ma (§§ 51, 52) di trovare tutti i sistemi completi che ammettono il gruppo.

Capitolo VIII°

Isomorfismo dei gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime. Gruppi parametrici. Isomorfismo dei gruppi in relazione colle trasformazioni finite. Risoluzione generale del problema di riconoscere la simiglianza di due gruppi.

§ 94

Isomorfismo fra due gruppi fondato sulla corrispondenza delle loro trasformazioni infinitesime

Come nella teoria dei gruppi di sostituzioni (dei gruppi finiti di operazioni) e più in generale nella teoria dei gruppi discontinui, così anche in quella dei gruppi continui di trasformazioni si può stabilire l'importante concetto d'isomorfismo fra i gruppi. Ma nella teoria dei gruppi continui si può arrivare in due modi diversi allo scopo e cioè o stabilire, come nella ordinaria teoria, una certa corrispondenza fra le trasformazioni finite di due gruppi, ovvero stabilire una corrispondenza analoga fra le trasformazioni infinitesime dei due gruppi.

Seguiremo da principio la seconda via, che è la più semplice e piana, e più tardi, dopo lo studio dei gruppi parametrici, dimostreremo che la corrispondenza stabilita fra le trasformazioni infinitesime determina, precisata, una corrispondenza fra le trasformazioni finite, che soddisfa appunto alle ordinarie leggi d'isomorfismo (§§ 102, 103) -

Cominciamo dal considerare due gruppi

$$G_r = (X_1 X_2 \ldots X_r)$$

$$\Gamma_r \equiv (X'_1 X'_2 \ldots X'_r)$$

con egual numero r di parametri che siano egualmente composti, cioè tali che con

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

si abbia ancora

$$(X'_i X'_k) = \sum_s c_{iks} X'_s f,$$

le costanti c_{iks} di composizione essendo le stesse.

Se facciamo corrispondere ad ogni trasformazione infinitesima

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f$$

in G_r precisamente la

$$\lambda_1 X'_1 f + \lambda_2 X'_2 f + \dots + \lambda_r X'_r f$$

in G'_r, avremo manifestamente stabilita una corrispondenza biunivoca fra le trasformazioni infinitesime di G_r e quelle di G'_r in guisa che se

$$Af\,,\ Bf$$

sono due trasformazioni infinitesime qualunque di G_r ed

$$A'f\,,\quad B'f$$

quelle corrispondenti di G'_r, alla trasformazione alternata (AB) in G_r corrisponde l'alternata $(A'B')$ in G'_r – Per esprimere questo fatto si dice che i due gruppi G_r, G'_r sono isomorfi e precisamente, la corrispondenza delle loro trasformazioni infinitesime essendo biunivoca (ovvero essendo lo stesso il numero dei parametri) i due gruppi diconsi isomorfi oloedricamente – Il concetto d'isomorfismo oloedrico fra due gruppi coincide manifestamente con quello di egual composizione, sicchè due gruppi egualmente composti sono anche sempre isomorfi oloedricamente e viceversa –

È chiaro senz'altro che due gruppi oloedricamente isomorfi ad un terzo lo sono anche fra loro, cioè l'isomorfismo oloedrico soddisfa alla legge fondamentale dell'eguaglianza –

Ma si possono anche paragonare le composizioni di due gruppi con diverso numero di parametri ed introdurre il concetto d' isomorfismo meriedrico nel modo seguente.

Sia

$$G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$$

un gruppo a r parametri e

$$G'_{r-q} \equiv (X'_1 X'_2 \dots X'_{r-q})$$

un gruppo a $r-q$ parametri e siano c_{iks} le costanti di composizione di G_r, cioè

$$(a) \qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

Se è possibile scegliere fra le trasformazioni infinitesime

$$\lambda_1 X'_1 f + \lambda_2 X'_2 f + \dots + \lambda_{r-q} X'_{r-q} f$$

di G'_{r-q} r trasformazioni

$$Y_1 f, \quad Y_2 f, \dots Y_r f$$

fra le quali ve ne siano $r-q$ indipendenti, in guisa che insieme alle (a) sussistano le identità

$$(b) \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f,$$

si dirà che: Il gruppo minore G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q col maggiore G_r.

Il Lie preferisce di adoperare questa determinata locuzione e non parlare senz'altro d'isomorfismo meriedrico fra i due gruppi perchè questa specie di isomorfismo non soddisfa più, come quello oloedrico, alla legge fondamentale dell'eguaglianza, cioè due gruppi meriedricamente isomorfi ad un terzo non lo sono più in generale fra loro.

Si osservi che anche nel caso attuale ad una trasformazione infinitesima

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f$$

di G_r ne corrisponderà una pienamente determinata in G'_{r-q} e cioè

$$\lambda_1 Y_1 f + \lambda_2 Y_2 f + \cdots + \lambda_r Y_r f$$

ed ancora se ad Af, Bf in G_r corrispondono $A'f$, $B'f$ in G'_{r-q}, alla (A,B) corrisponderà (A',B').

Abbiamo già incontrato diversi esempi d'isomorfismo sì oloedrico che meriedrico. Così il gruppo aggiunto Γ di un gruppo G_r è sempre isomorfo oloedricamente o meriedricamente con G_r, e precisamente ha luogo il primo caso se G_r non possiede sottogruppo commutativo, l'altro nel caso contrario (cf. §70). Così anche se consideriamo una varietà V invariante rispetto ad un gruppo G_r, il gruppo stesso considerato come agente sui punti di V dà luogo ad un gruppo isomorfo con G_r e precisamente l'isomorfismo è oloedrico o meriedrico secondo che non esiste od esiste in G_r un sottogruppo che lasci fissi i singoli punti di V (cf. la fine del §44, ove appare evidente che le trasformazioni infinitesime ivi indicate con Uf sono composte come le Xf).

Notiamo poi che il problema di riconoscere se, dati due gruppi in generale di un numero diverso di parametri

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$$

$$G'_{r-q} \equiv (X'_1 X'_2 \dots X'_{r-q}),$$

è possibile di porre G'_{r-q} in corrispondenza d'isomorfismo con G_r (oloedrico per $q=0$ meriedrico per $q>0$), si riduce subito ad una questione algebrica. Posto infatti

$$Y_i f = \sum_k^{1\dots r-q} a_{ik} X'_k f \qquad (i=1, 2 \dots r)$$

è questione di determinare le $r(r-q)$ costanti a_{ik} in guisa 1° che la loro matrice sia di caratteristica $r-q$, 2° che con $(X_i X_j) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs} X_s f$ sia anche

$$(Y_i Y_j) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs} Y_s f$$

Indicando con c' le costanti di composizione delle X' si hanno per ciò le $r^2(r-q)$ equazioni quadratiche nelle $\underline{a}$ (cf. § 80)

$$\sum_{k,l}^{1\dots r-q} c'_{klt}\, a_{ik}\, a_{jl} = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs}\, a_{st}$$

$$i, j = 1, 2 \dots r$$

$$t = 1, 2 \dots r-q$$

§ 95
Proprietà dell'isomorfismo

Si abbiano due gruppi G_r, G'_{r-q}, in generale di diverso numero di parametri, ed il secondo sia posto in relazione d'isomorfismo meriedrico d'ordine q col primo, cioè le trasformazioni generatrici

$$X_1 f,\ X_2 f \dots X_r f$$

del primo corrispondano rispettivamente

$$Y_1 f,\ Y_2 f \dots\dots Y_r f$$

nel secondo. Fra queste ve ne sono $r-q$ indipendenti, e possiamo supporre che siano le prime $r-q$

$$Y_1 f,\ Y_2 f \dots\dots Y_{r-q} f\,;$$

allora le seguenti si esprimeranno linearmente ed omogeneamente per queste con coefficienti costanti, sia

$$(1) \qquad Y_{r-q+i} f = \sum_s^{1\dots r-q} d_{is} Y_s f \qquad (i=1,2 \dots q)$$

Alle q trasformazioni infinitesime indipendenti in G_r

$$(2) \qquad X_{r-q+i} f - \sum_s^{1\dots r-q} d_{is} X_s f$$

e ad ogni loro combinazione lineare a coefficienti costanti corrisponde in G'_{r-q} la trasformazione infinitesima identicamente nulla. Viceversa ogni trasformazione infinitesima

$$(3) \qquad \mathfrak{X} f = \sum_i^{1\dots r} \lambda_i X_i f$$

di G_r cui corrisponda l'identità in G'_{r-q} è una combinazione lineare delle (2), poichè in tale ipotesi deve essere

$$\sum_i^{1\ldots r} \lambda_i Y_i f = \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_i Y_i f + \sum_j^{1\ldots q} \lambda_{r-q+j} Y_{r-q+j} =$$

$$= \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_i Y_i f + \sum_j^{1\ldots q} \sum_i^{1\ldots r-q} \lambda_{r-q+j}\, d_{ji}\, Y_i f = 0$$

e quindi (essendo $Y_1 f \ldots Y_{r-q} f$ indipendenti)

$$\lambda_i = \sum_j^{1\ldots q} \lambda_{r-q+j}\, d_{ji} \qquad (i = 1, 2 \ldots r-q)$$

Perciò la (3) diventa

$$\mathfrak{X} f = \sum_j^{1\ldots r-q} \lambda_{r-q+j} \left(X_{r-q+j} f - \sum_i^{1\ldots r-q} d_{ji} X_i f \right).$$

che è appunto una combinazione lineare delle (2).

Se si considera poi la trasformazione alternata

$$(4) \qquad \left(X_\lambda f, X_{r-q+i} f - \sum_s^{1\ldots r-q} d_{is} X_s f \right)$$

di G_r per

$$\lambda = 1, 2, \ldots r \;;\; i = 1, 2 \ldots q\,;$$

a questa corrisponde in G'_{r-q} la

$$(Y_\lambda f, 0) = 0$$

e perciò la (4) stessa è una combinazione lineare delle (2). Ne segue il teorema:

Se il gruppo G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, esistono in quest' ultimo q trasformazioni indipendenti (2) cui corrisponde la trasformazione identica in G'_{r-q}; esse generano un sottogruppo Γ_q a q parametri invariante in G_r.

Supponiamo ora di avere in G_r un sottogruppo G_m generato dalle m trasformazioni indipendenti

$$(5)\qquad g_{i1}X_1f + g_{i2}X_2f + \cdots + g_{ir}X_rf$$
$$i = 1, 2 \dots m$$

A queste m trasformazioni generatrici di G_m corrispondono in G'_{r-q} le m

$$(5^*)\qquad g_{i1}Y_1f + g_{i2}Y_2f + \cdots + g_{ir}Y_rf;$$

siccome le espressioni alternate formate colle (5) si compongono colle (5) stesse, lo stesso accade per le (5*). Per ciò anche le (5*) generano un sottogruppo in G'_{r-q} e il numero dei parametri di questo sottogruppo $\leqq m$ eguaglia il numero delle (5*) indipendenti. Si vede subito anche che se il sottogruppo di G_r generato dalle (5) è invariante in G_r, anche quello di G'_{r-q} generato dalle (5*) sarà invariante in G'_{r-q} - Dunque: Ad ogni sottogruppo di G_r ne corrisponde uno perfettamente determinato in G'_{r-q} e se il primo è invariante in G_r, il secondo lo è in G'_{r-q}.

Inversamente suppongasi di avere in G'_{r-q} un sottogruppo G'_m generato dalle m trasformazioni infinitesime

$$\sum_k^{1\dots r-q} g_{ik}Y_kf \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

allora le $m+q$ trasformazioni indipendenti

$$\sum_k^{1\dots r-q} g_{ik}X_kf, \qquad X_{r-q+j}f - \sum_s^{1\dots r-q} d_{js}X_sf$$

generano in G_r un sottogruppo G_{m+q} - Di più lo il primo è invariante in G'_{r-q} il secondo lo sarà in G_r; dunque:

Ad ogni sottogruppo G'_m di G'_{r-q} ne corrisponde almeno uno in G_r, in particolare ne corrisponde sempre uno G_{m+q} ad $m+q$ parametri, e se G'_m è invariante in G'_{r-q}, lo sarà pure G_{m+q} in G_r -

Risulta da queste considerazioni che si conoscerannno tutti i sottogruppi di G'_{r-q} se si conoscono tutti quelli di G_r.

Nel caso dell'isomorfismo oloedrico $q=0$, i risultati superiori si semplificano in modo evidente che risulta del resto dall'avere i due gruppi la medesima composizione -

§ 96
Gruppo complementare di un gruppo G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q

Si è visto che se il gruppo G'_{r-q} è in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, alla identità in G'_{r-q} corrisponde in G_r un sottogruppo invariante G_q a q parametri. Importa ora dimostrare inversamente il teorema:

Se un gruppo G_r possiede un sottogruppo invariante G_q, si può sempre costruire un gruppo G'_{r-q} in isomorfi-

smo meriedrico d'ordine q con G_r, tale che all'iden-
tità in G'_{r-q} corrisponda in G_r precisamente il sotto-
gruppo invariante assegnato G_q -

Prendiamo le r trasformazioni infinitesime genera-
trici di G_r:

$$X_1 f, X_2 f \dots X_{r-q} f ; X_{r-q+1} f, \dots X_r f$$

in guisa che le ultime q generino il sottogruppo
invariante supposto

$$G_q \equiv (X_{r-q+1}, X_{r-q+2} \dots X_r)$$

Tutte le trasformazioni alternate

$$(X_i X_k)$$

in cui $k > r-q$ si compongono linearmente con

$$X_{r-q+1} \dots X_r .$$

cioè fra le costanti di composizione

$$c_{ik1}, c_{ik2} \dots c_{ik,r-q}$$

saranno certo nulle tutte quelle in cui uno degli indici
i o k supera $r-q$. Se prendiamo ora le relazioni
quadratiche (I) § 24 fra le c

$$\sum_{\nu}^{1\dots r} (c_{ik\nu} c_{\nu js} + c_{kj\nu} c_{\nu is} + c_{ji\nu} c_{\nu ks}) = 0 ,$$

e fra esse consideriamo tutte quelle in cui i quattro
indici

$$i, k, j, s$$

prendono solo i valori da 1 a $r-q$, saranno nul-
le le

$$c_{\nu js} \quad c_{\nu is} \quad c_{\nu ks}$$

quando $\nu > r-q$ - Le relazioni considerate si riducono quindi alle seguenti

$$\sum_{\nu}^{1\dots r-q}\left(c_{ik\nu}\, c_{\nu js} + c_{kj\nu}\, c_{\nu is} + c_{ji\nu}\, c_{\nu ks}\right) = 0$$

$$\text{per } i, k, j, s = 1, 2, \dots r-q$$

Siccome poi si ha anche

$$c_{iks} + c_{kis} = 0 \qquad (i, k, s = 1, 2, \dots r-q),$$

si vede che le $(r-q)^3$ costanti

$$c_{iks} \qquad (i, k, s = 1, 2, \dots r-q)$$

soddisfano le condizioni che, pel terzo teorema fondamentale, assicurano l'esistenza di un gruppo a $r-q$ parametri

$$G'_{r-q} \equiv (Y_1\, Y_2 \dots Y_{r-q})$$

di composizione

$$(Y_i\, Y_k) = \sum_s^{1\dots r-q} c_{iks}\, Y_s f \quad (i, k = 1, 2 \dots r-q)$$

Se ora alle $r-q$ Yf aggiungiamo le q

$$Y_{r-q+1} f, \; Y_{r-q+2} f, \dots Y_r f$$

tutte nulle e facciamo corrispondere ordinatamente alle

$$X_1 f, \; X_2 f \dots X_r f$$

le

$$Y_1 f, \; Y_2 f, \dots Y_r f,$$

avremo posto il gruppo G'_{r-q} in relazione d'isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r, in guisa appunto che all'identità in G'_{r-q} corrisponda in G_r il sottogruppo invariante dato.

$$G_q \equiv (X_{r-q+1} \dots X_r),$$

come si voleva. -

Aggiungiamo ora le osservazioni seguenti. Il gruppo G'_{r-q} è determinato soltanto dalle sue costanti di composizione, sicchè si può sostituire con qualunque altro gruppo oloedricamente isomorfo. Due gruppi oloedricamente isomorfi si riguardano, in queste teorie generali, come identici e perciò si parla di un determinato gruppo G'_{r-q}. Per costruirlo effettivamente si potrà adoperare il processo del § 29 che serve nella dimostrazione di Schur del terzo teorema fondamentale e porlo sotto la forma di un gruppo semplicemente transitivo sopra $r-q$ variabili; per la sua costruzione effettiva bastano, come si è visto al § 29, operazioni algebriche. - Il gruppo G'_{r-q} è determinato dal gruppo G_r e dal suo sottogruppo invariante G_q; come nella teoria dei gruppi di sostituzioni si dirà il gruppo complementare del gruppo G_r rispetto al sottogruppo invariante G_q e si indicherà col simbolo di quoziente

$$G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$$

Come già si è detto, questo gruppo complementare $G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$ è unicamente determinato dalle sue costanti di composizione, le quali si calcolano, per quanto precede, nel modo seguente: Supposto

$$G_q \equiv (X_{r-q+1}, X_{r-q+2} \dots X_r)$$
$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_{r-q}; X_{r-q+1} \dots X_r)$$

si formano tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k) \qquad i, k = 1, 2 \dots r-q$$

formate con quelle trasformazioni infinitesime di G_r che non sono in G_q e, calcolate le loro espressioni lineari per

$$X_1 f \dots X_r f,$$

cioe'

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1 \dots r} c_{iks} X_s f,$$

si tien conto solo di quei termini del secondo membro che contengono le dette $X_1 X_2 \dots X_{r-q}$; i coefficienti

$$c_{iks} \qquad i, k, s = 1, 2 \dots r-q$$

sono le costanti di composizione del gruppo complementare G'_{r-q} (*).

Osserviamo infine come da queste considerazioni risulta risoluto il problema:

Noti tutti i sottogruppi invarianti di un gruppo G_r trovare tutte le possibili composizioni dei gruppi in isomorfismo meriedrico con G_r.

(*) In particolare deduciamo di qui il teorema: Se il gruppo complementare $\frac{G_r}{G_q}$ è Abeliano, il gruppo derivato di G_r è contenuto in G_q – Ne risulta quest'altra definizione del gruppo derivato:

Il gruppo derivato di un gruppo G_r è quel suo più piccolo sottogruppo invariante Γ pel quale $\frac{G}{\Gamma}$ è Abeliano (sottogruppo dei commutatori)

§ 97

Serie di composizione di due gruppi isomorfi - Teorema di Hölder-Engel

Supponiamo nuovamente che il gruppo G'_{r-q} sia in isomorfismo meriedrico d'ordine q con G_r o, ciò che è lo stesso, che G'_{r-q} sia il gruppo complementare di G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q:

$$G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$$

Ad ogni sottogruppo G'_s invariante in G'_{r-q} ne corrisponde uno G_{s+q} invariante in G_r (§ 95); e si vede anche subito che se G'_s è invariante massimo in G'_{r-q}, tale sarà pure G_{s+q} in G_r, e viceversa. In particolare:

Il gruppo complementare $G'_{r-q} = \frac{G_r}{G_q}$ di un gruppo G_r rispetto ad un suo sottogruppo invariante G_q è semplice se G_q è invariante massimo in G_r, composto nel caso contrario -

Più in generale consideriamo una serie di composizione di G'_{r-q}, sia

(α) $\quad G'_{r-q}\,,\ G'_{r-q'}\,,\ G'_{r-q''}\ \ldots\ldots\ G'_{r-q^{(s)}}\,,\ 1,$

ed indichiamo con

(β) $\quad G_r\,,\ G_{r+q-q'}\,,\ G_{r+q-q''}\ \ldots\ldots\ G_{r+q-q^{(s)}}\ \ G_q$

i corrispondenti sottogruppi in G_r; ciascuno di questi sarà invariante massimo nel precedente, per cui la (β) formerà il principio di una serie di composizione di G_r da G_r fino a G_q, alla quale basterà aggregare una serie di composizione di G_q per avere una serie completa di composizione del gruppo G_r. Di qui si vede che qualunque sottogruppo invariante G_q di G_r può essere inserito in una serie di composizione di G_r; gli indici di composizione di G_r si ottengono associando agli indici di composizione del gruppo complementare $\frac{G_r}{G_q}$ quelli di G_q stesso.

Riprendiamo a considerare una serie qualunque di composizione di G_r sia

$$G_r\,,\; G_{r_1}\; G_{r_2} \ldots\ldots G_{r_q} \quad 1$$

e costruiamo i gruppi complementari di ciascun gruppo della serie rispetto al seguente

$$\frac{G_r}{G_{r_1}}\,,\; \frac{G_{r_1}}{G_{r_2}}\,,\; \frac{G_{r_2}}{G}\,,\; \ldots\ldots,\frac{G_{r_{q-1}}}{G_{r_q}}\,,\; G_{r_q}\,.$$

Siccome ciascuno G_{r_i} è invariante massimo nel precedente, questi gruppi complementari sono tutti semplici e per ciascuno il numero dei parametri eguaglia il corrispondente indice di composizione; indichiamoli dunque

$$(\gamma) \quad H_{r-r_1}\,,\; H_{r_1-r_2} \ldots\ldots H_{r_{q-1}-r_q} \quad H_{r_q} \;(\equiv G_q)$$

Il teorema di Jordan-Lie (§66) stabilisce che, se si considera un'altra serie qualunque di composizione e si costruiscono i corrispondenti gruppi complementari

$$(\gamma^*) \qquad H'_{r-\rho_1}\,\; H'_{\rho_1-\rho_2} \ldots\ldots,$$

i numeri (indici di composizione), che danno per ciascun gruppo della serie (γ) il numero dei parametri, coincidono, salvo l'ordine, con quelli analoghi nella serie (γ^*).

Ma si può dimostrare molto di più e cioè che non soltanto i numeri dei parametri dei gruppi complementari nelle due serie (γ), (γ^*) ma i gruppi stessi, salvo l'ordine, coincidono (sono oloedricamente isomorfi) -

Nella teoria dei gruppi di sostituzioni questo teorema fu dimostrato la prima volta da Hölder, venne esteso poi da Engel ai gruppi continui - Lo diciamo perciò il teorema di Hölder-Engel e lo enunciamo nel modo seguente:

a) In due diverse serie di composizione di un medesimo gruppo G_r i gruppi complementari di ciascun gruppo rispetto al seguente, prescindendo dall'ordine, sono gli stessi.

Per dimostrarlo basterà riprendere il teorema del §65, che serve di fondamento alla dimostrazione del teorema di Jordan-Lie, e completarlo nel modo seguente:

b) Se un gruppo G_r possiede due diversi sottogruppi invarianti massimi G_{r_1}, $G_{r_1'}$ e Γ_h è il sottogruppo comune a G_{r_1}, $G_{r_1'}$, i due gruppi complementari

$$\frac{G_r}{G_{r_1}}, \quad \frac{G_{r_1'}}{\Gamma_h}$$

sono identici (oloedricamente isomorfi) come gli altri due

$$\frac{G_r}{G_{r_1'}}\ ,\ \frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$$

Conviene ricordare per la dimostrazione che si ha $h = r_1 + r_1' - r$, indi $r - r_1 = r_1' - h$, $r_1 - r_1' = r_1 - h$ e che Γ_h è invariante massimo sì in G_{r_1} che in $G_{r_1'}$ (§ 65) —

Ora riprendendo le notazioni del § 65 pongasi

$$\Gamma_h \equiv (X_1 X_2 \dots X_h)$$

$$G_{r_1} \equiv (X_1 X_2 \dots X_h ; X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

$$G_{r_1'} \equiv (X_1 X_2 \dots X_h ; Y_{h+1} \dots Y_{r_1'})$$

e si avrà

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_h Y_{h+1} \dots Y_{r_1'} ; X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

Si osservi subito che le trasformazioni infinitesime di G_{r_1} si formano aggregando a quelle del sottogruppo invariante (massimo) Γ_h le

$$(S) \qquad X_{h+1} \dots X_{r_1}$$

e nello stesso modo si formano quelle di G_r da quelle di $G_{r_1'}$ aggregando a queste le medesime (S) — Ora, secondo quanto è osservato alla fine del paragrafo precedente, le costanti di composizione del gruppo complementare

$$\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$$

si formano costruendo le trasformazioni alternate fra le (S)

$$(X_{h+i}\,,\,X_{h+j})$$
$$i, j = 1, 2 \dots r_1 - h$$

e nelle loro espressioni lineari per

$$X_1\ X_2 \dots X_h\ ; X_{h+1} \dots X_r$$

prendendo i coefficienti di $X_{h+1} \dots X_r$; queste sono le costanti di composizione di $\frac{G_r}{\Gamma_h}$. Se procediamo nello stesso modo per formare le costanti di composizione di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ siccome le trasformazioni infinitesime da aggregar si a quelle di G_{r_1} per avere quelle di G_r sono le stesse (5), le costanti di composizione di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ sono le stesse che per $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$, cioè i due gruppi sono oloedricamente isomorfi. Lo stesso vale naturalmente di $\frac{G_r}{G_{r_1}}$, $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$ e la proposizione b) è così dimostrata.

Dopo ciò basta riprendere la dimostrazione del teorema di Jordan – Lie (§66), supponendo che il teorema a) di Hölder sussista pei gruppi con meno di r parametri. Allora se

$$(6)\quad G_r\ G_{r_1}\ G_{r_2} \dots\dots G_{r_q}\ 1$$

$$(7)\quad G_r\ \Gamma_{\rho_1}\ \Gamma_{\rho_2} \dots\dots \Gamma_{\rho_q}\ 1$$

sono due diverse serie di composizione di G_r, e con Γ_h si indica il sottogruppo comune di G_{r_1}, Γ_{ρ_1} con

$$\Gamma_h\ \Gamma_{h_1}\ \Gamma_{h_2} \dots 1$$

una serie di composizione di Γ_h, abbiamo le altre due serie di composizione di G_r

$$(6^*)\quad G_r\ G_{r_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1} \dots\dots 1$$

$$(7^*)\quad G_r\ \Gamma_{\rho_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1} \dots\dots 1$$

Le due serie (6)(6*) hanno gli stessi gruppi complementari perchè il primo $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ è comune ed essendo $r_1 < r$ da G_{r_1} in poi i gruppi complementari rimangono per ipotesi gli stessi (salvo l'ordine); lo stesso dicasi di (7).(7*) – Basta dunque dimostrare che (6*).(7*) hanno gli stessi gruppi complementari. Ora da Γ_h in poi è evidente perchè le due serie da quel punto coincidono. Per i primi due

$$\frac{G_r}{G_{r_1}} \quad \frac{G_{r_1}}{\Gamma_h} \quad \text{per la (6*)}$$

$$\frac{G_r}{G_{r_1'}} \quad \frac{G_{r_1'}}{\Gamma_h} \quad \text{per la (7*)}$$

risulta dalla proposizione b) essendo $\frac{G_r}{G_{r_1}}$ oloedricamente isomorfo con $\frac{G_{r_1'}}{\Gamma_h}$ e $\frac{G_{r_1}}{\Gamma_h}$ con $\frac{G_r}{G_{r_1'}}$.

§ 98
Costruzione di gruppi isomorfi a gruppi imprimitivi

Terminiamo queste prime ricerche sull'isomorfismo con un esempio di costruzione di un gruppo isomorfo ad un dato gruppo –

Sia $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ un gruppo sulle n variabili $x_1\, x_2 \dots x_n$ transitivo ed imprimitivo (§ 51) e sia

(8) $u_1(x_1 \dots x_n) = c_1\ ;\ u_2(x_1 \dots x_n) = c_2 \dots u_{n-q}(x_1 \dots x_n) = c_{n-q}$

una divisione dello spazio in ∞^{n-q} varietà V_q d'imprimitività, tale cioè che le trasformazioni di G_r o lascino ciascuna V_q in sè stessa o permutino le V_q fra loro.

Considerando le varietà stesse come elementi è chiaro che esse vengono permutate fra loro secondo le trasformazioni di un gruppo continuo del quale andiamo ora a calcolare le trasformazioni infinitesime per dimostrare che esso è isomorfo con G_r -

Una trasformazione qualunque

$$x_i' = f_i(x, a)$$

di G_r eseguita entro le $u_1 \dots u_{n-q}$ le cangia (6. 51) in

$$u_i' = \varphi_i(u_1\, u_2 \dots u_{n-q}\,;\, a_1 \dots a_r)$$

$$i = 1, 2 \dots n-q$$

e queste formano sulle u un gruppo Γ indotto dal gruppo G_r sulle x - Il numero dei parametri di Γ può del resto essere inferiore ad r e ciò avviene quando esiste in G_r un sottogruppo (necessariamente invariante) che lascia fissa ogni singola varietà V_q, a cui corrisponde cioè l'identità in Γ.

Per calcolare le trasformazioni infinitesime di Γ basta considerare che esse sono indotte dalle trasformazioni infinitesime $X_k f$ di G_r sulle x - Agli accrescimenti

$$\delta x_i = \xi_{ki}\, \delta t$$

impartiti alle x da $X_k f$ corrispondono gli accrescimenti;

$$\delta u_j = \delta t \sum \xi_{ki} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = X_k(u_j)\,\delta t$$

sulle u. Ricordiamo ora (§. 52) che, essendo la (8) una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività, le espressioni $X_k(u_j)$ sono funzioni delle sole u, poniamo

$$X_k(u_j) = \omega_{kj}\,(u_1\, u_2 \cdots u_{n-q});$$

dunque la trasformazione infinitesima $X_k f$ sulle x produce sulle u la trasformazione infinitesima:

$$(9) \qquad U_k \Phi = \sum_j^{1\dots n-q} \omega_{kj}(u) \frac{\partial \Phi}{\partial u_j}$$

$$(k = 1, 2 \dots r).$$

Le trasformazioni infinitesime di Γ sono certo fra queste, le quali per altro possono non essere tutte indipendenti. In ogni caso verifichiamo che esse hanno la stessa composizione di $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$, che cioè con

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

si ha anche

$$(U_k U_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s \Phi$$

Si osservi per ciò che esprimendo in una funzione Φ delle u le u per le x si ha identicamente

$$(10) \qquad U_j \Phi = X_j \Phi$$

Ora

$$(11) \qquad (U_k U_l) = \sum_\nu^{1\dots r-q} \left\{ U_k(\omega_{l\nu}) - U_l(\omega_{k\nu}) \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu} =$$

$$= \sum_\nu^{1\dots r-q} \left\{ X_k(\omega_{l\nu}) - X_l(\omega_{k\nu}) \right\} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu};$$

ma dall'identità

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

ponendovi $f = u_\nu$ segue

$$X_k(X_l(u_\nu)) - X_l(X_k(u_\nu)) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s(u_\nu).$$

cioè per la (10)

$$X_k(U_l(u_\nu)) - X_l(U_k(u_\nu)) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s(u_\nu)$$

ossia

$$X_k(\omega_{l\nu}) - X_l(\omega_{k\nu}) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls}\, \omega_{s\nu}$$

Per ciò la (11) diventa

$$(U_k \cdot U_l) = \sum_\nu^{1\dots r-q} \sum_s^{1\dots r} c_{kls}\, \omega_{s\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial u_\nu} = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} U_s \Phi.$$

che è appunto quello che volevasi dimostrare. Si conclude di qui:

Il gruppo Γ indotto sui sistemi d'imprimitività è sempre isomorfo col gruppo imprimitivo dato G_r. L'isomorfismo sarà meriedrico d'ordine q se fra le r trasformazioni $U_k \Phi$ date dalle (9) ve ne siano $r-q$ soltanto indipendenti —

Si osserverà che in ogni caso avremo $q < r$ perchè in caso opposto sarebbero tutte le $U_k \Phi$, cioè tutte le $\omega_{kj} = X_k(u_j)$, identicamente nulle e il gruppo G_r, avendo allora gli invarianti $u_1\, u_2 \dots\dots u_{n-q}$, sarebbe intransitivo contro l'ipotesi

I risultati precedenti prendono un aspetto molto semplice se, operando un cangiamento di variabili, si suppone che siano

$$x_1 = c_1\ ,\ x_2 = c_2 \dots\dots x_{n-q} = c_{n-q}$$

i sistemi d'imprimitività. In tal caso nelle trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

i primi $n-q$ coefficienti

$$\xi_{k1} \quad \xi_{k2} \dots\dots \xi_{k,n-q}$$

non contengono le variabili $x_{n-q+1} \dots x_n$ e le trasformazioni generatrici di Γ sono le trasformazioni accorciate

$$\overline{X_k f} = \sum_i^{1\dots n-q} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Del resto è evidente che scelte le variabili in questo modo il gruppo G_r opera sulle prime $n-q$ variabili $x_1 \dots x_{n-q}$ senza mescolarle colle altre; in quanto opera su queste esso non è altro che il gruppo Γ.

