$$p_{i,h,k} = \begin{vmatrix} \vartheta_i & \vartheta_h & \vartheta_k \\ \tau_i & \tau_h & \tau_k \\ t_i & t_h & t_k \end{vmatrix} \qquad i, h, k = 1, 2, \dots, \sigma$$

e così una sola serie di ogni rango fino alla serie di rango $\sigma - 1$:

$$p_{i,h,\dots k} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_h & \dots & \xi_k \\ \eta_i & \eta_h & \dots & \eta_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_i & \tau_h & \dots & \tau_k \\ t_i & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} \quad , \; i, h, \dots k = 1, 2, \dots, \sigma$$

Concludiamo dunque che una forma algebrica con un numero qualunque di serie di variabili di specie σ, si può sempre ridurre, secondo i procedimenti indicati, a forme che contengono soltanto σ-1 serie di ranghi tutti differenti e precisamente una sola serie fondamentale, una sola serie aggiunta di 2° rango, una sola di 3° rango, ecc.(*)

(*) Cfr. Clebesch: *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. 17, 1872).

CAPITOLO II

Processi invariantivi - Equazioni differenziali dei covarianti. Rappresentazione delle forme invariantive.

§. I. L'operazione Ω eseguita su aggregati di elementi lineari

1. Si ha spesso occasione di dover eseguire l'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$, fra n serie n^{arie} $x, y, z, \dots t$, sopra una forma espressa come aggregato degli rn elementi lineari (Cfr. Cap. I, §. 7)

$$\begin{matrix} a_x, & b_x, & c_x, & \dots & e_x \\ a_y, & b_y, & c_y, & \dots & e_y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_t, & b_t, & c_t, & \dots & e_t \end{matrix} \qquad (1)$$

che si possono formare colle n serie $x, y, \dots, t$ e con r serie di coefficienti arbitrarii: $a, b, c, \dots e$. Poichè, però, il risultato dell'operazione Ω applicata ad una somma di più parti non è che la somma dei risultati dell'operazione stessa applicata ad ogni singola parte, così basterà evidentemente che ci occupiamo dell'operazione Ω applicata ad un semplice prodotto:

$$a_x^{p_1} b_x^{q_1} c_x^{r_1} \dots e_x^{s_1} \, a_y^{p_2} b_y^{q_2} c_y^{r_2} \dots e_y^{s_2} \dots\dots a_t^{p_n} b_t^{q_n} c_t^{r_n} \dots e_t^{s_n} \qquad (2)$$

di elementi scelti comunque fra gli elementi (1).

2. A quest'oggetto noi potremo dapprima ricercare il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$ applicata ad un prodotto della forma:

$$\alpha'_x \alpha''_x \dots \alpha^{(\kappa)}_x \beta'_y \beta''_y \dots \beta^{(\nu)}_y \dots \varepsilon'_t \varepsilon''_t \dots \varepsilon^{(\lambda)}_t \qquad (3)$$

in cui le serie di coefficienti:

$$\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(\kappa)}, \beta', \beta'', \dots \beta^{(\nu)}, \dots, \varepsilon', \varepsilon'', \dots \varepsilon^{(\lambda)}$$

siano tutte distinte fra loro; giacchè basterà poi supporre che una parte di queste serie coincida colla serie b, e così via, perchè il prodotto (3) si cambi nel prodotto (2) e per conseguenza il risultato da noi ottenuto operando su (3) si cambi in quello stesso risultato che si sarebbe dovuto ottenere operando direttamente sul prodotto (2).

3. Ora il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$ applicata al prodotto (3), che indicheremo brevemente con Q, è dato da

$$\sum_{k=1}^{k=\lambda} \dots \sum_{h=1}^{h=\nu} \sum_{i=1}^{i=\mu} (\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \dots \varepsilon^{(k)}) Q_{ih\dots k} \qquad (4)$$

dove con $Q_{ih\dots k}$ s'intende lo stesso prodotto Q nel quale manchino però gli elementi $\alpha^{(i)}_x, \beta^{(h)}_y, \dots, \varepsilon^{(k)}_t$.

Si ha infatti, per le ordinarie regole di derivazione del calcolo differenziale:

$$\frac{\partial^n Q}{\partial x_1 \partial y_2 \dots \partial t_n} = \sum_{k=1}^{k=\lambda} \dots \sum_{h=1}^{h=\nu} \sum_{i=1}^{i=\mu} \alpha^{(i)}_1 \beta^{(h)}_2 \dots \varepsilon^{(k)}_n Q_{ih\dots k} \qquad (5)$$

d'onde segue subito la (4), poichè:

$$\Omega_{xyz\dots t} Q = \sum \pm \frac{\partial^n Q}{\partial x_1 \partial y_2 \dots \partial t_n}$$

ed

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \dots \varepsilon^{(k)}) = \sum \pm \alpha^{(i)}_1 \beta^{(h)}_2 \dots \varepsilon^{(k)}_n$$

4. Detto ora P il prodotto (2) si passerà poi dal risultato $\Omega_{xyz\dots t} Q$ espresso da (4) al risultato $\Omega_{xyz\dots t} P$ nel modo già accennato, sostituendo cioè dapertutto in luogo di certe serie $\alpha, \dots\dots$ l'unica serie a, in luogo di certe altre serie $\alpha', \dots\dots$ l'unica serie b e così via. In questa sostituzione si presenteranno però naturalmente due specie di riduzioni, cioè primieramente sarà inutile scrivere, perchè identicamente nulli, quei termini

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \dots \varepsilon^{(k)}) Q_{ih\dots k}$$

di (4) nei quali due delle serie $\alpha^{(i)}, \beta^{(h)}, \dots, \varepsilon^{(k)}$ riuscissero eguali fra loro; in secondo luogo si riuniranno in un unico termine con un opportuno coefficiente numerico (intero e positivo) tutti quei termini che riusciranno identicamente uguali. Il coefficiente col quale si presenterà, in tal modo, un termine qualunque

$$(\alpha^{(i)} \beta^{(h)} \dots \varepsilon^{(k)}) Q_{ih\dots k}$$

sarà evidentemente il prodotto degli n numeri che esprimono rispettivamente quante volte la serie $\alpha^{(i)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a^{p_1}_x b^{q_1}_x \dots e^{s_1}_x,$$

quante volte la serie $\beta^{(h)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a_y^{p_2}\, b_y^{q_2} \dots e_y^{s_2}$$

e così via.

Pertanto il numero dei termini distinti sarà dato in generale da $r(r-1)\dots(r-n+1)$, numero delle disposizioni n ad n delle r serie $a, b, c, \dots, e$.

5. Esempio. Dato il prodotto di elementi lineari ternarii:

$$P = a_x^{m}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, c_y^{p'}\, c_z^{q}\, d_z^{q'},$$

si troverà dapprima:

$$\Omega_{xyz} P = mpq(abc)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'}$$

$$+ mpq'(abd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1}$$

$$+ mp'q'(acd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, b_y^{p'-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1}$$

$$+ m'p'q'(bcd)\, a_x^{m}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, c_y^{p-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1}$$

$$+ m''pq(dbc)\, a_x^{m}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'}$$

e si potrà poi anche scrivere:

$$\Omega_{xyz} P = \left[\begin{array}{l} mpq(abc)\, b_x\, d_x\, c_y\, d_z \\ + mpq'(abd)\, b_x\, d_x\, c_y\, c_z \\ + mp'q'(acd)\, b_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m'p'q'(bcd)\, a_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m''pq(bcd)\, a_x\, b_x\, c_y\, d_z \end{array}\right] a_x^{m-1}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'-1}\, c_z^{q'-1}\, d_z^{q'-1}$$

Quest'ultima espressione mette in evidenza che per ap-

plicare l'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$ al prodotto (2), basterà applicarla al prodotto più semplice:

$$a_x\, b_x\, c_x \dots e_x\, a_y\, b_y\, c_y \dots e_y \dots\dots a_t\, b_t\, c_t \dots e_t \qquad (2')$$

moltiplicare poi ogni termine del risultato ottenuto per quelli fra gli esponenti

$$p_1, q_1, r_1, \dots, s_1, p_2, q_2, r_2, \dots, s_2, \dots\dots, p_n, q_n, r_n, \dots s_n$$

che corrispondono a quegli n elementi lineari (2') che non figurano nel termine stesso; per ultimo moltiplicare il tutto per lo stesso prodotto (2) in cui tutti gli esponenti siano stati diminuiti di un'unità.

6. Volendo applicare l'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$ più volte di seguito sul prodotto (2) si procederà allo stesso modo ora indicato sopra ciascuno dei termini ottenuti colla prima applicazione dell'operazione; onde si vede che il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\dots t}$ eseguito consecutivamente un numero qualsiasi di volte sopra un aggregato degli elementi lineari (1) sarà un aggregato degli stessi elementi lineari (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi n^{arie}:

$$(\dots b \dots d \dots)$$

che si possono formare cogli r simboli $a, b, c, \dots, e$ combinati n ad n.

Esempio. Vogliasi applicare due volte di seguito l'operazione Ω_{xyz} al prodotto ternario:

$$P = a_x\, b_x\, d_x\, b_y\, c_y\, c_z\, d_z\ ;$$

quante volte la serie $\beta^{(k)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a_y^{p_2}\, b_y^{q_2} \ldots e_y^{s_2}$$

e così via.

Pertanto il numero dei termini distinti sarà dato in generale da $r(r-1)\ldots(r-n+1)$, numero delle disposizioni n ad n delle r serie $a, b, c, \ldots, e$.

5. Esempio. Dato il prodotto di elementi lineari ternarii:

$$P = a_x^{m}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, c_y^{p'}\, c_z^{q}\, d_z^{q'},$$

si troverà dapprima:

$$\begin{aligned}\Omega_{xyz} P = {} & mpq(abc)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'} \\ & + mpq'(abd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + mp'q'(acd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, b_y^{p'-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + m'p'q'(bcd)\, a_x^{m}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, c_y^{p'-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + m''pq(dbc)\, a_x^{m}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'}\end{aligned}$$

e si potrà poi anche scrivere:

$$\Omega_{xyz} P = \left[\begin{array}{l} mpq(abc)\, b_x\, d_x\, c_y\, d_z \\ + mpq'(abd)\, b_x\, d_x\, c_y\, c_z \\ + mp'q'(acd)\, b_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m'p'q'(bcd)\, a_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m''pq(bcd)\, a_x\, b_x\, c_y\, d_z \end{array}\right] a_x^{m-1}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'-1}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'-1}$$

Quest'ultima espressione mette in evidenza che per ap-

plicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ al prodotto (2), basterà applicarla al prodotto più semplice:

$$a_x\, b_x\, c_x \ldots e_x\, a_y\, b_y\, c_y \ldots e_y \ldots\ldots a_t\, b_t\, c_t \ldots e_t \qquad (2')$$

moltiplicare poi ogni termine del risultato ottenuto per quelli fra gli esponenti

$$p_1, q_1, r_1, \ldots, s_1, p_2, q_2, r_2, \ldots, s_2, \ldots\ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots s_n$$

che corrispondono a quegli n elementi lineari (2') che non figurano nel termine stesso; per ultimo moltiplicare il tutto per lo stesso prodotto (2) in cui tutti gli esponenti siano stati diminuiti di un'unità.

6. Volendo applicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ più volte di seguito sul prodotto (2) si procederà allo stesso modo ora indicato sopra ciascuno dei termini ottenuti colla prima applicazione dell'operazione; onde si vede che il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ eseguito consecutivamente un numero qualsiasi di volte sopra un aggregato degli elementi lineari (1) sarà un aggregato degli stessi elementi lineari (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi n^{arie}:

$$(\ldots b \ldots d \ldots)$$

che si possono formare cogli r simboli $a, b, c, \ldots, e$ combinati n ad n.

Esempio. Vogliasi applicare due volte di seguito l'operazione Ω_{xyz} al prodotto ternario:

$$P = a_x\, b_x\, d_x\, b_y\, c_y\, c_z\, d_z\ ;$$

quante volte la serie $\beta^{(h)}$ si presenta nel prodotto parziale

$$a_y^{p_2}\; b_y^{q_2} \cdots e_y^{s_2}$$

e così via.

Pertanto i numero dei termini distinti sarà dato in generale da $r(r-1)\ldots(r-n+1)$, numero delle disposizioni n ad n delle r serie $a, b, c, \ldots, e$.

5. Esempio. Dato il prodotto di elementi lineari ternarii:

$$P = a_x^m\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^p\, c_y^{p'}\, c_z^q\, d_z^{q'} ,$$

si troverà dapprima:

$$\begin{aligned}\Omega_{xyz} P = {} & mpq(abc)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'} \\ & + mpq'(abd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + mp'q'(acd)\, a_x^{m-1}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, b_y^{p'-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + m'p'q'(bcd)\, a_x^{m}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''}\, b_y^{p}\, c_y^{p-1}\, c_z^{q}\, d_z^{q'-1} \\ & + m''pq(dbc)\, a_x^{m}\, b_x^{m'}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'}\, c_z^{q-1}\, d_z^{q'}\end{aligned}$$

e si potrà poi anche scrivere:

$$\Omega_{xyz} P = \left[\begin{array}{l} mpq(abc)\, b_x\, d_x\, c_y\, d_z \\ + mpq'(abd)\, b_x\, d_x\, c_y\, c_z \\ + mp'q'(acd)\, b_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m'p'q'(bcd)\, a_x\, d_x\, b_y\, c_z \\ + m''pq\,(bcd)\, a_x\, b_x\, c_y\, d_z \end{array}\right] a_x^{m-1}\, b_x^{m'-1}\, d_x^{m''-1}\, b_y^{p-1}\, c_y^{p'-1}\, c_z^{q'-1}\, d_z^{q'-1}$$

Quest'ultima espressione mette in evidenza che per applicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ al prodotto (2), basterà applicarla al prodotto più semplice:

$$a_x\, b_x\, c_x \cdots e_x\; a_y\, b_y\, c_y \cdots e_y \;\cdots\cdots\; a_t\, b_t\, c_t \cdots e_t \qquad (2')$$

moltiplicare poi ogni termine del risultato ottenuto per quelli fra gli esponenti

$$p_1, q_1, r_1, \ldots, s_1, p_2, q_2, r_2, \ldots, s_2, \ldots\ldots, p_n, q_n, r_n, \ldots s_n$$

che corrispondono a quegli n elementi lineari (2') che non figurano nel termine stesso; per ultimo moltiplicare il tutto per lo stesso prodotto (2) in cui tutti gli esponenti siano stati diminuiti di un'unità.

6. Volendo applicare l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ più volte di seguito sul prodotto (2) si procederà allo stesso modo ora indicato sopra ciascuno dei termini ottenuti colla prima applicazione dell'operazione; onde si vede che il risultato dell'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$ eseguito consecutivamente un numero qualsiasi di volte sopra un aggregato degli elementi lineari (1) sarà un aggregato degli stessi elementi lineari (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi n^{arie}:

$$(\ldots b \ldots d \ldots)$$

che si possono formare cogli r simboli $a, b, c, \ldots, e$ combinati n ad n.

Esempio. Vogliasi applicare due volte di seguito l'operazione Ω_{xyz} al prodotto ternario:

$$P = a_x\, b_x\, d_x\, b_y\, c_y\, c_z\, d_z ;$$

Si troverà dapprima come sopra:

$$\Omega_{xyz}P=(abc)b_x d_x c_y d_z + (abd)b_x d_x c_y c_z$$
$$+(acd)b_x d_z b_y c_z+(bcd)a_x d_x b_y c_z+(bcd)a_x b_x c_y d_z.$$

Di poi si troverà:

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x c_y d_z\right]=(bcd)d_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x c_y c_z\right]=0$$

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x b_y c_z\right]=(dbc)b_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[a_x d_x b_y c_z\right]=(abc)d_x+(dbc)a_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[a_x b_x c_y d_z\right]=(acd)b_x+(bcd)a_x \qquad ,$$

onde si concluderà:

$$\Omega^2_{xyz}P = 2(abc)(bcd)d_x+2(acd)(bcd)b_x+2(bcd)^2 a_x$$
$$=2(bcd)\left[(abc)d_x+(acd)b_x+(bcd)a_x\right]$$

7. Se nel prodotto (2) ognuno dei simboli $a, b, c, \ldots, e$ si trova combinato con una sola serie di variabili così che p. es. gli esponenti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ saranno tutti nulli all'infuori di uno, la prima delle due specie di riduzioni di cui si è parlato all'art. 4, non si presenterà neanche, onde, se sia:

$$P=a_x^{p_1} b_x^{p_2}\ldots d_x^{p_\mu}\,\alpha_y^{q_1}\beta_y^{q_2}\ldots\gamma_y^{q_\nu}\ldots\ldots u_t^{r_1} v_t^{r_2}\ldots w_t^{r_\lambda},$$

il risultato $\Omega_{xyz\ldots t}P$ si comporrà di $\mu\nu\ldots\lambda$ termini distinti e la somma totale dei coefficienti dei termini sarà data da:

$$(p_1+p_2+\cdots+p_\mu)(q_1+q_2+\cdots+q_\nu)\ldots(r_1+r_2+\cdots+r_\lambda)$$

Esempio. Applicando l'operazione Ω_{xy} al prodotto binario:

$$P=a_x^p\, b_x^q\, c_z^r\, \alpha_y^\lambda\, \beta_y^\mu\, \gamma_y^\nu ,$$

si ottiene:

$$\Omega_{xy}P=p\lambda\cdot(a\alpha)a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^{\lambda-1}\beta_y^\mu\gamma_y^\nu$$
$$+p\mu\cdot(a\beta)a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^{\lambda}\beta_y^{\mu-1}\gamma_y^\nu$$
$$+p\nu\cdot(a\gamma)a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^{\lambda}\beta_y^{\mu}\gamma_z^{\nu-1}$$
$$+q\lambda\cdot(b\alpha)a_x^{p} b_x^{q-1} c_x^r \alpha_y^{\lambda-1}\beta_y^{\mu}\gamma_z^{\nu}$$

. . . .

e si vede come la somma dei coefficienti:

$$p\lambda+p\mu+p\nu+q\lambda+q\mu+q\nu+r\lambda+r\mu+r\nu$$

sia appunto eguale a $(p+q+r)(\lambda+\mu+\nu)$.

8. Se poniamo (Cap. I, art. 127):

$$H^{(-i+1)}_{xyz\ldots t}\ldots H^{(-2)}_{xyz\ldots t}\,H^{(-1)}_{xyz\ldots t}\,H_{xyz\ldots t}=K^{(i)}_{xyz\ldots t},$$

e consideriamo che si ha identicamente, quando le n serie $x, y, z, \ldots t$ sono di specie n (Cap. I, art. 109):

$$(xyz\ldots t)^i\cdot\Omega^i_{xyz\ldots t}=K^{(i)}_{xyz\ldots t}$$

ed osserviamo inoltre che

$$(xyz\ldots t)(abc\ldots d)=(a_x b_y\ldots d_t),$$

Si troverà dapprima come sopra:

$$\Omega_{xyz} P = (abc)\, b_x d_x c_y d_z + (abd)\, b_x d_x c_y c_z$$
$$+ (acd)\, b_x d_z b_y c_z + (bcd)\, a_x d_x b_y c_z + (bcd)\, a_x b_x c_y d_z .$$

Di poi si troverà:

$$\Omega_{xyz} \left[b_x d_x c_y d_z \right] = (bcd)\, d_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[b_x d_x c_y c_z \right] = 0$$

$$\Omega_{xyz} \left[b_x d_x b_y c_z \right] = (dbc)\, b_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[a_x d_x b_y c_z \right] = (abc)\, d_x + (dbc)\, a_x$$

$$\Omega_{xyz} \left[a_x b_x c_y d_z \right] = (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x \quad ,$$

onde si concluderà:

$$\Omega^2_{xyz} P = 2(abc)(bcd)\, d_x + 2(acd)(bcd)\, b_x + 2(bcd)^2 a_x$$
$$= 2(bcd)\left[(abc)\, d_x + (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x \right]$$

7. Se nel prodotto (2) ognuno dei simboli $a, b, c, \ldots, e$ si trova combinato con una sola serie di variabili così che p. es. gli esponenti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ saranno tutti nulli all'infuori di uno, la prima delle due specie di riduzioni di cui si è parlato all'art. 4, non si presenterà neanche, onde, se sia:

$$P = a_x^{p_1} b_x^{p_2} \cdots d_x^{p_\mu} \alpha_y^{q_1} \beta_y^{q_2} \cdots \gamma_y^{q_\nu} \cdots\cdots u_t^{r_1} v_t^{r_2} \cdots w_t^{r_\lambda} ,$$

il risultato $\Omega_{xyz\ldots t} P$ si comporrà di $\mu \nu \ldots \lambda$ termini distinti e la somma totale dei coefficienti dei termini sarà data da

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu)(q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu) \cdots (r_1 + r_2 + \cdots + r_\lambda)$$

Esempio. Applicando l'operazione Ω_{xy} al prodotto binario:

$$P = a_x^p \, b_x^q \, c_z^r \, \alpha_y^\lambda \, \beta_y^\mu \, \gamma_y^\nu ,$$

si ottiene:

$$\Omega_{xy} P = p\lambda \cdot (a\alpha)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^{\lambda-1} \beta_y^\mu \gamma_y^\nu$$
$$+ p\mu \cdot (a\beta)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^\lambda \beta_y^{\mu-1} \gamma_y^\nu$$
$$+ p\nu \cdot (a\gamma)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^\lambda \beta_y^\mu \gamma_z^{\nu-1}$$
$$+ q\lambda \cdot (b\alpha)\, a_x^p b_x^{q-1} c_x^r \alpha_y^{\lambda-1} \beta_y^\mu \gamma_z^\nu$$

. . . .

e si vede come la somma dei coefficienti:

$$p\lambda + p\mu + p\nu + q\lambda + q\mu + q\nu + r\lambda + r\mu + r\nu$$

sia appunto eguale a $(p+q+r)(\lambda+\mu+\nu)$.

8. Se poniamo (Cap. I, art. 127):

$$H^{(-i+1)}_{xyz\ldots t} \cdots H^{(-2)}_{xyz\ldots t} H^{(-1)}_{xyz\ldots t} H_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t} ,$$

e consideriamo che si ha identicamente, quando le n serie $x, y, z, \ldots t$ sono di specie n (Cap. I, art. 109):

$$(xyz\ldots t)^i \cdot \Omega^i_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t}$$

ed osserviamo inoltre che

$$(xyz\ldots t)(abc\ldots d) = (a_x b_y \cdots d_t),$$

Si troverà dapprima come sopra:

$$\Omega_{xyz} P = (abc)\, b_x d_x c_y d_z + (abd)\, b_x d_x c_y c_z$$
$$+ (acd)\, b_x d_x b_y c_z + (bcd)\, a_x d_x b_y c_z + (bcd)\, a_x b_x c_y d_z .$$

Di poi si troverà:

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x c_y d_z\right] = (bcd)\, d_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x c_y c_z\right] = 0$$

$$\Omega_{xyz}\left[b_x d_x b_y c_z\right] = (dbc)\, b_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[a_x d_x b_y c_z\right] = (abc)\, d_x + (dbc)\, a_x$$

$$\Omega_{xyz}\left[a_x b_x c_y d_z\right] = (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x \quad ,$$

onde si concluderà:

$$\Omega^2_{xyz} P = 2(abc)(bcd)\, d_x + 2(acd)(bcd)\, b_x + 2(bcd)^2 a_x$$
$$= 2(bcd)\left[(abc)\, d_x + (acd)\, b_x + (bcd)\, a_x\right]$$

7. Se nel prodotto (2) ognuno dei simboli $a, b, c, \ldots, e$ si trova combinato con una sola serie di variabili cosicchè p. es. gli esponenti $p_1, p_2, \ldots, p_n$ saranno tutti nulli all'infuori di uno, la prima delle due specie di riduzioni di cui si è parlato all'art. 4, non si presenterà neanche, onde, se sia:

$$P = a_x^{p_1} b_x^{p_2} \ldots d_x^{p_\mu} \alpha_y^{q_1} \beta_y^{q_2} \ldots \gamma_y^{q_\nu} \ldots\ldots u_t^{r_1} v_t^{r_2} \ldots w_t^{r_\lambda},$$

il risultato $\Omega_{xyz\ldots t} P$ si comporrà di $\mu\nu\ldots\lambda$ termini distinti e la somma totale dei coefficienti dei termini sarà data da:

$$(p_1 + p_2 + \cdots + p_\mu)(q_1 + q_2 + \cdots + q_\nu) \ldots (r_1 + r_2 + \cdots + r_\lambda)$$

Esempio. Applicando l'operazione Ω_{xy} al prodotto binario:

$$P = a_x^p\, b_x^q\, c_z^r\, \alpha_y^\lambda\, \beta_y^\mu\, \gamma_y^\nu ,$$

si ottiene:

$$\Omega_{xy} P = p\lambda \cdot (a\alpha)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^{\lambda-1} \beta_y^\mu \gamma_y^\nu$$
$$+ p\mu \cdot (a\beta)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^\lambda \beta_y^{\mu-1} \gamma_y^\nu$$
$$+ p\nu \cdot (a\gamma)\, a_x^{p-1} b_x^q c_x^r \alpha_y^\lambda \beta_y^\mu \gamma_z^{\nu-1}$$
$$+ q\lambda \cdot (b\alpha)\, a_x^p b_x^{q-1} c_x^r \alpha_y^{\lambda-1} \beta_y^\mu \gamma_z^\nu$$

. . . .

e si vede come la somma dei coefficienti:

$$p\lambda + p\mu + p\nu + q\lambda + q\mu + q\nu + r\lambda + r\mu + r\nu$$

sia appunto eguale a $(p+q+r)(\lambda+\mu+\nu)$.

8. Se poniamo (Cap. I, art. 127):

$$H^{(-i+1)}_{xyz\ldots t} \ldots H^{(-2)}_{xyz\ldots t} H^{(-1)}_{xyz\ldots t} H_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t} ,$$

e consideriamo che si ha identicamente, quando le n serie $x, y, z, \ldots t$ sono di specie n (Cap. I, art. 109):

$$(xyz\ldots t)^i \cdot \Omega^i_{xyz\ldots t} = K^{(i)}_{xyz\ldots t}$$

ed osserviamo inoltre che

$$(xyz\ldots t)(abc\ldots d) = (a_x b_y \ldots d_t),$$

vediamo che il risultato che si ottiene applicando l'operazione $K^{(i)}_{xyz\dots t}$ ad un aggregato degli elementi (1) è un aggregato degli stessi elementi (1) e delle $\binom{r}{n}$ parentesi del tipo $(a_x\, b_y \dots d_t)$, che si possono formare cogli r simboli $a, b, c, \dots e$ combinati n ad n.

Si avrà dunque, indicando con f ed F delle funzioni razionali intere:

$$K^{(i)}_{xyz\dots t} f(a_x, a_y, \dots a_t\, ; b_x, b_y, \dots b_t \dots ; e_x, e_y, \dots e_t) \tag{6}$$
$$= F(a_x, a_y, \dots a_t\, ; b_x, b_y, \dots b_t\, ; \dots ; e_x, e_y, \dots, e_t\, ; \dots, (a_x\, b_y \dots d_t), \dots),$$

ed è importante di osservare che questa identità sarà poi sempre vera qualunque sia la specie σ delle n serie $x, y, z, \dots t$.

Infatti, poichè $K^{(i)}_{xyz\dots t}$ è un'operazione di polare, il primo membro dell'eguaglianza (6) non è che un aggregato razionale intero degli elementi lineari (1), cosicchè la (6) si può considerare come una identità fra gli elementi lineari (1) i quali, per $\sigma = n$, sono (Cap. I, art. 42) fra loro affatto indipendenti; tale identità dovrà dunque poi anche sussistere qualunque sia il valore di σ.

---

§° II. Applicazione allo sviluppo per polari

Abbiamo dimostrato (Cap. I, art. 119) che, se $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \dots; \overset{\rho}{t})$ è una forma algebrica con n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie qualsivoglia σ, si ha una identità della forma:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \dots; \overset{\rho}{t}) = \sum_{i+\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} K^{(i)}_{xyz\dots t}\, \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \dots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} f \tag{1}$$

dove le $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ sono delle operazioni di polare che possono dipendere soltanto dai gradi $m, \mu, \nu, \dots, \rho$; cioè sono affatto indipendenti dai valori particolari che si vorranno dare ai coefficienti della forma f.

Applichiamo questa forma di sviluppo al caso in cui la f sia data sotto forma di un aggregato razionale intero degli rn elementi lineari

$$\begin{matrix} a_x, & b_x, & c_x, & \dots, & e_x \\ a_y, & b_y, & c_y, & \dots, & e_y \\ a_z, & b_z, & c_z, & \dots, & e_z \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_t, & b_t, & c_t, & \dots, & e_t \end{matrix} \tag{2}$$

che si possono formare colle n serie $x, y, z, \dots, t$ e con r serie di coefficienti arbitrarii: $a, b, c, \dots, e$.

