LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

LEZIONI

SULLA

TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

PER

ALFREDO CAPELLI
Prof. ordinario nella R. Università di Napoli

NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI B. PELLERANO
Via Gennaro Serra, 20
1902

PREFAZIONE

La teoria delle forme algebriche vanta già parecchie opere, alcune delle quali eccellenti, che trattano abbastanza distesamente di varie speciali categorie di forme. E particolarmente la teoria delle forme binarie si trova in esse già svolta in modo quasi completo; cosicchè ben poco di più potrebbe desiderarsi allo stato attuale di questo ramo dell'algebra.

Lo stesso non sembra potersi dire della teoria generale, per la quale lo studioso non può oggidì ancora esimersi dalla consultazione, non sempre agevole, delle memorie originali. A colmare, almeno in parte, questa lacuna è inteso il presente volume, che contiene le lezioni universitarie da me date su quest' argomento e da me stesso redatte in forma poco dissimile da quella tenuta nell'esposizione orale.

Chi vorrà leggere queste pagine, non si farà dunque meraviglia se, in conformità dello scopo che mi sono proposto, non mi sono in esse quasi mai occupato, tranne che in via di esemplificazione, di alcun particolare sistema di forme algebriche. Soltanto ho stimato utile di raccogliere in una breve appendice quella parte della teoria generale delle forme binarie che può bastare a mettere lo studioso in grado di poter leggere con facilità, anche saltuariamente, ed utilizzare gli eccellenti trattati sulle forme binarie cui ho sopra accennato.

Credo inutile aggiungere schiarimenti circa la ripartizione della materia da me svolta, potendo bastare a quest'oggetto una semplice occhiata all'indice dei capitoli e dei paragrafi.

Soltanto tengo ad esprimere qui i miei ringraziamenti al D.r Guglielmo Giordano per l'assistenza da lui prestatami nella revisione del manoscritto e nella correzione delle bozze.

Napoli, Luglio 1901.

INDICE

CAPITOLO I.

Introduzione alla teoria generale delle forme algebriche.

CAPITOLO II.

Processi invariantivi — Equazioni differenziali dei covarianti — Rappresentazione delle forme invariantive.

APPENDICE

SULLE FORME ALGEBRICHE BINARIE

LEZIONI SULLA TEORIA DELLE FORME ALGEBRICHE

CAPITOLO I

Introduzione alla teoria generale delle forme algebriche

§ I. *Trasformazione lineare nel campo binario.*

1. Mediante le formole di trasformazione (sostituzioni li-neari):

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' \qquad (1)$$
$$x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2'$$

dove $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2$ sono quattro coefficienti arbitrarii, tali però che il determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ (*il modulo* della trasformazione) sia diverso da zero, ad ogni coppia di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle variabili x_1 ed x_2, corrisponde un'unica coppia di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle x_1', x_2' e reciprocamente. La coppia $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ va esclusa una volta per sempre, poichè, come si deduce facilmente dalla (1) essa si cambia sempre in $x_1' = 0$, $x_2' = 0$: si trasforma cioè in se stessa. Esclusa questa coppia per la quale il rapporto $x_1 : x_2$ non avrebbe un significato ben determinato, si può dire, evidentemente, che le (1) fanno corrispondere ad ogni valore $x = x_1 : x_2$ del rapporto $x_1 : x_2$ un unico valore $x' = x_1' : x_2'$ e reciprocamente.

Si noti però che, a differenza delle x_1, x_2, le quali non potranno prendere, come si è detto, che valori finiti, la x può assumere anche il valore ∞ (caratterizzato da $x_2 = 0$, come il valore 0 è caratterizzato da $x_1 = 0$).

2. Supponiamo che, mediante le (1) le coppie x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; ..... si trasformino rispettivamente nelle x_1', x_2'; y_1', y_2'; z_1', z_2'; ...., cioè che sia:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2', & z_1 &= \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2', \; \ldots\ldots, \\ y_2 &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2', & z_2 &= \beta_1 z_1' + \beta_2 z_2', \; \ldots\ldots \end{aligned} \quad ; \qquad (2)$$

diremo allora che le coppie x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; . . . si trasformano *cogredientemente* nelle x_1', x_2'; y_1', y_2'; z_1', z_2'; ...., cioè mediante la stessa sostituzione lineare. Si dice anche che i sistemi x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; . . . etc. sono *cogredienti*.

Se i due sistemi x_1, x_2; y_1, y_2 sono cogredienti, la nota regola del prodotto di due determinanti dà:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad ;$$

ovvero, con notazione abbreviata(*):

$$(xy) = (\alpha\beta)(x'y'). \qquad (3)$$

(*) Nella teoria delle forme algebriche si fa uso frequentemente delle notazioni abbreviate:

$$(xy) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}, \quad (xyz) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad , \; \ldots\ldots$$

3. Si abbiano ora tre sistemi di variabili binarie cogredienti: x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; si avranno, essendo x_1', x_2'; y_1', y_2'; z_1', z_2' le variabili trasformate, le relazioni:

$$(xy) = (\alpha\beta)(x'y'), \quad (yz) = (\alpha\beta)(y'z'), \quad (zx) = (\alpha\beta)(z'x'), \qquad (3')$$

dalle quali si deduce:

$$\frac{(xz)}{(yz)} = \frac{(x'z')}{(y'z')} \qquad \frac{(xy)}{(xz)} = \frac{(x'y')}{(x'z')} \qquad (3'')$$

Ciò si può esprimere dicendo che: colle variabili dei tre sistemi cogredienti x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 si possono comporre due *invarianti assoluti*, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)} \quad \text{ed} \quad \frac{(xy)}{(xz)}. \qquad (4)$$

In generale diremo che una funzione gode di proprietà *invariantiva*, quando costruita la funzione stessa una volta colle variabili primitive, ed un'altra volta colle trasformate (mercè una certa sostituzione lineare), la funzione costruita colle variabili primitive è eguale a quella costruita colle trasformate, moltiplicata per una certa funzione dei soli coefficienti della trasformazione. La proprietà invariantiva sarà *assoluta*, quando la funzione razionale si riduce all'unità. Così, p.es., i primi membri di (3") sono degli *invarianti assoluti*. Ritorneremo, del resto, su questo importante concetto.

Ogni funzione degli invarianti assoluti (4) è evidentemente, del pari, un invariante assoluto; e, reciprocamente, si potrebbe dimostrare, come si vedrà a suo tempo, che ogni invariante assoluto, costruito colle suddette sei variabili, è una funzione degli invarianti assoluti (4).

Si dovrebbe, pertanto, rigorosamente dire che:

tre sistemi di variabili binarie cogredienti ammettono due soli invarianti assoluti fra loro indipendenti; ma nella pratica la parola *indipendenti* si sottintende.

4\. Se delle x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; .... consideriamo i soli rapporti $x = x_1 : x_2$; $y = y_1 : y_2$; $z = z_1 : z_2$; .... secondochè si è già accennato all'art. 1, diremo che essi rappresentano altrettanti *punti* (*del campo binario* o *di prima specie*) che indicheremo semplicemente con x, y, z, etc. Geometricamente si potrà infatti rappresentare il punto x mediante quel punto di una retta indefinita che dista da un'origine fissa O della quantità $\frac{x_1}{x_2}$, beninteso in senso algebrico, cioè prendendo il punto x da una parte di O, o dalla parte opposta, secondochè $\frac{x_1}{x_2}$ sia positivo o negativo.

Nelle applicazioni geometriche della teoria delle forme algebriche hanno pertanto speciale importanza quelle funzioni delle x_1, x_2; y_1, y_2; .... che dipendono soltanto dai rapporti $x_1 : x_2$; $y_1 : y_2$; .... Noi le chiameremo, per semplicità, *funzioni dei punti* x, y, etc. Gl'invarianti assoluti (4) sono tali nel senso *formale*, ma non sono, come si suol dire, invarianti assoluti geometrici, perchè *non sono funzioni di punti*.

5\. Se consideriamo quattro sistemi di variabili binarie e cogredienti, si possono costruire quattro invarianti assoluti *formali*, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)}\ ,\ \frac{(xz)}{(xy)}\ ;\quad \frac{(xt)}{(yt)}\ ,\ \frac{(xt)}{(zt)}\ ,$$

mediante i quali si può facilmente comporre un invariante *assoluto geometrico*, cioè:

$$\frac{(xz)}{(yz)} : \frac{(xt)}{(yt)} \tag{5}$$

che si chiama il *rapporto anarmonico* dei quattro punti x, y, z, t, e s'indicherà brevemente con $[xyzt]$.

[illegible] dunque che se i quattro punti x, y, z, t si trasformano cogredientemente nei quattro punti x', y', z', t', deve essere:

$$[xyzt] = [x'y'z't'] \tag{6}$$

La proposizione reciproca è vera semprechè *i quattro punti* x, y, z, t (*e quindi necessariamente anche i quattro* x', y', z', t') *siano fra loro distinti*.

Questa restrizione è necessaria, poichè p. es. la (6) è soddisfatta per:

$$x = y\ ,\quad z \neq t\ ;\quad x' = y'\ ,\quad z' = t'\ ;$$

nel mentre che la quaterna $x = y$, $z = t$ non potrebbe evidentemente trasformarsi nella quaterna $x' = y'$, $z' = t'$, essendo $z \neq t$.

6\. Poichè x_1, x_2 (e così y_1, y_2) assumono soltanto *valori fi-*

niti e non entrambi nulli, l'eguaglianza

$$(x\,y) = 0$$

equivale all'altra $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$, cioè esprime che il punto x coincide col punto y. Si vede quindi facilmente, esaminando l'espressione (5), che il simbolo del rapporto anarmonico $[x\,y\,z\,t]$ ha un significato ben determinato (nullo, finito od infinito) semprechè *tre dei punti* x, y, z, t non coincidano in un solo.

Escluso questo caso, il simbolo $[x\,y\,z\,t]$ non può prendere, come è noto, permutando comunque le lettere x, y, z, t, che sei valori determinati:

$$\begin{aligned} [x\,y\,z\,t] &= \lambda_1 , & [y\,x\,z\,t] &= \frac{1}{\lambda_1} \\ [z\,x\,y\,t] &= \lambda_2 , & [x\,z\,y\,t] &= \frac{1}{\lambda_2} \\ [y\,z\,x\,t] &= \lambda_3 , & [z\,y\,x\,t] &= \frac{1}{\lambda_3} \end{aligned} \tag{7}$$

che sono funzioni di un solo fra essi in virtù delle relazioni:

$$\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_2} = 1 , \quad \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_3} = 1 , \quad \lambda_3 + \frac{1}{\lambda_1} = 1 . \tag{8}$$

7. Se due dei tre valori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono eguali, segue dalle (8) che essi sono tutti eguali fra di loro, e precisamente che:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\varepsilon ,$$

essendo ε una radice cubica complessa dell'unità. Quanto agli altri tre valori si avrà poi:

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_3} = -\varepsilon^2 .$$

In questo caso il rapporto si dice *equiarmonico*.

E' altresì importante il caso in cui uno dei sei rapporti (7) p. es. il primo sia *armonico*, cioè abbia il valore -1. Si ha allora:

$$\lambda_1 = -1 , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} , \quad \lambda_3 = 2$$

$$\frac{1}{\lambda_1} = -1 , \quad \frac{1}{\lambda_2} = 2 , \quad \frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{2}$$

Notiamo finalmente il caso in cui due dei quattro punti x, y, z, t coincidono, p. es. $x = y$. Si ha allora:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_3} = 0 , \quad \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_2} = 1 , \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} = \infty ;$$

e, reciprocamente, se uno dei rapporti anarmonici è zero (ovvero 1 od ∞), la quaterna x, y, z, t avrà due punti coincidenti.

---

§ II. *Trasformazione lineare nel campo ternario, quaternario, etc.*

8. Mediante la sostituzione lineare (ternaria)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \alpha_3 x_3' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' \\ x_3 &= \gamma_1 x_1' + \gamma_2 x_2' + \gamma_3 x_3' \end{aligned} \tag{1}$$

in cui il determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \equiv (\alpha\beta\gamma) , \tag{2}$$

che si chiama *modulo* della sostituzione (1), è diverso da zero, ad ogni terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle x_1, x_2, x_3', corrisponde un' unica terna di valori (tutti finiti e non tutti nulli) delle x_1', x_2', x_3', e reciprocamente. Anche qui si considereranno soltanto valori finiti delle variabili, e tra questi si escluderà, una volta per sempre, la terna $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, che è sempre trasformata in se stessa.

Se della terna x_1, x_2, x_3 si considerino soltanto i rapporti $x_1 : x_2 : x_3$, diremo che la terna stessa rappresenta *un punto ternario*, o *di seconda specie*, che indicheremo brevemente con x; cosicchè le terne x_1, x_2, x_3 e $\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3$ rappresenteranno lo stesso punto ternario. E' chiaro che, in virtù delle (1), ad ogni punto ternario x corrisponderà un unico punto ternario x', e reciprocamente.

Se una funzione $f(x_1, x_2, x_3 ; y_1, y_2, y_3 ; \ldots)$ dipende soltanto dai rapporti $x_1 : x_2 : x_3$; $y_1 : y_2 : y_3$; .... diremo brevemente che essa è *funzione dei punti ternarii* $x, y, \ldots$

9. I punti ternarii si rappresentano geometricamente in un piano come in geometria analitica. Così p. es. si potrà convenire di rappresentare il punto ternario analitico $x_1 : x_2 : x_3$ mediante quel punto del piano che rispetto a due assi ortogonali fissi ha per ascissa

$\frac{x_1}{x_3}$ e per ordinata $\frac{x_2}{x_3}$.

Secondo questa interpretazione geometrica le uguaglianze:

$$x_1 = 0 , x_2 = 0 , x_3 = 0 ,$$

rappresentano rispettivamente l'asse delle x_2, l'asse delle x_1 e *la retta all'infinito*. I tre sistemi:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

rappresentano rispettivamente l'origine delle coordinate, il punto all'infinito dell'asse delle x_1 ed il punto all'infinito dell'asse delle x_2. Il sistema formato dalle tre eguaglianze: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ viene escluso *a priori*, come già si è notato.

10. Dalle (1) e dalla regola pel prodotto di due determinanti di terz'ordine segue:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ z_1' & z_2' & z_3' \end{vmatrix}$$

o più brevemente, secondo la notazione (2):

$$(x\,y\,z) = (\alpha\beta\gamma)(x'y'z'), \qquad (3)$$

semprechè i sistemi (o come anche si dicono le *serie*) di variabili: x, y, z siano *cogredienti*, cioè vengano sottoposti alla stessa trasformazione lineare (1).

Se aggiungiamo una quarta serie t_1, t_2, t_3 di variabili, potremo comporre, in virtù delle (3), analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo precedente, degli invarianti assoluti ternarii. E precisamente possiamo formare i tre invarianti assoluti:

$$\frac{(xyz)}{(yzt)}\ ,\qquad \frac{(xzt)}{(yzt)}\ ,\qquad \frac{(xty)}{(yzt)} \qquad (4)$$

che sono fra loro *indipendenti*, come è agevole riconoscere (attribuendo p.es. ad y, z, t dei valori qualsivogliano, purchè tali da dare $(yzt) \neq 0$ e determinando quindi le x_1, x_2, x_3 in modo che i numeratori delle tre funzioni (4) assumano valori prefissati a piacere).

11. Volendo però avere degli *invarianti* **assoluti** *geometrici*, cioè degli invarianti assoluti che siano funzioni di punti, occorrono almeno cinque serie x, y, z, t, v. Mediante queste cinque serie possiamo infatti costruire i due invarianti assoluti geometrici fra loro indipendenti:

$$\frac{(xzt)}{(yzt)} : \frac{(xzv)}{(yzv)}\ ,\qquad \frac{(xzt)}{(yzt)} : \frac{(xtv)}{(ytv)} \qquad (5)$$

Quindi: *affinchè cinque punti x, y, z, t, v siano trasformabili cogredientemente in altri cinque punti x', y', z', t', v' è necessario che siano soddisfatte le condizioni:*

$$\frac{(xzt)(yzv)}{(yzt)(xzv)} = \frac{(x'z't')(y'z'v')}{(y'z't')(x'z'v')}\ ,\qquad \frac{(xzt)(ytv)}{(yzt)(xtv)} = \frac{(x'z't')(y't'v')}{(y'z't')(x't'v')} \qquad (6)$$

12. Risultati analoghi a quelli ottenuti nel paragrafo precedente ed in questo si avranno per il campo *quaternario* (colla serie fondamentale x_1, x_2, x_3, x_4 e le sue cogredienti), per il *quinario*, etc. Così ad esempio se sei punti x, y, z, t, u, v di un campo quaternario $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ si possono trasformare, mediante una stessa trasformazione lineare del campo, rispettivamente nei sei punti quaternarii x', y', z', t', u', v', dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$\frac{(xztu)}{(yztu)} : \frac{(xztv)}{(yztv)} = \frac{(x'z't'u')}{(y'z't'u')} : \frac{(x'z't'v')}{(y'z't'v')} \qquad (7)$$

con altre analoghe. E' facile interpretare geometricamente le (6) e le (7) mediante le aree dei triangoli che hanno per vertici tre punti x, y, z (pel campo ternario), ovvero i volumi de' tetraedri che hanno per vertici quattro punti x, y, z, t (pel campo quaternario).

---

§. III. *Operazioni di polare - Simboli operativi.*

13. Se da una funzione f delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$; .... si deduce la funzione:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (1)$$

si dice che si è eseguita sulla f un'*operazione di polare*. La nuova funzione (1) che, oltre alle variabili $x_1, \dots x_n$, conterrà, se già non le conteneva prima, anche le variabili $y_1, \dots, y_n$, si dice *prima polare di* f rispetto alla serie $y_1, \dots, y_n$ (nuove variabili da considerarsi come affatto indipendenti dalle $x_1, \dots, x_n$). Noi diremo che la nuova funzione (1) si è ottenuta da f applicando ad f il simbolo operativo:

$$y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

che indicheremo brevemente con $\mathcal{D}_{xy}$; cosicché potremo scrivere:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = \mathcal{D}_{xy} f$$

Chiameremo $\mathcal{D}_{xy}$ un'*operazione di polare elementare*. Ad evitare equivoci, converrà però soggiungere se si tratti di un campo unitario, binario, ternario, etc. A seconda di questi diversi casi il significato di $\mathcal{D}_{xy}$ sarà dato da

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

ovvero da:

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

ovvero da

$$\mathcal{D}_{xy} = y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

etc.

14. Se il simbolo operativo $\mathcal{D}_{xy}$ si applichi due volte di seguito ad f, si otterrà la così detta *seconda polare di* f, rappresentabile con $\mathcal{D}_{xy} \cdot \mathcal{D}_{xy} f$, o, più brevemente con $\mathcal{D}^2_{xy} f$. Similmente $\mathcal{D}^3_{xy} f$ ci rappresenterà la *terza polare di* f ottenuta da f applicando tre volte consecutivamente ad f l'operatore elementare $\mathcal{D}_{xy}$; e così di seguito. E' chiaro che la prima polare della prima polare di f coincide colla seconda polare di f, e così la prima polare della seconda polare colla terza polare di f, e così di seguito.

15. L'operazione di polare è d'importanza fondamentale in Analisi non meno che in Geometria (dove ha ricevuto il suo nome). Essa si presenta naturalmente in Analisi nello sviluppo di Taylor:

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$

$$+ y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n} +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left[y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2 y_1 y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \dots\right] +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left[y_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} + 3 y_1^2 y_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \dots\right] +$$

$$+ \dots \dots \dots ;$$

che si può anche scrivere simbolicamente:

$$f(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + y_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f + \dots$$

$$= f + \mathcal{D}_{xy} f + \frac{1}{1 \cdot 2} \mathcal{D}^2_{xy} f + \dots$$

Ancora più semplicemente si potrà scrivere:

$$f(x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = \left[1 + \frac{1}{\underline{|1}} \mathcal{D}_{xy} + \frac{1}{\underline{|2}} \mathcal{D}^2_{xy} + \dots\right] f(x_1, \dots, x_n) = e^{\mathcal{D}_{xy}} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

16. L'operatore $\mathcal{D}_{xy}$ applicato a delle funzioni qualsivogliano $f, \varphi, \ldots$ delle $x, y, \ldots$ dà luogo a delle forme affatto simili a quelle che dà il Calcolo infinitesimale per il semplice simbolo operativo $\frac{\partial}{\partial x}$. Cioè:

$$\mathcal{D}_{xy}[f+\varphi+\psi+\ldots]=\mathcal{D}_{xy}f+\mathcal{D}_{xy}\varphi+\mathcal{D}_{xy}\psi+\ldots\ldots,$$

$$\mathcal{D}_{xy}(f\cdot\varphi)=[\mathcal{D}_{xy}f]\cdot\varphi+[\mathcal{D}_{xy}\varphi]\cdot f.$$

$$\mathcal{D}_{xy}(f\cdot\varphi\cdot\psi)=[\mathcal{D}_{xy}f]\cdot\varphi\cdot\psi+[\mathcal{D}_{xy}\varphi]\cdot f\cdot\psi+[\mathcal{D}_{xy}\psi]\cdot\varphi\cdot f.$$

$$\mathcal{D}_{xy}\frac{f}{\varphi}=\frac{[\mathcal{D}_{xy}f]\varphi-[\mathcal{D}_{xy}\varphi]f}{\varphi^2}.$$

$$\mathcal{D}_{xy}F(f,\varphi,\psi,\ldots)=\frac{\partial F}{\partial f}\mathcal{D}_{xy}f+\frac{\partial F}{\partial\varphi}\mathcal{D}_{xy}\varphi+\frac{\partial F}{\partial\psi}\mathcal{D}_{xy}\psi+\ldots$$

17. Queste stesse proprietà competono anche al simbolo $\mathcal{D}_{xx}$ che si definirà analogamente

$$\mathcal{D}_{xx}\equiv x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

e si chiamerà operazione di polare elementare *impropria*. A questo simbolo si collega, come si sa dal Calcolo infinitesimale, una proprietà caratteristica delle funzioni omogenee di grado μ (μ potendo significare qualsiasi numero reale) delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x$; cioè delle funzioni che soddisfano alla condizione:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_3)=t^{\mu}f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

essendo t un parametro variabile indipendente dalle x. Questa proprietà, conosciuta sotto il nome di teorema di Eulero, si può esprimere, mediante il simbolo $\mathcal{D}_{xx}$, brevemente così:

$$\mathcal{D}_{xx}f=\mu f. \tag{3}$$

Essa è caratteristica per le funzioni omogenee di grado μ; poiché, reciprocamente, ogni funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ soddisfacente alla (3) soddisfa anche alla (2).

18. Nel corso di queste lezioni, noi ci occuperemo specialmente di funzioni razionali ed intere:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \ldots)\equiv f(x; y; \ldots)$$

di una o più serie di variabili n^{rie}:

$$x\equiv x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y\equiv y_1, y_2, \ldots, y_n;\ \ldots\ldots,$$

omogenee rispetto alle variabili di ogni singola serie. Funzioni siffatte si denominano *forme algebriche* n^{rie} relative *alla serie* n^{ria} $x_1, \ldots, x_n$, o *a più serie* n^{rie} $x, y, \ldots$. Quando importi esprimere che la forma $f(x; y; \ldots)$ è omogenea e del grado μ nelle $x_1, \ldots, x_n$; omogenea e del grado ν nelle $y_1, \ldots y_n$ ecc. in luogo di scrivere semplicemente $f(x, y, z, \ldots)$ scriveremo: $f(\overset{\mu}{x}, \overset{\nu}{y}, \overset{\rho}{z}, \ldots)$.

Quando si tratta di forme algebriche, i gradi μ, ν prendono piuttosto il nome di *ordini* della forma.

Come casi particolari più semplici delle forme n^{rie} con una o più serie di variabili si hanno le forme *binarie*, *ternarie*, *quaternarie*, etc, secondoché le variabili che compongono ogni serie sono due, tre, quattro, ecc.

Dal teorema di Eulero (V. art. prec.) segue manifestamente che: « affinché una forma algebrica n^{ria} sia dello stesso ordine rispetto a ciascuna delle serie n^{rie}

$x, y, z, \dots$ in essa contenute, è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xx} f = \mathcal{D}_{yy} f = \mathcal{D}_{zz} f = \dots \text{»}$$

19. Con n serie n^{rie} indipendenti:

$$\begin{array}{l} x \equiv x_1 \,,\; x_2 \,, \dots, x_n \\ y \equiv y_1 \,,\; y_2 \,, \dots, y_n \\ z \equiv z_1 \,,\; z_2 \,, \dots, z_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ u \equiv u_1 \,,\; u_2 \,, \dots, u_n \end{array} \qquad (4)$$

si possono formare n^2 operatori elementari:

$$\begin{array}{l} \mathcal{D}_{xx} \,, \mathcal{D}_{xy} \,, \mathcal{D}_{xz} \,, \dots, \mathcal{D}_{xu} \\ \mathcal{D}_{yx} \,, \mathcal{D}_{yy} \,, \mathcal{D}_{yz} \,, \dots \mathcal{D}_{yu} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathcal{D}_{ux} \,, \mathcal{D}_{uy} \,, \mathcal{D}_{uz} \,, \dots \mathcal{D}_{uu} \end{array} \qquad (5)$$

i quali sono fra loro *linearmente indipendenti*. Con ciò si vuole intendere che, indicati per brevità gli n^2 operatori (5) con $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \dots \mathcal{D}_{n^2}$, non esistono delle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_{n^2}$ delle n^2 variabili $x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n$ etc. tali da aversi identicamente:

$$\varphi_1 \mathcal{D}_1 + \varphi_2 \mathcal{D}_2 + \dots + \varphi_{n^2} \mathcal{D}_{n^2} = 0,$$

qualunque sia cioè la funzione $F(x; y; \dots)$ cui si applichi l'operazione espressa dal primo membro.

Infatti, poichè non può aversi, qualunque sia la

F, alcuna relazione fra le derivate $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial z_1}, \dots$, ammesso che si avesse, qualunque sia F:

$$\varphi_1 \mathcal{D}_1 F + \varphi_2 \mathcal{D}_2 F + \dots + \varphi_{n^2} \mathcal{D}_{n^2} F = 0,$$

dovrebbero annullarsi separatamente le parti del primo membro che si riferiscono agli operatori contenuti in una stessa linea orizzontale del quadro (5). Ma se fosse p. es.

$$\mathcal{D}_{xx} + \varphi_2 \mathcal{D}_{xy} + \varphi_3 \mathcal{D}_{xz} + \dots + \varphi_n \mathcal{D}_{xu} = 0,$$

dovrebbero verificarsi le identità:

$$\begin{array}{l} x_1 \varphi_1 + y_1 \varphi_2 + \dots + u_1 \varphi_n = 0 \\ x_2 \varphi_1 + y_2 \varphi_2 + \dots + u_2 \varphi_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n \varphi_1 + y_n \varphi_2 + \dots + u_n \varphi_n = 0 \end{array}$$

il che è impossibile a meno che non sia identicamente:

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \dots \varphi_n = 0$$

giacchè il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dots & u_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & \dots & u_n \end{vmatrix}$$

non è nullo identicamente

20. Fra gli operatori (5) sussistono però delle relazioni di grado superiore al primo. Si hanno infatti le identità quadratiche dei seguenti otto tipi, ciascuna delle quali indicheremo con un numero romano:

I	$\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{zu}-\mathcal{D}_{zu}\mathcal{D}_{xy}=0$	I'	$\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy}-\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}=\mathcal{D}_{xz}$.
II	$\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xy}-\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}=0$	II'	$\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{xy}=\mathcal{D}_{xy}$
III	$\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yx}-\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zx}=0$	III'	$\mathcal{D}_{yy}\mathcal{D}_{xy}-\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yy}=\mathcal{D}_{xy}$
IV	$\mathcal{D}_{yy}\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy}=0$		

I'' $\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} \quad \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}=\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{yy}$,

delle quali alcune sono evidenti, nel mentre che le altre si possono verificare senza difficoltà.

---

§. IV. *Equazioni differenziali che caratterizzano le parentesi $(x\,y)$, $(x\,y\,z)$, etc.*

21. La *parentesi* n^{ria} $(x\,y\,z\ldots.)$ analoga a quelle già incontrate nel campo binario e ternario, gode della proprietà di essere annullata identicamente da ogni operazione $\mathcal{D}pq$, in cui p e q sono due serie *distinte* di variabili, scelte comunque fra quelle che figurano nella parentesi stessa. Consideriamo, per fissare le idee, la parentesi quaternaria:

$$V \equiv (x\,y\,z\,t) = \Sigma \pm x_1\, y_2\, z_3\, t_4 .$$

Essa è annullata da tutte le operazioni elementari *proprie* che si possono formare colle serie x, y, z, t; cioè

da tutte le operazioni del quadro:

$$\begin{matrix} \mathcal{D}_{xx}, & \mathcal{D}_{xy}, & \mathcal{D}_{xz}, & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{yx}, & \mathcal{D}_{yy}, & \mathcal{D}_{yz}, & \mathcal{D}_{yt} \\ \mathcal{D}_{zx}, & \mathcal{D}_{zy}, & \mathcal{D}_{zz}, & \mathcal{D}_{zt} \\ \mathcal{D}_{tx}, & \mathcal{D}_{ty}, & \mathcal{D}_{tz}, & \mathcal{D}_{tt} \end{matrix} \qquad (1)$$

eccettuate le $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \mathcal{D}_{zz}, \mathcal{D}_{tt}$, per le quali si ha (art. 14)

$$\mathcal{D}_{xx}V = \mathcal{D}_{yy}V = \mathcal{D}_{zz}V = \mathcal{D}_{tt}V = V. \qquad (2)$$

Si ha, infatti, p. es.

$$\mathcal{D}_{yz}V = z_1\frac{\partial V}{\partial y_1} + \cdots\cdots + z_n\frac{\partial V}{\partial y_n} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & z_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & z_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & z_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = 0$$

22. Queste proprietà caratterizzano perfettamente la parentesi $(x\,y\,z\,t)$. E precisamente: se $\varphi(x, y, z, t)$ è una forma quaternaria soddisfacente alle equazioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{xx}\varphi = \varphi^{(*)}, \quad \begin{matrix} \mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{xt}\varphi = 0 \\ \mathcal{D}_{yx}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{yz}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{yt}\varphi = 0 \\ \mathcal{D}_{zx}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{zy}\varphi = 0, & \mathcal{D}_{zt}\varphi = 0 \end{matrix} \qquad (3)$$

(*) E quindi anche alle altre equazioni differenziali $\mathcal{D}_{yy}\varphi=\varphi$, etc., poichè è (art. 20, I"): $\quad \mathcal{D}_{yy}=\mathcal{D}_{xx}+\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}-\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$.

essa coincide, a meno di un fattore costante, con $(xyzt)$.

Più generalmente: se $\varphi(x, y, z, t)$ è una forma algebrica quaternaria soddisfacente alle condizioni:

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0 \qquad (p, q = x, y, z, \; p \neq q) \tag{4}$$

e di ordine m in ciascuna delle serie, deve essere identicamente:

$$\varphi = A . (xyzt)^m,$$

A essendo una costante. E' poi senz'altro evidente che, reciprocamente, la potenza $(xyzt)^m$ soddisfa alle (4), poichè p. es. (art. 16).

$$\mathcal{D}_{xy}V^m = mV^{m-1}[\mathcal{D}_{xy}V] = 0.$$

23. Questo importante teorema si potrebbe stabilire senza uscire dal campo delle forme algebriche. Noi, per ora, preferiamo dedurlo da un teorema di Jacobi sui sistemi di equazioni differenziali lineari, del quale è stato già fatto uso, con successo, nella teoria degl'invarianti.(*)

(*) Si vegga a questo proposito, l'Introduzione del *Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degl'Invarianti nell'ultimo quarto di secolo* del prof. F. Meyer (Traduz. dal tedesco di G. Vivanti, Napoli, Pellerano, 1900) opera che il lettore potrà consultare anche in seguito, con grande vantaggio, per quanto riguarda la storia delle teorie, di cui ci occuperemo in queste lezioni.

Teorema di Jacobi. Sia il sistema di m equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee, con l variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_l$:

$$(\alpha) \qquad \begin{aligned} X_1'\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2'\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_l'\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} &= 0 \\ X_1''\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2''\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_l''\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_1^m\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + X_2^m\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \cdots + X_l^m\frac{\partial\varphi}{\partial x_l} &= 0 \end{aligned}$$

(dove $X_1', \ldots, X_l'''$ sono delle funzioni conosciute di tutte le variabili), le quali siano fra loro indipendenti, tali cioè che gli m operatori lineari

$$X^{(i)} = X_1^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_l^{(i)}\frac{\partial}{\partial x_l}$$

siano fra loro linearmente indipendenti (art. 19). Se gli operatori lineari $X^{(i)}$ soddisfano alle identità:

$$X^{(h)}X^{(k)} - X^{(k)}X^{(h)} = \alpha_1^{h,k}X^{(1)} + \alpha_2^{h,k}X^{(2)} + \cdots + \alpha_m^{h,k}X^{(m)}$$

$$h, k = 1, 2, \ldots m$$

essendo le $\alpha_j^{h,k}$ funzioni opportunamente scelte delle $x_1, \ldots, x_l$, il sistema (α) ammette precisamente $l-m$ integrali distinti; esistono cioè $l-m$ (differenza tra il numero delle variabili e quello delle equazioni) funzioni φ di tutte le variabili; fra loro indipendenti, soddisfacenti al sistema, ed ogni altra funzione soddisfacente al sistema non è che una funzione di esse; e reciprocamente.(*)

24- Per applicare questo teorema al nostro caso, noi considereremo fra le l variabili delle serie x, y, z, t ($l = n^2$ nel caso n^{rio}), le m equazioni ($m = n^2-1$ nel caso n^{rio}) alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi=0\,,\ \mathcal{D}_{yx}\varphi=0\,,\ \mathcal{D}_{xz}\varphi=0,\ldots,\mathcal{D}_{zt}\varphi=0$$

$$(5)\qquad [\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{yy}]\varphi=0,\ [\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{zz}]\varphi=0,\ \ [\mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{tt}]\varphi=0,$$

che, per quanto si è già detto all'art. 19 sono fra loro indipendenti nel senso già spiegato. Poichè gli operatori:

$$\mathcal{D}_{xy},\mathcal{D}_{yx},\ldots,\mathcal{D}_{tz}, \text{ e } \mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{yy},\ \mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{zz},\ \mathcal{D}_{xx}-\mathcal{D}_{tt},$$

che definiscono il sistema soddisfano, come segue facilmente dalle relazioni quadratiche riportate all'art. 20, alle condizioni rappresentate dalle (β), e poichè $l-m=1$, il sistema (5) ammetterà un unico integrale distinto.

Conchiudiamo dunque, poichè la funzione $\varphi=(xyzt)$ soddisfa evidentemente al sistema (5), che *ogni funzione φ delle x, y, z, t soddisfacente al sistema (5) è necessariamente una funzione della parentesi $(xyzt)$*. Reciprocamente, *ogni funzione $(xyzt)$ soddisfa evidentemente al sistema (5)*.

Se dunque imponiamo, inoltre, alla funzione di

(*) Per la dimostrazione di questo teorema vedi p.es. Jordan. Traité d'Analyse. T. III.

$(xyzt)$ la condizione di essere una forma algebrica di ordine m in ogni serie, avremo appunto, a meno di un coefficiente costante: $\varphi=(xyzt)^m$. c.d.d.