§ 99

Definizione dei gruppi parametrici

Per approfondire lo studio dell'isomorfismo, come per altre questioni della teoria dei gruppi continui e loro applicazioni, è importante introdurre la nozione di due gruppi aggregati, come il gruppo aggiunto, ad un dato gruppo G_r e che portano il nome di gruppi parametrici.

Il concetto di gruppo parametrico di un dato gruppo G_r è facile ad intendersi a priori e corrisponde per un gruppo di sostituzioni d'ordine n a porlo in relazione d'isomorfismo oloedrico con un gruppo dello stesso ordine di sostituzioni sopra n elementi. Come il gruppo aggiunto (§ 67) indica il modo secondo cui le trasformazioni del gruppo G_r si permutano trasformate con una medesima di G_r, così i gruppi parametrici indicano come tutte le trasformazioni di G_r si permutano moltiplicandole contemporaneamente a destra o a sinistra per una medesima trasformazione di G_r; e secondo appunto che la trasformazione moltiplicatrice si pone a destra o a sinistra si avrà il primo od il secondo gruppo parametrico.

Sviluppando questo concetto fondamentale, consideriamo un gruppo G_r, la cui trasformazione generica

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\ a_1\, a_2 \dots a_r)$$

indichiamo al solito con S_a. Due trasformazioni S_a', S_b' di G_r si compongono in una terza S_c':

$$(12) \qquad S_a' S_b' = S_c'$$

e i parametri $c_1\, c_2 \dots c_r$ della trasformazione composta S_c' sono dati dalle formole

$$(13) \qquad c_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \dots a_r;\ b_1\, b_2 \dots b_r)$$

che sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$ (§ 86).

Ora dimostriamo che riguardando in queste formole le $\underline{a}$ come variabili, le $\underline{b}$ come parametri, esse definiscono un gruppo di trasformazioni sulle variabili $\underline{a}$ coi parametri essenziali b; e similmente riguardando invece le b come variabili e le a come parametri, definiscono un secondo gruppo sulle variabili b coi parametri a.

Riguardiamo infatti nell'equazione simbolica (12) le a come variabili che indichiamo con $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_r$ e le b come fisse; saranno allora le c variabili che indicheremo con $\xi'_1\ \xi'_2 \ldots \xi'_r$ e l'equazione simbolica

$$(12^*) \qquad S'_{\xi'} = S'_{\xi} S'_{b} .$$

e le effettive

$$\xi'_i = \varphi_i(\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_r ; b_1\ b_2 \ldots b_r),$$

indicheranno ~~come~~ si permutano tutte le trasformazioni S_ξ ... moltiplicandole a destra per una fissa S_b. Ora si moltiplicano nuovamente tutte le $S'_{\xi'}$ a destra per una fissa S'_c e si suppone

$$(14) \qquad S'_{\xi''} = S'_{\xi'} S'_c$$

si avrà

$$(14^*) \quad \xi''_i = \varphi_i(\xi'_1\ \xi'_2 \ldots \xi'_r ; c_1\ c_2 \ldots c_r)$$

Dalle (12*) (14) segue

$$S'_{\xi''} = S'_{\xi}(S'_b S'_c)$$

e se poniamo

$$S'_b S'_c = S'_\gamma$$

cioè

$$\gamma_i = \varphi_i(b_1\ b_2 \ldots b_r ; c_1\ c_2 \ldots c_r)$$

avremo

$$S'_{\xi''} = S'_\xi S'_\gamma$$

e quindi

(15) $\quad \xi_i'' = \varphi_i(\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_r\, ; \gamma_1\, \gamma_2 \ldots \gamma_r)$

Ciò dimostra che due successive trasformazioni della serie (13*) cioè la (13*) e la (14*) si compongono in una terza (15) della medesima serie, i nuovi parametri γ essendo funzioni dei parametri b, e delle componenti, e resta così provato quanto abbiamo enunciato.

Il gruppo (13*) sulle variabili ξ è transitivo perchè le (13*) sono risolubili rispetto ai parametri b; esso è quindi un gruppo Π_r semplicemente transitivo cogli r parametri b. Secondo quanto abbiamo detto al principio del paragrafo Π_r è il primo gruppo parametrico del gruppo dato G_r.

Del tutto analogamente se nella relazione

$$S_a S_b = S_c$$

riguardiamo le a come parametri e le b come variabili ξ e scriviamo

$$S_a S_\xi = S_{\xi'}$$

ne risulta

$$S_b S_{\xi'} = (S_b S_a) S_\xi = S_c S_\xi = S_{\xi''}$$

Come sopra ne segue che le formole

$$\xi_i' = \varphi_i(a_1\, a_2 \ldots a_r\, ; \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_r)$$

definiscono un secondo gruppo Π_r' semplicemente transitivo sulle r variabili ξ cogli r parametri a; questo Π_r' è il secondo gruppo parametrico.

È facile ora vedere che i due gruppi parametrici

Π_r, Π_r' sono reciproci l'uno dell'altro, per la qual cosa basta provare (§ 90) che le trasformazioni dell'uno sono permutabili con quelle dell'altro. E infatti se T_b è una trasformazione qualunque di Π_r rappresentata simbolicamente da

$$T_b) \qquad S'_\xi S_b = S_{\xi'}$$

e T'_a una qualunque di Π_r' rappresentata da

$$T'_a) \qquad S'_a S'_{\xi'} = S_{\xi''}$$

avendosi

$$S_a(S'_\xi S_b) = (S_a S_\xi) S_b = S_{\xi''}$$

ne risulta appunto

$$T_b T'_a = T'_a T_b$$

Secondo i teoremi del § 85 i due gruppi parametrici Π_r, Π_r' sono simili, la qual cosa risulta anche subito dal dedurre dall'equazione simbolica

$$S'_\xi S_b = S_{\xi'}$$

che definisce le trasformazioni di Π_r l'altra

$$S_b^{-1} S_\xi^{-1} = S_{\xi'}^{-1}$$

e dall'osservare che le S^{-1} percorrono in altro ordine le trasformazioni di G_r. Sotto questa seconda forma abbiamo dunque le trasformazioni del secondo gruppo Π_r' -

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nel teorema: Se si considera un gruppo G_r qualunque

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; a_1 a_2 \dots a_r)$$

e si suppone che due sue trasformazioni qualsiasi S_a, S_b

si compongano in una terza S_c colle formole

$$c_i = \varphi_i(a_1 a_2 \dots a_r ; b_1 b_2 \dots b_r)$$

queste ci danno le equazioni finite di due gruppi semplicemente transitivi e reciproci Π_r, Π'_r (indi simili), i gruppi parametrici di G_r - Il primo si ottiene riguardando nelle formole superiori le $\underline{a}$ come variabili le $\underline{b}$ come parametri, il secondo invertendo l'interpretazione -

Si osservi in fine che ciascuno dei due gruppi parametrici ha per gruppi parametrici se stesso e l'altro gruppo -

§.100

Trasformazioni infinitesime del primo gruppo parametrico

D'ora innanzi basterà che si limitiamo a considerare il primo gruppo Π_r, che diremo senz'altro il gruppo parametrico, l'altro Π'_r essendo da questo determinato come suo gruppo reciproco - Il gruppo parametrico Π_r sarà generato da $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime, che vogliamo innanzi tutto calcolare.

Per questo cominciamo dall'osservare che fra le trasformazioni S_b di G_r e quelle T_b di Π_r viene stabilita una corrispondenza biunivoca secondo l'equazione simbolica

$$(16) \qquad S_a S_b = S_{a'}$$

o le effettive

$$(16^*) \qquad a_i' = \varphi_i\,(a_1\, a_2 \dots a_r\, ; b_1 \dots b_r)$$

dove riguardando le $\underline{b}$ come parametri le $\underline{a}$ come variabili si hanno appunto le formole per la trasformazione T_b di Π_r. Si vede poi subito che la detta corrispondenza è tale che se ad S_b, S_β corrispondono T_b, T_β al prodotto $S_b S_\beta$ in G_r corrisponderà il prodotto $T_b T_\beta$ in Π_r. Per ciò ad ogni sottogruppo G_m di G_r corrisponde un sottogruppo Π_m in Π_r, in particolare ad un G_1 in G_r un Π_1 in Π_r.

Basterà caratterizzare questi sottogruppi Π_1 ad un parametro in Π_r per trovare altresì le trasformazioni infinitesime di Π_r. Questo si è già fatto in sostanza al § 16; ora non facciamo che riprendere quelle considerazioni giovandoci della nozione attuale di gruppo parametrico.

Supponiamo che pei valori $a^{(o)}$ dei parametri la $S_{a^{(o)}}$ diventi l'identità e facciamo percorrere nella (16) alla S_b un sottogruppo ad un parametro G_1 di G_r; esprimiamo le b in funzione di un parametro $\underline{t}$ supponendo che a $t=0$ corrisponda la trasformazione identica, cioè che sia $b_i = a_i^{(o)}$ per $t=0$. Le formole (16*) che scriviamo

$$a_i' = \varphi_i\,(a_1\, a_2 \dots a_r\, ; t)$$

definiranno un sottogruppo Π_1 di Π_r, l'identità corrispondendo anche qui a $t=0$ – Tenendo fisse le a la $S_{a'}$ percorre in G_r una serie ∞' di trasformazioni data dalle formole

$$(17) \qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ;\, a_1'\, a_2' \ldots a_r')$$

e le x_i' considerate come funzioni di t, soddisfano ad equazioni differenziali della forma (87)

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \xi_{ki}(x_1'\, x_2' \ldots x_n'),$$

essendo $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ costanti. Ma per le equazioni differenziali fondamentali scritte sotto la forma (B) §8 si ha

$$\xi_{ki}(x') = \sum_j \alpha_{kj}(a_1'\, a_2' \ldots a_r') \frac{\partial x_i'}{\partial a_j'}$$

quindi

$$(18) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \sum_{k,j}^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a') \frac{\partial x_i'}{\partial a_j'}$$

Ora dalla (17) si ha

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial x_i'}{\partial a_j'} \frac{da_j'}{dt}$$

e paragonando con (18)

$$\sum_j^{1\ldots r} \frac{\partial x_i'}{\partial a_j'} \left\{ \frac{da_j'}{dt} - \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a') \right\} = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

Siccome i parametri $a_1'\, a_2' \ldots a_r'$ sono essenziali nelle (17) le quantità che sotto la sommatoria moltiplicano $\frac{\partial x_i'}{\partial a_j'}$ sono (pel §2) necessariamente nulle, cioè si ha

$$\frac{da_j'}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \lambda_k\, \alpha_{kj}(a')$$

Il sottogruppo Π_1 è adunque generato dalla trasformazione infinitesima

$$\sum_k^{1\ldots r} \lambda_k \sum_j^{1\ldots r} \alpha_{kj}(a_1\, a_2 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_j}\;;$$

ne deduciamo: Se le equazioni differenziali fondamentali di un gruppo G_r

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

si scrivono

$$\xi_{ji}(x'_1 \ldots x'_n) = \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{jk}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\,,$$

le r trasformazioni infinitesime del (primo) gruppo parametrico Π_r sono date dalle r espressioni

$$A_k f = \sum_j^{1\ldots r} \alpha_{kj}(a_1\, a_2 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_j}$$

$$k = 1, 2 \ldots r$$

Ricordiamo che queste espressioni $A_k f$ si presentarono già al § 19, ove si vide che il sistema

$$X'_k F + A_k F = 0$$

$$(k = 1, 2 \ldots r)$$

sulle $n+r$ variabili x', a è un sistema completo e se con $F_1, F_2 \ldots F_r$ se ne indicano le soluzioni principali che per $a_i = a_i^{(0)}$ si riducono a $x'_1\, x'_2 \ldots x'_n$, le formole

$$F_i(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n\, ;\, a_1\, a_2 \ldots a_r) = x_i$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

danno le equazioni in termini finiti del gruppo G_r, risolute rapporto alle x. Al § 20, sviluppando le condizioni d'integrabilità, si vide ancora che sussisteranno simultaneamente le formole di composizione

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$

$$(A_i A_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} A_s f$$

Ne segue l'importante teorema:

Ogni gruppo G_r ha eguale composizione del suo primo (o secondo) gruppo parametrico, ossia è oloedricamente isomorfo con esso.

§ 101
Gruppi parametrici equivalenti

Il gruppo parametrico Π_r di un dato gruppo G_r cangia naturalmente di forma quando sui parametri $\underline{a}$ primitivi si eseguisca una trasformazione qualunque

$$(19) \qquad a_i = \theta_i(b_1 b_2 \ldots b_r) \qquad i = 1, 2 \ldots r$$

Conoscendo le trasformazioni infinitesime

$$A_k f = \sum_i^{1\ldots r} \alpha_{ki}(a_1\, a_2 \ldots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

del primo gruppo Π_r, quelle del nuovo gruppo parametrico si otterranno semplicemente trasformando le $A_k f$ dalle variabili $\underline{a}$ alle variabili $\underline{b}$ colle formole (19).

Il gruppo Π_r essendo semplicemente transitivo se abbiamo un secondo gruppo

$$\overline{\Pi}_r \equiv (B_1 f, B_2 f, \dots B_r f)$$

$$B_k f = \sum_i^{1\dots r} \beta_{ki}(b_1 \dots b_r) \frac{\partial f}{\partial b_i}$$

pure semplicemente transitivo ed egualmente composto, esisterà certo (§85) una trasformazione delle a nelle b che cangierà Π_r in $\overline{\Pi}_r$ e nei nuovi parametri b il gruppo parametrico di G_r sarà precisamente $\overline{\Pi}_r$ -

Vediamo quindi che, dato un gruppo G_r sulle n variabili x mediante le sue trasformazioni infinitesime

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$$

qualunque gruppo

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \dots A_r f)$$

$$A_k f = \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

semplicemente transitivo sulle r variabili a e di eguale composizione di G_r può assumersi come gruppo parametrico di G_r -

Se si vogliono poi le equazioni finite di G_r sotto quella forma cui corrisponde come gruppo parametrico $\Pi_r \equiv (A_1 A_2 \dots A_r)$ basterà procedere nel modo indicato alla fine del paragrafo precedente. E cioè supposto che facendo corrispondere alla $X_k f$ la $A_k f$ le costanti di composizione di G_r, Π_r siano le stesse, bisognerà integrare il sistema completo

$$X'_k F + A_k F = 0 \qquad (k = 1, 2 \dots r)$$

e preso le sue soluzioni principali

$$F_1, F_2 \dots F_n$$

che per $a_i = a_i^{(0)}$ si riducono rispettivamente a x_1', x_2' $\dots x_n'$ risolvere le n equazioni

$$F_i(x_1' x_2' \dots x_n'; a_1 a_2 \dots a_r) = x_i$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

rapporto alle x_i'.

In particolare, siccome il gruppo parametrico

$$a_i' = \varphi_i(a_1 a_2 \dots a_r; b_1 b_2 \dots b_r)$$

ha per gruppo parametrico sé stesso, se supponiamo che l'identità debba corrispondere ai valori $b = a^{(0)}$ dei parametri, si avrà il teorema:

Note le trasformazioni infinitesime

$$(k = 1, 2 \dots r) \qquad A_k f = \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

del gruppo parametrico, le sue equazioni finite si otterranno nel modo seguente: Del sistema completo di r equazioni

$$\sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(a_1' \dots a_r') \frac{\partial F}{\partial a_i'} + \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki}(b_1 b_2 \dots b_r) \frac{\partial F}{\partial b_i} = 0$$
$$k = 1, 2 \dots r$$

nelle $2r$ variabili a', b si determinino le r soluzioni principali $\Phi_i(a_1' \dots a_r'; b_1 \dots b_r)$ che per $b_i = a_i^{(0)}$ si riducono rispettivamente ad $a_1', a_2' \dots a_r'$ e traendo dalle r equazioni

$$\Phi_i(a_1' \dots a_r'; b_1 \dots b_r) = a_i$$
$$i = 1, 2 \dots r$$

le a' in funzione delle a e delle b si avranno le richieste equazioni del gruppo parametrico in cui l'identità corrisponde ai valori $b = a^{(0)}$ dei parametri.

Ricordiamo poi che col processo di Schur per la dimostrazione del terzo teorema fondamentale, date le r^3 costanti c_{iks} di composizione abbiamo imparato a costruire con sole operazioni algebriche r trasformazioni infinitesime indipendenti in r variabili $a_1 \dots a_r$

$$A_k f = \sum_i^{1\dots r} \alpha_{ki} (a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

della prescritta composizione - Queste generano un gruppo Π_r semplicemente transitivo sulle $\underline{a}$, che può essere assunto come gruppo parametrico per tutti i gruppi G_r di composizione c_{iks}. Dunque:

Date le costanti di composizione di un gruppo G_r, e tanto più date le sue trasformazioni infinitesime, si possono calcolare con sole operazioni algebriche (senza alcuna integrazione) le trasformazioni infinitesime del suo gruppo parametrico -

§.102

Isomorfismo oloedrico in relazione colle trasformazioni finite

Colle nozioni acquistate sui gruppi parametrici riprendiamo ora lo studio dell'isomorfismo fra i gruppi per dimostrare che se ne può dare una seconda definizione, riferendosi alle trasformazioni finite anzichè alle infinitesime; in tal modo il concetto d'isomorfismo diventa perfettamente analogo a quello dei gruppi discontinui.

Cominciamo dall'osservare che se due gruppi G_r, G'_r hanno a comune il gruppo parametrico Π_r essi sono certamente d'egual composizione perchè egualmente composti col gruppo parametrico.

E' facile anche vedere inversamente, dopo le ricerche del paragrafo precedente, che:

Due gruppi G_r, G'_r egualmente composti, ove se ne scrivano convenientemente le equazioni finite, hanno a comune il primo gruppo parametrico.

Siano infatti le trasformazioni infinitesime di G_r, G'_r rispettivamente

$$X_1f,\ X_2f \dots X_rf \quad \text{per } G_r$$

$$Y_1f,\ Y_2f \dots Y_rf \quad \text{per } G'_r,$$

e supponiamo che facendo corrispondere a X_kf la Y_kf le costanti di composizione dei due gruppi siano le stesse. Siano poi

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\ a_1 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

le equazioni finite del primo gruppo e

$$\Pi_r \equiv (A_1f,\ A_2f \dots A_rf)$$

$$A_kf = \sum_i^{1 \dots r} \alpha_{ki}(a)\frac{\partial f}{\partial a_i}$$

il corrispondente gruppo parametrico – Il gruppo Π_r, semplicemente transitivo, ha la composizione stessa di G_r, quindi quella di G'_r – Pel paragrafo precedente possiamo quindi scrivere le equazioni finite di G'_r nelle corrispondenti variabili $y_1\, y_2 \ldots y_m$, diciamo

$$y'_i = F_i(y_1\, y_2 \ldots y_m\, ; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots m$$

in guisa che il gruppo parametrico di G'_r sia ancora Π_r –

Supponiamo ora scritte le equazioni finite dei due gruppi G_r, G'_r equalmente composti

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ; a_1\, a_2 \ldots a_r) \quad i = 1, 2 \ldots n$$
$$y'_j = F_j(y_1\, y_2 \ldots y_m\, ; a_1\, a_2 \ldots a_r) \quad j = 1, 2 \ldots m$$

in guisa appunto che abbiano a comune il primo gruppo parametrico $a'_i = \varphi_i(a, b)$

Ad ogni trasformazione finita S_a di G_r facciamo corrispondere quella S'_a di G'_r che ha i medesimi parametri; poiché il gruppo parametrico è comune, se si ha

$$S_a S_b = S_c \; .$$

~~sarà~~ ancora

$$S'_a S'_b = S'_c$$

Troviamo così l'importante teorema:

c) Due gruppi G_r, G'_r sono equalmente composti solo quando è possibile stabilire fra le loro trasformazioni finite una corrispondenza biunivoca tale che al prodotto di due trasformazioni qualunque in G_r corrisponda sempre il prodotto, nel medesimo ordine, delle due trasformazioni corrispondenti in G'_r –

La relazione fra i due gruppi è così precisamente quella che porta il nome d'isomorfismo oloedrico nella teoria dei gruppi discontinui (finiti o infiniti) – È facile vedere che i due gruppi G_r. G'_r saranno così appunto oloedricamente isomorfi nel senso definito al §. 94, riferendosi alle trasformazioni infinitesime. E infatti la corrispondenza così definita fra le trasformazioni finite di G_r, G'_r implica una corrispondenza fra i sottogruppi ad un parametro dei due gruppi e quindi fra le loro trasformazioni infinitesime generatrici. Si corrisponderanno due trasformazioni infinitesime dei due gruppi G_r, G'_r quando corrispondano ad una stessa del gruppo parametrico comune; si vede subito quindi che se ad Xf, Yf in G_r corrispondono $X'f$. $Y'f$ in G'_r. alla $(X Y)$ corrisponderà $(X' Y')$ – I due gruppi G_r. G'_r sono dunque posti in relazione d'isomorfismo oloedrico nel senso del § 94 –

Viceversa se i due gruppi G_r. G'_r sono posti in relazione d'isomorfismo oloedrico nel senso primitivo (§ 94) facendo corrispondere alle trasformazioni generatrici

$$X_1 f, X_2 f \ldots X_r f \text{ di } G_r$$

le $$Y_1 f, Y_2 f \ldots Y_r f \text{ di } G'_r .$$

vediamo che si può ulteriormente precisare una corrispondenza fra le trasformazioni finite dei due gruppi, che soddisfi alle condizioni enunciate in C), cioè risponda alla definizione d'isomorfismo dei gruppi discontinui e lasci sussistere la corrispondenza già fissata fra le trasformazioni infinitesime di G_r, G'_r (fra i loro sottogruppi ad un parametro).

Le costanti di composizione per le $X_k f$ e per le $Y_k f$ essendo le stesse, si può, per quanto si è visto al principio del paragrafo, scrivere le equazioni finite dei due gruppi G_r, G'_r

$$(20) \qquad x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

$$(20^*) \qquad y'_j = F_j(y_1\, y_2 \ldots y_m;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

in guisa che abbiano a comune il gruppo parametrico

$$\Pi_r \equiv (A_1 f,\, A_2 f \ldots A_r f)$$

$$A_k f = \sum_i^{1\ldots r} \alpha_{ki}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_i}$$

Ora la corrispondenza fissata fra le trasformazioni infinitesime di G_r e G'_r fa corrispondere a $\sum_i^{1\ldots r} e_i X_i f$ la trasformazione infinitesima $\sum_i^{1\ldots r} e_i Y_i f$.

Questi simboli $\sum_i e_i X_i f$, $\sum_i e_i Y_i f$ possono anche riguardarsi come simboli delle rispettive trasformazioni finite dei due gruppi, scritte sotto forma canonica:

$$(21)\qquad x_i' = x_i + \sum_k e_k X_k x_i + \sum_{k,j} \frac{e_k e_j}{1.2} X_k X_j x_i + \dots$$

$$(21^*)\qquad y_i' = y_i + \sum_k e_k Y_k y_i + \sum_{k,j} \frac{e_k e_j}{1.2} Y_k Y_j y_i + \dots$$

Stabiliamo appunto di far corrispondere alla trasformazione finita $\sum_i e_i X_i f$ di G_r l'altra $\sum_i e_i Y_i f$ di G_r' e sarà mantenuta la corrispondenza già fissata fra le trasformazioni infinitesime. Di più se dimostriamo che le equazioni canoniche dei due gruppi (21), (21*) hanno ancora a comune il gruppo parametrico, sarà provato quanto si voleva. Ora sotto la forma primitiva (20), (20*) i due gruppi G_r, G_r' avevano appunto il medesimo gruppo parametrico — Per ridurre il gruppo G_r dalla forma (20) alla canonica (21) dobbiamo, secondo il §68, determinare i parametri $a_1\, a_2 \dots a_r$ in funzione dei parametri:

$$e_1 = \lambda_1 t\,,\quad e_2 = \lambda_2 t \quad \dots\quad e_r = \lambda_r t$$

dalle equazioni differenziali ivi segnate (A)

$$(A)\qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\dots r} \lambda_s \alpha_{sk}(a_1 \dots a_r)$$

colle condizioni iniziali $a_k = a_k^{(0)}$ per $t=0$ —

Ma le medesime equazioni (A) si presentano anche per la riduzione delle (21) alle (21*) perchè le $\alpha_{sk}(a)$ rimangono le stesse; dunque le (21), (21*) hanno a comune il gruppo parametrico, che si ottiene dal primitivo Π_r passando dai parametri $\underline{a}$ ai parametri canonici $\underline{e}$.

§. 103

Isomorfismo meriedrico

Dimostriamo ora che anche la definizione di isomorfismo meriedrico, data al § 94 in base alla corrispondenza fra le trasformazioni infinitesimali, si può completare con una tale corrispondenza fra le trasformazioni finite da rispondere perfettamente alla definizione d'isomorfismo meriedrico nei gruppi discontinui.

Supponiamo che il gruppo

$$G'_{r-q} \equiv (Y_1 f, Y_2 f \dots Y_{r-q} f)$$

sia in isomorfismo meriedrico d'ordine q col gruppo

$$G_r \equiv (X_1 f, X_2 f \dots\dots X_r f)$$

e precisamente che all'identità in G'_{r-q} corrisponda in G_r il sottogruppo invariante

$$G_q \equiv (X_{r-q+1} f \dots X_r f)$$

Le espressioni alternate

$$(X_i X_k) \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = r-q+1, r-q+2, \dots r \end{cases}$$

si esprimeranno quindi tutte linearmente con coefficienti costanti per

$$X_{r-q+1} f, \dots X_r f$$

Sia ora

$$\Pi_r \equiv (A_1 f, A_2 f \dots A_r f)$$

una forma del gruppo parametrico di G_r - Poiché le costanti di composizione per le $A_i f$ sono le stesse che per le $X_i f$, anche

$$(A_i A_k) \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = r-q+1 \dots r \end{cases}$$

si esprimeranno linearmente per

$$A_{r-q+1} f \dots A_r f$$

soltanto -

Le q equazioni

$$A_{r-q+1} f = 0 \quad \dots\dots \quad A_r f = 0$$

formano un sistema completo che ammette il gruppo Π_r. Prendiamo le $r.q$ soluzioni indipendenti di questo sistema per nuovi parametri $a_1\ a_2 \dots a_{r-q}$ -

Le varietà

$$a_1 = \text{cost}^{\text{te}},\ a_2 = \text{cost}^{\text{te}}, \dots\dots a_{r-q} = \text{cost}^{\text{te}}$$

formeranno un sistema d'imprimitività rispetto al gruppo Π_r e per quanto è detto alla fine del § 98 le $A_k f$ prenderanno la forma seguente

$$A_k f = \sum_i^{1 \dots r-q} \alpha_{ki} (a_1\ a_2 \dots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i} + \sum_i^{r-q+1 \dots r} \beta_{ki} (a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

$$\text{per } k = 1, 2 \dots r-q$$

$$A_k f = \sum_i^{r-q+1 \dots r} \beta_{ki} (a_1 \dots a_r) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

$$k = r-q+1, \dots r$$

essendo le α_{ki} funzioni solo di $a_1 \dots a_r$; e le β_{ki} di tutte le a - Formando poi dalle $A_k f$ $(k=1, 2 \ldots r-q)$ le trasformazioni associate

$$\bar{A}_k f = \sum_i^{1 \ldots r-q} \alpha_{ki} (a_1 \ldots a_{r-q}) \frac{\partial f}{\partial a_i}$$

$$k=1, 2 \ldots r-q$$

queste saranno le generatrici del gruppo sui sistemi d'imprimitività in isomorfismo meriedrico d'ordine q con Π_r - Dal modo come si compongono le espressioni alternate $(A_i A_k)$ risulta subito che se si ha

$$(A_i A_k) = \sum_s^{1 \ldots r} c_{iks} A_s f \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r-q)$$

sarà anche

$$(\bar{A}_i \bar{A}_k) = \sum_s^{1 \ldots r-q} c_{iks} \bar{A}_s f ;$$

ma per l'isomorfismo meriedrico di G'_{r-q} con G_r si ha

$$(Y_i Y_k) = \sum_s^{1 \ldots r-q} c_{iks} Y_s f$$

perchè per ipotesi sono nulle $Y_{r-q+1} \ldots Y_r$ -

Dunque le

$$\bar{A}_1 f , \ \bar{A}_2 f , \ldots \bar{A}_{r-q} f$$

generano un gruppo Π'_{r-q} semplicemente transitivo della composizione di G'_{r-q}, che può quindi assumersi come suo gruppo parametrico. Ora se indichiamo con $B_k f$, $\bar{B}_k f$ le espressioni $A_k f$, $\bar{A}_k f$ in cui si mutino i parametri $a_1 a_2 \ldots a_r$ in $b_1 b_2 \ldots b_r$, le equazioni finite di Π'_{r-q} si otterranno integrando il sistema completo (§ 101)

$$\bar{A}'_k f + \bar{B}_k f = 0 \qquad k=1, 2, \ldots r-q$$

e quelle di Π_r integrando l'altro

$$A'_k f + B_k f = 0 \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

Le $r-q$ soluzioni indipendenti del primo sono evidentemente soluzioni del secondo, e per ciò se alle equazioni finite di Π'_{r-q} si dà la forma

$$a'_i = \varphi_i (a_1\, a_2 \ldots a_{r-q}\, ; b_1\, b_2 \ldots b_{r-q})$$
$$i = 1, 2, \ldots r-q,$$

a quelle di Π_r si può dare l'altra

$$a'_i = \varphi_i (a_1\, a_2 \ldots a_{r-q}\, ; b_1\, b_2 \ldots b_{r-q})$$
$$i = 1, 2, \ldots r-q$$
$$a'_j = \theta_j (a_1 \ldots a_r\, ; b_1 \ldots b_r)$$
$$j = r-q+1, \ldots r$$

Allora ad ogni trasformazione S_a' di G_r ne corrisponde una perfettamente determinata S'_a in G'_{r-q}; cioè quella che corrisponde ai valori stessi dei primi $r-q$ parametri $a_1\, a_2 \ldots a_{r-q}$ mentre ad una di G'_{r-q} ne corrispondono ∞^q in G_r, quelle che si ottengono mantenendo fissi i valori attuali di $a_1 \ldots a_{r-q}$ e facendo variare $a_{r-q+1} \ldots a_r$. La corrispondenza stabilita è poi manifestamente tale che al prodotto di due qualunque trasformazioni $S'_a . S'_\alpha$ in G_r corrisponde il prodotto $S'_a S'_\alpha$ delle corrispondenti in G'_{r-q} - Così è dimostrato appunto quanto si voleva.

§ 104

Ritorno alle condizioni di simiglianza fra due gruppi

Dopo queste nuove ricerche sull'isomorfismo dei gruppi riprendiamo il problema, che soltanto in parte abbiamo risoluto al Cap. VII, relativo alla simiglianza dei gruppi per risolverlo ora completamente. Al § 86 abbiamo già enunciato le condizioni B) necessarie per la simiglianza di due gruppi; resta a provare che esse sono sufficienti.

Per maggiore chiarezza ripetiamo qui l'enunciato del teorema che dobbiamo dimostrare:

I due gruppi a r parametri

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r) \; ; \quad X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r) \; ; \quad Y_k f = \sum_i \eta_{ki}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

degli spazi a $\underline{n}$ dimensioni $(x_1 \dots x_n)$, $(y_1 \dots y_n)$ si suppongono posti fra loro in relazione d'isomorfismo oloedrico facendo corrispondere alla $X_k f$ la $Y_k f$; si suppone inoltre che fra le prime q X

$$X_1 f,\ X_2 f \dots X_q f$$

non sussista alcuna relazione lineare omogenea (a coefficienti variabili), mentre

$$X_{q+1} f, \dots X_r$$

si esprimono per le prime q colle formole

$$(22) \qquad X_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x_1 \dots x_n) X_\lambda f \qquad (j = 1, 2 \dots r-q),$$

e similmente si abbia

$$(22^*) \qquad Y_{q+j} f = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \psi_{j\lambda}(y_1 \dots y_n) Y_\lambda f \qquad (j = 1, 2 \dots r-q),$$

mentre fra $Y_1 f \dots Y_q f$ non sussiste alcuna relazione, ed infine che le $q(r-q)$ equazioni

$$(23) \qquad \varphi_{j\lambda}(x) = \psi_{j\lambda}(y) \quad \begin{cases} j = 1, 2 \dots r-q \\ \lambda = 1, 2 \dots q \end{cases}$$

siano compatibili, e non diano luogo nè a relazioni fra le sole x nè a relazioni fra le sole y. In tale ipotesi, si vuol dimostrare che esiste qualche trasformazione che cangia $X_1 f, X_2 f, \dots X_r f$ rispettivamente in $Y_1 f, Y_2 f \dots Y_r f$.

Ricordiamo che il teorema è già stato dimostrato in due casi particolari, e cioè: 1° quando $q = r$ (§84), ossia quando si riduce a zero sì il numero delle $\varphi_{j\lambda}$ che quello delle $\psi_{j\lambda}$; 2° quando il numero delle $\varphi_{j\lambda}$ (o $\psi_{j\lambda}$) indipendenti è $= n$, caso dei gruppi asistatici.