Per quanto si è visto nel §° precedente la forma:

$$K^{(i)}_{xyz\dots t}\, \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \dots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} f$$

si presenterà, dopo aver eseguito su f le operazioni accennate, come un aggregato di parentesi n^{arie} del tipo

$$(\alpha_x\, \beta_y\, \gamma_z \dots \delta_t),$$

potendo le $\alpha, \beta, \gamma, \dots \delta$ scegliersi a piacere fra le $a, b, c, \dots, e$, e di elementi lineari (2) in cui non entri la serie x. Si potrà dunque scrivere:

$$f(x^m; y; z; \dots; t) = \sum \Delta \left\{ (\alpha'_x \beta'_y \dots \delta'_t)(\alpha''_x \beta''_y \dots \delta''_t) \dots (\alpha^{(i)}_x \beta^{(i)}_y \dots \delta^{(i)}_t) \varphi(y; z; \dots; t) \right\}$$

essendo le Δ delle operazioni di polare fra le $x, y, z, \dots, t$ indipendenti dalle $a, b, \dots, e$, ed essendo le φ degli aggregati razionali interi degli $r(n-1)$ elementi lineari:

$$\begin{array}{llll} a_y, & b_y, & c_y, & \dots e_y \\ a_z, & b_z, & c_z, & \dots e_z \\ \dots & & & \\ a_t, & b_t, & c_t, & \dots e_t \end{array}$$

9. Se ora applichiamo a ciascuna delle $\varphi(y; z; \dots; t)$ lo stesso procedimento applicato alla $f(x; y; z; \dots; t)$, potremo scrivere similmente:

$$\varphi(y; z; \dots; t) = \sum \Delta_{yz \dots t} \left\{ (\alpha'_y \beta'_z \dots \delta'_t) \dots (\alpha^{(i)}_y \beta^{(i)}_z \dots \delta^{(i)}_t) \psi(z; \dots; t) \right\}$$

essendo le $\psi(z; \dots; t)$ aggregati razionali interi degli $r(n-2)$ elementi lineari:

$$\begin{array}{llll} a_z, & b_z, & c_z, & \dots e_z \\ \dots & & & \\ a_t, & b_t, & c_t, & \dots e_t . \end{array}$$

Sostituendo ciò in f si otterrà un risultato della forma:

$$f(x; y; z; \dots; t) = \sum \Delta \left\{ \Pi \psi(z; \dots; t) \right\}$$

dove Π è un prodotto di parentesi del tipo:

$$(a_x \beta_y \gamma_z \dots \delta_t) \qquad \alpha, \beta, \dots, \delta \equiv a, b, c, \dots, e$$

e di parentesi del tipo

$$(\alpha_y \beta_z \dots \delta_t) \qquad \alpha, \beta, \dots \delta \equiv a, b, c, \dots, e$$

Così procedendo si concluderà evidentemente che se f è un aggregato razionale intero degli rn elementi lineari che si possono formare con n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ e con r serie di coefficienti $a, b, c, \dots, e$ (così le une come le altre di specie qualsivoglia σ) si può sempre scrivere un'identità della forma

$$f = \sum \Delta_{xyz \dots t} \Pi$$

in cui le Δ sono operazioni di polare fra le $x, y, z, \dots t$ (indipendenti dalle $a, b, c, \dots, e$) e Π è un prodotto di parentesi appartenenti all'uno ed all'altro degli n tipi:

$$(\alpha_x \beta_y \gamma_z \dots \delta_t), (\alpha_y \beta_z \dots, \delta_t), (\alpha_z \dots \delta_t), \dots, \alpha_t \qquad (4)$$

in cui le serie $\alpha, \beta, \dots$ si possono scegliere a piacere fra le r serie $a, b, c, \dots, e$.

Poichè ognuna delle parentesi (3) è annullata identicamente da ognuna delle operazioni:

$$\begin{array}{llll} \mathcal{D}_{xy}, & \mathcal{D}_{xz}, & \dots, & \mathcal{D}_{xt} \\ & \mathcal{D}_{yz}, & \dots, & \mathcal{D}_{yt} \\ & \dots & & \end{array}$$

possiamo aggiungere che ognuno dei prodotti Π che figurano nella (3) è annullato identicamente da ogni operazione $\mathcal{D}_{pq}$ per la quale p sia una qualunque delle $x, y, z, \dots t$ e q una qualunque delle serie che seguono a p nella successione $x, y, z, \dots, t$.

10- Se facciamo in particolare $r = n$ e prendiamo per f l'espressione:

$$f = a_x^m \, b_y^\mu \, c_z^\nu \, . \; . \; . \, d_r^\lambda \, e_t^\rho$$

che rappresenta simbolicamente la forma algebrica più generale contenente le n serie $x, y, z, \dots r, t$ (di specie qualunque σ) rispettivamente agli ordini $m, \mu, \nu \dots, \lambda, \rho$, il risultato dell'art. prec. si traduce nel seguente teorema: *una forma algebrica con n serie di variabili $x, y, z, \dots, r, t$ (di specie arbitraria σ) si può sempre esprimere come somma di polari di certe forme Π le quali sono esse stesse delle polari*(*) *di f e soddisfano alle $\frac{n(n-1)}{2}$ equazioni differenziali:*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{D}_{xy}\Pi = 0, & \mathcal{D}_{xz}\Pi = 0, \dots & \mathcal{D}_{xr}\Pi = 0, & \mathcal{D}_{xt}\Pi = 0 \\ & \mathcal{D}_{yz}\Pi = 0, \dots & \mathcal{D}_{yr}\Pi = 0, & \mathcal{D}_{yt}\Pi = 0 \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & & \mathcal{D}_{rt}\Pi = 0 \end{array}$$

(*) E quindi sono dei covarianti di f. In questi covarianti ritroviamo le forme da noi già dedotte da f nel Cap. I, che contenevano una sola delle serie fondamentali $x, y, \dots$ ed inoltre le $\sigma - 2$ serie di variabili geometriche ad esse aggiunte (cfr. § XXIV, art. 139). A questi covarianti è stato dato dal *Deruyts* il nome di *covarianti primarii*.

§. III. - *Covarianti di covarianti* -

11- Sia dato un sistema di forme fondamentali

$$f_1(x\,;y\,;\dots),\ f_2(x\,;y\,;\dots),\ \dots \qquad (1)$$

con una serie di variabili ennarie $x, y, \dots$, con coefficienti affatto arbitrarii $A, B, C, \dots$; sia poi:

$$\varphi_1(x\,;y\,;\dots),\ \varphi_2(x\,;y\,;\dots),\ \dots \qquad (2)$$

un sistema di covarianti del sistema (1) e si indichino con $P_1, P_2, P_3, \dots$ i coefficienti dei singoli termini della forma φ_1 e quindi uno qualunque di essi più brevemente con P, con $Q, Q_2, Q_3, \dots$ i coefficienti di φ_2 e quindi uno qualunque di essi con Q, ecc.

A differenza delle (1) nelle quali le $A, B, C, \dots$ sono arbitrarie, i coefficienti $P, Q, R, \dots$, quando si vogliano pensare le (2) non già come forme algebriche generali ma come covarianti delle (1), dovranno pensarsi sostituiti con certe funzioni razionali intere:

$$P = \overline{P}(A, B, C, \dots), \qquad Q = \overline{Q}(A, B, C, \dots)$$

dei coefficienti $A, B, C, \dots$ Perciò, in quanto si voglia mettere in evidenza che le (2) si considerano come covarianti delle (1), in luogo di scrivere semplicemente $\varphi_1(x\,;y\,;\dots)$, $\varphi_2(x\,;y\,;\dots)$, ... scriveremo:

$$\varphi_1\big(x\,;\,y\,;\,\dots\,;\,\overline{P}(A, B, C, \dots)\big)$$

$$\varphi_2\big(x\,;\,y\,;\,\dots\,;\,\overline{Q}(A, B, C, \dots)\big)$$

$$\dots\dots\dots$$

cosicchè, detti $A', B', C', \ldots$ i coefficienti nei quali si trasformano i coefficienti $A, B, C, \ldots$, quando si esegue nelle (1) la sostituzione lineare:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' & y_1 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots , & \ldots\ldots\ldots\ldots , \ \ldots \\ x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \cdots + \varepsilon_n x_n' & y_n = \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \cdots + \varepsilon_n y_n' \end{array} \qquad (3)$$

e detti rispettivamente $\tau_1, \tau_2, \ldots$ i pesi dei covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, sarà:

$$\begin{array}{l} \varphi_1\Big(x';y';\ldots;\bar{P}(A',B',C',\ldots)\Big) = \mathcal{D}^{\tau_1}\varphi_1\Big(x;y;\ldots;\bar{P}(A,B,C,\ldots)\Big) \\ \varphi_2\Big(x';y';\ldots;\bar{Q}(A',B',C',\ldots)\Big) = \mathcal{D}^{\tau_2}\varphi_2\Big(x;y;\ldots;\bar{Q}(A,B,C,\ldots)\Big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (4)$$

essendo $\mathcal{D} = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \varepsilon_n$ il determinante della sostituzione lineare (3).

Ciò premesso, sia:

$$\psi(x;y;\ldots;P;Q;\ldots)$$

un covariante, di peso τ, delle forme (2) considerate come forme affatto generali, il quale sia rispettivamente dei gradi $g_1, g_2, \ldots$ nei coefficienti di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Si avrà:

$$\psi(x';y';\ldots;P';Q';\ldots) = \mathcal{D}^{\tau}\psi(x;y;\ldots;P;Q;\ldots) \qquad (5)$$

comunque si scelgano le $P, Q, \ldots$, purchè le $P', Q', \ldots$ rendano soddisfatte identicamente le uguaglianze:

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x;y;\ldots;P) = \varphi_1(x';y';\ldots;P') \\ \varphi_2(x;y;\ldots;Q) = \varphi_2(x';y';\ldots;Q') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \qquad (6)$$

quando in queste uguaglianze si sieno espresse le x' in funzione delle x, le y' in funzione delle y, ecc. per mezzo delle (3). Ora le (4) ci dicono che le (6) sono appunto soddisfatte identicamente quando si prendano per le $P, Q, \ldots$ le funzioni:

$$\mathcal{D}^{\tau_1}\bar{P}(A,B,C,\ldots), \quad \mathcal{D}^{\tau_2}\bar{Q}(A,B,C,\ldots), \quad \ldots$$

e per le $P', Q', \ldots$ le funzioni:

$$\bar{P}(A',B',C',\ldots), \quad Q(A',B',C',\ldots).$$

Si avrà dunque facendo queste posizioni in (5):

$$\psi\Big(x';y';\ldots;\bar{P}(A',B',C',\ldots),\bar{Q}(A',B',C',\ldots),\ldots\Big)$$
$$= \mathcal{D}^{\tau+g_1\tau_1+g_2\tau_2+\cdots}\psi\Big(x;y;\ldots;\bar{P}(A,B,C,\ldots),\bar{Q}(A,B,C,\ldots),\ldots\Big)$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che la forma ψ considerata come funzione dei coefficienti delle (1) è un covariante del sistema (1) di peso $\tau + g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + \ldots$ Cioè: *i covarianti di covarianti di un sistema fondamentale sono anch'essi covarianti dello stesso sistema fondamentale.* E precisamente, se ψ è un covariante di peso τ e di gradi g_1, g_2, rispettivamente nei coefficienti delle forme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le quali sono alla lor volta covarianti risp. dei pesi $\tau_1, \tau_2, \ldots$ di un certo sistema di forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots$, sarà anche ψ un covariante, di peso $\tau + g_1\tau_1 + g_2\tau_2 + \ldots$, del sistema $f_1, f_2, \ldots$

cosicchè, detti $A', B', C', \ldots$ i coefficienti nei quali si trasformano i coefficienti $A, B, C, \ldots$, quando si esegue nelle (1) la sostituzione lineare:

$$\begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' & y_1 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \ldots \\ x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \cdots + \varepsilon_n x_n' & y_n = \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \cdots + \varepsilon_n y_n' \end{array} \qquad (3)$$

e detti rispettivamente $\tau_1, \tau_2, \ldots$ i pesi dei covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, sarà:

$$\varphi_1\left(x'; y'; \ldots; \bar{P}(A', B', C', \ldots)\right) = \mathscr{D}^{\tau_1} \varphi_1\left(x; y; \ldots; \bar{P}(A, B, C, \ldots)\right)$$

$$\varphi_2\left(x'; y'; \ldots; \bar{Q}(A', B', C', \ldots)\right) = \mathscr{D}^{\tau_2} \varphi_2\left(x; y; \ldots; \bar{Q}(A, B, C, \ldots)\right) \qquad (4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

essendo $\mathscr{D} = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \varepsilon_n$ il determinante della sostituzione lineare (3).

Ciò premesso, sia:

$$\psi(x; y; \ldots; P; Q; \ldots)$$

un covariante, di peso τ, delle forme (2) considerate come forme affatto generali, il quale sia rispettivamente dei gradi $g_1, g_2, \ldots$ nei coefficienti di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Si avrà:

$$\psi(x'; y'; \ldots; P'; Q'; \ldots) = \mathscr{D}^{\tau} \psi(x; y; \ldots; P; Q; \ldots) \qquad (5)$$

comunque si scelgano le $P, Q, \ldots$, purchè le $P', Q', \ldots$ rendano soddisfatte identicamente le uguaglianze:

$$\varphi_1(x; y; \ldots; P) = \varphi_1(x'; y'; \ldots; P')$$

$$\varphi_2(x; y; \ldots; Q) = \varphi_2(x'; y'; \ldots; Q') \qquad (6)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

quando in queste uguaglianze si sieno espresse le x' in funzione delle x, le y' in funzione delle y, ecc. per mezzo delle (3). Ora le (4) ci dicono che le (6) sono appunto soddisfatte identicamente quando si prendano per le $P, Q, \ldots$ le funzioni:

$$\mathscr{D}^{\tau_1} \bar{P}(A, B, C, \ldots), \quad \mathscr{D}^{\tau_2} \bar{Q}(A, B, C, \ldots), \quad \ldots$$

e per le $P', Q', \ldots$ le funzioni:

$$\bar{P}(A', B', C', \ldots), \quad Q(A', B', C', \ldots).$$

Si avrà dunque facendo queste posizioni in (5):

$$\psi\left(x'; y'; \ldots; \bar{P}(A', B', C', \ldots), \bar{Q}(A', B', C', \ldots), \ldots\right)$$

$$= \mathscr{D}^{\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \cdots} \psi\left(x; y; \ldots; \bar{P}(A, B, C, \ldots), \bar{Q}(A, B, C, \ldots), \ldots\right)$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che la forma ψ considerata come funzione dei coefficienti delle (1) è un covariante del sistema (1) di peso $\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \ldots$. Cioè: *i covarianti di covarianti di un sistema fondamentale sono anch'essi covarianti dello stesso sistema fondamentale*. E precisamente, se ψ è un covariante di peso τ e di gradi $g_1, g_2, \ldots$ rispettivamente nei coefficienti delle forme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ le quali sono alla lor volta covarianti risp. dei pesi $\tau_1, \tau_2, \ldots$ di un certo sistema di forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots$, sarà anche ψ un covariante, di peso $\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \ldots$, del sistema $f_1, f_2, \ldots$.

cosicchè, detti $A', B', C', \dots$ i coefficienti nei quali si trasformano i coefficienti $A, B, C, \dots$, quando si esegue nelle (1) la sostituzione lineare:

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n' \qquad y_1 = \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n'$$

$$\dots\dots\dots\dots , \qquad \dots\dots\dots\dots , \dots \quad (3)$$

$$x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n' \qquad y_n = \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \dots + \varepsilon_n y_n'$$

e detti rispettivamente $\tau_1, \tau_2, \dots$ i pesi dei covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, sarà:

$$\varphi_1\left(x'; y'; \dots; \bar{P}(A', B', C', \dots)\right) = \mathcal{D}^{\tau_1} \varphi_1\left(x; y; \dots; \bar{P}(A, B, C, \dots)\right)$$

$$\varphi_2\left(x'; y'; \dots; \bar{Q}(A', B', C', \dots)\right) = \mathcal{D}^{\tau_2} \varphi_2\left(x; y; \dots; \bar{Q}(A, B, C, \dots)\right) \quad (4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

essendo $\mathcal{D} = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \dots \varepsilon_n$ il determinante della sostituzione lineare (3).

Ciò premesso, sia:

$$\psi(x; y; \dots; P; Q; \dots)$$

un covariante, di peso τ, delle forme (2) considerate come forme affatto generali, il quale sia rispettivamente dei gradi $g_1, g_2, \dots$ nei coefficienti di $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Si avrà:

$$\psi(x'; y'; \dots; P'; Q'; \dots) = \mathcal{D}^{\tau} \psi(x; y; \dots; P; Q; \dots) \quad (5)$$

comunque si scelgano le $P, Q, \dots$, purchè le $P', Q', \dots$ rendano soddisfatte identicamente le uguaglianze:

$$\varphi_1(x; y; \dots; P) = \varphi_1(x'; y'; \dots; P')$$

$$\varphi_2(x; y; \dots; Q) = \varphi_2(x'; y'; \dots; Q') \quad (6)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

quando in queste uguaglianze si sieno espresse le x' in funzione delle x, le y' in funzione delle y, ecc. per mezzo delle (3). Ora le (4) ci dicono che le (6) sono appunto soddisfatte identicamente quando si prendano per le $P, Q, \dots$ le funzioni:

$$\mathcal{D}^{\tau_1} \bar{P}(A, B, C, \dots), \quad \mathcal{D}^{\tau_2} \bar{Q}(A, B, C, \dots), \quad \dots$$

e per le $P', Q', \dots$ le funzioni:

$$\bar{P}(A', B', C', \dots), \quad Q(A', B', C', \dots).$$

Si avrà dunque facendo queste posizioni in (5):

$$\psi\left(x'; y'; \dots; \bar{P}(A', B', C', \dots), \bar{Q}(A', B', C', \dots), \dots\right)$$

$$= \mathcal{D}^{\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \dots} \psi\left(x; y; \dots; \bar{P}(A, B, C, \dots), \bar{Q}(A, B, C, \dots), \dots\right)$$

Quest'ultima eguaglianza ci dice che la forma ψ considerata come funzione dei coefficienti delle (1) è un covariante del sistema (1) di peso $\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \dots$. Cioè: *i covarianti di covarianti di un sistema fondamentale sono anch'essi covarianti dello stesso sistema fondamentale*. E precisamente, se ψ è un covariante di peso τ e di gradi g_1, g_2, rispettivamente nei coefficienti delle forme $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ le quali sono alla lor volta covarianti risp. dei pesi $\tau_1, \tau_2, \dots$ di un certo sistema di forme fondamentali $f_1, f_2, \dots$, sarà anche ψ un covariante, di peso $\tau + g_1 \tau_1 + g_2 \tau_2 + \dots$, del sistema $f_1, f_2, \dots$.

12. Così, ad esempio, poichè l'Hessiano H (Cap. I, §. XII), di una forma ennaria: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un suo covariante, anche l'Hessiano dell'Hessiano, cioè la forma:

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

sarà un covariante della stessa forma fondamentale f. E precisamente sarà rispetto alla forma fondamentale f un covariante di peso $2(n+1)$, poichè nel caso attuale: $\tau = 2$, $\tau_1 = 2$, $g_1 = n$.

13. Poichè qualunque polare di una forma fondamentale è un suo covariante assoluto, segue dal teorema dell'art. 11 che: *le polari dei covarianti di un sistema fondamentale sono covarianti assoluti dello stesso sistema fondamentale.*

Perciò si usa dire che le operazioni di polare sono dei *processi* (operativi) *invariantivi*; cioè dei processi che non fanno perdere il carattere invariantivo alle forme su cui vengono eseguiti.

14. Anche l'operazione di Cayley, $\Omega_{xyz\dots t}$ fra n serie di variabili $x, y, z, \dots t$ costituisce un processo invariantivo *nel campo ennario.*

Per riconoscere ciò, basta ricordare (Cap. I, art. 93) che

$$(x\,y\,z \dots t)\cdot \Omega_{xyz\dots t} = H_{xyz\dots t}$$

dove $(x\,y\,z \dots t)$ è un covariante identico ed $H_{xyz\dots t}$, essendo un operazione di polare, è appunto, secondo l'art. prec., un processo invariantivo.

§. IV. *Processo invariantivo di Aronhold* -

15. Siano:

$$f(x; y; \dots; A_1, A_2, \dots, A_\mu),\ F(x; y; \dots; B_1, B_2, \dots, B_\nu), \dots \quad (1)$$

o, più brevemente:

$$f(x; y; \dots; A),\ F(x; y; \dots; B),\ \dots$$

delle forme fondamentali di certi dati ordini nelle serie di variabili $x, y, \dots$, i cui coefficienti, affatto generali, siano indicati per la f con $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, per la F con $B_1, B_2, \dots, B_\nu$, ecc.

Se $\varphi(x; y; \dots; A_1, A_2, \dots, A_\mu; B; \dots)$ è un covariante qualunque del sistema (1), la solita eguaglianza:

$$\begin{aligned} &\varphi(x'; y'; \dots; A_1', A_2', \dots, A_\mu'; B'; \dots) = \\ &= \mathcal{D}^\tau \varphi(x; y; \dots; A_1, A_2, \dots, A_\mu; B; \dots) \end{aligned} \quad (2)$$

è soddisfatta qualunque siano le $x, y, \dots A, B, \dots$, purchè $x', y', \dots, A', B', \dots$ siano i corrispondenti elementi trasformati. Perciò la (2) continuerà ad essere soddisfatta, se in luogo di $A_1, A_2, \dots, A_\mu$ si ponga rispettivamente $A_1 + \lambda E_1, A_2 + \lambda E_2, \dots, A_\mu + \lambda E_\mu$ ed in luogo di $A_1', A_2', \dots A_\mu'$

12- Così, ad esempio, poichè l'Hessiano H (Cap. I, §. XII), di una forma ennaria: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un suo covariante, anche l'Hessiano dell'Hessiano, cioè la forma:

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 H}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

sarà un covariante della stessa forma fondamentale f. E precisamente sarà rispetto alla forma fondamentale f un covariante di peso $2(n+1)$, poichè nel caso attuale: $\tau = 2$, $\tau_1 = 2$, $g_1 = n$.

13- Poichè qualunque polare di una forma fondamentale è un suo covariante assoluto, segue dal teorema dell'art. 11 che: *le polari dei covarianti di un sistema fondamentale sono covarianti assoluti dello stesso sistema fondamentale*.

Perciò si usa dire che le operazioni di polare sono dei *processi* (operativi) *invariantivi*; cioè dei processi che non fanno perdere il carattere invariantivo alle forme su cui vengono eseguiti.

14- Anche l'operazione di Cayley, $\Omega_{xyz\dots t}$ fra n serie di variabili $x, y, z, \dots t$ costituisce un processo invariantivo *nel campo ennario*.

Per riconoscere ciò, basta ricordare (Cap. I, art. 93) che

$$(x\,y\,z \dots t) \cdot \Omega_{xyz\dots t} = H_{xyz\dots t}$$

dove $(x\,y\,z\dots t)$ è un covariante identico ed $H_{xyz\dots t}$, essendo un operazione di polare, è appunto, secondo l'art. prec., un processo invariantivo.

---

§° IV. *Processo invariantivo di Aronhold* -

15- Siano:

$$f(x;y;\dots;A_1, A_2, \dots, A_\mu),\ F(x;y;\dots;B_1, B_2, \dots, B_\nu), \dots \quad (1)$$

o, più brevemente:

$$f(x;y;\dots;A),\ F(x;y;\dots;B),\ \dots$$

delle forme fondamentali di certi dati ordini nelle serie di variabili $x, y, \dots$, i cui coefficienti, affatto generali, siano indicati per la f con $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, per la F con $B_1, B_2, \dots, B_\nu$, ecc.

Se $\varphi(x;y;\dots;A_1, A_2, \dots, A_\mu; B;\dots)$ è un covariante qualunque del sistema (1), la solita eguaglianza:

$$\begin{aligned} &\varphi(x';y';\dots;A'_1, A'_2, \dots, A'_\mu; B';\dots) = \\ &= \mathcal{D}^\tau \cdot \varphi(x;y;\dots;A_1, A_2, \dots, A_\mu; B;\dots) \end{aligned} \quad (2)$$

è soddisfatta qualunque siano le $x, y, \dots A, B, \dots$, purchè $x', y', \dots, A', B', \dots$ siano i corrispondenti elementi trasformati. Perciò la (2) continuerà ad essere soddisfatta, se in luogo di $A_1, A_2, \dots, A_\mu$ si ponga rispettivamente $A_1 + \lambda E_1, A_2 + \lambda E_2, \dots, A_\mu + \lambda E_\mu$ ed in luogo di $A'_1, A'_2, \dots A'_\mu$

si ponga $A'_1+\lambda E'_1, A'_2+\lambda E'_2, \dots, A'_\mu+\lambda E'_\mu$, essendo $E_1, E_2, \dots E_\mu$ dei coefficienti, affatto generali e indipendenti dalle $A, B, \dots$, di una nuova forma

$$f(x;y;\dots;E_1,E_2,\dots,E_\mu)$$

simile alle $f(x;y;\dots;A_1,A_2,\dots A_\mu)$ ed $E'_1,E'_2,\dots,E'_\mu$ i coefficienti della stessa forma trasformata mediante la sostituzione lineare che cambia le x nelle x', le y nelle y'; ...; giacchè le relazioni lineari che legano le A' alle A sono quelle stesse che legano le $A'+\lambda E'$ alle $A+\lambda E$, qualunque sia il valore del parametro λ.

Se ora nell'uguaglianza così ottenuta:

$$\varphi(x';y';\dots;A'_1+\lambda E'_1, A'_2+\lambda E'_2,\dots,A'_\mu+\lambda E'_\mu;B';\dots)$$
$$=\mathcal{D}^r\varphi(x;y;\dots;A_1+\lambda E_1, A_2+\lambda E_2,\dots,A_\mu+\lambda E_\mu;B;\dots)$$

si sviluppano e si ordinano i due membri secondo le potenze di λ, se ne deduce, uguagliando i coefficienti della prima potenza di questo parametro (che è, come si è notato, affatto arbitrario):

$$E'_1\frac{\partial\varphi(x';y';\dots A';B';\dots)}{\partial A'_1}+E'_2\frac{\partial\varphi(x;y;\dots;A';B';\dots)}{\partial A'_2}+\dots+E'_\mu\frac{\partial\varphi(x';y';\dots A';B';\dots)}{\partial A'_\mu}$$
$$=\mathcal{D}^r\left\{E_1\frac{\partial\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)}{\partial A_1}+E_2\frac{\partial\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)}{\partial A_2}+\dots+E_\mu\frac{\partial\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)}{\partial A_\mu}\right.$$

Pertanto: se $\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)$ è un covariante qualunque del sistema (1), la forma:

$$E_1\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}+E_2\frac{\partial\varphi}{\partial A_2}+\dots+E_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial A_\mu}$$

è un covariante del sistema

$$f(x;y;\dots;A),\quad f(x;y;\dots;E),\quad F(x;y;\dots;B),\dots$$

16. Il processo operativo rappresentato dal simbolo

$$E_1\frac{\partial}{\partial A_1}+E_2\frac{\partial}{\partial A_2}+\dots+E_\mu\frac{\partial}{\partial A_\mu}, \qquad (3)$$

(conosciuto col nome di *processo di Aronhold*) che, applicato alla forma φ non ne toglie il carattere invariantivo (purchè si imagini opportunamente ampliato il sistema delle forme fondamentali) si può dunque riguardare come un processo invariantivo, precisamente come il processo di polare col quale ha stretta affinità. E appunto per mettere in evidenza tale affinità noi designeremo brevemente l'operatore (3) col simbolo $\mathcal{D}_{AE}$ affatto analogo al simbolo $\mathcal{D}_{xy}$ già adottato per le polari elementari. E' inutile aggiungere che la maggior parte delle proprietà svolte nel Cap. I per le operazioni di polare si estenderanno senz'altro alle operazioni composte come aggregati di simboli $\mathcal{D}_{AE}$, le quali non differiscono da quelle sostanzialmente, ma soltanto ne differiscono per la diversa interpretazione delle serie di variabili.

17. Se $A, E, \dots, L$ sono μ serie di coefficienti tutti fra loro indipendenti, simili alla serie $A_1, A_2, \dots, A_\mu$, si potrà considerare il simbolo operativo:

$$\Omega_{A,E,\dots L}=\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial A_1} & \frac{\partial}{\partial A_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial A_\mu} \\ \frac{\partial}{\partial E_1} & \frac{\partial}{\partial E_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial E_\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial L_1} & \frac{\partial}{\partial L_2} & & \frac{\partial}{\partial L_\mu} \end{vmatrix}$$

analogo a quello dell'operazione di Cayley fra le serie x; y; ecc.