25- Il sistema delle equazioni che caratterizzano la potenza della parentesi n^{ria} $(xyzt\ldots uv)$ colle n serie $x, y, z, \ldots, u, v$, si può notevolmente semplificare si ha, in fatti, il seguente teorema(*): *affinchè una forma algebrica con n serie di variabili n^{rie}, $\varphi(x,y,z,\ldots,u,v)$ sia una potenza della parentesi $(xyzt\ldots uv)$ moltiplicata per una forma colle sole serie $y, z, \ldots, v$, è necessario e sufficiente che essa soddisfi alle $n-1$ equazioni alle derivate parziali:*

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi=0,\ \mathcal{D}_{xz}\varphi=0,\ldots,\mathcal{D}_{xu}\varphi=0,\ \mathcal{D}_{xv}\varphi=0. \qquad (6)$$

Di qui segue, come corollario immediato, che: *se la forma algebrica $\varphi(x,y,\ldots,v)$ soddisfa alle condizioni (6) ed è dello stesso ordine m in ciascuna delle serie $x,\ldots,v$, essa non è altro, fatta astrazione da un coefficiente costante, che la potenza m^{ma} della parentesi $(xyz\ldots v)$.*

26- Esaminando, in fatti, il sist: (6), si riconosce che esso soddisfa a tutte le condizioni richieste per l'applica-

(*) Per la dimostrazione puramente algebrica di questo teorema cfr. Capelli. Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche (Memoria dei Lincei 1882, art. 64).

zione del teorema di Jacobi (art. 23); giacchè gli $n-1$ operatori $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \ldots \mathcal{D}_{xv}$ sono linearmente indipendenti e fra loro permutabili, due a due. In questo caso il numero delle variabili è $l = n^2$, il numero delle equazioni è $m = n-1$; dunque il numero $l-m$ degl'integrali distinti del sistema (6) sarà n^2-n+1.

Ma n^2-n+1 funzioni indipendenti φ, soddisfacenti alle (6), si trovano immediatamente; basterà prendere, infatti, per tali funzioni φ le stesse n^2-n variabili

$$y_1, \ldots y_n ; \ldots\ldots ; v_1, \ldots, v_n$$

e inoltre la parentesi $(x\,y\,z \ldots v)$. Pertanto: ogni funzione φ soddisfacente al sistema (6) dev'essere della forma:

$$\varphi = F\,[(x\,y\,z \ldots\ldots v),\ y,\ z, \ldots, v],$$

F essendo il simbolo di una funzione arbitraria.

Imponendo inoltre a φ la condizione di essere una forma algebrica, si avrà evidentemente:

$$\varphi = (x\,y\,z \ldots v)^m\ \psi(y, z, \ldots, v),$$

dove ψ è una forma algebrica contenente le sole serie di variabili $y, z, \ldots, v$. c.d.d.

27. Se degli operatori $\mathcal{D}_{pq}$, con due serie distinte p, q formate con certe serie di variabili

$$x,\ y,\ z, \ldots\ldots, u,\ v, \tag{7}$$

consideriamo soltanto quelli nei quali i due indici si seguono in ordine conforme a quello che essi hanno nella successione (7), è facile riconoscere, mercè le relazioni dell'art. 20 che essi si possono tutti esprimere facilmente per mezzo di $n-1$ fra essi, e precisamente per mezzo di:

$$\mathcal{D}_{xy},\ \mathcal{D}_{yz},\ \mathcal{D}_{zt},\ \ldots\ldots, \mathcal{D}_{uv}. \tag{8}$$

Infatti, se nella successione (7) si presenti prima la p e poi la q, e la q non sia consecutiva alla p, la quale sia invece seguita in (7) da un'altra serie s, si avrà primieramente, per le formole citate, l'identità:

$$\mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{sq}\,\mathcal{D}_{ps} - \mathcal{D}_{ps}\,\mathcal{D}_{sq}, \tag{8}$$

che ci dà appunto l'espressione voluta se s e q siano consecutive in (7). In caso contrario si sostituirà in (8) in luogo di $\mathcal{D}_{sq}$ l'espressione analoga:

$$\mathcal{D}_{sq} = \mathcal{D}_{rq}\,\mathcal{D}_{sr} - \mathcal{D}_{sr}\,\mathcal{D}_{rq}$$

in cui la r, serie consecutiva a s in (7), è ancora più vicina a q, e così di seguito, finchè si otterrà un'espressione della forma voluta.

28. Considerando p. es. le quattro serie x, y, z, t, e quindi le sole operazioni:

$$\begin{matrix} \mathcal{D}_{xy}, & \mathcal{D}_{xz}, & \mathcal{D}_{xt} \\ & \mathcal{D}_{yz}, & \mathcal{D}_{yt} \\ & & \mathcal{D}_{zt} \end{matrix} \tag{9}$$

troviamo, applicando il procedimento indicato, le espressioni seguenti:

$$\mathcal{D}_{xz} = \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}$$
$$\mathcal{D}_{yt} = \mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz} - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt}$$
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{xt} = {} & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt} \\ & + \mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} \\ & - \mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{xy} \\ & - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{zt}\mathcal{D}_{yz},\end{aligned}$$

mediante le quali le operazioni (9) si possono ridurre alle sole tre $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{yz}, \mathcal{D}_{zt}$.

29. Da quanto si è ora dimostrato segue come corollario: *se una funzione $\varphi(x, y, \ldots, v)$ delle n serie di variabili $x, y, \ldots, v$ soddisfa identicamente alle $n-1$ condizioni:*

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, \ \mathcal{D}_{yz}\varphi = 0, \ \mathcal{D}_{zt}\varphi = 0, \ \ldots, \ \mathcal{D}_{uv}\varphi = 0 \qquad (10)$$

essa soddisfa altresì alle equazioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0,$$

ove p è una qualunque delle dette serie e q è una qualunque delle serie che nella successione $x, y, \ldots, v$ si trovano scritte dopo la p.

In particolare se la φ soddisfa al sistema (10), soddisferà anche al sistema:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xz}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xt}\varphi = 0, \ldots, \mathcal{D}_{xu}\varphi = 0, \mathcal{D}_{xv}\varphi = 0;$$

onde si vede che al secondo enunciato dato nell'art. 29 si può anche dare la forma seguente: *affinchè una forma algebrica $f(x, y, \ldots, v)$ colle n serie n^{rie}: $x, y, \ldots, v$ sia la potenza m^{ma} della parentesi $(x\, y \ldots v)$, è necessario e sufficiente che sia dello stesso ordine rispetto*

ad ogni serie, e soddisfi alle $n-1$ equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xy}\varphi = 0, \ \mathcal{D}_{yz}\varphi = 0, \ \ldots, \ \mathcal{D}_{uv}\varphi = 0.$$

30. Chiuderemo questo §° con qualche altra osservazione relativa al sistema di *tutte* le n^2 equazioni differenziali:

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0, \qquad p, q = x, y, z, \ldots, v \qquad (11)$$

colle n serie n^{rie}: $x, y, z, \ldots, v$. Applicando a questo sistema com'è manifestamente lecito, in virtù delle relazioni quadratiche già invocate, il teorema di Jacobi, si troverebbe $l - m = 0$; cioè non esiste alcuna funzione φ, la quale non sia che una semplice costante, che soddisfi al sistema. Se però le n serie $x, y, z, \ldots, v$ in luogo di essere n^{rie} siano serie μ^{rie}, con $\mu > n$, applicando al sistema (11), come è sempre egualmente lecito, il teorema di Jacobi si trova, essendo in questo caso $l = n\mu$, $m = n^2$, che esso *ammetterà $n\mu - n^2 = n(\mu - n)$ integrali distinti.*

Vediamo dunque, considerando per semplicità, il caso $n = 3$, $\mu = 4$, *che esistono tre, e soltanto tre funzioni indipendenti delle tre serie quaternarie:*

$$x \equiv x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4$$
$$y \equiv y_1, \ y_2, \ y_3, \ y_4$$
$$z \equiv z_1, \ z_2, \ z_3, \ z_4$$

soddisfacenti al sistema.

$$\mathcal{D}_{pq}\varphi = 0. \qquad p,q = x,y,z \tag{12}$$

In effetti, colle 12 variabili x, y, z noi possiamo comporre le quattro funzioni U_1, U_2, U_3, U_4:

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}, \quad -U_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \\ \\ U_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_4 \end{vmatrix}, \quad -U_4 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \end{array}\right\} \tag{13}$$

che sono fra loro indipendenti e soddisfano evidentemente a tutte le (12), eccettuate le $\mathcal{D}_{xx}\varphi = 0$, $\mathcal{D}_{yy}\varphi = 0$, $\mathcal{D}_{zz}\varphi = 0$. Se però consideriamo i rapporti:

$$\frac{U_2}{U_1}, \quad \frac{U_3}{U_1}, \quad \frac{U_4}{U_1}, \tag{14}$$

abbiamo ancora tre funzioni indipendenti che soddisfano a *tutte* le (12). Le (14) adunque ci forniscono i tre integrali distinti del sistema (12).

Per riconoscere la indipendenza delle (13), basta riflettere che, indicando con X_1, Y_1, Z_1, X_2 etc gli aggiunti di $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots$ nel determinante $\sum \pm x_1 y_2 z_3$ si hanno le relazioni:

$$X_1 x_4 + Y_1 y_4 + Z_1 z_4 = U_1$$
$$X_2 x_4 + Y_2 y_4 + Z_2 z_4 = U_2$$
$$X_3 x_4 + Y_3 y_4 + Z_3 z_4 = U_3$$

con:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = U_4.$$

---

§ V. *Carattere invariantivo delle forme polari.*

32. Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, z_2, \dots z_n; \dots) \equiv f(\overset{\mu}{x}; \overset{\nu}{y}; \overset{\lambda}{z}; \dots)$ una forma algebrica con una o più serie di variabili n^{rie}: $x, y, z, \dots$. Eseguendo sulle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_n x_n' \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n', \end{aligned} \tag{1}$$

ed eseguendo, nel tempo stesso, sulle serie $y, z, \dots$, ove esse figurino nella f, le trasformazioni *cogredienti* alla (1):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n', & z_1 &= \alpha_1 z_1' + \alpha_2 z_2' + \dots + \alpha_n z_n' \\ y_2 &= \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \dots + \beta_n y_n' & z_2 &= \beta_1 z_1' + \beta_2 z_2' + \dots + \beta_n z_n' \\ &\dots\dots\dots & &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varepsilon_1 y_1' + \varepsilon_2 y_2' + \dots + \varepsilon_n y_n' & z_n &= \varepsilon_1 z_1' + \varepsilon_2 z_2' + \dots + \varepsilon_n z_n' \end{aligned} \tag{2}$$

è chiaro che la f si cangierà in una funzione intera, omogenea e di grado ν nelle $y_1', y_2', \dots, y_n'$ etc; cosicchè potremo scrivere:

$$f(\overset{\mu}{x}; \overset{\nu}{y}; \overset{\rho}{z}; \dots) = F(\overset{\mu}{x'}; \overset{\nu}{y'}; \overset{\rho}{z'}; \dots), \qquad (3)$$

essendo F una forma algebrica i cui coefficienti $A_1, A_2, \dots$, sono composti *linearmente* coi coefficienti $a_1, a_2, \dots$ di f.

Dalle (1) e (2) si ricava, qualunque sia il valore del parametro arbitrario λ:

$$x_1 + \lambda y_1 = \alpha_1(x_1' + \lambda y_1') + \alpha_2(x_2' + \lambda y_2') + \dots + \alpha_n(x_n' + \lambda y_n')$$

$$x_2 + \lambda y_2 = \beta_1(x_1' + \lambda y_1') + \beta_2(x_2' + \lambda y_2') + \dots + \beta_n(x_n' + \lambda y_n')$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n + \lambda y_n = \varepsilon_1(x_1' + \lambda y_1') + \varepsilon_2(x_2' + \lambda y_2') + \dots + \varepsilon_n(x_n' + \lambda y_n'),$$

onde si vede che i valori di $x_1' + \lambda y_1', x_2' + \lambda y_2', \dots, x_n' + \lambda y_n'$, sono legati ai valori $x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, \dots x_n + \lambda y_n$ precisamente da quelle stesse relazioni (1) che legano i valori x' ai valori x, relazioni che congiunte alle (2), sono sufficienti a rendere soddisfatta l'uguaglianza (3). Si avrà dunque, simultaneamente alla (3):

$$f(x_1 + \lambda y_1, \dots, x_n + \lambda y_n; y; z; \dots) = F(x_1' + \lambda y_1', \dots, x_n' + \lambda y_n'; y'; z'; \dots),$$

cioè anche sviluppando (art. 15) col teorema di Taylor:

$$f(x;y;z;\dots) = \frac{\lambda}{\underline{|1}} \mathcal{D}_{x'y'} F(x';y';z';\dots) + \frac{\lambda}{\underline{|2}} \mathcal{D}^2_{x'y'} F(x';y';z';\dots) + \dots$$

Eguagliando nei due membri i coefficienti di una stessa potenza k^{ma} del parametro arbitrario λ, si deduce:

$$\mathcal{D}^k_{xy} f(x;y;z;\dots) = \mathcal{D}^k_{x'y'} F(x';y';z';\dots). \qquad (4)$$

Questa eguaglianza dimostra il carattere *invariantivo* delle forme polari rispetto alla trasformazione lineare (1) del campo n^{rio}, poichè è manifesto che il secondo membro

di (4) è una funzione intera dei coefficienti $A_1, A_2, \dots$, di F e delle $x_1', x_2', \dots, x_n'; y_1', y_2', \dots y_n'; z_1', z_2', \dots, z_n'; \dots$ composta con queste qualità assolutamente nello stesso modo col quale il 1° membro è composto coi corrispondenti coefficienti $a_1, a_2, \dots$ di f e colle corrispondenti $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n; \dots$

In altri termini, se:

$$\mathcal{D}^k_{xy} f(x;y;z;\dots) = \varphi(a_1, a_2, \dots; x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots)$$

si ha anche

$$\mathcal{D}^k_{x'y'} F(x';y';z';\dots) = \varphi(A_1, A_2, \dots; x_1', \dots, x_n'; y_1', \dots y_n'; \dots);$$

cosicchè alle (4) si può dare anche la forma:

$$\varphi(a_1, a_2, \dots; x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = \varphi(A_1, A_2, \dots; x_1', x_2', \dots; y_1', y_2', \dots; \dots),$$

che mette del tutto in evidenza il carattere *invariantivo* della funzione φ rispetto alla trasformazione lineare del campo n^{rio}.

33. Si è supposto nella precedente dimostrazione, per maggior chiarezza, che $f(x;y;z;\dots)$ sia una forma algebrica. La formola (4) sussiste però qualunque sia la funzione f delle $x, y, z, \dots$ intendendosi sempre per $F(x';y';z';\dots)$ ciò che diviene f quando in luogo di $x, y, z, \dots$ si sostituiscano le loro espressioni (2) e (3). Differenziando, in fatti, la relazione (3) nell'ipotesi che alle $x_1, x_2, \dots, x_n$ si diano degl'incrementi infinitesimi arbitrarii $dx_1, dx_2, \dots dx_n$, si deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \frac{\partial F}{\partial x_1'} dx_1' + \frac{\partial F}{\partial x_2'} dx_2' \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n'} dx_n'; \qquad (5)$$

$$f(\overset{\mu}{x};\overset{\nu}{y};\overset{\rho}{z};\ldots)=F(\overset{\mu}{x'};\overset{\nu}{y'};\overset{\rho}{z'};\ldots), \qquad (3)$$

essendo F una forma algebrica i cui coefficienti $A_1, A_2, \ldots$, sono composti *linearmente* coi coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ di f.

Dalle (1) e (2) si ricava, qualunque sia il valore del parametro arbitrario λ:

$$x_1+\lambda y_1=\alpha_1(x'_1+\lambda y'_1)+\alpha_2(x'_2+\lambda y'_2)+\ldots+\alpha_n(x'_n+\lambda y'_n)$$
$$x_2+\lambda y_2=\beta_1(x'_1+\lambda y'_1)+\beta_2(x'_2+\lambda y'_2)+\ldots+\beta_n(x'_n+\lambda y'_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n+\lambda y_n=\varepsilon_1(x'_1+\lambda y'_1)+\varepsilon_2(x'_2+\lambda y'_2)+\ldots+\varepsilon_n(x'_n+\lambda y'_n),$$

onde si vede che i valori di $x'_1+\lambda y'_1,\ x'_2+\lambda y'_2, \ldots, x'_n+\lambda y'_n$, sono legati ai valori $x_1+\lambda y_1,\ x_2+\lambda y_2, \ldots x_n+\lambda y_n$ precisamente da quelle stesse relazioni (1) che legano i valori x' ai valori x, relazioni che congiunte alle (2), sono sufficienti a rendere soddisfatta l'uguaglianza (3). Si avrà dunque, simultaneamente alla (3):

$$f(x_1+\lambda y_1,\ldots,x_n+\lambda y_n;y;z;\ldots)=F(x'_1+\lambda y'_1,\ldots,x'_n+\lambda y'_n;y';z';\ldots),$$

cioè anche sviluppando (art. 15) col teorema di Taylor:

$$f(x;y;z;\ldots)=\frac{\lambda}{\underline{|1}}\mathcal{D}_{x'y'}F(x';y';z';\ldots)+\frac{\lambda}{\underline{|2}}\mathcal{D}^2_{x'y'}F(x';y';z';\ldots)+\ldots\ldots$$

Eguagliando nei due membri i coefficienti di una stessa potenza k^{ma} del parametro arbitrario λ, si deduce:

$$\mathcal{D}^k_{xy}f(x;y;z;\ldots)=\mathcal{D}^k_{x'y'}F(x';y';z';\ldots). \qquad (4)$$

Questa eguaglianza dimostra il carattere *invariantivo* delle forme polari rispetto alla trasformazione lineare (1) del campo n^{rio} poichè è manifesto che il secondo membro di (4) è una funzione intera dei coefficienti $A_1, A_2, \ldots$, di F e delle $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; y'_1, y'_2, \ldots, y'_n; z'_1, z'_2, \ldots, z'_n; \ldots$ composta con queste qualità assolutamente nello stesso modo col quale il 1° membro è composto coi corrispondenti coefficienti $a_1, a_2, \ldots$ di f e colle corrispondenti $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n; \ldots$

In altri termini, se:

$$\mathcal{D}^k_{xy}f(x;y;z;\ldots)=\varphi(a_1,a_2,\ldots;x_1,x_2,\ldots;y_1,y_2,\ldots)$$

si ha anche

$$\mathcal{D}^k_{x'y'}F(x';y';z';\ldots)=\varphi(A_1,A_2,\ldots;x'_1,\ldots,x'_n;y'_1,\ldots,y'_n;\ldots);$$

cosicchè alle (4) si può dare anche la forma:

$$\varphi(a_1,a_2,\ldots;x_1,x_2,\ldots;y_1,y_2,\ldots,y_n,\ldots)=\varphi(A_1,A_2,\ldots;x'_1,x'_2,\ldots;y'_1,y'_2,\ldots;\ldots),$$

che mette del tutto in evidenza il carattere *invariantivo* della funzione φ rispetto alla trasformazione lineare del campo n^{rio}.

33. Si è supposto nella precedente dimostrazione, per maggior chiarezza, che $f(x;y;z;\ldots)$ sia una forma algebrica. La formola (4) sussiste però qualunque sia la funzione f delle $x, y, z, \ldots$ intendendosi sempre per $F(x';y';z';\ldots)$ ciò che diviene f quando in luogo di $x, y, z, \ldots$ si sostituiscano le loro espressioni (2) e (3). Differenziando, infatti, la relazione (3) nell'ipotesi che alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si diano degl'incrementi infinitesimi arbitrarii $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$, si deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n=\frac{\partial F}{\partial x'_1}dx'_1+\frac{\partial F}{\partial x'_2}dx'_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x'_n}dx'_n; \qquad (5)$$

dove le dx' sono legate alle dx dalle relazioni che si ottengono differenziando le (1), cioè:

$$dx_1 = \alpha_1 dx'_1 + \alpha_2 dx'_2 + \dots + \alpha_n dx'_n$$

$$dx_2 = \beta_1 dx'_1 + \beta_2 dx'_2 + \dots + \beta_n dx'_n$$

. . . .

$$dx_n = \varepsilon_1 dx'_1 + \varepsilon_2 dx'_2 + \dots + \varepsilon_n dx'_n .$$

Ma queste relazioni sono ancora le stesse che quelle che legano le y alle y'; onde la (5) sussisterà ancora se in luogo delle dx si pongano le y, ed in luogo delle dx' le y'; cioè sarà:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n = \frac{\partial F}{\partial x'_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial x'_2} y'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} y'_n .$$

c. d. d.

34. D'ora innanzi colle parole: *operazione di polare* intenderemo non solo le *operazioni di polare elementari* $\mathcal{D}_{pq}$, ma, più generalmente, qualsiasi operazione rappresentabile come un aggregato razionale ed intero delle operazioni di polare elementari. Se Δ e Δ' sieno due siffatte operazioni, il simbolo di prodotto:

$$\Delta' \Delta ,$$

rappresenterà per noi quell'operazione di polare che nasce dall'eseguire *prima* l'operazione Δ e poi l'operazione Δ'.

Quindi p. es. il simbolo operativo:

$$\mathcal{D}_{xy}(\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx} - \mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy})(\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}),$$

si potrà, volendo, sviluppare, sotto la forma polinomia equiva-

lente:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx} \\ - & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx} \\ - & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} \\ + & \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{yx} , \end{aligned}$$

badando però che in ogni termine del polinomio, non è lecito, in generale, di cambiare l'ordine dei fattori operativi, che s'intendono doversi eseguire l'un dopo l'altro, secondo l'ordine con cui si trovano scritti, andando da destra verso sinistra.

35. Ciò posto, se noi rappresentiamo una certa operazione di polare fra le serie $x, y, z, \dots$ col simbolo $\Delta(x;y;z;\dots)$, il simbolo $\Delta(x';y';z';\dots)$ rappresenterà quella stessa operazione eseguita rispettivamente colle $x'; y'; z'; \dots$; cosicchè il teorema espresso dalla formola (4) dell'art. 32, ha per conseguenza la formola più generale:

$$\Delta(x;y;z;\dots) f(x;y;z;\dots) = \Delta(x';y';z';\dots) F(x';y';z';\dots).$$

Dalle formole (4) segue infatti, p. es. applicando successivamente la formola stessa:

$$\mathcal{D}^h_{yx}[\mathcal{D}^k_{xy} f] = \mathcal{D}^h_{y'x'}[\mathcal{D}^k_{x'y'} F]$$

ed applicando la stessa formola, introducendo però la serie n^{ia} cogrediente z:

$$\mathcal{D}^l_{xz}[\mathcal{D}^h_{yx}\{\mathcal{D}^k_{xy} f\}] = \mathcal{D}^l_{x'z'}[\mathcal{D}^h_{y'x'}\{\mathcal{D}^k_{x'y'} F\}] .$$

il che si scriverà più brevemente, secondo le convenzioni fatte:

$$\mathcal{D}_{xx}^{l}\,\mathcal{D}_{yx}^{h}\,\mathcal{D}_{xy}^{k} f = \mathcal{D}_{x'y'}^{l}\,\mathcal{D}_{y'x'}^{h}\,\mathcal{D}_{x'y'}^{k} F.$$

ecc.

---

§.VI. *Trasformazione di forme lineari.*

Serie di variabili controgredienti.

36. Sia $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ una forma *lineare* (cioè del prim'ordine nell'unica serie x del campo n^{rio}). Noi la denoteremo più brevemente con a_x; poichè d'ora innanzi definiremo:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \tag{1}$$

cosicchè, se $b_1, b_2, \dots, b_n$ sono altri coefficienti ed $y_1, y_2, \dots, y_n$ un'altra serie di variabili, s'intenderà similmente:

$$b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n, \text{ ecc.}$$

37. Ciò premesso, eseguiamo, come al §. precedente, la sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n' \\ x_2 &= \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_n x_n' \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n' \end{aligned} \tag{2}$$

Sostituendo queste espressioni nella forma lineare $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, questa si cangerà in una forma pure lineare:

$$F(x_1', x_2', \dots, x_n') = a_1' x_1' + \dots + a_n' x_n',$$

cosicchè si avrà:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a_1' x_1' + a_2' x_2' + \dots + a_n' x_n', \tag{3}$$

o anche, colla notazione abbreviata:

$$a_x = a'_{x'}.$$

Poichè la (3) deve ridursi ad una identità nelle x' quando in luogo delle x si sostituiscono l'espressioni (2), deve essere:

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \varepsilon_1 a_n \\ a_2' &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \varepsilon_2 a_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n' &= \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Di qui si vede che i coefficienti $a_1, a_2, \dots, a_n$ non si trasformano nei coefficienti $a_1', a_2', \dots, a_n'$ colla stessa sostituzione lineare (2) con cui le $x_1, x_2, \dots, x_n$ si cambiano nelle $x_1', x_2', \dots, x_n'$. Infatti, se così fosse la sostituzione lineare (2) dovrebbe coincidere col sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \dots + \varepsilon_1 x_n \\ x_2' &= \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \varepsilon_2 x_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= \alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \dots + \varepsilon_n x_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Invece, se risolviamo queste equazioni rispetto alle x, troviamo delle espressioni in coefficienti, generalmente parlando, differenti da quelli delle espressioni (2). La sostituzione (5) in cui le x sono le variabili *primitive* e le x' le *trasformate* si dice *controgrediente* alla (2); e conformemente a ciò, se una serie x si trasforma colle (2), ed un'altra serie u secondo le (5), la serie u si dirà *controgrediente* alla serie x.

Pertanto: *i coefficienti di una forma lineare si possono riguardare come una serie di variabili controgredienti alla serie delle variabili contenute nella forma lineare.*

A questo risultato si può anche dare la forma equivalente (come appare dalle (5)): *se due serie controgredienti fra loro, $x_1, \dots, x_n$ ed $u_1, \dots, u_n$ si trasformano rispettivamente in $x'_1, \dots, x'_n$ ed in $u'_1, \dots, u'_n$, si ha la relazione:*

$$x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = x'_1 u'_1 + \dots + x'_n u'_n .$$

38. La sostituzione (5), risoluta rispetto alle x, prende la forma equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha}_1 x'_1 + \bar{\alpha}_2 x'_2 + \dots + \bar{\alpha}_n x'_n \\ x_2 &= \bar{\beta}_1 x'_1 + \bar{\beta}_2 x'_2 + \dots + \bar{\beta}_n x'_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \bar{\varepsilon}_1 x'_1 + \bar{\varepsilon}_2 x'_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_n x'_n , \end{aligned} \qquad (5')$$

dove $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n ; \bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_n ; \dots ; \bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n$, sono rispettivamente gli elementi *reciproci* degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \dots ;$

$\beta_1, \beta_2, \dots$ nella matrice:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \end{matrix}$$

cioè sono rispettivamente gli *aggiunti* di $\alpha_1, \dots ; \beta_1$ etc divisi per il determinante della matrice. Paragonando le (5') colle (2), si vede che la trasformazione controgrediente ad una data, potrebbe anche chiamarsi opportunamente la sua *reciproca*.

Si ponga attenzione a non confondere la trasformazione controgrediente, o reciproca, della (2) colla sua *inversa*, che è la stessa (2) in cui le x' si considerino come variabili primitive e le x come le trasformate. La trasformazione inversa delle (2) è data dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha}_1 x'_1 + \bar{\beta}_1 x'_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_1 x'_n \\ x_2 &= \bar{\alpha}_2 x'_1 + \bar{\beta}_2 x'_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_2 x'_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \bar{\alpha}_n x'_1 + \bar{\beta}_n x'_2 + \dots + \bar{\varepsilon}_n x'_n , \end{aligned}$$

(dove $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$, etc hanno lo stesso significato di prima).

39. Se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è una funzione *qualunque* delle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, ed $F(x'_1, \dots, x'_n)$ la funzione in cui essa si cambia colla trasformazione lineare (2), la relazione (art. 33):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n = \frac{\partial F}{\partial x'_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial x'_2} y'_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} y'_n ,$$

te parlando, differenti da quelli delle espressioni (2). La sostituzione (5) in cui le x sono le variabili *primitive* e le x' le *trasformate* si dice *controgrediente* alla (2); e conformemente a ciò, se una serie x si trasforma colle (2), ed un'altra serie u secondo le (5), la serie u si dirà *controgrediente* alla serie x.

Pertanto: *i coefficienti di una forma lineare si possono riguardare come una serie di variabili controgrediente alla serie delle variabili contenute nella forma lineare.*

A questo risultato si può anche dare la forma equivalente (come appare dalle (5)): *se due serie controgredienti fra loro, $x_1, \ldots, x_n$ ed $u_1, \ldots, u_n$ si trasformano rispettivamente in $x'_1, \ldots, x'_n$ ed in $u'_1, \ldots, u'_n$, si ha la relazione:*

$$x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = x'_1 u'_1 + \ldots + x'_n u'_n .$$

38. La sostituzione (5), risoluta rispetto alle x, prende la forma equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha}_1 x'_1 + \bar{\alpha}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\alpha}_n x'_n \\ x_2 &= \bar{\beta}_1 x'_1 + \bar{\beta}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\beta}_n x'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \bar{\varepsilon}_1 x'_1 + \bar{\varepsilon}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_n x'_n , \end{aligned} \qquad (5')$$

dove $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$; $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n$; $\ldots$; $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$, sono rispettivamente gli elementi *reciproci* degli elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$;

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ nella matrice:

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_n \end{matrix}$$

cioè sono rispettivamente gli *aggiunti* di $\alpha_1, \ldots$; β_1 etc divisi per il determinante della matrice. Paragonando le (5') colle (2), si vede che la trasformazione controgrediente ad una data, potrebbe anche chiamarsi opportunamente la sua *reciproca*.

Si ponga attenzione a non confondere la trasformazione controgrediente, o reciproca, della (2) colla sua *inversa*, che è la stessa (2) in cui le x' si considerino come variabili primitive e le x come le trasformate. La trasformazione inversa delle (2) è data dalle formole:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha}_1 x'_1 + \bar{\beta}_1 x'_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_1 x'_n \\ x_2 &= \bar{\alpha}_2 x'_1 + \bar{\beta}_2 x'_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_2 x'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \bar{\alpha}_n x'_1 + \bar{\beta}_n x'_2 + \ldots + \bar{\varepsilon}_n x'_n , \end{aligned}$$

(dove $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$, etc hanno lo stesso significato di prima).

39. Se $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una funzione *qualunque* delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ed $F(x'_1, \ldots, x'_n)$ la funzione in cui essa si cambia colla trasformazione lineare (2), la relazione (art. 33):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n = \frac{\partial F}{\partial x'_1} y'_1 + \frac{\partial F}{\partial x'_2} y'_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x'_n} y'_n ,$$

ci dice, sostituendo in luogo delle y le loro espressioni nelle y' ed identificando rispetto alle y', che: *le derivate* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ *della funzione primitiva, rispetto alle variabili primitive, sono legate alle derivate* $\frac{\partial F}{\partial x'_1}, \frac{\partial F}{\partial x'_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x'_n}$, *della funzione trasformata, rispetto alle variabili trasformate, dalla sostituzione lineare controgrediente a quella che trasforma le x nelle x'.*

40. Di qui segue come corollario importante che: *il determinante Jacobiano di n funzioni $f_1, f_2, \dots, f_n$ delle variabili $x_1, \dots, x_n$ ha carattere invariantivo.* E precisamente, *se eseguendo la sostituzione lineare (2) le $f_1, f_2, \dots, f_n$, si cambiano rispettivamente nelle $F_1, F_2, \dots, F_n$ delle $x'_1, \dots, x'_n$ si ha:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x'_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x'_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x'_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x'_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x'_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x'_n} \end{vmatrix} = (\alpha\beta\dots\varepsilon) \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Infatti, se:

$$a \equiv a_1, a_2, \dots, a_n \,;\, b \equiv b_1, b_2, \dots, b_n \,;\, \dots \,;\, d \equiv d_1, d_2, \dots, d_n \,,$$

sono n serie controgredienti alle serie x trasformate colle (2), si ha per le (4) la relazione:

$$(ab\dots d) = (\alpha\beta\dots\varepsilon)^{-1}(a'b'\dots d'),$$

che fa riscontro alla relazione da noi già trovata:

$$(xy\dots t) = (\alpha\beta\dots\varepsilon)(x'y'\dots t'),$$

che valeva per le serie di variabili $y, \dots, t$ cogredienti alla serie x.

---

§.VII. *Relazioni identiche fra forme lineari.*

41. Con una serie $x_1, x_2, \dots, x_n$ di variabili n^{rie} e con una serie $a_1, a_2, \dots, a_n$ di coefficienti n^{rii}, si può comporre la forma lineare:

$$a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \,,$$

che si dirà anche spesso: un *elemento lineare di specie n^{ria}* (*)

Con r serie di coefficienti affatto arbitrarii:

$$a \equiv a_1, a_2, \dots, a_n \,;\, b \equiv b_1, b_2, \dots, b_n \,;\, \dots \,;\, e \equiv e_1, e_2, \dots, e_n \,,$$

e con ρ serie di variabili $x, y, \dots, z$, pure affatto arbitrarie si possono comporre $r.\rho$ elementi lineari:

$$\begin{matrix} a_x, & b_x, & \dots, & e_x \\ a_y, & b_y, & \dots, & e_y \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_z, & b_z, & \dots, & e_z \end{matrix} \qquad (1)$$

(*) La locuzione: *forma algebrica n^{ria}* o *di specie n^{ria}* equivale alla locuzione: *forma algebrica di specie $(n-1)^{esima}$*, che è più in uso nelle applicazioni geometriche. Per es. la specie *binaria* si chiama anche *prima specie*, la *ternaria* si chiama anche *seconda specie* etc. La differenza di desinenza *aria* oppure *esima* impedisce del resto qualunque equivoco.

ed importa stabilire in quali casi essi siano fra loro indipendenti.

42. *Gli elementi lineari che si possono formare con r serie di coefficienti arbitrarii, e ρ serie di variabili indipendenti di specie n^{ria} sono fra loro indipendenti quando almeno uno dei due numeri r e ρ è $\overline{\gtrless}\, n$.*

In altri termini: fissato ad arbitrio un sistema di $r\rho$ quantità:

$$\begin{array}{c} \alpha_1\,,\ \alpha_{12},\ldots,\ \alpha_{1r} \\ \alpha_{21}\,,\ \alpha_{22},\ldots,\alpha_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\rho 1}\,,\ \alpha_{\rho 2},\ldots,\alpha_{\rho r} \end{array}$$

diciamo primieramente che si potranno sempre determinare le arbitrarie $a_i\,,\ b_i\,,\ldots;x_i\,,\ y_i\ldots;(i=1,2,\ldots n)$ in modo da avere:

$$\begin{array}{l} a_x=\alpha_{11}\ ,\ b_x=\alpha_{12}\,,\ \ldots\ ,\ e_x=\alpha_{1r} \\ a_y=\alpha_{21}\ ,\ b_y=\alpha_{22}\,,\ \ldots\ ,\ e_y=\alpha_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_z=\alpha_{\rho 1}\ ,\ b_z=\alpha_{\rho 2}\,,\ \ldots\ ,\ e_z=\alpha_{\rho r}\,. \end{array}$$

Supponiamo infatti, per fissare le idee, che sia $r\overline{\gtrless}\,n$. Prenderemo, per tutti i valori di i che sono superiori ad r: $a_i=b_i=\cdots=e_i=0$, e fisseremo, in un modo qualunque, i valori di $a_i\,,\ b_i\,,\ldots e_i$ per $i\overline{\gtrless}\,r$, purchè si abbia però:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_r \end{vmatrix} \neq 0$$

il che evidentemente è sempre possibile. Allora le r equazioni lineari fra le r incognite $x_1;x_2,\ldots,x_r$:

$$a_x=\alpha_1\ ,\ b_x=\alpha_{12}\,,\ \ldots\ldots,\ e_x=\alpha_{1r}\,,$$

si potranno sempre risolvere ricavando per le $x_1,x_2,\ldots x_r$ certi valori finiti e ben determinati. Similmente si potranno determinare in un modo unico i valori finiti delle $y_1,\ldots,y_r$ che rendono sodaisfatte le equazioni.

$$a_y=\alpha_{21}\ ,\ b_y=\alpha_{22}\,,\ \ldots,e_y=\alpha_{2r}\,,$$

e così di seguito finchè si saranno soddisfatte tutte le equazioni (2), come appunto si voleva.

