recourir à des équations intégrales et intégral-différentielles où figurent des intégrales sous lesquelles entrent les paramètres caractéristiques du système fonctions du temps pendant une période antérieure à l'instant considéré; on a même introduit des types plus généraux d'équations aux dérivées fonctionnelles. Les problèmes d'hérédité rentrent ainsi dans l'Analyse fonctionnelle et M. Volterra s'est déjà longuement occupé de cette mécanique héréditaire dans ses *Leçons sur les équations intégrales et intégral-différentielles*, puis ses *Leçons sur les fonctions de lignes* professées à la Sorbonne en 1912 (2), et récemment dans un *Mémoire*

(1) *La mécanique classique et ses approximations successives* (Riv. di Scienza, vol. I, 1907).

(2) Ces ouvrages sont parus en 1913 dans la « Collection de Monographies sur la théorie des fonctions » de E. Borel. Dans le dernier chapitre de ce second Ouvrage sont longuement développés l'introduction et l'usage de l'hérédité en mécanique et physique.

du *Journal de Mathématiques* (t. VII, fasc. III, 1928), intitulé *Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires*; enfin dans l'ouvrage : *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, by V. Volterra (Blackie and Son Limited, London and Glasgow, 1930).

Dans les *phénomènes biologiques* de coexistence d'espèces, qui ont avec la physique héréditaire l'analogie des influences du passé, nous emploierons encore les mots d'hérédité et d'action héréditaire, à défaut d'un langage spécial. Mais on les comprendra dans leur sens nouveau qui n'a rien de commun avec la signification ordinaire en biologie indiquant une transmission de caractères d'un individu à un autre qu'il engendre. Des exemples ne sont pas rares de telles nouvelles significations d'un mot : citons seulement la « lumière » obscure des physiciens.

Aussi nous nous permettons de qualifier d'héréditaires les phénomènes biologiques où la suite continue des états passés joue un rôle dans l'évolution future. Nous allons nous occuper de telles questions; de leur étude mathématique et montrer dans quel étroit rapport elles sont avec la mécanique héréditaire du monde inorganique, au point de vue analytique surtout (1).

2. Reprenons donc l'étude de deux espèces dans un milieu bien délimité, l'une dévorante, l'autre dévorée (voir Chap. I). Pour la première, dévorée, nous conserverons le raisonnement qui conduit à

$$dN_1 = \varepsilon_1 N_1 dt - \gamma_1 N_1 N_2 dt \quad (\varepsilon_1, \gamma_1 > 0).$$

Pour la seconde, nous avons été conduit en admettant que les rencontres aient un effet favorable immédiat, à l'équation

$$dN_2 = -\varepsilon_2 N_2 dt + \gamma_2 N_1 N_2 dt \quad (\varepsilon_2, \gamma_2 > 0).$$

Nous n'allons plus négliger maintenant le retard de cet effet.

Admettons que dans la seconde espèce au moins la distribution par âge des individus reste constante et soit $\varphi(\xi) d\xi$ le rapport du nombre des individus d'âge compris entre ξ et $\xi + d\xi$ au nombre total des individus de cette espèce dévorante. Alors le nombre des individus dévo-

(1) Nous reprendrons ici, avec plus de développements, la quatrième partie du *Mémoire fondamental* « *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi* » (R. Comitato Talass. It., Venezia, 1927) où l'on s'occupe des actions héréditaires en biologie.

rants ayant à l'instant t un âge au moins égal à θ est

$$N_2(t) \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi = N_2(t) f(\theta) \quad (f \geq 0 \text{ et } \neq 0).$$

Parmi les $N_2(t)$ individus existant à l'instant t , il y en a donc $N_2(t) f(t - \tau)$ qui existaient déjà à l'instant τ antérieur. Par la théorie des rencontres, on voit donc que la quantité de nourriture en individus de première espèce, absorbée pendant l'intervalle $(\tau, \tau + d\tau)$ par les individus de seconde espèce qui existaient à la fois aux instants τ et t , est

$$\gamma f(t - \tau) N_1(\tau) N_2(t) d\tau.$$

On peut admettre que cette nourriture crée un accroissement de

$$\psi(t - \tau) dt \cdot \gamma f(t - \tau) N_1(\tau) N_2(t) d\tau \quad (\psi \geq 0 \text{ et } \neq 0),$$

individus de seconde espèce pendant l'intervalle $(t, t + dt)$, de sorte qu'en sommant ces effets *supposés indépendants*, il vient

$$N_2(t) dt \int_{-\infty}^t \gamma \psi(t - \tau) f(t - \tau) N_1(\tau) d\tau.$$

On est ainsi conduit à remplacer la seconde équation différentielle par l'équation intégral-différentielle

$$dN_2 = -\varepsilon_2 N_2 dt + N_2 dt \int_{-\infty}^t F(t - \tau) N_1(\tau) d\tau$$

($F \geq 0$ et $\neq 0$),

D'où le système d'équations de l'évolution des espèces

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = N_1(t) [\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t)], \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2(t) \left[-\varepsilon_2 + \int_{-\infty}^t F(t - \tau) N_1(\tau) d\tau \right] \end{cases}$$

($F \geq 0$ et $\neq 0$),

cas particulier du système plus symétrique

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_{-\infty}^t F_1(t - \tau) N_2(\tau) d\tau \right] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_{-\infty}^t F_2(t - \tau) N_1(\tau) d\tau \right] N_2(t) \end{cases}$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$; $F_1 \geq 0, F_2 \geq 0$, et plus spécialement $\gamma_1 > 0, F_2 \neq 0$)

qu'on peut encore écrire

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t - \tau) d\tau \right] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t - \tau) d\tau \right] N_2(t). \end{cases}$$

On peut d'ailleurs justifier autrement de telles équations pour notre système biologique. Dans le Chapitre I, nous prenions comme coefficients d'accroissement respectifs dans la coexistence, $\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2$ et $-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1$, fonctions linéaires pour chaque espèce, du nombre des individus de l'autre espèce. Pour tenir compte des actions héréditaires, nous pouvons exprimer que ces coefficients d'accroissement à l'instant t dependent, pour chaque espèce, de la variation antérieure de l'autre espèce; et l'on peut le faire en ajoutant les intégrales qui figurent dans les crochets.

Si nous admettons que le passé n'a d'influence que s'il ne dépasse pas un certain éloignement et si T_0 désigne cette *durée d'hérédité*, il n'y aura qu'à supposer

$$\left. \begin{matrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{matrix} \right\} = 0 \text{ pour } t \geq T_0,$$

ce qui permet de remplacer

$$\int_{-\infty}^t F_1(t - \tau) N_2(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^t F_2(t - \tau) N_1(\tau) d\tau$$

par

$$\int_{t-T_0}^t F_1(t - \tau) N_2(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_{t-T_0}^t F_2(t - \tau) N_1(\tau) d\tau$$

ou bien

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t - \tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t - \tau) d\tau$$

par $\int_0^{T_0}$ portant sur les mêmes fonctions.

Dans tous ces raisonnements nous n'avons pas introduit, pour simplifier, l'influence d'une espèce sur elle-même quand elle devient trop nombreuse (1).

(1) L'étude du même problème avec des coefficients d'amortissement comme ceux du chapitre précédent a été faite par M. Brelot dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annali di Matematica* sous le titre *Sur le problème biologique héréditaire de deux espèces dévorante et dévorée*.

La première question qui se pose au sujet des systèmes (1), (2) ou (3), c'est celle de l'existence des intégrales. Faisons sur le système (3) les hypothèses suivantes : $\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, \gamma_2$, constantes ≥ 0 ; F_1, F_2 , fonctions ≥ 0 , continues et telles que

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau, \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau$$

aient un sens, c'est-à-dire aient une valeur finie.

Supposons connues dans $(-\infty, t_0)$ les fonctions N_1, N_2 assujetties dans cet intervalle à être continues, bornées et positives. Ou bien, dans le cas de l'hérédité limitée où F_1, F_2 sont nuls pour $\tau \geq T_0$, on supposera connues, continues et positives N_1, N_2 seulement dans $(t_0 - T_0, t_0)$.

Dans ces conditions, on peut démontrer que le système (3) admet dans $(t_0, +\infty)$ une solution formée de fonctions $N_1, N_2 > 0$ et prolongeant continûment les valeurs données, et que cette solution est la seule dans tout intervalle (t_0, t_1) .

Nous renvoyons pour la démonstration à la Note mathématique en fin du chapitre et nous concluons tout de suite que la connaissance des fluctuations des espèces pendant une durée égale à la durée d'hérédité suffit, grâce aux équations admises, à déterminer complètement les fluctuations futures (1).

3. Nous avons déjà remarqué l'analogie des systèmes biologiques et des systèmes mécaniques. Ainsi dans un système biologique conservatif, la valeur de l'association reste constante, de même que l'énergie totale d'un système mécanique conservatif sans influence externe. De plus, il y a pour les deux, au voisinage d'un état d'équilibre, des fluctuations ou oscillations non amorties. Pareille analogie existe entre les systèmes biologiques dissipatifs et les systèmes mécaniques avec frottement; il y a diminution parallèle de la valeur de l'association et de l'énergie mécanique et semblable amortissement des petites fluctuations.

L'analogie est plus marquée encore pour les petites fluctuations biologiques et les petits mouvements en mécanique dont les études se

(1) Dans le Mémoire fondamental plusieurs fois cité par exemple page 143, M. Volterra énonce et emploie ce théorème d'existence en indiquant seulement la possibilité d'une démonstration. Dans la note en fin de ce chapitre cette démonstration est développée dans ses détails. Elle ne présente pas seulement de l'intérêt pour l'équation intégrodifférentielle particulière à laquelle elle se rapporte, mais elle peut servir aussi de modèle pour établir des théorèmes d'existence dans le domaine des équations intégrodifférentielles. La remarque relative à l'unicité est de M. Brelot.

ramènent à celles d'équations linéaires. Pour un système biologique conservatif oscillant au voisinage de l'état stationnaire (q_1, \dots, q_n) on a obtenu, en posant

$$\frac{N_i}{q_i} = v_i$$

les équations linéaires :

$$\beta_r \frac{dv_r}{dt} = \sum_1^n a_{sr} q_r v_s,$$

d'où

$$\sum \beta_r v_r \frac{dv_r}{dt} = 0$$

et, en intégrant,

$$\frac{1}{2} \sum \beta_r v_r^2 = \text{const.},$$

équation analogue à celle des forces vives en mécanique.

Pour un système dissipatif, cette même quantité $\frac{1}{2} \sum \beta_r v_r^2$, où les β_r sont toujours les valeurs des individus des différentes espèces, irait en diminuant.

De telles analogies se poursuivent entre biologie et mécanique quand on introduit les actions héréditaires. C'est ce que nous allons voir en établissant d'abord les équations générales de la dynamique héréditaire.

Prenons d'abord un système mécanique auquel s'appliquent les équations classiques de Lagrange qui seront, avec les paramètres indépendants q_1, \dots, q_n la force vive,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \sum_s a_{is} q_i' q_s',$$

le potentiel $-\Omega$ des forces internes et les forces externes $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n$ fonctions du temps seul

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) - \frac{\partial (T - \Omega)}{\partial q_i} = \mathcal{Q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si les a_{is} sont des constantes et si

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_i \sum_s b_{is} q_i q_s$$

avec des b_{is} constants, les équations prendront la forme classique de la

théorie des petits mouvements

$$(5) \quad \sum_i a_{is} q_s'' + \sum_s b_{is} q_s = \mathcal{Q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et dans le cas d'un seul paramètre, l'unique équation

$$(6) \quad a q'' + b q = \mathcal{Q}.$$

Il s'agit de modifier ces équations pour tenir compte des actions héréditaires.

Prenons le cas d'un seul paramètre et supposons qu'à l'instant t l'influence du passé agisse comme une force, dont on prendra, comme expression, par analogie avec ce qu'on a vu plus haut

$$\int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau \quad \text{ou} \quad \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau \quad (1) \quad (\Phi \text{ continue}).$$

L'équation devient alors, si $a = 1$, cas auquel on se ramène par changement de paramètre,

$$(7) \quad q'' + b q = \int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau + \mathcal{Q} = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau + \mathcal{Q}.$$

En supposant que l'hérédité a une durée limitée T_0 , c'est-à-dire si $\Phi(\tau) = 0$ pour $\tau \geq T_0$, il vient

$$(8) \quad q'' + b q = \int_{t-T_0}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau + \mathcal{Q} = \int_0^{T_0} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau + \mathcal{Q}.$$

Cette force supplémentaire est la résultante des actions élémentaires $\Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau$ relatives à l'intervalle antérieur $(\tau, \tau + d\tau)$. Aussi dit-on que l'hérédité est linéaire.

Ajoutons qu'on admet comme postulat fondamental que les actions héréditaires tendent à retarder toute dissipation du déplacement q (de la position d'équilibre $q = 0$), dissipation qui pourrait tendre à se produire spontanément (sans force externe). Si donc q est resté positif dans $\left(\left\{ \begin{matrix} t-T_0 \\ -\infty \end{matrix}, t \right\}, t\right)$, et si $b > 0$ de telle sorte que sans hérédité ni force externe on aurait $q'' = -bq < 0$, l'hérédité devra augmenter q'' , c'est-à-

(1) Naturellement, on fera des hypothèses convenables pour que ces intégrales aient un sens. On s'astreindra d'abord à ce que $\int_0^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau$ ait un sens.

dire que

$$\int_0^{\left\{ \begin{matrix} +\infty \\ T_0 \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau > 0.$$

Aussi supposons-nous

$$\Phi \geq 0 \quad \text{et} \quad \neq 0.$$

Comme on admet aussi qu'une action héréditaire est d'autant plus faible, à égalité de déplacement q , qu'elle est plus lointaine, on supposera que $\Phi(\tau)$ qui doit tendre vers zéro quand $\tau \rightarrow +\infty$ est décroissante quand elle n'a pas encore atteint zéro.

On admettra enfin que, si l'on a maintenu q constant pendant une durée $\left\{ \begin{matrix} \infty \\ T_0 \end{matrix} \right\}$, il ne peut y avoir ensuite, spontanément, qu'une diminution de la valeur absolue de l'écart q . Par suite, comme à l'instant t final de l'intervalle $\left\{ \begin{matrix} (t-T_0, t) \\ (-\infty, t) \end{matrix} \right\}$ on aura, sans force externe,

$$q'' = -q \left[b - \int_0^{\left\{ \begin{matrix} +\infty \\ T_0 \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) d\tau \right],$$

il faudra que

$$(9) \quad b - \int_0^{\left\{ \begin{matrix} T_0 \\ +\infty \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) d\tau = m > 0.$$

Sinon à l'instant t , ou bien $\frac{q''}{q} > 0$ et il y aurait déplacement avec augmentation de $|q|$; ou bien

$$b - \int_0^{\left\{ \begin{matrix} +\infty \\ T_0 \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) d\tau = 0,$$

et comme $q' = 0$ le postulat fondamental de la mécanique qui impose le repos quand il n'y a ni vitesse, ni force initiale, exigerait ici qu'il n'y ait pas de déplacement.