Questo simbolo applicato ad un covariante qualunque: $\varphi(x;y;\dots;A;E;\dots;L;B;\dots)$ di un sistema fondamentale:

$$f(x;y;\dots;A),\ f(x;y;\dots;E),\ \dots,\ f(x;y;\dots;L),\ \varphi(x;y;\dots;B),\ \dots \qquad (4)$$

lo trasformerà in un altro covariante dello stesso sistema, cioè: *anche il simbolo $\Omega_{A,E,\dots,L}$ rappresenta un processo invariantivo.*

Infatti dall'identità:

$$\left\{\sum \pm A_1 E_2 \dots L_\mu\right\} \cdot \Omega_{AE\dots L}\,\varphi = H_{AE\dots L}\,\varphi$$

di cui il secondo membro si è già dimostrato testè (art. 16) essere un covariante del sistema (4) ed in cui il determinante (1) è pure, come riscontreremo assai facilmente in seguito, un covariante dello stesso sistema, segue che $\Omega_{AE\dots L}\,\varphi$ è il quoziente di due covarianti, ed è quindi esso stesso un covariante; come d.d.

§° V. *Applicazione alla rappresentazione dei covarianti*

18. Sia $\varphi(x;y;\dots;A;B;\dots)$ un covariante del sistema di forme fondamentali:

$$f(x;y;\dots;A),\ F(x;y;\dots;B),\ \dots \qquad (1)$$

il quale sia del grado g nei coefficienti $A_1, A_2, \dots A_\mu$ della

forma f. Si considerino altre $g-1$ forme

$$f_1 = f(x;y;\dots;A'),\ f_2 = f(x;y;\dots;A''),\ \dots,\ f_{g-1} = f(x;y;\dots;A^{(g-1)})$$

tutte simili alla f, con altrettante nuove serie di coefficienti generali

$$A'_1, A'_2, \dots, A'_\mu\ ;\ A''_1, A''_2, \dots, A''_\mu\ ;\ \dots$$

indipendenti fra loro e da quelli della f.

Per quanto si è visto al §° precedente, la forma:

$$A'_1 \frac{\partial\varphi}{\partial A_1} + A'_2 \frac{\partial\varphi}{\partial A_2} + \dots + A'_\mu \frac{\partial\varphi}{\partial A_\mu}$$

o, più brevemente, $\mathcal{D}_{AA'}\varphi$ sarà un covariante del sistema fondamentale:

$$f,\ f_1,\ F,\ \dots$$

Quindi, per la stessa ragione, la forma:

$$\mathcal{D}_{AA''}\,\mathcal{D}_{AA'}\,\varphi$$

sarà un covariante del sistema fondamentale

$$f,\ f_1,\ f_2,\ F,\ \dots$$

e così procedendo verremo a dedurre dal covariante φ la forma:

$$\psi = \mathcal{D}_{AA^{(g-1)}} \cdots \mathcal{D}_{AA''}\,\mathcal{D}_{AA'}\,\varphi \qquad (2)$$

la quale sarà un covariante del sistema:

$$f,\ f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_{g-1},\ F,\ \dots \qquad (1)'$$

Al covariante φ del sistema (1) si viene così a sostituire il covariante ψ del sistema (1)' il quale ψ è di primo grado nei coefficienti di ciascuna delle forme $f, f_1, f_2, \dots f_{g-1}$.

E sarà poi sempre facile ritornare dal covariante ψ al covariante φ, poichè la (2) ci dice, per una proprietà affatto ovvia delle operazioni di polare, che se nella forma ψ si sostituisce, in luogo di ciascuna delle nuove serie $A', A'', \ldots$, la serie primitiva A, essa ricade (a meno di un coefficiente numerico eguale $a\,\underline{|g}$) nel primitivo covariante φ.

19. Allo stesso modo si potrà poi sostituire al covariante ψ del sistema (1)' un covariante ϑ del sistema

$$f, f_1, f_2, \ldots, f_{g-1}, F, F_1, F_2, \ldots, F_{g'-1}, \ldots \qquad (1)''$$

ottenuto aggiungendo al sistema (1)' altre $g'-1$ forme fondamentali $F_1, F_2, \ldots, F_{g'-1}$ tutte simili alla F, essendo g' il grado del covariante φ nei coefficienti di F. Il covariante ϑ sarà lineare nei coefficienti di ciascuna delle forme fondamentali:

$$f, f_1, \ldots, f_{g-1}, F, F_1, \ldots F_{g'-1}$$

e ricadrà (a meno del coefficiente numerico $\underline{|g}\,\underline{|g'}$) nel primitivo covariante φ appenachè tutte le $A', A'', \ldots$ si pongano eguali alle A e tutte le $B', B'', \ldots$ eguali alle B.

Così procedendo si conclude evidentemente che da ogni covariante φ del sistema (1) si può dedurre un covariante Φ del sistema ampliato:

$$f, f_1, \ldots f_{g-1}, F, F_1, \ldots F_{g'-1}, \ldots$$

lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale, il quale ricade nel covariante φ quando i coefficienti

delle $f_1, f_2, \ldots, f_{g-1}$ si pongano eguali ai coefficienti delle f, così i coefficienti delle $F_1, F_2, \ldots F_{g'-1}$ eguali ai coefficienti della F ecc.

Vedremo meglio in seguito di quanta importanza sia questo teorema nello studio delle espressioni caratteristiche delle forme invariantive

---

§° VI. *Applicazione alla formazione di nuovi covarianti.*

19. Teorema. *Se φ e ψ sono due covarianti qualisivogliano della forma fondamentale ennaria di ordine m:*

$$f = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}} A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad (1)$$

anche la forma

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial\psi}{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (2)$$

è un covariante della stessa forma fondamentale.

Per dimostrare ciò, basterà anche di dimostrare che è un covariante delle (1) la forma

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\partial\psi}{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^m\varphi}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial y_2^{\alpha_2}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}} \qquad (3)$$

nell'ipotesi che le serie $y, z, \ldots$ contenute in φ siano diverse dalla serie x e dalle serie di variabili eventualmente contenute in ψ; giacchè se l'espressione (3) è un covariante, essa non cesserà evidentemente di essere tale se in luogo delle serie $y, z, \ldots$ contenute in φ si pongano le serie $x, y, \ldots$ qualsivogliano.

Ciò premesso, si ha per il §° precedente che la forma:

$$\sum_{\alpha_1+\cdots\alpha_n=m} \frac{\partial\psi}{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}} \cdot B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \tag{4}$$

è un covariante del sistema composto dalla forma (1) e dalla forma fondamentale:

$$f_1 = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2\ldots\lfloor\alpha_n} B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}, \tag{5}$$

simile alla (1) con altri coefficienti affatto arbitrarii B. Che se poi prenderemo per le B delle funzioni dipendenti dai coefficienti della (1) tali che la (5) sia un covariante della stessa (1), l'espressione (4) sarà un covariante di covarianti della (1) e quindi sarà essa stessa (cfr. §° III) un covariante della (1). Se dunque consideriamo che

$$\mathcal{D}_{yx}^m\varphi = \left(x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\cdots+x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^m\varphi$$

$$=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor\alpha_1 \lfloor\alpha_2\ldots\lfloor\alpha_n} \cdot \frac{\partial^m\varphi}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial y_2^{\alpha_2}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$$

è un covariante di φ e quindi anche di f, vediamo che la (4) sarà un covariante di φ semprechè si prenda:

$$B_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{\partial^m\varphi}{\partial y_1^{\alpha_1}\partial y_2^{\alpha_2}\ldots\partial y_n^{\alpha_n}}$$

come appunto si doveva dimostrare.

20. Ciò che si è detto per due covarianti φ e ψ dell'unica forma fondamentale si estende senza difficoltà al caso di due covarianti di un sistema di più forme fondamentali.

Consideriamo ad esempio il sistema di due forme ennarie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{ed} \qquad u_1x_1+u_2x_2+\cdots+u_nx_n \tag{6}$$

Si dimostrerà facilmente, analogamente a quanto si è fatto per la forma aggiunta di una forma quadratica (cfr. Cap. I § XXIV) che la forma

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & u_1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix}$$

è un suo covariante. Se quindi operiamo su di esso col simbolo:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\cdots+\frac{\partial\psi}{\partial u_n}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$$

essendo φ un covariante qualunque di f, ne dedurremo un nuovo covariante del sistema (6). E quindi otterremo anche un covariante operando sul risultato un'altra volta col simbolo:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,\frac{\partial}{\partial u_2}+\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\,\frac{\partial}{\partial u_n}$$

il che equivale a porre nella espressione di ψ in luogo di $u_1, u_2, \dots, u_n$ rispettivamente $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$.

L'espressione

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} & 0
\end{vmatrix}$$

è dunque un covariante della forma fondamentale f.

In questa espressione possiamo prendere per es. per φ la stessa forma f, oppure la sua Hessiana (cfr. Cap. I, §° XII) ed otterremo così due nuovi covarianti della f.

---

§° VII. Rappresentazione simbolica di forme di gradi qualisivogliano nei coefficienti delle forme fondamentali. Esempî.

21. Sia

$$f=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m}\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}}\,\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\qquad(1)$$

una forma fondamentale generale di ordine m, di cui sia

$$f=a_x^m\qquad(1)'$$

(cfr. Cap. I, §° VIII) la espressione simbolica. Abbiamo veduto come ogni combinazione lineare dei coefficienti A si possa esprimere senza ambiguità alcuna mercè i simboli a_i; non così per una combinazione delle A di grado qualunque g. In tal caso però la rappresentazione simbolica si potrà fare ugualmente introducendo tante nuove serie di simboli b_i, c_i, ..., equivalenti ai simboli a_i, quanto è il grado g. Definendo infatti il significato simbolico delle c_i, b_i, ... come si è fatto per le a_i, cioè:

$$\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}=b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}\cdots b_n^{\alpha_n}=c_1^{\alpha_1}c_2^{\alpha_2}\cdots c_n^{\alpha_n}=\cdots,\qquad(2)$$

o, che è la stessa cosa, ponendo simbolicamente: (1)''

$$f=a_x^m=b_x^m=c_x^m=\cdots,$$

si potrà rappresentare senza ambiguità ogni prodotto di g coefficienti $\bar{A}$ mediante i suddetti simboli, adottando per ogni coefficiente un simbolo diverso. Così, per es., si potrà scrivere simbolicamente:

$$\bar{A}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\,b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}\cdots b_n^{\alpha_n}$$

$$\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\bar{A}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\,b_1^{\gamma_1}b_2^{\gamma_2}\cdots b_n^{\gamma_n}=a_1^{\gamma_1}a_2^{\gamma_2}\cdots a_n^{\gamma_n}\,b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}\cdots b_n^{\alpha_n}$$

$$\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\bar{A}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}\bar{A}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\,b_1^{\gamma_1}b_2^{\gamma_2}\cdots b_n^{\gamma_n}\,c_1^{\delta_1}c_2^{\delta_2}\cdots c_n^{\delta_n},$$

e così via.

Rappresentando in tal modo i singoli termini di una forma qualunque F di grado g nei coefficienti A_i, l'intera forma verrà definita simbolicamente senza alcuna ambiguità; poichè ogni serie di simboli si presenterà soltanto nelle combinazioni (2) e la F sarà *lineare* rispetto alle combinazioni (2) formate con una stessa *serie di simboli*.

Vedremo come mediante la rappresentazione simbolica si possa dare a tutte le forme invariantive un'espressione *caratteristica*, cioè tale da rappresentare esclusivamente forme che godono della proprietà invariantiva. Ci limiteremo per ora ad alcuni esempi.

22. Per rappresentare simbolicamente l'Hessiano di una forma fondamentale ennaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots = e_x^m = \dots, \tag{3}$$

basta osservare che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = m(m-1)a_x^{m-2} a_i a_j = m(m-1) b_x^{m-1} b_i b_j = \dots,$$

onde si può scrivere:

$$H = m^n(m-1)^n \begin{vmatrix} a_x^{m-2} a_1 a_1 & a_x^{m-2} a_1 a_2 & \dots & a_x^{m-2} a_1 a_n \\ b_x^{m-2} b_2 b_1 & b_x^{m-2} b_2 b_2 & \dots & b_x^{m-2} b_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_x^{m-2} c_n c_1 & c_x^{m-2} c_n c_2 & \dots & c_x^{m-2} c_n c_n \end{vmatrix}$$

od anche:

$$H = m^n(m-1)^n \cdot a_x^{m-2} b_x^{m-2} \dots e_x^{m-2} a_1 b_2 \dots e_n (a\, b \dots e)$$

ed eseguendo le $\underline{|n}$ sostituzioni possibili fra i simboli equi-

valenti, il che non altera il valore dell'espressione, e sommando quindi i risultati membro a membro:

$$\underline{|n}\, H = m^n(m-1)^n \cdot a_x^{m-2} b_x^{m-2} \dots e_x^{m-2} (a\, b \dots e) \sum \pm a_1 b_2 \dots e_n \tag{4}$$

giacchè ogni sostituzione non fa che cambiare $(a\, b \dots e)$ in $\pm(a\, b \dots e)$ secondochè essa sia di classe pari o di classe dispari.

Si ha dunque:

$$H = \frac{m^n(m-1)^n}{\underline{|n}} \cdot a_x^{m-2} b_x^{m-2} \dots e_x^{m-2} (a\, b \dots e)^2,$$

cioè: *la Hessiana della forma ennaria (3) è rappresentata, a meno di un fattore numerico, dal composto simbolico*

$$(a\, b \dots e)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} \dots e_x^{m-2}.$$

23. In particolare, per una forma quadratica:

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_i x_j = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \dots = e_x^2 = \dots \tag{5}$$

il suo discriminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

si potrà rappresentare simbolicamente come segue:

$$\Delta = \frac{2^n}{\underline{|n}} \cdot (a\, b\, c \dots e)^2 \tag{6'}$$

24. Vediamo ora come si rappresenti simbolicamente il

controvariante (Cfr. Cap. I, §° XXIV) della stessa forma fondamentale (5):

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i,j} A_{ij} u_i u_j \quad (7)$$

Essendo A_{ij} l'aggiunto dell'elemento a_{ij} nel determinante Δ, si può scrivere evidentemente

$$A_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}}$$

e per conseguenza

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial \Delta}{\partial a_{ij}} = \delta . \Delta$$

indicando brevemente con δ il processo operativo di Aronhold:

$$\delta = \sum u_i u_j \frac{\partial}{\partial a_{ij}}$$

che consiste nel derivare rispetto ai coefficienti della forma quadratica (5) e moltiplicare pei corrispondenti coefficienti della forma quadratica u_x^2. Per ottenere φ, basterà dunque eseguire tale operazione δ sopra ogni termine di Δ e sommare quindi i risultati. Ora è chiaro che se un termine qualunque di Δ è dato sotto la forma simbolica

$$a_i a_j \cdot b_h b_k \cdot c_r c_s \dots,$$

il risultato dell'operazione δ applicata a questo termine sarà:

$$\begin{aligned} & u_i u_j b_h b_k c_r c_s \dots \\ + \ & a_i a_j u_h u_k c_r c_s \dots \\ + \ & a_i a_j b_h b_k u_r u_s \dots \\ + \ & \dots \dots \dots, \end{aligned}$$

cioè basterà sostituire il simbolo u una volta al posto del simbolo a, una volta al posto di b, e così via e poi sommare i risultati. Ma sotto forma simbolica si aveva (a meno del fattore numerico):

$$\Delta = (a\, b\, c \dots g\, e)^2.$$

Sarà quindi

$$\delta\Delta = (u\, b\, c \dots g\, e)^2 + (a\, u\, c \dots g\, e)^2 + (a\, b\, u \dots g\, e)^2 + \dots + (a\, b\, c \dots g\, u)^2,$$

cioè:

$$\delta\Delta = n \cdot (a\, b\, c \dots g\, u)^2,$$

giacchè, stante l'equivalenza dei simboli $a, b, c, \dots$, i determinanti

$$(u\, b\, c \dots g\, e)^2, \ (a\, u\, c \dots g\, e)^2, \ \dots$$

rappresentano tutti la stessa cosa. *La forma aggiunta* $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ *della forma quadratica* $f = a_x^2 = b_x^2 = c_x^2 = \dots = g_x^2 = \dots$ *è dunque rappresentata simbolicamente, a meno di un fattore numerico, da* $(a\, b\, c \dots g\, u)^2$; e precisamente si ha:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{2^n}{\lfloor n-1} \cdot (a\, b\, c \ldots e\, u)^2 \qquad (7)'$$

25. Per le n forme fondamentali ennarie:

$$f_1 = a_x^{m_1}, \quad f_2 = b_x^{m_2}, \quad \ldots\ldots, \quad f_n = e_x^{m_n} \qquad (8)$$

(dove ora i simboli $a, b, \ldots, e$ non sono più equivalenti, poichè appartengono a forme diverse) la Jacobiana (Cfr. Cap. I, §° VI)

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

sarà espressa simbolicamente così:

$$J = \begin{vmatrix} m_1 a_x^{m_1-1} a_1 & m_1 a_x^{m_1-1} a_2 & \ldots & m_1 a_x^{m_1-1} a_n \\ m_2 b_x^{m_2-1} b_1 & m_2 b_x^{m_2-1} b_2 & \ldots & m_2 b_x^{m_2-1} b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ m_n e_x^{m_n-1} e_1 & m_n e_x^{m_n-1} e_2 & \ldots & m_n e_x^{m_n-1} e_n \end{vmatrix}$$

ossia:

$$J = m_1 m_2 \ldots m_n \cdot (a\, b \ldots e) a_x^{m_1-1} b_x^{m_2-1} \ldots e_x^{m_n-1}. \qquad (9)$$

26. Ciò che si è visto poco fa (art. 24) circa il modo di eseguire il processo operativo di Aronhold sulle espressioni simboliche, vale affatto in generale. Sia infatti φ una funzione intera omogenea di grado g dei coefficienti di una forma fondamentale

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \ldots$$

e si voglia applicare ad essa il processo operativo:

$$\delta = \sum B_i \frac{\partial}{\partial A_i} \qquad (10)$$

dove le A_i sono i coefficienti di f e le B_i i coefficienti corrispondenti di una forma simile:

$$F = \alpha_x^m = \beta_x^m = \ldots$$

Applicando il processo δ ad un termine qualunque di φ, posto prima sotto la forma simbolica mercè g serie di simboli equivalenti $a, b, c, \ldots$, si avrà evidentemente:

$$\delta\left\{a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \ldots b_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \ldots c_n^{\rho_n} \ldots\right\} =$$
$$= \alpha_1^{\mu_1} \alpha_2^{\mu_2} \ldots \alpha_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \ldots b_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \ldots c_n^{\rho_n} \ldots$$
$$+ a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_n^{\mu_n} \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \ldots \alpha_n^{\nu_n} c_1^{\rho_1} c_2^{\rho_2} \ldots c_n^{\rho_n} \ldots$$
$$+ a_1^{\mu_1} a_2^{\mu_2} \ldots a_n^{\mu_n} b_1^{\nu_1} b_2^{\nu_2} \ldots b_n^{\nu_n} \alpha_1^{\rho_1} \alpha_2^{\rho_2} \ldots \alpha_n^{\rho_n} \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

e così per tutti i termini di cui si compone φ. Se dunque $\varphi(a_i, b_i, c_i, \ldots)$ è la forma φ espressa mercè i simboli equivalenti $a, b, c, \ldots$, si avrà:

$$\delta\varphi = \varphi(\alpha_i, b_i, c_i, \ldots) + \varphi(a_i, \alpha_i, c_i, \ldots) + \varphi(a_i, b_i, \alpha_i, \ldots) + \ldots$$

27. Data, per es., la forma fondamentale quaternaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = d_x^m = \dots , \tag{11}$$

supponiamo si voglia eseguire sulla sua Hessiana:

$$H = (a\,b\,c\,d)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

il processo δ, espresso dalla (10), derivando, cioè, la H rispetto ai coefficienti A di f e moltiplicando i risultati pei corrispondenti coefficienti B di una nuova forma fondamentale

$$f_1 = \alpha_x^m = \beta_x^m = \gamma_x^m = \delta_x^m = \dots$$

simile alla f.

Si avrà dapprima, secondo la regola data:

$$\delta f = (\alpha\; b\; c\; d)^2 \alpha_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\; \alpha\; c\; d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\; b\; \alpha\; d)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

$$+ (a\; b\; c\; \alpha)^2 \alpha_x^{m-2}\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, d_x^{m-2}$$

ossia, per l'equivalenza dei simboli a, b, c, d:

$$\delta f = 4 (a\; b\; c\; \alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2} . \tag{12}$$

Applicando al nuovo covariante così ottenuto un'altra volta lo stesso processo δ, si otterrebbe similmente:

$$\delta^2 f = 12\, (a\; b\; \beta\; \alpha)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2} . \tag{13}$$

E così poi:

$$\delta^3 f = 24 (a\; \gamma\; \beta\; \alpha)^2 a_x^{m-2}\, \gamma_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2} , \tag{14}$$

e finalmente:

$$\delta^4 f = 24 (\delta\, \gamma\, \beta\, \alpha)^2 \delta_x^{m-2}\, \gamma_x^{m-2}\, \beta_x^{m-2}\, \alpha_x^{m-2} . \tag{15}$$

Abbiamo ottenuto così le espressioni simboliche di 4 nuovi covarianti, simultanei, del sistema fondamentale composto dalla f e dalla f_1.

---

§° VIII. *Costruzione di forme invariantive sotto la forma simbolica caratteristica* -

28- Le espressioni simboliche trovate nel §° precedente mettono senz'altro in evidenza il carattere invariantivo delle forme che esse rappresentano. Consideriamo, infatti, ad esempio, il covariante Hessiano:

$$H = (a\,b\,c)^2 a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2} \tag{1}$$

della forma ternaria

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots . \tag{2}$$

La forma F che si deduce da F eseguendo sulle x_1, x_2, x_3 la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \end{aligned} \tag{3}$$

si può rappresentare simbolicamente (Cfr. Cap. I, §° XI) con:

$$F = a_x'^m = b_x'^m = c_x'^m = \dots \tag{4}$$

dove il significato dei simboli $a', \dots$ può desumersi da quello dei simboli $a, \dots$ mediante le sostituzioni lineari:

$$a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \gamma_1 a_3 \qquad b_1' = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2 + \gamma_1 b_3$$
$$a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \gamma_2 a_3 \ , \quad b_2' = \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 + \gamma_2 b_3 \quad , \ldots \qquad (5)$$
$$a_3' = \alpha_3 a_1 + \beta_3 a_2 + \gamma_3 a_3 \qquad b_3' = \alpha_3 b_1 + \beta_3 b_2 + \gamma_3 b_3 \ .$$

Se ora indichiamo con H' la stessa forma H costruita per la forma trasformata F, si ha evidentemente:

$$H' = (a'b'c')^2 a_x'^{m-2} b_x'^{m-2} c_x'^{m-2}$$

Volendo poi esprimere H' coi coefficienti della forma f e colle x_1, x_2, x_3, basterà esprimere le x' colle x mercè le (3) e sostituire ai simboli a', b', c' i simboli a, b, c mercè le (5). Ma per tali sostituzioni viene, come sappiamo (cfr. Cap. I, §° VI):

$$a'_{x'} = a_x \ , \ b'_{x'} = b_x \ , \ c'_x = c_x \quad , \quad (a'b'c') = (\alpha\beta\gamma)(abc) \ ;$$

si ha dunque:

$$H' = (\alpha\beta\gamma)^2 \cdot (abc)^2 a_x^{m-2} b_x^{m-2} c_x^{m-2} \ ,$$

cioè appunto l'eguaglianza

$$H' = (\alpha\beta\gamma)^2 \cdot H$$

che ci dice essere H' un covariante, di peso 2, della forma f.

29. La dimostrazione precedente vale evidentemente per qualunque aggregato razionale intero di elementi del tipo a_x e di elementi (*parentesi*) del tipo (abc), ovvero del tipo $(abcd)$ nel campo quaternario, ecc.

Supponendo, per fissare le idee, di stare nel campo terna-

rio, siano una o più forme fondamentali:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = d_x^m = \ldots \ , \ f_1 = e_x^{m_1} = g_x^{m_1} = \ldots \ , \ \ldots \qquad (6)$$

e sia C un prodotto di elementi simbolici del tipo a_x, cioè di elementi analoghi ad:

$$a_x \ , \ b_x \ , \ c_x \ , \ \ldots , e_x \ , \ g_x \ldots , a_y , b_y , c_y , \ldots , e_y , g_y , \ldots \qquad (7)$$

e di elementi del tipo (abc) cioè analoghi ad:

$$(abc), (abd), (bcd), (abe), (aeg), \ldots \qquad (8)$$

Tale prodotto avrà un significato effettivo, semprechè ognuna delle serie di simboli $a, b, \ldots, e, g, \ldots$ si trovi ad un grado eguale a quello della forma fondamentale cui si riferisce, e rappresenterà sempre un covariante del sistema fondamentale (6) proprio come all'art. prec.; poichè C e C' differiranno fra loro di $(\alpha\beta\gamma)^\tau$, essendo τ il numero degli elementi del tipo (8), cioè il numero di parentesi, che entrano come fattori in C. In particolare rappresenterà un invariante, se nella sua composizione entrano soltanto le parentesi. Si potrà poi anche aggiungere come fattori a C un numero qualunque di parentesi del tipo (xyz), essendo $x, y, z, \ldots$ serie di variabili cogredienti alla serie x, ovvero del tipo (abu) essendo u una serie di variabili controgrediente alla serie x. In tal caso se λ è il numero dei fattori del tipo

$$(abc) \quad \text{ovvero} \quad (abu) \qquad ,$$

e λ' quello dei fattori del tipo (xyz), si avrà:

$$C' = (\alpha\beta\gamma)^{\lambda-\lambda'}\cdot C$$

poichè i covarianti identici $(x\,y\,z)$, . . . sono di peso -1. Cioè: il peso del covariante C sarà dato dalla differenza fra il numero delle parentesi formate con serie di coefficienti simbolici (o di coefficienti di forme lineari) e il numero delle parentesi formate con serie di variabili cogredienti alla serie fondamentale x.

3°. Prendendo poi una somma qualunque

$$kC + k_1C_1 + k_2C_2 + \dots$$

di più prodotti analoghi a C moltiplicati per dei coefficienti numerici arbitrari, si avrà ancora una forma invariantiva, del sistema fondamentale (6), omogenea nei coefficienti di ciascuna forma, ed in ogni serie di variabili, purchè si abbia cura che ogni prodotto $C, C_1, C_2, \dots$ contenga lo stesso numero di simboli equivalenti per ciascuna forma fondamentale, e che ogni serie di variabili $x, y, \dots, u, \dots$ entri in tutti allo stesso grado.

4°. Le stesse cose valgono pel campo binario, quaternario, quinario, ecc. colla sola differenza che in luogo di parentesi simboliche o identiche del tipo $(a\,b\,c)$, $(a\,b\,u)$, $(x\,y\,z)$, ..., si considereranno parentesi del tipo $(a\,b\,c\,d)$, $(a\,b\,c\,u)$, $(a\,b\,u\,v)$, $(x\,y\,z\,t)$, ... e così via

La rappresentazione così ottenuta è la così detta *rappresentazione simbolica caratteristica* dei covarianti, poichè dimostreremo, in uno dei §§ che seguono, che *reciprocamente ogni forma invariantiva* (invariante, covariante, controvariante ordinario o misto) *appartenente al sistema fondamentale ennario (6) è suscettibile di una cosiffatta rappresentazione.*

32. È importante di notare che le espressioni invariantive così costruite possono talvolta essere identicamente nulle, in virtù della equivalenza dei simboli, senza che esse siano identicamente nulle quando i simboli si considerino come quantità effettive tutte indipendenti fra loro.

Così, ad esempio, se in luogo della Hessiana della forma ternaria fondamentale $f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots$, si considerasse la forma più semplice:

$$K = (a\,b\,c)\,a_x^{m-1}\,b_x^{m-1}\,c_x^{m-1},$$

è facile riconoscere che valutando questa espressione nei coefficienti *effettivi* di f, si troverebbe un risultato identicamente nullo. Infatti, poichè il simbolo a è equivalente al simbolo b, il significato di K non può cangiare se in luogo di a si scriva dappertutto b e viceversa; cioè si ha anche:

$$K = (b\,a\,c)\,b_x^{m-1}\,a_x^{m-1}\,c_x^{m-1} = -(a\,b\,c)\,a_x^{m-1}\,b_x^{m-1}\,c_x^{m-1}.$$

Si ha dunque:

$$K = -K,$$

onde appunto:

$$K = 0.$$

§° IX. *Riduzione delle sostituzioni lineari.*

33. Per esprimere che S è la sostituzione lineare definita dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}\, x'_1 + a_{12}\, x'_2 + \dots + a_{1n}\, x'_n \\ x_2 &= a_{21}\, x'_1 + a_{22}\, x'_2 + \dots + a_{2n}\, x'_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}\, x'_1 + a_{n2}\, x'_2 + \dots + a_{nn}\, x'_n , \end{aligned} \tag{1}$$

scriveremo qualche volta per maggior comodità:

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1'}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema fondamentale: *qualunque sostituzione lineare fra n variabili si può sempre ottenere come la risultante di un numero finito di sostituzioni lineari appartenenti al tipo:*

$$x_1 = x'_1, \dots, x_{h-1} = x'_{h-1}\,,\; x_h = \varepsilon\, x'_h\,,\; x_{h+1} = x'_{h+1}\,, \dots, x_n = x'_n \tag{2}$$

che indicheremo con $S_h^{(\varepsilon)}$, *ovvero al tipo:*

$$x_1 = x'_1, \dots, x_{h-1} = x'_{h-1}\,,\; x_h = x'_h + x'_k\,,\; x_{h+1} = x'_{h+1}, \dots, x_n = x'_n \tag{3}$$

che designeremo con $S_{h,k}$.