43. *Se i due numeri ρ ed r sono entrambi maggiori di n, fra gli $r\rho$ elementi lineari considerati nell'art. 41 hanno luogo precisamente $(r-n)(\rho-n)$ relazioni distinte.*

Poichè r e ρ sono entrambi maggiori di n, indichiamo con $x,y,\ldots,z$ un gruppo di n serie di variabili n^{rie} scelte a piacere fra le date, e con $\xi,\eta,\ldots$, le rimanenti $\rho-n$ serie. Similmente separiamo, in un modo qualunque, n serie di coefficienti che indicheremo con $\alpha,\beta,\ldots$.

Allora è agevole riconoscere che uno qualunque degli $(r-n)$ $(\rho-n)$ elementi lineari che si possono formare combinando le $(r-n)$ serie di coefficienti $\alpha, \beta, \ldots$, colle $\rho-n$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$, si può esprimere in funzione di elementi tutti diversi dagli $(r-n)(\rho-n)$ ora considerati. In fatti, se θ è una qualunque delle $\xi, \eta, \ldots$, e γ una qualunque delle $\alpha, \beta, \ldots$, si avrebbe identicamente, per la regola del prodotto di due determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \ldots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y \ldots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z \ldots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta \ldots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots & e_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 \ldots & e_2 & \gamma_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & b_n & e_n & \gamma_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \ldots & e_{n+1} & \gamma_{n+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \ldots & z_1 & \theta_1 \\ x_2 & y_2 \ldots & z_2 & \theta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n \ldots & z_n & \theta_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \ldots & z_{n+1} & \theta_{n+1} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

quando gli elementi lineari del primo membro fossero della specie $(n+1)^{\text{aria}}$; epperò essendo essi della specie n^{aria}, si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \ldots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y \ldots & e_y & \gamma_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_z & b_z \ldots & e_z & \gamma_z \\ a_\theta & b_\theta \ldots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

giacchè, per passare a questo caso, basterà porre in (3):

$$a_{n+1} = b_{n+1} = \ldots = e_{n+1} = \gamma_{n+1} = 0$$

$$x_{n+1} = y_{r+1} = \ldots = z_{n+1} = \theta_{n+1} = 0. \qquad (4')$$

Ora l'identità (4) ci dice appunto che γ_θ si esprime in funzione di elementi che non sono formati dalla combinazione delle serie $\alpha, \beta, \ldots$, colle serie $\xi, \eta, \ldots$ Separati, dall'insieme degli $r \cdot \rho$ elementi lineari, gli $(r-n)(\rho-n)$ elementi $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \ldots, \beta_\xi, \beta_\eta, \ldots$, sarà poi facile persuadersi, con un procedimento affatto analogo a quello tenuto nell'art. prec., che fra gli elementi residui non può aver luogo alcuna relazione, e che, per conseguenza, le $(r-n)(\rho-n)$ relazioni (4) sono le sole che hanno luogo fra gli $r\rho$ elementi dati.

44. Prendendo p. es. $r=3$, $\rho=3$, $n=2$, si vede che fra i nove elementi lineari binarii:

$$\begin{matrix} a_x \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2, & a_y, & a_z \\ b_x \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2, & b_y, & b_z \\ c_x \equiv c_1 x_1 + c_2 x_2, & c_y, & c_z \end{matrix}$$

ha luogo una relazione identica, cioè:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

§.VIII. *Espressione simbolica di una forma n^{ria} qualunque e delle sue polari.*

45. Sia $f(x_1, \ldots, x_n)$ una forma n^{ria} di ordine m coll'unica serie di variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La sua espressione generale sarà:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} \qquad (1)$$

dove $A_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ indica il coefficiente costante di quel termine della f in cui le $x_1, x_2, \dots, x_n$ si trovano elevate rispettivamente agli esponenti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Nulla c'impedisce di porre:

$$A_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}=\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\;\underline{|\alpha_2}\dots\underline{|\alpha_n}}\,\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}, \qquad (2)$$

e di scrivere, per conseguenza,

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m}\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\;\underline{|\alpha_2}\dots\underline{|\alpha_n}}\,\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}. \qquad (3)$$

Chiameremo questa seconda espressione di f *espressione preparata*, ed i coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ *coefficienti preparati* di f.

Ciò posto, se $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono simboli per se stessi privi di significato e con una moltiplicazione puramente formale componiamo il prodotto $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n}$, nulla ci vieta di adottare questo prodotto come una *notazione atta a* rappresentare il coefficiente $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_n}$, cioè di porre simbolicamente:

$$\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}=a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n},$$

giacchè questi prodotti (per $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=m$) presentano precisamente tante forme distinte quanti sono i varî coefficienti $\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ da rappresentarsi. Scriveremo pertanto:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=m}\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\dots\underline{|\alpha_n}}\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n}\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}.$$

Ma per il teorema del polinomio si avrebbe identicamente (qualora le $a_1, a_2, \dots, a_n$ fossero dei numeri):

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots\alpha_n=m}\frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\;\underline{|\alpha_2}\dots\underline{|\alpha_n}}\,a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n}\,x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}=(a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n)^m.$$

Potremo dunque scrivere simbolicamente:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\dots a_nx_n)^m, \qquad (4)$$

o anche, colla notazione abbreviata:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_x^m,$$

intendendo con ciò che, fatto lo sviluppo della potenza a_x^m, si dovrà sostituire ad ogni prodotto di grado m del tipo $a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\dots a_n^{\alpha_n}$ il valore $\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_n}$ per avere la vera *effettiva* espressione di $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

46. Operando sulla espressione simbolica di f come se essa fosse una vera potenza m^{esima}, si troverà (art. 15):

$$\mathcal{D}_{xy}f=m\,a_x^{m-1}a_y,$$

ed applicando ancora una volta l'operazione $\mathcal{D}_{xy}$:

$$\mathcal{D}_{xy}^2 f=m(m-1)\,a_x^{m-2}a_y^2,$$

ed in generale:

$$\mathcal{D}_{xy}^k f=m(m-1)\dots(m-k+1)\,a_x^{m-k}a_y^k. \qquad (5)$$

Ora questa espressione simbolica di $\mathcal{D}_{xy}^k f$ si può ammettere precisamente secondo lo stesso significato col quale si è ammessa la (4), poichè è agevole riconoscere che, se si sviluppasse il prodotto $a_x^{m-k} a_y^{k}$ e si sostituisse quindi ad ogni prodotto simbolico $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$, del grado m nelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il suo significato effettivo, cioè $\bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, il secondo membro della (5) sarebbe precisamente $\mathscr{D}_{xy}^{k} f$ calcolato colla (3); cioè coinciderebbe identicamente con:

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}} \cdot \bar{A}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} \cdot \mathscr{D}_{xy}^{k} \left[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}\right].$$

Infatti, il procedimento tenuto per giungere alla (5) sarebbe certamente legittimo, se le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero dei numeri, cioè se la f fosse effettivamente la potenza m^{esima} di una funzione lineare delle x. Dunque, se le $a_1, \ldots, a_n$ significassero dei numeri si avrebbe identicamente:

$$m(m-1)\ldots(m-k+1)\, a_x^{m-k} a_y^{k} = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} \frac{\underline{|m}}{\underline{|\alpha_1}\,\underline{|\alpha_2}\cdots\underline{|\alpha_n}}\, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}\, \mathscr{D}_{xy}^{k}\left[x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\right] \quad (6)$$

Ora ciò dimostra l'asserto, poichè abbiamo appunto definito il significato del secondo membro di (5) nel senso che si debba sviluppare $a_x^{m-k} a_y^{k}$ come se le $a_1, a_2, \ldots, a_n$ fossero delle effettive variabili indipendenti (con che si cadrà necessariamente, per quanto si è testè notato, nella espressione (6)) e sostituire quindi ad ogni prodotto simbolico $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$, del grado m nelle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il corrispondente valore effettivo $A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$.

47. Se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ è una novella serie di variabili indipendenti dalle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e dalle $y_1, y_2, \ldots, y_n$, si pro-

verebbe con identico ragionamento la legittimità della formola:

$$\mathscr{D}_{xz}^{h}\, \mathscr{D}_{xy}^{k} f = m(m-1)\ldots(m-h-k+1)\, a_x^{m-h-k} a_y^{k} a_z^{h}.$$

Fatta astrazione dai coefficienti numerici, vediamo dunque che le varie forme polari con un numero qualunque di nuove serie di variabili y, z, t etc. sono tutte comprese nel tipo:

$$a_x^{\alpha} a_y^{\beta} a_z^{\gamma} \ldots a_t^{\lambda}, \quad (\alpha+\beta+\cdots+\lambda=m) \quad (7)$$

e che, reciprocamente, ogni espressione simbolica del tipo (7) rappresenta una forma polare (semplice o mista) della stessa forma fondamentale $f \equiv a_x^{m}$.

48. Per una forma algebrica con più serie di variabili si può adottare una rappresentazione simbolica affatto analoga. In vero, il coefficiente del termine generale:

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}\, y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \ldots y_n^{\mu_n} \ldots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_n^{\nu_n},$$

di una forma algebrica $f(x^{m}; y^{\mu}; \ldots; z^{\nu})$ con ρ serie di variabili n^{rie}: $x, y, \ldots, z$, può sempre assumersi sotto la forma:

$$\frac{\underline{|m}}{\underline{|m_1}\,\underline{|m_2}\cdots\underline{|m_n}} \cdot \frac{\underline{|\mu}}{\underline{|\mu_1}\,\underline{|\mu_2}\cdots\underline{|\mu_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|\nu_1}\,\underline{|\nu_2}\cdots\underline{|\nu_n}} \cdot \bar{A}_{m_1,m_2\ldots m_n;\mu_1,\mu_2\ldots\mu_n;\ldots;\nu_1,\nu_2\ldots\nu_n}$$

dove $\bar{A}_{m_1,m_2\ldots m_n;\mu_1,\mu_2\ldots\mu_n;\nu_1,\nu_2\ldots\nu_n}$ (il coefficiente preparato) è una costante che può determinarsi ad arbitrio per ogni sistema di esponenti $m_1, m_2, \ldots; \mu_1, \mu_2, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots$. Possiamo dunque rappresentarlo col simbolo:

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}\, b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2} \ldots b_n^{\mu_n} \ldots\ldots c_1^{\nu_1} c_2^{\nu_2} \ldots c_n^{\nu_n}, \quad (8)$$

che prende precisamente tante forme distinte quanti sono i detti sistemi di esponenti. I simboli $a, b, \dots e$ non avranno significato per se stessi, ma soltanto nei composti del tipo (8) soddisfacenti alle condizioni:

$$m_1+m_2+\dots+m_n=m;\ \mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n=\mu;\dots;\ \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_n=\nu.$$

Da questa rappresentazione simbolica de' coefficienti ne discende per l'intera funzione la seguente:

$$f(x^m; y^\mu, \dots; z^\nu)=[a_1x_1+\dots+a_nx_n]^m\cdot[b_1y_1+\dots+b_ny_n]^\mu\cdot\dots\cdot[e_1z_1+\dots e_nz_n]^\nu=$$
$$=a_x^m\, b_y^\mu \dots e_z^\nu,$$

poichè, se si sviluppa l'espressione del secondo membro secondo le regole ordinarie e ad ogni prodotto di $m+\mu+\dots+\nu$ simboli si sostituisce quel valore $\bar{A}$ che esso rappresenta, si ricade identicamente nella forma data f.

48 - Operando, analogamente a quanto si è fatto all'art. 46, sulla espressione simbolica di f:

$$a_x^m\, b_y^\mu \dots e_z^\nu,$$

come se fosse un prodotto di potenze effettive, con un'operazione di polare qualsivoglia (art. 34):

$$\Delta(x; y; \dots; t; \dots)$$

fra le serie di variabili $x, y, \dots, z$ ed anche altre nuove serie $t, u, \dots$, ove si voglia, si otterrà come risultato una somma di termini

$$\sum C\cdot P,$$

dove C è un coefficiente costante e P un prodotto di elementi lineari simbolici scelti, una o più volte, fra gli elementi:

$$\begin{array}{l} a_x,\ a_y, \dots, a_z,\ a_t, \dots \\ b_x,\ b_y, \dots, b_z,\ b_t, \dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ e_x,\ e_y, \dots, e_z,\ e_t, \dots \end{array} \qquad (10)$$

Il prodotto P avrà significato effettivo, poichè esso riuscirà omogeneo e del grado m nei simboli a, omogeneo e del grado μ nei simboli b etc; e sostituendo in (9) in luogo delle P le loro espressioni effettive, la somma (9) verrà a coincidere coll'espressione Δf che si sarebbe ottenuta operando con Δ sull'espressione effettiva di f.

Reciprocamente: *Ogni prodotto P composto nel modo indicato cogli elementi lineari simbolici (10) e quindi suscettibile di avere un significato effettivo, rappresenterà una polare di f, cioè una forma algebrica deducibile da f con un'operazione di polare opportunamente scelta.* La dimostrazione di questo teorema, affatto ovvia nel caso in cui f conteneva come all'art. 47 una sola serie di variabili, è assai meno facile quando f contiene, come ora supponiamo, un numero qualunque di serie di variabili. Per dimostrarlo dobbiamo premettere alcuni altri teoremi di indole generale sul calcolo delle polari, e stabilire un metodo che chiameremo *delle variabili ausiliarie* (di cui ci serviremo poi anche in altre circostanze) mediante il quale non solo dimostreremo la possibilità di dedurre P da f mercè operazioni di polare, ma indicheremo al tempo stesso la via per costruire effettivamente l'operazione Δ per la quale si abbia: $P=\Delta f$.

---

§.IX *Alcuni teoremi sul calcolo con operazioni di polare.*

49. *Sia Δ un'operazione di polare monomia del grado λ, cioè il prodotto di λ operazioni elementari: $\mathcal{D}_{xx}$, $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{yx}$, ... formate con certe k serie di variabili $x, y, z, \dots$; e sia ∇ un'operazione di polare che differisca da Δ soltanto per l'ordine dei fattori. La differenza $\nabla-\Delta$ si può esprimere identicamente sotto forma di un'operazione di polare di grado non superiore a λ.*

Così ad esempio, la differenza:

$$\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx}-\mathcal{D}_{xy}^2\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zx},$$

si può esprimere come una somma di operazioni monomie di grado non superiore al quinto.

Infatti, il passaggio dall'ordinamento Δ all'ordinamento ∇ si può effettuare mediante un numero finito di scambii di due fattori *consecutivi*, cosicchè esisterà un

numero finito di operazioni monomie: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_h$ tali che se nella successione di operazioni:

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \dots,\ \Delta_{h-1},\ \Delta_h,\ \nabla, \qquad (1)$$

ne consideriamo due qualunque consecutive, esse differiscano soltanto per lo scambio di due operazioni elementari consecutive.

Applicando le relazioni fondamentali dell'art. 20 si potrà quindi evidentemente scrivere:

$$\Delta-\Delta_1=Q_1$$
$$\Delta_1-\Delta_2=Q_2$$
$$\dots\dots$$
$$\Delta_{h-1}-\Delta_h=Q_h$$
$$\Delta_h-\nabla=Q_{h+1}$$

essendo le Q operazioni di polare di grado inferiore a quello delle (1). E sommando queste identità membro a membro si avrà appunto:

$$\Delta-\nabla=\sum Q,$$

dove il secondo membro è un'operazione di polare di grado inferiore a λ.

50. *Siano*

$$\mathcal{D}_\nu,\ \mathcal{D}_{\nu-1},\ \mathcal{D}_{\nu-2},\ \dots,\ \mathcal{D}_3,\ \mathcal{D}_2,\ \mathcal{D}_1 \qquad (2)$$

le ν $(\nu=k^2)$ operazioni di polare elementari $\mathcal{D}_{xx}$, $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{yx}$, $\mathcal{D}_{xz}$, ..., che si possono formare con certe k serie di variabili $x, y, z, \dots$ scritte secondo un ordine fis-

sato a piacere. Ogni operazione di polare (art. 34) $\Delta(x, y, z, \ldots)$ composta con queste serie è equivalente ad un'altra espressione della forma:

$$\sum A \mathcal{D}_\nu^{\alpha_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} \ldots\ldots \mathcal{D}_3^{\alpha_3} \mathcal{D}_2^{\alpha_2} \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \qquad (3)$$

in cui le A sono dei coefficienti costanti, e le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ degli esponenti interi e positivi, la cui somma non supera mai il grado di $\Delta(x, y, z, \ldots)$.

Per grado di Δ intendiamo il massimo grado che si riscontra nei termini di Δ; e per grado di un termine di Δ intenderemo naturalmente il numero delle operazioni elementari di cui esso è il prodotto.

Questo teorema è evidente per le operazioni Δ di primo grado. Pertanto possiamo supporre di averlo già dimostrato per le operazioni Δ di grado $\lambda-1$, e basterà far vedere che esso sussiste anche per le operazioni Δ di grado λ.

Sia infatti Δ un'operazione monomia del grado λ e sia Δ' la stessa operazione Δ nella quale però i λ fattori operativi elementari siano stati disposti secondo l'ordinamento prefissato (1). La differenza:

$$\Delta - \Delta' \equiv \Delta - \mathcal{D}_\nu^{\beta_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}} \ldots\ldots \mathcal{D}_3^{\beta_3} \mathcal{D}_2^{\beta_2} \mathcal{D}_1^{\beta_1}$$

potendosi porre, secondo il teorema dell'art. prec., sotto forma di un'operazione di polare di grado non superiore a $\lambda-1$, possiamo scrivere:

$$\Delta - \mathcal{D}_\nu^{\beta_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\beta_{\nu-1}} \ldots\ldots \mathcal{D}_3^{\beta_3} \mathcal{D}_2^{\beta_2} \mathcal{D}_1^{\beta_1} = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_\nu<\lambda} A \cdot \mathcal{D}_\nu^{\alpha_\nu} \mathcal{D}_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} \ldots \mathcal{D}_3^{\alpha_3} \mathcal{D}_2^{\alpha_2} \mathcal{D}_1^{\alpha_1},$$

giacchè per le operazioni di grado inferiore a λ abbiamo supposto già stabilita la forma (3). Dall'ultima eguaglianza si ricava per Δ un'espressione della forma voluta.

Dal teorema ora dimostrato discendono due corollarii che ci saranno in seguito molto utili.

51. Se le serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ non sono contenute nella forma f che è soltanto funzione di altre serie di variabili $x, y, z, \ldots$, ogni funzione deducibile da f con un aggregato delle operazioni elementari $\mathcal{D}_{xy}$, $\mathcal{D}_{x\xi}$, $\mathcal{D}_{\xi x}, \ldots$ formate comunque colle variabili dei due gruppi, si può anche dedurre con quelle sole operazioni che hanno per primo indice le variabili $x, y, z, \ldots$

Infatti, le operazioni $\mathcal{D}_{pq}$ formabili colle serie di variabili dei due gruppi si possono dividere in due classi, riunendo in una prima classe quelle in cui p è una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, ed in una seconda quelle in cui p è una delle $x, y, z, \ldots$; e pel teorema dell'art. prec., si potrà trasformare ogni operazione Δ fra le variabili dei due gruppi in una somma di termini della forma $\Delta''\Delta'$, dove Δ' e Δ'' sono prodotti di fattori rispettivamente della prima e della seconda classe. Ma la f è annullata dalle operazioni della prima classe poichè per ipotesi essa non contiene le variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; quindi $\Delta''\Delta' f$ sarà identicamente nulla, semprechè qualcuno degli esponenti delle operazioni elementari contenute in Δ' sia diverso da zero. Così Δf sarà ridotta ad una somma di soli termini del tipo $\Delta'' f$; c.d.d.

52. *Se con operazioni fra le serie di variabili dei due gruppi $x, y, z, \ldots$ e $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ si deduca da $f(x; y; z; \ldots)$ una funzione $\varphi(x; y; z; \ldots)$ che al pari di f contenga solamente le serie $x, y, z, \ldots$, essa può anche ottenersi direttamente con le sole operazioni fra le $x, y, z, \ldots$*

Infatti, dopo di aver espresso φ, come sopra, come una somma di termini del tipo $\Delta'' f$, si osserverà che i soli fattori operativi di Δ'' che contengono le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, le contengono come secondo indice; epperò se il loro esponente non è nullo, essi aggiungeno a φ dei termini in cui almeno una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ entrerà ad un grado maggiore di zero; tali termini dovranno dunque distruggersi con altri ad essi omogenei, giacchè φ contiene le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ al grado zero. Non resteranno dunque che i soli termini dati da quelle $\Delta'' f$ nelle quali le Δ'' non dipendono affatto dalle serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ c.d.d.

---

§.X *Metodo delle variabili ausiliarie.*

53. Sia, come al §.8:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \ldots; \overset{\nu}{z}) \equiv a_x^m\, b_y^\mu \ldots e_z^\nu \qquad (1)$$

la rappresentazione simbolica della r forma algebrica generale con r serie di variabili (n^{rie}): $x, y, \ldots z$. L'espressione simbolica:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1} a_y^{\alpha_2} \ldots a_z^{\alpha_r} a_\xi^{\alpha_{r+1}} \ldots a_\eta^{\alpha_\rho} b_x^{\beta_1} b_y^{\beta_2} \ldots b_z^{\beta_r} b_\xi^{\beta_{r+1}} \ldots b_\eta^{\beta_\rho} \ldots e_x^{\gamma_1} e_y^{\gamma_2} \ldots e_\eta^{\gamma_\rho}, \qquad (2)$$

rappresenterà una forma algebrica ben determinata F, colle ρ serie di variabili $x, y, \ldots, z, \xi, \ldots, \eta$ semprechè gli esponenti $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ soddisfino alle condizioni:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_\rho = m, \quad \beta_1 + \ldots + \beta_\rho = \mu, \ldots, \quad \gamma_1 + \ldots + \gamma_\rho = \nu.$$

Ci proponiamo di costruire un'operazione di polare Δ, fra le ρ serie $x, y, \ldots, z, \xi, \ldots, \eta$, tale da dare identicamente:

$$F = \Delta \cdot f$$

con che sarà dimostrato che F è una polare di f.

Introducendo, infatti, altre ν serie di variabili ausiliarie $x', y', \ldots, z'$, si può scrivere identicamente:

$$a_{x'}^m\, b_{y'}^\mu \ldots e_{z'}^\nu = \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \ldots \lfloor \nu} \mathcal{D}_{xx'}^m \mathcal{D}_{yy'}^n \ldots \mathcal{D}_{zz'}^\nu \{a_x^m b_y^n \ldots e_z^\nu\} =$$

$$= \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \ldots \lfloor \nu} \mathcal{D}_{xx'}^m \mathcal{D}_{yy'}^\mu \ldots \mathcal{D}_{zz'}^\nu f.$$

D'altra parte, si può anche scrivere identicamente:

$$F \equiv a_x^{\alpha_1} a_y^{\alpha_2} \ldots a_\eta^{\alpha_\rho} b_x^{\beta_1} b_y^{\beta_2} \ldots b_\eta^{\beta_\rho} \ldots e_x^{\gamma_1} e_y^{\gamma_2} \ldots e_\eta^{\gamma_\rho} =$$

$$= \frac{1}{\lfloor m \lfloor \mu \ldots \lfloor \nu} \cdot \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1} \mathcal{D}_{x'y}^{\alpha_2} \ldots \mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho} \mathcal{D}_{y'x}^{\beta_1} \ldots \mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho} \ldots \mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1} \ldots \mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho} \{a_{x'}^m b_{y'}^n \ldots e_{z'}^\nu\},$$

onde si ha anche:

$$F \equiv \left(\frac{1}{\underline{|m}\;\underline{|\mu}\cdots\underline{|\nu}}\right)^2 \cdot \nabla \cdot f \qquad (4)$$

dove:

$$\nabla = \mathcal{D}_{x'x}^{\alpha_1}\cdots\mathcal{D}_{x'\eta}^{\alpha_\rho}\mathcal{D}_{y'z}^{\beta_1}\cdots\mathcal{D}_{y'\eta}^{\beta_\rho}\cdots\mathcal{D}_{z'x}^{\gamma_1}\cdots\mathcal{D}_{z'\eta}^{\gamma_\rho}\cdot\mathcal{D}_{xx'}^{m}\mathcal{D}_{yy'}^{n}\cdots\mathcal{D}_{zz'}^{\nu},$$

è un'operazione di polare fra le ρ serie date $x, y, \ldots \eta$ e le r serie ausiliarie $x', y', \ldots, z'$. Quest'ultime non sono però contenute nè in f nè in F. Esse potranno quindi *eliminarsi* secondo il teorema del §. precedte (art. 52), sostituendo col procedimento ivi indicato, all'operazione ∇, un'altra operazione Δ fra le sole serie date $x, y, \ldots, \eta$, la quale sarà equivalente a ∇ semprechè la si applichi a funzioni delle sole $x, y, \ldots \eta$. L'espressione (4) ci fornirà così l'espressione desiderata del tipo (3).

Esempio I. Proponiamoci, p. es., di dedurre dalla forma fondamentale:

$$f \equiv a_x^2\, b_y^2\, c_z^2$$

la forma

$$F \equiv a_x\, a_y\, b_x\, b_y\, c_x\, c_y\,.$$

Applicando il procedimento generale, affatto simmetrico, da noi indicato, si dovrebbero introdurre tre nuove serie ausiliarie x', y', z', scrivere dapprima F sotto la forma:

$$F = \frac{1}{8}\mathcal{D}_{x'x}\mathcal{D}_{x'y}\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{y'y}\mathcal{D}_{z'x}\mathcal{D}_{z'y}\{a_{x'}^2\, b_{y'}^2\, c_{z'}^2\} =$$
$$= \frac{1}{64}\mathcal{D}_{x'x}\mathcal{D}_{x'y}\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{y'y}\mathcal{D}_{z'x}\mathcal{D}_{z'y}\cdot\mathcal{D}_{xx'}^2\mathcal{D}_{yy'}^2\mathcal{D}_{zz'}^2\cdot f$$

ed eliminare quindi le x', y', z'. Nel fatto basterà introdurre una sola serie ausiliaria y', poichè si può scrivere evidentemente:

$$F = \frac{1}{8}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yy'}\, f.$$

Per eliminare ora di qui la serie y' si comincerà con applicare l'identità (art. 20, I'):

$$\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{xy} = \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{y'y}$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8}\left\{\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{yy'} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{y'y}\mathcal{D}_{yy'}\right\} f.$$

Si applicheranno quindi le formole:

$$\mathcal{D}_{y'x}\mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'}\mathcal{D}_{y'x} + \mathcal{D}_{yx}$$
$$\mathcal{D}_{y'y}\mathcal{D}_{yy'} = \mathcal{D}_{yy'}\mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{y'y'},$$

cioè si scriverà:

$$F = \frac{1}{8}\left\{\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yy'}\mathcal{D}_{y'x} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yy'}\mathcal{D}_{y'y} + \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{y'y'}\right\} f$$
$$+ \frac{1}{8}\left\{\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yy}\right\} f.$$

Ma, essendo f indipendente dalla serie y', si ha:

$$\mathcal{D}_{y'x} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y} f = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{y'y'} f = 0$$

onde resta semplicemente (osservando altresì che $\mathcal{D}_{yy} f = 2f$):

$$F = \frac{1}{8}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} f - \frac{1}{4}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy} f =$$
$$= \frac{1}{4}\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{zy}\left\{\frac{1}{2}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - 1\right\} f\,.$$

55. Esempio II. Essendo:

$$f \equiv a_x^3\, b_y^2\, c_z^2 \quad , \quad F \equiv a_x^2\, a_z\, b_x\, b_y\, c_y\, c_z ,$$

si voglia costruire l'operazione di polare Δ, fra le tre serie x, y, z per la quale si ha $F = \Delta f$.

Anche qui basterà introdurre una sola serie ausiliaria u, poichè si può scrivere identicamente:

$$a_x^2 a_z b_x b_y c_y c_z = \frac{1}{12} \mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \left\{ a_x^3 b_y^2 c_z^2 \right\}.$$

Applicando le formole (I') dell'art. 20 si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} .$$

Dipoi si ha, trasformando il primo termine del secondo membro:

$$\mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uz} + \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz}$$

e trasformando anche il secondo colle formole già citate e colla (I'', art. 20):

$$\mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{uy} \mathcal{D}_{xu} - \mathcal{D}_{ux} \mathcal{D}_{xu} =$$
$$= \left\{ \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} - \left\{ \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{uu} \right\},$$

onde si conchiude:

$$\mathcal{D}_{uz} \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} = \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx}$$
$$+ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{uy} + \mathcal{D}_{xu} \mathcal{D}_{ux} - \mathcal{D}_{uu}$$

e quindi:

$$F = \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{D}_{xx} \right\} \cdot f$$
$$= \frac{1}{4} f + \frac{1}{12} \left\{ \mathcal{D}_{zy} \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy} \right\} \cdot f$$

56. Mercè la rappresentazione simbolica delle forme algebriche e la teoria testè svolta, siamo ora in grado

di rispondere alla questione: *data la forma algebrica più generale $f(\overset{m_1}{x}; \overset{m_2}{y}; \dots; \overset{m_r}{z})$ con r serie di variabili n^{rie} $(n \gtreqless r)$ di dati ordini $m_1, m_2, \dots, m_r$ rispetto ad ogni serie, qual'è il numero delle sue polari linearmente indipendenti*(*) *con ρ serie*(**) *di variabili $F(\overset{\mu_1}{\xi}; \overset{\mu_2}{\eta}; \dots; \overset{\mu_\rho}{\omega})$ di dati ordini $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho$ nelle singole serie?*

E' chiaro infatti, dopo quanto si è dimostrato, che rappresentato f simbolicamente con:

$$f \equiv a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_z^{m_r}$$

il numero delle polari linearmente indipendenti, che si vuol conoscere, coincide col numero delle forme algebriche linearmente indipendenti del tipo:

$$a_\xi^{\alpha_{11}} a_\eta^{\alpha_{12}} \dots a_\omega^{\alpha_{1\rho}}\, b_\xi^{\alpha_{21}} b_\eta^{\alpha_{22}} \dots b_\omega^{\alpha_{2\rho}} \dots e_\xi^{\alpha_{r1}} e_\eta^{\alpha_{r2}} \dots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}, \qquad (5)$$

in cui gli esponenti α_{ij} soddisfano alle condizioni:

$$(6) \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1\rho} = m_1 , & \alpha_{11} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{r1} = \mu_1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{2\rho} = m_2 , & \alpha_{12} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{r2} = \mu_2 \\ \dots\dots\dots\dots , & \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r1} + \alpha_{r2} + \dots + \alpha_{r\rho} = m_r , & \alpha_{1\rho} + \alpha_{2\rho} + \dots + \alpha_{r\rho} = \mu_\rho . \end{array} \right.$$

Ma le forme algebriche del tipo (5) che corrispondono a

(*) Fra le quali cioè non abbia luogo alcuna relazione lineare a coefficienti costanti.

(**) Il numero ρ è affatto indipendente da r, di cui può anche essere minore; le serie $\xi, \eta, \dots, \omega$ possono evidentemente anche coincidere tutte, o in parte, colle serie primitive $x, y, \dots, z$.

sistemi differenti di esponenti α_{ij}, sono tutte linearmente indipendenti per $n \gtreqless r$; giacchè, se fra di esse sussistesse una relazione lineare a coefficienti costanti, questa stessa relazione dovrebbe sussistere in particolare anche nel caso in cui le serie $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; \dots; e_1, \dots, e_n$ avessero significato effettivo, cioè nel caso particolare in cui f fosse il prodotto di forme lineari $a_x, a_x, \dots, b_y, b_y, \dots, e_z, e_z \dots$.

Ora ciò è assurdo, poichè gli $r\rho$ elementi lineari che si possono formare colle r serie di coefficienti $a, b, \dots, r$ e colle ρ serie di variabili $\xi, \eta, \dots, \omega$, sono fra loro affatto indipendenti, per $n \gtreqless r$, secondo quanto si è visto all' art. 42.

Concludiamo adunque che: *il numero delle forme polari linearmente indipendenti $F(\overset{\mu_1}{\xi}; \overset{\mu_2}{\eta}; \dots; \overset{\mu_\rho}{\omega})$ deducibili dalla forma algebrica generale $f(\overset{m_1}{x}; \overset{m_2}{y}; \dots; \overset{m_r}{z})$ è dato dal numero dei sistemi di valori interi e positivi delle α_{ij} che risolvono il sistema diofanteo (6)*

57. Il numero dei sistemi di soluzioni ammesse dal problema di partizione (6) si presenta anche in molte altre questioni enumerative attinenti alla teoria delle forme algebriche.(*) Noi lo rappresenteremo col simbolo

(*) Cfr. la memoria già citata: *Fondamenti* ecc. 1882. In questa memoria (art. 26 e segg.) il lettore potrà trovare anche ulteriori sviluppi sul metodo delle variabili ausiliarie.

$[m_1, m_2, \dots, m_r; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho]$ che avrà significato soltanto quando le m e μ soddisfino alla condizione

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\rho,$$

giacchè soltanto in questo caso il sistema (6) può ammettere delle soluzioni, come facilmente si vede.

Dalla definizione di questa funzione aritmetica apparisce chiaramente che:

$$[m_1, m_2, \dots, m_r; \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho] = [\mu_1, \mu_2, \dots \mu_\rho; m_1, m_2, \dots, m_r].$$

Di più, se $m'_1, m'_2, \dots, m'_r$ sono gli stessi numeri $m_1, m_2, \dots, m_r$ scritti in un ordine qualunque e similmente $\mu'_1, \dots, \mu'_\rho$ è una permutazione qualunque dei numeri $\mu_1, \dots, \mu_\rho$, si ha pure manifestamente

$$[m'_1, \dots, m'_r; \mu'_1, \dots, \mu'_\rho] = [m_1, \dots, m_r; \mu_1, \dots, \mu_\rho].$$

Finalmente notiamo che se taluno degli elementi m, μ è uguale a zero, esso può trascurarsi. Così:

$$[0, m_2, m_3, \dots, m_r; \mu_1, \dots, \mu_\rho] = [m_2, m_3, \dots, m_r; \mu_1, \dots, \mu_\rho]$$

---

§. XI. *Trasformazione di una forma qualunque mediante la trasformazione lineare dei suoi coefficienti simbolici.*

58. Eseguiamo nella forma algebrica generale di ordine m coll'unica serie $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = a_x^m \quad (1)$$

la solita sostituzione lineare:

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \dots + \alpha_n x_n'$$
$$x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \dots + \beta_n x_n' \qquad (2)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \dots + \varepsilon_n x_n'$$

che si può anche scrivere, colla notazione abbreviata, così:

$$x_1 = \alpha_{x'}, \quad x_2 = \beta_{x'}, \quad \dots, \quad x_n = \varepsilon_{x'}. \qquad (2')$$

Tale sostituzione si potrà eseguire anche nella espressione simbolica di f, cioè si potrà scrivere che:

$$F(x_1', x_2', \dots, x_n') = f(\alpha_{x'}, \beta_{x'}, \dots, \varepsilon_{x'}) = [a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}]^m, \qquad (3)$$

secondo il solito significato della espressione simbolica; poichè l'eguaglianza:

$$\sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \alpha_{x'}^{\alpha_1} \beta_{x'}^{\alpha_2} \dots \varepsilon_{x'}^{\alpha_n} = [a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'}]^m$$

ha luogo certamente per valori effettivi qualsivogliano delle $a_1, a_2, \dots, a_n$, e deve quindi ridursi ad una *identità* quando si sviluppi la potenza m^{esima} al secondo membro e si ordini il risultato secondo i termini distinti $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$.