Aux propriétés de Φ on adjoindra donc

$$(10) \quad b - \int_0^{\left\{ \begin{matrix} T_0 \\ +\infty \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) d\tau = m > 0.$$

Il est naturel maintenant d'écrire les équations (7), (8) sous la forme

$$(11) \quad q'' + m q + \int_0^{\left\{ \begin{matrix} T_0 \\ +\infty \end{matrix} \right\}} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] d\tau = \mathcal{Q}.$$

L'action interne peut donc être considérée comme résultant de la force $-mq$ proportionnelle au déplacement actuel et des forces héréditaires

$$\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau$$

proportionnelles aux excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité.

On peut généraliser tout ceci au cas d'un nombre quelconque de degrés de liberté; nous nous contenterons de renvoyer là-dessus au Mémoire du *Journal de Mathématiques* cité plus haut, p. 143.

4. *Rapprochons* les équations obtenues dans les problèmes biologique et mécanique :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = [-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau] N_2(t) \end{cases}$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$; $F_1 \geq 0, F_2 \geq 0$; et même $\gamma_1 > 0, F_2 \neq 0$).

et

$$q'' + bq = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau + \mathfrak{Q}.$$

Posons

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau = \Gamma_1, \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau = \Gamma_2.$$

Les équations biologiques seront satisfaites pour

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} = K_1, \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} = K_2,$$

qui correspondent à un état stationnaire.

En posant

$$\frac{N_1}{K_1} = 1 + q_1, \quad \frac{N_2}{K_2} = 1 + q_2,$$

elles deviennent, lorsqu'on néglige les produits de termes q_1, q_2 comme on le ferait pour étudier des petites fluctuations au voisinage de l'état

stationnaire :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = K_2 \left[-\gamma_1 q_2 - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau \right] \\ \quad (\gamma_1 > 0, F_1 \geq 0), \\ \frac{dq_2}{dt} = K_1 \left[\gamma_2 q_1 + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) q_1(t-\tau) d\tau \right] \\ \quad (\gamma_2 \geq 0, F_2 > 0 \text{ (entre } 0 \text{ et } +\infty, \text{ ou } T_0)). \end{cases}$$

D'autre part, en posant, pour l'équation de la mécanique,

$$q = q_1, \quad q' = q_2,$$

l'équation unique équivaut au système

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} + bq_1 = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q_1(t-\tau) d\tau + \mathfrak{Q}. \end{cases}$$

On voit ainsi que (12) et (13) rentrent dans le type

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \alpha_1 q_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau = \mathfrak{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \alpha_2 q_1 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) q_1(t-\tau) d\tau = \mathfrak{Q}_2, \end{cases}$$

et aussi dans le type

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \beta_1 q_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau = \mathfrak{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \beta_2 q_1 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] d\tau = \mathfrak{Q}_2. \end{cases}$$

On obtient le cas dynamique (11-13) en prenant :

$$\mathfrak{Q}_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \alpha_1 \text{ ou } \beta_1 = -1; \\ \beta_2 > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau > 0,$$

avec $\Phi_2 \geq 0, \neq 0$ et décroissant tant qu'il n'est pas nul.

L'action interne peut donc être considérée comme résultant de la force $-mq$ proportionnelle au déplacement actuel et des forces héréditaires

$$\Phi(\tau)[q(t) - q(t-\tau)] d\tau$$

proportionnelles aux excès des déplacements actuels sur les déplacements qui ont eu lieu pendant la durée de l'hérédité.

On peut généraliser tout ceci au cas d'un nombre quelconque de degrés de liberté; nous nous contenterons de renvoyer là-dessus au Mémoire du *Journal de Mathématiques* cité plus haut, p. 143.

4. Rapprochons les équations obtenues dans les problèmes biologique et mécanique :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = [-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau] N_2(t) \end{cases}$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0$; $F_1 \geq 0, F_2 \geq 0$; et même $\gamma_1 > 0, F_2 \neq 0$).

et

$$q'' + bq = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau + \mathcal{Q}.$$

Posons

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau = \Gamma_1, \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau = \Gamma_2.$$

Les équations biologiques seront satisfaites pour

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2} = K_1, \quad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} = K_2,$$

qui correspondent à un état stationnaire.

En posant

$$\frac{N_1}{K_1} = 1 + q_1, \quad \frac{N_2}{K_2} = 1 + q_2,$$

elles deviennent, lorsqu'on néglige les produits de termes q_1, q_2 comme on le ferait pour étudier des petites fluctuations au voisinage de l'état

stationnaire :

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = K_2 \left[-\gamma_1 q_2 - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau \right] \\ \quad (\gamma_1 > 0, F_1 \geq 0), \\ \frac{dq_2}{dt} = K_1 \left[\gamma_2 q_1 + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) q_1(t-\tau) d\tau \right] \\ \quad (\gamma_2 \geq 0, F_2 > 0 \text{ (entre } 0 \text{ et } +\infty, \text{ ou } T_0)). \end{cases}$$

D'autre part, en posant, pour l'équation de la mécanique,

$$q = q_1, \quad q' = q_2,$$

l'équation unique équivaut au système

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = q_2, \\ \frac{dq_2}{dt} + bq_1 = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q_1(t-\tau) d\tau + \mathcal{Q}. \end{cases}$$

On voit ainsi que (12) et (13) rentrent dans le type

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \alpha_1 q_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau = \mathcal{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \alpha_2 q_1 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) q_1(t-\tau) d\tau = \mathcal{Q}_2, \end{cases}$$

et aussi dans le type

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \beta_1 q_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau = \mathcal{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \beta_2 q_1 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] d\tau = \mathcal{Q}_2. \end{cases}$$

On obtient le cas dynamique (11-13) en prenant :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \alpha_1 \text{ ou } \beta_1 = -1; \\ \beta_2 > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau > 0, \end{aligned}$$

avec $\Phi_2 \geq 0, \neq 0$ et décroissant tant qu'il n'est pas nul.

On obtient le cas biologique (12) des petites fluctuations en prenant

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = 0, \\ \alpha_1 \text{ ou } \beta_1 - \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau > 0 \quad (\Phi_1 \geq 0), \\ \alpha_2 \text{ ou } \beta_2 - \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau \leq 0 \quad (\Phi_2 \leq 0, \neq 0). \end{aligned}$$

Terminons ce rapprochement par une *propriété fondamentale* des équations (14) ou (15) qui s'interprétera immédiatement en biologie et en mécanique : c'est que si les fonctions continues q_1, q_2 sont connues dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$ (1) ou $(t_0 - T_0, t_0)$ s'il y a hérédité limitée, et les fonctions du temps $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ données continues dans l'intervalle (t_0, t_1) où $t_1 > t_0$, les Φ étant également donnés dans $(0, +\infty)$ (et nuls au delà de T_0 dans le cas d'une hérédité limitée), les équations (14) ou (15) déterminent d'une façon unique q_1 et q_2 dans l'intervalle (t_0, t_1) .

Nous renvoyons pour la démonstration à la Note mathématique en fin du chapitre et nous tirons tout de suite les *conséquences* suivantes :

Si en *mécanique*, on connaît les déplacements pendant une période de temps égale à la durée d'hérédité et si l'on connaît les forces externes dans un intervalle de temps qui suit, on pourra calculer les déplacements qui ont lieu pendant cet intervalle de temps. Et ceci est vrai d'ailleurs quel que soit le nombre de degrés de liberté, comme il est généralisé dans le Mémoire précité du *Journal de Mathématiques*.

En *biologie*, dans l'hypothèse des petites fluctuations au voisinage d'un état d'équilibre, si on les connaît pendant une période de temps égale à la durée de l'hérédité, les équations du problème détermineront de façon unique les fluctuations futures.

5. Dans ce qui précède, nous avons traduit les actions héréditaires

(1) On suppose seulement sur ces valeurs données avant t_0 et sur les Φ que

$$\int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau$$

et les analogues en permutant les indices aient un sens et soient des fonctions continues de $t \geq t_0$.

C'est ce qui aura lieu par exemple si les Φ sont de la forme $\frac{\varphi(t)}{t^{1+\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0, |\varphi|$ borné) et si les q sont bornés dans $(-\infty, t_0)$.

par des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau,$$

ce qui, comme on l'a dit, revient à sommer les actions élémentaires provenant de l'état $q(t-\tau)$ pendant $(t-\tau-d\tau, t-\tau)$. On peut exprimer beaucoup plus généralement l'action héréditaire qui dépend de toutes les valeurs de q dans la durée d'hérédité. Cela nous amène à parler des *fonctionnelles* (1).

Imaginons qu'à toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a, b) fini ou non, assujettie ou non à certaines conditions, on fasse correspondre un nombre par un procédé déterminé, par exemple aire d'une courbe représentative, longueur s'il y en a une, éléments analogues pour une fonction de cette fonction $f(x)$, etc. Ce nombre z , correspondant à la ligne $y = f(x)$, est dit fonction de ligne ou fonctionnelle et l'on note

$$z = F[f(x)].$$

On peut imaginer que le procédé de correspondance est défini même quand a et b ne sont pas fixés, mais quelconques, ou bien assujettis à certaines conditions; et le nombre z correspondant à la ligne tracée entre les abscisses a et b est une fonction de cette ligne qu'on notera

$$z = F\left[f(x) \Big|_a^b\right].$$

Sous certaines conditions, on peut définir la dérivée pour un point $x = \xi$ de cette fonction de ligne, comme la limite du rapport de la variation de z à celle de l'aire de la courbe quand on fait varier la courbe d'un même côté (augmentation ou diminution des ordonnées) au voisinage du point d'abscisse ξ . On note cette dérivée

$$F' \left[f(x) \Big|_a^b, \xi \right].$$

On définit ensuite les dérivées successives

$$F^{(n)} \left[f(x) \Big|_a^b; \xi_1, \dots, \xi_n \right]$$

et l'on peut démontrer sous certaines restrictions une propriété qui

(1) Voir pour un exposé détaillé de ces questions, les *Leçons sur les fonctions de lignes* citées plus haut, Chap. I, II.

généralise le principe de l'inversion de l'ordre des dérivations d'une fonction d'un nombre fini de variables, c'est-à-dire la symétrie par rapport aux lettres ξ_1, \dots, ξ_n .

Le développement de Taylor peut se généraliser pour les fonctionnelles et l'on démontre sous certaines conditions

$$(16) \quad F \left[f(x) + \frac{b}{a} \psi(x) \right] = F \left[\frac{b}{a} \right] + \int_a^b F' \left[f(x), \xi_1 \right] \psi(\xi_1) d\xi_1 \\ + \frac{1}{2!} \int_a^b \int_a^b F'' \left[f(x), \xi_1, \xi_2 \right] \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots$$

et (extension du développement de Mac-Laurin)

$$(17) \quad F \left[\psi \left(\frac{b}{a} \right) \right] = F \left[\frac{b}{a} \right] + \int_a^b F' \left[\frac{b}{a}, \xi_1 \right] \psi(\xi_1) d\xi_1 \\ + \frac{1}{2!} \int_a^b \int_a^b F'' \left[\frac{b}{a}, \xi_1, \xi_2 \right] \psi(\xi_1) \psi(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

développements en séries convergentes.

Parmi de telles fonctionnelles, les analogues des fonctions linéaires seront du type *linéaire*

$$(18) \quad F \left[\psi \left(\frac{b}{a} \right) \right] = \varphi(a, b) + \int_a^b \Phi(a, b, \xi) \psi(\xi) d\xi,$$

obtenu en ne conservant que les deux premiers termes du développement.

Et l'on remarquera que les fonctionnelles

$$\int_{-\infty}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau = F \left(q \left(\frac{t}{-\infty} \right) \right),$$

introduites pour représenter l'action héréditaire sont justement de ce type linéaire. On peut dire que l'on est conduit à la forme mathématique choisie pour l'action héréditaire, en développant cette fonctionnelle, remarquant que le premier terme est nul si l'on veut que $q = 0$ ne laisse pas d'hérédité, puis conservant seulement le terme qui suit et enfin admettant que Φ , qui dépend de t et τ , est fonction de $t - \tau$ seul.

La première opération consiste à faire une *approximation*; la dernière hypothèse sur Φ est imposée par certains *postulats sur l'action héréditaire* que nous allons bien préciser.

Considérons donc un paramètre z d'un système dont la valeur au

temps $t = x$ dépend de toute l'histoire d'un paramètre $y = f(t)$. Alors

$$z = F \left[f \left(\frac{x}{-\infty} \right) \right].$$

On supposera $f(t)$ toujours inférieure en module à M et l'on admettra que l'action héréditaire diminue indéfiniment avec le temps. Nous énoncerons de façon précise ce *postulat de la dissipation de l'action héréditaire* en disant : si l'on change arbitrairement $f(t)$ dans $(-\infty, x_1)$ (mais toujours inférieure en module à M), tandis qu'on la conserve inaltérée dans (x_1, x) , la valeur absolue de la variation de z peut toujours être rendue inférieure à un nombre arbitrairement petit, pourvu qu'on prenne $x - x_1$ supérieur à une certaine valeur.

Si quel que soit $h, x, f(t)$

$$F \left[f \left(\frac{x}{-\infty} \right) \right] = F \left[f \left(\frac{x+h}{-\infty} \right) \right],$$

l'état de z en un certain instant sera déterminé par la façon dont s'est développée l'histoire antérieurement à cet instant; il ne dépendra que de cette histoire antérieure et pas de l'instant lui-même. Dans ce cas, où z est invariant pour toutes les translations de la courbe $\left\{ y = f \left(\frac{x}{-\infty} \right) \right\}$, on dira qu'il y a *invariabilité de l'hérédité*.

Dans bien des phénomènes d'hérédité, on peut considérer, comme vérifié par l'expérience, au moins dans ses conséquences, que pour toute variation périodique d'un système, une action héréditaire z fonctionnelle d'un seul paramètre y est périodique et de même période. Ainsi

$$z = F \left[f \left(\frac{x+T}{-\infty} \right) \right] = F \left[f \left(\frac{x}{-\infty} \right) \right],$$

quelle que soit la fonction $y = f(t)$ périodique de période T arbitraire. On peut déduire mathématiquement que cette dernière condition, appelée *condition du cycle fermé*, entraîne l'invariabilité de l'hérédité ⁽¹⁾ (en s'appuyant sur le postulat de la dissipation de l'action héréditaire). La réciproque est immédiate.

(1) On l'appelle condition du cycle fermé parce que le point $[y = f(x), z]$ décrit dans le plan (yz) une courbe fermée, périodiquement, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Voir la démonstration dans les *Leçons sur les fonctions de lignes*, Chap. VII, n° 5.

Lorsqu'on prend comme fonctionnelle $F\left[f\left(\frac{x}{-\infty}\right)\right]$,

$$z = \int_{-\infty}^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau,$$

il est aisé de voir que l'invariabilité de l'hérédité, équivalente à la condition du cycle fermé, se traduit par la condition que $\Phi(x, \tau)$ est fonction de $(x - \tau)$ seul.

En effet, l'invariabilité de l'hérédité se traduit par la condition

$$\int_{-\infty}^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{x+h} \Phi(x+h, \tau) f(\tau-h) d\tau,$$

quels que soient $x, h, f(\tau)$.