Potremo quindi supporre d'ora avanti $q < r$, che cioè ogni punto generico dello spazio possieda un effettivo sottogruppo di stabilità G_{r-q} e che il numero $n-\rho$ delle φ o ψ indipendenti sia $< n$, cioè $\rho > 0$. I due gruppi sono quindi sistatici e le varietà sistatiche hanno per l'uno e per l'altro la dimensione ρ (§ 53) - Del resto la dimostrazione che ora daremo comprenderà nuovamente il caso $\rho=0$ dei gruppi sistatici -

I gruppi G_r, Γ_r essendo posti in relazione di isomorfismo oloedrico fra le loro trasformazioni e quindi fra i loro sottogruppi viene stabilita una corrispondenza biunivoca - Consideriamo ora il sottogruppo di stabilità G_{r-q} relativo ad un punto generico $x^{(0)}$ del primo gruppo, che è generato dalle $r-q$ trasformazioni infinitesime

$$(24) \qquad X_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)}\ldots\ldots x_n^{(0)})\, X_\lambda f.$$

ed è altresì sottogruppo di stabilità di tutti e soli i punti della varietà sistatica V_ρ definita dalle $n-\rho$ equazioni

$$\varphi_{j\lambda}(x) = \varphi_{j\lambda}(x^{(0)}) \qquad (V.^i \text{ § } 53)$$

Alle trasformazioni infinitesime (24) corrispondono in Γ_r le altre

$$Y_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)}\ldots\ldots x_n^{(0)})\, Y_\lambda f\,;$$

per le ipotesi fatte sul sistema di equazioni (23) queste sono le trasformazioni infinitesime generatrici del sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità per i singoli punti della varietà sistatica W_ρ definita nel secondo spazio dalle equazioni

$$\psi_{j\lambda}(y_1\, y_2 \ldots y_n) = \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)}\ldots x_n^{(0)})$$

È manifesto che, ove esista la trasformazione cercata che cangi $X_k f$ in $Y_k f$, dovrà cangiare la varietà sistatica V_ρ nella W_ρ, la qual cosa del resto risulta già dal § 86 ove le relazioni (23) fra le x e le y si trovarono come necessarie. Ma ora abbiamo di più dimostrato questo fatto importante pel nostro scopo: nell'isomorfismo oloedrico fra G_r e Γ_r al sottogruppo G_{r-q} di stabilità relativo ai singoli punti di una varietà sistatica V_ρ corrisponde il sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità dei singoli punti della varietà sistatica W_ρ corrispondente, secondo le (23).

§ . 105
Caso della transitività

Veniamo alla dimostrazione del teorema enunciato, cominciando dal caso in cui i due gruppi sono transitivi, che è il più semplice a trattarsi (*).

Dalle formole (23) è già stabilita, come si è detto, una corrispondenza fra le varietà sistatiche V_ρ, W_ρ dei due gruppi; si tratta ora di vedere

(*) La ragione sta in fondo in questo che per due gruppi simili transitivi la trasformazione più generale che cangia l'uno nell'altro contiene solo costanti arbitrarie ed invece funzioni arbitrarie nel caso della intransitività.

ulteriormente quale corrispondenza dovrà aver luogo fra i singoli punti di due varietà sistatiche V_ρ, W_ρ corrispondenti. -

Fissiamo in due tali varietà sistatiche corrispondenti due punti qualunque uno P_0 nella prima, l'altro Q_0 nella seconda. Consideriamo poi nello spazio $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ un punto qualunque P dell'intorno di P_0. Siccome G_r è transitivo, esisteranno in G_r delle trasformazioni g che trasportano P_0 in P; sia g una fissa di esse sicchè si ha simbolicamente

$$(25) \qquad (P_0)g \equiv P$$

Essendo G_{r-q} il sottogruppo di stabilità relativo a P_0 e $\bar{g}$ una qualunque sua trasformazione, si vede subito che tutte le altre trasformazioni di G_r che portano P_0 in P sono date da

$$\bar{g}g.$$

percorrendo $\bar{g}$ le trasformazioni di G_{r-q} - Alle $\bar{g}$ in G_r corrispondono (§104) in Γ_r le trasformazioni $\bar{\gamma}$ del sottogruppo di stabilità Γ_{r-q} di Q_0 e se γ è la corrispondente di g, tutte e sole le

$$\bar{\gamma}\gamma,$$

percorrendo $\bar{\gamma}$ il sottogruppo Γ_{r-q}, porteranno Q_0 in un medesimo punto Q:

$$(Q_0)\bar{\gamma}\gamma \equiv Q$$

La corrispondenza fissata fra P_0 e Q_0 fa dunque altresì corrispondere ad ogni punto P (nell'intorno di P_0) un determinato punto Q (nell'intorno di Q_0), e si noti che i due punti P, Q si trovano ancora nelle condizioni dei punti iniziali P_0, Q_0, poichè il sottogruppo di stabilità di P è $g^{-1}G_{r-q}\,g$, quello di Q è $\gamma^{-1}\Gamma_{r-q}\,\gamma$ e questi due sottogruppi sono ancora corrispondenti nell'isomorfismo oloedrico fra G_r, Γ_r.

Dunque la corrispondenza fissata fra un punto qualunque P del primo ed un punto Q del secondo spazio è tale che rimane la stessa applicando ai punti dei due spazi due trasformazioni corrispondenti qualunque g, γ di G_r, Γ_r. Questa corrispondenza è espressa analiticamente da una trasformazione T che fa passare dalle x alle y e soddisfa alle equazioni simboliche:

$$(P)T \equiv Q\,;$$

la proprietà sopra osservata si traduce poi nell'altra

$$(P)gT \equiv (Q)\gamma \tag{26}$$

Ciò posto, proveremo che la detta T cangia le $X_k f$ nelle $Y_k f$ corrispondenti, come si voleva.

Per dimostrarlo ricordiamo che i due gruppi G_r, Γ_r hanno a comune il gruppo parametrico e presa una trasformazione finita qualunque $\sum_i e_i X_i f$ di G_r, che indichiamo con g_e, consideriamo la corrispondente $\sum_i e_i Y_i f$ di Γ_r che denotiamo con γ_e. Abbiamo:

$$(26^*) \qquad (P)g_e T \equiv (Q)\gamma_e$$

ovvero

$$(P)g_e T \gamma_e^{-1} \equiv (Q) \equiv (P)T,$$

onde, poichè P è un punto qualunque

$$g_e T \gamma_e^{-1} = T$$

o in fine

$$(27) \qquad T^{-1} g_e T = \gamma_e$$

Dunque la T cangia la trasformazione finita $\sum e_i X_i f$ di G_r nella corrispondente $\sum e_i Y_i f$ di Γ_r e per ciò anche le trasformazioni infinitesime $X_i f$ nelle corrispondenti $Y_i f$, come volevasi.

È importante osservare che per tal modo si trovano ~~tutte~~ le trasformazioni T che cangiano G_r in Γ_r, cangiando ogni trasformazione g_e di G_r nella corrispondente γ_e di Γ_r. Una tale T deve infatti soddisfare l'equazione simbolica (27), onde segue, procedendo a ritroso, la (26*). Se dunque

$$(P_0)T \equiv Q_0,$$

sarà anche

$$(P)T \equiv Q$$

quando sia

$$P \equiv (P_0)g_e, \quad Q \equiv (Q_0)\gamma_e$$

Ciò significa che, se T trasporta P_0 in Q_0, deve trasportare ogni punto P precisamente nel punto Q, che sopra abbiamo fissato come corrispondente a P.

Quale è il grado d'infinità di queste trasfor.

mazioni T? Fissato P_0, cioè fissate le sue coordinate, possiamo prendere ad arbitrio Q_0 entro la varietà sistatica di T_r che corrisponde alla varietà sistatica di G_r contenente P_0. Essendo ρ la dimensione delle varietà sistatiche, la più generale trasformazione T conterrà r parametri (essenziali), le coordinate di Q_0 - Così non soltanto abbiamo dimostrato il nostro teorema (nel caso della transitività) ma abbiamo anche provato che: se due gruppi sistatici transitivi sono oloedricamente isomorfi ed esiste qualche trasformazione che cangia l'uno nell'altro, mantenendo la fissata corrispondenza d'isomorfismo, tutte le altre trasformazioni che raggiungono il medesimo effetto sono in numero di ∞^ρ, indicando ρ la dimensione della varietà sistatiche -

Per quanto si disse al § 83 rispetto alle possibili relazioni d'isomorfismo oloedrico fra due gruppi, si può concludere che se due gruppi transitivi sono simili, nella più generale trasformazione che cangia l'uno nell'altro entrano solo costanti arbitrarie -

Ciò del resto risulta ancora dalle osservazioni del § 89 relative alle trasformazioni permutabili con tutte quelle di un gruppo -

§ 106
Caso della intransitività

Passando ora al caso della intransitività cominciamo dall'osservare che tutto ciò che abbiamo detto al principio del paragrafo precedente quando, partendo da due rispettivi punti P_0, Q_0 presi ad arbitrio in due varietà sistatiche corrispondenti dei due gruppi G_r, Γ_r, si passava dalle coppie (P_0, Q_0) a tutte le coppie (P, Q) applicando a P_0, Q_0 trasformazioni corrispondenti dei due gruppi vale anche nel caso della intransitività – Soltanto quando i gruppi sono transitivi i punti P, Q percorrono completamente i rispettivi spazî e ne resta perfettamente fissata la trasformazione indicata con T al paragrafo precedente, che trasforma G_r in Γ_r portando P_0 in Q_0.
Se invece i due gruppi sono intransitivi, ed è quindi la caratteristica comune q delle due matrici

$$\left\|\xi_{ik}(x)\right\| \qquad \left\|\eta_{ik}(x)\right\|$$

minore del numero n delle variabili, ciascuno dei due gruppi possiede $n-q$ invarianti che indichiamo rispettivamente con

$$u_1(x) \quad u_2(x) \; \ldots\ldots \; u_{n-q}(x) \quad \text{per } G_r$$
$$v_1(y) \quad v_2(y) \; \ldots\ldots \; v_{n-q}(y) \quad \text{per } \Gamma_r\,;$$

essi sono le rispettive soluzioni indipendenti dei sistemi completi

$$(28)\quad X_1 f = 0\,,\; X_2 f = 0 \,\ldots\ldots X_q f = 0$$

$$(28^*)\quad Y_1 f = 0,\; Y_2 f = 0, \ldots\ldots Y_q f = 0$$

Ciascun punto $P_0 \equiv (x_i^{(0)})$ si muove per le trasformazioni di G_r entro la varietà V_q di equazioni

$$u_1(x) = u_1(x^{(0)})\,,\; u_2(x) = u_2(x^{(0)}) \ldots\ldots u_{n-q}(x) = u_{n-q}(x^{(0)})$$

ma su questa transitivamente, analogamente $Q_0 \equiv (y_i^{(0)})$ transitivamente entro la varietà

$$v_1(y) = v_1(y^{(0)})\,,\; v_2(y) = v_2(y^{(0)}) \ldots\ldots v_{n-q}(y) = v_{n-q}(y^{(0)})$$

Qui non basta più adunque partire da una sola coppia (P_0, Q_0) ma bisogna invece fissare ∞^{n-q} tali coppie $(P_0 Q_0)$ ogni volta in modo che P_0, Q_0 appartengano a varietà sistatiche corrispondenti dei due gruppi, e scelte per tal guisa che le varietà V_q d'intransitività

$$u_1(x) = u_1(x^{(0)})\,, \ldots\ldots u_{n-q}(x) = u_{n-q}(x^{(0)})$$

riempiano interamente il primo spazio ed analogamente le

$$v_1(y) = v_1(y^{(0)}) \ldots\ldots v_{n-q}(y) = v_{n-q}(y^{(0)})$$

il secondo.

Se riusciamo a far questo avremo stabilito una trasformazione T che porta da un punto qualunque P del primo spazio ad un punto Q corrispondente nel secondo e tale che applicando ai punti $(P\,Q)$ di una coppia rispettivamente due trasformazioni corrispondenti qualunque g, γ di G_r, Γ_r i punti $(P)_g$.

$(Q)_r$ saranno ancora corrispondenti. Allora vale la dimostrazione stessa del paragrafo precedente per provare che la T trasforma ciascuna $X_k f$ nella $Y_k f$ corrispondente, anzi di più ogni trasformazione finita di G_r nella corrispondente di T_r.

Resta ora qui soltanto a far vedere che si possono in effetto soddisfare le condizioni sopra enunciate. Per questo cominciamo dal ricordare che, nelle ipotesi ammesse al § 104 fra le $q(r-q)$ funzioni $\varphi_{j2}(x)$ ve ne sono soltanto $n-\rho$ indipendenti; queste indichiamo con

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho}$$

e le corrispondenti ψ_{j2} con

$$\psi_1 \quad \psi_2 \cdots\cdots \psi_{n-\rho};$$

e si noti che per le citate ipotesi sulla compatibilità delle equazioni

$$\varphi_{j2}(x) = \psi_{j2}(y),$$

se una certa φ_{jc} è una funzione $F(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-\rho})$ di $\varphi_1 \cdots \varphi_{n-\rho}$, la ψ_{j2} corrispondente dovrà essere la medesima funzione $F(\psi_1 \cdots \psi_{n-\rho})$ di $\psi_1 \cdots \psi_{n-\rho}$ (altrimenti le equazioni scritte sopra sarebbero incompatibili).

Importa anzitutto riconoscere quanti fra gli invarianti

$$u_1 \quad u_2 \cdots\cdots u_{n-q}$$

di G_r sono funzioni di $\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho}$. Se $U(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho})$ è un tale invariante, dovrà essere soddisfatto il sistema (28) cioè

$$(29) \qquad \sum_{\nu}^{1,\dots,n-\rho} X_k(\varphi_\nu) \frac{\partial U}{\partial \varphi_\nu} = 0 \quad , \; k=1,2,\dots q$$

Per quanto si è visto al §54 le $X_k(\varphi_\nu)$ sono funzioni quadratiche delle $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n-\rho}$ dipendenti unicamente dalle costanti di composizione (e dalle relazioni fra le φ; 2) – Può anche darsi che queste $X_k(\varphi_\nu)$ siano tutte identicamente nulle, che cioè tutte le $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n-\rho}$ siano invarianti di G_r – In generale le (29) ammetteranno un certo numero $n-s \leqq n-\rho$ di soluzioni indipendenti

$$U_1(\varphi)\, ,\; U_2(\varphi) \dots\dots U_{n-s}(\varphi)$$

e questo numero potrà avere un valore fra 0 e $n-\rho$, gli estremi inclusi, il caso $s=\rho$ corrispondendo a quello eventuale sopra notato in cui $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n-\rho}$ siano tutti invarianti.

Poniamo

$$U_1(\varphi) = u_1(x_1 \dots x_n)\, , \dots\dots U_{n-s}(\varphi) = u_{n-s}(x_1 \dots x_n)$$

e siano

$$u_{n-s+1}, \dots\dots u_{n-q}$$

gli altri invarianti, cioè le altre soluzioni del sistema (28) indipendenti fra loro e dai precedenti.

La possibilità di soddisfare alle condizioni enunciate dipende da questo fatto che le $(n-\rho)+(s-q)$ funzioni

$$(30) \qquad \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_{n-\rho} \;\; u_{n-s+1} \dots u_{n-q}$$

sono fra loro indipendenti e quindi in ogni caso

$$n-\rho+s-q \leqq n$$

Per dimostrarlo si supponga al contrario ($\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho}$ essendo già fra loro indipendenti) che siano soltanto

$$(31) \qquad \varphi_1\ \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_{n-\rho} \quad u_{n-s+h+1} \cdots\cdots u_{n-q}$$

fra loro indipendenti, mentre le precedenti

$$u_{n-s+1} \cdots\cdots u_{n-s+h}$$

siano funzioni delle (31) p. e.

$$(32) \qquad u_{n-s+1} = \theta(\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \varphi_{n-\rho}\ ;\ u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$$

Poichè tutte le u sono soluzioni del sistema (28), ne verrebbe

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu}^{1\ldots n-\rho} X_k(\varphi_\nu)\frac{\partial\theta}{\partial\varphi_\nu} = 0 \qquad k = 1.\ 2 \cdots q$$

e le funzioni delle (31) che risultano nei primi membri di queste equazioni dovrebbero essere identicamente nullo poichè le (31) sono indipendenti — Ciò equivale a dire che se nella $\theta(\varphi_1 \cdots \varphi_{n-\rho}\ u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$ si riguardano $u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q}$ come indeterminate qualunque (parametri) la θ soddisfa sempre le (α) cioè il sistema (29); e poichè le soluzioni indipendenti di questo sono

$$u_1\ ,\ u_2 \cdots u_{n-s}$$

la θ risulterebbe una funzione F di queste e dei parametri $u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q}$ — Perciò la (32) si muterebbe in

$$u_{n-s+1} = F(u_1\ u_2 \ldots u_{n-s}\ ;\ u_{n-s+h+1} \cdots u_{n-q})$$

ciò che contraddice al fatto che tutte le

$$u_1 \dots\dots u_{n-q}$$

sono fra loro indipendenti –

Osserviamo ora che le funzioni

$$U_1(y_1 \dots y_{n-\rho}) \dots\dots U_{n-s}(y_1 \dots y_{n-\rho})$$

sono altrettante soluzioni del sistema

$$(29^*) \qquad \sum_{\nu}^{1\dots n-\rho} Y_k(y_\nu) \frac{\partial U}{\partial y_\nu} = 0 \qquad k = 1.2\dots q$$

poiché (§ 54) le $Y_k(y_\nu)$ si esprimono per le y precisamente come le $X_k(y_\nu)$ per le φ; questi sono tutti e soli gli invarianti di Γ_2 funzioni delle y e noi li indichiamo con

$$v_1 \;\; v_2 \dots\dots v_{n-s}$$

e con

$$v_{n-s+1} \dots\dots v_{n-q}$$

indichiamo i rimanenti. Come le $(n-\rho)+(s-q)$ funzioni (30), così le

$$(30^*) \quad y_1 \;\; y_2 \dots y_{n-\rho} \;\; v_{n-s+1} \dots v_{n-q}$$

saranno fra loro indipendenti –

Ciò posto, arriviamo ora rapidamente al nostro scopo fissando in ciascuna varietà d'intransitività

$$u_1 = c_1, \;\; u_2 = c_2 \dots u_{n-s} = c_{n-s}, \;\; u_{n-s+1} = c_{n-s+1} \dots\dots u_{n-q} = c_{n-q}$$

ad arbitrio un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$, indi prendendo le coordinate del punto corrispondente $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \dots y_n^{(0)})$ in guisa da soddisfare le condizioni:

$$(33)\begin{cases} \psi_1(y^0) = \varphi_1(x^0) \;\ldots\ldots\; \psi_{n-\rho}(y^0) = \varphi_{n-\rho}(x^0)\,; \\ v_{n-s+1}(y^0) = u_{n-s+1}(x^0) \;\ldots\ldots\; v_{n-q}(y^0) = u_{n-q}(x^0) \end{cases}$$

Ciò è possibile perchè le (30*) come le (30) sono indipendenti ed anzi sarà ancora possibile in infiniti modi se $(n-\rho)+(s-q)<n$; ma in ogni caso potendosi sostituire a

$$v_{n-s+1} \ldots\ldots v_{n-q}$$

$s-q$ loro funzioni arbitrarie indipendenti, nelle coordinate $y_i^{(0)}$ di Q_0 potremo sempre fare entrare delle funzioni arbitrarie -

Scelto uno dei sistemi $y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)}$ che soddisfano le (33) per le coordinate, i due punti P_0, Q_0 apparterranno a due varietà sistatiche corrispondenti, perchè avremo

$$\varphi_{j2}(x^0) = \psi_{j2}(y^0)$$

Inoltre avremo

$$v_1(y^0) = U_1(\psi_1(y^0) \ldots \psi_{n-\rho}(y^0)) = U_1(\varphi_1(x^0) \ldots \varphi_{n-\rho}(x^0)) = u_1(x^0) = c_1$$

e analogamente

$$v_2(y^0) = c_2 \;\ldots\ldots\; v_{n-s}(y^0) = c_{n-s}$$

le quali, insieme alle seconde (33), dimostrano che la varietà d'intransitività contenente Q_0 riempirà, al variare di Q_0, tutto lo spazio - Così resta completata la dimostrazione -

§ 107
Nuovo enunciato per le condizioni di simiglianza

Le ricerche così completate sulle condizioni di simiglianza dei gruppi ci consentono di dare alle condizioni stesse un'altra forma molto notevole.

Se due gruppi G_r, Γ_r sono simili, essi sono anche in tale relazione d'isomorfismo oloedrico fra loro che al sottogruppo di stabilità di un punto generico P in G_r corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità del punto Q che corrisponde a P nella trasformazione che cangia G_r in Γ_r.

Viceversa dimostriamo il teorema:

A) Due gruppi G_r, Γ_r sopra un egual numero di variabili sono simili quando è possibile porli in tale relazione d'isomorfismo oloedrico che al sottogruppo di stabilità di un punto generico P in G_r corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità di un punto Q e viceversa ad un tale sottogruppo di Γ_r uno analogo in G_r.

Colle solite notazioni il sottogruppo G_{r-q} di stabilità di un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ è generato dalle $r-q$ trasformazioni infinitesime

$$(34) \qquad X_{q+j} f - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)}) X_\lambda f \qquad (j = 1, 2 \dots$$

il corrispondente Γ_{r-q} in Γ_r è quindi generato dalle

$$\overset{r-q}{(35)} \quad Y_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)}) Y_\lambda f \quad (j=1,2\ldots r-q),$$

le quali sono altresì le generatrici del sottogruppo di stabilità di un certo punto $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)})$ – Ma alle (34) basta associare

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_q f,$$

che sono le q non legate da relazioni fra le $X_k f$ per avere un sistema di r trasformazioni generatrici di G_r. A causa dunque dell'isomorfismo oloedrico le q trasformazioni corrispondenti alle $X_1 f, \ldots X_q f$.

$$Y_1 f,\ Y_2 f \ldots Y_q f$$

associate alle $r-q$ (35) danno un sistema di generatrici di Γ_r – Ne segue che

$$Y_1 f,\ Y_2 f - \ldots Y_q f$$

non sono legate da relazioni, mentre le (35) e quindi $Y_{q+1}f, \ldots Y_r f$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per $Y_1 f \ldots Y_q f$; supponiamo che ciò sia colle formole

$$Y_{q+j}f = \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \psi_{j\lambda}(y_1 \ldots y_n) Y_\lambda f$$

Ma allora le generatrici del sottogruppo Γ_{r-s} di stabilità di $Q_0 \equiv (y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)})$ sono

$$Y_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \psi_{j\lambda}(y_1^{(0)} \ldots y_n^{(0)}) Y_\lambda f,$$

onde queste debbono essere combinazioni lineari a coefficienti costanti delle (35), e ciò porta che i valori $\psi_{j\lambda}(y^{(0)})$ debbono coincidere cogli altri $\varphi_{j\lambda}(x^{(0)})$ – Se ne conclude che le $q(r-q)$ equazioni

$$\varphi_{j2}(x_1\, x_2 \cdots x_n) = \psi_{j2}(y_1\, y_2 \cdots y_n)$$

sono compatibili e non danno luogo nè a relazioni fra le sole x nè a relazioni fra le sole y poichè le $x_i^{(o)}$ possono scegliersi ad arbitrio e così le $y_i^{(o)}$ secondo l'enunciato A). Sono dunque soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti per la simiglianza dei due gruppi, c. d. d. -

Nel caso poi che i due gruppi G_r, Γ_r siano transitivi, le condizioni enunciate nel teorema A) possono molto semplificarsi. E infatti basta allora che l'isomorfismo oloedrico fra G_r e Γ_r sia tale che al sottogruppo di stabilità G_{r-q} di un <u>determinato</u> punto P_o (ove la caratteristica della matrice delle ξ_{ik} abbia per altro il suo valore generico q) corrisponda in Γ_r il sottogruppo di stabilità di un punto Q_o - Colle considerazioni del § 105 infatti facendo corrispondere al punto $P\equiv(P_o)g$ il punto $Q\equiv(Q_o)\gamma$, dove g, γ sono due qualunque trasformazioni corrispondenti in G_r. Γ_r ci troveremo nelle condizioni del teorema A) -

Sussiste dunque l'ulteriore teorema:

B) Due gruppi transitivi G_r, Γ_r sopra un egual numero di variabili $(x_1\, x_2 \cdots x_n)$, $(y_1\, y_2 \cdots y_n)$ sono simili quando possono porsi in tale corrispondenza d'isomorfismo oloedrico che al sottogruppo di stabilità G_{r-q} in G_r di un determinato punto P_0 (dove la caratteristica della matrice $|\xi_{ik}|$ ha il suo valore generico q) corrisponda in Γ_r il sottogruppo Γ_{r-q} di stabilità di un punto Q_0.

§ 108

Trasformazioni permutabili con un gruppo.

Dopo avere così risoluto completamente il problema di riconoscere se due gruppi sono simili, ritorniamo al problema del § 88 di trovare tutte le trasformazioni permutabili con un gruppo. Questo non è che un caso particolare della teoria generale della simiglianza, trattandosi di riconoscere la simiglianza di un gruppo con se medesimo. Bisogna in primo luogo trovare tutte le relazioni d'isomorfismo oloedrico di un gruppo G_r con se stesso, ciò che è un problema algebrico (ivi § 88) e supposto che un tale isomorfismo sia dato dalla corrispondenza delle r trasformazioni

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_r f$$

generatrici di G_r alle altre r

$$X'_1 f,\ X'_2 f, \ldots X'_r f$$

riconoscere se esiste qualche trasformazione T che cangi le $X_k f$ nelle $Y_k f$, ciò che si fa applicando i criterii generali di simiglianza che abbiamo dimostrato

Il problema poi di trovare tutte le possibili trasformazioni T si riconduce, come si è visto, a quello più semplice di trovare tutte le trasformazioni $\mathcal{C}$ permutabili colle singole trasformazioni del gruppo.

Perché esista una continuità di tali trasformazioni $\mathcal{C}$, e quindi anche trasformazioni infinitesime permutabili con tutte quelle del gruppo, è necessario (§ 89) che il gruppo sia sistatico. Ma ora vediamo subito che tale condizione necessaria è anche sufficiente. Ritornando infatti alle condizioni enunciate in B) § 87 come necessarie per l'esistenza di trasformazioni $\mathcal{C}$ che cangino $X_1, X_2, \ldots X_r$ in $Y_1 Y_2 \ldots Y_r$ e riconosciute poi anche sufficienti, applichiamole al caso in cui le X coincidano colle Y, mutate le variabili x nelle y, e siano le trasformazioni generatrici di un gruppo sistatico. Allora le φ_{jk} coincidono colle ψ_{jk} (cangiate le x nelle y) e sono in numero di $n-\rho<n$ indipendenti. Le condizioni per la compatibilità delle equazioni

$$\varphi_{jk}(x) = \psi_{jk}(y)$$

sono certo soddisfatte, anzi non determinano che $n-\rho$ delle y in funzione delle x. I risultati dei §§. 105, 106 ci assicurano che esiste una continuità di trasformazioni $\mathcal{C}$ permutabili colle singole del gruppo ed anzi ci insegnano che il gruppo delle $\mathcal{C}$ è finito quando G_r è transitivo, infinito quando è intransitivo. Precisamente se G_r è transitivo e le sue varietà sistatiche hanno la dimensione ρ il gruppo Γ delle $\mathcal{C}$ contiene precisamente ρ parametri e cangia ciascuna varietà sistatica transitivamente in se medesima - Dunque:

Se un gruppo G_r è sistatico transitivo e le sue varietà sistatiche hanno la dimensione ρ, le trasformazioni permutabili con tutte quelle di G_r formano un gruppo Γ_ρ con ρ parametri e le varietà sistatiche di G_n sono varietà d'intransitività per Γ_ρ.

Nel caso particolare della semplice transitività è $\rho = r$ ed il gruppo Γ diventa il gruppo reciproco di G_r (cf. § 90)

In generale, se ritorniamo alle equazioni (10) § 89

$$(36) \qquad \sum_{\lambda}^{1\dots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_\lambda} = \sum_{\nu}^{1\dots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

cui debbono soddisfare i coefficienti ζ di ogni trasformazione infinitesima:

$$Zf = \sum_{\nu}^{1\dots n} \zeta_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu}$$

permutabile con tutte quelle del gruppo vediamo, conformemente a quanto abbiamo ivi enunciato, che il sistema (36) ammette o non ammette soluzioni ζ secondo che il gruppo è sistatico od asistatico -

Se il gruppo è sistatico e transitivo, le (36) ammettono un integrale generale con ρ costanti arbitrarie[*], ed invece con funzioni arbitrarie nel caso della intransitività del gruppo sistatico.

§. 109

Teoremi sui gruppi asistatici e sistatici

Terminiamo il presente capitolo col dimostrare alcune particolari proprietà dei gruppi asistatici e sistatici che discendono dai risultati generali sopra esposti.

Supponiamo dapprima di avere un gruppo G_r asistatico e domandiamo di trovare tutte le trasformazioni permutabili con G_r fra le quali figurano naturalmente tutte quelle di G_r stesso; in altre parole

---

(*) Se si ricorda che dalle (36) ((10) § 89) si sono dedotte le relazioni lineari (11) § 89 nelle ξ

$$\sum_{\nu}^{1\dots n} \frac{\partial \varphi_{i\lambda}}{\partial x_\nu} \xi_\nu = 0$$

che sono in numero di $n-\rho$ indipendenti, si vede che queste lasciano arbitrari i valori iniziali di ρ delle ξ; ma questi restano pei risultati del testo effettivamente arbitrari. Ciò equivale a dire che le equazioni superiori insieme alle (36) formano un sistema completo di Mayer.

domandiamoci di trovare il più ampio gruppo in cui G_r è contenuto come sottogruppo invariante. È facile vedere in primo luogo che questo gruppo più ampio è sempre finito — Per trovare tutte le indicate trasformazioni conviene riferire il gruppo G_r in tutti i modi possibili a se medesimo per isomorfismo oloedrico, ciò che dà luogo soltanto ad un' infinità di modi possibili dipendente da un numero finito di costanti arbitrarie (§ 88) — Ma il gruppo G_r essendo asistatico, ogni tale riferimento d'isomorfismo oloedrico del gruppo con se stesso è una simiglianza (§ 87) e la trasformazione corrispondente T è unica, ovvero si ha una serie discreta di tali trasformazioni, che si calcolano con puri processi algebrici, appena note le trasformazioni infinitesime di G_r — Dunque:

Il più ampio gruppo Γ in cui è contenuto un gruppo asistatico come sottogruppo invariante contiene sempre un numero finito di parametri; le sue equazioni finite si trovano senza integrazione appena note le trasformazioni infinitesime di G_r.

È facile intendere dopo ciò che anche le equazioni finite di G_r stesso si potranno avere senza integrazioni appena note le trasformazioni infinitesime. Per dimostrarlo direttamente si ricordi che date le trasformazioni infinitesime di G_r si possono calcolare le trasformazioni finite del gruppo aggiunto (§ 69)

$$e_i' = \sum_k^{1 \dots r} \rho_{ik}(\alpha_1 \dots \alpha_r)\, e_k \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

risolvendo soltanto un'equazione algebrica.

3° Dopo ciò della corrispondente trasformazione finita

$$x_i' = f_i(x, \alpha)$$

sotto forma canonica di G_r si sa come trasforma le r trasformazioni infinitesime, ciò che per l'asistaticità del gruppo basta per calcolare la trasformazione stessa. Così:

Date le trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$ generatrici di un gruppo G_r asistatico, le sue equazioni finite si ottengono senza alcuna integrazione.