Ciò premesso, se noi poniamo:

$$a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \varepsilon_1 a_n$$
$$a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \varepsilon_2 a_n \qquad (4)$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_n' = \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n$$

troviamo che:

$$a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \dots + a_n \varepsilon_{x'} = a_1' x_1' + a_2' x_2' + \dots + a_n' x_n' = a'_{x'}.$$

Possiamo dunque anche scrivere in luogo della (3):

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1', x_2', \dots, x_n') = [a_1' x_1' + a_2' x_2' + \dots + a_n' x_n']^m = a'^{\,m}_{x'}$$

$$(5) \qquad = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \dots a_n'^{\alpha_n} \cdot x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \dots x_n'^{\alpha_n},$$

dove il significato di ogni prodotto simbolico $a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \dots a_n'^{\alpha_n}$ si deve trovare mediante le (4), cioè sviluppando il prodotto:

$$(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \varepsilon_1 a_n)^{\alpha_1} (\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \varepsilon_2 a_n)^{\alpha_2} \dots (\alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \varepsilon_n a_n)^{\alpha_n}$$

e sostituendo ad ogni prodotto simbolico $a_1^{h_1} a_2^{h_2} \dots a_n^{h_n}$ (in cui $h_1 + h_2 + \dots + h_n = m$) il corrispondente valore effettivo $\bar{A}_{h_1, h_2, \dots h_n}$.

Dunque: se

$$F(x_1', x_2', \dots, x_n') = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} \bar{A}'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \dots x_n'^{\alpha_n}$$

è la trasformata mediante la sostituzione (2) della primitiva forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum \frac{\lfloor m}{\lfloor \alpha_1 \lfloor \alpha_2 \dots \lfloor \alpha_n} \bar{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

l'espressione del coefficiente trasformato $\bar{A}'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ in funzione dei primitivi coefficienti A sarà data da:

$$\bar{A}' = a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \dots a_n'^{\alpha_n},$$

quando alle $a_1', a_2', \dots, a_n'$ si siano sostituite le loro espressioni (4).

59_ Se consideriamo che la sostituzione (4) cambia le a nelle a' con una trasformazione controgrediente (art. 37) alla (2) che cambia le x nelle x', vediamo che quanto si è la solita sostituzione lineare:

$$
\left.
\begin{array}{l}
x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2' + \cdots + \alpha_n x_n' \\
x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \cdots + \beta_n x_n' \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = \varepsilon_1 x_1' + \varepsilon_2 x_2' + \cdots + \varepsilon_n x_n'
\end{array}
\right. \qquad (2)
$$

che si può anche scrivere, colla notazione abbreviata, così:

$$x_1 = \alpha_{x'} \quad , \quad x_2 = \beta_{x'} , \quad \cdots , \quad x_n = \varepsilon_{x'} . \qquad (2')$$

Tale sostituzione si potrà eseguire anche nella espressione simbolica di f, cioè si potrà scrivere che:

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = f(\alpha_{x'}, \beta_{x'}, \ldots, \varepsilon_{x'}) = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \cdots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m , \qquad (3)$$

secondo il solito significato della espressione simbolica; poichè l'eguaglianza:

$$\sum \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\ |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_n}} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n} \alpha_{x'}^{\alpha_1} \beta_{x'}^{\alpha_2} \cdots \varepsilon_{x'}^{\alpha_n} = \left[a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \cdots + a_n \varepsilon_{x'}\right]^m$$

ha luogo certamente per valori effettivi qualsivogliano delle $a_1, a_2, \ldots, a_n$, e deve quindi ridursi ad una *identità* quando si sviluppi la potenza m^{esima} al secondo membro e si ordini il risultato secondo i termini distinti $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}$.

Ciò premesso, se noi poniamo:

$$
\left.
\begin{array}{l}
a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \cdots + \varepsilon_1 a_n \\
a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_2 a_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n' = \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n
\end{array}
\right. \qquad (4)
$$

troviamo che:

$$a_1 \alpha_{x'} + a_2 \beta_{x'} + \cdots + a_n \varepsilon_{x'} = a_1' x_1' + a_2' x_2' + \cdots + a_n' x_n' = a'_{x'}$$

Possiamo dunque anche scrivere in luogo delle (3):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \left[a_1' x_1' + a_2' x_2' + \cdots + a_n' x_n'\right]^m = a'^{\,m}_{x'}$$

$$(5) \qquad = \sum \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\ |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_n}} a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \ldots a_n'^{\alpha_n} \cdot x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots x_n'^{\alpha_n} ,$$

dove il significato di ogni prodotto simbolico $a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \ldots a_n'^{\alpha_n}$ si deve trovare mediante le (4), cioè sviluppando il prodotto:

$$(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \cdots + \varepsilon_1 a_n)^{\alpha_1} (\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_2 a_n)^{\alpha_2} \cdots (\alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n)^{\alpha_n}$$

e sostituendo ad ogni prodotto simbolico $a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots a_n^{h_n}$ (in cui $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = m$) il corrispondente valore effettivo $A_{h_1, h_2, \ldots h_n}$.

Dunque: se

$$F(x_1', x_2', \ldots, x_n') = \sum \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\ |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_n}} \bar{A}'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots x_n'^{\alpha_n}$$

è la trasformata mediante la sostituzione (2) della primitiva forma:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum \frac{|\underline{m}}{|\underline{\alpha_1}\ |\underline{\alpha_2} \ldots |\underline{\alpha_n}} \bar{A}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} ,$$

l'espressione del coefficiente trasformato $\bar{A}'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ in funzione dei primitivi coefficienti A sarà data da:

$$\bar{A}' = a_1'^{\alpha_1} a_2'^{\alpha_2} \ldots a_n'^{\alpha_n} ,$$

quando alle $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ si siano sostituite le loro espressioni (4).

59. Se consideriamo che la sostituzione (4) cambia le a nelle a' con una trasformazione contragrediente (art. 37) alle (2) che cambia le x nelle x', vediamo che quanto si è

ora dimostrato si può anche riassumere nel seguente enunciato:

Se $f \equiv a_x^m$ è una certa forma ed $F \equiv a'^{m}_{x'}$ la forma che se ne deduce eseguendo sulle x una certa sostituzione lineare, il significato dei simboli a' si può desumere da quello dei simboli a trasformando le a nelle a' mediante la sostituzione lineare controgrediente a quella che si è eseguita sulle x.

Approfitteremo di questo importante principio per dare una nuova dimostrazione del carattere invariantivo delle forme polari.

Sia $f \equiv a_x^m$ una forma qualunque e sia p. es.:

$$a_x^\lambda \, a_y^\mu \, a_z^\nu \qquad , \qquad \lambda+\mu+\nu=m$$

una sua polare mista (§.VIII). Se $F \equiv a'^{m}_{x'}$ è la trasformata di f secondo la sostituzione lineare (2), la stessa polare mista costruita per la forma trasformata F sarà espressa evidentemente da:

$$a'^{\lambda}_{x'} \, a'^{\mu}_{y'} \, a'^{\nu}_{z'}.$$

Dico che sarà:

$$a_x^\lambda \, a_y^\mu \, a_z^\nu = a'^{\lambda}_{x'} \, a'^{\mu}_{y'} \, a'^{\nu}_{z'} \qquad (6)$$

Infatti dalle formole (2) combinate colle (4) (di cui ci è lecito far uso, per il principio dell'art. prec., allo scopo di avere il significato del secondo membro di (6) segue (art. 37).

$$a'_{x'} = a_x$$

Similmente dalle formole cogredienti alle (2) che trasformano le y nelle y' combinate sempre colle (4) segue:

$$a'_{y'} = a_y$$

e similmente si avrebbe $a'_{z'} = a_z$. Dunque mediante le formole di trasformazione delle x nelle x', delle y nelle y', delle z nelle z' e mediante le (4), che fanno appunto dipendere il significato dei simboli a' da quello dei simboli a, il secondo membro della (6) si può rendere perfettamente identico al primo, c. d. d.

61. Nelle cose dette in questo §. ci siamo limitati per maggiore semplicità al caso di una forma fondamentale con un'unica serie di variabili. E' però facile di accorgersi come esse possano estendersi, senza modificazioni essenziali, al caso generale di una forma $f(x^m; y^\mu; \ldots; z^\nu)$ con ρ serie $x, y, \ldots, z$. Siano cioè rispettivamente:

$$f(x;y;\ldots;z) \equiv a_x^m \, b_y^\mu \ldots e_z^\nu \quad , F(x';y';\ldots;z') \equiv a'^{m}_{x'} \, b'^{\mu}_{y'} \ldots e'^{\nu}_{z'}$$

le rappresentazioni simboliche (art. 48) della forma $f(x;y;\ldots;z)$ e della forma:

$$F(x';y';\ldots;z') = f(x;y;\ldots;z) \qquad (7)$$

in cui si trasforma la f quando le serie $x, y, \ldots, z$ si trasformino cogredientemente nelle serie $x', y', \ldots z'$ rispettivamente, mediante la stessa sostituzione (2) che cambia ora dimostrato si può anche riassumere nel seguente enunciato:

Se $f \equiv a_x^m$ è una certa forma ed $F \equiv a_{x'}'^{m}$ la forma che se ne deduce eseguendo sulle x una certa sostituzione lineare, il significato dei simboli a' si può desumere da quello dei simboli a trasformando le a nelle a' mediante la sostituzione lineare controgrediente a quella che si è eseguita sulle x.

Approfitteremo di questo importante principio per dare una nuova dimostrazione del carattere invariantivo delle forme polari.

Sia $f \equiv a_x^m$ una forma qualunque e sia p. es.:

$$a_x^{\lambda}\, a_y^{\mu}\, a_z^{\nu} \quad , \qquad \lambda+\mu+\nu=m$$

una sua polare mista (§.VIII). Se $F \equiv a_{x'}'^{m}$ è la trasformata di f secondo la sostituzione lineare (2), la stessa polare mista costruita per la forma trasformata F sarà espressa evidentemente da:

$$a_{x'}'^{\lambda}\, a_{y'}'^{\mu}\, a_{z'}'^{\nu}.$$

Dico che sarà:

$$a_x^{\lambda}\, a_y^{\mu}\, a_z^{\nu} = a_{x'}'^{\lambda}\, a_{y'}'^{\mu}\, a_{z'}'^{\nu} \qquad (6)$$

Infatti dalle formole (2) combinate colle (4) (di cui ci è lecito far uso, per il principio dell'art. prec., allo scopo di avere il significato del secondo membro di (6) segue (art. 37).

$$a'_{x'} = a_x$$

Similmente dalle formole cogredienti alle (2) che tra

mano le y nelle y' combinate sempre colle (4) segue:

$$a'_{y'} = a_y$$

e similmente si avrebbe $a'_{z'} = a_z$. Dunque mediante le

mole di trasformazione delle x nelle x', delle y nelle

delle z nelle z' e mediante le (4), che fanno appunto

dere il significato dei simboli a' da quello dei simb

a, il secondo membro della (6) si può rendere perfett

te identico al primo, c.d.d.

61. Nelle cose dette in questo §. ci siamo limitati

maggiore semplicità al caso di una forma fondame

le con un'unica serie di variabili. È però facile di ac

si come esse possano estendersi, senza modificazioni

ziali, al caso generale di una forma $f(\overset{m}{x};\ \overset{\mu}{y};\ldots;\overset{\nu}{z})$ co

serie $x, y, \ldots, z$. Siano cioè rispettivamente:

$$f(x;y;\ldots;z) \equiv a_x^{m}\, b_y^{\mu} \ldots e_z^{\nu} \quad , F(x';y';\ldots;z') \equiv a_{x'}'^{m}\, b_{y'}'^{\mu} \ldots e_{z'}'^{\nu}$$

le rappresentazioni simboliche (art. 48) della form

$f(x;y;\ldots;z)$ e della forma:

$$F(x';y';\ldots;z') = f(x;y;\ldots;z)$$

in cui si trasforma la f quando le serie $x, y, \ldots, z$ si

formino cogredientemente nelle serie $x', y', \ldots z'$ ris

vamente, mediante la stessa sostituzione (2) che camb le x nelle x'.

Sia poi

$$\bar A_{m_1 m_2\cdots m_n;\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\cdots;\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \equiv a_1^{m_1} a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}\, b_1^{\mu_1} b_2^{\mu_2}\cdots b_n^{\mu_n}\cdots e_1^{\nu_1} e_2^{\nu_2}\cdots e_n^{\nu_n} \qquad (8)$$

il coefficiente preparato di quel termine di f che contiene:

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}\, y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2}\cdots y_n^{\mu_n}\cdots z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2}\cdots z_n^{\nu_n},$$

ed

$$\bar A'_{m_1 m_2\cdots m_n;\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\cdots;\nu_1\nu_2\cdots\nu_n} \equiv a_1'^{m_1} a_2'^{m_2}\cdots a_n'^{m_n}\cdots e_1'^{\nu_1} e_2'^{\nu_2}\cdots e_n'^{\nu_n} \qquad (9)$$

il corrispondente coefficiente preparato di $F(x';y';\ldots;z')$, cioè il coefficiente di quel termine di F che contiene:

$$x_1'^{m_1} x_2'^{m_2}\cdots x_n'^{m_n}\, y_1'^{\mu_1} y_2'^{\mu_2}\cdots y_n'^{\mu_n}\cdots z_1'^{\nu_1} z_2'^{\nu_2}\cdots z_n'^{\nu_n}.$$

Per esprimere un qualunque coefficiente $\bar A'$ in funzione dei coefficienti $\bar A$ basterà sostituire nell'espressione simbolica (9) di $\bar A'_{m_1 m_2\cdots m_n;\mu_1\mu_2\cdots\mu_n;\cdots;\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}$ ai simboli $a', b', \ldots, e'$ i simboli $a, b, \ldots.e$ mediante le sostituzioni controgredienti alla sostituzione (2), cioè mediante le sostituzioni:

$$(10)\quad \begin{array}{ll} a_1' = \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \cdots + \varepsilon_1 a_n & b_1' = \alpha_1 b_1 + \beta_1 b_2 + \cdots + \varepsilon_1 b_n \\ a_2' = \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_2 a_n\ , & b_2' = \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_2 b_n, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_n' = \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n & b_n' = \alpha_n b_1 + \beta_n b_2 + \cdots + \varepsilon_n b_n \end{array}$$

Si otterrà così un'espressione simbolica delle $\bar A'$ formata coi simboli $a, b, \ldots, e$, i quali potranno facilmente eliminarsi mediante le (8) introducendo invece loro i valori effettivi $\bar A$.

62- Mediante le sostituzioni delle x colle x', delle y colle y', ecc. secondo le (2) e mediante le sostituzioni delle a nel le a', delle b nelle b', ecc. secondo le (10), gli elementi linea ri simbolici:

$$\begin{array}{lcl} a_x,\ b_x,\ \ldots,\ e_x & & a'_{x'},\ b'_{x'},\ \ldots,\ e'_{x'} \\ a_y,\ b_y,\ \ldots,\ e_y & \text{si cambiano risp. in} & a'_{y'},\ b'_{y'},\ \ldots,\ e'_{y'} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_z,\ b_z,\ \ldots,\ e_z & & a'_{z'},\ b'_{z'},\ \ldots,\ e'_{z'} \ldots \end{array}$$

L'eguaglianza simbolica:

$$a_x^m\, b_y^\mu \cdots e_z^\nu = a'^m_{x'}\, b'^\mu_{y'} \cdots e'^\nu_{z'}$$

che rappresenta l'eguaglianza effettiva (7), non è dunqu che un caso particolare delle uguaglianze simboliche:

$$a_x^{\alpha_{11}} a_y^{\alpha_{12}} \cdots a_z^{\alpha_{1\rho}}\, b_x^{\alpha_{21}} b_y^{\alpha_{22}} \cdots b_z^{\alpha_{2\rho}} \cdots e_x^{\alpha_{\rho 1}} e_y^{\alpha_{\rho 2}} \cdots e_z^{\alpha_{\rho\rho}}$$

$$= a'^{\alpha_{11}}_{x'} a'^{\alpha_{12}}_{y'} \cdots a'^{\alpha_{1\rho}}_{z'}\, b'^{\alpha_{21}}_{x'} b'^{\alpha_{22}}_{y'} \cdots b'^{\alpha_{2\rho}}_{z'} \cdots e'^{\alpha_{\rho 1}}_{x'} e'^{\alpha_{\rho 2}}_{y'} \cdots e'^{\alpha_{\rho\rho}}_{z'}$$

le quali, quando siano suscettibili di significato effe tivo, cioè quando siano soddisfatte le condizioni:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \cdots + \alpha_{1\rho} &= m \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \cdots + \alpha_{2\rho} &= \mu \\ &\cdots\cdots \\ \alpha_{\rho 1} + \alpha_{\rho 2} + \cdots + \alpha_{\rho\rho} &= \nu \end{aligned}$$

rappresentano (art. 56) l'uguaglianza fra una pol re qualsivoglia $\Delta(x, y, \ldots, z) f$ delle f e la polare corrispo dente delle F.

§.XII. *Definizione di invarianti e covarianti.*

- *Esempî* -

63. Sia dato un sistema di forme algebriche fondamentali n^{rie}:

$$f(x;y;\dots)\,,\ \ \varphi(x;y;\dots)\,,\ \ \dots \qquad (1)$$

con una o più serie di variabili $x, y, \dots$, a coefficienti affatto arbitrarii, e siano rispettivamente:

$$f_1(x';y';\dots)\,,\ \ \varphi_1(x';y';\dots)\,,\ \ \dots \qquad (2)$$

i valori delle (1) espressi in funzione delle variabili x', y', ... trasformate cogredienti delle $x, y, \dots$, che, cioè, si deducano risp. dalle $x, y, \dots$ mediante la stessa sostituzione lineare:

$$\begin{array}{ll} x_1=\alpha_1 x_1'+\alpha_2 x_2'+\dots+\alpha_n x_n' & y_1=\alpha_1 y_1'+\alpha_2 y_2'+\dots+\alpha_n y_n' \\ \dots\dots\dots\dots , & \dots\dots\dots\dots , \ \dots \qquad (3) \\ x_n=\varepsilon_1 x_1'+\varepsilon_2 x_2'+\dots+\varepsilon_n x_n' & y_n=\varepsilon_1 y_1'+\varepsilon_2 y_2'+\dots+\varepsilon_n y_n' \end{array}$$

Se ora A_i, B_i, ... sono risp. i coefficienti dei termini generali in $f, \varphi, \dots$ ed A_i', B_i', ... i coefficienti dei termini omologhi in $f_1, \varphi_1, \dots$, si dice che una funzione razionale $R(A;B;\dots;x;y;\dots)$ delle A_i, B_i, ... e delle x, y, ... è un *covariante* del sistema (1), o anche che è una *forma invariantiva* appartenente al sistema (1), se esiste una funzione razionale $\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)$ *dei soli coefficienti* della sostituzione lineare (3) tale che si abbia identicamente (cioè qualunque siano i valori delle A, B,

$x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots, \varepsilon$):

$$R(A';B';\dots;x';y';\dots)=\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon).R(A;B;\dots;x;y;\dots).$$

64. Se il covariante R non contiene le $x, y, \dots$, cioè dipende soltanto dai coefficienti delle (1), si dice anche che esso è un *invariante*; che se invece dipende dalle sole $x, y, \dots$, si dice anche che esso è un *covariante identico*.

Finalmente si dice che R è un covariante (o invariante) *assoluto*, quando il fattore χ è una semplice costante eguale all'unità.

65. Le forme fondamentali $f, \varphi, \dots$ sono evidentemente dei covarianti assoluti; e tali sono pure (cfr. §V) tutte le loro polari semplici o miste:

$$\mathcal{D}_{xy}f\,,\ \ \mathcal{D}_{xy}^2 f\,,\ \ \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}f\,,\ \ \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{zx}\varphi, \dots$$

e per conseguenza anche i loro prodotti, le somme dei loro prodotti, ecc.

66. L'esempio più semplice di covariante n^{ario} identico si ha nella parentesi $(xy\dots z)$ composta con n serie cogredienti $x, y, \dots, z$. Si è infatti già trovato (art. 10):

$$(x'y'\dots z')=(\alpha\beta\dots\varepsilon)^{-1}.(xy\dots z).$$

Quanto agli invarianti, l'esempio più semplice si ha nel caso di un sistema fondamentale composto di n forme lineari a_x, b_x, ... e_x. Infatti, se $a'_{x'}$, $b'_{y'}$, ... $e'_{z'}$ sono le forme lineari trasformate, si ha (art. 40)

$$(a'b'\dots e')=(\alpha\beta\dots\varepsilon).(ab\dots e)$$

67- Un esempio molto importante di covariante di una forma fondamentale $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, coll'unica serie di variabili x, si ha nel così detto *Hessiano* di f, cioè nella funzione H così definita:

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

Invero, se poniamo per un momento:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f_1 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = f_2 \ , \ \dots \ , \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = f_n$$

possiamo scrivere:

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

onde se $\xi, \eta, \dots, \omega$ sono n nuove serie di variabili affatto indipendenti fra loro e dalla serie x, si ha, per la regola del prodotto dei determinanti:

$$(\xi\,\eta \dots \omega) \cdot H = \begin{vmatrix} \mathscr{D}_{x\xi} f_1 & \mathscr{D}_{x\xi} f_2 & \dots & \mathscr{D}_{x\xi} f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathscr{D}_{x\omega} f_1 & \mathscr{D}_{x\omega} f_2 & \dots & \mathscr{D}_{x\omega} f_n \end{vmatrix}$$

e moltiplicando ancora per $(\xi\,\eta \dots \omega)$:

$$(\xi\,\eta \dots \omega)^2 \cdot H = \begin{vmatrix} \mathscr{D}_{x\xi}\mathscr{D}_{x\xi} f & \mathscr{D}_{x\xi}\mathscr{D}_{x\eta} f & \dots & \mathscr{D}_{x\xi}\mathscr{D}_{x\omega} f \\ \mathscr{D}_{x\eta}\mathscr{D}_{x\xi} f & \mathscr{D}_{x\eta}\mathscr{D}_{x\eta} f & \dots & \mathscr{D}_{x\eta}\mathscr{D}_{x\omega} f \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathscr{D}_{x\omega}\mathscr{D}_{x\xi} f & \mathscr{D}_{x\omega}\mathscr{D}_{x\eta} f & \dots & \mathscr{D}_{x\omega}\mathscr{D}_{x\omega} f \end{vmatrix}$$

Il prodotto $(\xi\,\eta \dots \omega)^2 H$ è dunque un covariante assoluto, poichè ogni elemento dell'ultimo determinante (polare mista di f) è un covariante assoluto, come si è notato sopra (art. 65). Pertanto se H' è la stessa forma H colla serie trasformata x' e coi coefficienti delle forme trasformate di f, si avrà:

$$(\xi\,\eta \dots \omega)^2 \cdot H = (\xi'\,\eta' \dots \omega')^2 \cdot H',$$

essendo $\xi', \eta', \dots \omega'$ le trasformate delle serie $\xi, \eta, \dots \omega$ cogredienti alle serie x. Ora da quest'uguaglianza e dall'uguaglianza:

$$(\xi'\,\eta' \dots \omega') = (\alpha\,\beta \dots \varepsilon)^{-1} \cdot (\xi\,\eta \dots \omega)$$

segue subito:

$$H' = (\alpha\,\beta \dots \varepsilon)^2 H$$

c. d. d.

68. Se la forma fondamentale f è una forma quadratica

$$f \equiv \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

il suo Hessiano non contiene le x, cioè si riduce ad un invariante. Quest'invariante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si chiama anche, come è noto, il *discriminante* della forma quadratica f.

---

§.XIII. *Esprimibilità dei covarianti razionali come quozienti di covarianti interi.*

Indicando, come al §. prec., con $A_i, B_i, \dots$ i coefficienti delle forme algebriche primitive $f, \varphi, \dots$ e con $A'_i, B'_i, \dots$ i corrispondenti coefficienti delle forme trasformate $f_1, \varphi_1, \dots$ componenti il sistema fondamentale:

$$f(x;y;\dots)=f_1(x';y';\dots)\quad,\quad \varphi(x;y;\dots)=\varphi_1(x';y';\dots),\dots, \qquad (1)$$

sia $R(A;B;\dots;x;y;\dots)$ un covariante razionale di questo sistema.

Si sa dalla teoria della divisibilità delle funzioni intere di più variabili che ogni funzione razionale di più variabili si può sempre esprimere, ed in un unico modo, come il quoziente di due funzioni intere, prime fra loro, delle stesse variabili. Possiamo dunque scrivere:

$$R(A;B;\dots;x;y;\dots)=\frac{F(A;B;\dots;x;y;\dots)}{\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)} \qquad (2)$$

dove F e Φ sono funzioni razionali intere *prime* fra loro di tutte le variabili $A, B, \dots \quad , y, \dots$

Per il supposto si ha:

$$\frac{F(A';B';\dots;x';y';\dots)}{\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)}=\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)\,\frac{F(A;B;\dots;x;y;\dots)}{\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)} \qquad (3)$$

dove χ è una funzione razionale delle sole variabili $\beta_i,\dots,\varepsilon_i$ (coefficienti della sostituzione lineare).

Ora dalle (1) emerge chiaramente che le A'_i sono funzioni intere delle A_i con coefficienti che sono funzioni intere delle α_i, $\beta_i;\dots,\varepsilon_i$; e lo stesso dicasi delle B'_i rispetto alle B_i, ecc. Pertanto se in luogo delle $A', B',\dots, x', y',\dots$ si pongano rispettivamente le loro espressioni nelle $A, B, \dots, x, y, \dots$, si potrà scrivere:

$$F(A';B';\dots;x';y';\dots)=\frac{F_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)}{D^k}$$
$$\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)=\frac{\Phi_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots\varepsilon)}{D^k} \qquad (4)$$

dove F_1, Φ_1 sono funzioni intere e $D=(\alpha\beta\dots\varepsilon)$; di più F_1 e Φ_1 sono nelle $A, B, \dots, x, y, \dots$ risp. degli stessi gradi delle F e Φ.

Sostituendo le espressioni (4) in (3) si avrà dunque:

$$\frac{F_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)}{\Phi_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)}=\frac{\chi_1(\alpha,\beta,\dots)\cdot F(A;B;\dots;x;y;\dots)}{\chi_2(\alpha,\beta,\dots)\cdot\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)},$$

dove χ_1, χ_2 sono certe due funzioni intere, prime fra loro, delle sole variabili $\alpha_i, \beta_i, \dots, \varepsilon_i$.

invariante. Quest'invariante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si chiama anche, come è noto, il *discriminante* della forma quadratica f.

---

§.XIII. *Esprimibilità dei covarianti razionali come quozienti di covarianti interi.*

Indicando, come al §. prec., con $A_i, B_i, \ldots$ i coefficienti delle forme algebriche primitive $f, \varphi, \ldots$ e con $A'_i, B'_i, \ldots$ i corrispondenti coefficienti delle forme trasformate $f_1, \varphi_1, \ldots$ componenti il sistema fondamentale:

$$f(x;y;\ldots)=f_1(x';y';\ldots)\ , \quad \varphi(x;y;\ldots)=\varphi_1(x';y';\ldots), \ldots, \qquad (1)$$

sia $R(A;B;\ldots;x;y;\ldots)$ un covariante razionale di questo sistema.

Si sa dalla teoria della divisibilità delle funzioni intere di più variabili che ogni funzione razionale di più variabili si può sempre esprimere, ed in un unico modo, come il quoziente di due funzioni intere, prime fra loro, delle stesse variabili. Possiamo dunque scrivere:

$$R(A;B;\ldots;x;y;\ldots)=\frac{F(A;B;\ldots;x;y;\ldots)}{\Phi(A;B;\ldots;x;y;\ldots)} \qquad (2)$$

dove F e Φ sono funzioni razionali intere *prime* fra loro di tutte le variabili $A, B, \ldots \quad , y, \ldots$

Per il supposto si ha:

$$\frac{F(A';B';\ldots;x';y';\ldots)}{\Phi(A';B';\ldots;x';y';\ldots)}=\chi(\alpha,\beta,\ldots,\varepsilon)\,\frac{F(A;B;\ldots;x;y;\ldots)}{\Phi(A;B;\ldots;x;y;\ldots)} \qquad (3)$$

dove χ è una funzione razionale delle sole variabili $\beta_i, \ldots, \varepsilon_i$ (coefficienti della sostituzione lineare).

Ora dalle (1) emerge chiaramente che le A'_i sono funzioni intere delle A_i con coefficienti che sono funzioni intere delle α_i, $\beta_i, \ldots, \varepsilon_i$; e lo stesso dicasi delle B'_i rispetto alle B_i, ecc. Pertanto se in luogo delle $A', B', \ldots, x', y', \ldots$ si pongano rispettivamente le loro espressioni nelle $A, B, \ldots, x, y, \ldots$, si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} F(A';B';\ldots;x';y';\ldots) &= \frac{F_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots,\varepsilon)}{D^k} \\ \Phi(A';B';\ldots;x';y';\ldots) &= \frac{\Phi_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots\varepsilon)}{D^k} \end{aligned} \qquad (4)$$

dove F_1, Φ_1 sono funzioni intere e $D=(\alpha\beta\ldots\varepsilon)$; di più F_1 e Φ_1 sono nelle $A, B, \ldots, x, y, \ldots$ risp. degli stessi gradi delle F e Φ.

Sostituendo le espressioni (4) in (3) si avrà dunque:

$$\frac{F_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots)}{\Phi_1(A;B;\ldots;x;y;\ldots;\alpha,\beta,\ldots)}=\frac{\chi_1(\alpha,\beta,\ldots)\cdot F(A;B;\ldots;x;y;\ldots)}{\chi_2(\alpha,\beta,\ldots)\cdot \Phi(A;B;\ldots;x;y;\ldots)},$$

dove χ_1, χ_2 sono certe due funzioni intere, prime fra loro, delle sole variabili $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \varepsilon_i$.

Poichè ora la frazione nel secondo membro è già ridotta alla sua più semplice espressione, e poichè i numeratori e i denominatori nei due membri sono risp. degli stessi gradi nelle $A_i, B_i, \dots, x_i, y_i, \dots$, dovrà esistere una funzione intera $\chi_0(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon)$ delle sole $\alpha_i, \beta_i, \dots \varepsilon_i$, tale da aversi identicamente:

$$F_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)=\chi_0\cdot\chi_1\cdot F(A;B;\dots;x;y;\dots)$$

$$\Phi_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)=\chi_0\cdot\chi_2\cdot\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots),$$

diguisachè, confrontando colle (A), si conclude:

$$F(A';B';\dots;x';y';\dots)=\chi_0\,\chi_1\,D^{-h}\cdot F(A;B;\dots;x;y;\dots)$$

$$\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)=\chi_0\,\chi_2\,D^{-k}\cdot\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots),$$

cioè che ciascuna delle due funzioni intere F e Φ è per se stessa un covariante.

Resta con ciò dimostrato che se *un covariante razionale non è intero, esso è il quoto di due covarianti interi*.

---

§. XIV. *Proprietà fondamentale dei covarianti.*

70. Dopo quanto si è stabilito nel §. prec. possiamo d'ora innanzi limitarci, di regola, allo studio dei soli covarianti interi.

Mantenendo le stesse notazioni del §. prec., sia $\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)$ un covariante intero qualunque del

sistema di forme fondamentali $f, \varphi, \dots$; cosicchè si abbia:

$$\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)=\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)\cdot\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots). \quad (1)$$

Ci proponiamo di dimostrare che *la funzione razionale $\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)$ è una potenza intera, positiva o negativa del modulo $D=(\alpha\beta\dots\varepsilon)$ della sostituzione lineare che lega le $x, y, \dots$ risp. alle $x', y', \dots$.*

71. Cominciamo dal notare che, esprimendo le $A', B', \dots, x', y', \dots$ in funzione delle $A, B, \dots, x, y, \dots$, si può porre come nel §. prec.

$$\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)=\frac{\Phi_1(A;B;\dots;x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)}{D^k}$$

ed esprimendo invece le $A, B, \dots, x, y, \dots$ in funzione delle $A', B', \dots, x', y', \dots$:

$$\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)=\frac{\Phi_2(A';B';\dots;x';y';\dots;\alpha,\beta,\dots)}{D^h}$$

dove Φ_1, Φ_2 esprimono funzioni intere ed h, k numeri interi e positivi.

Queste due formole combinate colla (1) ci danno risp.:

$$D^k\cdot\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)=\frac{\Phi_1(A;B;\dots x;y;\dots;\alpha,\beta,\dots)}{\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)}$$

e

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha,\beta,\dots,\varepsilon)}=\frac{\Phi_2(A';B';\dots;x';y';\dots;\alpha,\beta,\dots)}{\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)}$$

Poichè ora la prima di queste due uguaglianze è una identità rispetto alle variabili $A_i, B_i, \dots; x_i, y_i, \dots \alpha, \beta, \dots$ che possono prendere valori arbitrarii fra loro del tutto in-

dipendenti, e così la seconda è una identità fra le $A', B', \dots, x', y', \dots, \alpha, \beta, \dots$ che sono del pari fra loro indipendenti, potremo nella prima eguaglianza sostituire per $A_i, B_i, \dots, x, y, \dots$ dei numeri scelti a piacere, che però non annullino la funzione $\Phi(A;B;\dots;x;y;\dots)$ e similmente nella seconda potremo sostituire per le $A_i', B_i', \dots, x', y', \dots$ dei numeri qualsivogliano che non annullino $\Phi(A';B';\dots;x';y';\dots)$.
Dopo ciò in queste uguaglianze resteranno indeterminate, e ancora completamente arbitrarie, le sole $\alpha_i, \beta_i, \dots \varepsilon_i$, le quali però figurano, nei secondi membri, soltanto nei numeratori, cioè in modo intero. Le due sopraddette uguaglianze assumeranno dunque la forma speciale seguente:

$$D^k \cdot \chi(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = \psi_1(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \qquad (3)$$

$$\frac{D^h}{\chi(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon)} = \psi_2(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \qquad (4)$$

essendo ψ_1, ψ_2 funzioni intere delle sole $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$.
Ora queste due uguaglianze moltiplicate membro a membro ci danno l'identità:

$$\psi_1(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \cdot \psi_2(\alpha, \beta, \dots \varepsilon) = D^{h+k},$$

dalla quale, poichè le funzioni intere ψ_1 e ψ_2 non possono decomporsi in un prodotto di funzioni prime che in un unico modo, appare chiaramente che ognuna di esse deve essere una potenza intera e positiva di D.
Sostituendo nella (3) per ψ tale potenza di D, si avrà dunque:

$$\chi(\alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = D^{\tau}$$

essendo τ un intero positivo o negativo, c. d. d.