Et comme le second membre s'écrit

$$\int_{-\infty}^x \Phi(x+h, \tau+h) f(\tau) d\tau,$$

la condition devient

$$(19) \quad \int_{-\infty}^x [\Phi(x+h, \tau+h) - \Phi(x, \tau)] f(\tau) d\tau = 0.$$

Cela devant avoir lieu quelle que soit $f(\tau)$, il est nécessaire que, x et h étant pris quelconques,

$$(20) \quad \Phi(x+h, \tau+h) - \Phi(x, \tau) = 0.$$

Sinon, soit τ , un point où cette fonction de τ ne serait pas nulle. En prenant $f(\tau)$ partout nulle, sauf au voisinage de τ , on verrait que le premier membre de (19) n'est pas nul. Ainsi nécessairement (20) est réalisée quels que soient x, h, τ . Cela signifie que $\Phi(x, \tau)$ ne dépend que de la différence $x - \tau$.

Il est immédiat inversement que si Φ est de cette forme, il y a bien invariabilité de l'hérédité, car

$$\int_{-\infty}^{x+h} \Phi(x+h, \tau) f(\tau-h) d\tau = \int_{-\infty}^x \Phi(x-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Ainsi, à partir de considérations tout à fait générales, de quelques postulats sur l'hérédité et une approximation, on retombe sur les hypothèses simples des paragraphes précédents, qui sont celles de l'hérédité invariable et linéaire.

Terminons par quelques propriétés de la fonctionnelle de $q(t)$

$$(21) \quad \rho(t) = k \cdot q(t) + \int_{-\infty}^t q(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau.$$

[$k = \text{const.}$, $\Phi(t)$ donnée continue pour $t \geq 0$].

D'une part, pour $k = 0$, il s'agit des fonctionnelles simples qu'on a prises comme actions héréditaires, et d'autre part, l'équation (21) précédente se pose dans des problèmes de statique. Par exemple ce pourra être l'équation donnant l'angle de torsion d'un fil soumis au couple $q(t)$ à l'instant t , et qu'on obtient en ajoutant à l'expression ordinaire $k \cdot q(t)$ une action héréditaire

$$\int_{-\infty}^t q(\tau) \Phi(t-\tau) d\tau.$$

Démontrons d'abord que si l'on connaît $\rho(t)$ dans (t_0, t_1) et $q(t)$ dans une période précédant t_0 et de longueur égale à la durée d'hérédité ⁽¹⁾, l'équation (21) déterminera $q(t)$ dans l'intervalle (t_0, t_1) , avec les conditions supplémentaires dans le cas $k = 0$, que

$$\Phi(0) \neq 0; \quad \Phi' \text{ continue};$$

$$\rho(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0-\tau) q(\tau) d\tau.$$

En effet, l'équation (21) peut s'écrire

$$\rho(t) = k q(t) + \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau,$$

où $\int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau$ est une fonction connue de $t, z(t)$ dans l'intervalle $(t_0, +\infty)$ d'après l'hypothèse sur la connaissance de $q(t)$.

Ainsi

$$\rho(t) - z(t) = k q(t) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau$$

(1) On fait sur ces valeurs de $q(t)$ et Φ l'hypothèse que $\int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau$ ait un sens et soit fonction continue de t . Cette hypothèse sera réalisée si par exemple Φ est de la forme $\frac{\varphi(t)}{t^{1+\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0$) avec $|\varphi(t)|$ borné et si l'on suppose que dans $(-\infty, t_0) q(t)$ qu'on se donne continue est bornée.

Ces hypothèses qu'on ajoute entraînent la continuité de $\int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t-\tau) q(\tau) dt$.

et le premier membre est une fonction connue continue de t dans (t_0, t_1) , nulle si l'on suppose que

$$\rho(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} \Phi(t_0 - \tau) q(\tau) d\tau.$$

Cette équation intégrale de Volterra de première espèce si $k = 0$, de deuxième espèce si $k \neq 0$, fournit toujours $q(t)$ dans (t_0, t_1) (1).

On remarquera que la variation de $q(t)$ à partir de t_0 ne dépend pas seulement de $\rho(t)$, mais des valeurs de $q(t)$ pendant la durée d'hérédité qui précède t_0 . Lorsque $k\Phi < 0$, il est facile de trouver, en suivant M. Kostitzin (2), une infinité de solutions $q(t)$ de (21) quand on se donne seulement $\rho(t)$ à partir de t_0 . Il n'y a qu'à déterminer α tel que

$$k e^{\alpha t} + \int_{-\infty}^t e^{\alpha \tau} \Phi(t - \tau) d\tau = 0,$$

ou

$$k e^{\alpha t} + \int_0^{+\infty} e^{\alpha(t-\tau)} \Phi(\tau) d\tau = 0,$$

ou

$$k + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha \tau} \Phi(\tau) d\tau = 0,$$

ce qui est facile avec l'hypothèse $k\Phi < 0$.

Alors si $q(t)$ est solution particulière, $q(t) + Ce^{\alpha t}$ est solution quelle que soit $C =$ constante arbitraire.

On a parfois à considérer le cas de l'hérédité postérieure à un instant t_0 , où le passé n'a d'influence que s'il n'est pas antérieur à un certain instant t_0 .

Alors, au lieu de (21), on a

$$(25) \quad \rho(t) = k q(t) + \int_{t_0}^t q(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau \quad (t \geq t_0).$$

Si $k \neq 0$, cette équation de seconde espèce donne q , connaissant seulement ρ ; si $k = 0$, il en sera de même avec les hypothèses

$$\Phi' \text{ continue; } \rho(t_0) = 0; \quad \Phi(0) \neq 0.$$

La remarque de M. Kostitzin ne s'applique pas dans ce cas.

(1) Voir Note mathématique fin du chapitre.

(2) Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé (Recueil Mathématique de Moscou, 1926, p. 41, et Comptes rendus, 13 juin 1927, p. 1403).

On peut aussi considérer le cas d'une hérédité postérieure à t_0 et en même temps limitée. Il suffit de supposer dans ce qui précède immédiatement que $\Phi(t)$ est nul quand t surpasse une valeur T_0 ; on aura les mêmes propriétés d'inversion.

Terminons par quelques résultats sur l'inversion de

$$(26) \quad \rho(t) = q(t) + \int_{t_0}^t q(\tau) \Phi(t - \tau) d\tau,$$

où Φ n'est pas identiquement nulle. Si $\Phi \geq 0$, on dira que l'hérédité est accélératrice; si $\Phi \leq 0$, qu'elle est retardatrice. Or l'inversion de cette équation de seconde espèce donne

$$q(t) = \rho(t) + \int_{t_0}^t \rho(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau.$$

où, si Φ a un signe déterminé, φ a un signe contraire.

On exprime cela en disant que l'hérédité inverse d'une hérédité retardatrice est accélératrice et réciproquement. Mais si la première hérédité postérieure à t_0 est aussi limitée, il n'est pas vrai en général que l'hérédité inverse soit limitée.

Pour ces propriétés de l'équation (26), où les variations de $q(t)$ et $\rho(t)$ peuvent être qualifiées d'« histoire primitive » et d'« histoire héréditaire », nous renvoyons à la première partie de la Note de M. Volterra : *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditarii* (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, aprile 1929), où est développée cette question de l'inversion de (26) (1).

II. — ÉTUDE DE LA COEXISTENCE D'UNE ESPÈCE DÉVORANTE ET D'UNE ESPÈCE DÉVORÉE DANS L'HYPOTHÈSE D'UNE HÉRÉDITÉ INVARIABLE ET LINÉAIRE.

6. Revenons au problème biologique initial et tâchons d'obtenir les résultats qu'on a trouvés au premier Chapitre avec des hypothèses moins bonnes.

Nous partons des équations (2) ou (3) qu'on peut écrire encore, avec

(1) Voir également EVANS, Rendiconti dei Lincei, 2 Luglio 1911.

les notations $\Gamma_1, \Gamma_2, K_1, K_2$, introduites au n° 4 :

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -N_1 \left[\gamma_1(N_2 - K_2) + \int_0^{+\infty} F_1(\tau) [N_2(t-\tau) - K_2] d\tau \right], \\ \frac{dN_2}{dt} = N_2 \left[\gamma_2(N_1 - K_1) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) [N_1(t-\tau) - K_1] d\tau \right]. \end{cases}$$

Nous nous plaçons dans les hypothèses ⁽¹⁾ précisées au n° 2 et qui assurent l'existence unique d'une solution de ce système; nous ajoutons $\gamma_1 \neq 0, F_2 \not\equiv 0$ [voir hypothèse du système (2)].

Essayons d'étendre au cas héréditaire le principe fondamental des fluctuations.

Montrons d'abord que, quel que soit $\alpha > 0$, il est impossible qu'à partir d'un certain moment

$$|N_1 - K_1| > \alpha, \quad \text{et de même} \quad |N_2 - K_2| > \alpha.$$

Supposons en effet qu'à partir de t_1 on ait par exemple

$$N_1 > K_1 + \alpha.$$

Alors, pour $t > t_1$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} F_2(\tau) [N_1(t-\tau) - K_1] d\tau$$

ou

$$\int_{-\infty}^t F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1] d\tau,$$

égale à

$$\int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1] d\tau + \int_{t_1}^t F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1] d\tau,$$

est supérieure à

$$\alpha \int_{t_1}^t F_2(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1] d\tau$$

⁽¹⁾ C'est-à-dire :

$\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, \gamma_2$ constantes ≥ 0 ;

F_1, F_2 fonctions ≥ 0 continues telles que $\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau, \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau$ aient un sens.

Enfin sont supposées connues, continues, bornées et > 0 les fonctions N_1, N_2 dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$, ou seulement s'il y a hérédité limitée de durée T_0 , dans $(t_0 - T_0, t_0)$.

ou

$$\alpha \Gamma_2 + \int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1 - \alpha] d\tau.$$

Donc, pour $t > t_1$,

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} > (\gamma_2 + \Gamma_2)\alpha + \int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau) [N_1(\tau) - K_1 - \alpha] d\tau.$$

Or, si B est une limite supérieure de $N_1(t)$ dans $(-\infty, t_1)$, la dernière intégrale est en module inférieure à

$$(B + K_1 + \alpha) \int_{-\infty}^{t_1} F_2(t-\tau) d\tau$$

ou

$$(B + K_1 + \alpha) \int_{t-t_1}^{+\infty} F_2(\tau) d\tau,$$

donc tend vers zéro pour $t = +\infty$.

De sorte que, pour $t > t_2$ choisi assez grand ($t_2 > t_1$),

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} > \omega > 0, \quad \text{puisque } (\gamma_2 + \Gamma_2)\alpha > 0.$$

D'après cela, N_2 doit tendre vers $+\infty$.

A partir d'un instant assez éloigné θ_1 , on aura donc

$$N_2 > K_2 + \alpha;$$

par un raisonnement tout pareil au précédent, mais effectué sur la première équation, on verra qu'à partir d'un instant assez éloigné

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} < -\eta \quad (\eta > 0),$$

d'où il suit que N_1 doit tendre vers zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On ferait une démonstration analogue pour les autres cas de l'impossibilité à partir d'un certain moment de :

$$N_1 < K_1 - \alpha, \quad N_2 > K_2 + \alpha \quad \text{et} \quad N_2 < K_2 - \alpha.$$

Il résulte de cette propriété que chacune des fonctions N_1, N_2 ou bien n'a pas de limite pour $t = +\infty$ ou bien tend vers K_1 ou K_2 ; elles ne peuvent donc tendre vers zéro ou $+\infty$.

On peut encore montrer facilement, dans le cas d'une hérédité limitée, que N_1 , comme N_2 , s'ils ne deviennent pas au delà d'un certain instant égaux à K_1 ou K_2 respectivement, ne peuvent à partir d'un certain moment ne jamais plus prendre de valeurs d'un côté déterminé de K_1 ou de K_2 , donc en particulier tendre asymptotiquement vers K_1 ou K_2 .

Supposons, en effet, qu'on ait, par exemple, à partir d'un certain moment t_1 ,

$$N_1 \geq K_1,$$

Or, avec une hérédité de durée T_0 ,

$$\int_0^{+\infty} F_2(\tau) [N_1(t-\tau) - K_1] d\tau = \int_0^{T_0} F_2(\tau) [N_1(t-\tau) - K_1] d\tau$$

et à partir de l'instant $t_1 + T_0$, $N_1(t-\tau)$ reste au moins égal à K_1 quel que soit $0 \leq \tau \leq T_0$; de sorte que pour $t > t_1 + T_0$ l'intégrale est ≥ 0 et par suite $\frac{dN_1}{dt} \leq 0$; alors N_1 ne décroît pas et doit donc avoir une limite égale à K_1 ; mais alors

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) [N_2(t-\tau) - K_2] d\tau = \int_0^{T_0} F_1(\tau) [N_2(t-\tau) - K_2] d\tau$$

devient et reste ≤ 0 à partir de l'instant $t_1 + 2T_0$.

De la première équation (27) on déduit alors que pour t assez grand $\frac{dN_1}{dt}$ est ≥ 0 , de sorte que N_1 ne décroît pas et doit avoir une limite égale à K_1 . Par suite, à partir d'un certain moment, $N_1 \leq K_1$, ce qui, vu l'hypothèse initiale, impose que N_1 finisse par rester égale à K_1 .

On ferait des raisonnements analogues dans les autres cas.

Observons maintenant que, si l'une des fonctions N_1 , N_2 est à partir d'un certain moment égale à K_1 ou K_2 , il en est de même de l'autre.

D'où la conclusion :

LOI DES FLUCTUATIONS (hérédité limitée). — Si les espèces ne sont pas stationnaires à partir d'un certain moment, elles ont des fluctuations indéfinies, N_1 , N_2 traversant une infinité de fois les valeurs K_1 , K_2 correspondant à l'état stationnaire.