Consideriamo ora un gruppo G_r sistatico ed il sottogruppo di stabilità G_{r-q} di un punto generico P. Per il punto P passa una varietà sistatica V_ρ i cui punti hanno tutti lo stesso sottogruppo G_{r-q} di stabilità. Può darsi ora che esistano in G_r, fuori di G_{r-q}, trasformazioni che lascino fissa V_ρ senza lasciarne fissi tutti i punti. Ciò avviene in particolare necessariamente se G_r è transitivo per tutte le trasformazioni che trasportano P negli altri punti di V_ρ ed anche se G_r è intransitivo quando la V_ρ e la minima varietà invariante relativa a P abbiano a comune una varietà continua. In ogni caso le trasformazioni di G_r che lasciano fissa V_ρ formano un sottogruppo G_{r-h} $(h \leqq q)$ contenente (come subito si vede)

G_{r-q} quale sottogruppo invariante -

Inversamente supponiamo che per un gruppo G_r il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P sia contenuto come sottogruppo invariante in un sottogruppo più ampio G_{r-h} $(h<q)$, dico allora che G_r è necessariamente sistatico -. Difatti, siccome le sole trasformazioni di G_{r-q} lasciano fisso P, quelle di G_{r-h} faranno descrivere a P una varietà V_{h-q} a $h-q$ dimensioni di cui tutti i punti nascono da P per una trasformazione g di G_{r-h} ed hanno quindi per sottogruppo di stabilità $g^{-1} G_{r-q} g = G_{r-q}$; essi appartengono per ciò ad una varietà sistatica contenente P. Dunque: Se un gruppo G_r dello spazio S_n è così formato che il sottogruppo di stabilità, relativo ad un punto generico, sia contenuto come sottogruppo invariante in un sottogruppo più ampio, o in G_r stesso, il gruppo è sistatico -

Non è vero in generale inversamente che il gruppo sia asistatico se un sottogruppo generico di stabilità non è contenuto come invariante in un sottogruppo più ampio; la conclusione però è legittima, per quanto precede, nel caso della transitività. Dunque: Un gruppo transitivo è asistatico allora ed allora soltanto quando il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico non è contenuto come invariante in alcun sottogruppo più ampio -

Capitolo IX°

Gruppi ampliati e prolungati – Invarianti differenziali –

§ 110
Transitività multipla

Dato un gruppo G_r le cui equazioni finite siano

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1 \ldots a_r),$$

se ne possono dedurre in varii modi nuovi gruppi collo stesso numero di parametri, ma operanti sopra un maggior numero di variabili. Un primo e più semplice modo, che conduce all'importante nozione di transitività multipla, è il seguente.

In luogo di applicare le trasformazioni (1) di G_r ad una sola serie di variabili, applichiamole a k tali serie

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)}\, x_2^{(2)} \ldots\ldots x_n^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots\ldots x_n^{(k)}. \end{array}$$

e le formole corrispondenti

$$(2) \qquad y_i^{(s)} = f_i(x_1^{(s)} x_2^{(s)} \ldots x_n^{(s)};\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots n \;;\; s = 1, 2 \ldots k$$

definiranno evidentemente un nuovo gruppo a r parametri sulle kn variabili $x_i^{(s)}$. Geometricamente ciò equivale a dire che in luogo di considerare G_r come agente sui singoli punti dello spazio, si considera come agente sopra le coppie di punti $(k=2)$ o sulle terne $(k=3)$.... in generale sopra i gruppi arbitrarî di k punti.

Indichiamo il gruppo (2) con $G_r^{(k)}$ e lo diciamo il gruppo k volte ampliato da G_r. Si vede immediatamente che se le r trasformazioni generatrici di G_r sono

$$X_i f = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \xi_{i\lambda}(x_1 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

ponendo

$$X_i^{(s)} f = \sum \xi_{i\lambda}(x_1^{(s)} \dots x_n^{(s)})\frac{\partial f}{\partial x_\lambda^{(s)}},$$

quelle di $G_r^{(k)}$ saranno

$$X_i^{(1)}f + X_i^{(2)}f + \dots X_i^{(k)}f$$

Se il gruppo ampliato $G_r^{(k)}$ è transitivo ciò significa manifestamente che un gruppo di k punti arbitrarî $P_1 P_2 \dots P_k$ in S_n può essere trasportato, con una trasformazione di G_r, in un altro gruppo di k punti pure arbitrarî $Q_1 Q_2 \dots Q_k$. Quando avvenga che il gruppo $G_r^{(k)}$ sia transitivo ma il seguente $G_r^{(k+1)}$ intransitivo, si potranno portare (con trasformazioni di G_r) k punti arbitrarî in altri k arbitrarî ma non $k+1$ in altri $k+1$. Seguendo una denominazione della teoria dei gruppi di sostituzioni si dirà allora che il gruppo G_r è k volte transitivo (*) - Si noti che appena kn superi il numero r dei parametri il gruppo $G_r^{(k)}$ è certamente intransitivo, e per ciò in ogni caso il grado di transitività non può superare $\frac{r}{n}$ -

Per calcolare l'effettivo grado di transitività potremo procedere nel modo seguente - Costruiamo, come nella nota al § 23, le successive matrici

$$M_1 \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)}) \, \xi_{i2}(x^{(1)}) \ldots\ldots \xi_{in}(x^{(1)}) \right\| \quad i = 1, 2 \ldots r$$

$$M_2 \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)}) \ldots\ldots \xi_{in}(x^{(1)}) \, \xi_{i1}(x^{(2)}) \ldots\ldots \xi_{in}(x^{(2)}) \right\| \quad i = 1, 2 \ldots r$$

. . . .

$$M_s \equiv \left\| \xi_{i1}(x^{(1)}) \ldots \xi_{in}(x^{(1)}) \ldots\ldots \xi_{i1}(x^{(s)}) \ldots \xi_{in}(x^{(s)}) \right\| \quad i = 1, 2 \ldots r$$

. . . .

e siano

$$(*) \qquad \nu_1 \, , \, \nu_2 \ldots\ldots \nu_s \ldots\ldots$$

le loro successive caratteristiche. Questa serie di numeri ν è sempre crescente fino al massimo r, indi stazionaria, come si è visto al citato § 23. Qui lo riconosciamo anche osservando che quando $\nu_s < r$, ciò vuol dire che, presi s

---

(*) Si osservi che questa definizione della transitività multipla non è in perfetto accordo con quella della semplice transitività, che si dice aver luogo solo quando $r = n$. Se $r > n$ e non vi è transitività multipla converrà perciò dire soltanto che il gruppo è una volta transitivo -

punti ad arbitrio, vi è un sottogruppo $G_{r-\nu_s}$ di G_r ad $r-\nu_s$ parametri che lascia fissi tutti quegli s punti. Ora è evidentemente impossibile che tutte le trasformazioni di $G_{r-\nu_s}$ lascino fisso anche un $(s+1)^{mo}$ punto preso ad arbitrio, onde sarà necessariamente $\nu_{s+1} > \nu_s$ c. d. d.

I successivi gruppi ampliati

$$G_1^{(1)}\ G_1^{(2)} \ldots\ldots G_1^{(s)} \ldots\ldots$$

rimangono transitivi finchè i corrispondenti numeri ν_s soddisfano la condizione $\nu_s \geq s n$. Se ν_k è l'ultimo numero della serie (4) per il quale questo accade il gruppo G_r è precisamente k volte transitivo.

§. 111
Invarianti di gruppi di punti

Se il gruppo ampliato $G_r^{(q)}$ è intransitivo esso possiede un certo numero di invarianti, precisamente, nelle notazioni superiori, ne possiede $qn-\nu_q$ che sono le soluzioni del sistema completo

$$X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \ldots\ldots + X_i^{(q)}F = 0\,,$$

questi diconsi gli invarianti del sistema dei q punti.

Secondo il significato generale degli invarianti dei gruppi intransitivi (§ 49), la condizione necessaria e sufficiente affinchè due sistemi di q punti siano traducibili l'uno nell'altro con trasformazioni di G_r è che abbiano uguali invarianti.

Con questa nozione di invarianti di un sistema di punti possiamo definire la transitività multipla anche così: Un gruppo G_r è m volte transitivo se i sistemi di m o di un numero minore di punti non hanno ancora invarianti ma ne hanno quelli di $m+1$ punti.

Importa distinguere fra gli invarianti di un gruppo di q punti quelli che sono veramente relativi a tutti i q punti da quelli che appartengono già a $q-1$, $q-2$ .... di questi punti o sono funzioni di essi. Diremo i primi invarianti proprii del sistema dei q punti, gli altri invarianti improprii. Dimostriamo che da un certo valore di q in poi non esistono più invarianti proprii, precisamente diciamo che: se nella serie (*) dei numeri ν il primo che eguaglia il numero r dei parametri è ν_s, al di là di $q=s+1$ non esistono certamente più invarianti proprii.

Siccome poi è certamente $\nu_r = r$, ne segue che un sistema di $r+2$ o di un numero maggiore di punti non ha invarianti proprii.

Per dimostrare il teorema enunciato osserviamo che l'essere $\nu_s = r$ significa che un sistema arbitrario di s punti non è lasciato fisso da alcuna trasformazione di G_r salvo l'identità e quindi due gruppi di s

punti equivalenti $(P_1 P_2 \dots P_s)$, $(Q_1 Q_2 \dots Q_s)$ si traducono l'uno nell'altro con una sola trasformazione di G_r.

Presi allora due sistemi di $s+2$ punti

$$(5)\quad \begin{cases} (P_1 P_2 \dots\dots P_s P_{s+1} P_{s+2}) \\ (Q_1 Q_2 \dots Q_s Q_{s+1} Q_{s+2}) \end{cases}$$

per scrivere che sono equivalenti basterà scrivere che lo sono p. e. i due sistemi di $s+1$ punti

$$(6)\quad (P_1 P_2 \dots P_s P_{s+1})\ ,\ (Q_1 Q_2 \dots Q_s Q_{s+1})$$

e gli altri due

$$(6^*)\quad (P_1 P_2 \dots P_s P_{s+2})\ ,\ (Q_1 Q_2 \dots Q_s Q_{s+2})$$

ciò che si fa eguagliando i loro rispettivi invarianti (proprii od improprii). Difatti, siccome vi è un'unica trasformazione che porta $P_1 P_2 \dots P_s$ in $Q_1 Q_2 \dots Q_s$, la stessa trasformazione porterà il primo sistema (6) o (6*) nel secondo e quindi anche il primo sistema (5) nel secondo. L'equivalenza dei due sistema (5) si esprime dunque per mezzo di invarianti relativi a gruppi di meno di $s+2$ punti, onde segue appunto che un gruppo di $s+2$ punti o di un numero maggiore di punti, non ha invarianti proprii.

Come caso particolare del teorema dimostrato notiamo il seguente: Se il gruppo G_r sulle n variabili è semplicemente transitivo, soltanto le coppie di punti hanno invarianti (proprii) rispetto al gruppo.

Infatti si ha allora $\nu = r$, cioè $s = 1$

Per citare due esempî semplici, consideriamo dapprima il gruppo di movimenti nel piano (x, y) colle trasformazioni infinitesime:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

Questo è un G_3 transitivo una sola volta, il primo gruppo ampliato $G_3^{(1)}$ è intransitivo onde una coppia di punti ha un invariante che è manifestamente la distanza dei due punti, o qualunque sua funzione p.e. $(x-x')^2+(y-y')^2$ – Questa è effettivamente la soluzione del sistema completo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + x'\frac{\partial f}{\partial y'} - y'\frac{\partial f}{\partial x'} = 0$$

Si osservi che in questo caso si ha

$$\nu_1 = 2, \quad \nu_2 = 3$$

e il teorema dimostrato sopra ci direbbe soltanto che già le quaderne di punti non hanno più invarianti proprî; in realtà nemmeno le terne di punti hanno invarianti proprii, come è chiaro geometricamente.

Prendiamo ancora il gruppo projettivo sopra una variabile x_1, che è un G_3 colle tre trasformazioni infinitesime (§75)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1^2\frac{\partial f}{\partial x_1};$$

qui abbiamo

$$\nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 2 \quad \nu_3 = 3$$

ed il primo gruppo ampliato intransitivo è $G_1^{(4)}$ – Il gruppo projettivo G_3 è dunque triplamente transitivo, ma (essendo $\nu_3 = 3$) la trasformazione che porta tre punti in tre altri sarà perfettamente determinata, come del resto è ben noto. Solo le quaderne di punti (essendo $s=3$) avranno invarianti proprii; precisamente una quaderna $(x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_4)$ ha un unico invariante che si può prendere uguale al rapporto anarmonico

$$J = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}$$

Questa è l'unica soluzione del sistema completo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \\ x_1^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_3^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + x_4^2 \dfrac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \end{cases}$$

§ 112

Gruppi prolungati agli elementi lineari

Andiamo ora a trattare di un altro modo di ampliamento dei gruppi che ci condurrà all'importante nozione degli invarianti differenziali di un gruppo. Ma prima consideriamo un caso particolare più semplice di siffatto ampliamento o prolungamento di un gruppo, il caso del prolungamento degli elementi lineari.

Ogni trasformazione

$$(I) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n) \qquad i=1,2\ldots n$$

di un gruppo trasforma insieme ai punti dello spazio anche tutti gli elementi geometrici in esso contenuti in altri enti della medesima specie, p. e. tutte le curve in curve, le superficie in superficie etc..

Se consideriamo in particolare una curva C ed un suo punto P, essa sarà cangiata dalla trasformazione in una curva Γ ed un suo punto Q. La curva C ha in $P=(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ una tangente (§ 43) che è individuata dal punto P e dalla sua direzione; questa viene fissata dalle $\underline{n}$ costanti di direzione che indichiamo con $x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$; esse non sono altro che le derivate di $x_1\, x_2 \ldots x_n$ rispetto al parametro t che individua i punti della curva C:

$$x_1^{(1)} = \frac{dx_1}{dt}\,,\; x_2^{(1)} = \frac{dx_2}{dt}\,, \ldots x_n^{(1)} = \frac{dx_n}{dt}$$

Cangiando il parametro t, non variano che per un fattore comune di proporzionalità); possono quindi considerarsi come coordinate omogenee della direzione (cf. § 43). L'insieme del punto P e di un tratto infinitesimo della curva C o della sua tangente uscente da P diciamo elemento lineare della curva C in P; un elemento lineare ha le $2n$ coordinate

$$x_1\, x_2 \ldots x_n\,;\; x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$$

Ogni elemento lineare di una curva C viene cangiato dalla trasformazione in un elemento lineare corrispondente della curva Γ corrispondente – Consideriamo ora la trasformazione (7) come agente sugli ∞^{2n-1} elementi lineari dello spazio. Analiticamente deduremo subito le formole per la trasformazione (7) prolungata agli elementi lineari, associando alle (7) le formole che ne risultano per una derivazione rapporto a t, cioè:

$$(7^*)\qquad y_i^{(1)} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} x_1^{(1)} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} x_2^{(1)} + \dots\dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} x_n^{(1)}$$

$$i = 1, 2 \dots\dots n$$

dove le derivate parziali sono calcolate nel punto $P \equiv (x_1 \dots x_n)$ da cui esce l'elemento lineare.

Si osservi che: Per una trasformazione (7) qualunque le coordinate omogenee $x_i^{(1)}$ della direzione dell'elemento lineare subiscono la sostituzione lineare omogenea (7^*) a determinante $\frac{\partial(f_1 \cdots f_n)}{\partial(x_1 \cdots x_n)} \neq 0$; in altre parole fra gli elementi lineari uscenti da due punti corrispondenti la trasformazione qualunque (7) stabilisce una corrispondenza projettiva.

Se invece di considerare una sola trasformazione (7), ne consideriamo una serie ∞^r formanti un gruppo G_r

$$(8)\qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n ;\, a_1\, a_2 \dots a_r),$$

è geometricamente intuitivo che formeranno ancora un gruppo le trasformazioni prolungate agli elementi lineari e cioè un gruppo a r parametri, sul le $2n$ variabili

$$x_1\, x_2 \dots x_n \,;\, x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)},$$

gruppo che diremo il gruppo $G_r^{(1)}$ prolungato di G_r.

Del resto si constata subito analiticamente la cosa osservando che la trasformazione (8) prolungata agli elementi lineari è data dall' associare alle (8) le formole

$$(8^*) \qquad y_i^{(1)} = \sum_\lambda^{1\dots n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

Ora le (8) formando un gruppo G_r, le f_i soddisfano per ipotesi alle relazioni funzionali seguenti.

Posto

$$z_i = f_i(y_1\, y_2 \cdots y_n \,; b_1 \dots b_r)$$

si ha anche

$$z_i = f_i(x, c) \quad , \quad c = \varphi(a, b)$$

La derivazione rapporto a t di queste ci dà da una parte

$$z_i^{(1)} = \sum_\lambda^{1\dots n} \frac{\partial f_i(y, b)}{\partial y_\lambda} y_\lambda^{(1)}$$

e dall' altra

$$z_i^{(1)} = \sum_\lambda^{1\dots n} \frac{\partial f_i(x, c)}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)},$$

onde risulta che la composizione di due trasformazioni (8*) coi rispettivi parametri a, b dà luogo ad una trasformazione (8*) coi parametri c.

Segue da queste considerazioni che il gruppo prolungato $G_r^{(1)}$ ha lo stesso gruppo parametrico del primitivo G_r, col quale è oloedricamente isomorfo

§ 113

Trasformazioni infinitesime del gruppo prolungato $G_r^{(1)}$

Consideriamo una trasformazione infinitesima qualunque

$$Xf = \sum_i \xi_i(x_1\, x_2 \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

del gruppo G_r – Essa genera un sottogruppo G_1 ad un parametro le cui equazioni finite

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n; \tau)$$

ove τ indica il parametro di G_1, sono determinate dalle equazioni differenziali

$$(9) \qquad \frac{dy_i}{d\tau} = \xi_i(y_1\, y_2 \dots y_n)$$

e dalle condizioni iniziali

$$y_i = x_i \quad \text{per } \tau = 0$$

A questo G_1 in G_r corrisponde un sottogruppo $G_1^{(1)}$ ad un parametro nel gruppo prolungato $G_r^{(1)}$, del quale calcoliamo subito la corrispondente trasformazione infinitesima derivando le (9) rapporto a t, ciò che dà

$$(9^*) \qquad \frac{dy_i^{(1)}}{dt} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial y_\lambda} y_\lambda^{(1)} -$$

A queste vanno aggiunte le condizioni iniziali

$$y_i^{(1)} = x_i^{(1)} \qquad \text{per } \tau = 0,$$

giacché all'identità in G_1 corrisponde l'identità in $G_1^{(1)}$ –
Le (9), (9*) ci dimostrano che il gruppo $G_1^{(1)}$ è generato

dalla trasformazione inf. iitesima

$$\mathfrak{X}^{(1)}F = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i\lambda} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} ;$$

che introducendo la notazione

$$(10) \qquad \xi_i^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

scriviamo

$$(11) \quad \mathfrak{X}^{(1)}F = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \xi_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} .$$

Dopo ciò è manifesto che se le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo G_r sono, nelle solite notazioni:

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2 \ldots r),$$

quelle del gruppo prolungato agli elementi lineari saranno le r

$$(12) \quad X_k^{(1)}F = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} \qquad (k = 1, 2 \ldots r)$$

ove si è posto

$$(12^*) \qquad \xi_{ki}^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

I due gruppi G_r, $G_r^{(1)}$ avendo lo stesso gruppo parametrico è evidente che le costanti di composizione c_{iks} per le $X_k f$ o per le $X_k^{(1)}F$ debbono essere le stesse, ciò che molto facilmente si constata sulla formola (12).

Ma possiamo dedurre lo stesso risultato in altro modo più generale dimostrando un teorema che merita di essere per sè rilevato.

Essendo

$$\mathfrak{X}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

una trasformazione infinitesima qualunque, chiamiamo trasformazione infinitesima prolungata (agli elementi lineari) la $\mathcal{X}^{(1)}F$ definita dalla (11) – Consideriamo poi una seconda trasformazione infinitesima qualunque

$$\mathcal{Y}f = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e la sua prolungata

$$\mathcal{Y}^{(1)}F = \sum_i \eta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \eta_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

Se costruiamo la trasformazione alternata

$$(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{Y}^{(1)})$$

ponendo

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

con

$$(13) \qquad \xi_i = \mathcal{X}(\eta_i) - \mathcal{Y}(\xi_i).$$

troviamo subito

$$(\mathcal{X}^{(1)}, \mathcal{Y}^{(1)}) = \left\{\mathcal{X}(\eta_i) - \mathcal{Y}(\xi_i)\right\}\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \left\{\mathcal{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathcal{Y}(\xi_i^{(1)})\right\}\frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} +$$

$$+ \sum_i \sum_\lambda \left\{\xi_\lambda^{(1)} \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \eta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}}\right\}\frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

D'altronde dalla (13) formando

$$\xi_i^{(1)} = \sum_\lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)}$$

si ha subito

$$\xi_i^{(1)} = \mathcal{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathcal{Y}(\xi_i^{(1)}) + \sum_k \left(\xi_k^{(1)} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} - \eta_k^{(1)} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right)$$

ovvero

$$\xi_i^{(1)} = \mathfrak{X}(\eta_i^{(1)}) - \mathfrak{Y}(\xi_i^{(1)}) + \sum_\lambda \left(\xi_\lambda^{(1)} \frac{\partial \eta_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} - \eta_\lambda^{(1)} \frac{\partial \xi_i^{(1)}}{\partial x_\lambda^{(1)}} \right)$$

Ne segue la formola:

$$(14) \qquad (\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)}) = \sum_i \zeta_i \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_i \zeta_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}},$$

che ci dà il teorema in discorso:

La trasformazione prolungata di una trasformazione alternata $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ è eguale alla trasformazione alternata $(\mathfrak{X}^{(1)}, \mathfrak{Y}^{(1)})$ delle prolungate delle primitive.

Da questo teorema generale seguono nuovamente i risultati già sopra osservati.

§ 114

Modo come il sottogruppo di stabilità di un punto trasforma gli elementi lineari pel punto

Essendo G_r un gruppo qualunque, consideriamone il sottogruppo di stabilità di un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ qualunque dello spazio. Questo sottogruppo, nelle notazioni dei §§. 38–40, è un $G_{r-\tau_0}$ con $r-\tau_0$ parametri, essendo $r-\tau_0$ il numero delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore in P_0. Il $G_{r-\tau_0}$ che lascia fisso P_0 trasformerà gli elementi lineari uscenti da questo punto secondo le sostituzioni di un gruppo lineare omogeneo nelle coordinate omogenee $x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$ di questi elementi lineari (§ 112). Vogliamo calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici di questo gruppo projettivo sugli elementi lineari uscenti da P_0 e determinare il numero dei suoi parametri, che naturalmente non potrà eccedere il numero

$$m = r - r_0$$

dei parametri del sottogruppo di stabilità G_m. Siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_m f$$

le trasformazioni generatrici di G_m che sono tutte e sole le trasformazioni di G_r d'ordine superiore. Sopra gli ∞^{2n-1} elementi lineari dello spazio il gruppo G_m agirà secondo il gruppo $G_m^{(1)}$ prolungato, colle trasformazioni infinitesime generatrici

$$(15) \qquad X_k^{(1)} F = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{i,\lambda} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\lambda} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}$$

$$k = 1, 2 \dots m$$

Ma volendoci limitare alla considerazione degli ∞^{n-1} elementi lineari uscenti da P_0, osserviamo che rispetto alla totalità degli ∞^{2n-1} elementi lineari questi formano una varietà invariante caratterizzata dalle equazioni

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)}, \dots\ x_n = x_n^{(0)}$$

Applicando la regola dimostrata alla fine del §. 44, si calcoleranno le trasformazioni infinitesime generatrici del detto gruppo projettivo sugli elementi lineari uscenti da P_0, sopprimendo nelle (15) i termini con $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \dots n)$ e ponendo negli altri $x_i = x_i^{(0)}$.

Così la (15) si riduce a

$$(16) \qquad L_k F = \sum_{i\lambda} b_{ki}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}},$$

dove i coefficienti costanti $b_{ki}^{(\lambda)}$ sono i coefficienti dei termini di primo grado negli sviluppi in serie

$$\xi_{ki} = \sum_\lambda b_{ki}^{(1)} (x_\lambda - x_\lambda^{(0)}) + \dots\dots$$

delle ξ_{ki}.

Se pensiamo distribuite le trasformazioni $X_1 X_2 \dots X_m$ nel modo che abbiamo appreso nel § 38 e cioè in:

r_1 trasformazioni del 1° ordine $X_1 X_2 \dots X_{r_1}$,

r_2 " del 2° ordine

. . . .

tutti i coefficienti $b_{ki}^{(\lambda)}$ provenienti dalle X d'ordine superiore al primo s'annullano e restano quindi soltanto r_1 trasformazioni infinitesime (16)

$$(17) \quad \begin{cases} L_1 F = \sum\limits_{i\lambda} b_{1i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} \\ L_2 F = \sum\limits_{i\lambda} b_{2i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ L_{r_1} F = \sum\limits_{i\lambda} b_{r_1 i}^{(\lambda)} x_\lambda^{(1)} \dfrac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}}. \end{cases}$$

come generatrici del gruppo projettivo cercato - Ma queste sono effettivamente indipendenti perchè se fosse

$$e_1 L_1 + e_2 L_2 + \dots\dots + e_{r_1} L_{r_1} = 0$$

la trasformazione di G_r

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots\dots + e_{r_1} X_{r_1} f$$

sarebbe d'ordine superiore al primo, ciò che contraddice al modo come le $X_1 \dots X_{r_1}$ sono costruite (§ 38).

Ne concludiamo:

Il sottogruppo di stabilità di un punto P_0 trasforma gli elementi lineari uscenti da P_0 secondo un gruppo projettivo con r_1 parametri, essendo r_1 il numero delle trasformazioni di 1° ordine in G_r colle quali non è possibile comporre trasformazioni d'ordine superiore.

Si osservi che per un punto generico ove i coefficienti delle equazioni di definizione del gruppo si comportano regolarmente, basterà conoscere queste equazioni (cf. § 39) per calcolare r_1 e le trasformazioni generatrici $I_k F$ del gruppo projettivo sugli elementi lineari.

Consideriamo ora due gruppi G_r, Γ_r simili e sia

$$18) \qquad y_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

una trasformazione che cangia l'uno nell'altro.

Se $P_0 \equiv (x_i^{(0)})$, $Q_0 \equiv (y_i^{(0)})$ sono due punti equivalenti per la (18), fra le coordinate omogenee $x_i^{(1)}, y_i^{(1)}$ di due elementi lineari corrispondenti, uscenti da P_0, Q_0 sussistono le relazioni omogenee (7*)

$$(18^*) \qquad y_i^{(1)} = \sum_\lambda \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_\lambda}\right)_{x^{(0)}} x_\lambda^{(1)}$$

Queste cangiano il gruppo projettivo degli elementi lineari uscenti da P_0 in quello sopra gli elementi ~~lineari~~ per Q_0; questi due gruppi sono per ciò affini ~~entro il~~ gruppo generale delle sostituzioni lineari omogenee. In particolare se per la trasformazione (18) prendiamo una trasformazione di G_r stesso, I_r coincide con G_r e P_0, Q_0 sono due punti equivalenti (qualunque) rispetto a G_r.

Dunque: A due punti equivalenti P_0, Q_0 rispetto al gruppo G_r appartengono due gruppi projettivi sugli elementi lineari uscenti da essi, che sono affini entro il gruppo generale lineare omogeneo.

§. 115

Definizione degli invarianti differenziali

Veniamo ora al prolungamento dei gruppi agli elementi differenziali d'ordine superiore, che poniamo sotto la forma generale seguente.

Abbiasi un gruppo G_r sopra $m+n$ variabili di cui le prime <u>m</u> indichiamo con

$$x_1\ x_2 \dots x_m$$

e le ultime <u>n</u> con

$$z_1\ z_2 \dots z_n$$

e siano

$$x'_i = f_i(x_1\ x_2 \dots x_m, z_1 \dots z_n; a_1\ a_2 \dots a_r) \quad i = 1.2\dots m$$
$$z'_j = \varphi_j(x_1 \dots x_m, z_1 \dots z_n; a_1\ a_2 \dots a_r) \quad j = 1.2\dots n$$

le equazioni finite del gruppo.

Se nello spazio $S_{m+n} = (x_1 \dots x_m\ z_1 \dots z_n)$ consideriamo u varietà V_m le cui equazioni si ottengono ponendo $z_1, z_2 \dots z_n$ uguali a funzioni analitiche indipendenti, che possono del resto essere affatto arbitrarie, di $x, x_2 \dots x_m$. ogni trasformazione (19) del gruppo G_r cangierà V_m in una varietà V'_m, le cui equazioni si otterranno prendendo le z' eguali a certe funzioni delle $x'_1 \dots x'_m$ -

Ora le z possegono per ipotesi derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x_1 \dots x_m$, onde segue, come vedremo meglio fra breve, che le z' possegono derivate parziali di tutti gli ordini rispetto a $x'_1 \dots x'_m$ ed ogni tale derivata d'ordine k delle z' si esprime per le analoghe derivate delle z rapporto alle x degli ordini

$$k,\ k-1,\ k-2 \dots 1$$

Il gruppo dato determina allora perfettamente un secondo gruppo sulle x, z e le derivate delle z rapporto alle x considerate tutte come variabili indipendenti; questo diciamo il gruppo prolungato del primitivo. — L'esempio considerato al § 112 del prolungamento del gruppo agli elementi lineari è manifestamente un caso particolare di questo generale, dove le x sono riguardate come funzioni di una variabile t sulla quale il gruppo G_r non opera.

Ciò premesso, ecco come si definiscono gli invarianti differenziali:

Ogni espressione

$$J = F\left(x, z, \frac{\partial z_i}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_k \partial x_l} \dots\right)$$

formata colle x, le z e le derivate delle z rapporto alle x fino ad un certo ordine, che, per qualsiasi trasformazione del gruppo G_r, si cangi nella espressione stessa formata colle x', colle z' e le derivate delle z' rapporto alle x' dicesi un invariante differenziale del gruppo G_r

Diciamo poi che l'invariante differenziale J è d'ordine k, se le più alte derivate delle z che figurano in J sono d'ordine k.

Qualche esempio chiarirà subito l'importante definizione - Se consideriamo il gruppo dei movimenti nel piano (x,y) l'espressione

$$J = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

che dà il raggio di curvatura di una curva qualsiasi $y=f(x)$ è un invariante differenziale -

Così rispetto al gruppo di movimenti nello spazio sono invarianti differenziali di curve gobbe la prima curvatura (flessione) e la seconda curvatura (torsione); i loro ordini sono rispettivamente 2 e 3 -

Per una superficie sono invarianti differenziali del secondo ordine i due raggi principali r_1, r_2 di curvatura, o se si vuole la curvatura totale $K = \frac{1}{r_1 r_2}$ la curvatura media $H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

Già in antiche teorie si erano presentati invarianti differenziali di gruppi particolari semplici, ma la loro teoria generale è dovuta a Lie, il quale ha riconosciuto che ogni gruppo continuo finito (od infinito) possiede degli invarianti differenziali la cui determinazione si ottiene per operazioni algebriche quando siano date le equazioni finite del gruppo, ovvero integrando sistemi completi di equazioni a derivate parziali, assegnate le trasformazioni infinitesime generatrici.

Qui ci proponiamo di porre soltanto i principii di questa teoria per giungere alla dimostrazione delle proprietà ora enunciate.

§ . 116

Trasformazioni prolungate

Consideriamo le z come funzioni delle x e per le derivate parziali delle z introduciamo la notazione:

$$(20) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} z_i}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} = z_{i;\,\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_m} \quad (*)$$

Sia ora

$$(21) \quad \begin{cases} x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_m\, z_1\, z_2 \dots z_n) & i = 1.2\dots m \\ z'_j = \varphi_j(x_1\, x_2 \dots x_m\, z_1\, z_2 \dots z_n) & j = 1.2\dots n \end{cases}$$

(*) Questa notazione diversa da quella già usata al §. 32, riesce qui più opportuna.

una qualunque trasformazione sulle x e sulle z - In primo luogo facciamo vedere che, poste le z eguali a funzioni arbitrarie delle x entro le (21), si potranno dedurre le z' in funzione delle x', per il che bisognerà provare che le prime $\underline{m}$ equazioni (21) saranno risolubili rispetto alle x - Infatti pel determinante funzionale delle x' così espresse per le x abbiamo

$$(22)\qquad \frac{\partial(x_1' x_2' \dots x_m')}{\partial(x_1 x_2 \dots x_m)} = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \sum_j^{1\dots n} \frac{\partial f_i}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial x_k} \right| \qquad i, k = 1, 2 \dots m$$

Decomponendo questo determinante in tanti determinanti parziali, si ha un'espressione razionale intera nelle derivate prime delle z, in cui figurano come coefficienti tutti i minori d'ordine $\underline{m}$ della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_m} \end{matrix} \right\|$$

e questi non sono tutti nulli perchè le f sono funzioni indipendenti delle x e delle z. Se fosse zero il determinante (22), verrebbero legate le z e le loro derivate prime, ciò che è assurdo essendo le z funzioni arbitrarie delle x.

Ciò premesso, e potendo dunque considerare le z' come funzioni delle x', porremo come nella (20)

$$(20^*) \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m} z'_i}{\partial x_1'^{\alpha_1}\partial x_2'^{\alpha_2}\dots\partial x_m'^{\alpha_m}} = z'_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

e dimostreremo che le nuove derivate

$$z'_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}$$

d'ordine $N=\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m$ si esprimono per le x, z e le loro derivate parziali

$$z_{\nu;\beta_1\beta_2\dots\beta_m} \qquad (\nu=1,2\dots n)$$

dal primo ordine fino all'ordine N, e che nella formola corrispondente

$$(23) \qquad z'_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = F_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1\beta_2\dots\beta_m})$$

la forma della funzione F dipende unicamente dalla trasformazione (21) eseguita.