72. Il numero τ per il quale è soddisfatta l'uguaglianza:

$$\Phi(A'; B'; \dots; x'; y'; \dots) = (\alpha \beta \dots \varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi(A; B; \dots; x; y; \dots)$$

si chiama (per ragioni che appariranno nel seguente §) il peso del covariante Φ.
Vediamo così, in particolare (art. 65) che le parentesi di variabili $(x\, y \dots z)$ sono covarianti di peso negativo $(=-1)$, nel mentre che le parentesi di coefficienti di forme lineari $(a\, b \dots e)$ sono invarianti di peso positivo $(=+1)$.
Invece le forme polari delle forme fondamentali sono tutti (art. 64) covarianti di peso nullo.

---

§ XV. *Relazione fra ordini, gradi e peso di un covariante.*

73. Mantenendo ancora le stesse notazioni dei §. precedenti, sia Φ un covariante di peso τ delle forme fondamentali:

(1) $\quad f(x; y; \dots), \ \varphi(x; y; \dots), \ \dots,$

cosicchè

(2) $\quad \Phi(A'; B'; \dots; x; y; \dots) = (\alpha \beta \dots \varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi(A; B; \dots; x; y; \dots).$

Se il covariante Φ non fosse omogeneo nei coefficienti della forma f, o negli elementi delle serie x, esso dovrebbe evidentemente essere la somma di parti omogenee, ciascuna delle quali, al pari di tutta la funzione Φ, dovrebbe per se stessa soddisfare alla (2), ossia godere essa stessa della proprietà invariantiva. Pertanto ci limiteremo d'ora innanzi a considerare covarianti omogenei nei coefficienti di ogni singola forma fondamentale e del pari omogenei negli elementi di ogni singola serie di variabili.

Ciò posto, se indichiamo con g_1 il grado di Φ nei coefficienti A della forma f, con g_2 il suo grado nei coefficienti B di φ, ecc., i numeri $g_1, g_2, \ldots$ si diranno i **gradi** del covariante Φ (risp. corrispondenti alle forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$). Se indichiamo poi risp. con $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ il grado di Φ nella serie x, nella serie y, ecc., i numeri $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ si chiameranno gli *ordini* di Φ (per le rispettive serie $x, y, \ldots$).

74- Sia m_1 il grado complessivo della forma fondamentale f in tutte le $x, y, \ldots$; sia m_2 il grado analogo per la φ, ecc.

Se sostituiamo in Φ in luogo delle $A', B', \ldots$ le loro espressioni nelle $A, B, \ldots$, si otterrà:

$$\Phi(A'; B'; \ldots; x'; y'; \ldots) = \Phi_1(A; B; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \tag{3}$$

dove Φ_1 è una funzione razionale intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sarà omogenea e di grado $m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots$

poichè Φ è del grado g_1 nelle A' ed ogni A' si esprime con una funzione intera delle A e delle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ che rispetto a queste ultime è omogenea e del grado stesso m_1 della forma fondamentale f, e similmente per le B', ecc. Se invece sostituiamo in $\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots)$ in luogo delle $x, y, \ldots$ le loro espressioni nelle $x', y', \ldots$ che sono lineari ed omogenee nelle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, si avrà:

$$\Phi(A; B; \ldots; x; y; \ldots) = \Phi(A; B; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) \tag{4}$$

dove Φ_2 è funzione intera che rispetto alle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sarà omogenea e di grado $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$. Dalle (2), (3), (4) segue ora:

$$\Phi_1(A; B; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = (\alpha\beta\ldots\varepsilon)^{\tau} \cdot \Phi_2(A; B; \ldots; x'; y'; \ldots; \alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$$

e deve essere questa un'identità rispetto alle variabili completamente indipendenti $A, B, \ldots; x', y', \ldots; \alpha, \beta, \ldots \varepsilon$. Eguagliando i gradi dei due membri nelle $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, si trova così che dev'essere:

$$m_1 g_1 + m_2 g_2 + \ldots = n\tau + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$$

Pertanto: il peso di un covariante n^{ario} si esprime, in funzione dei suoi gradi ed ordini e degli ordini complessivi $m_1, m_2, \ldots$ delle forme fondamentali, mediante la formola:

$$\tau = \frac{\sum_i m_i g_i - \sum_i \gamma_i}{n}.$$

75- Se nella forma fondamentale (che per semplicità supporremo contenere la sola serie x):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

consideriamo un coefficiente qualunque $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$, gli indici $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, ai quali esso corrisponde, li chiameremo i pesi di tale coefficiente; e precisamente chiameremo *primo peso* l'indice α_1, *secondo peso* l'indice α_2, e così via.

Ciò posto, si eseguisca nella f la sostituzione lineare semplicissima:

$$x_1 = x_1', \dots, x_{h-1} = x_{h-1}', \; x_h = \varepsilon x_h', \; x_{h+1} = x_{h+1}', \dots, x_n = x_n'.$$

Si avrà

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum \varepsilon^{\alpha_h} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} (x_1')^{\alpha_1}(x_2')^{\alpha_2}\cdots(x_n')^{\alpha_n},$$

onde

$$A'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_h} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$$

e similmente per le altre forme fondamentali $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots$

Pertanto, esprimendo nelle (2) le $A', B', \dots$ colle $A, B, \dots$ e le $x', y', \dots$ colle $x, y, \dots$ ed osservando che ora $(\alpha\beta\dots) = \varepsilon$, si trova l'identità:

$$\Phi\left(\varepsilon^p A; \varepsilon^q B; \dots; \begin{array}{ccc} x_1, & y_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{x_h}{\varepsilon}, & \frac{y_h}{\varepsilon}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n, & y_n, & \dots \end{array} \right) = \varepsilon^\tau \Phi\left(A; B; \dots; \begin{array}{ccc} x_1, & y_1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_h, & y_h, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n, & y_n, & \dots \end{array} \right)$$

dove p indica l'h^{mo} peso del coefficiente A, similmente q l'h^{mo} peso di B, ecc. Identificando ogni termine del primo membro col corrispondente del secondo, si vede di qui che, se P_h è la somma degli h^{mi} pesi di tutti i coefficienti $A, B, \dots$ che entrano come fattori (semplici o ripetuti) in un qualsiasi

termine del covariante Φ e Π_h è il grado di questo stesso termine rispetto alle variabili $x_h, y_h, \dots$, la differenza $P_h - \Pi_h$ è uguale a τ, peso del covariante Φ.

La differenza $P_h - \Pi_h$ (che si definisce come peso h^{mo} del termine considerato) ha dunque lo stesso valore in ogni termine del covariante Φ. Essa è inoltre indipendente da h, e si ha:*

$$P_1 - \Pi_1 = P_2 - \Pi_2 = \dots = P_n - \Pi_n = \tau$$

essendo τ il peso del covariante Φ.

Questo teorema si enuncia spesso dicendo che la funzione Φ è *isobarica* (cioè di egual peso in tutti i suoi termini) rispetto a ciascuno degli n indici $1, 2, \dots, n$.

76. Se le forme fondamentali $f, \varphi, \dots$ contengono un numero qualunque ν di serie di variabili $x, y, \dots z$, e sia una qualunque di esse:

$$f \equiv \sum A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n} x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\dots y_n^{\beta_n}\dots z_1^{\gamma_1}z_2^{\gamma_2}\dots z_n^{\gamma_n},$$

si chiamerà *peso h^{mo}* del coefficiente $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_n}$ la somma $\alpha_h + \beta_h + \dots + \gamma_h$.

Si chiamerà poi *peso h^{mo}* di un prodotto qualunque di coef.

---

* Così, ad esempio, il termine $A_{123} A_{213}^3 B_{310} x_1 x_2 x_3 y_1 y_2^2$ avrà:

per primo peso: $1+(3\times2)+3-1-1 = 8$

per secondo peso. $2+(3\times1)+1-1-(2\times1) = 3$

per terzo peso: $3+(3\times3)+0-1-0 = 11$

onde esso non potrebbe essere termine di alcun covariante ternario.

ficienti $A, B, \dots$ e di variabili $x, y, \dots$ la somma dei pesi di tutti i coefficienti $A, B, \dots$ che entrano come fattori del prodotto, diminuita del grado complessivo del prodotto stesso nelle variabili $x_h, y_h, \dots, z_h$, cioè in quelle variabili che hanno per indice h.

Da questa definizione emerge per esempio che il peso di un prodotto di soli coefficienti $A, B, \dots$ è sempre positivo, che invece è sempre negativo il peso di un prodotto di sole variabili $x, y, \dots$, che il peso di un termine qualunque delle forme fondamentali è sempre uguale a zero, ecc.

Ciò premesso, è chiaro che la dimostrazione dell'art. 75 si estende immediatamente anche al caso in cui le forme fondamentali $f, \varphi, \dots$ contengano un numero qualunque di serie di variabili, conducendo precisamente allo stesso enunciato, cioè che: *i termini di un covariante qualunque Φ hanno tutti lo stesso peso h^{mo} (sono isobarici rispetto all'indice h). Questo peso comune h^{mo} è indipendente da h ed è uguale al peso τ del covariante.*

---

§. XVI. – *Numero degli invarianti e covarianti algebricamente indipendenti di un sistema di forme fondamentali.*

77. – Siano $A_1, A_2, \dots, A_N$ i coefficienti, affatto generali, scritti in un ordine da fissarsi ad arbitrio, della data forma fondamentale o del sistema dato di forme fondamentali.

Siano poi $A'_1, A'_2, \dots, A'_N$ i coefficienti corrispondenti delle forme trasformate per mezzo della sostituzione lineare:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \dots + \alpha_n x'_n \\ x_2 &= \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \dots + \beta_n x'_n \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \varepsilon_1 x'_1 + \varepsilon_2 x'_2 + \dots + \varepsilon_n x'_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si ha:

$$\left.\begin{aligned} A'_1 &= f_1(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \\ A'_2 &= f_2(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ A'_N &= f_N(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

essendo le f simboli di funzioni razionali intere. Noi ammetteremo come postulato che fra le N funzioni $f_1, f_2, \dots, f_N$ considerate come funzioni delle sole n^2 variabili $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, ve ne siano n^2 fra loro indipendenti (*); per il che si richiede, evidentemente, che sia soddisfatta la condizione:

$$N \gtreqless n^2. \qquad (3)$$

Ciò premesso, e supposto, per fissare le idee, che siano fra loro indipendenti le prime n^2 funzioni $f_1, f_2, \dots, f_{n^2}$, riguardate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, si potranno sempre al-

---

(*) In altri termini: che non sia, p. es.:

$$f_i = F_i(f_1, f_2, \dots, f_{n^2}, A_1, A_2, \dots, A_N) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

identicamente nelle variabili $A_1, \dots, A_N, \alpha, \beta, \dots, \varepsilon$.

le n^2 quantità $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ dare dei valori tali da soddisfare alle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} & f_1(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = c_1 \\ & f_2(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = c_2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & f_{n^2}(A_1, A_2, \dots, A_N; \alpha, \beta, \dots, \varepsilon) = c_{n^2} \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

essendo le c delle costanti da fissarsi ad arbitrio al pari delle A. Immaginando risolute le (4) rispetto alle $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ e sostituiti i risultati nelle (2), si otterranno per le A' delle espressioni speciali, che indicheremo con (A), della forma:

$$\left.\begin{aligned} & (A_1) = c_1, \ (A_2) = c_2, \dots, (A_{n^2}) = c_{n^2} \\ & (A_{n^2+1}) = \varphi_1(A_1, \dots, A_N), \dots, (A_N) = \varphi_{N-n^2}(A_1, \dots, A_N) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

dove le φ sono simboli di funzioni *algebriche*.

Siano ora $A_1', A_2', \dots, A_N'$ dei coefficienti trasformati ottenuti dai primitivi $A_1, A_2, \dots, A_N$ mediante una qualsiasi sostituzione (1) che indicheremo con S. Componendo questa sostituzione S colla sostituzione S', testé considerata, mediante la quale le $A_1', A_2', \dots, A_N'$ si trasformano rispettivamente in $(A_1'), (A_2'), \dots, (A_N')$, si avrà che, mediante la sostituzione SS', i coefficienti $A_1, A_2, \dots, A_N$ si saranno cangiati rispettivamente in:

$$c_1, c_2, \dots, c_{n^2}, \ \varphi(A_1', \dots, A_N'), \dots, \varphi_{N-n^2}(A_1', \dots, A_N').$$

La sostituzione SS' ha dunque i suoi coefficienti $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ soddisfacenti alle (4), onde sarà:

$$\varphi_i(A_1', \dots, A_N') = \varphi_i(A_1, \dots, A_N) \quad , i = 1, 2, \dots, N-n^2 \qquad (6)$$

78. La funzione φ_i non essendo in generale razionale, ma soltanto algebrica, il simbolo $\varphi_i(A_1, \dots, A_N)$ è suscettibile di un certo numero finito di significati; cosicché l'eguaglianza (6) deve intendersi nel senso che uno dei significati di $\varphi_i(A_1, \dots, A_N)$ coincida con uno dei significati di $\varphi_i(A_1', \dots, A_N')$.

Pertanto, se indichiamo con $\Phi_i(A_1, \dots, A_N)$ il prodotto di tutti i significati distinti che può ammettere $\varphi_i(A_1, \dots, A_N)$, si avrà evidentemente (avendo le A' lo stesso grado di generalità delle A):

$$\Phi_i(A_1', \dots, A_N') = \Phi_i(A_1, \dots, A_N) \quad , i = 1, 2, \dots, N-n^2, \qquad (7)$$

ed è chiaro che le Φ_i sono ora funzioni *razionali* delle $A_1, \dots, A_N$.

Le (7) ci dicono dunque che *le funzioni razionali $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{N-n^2}$ dei coefficienti $A_1, A_2, \dots, A_N$ sono altrettanti invarianti assoluti del sistema delle forme fondamentali.*

79. Non possiamo asserire che gli $N-n^2$ invarianti assoluti razionali così costruiti siano indipendenti, cioè suscettibili di assumere altrettanti valori arbitrariamente fissati, disponendo opportunamente delle $A_1, A_2, \dots, A_N$. Si consideri però che, oltre alla funzione Φ_i prodotto dei significati differenti $\varphi_i', \varphi_i'', \dots, \varphi_i^{(\lambda)}$ che può assumere φ_i, si potranno considerare anche le altre funzioni simme-

triche elementari:

$$\Phi_i' = \varphi_i' + \varphi_i'' + \cdots + \varphi_i^{(\lambda)}$$

$$\Phi_i'' = \varphi_i' \varphi_i'' + \varphi_i' \varphi_i''' + \varphi_i'' \varphi_i''' + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

che sono del pari funzioni razionali delle $A_1, A_2, \ldots, A_N$.
E' chiaro che φ_i sarà una funzione delle $\Phi_i', \Phi_i'', \ldots$, poichè essa è radice dell'equazione:

$$\varphi_i^\lambda + \Phi_i' \varphi_i^{\lambda-1} + \Phi_i'' \varphi_i^{\lambda-2} + \cdots + \Phi_i = 0. \qquad (8)$$

Le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$ sono dunque funzioni algebriche degl'invarianti assoluti razionali

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_1', \; \Phi_1'', \; \Phi_1''', \; \ldots \\ \Phi_2', \; \Phi_2'', \; \Phi_2''', \; \ldots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (9)$$

onde fra tutti questi ultimi invarianti assoluti ve ne saranno almeno $N-n^2$ fra loro indipendenti, senza di che le $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$, il cui numero è $N-n^2$, non sarebbero fra loro indipendenti. Invece le funzioni algebriche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-n^2}$ sono fra loro indipendenti, poichè si possono sempre determinare i coefficienti $A_1, A_2, \ldots, A_N$ delle forme fondamentali in modo che i corrispondenti coefficienti trasformati assumano rispettivamente i valori:

$$c_1, \; c_2, \; \ldots, \; c_{n^2}, \; (A_{n^2+1}), \; (A_{n^2+2}), \ldots, (A_N),$$

dei quali gli ultimi $N-n^2$ siano stati prefissati ad arbitrio.

80- Dimostrata così l'esistenza di $N-n^2$ invarianti assoluti razionali fra loro indipendenti, ci rimane soltanto a dimostrare che il numero degl'invarianti assoluti indipendenti non potrebbe superare $N-n^2$. Sia infatti $\psi(A_1, A_2, \ldots, A_N)$ un invariante assoluto. Si dovrà avere

$$\psi(A_1, A_2, \ldots, A_N) = \psi\left(c_1, c_2, \ldots, c_{n^2}, (A_{n^2+1}), \ldots, (A_N)\right)$$

d'onde si vede, poichè le $c_1, \ldots, c_{n^2}$ non sono che dei semplici numeri ben determinati, che la $\psi(A_1, \ldots, A_N)$ si può considerare come funzione delle $(A_{n^2+1}), \ldots, (A_N)$; cioè che ogni invariante assoluto è funzione degli invarianti assoluti $\varphi_1(A_1, \ldots, A_n), \ldots, \varphi_{N-n^2}(A_1, \ldots, A_N)$, c.d.d.

Esistono dunque, per un sistema di forme fondamentali $n^{\underline{arie}}$ generali con N coefficienti, precisamente $N-n^2$ invarianti assoluti razionali fra loro indipendenti; ed ogni invariante assoluto algebrico non è che una funzione di essi.

81. Le cose dette si estendono, senza alcuna modificazione essenziale, alla ricerca del numero dei covarianti assoluti, di un sistema di forme fondamentali $n^{\underline{arie}}$ con M coefficienti, i quali possano anche contenere certe ρ serie di variabili $x, y, \ldots$. Basterà porre:

$$N = M + n\rho$$

e intendere colle $A_1, A_2, \ldots, A_N$ dei precedenti articoli non solamente gli M coefficienti delle forme fondamentali, ma altresì le np variabili:

$$\begin{array}{c} x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n \\ y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Per esempio colle $A_1, A_2, \ldots, A_{np}$ si potranno intendere le np variabili e colle $A_{np+1}, A_{np+2}, \ldots$ i coefficienti delle forme fondamentali. Sarà anzi utile di ciò fare, poichè, in tal modo, fra le prime n^2 funzioni $f_1(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$, $f_2(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon)$, ... considerate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, ve ne saranno certamente np fra loro indipendenti per $p \lesseqgtr n$, e quindi le prime n^2 funzioni saranno certamente indipendenti se $p \gtreqless n$. E' infatti agevole di riconoscere (cfr. §. VII) che gli np elementi lineari:

$$\begin{array}{c} \alpha_x, \; \beta_x, \; \ldots, \; \varepsilon_x \\ \alpha_y, \; \beta_y, \; \ldots, \; \varepsilon_y \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

sono fra loro indipendenti, per $p \lesseqgtr n$, quand'anche si riguardino come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$.

Pertanto: *dato un sistema fondamentale di forme generali n^{arie} con un numero totale M di coefficienti, quei suoi covarianti assoluti che possono contenere, oltre ai coefficienti, certe p serie di variabili, sono funzione di $M+np-n^2$ fra essi, e precisamente di $M+np-n^2$ covarianti assoluti razionali fra loro indipendenti.*

82. Se il sistema delle forme fondamentali $f, \varphi, \ldots$, ammette un covariante assoluto, esso ammetterà almeno un covariante intero Γ, poichè il covariante assoluto, se non è intero, è necessariamente (§. XIII) il quoziente di due covarianti interi. Se il sistema ammette qualche altro covariante intero C, si avrà, detti risp. θ e τ i pesi di Γ e di C e detto D il modulo della sostituzione lineare:

$$C' = D^{\tau} C \qquad , \qquad \Gamma' = D^{\theta} \Gamma$$

d'onde segue facilmente:

$$\frac{C'^{\theta}}{\Gamma'^{\tau}} = \frac{C^{\theta}}{\Gamma^{\tau}}$$

e questa uguaglianza ci dice che il quoziente $\frac{C^{\theta}}{\Gamma^{\tau}}$ è un covariante assoluto dello stesso sistema di forme fondamentali.

Detto J questo covariante assoluto, potremo scrivere:

$$C = \sqrt[\theta]{\Gamma^{\tau} \cdot J}$$

d'onde appare che tutti i covarianti interi ammessi dal detto sistema fondamentale si possono esprimere in funzione dei suoi covarianti assoluti e di un unico covavariante intero Γ. Per conseguenza: *il numero dei covarianti interi, fra loro algebricamente indipendenti, del sistema fondamentale dato, che possono contenere certe serie di variabili, è uguale (semprechè ne esista almeno uno che non sia assoluto) al numero dei covarianti assoluti, che possono contenere quelle stesse serie di variabili, accresciuto di un'unità.*

83. I risultati dei precedenti articoli erano subordinati all'ipotesi che si verifichi il postulato dell'art. 77. E' però facile di vedere in qual modo essi debbano modificarsi nel caso che il postulato non fosse soddisfatto, cioè nel caso in cui fra le N funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_N$, considerate come funzioni delle sole $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$, non ve ne fossero n^2 fra loro indipendenti, ma soltanto un numero più piccolo h. Supposto infatti, per fissare le idee, che per siffatte funzioni indipendenti potessero scegliersi le prime h, cosicchè si avesse:

$$f_i(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = F_i(A_1, \ldots, A_N; f_1, f_2, \ldots, f_h), \quad \text{per } i > h,$$

il sistema delle (2) potrebbe scriversi:

$$\begin{aligned} A'_1 &= f_1(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = c_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A'_h &= f_h(A_1, \ldots, A_N; \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon) = c_h \\ A'_{h+1} &= F_{h+1}(A_1, \ldots, A_N; c_1, c_2, \ldots, c_h) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A'_N &= F_N(A_1, \ldots, A_N; c_1, c_2, \ldots, c_h) \end{aligned}$$

cosicchè, se le $c_1, \ldots, c_h$ si riguardino come delle costanti numeriche da fissarsi ad arbitrio, si potranno sempre determinare, qualunque siano i coefficienti A, le $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ in modo da avere pei coefficienti trasformati (A):

$$\left.\begin{aligned} (A_1) = c_1, \ (A_2) = c_2, \ \ldots, (A_h) = c_h \\ (A_{h+1}) = \varphi_1(A_1, \ldots, A_N), \ \ldots, (A_N) = \varphi_{N-h}(A_1, \ldots, A_N). \end{aligned}\right\} \quad (5)'$$

Da questo punto in poi si potranno ripetere le medesime deduzioni fatte negli articoli precedenti a partire dal sistema (5), e si finirà quindi per concludere che *il numero dei covarianti assoluti, che si possono formare cogli M coefficienti delle forme fondamentali e colle ρ serie di variabili, anzichè essere dato (come quando vale il postulato) da $M + n\rho - n^2$ è ancora maggiore, e precisamente è dato da $M + n\rho - h$.*

84. E' importante di riconoscere come esista effettivamente qualche caso in cui non si verifica il postulato dell'art 77. Il caso più semplice è quello in cui il sistema fondamentale è costituito da un'unica forma lineare binaria $f = a_x$, cosicchè $n = 2$, $M = 2$ e si cerchi il numero dei covarianti assoluti indipendenti che contengano, al più, un'unica serie di variabili x, cosicchè $\rho = 1$. Se valesse il postulato, il numero di siffatti covarianti, cioè $M + n\rho - n^2$, esser dovrebbe nullo. Invece ne esiste certamente uno, che è la stessa forma fondamentale a_x. Siamo perciò sicuri

che in questo caso il postulato non è soddisfatto; cioè che le quattro funzioni che si ottengono esprimendo i coefficienti e le variabili trasformate a_1', a_2', x_1', x_2' per mezzo dei coefficienti e delle variabili primitive a_1, a_2, x_1, x_2 e dei coefficienti α_1, α_2, β_1, β_2 della sostituzione lineare trasformatrice

$$x_1 = \alpha_1 x_1' + \alpha_2 x_2'$$

$$x_2 = \beta_1 x_1' + \beta_2 x_2'$$

considerate come funzioni delle sole $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ non sono fra loro indipendenti.

In effetto si ha nel caso attuale:

$$x_1' = f_1(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \frac{\beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

$$x_2' = f_2(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \frac{\alpha_1 x_2 - \beta_1 x_1}{\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1}$$

$$a_1' = f_3(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2$$

$$a_2' = f_4(a; x; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \equiv \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2$$

e fra le quattro funzioni f_1, f_2, f_3, f_4 esiste, come è facile verificare, la relazione:

$$f_1 f_3 + f_2 f_4 = a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Poichè è questa l'unica relazione fra le f_1, f_2, f_3, f_4, di queste quattro funzioni, considerate come funzioni delle sole $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, soltanto tre sono indipendenti, cioè si ha $h = 3$; epperò il numero dei covarianti assoluti con una sola serie x è dato da $M + n\rho - h = 1$.

85. Proponiamoci ora invece di cercare il numero dei covarianti del sistema di tre forme fondamentali binarie lineari:

$$f \equiv a_x \quad , \varphi = b_x \quad , \psi = c_x$$

i quali, oltre ai coefficienti delle forme possano anche contenere l'unica serie x, di variabili ($M = 6$, $\rho = 1$, $n = 2$).

Poichè i quattro coefficienti trasformati a_1', a_2', b_1', b_2', espressi coi coefficienti primitivi e coi coefficienti della sostituzione lineare, ci dànno già quattro funzioni indipendenti di questi ultimi, il postulato dell'art. 77 è certamente verificato. Esistono dunque $M + n\rho - n^2$, cioè 4 covarianti assoluti indipendenti. Quanto ai covarianti interi, ve ne sono di assoluti, come a_x, b_x, c_x, e di non assoluti, come (ab), (bc), (ac). Il numero dei covarianti interi indipendenti dev'essere però (art. 82) uguale a quello dei covarianti assoluti accresciuto di un'unità, cioè a 5.

Si vede adunque che fra i sei covarianti interi ora citati deve esistere una relazione. Ed infatti si verificherà facilmente l'identità:

$$(ab) \cdot c_x + (bc) \cdot a_x + (ca) \cdot b_x = 0.$$

Come covarianti assoluti indipendenti si potranno prendere, per esempio, i quattro:

$$a_x \quad , \quad b_x \quad , \quad c_x \quad , \quad \frac{(ab)}{(ac)}.$$

---

§.XVII. *I covarianti di Cayley e l'operazione Ω.*

86. Sia $f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\dots;\overset{\nu}{z})$ la forma algebrica n^{aria} più generale di dati ordini $m,\mu,\dots,\nu$ nelle n serie di variabili n^{arie} $x,y,\dots,z$. Possiamo porre simbolicamente (art. 48):

$$f\equiv a_x^m\, b_y^\mu \dots e_z^\nu. \tag{1}$$

Se k è un intero positivo non superiore al più piccolo degli n numeri $m,\mu,\dots,\nu$ l'espressione simbolica:

$$(a\,b\dots e)^k a_x^{m-k}\, b_y^{\mu-k}\dots e_z^{\nu-k} \tag{2}$$

ha un significato effettivo ben determinato, e precisamente essa ci rappresenta, come segue facilmente dalle cose viste al §.XI, un covariante della forma fondamentale (1), che indicheremo con C_k.

Invero se:

$$f_1\equiv a'^{\,m}_{x'}\, b'^{\,\mu}_{y'}\dots e'^{\,\nu}_{z'} \tag{1)'$$

è la rappresentazione simbolica della forma algebrica f_1 ottenuta da f mediante la sostituzione lineare

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\alpha_1 x_1'+\dots+\alpha_n x_n' \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n=\varepsilon_1 x_1'+\dots+\varepsilon_n x_n' \end{array}\right\},\ (\alpha\,\beta\dots\varepsilon)=D, \tag{3}$$

la funzione C_k', cioè la stessa C_k costruita per la f_1, sarà evidentemente espressa simbolicamente da:

$$C_k'\equiv(a'b'\dots e')^k a'^{\,m-k}_{x'}\, b'^{\,\mu-k}_{y'}\dots e'^{\,\nu-k}_{z'}. \tag{2)'$$

Volendo ora introdurre in C_k' in luogo dei simboli $a', b',\dots,e'$ i simboli primitivi $a,b,\dots,e$ e in luogo delle $x',y',\dots,z'$ le $x,y,\dots,z$, basterà (art. 61) esprimere le a' colle a, le b' colle b, ... mediante la sostituzione lineare controgrediente alla (3) il che ci dà:

$$(a'b'\dots e')=D\cdot(a\,b\dots e)$$

e al tempo stesso le x colle x', le y colle y', ... mediante la stessa (3), il che ci dà:

$$a'_{x'}=a_x\ ,\quad b'_{y'}=b_y\ ,\quad \dots\dots\ ,\quad e'_{z'}=e_z\ .$$

L'espressione (2)' si viene con ciò a cambiare, a meno di una potenza di D, nell'espressione (2). La forma C_k è dunque un covariante di f; e precisamente si ha:

$$C_k'=D^k\cdot C_k\ ,$$

cioè C_k è un covariante di peso k.

87. Per $k=1$ si ha in particolare il covariante:

$$C_1\equiv(a\,b\dots e)a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}\dots e_z^{\nu-1}$$

che noi chiameremo il primo covariante di Cayley della forma f o anche semplicemente *il covariante Cayleyano* di f, giacchè esso si può anche ricavare da f, fatta astrazione da un coefficiente numerico, mediante l'operazione

$$\Omega\equiv\sum\pm\frac{\partial^n}{\partial x_1\partial y_2\dots\partial z_n}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial z_n}\end{vmatrix} \tag{4}$$

che si suole designare con Ω ed è appunto conosciuta col nome di *operazione di Cayley*. Precisamente, si ha:

$$\Omega f = m\mu\ldots\nu\cdot C_1 .$$

Si trova infatti, supponendo per fissare le idee $n=3$:

$$\frac{\partial^3\left\{a_x^m\, b_y^\mu\, c_z^\nu\right\}}{\partial x_i\,\partial y_j\,\partial z_h} = m\mu\nu\cdot a_x^{m-1}\, b_y^{\mu-1}\, c_z^{\nu-1}\, a_i\, b_j\, c_h$$

d'onde prendendo per i, j, h tutte le permutazioni dei tre indici $1, 2, 3$, segue appunto:

$$\sum\pm\frac{\partial\left\{a_x^m\, b_y^\mu\, c_z^\nu\right\}}{\partial x_i\,\partial y_j\,\partial z_h} = m\mu\nu\cdot a_x^{m-1}\, b_y^{\mu-1}\, c_z^{\nu-1}\sum\pm a_i\, b_j\, c_h$$

$$= m\mu\nu\cdot(a\,b\,c)\,a_x^{m-1}\, b_y^{\mu-1}\, c_z^{\nu-1} .$$

88. Applicando ora ai due membri dell'identità:

$$\Omega\left\{a_x^m\, b_y^\mu\ldots e_z^\nu\right\} = m\mu\ldots\nu\cdot(a\,b\ldots e)\,a_x^{m-1}\, b_y^{\mu-1}\ldots e_z^{\nu-1}$$

la stessa operazione, si trova similmente:

$$\Omega\left\{\Omega\left\{a_x^m\, b_y^\mu\ldots e_z^\nu\right\}\right\} = m\mu\ldots\nu\cdot(m-1)(\mu-1)\ldots(\nu-1)\cdot(a\,b\ldots e)^2\, a_x^{m-2}\, b_y^{\mu-2}\ldots e_z^{\nu-2},$$

e procedendo allo stesso modo:(*)

$$\Omega^k\left\{a_x^m\, b_y^\mu\ldots e_z^\nu\right\} = m^{\bar k}\,\mu^{\bar k}\ldots\nu^{\bar k}\cdot(a\,b\ldots e)^k\, a_x^{m-k}\, b_y^{\mu-k}\ldots e_z^{\nu-k}$$

cosicchè:

(*) Con $x^{\bar k}$ designeremo ora ed in seguito la k^{ma} potenza fattoriale di x; cioè

$$x^{\bar k} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+k-1).$$

$$C_k = \frac{1}{m^{\bar k}\,\mu^{\bar k}\ldots\nu^{\bar k}}\cdot\Omega^k f$$

89. Se oltre alle serie $x, y, \ldots z$ consideriamo altre n serie ausiliarie $\xi, \eta, \ldots \zeta$ indipendenti fra loro e dalle $x, y, \ldots, z$ ed in luogo dell'operazione Ω consideriamo l'operazione

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{x,y,\ldots,z}$$

che consiste nell'operare su una funzione qualunque delle $x, y, \ldots z$ coll'operazione Ω fra le $x, y, \ldots z$ (che a scanso di equivoci si indicherà anche con $\Omega_{x,y,\ldots,z}$), moltiplicare poi il risultato per $(\xi\,\eta\ldots\zeta)$, possiamo scrivere:

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{x,y,\ldots,z} = \left\{\sum\pm\xi_1\,\eta_2\ldots\zeta_n\right\}\left\{\sum\pm\frac{\partial}{\partial x_1}\,\frac{\partial}{\partial y_2}\ldots\frac{\partial}{\partial z_n}\right\}$$

e applicando la regola del prodotto di due determinanti:

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{x\xi} & \mathcal{D}_{x\eta} & \ldots & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{y\eta} & \ldots & \mathcal{D}_{y\zeta} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{z\eta} & \ldots & \mathcal{D}_{z\zeta} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

dove il significato del secondo membro non può essere equivoco, giacchè le operazioni di polare elementari che vi figurano sono tutte permutabili fra loro due a due.

90. Se dunque F è una funzione qualunque delle variabili $x, y, \ldots, z$ ed F_1 è la funzione delle $x', y', \ldots, z'$ in cui si cambia la F mediante le sostituzioni (3), si avrà:

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{xy\ldots z}F=\sum\pm\mathcal{D}_{x\xi}\,\mathcal{D}_{y\eta}\ldots\mathcal{D}_{z\zeta}F$$

e similmente:

$$(\xi'\,\eta'\ldots\zeta')\,\Omega_{x'y'\ldots z'}F_1=\sum\pm\mathcal{D}_{x'\xi'}\,\mathcal{D}_{y'\eta'}\ldots\mathcal{D}_{z'\zeta'}F_1 .$$

Da queste due eguaglianze, poichè i loro secondi membri sono uguali (art. 35) segue:

$$(\xi\,\eta\ldots\zeta)\,\Omega_{xy..z}F=(\xi'\,\eta'\ldots\omega')\,\Omega_{x'y'..z'}F_1$$

e quindi anche, poichè $(\xi\,\eta\ldots\omega)=(\alpha\,\beta\ldots\varepsilon)(x'y'\ldots z')$:

$$\Omega_{x'y'..z'}F_1=\mathcal{D}\cdot\Omega_{xy..z}F .$$

Il carattere invariantivo dell'operazione Ω resta così nuovamente dimostrato, in modo anche più generale, poichè F è qui una funzione qualunque delle $x, y, \ldots z$.