7. Ajoutons quelques propriétés de limitation pour ces fluctuations.

D'abord, des équations

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1 + \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] N_2(t), \end{cases}$$

on déduit aussitôt

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} < \varepsilon_1, \quad \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} > -\varepsilon_2;$$

d'où, pour deux instants t_1 , t_2 ($t_1 < t_2$),

$$(29) \quad \frac{N_1(t_2)}{N_1(t_1)} < e^{\varepsilon_1(t_2-t_1)}, \quad \frac{N_2(t_2)}{N_2(t_1)} > e^{-\varepsilon_2(t_2-t_1)}.$$

Il en résulte pour $t - \tau \geq t_0$

$$\frac{N_1(t)}{N_1(t-\tau)} < e^{\varepsilon_1\tau}, \quad \frac{N_2(t)}{N_2(t-\tau)} > e^{-\varepsilon_2\tau} \quad (\tau > 0);$$

donc pour $t \geq t_0 + T_0$

$$(30) \quad \begin{cases} \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \leq N_2(t) \int_0^{T_0} F_1(\tau) e^{\varepsilon_1\tau} d\tau \leq e^{\varepsilon_1 T_0} N_2(t) \Gamma_1, \\ \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau > N_1(t) \int_0^{T_0} F_2(\tau) e^{-\varepsilon_2\tau} d\tau > e^{-\varepsilon_2 T_0} N_1(t) \Gamma_2; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} \geq \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - e^{\varepsilon_1 T_0} \Gamma_1 N_2(t), \\ \frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} > -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + e^{-\varepsilon_2 T_0} \Gamma_2 N_1(t),$$

et, par suite,

$$\frac{N_1(t_2)}{N_1(t_1)} \geq e^{\varepsilon_1(t_2-t_1)} e^{-(\gamma_1 + e^{\varepsilon_1 T_0} \Gamma_1) \int_{t_1}^{t_2} N_2(t) dt} \\ \frac{N_2(t_2)}{N_2(t_1)} > e^{-\varepsilon_2(t_2-t_1)} e^{(\gamma_2 + e^{-\varepsilon_2 T_0} \Gamma_2) \int_{t_1}^{t_2} N_1(t) dt}$$

D'après (29), en négligeant les cas où l'un au moins des ε serait

nul ⁽¹⁾,

$$\int_{t_1}^{t_2} N_2(t) dt < N_2(t_2) \int_{t_1}^{t_2} e^{\varepsilon_2(t_2-t)} dt = N_2(t_2) \frac{e^{\varepsilon_2(t_2-t_1)} - 1}{\varepsilon_2},$$

$$\int_{t_1}^{t_2} N_1(t) dt > N_1(t_2) \int_{t_1}^{t_2} e^{-\varepsilon_1(t_2-t)} dt = N_1(t_2) \frac{1 - e^{-\varepsilon_1(t_2-t_1)}}{\varepsilon_1};$$

d'où

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{N_1(t_2)}{N_1(t_1)} > e^{\varepsilon_1(t_2-t_1)} e^{-(\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1) \frac{e^{\varepsilon_2(t_2-t_1)} - 1}{\varepsilon_2}} N_2(t_2) \\ \frac{N_2(t_2)}{N_2(t_1)} > e^{-\varepsilon_2(t_2-t_1)} e^{(\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2) \frac{1 - e^{-\varepsilon_1(t_2-t_1)}}{\varepsilon_1}} N_1(t_1); \end{cases}$$

d'où l'on déduirait aisément des limitations plus simples, mais moins bonnes.

Il est facile de tirer, de ces diverses inégalités, des propriétés des extrema utiles dans la suite. D'abord, pour les extrema de N_1 ultérieurs à $t_0 + T_0$, on a

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \int_0^{T_0} F_1(\tau) N_2(t - \tau) d\tau = 0,$$

d'où, grâce à la première inégalité (30),

$$(32) \quad \begin{cases} 0 \leq \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 \leq e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1 N_2, \\ \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1} \leq N_2 \leq \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}, \end{cases}$$

le signe égal n'ayant lieu que si $F_1 = 0$, comme dans ce qui précède. Retenons en particulier pour la suite que pour les instants des extrema de N_1 , N_2 est limité inférieurement par un nombre positif.

D'autre part, pour les extrema de N_2 , on a

$$\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1 - \int_0^{T_0} F_2(\tau) N_1(t - \tau) d\tau = 0.$$

Or, d'après (29) et (31), on a pour $0 \leq \tau \leq T_0$

$$N_1(t) e^{-\varepsilon_1 T_0} < N_1(t - \tau) < N_1(t) e^{(\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1) \frac{e^{\varepsilon_2 T_0} - 1}{\varepsilon_2}} N_2(t).$$

D'où, pour les extrema de N_2 postérieurs à $t_0 + T_0$,

$$N_1(t) e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2 < \varepsilon_2 - \gamma_2 N_1(t) < N_1(t) e^{(\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1) \frac{e^{\varepsilon_2 T_0} - 1}{\varepsilon_2}} N_2(t) \Gamma_2;$$

⁽¹⁾ Dans ces cas-là, on ferait un raisonnement analogue avec des conclusions de même forme (34) et (35).

d'où, en posant

$$(33) \quad \begin{aligned} \mu &\geq (\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1) \frac{e^{\varepsilon_2 T_0} - 1}{\varepsilon_2}, \\ \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{-\varepsilon_1 T_0} \Gamma_2} &> N_1(t) > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\mu N_2(t)} \Gamma_2}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout extremum de N_2 (postérieur à $t_0 + T_0$) moindre qu'un nombre positif donné B

$$(33') \quad N_1(t) > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\mu B} \Gamma_2}$$

nombre positif fixe et en particulier pour les extrema au plus égaux à K_2 ,

$$N_1(t) > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + e^{\varepsilon_1 m} \Gamma_2}, \quad \text{où } m = \frac{e^{2\varepsilon_2 T_0}}{\varepsilon_2}.$$

Enfin, remarquons encore, en vue de la suite, que si $N_1(\theta)$ est un extremum ⁽¹⁾, on aura dans l'intervalle $\theta - T_0 \leq t \leq \theta$

$$(34) \quad N_2(t) < p_2 N_2(\theta) \quad (p_2 = e^{\varepsilon_2 T_0} \text{ indépendant de } \theta).$$

Si $N_1(\theta)$ est un extremum ⁽¹⁾ de N_1 , on aura dans l'intervalle $\theta - T_0 \leq t \leq \theta$, d'après les inégalités (31) et (32),

$$N_1(t) < N_1(\theta) e^{(\gamma_1 + e^{\varepsilon_2 T_0} \Gamma_1) \frac{e^{\varepsilon_2 T_0} - 1}{\varepsilon_2}} \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1},$$

c'est-à-dire

$$(35) \quad N_1(t) < p_1 N_1(\theta),$$

où p_1 est un nombre > 0 indépendant de θ .

8. Abordons l'étude des moyennes, dans les hypothèses qui précèdent (hérédité limitée). De

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2 - \int_{t-T_0}^{t_1} F_1(t - \tau) N_2(\tau) d\tau,$$

on déduit par intégration entre un instant fixe quelconque t_0 et un autre t_1 tel que $t_1 > t_0 + T_0$

$$(36) \quad \log \frac{N_1(t_1)}{N_1(t_0)} = \varepsilon_1(t_1 - t_0) - \gamma_1 \int_{t_0}^{t_1} N_2(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t-T_0}^t F_1(t - \tau) N_2(\tau) d\tau.$$

⁽¹⁾ Extremum postérieur à $t_0 + T_0$.

Transformons cette intégrale double. Comme F_1 est nul quand l'argument surpasse T_0 , on peut l'écrire, en remplaçant une limite variable par une limite fixe,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0-T_0}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau$$

et la décomposer suivant

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0-T_0}^{t_0} F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau.$$

Mais grâce à la formule de Dirichlet ⁽¹⁾, la seconde partie peut s'écrire

$$\int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^{t_1} F_1(t-\tau) dt$$

ou

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi \\ &= \int_{t_0}^{t_1-T_0} N_2(\tau) d\tau \int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi + \int_{t_1-T_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

D'autre part, la première partie de I s'écrit en permutant les variables

$$\int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t_1} F_1(t-\tau) dt.$$

On a pu ainsi séparer F_1 et N_2 pour obtenir

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau) d\tau \int_{t_0}^{t_1} F_1(t-\tau) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1-T_0} N_2(\tau) d\tau \int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi + \int_{t_1-T_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Or

$$\int_{t_0}^{t_1} F_1(t-\tau) dt = \int_{t_0-\tau}^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi,$$

⁽¹⁾ Elle est relative à l'intégration d'une fonction de deux variables dans un triangle rectangle, d'hypoténuse la bissectrice $y = x$ et de côtés de l'angle droit parallèles aux axes $y = a$ et $x = b$. Elle s'écrit :

$$\int_a^b dx \int_a^x F(x, y) dy = \int_a^b dy \int_y^b F(x, y) dx.$$

dans lequel $t_0 - T_0 \leq \tau \leq t_0$ est au plus égal à Γ_1 ; d'autre part

$$\int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi,$$

où $t_0 \leq \tau \leq t_1 - T_0$, donc $t_1 - \tau \geq T_0$, est juste égal à Γ_1 ; enfin

$$\int_0^{t_1-\tau} F_1(\xi) d\xi,$$

où $t_1 - T_0 \leq \tau \leq t_1$, donc $t_1 - \tau \leq T_0$, est au plus égal à Γ_1 .

D'où il résulte :

$$I = \Gamma_1 \left[\theta_1 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau) d\tau + \theta_2 \int_{t_1-T_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1-T_0} N_2(\tau) d\tau \right],$$

où θ_1, θ_2 désignent des nombres de l'intervalle $(0, 1)$.

Par suite,

$$I = \Gamma_1 \left[\theta_1 \int_{t_0-T_0}^{t_0} N_2(\tau) d\tau - (1 - \theta_2) \int_{t_1-T_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \right].$$

Soit B une limite supérieure de $N_2(t)$ dans l'intervalle $(t_0 - T_0, t_0)$ et supposons qu'à l'instant t_1 , N_2 passe par un extremum au plus égal à un certain nombre M_2 fixe, de sorte que dans l'intervalle $(t_1 - T_0, t_1)$, on ait, d'après (34),

$$N_2 < p_2 M_2.$$

Alors

$$I = \Gamma_1 \left[\theta' B T_0 - \theta'' p_2 M_2 T_0 + \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau \right] \quad \left(0 \leq \frac{\theta'}{\theta''} \leq 1 \right)$$

de sorte que l'équation (36) devient

$$(37) \quad \log \frac{N_1(t_1)}{N_1(t_0)} = \varepsilon_1(t_1 - t_0) - (\gamma_1 + \Gamma_1) \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau + S,$$

où S est en module bornée par un nombre indépendant de t_1 , pourvu que cet instant corresponde à un extremum de N_2 au plus égal à M_2 .

En divisant par $t_1 - t_0$ il vient

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \log \frac{N_1(t_1)}{N_1(t_0)} = \varepsilon_1 - (\gamma_1 + \Gamma_1) \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau + \frac{S}{t_1 - t_0}.$$

Quand t_1 tend vers $+\infty$ en restant extremum de N_2 borné par M_2 ,

$N_1(t_1)$ reste supérieur à un nombre fixe (voir équation 33'), donc

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} N_2(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1} = K_2.$$

On ferait à partir de la seconde équation fondamentale un raisonnement tout pareil à celui qu'on vient de faire sur la première. D'où la loi :

LOI DE CONSERVATION DES MOYENNES (*hérédité limitée*). — Pour chaque espèce, la moyenne du nombre de ses individus entre un instant quelconque et des instants successifs tendant vers $+\infty$ et pour lesquels cette même espèce passe par un extremum au plus égal à un nombre fixe arbitraire, a une limite (dite moyenne asymptotique) indépendante de l'état initial, et même des fluctuations pendant la durée d'hérédité qui précède, lesquelles déterminent les fluctuations futures. Cette limite est la valeur qui correspond à l'état stationnaire (¹).

Terminons en indiquant l'effet d'une destruction opérée sur les espèces, qui ferait varier ε_1 et ε_2 sans altérer les autres constantes et fonctions. Comme au premier Chapitre on remplacerait $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ par $\varepsilon_1 - \alpha\lambda, \varepsilon_2 + \beta\lambda$, α, β caractérisant les modes de destruction et λ son intensité ($\alpha, \beta, \lambda \geq 0$). D'après les valeurs des moyennes asymptotiques,

$$K_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2 + \Gamma_2}, \quad K_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1 + \Gamma_1};$$

on conclut comme au premier Chapitre :

LOI DE LA PERTURBATION DES MOYENNES. — Si l'on détruit les deux espèces uniformément et proportionnellement au nombre de leurs individus (la première assez peu pour que, seule, elle puisse encore croître), la moyenne asymptotique croît pour l'espèce dévorée et diminue pour l'autre.

Si l'on ne détruit que l'espèce dévorante ($\alpha = 0, \beta \neq 0$), sa moyenne asymptotique ne varie pas; celle de l'autre augmente; si l'on ne détruit que

(¹) Lorsqu'on introduit des termes d'amortissement, celui de l'espèce dévorée n'étant pas nul, mais l'autre pouvant l'être, on peut établir, d'après M. Brelot (voir Mémoire cité page 145 en note) que, dans le cas d'existence d'un état stationnaire, les fluctuations sont bornées et la loi de conservation des moyennes (ou loi des moyennes asymptotiques) est vraie avec le sens primitif plus général de moyenne asymptotique. Et cela sans limiter l'hérédité, d'ailleurs.

l'espèce dévorée, la moyenne asymptotique de celle-ci reste invariable, l'autre diminue.

Nous étudierons plus loin le cas des petites fluctuations qui mettra en évidence l'impossibilité d'une périodicité dans les phénomènes héréditaires.

III. — ÉNERGÉTIQUE HÉRÉDITAIRE EN BIOLOGIE (CAS PRÉCÉDENT AVEC PETITES FLUCTUATIONS) ET EN MÉCANIQUE A UN PARAMÈTRE.

9. Nous partons des équations indiquées au n° 4, avec *hérédité limitée* ou non :

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \beta_1 q_2 + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau = \mathfrak{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \beta_2 q_1 + \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] d\tau = \mathfrak{Q}_2, \end{cases}$$

où Φ_1, Φ_2 de signe constant ou nuls, de modules décroissant tant qu'ils sont $\neq 0$ et tendant vers zéro avec $\frac{1}{\tau}$, enfin donnant un sens à

$$\int_0^{+\infty} \Phi_1 d\tau, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau,$$

seront de plus supposées pourvues de dérivées continues.

Avec

$$\mathfrak{Q}_1 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \beta_1 = -1, \quad \beta_2 > 0, \\ \Phi_2 \leq 0, \neq 0 \quad (\text{croissant tant qu'il n'est pas nul}),$$

on obtient les équations du problème dynamique, q_1 étant le paramètre q , et q_2 son dérivé,

$$(11) \quad \begin{cases} q'' + mq - \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) [q(t-\tau) - q(t)] d\tau = \mathfrak{Q} \\ (m = \beta_2, \Phi = -\Phi_2). \end{cases}$$

Avec

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2 = 0, \quad \Phi_1 \geq 0, \quad \Phi_2 \leq 0 \text{ et } \neq 0, \\ \beta_1 - \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau > 0, \\ \beta_2 - \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau \leq 0,$$

on obtient, avec la condition supplémentaire de décroissance pour Φ_1 et Φ_2 , hypothèse aussi justifiée qu'en mécanique, les équations (12) du problème biologique des petites fluctuations.

Nous allons d'abord déduire de (15) ou (38) une équation analogue à celle des forces vives en mécanique.

Multiplions respectivement par $-q'_2$, q'_1 et ajoutons, il vient

$$\beta_2 q_1 q'_1 - \beta_1 q_2 q'_2 + q'_1 \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau - q'_2 \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau = \mathfrak{Q}_2 q'_1 - \mathfrak{Q}_1 q'_2$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \beta_2 q_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 q_2^2 - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau \right] \\ = - \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] q'_1(t-\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] q'_2(t-\tau) d\tau + \mathfrak{Q}_2 q'_1 - \mathfrak{Q}_1 q'_2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] q'_1(t-\tau) d\tau \\ = - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) \frac{d}{d\tau} [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau \\ = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2'(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau, \end{aligned}$$

grâce à une intégration par parties.

De même

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] q'_2(t-\tau) d\tau \\ = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1'(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau. \end{aligned}$$

En posant

$$(39) \quad \Theta = \frac{1}{2} \beta_2 q_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 q_2^2 - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau,$$

$$(40) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1'(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2'(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau,$$

on peut écrire l'équation énergétique fondamentale

$$(41) \quad \frac{d\Theta}{dt} - \Omega = \mathfrak{Q}_2 q'_1 - \mathfrak{Q}_1 q'_2.$$

10. Plaçons-nous d'abord dans le cas du problème mécanique. L'équation s'écrit

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Omega = \mathfrak{Q} q'$$

[notations relatives à (11)]

avec

$$(42) \quad \Theta = \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} m q^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau \geq 0,$$

$$(43) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi'(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau \leq 0,$$

et ces quantités ne peuvent être nulles que dans le cas d'équilibre $q = 0$.