Per maggiore chiarezza cominciamo dall'osservare che per le derivate del primo ordine $\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}$ sussiste certo una formola (23) — Si ha infatti identicamente

$$dz'_i - \sum_k^{1\dots m} \frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}\, dx'_k = 0$$

e perciò, esprimendo colle (21) le x' e z' per le x e z:

$$\sum_s^{1\dots m}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s}\, dx_s + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\lambda}\, dz_\lambda =$$

$$= \sum_k^{1\dots m}\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k}\left\{\sum_s^{1\dots m}\frac{\partial f_k}{\partial x_s}\, dx_s + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial f_k}{\partial z_\lambda}\, dz_\lambda\right\} -$$

Ponendo per dz_λ la sua espressione $\sum_s^{1\dots m}\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s}dx_s$, la precedente si muta in una relazione lineare fra $dx_1 \dots dx_m$ che deve dunque essere un' identità — Eguagliando a zero i varii coefficienti ne risultano per

$$\frac{\partial z'_i}{\partial x'_1}, \frac{\partial z'_i}{\partial x'_2} \dots\dots \frac{\partial z'_i}{\partial x'_m}$$

le m equazioni lineari

$$\sum_k^{1\dots m}\left\{\frac{\partial f_k}{\partial x_s} + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial f_k}{\partial z_\lambda}\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s}\right\}\frac{\partial z'_i}{\partial x'_k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_s} + \sum_\lambda^{1\dots n}\frac{\partial \varphi_i}{\partial z_\lambda}\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_s},$$

le quali sono risolubili rispetto alle dette derivate perché il determinante dei coefficienti non è che il determinante funzionale (22) e questo, come si è visto, non è nullo.

Per $N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ sussistono dunque certamente le (23), ed ora basterà provare che supposta l'esistenza di queste formole fino all'ordine N, esse valgono ancora per l'ordine seguente $N+1$.

Le derivate d'ordine $N+1$ delle z' rapporto alle x' sono da calcolarsi dalla formola

$$(24) \qquad dz'_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} - \sum_k^{1\dots m} z'_{i;\alpha_1\dots\alpha_{k-1},\alpha_k+1,\alpha_{k+1}\dots\alpha_n}\, dx'_k = 0$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = N$$

Per mezzo delle (23) che si suppongono sussistere per l'ordine N possiamo, come sopra, cangiare la (24) in una relazione lineare fra $dx_1, dx_2 \dots dx_m$, onde eguagliando a zero i varii coefficienti si otterrà un sistema di m equazioni lineari nelle ~~m~~ incognite

$$z'_{i;\alpha_1+1,\alpha_2\dots\alpha_m}, \quad z'_{i;\alpha_1,\alpha_2+1,\dots\alpha_m}, \dots \quad z'_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m+1}$$

e il determinante dei coefficienti sarà sempre il detminante (22) diverso da zero, onde risulta provata la nostra asserzione -

E' da osservarsi che, eseguendo questo calcolo, si ottengono in apparenza espressioni diverse per una medesima derivata $z'_{i;\beta_1 \dots \beta_m}$ (*), ma in realtà queste coincideranno necessariamente perchè in caso diverso (dovendo certamente sussistere insieme) legherebbero le z e le loro derivate -

Possiamo dunque concludere:

Una trasformazione qualunque (21) sulle x e sulle z individua una trasformazione sulle derivate delle z rapporto alle x, fino ad un ordine qualunque N, secondo le formole (23)

$$(23) \qquad z'_{i;\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m} = F_{i;\alpha_1 \dots \alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m})$$

$$0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leqq N$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$$

La trasformazione data dalle (21), (23) insieme dicesi la trasformazione prolungata dell'ordine N della (21).

§ 117
Gruppi prolungati

Suppongasi ora di eseguire dopo la trasformazione (21) una seconda trasformazione

$$x''_i = \bar{f}_i(x', z') \quad , \quad z''_j = \bar{\varphi}_j(x', z')$$

(*) Così per e. la derivata $z'_{i;1,1,0\dots0}$ potrà calcolarsi sia da $z'_{i;1,0,0\dots0}$ sia da $z'_{i;0,\dots}$

e di calcolare le altre formole della relativa trasformazione prolungata

$$z''_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = F_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(x', z', z'_{\nu;\beta_1\dots\beta_m})$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m \leqq N$$

Se per mezzo delle (21), (23) ne eliminiamo le x', z', avremo formole del tipo

$$x''_i = \bar{\bar{f}}_i(x, z) \quad , \quad z''_j = \bar{\bar{\varphi}}_j(x, z)$$

$$z''_{i;\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m} = \Phi_{i;\alpha_1\dots\alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1\dots\beta_m})$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m \leqq N ,-$$

le quali rappresentano evidentemente il prodotto delle due trasformazioni prolungate. D'altra parte se calcoliamo la trasformazione prolungata della trasformazione composta

$$x''_i = \bar{\bar{f}}_i(x, z) \quad , \quad z''_j = \bar{\bar{\varphi}}_j(x, z)$$

dobbiamo trovare le stesse formole per $z''_{i;\alpha_1\dots\alpha_m}$ in funzione delle $x, z, z_{\nu;\beta_1\dots\beta_m}$; altrimenti, per un'osservazione già fatta sopra, ne conseguirebbero delle relazioni fra le x, z e le derivate delle z. Questo risultato può enunciarsi col teorema:

La trasformazione prolungata del prodotto di due trasformazioni coincide col prodotto delle due trasformazioni prolungate delle componenti.

Segue di qui immediatamente che se si ha una serie ∞^r di trasformazioni (21)

$$(25)\quad x_i' = f_i(x, z; a_1 \dots a_r)\ ,\quad z_j' = \varphi_j(x, z; a_1 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots m \qquad\qquad j = 1, 2 \dots n$$

formanti un gruppo G_r, costituiranno ancora un gruppo a $\underline{r}$ parametri le loro trasformazioni prolungate dell'ordine N:

$$(25^*)\left\{\begin{array}{l} x_i' = f_i(x, z; a) \qquad\qquad z_j' = \varphi_j(x, z; a) \\ z'_{i;\alpha_1 \dots \alpha_m} = F_{i;\alpha_1 \dots \alpha_m}(x, z, z_{\nu;\beta_1 \dots \beta_m}; a) \\ \qquad\qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq N \end{array}\right.$$

Diremo questo il gruppo prolungato d'ordine N del primitivo e lo indicheremo con $G_r^{(N)}$. È manifesto che i due gruppi G_r, $G_r^{(N)}$ hanno lo stesso gruppo parametrico, ossia sono oloedricamente isomorfi.

Vogliamo ora calcolare le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo prolungato $G_r^{(N)}$ note che siano le generatrici

$$X_i f = \sum_k^{1 \dots m} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1 \dots n} \eta_{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} \qquad (i = 1, 2, \dots r)$$

del gruppo G_r.

All'identità in G_r corrispondendo l'identità in $G_r^{(N)}$, ogni trasformazione infinitesima

$$X f = \sum_k^{1 \dots m} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1 \dots n} \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial z_\lambda}$$

di G_r dà luogo ad una trasformazione infinitesima determinata di $G_r^{(N)}$; questa indicheremo con

$$(26)\quad X^{(N)} f = \sum_k \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_\lambda \eta_\lambda \frac{\partial f}{\partial z_\lambda} +$$
$$+ \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}^{1 \dots N} \sum_k^{1 \dots n} \zeta_{k;\alpha_1 \dots \alpha_m} \frac{\partial f}{\partial z_{k;\alpha_1 \dots \alpha_m}}$$

e la chiameremo la trasformazione infinitesima prolungata d'ordine N della Xf. Per calcolare i nuovi coefficienti

$$\xi_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m}$$

della $X^{(N)}f$ in funzione delle

$$x,\ z,\ z_{\nu;p_1\ldots p_m}$$

si osserverà che, se col simbolo δ si indicano gli incrementi dovuti alla trasformazione (26), si ha:

$$\delta x_k = \xi_k\,\delta t\,,\quad \delta z_\lambda = \eta_\lambda\,\delta t\,,\quad \delta z_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m} = \xi_{k;\alpha_1\ldots\alpha_m}\,\delta t.$$

Ora abbiamo identicamente

$$\delta\Big\{ dz_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m} - \sum_k^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\ldots\alpha_m}\, dx_k \Big\} = 0$$

e quindi, per l'invertibilità dei simboli d, δ

$$d\xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m} = \sum_k^{1\ldots m} \xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}\, dx_k +$$

$$+ \sum_k^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1},\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}\, d\xi_k$$

Esprimendo tutti i differenziali (a) $dx_1 \ldots dx_m$ colla formola

$$d\,\Phi(x,z) = \sum_k^{1\ldots m}\Big\{ \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} + \sum_\lambda^{1\ldots n} \frac{\partial\Phi}{\partial z_\lambda}\frac{\partial z_\lambda}{\partial x_k}\Big\}\, dx_k$$

ed eguagliando a zero i coefficienti di $dx_1 \ldots dx_m$, otteniamo la formola

$$(27)\qquad \xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\,\alpha_k+1\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m} = \frac{d\xi_{i;\alpha_1\ldots\alpha_m}}{dx_k} - \sum_\lambda^{1\ldots m} z_{i;\alpha_1\ldots\alpha_{\lambda-1},\,\alpha_\lambda+1,\,\alpha_{\lambda+1}\ldots\alpha_m}\,\frac{d\xi_\lambda}{dx_k}.$$

dove il simbolo $\frac{d}{dx_k}$ indica la derivata ~~totale~~ della funzione che si considera rapporto ad x_k, in quanto cioè x_k entra anche nelle z e nelle $z_{\nu;\beta_1\ldots\beta_m}$

Colle $(\ldots)$ calcoleremo effettivamente tutti i coefficienti ξ d'ordine $N+1$, una volta calcolati quelli d'ordine N ed inferiore -

Anche qui è da osservarsi che per un medesimo coefficiente ξ si otterranno dal calcolo più espressioni, le quali però debbono necessariamente coincidere poichè gli incrementi che subiscono le derivate delle z sono già pienamente determinati da quelli che subiscono le x e le z stesse -

Alle r trasformazioni infinitesime di G_r

$$X_1 f \ldots X_r f$$

corrisponderanno così le r trasformazioni prolungate

$$X_1^{(N)}f,\ X_2^{(N)}f \ldots\ldots X_r^{(N)}f,$$

generatrici di $G_r^{(N)}$ - Le costanti di composizione c_{iks} pei due gruppi G_r, $G_r^{(N)}$ oloedricamente isomorfi, debbono essere le stesse, ciò che si potrebbe constatare anche col calcolo diretto -

§ 118
Esistenza e calcolo degli invarianti differenziali

Se ritorniamo alla definizione data al § 115 degli invarianti differenziali, vediamo che un invariante differenziale

$$\Phi(x, z, z_{\nu;\beta_1\dots\beta_m}) \qquad \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m \leq N$$

d'ordine N del gruppo G_r non è altro che un invariante ordinario del gruppo prolungato d'ordine N $G_r^{(N)}$; e l'inversa è pur vera evidentemente.

La ricerca degli invarianti differenziali di un gruppo è così ricondotta a quella degli invarianti ordinarii dei suoi gruppi prolungati. Ciò fa riconoscere ad un tempo l'effettiva esistenza di invarianti differenziali di tutti gli ordini sufficientemente elevati e dà il modo di calcolarli.

In effetto, prendendo N sufficientemente grande, il gruppo prolungato $G_r^{(N)}$ e tutti i successivi risulteranno intransitivi (almeno appena che il numero delle variazioni su cui opera $G_r^{(N)}$ supera r), essi avranno quindi degli invarianti ordinarii che saranno invarianti differenziali di G_r. Quanto al calcolo di questi invarianti, se sono note le equazioni finite di G_r, coi processi d'eliminazione e derivazione dei paragrasi precedenti si calcoleranno le equazioni finite dei gruppi prolungati e con sole operazioni di eliminazione si avranno quindi i loro invarianti (§ 49).

Se poi di G_r sono date soltanto le trasformazioni infinitesime, si calcoleranno colle formole del paragrafo precedente le trasformazioni infinitesime dei gruppi prolungati e colla integrazione di sistemi completi si avranno gli invarianti –

Del resto questo secondo metodo è il più spesso preferibile, quando anche si conoscano le equazioni finite di G_r, per le difficoltà che si presentano in pratica alle eliminazioni indicate dal metodo teorico –

Così abbiamo effettivamente dimostrato quanto avevamo enunciato al § 115. Qui facciamo ancora le osservazioni seguenti – Se confrontiamo fra loro due varietà dello stesso numero di dimensioni nello spazio in cui opera il gruppo, diciamo equivalenti le due varietà rispetto al gruppo quando con trasformazioni del gruppo si passa dall'una all'altra. Perchè due varietà siano equivalenti è manifestamente necessario che ogni invariante differenziale dell'una eguagli il corrispondente invariante differenziale dell'altra.

La serie delle varietà equivalenti ad una data forma, come è chiaro, un ente invariabile per tutte le trasformazioni del gruppo. Se il gruppo ha r parametri la serie di queste varietà sarà in generale ∞^r; costituirà invece una serie d'infinità minore, diciamo ∞^{r-p} allora ed allora soltanto che esistano nel gruppo ∞^p trasformazioni che lasciano fissa la varietà iniziale. Evidentemente queste ∞^p trasformazioni di G_r costituiscono un sottogruppo G_p; le altre varietà della serie hanno sottogruppi affini a G_p.

§ 119

Invarianti differenziali dei gruppi su due variabili

Applichiamo le teorie generali sopra esposte al caso dei gruppi su due variabili (x, y), dove vogliamo spingere alquanto più avanti la ricerca degli invarianti differenziali e delle loro proprietà.

Osserviamo in primo luogo come si costruisce la trasformazione prolungata di una trasformazione infinitesima su due variabili

$$(28) \qquad Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Considerando la y come funzione della x, poniamo qui

$$\frac{dy}{dx}=y_1\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=y_2\,,\quad \dots\dots \frac{d^Ny}{dx^N}=y_N$$

e prolunghiamo N volte la trasformazione (28) - Indicando con

$$(29)\qquad X^{(N)}f=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+\dots+\eta_N\frac{\partial f}{\partial y_N}$$

la trasformazione prolungata, basterà per calcolare $\eta_1\ \eta_2\ \dots$ applicare alle equazioni

$$dy-y_1dx=0\ ,\quad dy_1-y_2\,dx=0,\ \dots\dots\ dy_{N-1}-y_N\,dx=0$$

la differenziazione col simbolo δ (§ 117) -

Indicando col simbolo $\frac{d}{dx}$ la derivazione totale rapporto a x, troviamo:

$$(30)\qquad \eta_1=\frac{d\eta}{dx}-y_1\frac{d\xi}{dx},\quad \eta_2=\frac{d\eta_1}{dx}-y_2\frac{d\xi}{dx},\ \dots\ \eta_N=\frac{d\eta_{N-1}}{dx}-y_N\frac{d\xi}{dx}$$

Consideriamo ora un gruppo G_r sulle due variabili x, y e siano

$$X_1f,\ X_2f\ \dots\dots X_rf$$

le sue trasformazioni infinitesime - Il gruppo prolungato $r-1$ volte

$$G_r^{(r-1)}\equiv\left(X_1^{(r-1)}f\ \dots\dots\ X_r^{(r-1)}f\right)$$

è certamente intransitivo perchè il numero delle variabili

$$x,\ y,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_{r-1}$$

supera di 1 il numero r dei parametri - Esiste quindi certamente un invariante differenziale di ordine $r-1$ o inferiore - Ma noi vogliamo provare che ne esiste uno soltanto, ossia che le r trasforma zioni infinitesime di $G_r^{(r-1)}$ non sono legate fra loro da alcuna relazione lineare, con coefficienti funzioni delle variabili

$$x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1}$$

Ammettiamo il contrario; allora esisterebbero almeno due invarianti indipendenti u, v d'ordine $r-1$ od inferiore

$$u = u(x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1})$$
$$v = v(x, y, y_1, y_2 \cdots y_{r-1})$$

Se consideriamo una curva qualunque C nel piano, purché non sia una curva integrale dell'equazione differenziale $u = \text{cost}^{te}$ o dell'altra $v = \text{cost}^{te}$, l'equazione di C si potrà sempre scrivere sotto la forma

$$(31) \qquad v = \psi(u)$$

perché lungo di essa saranno u, v funzioni l'uno dell'altro — D'altra parte possiamo anche scegliere C in modo che non ammetta alcuna trasformazione infinitesima di G_r, che non sia cioè traiettoria di alcun sottogruppo G_1 di G_r (*) — Allora, per l'osservazione generale fatta alla fine del paragrafo precedente, la curva C percorre per le trasformazioni di G_r una serie ∞^r — Ma la curva C è un integrale dell'equa-

(*) Queste traiettorie formano infatti una serie ∞^r e basta scegliere C fuori di essa.

zione differenziale (31) d'ordine $r-1$ o inferiore, le cui curve integrali si trasformano l'una nell'altra per le trasformazioni di G_r poichè u, v sono invarianti differenziali d'ordine $r-1$. E poichè queste curve integrali della (31) formano al massimo una serie ∞^{r-1} troviamo due risultati contraddittorii, che ci dimostrano l'impossibità dell'esistenza di due diversi invarianti differenziali d'ordine $r-1$ o inferiore. Dunque intanto il gruppo G_r su due variabili possiede fino all'ordine $r-1$ un solo invariante, che indichiamo con J_{r-1}.

Vediamo ora quello che accade per gli ordini successivi. Per l'ordine r le equazioni

$$X_k^{(r)} f = 0 \qquad k = 1, 2 \dots r$$

formano un sistema completo di r equazioni indipendenti (essendo già indipendenti, come si è visto, le precedenti $X_k^{(r-1)} f = 0$) colle $r+2$ variabili

$$x, y, y_1, y_2 \dots y_r$$

Esso ha quindi $r+2-r=2$ soluzioni, una è evidentemente l'invariante differenziale precedente J_{r-1}, l'altra un secondo invariante differenziale J_r che contiene effettivamente y_r, cioè è proprio dell'ordine r, altrimenti J_r soddisferebbe alle precedenti $X_k^{(r-1)} f = 0$. Similmente per $N = r+1$ le equazioni

$$X_k^{(r+1)} f = 0$$

avranno $r+3-r=3$ soluzioni, cioè una oltre J_{r-1}, J_r e questa sarà un terzo invariante differenziale di ordine $= r+1$, J_{r+1}.

Così continuando veniamo a dimostrare il teorema:

Un gruppo G_r su due variabili con r parametri possiede un solo invariante differenziale J_{r-1} d'ordine $< r$ (*); per ogni altro ordine successivo $r, r+1, r+2 \ldots\ldots$ esiste uno ed un solo invariante differenziale corrispondente

$$J_r\,,\; J_{r+1}\,,\; J_{r+2}\,\ldots\ldots$$

Possiamo ora andare più oltre e dimostrare che basta conoscere i due primi invarianti differenziali J_{r-1}, J_r per dedurne tutti i successivi con semplici processi di derivazione - Per ciò si consideri l'equazione differenziale

$$J_r - aJ_{r-1} - b = 0,$$

dove a, b sono due costanti, equazione d'ordine precisamente $= r$ - Le sue ∞^r curve integrali costituiscono una serie invariante rispetto al gruppo, qualunque sia la costante b; eliminando questa per differenziazione (totale) ne risulta che anche le ∞^{r+1} curve integrali dell'equazione d'ordine $r+1$

$$\frac{dJ_r}{dx} - a\,\frac{dJ_{r-1}}{dx} = 0$$

(*) Si può anche dare il caso che J_{r-1} non sia un invariante differenziale nel senso proprio ma un invariante ordinario; ciò avviene se G_r è intransitivo.

ossia

$$(32) \qquad \frac{\frac{dJ_r}{dx}}{\frac{dJ_{r-1}}{dx}} = a \quad (*)$$

costituiscono una serie invariante, qualunque sia a.
Il primo membro della (32) non varia dunque per qualunque trasformazione di G_r; esso è perciò un invariante differenziale d'ordine evidentemente eguale a $r+1$ e può essere preso per J_{r+1}

$$J_{r+1} = \frac{\frac{dJ_r}{dx}}{\frac{dJ_{r-1}}{dx}} = \frac{dJ_r}{dJ_{r-1}}$$

Analogamente

$$J_{r+2} = \frac{dJ_{r+1}}{dJ_{r-1}} = \frac{\frac{d^2J_r}{dx^2}}{\frac{d^2J_{r-1}}{dx^2}},$$

in generale

$$(33) \qquad J_{r+p} = \frac{\frac{d^pJ_r}{dx^p}}{\frac{d^pJ_{r-1}}{dx^p}}$$

Concludiamo: Noti i due primi invarianti differenziali del gruppo G_r

---

(*) Si ricordi che il simbolo $\frac{d}{dx}$ indica derivazione totale rapporto ad x, cioè

$$\frac{d}{dx}\varphi(x, y, y_1, y_2 \ldots\ldots) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y_1}y_2 + \\ + \frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_3 + \ldots$$

i successivi se ne ottengono per derivazione mediante la formola generale (33) -

§. 120
Esempî di calcolo d'invarianti differenziali

Applichiamo ora questi risultati a qualche esempio semplice -

a) Prendiamo il gruppo G_3 di movimenti nel piano generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} \quad ; \quad X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

e calcoliamone gli invarianti differenziali J_2. J_3 di secondo e di terzo ordine mediante i quali si esprimono con derivazione tutti gli altri - Prolungando perciò le Xf tre volte, e riprendendo le solite notazioni per le derivate, dalle formole (29), (30) del paragrafo precedente deduciamo:

$$X_1^{(3)} f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad X_2^{(3)} f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_3^{(3)} f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} + (1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''} +$$
$$+ (3y''^2 + 4y'y''')\frac{\partial f}{\partial y'''}$$

I due invarianti differenziali saranno quindi le due soluzioni del sistema

$$X_1^{(3)} f = 0 \quad , \quad X_2^{(3)} f = 0 \quad , \quad X_3^{(3)} f = 0$$

ossia le due soluzioni, funzioni di y', y'', y''' della equa zione

$$(1+y'^2)\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''} + (3y''^2+4y'y''')\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0,$$

o in fine i due integrali del sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy''}{3y'y''} = \frac{dy'''}{3y''^2+4y'y'''}$$

Come primo integrale si può prendere

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \cos t^e = \frac{1}{c}$$

ed abbiamo quindi per l'invariante differenziale del 2º ordine di una curva piana

$$J_2 = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

che è la nota espressione del raggio ρ di curvatura. Sostituendo poi nella

$$\frac{dy'}{1+y'^2} = \frac{dy'''}{3y''^2+4y'y'''}$$

per y'' il valore

$$y'' = c(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

si ha un'equazione lineare per y''' e si trova subito che per secondo invariante si può prendere

$$J_3 = \frac{3y'y''^2-(1+y'^2)y'''}{(1+y'^2)^3}$$

È facile vedere quale è il significato geometrico di questo invariante differenziale del 3º ordine. Indicando infatti con ds l'elemento d'arco della curva si ha:

$$ds = (1+y'^2)^{\frac{1}{2}}dx$$

e da

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

si trae

$$y''^2 \frac{d\rho}{dx} = 3y'y''^2(1+y'^2)^{\frac{1}{2}} - y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} =$$
$$= (1+y'^2)^{\frac{7}{2}} \cdot J_3$$

cioè

$$\frac{y''^2}{(1+y'^2)^3} \frac{d\rho}{ds} = J_3$$

o in fine

$$J_3 = \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Per gli invarianti differenziali successivi, secondo quanto si è visto alla fine del paragrafo precedente, possiamo prendere le successive derivate della curvatura $\frac{1}{\rho}$ rispetto all'arco. Dunque:

Gli invarianti differenziali di una curva piana rispetto al gruppo dei movimenti sono la sua curvatura $\frac{1}{\rho}$ e le successive derivate della curvatura rispetto all'arco.

b) Un altro esempio notevole è il seguente. Si consideri il gruppo G_3 (intransitivo) su x, y che si ottiene mantenendo ferma la x e trasformando la y secondo il generale gruppo projettivo:

$$x' = x \,, \quad y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta} \,;$$

le trasformazioni infinitesime di G_3 sono

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y} \,, \quad X_2 f = y\frac{\partial f}{\partial y} \,, \quad X_3 f = y^2\frac{\partial f}{\partial y}$$

Qui l'invariante $J_{r-1} = J_2$ si riduce all'invariante ordinario x ed abbiamo poi un invariante differenziale J_3 del 3° ordine che calcoliamo prolungando tre volte X_f, ciò che dà:

$$X_1^{(3)}f = \frac{\partial f}{\partial y} \quad , X_2^{(3)}f = y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} \; ,$$

$$X_3^{(3)}f = y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2yy'\frac{\partial f}{\partial y'} + 2(y'^2 + yy'')\frac{\partial f}{\partial y''} +$$

$$+ 2(3y'y'' + yy''')\frac{\partial f}{\partial y'''}$$

L'invariante J_3 è quella funzione di y', y'', y''' che soddisfa le due equazioni

$$(\alpha) \qquad y'\frac{\partial f}{\partial y'} + y''\frac{\partial f}{\partial y''} + y'''\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0$$

$$2yy'\frac{\partial f}{\partial y'} + 2(y'^2 + yy'')\frac{\partial f}{\partial y''} + 2(3y'y'' + yy''')\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0,$$

la quale seconda diventa per la prima

$$(\beta) \qquad y'\frac{\partial f}{\partial y''} + 3y''\frac{\partial f}{\partial y'''} = 0$$

Per la (α) la f deve essere una funzione φ dei rapporti

$$\xi = \frac{y''}{y'} \qquad \eta = \frac{y'''}{y'}$$

e sostituendo in (β) questa diviene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 3\xi\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

Dunque l'invariante domandato è:

$$J_3 = \eta - \frac{3}{2}\xi^2 = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^2} = \left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2;$$

questa espressione è la così detta derivata Schwarziana della y rapporto alla x, che gode della proprietà caratteristica di non mutare comunque si trasformi linearmente la funzione y. Essa ha molta importanza nella teoria delle equazioni differenziali lineari ed in problemi di rappresentazione conforme -

§ 121

Invarianti differenziali di superficie rispetto ai gruppi di movimento

Per trattare anche un esempio di un gruppo a 3 variabili prendiamo il gruppo G_6 di movimenti nello spazio e calcoliamo gli invarianti differenziali del 2° ordine di una superficie.

Ma prima osserviamo come si prolunga una qualunque trasformazione infinitesima a tre variabili

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

riguardando z come funzione di x, y e ponendo, colle notazioni di Monge

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Se applichiamo alle equazioni

$$dz = p\,dx + q\,dy \quad , \quad dp = r\,dx + s\,dy \quad , \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

la differenziazione col simbolo δ della trasformazione infinitesima avremo

$$(34) \quad X^{(2)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z} + P\frac{\partial f}{\partial p} + Q\frac{\partial f}{\partial q} + R\frac{\partial f}{\partial r} + $$
$$+ S\frac{\partial f}{\partial s} + T\frac{\partial f}{\partial t} \quad ,$$

ove si ponga

$$(35)\begin{cases} P=\dfrac{d\zeta}{dx}-p\dfrac{d\xi}{dx}-q\dfrac{d\eta}{dx}\ , \quad Q=\dfrac{d\zeta}{dy}-p\dfrac{d\xi}{dy}-q\dfrac{d\eta}{dy} \\ R=\dfrac{dP}{dx}-r\dfrac{d\xi}{dx}-s\dfrac{d\eta}{dx}\ , \quad T=\dfrac{dQ}{dy}-s\dfrac{d\xi}{dy}-t\dfrac{d\eta}{dy} \\ S=\dfrac{dP}{dy}-r\dfrac{d\xi}{dy}-s\dfrac{d\eta}{dy}=\dfrac{dQ}{dx}-s\dfrac{d\xi}{dx}-t\dfrac{d\eta}{dx}\ . \end{cases}$$

i simboli $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$ rappresentando derivazione totale rapporto a x o a y.

Nel caso del gruppo G_6 di movimenti, colle 6 trasformazioni infinitesime:

$$X_1f=\frac{\partial f}{\partial x}\ , \qquad X_2f=\frac{\partial f}{\partial y}\ , \qquad X_3f=\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4f=y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\ , X_5f=z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}\ , X_6f=x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x},$$

prolungando queste due volte, facendo uso delle (34), (35), troviamo:

$$X_1^{(2)}f=\frac{\partial f}{\partial x}\ , \qquad X_2^{(2)}f=\frac{\partial f}{\partial y}\ , \qquad X_3^{(2)}f=\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4^{(2)}f=y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial p}-p\frac{\partial f}{\partial q}+2s\frac{\partial f}{\partial r}+(t-r)\frac{\partial f}{\partial s}-2s\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$X_5^{(2)}f=z\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial z}-pq\frac{\partial f}{\partial p}-(1+q^2)\frac{\partial f}{\partial q}-(2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial r}-$$

$$-(2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial s}-3qt\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$X_6^{(2)}f=x\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial x}+(1+p^2)\frac{\partial f}{\partial p}+pq\frac{\partial f}{\partial q}+3pr\frac{\partial f}{\partial r}+$$

$$+(2ps+qr)\frac{\partial f}{\partial s}+(2qs+pt)\frac{\partial f}{\partial t}$$

Esistono dunque due invarianti differenziali del 2° ordine che sono soluzioni in p, q, r, s, t del sistema delle tre equazioni che si ottengono da $X_4^{(2)}, X_5^{(2)}, X_6^{(2)}$

sopprimendo i termini in $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ ed eguagliando a zero.

Si verifica facilmente che per questi due invarianti possono prendersi le note espressioni

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

$$H = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

della curvatura totale (o di Gauss) K e della curvatura media H che sono il prodotto e la somma delle due curvature principali $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ - Naturalmente potrebbero anche prendersi per questi due invarianti le curvature stesse principali $\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}$ o le loro inverse, ossia i raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2

Prolungando una terza volta $X_1 f \ldots X_6 f$ per trovare gli invarianti differenziali del 3º ordine, crescerebbe di 4 il numero delle variabili (derivate del 3º ordine di z) e però ai due invarianti del 2º ordine H, K se ne aggiungono 4 del 3º ordine. per questi possono prendersi le derivate delle curvature principali rispetto agli archi delle linee di curvatura, come è chiaro geometricamente -

Capitolo X°

I gruppi continui finiti sopra una o sopra due variabili –

§. 122
Numero dei parametri in un gruppo sopra una variabile

Colle teorie svolte nei precedenti nove capitoli abbiamo posto i fondamenti della teoria generale dei gruppi continui finiti – Vogliamo ora passare ad occuparci di alcune classi speciali di gruppi ed in primo luogo esporremo la determinazione, effettuata da Lie, di tutti i tipi possibili di gruppi continui finiti sopra una e sopra due variabili, (*) ove si computano come appartenenti allo stesso tipo tutti e soli i gruppi simili fra di loro

Per i gruppi sopra una sola variabile, o come di.

(*) Anche la determinazione di tutti i possibili gruppi continui finiti nello spazio (su tre variabili) è stata effettuata da Lie. (Theorie der Transformationsgruppen III Kap. 7) cemo pei gruppi sulla retta. Lie ha ottenuto il singolare risultato che il numero r dei parametri di un tale gruppo non può superare il numero 3 e che il gruppo è necessariamente simile al gruppo proiettivo sopra una variabile o ad un suo sottogruppo.

Questo risultato è tanto più notevole che appena il numero n delle variabili è >1 esistono certamente gruppi con quanti si vogliano parametri, p. e. il gruppo Abeliano

$$G_r \equiv \left(\varphi_1 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \varphi_2 \frac{\partial f}{\partial x_n}, \dots \varphi_r \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

dove $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_r$ sono r funzioni arbitrarie delle prime $n-1$ variabili $x_1 \dots x_{n-1}$, soggette solo alla condizione di essere linearmente indipendenti. Le equazioni finite di un tale gruppo sono evidentemente

$$x_1' = x_1,\ x_2' = x_2 \dots x_{n-1}' = x_{n-1},\ x_n' = x_n + e_1 \varphi_1 + e_2 \varphi_2 \dots + e_r \varphi_r$$

La prima parte del teorema di Lie sopra enunciato, che cioè per un gruppo G_r sopra una sola variabile x sia necessariamente $r \leq 3$, risulta facilmente da quanto abbiamo esposto ai §§ 38, 39 rispetto alla distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici di un gruppo. Per un punto generico $x = x^{(0)}$ si avranno infatti

r_0 trasformazioni d'ordine zero

r_1 " " uno

r_2 " " 2

I numeri r sono tutti diversi da zero, ma nel caso attuale di una sola variabile, se si rammenta che

$$r_0\ ,\ r_0+r_1\ ,\ r_0+r_1+r_2\ \ldots\ldots$$

sono le rispettive caratteristiche delle matrici

$$\mathfrak{M}_0=\begin{Vmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{21}\\ \vdots\\ \xi_{r1}\end{Vmatrix}\ ,\quad \mathfrak{M}_1=\begin{Vmatrix}\xi_{11} & \xi'_{11}\\ \vdots & \vdots\\ \xi_{r1} & \xi'_{r1}\end{Vmatrix}\ ,\quad \mathfrak{M}_2=\begin{Vmatrix}\xi_{11} & \xi'_{11} & \xi''_{11}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \xi_{r1} & \xi'_{r1} & \xi''_{r1}\end{Vmatrix}$$

\- - - - - - - -

che non possono crescere che di un' unità, si vede che tutte le r sono $=1$, cioè:

Un gruppo G_r sopra una variabile ha per un punto generico una sola trasformazione di ciascuno degli ordini

$$0,\ 1,\ 2 \ldots\ldots r-1$$

e nessuna d'ordine superiore.