91. *L'operazione $\Omega_{xy..z}$ è permutabile colle operazioni di polare elementari formate colle stesse serie $x\ y\ldots z$, ad eccezione delle operazioni improprie $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy},\ldots,\mathcal{D}_{zz}$*

Poichè, come appare dalla (4), il risultato dell'operazione potrà soltanto, tutto al più, cambiare di segno per uno scambio qualunque fra le $x, y, \ldots, z$, basterà dimostrare la sua permutabilità con $\mathcal{D}_{yx}$ perchè essa sia al tempo stesso dimostrata anche per $\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{yz},\ldots$

Possiamo scrivere primieramente:

$$\Omega\cdot\mathcal{D}_{yx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n}\end{vmatrix}\mathcal{D}_{yx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\mathcal{D}_{yx}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial x_2}\mathcal{D}_{yx}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n}\mathcal{D}_{yx}\end{vmatrix}\qquad(7)$$

convenendo d'ora innanzi che in ogni termine dello sviluppo di un determinante *operativo* gli elementi operativi che lo compongono si scriveranno nell'ordine stesso delle verticali cui appartengono. Ma si ha evidentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{D}_{yx}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}=$$

$$(8)\qquad =\frac{\partial}{\partial y_i}+\left\{x_1\frac{\partial^2}{\partial y_1\partial x_i}+x_2\frac{\partial^2}{\partial y_2\partial x_i}+\ldots+x_n\frac{\partial^2}{\partial y_n\partial x_i}\right\}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_i}+\left\{x_1\frac{\partial}{\partial y_1}+x_2\frac{\partial}{\partial y_2}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial y_n}\right\}\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}+\mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde, sostituendo in (7):

$$(9)\qquad \Omega\cdot\mathcal{D}_{yx}=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_1}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \mathcal{D}_{yx}\frac{\partial}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

poichè si ha evidentemente:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial z_1}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1}\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial}{\partial z_n}\ldots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial y_n}\end{vmatrix}=0$$

Ma l'operazione $\mathcal{D}_{yx}$ è permutabile colle derivazioni

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$$

che non implicano la serie x; quindi la (9) può anche scriversi:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx}' \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_n} & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

cioè ci dà appunto:

$$\Omega \cdot \mathcal{D}_{yx} = \mathcal{D}_{yx} \Omega$$

c. d. d.

92. Per $y \equiv x$ la (8) ci darebbe:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}_{xx} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{D}_{xx} \frac{\partial}{\partial x_i};$$

cosicchè si avrebbe in luogo della (9):

$$\Omega \mathcal{D}_{xx} = \mathcal{D}_{xx} \Omega + \Omega = (1 + \mathcal{D}_{xx}) \Omega.$$

---

§. XVIII. Riduzione dell'operazione $\Omega_{xy \cdot\cdot z}$ ad operazioni di polare fra le stesse $x, y, \ldots, z$. - L'operazione $H_{xy \ldots z}$ -

93. Sia f una funzione qualunque delle n serie di variabili n^{arie} $x, y, \ldots, z$, la quale non dipenda dalle n serie ausiliarie $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Si ha, secondo la (6) del §. precedente:

$$(\xi \eta \ldots \omega) \cdot \Omega f = \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \ldots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f$$

d'onde, operando sui due membri coll'operazione

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \ldots \mathcal{D}_{\zeta z}$$

e tenendo presente che Ωf è indipendente dalle $\xi, \eta, \ldots, \zeta$:

$$(x y \ldots z) \cdot \Omega f = \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \ldots \mathcal{D}_{\zeta z} \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \ldots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f \quad (1)$$

poichè:

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \ldots \mathcal{D}_{\zeta z} (\xi \eta \ldots \zeta) = (x y \ldots z).$$

Il secondo membro di (1) essendo ottenuto da f con operazioni di polare fra le serie $x, y, \ldots, z, \xi, \eta, \ldots \zeta$, delle quali le $\xi, \eta, \ldots \zeta$ non sono contenute in f si può anche dedurre con operazione di polare (art. 52) fra le sole $x, y, \ldots z$. A tale oggetto si trasformerà l'operazione:

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \ldots \mathcal{D}_{\zeta z} \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \ldots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\}$$

mediante le formole fondamentali del §. XIII art. 20 in modo che vengano eseguite per prime quelle operazioni elementari il cui primo indice è una delle $\xi, \eta, \ldots \zeta$. Si otterrà così:

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \ldots \mathcal{D}_{\zeta z} \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \ldots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} = H_{xy \cdot\cdot z} + K_{xy \cdot\cdot z \xi \cdots \zeta} \quad (2)$$

dove H è un'operazione di polare fra le sole $x, y, \ldots, z$ e K un'operazione di polare che annulla identicamente le funzioni che non dipendono dalle $\xi, \eta, \ldots, \zeta$. Sostituendo in (1) si avrà dunque:

$$(x y \ldots z) \cdot \Omega_{xy \ldots z} f = H_{xy \ldots z} f$$

onde, poichè f è una funzione affatto arbitraria delle $x, y, \dots z$, si potrà anche scrivere identicamente:

$$(x\,y \dots z)\, \Omega_{xy\dots z} = H_{xy\dots z}\,. \qquad (3)$$

L'operazione Ω si può così surrogare con un'operazione di polare, cioè coll'operazione H, che si potrà calcolare secondo la (2). L'operazione H, a differenza di Ω, è, come ben si vede, simmetrica nelle $x, y, \dots, z$.

94 - Calcoliamo, per esempio, l'operazione H per $n = 2$, cioè l'espressione effettiva di H_{xy}.

Si ha primieramente:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \left\{ \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta} \mathcal{D}_{y\xi} \right\} = \\ &= \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{x\xi} \cdot \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{\xi x} \cdot \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{x\eta} \cdot \mathcal{D}_{y\xi}\,. \end{aligned} \qquad (4)$$

Applicando ora alla prima parte del secondo membro le note formole fondamentali, si può scrivere:

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{x\xi} \cdot \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{y\eta} = \\ &= \left[\mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{\xi\xi} \right] \cdot \left[\mathcal{D}_{y\eta} \mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\eta\eta} \right] \\ &= \mathcal{D}_{xx} \mathcal{D}_{yy} + K_1\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

dove K_1 è un'operazione di polare che annulla le funzioni delle sole x, y.

Quanto alla seconda parte, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\xi x} \cdot \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{x\eta} \cdot \mathcal{D}_{y\xi} &= \mathcal{D}_{\xi x} \left[\mathcal{D}_{x\eta} \mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{xy} \right] \mathcal{D}_{y\xi} \\ &= \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{x\eta} \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{y\xi} + \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y\xi}\,. \end{aligned}$$

La prima parte non ha uopo di essere trasformata, poichè essa annulla già le funzioni indipendenti da η; per la seconda si scriverà:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{y\xi} &= \left[\mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{\xi x} - \mathcal{D}_{\xi y} \right] \mathcal{D}_{y\xi} \\ &= \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{y\xi} - \mathcal{D}_{\xi\eta} \mathcal{D}_{y\xi} \\ &= \mathcal{D}_{xy} \left[\mathcal{D}_{y\xi} \mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{yx} \right] - \left[\mathcal{D}_{y\xi} \mathcal{D}_{\xi y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\xi\xi} \right] \end{aligned}$$

onde:

$$\mathcal{D}_{\xi x} \cdot \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{x\eta} \cdot \mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yy} + K_2\,, \qquad (6)$$

dove K_2 annulla le funzioni delle sole x, y.

Sostituendo le espressioni (5) e (6) in (4) si trova:

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \left\{ \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta} \mathcal{D}_{y\xi} \right\} = \mathcal{D}_{xx} \mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} + K_1 + K_2\,,$$

onde si conclude:

$$\begin{aligned} H_{xy} &= \mathcal{D}_{xx} \mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy} \mathcal{D}_{yx} \qquad (7) \\ K_{xy\xi\eta} &= K_1 + K_2\,. \end{aligned}$$

95 - Poichè l'operazione H_{xy} è simmetrica, come si è già notato, rispetto alle serie x ed y, si potrà anche scrivere in luogo di (7), scambiando in (7) le x colle y:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx} \mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx} \mathcal{D}_{xy}\,. \qquad (7)'$$

E' del resto assai facile verificare l'identità delle due operazioni (7) e (7)'.

96 - Per ottenere l'espressione dell'operazione H con un numero qualsivoglia di serie di variabili, partiremo (limitandoci, per es., per meglio fissare le idee, al caso di 4 serie x, y, z, t) dall'uguaglianza:

onde, poichè f è una funzione affatto arbitraria delle $x, y, \dots z$, si potrà anche scrivere identicamente:

$$(x\, y \dots z)\ \Omega_{x y \dots z} = H_{x y \dots z}. \tag{3}$$

L'operazione Ω si può così surrogare con un'operazione di polare, cioè coll'operazione H, che si potrà calcolare secondo la (2). L'operazione H, a differenza di Ω, è, come ben si vede, simmetrica nelle $x, y, \dots, z$.

94 - Calcoliamo, per esempio, l'operazione H per $n = 2$, cioè l'espressione effettiva di H_{xy}.

Si ha primieramente:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\left\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\right\} =$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi}. \tag{4}$$

Applicando ora alla prima parte del secondo membro le note formole fondamentali, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\xi}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\eta} =$$
$$= \left[\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{\xi\xi}\right]\cdot\left[\mathcal{D}_{y\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\eta\eta}\right] \tag{5}$$
$$= \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + K_1,$$

dove K_1 è un'operazione di polare che annulla le funzioni delle sole x, y.

Quanto alla seconda parte, si può scrivere:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{\xi x}\left[\mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{\eta y} + \mathcal{D}_{xy}\right]\mathcal{D}_{y\xi}$$
$$= \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{y\xi} + \mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi}.$$

La prima parte non ha uopo di essere trasformata, poichè

essa annulla già le funzioni indipendenti da η; per la seconda si scriverà:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{y\xi} = \left[\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x} - \mathcal{D}_{\xi y}\right]\mathcal{D}_{y\xi}$$
$$= \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{y\xi} - \mathcal{D}_{\xi\eta}\mathcal{D}_{y\xi}$$
$$= \mathcal{D}_{xy}\left[\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi x} + \mathcal{D}_{yx}\right] - \left[\mathcal{D}_{y\xi}\mathcal{D}_{\xi y} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{\xi\xi}\right]$$

onde:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\cdot\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{x\eta}\cdot\mathcal{D}_{y\xi} = \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yy} + K_2, \tag{6}$$

dove K_2 annulla le funzioni delle sole x, y.

Sostituendo le espressioni (5) e (6) in (4) si trova:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\left\{\mathcal{D}_{x\xi}\mathcal{D}_{y\eta} - \mathcal{D}_{x\eta}\mathcal{D}_{y\xi}\right\} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} + K_1 + K_2,$$

onde si conclude:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{yy} - \mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yx} \tag{7}$$
$$K_{xy\xi\eta} = K_1 + K_2.$$

95 - Poichè l'operazione H_{xy} è simmetrica, come si è già notato, rispetto alle serie x ed y, si potrà anche scrivere in luogo di (7), scambiando in (7) le x colle y:

$$H_{xy} = \mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}. \tag{7'}$$

E' del resto assai facile verificare l'identità delle due operazioni (7) e (7)'.

96 - Per ottenere l'espressione dell'operazione H con un numero qualsivoglia di serie di variabili, partiremo (limitandoci, per es., per meglio fissare le idee, al caso di 4 serie x, y, z, t) dall'uguaglianza:

$$H_{xyzt}=\mathscr{D}_{\xi x}\mathscr{D}_{\eta y}\mathscr{D}_{\zeta z}\mathscr{D}_{\tau t}\begin{vmatrix}\mathscr{D}_{t\tau} & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ \mathscr{D}_{t\zeta} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ \mathscr{D}_{t\eta} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ \mathscr{D}_{t\xi} & \mathscr{D}_{z\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix} \qquad (8)$$

che è un'identità, come si è già visto, semprechè i due membri vengano applicati ad una funzione qualunque delle sole x, y, z, t (indipendente, cioè, dalle serie ausiliarie ξ, η, ζ, τ). Ricordiamo, secondo quanto si è già detto anche al §. precedente (art. 91) che i fattori operativi di un termine qualunque dello sviluppo del determinante (5) si intendano scritti in un ordine ben determinato, cioè, andando da destra verso sinistra (che è l'ordine secondo il quale essi dovranno eseguirsi), prima quello della 4ª verticale, poi quello della 3ª, poi quello della 2ª e per ultimo quello della 1ª; e lo stesso s'intende detto, una volta per sempre, per tutti i determinanti operativi che ci si presenteranno in seguito.

Ciò posto, è chiaro che potremo anche scrivere:

$$H_{xyzt}=\mathscr{D}_{\xi x}\mathscr{D}_{\eta y}\mathscr{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix}\mathscr{D}_{\tau t}\cdot\mathscr{D}_{t\tau} & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ \mathscr{D}_{\tau t}\cdot\mathscr{D}_{t\zeta} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ \mathscr{D}_{\tau t}\cdot\mathscr{D}_{t\eta} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ \mathscr{D}_{\tau t}\cdot\mathscr{D}_{t\xi} & \mathscr{D}_{z\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix}$$

e permutando (art. 20) le due operazioni elementari di cui si compone ogni elemento della 1ª verticale:

$$H_{xyzt}=\mathscr{D}_{\xi x}\mathscr{D}_{\eta y}\mathscr{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix}\mathscr{D}_{t\tau}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ \mathscr{D}_{t\zeta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ \mathscr{D}_{t\eta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ \mathscr{D}_{t\xi}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix}$$

$$+\mathscr{D}_{\xi x}\mathscr{D}_{\eta y}\mathscr{D}_{\zeta z}\begin{vmatrix}-\mathscr{D}_{\tau\tau}+\mathscr{D}_{tt} & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ -\mathscr{D}_{\tau\zeta} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ -\mathscr{D}_{\tau\eta} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ -\mathscr{D}_{\tau\xi} & \mathscr{D}_{x\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix}$$

Ma, quando si opera su funzioni indipendenti da τ, si ha identicamente:

$$\begin{vmatrix}\mathscr{D}_{t\tau}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ \mathscr{D}_{t\zeta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ \mathscr{D}_{t\eta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ \mathscr{D}_{t\xi}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \mathscr{D}_{z\tau} & \mathscr{D}_{y\tau} & \mathscr{D}_{x\tau}\\ \mathscr{D}_{t\zeta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\zeta} & \mathscr{D}_{y\zeta} & \mathscr{D}_{x\zeta}\\ \mathscr{D}_{t\eta}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\eta} & \mathscr{D}_{y\eta} & \mathscr{D}_{x\eta}\\ \mathscr{D}_{t\xi}\cdot\mathscr{D}_{\tau t} & \mathscr{D}_{z\xi} & \mathscr{D}_{y\xi} & \mathscr{D}_{x\xi}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{\tau t}\cdot\mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix},$$

poichè:

$$\begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{z\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{y\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} & \mathcal{D}_{x\tau}\cdot\mathcal{D}_{\tau t} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} =$$

Pertanto possiamo anche scrivere:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z} \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$+\mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z}\left\{ \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ 0 & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \right\},$$

e quindi anche:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{D}_{\xi x}\,\mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\zeta z} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

D'altra parte si ha (semprechè si operi su funzioni indipendenti dalla serie τ):

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\tau} & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} ;$$

come segue dalle uguaglianze operative :

$$- \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{z\tau} = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{y\tau}$$

$$= - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{\tau\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} \\ \mathcal{D}_{\tau\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} \\ \mathcal{D}_{\tau\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} \end{vmatrix} \mathcal{D}_{x\tau} = - \begin{vmatrix} \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Concludiamo dunque :

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \mathcal{D}_{\zeta z} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} .$$

97. Venendo ora all'eliminazione della serie ζ, il che si può fare con procedimento affatto simile a quello tenuto testè, si trova dapprima :

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & \mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

$$- \mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{\zeta t} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & \mathcal{D}_{\zeta\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{\zeta\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{\zeta\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} .$$

Osservando poi che il secondo determinante nel secondo membro si può scrivere :

$$\begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{\zeta t} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{\zeta\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{\zeta\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

si conchiude:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\eta y}\,\mathcal{D}_{\xi x} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Finalmente si eliminerà, sempre allo stesso modo, la serie η e si otterrà:

$$H_{xyzt} = \mathcal{D}_{\xi x} \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix}$$

Quanto all'eliminazione di ξ, essa è immediata, onde si ha ormai già il risultato finale:

$$H_{xyzt} = \begin{vmatrix} 3+\mathcal{D}_{tt} & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{tz} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

98. Per H_{xy} si avrà dunque semplicemente:

$$H_{xy} = \begin{vmatrix} 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} = (1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$$

come già si era trovato sopra.

Per H_{xyz} si avrà:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \qquad (10)$$

e sviluppando il determinante:

$$\begin{aligned} H_{xyz} &= (2+\mathcal{D}_{zz})(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy} - (2+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} \\ &\quad - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz} - \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xz}. \end{aligned} \qquad (10)'$$

99. All'operazione H si può anche dare (limitandoci come sopra, per fissare le idee, al caso di quattro serie) la forma:

$$H_{xyzt}=\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{xx} & \mathcal{D}_{xy} & \mathcal{D}_{xz} & \mathcal{D}_{xt} \\ \mathcal{D}_{yx} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{yt} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{zy} & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{zt} \\ \mathcal{D}_{tx} & \mathcal{D}_{ty} & \mathcal{D}_{tz} & 3+\mathcal{D}_{tt} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

Non ci tratteniamo a dimostrare questa seconda espressione(*), che, del resto, non avremo in seguito occasione a richiamare. Essa ci dà per H_{xyz} in luogo di (10)' lo sviluppo:

$$H_{xyz}=\mathcal{D}_{xx}(1+\mathcal{D}_{yy})(2+\mathcal{D}_{zz})-\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}(2+\mathcal{D}_{zz})+\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}$$
$$-\mathcal{D}_{xx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}-\mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xz}+\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xz} \qquad (10)''$$

e non è difficile verificare, mediante le solite formole, l'equivalenza delle due operazioni (10)' e (10)'', bastando a tale oggetto di verificare che:

$$\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz}\mathcal{D}_{xy}+\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xz}=\mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{yz}+\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{xz}.$$

100. Nel mentre che l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$, definita al §. prec., fra le n serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ ha significato soltanto nel caso in cui la specie delle serie è uguale allo stesso numero n, la corrispondente operazione $H_{xyz\ldots t}$ ha un significato ben determinato, qualunque sia la specie delle n serie, giacchè nell'espressione di $H_{xyz\ldots t}$ da noi trovata

(*) La dimostrazione si trova data unitamente a quella qui riportata, dell'espressione (9) nella memoria di Capelli: *Ueber die Zurück Führung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen* (Mathem. Annalen. Bd. XXIX, 1887)

$$H_{xyz\ldots t}=\begin{vmatrix} (n-1)+\mathcal{D}_{tt} & \ldots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{D}_{tz} & & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

le operazioni elementari $\mathcal{D}_{pq}$ hanno appunto un significato ben determinato anche se la specie delle serie p e q non sia eguale ad n.

101. *Se la specie comune ν delle n serie di variabili $x, y, z, \ldots t$ è inferiore ad n, si ha identicamente:*

$$H_{xyz\ldots t}=0,$$

cioè l'operazione $H_{xyz\ldots t}$ applicata a qualsiasi funzione delle $n\cdot\nu$ variabili $x, y, z, \ldots t$ dà identicamente lo zero.

Sappiamo, infatti, che l'operazione (12), applicata ad una funzione qualunque delle $x, y, z, \ldots t$, dà un risultato identico a quello che si otterrebbe, applicando alla stessa funzione l'operazione:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \tag{13}$$

essendo le $\xi, \eta, \zeta \ldots \tau$ delle serie ausiliarie non contenute nella funzione su cui si opera. Ora, per $\nu < n$, si ha appunto identicamente, per un noto teorema sul prodotto di due matrici simili:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} \equiv 0$$

102. *Se la specie comune ν delle n serie di variabili $x, y, z, \ldots t$ è uguale o superiore ad n, si ha identicamente:*

$$H_{xyz\ldots t} = \sum_{i,h,\ldots k} \begin{vmatrix} x_i & x_h & \cdots & x_k \\ y_i & y_h & & y_k \\ z_i & z_h & & z_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_i & t_h & & t_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} & \frac{\partial}{\partial z_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial z_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \cdots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} \tag{14}$$

dove la sommatoria va estesa a tutte le $\binom{\nu}{n}$ combinazioni dei

ν indici $1, 2, \ldots \nu$, aggruppati ad n ad n.

Infatti, il teorema sul prodotto di due matrici simili ci dà per $\nu \geqq n$:

$$\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{t\tau} & \cdots & \mathcal{D}_{z\tau} & \mathcal{D}_{y\tau} & \mathcal{D}_{x\tau} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathcal{D}_{t\zeta} & & \mathcal{D}_{z\zeta} & \mathcal{D}_{y\zeta} & \mathcal{D}_{x\zeta} \\ \mathcal{D}_{t\eta} & & \mathcal{D}_{z\eta} & \mathcal{D}_{y\eta} & \mathcal{D}_{x\eta} \\ \mathcal{D}_{t\xi} & & \mathcal{D}_{z\xi} & \mathcal{D}_{y\xi} & \mathcal{D}_{x\xi} \end{vmatrix} = \sum_{i,\ldots,k} \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_k \\ \eta_i & \eta_k \\ \zeta_i & \zeta_k \\ \vdots & \vdots \\ \tau_i & \tau_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \frac{\partial}{\partial z_i} & & \frac{\partial}{\partial z_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \tau_i} & & \frac{\partial}{\partial \tau_k} \end{vmatrix}$$

d'onde operando su entrambi i membri con $\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t}$ segue appunto la (14), poichè:

$$\mathcal{D}_{\xi x}\mathcal{D}_{\eta y}\mathcal{D}_{\zeta z}\cdots\mathcal{D}_{\tau t}\begin{vmatrix} \xi_i & \cdots & \xi_k \\ \eta_i & & \eta_k \\ \zeta_i & & \zeta_k \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_i & & \tau_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \cdots & x_k \\ y_i & & y_k \\ z_i & & z_k \\ \vdots & & \vdots \\ t_i & & t_k \end{vmatrix}.$$

103. L'espressione (14) dell'operazione $H_{xyz\ldots t}$ mette in evidenza che essa è simmetrica rispetto alle serie $x, y, z, \ldots t$. Aggiungiamo ora che *l'operazione $H_{xyz\ldots t}$ è permutabile con tutte le operazioni di polare elementari (proprie ed improprie) che si possono formare colle serie $x, y, z, \ldots t$* e quindi con qualsiasi operazione di polare (art. 34) fra le $x, y, z, \ldots t$. Infatti, se p, q sono due serie distinte scelte fra le $x, y, z, \ldots t$, si dimostrerà, assolutamente, come al §. 17, che:

$$\mathcal{D}_{pq}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix}$$

onde la (14) ci darà evidentemente:

$$\mathcal{D}_{pq}\, H_{xyz\dots t} = H_{xyz\dots t}\, \mathcal{D}_{pq},$$

e che (per $p \equiv x, y, z, \dots t$):

$$\mathcal{D}_{pp}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial y_i} & \frac{\partial}{\partial y_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial t_i} & \frac{\partial}{\partial t_h} & \dots & \frac{\partial}{\partial t_k} \end{vmatrix} (\mathcal{D}_{pp} -$$

onde la (14) ci dà anche in questo caso:

$$\mathcal{D}_{pp}\, H_{xyz\dots t} = H_{xyz\dots t}\, \mathcal{D}_{pp}$$

poichè:

$$\mathcal{D}_{pp}\begin{vmatrix} x_i & x_h & \dots & x_k \\ y_i & y_h & \dots & y_k \\ z_i & z_h & \dots & z_k \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ t_i & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & x_h & \dots & x_k \\ y_i & y_h & \dots & y_k \\ z_i & z_h & \dots & z_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_i & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix}$$

§.XIX. *Altre operazioni di polare permutabili con ogni operazione di polare fra le stesse serie di variabili..*

105. L'operazione $H_{xyz\dots t}$ non è la sola operazione di polare fra le n serie $x, y, z, \dots, t$ che goda della proprietà di essere permutabile con ogni altra operazione di polare fra le stesse serie di variabili. Consideriamo infatti in luogo dell'operazione (12) del §. preced. l'operazione più generale, che indicheremo con $H^{(\rho)}$:

$$H^{(\rho)}_{xyz\dots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+\rho+\mathcal{D}_{tt} & \dots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{tz} & \dots & 2+\rho+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \dots & \mathcal{D}_{zy} & 1+\rho+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \dots & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \rho+\mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} \quad (1)$$

in cui ρ è una costante da determinarsi ad arbitrio, cosicchè sarà in particolare per $\rho = 0$

$$H^{(0)}_{xyz\dots t} = H_{xyz\dots t}.$$

Ci proponiamo di dimostrare che *l'operazione* $H^{(\rho)}$ *così definita è anch'essa permutabile con ogni operazione di polare fra le* $x, y, z, \dots t$, *comunque si fissi il valore del parametro* ρ.

106. A tale oggetto cominceremo dal dimostrare che se la operazione $H^{(\rho)}_{xyz\dots t}$ è permutabile con ogni altra operazione di polare fra le $x, y, z, \dots, t$, anche l'operazione $H^{(\rho+1)}_{xyz\dots t}$ lo sarà del pari.

Invero, detta f una funzione qualunque delle n serie di variabili $x, y, z, \dots t$ (la cui specie supporremo $\equiv n$), si ha identicamente:

$$(2) \qquad H^{(p)}_{xyz\dots t}\{(xyz\dots t)\cdot f\} = (xyz\dots t)\cdot\{H^{(p+1)}_{xyz\dots t}\, f\}$$

poichè il determinante $(xyz\dots t) \equiv \sum \pm x_1 y_2 z_3 \dots t_n$ è annullato da ogni operazione $\mathcal{D}_{pq}$ in cui p e q siano due serie distinte scelte fra le $x, y, z, \dots t$, cosicchè:

$$\mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)\cdot f\} = (xyz\dots t)\cdot\{\mathcal{D}_{pq} f\}$$

e viene invece riprodotto inalterato dalle $\mathcal{D}_{xx}, \mathcal{D}_{yy}, \dots, \mathcal{D}_{tt}$, cosicchè p. es.

$$\mathcal{D}_{xx}\{(xyz\dots t)\cdot f\} = (xyz\dots t)\cdot f + (xyz\dots t)\cdot\{\mathcal{D}_{xx} f\}$$

$$= (xyz\dots t)\{(1+\mathcal{D}_{xx})f\}.$$

Sostituendo ora in (2) in luogo di f la funzione $\mathcal{D}_{pq} f$, si ha:

$$H^{(p)}\{(xyz\dots t)\cdot \mathcal{D}_{pq} f\} = (xyz\dots t)\{H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f\}$$

e quindi anche:

$$(3) \quad \begin{cases} (xyz\dots t)\cdot H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f = H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)f\} & \text{per } p \neq q \\ (xyz\dots t)\, H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pp} f = H^{(p)}(\mathcal{D}_{pp}-1)\{(xyz\dots t)f\}. \end{cases}$$

D'altra parte, essendo per ipotesi $H^{(p)}$ permutabile con $\mathcal{D}_{pq}$, si può scrivere:

$$H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)\cdot f\} = \mathcal{D}_{pq} H^{(p)}\{(xyz\dots t) f\}$$

e applicando nuovamente la (2):

$$H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)f\} = \mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)\cdot H^{(p+1)} f\},$$

d'onde:

$$(4) \quad \begin{cases} H^{(p)}\mathcal{D}_{pq}\{(xyz\dots t)f\} = (xyz\dots t).\,\mathcal{D}_{pq}H^{(p+1)}f & \text{per } p \neq q \\ H^{(p)}\mathcal{D}_{pp}\{(xyz\dots t)f\} = (xyz\dots t)\cdot(\mathcal{D}_{pp}+1)H^{(p+1)}f. \end{cases}$$

Pertanto segue dalla (3) e (4)

$$(xyz\dots t)H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f = (xyz\dots t)\mathcal{D}_{pq}H^{(p+1)} f,$$

comunque si scelgano le p e q fra le $x, y, z, \dots t$; e quindi poichè $(xyz\dots t)$ non è identicamente nullo:

$$H^{(p+1)}\mathcal{D}_{pq} f = \mathcal{D}_{pq} H^{(p+1)} f.$$

Resta con ciò dimostrato che anche l'operazione $H^{(p+1)}$ sarà permutabile con ogni operazione di polare fra le $x, y, z, \dots t$.

106. Poichè ora l'operazione $H^{(0)} = H_{xyz\dots t}$ è effettivamente permutabile, come sappiamo, con ogni operazione di polare fra le $x, y, z, \dots t$, ne consegue in virtù del lemma testè dimostrato, che lo sarà del pari l'operazione $H^{(1)}$; quindi, sempre in virtù dello stesso lemma applicato più volte di seguito, lo saranno tutte le infinite operazioni: $H^{(2)}, H^{(3)}, H^{(4)}, \dots$

L'operazione generale $H^{(p)}$ godrà dunque di tale permutabilità per tutti i valori interi e positivi di p; e di qui segue facilmente per un noto principio algebrico, essendo $H^{(p)}$ del grado limitato n rispetto al parametro ρ, che $H^{(\rho)}$ dovrà godere della stessa permutabilità per ogni valore attribuito a ρ, come appunto volevasi dimostrare.

Ed invero, sia:

(5) $$H^{(\rho)}_{xyz\ldots t} = \rho^n + \rho^{n-1} \cdot K_1 + \rho^{n-2} \cdot K_2 + \cdots + \rho \cdot K_{n-1} + K_n$$

lo sviluppo del determinante (1) ordinato secondo le potenze decrescenti del parametro ρ. Se f è una funzione qualunque delle $x, y, z, \ldots, t$, si ha, per quanto si è dimostrato, per ogni valore intero e positivo di ρ:

$$\rho^{n-1} \cdot \mathcal{D}_{pq} K_1 f + \rho^{n-2} \cdot \mathcal{D}_{pq} K_2 f + \cdots + \rho \cdot \mathcal{D}_{pq} K_{n-1} f + \mathcal{D}_{pq} K_n f$$

$$= \rho^{n-1} \cdot K_1 \mathcal{D}_{pq} f + \rho^{n-2} \cdot K_2 \mathcal{D}_{pq} f + \cdots + \rho \cdot K_{n-1} \mathcal{D}_{pq} f + K_n \mathcal{D}_{pq} f$$

È questa rispetto al parametro ρ un'equazione algebrica del grado $n-1$, che ammette le infinite soluzioni $\rho = 1, 2, 3, \ldots$; essa dev'essere dunque soddisfatta identicamente per ogni valore di ρ, cioè dev'essere separatamente:

$$\mathcal{D}_{pq} K_i f = K_i \mathcal{D}_{pq} f \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Abbiamo così riconosciuta l'esistenza delle n operazioni di polare fra le n serie $x, y, z, \ldots t$:

(6) $$K_1, \ K_2, \ \ldots, \ K_n,$$

(l'ultima delle quali K_n non è altro che la stessa $K_{xyz\ldots t}$) ciascuna delle quali gode della proprietà di essere permutabile con ogni operazione di polare fra le stesse n serie.(*)

107. Nella dimostrazione da noi data abbiamo supposto che la specie delle n serie $x, y, z, \ldots, t$ fosse $\equiv n$. Non è però necessario di cercare un'altra dimostrazione per il caso in cui essa fosse $< n$, in virtù del seguente principio generale, di cui è ben facile riconoscere l'esattezza: *Se Δ è un'operazione di polare fra certe serie $x, y, z, \ldots, t$ (cioè un composto razionale intero a coefficienti costanti delle operazioni $\mathcal{D}_{pq}$ formabili con queste serie), e se l'identità $\Delta = 0$ è vera quando le serie siano di una certa specie ν, essa è vera altresì se la specie si supponga inferiore a ν.*

Non si potrebbe ugualmente dire che l'identità $\Delta = 0$ sarà vera anche se la specie si supponga $> \nu$. Abbiamo già visto infatti, per es. che l'identità $H_{xyz\ldots t} = 0$ è vera quando la specie delle serie $x, y, \ldots t$ è inferiore al loro numero

(*) Per quanto riguarda l'indipendenza delle n operazioni $K_1, K_2, \ldots K_n$ e la teoria completa delle operazioni di polare permutabili con ogni altra operazione di polare formata colle stesse serie si veggano le memorie:
Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie (Atti della R.ª Accademia delle Scienze di Napoli Vol. I, Serie 2ª - Gennaio 1888.)
Sul sistema completo delle operazioni di polare, permutabili con ogni altra operazione di polare, ecc. (Rendiconto della R. Acc. delle Scienze di Napoli; Febbraio 1893).
Dell'impossibilità di Sizigie fra le operazioni fondamentali permutabili con ogni altra operazione, ecc. (Ibid. Giugno 1893).

n, nel mentre che essa non è punto vera quando la specie delle serie sia $\equiv n$.

108. Sia $f \equiv a_x^m b_y^\mu \dots c_z^\nu$ una forma algebrica con n serie di variabili $x, y, \dots, z$ (di specie qualsivoglia σ). Dette $\xi, \eta, \dots, \zeta$ altrettante serie ausiliarie, non contenute in f, poichè:

$$\left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \dots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f = m\mu \dots \nu \left[\sum \pm a_\xi b_\eta \dots c_\zeta \right] a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}$$

e quindi

$$\mathcal{D}_{\xi x} \mathcal{D}_{\eta y} \dots \mathcal{D}_{\zeta z} \left\{ \sum \pm \mathcal{D}_{x\xi} \mathcal{D}_{y\eta} \dots \mathcal{D}_{z\zeta} \right\} f = m\mu \dots \nu \left[\sum \pm a_x b_y \dots c_z \right] a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}$$

si ha (art. 93):

$$H_{xy\dots z} f = m\mu \dots \nu \cdot (a_x b_y \dots c_z) a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1} \qquad (1)$$

posto

$$\sum \pm a_x b_y \dots c_z \equiv (a_x b_y \dots c_z).$$

Operando ora sui due membri di (1) con $H^{(-1)}_{xy\dots z}$ e tenendo presente che si ha, analogamente alla (2), se $\alpha_x, \beta_x, \dots, \gamma_x$ sono delle forme lineari qualisivogliano e ψ una funzione qualunque delle $x, y, \dots, z$:

$$H^{(\rho)} \left\{ (\alpha_x \beta_y \dots \gamma_z) \psi \right\} = (\alpha_x \beta_y \dots \gamma_z) \left\{ H^{(\rho+1)} \psi \right\}, \qquad (2)'$$

se ne deduce:

$$H^{(-1)}_{xy\dots z} H_{xy\dots z} f = m\mu \dots \nu (a_x b_y \dots c_z) \cdot H_{xy\dots z} a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1}.$$

Ma per la stessa (1) si ha:

$$H_{xy\dots z} a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} \dots c_z^{\nu-1} = (m-1)(\mu-1) \dots (\nu-1) \cdot (a_x b_y \dots c_z) a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} \dots c_z^{\nu-2} \;;$$

quindi si può scrivere:

$$H^{(-1)}_{xy\dots z} H_{xy\dots z} f = m(m-1)\mu(\mu-1) \dots \nu(\nu-1) \cdot (a_x b_y \dots c_z)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} \dots c_z^{\nu-2}.$$

Di qui si deduce poi similmente:

$$H^{(-2)}_{xy\dots z} H^{(-1)}_{xy\dots z} H_{xy\dots z} f = m(m-1)(m-2) \dots \nu(\nu-1)(\nu-2) \cdot (a_x b_y \dots c_z)^3 a_x^{m-3} \dots c_z^{\nu-3}$$

poichè si ha per la (2)':

$$H^{(-2)} \left\{ (a_x b_y \dots c_z)^2 a_x^{m-2} \dots c_z^{\nu-2} \right\} = (a_x b_y \dots c_z)^2 \cdot H_{xy\dots z} a_x^{m-2} \dots c_z^{\nu-2}.$$

Così procedendo si otterrà in generale:

$$(a_x b_y \dots c_z)^\lambda a_x^{m-\lambda} b_y^{\mu-\lambda} \dots c_z^{\nu-\lambda} = \frac{1}{A_\lambda} H^{(-\lambda+1)} \dots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H f, \qquad (8)$$

dove si è posto per brevità:

$$m(m-1) \dots (m-\lambda+1)\mu(\mu-1) \dots (\mu-\lambda+1) \dots \nu(\nu-1) \dots (\nu-\lambda+1) = A_\lambda \qquad (9)$$

109. Se la specie σ delle serie $x, y, \dots z$ è uguale ad n, si ha:

$$(a_x b_y \dots c_z) = (a\, b \dots c)(x\, y \dots z),$$

cosicchè (art. 88):

$$(a_x b_y \dots c_z)^\lambda a_x^{m-\lambda} b_y^{\mu-\lambda} \dots c_z^{\nu-\lambda} = (x y \dots z)^\lambda \cdot \frac{1}{A^\lambda} \Omega_{xy\dots z} f,$$

e la (8) ci dà:

$$(x y \dots z)^\lambda \cdot \Omega^\lambda f = H^{(-\lambda+1)} \dots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H f \;.$$

Del resto questa identità sussisterà qualunque sia la funzione f su cui si operi; cioè si potrà scrivere identicamente:

$$(x y \dots z)^\lambda \Omega^\lambda_{xy\dots z} = H^{(-\lambda+1)} \dots H^{(-2)} H^{(-1)} H_{xy\dots z} \;. \qquad (10)$$

Infatti, operando sull'identità del §° precedente:

$$(xy\ldots z)\,\Omega_{xy\ldots z} = H_{xy\ldots z} \qquad (11)$$

con $\overset{(-1)}{H}_{xy\ldots z}$, se ne deduce tenendo presente la (2):

$$(xy\ldots z)\, H_{xy\ldots z}\, \Omega_{xy\ldots z} = H^{-1}_{xy\ldots z}\, H_{xy\ldots z}$$

ossia appunto per la stessa (11):

$$(xy\ldots z)^2\, \Omega^2 = H^{-1}_{xy\ldots z}\, H_{xy\ldots z},$$

e così via.