Appelons

$$\frac{1}{2} q'^2 = E_c, \quad \text{énergie cinétique,}$$

$$\frac{1}{2} m q^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau = E_p, \quad \text{énergie potentielle,}$$

et Θ , somme des deux, l'énergie mécanique E_m .

La forme intégrale de l'équation énergétique

$$\Theta - \Theta_0 - \int_{t_0}^t \Omega dt = \int_{t_0}^t \mathfrak{Q} q' dt,$$

où le second membre est le travail \mathcal{L} des forces externes, donne l'inégalité

$$E_m - (E_m)_0 \leq \mathcal{L},$$

(égalité seulement pour l'équilibre), ce qui s'énonce :

S'il n'y a pas équilibre, le travail des forces externes dans le passage du système d'un état à l'autre est supérieur à la variation d'énergie mécanique, c'est-à-dire à la somme des variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle dans le même passage.

Si ce travail est positif, on peut dire qu'il ne se transforme jamais complètement en énergie mécanique et, s'il est négatif, que l'énergie mécanique ne se transforme que partiellement en travail mécanique externe.

Cherchons à interpréter la quantité $\int_{t_0}^t \Omega dt$. Nous dirons, au point de vue de l'hérédité, que le système revient aux conditions initiales à l'instant t si

$$q(t-\tau) = q(t_0-\tau) \quad \text{quel que soit } \tau \text{ dans l'intervalle } (0, +\infty) \text{ ou } (0, T_0),$$

c'est-à-dire si l'on passe des états antérieurs à t_0 à ceux antérieurs à t , pour la durée d'hérédité, par une simple translation dans le temps.

Alors, si le système revient aux conditions initiales, l'énergie mécanique reprend la valeur initiale et pendant le temps écoulé les forces externes ont effectué un travail égal à

$$-\int_{t_0}^t \Omega dt \geq 0 \quad (\neq 0 \text{ s'il n'y a pas eu équilibre}).$$

Cette quantité $-\int_{t_0}^t \Omega dt$ est donc le travail dissipé quand on revient aux conditions initiales. Bien remarquer que nos diverses dénominations d'énergie ne sont que des définitions; mais elles sont compatibles avec les principes de l'énergétique.

Passons à l'interprétation biologique.

Alors $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$, de sorte que

$$\frac{1}{2} \beta_2 q_1^2 - \frac{1}{2} \beta_1 q_2^2 \leq 0.$$

Mais

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau$$

et

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau$$

sont ≥ 0 , de sorte qu'on ne peut rien dire sur le signe de Θ .

Au contraire,

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau \leq 0,$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau \geq 0,$$

de sorte que

$$\Omega \leq 0.$$

Les intégrales précédentes ne peuvent être nulles que si q_1 , q_2 sont constantes, donc nulles d'après les équations fondamentales où $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = 0$.

Ainsi

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Omega = 0,$$

où $\Omega < 0$ en dehors du cas stationnaire, tandis qu'on ne peut rien dire du signe de Θ . L'équation montre que Θ est décroissante quand l'état n'est pas stationnaire.

11. Allons plus loin dans l'hypothèse $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = 0$ commune au problème biologique et au mouvement sans forces externes ou spontané.

On voit d'abord que puisque $\frac{d\Theta}{dt} = \Omega$ qui est négatif dans les deux cas, en dehors de l'équilibre, Θ est décroissante. Donc :

En dehors du cas d'équilibre mécanique ou du cas biologique stationnaire, il y a impossibilité d'un mouvement spontané périodique ou de fluctuations biologiques périodiques.

Il est immédiat en effet que si q_1 , q_2 étaient périodiques, Θ le serait aussi avec la même période.

De plus puisque dans un mouvement spontané $\Theta = E_m$ est positive et décroissante, l'énergie mécanique décroît.

Mais Θ est alors bornée; son expression

$$\Theta = \frac{1}{2} q'^2 + m q^2 + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau$$

$$(m > 0; \Phi \geq 0, \neq 0)$$

montre que $|q|$ et $|q'|$ seront donc bornés.

Enfin, d'après cette même expression, on voit que si $|q'(t_0)|$ et

$|q(\tau)| \left\{ \begin{matrix} t_0 - T_0 \\ -\infty \end{matrix} \leq \tau \leq t_0 \right\}$ sont assez petits, la valeur initiale Θ_0 de Θ sera arbitrairement petite; donc, pour $t \leq t_0$, $|q(t)|$ et $|q'(t)|$ qui sont au plus égaux à $\Theta \leq \Theta_0$ se conserveront arbitrairement petits. C'est en ce sens qu'on peut conclure à la stabilité de l'équilibre pour des déplacements antérieurs très petits.

Rien d'analogue ne peut être dit pour le cas biologique, où Θ est la somme d'une quantité négative ou nulle :

$$-\left[\frac{1}{2}(-\beta_2)q_1^2 + \frac{1}{2}\beta_1 q_2^2 \right] \quad (\beta_1, -\beta_2 > 0)$$

et d'une autre positive ou nulle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [-\Phi_2(\tau)] [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau \\ & \quad (\Phi_1, -\Phi_2 \geq 0). \end{aligned}$$

On ne peut faire un choix des valeurs dans la durée initiale d'hérédité pour que $|q_1|, |q_2|$ restent arbitrairement petits; ni même affirmer que $|q_1|, |q_2|$ resteront bornés.

Dans notre étude des petites fluctuations biologiques, il nous faut donc conserver l'hypothèse que les fluctuations restent toujours petites.

Montrons maintenant qu'il résulte des équations (38) avec $\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2 = 0, \beta_1 \beta_2 \neq 0$, que q_1 et q_2 admettent des moyennes asymptotiques nulles, s'ils sont bornés en module.

En intégrant entre t_0 et t_1 , il vient

$$\begin{aligned} q_1(t_1) - q_1(t_0) + \beta_1 \int_{t_0}^{t_1} q_2(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau &= 0, \\ q_2(t_1) - q_2(t_0) + \beta_2 \int_{t_0}^{t_1} q_1(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] d\tau &= 0. \end{aligned}$$

En divisant par $t_1 - t_0$ tous les termes, puis faisant tendre t_1 vers $+\infty$, on obtiendra la conclusion cherchée si l'on peut établir que les quotients par $t_1 - t_0$ des intégrales doubles tendent vers zéro.

Considérons donc

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau,$$

qui s'écrit aussi

$$J = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^t \Phi_1(t-\tau) [q_2(\tau) - q_2(t)] d\tau.$$

Elle se décompose suivant

$$J = - \int_{t_0}^{t_1} q_2(t) dt \int_{-\infty}^t \Phi_1(t-\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^t \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau,$$

où la première partie peut encore s'écrire, grâce au changement de variable $t - \tau = u - t$,

$$J_1 = - \int_{t_0}^{t_1} q_2(t) dt \int_t^{+\infty} \Phi_1(u-t) du.$$

Pour séparer dans la seconde Φ_1 et q_2 , nous la décomposons :

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau$$

et la formule de Lejeune-Dirichlet rappelée plus haut (§ 8) nous permet d'écrire la seconde partie

$$\int_{t_0}^{t_1} d\tau \int_{\tau}^{t_1} \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) dt = \int_{t_0}^{t_1} q_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^{t_1} \Phi_1(t-\tau) dt$$

ou, en changeant de notations,

$$\int_{t_0}^{t_1} q_2(t) dt \int_t^{t_1} \Phi_1(u-t) du,$$

intégrale qui se réduira avec J_1 .

Il vient donc pour J

$$J = - \int_{t_0}^{t_1} q_2(t) dt \int_t^{+\infty} \Phi_1(u-t) du + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau.$$

Comme $|q_1|, |q_2|$ sont bornés, il suffit d'établir que

$$\frac{\int_{t_0}^{t_1} dt \int_t^{+\infty} \Phi_1(u-t) du}{t_1 - t_0}, \quad \frac{\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{-\infty}^{t_0} \Phi_1(t-\tau) d\tau}{t_1 - t_0}$$

tendent vers zéro quand t_1 tend vers $+\infty$.

Or, les numérateurs de ces deux expressions sont égaux, car ils

s'écrivent avec des changements de variables évidents, respectivement

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_1-t}^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t-t_0}^{+\infty} \Phi_1(u) du$$

et il suffit de faire ensuite dans le premier le changement de variable $t_1 - t = u - t_0$ pour obtenir

$$\int_{t_0}^{t_1} du \int_{u-t_0}^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau$$

qui, aux notations près, est la seconde intégrale.

Étudions donc

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t-t_0}^{+\infty} \Phi_1(u) du,$$

La fonction de t : $\int_{t-t_0}^{+\infty} \Phi_1(u) du$ tend vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$. Or on sait que, si une fonction continue dans $(t_0, +\infty)$ a une limite nulle pour $t = +\infty$, sa valeur moyenne dans $(t_0, +\infty)$ tend vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire qu'il y a une moyenne asymptotique nulle comme la limite (1).

Par conséquent, $\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t-t_0}^{+\infty} \Phi_1(u) du \rightarrow 0$ quand $t_1 \rightarrow +\infty$.

Il en résulte que q_2 admet une moyenne asymptotique nulle et l'on ferait une démonstration analogue pour q_1 .

Comme conséquences, le déplacement et sa vitesse ont, dans le problème de dynamique héréditaire sans forces externes, des moyennes asymptotiques nulles. Quant au problème biologique des petites fluctuations, on trouve que les espèces ont des moyennes asymptotiques égales aux valeurs de l'état stationnaire.

Car

$$\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} N_1 dt = \frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} K_1(1+q_1) dt = K_1 + K_1 \frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} q_1 dt,$$

(1) Soit en effet M une limite supérieure de $|f(t)|$ dans $(t_0, +\infty)$, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver t_1 , tel que $t \geq t_1$ entraîne $|f(t)| < \varepsilon$. Alors, pour $t > t_1$,

$$\left| \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t f(t) dt \right| < \frac{1}{t-t_0} [M(t_1-t_0) + \varepsilon(t-t_1)] < \varepsilon + M \frac{t_1-t_0}{t-t_0}.$$

Donc, si $M \frac{t_1-t_0}{t-t_0} < \varepsilon$, c'est-à-dire $t > t_0 + \frac{M(t_1-t_0)}{\varepsilon}$, la moyenne entre t_0 et t sera en module inférieure à 2ε . On conclut immédiatement.

et de même

$$\frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} N_2 dt = K_2 + K_2 \frac{1}{t_1-t_0} \int_{t_0}^{t_1} q_2 dt.$$

On retrouve ici, pour les petites fluctuations, mais avec une durée d'hérédité limitée ou non, un résultat établi pour des fluctuations quelconques, mais dans l'hypothèse d'une hérédité limitée, et avec un sens restrictif de la moyenne asymptotique.

On vient d'établir que q_1, q_2 ont des moyennes asymptotiques nulles. Mais comment se comportent ces quantités elles-mêmes pour $t = +\infty$? Dans le cas au moins de l'hérédité limitée pour le problème biologique, on établirait tout comme au paragraphe II, que les espèces ne peuvent tendre asymptotiquement vers l'état stationnaire que s'il y a équilibre au moins à partir d'un certain moment, ce qui signifie pour les petites fluctuations, que q_1, q_2 ne peuvent tendre asymptotiquement vers zéro autrement qu'en étant nulles à partir d'un certain moment. Il n'en est pas de même dans le problème dynamique. Montrons en effet qu'on peut choisir les données initiales, c'est-à-dire les déplacements pendant la durée limitée d'hérédité, de façon que q et q' tendent vers zéro asymptotiquement en restant différentes de zéro. Il suffit de voir qu'on peut satisfaire à l'équation (11) sans second membre ($\mathcal{Q} = 0$, mouvement spontané) en prenant $q(t) = e^{-zt}$ ($z > 0$). La substitution donne en effet l'équation en z

$$z^2 + m - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) (e^{z\tau} - 1) d\tau = 0.$$

Le premier membre est une fonction continue de z , égale à $m > 0$ pour $z = 0$, et tendant vers $-\infty$ quand z tend vers $+\infty$. De sorte qu'il y a au moins une racine positive. D'où la proposition.

12. Étudions maintenant le cas où, dans les équations (38), q_1, q_2 seraient périodiques et, tout d'abord, harmoniques

$$(44) \quad \begin{cases} q_1(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t \\ q_2(t) = a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t \end{cases} \quad (\omega \geq 0).$$

En substituant dans les équations (38), il vient :

$$\begin{aligned} & a_1 \omega \cos \omega t - b_1 \omega \sin \omega t + \beta_1 (a_2 \sin \omega t + b_2 \cos \omega t) \\ & + \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) [a_2 \sin \omega t \cos \omega \tau - a_2 \cos \omega t \sin \omega \tau \\ & \quad + b_2 \cos \omega t \cos \omega \tau + b_2 \sin \omega t \sin \omega \tau \\ & \quad - a_2 \sin \omega t - b_2 \cos \omega t] d\tau = \mathcal{Q}_1 \end{aligned}$$

et une seconde équation qui se déduit de celle-ci permutant les indices 1 et 2.

Ordonnant en $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ et posant

$$\int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) d\tau = \Gamma_1, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \gamma_1, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) \sin \omega \tau d\tau = \sigma_1,$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) d\tau = \Gamma_2, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \gamma_2, \quad \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) \sin \omega \tau d\tau = \sigma_2,$$

il vient

$$\mathcal{Q}_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t,$$

$$\mathcal{Q}_2 = A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t,$$

avec

$$(45) \begin{cases} A_1 = & -\omega b_1 & +(\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1) a_2 + & \sigma_1 b_2, \\ B_1 = & \omega a_1 & - & \sigma_1 a_2 & +(\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1) b_2, \\ A_2 = & (\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2) a_1 + & \sigma_2 b_1 & - & \omega b_2 \\ B_2 = & -\sigma_2 a_1 & +(\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2) b_1 + & \omega a_2 \end{cases}$$

D'où ce résultat en mécanique, que si le déplacement est harmonique, la force sera également harmonique avec la même période.