D'altra parte ricorriamo alla proprietà dimostrata al §. 37 che se Xf, Yf sono due trasformazioni infinitesime degli ordini h, k la trasformazione alternata (XY) è <u>almeno</u> d'ordine $h+k-1$, che qui, nel caso di una sola variabile, completiamo con l'osservazione: se $h \neq k$ la trasformazione (XY) è effettivamente d'ordine $h+k-1$ –

E infatti se sviluppando in serie di potenze di $x-x_0$ abbiamo (omettendo i termini di grado superiore)

$$Xf=\{a(x-x_0)^h+\ldots\}\frac{df}{dx}\qquad a\neq 0$$

$$Yf = \left\{ b(x-x_0)^k + \dots \right\} \frac{df}{dx} \qquad b \neq 0$$

risulta

$$(XY) = \left\{ ab(k-h)(x-x_0)^{h+k-1} + \dots \right\} \frac{df}{dx}$$

ed è $ab(k-h) \neq 0$ –

Le due trasformazioni d'ordine $r-2$, $r-1$ danno dunque formando l'espressione alternata, una trasformazione d'ordine $= 2r-4$, e perciò

$$2r-4 \leq r-1$$

da cui appunto

$$r \leq 3 \qquad c.d.d.$$

Ne concludiamo. Un gruppo G_r sopra una sola variabile non può possedere più di 3 parametri.

§. 123
Riduzione dei gruppi sopra una variabile a gruppi projettivi

Veniamo ora alla seconda parte del teorema, cioè a dimostrare che i gruppi sopra una variabile sono tutti simili a gruppi projettivi.

1° Se si tratta di un gruppo ad un sol parametro, si ha un'unica trasformazione infinitesima d'ordine zero che, con un cangiamento di variabile, possiamo ridurre alla forma

$$Xf = \frac{df}{dx}$$

e il gruppo generato è il gruppo di traslazioni

$$x' = x + a \qquad (\text{cf. } \S 9)$$

2º Il numero r dei parametri sia $= 2$. Le due trasformazioni generatrici d'ordine zero e uno rispettivamente si potranno scrivere

$$X_1 f = \{1 + a(x - x_0) + \cdots\} \frac{df}{dx}$$

$$X_2 f = \{(x - x_0) + \cdots\cdots\} \frac{df}{dx}$$

da cui

$$(X_1 X_2) = \{1 + b(x - x_0) + \cdots\} \frac{df}{dx}$$

Dovremo dunque avere

$$(X_1 X_2) = X_1 f + b X_2 f$$

e sostituendo $X_1 f + b X_2 f$ ad $X_1 f$, sarà

$$(1) \qquad (X_1 X_2) = X_1 f$$

Ora cangiando la variabile x facciamo, come sopra

$$X_1 f = \frac{df}{dx}$$

e sia

$$X_2 f = \xi \frac{df}{dx} ;$$

dovrà essere per la (1) $\frac{d\xi}{dx} = 1$, indi $\xi = x - x_0$. Il nostro gruppo G_2 è quindi generato dalle due trasformazioni

$$\frac{df}{dx} , \quad x \frac{df}{dx}$$

e coincide per ciò (§ 75) col gruppo delle sostituzioni lineari intere

$$x' = a_1 x + a_2$$

3° Sia in fine $r=3$ – Per le trasformazioni generatrici potremo prendere

$$X_1f=\left\{1+\dots\right\}\frac{df}{dx},\quad X_2f=\left\{(x-x_0)+\dots\right\}\frac{df}{dx},\quad X_3f=\left\{(x-x_0)^2\dots\right\}\frac{df}{dx}$$

onde

$$(X_1X_2)=\left\{1+\dots\right\}\frac{df}{dx},\quad (X_1X_3)=\left\{2(x-x_0)+\dots\right\}\frac{df}{dx},$$

$$(X_2X_3)=\left\{(x-x_0)^2+\dots\right\}\frac{df}{dx}.$$

Le formule di composizione prenderanno quindi la forma

$$(2)\quad (X_1X_2)=X_1f+aX_2f+bX_3f,\quad (X_1X_3)=2X_2f+cX_3f,\quad (X_2X_3)=X_3f$$

con a, b, c costanti. Alla X_1f sostituiamo

$$X'_1f=X_1f+\lambda X_2f+\mu X_3f \qquad (\lambda,\ \mu \text{ costanti})$$

ed avremo

$$\begin{aligned}(X'_1X_2)&=X_1f+aX_2f+bX_3f-\mu X_3f=\\&=X'_1f+(a-\lambda)X_2f+(b-2\mu)X_3f,\end{aligned}$$

onde facendo $\lambda=a$, $\mu=\frac{1}{2}b$ sarà

$$(X'_1X_2)=X'_1f$$

Possiamo dunque supporre nella (2) $a=0$, $b=0$ e dall'identità di Jacobi

$$((X_1X_2),X_3)+((X_2X_3),X_1)+((X_3X_1),X_2)=0$$

cioè

$$(X_1,X_3)+(X_3,X_1)-(2X_2+cX_3,X_3)=0$$

segue che anche $c=0$ – La composizione del nostro G_3 è adunque la seguente.

(3) $(X_1 X_2) = X_1 f \,,\; (X_2 X_3) = 2 X_2 f \,,\; (X_2 X_3) = X_3 f.$

Queste ci dimostrano che $X_1 f$, $X_2 f$ formano un sottogruppo G_2 del tipo esaminato nel caso precedente; possiamo quindi fare

$$X_1 f = \frac{df}{dx} \quad , \quad X_2 f = (x - x_0)\frac{df}{dx}$$

Le (3) danno quindi

$$\frac{d\xi}{dx} = 2(x - x_0) \quad , \quad (x - x_0)\frac{d\xi}{dx} = 2\,\xi$$

e perciò

$$\xi = (x - x_0)^2$$

Il nostro G_3 è dunque generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$\frac{df}{dx} \quad , \quad x\frac{df}{dx} \quad , \quad x^2\frac{df}{dx}$$

e coincide per ciò col gruppo generale projettivo della x (§ 75) -

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Ogni gruppo sopra una variabile può avere soltanto uno, o due o tre parametri. Nel primo caso esso è simile al gruppo di traslazioni

$$x' = x + a \,,$$

nel secondo al gruppo di sostituzioni lineari intere

$$x' = ax + b \,,$$

nel terzo al gruppo generale projettivo

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

§ 124
Gruppo lineare omogeneo G_4 su due variabili

Alla determinazione di tutti i possibili gruppi finiti su due variabili (del piano) è necessario premettere uno studio sul gruppo G_4 di sostituzioni lineari omogenee su due variabili

$$(4)\quad \begin{cases} x_1' = a_1 x + a_2 y \\ y_2' = a_3 x + a_4 y \end{cases}$$

e sui ~~suoi~~ sottogruppi - In primo luogo osservando che l'identità corrisponde ai valori $a_1 = a_4 = 1$, $a_2 = a_3 = 0$ dei parametri, calcoliamo subito la più generale trasformazione infinitesima del gruppo ponendo

(5) $a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t$, $a_2 = \alpha_2 \delta t$, $a_3 = \alpha_3 \delta t$. $a_4 = 1 + \alpha_4 \delta t$

con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ costanti arbitrarie, il che dà

$$\delta x = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\delta t$$
$$\delta y = (\alpha_3 x + \alpha_4 y)\delta t$$

onde

$$(6)\quad Xf = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\frac{\partial f}{\partial x} + (\alpha_3 x + \alpha_4 y)\frac{\partial f}{\partial y} = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)p + (\alpha_3 x + \alpha_4 y)q \text{ (*)}$$

Le quattro trasformazioni generatrici del gruppo

(*) D'ora innanzi adotteremo per brevità le notazioni $\frac{\partial f}{\partial x} = p$, $\frac{\partial f}{\partial y} = q$ -

sono dunque

$$xp\,,\ yp\,,\ xq\,,\ yq$$

Calcolando il gruppo derivato (§ 62) vediamo subito che esso è un G_3 generato dalle tre trasformazioni

$$(7)\qquad xq\,,\ xp-yq\,,\ yp$$

Dunque il nostro G_4 possiede per primo gruppo derivato questo G_3 che è quindi invariante in G_4 – Come sono caratterizzate fra le (4) le trasformazioni di questo G_3? – Diciamo da questo che nelle sostituzioni di G_3 il determinante $\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3$ è eguale all'unità – Ponendo infatti la condizione

$$\Delta = a_1 a_4 - a_2 a_3 = 1\,,$$

nella (5) $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ non sono più arbitrarie ma legate dalla condizione $\alpha_1 + \alpha_4 = 0$, ciò che riduce appunto la (6) ad una combinazione lineare delle (7) – Il gruppo G_3 dato dalle (4) quando $\Delta = 1$ dicesi il gruppo lineare omogeneo speciale, e la condizione $\Delta = 1$ rende già evidente che esso è invariante in G_4 – Dunque intanto: Il gruppo derivato del gruppo lineare omogeneo G_4 è il sottogruppo lineare speciale G_3.

Per le sostituzioni generatrici di G_3 prendiamo

$$(8)\qquad X_1 f = xq\,,\ X_2 f = xp - yq\,,\ X_3 f = yp$$

alle quali basterà aggiungere la quarta

$$(8^*)\qquad X_4 f = xp + yq$$

per avere tutte le trasformazioni infinitesime di G_4

Osserviamo intanto le formole di composizione

$$(9)\quad (X_1X_2)=-2X_1f\ ;\ (X_1X_3)=X_2f\ ,\ (X_2X_3)=-2X_3f$$

$$(X_1X_4)=(X_2X_4)=(X_3X_4)=0\,;$$

queste ci dicono che la trasformazione infinitesima X_4f è eccezionale cioè le trasformazioni del corrispondente G_1 sono permutabili colle singole di G_4, il che risulta anche evidente dalle formole finite di questo G_1

$$x'=(1+t)x\quad ,\ y'=(1+t)y$$

Le (9) dimostrano anche subito che la X_4f è l'unica trasformazione eccezionale in G_4, cioè il sottogruppo commutativo di G_4 è il G_1 sopra detto. - Scrivendo le trasformazioni generatrici di G_4 sotto la forma (8)(8*) mettiamo così in evidenza i due sottogruppi invarianti G_3, G_1, i quali sono, come ora si vedrà, gli unici sottogruppi invarianti in G_4.

Osserviamo ancora che considerando il G_3 come operante nel rapporto delle variabili, si ha

$$\frac{x'_1}{y'_1}=\frac{a_1\frac{x}{y}+a_2}{a_3\frac{x}{y}+a_4}\ ;$$

e risulta evidente che esso è oloedricamente isomorfo col gruppo projettivo sopra una variabile.

Per la ricerca dei varii tipi di sottogruppi in G_4 ci serviremo (secondo i risultati dei §§ 72, 73) del gruppo aggiunto. - Calcoliamone intanto colle formole (7) § 69 le trasformazioni infinitesime, osservando la composizione (9) del G_4 attuale e troveremo

$$(10)\quad E_1 f = 2e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1} - e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2}\ ,\quad E_2 f = -2e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + 2e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3}$$

$$E_3 f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - 2e_2 \frac{\partial f}{\partial e_3}\ ,\quad E_4 f = 0$$

Come si vede, questo gruppo aggiunto è un Γ_3, ciò che era prevedibile avendo il G_4 per sottogruppo commutativo il $G_1 = X_4 f$.

§ 125
Sottogruppi invarianti e sottogruppi G_1 di G_4

Per trovare i varii tipi di sottogruppi del G_4 (*) applicheremo ora le regole generali stabilite al § 73, riguardando $e_1 : e_2 : e_3 : e_4$ come coordinate omogenee nell'S_3. In primo luogo dovremo determinare le varietà minime invarianti rispetto al gruppo aggiunto Γ_3 in questo spazio. Dovremo perciò (cf. § 73) aggregare alle generatrici

(*) Come al paragrafo 72 diciamo appartenere ad uno stesso tipo due sottogruppi di un gruppo quando sono affini nel gruppo.

$$E_1 f,\ E_2 f,\ E_3 f$$

di Γ_3 la

$$E'f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial e_2} + e_3 \frac{\partial f}{\partial e_3} + e_4 \frac{\partial f}{\partial e_4}$$

e studiare, nel modo ordinario, le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$\Gamma_4 \equiv (E_1 f, E_2 f, E_3 f, E'f).$$

Il determinante

$$\begin{vmatrix} 2e_2 & -e_3 & 0 & 0 \\ -e_1 & 0 & e_2 & 0 \\ 0 & e_1 & -2e_2 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}$$

è di caratteristica $= 3$, onde Γ_4 è intransitivo. Esso possiede un solo invariante, pel quale può prendersi

$$J = \frac{e_2^2 + e_1 e_3}{e_4^2};$$

le varietà minime invarianti corrispondenti sono le quadriche del fascio

$$(11) \qquad \lambda(e_2^2 + e_1 e_3) + \mu e_4^2 = 0,$$

dove sono da considerarsi a parte i casi limiti $\lambda = 1$ $\mu = 0$, $\lambda = 0$ $\mu = 1$, che danno il cono

$$(12) \qquad e_2^2 + e_1 e_3 = 0,$$

ed il piano doppio

$$(13) \qquad e_4^2 = 0$$

Le altre varietà invarianti si ottengono, come sappiamo, eguagliando a zero i minori dello stesso ordine del detto determinante.

I determinanti del 3° ordine danno la varietà invariante

(14) $$e_2^2 + e_1 e_3 = 0 \quad , \quad e_4 = 0 ,$$

che è la conica d'intersezione del cono (12) col piano invariante $e_4 = 0$ —

Gli altri minori danno, come unica varietà invariante, il punto $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, cioè il vertice del cono, che corrisponde alla trasformazione infinitesima eccezionale $X_4 f$ di G_4 —

Fra le varietà invarianti trovate ne figurano due sole lineari, il piano $e_4 = 0$ ed il punto $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, che corrispondono rispettivamente al gruppo derivato G_3 ed al sottogruppo commutativo G_1. Per quanto si è visto al § 73 possiamo concluderne intanto: Gli unici sottogruppi invarianti di G_4 sono il sottogruppo G_3 derivato (gruppo lineare speciale) ed il sottogruppo commutativo G_1, come sopra avevamo enunciato —

Volendo ora enumerare tutti i possibili tipi di sottogruppi ad un parametro di G_4 basterà scegliere sopra ciascuna della varietà invarianti un punto ad arbitrio come rappresentante del tipo, purché non cada sopra una varietà invariante minore —

Scegliamo: 1° il punto invariante $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, cui corrisponde la trasformazione infinitesima eccezionale $xp + yq$ —

2° il punto $(1, 0, 0, 1)$ sul cono (12), colla trasforma zione corrispondente $xq + xp + yq$.

3º il punto $(1, 0, 0, 0)$ sulla conica (14), cui corrisponde xq -

4º il punto $(0, \frac{1}{2}, 0, c + \frac{1}{2})$ sulla quadrica (11) corrispondente al valore $\frac{\lambda}{\mu} = -(2c+1)^2$, con c costante essenziale, differente però da $-\frac{1}{2}$, altrimenti saremmo nel piano $e_4 = 0$.

5º il punto $(0, 1, 0, 0)$ sul piano $e_4 = 0$, che corrisponde a fare $c = -\frac{1}{2}$ nel caso precedente.

Così i due ultimi casi si riuniscono in un solo tipo, dipendente da una costante arbitraria c; quindi damo in realtà ∞^1 tipi distinti rappresentati dalla trasformazione infinitesima

$$(c + \tfrac{1}{2}) X_4 f - \tfrac{1}{2} X_2 f = c\,xp + (c+1)\,yq$$

Riepilogando abbiamo in G_4 i quattro tipi di sottogruppi ad un parametro

$$\boxed{xp + yq}\ ,\quad \boxed{xq + (xp + yq)}\ ,\quad \boxed{xq}\ ,\quad \boxed{c\,xp + (c+1)\,yq}$$

l'ultimo dei quali contiene ∞^1 tipi distinti corrispondenti ai valori della costante essenziale c. Ogni altro sottogruppo ad un parametro è affine in G_4 ad uno di questi. -

§ 126
Sottogruppi G_2 a due parametri di G_4

Per classificare i sottogruppi a due parametri di G_4, cominciamo dal ricercare quelli Abeliani, le cui due trasformazioni infinitesime

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f + e_4 X_4 f$$
$$\bar{X} f = \bar{e}_1 X_1 f + \bar{e}_2 X_2 f + \bar{e}_3 X_3 f + \bar{e}_4 X_4 f$$

sono permutabili, cioè danno

$$(X, \bar{X}) = 0$$

Per le formole di composizione (9) si ha

$$(15)\quad (X, \bar{X}) = 2(\bar{e}_1 e_2 - \bar{e}_2 e_1) X_1 f + (e_1 \bar{e}_3 - e_3 \bar{e}_1) X_2 f + $$
$$+ 2(\bar{e}_2 e_3 - \bar{e}_3 e_2) X_3 f,$$

onde Xf, $\bar{X}f$ saranno permutabili quando sia

$$e_1 : e_2 : e_3 = \bar{e}_1 : \bar{e}_2 : \bar{e}_3$$

Osservando l'immagine geometrica in S_3^7, si ha: Due trasformazioni infinitesime di G_4 sono permutabili solo quando i loro punti immagine in S_3 sono allineati coll'origine $(0, 0, 0, 1)$ vertice del cono

Ne risulta che i sottogruppi Abeliani G_2 di G_4 sono rappresentati da tutte e sole le rette per l'origine — Osservando poi che sui punti del piano (invariante) $e_4 = 0$ il gruppo aggiunto Γ_3 agisce transitivamente, salvo che per i punti della conica (14), che si scambiano transitivamente sulla conica stessa, si conclude che questi G_2 Abeliani si distinguono in due tipi rappresentati il primo da una generatrice qualunque del cono, il secondo da un'altra retta qualunque per l'origine - Come rappresentanti di questi due tipi possono prendersi p. e. i due

$$\boxed{xq\,,\ xp+yq}\ ,\qquad \boxed{xp-yq\,,\ xp+yq}$$

Rimangono a trovare i sottogruppi G_2 non Abeliani di G_4 e classificarli in tipi.

Se $(X, \bar{X})$ è un tale sottogruppo, i due punti immagine $e_1 : e_2 : e_3 : e_4$, $\bar{e}_1 : \bar{e}_2 : \bar{e}_3 : \bar{e}_4$ delle trasformazioni generatrici Xf, $\bar{X}f$ non sono in linea retta coll'origine e quindi le loro proiezioni dall'origine sul piano invariante $e_4 = 0$, cioè i due punti

(16) $(e_1\ e_2\ e_3\ 0)$, $(\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \bar{e}_3\ 0)$

sono distinti - La formola (15) dimostra che il punto immagine di $(X, \bar{X})$ trovasi sul piano $e_4 = 0$ ed è precisamente il polo della congiungente i due punti (16) rispetto alla conica (14) (cf. § 75) - Poichè le Xf, $\bar{X}f$ generino effettivamente un G_2 è necessario e sufficiente che $(X, \bar{X})$ sia una combinazione lineare omogenea, a coefficienti costanti, di Xf, $\bar{X}f$, che cioè il punto immagine di $(X, \bar{X})$ sia sulla retta che congiunge i punti immagine di Xf, $\bar{X}f$, retta immagine del detto sottogruppo G_2. Ma questo punto immagine di $(X, \bar{X})$ trovasi sul piano $e_4 = 0$ ed appartiene quindi alla congiungente

$$(e_1\, e_2\, e_3\, 0)\quad (\bar{e}_1\, \bar{e}_2\, \bar{e}_3\, 0),$$

la quale, dovendo passare pel proprio polo, sarà tangente alla conica in esso punto. Ne concludiamo:

I sottogruppi non Abeliani G_2 di G_4 sono rappresentati dalle rette appoggiate alla conica (14) ed ivi tangenti al cono (12), escluse le generatrici di esso cono.

Per distribuire questi sottogruppi in tipi conviene distribuire le rette ora indicate in classi di rette equivalenti rispetto al gruppo aggiunto. Intanto è evidente che formano un'unica classe le tangenti della conica (14), che le trasformazioni di Γ_4 scambiano transitivamente. Questa ci dà un primo tipo di sottogruppi G_2 non Abeliani, pel cui rappresentante possiamo prendere p. e.

$$\boxed{xq\ ,\ xp - yq}\ ,$$

rappresentato dalla tangente $e_3 = 0$ della conica (14).

Per le altre tangenti del cono (12), appoggiate alla conica (14), osserviamo che, siccome tutte le quadriche del fascio (11) toccano lungo quella conica il cono (12), esse non sono altro che le generatrici delle quadriche (11).

Il gruppo aggiunto agisce transitivamente sui punti di ogni quadrica (11) (eccetto che pei punti della conica) e scambia quindi transitivamente tutte le generatrici di un medesimo sistema fra di loro — Qui abbiamo dunque ∞^1 tipi di sottogruppi G_2 non Abeliani corrispondenti alle ∞^1 quadriche del fascio (11) e per ciascuna quadrica due tipi distinti forniti l'uno da una generatrice di un sistema l'altro da una generatrice dell'altro — Per ciascuna quadrica possiamo scegliere le dette due generatrici p.e. nel piano $e_3=0$ tangente al cono ed alla quadrica — Se poniamo

$$\frac{\lambda}{\mu}=-c^2,$$

abbiamo per tipo del sottogruppo G_2 corrispondente

$$\boxed{xq\,.\;xp-yq+c(xp+yq)}\;,$$

a valori eguali ed opposti di $\underline{c}$ corrispondono le due diverse generatrici della quadrica e quindi tipi distinti — Così gli ∞^1 di sottogruppi G_2 non Abeliani sono rappresentati dal G_2 precedente; valori distinti di $\underline{c}$ danno tipi distinti ed al valore $c=0$ corrisponde il tipo rappresentato dalle tangenti della conica —

§ 127
Sottogruppi G_3 di G_4 e riepilogo

Per terminare colla classificazione di tutti i tipi di sottogruppi in G_4 altro non ci resta che esaminare i sottogruppi G'_3 a tre parametri. Un tale sottogruppo è rappresentato in ogni caso da un piano, il quale può coincidere col piano $e_4=0$ od esserne distinto. Nel primo caso esso rappresenta precisamente il G_3 derivato

$$\boxed{xq\,,\,xp-yq\,,\,yp}$$

cioè il gruppo lineare speciale. Se il piano π immagine di un sottogruppo G'_3 è distinto dal piano $e_4=0$, taglia questo piano secondo una retta che è immagine di ∞^2 trasformazioni comuni ai due sottogruppi G_3, G'_3 cioè di un sottogruppo G_2; la detta retta è dunque tangente alla conica (14). Se prendiamo poi un qualunque sottogruppo $(X, \overline{X})$ a due parametri di G_2, o i punti immagini di Xf, $\overline{X}f$ sono allineati col vertice del cono, o si projettano sul piano $e_4=0$ in due punti distinti della tangente considerata (v. sopra); in tutti i casi dunque il piano π deve contenere una tangente della conica e passare pel vertice del cono, cioè π deve essere un piano tangente del cono. Viceversa ogni tale piano è immagine di un G'_3 di G_4 - Dicendo: tutti i piani tangenti al cono sono equivalenti rispetto al gruppo aggiunto questi G'_3 formano un unico tipo rappresentato p. e. dal piano

$$e_3 = 0$$

ciò che dà il sottogruppo

$$\boxed{xq\ ,\ xp-yq\ ,\ xp+yq}$$

Riepiloghiamo la nostra discussione nel seguente teorema:

I sottogruppi del gruppo lineare omogeneo

$$G_4 \equiv (xq,\ xp-yq\ ,\ yp,\ xp+yq)$$

sono affini nel gruppo ai seguenti sottogruppi:

1º I sottogruppi G_3 a tre parametri o al gruppo lineare speciale (gruppo derivato-invariante),

$$\boxed{xq\ ,\ xp-yq\ ,\ yp}$$

o all' altro

$$\boxed{xq\ ,\ xp-yq\ ,\ xp+yq}$$

2º Ogni sottogruppo G_2 trova il suo affine o fra i due

$$\left.\boxed{xq\ ,\ xp+yq}\qquad \boxed{xp-yq\ ,\ xp+yq}\ \right\}\ \text{Abeliani}$$

o fra gli altri ∞^1 rappresentati da

$$\boxed{xq\ ,\ xp-yq+c(xp+yq)}$$

con $\underline{c}$ costante essenziale

3º Un sottogruppo G_1 è affine ad uno dei quattro seguenti

$$\boxed{xq + xp + yq} \qquad \boxed{xq} \qquad \boxed{cxp + (c+1)yq}$$

$$\boxed{xp + yq}$$

ove il terzo, che contiene la costante c essenziale, rappresenta ∞^1 tipi distinti.

È importante osservare (per l'applicazione al problema principale che abbiamo in vista nel presente capitolo) che i raggi del fascio col centro nell'origine $x=0$, $y=0$ nel piano xy vengono trasformati da G_4 e dai suoi sottogruppi secondo il gruppo projettivo sopra una variabile (parametro del fascio) od un suo sottogruppo. Ma fra questi: soltanto il G_4 stesso ed il suo sottogruppo derivato (gruppo lineare speciale G_3) trasformano il fascio per l'origine secondo il gruppo generale projettivo.

§ 128

Criterio per distinguere i gruppi primitivi su due variabili dagli imprimitivi

Nella risoluzione del problema che ci siamo proposti di costruire tutti i possibili tipi di gruppi del piano, conviene separare la determinazione dei gruppi primitivi da quella degli imprimitivi.

I primi si determinano, come si vedrà, con considerazioni sugli ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici analoghe a quelle che ai §§ 122, 123 ci hanno condotto alla risoluzione del problema più semplice pel caso di una sola variabile; pei gruppi imprimitivi invece occorrono considerazioni speciali che svolgeremo più avanti.

Ai §§ 51, 52 abbiamo già parlato della imprimitività dei gruppi in generale e stabiliti dei criterii relativi dipendenti dagli eventuali sistemi completi che ammettono il gruppo. Vogliamo ora, nel caso speciale dei gruppi su due variabili, spingere molto più avanti questa ricerca e trovare dei criterii che, alla semplice ispezione delle trasformazioni infinitesime del gruppo, permettono di riconoscere se il gruppo è primitivo o imprimitivo.

Consideriamo un gruppo G_r qualunque nel piano (x, y) ed il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 del piano che sarà un G_{r-2} ovvero un G_{r-1} secondo che il gruppo G_r è transitivo o intransitivo (*). Il fascio degli elementi lineari uscenti da P_0 viene trasformato dal sottogruppo di stabilità secondo un gruppo projettivo, che può

(*) Si ricordi che qui si ha o $\tau_0 = 2$ (gruppi transitivi) o $\tau_0 = 1$ (gruppi intransitivi).

essere il gruppo generato a tre parametri, ovvero un suo sottogruppo che può anche ridursi all'identità-

Dimostriamo che nel primo caso il gruppo G_r sarà primitivo, nel secondo imprimitivo-

E infatti se G_r è imprimitivo, vi è almeno una divisione del piano in curve d'imprimitività. Il sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 lascia fissa quella curva γ d'imprimitività che esce da P_0 e perciò anche l'elemento lineare in P_0 di essa curva - In tal caso adunque gli elementi lineari uscenti da P_0 non possono essere trasformati dal gruppo generale projettivo perchè non vi sarebbe allora alcun elemento fisso per tutte quelle trasformazioni. Se ne conchiude appunto che se il sottogruppo di stabilità di un punto generico P_0 agisce sugli elementi lineari per P_0 secondo il gruppo generale projettivo, il G_r è certamente primitivo-

Ma supponiamo ora al contrario che il detto sottogruppo di stabilità di P_0 agisca sugli elementi lineari per P_0 secondo un gruppo (projettivo) ad uno o a due parametri soltanto. Per ogni punto P_0 avremo allora uno o due elementi lineari speciali che rimarranno invariati per tutte le trasformazioni del sottogruppo di stabilità (cf. §75) - Esisterà quin di uno, ovvero esisteranno due sistemi ∞^1 di curve piane, i cui elementi lineari per ogni punto P_0 coincideranno con quegli elementi lineari fissi - D'altra parte ogni trasformazione di G_r che porti P_0 in un punto Q_0 trasforma il sottogruppo di stabilità di P_0 in quello di Q_0 e quindi gli elementi lineari fissi per P_0 in quelli per Q_0 - Risulta da ciò che per qualunque trasformazione di G_r una curva γ del sistema ∞^1 sopra considerato (o di uno dei due sistemi) si cangia in un'altra curva del sistema stesso - Quel sistema ∞^1 di curve è adunque un sistema d'imprimitività; il gruppo è imprimitivo, c. d. d.

Nel caso infine che il sottogruppo di stabilità lasci fissi tutti gli elementi lineari per P_0, si vede subito che esistono ∞^1 sistemi di curve d'imprimitività se il gruppo è transitivo, ed invece ∞^∞ se è intransitivo -

Così adunque riassumendo abbiamo:

Un gruppo G_r del piano è primitivo od imprimitivo secondo che dal sottogruppo di stabilità relativo ad un punto generico P_0 gli elementi lineari del fascio uscenti da P_0 vengono trasformati dal gruppo generale projettivo a tre parametri, ovvero da un suo sottogruppo.

Ora abbiamo un mezzo molto semplice, date le trasformazioni infinitesime generatrici di G_r, per decidere se ha luogo l'uno o l'altro caso -

Per questo basterà, secondo quanto si è visto al § 114, calcolare i termini di primo grado degli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore, ciò che darà secondo le formole (16) o (17) del citato § 114 le trasformazioni infinitesime $I_k F$ del gruppo lineare omogeneo sulle coordinate omogenee $x^{(1)}, y^{(1)}$ dell'elemento lineare per P_0. Per l'osservazione alla fine del paragrafo precedente, se questo gruppo sarà il gruppo lineare omogeneo totale G_4, ovvero il gruppo lineare speciale G_3, il gruppo G_r sarà primitivo, altrimenti imprimitivo.