§. XX. Esprimibilità di una forma f con n serie di variabili $x, y, \ldots, t$, come somma di una polare di $H_{xy\ldots t} f$ e di polari di forme con sole n-1 serie.

110. Essendo $F(\overset{m}{x}, y, z, \ldots, t)$ una forma algebrica qualsivoglia nelle serie di variabili $x, y, z, \ldots t$, ci proponiamo di dimostrare che:

$$(1)\quad F(\overset{m}{x}; y; z; \ldots; t) = \Delta H_{xy\ldots t} F + \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \cdots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} F,$$

nella quale le Δ e le $\Delta_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}}$ sono certe operazioni di polare, determinate opportunamente, le quali dipendono dagli ordini $m, \ldots$ di F rispetto alle singole serie di variabili. E' chiaro che, essendo m il grado di F rispetto alla serie x, le forme:

$$\varphi = \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \cdots \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} F, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = m$$

non contengono più le serie x; cosicchè, una volta dimostrato la (1), potremo dire (poichè $\Delta H_{xyz\ldots t} = H_{xyz\ldots t}\Delta$) che

ogni forma algebrica con n serie di variabili $x, y, \ldots, t$ si può esprimere identicamente come somma di una forma algebrica del tipo $H_{xy\ldots t} f$ e di polari di forme algebriche, che contengono soltanto n-1 serie di variabili.

111. La formola (1) si stabilisce facilmente nel caso di una forma $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y})$ con due sole serie di variabili x, y di qualsivoglia specie.

Infatti, dalla definizione stessa di H_{xy}:

$$H_{xy} = (1 + \mathcal{D}_{yy})\mathcal{D}_{xx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}$$

segue

$$H_{xy} f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = m(\mu+1) - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} f$$

d'onde:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(\mu+1)} H_{xy} f + \frac{1}{m(\mu+1)} \mathcal{D}_{yx}\left[\mathcal{D}_{xy} f\right] \qquad (2)$$

Se ora in questa formola generale cambiamo f in $\mathcal{D}_{xy} f$, essa ci dà:

$$\mathcal{D}_{xy} f = \frac{1}{(m-1)(\mu+2)} H_{xy}\left[\mathcal{D}_{xy} f\right] + \frac{1}{(m-1)(\mu+2)} \mathcal{D}_{yx}\left[\mathcal{D}^2_{xy} f\right],$$

cosicchè, sostituendo ciò in (2) si trova:

$$\begin{aligned} f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}) = {} & \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)} \mathcal{D}^2_{yx}\left[\mathcal{D}^2_{xy} f\right] \\ & + \left[\frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)} \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy}\right] H_{xy} f. \end{aligned} \qquad (2)'$$

Similmente, se nella formola generale (2) si cambia f in $\mathcal{D}^2_{xy}$ e l'espressione così ottenuta per $\mathcal{D}^2_{xy} f$ si sostituisce in (2)', si trova:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\,\mathcal{D}_{yx}^{3}\left[\mathcal{D}_{xy}^{3} f\right]$$

$$+\left[\frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \frac{1}{m(m-1)(m-2)(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}\mathcal{D}_{yx}^{2}\mathcal{D}_{xy}^{2}\right] H_{xy} f.$$

Così procedendo si giungerà evidentemente ad un risultato della forma:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) = \Delta H_{xy} f + \mathcal{D}_{yx}^{\,m}\cdot\mathcal{D}_{xy}^{\,m} f \qquad (3)$$

che è appunto un'identità della forma voluta (1). L'operazione di polare Δ è data in questo caso da:

$$\Delta = \frac{1}{m(\mu+1)} + \frac{1}{m(m-1)(\mu+1)(\mu+2)}\mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{xy} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{\lfloor\underline{m}\cdot(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+m)}\mathcal{D}_{yx}^{\,m-1}\mathcal{D}_{xy}^{\,m-1}, \qquad (4)$$

e l'unica operazione Δ_α, $(\alpha = m)$, da:

$$\Delta_m = \mathcal{D}_{yx}^{\,m}.$$

112 - Avendo così stabilito la (2) pel caso di due sole serie di variabili, noi procederemo ora alla dimostrazione generale della stessa formola (2) col principio della induzione matematica da $n-1$ ad n. Supporremo dunque che la esistenza di quella formola sia già stata dimostrata per forme con $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$, e, basandoci su tale supposto, mostreremo come se ne deduca una formola analoga per il caso di n serie $x, y, z, \dots t$

Se nell'espressione da noi trovata per $H_{xyz\dots t}$:

$$H_{xyz\dots t} = \begin{vmatrix} (n-1)+\mathcal{D}_{tt} & \dots & \mathcal{D}_{zt} & \mathcal{D}_{yt} & \mathcal{D}_{xt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{tz} & \dots & 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{ty} & \dots & \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{tx} & \dots & \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix},$$

sviluppiamo il determinante del secondo membro secondo gli elementi della sua ultima verticale, otteniamo un'espressione della forma:

$$(5) \qquad H_{xyz\dots t} = H'_{yz\dots t}\mathcal{D}_{xx} - \Delta_1\mathcal{D}_{xy} - \Delta_2\mathcal{D}_{xz} - \dots - \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt}$$

dove $H'_{yz\dots t}$ è la stessa operazione di polare $\overset{(\rho)}{H}$, definita nel §. prec., per $\rho = 1$, e dove le $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ sono operazioni di polare che si potrebbero del pari rappresentare con determinanti minori di ordine $n-1$.

Dalla identità (5) applicata ad una forma algebrica qualunque $f(\overset{\mu}{x};y;z;\dots;t)$, di ordine μ nella serie $x_1, x_2, \dots x_\nu$, si deduce ora:

$$(6) \qquad \mu H'_{yz\dots t} f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots,t) = H_{xyz\dots t} f + \Delta_1\mathcal{D}_{xy} f + \Delta_2\mathcal{D}_{xz} f + \dots + \Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt} f.$$

Intanto, se $F(\overset{m+1}{y};z;\dots;t)$ è una forma qualunque composta colle $n-1$ serie $y, z, \dots, t$ e di ordine $m+1$ nella serie y, esiste, per supposto, una formola analoga alla (1), del tipo:

$$(7) \qquad F(\overset{m+1}{y};z;\dots;t) = H_{yz\dots t}\Delta F + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-2}=m+1} \Delta_{\alpha_1,\dots\alpha_{n-2}}\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\dots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}} F$$

in cui le Δ sono certe operazioni di polare fra le $y, z, \dots t$. Se ora noi poniamo in questa formola generale:

$$F(\overset{m+1}{y};z;\dots;t)=(a_y\, b_z \dots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};y;z;\dots;t)$$

dove $(a_y\, b_z \dots d_t)$ è il determinante delle forme lineari

$$a_y \equiv a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_\nu y_\nu$$

$$a_z \equiv a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_\nu z_\nu$$

. . . .

che si possono formare colle $n-1$ serie di variabili $y, z, \dots, t$ e con $n-1$ serie arbitrarie, della stessa specie, di coefficienti a, $b, \dots, d$, otteniamo in particolare:

(8) $(a_y\, b_z \dots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \dots d_t)\, f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}$,

poichè è facile riconoscere che, per $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-2}=m+1$, si ha identicamente:

$$\mathcal{D}_{yz}^{\alpha_1}\dots\mathcal{D}_{yt}^{\alpha_{n-2}}\left\{(a_y\, b_z \dots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}=0.$$

Ciò posto, se

(9) $$\Delta=\psi(\mathcal{D}_{yy},\mathcal{D}_{zz},\dots,\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz}\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots)$$

sia l'espressione di Δ come aggregato razionale intero, a coefficienti costanti, delle operazioni elementari da cui dipende, e poniamo:

(9)' $$\Delta'=\psi(1+\mathcal{D}_{yy},1+\mathcal{D}_{zz},\dots,1+\mathcal{D}_{tt};\mathcal{D}_{yz},\dots,\mathcal{D}_{yt},\dots),$$

si potrà scrivere:

(10) $$\begin{aligned}&\Delta H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \dots d_t)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\right\}\\ &=(a_y\, b_z \dots d_t)\cdot \Delta' H'_{yz\dots t} f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)\}\end{aligned}$$

poichè è facile riconoscere che, se $\vartheta(y;z;\dots;t)$ è una funzio-

ne qualunque delle $y, z, \dots, t$ si ha (analogamente alla (2) del §.XIX): $\Delta\left\{(a_y\, b_z \dots d_t)\vartheta\right\}=(a_y\, b_z \dots d_t)\left\{\Delta'\vartheta\right\}$

e quindi anche come caso particolare:

$$H_{yz\dots t}\left\{(a_y\, b_z \dots d_t)\vartheta\right\}=(a_y\, b_z \dots d_t)\left\{H'_{yz\dots t}\vartheta\right\}.$$

Pertanto, sostituendo in (8), in luogo del secondo membro, la sua espressione (10) si conclude:

(11) $$f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=\Delta' H'_{yz\dots t} f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t).$$

114. Se ora applichiamo all'identità (6) l'operazione Δ' definita dalla (9)' e teniamo conto dell'identità (11), otteniamo la formola:

(12) $$\begin{aligned}&\mu\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=\\ &=H_{xyz\dots t}\,\Delta' f+\Delta'\Delta_1\mathcal{D}_{xy}f+\Delta'\Delta_2\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta'\Delta_{n-1}\mathcal{D}_{xt}f,\end{aligned}$$

che scriveremo più compendiosamente così:

(12)' $$f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};z;\dots;t)=H_{xyz\dots t}\,\Delta_0 f+\Delta_1'\mathcal{D}_{xy}f+\Delta_2'\mathcal{D}_{xz}f+\dots+\Delta_t'\mathcal{D}_{xt}f.$$

Ma, se applichiamo a ciascuna delle forme $\mathcal{D}_{xy}f$, $\mathcal{D}_{xz}f, \dots$ (che sono tutte di grado $\mu-1$ nella serie x) lo stesso procedimento tenuto per la f, otterremo delle espressioni analoghe:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{xy}f &= H_{xyz\dots t}\, Q_0\cdot \mathcal{D}_{xy}f+\\ &\quad+Q_1\mathcal{D}_{xy}\cdot\mathcal{D}_{xy}f+Q_2\mathcal{D}_{xz}\cdot\mathcal{D}_{xy}f+\dots+Q_{n-1}\mathcal{D}_{xt}\cdot\mathcal{D}_{xy}f\\ \mathcal{D}_{xz}f &= H_{xyz\dots t}\, Q_0'\cdot \mathcal{D}_{xz}f+\\ &\quad+Q_1'\mathcal{D}_{xy}\cdot\mathcal{D}_{xz}f+Q_2'\mathcal{D}_{xz}\cdot\mathcal{D}_{xz}f+\dots+Q_{n-1}'\mathcal{D}_{xt}\cdot\mathcal{D}_{xz}f\end{aligned}$$

. . . .

essendo sempre le Q certe operazioni di polare fra le $x, y, \dots, z$;

le quali espressioni sostituite nelle (12)' ci daranno un risultato della forma:

$$f = (x\,;y\,;z\,;\dots;t) = H_{xyz\dots t}\,\Delta''_0 f$$
$$+\Delta''_{11}\mathcal{D}^2_{xy} f + \Delta''_{22}\mathcal{D}^2_{xz} f + \dots + \Delta''_{n-1,n-1}\mathcal{D}^2_{xt} f$$
$$+\Delta''_{12}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz} f + \dots + \Delta''_{1,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xt} f$$
$$+\ \dots\dots\dots$$

Procedendo allo stesso modo, cioè applicando a ciascuna delle forme $\mathcal{D}^2_{xy} f$, $\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz} f,\dots$ (che sono tutte del grado $\mu-2$ nella serie x) la relazione del tipo (12)', otterremo similmente

$$f(x\,;y\,;z\,;\dots;t) = H_{xyz\dots t}\,\Delta'''_0 f +$$
$$+\Delta'''_{111}\mathcal{D}^3_{xy} f + \Delta'''_{112}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{xz} f + \dots + \Delta'''_{1,2,n-1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xt} f$$
$$+\ \dots\dots\dots$$

e così di seguito, finchè si giungerà ad un risultato della forma:

$$f(\overset{\mu}{x}\,;y\,;z\,;\dots;t) = H_{xyz\dots t}\,\Delta^{(\mu)}_0 f + \Delta^{(\mu)}_{11\dots1}\mathcal{D}^{\mu}_{xy} f +$$
$$+\Delta^{(\mu)}_{1\dots1,2\dots2,\dots,(n-1)\dots(n-1)}\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\dots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} f + \dots$$

essendo in ogni termine $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=\mu$; e questo risultato è appunto la relazione (1) stabilita per le n serie $x,y,z,\dots t$.

115 La formola (1) resta così dimostrata e si vede appunto, come si era enunciato, che le operazioni di polare che figurano nella (1) non dipendono affatto dai coefficienti di $F(x,y,z,\dots t)$, ma solo dai gradi di F rispetto alle serie $x,y,z,\dots,t$. Infatti, se si ammette ciò per lo sviluppo (7) con $n-1$ serie $y,z,\dots t$, il

procedimento da noi tenuto ci mostra chiaramente che questa stessa proprietà ha luogo anche per gli sviluppi relativi alle n serie $x,y,z,\dots,t$.

§.XXI. Applicazione della teoria precedente al caso di forme con tre serie di variabili.

116. A maggiore schiarimento, ed anche per mostrare come il procedimento di dimostrazione del §. prec. dia anche il modo di calcolare effettivamente le operazioni di polare Δ che figurano nello sviluppo ivi dato, applicheremo la teoria ora esposta al caso di tre serie di variabili n^{arie}:

$$x \equiv x_1\,,\ x_2\,,\ \dots,\ x_n$$
$$y \equiv y_1\,,\ y_2\,,\ \dots,\ y_n$$
$$z \equiv z_1\,,\ z_2\,,\ \dots,\ z_n\ .$$

Per questo caso si ha:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} & \mathcal{D}_{xz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} & \mathcal{D}_{xy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} & \mathcal{D}_{xx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{xx}H'_{yz} - \Delta_1\mathcal{D}_{xy} - \Delta_2\mathcal{D}_{xz},$$

dove:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{zx}\mathcal{D}_{yz} = (1+\mathcal{D}_{zz})\mathcal{D}_{yx} - \mathcal{D}_{yx}\mathcal{D}_{zt}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \\ \mathcal{D}_{zx} & \mathcal{D}_{yx} \end{vmatrix} = \mathcal{D}_{zx}(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yx}$$

$$H'_{yz} = \begin{vmatrix} 2+\mathcal{D}_{zz} & \mathcal{D}_{yz} \\ \mathcal{D}_{zy} & 1+\mathcal{D}_{yy} \end{vmatrix} = (2+\mathcal{D}_{zz})(1+\mathcal{D}_{yy}) - \mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}$$

cosicché la formola (12) del §. precedente diviene:

(a) $$\mu\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=H_{xyz}\Delta' f+\Delta'\Delta_1\cdot\mathcal{D}_{xy}f+\Delta'\Delta_2\cdot\mathcal{D}_{xz}f$$

dove Δ' è un'operazione di polare fra le y, z, che deve dare identicamente:

(b) $$\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=\Delta'\cdot H'_{yz}\,\varphi(\overset{m}{y},\overset{m'}{z}).$$

117 - Per calcolare l'espressione effettiva di Δ', si ricorrerà, secondo la teoria esposta, alla formola fondamentale (1) del §. precedente relativa a due sole serie di variabili. Questa formola da noi già calcolata (art. 111) è la seguente:

$$f(\overset{\mu}{y};\overset{\lambda}{z})=\Big\{\frac{1}{\mu(\lambda+1)}+\frac{\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}}{\mu(\mu-1)(\lambda+1)(\lambda+2)}+$$

$$+\frac{\mathcal{D}_{zy}^2\mathcal{D}_{yz}^2}{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)}+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\mathcal{D}_{zy}^{\mu-1}\mathcal{D}_{yz}^{\mu-1}}{\underline{|\mu}\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\mu)}\Big\}H_{yz}f$$

$$+\frac{\mathcal{D}_{zy}^{\mu}\mathcal{D}_{yz}^{\mu}f}{\underline{|\mu}\cdot(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\mu)}$$

Ponendo ora in questa formola:

$$f(\overset{\mu}{y};\overset{\lambda}{z})=(a_y\,b_z)\,\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z})$$

se ne deduce, dividendo ambo i membri per $(a_y\,b_z)$:

$$\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=\Big\{\frac{1}{(m+1)(m'+2)}+\frac{\mathcal{D}_{zy}\mathcal{D}_{yz}}{(m+1)m\cdot(m'+2)(m'+3)}+\cdots$$

(d) $$+\frac{\mathcal{D}_{zy}^{m}\mathcal{D}_{yz}^{m}}{\underline{|m+1}\,(m'+2)(m'+3)\ldots(m'+m+2)}\Big\}H'_{yz}\,\varphi(\overset{m}{y};\overset{m'}{z}).$$

L'operazione Δ', che soddisfa alla (b) e deve sostituirsi in (a), è data dunque da:

(e) $$\Delta'=\frac{\underline{|m'+1}}{\underline{|m+1}}\sum_{i=0}^{i=m}\frac{\underline{|m-i}}{\underline{|m'+2+i}}\,\mathcal{D}_{zy}^{i}\,\mathcal{D}_{yz}^{i}.$$

118 .. Le operazioni di polare nel secondo membro della (a) sono così tutte determinate completamente. Innanzi di procedere scriveremo la (a) più brevemente così:

(a)' $$\mu f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=H_{xyz}\mathcal{T}_{m,m'}f+\mathcal{T}'_{m,m'}\mathcal{D}_{xy}f+\mathcal{T}''_{m,m'}\mathcal{D}_{xz}f$$

con che si mette meglio in evidenza che le operazioni di polare $\mathcal{T}_{m,m'}$, $\mathcal{T}'_{m,m'}$, $\mathcal{T}''_{m,m'}$ dipendono soltanto dai gradi m ed m'; cioè sono indipendenti da μ e dai coefficienti di f.

Ponendo ora in questa formola, in luogo di f, la $\mathcal{D}_{xy}f$, ovvero la $\mathcal{D}_{xz}f$, se ne deduce:

$$(\mu-1)\cdot\mathcal{D}_{xy}f=H_{xyz}\mathcal{T}_{m+1,m'}\mathcal{D}_{xy}f+$$
$$+\mathcal{T}'_{m+1,m'}\mathcal{D}_{xy}^2f+\mathcal{T}''_{m+1,m'}\mathcal{D}_{xz}\mathcal{D}_{xy}f$$

e:

$$(\mu-1)\cdot\mathcal{D}_{xz}f=H_{xyz}\mathcal{T}_{m,m'+1}\mathcal{D}_{xz}f+$$
$$+\mathcal{T}'_{m,m'+1}\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f+\mathcal{T}''_{m,m'+1}\mathcal{D}_{xz}^2f.$$

Sostituendo queste espressioni in (a)', questa ci dà:

$$\mu(\mu-1)\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=$$

$$= H_{xyz}\left\{(\mu-1)\tau_{m,m'}+\tau'_{m,m'}\tau_{m+1,m'}\mathcal{D}_{xy}+\tau''_{m,m'}\tau_{m,m'+1}\mathcal{D}_{xz}\right\}f$$

$$+\tau'_{m,m'}\tau'_{m+1,m'}\mathcal{D}^2_{xy}f+\tau''_{m,m'}\tau''_{m,m'+1}\mathcal{D}^2_{xz}f$$

$$+(\tau'_{m,m'}\tau''_{m+1,m}+\tau''_{m,m'}\tau'_{m,m'+1})\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f.$$

Si sostituiranno ora in questa formola, in luogo di $\mathcal{D}^2_{xy}f$, $\mathcal{D}^2_{xz}f$, $\mathcal{D}_{xy}\mathcal{D}_{xz}f$, le loro espressioni secondo la (a)', cioè:

$$(\mu-2)\cdot\mathcal{D}^2_{xy}f=H_{xyz}\tau_{m+2,m'}\mathcal{D}^2_{xy}f+\tau'_{m+2,m'}\mathcal{D}^3_{xy}f+\tau''_{m+2,m'}\mathcal{D}^2_{xy}\mathcal{D}_{xz}f$$

ecc.

Così procedendo si giungerà alla formola finale:

$$\underline{|\mu}\cdot f(\overset{\mu}{x};\overset{m}{y};\overset{m'}{z})=H_{xyz}\Delta f+\sum_{\alpha+\beta=\mu}\Delta_{\alpha\beta}\mathcal{D}^{\alpha}_{xy}\mathcal{D}^{\beta}_{xz}f$$

ottenendo per le Δ delle espressioni composte con legge semplice per mezzo delle τ, τ', τ'' affette da diversi indici.

---

§. XXII. *Sviluppo di una forma algebrica con n serie di variabili secondo le polari di forme con sole n-1 serie.*

119. Sia $f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y};\overset{\nu}{z};\dots;\overset{\rho}{t})$ una forma algebrica con n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie qualsivoglia σ. Possiamo rappresentarla simbolicamente (§. VIII) con:

$$f\equiv a_x^{m}b_y^{\mu}c_z^{\nu}\dots e_t^{\rho} \qquad (1)$$

Poichè (art. 108):

$$H_{xyz\dots t}f=m\mu\nu\dots\rho\cdot(a_xb_yc_z\dots e_t)a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}c_z^{\nu-1}\dots e_t^{\rho-1}, \qquad (2)$$

e

$$\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\dots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt}f=\underline{|m}\cdot a_y^{\alpha_1}a_z^{\alpha_2}\dots a_t^{\alpha_{n-1}}b_y^{\mu}c_z^{\nu}\dots e_t^{\rho}, \qquad (3)$$

se poniamo per brevità:

(3)' $a_y^{\alpha_1}a_z^{\alpha_2}\dots a_t^{\alpha_{n-1}}b_y^{\mu}c_z^{\nu}\dots e_t^{\rho}=\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_{n-1}}$, $\quad\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=m$

la formola (1) del §. XX ci dà un'identità della forma:

(4) $$f=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m}\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}\varphi_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}+\Delta\cdot\left\{(a_xb_yc_z\dots e_t)a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}c_z^{\nu-1}\dots e_t^{\rho-1}\right\}$$

dove le Δ sono certe operazioni di polare fra le serie $x, y, z, \dots t$, operazioni, che, evidentemente, possiamo ritenere formate colle sole operazioni elementari proprie $\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{yz}, \dots$; giacchè il risultato di un'operazione impropria $\mathcal{D}_{pp}$ si può sempre surrogare col moltiplicare per un coefficiente numerico eguale al grado, nella serie p, della forma su cui si opera.

120. Ciò posto, applicando l'identità della forma (4), anzichè al composto simbolico (1) rappresentante la f, al composto simbolico

$$a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}c_z^{\nu-1}\dots e_t^{\rho-1},$$

si avrà un'identità consimile:

$$a_x^{m-1}b_y^{\mu-1}c_z^{\nu-1}\dots e_t^{\rho-1}=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1}\Delta'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}\left\{a_y^{\alpha_1}a_z^{\alpha_2}\dots a_t^{\alpha_{n-1}}b_y^{\mu}c_z^{\nu}\dots e_t^{\rho}\right\}$$

$$+\nabla\left\{(a_xb_yc_z\dots e_t)a_x^{m-2}b_y^{\mu-2}c_z^{\nu-2}\dots e_t^{\rho-2}\right\}$$

dalla quale, moltiplicando entrambi i membri per $(a_x b_y c_z \dots e_t)$ e ponendo per brevità:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)\, a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \dots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu} c_z^{\nu} \dots d_t^{\rho} = \varphi'_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1}}, \quad \alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1$$

e

$$\Delta \nabla = \Delta',$$

si deduce:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)\, a_x^{m-1} b_y^{\mu-1} c_z^{\nu-1} \dots e_t^{\rho-1} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1} \Delta'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$$
$$+ \Delta'\left\{(a_x b_y c_z \dots e_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \dots e_t^{\rho-2}\right\},$$

cosicchè, sostituendo ciò in (4), si ottiene per f la seguente espressione:

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1} \Delta'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$$
(5)
$$+ \Delta'\left\{(a_x b_y c_z \dots d_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \dots e_t^{\rho-2}\right\}.$$

Si procederà ora allo stesso modo applicando l'identità della forma (4) al composto simbolico

$$a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \dots e_t^{\rho-2}$$

e moltiplicando poi i due membri dell'identità ottenuta per $(a_x b_y c_z \cdots e_t)^2$. Si otterrà così un risultato della forma:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)^2 a_x^{m-2} b_y^{\mu-2} c_z^{\nu-2} \dots e_t^{\rho-2} = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-2} \Delta''_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi''_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$$
$$+ \Delta''\left\{(a_x b_y c_z \dots e_t)^3 a_x^{m-3} b_y^{\mu-3} c_z^{\nu-3} \dots e_t^{\rho-3}\right\},$$

che si sostituirà in (5), cosicchè si avrà per f l'espressione:

$$f = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} + \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-1} \Delta'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi'_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} +$$
(6)
$$+ \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_{n-1}=m-2} \Delta''_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi''_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} + \Delta''\left\{(a_x b_y c_z \dots e_t)^3 a_x^{m-3} b_y^{\mu-3} c_z^{\nu-3} \dots e_t^{\rho-3}\right\}.$$

Così seguitando si giungerà evidentemente ad ottenere per f una espressione della forma:

$$f(x^m; y^\mu; z^\nu; \dots; t^\rho) = \sum_{i+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} \qquad (7)$$

dove:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} = (a_x b_y c_z \dots e_t)^i a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \dots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i} \dots e_t^{\rho-i} \qquad (8)$$

121. La forma $\varphi^{(i)}_{\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ è evidentemente un covariante (di peso nullo) della forma fondamentale f, poichè essa è espressa da un aggregato di elementi lineari simbolici $a_x, a_y, b_x, \dots$ e per conseguenza è una polare di f, (cfr. art. 48 e 53).

Del resto le cose dette al §. XIX circa le operazioni H ed $H^{(\rho)}$ ci dànno immediatamente l'operazione di polare mercè la quale dalla f si deduce una qualunque delle φ. Si ha, cioè, secondo l'art. 103:

$$(a_x b_y c_z \dots e_t)^i a_x^{m-i} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i} \dots e_t^{\rho-i} =$$
$$= \frac{1}{A_i} H^{(-i+1)}_{xyz\dots t} \dots H^{(-3)} H^{(-2)} H^{(-1)} H_{xyz\dots t} f, \qquad (9)$$

essendo il coefficiente numerico A_i dato da:

$$A_i = m(m-i)\cdot\cdot(m-i+1)\,\mu(\mu-1)\cdot\cdot(\mu-i+1)\cdots\rho(\rho-1)\cdot\cdot(\rho-i+1) \qquad (10)$$

cosicchè sarà per la (8):

$$(8)' \quad \varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = \frac{1}{A_i\,\lfloor\underline{m-i}}\,\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\,\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\cdots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt}\,\overset{(-i+1)}{H}\cdots\overset{(-2)}{H}\,\overset{(-1)}{H}\,Hf.$$

122- A meglio valutare l'importanza dello sviluppo (7), è opportuno di esaminarlo separatamente nei tre casi che si possono presentare, secondochè la specie σ delle n serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ sia minore di n, eguale ad n, ovvero maggiore di n. Cominciamo dal primo.

Se la specie σ è minore di n, l'operazione $H_{xyz\dots t}$ applicata a qualsiasi funzione delle $x, y, z, \dots, t$ dà (art. 10) un risultato nullo identicamente, cosicchè la (8)' ci dice essere identicamente:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = 0 \qquad , \qquad \text{per } i > 0 .$$

Ciò appare del resto anche dal fatto che, per $\sigma < n$, è identicamente (cfr. §. VII):

$$(a_x\, b_y\, c_z \dots e_t) = 0 ,$$

diguisachè la (8) ci dà:

$$\varphi^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = 0 \qquad , \qquad \text{per } i > 0$$

e:

$$\varphi^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = \varphi_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = a_y^{\alpha_1}\, a_z^{\alpha_2}\cdots a_t^{\alpha_{n-1}}\, b_y^{\mu}\, c_z^{\nu}\cdots e_t^{\rho}$$

$$= \frac{1}{\lfloor\underline{m}}\,\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\,\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\cdots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt} f .$$

Lo sviluppo (7) si riduce pertanto al seguente:

$$f(\overset{m}{x}; y; z; \dots; t) = \sum_{\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_{n-1}=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}}\,\varphi_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}} \qquad (11)$$

in cui le φ non contengono affatto la serie x. Dunque: *una forma algebrica f con n serie di variabili, di specie inferiore ad n, si può sempre esprimere come la somma di polari di forme φ con sole n-1 serie di variabili (e queste forme φ sono poi esse stesse polari della f).*

123- Supponiamo ora che la specie σ sia eguale ad n. In tal caso è identicamente (cfr. §. 7):

$$(a_x\, b_y\, c_z \dots e_t) = (a\, b\, c \dots e)(x\, y\, z \dots t),$$

cosicchè allo sviluppo (7) si può anche dare la forma:

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \dots; \overset{\rho}{t}) = \sum_{i+\alpha_1+\cdot\cdot+\alpha_{n-1}=m} (x\,y\,z \dots t)^{i}\cdot\Delta_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}}\,\mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} \qquad (12)$$

dove:

$$\mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\cdot\cdot\alpha_{n-1}} = (a\, b\, c \dots e)^{i}\, a_y^{\alpha_1}\, a_z^{\alpha_2}\cdot\cdot a_t^{\alpha_{n-1}}\, b_y^{\mu-i}\, c_z^{\nu-i}\cdots e_t^{\rho-i} \qquad (13)$$

o anche:

$$(14) \qquad \mathcal{E}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}} = \frac{1}{A_i\,\lfloor\underline{m-i}}\,\mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy}\,\mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz}\cdots\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}_{xt}\,\overset{i}{\Omega}_{xyz\dots t} f$$

avendo il numero A_i lo stesso significato dato all'art. 122, poichè si ha:

$$(a\, b\, c \dots e)^{i}\, a_x^{m-i}\, b_y^{\mu-i}\, c_z^{\nu-i}\cdots e_t^{\rho-i} = \frac{1}{A_i}\,\overset{i}{\Omega} f \qquad (15)$$

Le $\mathcal{E}$ sono, come è facile riconoscere (cfr. art. 86) dei covarianti della forma fondamentale f (che si chiameranno co-varianti elementari).

Vediamo dunque che: *una forma algebrica f con n serie di variabili n^{arie} si può sviluppare in una somma di termini che procedono secondo le potenze del determinante delle variabili, ogni potenza di tale determinante venendo moltiplicata per una somma di polari di forme $\mathcal{E}$ che contengono soltanto n-1 delle serie di variabili. Le forme $\mathcal{E}$ sono covarianti di f, che si possono dedurre da f mediante l'operazione Ω e mediante operazioni di polare.*

124- Finalmente il caso di $\sigma > n$ dà luogo ad uno sviluppo analogo allo sviluppo (12), colla differenza che *in luogo della potenza i^{esima} di un unico determinante, si potrà avere uno qualunque dei prodotti di i determinanti del tipo:*

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \cdot & x_k \\ y_\nu & y_h & \cdot & y_k \\ z_\nu & z_h & \cdot & z_k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_\nu & t_h & \cdot & t_k \end{vmatrix}, \qquad \nu, h, \ldots k = 1, 2, 3, \ldots, \sigma$$

Si ha, infatti, in questo caso:

$$(a_x b_y c_z \ldots e_t) = \sum_{\nu, h, \ldots, k} \left\{ \begin{vmatrix} x_\nu & x_h & \ldots & x_k \\ y_\nu & y_h & \ldots & y_k \\ z_\nu & z_h & \ldots & z_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ t_\nu & t_h & \ldots & t_k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \ldots & a_k \\ b_\nu & b_h & \ldots & b_k \\ c_\nu & c_h & \ldots & c_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ e_\nu & e_h & \ldots & e_k \end{vmatrix} \right\}$$

cosicché, se indichiamo con Π_i uno qualunque dei prodotti di i determinanti del tipo (16) e con Q_i il prodotto dei corrispondenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} a_\nu & a_h & \ldots & a_k \\ b_\nu & b_h & \ldots & b_k \\ c_\nu & c_h & \ldots & c_k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \\ e_\nu & e_h & \ldots & e_k \end{vmatrix},$$

la potenza i^{esima} del determinante $(a_x b_y c_z \ldots e_t)$ si esprimerà come una somma di parti del tipo

$$\Pi_i \cdot Q_i ,$$

onde si vede dalle (7) ed (8) che f si potrà esprimere come somma di termini del tipo

$$\Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \left\{ Q_i \, a_y^{\alpha_1} a_z^{\alpha_2} \ldots a_t^{\alpha_{n-1}} b_y^{\mu-i} c_z^{\nu-i} \ldots e_t^{\rho-i} \right\}$$

$$= \Pi_i \cdot \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}} \mathcal{E}^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}$$

dove, come è chiaro, le $\mathcal{E}$ sono anche qui delle forme che contengono soltanto le $n-1$ serie di variabili $y, z, \ldots, t$.