Cherchons si l'on peut satisfaire aux équations (38) à seconds membres harmoniques donnés constants ou de même période $\frac{2\pi}{\omega}$, avec des fonctions q_1, q_2 harmoniques constantes ou de période $\frac{2\pi}{\omega}$. Le problème revient à résoudre le système (45) avec $\omega \geq 0$ ($\omega = 0$, cas des seconds membres et fonctions constantes) par rapport à a_1, b_1, a_2, b_2 . Le déterminant de ces inconnues :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -\omega & \beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1 & \sigma_1 \\ \omega & 0 & -\sigma_1 & \beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1 \\ \beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2 & \sigma_2 & 0 & -\omega \\ -\sigma_2 & \beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2 & \omega & 0 \end{vmatrix}$$

se met aisément sous la forme

$$\Delta = [\sigma_1(\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2) + \sigma_2(\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1)]^2 + [(\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1)(\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2) + \omega^2 - \sigma_1 \sigma_2]^2.$$

Il est facile de voir que dans les deux problèmes dynamique et biologique, il n'est pas nul. C'est évident si $\omega = 0$, car alors $\Delta = (\beta_1 \beta_2)^2 \neq 0$ dans les deux cas. Supposons $\omega > 0$ et remarquons alors que σ_1 (ou σ_2) est différent de zéro et du signe de Φ_1 (ou Φ_2) si cette fonction n'est pas

SUR LES ACTIONS HÉRÉDITAIRES COMPARÉES EN BIOLOGIE ET EN MÉCANIQUE. 179
identiquement nulle, son module étant alors décroissant tant qu'il n'est pas nul (1). Alors, dans le cas dynamique, Δ se réduit à

$$[-\sigma_2]^2 + [-(\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2) + \omega^2]^2$$

et n'est pas nul puisque $\sigma_2 \neq 0$.

Dans le cas biologique, les deux crochets ne peuvent être simultanément nuls; car si le premier est nul, on tire, puisque $\sigma_2 \neq 0$,

$$\frac{\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1}{\sigma_1} = -\frac{\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2}{\sigma_2} = \lambda \text{ fini,}$$

d'où en portant dans le second crochet

$$\omega^2 - (\lambda^2 + 1)\sigma_1 \sigma_2,$$

quantité qui est positive puisque

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 < 0,$$

d'où

$$\sigma_1 \sigma_2 \leq 0.$$

(1) Soit $\Phi(t) \geq 0$ dans $(0, +\infty)$ d'abord > 0 et décroissante tant qu'elle n'est pas nulle. Montrons que

$$\int_0^{+\infty} \Phi(t) \sin \omega t dt \quad \text{où } \omega > 0$$

est positive. Il suffit de voir que

$$\int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{2(K+1)\pi}{\omega}} \Phi(t) \sin \omega t dt \quad (K \text{ entier } \geq 0)$$

est positif si dans l'intervalle des limites de l'intégrale $\Phi(t)$ n'est pas partout nul. Or

$$\int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{2(K+1)\pi}{\omega}} \Phi(t) \sin \omega t dt = \int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{(2K+1)\pi}{\omega}} \Phi(t) \sin \omega t dt + \int_{\frac{(2K+1)\pi}{\omega}}^{\frac{2(K+1)\pi}{\omega}} \Phi(t) \sin \omega t dt$$

c'est-à-dire, puisque cette seconde intégrale peut s'écrire

$$-\int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{(2K+1)\pi}{\omega}} \Phi\left(u + \frac{\pi}{\omega}\right) \sin \omega u du,$$

$$\int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{2(K+1)\pi}{\omega}} \Phi(t) \sin \omega t dt = \int_{\frac{2K\pi}{\omega}}^{\frac{(2K+1)\pi}{\omega}} \left[\Phi(t) - \Phi\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) \right] \sin \omega t dt,$$

d'où l'on conclut aisément.

Nous pouvons donc conclure que pour une force externe harmonique donnée, il n'existe qu'un déplacement harmonique et il a même période que la force; et dans le cas du mouvement spontané comme dans le cas biologique, il n'y a pas d'autre solution harmonique que l'équilibre $q_1 = q_2 = 0$.

Passons au cas de fonctions q_1, q_2 périodiques quelconques; en vue des raisonnements à venir, nous précisons que l'on suppose qu'elles possèdent des dérivées troisièmes continues; de sorte (1) qu'elles seront développables en séries de Fourier dérivables une fois terme à terme :

$$(46) \quad \begin{cases} q_1(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} [a_1^{(p)} \sin p\omega t + b_1^{(p)} \cos p\omega t], \\ q_2(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} [a_2^{(p)} \sin p\omega t + b_2^{(p)} \cos p\omega t], \end{cases}$$

avec la propriété de convergence des séries

$$\sum |a_1^{(p)}|, \quad \sum |b_1^{(p)}|, \quad \sum p |a_1^{(p)}|, \quad \sum p |b_1^{(p)}|$$

et des séries analogues avec l'indice 2.

En substituant dans les équations (38) il viendra

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 &= \sum_{p=0}^{+\infty} [A_1^{(p)} \sin \omega t + B_1^{(p)} \cos \omega t], \\ \mathcal{Q}_2 &= \sum_{p=0}^{+\infty} [A_2^{(p)} \sin \omega t + B_2^{(p)} \cos \omega t], \end{aligned}$$

avec

$$(47) \quad \begin{cases} A_1^{(p)} = & - p\omega b_1^{(p)} & + [\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1^{(p)}] a_1^{(p)} + & \sigma_1^{(p)} b_1^{(p)}, \\ B_1^{(p)} = & p\omega a_1^{(p)} & - \sigma_1^{(p)} a_1^{(p)} & + [\beta_1 - \Gamma_1 + \gamma_1^{(p)}] b_1^{(p)}, \\ A_2^{(p)} = & [\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2^{(p)}] a_2^{(p)} + & \sigma_2^{(p)} b_2^{(p)} & - p\omega b_2^{(p)}, \\ B_2^{(p)} = & - \sigma_2^{(p)} a_2^{(p)} & + [\beta_2 - \Gamma_2 + \gamma_2^{(p)}] b_2^{(p)} + & p\omega a_2^{(p)}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1^{(p)} &= \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) \cos p\omega\tau \, d\tau, & \sigma_1^{(p)} &= \int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) \sin p\omega\tau \, d\tau; \\ \gamma_2^{(p)} &= \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) \cos p\omega\tau \, d\tau, & \sigma_2^{(p)} &= \int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) \sin p\omega\tau \, d\tau. \end{aligned}$$

(1) Voir PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, Chap. X, 3^e édition.

On conclut en mécanique que si le déplacement est périodique (et possède une dérivée quatrième continue), la force externe est périodique et de même période.

Enfin, en raisonnant comme plus haut pour le cas harmonique, on conclut que, pour une force externe périodique (et développable en série de Fourier), il n'y a qu'un déplacement périodique (et satisfaisant aux conditions de dérivation), qui est de même période; et dans le mouvement spontané comme dans le cas biologique il n'y a pas d'autre solution périodique (avec les hypothèses initiales sur q_1, q_2) que l'équilibre $q_1 = q_2 = 0$.

Ainsi se trouve démontrée par une autre voie l'impossibilité de la périodicité (voir, n° 11). Ajoutons quelques propriétés du mouvement périodique à force externe périodique $\neq 0$, c'est-à-dire du cycle périodique forcé.

Alors le système revient après chaque période aux conditions initiales au sens précisé, au n° 10; et le point de coordonnées (q, \mathcal{Q}) décrit pendant chaque période le même cycle fermé. Le travail effectué pendant une période par les forces externes est positif (n° 10). Pour le calculer en fonction des coefficients des développements (46) de q_1, q_2 , il est simple, au lieu d'utiliser l'expression

$$-\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Omega \, dt,$$

d'opérer directement.

Ce travail est

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \mathcal{Q}(t) q'(t) \, dt,$$

ou

$$\mathcal{L} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sum_{p=0}^{+\infty} [A_1^{(p)} \sin p\omega t + B_1^{(p)} \cos p\omega t] \sum_{p=0}^{+\infty} [a_1^{(p)} \sin p\omega t + b_1^{(p)} \cos p\omega t] \, dt,$$

et puisque

$$\sum |a_1^{(p)}|, \quad \sum |b_1^{(p)}|, \quad \sum |a_2^{(p)}|, \quad \sum |b_2^{(p)}|, \quad \sum |pb_2^{(p)}|, \quad \sum p |a_2^{(p)}|$$

convergent, donc aussi

$$\sum |A_1^{(p)}|, \quad \sum |B_1^{(p)}|,$$

on peut développer sous le signe \int et intégrer chaque terme. Grâce aux

propriétés bien connues d'intégrales de fonctions trigonométriques, il vient

$$\mathcal{L} = \frac{\pi}{\omega} \sum_{p=0}^{+\infty} [A_p^{(p)} a_p^{(p)} + B_p^{(p)} b_p^{(p)}],$$

ce qui donne d'après (47) et en utilisant les notations correspondant au cas dynamique

$$(48) \quad \mathcal{L} = \pi \sum_0^{+\infty} p \{ [a^{(p)}]^2 + [b^{(p)}]^2 \} \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \sin p\omega\tau d\tau,$$

où $a^{(p)}$, $b^{(p)}$ sont les coefficients du développement de

$$q = \sum_0^{+\infty} [a^{(p)} \sin p\omega t + b^{(p)} \cos p\omega t].$$

Dans le cas particulier du déplacement et de la force harmonique,

$$(49) \quad q(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t = G \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi \right)$$

(G, amplitude; T, période; φ , phase), on trouve pour le travail,

$$\mathcal{L} = \pi(a^2 + b^2) \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \sin \omega\tau d\tau,$$

et comme $G^2 = a^2 + b^2$, on conclut que le travail est proportionnel au carré de l'amplitude, dépend de la période, mais non de la phase et est une fonctionnelle du coefficient d'hérédité. On verra encore aisément qu'en posant

$$m - \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau + \int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \cos \omega\tau d\tau - \omega^2 = H \cos \varphi',$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi(\tau) \sin \omega\tau d\tau = H \sin \varphi',$$

où

$$H > 0, \quad 0 < \varphi' < \pi,$$

il vient

$$\mathcal{Q} = GH \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi + \varphi' \right),$$

$$\mathcal{L} = \pi G^2 H \sin \varphi'.$$

Enfin, si l'on change t en $-t$, c'est-à-dire si l'on « *invertit les oscillations de déplacement* », cela équivaut à changer φ en $\pi - \varphi$ dans l'expression (49) de q ; donc le travail ne change pas.

13. On peut se proposer les problèmes de mécanique et biologie héréditaires qui précèdent dans le cas d'une *hérédité postérieure* à un instant t_0 .

Dans le cas *biologique*, il faudra remplacer dans les équations (2) les intégrales

$$\int_{-\infty}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau, \quad \int_{-\infty}^t F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau$$

par

$$\int_{t_0}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau, \quad \int_{t_0}^t F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau.$$

Il y aura peu à modifier au raisonnement qu'on trouvera dans la Note finale du chapitre (n° 16), pour être assuré de l'existence unique d'intégrales, correspondant aux valeurs *initiales* positives $N_1(t_0)$, $N_2(t_0)$ (seulement pour l'instant t_0 et non plus pour une période le précédant).

Nous avons fait plus haut (§ II) une étude du problème biologique avec hérédité limitée. Dans le nouveau cas que nous examinons, il suffit, si l'hérédité n'a qu'une durée T_0 , de se placer à l'instant $t_0 + T_0$ pour pouvoir utiliser par la suite les résultats de l'étude du paragraphe II.

En ce qui concerne le *problème dynamique*, ou le *problème biologique des petites fluctuations*, il n'y aura qu'à remplacer dans les équations communes (14) les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \Phi_1(\tau) q_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau,$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi_2(\tau) q_1(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \Phi_2(t-\tau) q_1(\tau) d\tau$$

par

$$\int_{t_0}^t \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau \quad \text{et} \quad \int_{t_0}^t \Phi_2(t-\tau) q_1(\tau) d\tau.$$

Une légère modification à un raisonnement mathématique qu'on trouvera au n° 15 permettra encore de conclure à l'existence unique d'intégrales correspondant à des valeurs initiales $q_1(t_0)$, $q_2(t_0)$. Et si l'hérédité est *limitée*, on se ramènera aussi à l'étude du début du paragraphe III en prenant une nouvelle origine des temps après une durée T_0 égale à la durée d'hérédité et pendant laquelle on notera les fluctua-

tions; il est alors inutile de refaire une étude en ce qui concerne les propriétés générales dans un avenir assez éloigné.

Il est d'ailleurs facile de déduire des nouvelles équations

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{dq_1}{dt} + \alpha_1 q_2 + \int_{t_0}^t \Phi_1(t-\tau) q_2(\tau) d\tau = \mathfrak{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + \alpha_2 q_1 + \int_{t_0}^t \Phi_2(t-\tau) q_1(\tau) d\tau = \mathfrak{Q}_2 \end{cases}$$

une équation énergétique fondamentale analogue à (41).

On les écrira

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} + q_2 \left[\alpha_1 + \int_0^{t-t_0} \Phi_1(\tau) d\tau \right] + \int_0^{t-t_0} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)] d\tau &= \mathfrak{Q}_1, \\ \frac{dq_2}{dt} + q_1 \left[\alpha_2 + \int_0^{t-t_0} \Phi_2(\tau) d\tau \right] + \int_0^{t-t_0} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)] d\tau &= \mathfrak{Q}_2. \end{aligned}$$

On fera la combinaison $\mathfrak{Q}_2 q'_1 - \mathfrak{Q}_1 q'_2$ et l'on trouvera, par un calcul analogue à celui du n° 9, l'équation de même forme

$$(51) \quad \frac{d\Theta_1}{dt} - \Omega_1 = \mathfrak{Q}_2 q'_1 - \mathfrak{Q}_1 q'_2$$

avec

$$(52) \quad \begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{1}{2} q_1^2 \left[\alpha_2 + \int_0^{t-t_0} \Phi_2(\tau) d\tau \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} q_2^2 \left[\alpha_1 + \int_0^{t-t_0} \Phi_1(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$(53) \quad \begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi_1(\tau) [q_2(t-\tau) - q_2(t)]^2 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi_2(\tau) [q_1(t-\tau) - q_1(t)]^2 d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} q_1^2 \Phi_2(t-t_0) + \frac{1}{2} q_2^2 \Phi_1(t-t_0). \end{aligned}$$

On partirait de là pour faire une étude très voisine de celle développée plus haut.

Dans le cas dynamique (1) en particulier, avec l'équation

$$q'' + bq - \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau = \mathfrak{Q}$$

$$\left[b > \int_{t_0}^{+\infty} \Phi(\tau) d\tau > 0; \Phi \geq 0, \neq 0 \right],$$

il vient comme équation énergétique

$$(54) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \left(b - \int_{t_0}^{t-t_0} \Phi(\tau) d\tau \right) q^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau \right] \\ - \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \Phi'(\tau) [q(t-\tau) - q(t)]^2 d\tau + \frac{1}{2} \Phi(t-t_0) q^2 = \mathfrak{Q} q', \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\frac{d\Theta_1}{dt} - \Omega_1 = \mathfrak{Q} q'$ où l'on a encore :

$$\Theta_1 \geq 0, \quad \Omega_1 \leq 0.$$

Il est intéressant d'introduire la force interne

$$(55) \quad \rho(t) = -bq + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau) q(\tau) d\tau.$$

L'inversion de cette équation intégrale du type (26) donne

$$-bq(t) = \rho(t) + b \int_{t_0}^t \psi(t-\tau) \rho(\tau) d\tau \quad (\psi \geq 0, \neq 0),$$

c'est-à-dire l'histoire du déplacement par l'histoire de la force interne.

Mais, si pour les déplacements on suppose l'hérédité limitée, il ne s'ensuit pas en général que pour la force interne il en soit de même (voir n° 5).

L'introduction de ρ permet de donner une équation énergétique du même type (51), mais où figurent dans Θ_1 et Ω_1 , au lieu de q' , q et Φ , q' , ρ et ψ .