Si conclude intanto di qui che per un gruppo primitivo su due variabili i numeri caratteristici (generici) τ nella distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime possono offrire pei due primi τ_0, τ_1 solo i due casi seguenti

a) $\tau_0 = 2 \quad , \quad \tau_1 = 4$

b) $\tau_0 = 2 \quad , \quad \tau_1 = 3$

Nel caso a) il gruppo è certamente primitivo; nel caso b) solo quando non figuri nel gruppo lineare omogeneo G_3 la trasformazione infinitesima eccezionale

$$x^{(1)}p^{(1)} + y^{(1)}q^{(1)}$$

In ogni caso si vede che per decidere della primitività od imprimitività dei gruppi a due variabili basta il calcolo dei termini di grado zero ed uno negli sviluppi in serie delle sue trasformazioni infinitesime - In particolare basta la conoscenza delle equazioni di definizione del gruppo -

§. 129
Ordine massimo delle trasformazioni infinitesime di un gruppo primitivo

---

Servendoci dei risultati ora ottenuti, andiamo a cercare la forma dei primi termini degli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime di un gruppo G_r a due variabili, supposto primitivo - Per semplicità supporremo che l'origine $x=0$, $y=0$ sia un punto generico, dove cioè i numeri τ conservano i loro valori generici, e svilupperemo quindi in serie di potenze di x, y -

Avremo in primo luogo $\tau_0 = 2$ trasformazioni d'ordine zero, alle quali sostituendo due loro convenienti combinazioni lineari, potremo dare la forma

$$\begin{cases} X_1 f = p + \dots \\ X_2 f = q + \dots \end{cases}$$

Prendiamo ora una delle $\tau_0 - 4$, o delle $\tau_0 = 3$, ~~tra~~ sformazioni del 1° ordine e sia

$$\mathfrak{X}f = (\alpha x + \beta y)p + (\gamma x + \delta y)q + \dots$$

La corrispondente trasformazione lineare omogenea LF sulle coordinate (omogenee) $x^{(1)}, y^{(1)}$ degli elemen si lineari per l'origine è data (§ 114) da

$$\mathcal{L}F = (\alpha x^{(1)} + \beta y^{(1)}) p^{(1)} + (\gamma x^{(1)} + \delta y^{(1)}) q^{(1)}$$

e siccome nel gruppo delle $\mathcal{L}$ debbono figurare o le quattro

$$x^{(1)}q^{(1)}, \quad x^{(1)}p^{(1)} - y^{(1)}q^{(1)}, \quad y^{(1)}p^{(1)}, \quad x^{(1)}p^{(1)} + y^{(1)}q^{(1)}$$

generatrici del gruppo omogeneo totale G_4 o le tre prime generatrici del gruppo lineare speciale, a seconda che avrà luogo il caso a) o b) del paragrafo precedente potremo supporre nel G_r o le 6 trasformazioni

$$\mathrm{I)}\ \begin{cases} X_1 f = p + \cdots, X_2 f = q + \cdots, X_3 f = xq + \cdots, X_4 f = xp - yq + \cdots \\ X_5 f = yp + \cdots, X_6 f = xp + yq + \cdots \end{cases}$$

con trasformazioni d'ordine superiore al primo o le 5

$$\mathrm{II)}\ \begin{matrix} X_1 f = p + \cdots \quad X_2 f = q + \cdots, X_3 f = xq + \cdots, X_4 f = xp - yq + \cdots \\ X_5 f = yp + \cdots \end{matrix}$$

con altre trasformazioni d'ordine superiore al primo

Cominciamo dal dimostrare che in ambedue i casi le altre trasformazioni infinitesime del gruppo d'ordine superiore al primo, se pure esistono, saranno precisamente d'ordine $s = 2$. Sia $\mathfrak{X}f$ una trasformazione infinitesima d'ordine massimo s nel gruppo, poniamo

$$(17) \qquad \mathfrak{X}f = \xi_s p + \eta_s q + \cdots$$

dove ξ_s, η_s sono forme di grado s in x, y, non am bedue nulle - Poniamo p. e. che sia $\xi_s \neq 0$ (ciò che può farsi potendosi, nel caso $\xi_s = 0$, scambiare x con y); e dimostriamo da prima che vi sarà pure in G_r una trasformazione infinitesima dello stesso ordine s, ove la ξ_s non nulla non conterrà la y, cioè si ridurrà alla potenza x^s - Supposto che nella (17) la ξ_s contenga la y col grado massimo $k>0$, avremo in G_r anche la

$$(X_s \mathfrak{X}) = x\frac{\partial \xi_s}{\partial y} p + \left(x\frac{\partial \eta_s}{\partial y} - \xi_s\right) q + \cdots$$

che è di ordine s ma nella quale il nuovo $\overline{\xi}_s = x\frac{\partial \xi_s}{\partial y}$ contiene la y al massimo grado $k-1$ senza esser nullo.

Ripetendo successivamente l'operazione, faremo sparire la y da ξ_s onde avremo in G_r una trasformazione infinitesima della forma

$$Yf = x^s p + \eta_s q + \cdots$$

Esisterà quindi in G_r anche la

$$Y_1 f = (X, Y) = s x^{s-1} p + \eta_{s-1} q + \cdots$$

d'ordine $s-1$ e quindi anche la

$$(Y Y_1) = -s x^{2s-2} p + \eta_{2s-2} q + \cdots$$

che, senza esser nulla, è d'ordine $2s-2$ - Dunque poichè s è l'ordine massimo, sarà $2s-2 \leq s$, cioè $s \leq 2$ c. d. d.

Concludiamo: Un gruppo primitivo su due variabili non ammette, per un punto generico del piano, trasformazioni infinitesime d'ordine superiore al secondo.

§ 130

Numero dei parametri di un gruppo primitivo nel piano

Proseguendo la ricerca superiore, andiamo ora a cercare se e quali trasformazioni di 2° ordine possono essere contenute nel gruppo e per prima cosa proviamo che ciò può accadere solo nel caso I), mentre nel caso II) questo non è certamente, e quindi in questo ultimo caso il gruppo ha 5 soli parametri.

Poniamo infatti che esista nel caso II) una trasformazione di 2° ordine: per ciò che si è visto al paragrafo precedente ne esisterà anche una della forma

$$(18) \qquad Vf = x^2p + (ax^2 + bxy + cy^2)q + \cdots$$

che combinata con $X_1f = p + \cdots$, $X_2f = q + \cdots$ dà le trasformazioni del 1° ordine

$$(X_1 V) = 2xp + (2ax + by)q + \cdots$$

$$(X_2 V) = (bx + 2cy)q + \cdots$$

ed anche combinando linearmente con X_3f, X_4f le due

$$(b+2)yq + \cdots$$
$$cyq + \cdots$$

Ne segue $b=-2$, $c=0$; altrimenti avremmo nel gruppo la

$$yq + \cdots$$

e però anche

$$xp - yq + \cdots + 2(yq + \cdots) = xp + yq + \cdots$$

e saremmo nel caso I) ~~IV)~~. Dunque

$$Vf = x^2p + (ax^2 - 2xy)q + \cdots$$

che, combinata con $X_3f = xq + \cdots$, dà

$$(X_3V) = -3x^2q + \cdots$$

Avremmo dunque nel gruppo anche

$$V_1f = x^2q + \cdots$$

e quindi

$$(VV_1) = 4x^3q + \cdots$$

che sarebbe del 3° ordine - Dunque solo nel caso I) può entrare nel gruppo una trasformazione di 2° ordine - Ora vogliamo vedere quante possono entrarvene di 2° ordine e di che forma - Supposto che ve ne sia qualcuna, ve ne sarà anche una Vf della forma (18) - Combinandola con $Zf = xp = \frac{1}{2}(X_4f + X_6f)$ che è nel gruppo I), vi sarà anche

$$(ZV) = x^2p + (2ax^2 + bxy)q + \cdots$$

quindi anche, sottraendovi V, la

$$\bar{V}f = (ax^2 - cy^2)q + \cdots,$$

che combinata alla sua volta con Zf dà

$$(Z\bar{V}) = 2ax^2q + \cdots$$

Esistono dunque nel gruppo le due

$$ax^2q + \cdots$$
$$cy^2q + \cdots$$

e quindi sottraendo da V la

$$V_2 f = x^2 p + bxyq + \cdots$$

Combinando $V_1 f$ con $X_3 f = xq + \cdots$ si ha nel gruppo

$$V_2 f = (V_1 X_3) = (1-b)x^2 q + \cdots$$

e quindi anche

$$(V_1 V_2) = (b^2 - 3b + 2)x^3 q \cdot \cdots$$

che è del 3º ordine se $b^2 - 3b + 2 \neq 0$, dunque o $b=1$ o $b=2$.

Il secondo caso si esclude subito perché si avrebbe in G_2 la

$$-V_2' f = x^2 q + \cdots$$

e però anche

$$(X_5, V_2) = (yp + \cdots, -x^2 q + \cdots) = x^2 p - 2xyq + \cdots$$

che corrisponderebbe nella $V_1 f$ al valore inammissibile $b=-2$.

Dunque abbiamo in G_2 la

$$(19) \qquad V_1 f = x^2 p + xyq + \cdots$$

e però anche

$$(19^*) \qquad \overline{V}_1 f = (X_5, V_1) = xyp + y^2 q + \cdots$$

Diciamo ora che non possono esistere in G_2 altre trasformazioni di 2º ordine, oltre le due (19), (19*). Se ne esistesse un'altra, combinandola linearmente con $V_1 f$, $\overline{V}_1 f$ si potrebbe ridurre alla forma:

$$Uf = Ay^2 p + (Bx^2 + Cxy + Dy^2) q + \cdots \quad (A, B, C, D \text{ costanti})$$

Le trasformazioni alternate

$$(V_1 U), (\overline{V}_1 U)$$

sarebbero del 3º ordine, se non fossero identicamente nulle - Scrivendo la condizione

$$(V, U) = 0,$$

si vede subito che i termini di 3° grado nel coefficiente di q sarebbero

$$-Bx^3 + Cx^2y + Dxy^2 - Ay^3,$$

onde si conclude $A = B = C = D = 0$, e la Uf supposta non esiste -

Raccogliendo i risultati fin qui ottenuti abbiamo:

Un gruppo primitivo nel piano non può avere che 8, 6 o 5 parametri e le corrispondenti trasformazioni infinitesime, distribuite a seconda dei loro ordini, possono offrire i tre casi seguenti:

$$G_8\ A) \begin{cases} X_1f = p + \dots, X_2f = q + \dots, X_3f = xq + \dots, X_4f = xp - yq + \dots \\ X_5f = yp + \dots, X_6f = xp + yq + \dots, X_7f = x^2p + xyq + \dots, \\ X_8f = xyp + y^2q + \dots \end{cases}$$

$$G_6\ B) \begin{cases} X_1f = p + \dots, X_2f = q + \dots, X_3f = xq + \dots, X_4f = xp - yq + \dots, \\ X_5f = yp + \dots, X_6f = xp + yq + \dots \end{cases}$$

$$G_5\ C) \begin{cases} X_1f = p + \dots, X_2f = q + \dots, X_3f = xq + \dots, \\ X_4f = xp - yq + \dots, X_5f = yp + \dots \end{cases}$$

Osserviamo subito che l'esistenza di effettivi gruppi primitivi dei tre tipi è fuori di dubbio; perchè se si riduce ciascuna Xf alla $\bar{X}f$ che si ottiene serbando di

$X f$ ogni volta i termini di grado minimo, queste $\overline{X} f$ soddisfano alle condizioni del teorema principale

$$(\overline{X}_i \overline{X}_k) = \sum_s c_{iks} \overline{X}_s$$

e generano quindi un effettivo gruppo - Dimostreremo che i tre gruppi $\overline{G}_8$, $\overline{G}_6$. $\overline{G}_5$ così ottenuti sono gruppi projettivi e che ogni gruppo primitivo del piano è simile ad uno di questi -

§ 131

Riduzione dei gruppi primitivi a forma normale nel caso A)

Abbiamo scelto le trasformazioni infinitesime dei gruppi primitivi da determinarsi, in guisa che offrano nei loro termini di grado più basso i casi A) o B) o C).
Ma in questa scelta resta ancora molta indeterminazione potendosi evidentemente, senza nulla alterare, aggiungere a ciascuna $X f$ una combinazione lineare omogenea delle trasformazioni di grado superiore a quello di $X f$ - Ora dimostreremo che si possono modificare nel detto modo le $X f$ in guisa che le costanti di composizione per le $X_i f$ siano le stesse che per le trasformazioni accorciate $\overline{X}_i f$ - Con ciò resterà provato che ogni volta il gruppo G si può porre in relazione d'isomorfismo oloedrico col corrispondente

gruppo associato $\overline{G}$, p.e. il gruppo G_8 col gruppo

$$\overline{G}_8 = (p.\ q.\ xp-yq.\ yp.\ xp+yq.\ x^2p+xyq.\ xyp+y^2q),$$

il quale non è altro che il gruppo generale projettivo del piano (§ 133) - In ogni caso siccome G. $\overline{G}$ come gruppi primitivi sono certo asistatici (§ 54), essendo oloedricamente isomorfi saranno simili (§ 87) - Per tal modo risulterà che i gruppi primitivi del piano si riducono a tre soli tipi (projettivi) $\overline{G}_8$, $\overline{G}_6$, $\overline{G}_5$.

A) Cominciamo le operazioni indicate dal caso A), cercando di costruire le trasformazioni alternate $(X_i X_k)$.

In primo luogo osserviamo che formando queste espressioni alternate per le due di secondo ordine X_7f, X_8f combinate fra loro e con quelle di 1° ordine X_3f, X_4f, X_5f, X_6f la trasformazione risultante è almeno di 2° ordine (o nulla) - Le trasformazioni di 2° ordine essendo nel gruppo perfettamente fissate, ne segue che per queste prime espressioni alternate le costanti di composizione sono già le medesime che per le trasformazioni associate $\overline{X}f$ - Si ha quindi:

$$(20)\begin{cases}(X_3X_7)=0,\ (X_3X_8)=X_7,\ (X_4X_7)=X_7,\ (X_4X_8)=-X_8\\ (X_5X_7)=X_8,\ (X_5X_8)=0,\ (X_6X_7)=X_7,\ (X_6X_8)=X_8\,.\end{cases}$$

Combiniamo ora le trasformazioni di 1° ordine fra loro - Per le trasformazioni associate si ha:

$$(21)\begin{cases}(\overline{X}_3\overline{X}_4)=-2\overline{X}_3,\ (\overline{X}_3\overline{X}_5)=\overline{X}_4,\ (\overline{X}_3\overline{X}_6)=0,\ (\overline{X}_4\overline{X}_5)=-2\overline{X}_5\\ (\overline{X}_4\overline{X}_6)=0,\ (\overline{X}_5\overline{X}_6)=0\,.\end{cases}$$

quindi per le effettive X_f valgono le medesime espressioni a meno di una combinazione lineare omogenea di X_7, X_8 nei secondi membri. Così avremo

$$(X_3 X_6) = a X_7 + b X_8 \,,$$

e guardando alle (20)

$$(X_3 + a X_7 + b X_8, X_6) = 0$$

per cui prendendo $X_3 + a X_7 + b X_8$ in luogo di X_3 sarà $(X_3 X_6) = 0$ - Lo stesso vale evidentemente per X_4, X_5 combinate con X_6, onde potremo supporre X_3, X_4, X_5 già scelte in guisa da avere

$$(22) \quad (X_3 X_6) = 0 \,, \quad (X_4 X_6) = 0 \,, \quad (X_5 X_6) = 0$$

Osservando la prima delle (21) si avrà

$$(X_3 X_4) = -2X_3 + \alpha X_7 + \beta X_8$$

e dall'identità Jacobiana

$$((X_3 X_4), X_6) + ((X_4 X_6), X_3) + ((X_6 X_3), X_4) = 0$$

per le (22)

$$(-2X_3 + \alpha X_7 + \beta X_8, X_6) = \alpha (X_7, X_6) + \beta (X_8, X_6) =$$

$$= -\alpha X_7 - \beta X_8 = 0$$

da cui $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e però

$$(X_3 X_4) = -2X_3$$

e similmente

$$(X_3 X_5) = X_4 \,, \quad (X_4 X_5) = -2X_5$$

Valgono così tutte le (21) anche per le trasformazioni effettive X_f -

Passiamo ora alle combinazioni delle due trasformazioni X_1, X_2 d'ordine zero con tutte le altre - Per le ricorciato si ha:

$$(23)\begin{cases}(\bar X_1\bar X_2)=0,\ (\bar X_1\bar X_3)=\bar X_2,\ (\bar X_1\bar X_4)=\bar X_1,\ (\bar X_1\bar X_5)=0,\ (\bar X_1\bar X_6)=\bar X_1,\\ (\bar X_1\bar X_7)=\frac{1}{2}\bar X_4+\frac{3}{2}\bar X_6,\ (\bar X_1\bar X_8)=\bar X_5,\ (\bar X_2\bar X_3)=0,\ (\bar X_2\bar X_4)=-\bar X_2,\\ (\bar X_2\bar X_5)=\bar X_1,\ (\bar X_2\bar X_6)=\bar X_2,\ (\bar X_2\bar X_7)=\bar X_3,\ (\bar X_2\bar X_8)=\frac{3}{2}\bar X_4+\frac{1}{2}\bar X_6,\end{cases}$$

e cerchiamo di modificare X_1, X_2 in guisa che anche per le X_f abbiano luogo le stesse formole di composizione -

Osserviamo prima che si ha

$$(X_1X_6)=X_1+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5+a_6X_6+a_7X_7+a_8X_8,$$

essendo le $\underline{a}$ costanti, e sostituendo ad X_1 la

$$X_1'=X_1+a_3X_3+a_4X_4+a_5X_5+a_6X_6+\frac{1}{2}a_7X_7+\frac{1}{2}a_8X_8$$

verrà -

$$(X_1'X_6)=X_1'=X_f',$$

e tornando ad indicare X_1' con X_1 e modificando analogamente X_2, avremo

$$(X_1X_6)=X_1\quad,\quad(X_2X_6)=X_2.$$

Dopo ciò, servendosi della identità Jacobiana, è facile vedere che anche le altre formole di composizione per le X saranno le stesse che per le $\bar X$ nelle (23) - Così per (X_1X_7) avremo

$$(X_1X_7)=\frac{1}{2}X_4+\frac{3}{2}X_6+aX_7+bX_8$$

e scrivendo l'identità Jacobiana con X_6:

$$((X_1X_7),X_6)+((X_7X_6),X_1)+((X_6X_1),X_7)=$$

$$=a(X_7X_6)+b(X_8X_6)-(X_7X_1)-(X_1X_7)=$$

$$=-aX_7-bX_8=0$$

si ha $a=0$, $b=0$; dunque

$$(X_1 X_7) = \frac{1}{2} X_4 + \frac{3}{2} X_6$$

Lo stesso si vede subito per $(X_1 X_8)$, $(X_2 X_7)$, $(X_2 X_8)$ che si esprimono come nelle (23) –

Analogamente accade di tutti gli altri simboli $(X_i X_k)$. Così p. e. si può porre

$$(X_1 X_4) = X_1 + aX_3 + bX_4 + cX_5 + dX_6 + eX_7 + fX_8$$

e dall'identità

$$((X_1 X_4), X_6) + ((X_4 X_6), X_1) + ((X_6 X_1), X_4) = 0$$

risulta subito

$$a = b = c = d = e = f = 0$$

Con questo il gruppo primitivo G_8 è posto in relazione d'isomorfismo oloedrico col gruppo

$$\overline{G}_8 = \boxed{p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q}$$

al quale è quindi simile –

§ 132

Riduzione a forma normale nei casi B) C)

Caso B) Non essendovi qui trasformazioni di 2° ordine, le trasformazioni alternate $(X_i X_k)$ formate con quelle di primo ordine si compongono precisamente come le accorciate Xf nelle (21), cioè

(24) $(X_3 X_4) = -2X_3$, $(X_3 X_5) = X_4$, $(X_3 X_6) = 0$, $(X_4 X_5) = -2X_5$

$(X_4 X_6) = 0$, $(X_5 X_6) = 0$ -

Resta da scegliere le due del ~~primo~~ ordine X_1, X_2 in guisa che sussistano le (23), cangiate le $\overline{X}$ nelle X - Anche qui è utile riferirsi dapprima alle $(X_1 X_6)$, $(X_2 X_6)$ - Si ha

$$(X_1 X_6) = X_1 + aX_3 + bX_4 + cX_5 + dX_6$$

e prendendo per X_1 il secondo membro di questa risulta

$$(X_1 X_6) = 0$$

In modo analogo si sceglierà X_2 in modo che sia

$$(X_2 X_6) = 0$$

Dopo ciò, servendosi come nel caso A) delle identità Jacobiane in cui entri la X_6 si vede che anche tutti gli altri simboli

$$(X_1 X_i) \ , \ (X_2 X_i)$$

si esprimono come gli accorciati

$$(\overline{X}_1 \overline{X}_i) \ , \ (\overline{X}_2 \overline{X}_i)$$

Dunque il gruppo primitivo G_6 del caso B) è simile al gruppo

$$\overline{G}_6 \equiv \boxed{p,\ q,\ xq,\ yp,\ xp,\ yq}$$

Caso C) - Anche qui per le trasformazioni del 1° ordine X_3, X_4, X_5 sussistono le relative formole fra le (24).

Per le combinazioni delle $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ colle $\bar{X}_3, \bar{X}_4, \bar{X}_5$ abbiamo secondo le (23)

$$(\bar{X}_1\bar{X}_2)=0\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_3)=\bar{X}_2\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_4)=\bar{X}_1\ ,\ (\bar{X}_1\bar{X}_5)=0$$

$$(\bar{X}_2\bar{X}_3)=0,\ (\bar{X}_2\bar{X}_4)=-\bar{X}_2\ ,\ (\bar{X}_2\bar{X}_5)=\bar{X}_1$$

Si tratta ora di scegliere X_1, X_2 in guisa che le stesse formole sussistano per le combinazioni di X_1, X_2 con X_3, X_4, X_5 - Si ha:

$$(X_1X_4)=X_1+aX_3+bX_4+cX_5$$

e quindi ponendo

$$X_1'=X_1+\alpha X_3+\beta X_4+\gamma X_5$$

risulta

$$(X_1'X_4)=X_1'+(a-\alpha)X_3+(b-\beta)X_4+(c-\gamma)X_5-2\alpha X_3+$$
$$+2\gamma X_5\ ,$$

e prendendo

$$\alpha=\tfrac{1}{3}a\ ,\quad \beta=b\ ,\ \gamma=c$$

sarà

$$(X_1'X_4)=X_1'$$

Tornando ad indicare X_1' con X_1 avremo

$$(X_1X_4)=X_1$$

ed analogamente disponendo di X_2

$$(X_2X_4)=-X_2$$

Dopo ciò, servendosi al solito della identità Jacobiana, si dimostra facilmente che è raggiunto lo scopo voluto. Prendendo dapprima (X_1X_5) si ha

$$(X_1X_5)=aX_3+bX_4+cX_5\ ,$$

ma servendosi dell'identità

$$((X_1 X_5), X_4) + ((X_5 X_4), X_1) + ((X_4 X_1), X_5) = 0$$

risulta subito

$$(X_1 X_5) = 0$$

e analogamente

$$(X_2 X_3) = 0$$

Così pure da

$$(X_2 X_5) = X_1 + \alpha X_3 + \beta X_4 + \gamma X_5,$$

servendosi dell'identità Jacobiana con X_4, si trova $\alpha = \beta = \gamma = 0$, cioè

$$(X_2 X_5) = X_1$$

ed analogamente

$$(X_1 X_3) = X_2$$

Resta solo da provare che $(X_1 X_2) = 0$ - Poniamo che sia

$$(X_1 X_2) = a X_1 + b X_2 + c X_3 + d X_4 + e X_5;$$

l'identità Jacobiana con X_4 dà subito

$$a = b = c = e = 0$$

e quella con X_3 dimostra che anche $d = 0$ -

Si conclude che nel caso (γ) il gruppo G_5 è ~~simile~~ al gruppo

$$\boxed{p, q, xq, yp, xp - yq}$$

Così sono determinati tutti i gruppi primitivi del piano ed otteniamo il risultato finale:

Un gruppo primitivo su due variabili può avere soltanto 8, 6 ovvero 5 parametri ed è rispettivamente simile ad uno dei tre gruppi seguenti:

a) $G_8 \equiv (p, q, xp, yp, xq, yq, x^2p+xyq, xyp+y^2q)$

b) $G_6 \equiv (p, q, xp, yp, xq, yq)$

c) $G_5 \equiv (p, q, xq, yp, xp-yq)$

§ 133

I gruppi G_8, G_6, G_5 come gruppi projettivi

Possiamo ora caratterizzare in modo molto semplice i tre tipi di gruppi a) b) c) a cui si riducono, con un conveniente cangiamento di variabili, tutti i gruppi primitivi del piano. Diciamo che il gruppo a) ad 8 parametri è il gruppo generale projettivo del piano, cioè il gruppo delle sostituzioni lineari frazionarie sulle variabili x, y, le cui equazioni finite sono

$$(25_a) \quad x' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3}, \quad y' = \frac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3};$$

il gruppo b) è il gruppo di tutte le sostituzioni lineari intere

$$(25_b) \quad x' = a_1x+b_1y+c_1, \quad y' = a_2x+b_2y+c_2,$$

ossia quel sottogruppo del gruppo generale projettivo che lascia ferma la retta all'infinito; infine il gruppo c) è quel sottogruppo del precedente in cui il determinante $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ della sostituzione è uguale all'unità:

$$(25_c) \quad \left\{ x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \ , \ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \ , \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1 \right.$$

Per dimostrare queste asserzioni basta calcolare le trasformazioni infinitesime generatrici dei gruppi (25_a), (25_b), (25_c) e dimostrare che esse coincidono rispettivamente colle a), b), c).

Nel gruppo (25_a) l'identità è data dai valori dei parametri

$$a_1 = b_2 = c_3 = 1$$

$$b_1 = c_1 = a_2 = c_2 = a_3 = b_3 = 0$$

e per ciò la più generale trasformazione infinitesima del gruppo si otterrà ponendo

$$a_1 = 1 + \alpha_1 \delta t \ , \ b_2 = 1 + \beta_2 \delta t \ , \ c_3 = 1 + \gamma_3 \delta t$$

$$b_1 = \beta_1 \delta t \ , \ c_1 = \gamma_1 \delta t \ , \ a_2 = \alpha_2 \delta t \ , \ c_2 = \gamma_2 \delta t$$

$$a_3 = \alpha_3 \delta t \ , \ b_3 = \beta_3 \delta t$$

dove le α, β, γ sono costanti arbitrarie. Sostituendo in (25_a) e trascurando le potenze superiori di δt si ha in primo luogo

$$\frac{1}{1 + [\gamma_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y]\delta t} = 1 - [\gamma_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y]\delta t \, ,$$

indi

$$x' = \{x + (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)\delta t\} . \{1 - (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t\}$$

$$y' = \{y + (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2)\delta t\} . \{1 - (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3)\delta t\}$$

e perciò

$$\begin{cases} \delta x = \{(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1) - x(\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3)\}\delta t \\ \delta y = \{(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2) - y(\alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3)\}\delta t \end{cases}$$

La più generale trasformazione infinitesima del gruppo (25_a) è adunque

$$(26) \quad Xf = [\gamma_1 + (\alpha_1-\gamma_3)x + \beta_1 y - \alpha_3 x^2 - \beta_3 xy]p +$$
$$+ [\gamma_2 + \alpha_2 x + (\beta_2-\gamma_3)y - \alpha_3 xy - \beta_3 y^2]q;$$

come si vede essa si compone linearmente ed omogeneamente con costanti arbitrarie mediante le 8 fondamentali

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,\ x^2p+xyq,\ xyp+y^2q,$$

che sono appunto quelle assegnate in a) per G_8 –

Ancora più semplice è la verifica per gli altri due casi – Per il gruppo (25_b) delle sostituzioni lineari intere a_3, b_3, c_3 hanno i valori fissi

$$a_3=0, \quad b_3=0, \quad c_3=1$$

onde dobbiamo fare nella (26)

$$\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0;$$

le trasformazioni generatrici del gruppo sono quindi

$$p,\ q,\ xp,\ yp,\ xq,\ yq,$$

cioè quelle di G_6 in b)

In fine per le (25_c) essendo

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$$

dobbiamo porre la condizione

$$\delta(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

cioè

$$\alpha_1 + \beta_2 = 0 \;;$$

le trasformazioni generatrici del gruppo (25.) sono quindi

$$p \,.\, q \,.\, xq \,.\, yp \,.\, xp - yq$$

cioè quelle di G_5 in c) -

Riassumendo abbiamo quindi il teorema:

Ogni gruppo primitivo del piano possiede 8 o 6, ovvero 5 parametri - Nel primo caso è simile al gruppo delle sostituzioni lineari frazionarie su due variabili, nel secondo al gruppo delle sostituzioni lineari intere, nel terzo a quel sottogruppo di quest'ultimo in cui il determinante della sostituzione è uguale all'unità (gruppo derivato) -

È bene osservare che nello stabilire questi risultati generali Lie non si preoccupa della distinzione fra reale ed immaginario - Così un gruppo reale è detto imprimitivo anche se i sistemi d'imprimitività a cui dà luogo sono soltanto immaginari, mentre dal punto di vista reale dovrebbe dirsi primitivo - Così per es. è chiaro geometricamente che il gruppo G_3 dei movimenti del piano è primitivo dal punto di vista reale perchè non esistono sistemi reali di curve d'imprimitività - Esso però non rientra in uno dei tre tipi sopra trovati come i soli possibili per gruppi primitivi - La ragione sta in ciò che il detto

G_3 è imprimitivo dal punto di vista generale; qui le linee d'imprimitività sono date dai due fasci di rette cicliche —

§ 134
Gruppi intransitivi del piano – Casi in cui $\bar{G}_r$ è ad uno o due parametri

Passiamo ora alla determinazione dei gruppi imprimitivi del piano. Qui però ci limiteremo a trovare tutti i possibili tipi di tali gruppi e lascieremo da parte la questione ulteriore di ridurre questi tipi al minimo numero.

Cominciamo dalla determinazione dei gruppi intransitivi, che appartengono sempre alla classe dei gruppi imprimitivi (§ 51).

Sia dunque G_r un gruppo intransitivo del piano, vi sarà un invariante del gruppo che potremo scegliere per una delle variabili indipendenti, p. e. la x. le varietà minime invarianti (varietà d'intransitività) saranno qui le rette $x = \text{cost}^{te}$, cioè le parallele all'asse delle y — Le r trasformazioni infinitesime del gruppo $X_k f$ $(k = 1, 2 \ldots r)$ non conterranno la $\frac{\partial f}{\partial x}$ e si avrà quindi

$$X_k f = \eta_k q$$

essendo la η_k una certa funzione di x, y.

Se diamo ad x un valore costante qualunque x_0 e poniamo

$$\eta_k(x_0, y) = \overline{\eta}_k \,,$$

le r trasformazioni infinitesime

$$\overline{X}_k f = \overline{\eta}_k \cdot q$$

saranno le generatrici del gruppo $\overline{G}_r$ sui punti della retta invariante $x = x_0$ - Questo essendo un gruppo sopra una sola variabile, non potrà avere che uno, due ovvero tre parametri (*). Ciò significa che almeno fra quattro qualunque dell' η sussisterà una relazione lineare omogenea con coefficienti funzioni della x, ovvero già fra tre delle η sussisterà una tale relazione, o in fine fra due qualunque di esse; e secondo che $\overline{G}_r$ avrà tre parametri essenziali, o due o uno. Trattiamo nel presente § i due ultimi casi.