125- Per $n = 2$ lo sviluppo (12) ha la forma semplicissima:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv a_x^m b_y^\mu = \sum_i (xy)^i \cdot \Delta_i \mathcal{E}^{(i)} \quad , \qquad \mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i a_y^{m-i} b_y^{\mu-i}$$

dove l'operazione di polare Δ_i, potendosi sempre ritenere (cfr. art. 118) della forma $\sum_h A \mathcal{D}_{yx}^k \mathcal{D}_{xy}^h$, in cui le A sono coefficienti costanti, non può essere, a meno di un coefficiente numerico, che $\mathcal{D}_{xy}^{m-i}$. Possiamo quindi anche scrivere:

$$f(\overset{m}{x};\overset{\mu}{y}) \equiv a_x^m b_y^\mu = \sum_i \alpha_i \cdot (xy)^i \cdot \mathcal{D}_{yx}^{m-i} \mathcal{E}^{(i)} \tag{16}$$

dove le α_i sono dei coefficienti numerici ed

$$\mathcal{E}^{(i)} = (ab)^i a_y^{m-i} b_y^{\mu-i} = \frac{1}{\underline{|m-i}\ \mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)} \mathcal{D}_{xy}^{m-i} \Omega_{xy}^i f \ .$$

La determinazione dei valori dei coefficienti numerici α verrà da noi fatta nel capitolo sulle forme binarie *

(*) Lo sviluppo (16) è conosciuto sotto il nome di sviluppo di **Clebsch** e *Gordan*. Esso si può considerare come il fondamento del trattato classico di **Clebsch**: *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872).

Questo sviluppo è stato esteso dapprima al solo campo ternario (*Capelli*: *sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili*, nel Giornale di Battaglini vol. XVIII, 1880). Lo sviluppo più generale è stato poi dato, con altrettante dimostrazioni differenti, nelle seguenti memorie:

Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche (l. c. 1882). Cfr. anche: *Sur les opérations dans la théorie générale des formes alg.* (Mathem. Annalen Bd. XXVII) – *Sopra un'estensione dello sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1891) – *Nuova dimostraz. del teorema sullo sviluppo per polari delle forme alg. a più serie di variabili* (Rend. Acc. Lincei 1892) – Quest'ultima è appunto la dimostraz. da noi qui riportata. Un'altra dimostrazione dello sviluppo per polari è stata data da J. Deruyts (Cfr. *Essai d'une théorie générale des formes algebriques*; Bruxelles, 1891).

§. XXIII *Corollarii dello sviluppo stabilito nel precedente §.*

126. Sia $f(x;y;z;\ldots t)$ una forma algebrica con n serie di variabili $x, y, z, \ldots, t$ di specie σ; e supponiamo $n > \sigma - 1$. Se $n > \sigma$, applicando più volte di seguito il primo caso (art. 122) dello sviluppo per polari stabilito nel §. prec., la forma f si rappresenterà dapprima come somma di polari di forme con sole $n-1$ serie; queste poi alla lor volta come polari di forme con sole $n-2$ serie e così di seguito, finchè si giungerà evidentemente ad una espressione, che rappresenterà la f come una somma di polari di forme φ con sole σ serie di variabili (e queste forme φ saranno esse stesse delle polari di f). A questo punto si applicherà alle φ il secondo caso (art. 123) dello sviluppo per polari, ottenendosi dalle espressioni della forma:

$$\varphi \equiv \varphi(\xi;\eta;\ldots;t) = \sum (\xi\,\eta\ldots t)^i \Delta_{\xi\eta\ldots t} \psi(\eta;\xi;\ldots t)$$

essendo $\xi, \eta, \ldots t$ le ultime σ delle serie $x, y, z, \ldots t$ e $\Delta_{\xi\eta\ldots t}$ delle operazioni di polari fra queste σ serie $\xi, \eta, \ldots, t$. Se dunque si sostituiscono queste espressioni delle φ nella espressione precedentemente trovata per f:

$$f(x;y;z;\ldots;t) = \sum \Delta_{xyz\ldots t} \varphi(\xi;\eta;\ldots;t)$$

e si considera per es. che:

$$\mathcal{D}_{\xi x}(\xi\,\eta\ldots t) = (x\,\eta\ldots t)$$

ecc., è chiaro che si potrà anche scrivere:

$$f(x;y;z;\dots;t)=\sum(\dots y\dots z\dots)^i\,\Delta_{xyz\dots t}\,\psi(\eta;\xi;\dots;t)$$

dove $(\dots y\dots z\dots)$ può essere uno qualunque dei determinanti di ordine σ che si possono formare con σ serie scelte a piacere fra le $x, y, z, \dots, t$.

Se ci arrestiamo a questo punto della riduzione successiva data dallo sviluppo del §. prec. concludiamo intanto che *una forma algebrica f con un numero comunque grande di serie di variabili $x, y, z, \dots, t$ di specie σ si può sempre esprimere come un aggregato razionale intero di covarianti identici, formati colle serie $x, y, z, \dots, t$ e di polari di forme algebriche ψ, che contengono soltanto $\sigma-1$ serie di variabili. Queste forme ψ sono poi esse stesse delle polari di f.*

Questo teorema ci permetterà evidentemente di limitare lo studio dei covarianti di un sistema di forme fondamentali n^{arie} al caso in cui le forme fondamentali contengano al più $n-1$ serie di variabili. Così, ad esempio, nel campo binario si considereranno ordinariamente soltanto forme fondamentali e covarianti di forme fondamentali, che contengono un'unica serie di variabili. Nel campo ternario si studiano invece forme e covarianti di forme con una o due serie di variabili; e così via.

127. Nulla però c'impedisce di proseguire anche più oltre nell'applicazione dello sviluppo anche a forme alge-

briche di specie σ che contenga soltanto $\sigma-1$ serie di variabili, al più. Applicando ad una forma $\psi(\xi,\eta,\zeta,\dots,t)$ contenente soltanto $\sigma-1$ serie $\xi,\eta,\zeta,\dots,t$ di specie σ il caso terzo (art. 123) dello sviluppo del §. prec., si otterrà dapprima per ψ un'espressione della forma:

$$\psi(\xi;\eta;\zeta;\dots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\dots t}\,\Delta_{\xi\eta\zeta\dots t}\,\theta(\eta;\zeta;\dots;t)$$

dove $\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\dots t}$ esprime un prodotto di determinanti di ordine $\sigma-1$ del tipo:

$$\begin{vmatrix} \xi_r & \xi_k & \dots & \xi_h \\ \eta_r & \eta_k & \dots & \eta_h \\ \zeta_r & \zeta_k & \dots & \zeta_h \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ t_r & t_k & \dots & t_h \end{vmatrix}, \quad r,k,\dots,h=1,2,\dots,\sigma$$

Applicando poi di nuovo lo stesso procedimento ad ogni forma $\theta(\eta;\zeta;\dots;t)$ si otterrà per ognuna di esse un'espressione della forma analoga:

$$\theta(\eta;\zeta;\dots;t)=\sum \Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\dots t}\,\Delta_{\eta\zeta\dots t}\,\vartheta(\zeta;\dots;t),$$

cosicché, sostituendo quest'ultime espressioni nella precedente, si potrà scrivere:

$$\psi(\xi;\eta;\zeta;\dots;t)=\sum \nabla_{\xi\eta\zeta\dots t}\,\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\dots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\dots t}\,\vartheta(\zeta;\dots;t)$$

dove $\nabla_{\xi\eta\zeta\ldots t}$ esprime un'operazione di polare fra le ξ, η, $\zeta, \ldots, t$. Così procedendo si finirà evidentemente per concludere che: *una forma algebrica $\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ con $\sigma-1$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots, t$ di specie σ si può esprimere come somma di polari di forme del tipo:*

$$\Pi^{(\sigma-1)}_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-2)}_{\eta\zeta\ldots t}\,\Pi^{(\sigma-3)}_{\zeta\ldots t}\cdots\Pi^{(1)}_{t}. \qquad (1)$$

In altri termini:

$$\psi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)=\sum \Delta_{\xi\eta\zeta\ldots t}\,\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t) \qquad (2)$$

dove le forme $\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ contengono le $\sigma(\sigma-1)$ variabili delle $\sigma-1$ serie $\xi, \eta, \zeta, \ldots, t$ soltanto in certe combinazioni speciali. E precisamente le χ sono aggregati di determinanti minori dei vari ordini $1, 2, \ldots, \sigma-1$ appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_\sigma \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_\sigma \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdots & \zeta_\sigma \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_\sigma \end{matrix} \qquad (3)$$

colla restrizione che i minori di ordine $\sigma-2$ possono formarsi soltanto colle $2^a, 3^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ orizzontale, quelli di ordine $\sigma-3$ soltanto colla $3^a, 4^a, \ldots, (\sigma-1)^a$ e così via.

Così, ad esempio, nel caso di $\sigma=5$ si avranno soltanto minori di ordine 4 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix},$$

minori di ordine 3 appartenenti alla matrice:

$$\begin{matrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix},$$

minori di ordine 2 formati colla matrice

$$\begin{matrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & \zeta_5 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{matrix},$$

e finalmente le semplici variabili

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4 \quad t_5$$

128_ I determinanti minori contenuti nella matrice (3) e scelti colla restrizione indicata nell'art. prec. soddisfano evidentemente alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathscr{D}_{\xi\eta}=0 \qquad \mathscr{D}_{\xi\zeta}=0 \quad \ldots \quad \mathscr{D}_{\xi t}=0$$
$$\mathscr{D}_{\eta\zeta}=0 \quad \ldots \quad \mathscr{D}_{\eta t}=0$$
$$\cdots\cdots$$

e quindi anche i loro aggregati soddisferanno alle stesse equazioni. Possiamo dunque anche dire che nella espressione (2) le $\chi(\xi;\eta;\zeta;\ldots;t)$ sono forme algebrice soddisfacenti alle $(\sigma-1)(\sigma-2)$ equazioni alle derivate parziali:

$$\mathscr{D}_{pq}\,\chi=0,$$

essendo p una qualunque delle serie $\xi, \eta, \zeta, \dots, t$ e q una qualunque delle serie che si trovano scritte dopo la serie p nell'ordine di successione $\xi, \eta, \zeta, \dots \tau$. Reciprocamente è facile dedurre dal nostro sviluppo per polari che ogni funzione X soddisfacente a queste equazioni alle derivate parziali è un aggregato di determinanti minori del tipo definito all'art. precedente.

129. Supponiamo infatti, per meglio fissare le idee, di avere una forma algebrica $f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t})$ con quattro serie di variabili x, y, z, t di specie qualsivoglia σ, la quale soddisfi alle equazioni alle derivate parziali:

$$\mathcal{D}_{xy} f = 0 \,, \quad \mathcal{D}_{xz} f = 0 \,, \quad \mathcal{D}_{xt} f = 0$$
$$\mathcal{D}_{yz} f = 0 \,, \quad \mathcal{D}_{yt} f = 0 \tag{5}$$
$$\mathcal{D}_{zt} f = 0$$

Se poniamo per brevità:

$$H^{(-i+1)}_{xyz\dots t} \dots H^{(-3)}_{xyz\dots t} H^{(-2)}_{xyz\dots t} H^{(-1)}_{xyz\dots t} H_{xyz\dots t} \equiv K^{(i)}_{xyz\dots t} \,,$$

lo sviluppo per polari applicato alla f si può esprimere come segue (come appare dalle formole (7), (8) e (9) del §. prec.)

$$f(\overset{m}{x}; y; z; t) = \sum_{i+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=m} \Delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} K^{(i)}_{xyzt} \mathcal{D}^{\alpha_1}_{xy} \mathcal{D}^{\alpha_2}_{xz} \mathcal{D}^{\alpha_3}_{xt} f$$

onde resterà soltanto in virtù delle (5):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta_{xyzt} K^{(m)}_{xyzt} f \tag{6}$$

essendo Δ_{xyzt} una certa operazione di polare fra le serie

x, y, z, t.

Applicando ora lo stesso sviluppo per polari alla forma:

$$K^{(m)}_{xyzt} f$$

nella quale le x si considerino come delle costanti, e considerando che per la permutabilità delle K e per le (5) si ha:

$$\mathcal{D}_{yz} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{yz} f = 0$$
$$\mathcal{D}_{yt} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{yt} f = 0 \quad ,$$

si avrà similmente:

$$K^{(m)}_{xyzt} f = \Delta_{yzt} K^{(\mu)}_{yzt} \left\{ K^{(m)}_{xyzt} f \right\}$$

e sostituendo in (6):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta \Delta_{yzt} K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \,. \tag{7}$$

Si applicherà ora lo sviluppo per polari alle forme:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f$$

in cui si considerino come costanti le x e le y, osservando che si ha per l'ultima delle (5):

$$\mathcal{D}_{zt} \left\{ K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \right\} = K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} \mathcal{D}_{zt} f = 0 \,,$$

e si otterrà analogamente:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f = \Delta_{zt} K^{(\nu)}_{zt} \left\{ K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f \right\},$$

e sostituendo in (7):

$$f(\overset{m}{x}; \overset{\mu}{y}; \overset{\nu}{z}; \overset{\rho}{t}) = \Delta \Delta_{yzt} \Delta_{zt} K^{(\nu)}_{zt} K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f. \tag{8}$$

130- Ciò premesso, sia

$$f = a_x^{m} b_y^{\mu} c_z^{\nu} d_t^{\rho}$$

la rappresentazione simbolica di f. Si avrà primieramente (§.XXII. art.120) a meno di un coefficiente numerico.

$$K^{(m)}_{xyzt} f \equiv (a_x b_y c_z d_t)^{m} b_y^{\mu-m} c_z^{\nu-m} d_t^{\rho-m}$$

d'onde, poichè:

$$K^{\mu}_{yzt} = H^{(-\mu+1)}_{yz}\dots H^{(-m)}_{yzt}\cdot K^{(m)}_{yzt} = K^{(m)}_{yzt}\cdot H^{(-\mu+1)}\dots H^{(-m)}_{yzt}$$

si deduce:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f = K^{(m)}_{yzt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m}\cdot K^{(\mu-m)}_{yzt} b_y^{\mu-m} c_z^{\nu-m} d_t^{\rho-m}\right\}$$

cioè anche, sempre a meno di un coefficiente numerico:

$$K^{(\mu)}_{yzt} K^{(m)}_{xyzt} f = K^{(m)}_{yzt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}.$$

Sostituendo ciò in (8) si ottiene per f, poichè l'operazione $K^{(m)}_{yzt}$ è permutabile con $K^{(\nu)}_{zt}$, una espressione della forma:

$$f = \Delta_{xyzt} K^{(\nu)}_{zt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}$$

dove Δ_{xyzt} è una certa operazione di polare fra le x, y, z, t.

Procedendo allo stesso modo di testè, si osserverà ora che:

$$K^{(\nu)}_{zt} = H^{(-\nu+1)}_{zt}\dots H^{(-\mu)}_{zt} K^{(\mu)}_{zt} = K^{(\mu)}_{zt} H^{(-\nu+1)}_{zt}\dots H^{(-\mu)}_{zt}$$

cosicchè:

$$K^{(\nu)}_{zt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}$$

$$= K^{(\mu)}_{zt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m}\cdot K^{(\nu-\mu)}_{zt} c_z^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\mu}\right\}$$

e quindi, a meno di un coefficiente numerico:

$$= K^{(\mu)}_{zt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu}\right\}$$

Concludiamo dunque che f si può scrivere sotto la forma:

$$f = \Delta_{xyzt}\left\{(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu}\right\}.$$

D'altra parte se in ogni termine dell'operazione di polare Δ_{xyzt} s'imaginano eseguite per prime come è lecito (art.50) le operazioni:

$$\mathcal{D}_{xy}, \mathcal{D}_{xz}, \mathcal{D}_{xt}, \mathcal{D}_{yz}, \mathcal{D}_{yt}, \mathcal{D}_{zt}$$

le quali tutte annullano identicamente la forma

$$(a_x b_y c_z d_t)^{m} (b_y c_z d_t)^{\mu-m} (c_z d_t)^{\nu-\mu} d_t^{\rho-\nu} \qquad (9)$$

si vede che ogni termine di Δ si potrà ritenere essere un prodotto di operazioni elementari scelte fra le rimanenti:

$$\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{tx}, \mathcal{D}_{zy}, \mathcal{D}_{ty}, \mathcal{D}_{tz}.$$

Ma le $\mathcal{D}_{yx}, \mathcal{D}_{zx}, \mathcal{D}_{tx}$ non possono intervenire nel prodotto, poichè il grado di (9) nelle x è già uguale al grado di f nelle stesse x. Similmente si vede, poichè la (9) e la f sono dello stesso grado nelle y che non potranno poi intervenire neanche le $\mathcal{D}_{zy}$ $\mathcal{D}_{ty}$, ecc. L'operazione Δ_{xyzt} equivarrà ad una semplice moltiplicazione delle (9) per un certo coefficiente numerico.

Dunque: se $f(\overset{m}{x}, \overset{\mu}{y}, \overset{\nu}{z}, \overset{\rho}{t}) \equiv a_x^m b_y^\mu c_z^\nu d_t^\rho$ è una forma algebrica soddisfacente alle equazioni alle derivate parziali

$$\mathcal{D}_{xy}f=0,\ \mathcal{D}_{xz}f=0,\ \mathcal{D}_{xt}f=0,\ \mathcal{D}_{yz}f=0,\ \mathcal{D}_{yt}f=0,\ \mathcal{D}_{zt}f=0,$$

essa non differisce che di un semplice fattore numerico dal suo covariante:

$$(a_x\, b_y\, c_z\, d_t)^m (b_y\, c_z\, d_t)^{\mu-m} (c_z\, d_t)^{\nu-\mu}\, d_t^{\rho-\mu} \qquad (10)$$

131 _ Poichè:

$$(a_x\, b_y\, c_z\, d_t) = \sum_{r,s,k,h} \begin{vmatrix} x_r & x_s & x_k & x_h \\ y_r & y_s & y_k & y_h \\ z_r & z_s & z_k & z_h \\ t_r & t_s & t_k & t_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_k & a_h \\ b_r & b_s & b_k & b_h \\ c_r & c_s & c_k & c_h \\ d_r & d_s & d_k & d_h \end{vmatrix}$$

dove gli indici $r < s < k < h$ possono variare da 1 a σ (σ essendo la specie delle serie x, y, z, t), e poichè similmente:

$$(b_y\, c_z\, d_t) = \sum_{r,k,h} \begin{vmatrix} y_r & y_k & y_h \\ z_r & z_k & z_h \\ t_r & t_k & t_h \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_r & b_k & b_h \\ c_r & c_k & c_h \\ d_r & d_k & d_h \end{vmatrix}, \quad r<k<h = 1, 2, \dots, \sigma,$$

e:

$$(c_z\, d_t) = \sum_{r,k} \begin{vmatrix} z_r & z_k \\ t_r & t_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_r & c_k \\ d_r & d_k \end{vmatrix}, \quad r < k = 1, 2, \dots, \sigma,$$

si vede che è così dimostrato quanto si è asserito in fine dell'art. 128, cioè che la forma $f(x;y;z;t)$ soddisfacente alle (5) è un aggregato di determinanti dei tipi:

$$\begin{vmatrix} x_r & x_s & x_k & x_h \\ y_r & y_s & y_k & y_h \\ z_r & z_s & z_k & z_h \\ t_r & t_s & t_k & t_h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} y_r & y_k & y_h \\ z_r & z_k & z_h \\ t_r & t_k & t_h \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_r & z_k \\ t_r & t_k \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_r \end{vmatrix} = t_r \qquad r, s, k, h = 1, 2, \dots \sigma$$

nel secondo dei quali come nel terzo non figurano più le serie x, y, nel mentre che il quarto si riduce alle semplici variabili $t_1, t_2, \dots, t_\sigma$

---

§. XXIV. *Serie di variabili aggiunte alla serie fondamentale (serie di variabili geometriche).*

- Controvarianti e covarianti aggiunti. Esempi -

132. Con n serie $x, y, z, \dots, t$ di variabili di specie σ ($\sigma \geqq n$) si dà origine alla matrice:

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & x_3, & \dots\dots & , x_\sigma \\ y_1, & y_2, & y_3, & \dots\dots & , y_\sigma \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ t_1, & t_2, & t_3, & \dots\dots & t_\sigma \end{matrix} \qquad (1)$$

nella quale sono contenuti $\binom{\sigma}{n}$ determinanti minori di ordine n:

$$(2) \quad P_{i,h,\dots,k} = \begin{vmatrix} x_i & x_h & \dots & x_k \\ y_i & y_h & \dots & y_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_i & t_h & \dots & t_k \end{vmatrix} , \quad i<h<\dots<k=1,2,3,\dots,\sigma$$

ed è facile riconoscere che ogni trasformazione lineare:

$$x_1 = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \dots + \alpha_\sigma x'_\sigma = \alpha_{x'}$$
$$x_2 = \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \dots + \beta_\sigma x'_\sigma = \beta_{x'}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_\sigma = \varepsilon_1 x'_1 + \varepsilon_2 x'_2 + \dots + \varepsilon_\sigma x'_\sigma = \varepsilon_{x'}$$

della serie fondamentale x e delle sue cogredienti $y, z, \dots, t$ viene a stabilire una trasformazione, del pari lineare, delle $p_{i,h,\dots,k}$ nelle corrispondenti trasformate:

$$p'_{i,h,\dots,k} = \begin{vmatrix} x'_i & x'_h & \dots & x'_k \\ y'_i & y'_h & \dots & y'_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t'_i & t'_h & \dots & t'_k \end{vmatrix}$$

Infatti, se $\gamma, \delta, \dots, \lambda$ sono rispettivamente quelle fra le lettere $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ che occupano i posti $i^{mo}, h^{mo}, \dots, k^{mo}$, sostituendo in (2) le espressioni delle $x, y, \dots$ date dalle (3), viene:

$$P_{i,h,\dots,k} \begin{vmatrix} \gamma_{x'} & \delta_{x'} & \lambda_{x'} \\ \gamma_{y'} & \delta_{y'} & \lambda_{y'} \\ \gamma_{t'} & \delta_{t'} & \lambda_{t'} \end{vmatrix} = \sum_{j,r,\dots,s} \begin{vmatrix} \gamma_j & \gamma_r & \dots & \gamma_s \\ \delta_j & \delta_r & \dots & \delta_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_j & \lambda_r & & \lambda_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_j & x'_r & \dots & x'_s \\ y'_j & y'_r & \dots & y'_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t'_j & t'_r & \dots & t'_s \end{vmatrix}$$

il che, se poniamo per brevità:

$$\begin{vmatrix} \gamma_j & \gamma_r & \dots & \gamma_s \\ \delta_j & \delta_r & \dots & \delta_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_j & \lambda_r & \dots & \lambda_s \end{vmatrix} = \omega^{i,h,\dots,k}_{j,r,\dots,s} \qquad (5)$$

si può anche scrivere:

$$P_{i,h,\dots,k} = \sum_{j,r,\dots,s} \omega^{i,h,\dots,k}_{j,r,\dots,s} \, p'_{j,r,\dots,s} \qquad (6)$$

Vediamo dunque che ogni sostituzione lineare (3) dà origine ad una sostituzione lineare ben determinata delle variabili $p_{i,h,\dots,k}$ nelle variabili $p'_{i,h,\dots,k}$, i cui coefficienti $\omega^{i,h,\dots,k}_{j,r,\dots,s}$ di grado n nei coefficienti delle (3), sono i determinanti minori di ordine n contenuti nella matrice dei coefficienti della stessa (3)

Le $p_{i,h,\dots,k}$ considerate come delle nuove variabili diremo che formano una serie (di rango n) *aggiunta* alla serie fondamentale $x_1, x_2, \dots, x_\sigma$. La serie di specie σ e di rango 1 sarà evidentemente la stessa serie $x_1, x_2, \dots, x_\sigma$.

La sostituzione lineare che lega le $p_{i,h,\dots,k}$ alle $p'_{i,h,\dots,k}$ la chiameremo una sostituzione lineare di rango n *aggiunta* alla sostituzione (3). La sostituzione lineare di specie σ e di rango 1 sarà evidentemente la stessa sostituzione ordinaria (3) di specie σ.

133. La sostituzione lineare di specie σ e di rango $\sigma-1$ non

differisce sostanzialmente dalla sostituzione lineare di specie σ controgrediente (cfr. §. VI) alla sostituzione fondamentale (3).

Infatti, supposto $n = \sigma - 1$, e detta $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\sigma$ una nuova serie di variabili cogredienti alla serie (1), risulta manifestamente dalle espressioni (2) delle $p_{1,2,\dots i-1, i+1,\dots,\sigma-1}$, che:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} (-1)^{i+1} \xi_i \, p_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots\sigma-1} = (\xi \, x \, y \dots t),$$

cosicché, se poniamo:

$$p_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,\sigma-1} = (-1)^{i+1} \cdot (\xi \, x \, y \dots t) \cdot u_i \, ,$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi_i \, u_i = 1 \, .$$

Se in corrispondenza alla sostituzione (3) le ξ si trasformano nelle ξ' e le u nelle u', si avrà dunque:

$$\sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi_i \, u_i = \sum_{i=1}^{i=\sigma} \xi'_i \, u'_i$$

d'onde appare appunto (cfr. §. VI) che le u' si deducono dalle u colla sostituzione controgrediente alla (3).

134. Se $u, v, \dots$ sono delle serie di variabili controgredienti alla (3) e se in virtù delle (3) un certo sistema di forme fondamentali $f, \varphi, \dots$ (cfr. §. XII) coi coefficienti $A, B, \dots$ si cambia nel sistema $f, \varphi, \dots$ coi coefficienti $A', B', \dots$, ogni funzione razionale $R(A; B; \dots; u; v; \dots)$ che soddisfa al-

l'eguaglianza:

$$R(A'; B'; \dots; u'; v'; \dots) = \chi(\alpha, \beta, \dots) \, R(A; B; \dots; u; v; \dots)$$

essendo χ funzione dei soli coefficienti $\alpha, \beta, \dots$ della sostituzione lineare (3), si dice essere un *controvariante* del sistema fondamentale $f, \varphi, \dots$

Un esempio importante di controvariante di un'unica forma fondamentale n^{aria}: $f(x)$, si ha eliminando le $x_1, x_2, \dots, x_n$ fra le equazioni

$$f(x) = 0 \, , \quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \, , \quad u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \, , \quad \dots \, , \quad u_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad (7)$$

Si otterrà un'equazione:

$$\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$$

e la forma φ sarà appunto un controvariante di f; come facilmente si comprende se si riflette che le derivate $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ si trasformano (cfr. §. VI art. 39) colla sostituzione lineare controgrediente a quella eseguita sulle $x_1, \dots, x_n$.

Passiamo a riconoscere ciò per il caso di forme quadratiche.

135. Sia

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} \, x_i \, x_j \qquad (8)$$

una forma quadratica n^{aria}. Eliminando le x fra le equazioni (7) o, che è la stessa cosa(*), fra le equazioni:

(*) poiché: $2f(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$.

$$u_x = 0,\quad u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \ldots,\ u_n = \frac{\partial f}{\partial x_n} \tag{9}$$

al quale oggetto le (9) si svolgeranno nel caso attuale sotto la forma seguente:

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n \\ \tfrac{1}{2} u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tfrac{1}{2} u_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n , \end{aligned}$$

si trova:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{10}$$

dove φ è una forma quadratica rispetto alle variabili controgredienti $u_1, u_2, \ldots, u_n$ che si chiama la forma quadratica aggiunta alla f. Indicando con A_{ik} l'aggiunto di a_{ik} nel determinante:

$$\sum \pm a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} ,$$

si può anche scrivere, come facilmente si riconosce sviluppando il determinante (10) secondo i prodotti di un elemento della prima orizzontale per un elemento della prima verticale:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \sum_{i=1}^{i=n} A_{ij}\, u_i\, u_j \tag{11}$$

135 - Vogliamo riconoscere direttamente, col solito metodo, che la forma φ definita dalla (11) è un controvariante di f.

Moltiplicando φ per il solito covariante identico $K = (\xi\ \eta \ldots \omega)$ formato con n serie ausiliarie $\xi\ \eta \ldots \omega$ cogredienti alla serie x, si può scrivere:

$$\varphi \cdot K = \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ 0 & \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_\xi & u_\eta & \cdots & u_\omega \\ u_1 & f_1(\xi) & f_1(\eta) & \cdots & f_1(\omega) \\ u_2 & f_2(\xi) & f_2(\eta) & \cdots & f_2(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & f_n(\xi) & f_n(\eta) & \cdots & f_n(\omega) \end{vmatrix} ,$$

posto per brevità

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n = \frac{1}{2} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = f_i(x) .$$

Se ora si moltiplica ancora per K e si eseguisce la moltiplicazione per orizzontali, dopo però avere invertito la matrice dell'ultimo determinante testè scritto, si trova:

$$\varphi \cdot K^2 = \frac{1}{2^n} \begin{vmatrix} 0 & u_\xi & u_\eta & \cdots & u_\omega \\ u_\xi & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\xi} f(\xi) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\eta} f(\xi) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\omega} f(\xi) \\ u_\eta & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\xi} f(\eta) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\eta} f(\eta) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\eta\omega} f(\eta) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_\omega & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\xi} f(\omega) & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\eta} f(\omega) & \cdots & \frac{1}{2}\mathcal{D}_{\omega\omega} f(\omega) \end{vmatrix}$$

Di qui risulta appunto il carattere invariantivo di φ, poichè ogni elemento del determinante che sta nel secondo membro, sia esso della forma u_ξ o della forma $\frac{1}{2}\mathcal{D}_{\xi\eta} f(\xi)$, è già per sè stesso una forma invariantiva (cfr. §§. V e VI).

137. Il concetto di controvariante dato all'art. 133 si può evidentemente generalizzare considerando *covarianti aggiunti* di qualsivoglia rango del sistema delle $f, \varphi, \dots$. Così, p. es., un covariante aggiunto di 3° rango sarà una funzione $R(A; B; \dots; p_{123}, p_{124}, p_{234}, \dots; q_{123}, q_{124}, q_{234}, \dots; \dots)$ dei coefficienti $A, B, \dots$, delle serie di variabili aggiunte di 3° rango p_{ihk}, e di altre serie simili $q_{ihk}, \dots$ soddisfacente alla condizione:

$$R(A'; B'; \dots; p'_{ihk}; q'_{ihk}; \dots) = \chi(\alpha, \beta, \dots) R(A; B; \dots; p_{ihk}; q_{ihk}; \dots)$$

138. Più generalmente ancora, si potranno formare per il sistema fondamentale delle $f, \varphi, \dots$, i così detti *covarianti misti*, cioè delle funzioni:

$$R(A; B; \dots; x; y; \dots; p_{ih}; q_{ih}; \dots; p_{ihk}; q_{ihk}; \dots)$$

contenenti un numero qualunque di serie di variabili di ogni rango, soddisfacenti alla condizione:

$$R(A'; B'; \dots; x'; y'; \dots; p'_{ih}; q'_{ih}; \dots; p'_{ihk}; q'_{ihk}; \dots) =$$
$$= \chi(\alpha, \beta, \dots) \cdot R(A; B; \dots; x; y; \dots; p_{ih}; q_{ih}; \dots; p_{ihk}; q_{ihk}; \dots).$$

Tutti questi covarianti, se si sostituisce in essi, in luogo delle variabili di ogni serie $p_{i,h,\dots,k}$ di rango μ le loro espressioni, analoghe alle (2), composte con μ serie cogredienti alla serie fondamentale x, si cambiano evidentemente per quanto si è visto, in covarianti ordinari

con più serie di variabili tutte cogredienti alle x. Di qui segue p. es. che *anche per i covarianti misti il fattore* $\chi(\alpha, \beta, \dots)$ *esser dovrà una potenza intera del determinante dei coefficienti della sostituzione fondamentale*; ecc.

139. Chiuderemo questo §. con un'osservazione importante. Dalle cose dette nel §. precedente risulta che *una forma algebrica con un numero qualunque di serie di variabili* x $y\, z \dots t$ *di specie* σ *si può sempre esprimere come un aggregato di covarianti identici e di polari di forme* $\chi(\xi, \eta, \zeta, \dots t)$ *che contengono soltanto* $\sigma-1$ *serie di variabili* $\xi, \eta, \zeta, \dots t$ *e soddisfano alle condizioni differenziali*:

$$\mathcal{D}_{\xi\eta}\chi = 0 \quad , \quad \mathcal{D}_{\xi\zeta}\chi = 0 , \dots \mathcal{D}_{\xi t}\chi = 0, \quad \mathcal{D}_{\eta\zeta}\chi = 0, \dots$$

Ora, secondo quanto si è poi anche dimostrato in quello stesso paragrafo, una forma $\chi(\xi, \eta, \zeta, \dots, s, \tau, t)$ soddisfacente a queste condizioni, si può anche considerare come una forma

$$\vartheta(t; p_{ik}; p_{ihk}; \dots)$$

contenente la sola serie t, ed inoltre: la serie aggiunta di 2° rango

$$p_{i,h} = \begin{vmatrix} \tau_i & \tau_h \\ t_i & t_h \end{vmatrix}, \qquad i, h = 1, 2, \dots, \sigma$$

la serie aggiunta di 3° rango

$$p_{i,h,k} = \begin{vmatrix} \vartheta_i & \vartheta_h & \vartheta_k \\ \tau_i & \tau_h & \tau_k \\ t_i & t_h & t_k \end{vmatrix} \qquad i, h, k = 1, 2, \ldots, \sigma$$

e così una sola serie di ogni rango fino alla serie di rango $\sigma - 1$:

$$p_{i,h,\ldots k} = \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_h & \cdots & \xi_k \\ \eta_i & \eta_h & \cdots & \eta_k \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_i & \tau_h & \cdots & \tau_k \\ t_i & t_h & \cdots & t_k \end{vmatrix} \quad , \quad i, h, \ldots k = 1, 2, \ldots, \sigma$$

Concludiamo dunque che una forma algebrica con un numero qualunque di serie di variabili di specie σ, si può sempre ridurre, secondo i procedimenti indicati, a forme che contengono soltanto σ-1 serie di ranghi tutti differenti e precisamente una sola serie fondamentale, una sola serie aggiunta di 2° rango, una sola di 3° rango, ecc.*

(*) Cfr. Clebesch: *Ueber eine Fundamentalanfgabe der Jnvariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen Bd. 17, 1872).

CAPITOLO II

Processi invariantivi - Equazioni differenziali dei covarianti. Rappresentazione delle forme invariantive.

§ I. *L'operazione Ω eseguita su aggregati di elementi lineari*

1. Si ha spesso occasione di dover eseguire l'operazione $\Omega_{xyz\ldots t}$, fra n serie n^{arie} $x, y, z, \ldots t$, sopra una forma espressa come aggregato degli rn elementi lineari (Cfr. Cap. I, § 7)

$$\begin{matrix} a_x , & b_x , & c_x , & \ldots & e_x \\ a_y , & b_y , & c_y , & \ldots & e_y \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_t , & b_t , & c_t , & \ldots & e_t \end{matrix} \qquad (1)$$

che si possono formare colle n serie $x, y, \ldots, t$ e con r serie di coefficienti arbitrarii: $a, b, c, \ldots e$. Poichè, però, il risultato dell'operazione Ω applicata ad una somma di più parti non è che la somma dei risultati dell'operazione stessa applicata ad ogni singola parte, così basterà evidentemente che ci occupiamo dell'operazione Ω applicata ad un semplice prodotto:

$$a_x^{p_1} b_x^{q_1} c_x^{r_1} \ldots e_x^{s_1} a_y^{p_2} b_y^{q_2} c_y^{r_2} \ldots e_y^{s_2} \ldots\ldots a_t^{p_n} b_t^{q_n} c_t^{r_n} \ldots e_t^{s_n} \qquad (2)$$