34- Incominciamo dall'osservare che, essendo la S rappresentata con (1), sarà:

$$S \cdot S_h = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,h-1} & \varepsilon a_{1h} & a_{1,h+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,h-1} & \varepsilon a_{2h} & a_{2,h+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,h-1} & \varepsilon a_{nh} & a_{n,h+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4}$$

ed

$$S \cdot S_{h,k} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & \dots & a_{1k} + a_{1h} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2h} & \dots & a_{2k} + a_{2h} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nh} & \dots & a_{nk} + a_{nh} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Perchè resti stabilito il teorema che abbiamo enunciato, basterà dunque dimostrare che la matrice (1)' si può sempre dedurre dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

(che rappresenta la sostituzione identica) mediante le seguenti operazioni: 1° moltiplicazione di una colonna per un fattore costante diverso da zero, 2° aggiunzione ad una colonna degli elementi corrispondenti di un'altra colonna.

35- Venendo ora alla dimostrazione di quest'ultimo asserto, cominciamo dal notare che gli elementi della prima orizzontale del determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ non possono essere tutti nulli; chè altrimenti lo stesso determinante sarebbe nullo e la matrice (1)' non rappresenterebbe una sostituzione lineare propriamente detta, come supponiamo. Per conseguenza se il primo elemento a_{11} fosse nullo, si potrà surrogarlo con un numero diverso da zero, aggiungendo alla prima colonna un'altra colonna, il cui primo elemento non sia nullo. Si potrà poi ottenere che gli altri elementi della prima orizzontale diventino tutti nulli, ove già non lo fossero, aggiungendo alla colonna h^{esima}, se per es. a_{1h} non fosse nullo, la prima colonna moltiplicata per il rapporto fra $-a_{1h}$ ed il primo elemento, che è diverso da zero. Dopo ciò il determinante dato dalla matrice (1) avrà assunto la forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ed il suo valore sarà ancora diverso da zero; cosicchè gli $n-1$ elementi $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}$ non potranno essere **tutti** nulli.

Se α_{22} fosse nullo, lo si potrà dunque surrogare con un numero differente da zero, aggiungendo alla 2ª colonna una delle consecutive, il cui elemento non sia nullo; dopodichè, aggiungendo alle $n-2$ colonne consecutive la stessa seconda colonna, moltiplicata ogni volta per un opportuno

fattore, si potrà ottenere che gli elementi $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \dots \alpha_{2n}$ si riducano ad essere tutti nulli. Si troverà con ciò il determinante primitivo ridotto alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

con valore ancora diverso da zero, talchè almeno uno degli elementi $\alpha_{33}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{3n}$ sarà diverso da zero.

Procedendo allo stesso modo si perverrà evidentemente alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

con le $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ tutte differenti da zero.

36. Ci resta a vedere come si passi dalla matrice (6) alla matrice (7). Per ottenere ciò, si comincerà dal moltiplicare la prima colonna di (6) per α_{11}. Si aggiungerà poi alla prima colonna di (6) la seconda moltiplicata per α_{21} e si moltiplicherà quindi la seconda colonna per α_{22}. In terzo luogo si aggiungerà alla prima colonna la terza moltiplicata per α_{31}, alla seconda la terza moltiplicata per α_{32}

zontale del determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ non possono essere tutti nulli; chè altrimenti lo stesso determinante sarebbe nullo e la matrice (1) non rappresenterebbe una sostituzione lineare propriamente detta, come supponiamo. Per conseguenza se il primo elemento a_{11} fosse nullo, si potrà surrogarlo con un numero diverso da zero, aggiungendo alla prima colonna un'altra colonna, il cui primo elemento non sia nullo. Si potrà poi ottenere che gli altri elementi della prima orizzontale diventino tutti nulli, ove già non lo fossero, aggiungendo alla colonna h^{esima}, se per es. a_{1h} non fosse nullo, la prima colonna moltiplicata per il rapporto fra $-a_{1h}$ ed il primo elemento, che è diverso da zero. Dopo ciò il determinante dato dalla matrice (1) avrà assunto la forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ed il suo valore sarà ancora diverso da zero; cosicchè gli $n-1$ elementi $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}$ non potranno essere tutti nulli.

Se α_{22} fosse nullo, lo si potrà dunque surrogare con un numero differente da zero, aggiungendo alla 2ª colonna una delle consecutive, il cui elemento non sia nullo; dopodichè, aggiungendo alle $n-2$ colonne consecutive la stessa seconda colonna, moltiplicata ogni volta per un opportuno

fattore, si potrà ottenere che gli elementi $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \dots \alpha_{2n}$ si riducano ad essere tutti nulli. Si troverà con ciò il determinante primitivo ridotto alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

con valore ancora diverso da zero, talchè almeno uno degli elementi $\alpha_{33}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{3n}$ sarà diverso da zero.

Procedendo allo stesso modo si perverrà evidentemente alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

con le $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ tutte differenti da zero.

36. Ci resta a vedere come si passi dalla matrice (6) alla matrice (7). Per ottenere ciò, si comincerà dal moltiplicare la prima colonna di (6) per α_{11}. Si aggiungerà poi alla prima colonna di (6) la seconda moltiplicata per α_{21} e si moltiplicherà quindi la seconda colonna per α_{22}. In terzo luogo si aggiungerà alla prima colonna la terza moltiplicata per α_{31}, alla seconda la terza moltiplicata per α_{32}

zontale del determinante $\sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ non possono essere tutti nulli; chè altrimenti lo stesso determinante sarebbe nullo e la matrice (1) non rappresenterebbe una sostituzione lineare propriamente detta, come supponiamo. Per conseguenza se il primo elemento a_{11} fosse nullo, si potrà surrogarlo con un numero diverso da zero, aggiungendo alla prima colonna un'altra colonna, il cui primo elemento non sia nullo. Si potrà poi ottenere che gli altri elementi della prima orizzontale diventino tutti nulli, ove già non lo fossero, aggiungendo alla colonna h^{esima}, se per es. a_{1h} non fosse nullo, la prima colonna moltiplicata per il rapporto fra $-a_{1h}$ ed il primo elemento, che è diverso da zero. Dopo ciò il determinante dato dalla matrice (1) avrà assunto la forma:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

ed il suo valore sarà ancora diverso da zero; cosicchè gli $n-1$ elementi $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}$ non potranno essere tutti nulli.

Se α_{22} fosse nullo, lo si potrà dunque surrogare con un numero differente da zero, aggiungendo alla 2ª colonna una delle consecutive, il cui elemento non sia nullo; dopodichè, aggiungendo alle $n-2$ colonne consecutive la stessa seconda colonna, moltiplicata ogni volta per un opportuno

fattore, si potrà ottenere che gli elementi $\alpha_{23}, \alpha_{24}, \dots \alpha_{2n}$ si riducano ad essere tutti nulli. Si troverà con ciò il determinante primitivo ridotto alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

con valore ancora diverso da zero, talchè almeno uno degli elementi $\alpha_{33}, \alpha_{34}, \dots, \alpha_{3n}$ sarà diverso da zero.

Procedendo allo stesso modo si perverrà evidentemente alla forma

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \alpha_{n4} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

con le $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}$ tutte differenti da zero.

36. Ci resta a vedere come si passi dalla matrice (6) alla matrice (7). Per ottenere ciò, si comincerà dal moltiplicare la prima colonna di (6) per α_{11}. Si aggiungerà poi alla prima colonna di (6) la seconda moltiplicata per α_{21} e si moltiplicherà quindi la seconda colonna per α_{22}. In terzo luogo si aggiungerà alla prima colonna la terza moltiplicata per α_{31}, alla seconda la terza moltiplicata per α_{32}

e si moltiplicherà quindi la terza colonna per α_{33}. Dopo ciò le prime tre orizzontali di (6) si saranno cangiate nelle prime tre di (7), restando le altre affatto inalterate. Operando poi allo stesso modo sulla quarta orizzontale di (6), la si cangerà nella quarta di (7), e così di seguito finchè l'intera matrice (6) si trovi cangiata nella (7).

37. Non è senza importanza di notare che la seconda parte della riduzione, cioè la riduzione della matrice (6) alla matrice (7) è stata fatta, per quanto riguarda la seconda delle due specie di operazioni definite in fine dell'art. 34, in modo che a qualsiasi colonna si sono soltanto aggiunte le colonne di indice più elevato. Questa osservazione si traduce in fatti, per quanto si è visto all'art. 43, nel seguente teorema: *ogni sostituzione lineare del tipo:*

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}\, x_1' \\
x_2 &= \alpha_{21}\, x_1' + \alpha_{22}\, x_2' \\
&\dots\dots\dots\dots \\
x_n &= \alpha_{n1}\, x_1' + \alpha_{n2}\, x_2' + \dots + \alpha_{nn}\, x_n'
\end{aligned}
$$

è la risultante di sostituzioni lineari del tipo $S_h^{(\varepsilon)}$ e di sostituzioni del tipo $S_{h,k}$ nelle quali $h > k$.

---

§° X. *Equazioni differenziali che caratterizzano i covarianti.*

38. Siano $a, b, c, \dots$ le serie ennarie di simboli mediante i quali vengono rappresentate (cfr. §° VII) le forme del sistema fondamentale

(1) $$f,\ f_1,\ f_2,\ \dots$$

e sia

(2) $$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; \dots; a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots b_n; \dots)$$

o, più brevemente $\varphi(x; y; \dots; a; b; \dots)$ un covariante qualunque del sistema (1), il quale possa contenere le serie di variabili cogredienti $x, y, \dots$ Se nelle $f, f_1, \dots$ si esegue una sostituzione lineare delle $x, y, \dots$ nelle $x', y', \dots$, le stesse $f, f_1, \dots$ si trasformeranno in altre forme $F, F_1, F_2, \dots$ le quali si potranno rappresentare simbolicamente (cfr. §° VIII, art. 28) assolutamente come le $f, f_1, f_2, \dots$ colla sola differenza che in luogo dei simboli $a, b, c, \dots$ si porranno i simboli $a', b', c', \dots$ legati rispettivamente ai simboli $a, b, c, \dots$ della sostituzione lineare controgrediente a quella eseguita sulla serie x.

Detto D il determinante della sostituzione lineare e τ il peso del covariante φ, il carattere invariantivo della forma φ verrà dunque espresso dall'uguaglianza

(3) $$\varphi(x'; y'; \dots; a'; b'; \dots) = D^{\tau}\, \varphi(x; y; \dots; a; b; \dots)$$

39. Ciò posto, eseguiamo sulle $x, y, \dots$ la sostituzione li-

neare, (di determinante $D=1$):

$$
\begin{array}{ll}
x'_1 = x_1 & y'_1 = y_1 \\
\dots & \dots \\
x'_{h-1} = x_{h-1} & y'_{h-1} = y_{h-1} \\
x'_h = x_h + \lambda x_k \,, & y'_h = y_h + \lambda y_k \,, \quad \dots \\
x'_{h+1} = x_{h+1} & y'_{h+1} = y_{h+1} \\
\dots & \dots \\
x'_n = x_n & y'_n = y_n
\end{array}
\tag{4}
$$

dalla quale consegue pei simboli $a, b, c, \dots$ la sostituzione ad essa controgrediente:

$$
\begin{array}{ll}
a'_1 = a_1 & b'_1 = b_1 \\
\dots & \dots \\
a'_{k-1} = a_{k-1} & b'_{k-1} = b_{k-1} \\
a'_k = a_k - \lambda a_k \,, & b'_k = b_k - \lambda b_h \,, \quad \dots \\
a'_{k+1} = a_{k+1} & b'_{k+1} = b_{k+1} \\
\dots & \dots \\
a'_n = a_n & b'_n = b_n
\end{array}
\tag{5}
$$

Sostituendo queste espressioni in $\varphi(x';y';\dots;a';b';\dots)$ si ha per lo sviluppo di Taylor esteso fino ai termini che contengono la prima potenza di λ:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x';y';\dots;a';b';\dots) &= \varphi(x;y;\dots;a;b;\dots) \\
&+ \lambda \cdot D_{hk}\varphi(x;y;\dots;a;b;\dots) - \lambda \cdot \Delta_{kh}\varphi(x;y;\dots;a\,b) \\
&+ \dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

dove con D_{hk} e Δ_{hk} sono designati brevemente gli operato-

ri:

$$D_{hk} = x_k \frac{\partial}{\partial x_h} + y_k \frac{\partial}{\partial y_h} + \dots \tag{7}$$

$$\Delta_{hk} = a_k \frac{\partial}{\partial a_h} + b_k \frac{\partial}{\partial b_h} + c_k \frac{\partial}{\partial c_h} + \dots \tag{8}$$

Dovendo il secondo membro di (6) coincidere col secondo membro di (7) qualunque sia il valore del parametro arbitrario λ, si ha dunque la condizione:

$$D_{hk}\,\varphi(x;y;\dots;a;b;\dots) = \Delta_{kh}\,\varphi(x;y;\dots;a;b;\dots) \tag{9}$$

40. Reciprocamente, se la forma φ costruita coi coefficienti simbolici delle forme generali $f, f_1, f_2, \dots$ soddisfa alla equazione alle derivate parziali (9), essa sarà un covariante del sistema $f, f_1, f_2, \dots$ rispetto alla sostituzione lineare (4), cioè la uguaglianza (3) sarà soddisfatta per questo tipo di trasformazione lineare.

Invero, supponiamo dapprima che fra i simboli $a, b, c, \dots$ non ne siano di equivalenti, cioè che essi appartengono a forme fondamentali fra loro tutte distinte. In tal caso la condizione (9) deve essere soddisfatta identicamente anche se alle $a, b, \dots$ si diano dei significati effettivi fra loro affatto indipendenti come alle $x, y, \dots$; giacchè potendo per esempio $f = a_x^m$ essere una forma affatto generale, nulla ci impedisce di prendere poi in particolare per f, se si voglia, una potenza di una forma lineare arbitraria neare, (di determinante $D=1$):

$$
\begin{array}{lll}
x'_1 = x_1 & y'_1 = y_1 & \\
\ldots & \ldots & \\
x'_{h-1} = x_{h-1} & y'_{h-1} = y_{h-1} & \\
x'_h = x_h + \lambda x_k \;, & y'_h = y_h + \lambda y_k \;, & \ldots \quad (4) \\
x'_{h+1} = x_{h+1} & y'_{h+1} = y_{h+1} & \\
\ldots & \ldots & \\
x'_n = x_n & y'_n = y_n &
\end{array}
$$

dalla quale consegue pei simboli $a, b, c, \ldots$ la sostituzione ad essa controgrediente:

$$
\begin{array}{lll}
a'_1 = a_1, & b'_1 = b_1, & \\
\ldots & \ldots & \\
a'_{k-1} = a_{k-1} & b'_{k-1} = b_{k-1} & \\
a'_k = a_k - \lambda a_k \;, & b'_k = b_k - \lambda b_h & , \ldots \quad (5) \\
a'_{k+1} = a_{k+1} & b'_{k+1} = b_{k+1} & \\
\ldots & \ldots & \\
a'_n = a_n & b'_n = b_n &
\end{array}
$$

Sostituendo queste espressioni in $\varphi(x';y';\ldots;a';b';\ldots)$ si ha per lo sviluppo di Taylor esteso fino ai termini che contengono la prima potenza di λ:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x';y';\ldots;a';b';\ldots) &= \varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) \\
&+ \lambda \cdot D_{hk}\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) - \lambda \cdot \Delta_{kh}\varphi(x;y;\ldots;a\,b) \qquad (6) \\
&+ \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

dove con D_{hk} e Δ_{hk} sono designati brevemente gli operato-

ri:

$$D_{hk} = x_k \frac{\partial}{\partial x_h} + y_k \frac{\partial}{\partial y_h} + \ldots \qquad (7)$$

$$\Delta_{hk} = a_k \frac{\partial}{\partial a_h} + b_k \frac{\partial}{\partial b_h} + c_k \frac{\partial}{\partial c_h} + \ldots \qquad (8)$$

Dovendo il secondo membro di (5) coincidere col secondo membro di (7) qualunque sia il valore del parametro arbitrario λ, si ha dunque la condizione:

$$D_{hk}\,\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) = \Delta_{kh}\,\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots) \qquad (9)$$

40. Reciprocamente, se la forma φ costruita coi coefficienti simbolici delle forme generali $f, f_1, f_2, \ldots$ soddisfa alla equazione alle derivate parziali (9), essa sarà un covariante del sistema $f, f_1, f_2, \ldots$ rispetto alla sostituzione lineare (4), cioè la uguaglianza (3) sarà soddisfatta per questo tipo di trasformazione lineare.

Invero, supponiamo dapprima che fra i simboli $a, b, c, \ldots$ non ne siano di equivalenti, cioè che essi appartengono a forme fondamentali fra loro tutte distinte. In tal caso la condizione (9) deve essere soddisfatta identicamente anche se alle $a, b, \ldots$ si diano dei significati effettivi fra loro affatto indipendenti come alle $x, y, \ldots$; giacchè potendo per esempio $f = a_x^m$ essere una forma affatto generale, nulla ci impedisce di prendere poi in particolare per f, se si voglia, una potenza di una forma lineare arbitraria e sostituire in (9), dopo eseguite le derivazioni simboliche, i coefficienti di f corrispondenti a tale ipotesi. Ora ciò torna appunto a dire che la (9) dev'essere soddisfatta qualunque siano i significati anche effettivi fra loro indipendenti, che si diano alle $x, y, \ldots, a, b, \ldots$ Ciò posto, introducendo per brevità il simbolo operativo

$$(h, k) \equiv D_{hk} - \Delta_{kh} \quad ,$$

si vede che, come è soddisfatta identicamente rispetto alle lettere $x, y, \ldots, a, b, \ldots$ l'uguaglianza:

$$(h, k)\, \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) = 0 \quad ,$$

così saranno soddisfatte identicamente tutte le uguaglianze

$$(h, k)^2 \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) = 0$$
$$(h, k)^3 \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) = 0 \qquad (10)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'altra parte il teorema di Taylor ci dà, proseguendo lo sviluppo (6):

$$\varphi(x'; y'; \ldots; a; b; \ldots) = \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots)$$

$$+ \frac{\lambda}{\underline{|1}} \cdot (h, k)\varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) + \frac{\lambda^2}{\underline{|2}} \cdot (h\, k)^2\varphi + \frac{\lambda^3}{\underline{|3}} \cdot (h, k)^3 \varphi + \ldots \qquad (11)$$

Si conchiude dunque per le (9) e (10) che:

$$\varphi(x'; y'; \ldots; a; b; \ldots) = \varphi(x; y; \ldots; a; b; \ldots) \, ,$$

cioè appunto che la (3) è soddisfatta per la trasformazione lineare del tipo (4).

Finalmente il caso in cui i simboli $a, b, c, \ldots$ siano in parte, o tutti, fra loro equivalenti, si riconduce facilmente a quello ora considerato operando sull'eguaglianza (9) col processo di Aronhold (cfr. §° V). In questo modo si sostituirà all'uguaglianza simbolica (9) un'uguaglianza simbolica affatto analoga (cfr. art. 26), nella quale i simboli $a, b, c, \ldots$ rappresenteranno forme fondamentali indipendenti. Da questa si dedurranno poi, come poco fa, delle formole analoghe alle (10). Tutte queste formole ricadranno poi nelle stesse (9) e (10) coi simboli equivalenti appena che le nuove forme fondamentali introdotte si suppongano poi, come è lecito, coincidenti colle primitive ad esse corrispondenti. Le formole (10) sussisteranno dunque, come le (9), anche se, fatte le derivazioni, si presentino in esse simboli equivalenti, cosicchè lo sviluppo (11) ci condurrà alla stessa conclusione di poco fa.

41. Eseguiamo ora invece sulle $x, y, \ldots$ la sostituzione lineare (di determinante ε):

$$x_1' = x_1, \ldots, x_{h-1}' = x_{h-1}, \; x_h' = \varepsilon^{-1} x_h \, , \; x_{h+1}' = x_{h+1}, \ldots, x_n' = x_n \qquad (12)$$

che trae con sè pei simboli $a, b, c, \ldots$ la sostituzione:

$$a_1' = a_1, \ldots, a_{h-1}' = a_{h-1}, \, a_h' = a_h \, , \, a_{h+1}' = a_{h+1}, \ldots, a_n' = a_n \, . \qquad (13)$$

Si dovrà avere, secondo la (3), l'uguaglianza:

$$\varphi(x_1,\dots,\frac{x_h}{\varepsilon},\dots,x_n;y_1,\dots,\frac{y_h}{\varepsilon},\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,\varepsilon a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,\varepsilon b_h,\dots,b_n;\dots)$$
$$=\varepsilon^{\tau}\varphi(x_1,\dots,x_h,\dots,x_n;y_1,\dots,y_h,\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,b_h,\dots,b_n;\dots). \quad (14)$$

Di qui segue se, per un termine di φ scelto a piacere indichiamo con p_i la differenza fra il numero dei fattori a_h, b_h, c_h, ... (di indice h) in esso contenuti e il numero dei suoi fattori (di indice h) del tipo x_h, y_h, ... :

$$\varepsilon^{p_h} = \varepsilon^{\tau}$$

donde $p_h = \tau$.

Pertanto, il numero p_h (che è precisamente quello stesso che nel primo capitolo, §° XV, abbiamo definito come peso del termine di cui si tratta espresso nei coefficienti effettivi di tutte le forme fondamentali) ha lo stesso valore (uguale al peso τ del covariante φ) qualunque sia il termine del covariante che si voglia considerare e comunque si scelga l'indice h. Ritroviamo così il teorema già incontrato al §° XV del primo capitolo.

42\. Questo teorema può essere espresso brevemente così:

$$[\Delta_{h,h} - D_{hh}]\,\varphi = \tau\varphi\ , \qquad h = 1, 2, \dots n\ . \quad (15)$$

Infatti, se T è un termine qualunque della forma φ, è facile vedere che si ha

$$[\Delta_{hh} - D_{hh}]\,T = p_h\,T$$

essendo p_h il numero testè definito per detto termine.

Reciprocamente, se la forma φ (che supponiamo omogenea nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale ed in ciascuna serie di variabili) soddisfa alle condizioni:

$$[\Delta_{11} - D_{11}]\,\varphi = [\Delta_{22} - D_{22}]\,\varphi = \dots\dots = [\Delta_{nn} - D_{nn}]\,\varphi\ , \quad (16)$$

esisterà un numero τ pel quale sono soddisfatte le (15) e quindi anche le (14); cioè φ sarà un covariante del sistema fondamentale $f, f_1, f_2, \dots$ rispetto alla sostituzione lineare (12).

43\. Dopo quanto si è dimostrato, è ora facile di concludere che: affinchè la forma algebrica $\varphi(x;y;\dots,a;b;\dots)$ composta colle serie di variabili ennarie $x, y, \dots$ e coi coefficienti simbolici $a, b, c, \dots$ di certe forme fondamentali ennarie $f, f_1, f_2, \dots$, sia un covariante del sistema $f, f_1, f_2, \dots$ è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:

$$(1,1)\,\varphi = (2,2)\,\varphi = \dots\dots = (n,n)\,\varphi \qquad (I)$$

e le condizioni:

$$(i,j)\,\varphi = 0 \qquad (II)$$

nelle quali ultime gli indici i, j si possono scegliere a piacere fra i numeri $1, 2, \dots, n$, purchè differenti.

Infatti, se sono soddisfatte le condizioni (I) e (II), la forma φ sarà un covariante del sistema fondamentale $f, f_1, f_2, \dots$ rispetto alle sostituzioni lineari del tipo $S_h^{(\varepsilon)}$ e del tipo $S_{h,k}$ e quindi anche (per quanto si è visto nel §° precedente) per una sostituzione lineare qualunque; giacchè è manifesto che se φ sia un covariante rispetto a certe due sostituzioni S e T, sarà essa anche un cova-

$$\varphi(x_1,\dots,\frac{x_h}{\varepsilon},\dots,x_n;y_1,\dots,\frac{y_h}{\varepsilon},\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,\varepsilon a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,\varepsilon b_h,\dots,b_n;\dots)$$
$$=\varepsilon^{\tau}\varphi(x_1,\dots,x_h,\dots,x_n;y_1,\dots,y_h,\dots,y_n;\dots;a_1,\dots,a_h,\dots,a_n;b_1,\dots,b_h,\dots,b_n;\dots). \quad (14)$$

Di qui segue se, per un termine di φ scelto a piacere indichiamo con p_i la differenza fra il numero dei fattori a_h, b_h, c_h, ...(di indice h) in esso contenuti e il numero dei suoi fattori (di indice h) del tipo x_h, y_h, ...:

$$\varepsilon^{p_h} = \varepsilon^{\tau}$$

donde $p_h = \tau$.

Pertanto, il numero p_h (che è precisamente quello stesso che nel primo capitolo, §° XV, abbiamo definito come peso del termine di cui si tratta espresso nei coefficienti effettivi di tutte le forme fondamentali) *ha lo stesso valore (uguale al peso τ del covariante φ) qualunque sia il termine del covariante che si voglia considerare e comunque si scelga l'indice h.* Ritroviamo così il teorema già incontrato al §° XV del primo capitolo.

42. Questo teorema può essere espresso brevemente così:

$$[\Delta_{h,h} - D_{hh}]\varphi = \tau\varphi, \qquad h=1,2,\dots n. \quad (15)$$

Infatti, se T è un termine qualunque della forma φ, è facile vedere che si ha

$$[\Delta_{hh} - D_{hh}]T = p_h T$$

essendo p_h il numero testè definito per detto termine.

Reciprocamente, se la forma φ (che supponiamo omogenea nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale ed in ciascuna serie di variabili) soddisfa alle condizioni:

$$[\Delta_{11} - D_{11}]\varphi = [\Delta_{22} - D_{22}]\varphi = \dots\dots = [\Delta_{nn} - D_{nn}]\varphi, \quad (16)$$

esisterà un numero τ pel quale sono soddisfatte le (15) e quindi anche le (14); cioè φ sarà un covariante del sistema fondamentale $f, f_1, f_2, \dots$ *rispetto alla sostituzione lineare* (12).

43. Dopo quanto si è dimostrato, è ora facile di concludere che: *affinchè la forma algebrica $\varphi(x;y;\dots,a;b;\dots)$ composta colle serie di variabili ennarie $x, y, \dots$ e coi coefficienti simbolici $a, b, c, \dots$ di certe forme fondamentali ennarie $f, f_1, f_2, \dots$, sia un covariante del sistema $f, f_1, f_2, \dots$ è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni:*

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots\dots = (n,n)\varphi \qquad (I)$$

e le condizioni:

$$(i,j)\varphi = 0 \qquad (II)$$

nelle quali ultime gli indici i, j si possono scegliere a piacere fra i numeri 1, 2, ..., n, purchè differenti.

Infatti, se sono soddisfatte le condizioni (I) e (II), la forma φ sarà un covariante del sistema fondamentale $f, f_1, f_2, \dots$ rispetto alle sostituzioni lineari del tipo $S_h^{(2)}$ e del tipo $S_{h,k}$ e quindi anche (per quanto si è visto nel §° precedente) per una sostituzione lineare qualunque; giacchè è manifesto che se φ sia un covariante rispetto a certe due sostituzioni S e T, sarà essa anche un covariante rispetto alla sostituzione lineare ST, loro risultante.

---

§° XI - Riduzione del sistema di condizioni differenziali del §° precedente.