Écrivons l'équation fondamentale

$$(56) \quad q''(t) - \rho(t) = \mathfrak{Q}(t),$$

(1) Voir V. VOLTERRA, *Alcune osservazioni sui fenomeni ereditarii*, § II (*Rendiconti dei Lincei*, aprile 1929).

d'où

$$(57) \quad q'q'' - q'\rho = 2q'.$$

Or de

$$-bq = \rho(t) + b \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho(t-\tau) d\tau,$$

on déduit en dérivant

$$-bq' = \rho'(t) + b \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + b\psi(t-t_0)\rho(t_0),$$

d'où

$$-bq'\rho = \rho\rho' + b\rho(t) \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + b\rho(t_0)\rho(t)\psi(t-t_0).$$

Or,

$$\begin{aligned} & \rho(t) \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho(t-\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(t-\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

La première partie peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t_0)$$

et la seconde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \frac{d}{d\tau} [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \psi(t-t_0) [\rho(t_0) - \rho(t)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} -bq'\rho &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho^2 + \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] \\ & \quad - \frac{b}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t_0) + \frac{b}{2} \psi(t-t_0) [\rho(t_0) - \rho(t)]^2 \\ & \quad - \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau + b\psi(t-t_0)\rho(t)\rho(t_0) \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\begin{aligned} -bq'\rho &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho^2 + \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] \\ & \quad - \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau + \frac{b}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t). \end{aligned}$$

L'équation (57) peut donc s'écrire

$$(58) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b} + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] - \left[\frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t) \right] = 2q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Omega = 2q',$$

en posant

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b} + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \geq 0, \\ \Omega &= \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t), \end{aligned}$$

et dans le cas $\psi < 0$ réalisé au moins sous certaines conditions (voir Note, loc. cit.), Ω sera ≤ 0 comme Θ , et comme lui non nul en dehors du cas de l'équilibre.

Pour terminer disons un mot des généralisations à faire. Nous n'avons étudié, dans ce dernier chapitre, que la dynamique à un seul paramètre, et le cas biologique de deux espèces, seulement quand l'une dévore l'autre. Ce n'est qu'un début d'une théorie héréditaire générale. En ce qui concerne la mécanique héréditaire à plusieurs paramètres, nous renverrons aux références déjà indiquées, et plus spécialement pour l'énergétique, au Mémoire précité du *Journal de Mathématiques*, où l'on déduit, des équations fondamentales,

$$(59) \quad q_i'' + b_i q_i = \sum_1^n \int_{-\infty}^t F_{is}(t-\tau) q_s(\tau) d\tau + \mathcal{Q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et grâce à certaines hypothèses sur les F_{is} , des considérations énergétiques et des propriétés analogues à celles qu'on a données dans le cas d'un seul degré de liberté.

Quant aux problèmes généraux de biologie héréditaire, généralisant

d'où

$$(57) \quad q'q'' - q'\rho = 2q'.$$

Or de

$$-bq = \rho(t) + b \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho(t-\tau) d\tau,$$

on déduit en dérivant

$$-bq' = \rho'(t) + b \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + b \psi(t-t_0) \rho(t_0),$$

d'où

$$-bq'\rho = \rho\rho' + b\rho(t) \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + b\rho(t_0)\rho(t)\psi(t-t_0).$$

Or,

$$\begin{aligned} & \rho(t) \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho(t-\tau) \rho'(t-\tau) d\tau + \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho'(t-\tau) [\rho(t) - \rho(t-\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

La première partie peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t_0)$$

et la seconde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \frac{d}{d\tau} [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \psi(t-t_0) [\rho(t_0) - \rho(t)]^2 - \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} -bq'\rho &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho^2 + \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] \\ & \quad - \frac{b}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t_0) + \frac{b}{2} \psi(t-t_0) [\rho(t_0) - \rho(t)]^2 \\ & \quad - \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau + b \psi(t-t_0) \rho(t) \rho(t_0) \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\begin{aligned} -bq'\rho &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho^2 + \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] \\ & \quad - \frac{b}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau + \frac{b}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t). \end{aligned}$$

L'équation (57) peut donc s'écrire

$$(58) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b} + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \right] - \left[\frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t) \right] = 2q,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\Theta}{dt} - \Omega = 2q',$$

en posant

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} q'^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{b} + \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi(\tau) \rho^2(t-\tau) d\tau \geq 0, \\ \Omega &= \frac{1}{2} \int_0^{t-t_0} \psi'(\tau) [\rho(t-\tau) - \rho(t)]^2 d\tau - \frac{1}{2} \psi(t-t_0) \rho^2(t), \end{aligned}$$

et dans le cas $\psi < 0$ réalisé au moins sous certaines conditions (voir Note, loc. cit.), Ω sera ≤ 0 comme Θ , et comme lui non nul en dehors du cas de l'équilibre.

Pour terminer disons un mot des généralisations à faire. Nous n'avons étudié, dans ce dernier chapitre, que la dynamique à un seul paramètre, et le cas biologique de deux espèces, seulement quand l'une dévore l'autre. Ce n'est qu'un début d'une théorie héréditaire générale. En ce qui concerne la mécanique héréditaire à plusieurs paramètres, nous renverrons aux références déjà indiquées, et plus spécialement pour l'énergétique, au Mémoire précité du *Journal de Mathématiques*, où l'on déduit, des équations fondamentales,

$$(59) \quad q_i'' + b_i q_i' = \sum_s^n \int_{-\infty}^t F_{is}(t-\tau) q_s(\tau) d\tau + \mathcal{Q}_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et grâce à certaines hypothèses sur les F_{is} , des considérations énergétiques et des propriétés analogues à celles qu'on a données dans le cas d'un seul degré de liberté.

Quant aux problèmes généraux de biologie héréditaire, généralisant

ceux des trois premiers chapitres par l'hypothèse d'hérédité, il resterait à compléter l'étude du cas de deux espèces, puis à considérer n espèces coexistantes. En procédant comme au n° 2, au moins quand il n'y a que des espèces ou dévorantes ou dévorées, on obtient des équations du type

$$\frac{dN_r}{dt} = \left[\varepsilon_r + \sum_1^n p_{rs} N_s(t) + \int_{-\infty}^t F_{rs}(t-\tau) N_s(\tau) d\tau \right] N_r(t)$$

($r = 1, 2, \dots, n$)

qui ne diffèrent des équations (16) du Chapitre III que par l'introduction des intégrales.

On pourra étudier ce système dans le cas où un état stationnaire est possible; on est conduit à examiner le cas particulier des petites fluctuations pour lequel, avec des simplifications souvent employées, on se ramène à un système linéaire, peut-on dire, par rapport aux fonctions inconnues. Il ne semble pas que l'on puisse étendre à ce cas, au moins d'une manière immédiate, les développements correspondants du cas de deux espèces, et qu'on puisse rapprocher les équations des petites fluctuations, des équations (59) de la mécanique. Mais, en renonçant au principe des rencontres, on pourrait, avec une méthode un peu différente, obtenir un système d'équations analogue, mais qui se prêterait à des calculs d'énergétique comme dans le problème dynamique.

NOTE MATHÉMATIQUE

SUR CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES.

14. *Équations intégrales de Volterra* (1). — On appelle équation de Volterra de *seconde espèce*, l'équation intégrale du type

$$\varphi(x) = u(x) + \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

où la fonction inconnue $u(x)$ est supposée, pour simplifier, continue dans (a, b) , tandis que $\varphi(x)$ donnée est aussi continue dans cet intervalle et le noyau $K(x, \xi)$ continu dans le champ $a \leq \xi \leq x \leq b$.

(1) Voir une étude approfondie dans les *Leçons sur les équations intégrales de Volterra* (Gauthier-Villars, 1912).

On démontre que l'équation a une solution unique de la forme

$$u(x) = \varphi(x) + \int_a^x S(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

où S est fonction continue de (x, ξ) dans le même champ que K .

D'ailleurs l'inversion de cette seconde équation redonne la première.

On appelle équation de Volterra de *première espèce*, l'équation intégrale

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

où la fonction inconnue est $u(x)$ qu'on supposera continue dans (a, b) .

On supposera le noyau K continu dans le même champ que plus haut, possédant une dérivée $\frac{\partial K}{\partial \xi}$ continue dans ce champ, enfin tel que $K(x, x) \neq 0$.

En supposant de plus $\varphi(x)$ donnée continue dans (a, b) telle que $\varphi(a) = 0$, l'équation admet une solution unique. On le voit immédiatement en se ramenant à une équation de seconde espèce par une intégration par parties. Posant

$$\theta(x) = \int_a^x u(\xi) d\xi,$$

l'équation intégrale équivaut à

$$\frac{\varphi(x)}{K(x, x)} = \theta(x) - \int_a^x \frac{\frac{\partial K}{\partial \xi}}{K(x, x)} \theta(\xi) d\xi$$

qui fournit $\theta(x)$ qui s'annule pour $x = a$ et dont on déduit $u(x) = \theta'(x)$.

Quant aux *systèmes d'équations intégrales de Volterra*, on appelle système de *deuxième espèce*

$$\varphi_h(x) = u_h(x) + \int_a^x \sum_{g=1}^n K_{hg}(x, \xi) u_g(\xi) d\xi$$

($h = 1, 2, \dots, n$),

où les fonctions inconnues u_h et les données φ_h sont supposées continues dans (a, b) . Les noyaux K_{hg} sont continus dans le champ $a \leq \xi \leq x \leq b$.

Il y a une solution unique

$$u_h(x) = \varphi_h(x) + \int_a^x \sum_{g=1}^n S_{hg}(x, \xi) \varphi_g(\xi) d\xi$$

dont l'inversion donne réciproquement le système initial.

On appelle système de *première espèce*

$$\varphi_h(x) = \int_a^x \sum_{g=1}^n K_{hg}(x, \xi) u_g(\xi) d\xi$$

avec, tout d'abord, les mêmes hypothèses sur les données et inconnues.

On supposera de plus φ_h et K_{hg} continues et de dérivées continues dans le champ; enfin

$$\varphi_h(\alpha) = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} K_{11}(x, x) & \dots & K_{1n}(x, x) \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(x, x) & \dots & K_{nn}(x, x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

On peut alors se ramener à un système de seconde espèce et voir ainsi qu'il y a une solution unique.

15. Sur un système intégral-différentiel, relatif aux équations (14)-(15) du n° 4. — Le système (14) rentre dans le type plus général

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_1^n \left[A_{is}(t) x_s(t) + \int_{-\infty}^t F_{is}(t-\tau) x_s(\tau) d\tau \right] + y_i(t) \\ (i=1, 2, \dots, n), \end{cases}$$

où les A_{is} , F_{is} , y_i sont des fonctions connues supposées continues, A_{is} , y_i dans (t_0, t_1) , F_{is} dans $(0, +\infty)$. Étudions la résolution en supposant données continues les $x_i(t)$ dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$ (1). On supposera seulement que ces valeurs sont telles et les F_{is} tels que les $\int_{-\infty}^t F_{is}(t-\tau) x_s(\tau) d\tau$ soient des fonctions continues de t , ce qui aura lieu par exemple si les F_{is} sont de la forme $\frac{\varphi_{is}(t)}{t^{1+\varepsilon_{is}}}$ [$\varepsilon_{is} > 0$; $|\varphi_{is}|$ borné] et les $|x_i(t)|$ bornés dans $(-\infty, t_0)$.

La résolution du système intégral-différentiel équivaut alors à celle du système d'équations intégrales :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_1^n A_{is}(\tau) x_s(\tau) d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t d\xi \int_{-\infty}^{\xi} \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t y_i(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^t d\xi \int_{-\infty}^{\xi} \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t d\xi \int_{-\infty}^{t_0} \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\tau \\ &+ \int_{t_0}^t d\xi \int_{t_0}^{\xi} \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

(1) Dans le Mémoire précité du *Journal de Mathématiques* (1928), la même étude est faite dans le cas de l'hérédité limitée. Ce cas est compris dans l'étude du texte où il

Le premier terme est connu d'après les données des x_i antérieurement à t_0 . Le second est l'intégrale double de

$$\sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau),$$

étendue au triangle limité par la première bissectrice $\xi = \tau$ et les parallèles aux axes $\xi = t$, $\tau = t_0$. Il peut donc s'écrire aussi, en renversant l'ordre des intégrations,

$$\int_{t_0}^t d\tau \int_{\tau}^t \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\xi$$

ou

$$\int_{t_0}^t \sum_1^n x_s(\tau) d\tau \int_{\tau}^t F_{is}(\xi-\tau) d\xi.$$

De sorte que le système s'écrit

$$\begin{aligned} &-x_i(t_0) - \int_{t_0}^t d\xi \int_{-\infty}^{t_0} \sum_1^n F_{is}(\xi-\tau) x_s(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t y_i(\tau) d\tau \\ &= -x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_1^n x_s(\tau) \left[A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^t F_{is}(\xi-\tau) d\xi \right] d\tau \end{aligned}$$

sous la forme d'un système de Volterra de seconde espèce, puisque le premier membre est connu ainsi que

$$A_{is}(\tau) + \int_{\tau}^t F_{is}(\xi-\tau) d\xi.$$

On en conclut qu'il y a une solution unique dans (t_0, t_1) .

16. Sur le système intégral-différentiel du problème biologique (nos 2 et 6). — Nous étudions le système (3) aux inconnues les fonctions continues N_1, N_2 :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] N_1(t), \\ \frac{dN_2}{dt} = \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] N_2(t), \end{cases}$$

avec les hypothèses suivantes : $\varepsilon_1, \gamma_1, \varepsilon_2, \gamma_2$ constantes ≥ 0 ; F_1, F_2 fonctions ≥ 0

n'y a qu'à supposer les F_{is} nuls pour $t \geq T_0$ pour être dans le cas de l'hérédité limitée, et en remarquant qu'il suffit alors de connaître les x_i antérieurement à t_0 seulement dans $(t_0 - T_0, t_0)$.

continues et telles que

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau, \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau$$

aient un sens, et nous désignerons par Γ_1, Γ_2 ces valeurs finies positives ou nulles.

On suppose connues dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$ les fonctions N_1, N_2 sur lesquelles on fera de plus l'hypothèse que dans cet intervalle elles sont *bornées* (et continues) et *positives*. Dans le cas relatif à l'hérédité limitée où F_1, F_2 sont nuls pour $t \geq T_0$, il suffira de connaître N_1, N_2 dans $(t_0 - T_0, t_0)$.

Nous allons montrer comment sous ces conditions le système (3) admet dans $(t_0, +\infty)$ une solution formée de fonctions N_1, N_2 prolongeant continûment les valeurs données, et toujours *positives*; et que, de plus, dans tout intervalle (t_0, t_1) il n'y a pas d'autre solution que celle-là.

Montrons d'abord que si N_1, N_2 définissent une solution dans (t_0, t_1) , ces fonctions y sont positives. Comme elles partent de valeurs positives N_1^0, N_2^0 , il suffit de voir qu'elles ne peuvent s'annuler. Or de (3) on déduit pour tout intervalle (t_0, t) où elle ne s'annulent pas

$$\log \frac{N_1}{N_1^0} = \int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

$$\log \frac{N_2}{N_2^0} = \int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

et le second membre est borné en valeur absolue pour $t_0 \leq t \leq t_1$.