44. Fra le operazioni

$$(i,j) = \Delta_{ij} - D_{ji} \tag{1}$$

dove come nel §° precedente:

$$D_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} + y_j \frac{\partial}{\partial y_i} + z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \dots \tag{2}$$

e

$$\Delta_{ij} = a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + c_j \frac{\partial}{\partial c_i} + \dots, \tag{3}$$

esistono delle relazioni affatto analoghe a quelle del Capitolo I (art. 8) fra le operazioni di polare D_{xy}, D_{xz}, $D_{yz}, \dots$ sempreché le $x_1, x_2, \dots x_n$, $y_1, y_2, \dots y_n, \dots, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ siano variabili fra loro indipendenti. E precisamente, se i, j, h, k sono indici fra loro distinti, si hanno le identità operative:

$$\left.\begin{array}{ll}(4)\left\{\begin{array}{l}(i,j)(h,k)-(h,k)(i,j)=0\\ (i,j)(i,h)-(i,h)(i,j)=0\\ (j,i)(h,i)-(h,i)(j,i)=0\\ (i,i)(h,h)-(h,h)(i,i)=0\end{array}\right. & (5)\left\{\begin{array}{l}(j,h)(i,j)-(i,j)(j,h)=(i,h)\\ (i,h)(i,i)-(i,i)(i,h)=(i,h)\\ (h,h)(i,h)-(i,h)(h,h)=(i,h)\end{array}\right.\\ \multicolumn{2}{c}{(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j)=(j,j)-(i,i) \qquad (6)}\end{array}\right\}\mathrm{I}$$

Sono queste infatti una facile conseguenza delle relazioni analoghe del capitolo I. Proponiamoci infatti, p. es. di

dimostrare la (6). Si ha:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j) =$$
$$(\Delta_{ij}-D_{ji})(\Delta_{ji}-D_{ij})-(\Delta_{ji}-D_{ij})(\Delta_{ij}-D_{ji})$$

e quindi, poiché ogni operazione D è evidentemente permutabile con ogni operazione Δ:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j) =$$
$$\Delta_{ij}\Delta_{ji}-\Delta_{ji}\Delta_{ij}+D_{ji}D_{ij}-D_{ij}D_{ji}.$$

Ma per le formole citate del capitolo I, si ha:

$$\Delta_{ij}\Delta_{ji}-\Delta_{ji}\Delta_{ij} = \Delta_{jj}-\Delta_{ii}$$
$$D_{ji}D_{ij}-D_{ij}D_{ji} = D_{ii}-D_{jj}.$$

Quindi appunto:

$$(i,j)(j,i)-(j,i)(i,j) =$$
$$(\Delta_{jj}-D_{jj})-(\Delta_{ii}-D_{ii}) = (j,j)-(i,i).$$

In modo affatto analogo si stabiliranno le (4) e (5).

45. Dalle relazioni (5) si deduce, precisamente come al Capitolo I° (art. 27) che tutte quelle operazioni (i,j) nelle quali $i > j$, si possono esprimere colle $n-1$ operazioni:

$$(n, n-1),\ (n-1, n-2),\ \dots\ (3,2),\ (2,1)$$

e similmente tutte quelle operazioni (i,j) in cui $i < j$, si possono esprimere colle $n-1$ operazioni:

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ \dots,\ (n-1,n).$$

Di qui segue che: affinché una funzione φ delle variabili indipendenti $a, b, c, \dots, x, y, \dots$ soddisfi a tutte le equazioni differenziali

$$(i,j)\varphi=0$$

in cui i ed j sono due indici qualisivogliano fra loro differenti, è necessario e sufficiente che soddisfi alle $2(n-1)$ condizioni:

$$(1,2)\varphi=0,\ (2,3)\varphi=0,\ \dots,\ (n-1,n)\varphi=0$$

$$(n,n-1)\varphi=0,\ (n-1,n-2)\varphi=0,\ \dots,\ (2,1)\varphi=0$$

46. Di queste $2(n-1)$ condizioni, le ultime $(n-1)$ sono però una conseguenza delle prime $(n-1)$ e reciprocamente, se la forma algebrica φ soddisfa altresì alle condizioni:

$$(1,1)\varphi=(2,2)\varphi=(3,3)\varphi=\dots=(n,n)\varphi.$$

Noi dimostreremo infatti facilmente che se la forma algebrica φ soddisfa alla condizione:

$$(h,h)\varphi=(k,k)\varphi$$

e ad una delle due condizioni:

$$(h,k)\varphi=0\quad,\quad(k,h)\varphi=0,$$

essa soddisfa anche all'altra.

Pertanto potremo concludere che: affinchè una forma algebrica $\varphi(a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n;\dots;x_1,x_2,\dots,x_n;y_1,y_2\dots y_n;\dots)$ delle serie ennarie indipendenti $a,b,\dots,x,y,\dots$ soddisfi alle n^2-1 equazioni differenziali:

$$(1,1)\varphi=(2,2)\varphi=(3,3)\varphi=\dots=(n,n)\varphi$$

$$(i,j)\varphi=0\quad\text{per } i\neq j \text{ ed } i,j=1,2,\dots,n$$

è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle $n-1$ equazioni differenziali

$$(1,1)\varphi=(2,2)\varphi=(3,3)\varphi=\dots(n,n)\varphi$$

e alle $(n-1)$ equazioni differenziali

$$(1,2)\varphi=0,\ (2,3)\varphi=0,\ (3,4)\varphi=0,\ \dots,(n-1,n)\varphi=0.$$

47. Il lemma presupposto nell'art. prec., che ancora ci resta a dimostrare, non differisce sostanzialmente dalla seguente proposizione più semplice: Se $f(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_m;\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$ è una forma algebrica soddisfacente alla condizione

$$\mathcal{D}_{\xi\xi}f=\mathcal{D}_{\eta\eta}f \tag{4}$$

e ad una delle due condizioni:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta}f=0,\quad\mathcal{D}_{\eta\xi}f=0\quad, \tag{5}$$

essa soddisfa anche all'altra.

Quest'ultima proposizione è una conseguenza immediata dello sviluppo per polari (sviluppo di Clebsch e Gordan, cf. §° 22 del primo capitolo) applicato alla forma f contenente le due serie m^{arie} ξ ed η. Infatti la condizione (4) ci dice che f è dello stesso ordine nelle ξ e nelle η. Se ora si applica lo sviluppo di Clebsch e Gordan alla forma

$$f(\xi;\eta)=\alpha_\xi^{\mu}\beta_\eta^{\mu}$$

nell'ipotesi che sia per es. $\mathcal{D}_{\xi\eta}f=0$ questo sviluppo si ridurrà evidentemente al suo ultimo termine, cioè si avrà, a meno di un coefficiente numerico:

$$f(\xi,\eta)=(\alpha_\xi\,\beta_\eta)^\mu$$

d'onde segue appunto che è anche soddisfatta l'equazione $\mathcal{D}_{\eta\xi}f=0$, giacchè: $\mathcal{D}_{\eta\xi}(\alpha_\xi\,\beta_\eta)=0$.

48. Per dedurre da questa ultima proposizione il lemma dell'art. 46 basta prendere per $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ le variabili $a_i, b_i, \dots, x_j, y_j, \dots$ e per $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ le variabili $-a_j, -b_j, \dots x_i, y_i, \dots$. Infatti se si scrive, in virtù di queste sostituzioni:

$$f(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_m;\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_m)=\varphi(a_i,b_i,\ldots,x_j,y_j,\ldots;a_j,b_j,\ldots x_i,y_i,\ldots);$$

si riconosce immediatamente che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\xi\eta}f &= -\Delta_{ij}\varphi+\mathcal{D}_{ji}\varphi=-(i,j)\varphi\\
\mathcal{D}_{\eta\xi}f &= -\Delta_{ji}\varphi+\mathcal{D}_{ij}\varphi=-(j,i)\varphi\\
\mathcal{D}_{\xi\xi}f &= \Delta_{ii}\varphi+\mathcal{D}_{jj}\varphi\\
\mathcal{D}_{\eta\eta}f &= \Delta_{jj}\varphi+\mathcal{D}_{ii}\varphi
\end{aligned}$$

cosicchè l'eguaglianza (4) prende la forma:

$$\Delta_{ii}\varphi+\mathcal{D}_{jj}\varphi=\Delta_{jj}\varphi+\mathcal{D}_{ii}\varphi$$

cioè

$$(i,i)\varphi=(j,j)\varphi; \qquad (4)'$$

e le condizioni (5) prendono rispettivamente la forma:

$$(i,j)\varphi=0 \quad , \quad (j,i)\varphi=0 \qquad (5)'$$

La posizione dell'art. 54 viene così ad essere perfettamente equivalente al lemma dell'art. 46; c. d. d.

49. Dopo quanto si è dimostrato è facile di concludere che: *affinchè una forza algebrica $\varphi(x;y;\ldots;a;b;\ldots)$*

composta con certe serie di variabili ennarie $x, y, \ldots$ e coi simboli $a, b, \ldots$ di certe forme fondamentali $f, f_1, \ldots$ sia un covariante del sistema $f, f_1, \ldots$, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le condizioni differenziali

$$(1,1)\varphi=(2,2)\varphi=\cdots\cdots=(n,n)\varphi \qquad \text{(A)}$$

ed

$$(1,2)\varphi=0,\ (2,3)\varphi=0,\ (3,4)\varphi=0,\ldots,(n-1,n)\varphi=0 \qquad \text{(B)}$$

Abbiamo già veduto nel §° prec. (art. 43) che queste condizioni sono necessarie. D'altra parte, se esse sono soddisfatte, segue dalle ultime dimostrazioni che sono soddisfatte tutte le condizioni

$$(i,j)\varphi=0$$

per $j\neq i$ e quindi (art. 43) che φ è un covariante del sistema $f, f_1, \ldots$

Veramente nelle ultime dimostrazioni si è supposto che i simboli $a, b, \ldots$ potessero anche riguardarsi come serie di parametri aventi valori effettivi fra loro affatto indipendenti, il che equivale a supporre (cfr. art. 40) che fra i simboli $a, b, c, \ldots$ non ve ne siano di equivalenti, cioè che φ sia di 1° grado nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale. Si può però facilmente riconoscere, precisamente come all'artic. 40, che il teorema vale incondizionamente, riconducendo il caso d'un covariante φ qualunque al caso di un covariante lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale coll'applicare preventivamente a φ una o più volte di seguito, il processo di Aronhold.

50. E' appena necessario di aggiungere che il sistema delle condizioni (A) e (B) equivale al sistema

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \\ (2,1)\varphi = 0,\ (3,2)\varphi = 0,\ (4,3)\varphi = 0,\ \dots, (n,n-1)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

o, più generalmente, al sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(1,1)\varphi = 0,\ (2,2)\varphi = 0,\ \dots, (n,n)\varphi = 0 \\ (h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ (h_3,h_4)\varphi = 0,\ \dots, (h_{n-1},h_n)\varphi = 0\end{array}\right\}$$

essendo $h_1, h_2, \dots h_n$ una permutazione, scelta a piacere, degl'indici $1, 2, 3, \dots n$.(*)

(*) La riduzione delle equazioni differenziali al minimo numero si può anche fare sostituendo alle $n-1$ equazioni del tipo:

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_2,h_3)\varphi = 0,\ \dots, (h_{n-1},h_n)\varphi = 0$$

$n-1$ equazioni del tipo

$$(h_1,h_2)\varphi = 0,\ (h_1,h_3)\varphi = 0,\ \dots, (h_1,h_n)\varphi = 0.$$

Cfr. a tale oggetto il §° 8° dei già citati: *Fondamenti*. Per la storia dei lavori di Aronhold, Clebsch, ecc. concernenti le equazioni differenziali e la loro riduzione, si vegga il già citato Rapporto del Meyer.

§° XIV. *Le equazioni differenziali dei covarianti espresse coi coefficienti effettivi delle forme fondamentali.*

51. Consideriamo, per semplicità, il caso di un'unica forma fondamentale ennaria:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots \tag{1}$$

con un'unica serie di variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$; giacchè le cose che diremo si estendono poi immediatamente al caso generale. Sia $\varphi(a;b;\dots;x;y;\dots z)$ un covariante qualunque di f, il quale possa contenere una o più serie di variabili $x, y, \dots, z$ cogredienti alla serie x. Le condizioni:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \tag{2}$$

cui deve soddisfare il covariante φ, altro non dicono, come si è già visto (art. 49) se non che essere φ isobarica nei suoi termini ed essere in ogni termine di φ il 1° peso, eguale al 2° peso, eguale al 3° peso etc. potendosi ogni peso definire (cfr. Cap. I° art. 75) in base alla rappresentazione di φ coi coefficienti effettivi di f.

Passiamo ora a vedere come anche ogni equazione differenziale simbolica:

$$(i,j) = 0 \tag{3}$$

cioè:

$$a_j \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial\varphi}{\partial b_i} + \dots = x_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + y_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_j} + \dots + z_i \frac{\partial\varphi}{\partial z_j} \tag{3'}$$

si traduca in un'equazione differenziale equivalente cui deve soddisfare φ espressa coi coefficienti effettivi di f.

52. Sia

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} A_{\alpha_1,\alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)'$$

l'espressione effettiva di f, coi coefficienti preparati $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$. Poichè (Cap. I, art. 45):

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \dots b_n^{\alpha_n} = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \dots c_n^{\alpha_n} = \dots, \qquad (4)$$

se un certo coefficiente $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ è stato espresso coi simboli a, si ha

$$\left(a_j \frac{\partial}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial}{\partial b_i} + \dots\right) A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = a_j \frac{\partial A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}}{\partial a_i}$$

$$= \alpha_i \cdot a_1^{\alpha_1} \dots a_i^{\alpha_i-1} \dots a_j^{\alpha_j+1} \dots a_n^{\alpha_n} = \alpha_i A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n}.$$

Quindi:

$$a_j \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} + b_j \frac{\partial \varphi}{\partial b_i} + \dots =$$

$$= \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} \alpha_i \cdot A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_n} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n}} \qquad (5)$$

La condizione (3)' è così tradotta in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare φ considerata come funzione delle variabili arbitrarie effettive:

$$A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}, x, y, \dots$$

53. Supponiamo, per es. che la forma fondamentale f sia

una forma binaria:

$$f = A_{m,0} x_1^m + \binom{m}{1} A_{m-1,1} x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} A_{m-2,2} x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + A_{0,m} x_2^m \qquad (6)$$

e φ un suo covariante contenente le serie di variabili x, y, z.

La condizione differenziale:

$$(1,2)\varphi = 0 \qquad (7)$$

si tradurrà nella seguente:

$$m \cdot A_{m-1,1} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{m,0}} + (m-1) A_{m-2,2} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{m-1,1}} + (m-2) A_{m-3,3} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{m-2,2}} +$$

$$+ \dots\dots + 1 \cdot A_{0,m} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{1,m-1}} = x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + z_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z_2} \qquad (7)'$$

Invece la condizione:

$$(2,1)\varphi = 0 \qquad (8)$$

si tradurrà in:

$$A_{m,0} \frac{\partial \varphi}{A_{m-1,1}} + 2 A_{m-1,1} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{m-2,2}} + 3 A_{m-2,2} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{m-3,3}} +$$

$$+ \dots + m A_{1,m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial A_{0,m}} = x_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \qquad (8)'$$

54. La forma binaria di ordine m si rappresenta ordinariamente colla notazione più semplice:

$$f = p_0 x_1^m + \binom{m}{1} p_1 x_1^{m-1} x_2 + \binom{m}{2} p_2 x_1^{m-2} x_2^2 + \dots + p_m x_2^m,$$

sicchè anche le condizioni (7)' ed (8') assumono la notazione più semplice:

$$(7)'' \quad m p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_0} + (m-1) p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + (m-2) p_3 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + \dots + p_m \frac{\partial \varphi}{\partial p_{m-1}} = x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \dots$$

e

$$p_0 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + 2p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} + 3p_2 \frac{\partial \varphi}{\partial p_3} + \dots + m p_{m-1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_m} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots \qquad (8)''$$

La condizione:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi$$

viene poi a dire che nei vari termini di φ dev'essere costante la differenza fra la somma degl'indici delle p e il grado nelle $x_2, y_2, z_2, \dots$ e che questa differenza (peso del covariante) deve essere uguale ad $\frac{mg-\gamma}{2}$, g essendo il grado di φ nei coefficienti $p_0, p_1, \dots, p_m$ e γ il grado complessivo nelle variabili $x_1, x_2, y_1, y_2, \dots$ in esso contenute. Ciò si riconosce facilmente, osservando che la forma φ si ritiene omogenea nei coefficienti $p_0, p_1, \dots p_m$ e così pure omogenea rispetto a ciascuna delle serie di variabili $x, y, \dots$.

---

§° XIII. *Rappresentazione simbolica caratteristica dei covarianti e dei semi-covarianti.*

55. Ci proponiamo ora di dimostrare (cfr. art. 31) che se φ è un covariante di un certo sistema di forme fondamentali ennarie, il quale possa anche contenere certe serie cogredienti di variabili $x, y, \dots z$, esso si può sempre rappresentare come un aggregato razionale intero di forme lineari simboliche, come $a_x, b_x, a_y, \dots$ di parentesi ennarie simboliche, come $(a\ b\ c \dots e)$, e di parentesi ennarie di variabili come $(x\ y \dots z)$; essendo $a, b, c, \dots$ simboli, che possono anche in parte od in tutto essere equivalenti, delle forme fondamentali.

Per dimostrare ciò, ci serviremo delle condizioni differenziali:

$$(1,1)\varphi = (2,2)\varphi = (3,3)\varphi = \dots = (n,n)\varphi \qquad (\mathrm{I})$$

e

$$(2,1)\varphi = 0, \ (3,2)\varphi = 0, \ \dots, (n, n-1)\varphi = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

che caratterizzano, come si è visto (§° XI), i covarianti. Noi daremo però alla dimostrazione un andamento tale(*) da poter servire a dare al tempo stesso la rappresentazione caratteristica di quelle forme algebriche φ alle quali s'impongano soltanto le condizioni differenziali (II), che chiamiamo *semi-covarianti* (o *semi-invarianti*, se non contengono serie di variabili $x, y, \dots$)

56. Supporremo dapprima (giacchè il caso generale si riconduce facilmente a questo mediante il processo di Aronhold, che le forme fondamentali siano tutte *lineari* nei coefficienti delle forme fondamentali; cosicchè potremo considerare il semi-covariante $\varphi(a; b; c; \dots; x; y; \dots$, come una funzione di variabili *effettive* $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2 \dots, b_n, \dots$,

---

(*) Cfr. Deruyts: Essai d'une théorie ecc. pag. 55 e segg.

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tutte fra loro indipendenti, soddisfacente identicamente alle equazioni alle derivate parziali rappresentate dalle condizioni (II).

Ciò premesso, noi dimostreremo che ogni semi-covariante φ è un aggregato razionale intero:

1°) di elementi lineari del tipo:

$$a_x\,,\; b_x\,,\; a_y\,,\; \dots$$

2°) di determinanti degli n tipi:

$$d_1 \equiv a_1\,,\; d_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},\; d_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \dots,\; d_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

3°) di determinanti degli n tipi:

$$\delta_{n-1} \equiv x_n\,,\; \delta_{n-2} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix},\; \delta_{n-3} \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}, \dots,\; \delta_0 \equiv \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 \\ y_n & y_{n-1} & \dots & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

57. Ci è lecito supporre, senza nulla togliere alla generalità della questione, che i termini di φ siano tutti dello stesso peso τ_1 rispetto all'indice 1, dello stesso peso τ_2 rispetto all'indice 2, e così via, definendosi in generale come peso i^{esimo} di un prodotto di $a, b, c, \dots, x, y, \dots\dots$ (cfr. §X) la differenza fra il numero dei fattori $a_i, b_i, \dots$ e il numero dei fattori $x_i, y_i, \dots$

A queste condizioni soddisfa evidentemente un prodotto qualunque di elementi dei tre tipi testè menzionati. E precisamente, se $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_n, \bar{\delta}_0, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_{n-1}$ indichino rispettivamente quanti fattori del tipo $d_1, d_2, \dots, d_n, \delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ si trovano contenuti nel prodotto, i pesi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ del prodotto stesso sono dati, come facilmente si riconosce, da:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \bar{d}_1 + \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \dots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 \\
\tau_2 &= \bar{d}_2 + \bar{d}_3 + \dots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 \\
\tau_3 &= \bar{d}_3 + \dots + \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\tau_n &= \bar{d}_n - \bar{\delta}_0 - \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 - \dots - \bar{\delta}_{n-1}
\end{aligned} \tag{1}$$

d'onde segue

$$\begin{aligned}
\tau_1 - \tau_2 &= \bar{d}_1 + \bar{\delta}_1 \\
\tau_2 - \tau_3 &= \bar{d}_2 + \bar{\delta}_2 \\
&\dots\dots \\
\tau_{n-1} - \tau_n &= \bar{d}_{n-1} + \bar{\delta}_{n-1}
\end{aligned} \tag{2}$$

58. Noi dimostreremo quanto si è enunciato col procedimento dell'induzione matematica, supponendo il teorema dello art. 56 già stabilito per quei semi-covarianti che contengono, complessivamente, un certo numero ρ, o un numero inferiore, di serie di coefficienti e di variabili, e deducendone che esso vale anche per ogni covariante φ che contenga un numero complessivo $\rho+1$ di serie di coefficienti e di variabili.

Cominciamo dall'osservare che se:

$$\varphi = a_r \Phi_r + a_{r-1} \Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_1 \qquad (3)$$

è un siffatto semi-covariante ordinato secondo i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ di una delle serie di coefficienti in esso contenute (se non ne contenesse alcuna, lo si ordinerebbe invece secondo una delle serie di variabili) anche Φ_r è un semi-covariante.

Esprimendo infatti che φ soddisfa all'equazione alle derivate parziali $(i+1,i)\varphi = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & a_{r-1}\Phi_r + a_{r-2}\Phi_{r-1} + \cdots + a_1 \Phi_2 \\ & + a_r \cdot \left[(i+1,i)\Phi_r\right] + a_{r-1}\cdot\left[(i+1,i)\Phi_{r-1}\right] + \cdots + a_1\left[(i+1,i)\Phi_1\right] = 0, \end{aligned}$$

e questa identità, uguagliando a zero il coefficiente di a_r ci dà:

$$(i+1,i)\,\Phi_r = 0 \quad ;$$

cioè anche $\bar{\Phi}_r$ soddisfa al sistema (II).

59. Poichè ora $\bar{\Phi}_r$ contiene una serie di coefficienti di meno di φ, si potrà ritenere che esso sia della forma:

$$\Phi_r = \sum P \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{r-1} \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_r \\ y_n & y_{n-1} & \cdots & y_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ z_n & z_{n-1} & \cdots & z_r \end{vmatrix} \qquad (4)$$

cioè si potrà anche ritenere che ogni prodotto di determinanti tipici dell'art. 56, che sia termine di $\bar{\Phi}_r$ contenga almeno un determinante del tipo d_{r-1}, ovvero almeno un

determinante del tipo δ_{r-1}. Detti infatti τ'_{r-1} e τ'_r i pesi di Φ_r rispetto agl'indici r-1 ed r, e $\bar{d}_{r-1}$, $\bar{\delta}_{r-1}$ i numeri di volte che nel prodotto considerato entrano fattori del tipo d_{r-1} o δ_{r-1} rispettivamente, si dovrà avere, come si è già dimostrato:

$$\tau'_{r-1} - \tau'_r = \bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1}. \qquad (5)$$

Intanto, essendo τ'_{r-1} e τ'_r i pesi di Φ_r, quelli di φ sono per la (3) evidentemente τ'_{r-1} e $\tau'_r + 1$; onde dev'essere anche:

$$\tau'_{r-1} - (\tau'_r + 1) \geqq 0.$$

Sarà dunque per la (5):

$$\bar{d}_{r-1} + \bar{\delta}_{r-1} \geqq 1 \;;$$

cioè appunto almeno uno dei due numeri $\bar{d}_{r-1}$, $\bar{\delta}_{r-1}$ sarà superiore a zero.

60. In conseguenza delle (4), se poniamo per brevità

$$\psi = \sum (-1)^{r-1} P \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{r-1} & b_r \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{r-1} & l_r \end{vmatrix} + \sum Q \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & \cdots & x_{r+1} & a_x \\ y_n & y_{n-1} & \cdots & y_{r+1} & a_y \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ z_n & z_{n-1} & \cdots & z_{r+1} & a_z \end{vmatrix}$$

si ha:

$$a_r \Phi_r = \psi + \varphi_1 ,$$

dove φ_1 conterrà soltanto i coefficienti $a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$; e sostituendo ciò in (3):

$$\varphi = \psi + a_{r-1}\Phi'_{r-1} + a_{r-2}\Phi'_{r-2} + \cdots + a_1 \Phi'_1 . \qquad (6)$$

Poichè ora le P e Q altro non sono, per supposto, che prodotti di elementi dei tipi indicati all'art. 56, la forma ψ

è evidentemente un semi-covariante che già si trova posto sotto la forma caratteristica desiderata; cosicchè ci basterà dimostrare ancora che il semi-covariante $\varphi - \psi$ cioè:

$$a_{r-1}\,\Phi'_{r-1} + a_{r-2}\,\Phi'_{r-2} + \dots + a_1\,\Phi'_1$$

si può anch'esso rappresentare sotto la stessa forma caratteristica. Ma ragionando su $\varphi - \psi$ come si è fatto su φ, si potrà scrivere:

$$\varphi - \psi = \psi' + a_{r-2}\,\Phi''_{r-2} + a_{r-3}\,\Phi''_{r-3} + \dots + a_1\,\Phi''_1$$

essendo ψ' un semi-covariante già ridotto alla forma caratteristica; e così procedendo si concluderà evidentemente:

$$\varphi = \psi + \psi' + \psi'' + \dots,$$

cioè si avrà l'intero φ rappresentato come una somma di semi-covarianti, ciascuno dei quali è ridotto alla forma caratteristica. E pertanto anche φ si troverà espresso come un aggregato razionale intero di elementi appartenenti ai tipi caratteristici definiti all'art. 56; c.d.d.

61 - Se il semi-covariante φ non è lineare nei coefficienti del sistema di forme fondamentali $f, f_1, f_2, \dots$ cui si riferisce, si applicherà dapprima ad esso il processo di Aronhold in modo da trasformarlo (cfr. IV) in un semi-covariante $\bar{\varphi}$ del sistema fondamentale

$$\begin{aligned} &f = a_x^m, \quad F = \alpha_x^m, \quad \dots \\ &f_1 = b_x^\mu, \quad F_1 = \beta_x^\mu, \quad \dots \\ &\dots\dots \end{aligned} \tag{7}$$

(ottenuto aggiungendo alle forme $f, f_1, \dots$ altre nuove forme ad esse simili $F, \dots, F_1, \dots$ tutte fra loro indipendenti) lineare nei coefficienti di ciascuna forma fondamentale. Il semi-covariante $\bar{\varphi}$ si potrà anche evidentemente considerare come un semi-covariante del sistema di forme fondamentali lineari:

$$\begin{aligned} &a_x, \quad \alpha_x, \quad \dots \\ &b_x, \quad \beta_x, \quad \dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

e quindi, mediante una nuova applicazione del processo di Aronhold, trasformare in un semi-covariante $\bar{\bar{\varphi}}$ di un sistema di forme lineari indipendenti:

$$\left.\begin{aligned} &a_x,\ a'_x, \dots, a_x^{(m-1)};\ \alpha_x, \alpha'_x, \dots, \alpha_x^{(m-1)};\ \dots \\ &b_x,\ b'_x, \dots, b_x^{(\mu-1)};\ \beta_x, \beta'_x, \dots, \beta_x^{(\mu-1)};\ \dots \\ &\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

lineare nei coefficienti di ciascuna di esse. Per quanto si è concluso all'art. 60, il semi-covariante $\bar{\bar{\varphi}}$ si potrà rappresentare come un aggregato razionale intero degli elementi (8), di determinanti dei tipi δ_0, $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$, e di determinanti dei tipi $d_1, d_2, \dots, d_n$ composti coi vari simboli:

$$a, a', \ldots, a^{(m-1)}; \alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(m-1)}; \ldots$$

$$b, b', \ldots, b^{(\mu-1)}; \beta, \beta', \ldots, \beta^{(\mu-1)}; \ldots$$

. . . .

Ma per ritornare da $\bar{\bar{\varphi}}$ a φ, basta evidentemente di porre:

$$a' = a'' = \cdots = a^{(m-1)} = a, \quad \alpha' = \alpha'' = \cdots = \alpha^{(m-1)} = \alpha$$

$$b' = b'' = \cdots = b^{(\mu-1)} = b, \quad \beta' = \beta'' = \cdots = \beta^{(\mu-1)} = \beta$$

. . . .

e di considerare come equivalenti i simboli $a, \alpha, \ldots$ e così pure come equivalenti fra loro i simboli $b, \beta, \ldots$; ecc.

Resta così dimostrato che: *Se φ è un semi-covariante di un sistema di forme fondamentali i cui simboli (che possono anche essere in tutto od in parte fra loro equivalenti) siano $a, b, c, \ldots$, e le $x, y, z, \ldots$ siano le serie di variabili contenute in φ, esso si può rappresentare come un aggregato razionale intero di elementi dei tipi*

$$a_x, \; b_x \quad a_y, \; \ldots \ldots$$

$$a_1, \; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

$$x_n, \; \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} \\ y_n & y_{n-1} \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ z_n & z_{n-1} & z_{n-2} \end{vmatrix}, \ldots,$$

e reciprocamente.

62. Se φ è un covariante dev'essere inoltre soddisfatta la condizione:

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \cdots = \tau_n,$$

cosicchè le formole (2) ci dànno evidentemente:

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \cdots = \bar{d}_{n-1} = 0$$

$$\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \cdots = \bar{\delta}_{n-1} = 0.$$

Pertanto: *ogni covariante di un sistema di forme fondamentali ennarie i cui simboli* (equivalenti o non equivalenti) *siano $a, b, c, \ldots$, il quale contenga le serie di variabili $x, y, z, \ldots$, si può rappresentare come un aggregato razionale intero di elementi lineari $a_x, a_y, b_x, \ldots$ e di parentesi ennarie dei due tipi*

$$(a\, b \ldots c) \quad \text{ed} \quad (x\, y \ldots z).$$

§. XIV. *Formole di riduzione.*

63. La rappresentazione dei covarianti sotto la forma simbolica caratteristica si può in generale effettuare in molti differenti modi a causa delle relazioni identiche che intercedono fra gli elementi dei varii tipi caratteristici:

$$a_x, \; a_y, \; \ldots, (a\, b \ldots c), (x\, y \ldots z), \ldots$$

Queste relazioni dànno luogo a delle formole, così dette di *riduzione*, mediante l'uso delle quali si può passare da una data espressione simbolica alle altre espressioni ad essa equivalenti. Queste formole sono dunque indispensabili nella tecnica della calcolazione simbolica delle forme invariantive.

Noi ci porremo, per fissare le idee, nel campo ternario, e considereremo quindi delle serie ternarie di variabili x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3 e delle serie ternarie di coefficienti (o simboli) o variabili controgredienti: a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; ...; u_1, u_2, u_3; v_1, v_2, v_3; .... mediante le quali potremo costruire in molti svariati modi degli elementi caratteristici dei varii tipi:

$$a_x, a_y, \dots, (x, y, z), (a, b, c), \dots (a\, b\, u), \dots, (u\, v\, w), \dots$$

64. Si ha primieramente per la regola del prodotto dei determinanti:

$$(x\, y\, z)(a\, b\, c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

o più brevemente:

$$(x\, y\, z)(a\, b\, c) = (a_x\, b_y\, c_z) \qquad \text{(I)}$$

Si ha poi identicamente *nel campo ternario* (cfr. Cap. I°, §°VII):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z & a_t \\ b_x & b_y & b_z & b_t \\ c_x & c_y & c_z & c_t \\ d_x & d_y & d_z & d_t \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Le altre formole di riduzione non sono che uno svolgimento delle formole fondamentali (I) e (II).

65. Sviluppando il determinante (II) secondo gli elementi della prima verticale, viene:

$$(b_y\, c_z\, d_t)\, a_x - (a_y\, c_z\, d_t)\, b_x + (a_y\, b_z\, d_t)\, c_x - (a_y\, b_z\, c_t)\, d_x = 0$$

e dividendo pel fattore $(x\, y\, z)$ che si può isolare in ogni termine mediante la (I):

$$(b\, c\, d)\, a_x - (a\, c\, d)\, b_x + (a\, b\, d)\, c_x - (a\, b\, c)\, d_x = 0$$

d'onde:

$$(b\, c\, d)\, a_x = (a\, c\, d)\, b_x + (b\, a\, d)\, c_x + (b\, c\, a)\, d_x. \qquad \text{(III)}$$

Se ora per x_1, x_2, x_3 si pongono in queste formole rispettivamente gli aggiunti di a_1, a_2, a_3 nel determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix}$$

essa si cangia in quest'altra:

$$(b\,c\,d)(a\,g\,e) = (a\,c\,d)(b\,g\,e) + (b\,a\,d)(c\,g\,e) + (b\,c\,a)(d\,g\,e) \qquad \text{(IV)}$$

Formole affatto analoghe alle (I), (II), (III), (IV) si avranno nel campo binario, quaternario, ecc.

Se nella (IV) si pongano le g_1, g_2, g_3 uguali alle b_1, b_2, b_3, se ne deduce l'identità più semplice:

$$(b\,c\,d)(a\,b\,e) = (b\,a\,d)(c\,b\,e) + (b\,c\,a)(d\,b\,e)$$

ecc, ecc.

66. Esempio. Come applicazione delle formole di ri-

duzione e del principio di equivalenza dei simboli di una stessa forma fondamentale, consideriamo la forma fondamentale ternaria:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots \qquad (1)$$

ed il suo covariante misto:

$$V = (abc)(acu)a_y^{n-2} b_y^{n-2} c_y^{n-3} b_x c_x\,, \qquad (2)$$

che è una forma quadratica nelle x_1, x_2, x_3. Dimostreremo che questa forma è nulla identicamente, qualunque siano i valori delle x_1, x_2, x_3, se $y_1; y_2; y_3$ è un punto multiplo della curva $f=0$ e se $u_1; u_2; u_3$ è una retta qualunque passante per esso punto. Le condizioni presupposte sono dunque:

$$a_y^{n-1} a_1 = 0\,, \quad a_y^{n-1} a_2 = 0\,, \quad a_y^{n-1} a_3 = 0\,, \quad u_y = 0 \qquad (3)$$

delle quali le prime tre esprimono come è noto (poichè $a_x^{n-1} a_i = n \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$) che y è punto multiplo di $f=0$ e la quarta che y è situato sulla retta $u=0$.

Invero, se nella (2) si scambiano fra loro i due simboli equivalenti b e c, si può anche scrivere:

$$V = -(abc)(abu)a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-2} b_x c_x \qquad (2)'$$

onde anche, sommando le (2) e (2)' membro a membro:

$$V = \tfrac{1}{2}(abc)\{(acu)b_y - (abu)c_y\} a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x\,.$$

Ma, per la formola (III), si ha identicamente:

$$(acu)b_y - (abu)c_y = (bcu)a_y + (acb)u_y\,,$$

onde si può anche scrivere:

$$V = \tfrac{1}{2}(abc)\{(bcu)a_y + (acb)u_y\} a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x\,,$$

cioè:

$$2V = (abc)(bcu)a_y^{n-1} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ (abc)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x \cdot u_y\,.$$

Di qui appare chiaramente quanto si è asserito, poichè la seconda parte del 2° membro si spezza in due fattori (ciascuno dei quali ha significato effettivo) dei quali il secondo u_y è nullo per supposto. Quanto alla prima parte, essa si può scrivere, sviluppando il determinante (abc), come segue:

$$a_y^{n-2} a_1 \cdot [b_2 c_3 - b_3 c_2](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ a_y^{n-2} a_2 \cdot [b_3 c_1 - b_1 c_3](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$
$$+ a_y^{n-2} a_3 \cdot [b_1 c_2 - b_2 c_1](bcu) b_y^{n-3} c_y^{n-3} b_x c_x$$

cioè come somma di tre parti, da ognuna delle quali si può separare un fattore di significato effettivo, $a_y^{n-2} a_i$, che è nullo per le (3).

---

§° XV. *Origini o sorgenti (sources) dei covarianti.*

67. Sia φ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali n^{arie}, il quale contenga n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ rispettivamente a certi gradi $m_1, m_2, \dots, m_n$ (i quali possono del resto anche essere nulli).

duzione e del principio di equivalenza dei simboli di una stessa forma fondamentale, consideriamo la forma fondamentale ternaria:

$$f = a_x^n = b_x^n = c_x^n = \dots \qquad (1)$$

ed il suo covariante misto:

$$V = (a\,b\,c)(a\,c\,u)a_y^{n-2}\,b_y^{n-2}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x\,, \qquad (2)$$

che è una forma quadratica nelle x_1, x_2, x_3. Dimostreremo che questa forma è nulla identicamente, qualunque siano i valori delle x_1, x_2, x_3, se $y_1 ; y_2 ; y_3$ è un punto multiplo della curva $f = 0$ e se $u_1 ; u_2 ; u_3$ è una retta qualunque passante per esso punto. Le condizioni presupposte sono dunque:

$$a_y^{n-1}a_1 = 0\,,\; a_y^{n-1}a_2 = 0\,,\; a_y^{n-1}a_3 = 0\,,\; u_y = 0 \qquad (3)$$

delle quali le prime tre esprimono come è noto (poichè $a_x^{n-1}a_i = n \cdot \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$) che y è punto multiplo di $f = 0$ e la quarta che y è situato sulla retta $u = 0$.

Invero, se nella (2) si scambiano fra loro i due simboli equivalenti b e c, si può anche scrivere:

$$V = -(a\,b\,c)(a\,b\,u)a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-2}\,b_x\,c_x \qquad (2)'$$

onde anche, sommando le (2) e (2)' membro a membro:

$$V = \tfrac{1}{2}(a\,b\,c)\Big\{(a\,c\,u)b_y - (a\,b\,u)c_y\Big\}a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x .$$

Ma, per la formola (III), si ha identicamente:

$$(a\,c\,u)b_y - (a\,b\,u)c_y = (b\,c\,u)a_y + (a\,c\,b)u_y\,,$$

onde si può anche scrivere:

$$V = \tfrac{1}{2}(a\,b\,c)\Big\{(b\,c\,u)a_y + (a\,c\,b)u_y\Big\}a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x\,,$$

cioè:

$$2V = (a\,b\,c)(b\,c\,u)a_y^{n-1}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x$$
$$+ (a\,b\,c)^2 a_y^{n-2}\,b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x \cdot u_y\,.$$

Di qui appare chiaramente quanto si è asserito, poichè la seconda parte del 2° membro si spezza in due fattori (ciascuno dei quali ha significato effettivo) dei quali il secondo u_y è nullo per supposto. Quanto alla prima parte, essa si può scrivere, sviluppando il determinante $(a\,b\,c)$, come segue:

$$a_y^{n-2}\,a_1 \cdot \big[b_2\,c_3 - b_3\,c_2\big](b\,c\,u)b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x$$
$$+\,a_y^{n-2}\,a_2 \cdot \big[b_3\,c_1 - b_1\,c_3\big](b\,c\,u)b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x$$
$$+\,a_y^{n-2}\,a_3 \cdot \big[b_1\,c_2 - b_2\,c_1\big](b\,c\,u)b_y^{n-3}\,c_y^{n-3}\,b_x\,c_x$$

cioè come somma di tre parti, da ognuna delle quali si può separare un fattore di significato effettivo, $a_y^{n-2}a_i$, che è nullo per le (3).

---

§° XV. *Origini o sorgenti (sources) dei covarianti.*

67. Sia φ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali n^{arie}, il quale contenga n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ rispettivamente a certi gradi $m_1, m_2, \dots, m_n$ (i quali possono del resto anche essere nulli).

Sia

$$\varphi = Q_0 x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \dots t_n^{m_n} + \dots + Q x_1^{\mu_1'} x_2^{\mu_1''} \dots x_n^{\mu_1^{(n)}} \dots t_1^{\mu_n'} t_2^{\mu_n''} \dots t_n^{\mu_n^{(n)}} + \dots, \qquad (1)$$

cioè si indichi con Q_0 il coefficiente di

$$x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \dots t_n^{m_n}.$$

Esso si chiamerà l'origine (source) del covariante φ; poichè è facile riconoscere che il covariante φ è perfettamente determinato appena che se ne conosca il coefficiente Q_0.

Sia infatti:

$$\varphi = \Phi(a_x, a_y, \dots, d_t; b_x, b_y, \dots, b_t; \dots; (ab\dots d), \dots) \qquad (2)$$

l'espressione simbolica caratteristica (cfr. §° XIII) di φ. Poichè Q_0 si deduce da φ ponendo in φ:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, & x_2 = 0, & x_3 = 0, & \dots \quad x_n = 0 \\ y_1 = 0, & y_2 = 1, & y_3 = 0, & \dots \quad y_n = 0 \\ z_1 = 0, & z_2 = 0, & z_3 = 1, & \dots \quad z_n = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_1 = 0, & t_2 = 0, & t_3 = 0, & \dots \quad t_n = 1, \end{array} \qquad (3)$$

si deduce evidentemente dalla (2) la seguente espressione simbolica di Q_0:

$$Q_0 = \Phi(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots; (ab\dots d), \dots) \qquad (4)$$

Reciprocamente, se indichiamo con $[Q_0]$ ciò che diviene l'espressione simbolica (4) di Q_0 quando in luogo di:

$$a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots$$

poniamo in essa rispettivamente dapertutto:

$$a_x, a_y, \dots, a_z; b_x, b_y; \dots, b_z; \dots,$$

si troverà:

$$[Q_0] = \Phi(a_x, a_y, \dots, a_t; b_x, b_y, \dots, b_t; \dots; (a_x b_y \dots d_t), \dots),$$

ossia anche, se τ è il peso del covariante φ (peso che noi, per semplicità, abbiamo implicitamente supposto essere positivo, dal momento che abbiamo scritto φ sotto la forma simbolica (2)):

$$[Q_0] = (xyz\dots t)^{\tau} \varphi. \qquad (5)$$

Dall'origine Q_0 ritorniamo dunque, mediante l'operazione indicata, al primitivo covariante Q_0, a meno della potenza τ^{esima} di $(xy\dots z)$. Si noti che il numero τ è già perfettamente determinato (cfr. Cap. I, §° XV) dal primo termine:

$$Q_0 x_1^{m_1} y_2^{m_2} z_3^{m_3} \dots t_n^{m_n}$$

del covariante φ.

68 - Se indichiamo con Q_0' la stessa funzione Q_0 dei coefficienti delle forme fondamentali costruita per le forme fondamentali trasformate i cui coefficienti simbolici corrispondenti ad $a, b, \dots$ siano rispettivamente $a', b', \dots$, l'espressione simbolica di Q_0' sarà, invece della (4):

$$Q_0' = \Phi(a_1', a_2', \dots, a_n'; b_1', b_2', \dots b_n'; \dots; (a'b'\dots d'), \dots)$$

e se:

$$\xi_1 = \alpha_1 \xi_1' + \beta_1 \xi_2' + \cdots + \varepsilon_1 \xi_n'$$

$$\xi_2 = \alpha_2 \xi_1' + \beta_2 \xi_2' + \cdots + \varepsilon_2 \xi_n' \qquad (6)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_n = \alpha_n \xi_1' + \beta_n \xi_2' + \cdots + \varepsilon_n \xi_n'$$

sia la sostituzione lineare eseguita sulle forme fondamentali, basterà (Cap. I, §° XI) perchè Q_0' ridivenga Q_0, eseguire in (5) le sostituzioni:

$$a_1' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \quad , \quad b_1' = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n$$

$$a_2' = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n \quad , \quad b_2' = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n' = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n \quad\quad b_n' = \varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n$$

o, più brevemente:

$$a_1' = a_\alpha \, , \; a_2' = a_\beta \, , \ldots , a_n' = a_\varepsilon \, ; \; b_1' = b_\alpha \, , \; b_2' = b_\beta \, , \ldots \, b_n' = b_\varepsilon \, ; \ldots$$

Dunque, per costruire $\left[Q_0\right]$ basta costruire Q_0', esprimere poi nuovamente Q_0' coi coefficienti delle forme primitive e coi coefficienti della sostituzione lineare, e sostituire finalmente in luogo dei coefficienti della sostituzione lineare le serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$, cioè precisamente:

$$\alpha_1 = x_1 \; , \; \alpha_2 = x_2 \; , \ldots , \; \alpha_n = x_n$$

$$\beta_1 = y_1 \; , \; \beta_2 = y_2 \; , \ldots , \; \beta_n = y_n \qquad (7)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_1 = t_1 \; , \; \varepsilon_2 = t_2 \; , \ldots , \; \varepsilon_n = t_n \, .$$

Al risultato dell'art. prec. espresso dalla (5), si può

dunque dare la forma seguente (*): *ogni covariante ennario, di peso τ contenente n serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ moltiplicato per $(x\,y\,z \ldots t)^\tau$ si può ottenere costruendo la sua origine Q_0 per le forme fondamentali trasformate mediante una sostituzione lineare (6), esprimendo poi l'origine trasformata Q_0' mediante i coefficienti delle forme primitive e sostituendo finalmente nel risultato ottenuto in luogo delle serie $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ dei coefficienti della sostituzione, le serie di variabili $x, y, \ldots, t$ (come è indicato dalle (7)).*

69. Le equazioni differenziali (cfr. §° X):

$$\Delta_{ij}\,\varphi = \mathcal{D}_{ji}\,\varphi \qquad (8) \qquad , \; i \neq j$$

cui deve soddisfare il covariante φ ci dànno il modo di costruire un processo derivativo mediante il quale uno qualunque dei coefficienti di φ si può dedurre dall'origine Q_0.

Sia:

$$\varphi = \sum_{h_1 k_1 \ldots} Q_{h_1 h_2 \ldots h_n ; k_1 k_2 \ldots k_n ; \ldots} \, x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n} \, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_n^{k_n} \cdots \qquad (9)$$

lo sviluppo del covariante φ, cosicchè le Q si possono pensare come funzioni razionali intere dei coefficienti del-

(*) Cfr. Deruyts: Essai d'une théorie ecc. pgg. 67-70, dove si trovano anche dati, con altra dimostrazione, alcuni degli altri teoremi che seguono.

le forme fondamentali o dei simboli $a, b, c, \dots$ che le rappresentano secondochè si preferirà, in ciò che segue, di applicare gli operatori Δ_{ij} sulle forme simboliche (§° X) ovvero sulle forme effettive (nel qual caso l'operatore Δ_{ij} si interpreterà mediante un operatore equivalente (§° XII) da eseguirsi fra i coefficienti effettivi delle forme fondamentali. L'equazione (8) ci dà per $i=1,\ j=2$:

$$\sum_{h,k,\dots}\left\{\Delta_{12} Q_{h_1 h_2 \dots k_1 k_2 \dots}\right\} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots y_1^{k_1} y_2^{k_2}$$

$$= \sum_{h,k,\dots} Q_{h_1 h_2 \dots k_1 k_2 \dots}\left\{h_2 x_1^{h_1+1} x_2^{h_2-1} \cdots y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots + k_2 x_1^{h_1} x_2^{h_2} \cdots y_1^{k_1+1} y_2^{k_2-1} \cdots + \dots\right\}$$

d'onde, uguagliando i coefficienti dei termini simili nel 1° e nel 2° membro:

(10) $$\Delta_{12} Q_{h_1 h_2 \dots k_1 k_2 \dots l_1 l_2 \dots} =$$

$$=(h_2+1) Q_{h_1-1, h_2+1, \dots, k_1, k_2, \dots} + (k_2+1) Q_{h_1 h_2 \dots, k_1-1, k_2+1, \dots} + \dots$$

Se in questa formola supponiamo:

$$k_1 = 0,\ k_2 = m_2,\ k_3 = 0, \dots k_n = 0$$

$$l_1 = 0,\ l_2 = 0,\ l_3 = m_3, \dots, l_n = 0$$

(essendo, come all'art. 67), $m_1, m_2, \dots m_n$ i gradi di φ nelle $x, y, \dots t$) i termini del secondo membro a cominciare dal secondo debbono tralasciarsi come privi di senso (perchè avrebbero indici negativi), e resta semplicemente:

Consideriamo ora un coefficiente del tipo:

(12) $Q_{h_1 h_2 \dots h_n;\, k_1, k_2, \dots, k_n;\, 0, 0, m_3, 0, \dots, 0;\, 0, 0, 0, m_4, 0, \dots, 0;\, \dots}$

Applicando ad esso la formola (10) dovremo trascurare nel secondo membro tutti i termini a cominciare dal terzo, onde avremo:

$$Q_{h_1 h_2 \dots h_n;\, k_1-1, k_2+1, k_3, \dots k_n;\, 0, 0, m_3, 0, \dots, 0;\, \dots}$$

$$= \frac{1}{k_2+1}\Delta_{12} Q_{h_1 h_2 \dots h_n;\, k_1 k_2 \dots k_n;\, 0, 0, m_3, 0, \dots, 0;\, \dots}$$

$$- \frac{h_2+1}{k_2+1} Q_{h_1-1, h_2+1, h_3, \dots, h_n;\, k_1 k_2 \dots k_n;\, 0, 0, m_3, 0, \dots, 0;\, \dots}$$

Di qui si vede che la determinazione di un coefficiente del tipo (12) si può far dipendere, con processo successivo, dalla determinazione di coefficienti dello stesso tipo nei quali la somma $k_2 + \dots + k_n$ va diminuendo di un'unità, quindi finalmente dalla determinazione di coefficienti del tipo (11). Ma questi erano già noti; dunque dobbiamo ritenere come noti tutti i coefficienti del tipo (12). Così procedendo verremo evidentemente a stabilire la verità di quanto volevamo dimostrare.

70. Se il coefficiente dato non fosse Q_0, ma un altro *qualsivoglia*, il teorema non sussisterebbe più in generale, cioè gli altri coefficienti non resterebbero con ciò completamente determinati. Solamente nel caso in cui il covariante φ contenga una sola serie di variabili x, i coefficienti resteranno tutti determinati in conseguenza della

$$Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$
$$=\frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots\dots}$$

Applicando ripetutamente questa formola si ottiene:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$
$$=\frac{1}{h_2!}\,\Delta_{12}^{h_2}\,Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

e, affatto similmente, operando coll'indice 3 come si è operato coll'indice 2:

$$Q_{h_1+h_2,0,h_3,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$
$$=\frac{1}{h_3!}\,\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

onde sostituendo nella formola precedente:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$
$$=\frac{1}{h_2!\,h_3!}\cdot\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\,Q_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,\dots,h_n;0,m_2,0,\dots,0;\dots}$$

Così procedendo si otterrà finalmente, poichè $h_1+h_2+\dots+h_n=m_1$:

$$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$
$$=\frac{1}{h_2!\,h_3!\dots h_n!}\,\Delta_{12}^{h_2}\Delta_{13}^{h_3}\dots\Delta_{1n}^{h_n}\,Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

In virtù di questa formola, essendo conosciuta la funzione:

$$Q_{m_1,0,0,\dots,0;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

restano perfettamente determinati i coefficienti del tipo:

(11) $$Q_{h_1h_2h_3\dots h_n;0,m_2,0,\dots,0;0,0,m_3,0,\dots,0;\dots}$$

determinazione di uno qualunque fra essi. Ciò segue dalla (10) che in tal caso prende la forma:

$$Q_{h_1-1,h_2+1,\dots,h_n}=\frac{1}{h_2+1}\cdot\Delta_{12}\,Q_{h_1h_2\dots h_n}$$

e dalla formola analoga:

$$Q_{h_1h_2\dots h_n}=\frac{1}{h_1-1}\cdot\Delta_{21}\,Q_{h_1-1,h_2+1,h_3,\dots,h_n},$$

le quali si mostrano come, dato l'uno dei due coefficienti:

$$Q_{h_1,\dots,h_i-1,\dots,h_j+1,\dots,h_n}\quad\text{e}\quad Q_{h_1,\dots,h_i,\dots,h_j,\dots,h_n},$$

l'altro resti determinato e reciprocamente.

71.- Se fra i covarianti $\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{\lambda-1}$ di un certo sistema fondamentale esiste una relazione algebrica identica:

$$J(\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{\lambda-1})=0 \qquad (13)$$

è senz'altro manifesto che questa stessa relazione sussisterà anche fra le origini $Q_0, Q_0', \dots, Q_0^{(\lambda-1)}$ dei medesimi covarianti; poichè se nell'identità (13), in cui J è simbolo di funzione intera, si pone $x_1=1$, $x_2=0,\dots,x_n=0$, $y_1=0$, $y_2=1$, $y_3=0,\dots,y_n=0,\dots$, essa si cangia appunto nella identità:

$$J\left(Q_0,Q_0',Q_0'',\dots,Q_0^{(\lambda-1)}\right)=0 \qquad (14)$$

Reciprocamente ad ogni relazione algebrica fra le Q_0, $Q_0',\dots,Q_0^{(\lambda-1)}$ corrisponderà una relazione analoga fra φ, $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_{\lambda-1}$, come si vede scrivendo l'identità (14) pel sistema fondamentale trasformato mediante una certa sostituzione lineare (6); esprimendo quindi in essa i coefficienti trasformati mediante i primitivi e sostituendo per ultimo ai coefficienti della sostituzione lineare le serie $x, y, \ldots, t$ nel modo indicato all'art. 69; giacchè così facendo si otterrà la stessa relazione (14) in cui ogni origine $Q_0^{(i)}$ è surrogata a meno di un fattore, potenza di $(x\,y\,z \ldots t)$, dal corrispondente covariante φ_i.

72 - Ogni funzione razionale intera dei coefficienti del sistema fondamentale (la quale possa contenere anche altre serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ distinte dalle n serie $x, y, z \ldots, t$, la quale sia isobarica, (e precisamente dello stesso peso rispetto ad ognuno degl'indici $1, 2, \ldots, n$, è l'origine di un covariante φ di peso $-\rho$; essendo ρ il grado di Q rispetto alle $\xi, \eta, \ldots$. Il covariante φ si otterrà moltiplicando per $(x\,y\,z \ldots t)^\rho$ la Q costruita pel sistema fondamentale trasformato mediante la sostituzione lineare (6) nella quale poi, come all'art. 68, i coefficienti trasformati e le variabili trasformate si esprimono coi primitivi, e i coefficienti della sostituzione lineare si sostituiscono colle serie $x, y, z, \ldots t$ nel modo indicato dalle (7).

Sia infatti:

$$Q = F(a_1, b_1, \ldots; \ldots; a_n, b_n, \ldots; \xi_1, \eta_1, \ldots; \xi_2, \eta_2, \ldots; \xi_n, \eta_n, \ldots)$$

essendo F simbolo di funzione intera isobarica, come si è supposto rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$. Questa funzione è evidentemente l'origine del covariante:

$$\varphi = F(a_x, b_x, \ldots; \ldots; a_t, b_t, \ldots; (\xi\,y\,z..t), (\eta\,y\,z..t), \ldots; (x\,\xi\,z \ldots t), (x\,\eta\,z \ldots t), \ldots; \ldots; (x\,y\,z \ldots \xi), (x\,y\,z..\eta), \ldots)$$

il quale si deduce da Q precisamente nel modo detto sopra. Infatti indicando con $[\xi_i]$ ciò che divengono le ξ_i contenute in Q quando si opera anche su di esse nel modo indicato, cioè in luogo di ξ_i si sostituisca la trasformata ξ_i' la quale si torna poi ad esprimere colle ξ e colle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ecc., si trae dalle (6), (per esempio per $i = 1$):

$$\xi_1' = \begin{vmatrix} \xi_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \xi_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \varepsilon_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n & \beta_n & \ldots & \varepsilon_n \end{vmatrix}$$

e quindi:

$$[\xi_1'] = (\xi\,y\,z \ldots t) : (x\,y\,z \ldots t)$$

ecc.

73 - *Sia φ un covariante di un certo sistema di forme fondamentali, il quale possa anche contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, \theta$. Uno qualunque dei coefficienti è l'origine di un covariante, che non contiene più di n serie di variabili, il quale si può dedurre da φ mediante operazioni di polare fra le serie di variabili.*

Invero, siano $\xi, \eta, \ldots, \theta$ le serie di variabili contenute in φ $\lambda, \mu, \ldots, \nu$ i gradi di φ in ciascuna di esse rispettivamente, cosicchè si potrà porre simbolicamente:

$$\varphi = A_\xi^{\lambda} \; B_\eta^{\mu} \cdot \cdot \cdot \; C_\theta^{\nu}$$

Ciò posto, un coefficiente qualunque di φ è dato, fatta astrazione da un fattore numerico polinomiale da:

$$A_1^{\lambda_1} A_2^{\lambda_2} \dots A_n^{\lambda_n} B_1^{\mu_1} B_2^{\mu_2} \dots B_n^{\mu_n} \dots C_1^{\nu_1} C_2^{\nu_2} \dots C_n^{\nu_n} \qquad (2)$$

ed è evidentemente l'origine della forma:

$$\psi = A_x^{\lambda_1} A_y^{\lambda_2} \dots A_t^{\lambda_n} B_x^{\mu_1} B_y^{\mu_2} \dots B_t^{\mu_n} \dots C_x^{\nu_1} C_y^{\nu_2} \dots C_t^{\nu_n}$$

contenente le sole n serie $x, y, z, \dots, t$, la quale sappiamo (Cap. I, §° X) potersi sempre dedurre dalla forma (1) mediante operazioni di polare fra le serie $x, y, z, \dots, t, \xi, \eta, \dots, \theta$.
La forma ψ è dunque una polare di φ ed è quindi necessariamente (art. 13) un covariante del sistema fondamentale dato. L'asserto è così dimostrato.