Si donc N_1 ou N_2 s'annulait dans (t_0, t_1) , soit θ le premier zéro de celle qui s'annule la première; quand $t < \theta$ tendrait vers θ , l'un des deux au moins de $\log \frac{N_1}{N_1^0}, \log \frac{N_2}{N_2^0}$ tendrait vers $-\infty$, ce qui est incompatible avec le fait que leurs expressions précédentes déduites de (3) sont de modules bornés. Notre problème est donc équivalent à la recherche des solutions positives de

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau,$$

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau,$$

ou bien de

$$\log \frac{N_1}{N_1^0} = \int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

$$\log \frac{N_2}{N_2^0} = \int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt.$$

Il est donc équivalent de résoudre [c'est-à-dire de chercher des fonctions

continues dans des intervalles (t_0, t_1) ou $(t_0, +\infty)$ et satisfaisant au système]

$$(61) \quad \begin{cases} N_1 = N_1^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt}, \\ N_2 = N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt} \end{cases}$$

avec les données de N_1, N_2 dans $(-\infty, t_0)$:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= f_1(t) > 0 \\ N_2(t) &= f_2(t) > 0 \end{aligned} \quad (\text{et bornées})$$

qu'on pourra réduire dans le cas d'hérédité limitée aux mêmes données dans l'intervalle $(t_0 - T_0, t_0)$. Ces données déterminent

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau$$

$$\int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau \quad \text{pour } t \leq t_0.$$

La connaissance de N_1, N_2 entre t_0 et $t_1 > t_0$ entraînera donc celle de ces mêmes intégrales dans $(-\infty, t_1)$.

Nous allons former une solution *par approximations successives*. Pour $t \geq t_0$, on partira de N_1^0 et N_2^0 ; substituant ces constantes aux inconnues (pour $t \geq t_0$, dans les seconds membres de (61), on obtiendra pour ces expressions des fonctions $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}$ qu'on prendra en seconde approximation. On répétera la substitution d'où $N_1^{(2)}, N_2^{(2)}$, etc., d'où les deux suites *positives*

$$\begin{aligned} N_1^0, N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(h)}, \dots \\ N_2^0, N_2^{(1)}, \dots, N_2^{(h)}, \dots \end{aligned} \quad (t \geq t_0).$$

Montrons qu'elles convergent *uniformément* dans tout intervalle (t_0, t_1) ; cette uniformité entraînera que les fonctions limites soient dans $(t_0, +\infty)$ continues et intégrales du système.

On voit d'abord que

$$N_1^{(h)} < N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-t_0)},$$

puis en désignant par \bar{N}_1^0, \bar{N}_2^0 des limites supérieures de $f_1(t), f_2(t)$,

$$\begin{aligned} N_2^{(h)}(t) &< N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\gamma_2 N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau)} + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau-t_0)} d\tau \right] dt} \\ &< N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\gamma_2 N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau)} + \Gamma_2 \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau-t_0)} \right] dt} \\ &< N_2^0 e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-t_0)}} \quad \text{ou, si } \varepsilon_1 = 0, \quad < N_2^0 e^{(\gamma_2 N_1^0 + \Gamma_2 \bar{N}_1^0)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

D'où il résulte que dans tout intervalle (t_0, t_1) les N_1^h, N_2^h sont bornés dans leur ensemble supérieurement. On désigne par L une limite supérieure.

continues et telles que

$$\int_0^{+\infty} F_1(\tau) d\tau, \quad \int_0^{+\infty} F_2(\tau) d\tau$$

aient un sens, et nous désignerons par Γ_1, Γ_2 ces valeurs finies positives ou nulles.

On suppose connues dans l'intervalle $(-\infty, t_0)$ les fonctions N_1, N_2 sur lesquelles on fera de plus l'hypothèse que dans cet intervalle elles sont *bornées* (et continues) et *positives*. Dans le cas relatif à l'hérédité limitée où F_1, F_2 sont nuls pour $t \geq T_0$, il suffira de connaître N_1, N_2 dans $(t_0 - T_0, t_0)$.

Nous allons montrer comment sous ces conditions le système (3) admet dans $(t_0, +\infty)$ une solution formée de fonctions N_1, N_2 prolongeant continûment les valeurs données, et toujours *positives*; et que, de plus, dans tout intervalle (t_0, t_1) il n'y a pas d'autre solution que celle-là.

Montrons d'abord que si N_1, N_2 définissent une solution dans (t_0, t_1) , ces fonctions y sont positives. Comme elles partent de valeurs positives N_1^0, N_2^0 , il suffit de voir qu'elles ne peuvent s'annuler. Or de (3) on déduit pour tout intervalle (t_0, t) où elle ne s'annulent pas

$$\log \frac{N_1}{N_1^0} = \int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

$$\log \frac{N_2}{N_2^0} = \int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

et le second membre est borné en valeur absolue pour $t_0 \leq t \leq t_1$.

Si donc N_1 ou N_2 s'annulait dans (t_0, t_1) , soit θ le premier zéro de celle qui s'annule la première; quand $t < \theta$ tendrait vers θ , l'un des deux au moins de $\log \frac{N_1}{N_1^0}, \log \frac{N_2}{N_2^0}$ tendrait vers $-\infty$, ce qui est incompatible avec le fait que leurs expressions précédentes déduites de (3) sont de modules bornés. Notre problème est donc équivalent à la recherche des solutions positives de

$$\frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau,$$

$$\frac{1}{N_2} \frac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau,$$

ou bien de

$$\log \frac{N_1}{N_1^0} = \int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt,$$

$$\log \frac{N_2}{N_2^0} = \int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt.$$

Il est donc équivalent de résoudre [c'est-à-dire de chercher des fonctions

SUR LES ACTIONS HÉRÉDITAIRES COMPARÉES EN BIOLOGIE ET EN MÉCANIQUE. 193
continues dans des intervalles (t_0, t_1) ou $(t_0, +\infty)$ et satisfaisant au système]

$$(61) \quad \begin{cases} N_1 = N_1^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2(t) - \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau \right] dt}, \\ N_2 = N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1(t) + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau \right] dt} \end{cases}$$

avec les données de N_1, N_2 dans $(-\infty, t_0)$:

$$\begin{aligned} N_1(t) &= f_1(t) > 0 \\ N_2(t) &= f_2(t) > 0 \end{aligned} \quad (\text{et bornées})$$

qu'on pourra réduire dans le cas d'hérédité limitée aux mêmes données dans l'intervalle $(t_0 - T_0, t_0)$. Ces données déterminent

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} F_1(\tau) N_2(t-\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t F_1(t-\tau) N_2(\tau) d\tau \\ \int_0^{+\infty} F_2(\tau) N_1(t-\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^t F_2(t-\tau) N_1(\tau) d\tau \end{aligned} \quad \text{pour } t \leq t_0.$$

La connaissance de N_1, N_2 entre t_0 et $t_1 > t_0$ entraînera donc celle de ces mêmes intégrales dans $(-\infty, t_1)$.

Nous allons former une solution *par approximations successives*. Pour $t \geq t_0$, on partira de N_1^0 et N_2^0 ; substituant ces constantes aux inconnues (pour $t \geq t_0$, dans les seconds membres de (61), on obtiendra pour ces expressions des fonctions $N_1^{(1)}, N_2^{(1)}$ qu'on prendra en seconde approximation. On répétera la substitution d'où $N_1^{(2)}, N_2^{(2)}$, etc., d'où les deux suites *positives*

$$\begin{aligned} N_1^0, N_1^{(1)}, \dots, N_1^{(h)}, \dots \\ N_2^0, N_2^{(1)}, \dots, N_2^{(h)}, \dots \end{aligned} \quad (t \geq t_0).$$

Montrons qu'elles convergent *uniformément* dans tout intervalle (t_0, t_1) ; cette uniformité entraînera que les fonctions limites soient dans $(t_0, +\infty)$ continues et intégrales du système.

On voit d'abord que

$$N_1^{(h)} < N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-t_0)},$$

puis en désignant par \bar{N}_1^0, \bar{N}_2^0 des limites supérieures de $f_1(t), f_2(t)$,

$$\begin{aligned} N_2^{(h)}(t) &< N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\gamma_2 N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau)} + \int_0^{+\infty} F_2(\tau) \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau-\tau)} d\tau \right] dt} \\ &< N_2^0 e^{\int_{t_0}^t \left[\gamma_2 N_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau)} + \Gamma_2 \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-\tau)} \right] dt} \\ &< N_2^0 e^{\frac{\gamma_2 + \Gamma_2}{\varepsilon_1} \bar{N}_1^0 e^{\varepsilon_1(t-t_0)}} \quad \text{ou, si } \varepsilon_1 = 0, \quad < N_2^0 e^{(\gamma_2 N_1^0 + \Gamma_2 \bar{N}_1^0)(t-t_0)}. \end{aligned}$$

D'où il résulte que dans tout intervalle (t_0, t_1) les N_1^h, N_2^h sont bornés dans leur ensemble supérieurement. On désigne par L une limite supérieure.

Alors comme

$$\log N_1^{(h+1)} - \log N_1^{(h)} = (N_1^{(h+1)} - N_1^{(h)}) \frac{1}{U},$$

où U est compris entre $N_1^{(h+1)}$ et $N_1^{(h)}$, il vient

$$|N_1^{(h+1)}(t) - N_1^{(h)}(t)| \leq L |\log N_1^{(h+1)}(t) - \log N_1^{(h)}(t)|$$

et de même

$$|N_2^{(h+1)}(t) - N_2^{(h)}(t)| \leq L |\log N_2^{(h+1)}(t) - \log N_2^{(h)}(t)|$$

pour $t_0 \leq t \leq t_1$,

Remarquons maintenant que d'après (61)

$$\begin{aligned} & \log N_1^{(1)}(t) - \log N_1^{(0)}(t) \\ &= \int_{t_0}^t \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2^0 - \int_{-\infty}^{t-\tau} F_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau - \int_{t_0}^t F_1(t-\tau) N_2^0 d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log N_2^{(1)}(t) - \log N_2^{(0)}(t) \\ &= \int_{t_0}^t \left[-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1^0 + \int_{-\infty}^{t-\tau} F_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t F_2(t-\tau) N_1^0 d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\log N_1^{(1)} - \log N_1^0| &\leq (\varepsilon_1 + \gamma_1 N_2^0 + \Gamma_1 \bar{N}_2^0 + \Gamma_2 N_2^0)(t - t_0), \\ |\log N_2^{(1)} - \log N_2^0| &\leq (\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1^0 + \Gamma_2 \bar{N}_1^0 + \Gamma_1 N_1^0)(t - t_0). \end{aligned}$$

On en déduit que, A étant un nombre positif convenable,

$$(62) \quad \begin{cases} |N_1^{(1)}(t) - N_1^0(t)| < A(t - t_0) \\ |N_2^{(1)}(t) - N_2^0(t)| < A(t - t_0) \end{cases} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Puis

$$\begin{aligned} & \log N_1^{(h+1)}(t) - \log N_1^{(h)}(t) \\ &= \int_{t_0}^t \left[-\gamma_1 [N_2^{(h)}(t) - N_2^{(h-1)}(t)] - \int_{t_0}^t F_1(t-\tau) [N_2^{(h)}(\tau) - N_2^{(h-1)}(\tau)] d\tau \right] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \log N_2^{(h+1)}(t) - \log N_2^{(h)}(t) \\ &= \int_{t_0}^t \left[\gamma_2 [N_1^{(h)}(t) - N_1^{(h-1)}(t)] + \int_{t_0}^t F_2(t-\tau) [N_1^{(h)}(\tau) - N_1^{(h-1)}(\tau)] d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

Désignons par Φ une limite supérieure de $F_1(t)$, $F_2(t)$ dans l'intervalle $(0, t_1 - t_0)$.

Si

$$(63) \quad \begin{cases} |N_1^{(h)}(t) - N_1^{(h-1)}(t)| < B \frac{(t - t_0)^h}{h!} \\ |N_2^{(h)}(t) - N_2^{(h-1)}(t)| < B \frac{(t - t_0)^h}{h!} \end{cases} \quad \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1 \quad (h \geq 1),$$

on aura donc

$$|\log N_1^{(h+1)}(t) - \log N_1^{(h)}(t)| < (\gamma_1 + \Phi) B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!},$$

$$|\log N_2^{(h+1)}(t) - \log N_2^{(h)}(t)| < (\gamma_2 + \Phi) B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!},$$

d'où

$$|N_1^{(h+1)}(t) - N_1^{(h)}(t)| < L(\gamma_1 + \Phi) B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!},$$

$$|N_2^{(h+1)}(t) - N_2^{(h)}(t)| < L(\gamma_2 + \Phi) B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!}.$$

Soit C un nombre positif supérieur à $L(\gamma_1 + \Phi)$ et $L(\gamma_2 + \Phi)$. On voit que les inégalités (63) entraîneront

$$|N_1^{(h+1)}(t) - N_1^{(h)}(t)| < B \cdot C \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!},$$

$$|N_2^{(h+1)}(t) - N_2^{(h)}(t)| < B \cdot C \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!}.$$

En raisonnant par récurrence à partir de (62), il vient donc

$$|N_1^{(h+1)}(t) - N_1^{(h)}(t)| < AC^h \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!} \leq \frac{A}{C} \frac{[C(t_1 - t_0)]^{h+1}}{(h+1)!},$$

$$|N_2^{(h+1)}(t) - N_2^{(h)}(t)| < AC^h \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!} \leq \frac{A}{C} \frac{[C(t_1 - t_0)]^{h+1}}{(h+1)!}$$

$$(t_0 \leq t \leq t_1),$$

d'où résulte immédiatement la convergence uniforme des suites.

Quant à l'unicité de la solution dans tout intervalle (t_0, t_1) (t_1 quelconque $> t_0$), elle s'établit par un raisonnement analogue. Soient N_1, N_2 une solution dans (t_0, t_1) , et $L_1 \geq L$ une limite supérieure de ces fonctions dans $(-\infty, t)$. On a d'abord

$$\begin{aligned} |N_1^{(h)}(t) - N_1(t)| &\leq L_1 |\log N_1^{(h)}(t) - \log N_1(t)| \\ |N_2^{(h)}(t) - N_2(t)| &\leq L_1 |\log N_2^{(h)}(t) - \log N_2(t)| \end{aligned} \quad (t_0 \leq t \leq t_1).$$

Puis

$$\begin{aligned} |\log N_1^0 - \log N_1| &\leq [\varepsilon_1 + (\gamma_1 + \Gamma_1)L_1](t - t_0), \\ |\log N_2^0 - \log N_2| &\leq [\varepsilon_2 + (\gamma_2 + \Gamma_2)L_1](t - t_0), \end{aligned}$$

d'où, A_1 étant un nombre positif convenable,

$$\begin{aligned} |N_1^0 - N_1| &< A_1(t - t_0), \\ |N_2^0 - N_2| &< A_1(t - t_0). \end{aligned}$$

Puis on verrait que l'hypothèse

$$\begin{aligned} |N_1^{(h)} - N_1| &< B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!} \\ |N_2^{(h)} - N_2| &< B \frac{(t - t_0)^{h+1}}{(h+1)!} \end{aligned} \quad (h \geq 0)$$