73. *Sia come sopra, φ un covariante il quale possa contenere un numero qualunque di serie di variabili $\xi, \eta, \dots, \theta$. Se si opera su uno qualunque dei coefficienti di φ col simbolo operativo (i, j), il risultato sarà una combinazione lineare a coefficienti numerici, dei coefficienti dello stesso φ.*

E' questa una conseguenza quasi immediata della condizione differenziale:

$$(i, j)\,\varphi = 0$$

cui soddisfa identicamente come sappiamo (§° XII), il covariante φ. Se sia infatti:

$$\varphi = \sum_{\mu, \nu, \dots} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n, \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n, \dots} \, \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi_n^{\mu_n} \, \eta_1^{\mu_1} \eta_2^{\mu_2} \cdots \eta_n^{\mu_n} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

si ha:

$$(i, j)\varphi = \sum_{\mu, \nu, \dots} \left[(i, j) A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \dots} \right] \xi^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi_n^{\mu_n} \, \eta_1^{\nu_1} \eta_2^{\nu_2} \cdots \eta_n^{\nu_n} \dots$$

$$+ \sum_{\mu, \nu} A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \dots} \left[(i, j) \left\{ \xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi_n^{\mu_n} \, \eta_1^{\nu_1} \eta_2^{\nu_2} \cdots \eta_n^{\nu_n} \right\} \right]$$

cosicchè, uguagliando a zero il coefficiente di

$$\xi_1^{\mu_1} \xi_2^{\mu_2} \cdots \xi^{\mu_n} \, \eta_1^{\nu_1} \eta_2^{\nu_2} \cdots \eta_n^{\nu_n} \dots$$

si ha appunto per

$$(i, j) A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n \dots}$$

un'espressione della forma indicata nell'enunciato.

---

§° XVI - *Dimostrazione di un principio generale di aritmetica* -

75. Si indichi per brevità con X uno qualunque degli infiniti sistemi di numeri interi e positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisfacenti ad un certo problema colle n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Se il sistema di soluzioni $X \equiv x_1, x_2, \dots, x_n$ è tale che non esista alcun altro sistema di soluzioni intere e positive $X' \equiv x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ dello stesso problema aritmetico tale che sia:

$$x_1' \lesseqgtr x_1\,,\ x_2' \lesseqgtr x_2\,,\ \dots,\ x_n' \lesseqgtr x_n\,,$$

diremo che il sistema di soluzioni X è un sistema *primario*.

Ciò posto, noi dimostreremo il seguente teorema: *i sistemi primarii di valori interi e positivi degli n numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$ che soddisfano ad un dato problema aritmetico sono sempre in numero finito*.

76. Si considerino, ad esempio, gli infiniti sistemi $x_1, x_2, \dots, x_n$ che soddisfino al problema diofanteo rappresentato da un certo numero di equazioni lineari ed omogenee:

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n &= 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n &= 0 \qquad (\alpha) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Secondo il principio sopra enunciato, esisterà per questo sistema di equazioni un certo numero finito ρ di sistemi primarii di soluzioni:

$$\begin{aligned} X' &\equiv x_1', x_2', \dots, x_n' \\ X'' &\equiv x_1'', x_2'', \dots, x_n'' \qquad (\beta) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ X^{(\rho)} &\equiv x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \dots, x_n^{(\rho)}, \end{aligned}$$

cosicchè, se $x_1, x_2, \dots, x_n$ è un'altra soluzione qualunque delle (α) dovrà aversi per un certo valore di i (compreso fra 1 e ρ):

$$x_1 \gtreqless x_1^{(i)},\ x_2 \gtreqless x_2^{(i)},\ \dots,\ x_n \gtreqless x_n^{(i)},$$

onde si potrà scrivere:

$$x_1 = \xi_1 + x_1^{(i)},\ x_2 = \xi_2 + x_2^{(i)},\ \dots,\ x_n = \xi_n + x_n^{(i)}$$

essendo le $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ dei numeri interi e positivi i quali soddisferanno evidentemente alle stesse equazioni (α).

Se il sistema delle $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ non coincide con uno dei sistemi (β), esso non sarà primario e quindi si potrà porre similmente (per un certo valore di j compreso fra 1 e ρ):

$$\xi_1 = \eta_1 + x_1^{(j)},\ \xi_2 = \eta_2 + x_2^{(j)},\ \dots,\ \xi_n = \eta_n + x_n^{(j)}$$

con $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ del pari interi e positivi e soddisfacenti alle equazioni (α). Così procedendo si conchiuderà evidentemente che la soluzione più generale del problema diofanteo rappresentato dalle (α) è dato da:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'' + \dots + \lambda_\rho x_1^{(\rho)} \\ x_2 &= \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'' + \dots + \lambda_\rho x_2^{(\rho)} \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \lambda_1 x_n' + \lambda_2 x_n'' + \dots + \lambda_\rho x_n^{(\rho)} \end{aligned}$$

potendosi dare alle λ valori interi e positivi affatto arbitrarii.

77. In luogo di dire che due sistemi di numeri interi e positivi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ed $x_1', x_2', \dots, x_n'$ soddisfano alle disuguaglianze:

$$x_1' \lesseqgtr x_1\,,\ x_2' \lesseqgtr x_2\,,\ \dots,\ x_n' \lesseqgtr x_n\,,$$

noi diremo anche più brevemente che il sistema $x_1', x_2', \dots, x_n'$ è *contenuto* nel sistema $x_1, x_2, \dots, x_n$. Pertanto al teorema da dimostrarsi può anche darsi la seguente forma e quivalente: fra gl'infiniti sistemi di n numeri interi e positivi, costituenti un certo insieme ben determinato di sistemi, quelli che godono della proprietà di essere primarii (cioè di non contenere centro di sè alcun altro sistema appartenente allo stesso insieme) sono necessariamente in numero finito.

Noi supporremo questo teorema già dimostrato per i sistemi di $n-1$ numeri, ed in tale supposto faremo vedere che esso è valido anche per un insieme (A) di cui un elemento qualunque, che indicheremo genericamente con A od A_i, sia un sistema di n valori interi e positivi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Se da ogni sistema $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ appartenente ad (A) cancelliamo il primo valore α_1, otteniamo un sistema di soli $n-1$ valori $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$. Si indichi con (B) l'insieme di tutti gl'infiniti sistemi $B \equiv \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ che si possono in tal modo dedurre dagl'infiniti sistemi di (A). Esisteranno, per quanto si è supposto già dimostrato, fra i sistemi B, certi N sistemi speciali:

$$B_1 \,,\; B_2 \,,\; \ldots \ldots ,\; B_N \qquad (1)$$

tali che in ogni sistema B ne sia contenuto almeno uno.

Sieno:

$$\alpha_1', B_1 \;;\; \alpha_1'', B_2 \;;\; \ldots \ldots ;\alpha_1^{(N)}, B_N \qquad (2)$$

quei sistemi A che hanno dato origine rispettivamente ai sistemi (1). Ove lo stesso sistema B_i potesse nascere da dif-

ferenti sistemi A, gioverà preferire quello pel quale $\alpha_1^{(i)}$ ha il valore minimo.

Ciò posto, se ω è il massimo fra gli N numeri $\alpha_1', \alpha_1'', \ldots, \alpha_1^{(N)}$, è chiaro che tutti quei sistemi A, in cui il primo valore α_1 è uguale o superiore ad ω, conterranno entro di sè almeno uno dei sistema (2). Ci resta dunque soltanto ad occuparci dei sistemi A pei quali $\alpha_1 < \omega$. Essi potranno ripartirsi in ω gruppi, od insieme inferiori, secondochè sia $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 1, \ldots,$ $\alpha_1 = \omega - 1$.

Ma, se indichiamo con (B_i) l'insieme di tutti quei sistemi B che nascono da quei sistemi A nei quali α_1 ha il valore i, esisterà anche per esso (componendosi i suoi sistemi di soli $n-1$ valori) un certo numero finito di sistemi speciali:

$$B_1^{(i)}, \; B_2^{(i)}, \; \ldots \; , B_{N_i}^{(i)}$$

compresi fra i sistemi di (B_i) e tali che almeno uno di essi sia contenuto in ogni sistema di (B_i). Pertanto tutti i sistemi di (A) pei quali $\alpha_1 = i$, conterranno necessariamente almeno uno dei sistemi:

$$i, B_1^{(i)} \;;\; i, B_2^{(i)}, \; \ldots \ldots , i, B_{N_i}^{(i)}$$

i quali tutti fanno parte essi stessi dell'insieme (A).

Il nostro asserto si trova così dimostrato completamente, poichè da quanto si è detto risulta che il numero di quei sistemi di (A), che godono della proprietà di essere primarii, è finito e non può superare:

$$N+N_0+N_1+\cdots+N_{\omega-1}$$

---

§° XVII. *Sopra un processo di riduzione delle funzioni razionali intere di n variabili.*

78. Un termine qualunque:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

di una funzione razionale intera delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è caratterizzato dal sistema dei valori che si attribuiscono agli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, e questi sistemi, benchè in numero ∞^n, si possono sempre far corrispondere univocamente ai numeri naturali $0, 1, 2, \ldots$ Si viene così a stabilire un ordine di successione perfettamente determinato fra gl'infiniti termini (1), che si potranno per conseguenza rappresentare brevemente colla successione infinita:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots \ldots$$

Se

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \ldots, x_n^{\alpha_n}=X_i,$$

per esprimere che i è una funzione aritmetica ben determinata delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, scriveremo:

$$i=[a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

e diremo poi che i è il *rango* del termine X_i.

Una funzione intera qualunque delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ordinata secondo il rango dei suoi termini, sarà della forma

$$F=a_0 X_k+a_1 X_{k-1}+\cdots+a_{k-1} X_1+a_k X_0$$

essendo le a dei coefficienti costanti. Il coefficiente a_0, cioè il coefficiente del termine di rango più elevato, si dirà il *primo coefficiente* di F, e il numero k, rango del primo termine di F, si dirà al tempo stesso essere il *rango di F*.

Ciò posto, noi supporremo in ciò che segue che la legge, secondo la quale viene fissato il rango di ognuno degl'infiniti termini (1), sia stata scelta in modo che: se sia $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]<[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$, sia anche $[\alpha_1+\gamma_1, \alpha_2+\gamma_2, \ldots, \alpha_n+\gamma_n]<[\beta_1+\gamma_1, \beta_2+\gamma_2, \ldots, \beta_n+\gamma_n]$ qualunque siano i valori degl'interi positivi o nulli $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. E' facile riconoscere come si possa definire il valore di $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ in modo che sia poi sempre soddisfatta questa proprietà.

A tale oggetto basterà stabilire il criterio di $>$ e $<$ fra due numeri qualunque $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ e $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]$ come segue:

a) se sia $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n>\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$, si definirà:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]>[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n].$$

b) se $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$, e sia β_i il primo dei numeri $\beta_1, \beta_2, \ldots$ che non coincide col corrispondente α_i si definirà:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \gtrless [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n],$$

secondochè si abbia rispettivamente $a_i \gtrless \beta_i$.

80. Data una successione di h funzioni intere delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f_1\,,\ f_2\,,\ \ldots\,,\ f_h \qquad (2)$$

ed un'altra funzione intera φ; noi definiremo, come segue, una nuova funzione $\bar{\varphi}$ *univocamente determinata* (che potrà anche coincidere in qualche caso particolare colla stessa φ) che chiameremo la *ridotta di* φ *rispetto alla successione* (2).

Supponiamo che φ *contenga* almeno una delle funzioni (2) e sia f_i la prima di esse che è *contenuta* in φ. Con ciò vogliamo intendere, per brevità, che, se $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ sia il primo termine di f_i ed $x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_n^{\beta_n}$ il primo termine di φ, debba essere:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1\,,\quad \alpha_2 \leqq \beta_2\,,\quad \ldots\,,\ \alpha_n \leqq \beta_n\,.$$

Sieno

$$f_i \equiv a_0 X_\mu + a_1 X_{\mu-1} + \cdots\,,\qquad \varphi \equiv b_0 X_\lambda + b_1 X_{\lambda-1} + \cdots$$

le due funzioni f_i e φ ordinate secondo i ranghi decrescenti dei loro termini. Poichè, per supposto, φ contiene f_i, esisterà un certo termine X_ν tale da aversi:

$$X_\lambda = X_\mu X_\nu$$

La nuova funzione:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi - \frac{b_0}{a_0}X_\nu f_i &= b_1 X_{\lambda-1} + b_2 X_{\lambda-2} + \cdots \\ &\quad - \frac{b_0}{a_0}a_1 X_{\mu-1}X_\nu - \frac{b_0}{a_0}a_2 X_{\mu-2}X_\nu - \cdots \\ &= b_0' X_{\lambda'} + b_1' X_{\lambda'-1} + \cdots\end{aligned}$$

sarà di rango inferiore a λ. Infatti poichè $X_{\mu-\rho}$ è inferiore ad X_μ, sarà, per l'articolo precedente, $X_{\mu-\rho}X_\nu$

inferiore ad $X_\mu X_\nu$, cioè inferiore ad X_λ. Diremo che φ_1 è la *prima ridotta* di φ rispetto alla successione (2).

Si determini analogamente, se φ_1 contenga alcuna delle (2), la prima ridotta di φ_1 rispetto alle (2), che chiameremo *seconda ridotta* di φ rispetto alla successione (2) e indicheremo con φ_2. Così procedendo si giungerà evidentemente ad una certa ridotta φ_k di φ, che chiameremo l'*ultima ridotta* o semplicemente la ridotta $\bar{\varphi}$ di φ rispetto alla successione (2), la quale, o sarà costante ed eguale allo zero, o godrà della proprietà di non contenere nessuna delle h funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_h$. In ogni caso discende manifestamente dal procedimento tenuto che si avrà identicamente:

$$\varphi = \bar{\varphi} + F_1 f_1 + F_2 f_2 + \cdots + F_h f_h\,,$$

essendo le $F_1, F_2, \ldots, F_h$ certe funzioni razionali intere delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

§° XVIII. *Teorema di Hilbert*.

81. Dalle cose stabilite nei due precedenti §§, possiamo dedurre facilmente il seguente teorema dovuta ad Hilbert(*):

(*) Cfr. *Mathematische Annalen*: Bd. 36. La dimostrazione qui data, differente da quella di Hilbert, ha il vantaggio di contenere al tempo stesso un procedimento metodico per la determinazione effettiva delle forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

$$f_1\ ,\ f_2\ ,\ \ldots\ ,\ f_h \qquad (2)$$

ed un'altra funzione intera φ; noi definiremo, come segue, una nuova funzione $\bar{\varphi}$ *univocamente determinata* (che potrà anche coincidere in qualche caso particolare colla stessa φ) che chiameremo la *ridotta di* φ *rispetto alla successione* (2).

Supponiamo che φ *contenga* almeno una delle funzioni (2) e sia f_i la prima di esse che è *contenuta* in φ. Con ciò vogliamo intendere, per brevità, che, se $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ sia il primo termine di f_i ed $x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots x_n^{\beta_n}$ il primo termine di φ, debba essere:

$$\alpha_1 \leqq \beta_1\ ,\ \ \alpha_2 \leqq \beta_2\ ,\ \ \ldots\ ,\ \alpha_n \leqq \beta_n\ .$$

Sieno

$$f_i \equiv a_0 X_\mu + a_1 X_{\mu-1} + \cdots\ , \qquad \varphi \equiv b_0 X_\lambda + b_1 X_{\lambda-1} + \cdots$$

le due funzioni f_i e φ ordinate secondo i ranghi decrescenti dei loro termini. Poichè, per supposto, φ contiene f_i, esisterà un certo termine X_ν tale da aversi:

$$X_\lambda = X_\mu X_\nu$$

La nuova funzione:

$$\begin{aligned}\varphi_1 = \varphi - \frac{b_0}{a_0} X_\nu f_i &= b_1 X_{\lambda-1} + b_2 X_{\lambda-2} + \cdots \\ &\quad - \frac{b_0}{a_0} a_1 X_{\mu-1} X_\nu - \frac{b_0}{a_0} a_2 X_{\mu-2} X_\nu - \cdots \\ &= b_0' X_{\lambda'} + b_1' X_{\lambda'-1} + \cdots\end{aligned}$$

sarà di rango inferiore a λ. Infatti poichè $X_{\mu-\rho}$ è inferiore ad X_μ, sarà, per l'articolo precedente, $X_{\mu-\rho} X_\nu$ inferiore ad $X_\mu X_\nu$, cioè inferiore ad X_λ. Diremo che φ_1 è la *prima ridotta* di φ rispetto alla successione (2).

Si determini analogamente, se φ_1 contenga alcuna delle (2), la prima ridotta di φ_1 rispetto alle (2), che chiameremo *seconda ridotta* di φ rispetto alla successione (2) e indicheremo con φ_2. Così procedendo si giungerà evidentemente ad una certa ridotta φ_k di φ, che chiameremo l'*ultima ridotta* o semplicemente la ridotta $\bar{\varphi}$ di φ rispetto alla successione (2), la quale, o sarà costante ed eguale allo zero, o godrà della proprietà di non contenere nessuna delle h funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_h$. In ogni caso discende manifestamente dal procedimento tenuto che si avrà identicamente:

$$\varphi = \bar{\varphi} + F_1 f_1 + F_2 f_2 + \cdots + F_h f_h\ ,$$

essendo le $F_1, F_2, \ldots, F_h$ certe funzioni razionali intere delle $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

---

§° XVIII. *Teorema di Hilbert*.

81. Dalle cose stabilite nei due precedenti §§, possiamo dedurre facilmente il seguente teorema dovuto ad Hilbert (*):

(*) Cfr. *Mathematische Annalen*: Bd. 36. La dimostrazione qui data, differente da quella di Hilbert, ha il vantaggio di contenere al tempo stesso un procedimento metodico per la determinazione effettiva delle forme fondamentali $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

Se

$$f_1 \,,\, f_2 \,,\, f_3 \,,\, \dots \qquad (1)$$

è una successione infinita di funzioni razionali intere ben determinate delle n variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, esiste un numero finito k pel quale si ha identicamente, qualunque sia i:

$$f_i = \Phi_1^{(i)} f_1 + \Phi_2^{(i)} f_2 + \dots + \Phi_k^{(i)} f_k$$

essendo le $\Phi^{(i)}$ delle funzioni razionali intere delle stesse $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Invero, sia $\bar f_2$ la ridotta di f_2 rispetto ad f_1, sia $\bar f_3$ la ridotta di f_3 rispetto alla successione $f_1, \bar f_2$; similmente sia $\bar f_4$ la ridotta di f_4 rispetto alla successione $f_1, \bar f_2, \bar f_3$, e così di seguito. Dico che un certo valore di k in poi sarà costantemente:

$$\bar f_k = 0 \,,\quad \bar f_{k+1} = 0 \,,\quad \bar f_{k+2} = 0 \,, \dots \qquad (2)$$

Infatti, ove così non fosse, i primi termini di quelle fra le $\bar f_i$, che non sono identicamente nulle, formerebbero una successione di infiniti termini:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \,,\; x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots\dots x_n^{\beta_n} \,, \dots$$

tale che un termine qualunque non conterrebbe alcuno dei termini precedenti. Ora ciò è contrario a quanto si è già stabilito al §. XVI che, cioè, fra gl'infiniti sistemi di n valori

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \;;\; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \;; \dots$$

ve ne ha un certo numero finito (quelli primarii) tali che, di essi, almeno uno è contenuto in ognuno dei rimanenti infiniti sistemi.

82. Ciò posto, essendo k il numero definito come sopra, l'identità:

$$f_i = \bar f_i + \psi^{(i)} \bar f_1 + \psi_2^{(i)} \bar f_2 + \dots + \psi_{i-1}^{(i)} \bar f_{i-1} \qquad (3)$$

che si avrebbe, secondo quanto si è notato in fine del § precedente, per ogni valore di i, si ridurrà, per $i \geqq k$, all'espressione più semplice:

$$f_i = \psi_1^{(i)} \bar f_1 + \psi_2^{(i)} \bar f_2 + \dots + \psi_{k-1}^{(i)} \bar f_{k-1} \,,\quad i \geqq k \qquad (4)$$

D'altra parte le identità (3) ci dànno, per $i < k$, le relazioni identiche:

$$f_2 = \bar f_2 + \psi_1^{(2)} \bar f_1$$

$$f_3 = \bar f_3 + \psi_1^{(3)} \bar f_1 + \psi_2^{(3)} \bar f_2$$

. . . .

$$f_{k-1} = \bar f_{k-1} + \psi_1^{(k-1)} \bar f_1 + \psi_2^{(k-1)} \bar f_2 + \dots + \psi_{k-2}^{(k-1)} \bar f_{k-2}$$

le quali, risolute rispetto alle $\bar f_2, \bar f_3, \dots, \bar f_{k-1}$, ci permettono evidentemente di porre ciascuna di quest'ultime sotto la forma:

$$\Psi_1 f_1 + \Psi_2 f_2 + \dots + \Psi_{k-1} f_{k-1}$$

essendo ancora le Ψ funzioni razionali intere delle $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se dunque si sostituiscono queste ultime espressioni nella (4) in luogo delle $\bar f_2, \bar f_3, \dots, \bar f_{k-1}$, si otterrà appunto l'identità della forma desiderata

$$f_i = \Phi_1^{(i)} f_1 + \Phi_2^{(i)} f_2 + \cdots + \Phi_{k-1}^{(i)} f_{k-1}$$

valida per tutti i valori di i, c.d.d.

---

§° XIX. *Dimostrazione dell'esistenza dei sistemi finiti completi di covarianti.*

83. Un sistema finito di covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ appartenenti ad un dato sistema di forme fondamentali f_1, $f_2, \ldots$ si dice *completo* quando ogni covariante del sistema delle $f_1 f_2 \ldots$ si può esprimere come una funzione razionale intera (o coefficienti numerici) dei k covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. L'esistenza di un sistema completo così fatto è stata stabilita dal Gordan nel campo binario con un procedimento che dà al tempo stesso un metodo per la costruzione effettiva dei covarianti che lo compongono. La dimostrazione dell'esistenza del sistema completo anche pel campo ennario è stata poi data molto più recentemente da Hilbert in base al teorema da noi dato nel precedente §. La dimostrazione che siamo per darne qui non differisce, nei punti più importanti ed essenziali, da quella di Hilbert.(*)

84. Noi ci limiteremo, per semplicità, al caso di un'unica forma fondamentale f con una sola serie di variabili

---

(*) Cfr. l.c.

$x \equiv x_1, x_2, \ldots, x_n$; ma la dimostrazione che daremo si estende immediatamente anche al caso di più forme fondamentali, ciascuna delle quali possa anche contenere più serie cogredienti alla serie x. Noi considereremo tutte le forme invariantive contenenti certe serie di variabili cogredienti $x, y, z, \ldots$, il cui numero q potrà fissarsi ad arbitrio; limitandoci dapprima a quelle di peso positivo. Tutte queste infinite forme si potranno sempre rappresentare come gli elementi di una successione infinita ben determinata:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots \tag{1}$$

ordinandole per es. a seconda dei loro gradi nei coefficienti della forma fondamentale f, e nelle variabili, e ritenendo, per ogni dato grado, soltanto quelle, in numero finito, che sono fra loro linearmente indipendenti.

85. Se τ_i è il peso di una qualunque φ_i, e, indicando brevemente secondo il solito con $(\xi\, \eta\, \zeta \ldots \theta)$ il determinante formato con n nuove serie di variabili ausiliarie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \theta$ affatto indipendenti dalle $x, y, z, \ldots$ poniamo:

$$\psi_i = (\xi\, \eta\, \zeta \ldots \theta)^{\tau_i} \varphi_i, \tag{2}$$

gioverà considerare dapprima in luogo della successione (1) la successione:

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \tag{3}$$

i cui elementi sono covarianti, di peso nullo (poichè $(\xi\, \eta\, \zeta\, \theta)$ è un covariante di peso -1) contenenti le serie cogredienti $x, y, z; \dots; \xi, \eta, \zeta, \dots, \theta$.

Se si ponga simbolicamente

$$f = a_x^m$$

e si indichino con

$$P_1, P_2, \dots, P_N$$

le polari miste di f rappresentate simbolicamente dal tipo generale

$$a_x^{\mu} a_y^{\mu'} a_z^{\mu''} \dots a_\xi^{\nu} a_\eta^{\nu'} \dots, \qquad \sum\mu + \sum\nu = m,$$

il cui numero N è dato manifestamente da:

$$\binom{m+q+n-1}{m}$$

è facile di riconoscere che una qualunque delle ψ si può esprimere come funzione razionale intera delle $P_1, P_2, \dots, P_N$.

Siano infatti $a, b, c, \dots$ simboli fra loro equivalenti; cosicchè si possa scrivere:

$$f = a_x^m = b_x^m = c_x^m = \dots$$

Un covariante qualunque φ_i, si potrà esprimere (§. XIII) come un aggregato razionale intero di elementi dei tipi:

$$a_x, a_y, a_z, \dots, b_x, b_y, b_z, \dots \qquad (4)$$

e di elementi dei tipi:

$$(a b c \dots d), (x y \dots t), \dots$$

ed in ogni termine di cosiffatta espressione il numero dei fattori del tipo $(a b c \dots d)$ dovrà superare di τ_i unità, giacchè τ_i è il peso di φ_i, il numero dei fattori del tipo $(x y \dots t)$, cosicchè ogni fattore di questo secondo tipo si potrà accoppiare con un fattore del primo tipo ed in luogo di ogni prodotto del tipo $(a b c \dots d)(x y \dots t)$ così ottenuto si potrà sostituire l'espressione:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & \dots & a_t \\ b_x & b_y & \dots & b_t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_x & d_y & \dots & d_t \end{vmatrix}$$

che gli è identicamente uguale. In tal modo φ_i si verrà ad esprimere con elementi del tipo (4) e con elementi del tipo $(a b \dots d)$. E poichè in ogni termine dell'espressione vi saranno precisamente τ_i fattori del tipo $(a b \dots d)$, è chiaro che $(\xi \eta \zeta \dots \theta)^{\tau_i} \varphi_i$, cioè ψ_i, si potrà esprimere come aggregato razionale intero di soli elementi dei tipi:

$$\begin{matrix} a_\xi, & a_\eta, & a_z, & \dots, & a_\xi, & a_\eta, & \dots \\ b_x, & b_y, & b_z, & \dots, & b_\xi, & b_\eta, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \qquad (5)$$

giacchè ogni fattore del tipo $(a b \dots d)$ si potrà accoppiare con un fattore $(\xi \eta \dots \theta)$ e surrogare coll'espressione equivalente:

$$\begin{vmatrix} a_\xi & a_\eta & \dots & a_\theta \\ b_\xi & b_\eta & \dots & b_\theta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_\xi & d_\eta & \dots & d_\theta \end{vmatrix}$$

La ψ_i si verrà così appunto ad esprimere, secondo che si è asserito, come una funzione intera delle $P_1, P_2, \ldots, P_N$, giacchè ogni prodotto di elementi (4), contenente ciascuno dei simboli $a, b, c, \ldots$ alla potenza m, è un prodotto di forme del tipo:

$$\begin{matrix} a_x^{\mu} & a_y^{\mu'} & a_z^{\mu''} & \ldots & a_\xi^{\nu} & a_\eta^{\nu'} \\ b_x^{\mu} & b_y^{\mu'} & b_z^{\mu''} & \ldots & b_\xi^{\nu} & b_\eta^{\nu'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \qquad , \sum \mu + \sum \nu = m$$

cioè appunto un prodotto di forme P_i.

86. Applicando ora il teorema del precedente §° alla successione delle infinite funzioni ψ, considerate come funzioni razionali intere delle N variabili $P_1, P_2, \ldots, P_N$, possiamo ritenere che fra le funzioni ψ ne esistano k, mediante le quali si possano esprimere tutte le altre secondo una identità della forma:

$$\psi_i = \psi_1 \chi_1^{(i)} + \psi_2 \chi_2^{(i)} + \cdots + \psi_k \chi_k^{(i)}, \quad i = k+1, k+2, \ldots, \tag{6}$$

essendo le χ funzioni razionali intere, a coefficienti numerici, delle stesse $P_1, P_2, \ldots P_N$.

Rimettendo poi in luogo delle ψ le loro espressioni (2) ed operando quindi sui due membri di (6) colla potenza τ_i^{esima} dell'operazione

$$\Omega \equiv \sum \pm \frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \cdots \frac{\partial}{\partial \theta_n}$$

si può scrivere:

$$\varphi_i \cdot \left[\Omega^{\tau_i} (\xi\, \eta \ldots \theta)^{\tau_i} \right] = \sum_{\rho=1}^{\rho=k} \varphi_\rho \left\{ \Omega^{\tau_i} \left[(\xi\, \eta \ldots \theta)^{\tau_\rho} \chi_\rho^{(i)} \right] \right\}, \tag{7}$$

Ma tenendo presente (Cap. I, §° XVIII) che:

$$\Omega = \frac{1}{(\xi\, \eta \ldots \theta)} H_{\xi \eta \ldots \theta},$$

dove:

$$H_{\xi \eta \ldots \theta} = \begin{vmatrix} n-1+\mathcal{D}_{\theta\theta} & \cdot & \cdot & \mathcal{D}_{\eta\theta} & \mathcal{D}_{\xi\theta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{D}_{\theta\eta} & \cdot & \cdot & 1+\mathcal{D}_{\eta\eta} & \mathcal{D}_{\xi\eta} \\ \mathcal{D}_{\theta\xi} & \cdot & \cdot & \mathcal{D}_{\eta\xi} & \mathcal{D}_{\xi\xi} \end{vmatrix},$$

è facile riconoscere che:

$$\Omega^{\tau_i} (\xi\, \eta \ldots \theta)^{\tau_i} = \lambda,$$

essendo λ un numero diverso da zero e precisamente (*):

$$\lambda = 1^{\overline{n}} \cdot 2^{\overline{n}} \cdot 3^{\overline{n}} \ldots \tau_i^{\overline{n}}.$$

La (7) ci dà dunque:

$$\varphi_i = \frac{1}{\lambda} \sum_{\rho=1}^{\rho=k} \varphi_\rho \cdot \Phi_\rho \tag{8}$$

dove:

$$\Phi_\rho = \Omega^{\tau_i} \left[(\xi\, \eta \ldots \theta^{\tau_\rho}) \chi_\rho^{(i)} \right] \tag{9}$$

(*) Adottiamo per le *potenze fattoriali* la notazione:

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$$

è un covariante della forma fondamentale f; poichè $\chi_{\rho'}^{(i)}$ e quindi anche $(\xi\,\eta\ldots\theta)^{\tau_\rho}\chi_\rho^{(i)}$, è già un covariante di f, e l'operazione Ω non toglie mai (cfr. art. 14) il carattere invariantivo alle forme cui viene applicata.

La formola (8) esprime φ_i in funzione dei k covarianti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ e dei covarianti Φ_ρ i quali, al pari della φ_i, possono contenere soltanto le q serie di variabili $x, y, z, \ldots$ ed hanno il loro grado complessivo nei coefficienti di f e nelle variabili, evidentemente inferiore al grado di φ_i. Si potrà quindi applicare a ciascuna delle Φ_ρ la stessa riduzione fatta per la φ_i, e procedere dipoi allo stesso modo finchè la φ si trovi espressa come un aggregato razionale intero delle sole $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$. Queste k forme costituiscono dunque il sistema completo di tutti i covarianti φ appartenenti alla forma fondamentale f.

87. In modo affatto analogo si potranno trattare quei covarianti

$$\varphi_1',\ \varphi_2',\ \varphi_3',\ \ldots \qquad (1)'$$

che sono di peso negativo. Basterà introdurre ausiliarmente n nuove serie arbitrarie $u, v, \ldots, w$ controgredienti alle $x, y, z, \ldots$ e considerare dapprima, in luogo della serie (1)', la serie:

$$\psi_1',\ \psi_2',\ \psi_3',\ \ldots \qquad (3)'$$

dove:

$$\psi_i' = (u\,v\ldots w)^{\tau_i}\,\varphi_i', \qquad (2)'$$

essendo $-\tau_i$ il peso di φ_i'. Le ψ' saranno allora esprimibili come aggregati razionali interi degli nq covarianti identici

$$\begin{matrix} u_x, & u_y, & u_z, & \ldots \\ v_x, & v_y, & v_z, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_x, & w_y, & w_z, & \ldots \end{matrix}$$

e delle $\binom{m+q-1}{m}$ polari di f contenute nel tipo generale

$$a_x^{\mu}\,a_y^{\mu'}\,a_z^{\mu''}\ldots, \qquad \sum\mu = m.$$

Se $N = nq + \binom{m+q-1}{m}$ forme di questi due tipi s'indicheranno ancora con $P_1, P_2, \ldots, P_N$ e si applicherà il teorema del §° prec. alla successione delle ψ' considerate come funzioni delle N variabili $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Il resto della dimostrazione procederà assolutamente come nell'art. prec. colla sola differenza che, in luogo dell'operazione:

$$\sum \pm \frac{\partial}{\partial \xi_1}\,\frac{\partial}{\partial \eta_2}\cdots\frac{\partial}{\partial \theta_n},$$

converrà valersi dell'operazione:

$$\sum \pm \frac{\partial}{\partial u_1}\,\frac{\partial}{\partial v_2}\cdots\frac{\partial}{\partial w_n}.$$

Riassumendo concludiamo dunque che: *Tutte le forme invariantive razionali intere, contenenti un certo numero (da fissarsi però ad arbitrio) di serie di variabili cogredienti, ap-*

partenenti a una forma fondamentale $n^{\underline{aria}}$ si esprimono come un aggregato razionale intero di un numero finito di esse.

Appendice
sulle
Forme algebriche binarie

§° I. Formole di riduzione nel campo binario.

1. Nella rappresentazione simbolica caratteristica delle forme invariantive binarie avremo a considerare elementi del tipo a_x ed elementi del tipo (ab) od (xy) formati colle serie binarie di variabili x_1, x_2; y_1, y_2; ... e colle serie binarie di simboli a_1, a_2; b_1, b_2; ....

Fra gli elementi di questi tipi si hanno primieramente (Cap. II, §° XII) le relazioni identiche:

$$(xy)(ab) = a_x b_y - a_y b_x = (a_x b_y) \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$(bc)a_x = (ac)b_x + (ba)c_x \qquad \text{(III)}$$

$$(bc)(ad) = (ac)(bd) + (ba)(cd). \qquad \text{(IV)}$$

2. Dalla formola (III) scritta come segue:

$$(ba)c_x = (bc)a_x - (ac)b_x,$$

elevandosi al quadrato i due membri, si deduce facilmente che:

$$(ac)(bc)a_x b_x = \frac{1}{2}\left\{(ac)^2 b_x^2 + (bc)^2 a_x^2 - (ab)^2 c_x^2\right\} \qquad \text{(V)}$$

e ponendo $x_1 = d_2$, $x_2 = -d_1$:

$$(ac)(bc)(ad)(bd) = \frac{1}{2}\left\{(ac)^2(bd)^2 + (bc)^2(ad)^2 - (ab)^2(cd)^2\right\} \quad \text{(VI)}$$

3. Elevando ora al quadrato anche i due membri delle (V), se ne deduce ulteriormente:

$$(ab)^2(ac)^2 b_x^2 c_x^2 + (ba)^2(bc)^2 a_x^2 c_x^2 + (ca)^2(cb)^2 a_x^2 b_x^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ac)^4 b_x^4 + (bc)^4 a_x^4 + (ab)^4 c_x^4\right\}, \quad \text{(VII)}$$

e quindi anche, ponendo, come sopra, $x_1 = d_2$, $x_2 = -d_1$:

$$(ab)^2(dc)^2(bd)^2(cd)^2 + (ba)^2(bc)^2(ad)^2(bd)^2 + (ca)^2(cb)^2(ad)^2(bd)^2$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ac)^4(bd)^4 + (bc)^4(ad)^4 + (ab)^4(cd)^4\right\} \quad \text{(VIII)}$$

4. Per ultimo citeremo anche la formola seguente:

$$(ab)(cd)a_x b_x c_x d_x = \frac{1}{2}\left\{(ad)^2 b_x^2 c_x^2 + (bc)^2 a_x^2 d_x^2 - (ac)^2 b_x^2 d_x^2 - (bd)^2 a_x^2 c_x^2\right\} \quad \text{(IX)}$$

colla sua correlativa:

$$(ab)(cd)(ae)(be)(ce)(de) =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{(ad)^2(be)^2(ce)^2 + (bc)^2(ae)^2(de)^2 - (ac)^2(be)^2(de)^2 - (bd)^2(ae)^2(ce)^2\right\}. \quad \text{(X)}$$

e così pure la formola:

$$(au)(av)(bc)(bd)(cg) =$$
$$(bu)(bv)(ac)(ad)(cg) + (cu)(cv)(ab)(ad)(bg) + (ab)(bc)(ac)(ud)(vg) \quad \text{(XI)}$$

che si dedurrà facilmente dall'identità:

$$(a-u)(a-v)(b-c) = (b-u)(b-v)(a-c) + (c-u)(c-v)(a-b) + (a-b)(a-c)(b-c).$$

---

§° II. Sviluppo di Clebsch e Gordan

5. Le forme algebriche binarie con due o più serie di variabili si fanno dipendere da forme binarie con un'unica serie di variabili mediante lo sviluppo per polari (Cap. I, §. XXII)

In luogo degli operatori da noi già considerati:

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{D}_{yx} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \Omega_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial y_1}$$

è però spesso utile, allo scopo di semplificare certi coefficienti numerici, di servirsi degli operatori *preparati*:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy}$$

definiti dalle relazioni identiche:

$$\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xx} \cdot \overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yy} \cdot \overline{\mathcal{D}}_{yx}$$

$$\Omega_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\,\mathcal{D}_{yy}\,\overline{\Omega}_{xy},$$

In altri termini:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy} = \frac{1}{\mu}\mathcal{D}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx} = \frac{1}{\nu}\mathcal{D}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy} = \frac{1}{\mu\nu}\Omega_{xy},$$

essendo μ, ν i gradi, risp. nelle x e nelle y, della forma algebrica cui s'intendono applicati i simboli operativi.

Così se $f = a_x^m b_y^n$ è la forma simbolica di una forma binaria con due serie di variabili x ed y, in luogo delle formole:

$$\mathcal{D}_{xy} f = m a_x^{m-1} a_y b_y^n, \quad \mathcal{D}_{yx} f = n a_x^m b_y^{n-1} b_x,$$

$$\Omega_{xy} f = mn(ab) a_x^{m-1} b_y^{n-1},$$

si scriveranno le formole più semplici:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy} f = a_x^{m-1} a_y b_y^n, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx} f = a_x^m b_y^{n-1} b_x, \quad \overline{\Omega}_{xy} f = (ab) a_x^{m-1} b_y^{n-1}$$

6. Ciò premesso, designando per maggiore brevità gli operatori $\overline{\mathcal{D}}_{xy}$, $\overline{\mathcal{D}}_{yx}$, $\overline{\Omega}_{xy}$ rispettivamente con $\mathcal{D}$, Δ, Ω, allo svi-

e ponendo $x_1 = d_2$, $x_2 = -d_1$:

$$(ac)(bc)(ad)(bd) = \frac{1}{2}\left\{(ac)^2(bd)^2+(bc)^2(ad)^2-(ab)^2(cd)^2\right\} \qquad \text{(VI)}$$

3. Elevando ora al quadrato anche i due membri delle (V), se ne deduce ulteriormente:

$$(ab)^2(ac)^2b_x^2c_x^2+(ba)^2(bc)^2a_x^2c_x^2+(ca)^2(cb)^2a_x^2b_x^2 = \frac{1}{2}\left\{(ac)^4b_x^4+(bc)^4a_x^4+(ab)^4c_x^4\right\}, \qquad \text{(VII)}$$

e quindi anche, ponendo, come sopra, $x_1 = d_2$, $x_2 = -d_1$:

$$(ab)^2(dc)^2(bd)^2(cd)^2+(ba)^2(bc)^2(ad)^2(bd)^2+(ca)^2(cb)^2(ad)^2(bd)^2 = \frac{1}{2}\left\{(ac)^4(bd)^4+(bc)^4(ad)^4+(ab)^4(cd)^4\right\} \qquad \text{(VIII)}$$

4. Per ultimo citeremo anche la formola seguente:

$$(ab)(cd)a_xb_xc_xd_x = \frac{1}{2}\left\{(ad)^2b_x^2c_x^2+(bc)^2a_x^2d_x^2-(ac)^2b_x^2d_x^2-(bd)^2a_x^2c_x^2\right\} \qquad \text{(IX)}$$

colla sua correlativa:

$$(ab)(cd)(ae)(be)(ce)(de) = \frac{1}{2}\left\{(ad)^2(be)^2(ce)^2+(bc)^2(ae)^2(de)^2-(ac)^2(be)^2(de)^2-(bd)^2(ae)^2(ce)^2\right\}. \qquad \text{(X)}$$

e così pure la formola:

$$(au)(av)(bc)(bd)(cg) = (bu)(bv)(ac)(ad)(cg)+(cu)(cv)(ab)(ad)(bg)+(ab)(bc)(ac)(ud)(vg) \qquad \text{(XI)}$$

che si dedurrà facilmente dall'identità:

$$(a-u)(a-v)(b-c)=(b-u)(b-v)(a-c)+(c-u)(c-v)(a-b)+(a-b)(a-c)(b-c).$$

§. II. Sviluppo di Clebsch e Gordan

5. Le forme algebriche binarie con due o più serie di variabili si fanno dipendere da forme binarie con un'unica serie di variabili mediante lo sviluppo per polari (Cap. I, §. XXII)

In luogo degli operatori da noi già considerati:

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1\frac{\partial}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathcal{D}_{yx} = x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad \Omega_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_2}-\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_1}$$

è però spesso utile, allo scopo di semplificare certi coefficienti numerici, di servirsi degli operatori preparati:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy}$$

definiti dalle relazioni identiche:

$$\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\cdot\overline{\mathcal{D}}_{xy}, \quad \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yy}\cdot\overline{\mathcal{D}}_{yx}$$

$$\Omega_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\,\mathcal{D}_{yy}\,\overline{\Omega}_{xy},$$

In altri termini:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy} = \frac{1}{\mu}\mathcal{D}_{xy}, \quad \overline{\mathcal{D}}_{yx} = \frac{1}{\nu}\mathcal{D}_{yx}, \quad \overline{\Omega}_{xy} = \frac{1}{\mu\nu}\Omega_{xy},$$

essendo μ, ν i gradi, risp. nelle x e nelle y, della forma algebrica cui s'intendono applicati i simboli operativi.

Così se $f = a_x^m b_y^n$ è la forma simbolica di una forma binaria con due serie di variabili x ed y, in luogo delle formole:

$$\mathcal{D}_{xy}f = m\,a_x^{m-1}a_y\,b_y^n, \quad \mathcal{D}_{xz}f = n\,a_x^m b_y^{n-1}b_x,$$

$$\Omega_{xy}f = mn\,(ab)a_x^{m-1}b_y^{n-1},$$

si scriveranno le formole più semplici:

$$\overline{\mathcal{D}}_{xy}f = a_x^{m-1}a_y\,b_y^n, \quad \overline{\mathcal{D}}_{xz}f = a_x^m b_y^{n-1}b_x, \quad \overline{\Omega}_{xy}f = (ab)a_x^{m-1}b_y^{n-1}$$

6. Ciò premesso, designando per maggiore brevità gli operatori $\overline{\mathcal{D}}_{xy}$, $\overline{\mathcal{D}}_{yx}$, $\overline{\Omega}_{xy}$ rispettivamente con $\mathcal{D}$, Δ, Ω, allo svi-

luppo per polari (cfr. Cap. I, §° XXII) di una forma binaria con due serie di variabili:

$$f(\overset{m}{x}\,;\,\overset{n}{y}) = a_x^m \alpha_y^n \qquad (1)$$

si può dare la forma:

$$f = D^n E_0 + \mu_1 (xy) D^{n-1} E_1 + \mu_2 (xy)^2 D^{n-2} E_2 + \dots + \mu_n (xy)^n E_n \qquad (2)$$

essendo le E_i i così detti *covarianti elementari* di f definiti simbolicamente da:

$$E_i = (a\alpha)^i a_x^{m-i} \alpha_x^{n-i} \qquad (3)$$

e operativamente da

$$E_i = \Delta^{n-i} \Omega^i f \qquad (3)'$$

e le μ dei coefficienti numerici da determinarsi opportunamente. Quest'ultima espressione mette in evidenza che per E_i si deve intendere lo zero tutte le volte che l'indice i sia maggiore di m o di n; cosicchè per $m < n$ lo sviluppo (2) si arresterà al termine con E_m.

7. *Lo sviluppo di una stessa forma $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$ sotto la forma:*

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0 + (xy) D^{n-1} G_1 + (xy)^2 D^{n-2} G_2 + \dots \qquad (\alpha)$$

in cui le G siano forme contenenti la sola serie x, non può effettuarsi che in un unico modo (cioè secondo lo sviluppo (2) in cui le E sono le (3) o le equivalenti (3)').

Ammesso infatti che si avesse anche:

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0' + (xy) D^{n-1} G_1' + (xy)^2 D^{n-2} G_2' + \dots \qquad (\beta)$$

seguirebbe evidentemente dalle (α) e (β) facendo in esse $x_1 = y_1$ ed $x_2 = y_2$, onde $(xy) = 0$:

$$\left[D^n G_0\right]_{y=x} = \left[D^n G_0'\right]_{y=x}$$

cioè:

$$G_0 = G_0',$$

poichè G_0 e G_0' contengono la sola serie x; cosicchè:

$$\left[\overline{D}^n_{xy}\, G_0\right]_{y=x} = G_0 \quad , \quad \left[\overline{D}^n_{xy}\, G_0'\right]_{y=x} = G_0' .$$

Essendo ora $G_0 = G_0'$ e quindi anche $D^n G_0 = D^n G_0'$, si deduce dalle (α) e (β):

$$D^{n-1} G_1 + (xy) D^{n-2} G_2 + \dots = D^{n-1} G_1' + (xy) D^{n-2} G_2' + \dots$$

d'onde si trova come sopra, facendo $x_1 = y_1$ ed $x_2 = y_2$:

$$G_1 = G_1'$$

e quindi

$$D^{n-1} G_1 = D^{n-1} G_1',$$

cosicchè resterà l'identità:

$$D^{n-2} G_2 + (xy) D^{n-3} G_3 + \dots = D^{n-2} G_2' + (xy) D^{n-3} G_3' + \dots$$

e così via.

8. Se $f(\overset{n}{x}\,;\,\overset{n}{y})$ è simmetrica nelle x ed y, cioè se è identicamente $f(x;y) = f(y;x)$, lo sviluppo per polari prende la forma più semplice:

$$f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) = D^n G_0 + (xy)^2 D^{n-2} G_2 + (xy)^4 D^{n-4} G_4 + \dots$$

Infatti, poichè:

$$f = a_x^n \alpha_y^n = a_y^n \alpha_x^n ,$$

sarà:

$$\Delta^{n-1}\overline{\Omega}^{i}_{xy} f = \Delta^{n-1}\overline{\Omega}^{i}_{xy}\left\{\alpha_x^{n} a_y^{n}\right\} = (\alpha a)^{i}\, \alpha_x^{n-i} a_x^{n-i}$$

cioè per le (3)' e (3):

$$E_i = (-1)^i E_i$$

d'onde appunto $E_i = 0$ per il numero dispari.

---

§ III. Determinazione dei coefficienti μ nello sviluppo del precedente §.

9. Applicando l'operazione Ω definita nel § precedente ad un prodotto della forma:

$$(xy)^{\lambda} \cdot \varphi(\overset{\rho}{x}\,;\overset{\sigma}{y})$$

in cui λ è un esponente intero positivo, si trova con facile calcolo:

$$\Omega\left\{(xy)^{\lambda}\varphi(\overset{\rho}{x};\overset{\sigma}{y})\right\} = \frac{\rho\sigma}{(\rho+\lambda)(\sigma+\lambda)}(xy)^{\lambda}\cdot\Omega\varphi + \frac{\lambda(\rho+\sigma+\lambda+1)}{(\rho+\lambda)(\sigma+\lambda)}(xy)^{\lambda-1}\varphi \quad (1)$$

Pertanto, se si applica l'operatore Ω ad un termine qualunque dello sviluppo (2) del § precedente, si ha:

$$\Omega\left\{\mu_i (xy)^i D^{n-i} E_i\right\} = \mu_i \frac{m+n-i+1}{mn}(xy)^{i-1} D^{n-i} E_i ,$$

poichè:

$$\Omega\left\{D^{n-i} E_i\right\} = 0, \qquad (2)$$

essendo evidentemente:

$$\Omega E_i = 0$$

ed essendo l'operatore Ω permutabile (a meno di un coefficiente costante) con D.

Dallo sviluppo (2) del § precedente, cioè dall'identità:

$$a_x^{m}\alpha_y^{n} = D^{n}\left\{a_x^{m}\alpha_x^{m}\right\} + \mu_1 (xy) D^{n-1}\left\{(a\alpha)a_x^{m-1}\alpha_x^{n-1}\right\} + \mu_2 (xy)^2 D^{n-2}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{n-2}\right\} + \dots$$

si deduce dunque, operando sui due membri con Ω, l'identità:

$$(a\alpha)a_x^{m-1}\alpha_y^{n-1} = \mu_1\frac{m+n}{mn}D^{n-1}\left\{(a\alpha)a_x^{m-1}\alpha_x^{n-1}\right\} + \mu_2\frac{2(m+n-1)}{mn}(xy)D^{n-2}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{m-2}\right\} + \mu_3\frac{3(m+n-2)}{mn}(xy)^2 D^{n-3}\left\{(a\alpha)^3 a_x^{m-3}\alpha_x^{n-3}\right\} + \dots$$

e dividendo entrambi i membri per $(a\alpha)$:

$$a_x^{m-1}\alpha_y^{n-1} = \mu_1\frac{m+n}{mn}D^{n-1}\left\{a_x^{m-1}\alpha_x^{n-1}\right\} + \mu_2\frac{2(m+n-1)}{mn}(xy)D^{n-2}\left\{(a\alpha)a_x^{m\dots}\right. \dots + \mu_3\frac{3(m+n-2)}{mn}D^{n-3}\left\{(a\alpha)^2 a_x^{m-2}\alpha_x^{n-2}\right\} + \dots$$

Dal paragone delle (3) e (4) si vede che se $1, \mu_1, \mu_2, \dots$ sono i coefficienti dello sviluppo di $f(\overset{m}{x};\overset{n}{y})$, i coefficienti dello sviluppo di $f(\overset{m-1}{x};\overset{n-1}{y})$ sono invece:

$$\mu_1\frac{m+n}{mn}, \quad \mu_2\frac{2(m+n-1)}{mn}, \quad \mu_3\frac{3(m+n-2)}{mn}, \quad \dots$$

10. Se dunque indichiamo il coefficiente μ_i nell'$i+1^{\text{esimo}}$ termine dello sviluppo (2) del § precedente con

$$\mu_i = \vartheta(m,n,i) \quad , \quad \mu_0 = \vartheta(m,n,0) = 1$$

per mettere in evidenza che esso è funzione dei numeri m, n, i, abbiamo la relazione funzionale:

$$\vartheta(m-1,\, n-1,\, i-1) = \frac{i(m+n-i+1)}{mn}\,\vartheta(m,\, n,\, i)$$

dalla quale cambiando m, n, i in $m-1, n-1, i-1$, poi in $m-2, n-2, i-2$, ecc. si deduce il sistema di relazioni:

$$\vartheta(m,n,i) = \frac{mn}{i\,(m+n-i+1)}\,\vartheta(m-1,n-1,i-1)$$

$$\vartheta(m-1,n-1,i-1) = \frac{(m-1)(n-1)}{(i-1)(m+n-i)}\,\vartheta(m-2,n-2,i-2)$$

$$\vartheta(m-2,n-2,i-2) = \frac{(m-2)(n-2)}{(i-2)(m+n-i-1)}\,\vartheta(m-3,n-3,i-3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\vartheta(m-i+1,n-1+1,1) = \frac{(m-i+1)(n-i+1)}{1\cdot(m+n-2i+2)}$$

che moltiplicate membro a membro ci dànno immediatamente:

$$\mu_i = \vartheta(m,n,i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{n}{i}}{\binom{m+n-i+1}{i}}\ .$$

Lo sviluppo di Clebsch e Gordan è dunque:

$$(5)\quad f(\overset{m}{x},\overset{n}{y}) = D^n E_0 + \frac{\binom{m}{1}\binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}}(xy)D^{n-1}E_1 + \frac{\binom{m}{2}\binom{n}{2}}{\binom{m+n-1}{2}}(xy)^2 D^{n-2}E_2 + \cdots$$

---

§° IV. *Proprietà fondamentali delle spinte (Ueberschiebungen) fra due forme binarie* -

11- Date due forme binarie:

$$f(x) \equiv f = a_x^m, \qquad \varphi(x) \equiv \varphi = b_x^n, \qquad (1)$$

l'espressione simbolica:

$$(ab)^k a_x^{m-k} b_x^{n-k} \qquad (2)$$

rappresenta, come sappiamo (cfr. Cap. II; §° VIII) un covariante simultaneo del sistema delle due forme fondamentali (1). Questo covariante si chiama la k^{esima} *spinta* od anche il k^{mo} *scorrimento* (traduzioni della denominazione tedesca *Ueberschiebung* (*)) della forma f sulla forma φ; e si indica anche con

$$(f,\ \varphi)^{(k)}. \qquad (2)'$$

E' senz'altro evidente che:

$$(f,\varphi)^{(k)} = (-1)^k (\varphi, f)^{(k)} \qquad (3)$$

Questa formula mette in evidenza (per $\varphi \equiv f$) che: *le spinte di ordine dispari di una forma qualunque su se stessa sono nulle identicamente*. Applicando al prodotto:

$$f(x)\,\varphi(y) = a_x^m \cdot b_y^n$$

l'operazione

$$\Omega = \overline{\Omega}_{xy}$$

già considerata nei due §§ precedenti, si ottiene successivamente (cfr. Cap. I° § XVII):

$$\Omega\left\{f(x)\varphi(y)\right\} = (ab)\,a_x^{m-1}\,a_y^{n-1}$$

$$\Omega^2\left\{f(x)\varphi(y)\right\} = (ab)^2\,a_x^{m-2}\,a_y^{n-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

(*) Cfr. le opere di *Clebsch*: *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig 1872) e di *Gordan*: *Vorlesungen über Invariantentheorie* (Vol. 2°, Leipzig 1887).

25. Si ha poi (art. 15):

$$(f,\varphi)'' = \frac{1}{m(m-1)n(n-1)}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\right\}$$

(8)

$$= f_{11}\varphi_{22} - 2f_{12}\varphi_{12} + f_{22}\varphi_{11}\,.$$

Pertanto, dalle (6), (7) ed (8) si deduce facilmente, applicando la regola di moltiplicazione dei determinanti, se f, φ, χ, ψ sono quattro forme binarie qualisivogliano:

$$2.(f,\varphi)'\cdot(\chi\psi)' = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ x_2^2 & -x_1x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \chi_{22} & -2\chi_{12} & \chi_{11} \\ \psi_{22} & -2\psi_{12} & \psi_{11} \\ x_1^2 & 2x_1x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f,\chi)'' & (f,\psi)'' & f \\ (\varphi,\chi)'' & (\varphi,\psi)'' & \varphi \\ \chi & \psi & 0 \end{vmatrix}$$

d'onde:

$$(f,\varphi)'(\chi,\psi)' = -\frac{1}{2}\left\{(f,\chi)''\varphi\psi + (\varphi,\psi)''f\chi - (f,\psi)''\varphi\chi - (\varphi,\chi)''f\psi\right\} \quad (9)$$

Per $\chi \equiv f$ si deduce di qui in particolare l'identità:

$$(f,\varphi)'(f,\psi)' = -\frac{1}{2}\left\{(f,f)''\varphi\psi - (f,\psi)''f\varphi - (f,\varphi)''f\psi + (\varphi,\psi)''f^2\right\} \quad (10)$$

e facendo poi anche $\varphi \equiv \psi$:

$$\left[(f,\varphi)'\right]^2 = -\frac{1}{2}\left\{(f,f)''\varphi^2 - 2(f,\varphi)''f\varphi + (\varphi,\varphi)''f^2\right\} \quad (11)$$

26. Se $f = a_x^m$, $\varphi = b_x^n$, $\psi = c_x^p$ sono tre forme binarie quali-sivogliano, il covariante di peso 3:

$$U = (ab)(ac)(bc)\,a_x^{m-2}\,b_x^{n-2}\,c_x^{p-2}$$

si può esprimere identicamente anche sotto la forma

$$U = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_2^2 \\ b_1^2 & b_1b_2 & b_2^2 \\ c_1^2 & c_1c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} a_x^{m-2}\,b_x^{n-2}\,c_x^{p-2} = \begin{vmatrix} a_x^{m-2}a_1^2 & a_x^{m-2}a_1a_2 & a_x^{p-} \\ b_x^{n-2}b_1^2 & b_x^{n-2}b_1b_2 & b_x^{p-} \\ c_x^{p-2}c_1^2 & c_x^{p-2}c_1c_2 & c_x^{p-} \end{vmatrix}$$

d'onde

$$U = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix}$$

Ciò posto, possiamo facilmente dedurre di qui che an per il covariante di peso dispari U sussiste un teorema logo a quello espresso dall'identità (11) cioè che il qu drato si può esprimere mediante covarianti di peso

Segue infatti dalla (13):

$$2U^2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \\ \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_{22} & -2f_{12} & f_{11} \\ \varphi_{22} & -2\varphi_{12} & \varphi_{11} \\ \psi_{22} & -2\psi_{12} & \psi_{11} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f,f)'' & (f,\varphi)'' & (f,\psi)'' \\ (\varphi,f)'' & (\varphi,\varphi)'' & (\varphi,\psi)'' \\ (\psi,f)'' & (\psi,\varphi)'' & (\psi,\psi)'' \end{vmatrix}$$