1° caso - Il gruppo $\overline{G}_r$ sopra ogni retta invariante $x = x_0$ abbia un solo parametro. Avremo allora

$$X_1 f = \eta_1 q \quad X_2 f = \varphi_2(x) \cdot \eta_1 q, \ldots\ldots X_r f = \varphi_r(x) \cdot \eta_1 q \,;$$

cangiando la variabile y in una nuova $\overline{y}$ (funzione di x, y) in guisa che $\frac{\partial \overline{y}}{\partial y} = \frac{1}{\eta_1}$ si potrà ridurre $\eta_1 q$ semplicemente a q, ed il nostro G_r sarà

$$4) \quad G_r \equiv [q \,.\, \varphi_2(x) q \,.\, \varphi_3(x) q \ldots \varphi_r(x) q]$$

(*) Il caso che $\overline{G}_r$ si riduca all' identità deve evidentemente escludersi, perchè allora G_r stesso sarebbe l'identità -

Viceversa qualunque siano le funzioni della x

$$\varphi_2(x) \,.\, \varphi_3(x) \ldots \varphi_r(x)$$

purché linearmente indipendenti, cioè non legate da una relazione lineare a coefficienti costanti:

$$c_1 + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) + \ldots + c_r\varphi_r(x) = 0$$

le r trasformazioni infinitesime

$$q \,.\, \varphi_2(x)q \,.\, \varphi_3(x)q \ldots \varphi_r(x)q$$

generano un G_r intransitivo sulle due variabili x, y con r parametri. In questo primo caso il gruppo G_r è evidentemente Abeliano

2° caso. Il gruppo $\bar{G}_r$ sia a due parametri. Potremo allora supporre che

$$\eta_3 \,.\, \eta_4 \ldots \eta_r$$

si esprimano linearmente ed omogeneamente per η_1, η_2 colle formole

(27) $$\eta_k = \varphi_k(x)\,\eta_1 + \psi_k(x)\,\eta_2 \qquad (k = 3, 4 \ldots r),$$

mentre η_1, η_2 non sono legate da alcuna relazione lineare omogenea con coefficienti funzioni della x, il rapporto $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ non sarà indipendente dalla y. Se costruiamo la trasformazione alternata

(28) $$U = (X_1 X_2) = \left(\eta_1\frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \eta_2\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right) q.$$

questa dovrà essere una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di $X_1f \,.\, X_2f \ldots X_rf$, e quindi per le (27) avremo

(29) $$U = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f$$

dove ω_1, ω_2 sono funzioni della sola x - La U non può essere identicamente nulla, cioè non può aversi simultaneamente $\omega_1=\omega_2=0$, perchè allora, per la (28), sarebbe:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)=0$$

contro l'ipotesi. Ora dimostriamo facilmente che ω_1, ω_2 debbono essere due costanti - Per ciò osserviamo che si ha

$$\begin{cases}(X_1,U)=(X_1,\ \omega_1X_1+\omega_2X_2)=\omega_2(X_1X_2)=\omega_2U\\(X_1,\ \omega_2U)=\omega_2(X_1U)=\omega_2^2U\\(X_1,\ \omega_2^2U)=\omega_2^2(X_1U)=\omega_2^3U\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

$$\begin{cases}(U,X_2)=(\omega_1X_1+\omega_2X_2,\ X_2)=\omega_1(X_1X_2)=\omega_1U\\(\omega_1U,X_2)=\omega_1(UX_2)=\omega_1^2U\\(\omega_1^2U,X_2)=\omega_1^2(UX_2)=\omega_1^3U.\\\ldots\ldots\ldots\ldots\end{cases}$$

e quindi tutte le trasformazioni

$$(\alpha)\qquad U,\ \omega_2U,\ \omega_2^2U,\ \omega_2^3U\ldots\ldots$$

$$(\beta)\qquad U,\ \omega_1U,\ \omega_1^2U,\ \omega_1^3U\ldots\ldots$$

sono nel gruppo, per quanto si prolunghi la serie (α) e la (β) - Per ciò tanto ω_1 quanto ω_2 debbono essere costanti; altrimenti, per quante trasformazioni si prendessero in (α) o in (β), esse sarebbero sempre indipendenti, ciò che è assurdo essendo il gruppo finito -

Poichè adunque ω_1, ω_2 sono costanti, X_1f, X_2f generano un sottogruppo a due parametri; questo non essendo Abeliano, potremo supporre cangiando linearmente X_1, X_2 che sia (§ 76)

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

Con una trasformazione sulla y potremo fare semplicemente

$$X_1 f = q\,;$$

ed avendosi allora $\eta_1 = 1$, ne verrà

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 1$$

cioè $\eta_2 = y + \theta(x)$, e prendendo $y + \theta(x)$ come nuova y sarà

$$X_1 f = q \quad , \quad X_2 f = yq$$

Per qualunque altra $X_k f$ abbiamo

$$X_k f = (\varphi_k(x) + \psi_k(x) . y)\, q\,,$$

indi

$$(X_1 X_k) = \psi_k . q \quad , \quad (X_k . \psi_k q) = -\psi_k^2 q\,,$$

$$(X_k . \psi_k^2 q) = -\psi_k^3 q \,\ldots\ldots,$$

onde si conclude (come sopra per ω_1, ω_2) che ψ_k è una costante c_k – Sostituendo quindi ad $X_k f$ la

$$X_k f - c_k X_2 f = \varphi_k(x) . q\,,$$

vediamo che in questo caso al gruppo G_r si può dare la forma

$$\text{I)} \quad G_r \equiv \boxed{q \;.\; yq \;.\; \varphi_3(x) . q \;.\; \varphi_4(x) . q \;.\; \ldots\; \varphi_r(x) . q}$$

Viceversa se $\varphi_3(x), \varphi_4(x) \ldots\ldots \varphi_r(x)$ sono funzioni arbitrarie della x linearmente indipendenti le r trasformazioni infinitesime

$$q,\ yq,\ \varphi_3(x)\cdot q,\ \varphi_4(x)\cdot q, \ldots\ldots \varphi_r(x)\cdot q$$

generano uno gruppo G_r sulle due variabili x, y del tipo richiesto.

§. 135
Caso in cui il gruppo ridotto $\overline{G}_r$ è a tre parametri

---

In questo caso potremo supporre che

$$X_4 f = \eta_4 q, \ldots\ldots X_r f = \eta_r q$$

siano combinazioni lineari, a coefficienti funzioni della x, di

$$X_1 f = \eta_1 q,\ \ X_2 f = \eta_2 q,\ \ X_3 f = \eta_3 q,$$

mentre fra X_1, X_2, X_3 non sussisterà una tale identità.

Consideriamo le tre trasformazioni infinitesime

$$U_1 = (X_2 X_3),\quad U_2 = (X_3 X_1),\quad U_3 = (X_1 X_2)$$

le quali appartengono al gruppo; avremo quindi

$$(30)\qquad \begin{cases} U_1 = (X_2 X_3) = \omega_{11} X_1 + \omega_{12} X_2 + \omega_{13} X_3 \\ U_2 = (X_3 X_1) = \omega_{21} X_1 + \omega_{22} X_2 + \omega_{23} X_3 \\ U_3 = (X_1 X_2) = \omega_{31} X_1 + \omega_{32} X_2 + \omega_{33} X_3\,, \end{cases}$$

dove le ω_{ik} saranno funzioni della x, e primo nostro oggetto sarà di provare che sono costanti assolute. Intanto osserviamo che se si fa $x = x_0$ le X_1, X_2, X_3 si riducono a $\overline{X}_1 f, \overline{X}_2 f, \overline{X}_3 f$ generatrici del gruppo ridotto $\overline{G}_r$ a tre parametri, che è simile al gruppo projettivo sopra una variabile - Questo coincide col proprio gruppo derivato (§, e per ciò il determinante

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} \bar{\omega}_{11} & \bar{\omega}_{12} & \bar{\omega}_{13} \\ \bar{\omega}_{21} & \bar{\omega}_{22} & \bar{\omega}_{23} \\ \bar{\omega}_{31} & \bar{\omega}_{32} & \bar{\omega}_{33} \end{vmatrix}.$$

è diverso da zero - A più forte ragione sarà dunque

$$(31) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

Ciò premesso, costruiamo le trasformazioni alternate $(U_i X_k)$ che per le (30) saranno

$$(32)\begin{cases} (U_1, X_1) = -\omega_{12} U_3 + \omega_{13} U_2 \,, (U_1 X_2) = \omega_{11} U_3 - \omega_{13} U_1 \,, (U_1 X_3) = -\omega_{11} U_2 + \omega_{1} \\ (U_2, X_1) = -\omega_{22} U_3 + \omega_{23} U_2 \,, (U_2 X_2) = \omega_{21} U_3 - \omega_{23} U_1 \,, (U_2 X_3) = -\omega_{21} U_2 + \omega_{22} \\ (U_3, X_1) = -\omega_{32} U_3 + \omega_{33} U_2 \,, (U_3 X_2) = \omega_{31} U_3 - \omega_{33} U_1 \,, (U_3 X_3) = -\omega_{31} U_2 + \omega_{32} \end{cases}$$

L'identità Jacobiana:

$$((X_1 X_2), X_3) + ((X_2 X_3), X_1) + ((X_3 X_1), X_2) = (U_3 X_3) + (U_2 X_2) + (U_1 X_1$$

diventa quindi

$$(\omega_{32} - \omega_{23}) U_1 + (\omega_{13} - \omega_{31}) U_2 + (\omega_{21} - \omega_{12}) U_3 = 0 \,,$$

dalla quale, sostituendo per U_1, U_2, U_3 i valori (30) e ricordando che X_1, X_2, X_3 non sono legate da alcuna relazione, si deduce

$$(\omega_{32} - \omega_{23}) \omega_{1i} + (\omega_{13} - \omega_{31}) \omega_{2i} + (\omega_{21} - \omega_{12}) \omega_{3i} = 0$$

$$i = 1, 2, 3 \,;$$

e poichè $\Delta \neq 0$ ne segue

$$\omega_{21} = \omega_{12}\,, \quad \omega_{32} = \omega_{23}\,, \quad \omega_{13} = \omega_{31}\,.$$

cioè Δ è un determinante simmetrico -

Costruiamo ora le trasformazioni alternate

$$(U_1 U_2)\,, \ (U_2 U_3)\,, \ (U_3 U_1)\,;$$

abbiamo

$$(U_1 U_2) = (\omega_{11} X_1 + \omega_{12} X_2 + \omega_{13} X_3\,, \ \omega_{21} X_1 + \omega_{22} X_2 + \omega_{23} X_3)\,.$$

Indicando quindi con ω'_{ik} il complemento algebrico di ω_{ik} in Δ, ne risulta

$$(U_1 U_2) = \omega'_{31} U_1 + \omega'_{32} U_2 + \omega'_{33} U_3$$

ossia per le (30) e per essere Δ simmetrico

$$(U_1 U_2) = \Delta X_3\,.$$

e similmente

$$(U_2 U_3) = \Delta X_1\,, \quad (U_3 U_1) = \Delta X_2$$

Le trasformazioni ΔX_1, ΔX_2, ΔX_3 sono dunque nel gruppo, e però anche

$$(X_2\,, \Delta X_3) = \Delta U_1\,. \ (X_3\, \Delta X_1) = \Delta U_2\,. \ (X_1\,. \Delta X_2) = \Delta U_3$$

e così

$$(U_1\,. \Delta U_2) = \Delta^2 X_3\,, \ (U_2\,. \Delta U_3) = \Delta^2 X_1\,, \ (U_3\,. \Delta U_1) = \Delta^2 X_2$$

Così continuando vediamo che le

$$X_i\,, \ \Delta X_i\,, \ \Delta^2 X_i\,, \ \Delta^3 X_i\,, \ldots\ldots$$

sono tutte nel gruppo, e per conseguenza Δ è costante.

Ora avremo nel gruppo anche le trasformazioni

$$(X_2\,. (U_1 X_1)) \quad (X_3\,. (U_1 X_1))$$

ossia

$$(X_2\,. \ \omega_{13} U_2 - \omega_{12} U_3) = \omega_{13} (X_2 U_2) - \omega_{12} (X_2 U_3) =$$

$$-\omega_{12}(\omega_{31}U_3-\omega_{33}U_1)-\omega_{13}(\omega_{21}U_3-\omega_{23}U_1)=\omega'_{12}U_1$$

$$(X_3\,,\,\omega_{13}U_2-\omega_{12}U_3)=\omega_{12}(U_3X_3)-\omega_{13}(U_2X_3)=$$

$$=\omega_{12}(\omega_{32}U_1-\omega_{31}U_2)-\omega_{13}(\omega_{22}U_1-\omega_{21}U_2)=$$

$$=\omega'_{13}U_1\,,$$

quindi anche

$$(X_2\,,\,\omega'_{12}(\omega_{13}U_2-\omega_{12}U_3))=\omega'^2_{12}U_1\,,\quad (X_3\,,\,\omega'_{13}(\omega_{13}U_2-\omega_{12}U_3))=\omega'^2_{13}U_1.$$

Continuando nel medesimo modo vediamo che ω'_{12}, ω'_{13} sono costanti, e similmente dicasi per ω'_{23} - Osservando poi che

$$\Delta X_1=\omega'_{11}U_1+\omega'_{12}U_2+\omega'_{13}U_3$$

vediamo che anche $\omega'_{11}U_1$ appartiene al gruppo, onde si conclude, nel solito modo, che ω'_{11} è una costante, similmente ω'_{22}, ω'_{33} - Dunque Δ ed i suoi minori del 2° ordine essendo costanti, sono pure costanti gli elementi stessi ω_{ik} del determinante, ciò che dimostra intanto che le tre trasformazioni X_1f. X_2f. X_3f generano un gruppo a tre parametri

Ora diciamo che questo gruppo

$$G_3\equiv\boxed{X_1X_2X_3}$$

esaurisce già il gruppo G_r, che cioè ogni altra ~~trasforma~~ zione infinitesima $\mathfrak{X}f$ di G_r è composta linearmente, con coefficienti costanti, con X_1. X_2. X_3 - Intanto avremo certamente

$$\mathfrak{X}f=\varphi_1(x)\cdot X_1f+\varphi_2(x)X_2f+\varphi_3(x)X_3f$$

Per provare che $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono tre costanti, cominciamo dal semplificare le formole di composizione pel gruppo G_3 osservando che esso ha la composizione del gruppo generale projettivo e perciò si può scegliere X_1, X_2, X_3 in guisa che si abbia

(33) $(X_1X_2) = X_1f \ , (X_1X_3) = 2X_2f \ , (X_2X_3) = X_3f$

Ora abbiamo in G_r la

$$(X_1, \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3) = \varphi_2 X_1 + 2\varphi_3 X_2 \, ,$$

indi

$$(X_1, \varphi_2 X_1 + 2\varphi_3 X_2) = 2\varphi_3 X_1 \, .$$

onde segue, pel solito ragionamento, che φ_3 è costante.

Analogamente

$$(X_2, \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \varphi_3 X_3) = \varphi_3 X_3 - \varphi_1 X_1 \, ,$$

dunque anche $\varphi_1 X_1$ è nel gruppo e per ciò φ_1 è costante, quindi anche φ_2 c. d. d.

Nel caso attuale il gruppo G_r ha dunque 3 parametri e la composizione (33) - Cangiando la variabile y possiamo fare $\eta_1 = 1$, cioè

$$X_1 f = q$$

e le (33) danno

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial y} = 1 \quad , \frac{\partial \eta_3}{\partial y} = 2\eta_2 \; . \quad \eta_2 \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \eta_3 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} = \eta_3 \; .$$

Ne segue

$$\eta_2 = y + \psi(x) \qquad \eta_3 = \eta_2^2$$

e cangiando $y + \psi(x)$ in y, abbiamo

$$X_1 f = q \ , \ X_2 f = yq \ , \ X_3 f = y^2 q$$

quale forma tipica pel nostro gruppo:

c) $G_3 \equiv \boxed{q \cdot yq \cdot y^2 q}$

§ . 136

Gruppi imprimitivi transitivi - Caso in cui il gruppo accorciato Γ ha un solo parametro

---

Passiamo ora a determinare i gruppi imprimitivi transitivi sopra due variabili x, y - Rispetto ad un tale gruppo G_r avremo almeno una divisione del piano in curve d'imprimitività

$$X(x, y) = \text{cost}^{te}$$

Prendendo per nuova variabile x la X, le linee d'imprimitività saranno le rette $x = \text{cost}^{te}$ parallele all'asse delle y - Per i risultati del § 98 le r trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo avranno la forma

$$X_k f = \xi_k(x) \cdot p + \eta_k(x, y) q, \quad (k = 1, 2 \ldots r)$$

dove i primi coefficienti ξ_k sono funzioni della sola x.

Le trasformazioni accorciate

$$\overline{X}_k f = \xi_k p \quad (k = 1, 2 \ldots r)$$

generano il gruppo Γ sulle rette d'imprimitività $x = \text{cost}^{te}$

Questo gruppo Γ sopra una sola variabile può avere uno, due ovvero tre parametri, il caso in cui Γ si riduce all'identità dovendo qui escludersi perchè allora avremmo il caso già sopra esaminato di un gruppo G_r' intransitivo - La nostra ricerca si scinde quindi naturalmente in tre problemi successivi, secondo che Γ ha uno, due ovvero tre parametri. Trattiamo nel presente § il primo caso.

Le r trasformazioni accorciate $\overline{X}_k f$ si riducono in questo caso ad una sola indipendente, poniamo alla $X_1 f$ e si ha quindi

$$\xi_2 = a_2 \xi_1 \,,\ \xi_3 = a_3 \xi_1 \,, \ldots\ \xi_r = a_r \xi_1$$

le $\underline{a}$ essendo costanti.

Assumendo in luogo di

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots\ldots X_r f$$

come generatrici le altre

$$X_1 f,\ X_2 f - a_2 X_1 f, \ldots\ldots X_r f - a_r X_1 f$$

rendiamo $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_r = 0$, cioè

$$X_1 f = \xi_1 p + \eta_1 q\,,\quad X_2 f = \eta_2 q \ldots\ldots X_r f = \eta_r q\,.$$

Cangiando il parametro x possiamo fare semplicemente $\xi_1 = 1$, cioè

$$X_1 f = p + \eta_1 q\,,\ X_2 f = \eta_2 q\,, \ldots\ldots X_r f = \eta_r q$$

Evidentemente le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

non contengono p e per ciò si esprimono linearmente, con coefficienti costanti, con $X_2 f \ldots X_r f$ soltanto - Ne segue che

$$X_2 f,\ X_3 f, \ldots\ X_r f$$

generano un sottogruppo invariante ad $r-1$ param tri di G_r — Questo sottogruppo G_{r-1} è quello che lascia fissa ciascuna retta $x = \text{cost}^{\text{te}}$ — Esso è intransitivo e potrà quindi ridursi ad uno dei tre tipi a) b) c) dei §§ 134, 135.

Così il nostro gruppo G_r avrà una delle tre forme

a′) $\quad q \cdot \varphi_2(x)q \cdot \varphi_3(x)q, \ldots \varphi_{r-1}(x)q \cdot p+\eta(x,y)q$

b′) $\quad q \cdot yq \cdot \varphi_3(x)q : \ldots \varphi_{r-1}(x)q \cdot p+\eta(x,y)q$

c′) $\quad q \cdot yq \cdot y^2q \cdot p+\eta q$

Conviene successivamente esaminare questi tre casi e trovare le condizioni cui debbono soddisfare le $\varphi(x)$ e la $\eta(x,y)$ perchè ogni volta si abbiano r trasformazioni generatrici di un gruppo

(Caso a′)

La trasformazione

$$(\varphi_k(x)q,\ p+\eta q) = \left(\varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial y} - \varphi_k'\right) q$$

deve appartenere al gruppo e comporsi quindi con

$$q \cdot \varphi_2 q \cdot \ldots \cdot \varphi_{r-1} q;$$

Ne risulta che $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ non contiene y (poichè esiste almeno una φ, la $\varphi_1 = 1$), e perciò

$$\eta = \alpha(x)y + \beta(x)$$

Cangiando la y in

$$\bar{y} = A(x)y + B(x)$$

la $p+\eta q$ prende la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}}(A'y+B') + \eta A \frac{\partial f}{\partial \bar{y}},$$

che possiamo ridurre semplicemente a p determinando A, B in modo che sia

$$A' + \alpha A = 0, \quad B' + \beta A = 0.$$

Così avremo ridotto $\eta = 0$, cioè avremo

$$G_r \equiv \boxed{\varphi_1 q \cdot \varphi_2 q \cdot \varphi_3 q \cdots \varphi_{r-1} q \cdot p}$$

ed ora dovendo φ'_k comporsi linearmente, con coefficienti costanti, con $\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_{r-1}$, la teoria delle equazioni differenziali lineari (a coefficienti costanti) dimostra che $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_{r-1}$ si comporranno linearmente con funzioni del tipo seguente

$$e^{\alpha_1 x},\ x e^{\alpha_1 x},\ x^2 e^{\alpha_1 x} \cdots\cdots x^{m_1} e^{\alpha_1 x}$$

$$e^{\alpha_2 x},\ x e^{\alpha_2 x},\ x^2 e^{\alpha_2 x},\cdots\cdots x^{m_2} e^{\alpha_2 x}$$

. . . .

dove le α sono costanti e $m_1, m_2 \ldots\ldots$ numeri interi.

Il gruppo G_r avrà dunque la forma

$$d) \qquad G_r \equiv \boxed{e^{\alpha_i x} q,\ x e^{\alpha_i x} q \ldots\ldots x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ p}$$

con $i = 1, 2, \ldots s$; $\sum m_i + s = r - 1$

Viceversa, qualunque siano le costanti α_i si vede subito che le trasformazioni infinitesime precedenti soddisfano alle condizioni del teorema principale e generano un gruppo.

Caso b')

Qui abbiamo ancora

$$(\varphi_k(x) \cdot q,\ p + \eta q) = \left(\varphi_k \frac{\partial \eta}{\partial y} - \varphi'_k\right) q$$

e questa trasformazione dovrà comporsi linearmente con

$$q \cdot \varphi q \cdot \varphi_3(x) q, \cdots \varphi_{r-1}(x) q,$$

quindi $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ deve essere lineare intera in y e per ciò

$$\eta = \alpha(x)\, y^2 + \beta(x)\cdot y + \gamma(x)$$

Ora essendo

$$(yq \cdot p+\eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right) q =$$

$$= \left(\alpha(x)\cdot y^2 - \gamma(x)\right) q$$

si conclude che deve essere $\alpha = 0$ e γ deve comporsi colle φ - Nel gruppo trovandosi già la $\gamma(x)\cdot q$ possiamo ridurre η semplicemente a $\beta(x)\cdot y$. quindi

$$p+\eta q = p + \beta(x)\cdot yq$$

Introducendo come nel caso a') una conveniente funzione $\bar{y} = A(x)\cdot y$ al posto di y, possiamo rendere $\eta = 0$ - Così il gruppo acquista la forma

$$\boxed{\varphi_1(x) q \cdot \varphi_2(x) q, \ldots \varphi_{r-2}(x) q, yq \cdot p}$$

Se si tralascia la yq le rimanenti generano un sottogruppo G_{r-1} che appartiene al tipo determinato nel caso a'). Possiamo dunque ridurre il G_r attuale alla forma tipica

$$e) \qquad G_r \equiv \boxed{e^{\alpha_i x} q,\ x e^{\alpha_i x} q, \ldots\ldots x^{m_i} e^{\alpha_i x} q \cdot yq \cdot p}$$

$$i = 1, 2 \ldots s \quad ; \quad s + \Sigma m_i = r - 2$$

Inversamente le trasformazioni e) generano sempre effettivamente un gruppo

Caso c')

Qui abbiamo

$$(q \cdot p+\eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q$$

e perciò deve $\frac{d\eta}{dy}$ comporsi linearmente, con coefficienti costanti, con y^2, y; quindi sarà

$$\eta = \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \psi(x),$$

essendo α, β, γ costanti. - Poichè già nel gruppo figurano yq, $y^2 q$ si può ridurre η semplicemente a

$$\eta = \alpha y^3 + \psi(x)$$

Ora

$$(yq, p + \eta q) = (2\alpha y^3 - \psi) q,$$

quindi $\alpha = 0$ e ψ è una costante che si può prendere senz'altro $= 0$ figurando già q nel gruppo - Il gruppo attuale può dunque ridursi alla forma

$$f) \qquad G_4 = \boxed{q, yq, y^2 q, p}$$

§. 137
Caso in cui Γ ha due parametri

In questo caso, essendo

$$X_k f = \xi_k(x) p + \eta_k(x, y) q$$

le r trasformazioni generatrici di G_r, fra tre qualunque delle ξ passa una relazione a coefficienti costanti - Il gruppo associato Γ

$$\Gamma \equiv (\xi_1 p, \ \xi_2 p, \ \xi_3 p, \dots \xi_r p)$$

avendo due parametri, può ridursi, cangiando la variabile x, alla forma (§. 123)

$$\boxed{p, xp}$$

dopo di che le $X_k f$ acquistano la forma

$$X_k f = (a_k x + b_k) p + \eta_k(x, y) q.$$

le a, b essendo costanti. — Si possono quindi prendere come generatrici del gruppo le r trasformazioni seguenti

$$\eta_1 q,\ \eta_2 q, \dots \eta_{r-2} q,\ p + \eta_{r-1} q,\ xp + \eta_r q$$

Le prime $r-1$ di queste generano un sottogruppo G_{r-1} di G_r perché le loro espressioni alternate, non contenendo il termine xp, si compongono con quelle $r-1$ trasformazioni stesse. Questo G_{r-1} è un gruppo imprimitivo il cui gruppo accorciato ha un solo parametro, esso può quindi ridursi, supposto dapprima $r > 2$, ad una delle tre forme d) e) f) del paragrafo precedente, e ciò cangiando linearmente la y il che non fa cangiare la forma dell'ultima trasformazione $xp + \eta_r q$.

Dopo ciò avremo da trattare successivamente tre casi, aggiungendo alle $r-1$ trasformazioni della forma d) e) f) una r^{ma} della forma $xp + \eta q$. — In fine poi nel caso $r = 2$ le prime $r-1$ trasformazioni si riducono all'unica p, alla quale dovremo associare una $xp + \eta q$ in guisa da avere il gruppo richiesto.

(250 d')

Le trasformazioni generatrici del gruppo G_r sono

$$(\alpha) \qquad e^{\alpha_i x},\ x e^{\alpha_i x} q, \dots x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ p,\ xp + \eta q$$

$$i = 1, 2 \dots s, \quad s + \sum m_i = r - 2$$

Abbiamo

$$(e^{\alpha_i x}q,\ xp+\eta q)=\left(e^{\alpha_i x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\alpha_i x e^{\alpha_i x}\right)q$$

$$(p,\ xp+\eta q)=p+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$

onde risulta che di queste due trasformazioni di G_r la prima si compone colle prime $r-2$, la seconda colle prime $r-1$ e per ciò $\frac{\partial\eta}{\partial x}$, $\frac{\partial\eta}{\partial y}$ sono indipendenti da y, onde sarà

$$\eta=ay+\theta(x)$$

con $\underline{a}$ costante. Ora se formiamo

$$(x^{m_i}e^{\alpha_i x}q,\ xp+\eta q)=(x^{m_i}e^{\alpha_i x}q,\ xp+(ay+\theta(x))q)=$$

$$=\left\{(a-m_i)x^{m_i}e^{\alpha_i x}-\alpha_i x^{m_i+1}e^{\alpha_i x}\right\}q$$

ed osserviamo che nel gruppo $e^{\alpha_i x}$ figura al massimo col fattore x^{m_i}, ne deduciamo $\alpha_i=0$. Dunque il gruppo G_r ha la forma

$$(\beta)\qquad q,\ xq,\ x^2q,\dots\ x^{r-3}q,\ p,\ xp+(ay+\theta(x))q.$$

Si ha

$$(p,\ xp+(ay+\theta(x))q)=p+\theta'(x)q$$

onde risulta che θ' è un polinomio di grado $r-3$ in x indi θ un polinomio di grado $r-2$. Per ciò si può ridurre l'ultima a

$$xp+(ay+bx^{r-2})q$$

con a, b costanti.

Cangiando y in $y+cx^{r-2}$ (c costante) le prime $r-2$ trasformazioni (β) non cangiano, la penultima diventa

$$p+c(r-2)x^{r-3}q$$

che si può ridurre a p, comparendo già nel gruppo la $x^{r-3}q$.

L'ultima si cangia in

$$xp + \{(r-2-a)c+b\}x^{r-2}q + ayq$$

e se $r-2 \neq a$ prendendo $c = \frac{b}{a+2-r}$ si riduce ad $xp + ayq$, per cui abbiamo un gruppo G_r del tipo

g) $$\boxed{q,\ xq,\ x^2q \ldots x^{r-3}q,\ p,\ xp + ayq}$$

Nel caso $a = r-2$ se $b = 0$ l'ultima trasformazione ha già la forma precedente in g) – Se poi $b \neq 0$ la

$$xp + ((r-2)y + bx^{r-2})q,$$

cangiando y in $\frac{y}{b}$, diventa

$$xp + ((r-2)y + x^{r-2})q -$$

Abbiamo così il nuovo tipo

h) $$\boxed{q,\ xq,\ x^2q, \ldots x^{r-3}q,\ p,\ xp + ((r-2)y + x^{r-2})q} \ ;$$

viceversa le g) come le h) generano sempre effettivamente un gruppo –

Caso e')

Le trasformazioni generatrici di G_r sono

(γ) $e^{\alpha_i x}q,\ xe^{\alpha_i x}q, \ldots x^{m_i}e^{\alpha_i x}q,\ yq,\ p,\ xp + \eta q$

Formando anche qui

$$(e^{\alpha_i x}q,\ xp + \eta q) = \left(e^{\alpha_i x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \alpha_i x\, e^{\alpha_i x}\right)q$$

vediamo che $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ deve essere lineare in y e quindi

$$\eta = \alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x)$$

Ma poiché

$$(yq,\ xp + \eta q) = \left(y\frac{\partial \eta}{\partial y} - \eta\right)q = (\alpha y^2 - \gamma)q$$

dovrà essere $\alpha = 0$ e γq comporsi colle prime $r-2$ trasformazioni (γ): per ciò γ può omettersi in η e prendere

$$xp + \eta q = xp + \beta(x)\cdot yq$$

Abbiamo poi

$$(p,\ xp + \beta(x) yq) = p + \beta' yq$$

onde si rileva che β' è una costante e possiamo prendere

$$xp + \eta q = xp + axyq \quad (a \text{ costante})$$

Ora

$$(x^{m_i} e^{\alpha_i x} q,\ xp + axyq) = \{(a - \alpha_i) x^{m_i+1} e^{\alpha_i x} - m_i x^{m_i} e^{\alpha_i x}\} q,$$

dunque

$$\alpha_i = a$$

e le generatrici di A_r sono

$$e^{ax} q,\ xe^{ax} q \dots x^{r-4} e^{ax} q,\ yq,\ p,\ xp + axyq$$

Cangiando y in $e^{-ax} y$ queste diventano

$$q,\ xq \dots x^{r-4} q,\ yq,\ p - ayq,\ xp$$

e si può fare $a = 0$ - Così abbiamo il gruppo del tipo

i) $\boxed{q,\ xq, \dots x^{r-4} q,\ yq,\ p,\ xp}$

Caso δ')

Le generatrici del gruppo sono

$$q,\ yq,\ y^2 q,\ p,\ xp + \eta q;$$

abbiamo

$$(q,\ xp + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q$$

e quindi $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ è un polinomio di 2° grado in y, cioè

$$\eta = ay^3 + by^2 + cy + \theta(x)$$

I termini in y, y^2 possono sopprimersi in η comparendo già yq. y^2q in G_4; rimane

$$xp+\eta q = xp+(ay^3+\theta(x))q.$$

Ora

$$(yq\,.\,xp+(ay^3+\theta(x))q) = (2ay^3-\theta(x))q$$

onde $a=0$ e θ è una costante, che si può assumere $=0$.
Così abbiamo il gruppo G_4 del tipo

j) $\boxed{q\,.\,yq\,.\,y^2q\,.\,p,\,xp}$

Caso in cui $r=2$

In quest'ultimo caso il gruppo è

$$\boxed{p\,.\;xp+\eta q}$$

e la trasformazione alternata

$$(p\,,\,xp+\eta q) = p+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$

deve ridursi a p per cui $\frac{\partial\eta}{\partial x}=0$, cioè η è una funzione della sola y. Questa non può esser nulla, altrimenti il gruppo sarebbe intransitivo. Cangiando la variabile y troviamo così il tipo:

k) $\boxed{p\,,\,xp+q}$

§ 138
Caso in cui Γ ha tre parametri

Se r trasformazioni generatrici di G_r siano al solito

$$X_k f = \xi_k(x)p + \eta_k(x,y)q$$
$$k = 1, 2 \dots r$$

Il gruppo associato Γ generato dalle

$$\xi_k(x).p$$

avendo tre parametri, fra quattro qualunque delle ξ passa una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Con un cangiamento della variabile x si può ridurre Γ alla forma

$$\Gamma \equiv \boxed{p,\ xp,\ x^2p}\ ,$$

quindi le $X_k f$ hanno la forma

$$X_k f = (a_k x^2 + b_k x + c_k)p + \eta_k(x,y)q.$$

le a, b, c essendo costanti. Possiamo quindi assumere le generatrici di G_r sotto la forma

(5) $\quad \eta_1 q,\ \eta_2 q, \dots \eta_{r-3} q,\ p + \eta_{r-2} q,\ xp + \eta_{r-1} q,\ x^2p + \eta_r q$

Le prime $r-1$ di queste generano un sottogruppo G_{r-1} che appartiene al caso del paragrafo precedente se è transitivo. Cangiando la variabile y, con che non muta la forma dell'ultima trasformazione, possiamo ridurre il G_{r-1} ad uno dei tipi

g) h), i) j)

sopra esaminati. Alle corrispondenti generatrici dovremo aggiungere la trasformazione

$$x^2p + \eta q$$

in guisa da ottenere il G_r richiesto

Caso g')

Abbiamo le r trasformazioni

$$q, xq, x^2q, \dots x^{r-4}q, p, xp + ayq, x^2p + \eta q$$

e formando in primo luogo

$$(q, x^2p + \eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial y} q$$

$$(p, x^2p + \eta q) = 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x} q$$

ne risulta

$$\eta = (a_0 x^{r-4} + a_1 x^{r-5} + \dots + a_{r-4}) y + \theta(x)$$

e

$$(p, x^2p + \eta q) = 2xp + \{[(r-4)a_0 x^{r-5} + \dots + a_{r-5}] y + \theta'(x)\} q$$

onde segue

$$a_0 = 0, \ a_1 = 0, \dots a_{r-6} = 0, \ a_{r-5} = 2a$$

$$\eta = (2ax + b) y + \theta(x)$$

con $\theta(x)$ polinomio di grado $r-3$ in x

Poi essendo

$$(x^{r-4}q, x^2p + \eta q) = \{(2a - (r-4)) x^{r-3} + b x^{r-4}\} q$$

deduciamo

$$2a = r - 4$$

In $\theta(x)$ possiamo omettere i termini di grado inferiore a $r-3$ e prendere

$$\eta = \{(r-4)x+b\}y + cx^{r-3}$$

Le due ultime trasformazioni sono

$$xp + \frac{r-4}{2}yq \quad , \quad x^2p + \{[(r-4)x+b]y + cx^{r-3}\}q$$

e combinate danno

$$x^2p + \{(r-4)xy + \frac{r-2}{2}cx^{r-3}\}q$$

Questa deve dunque essere eguale all'ultima trasformazione e per ciò si ha

$$b=0 \quad , (r-4)c=0$$

Se $c=0$, raddoppiando la penultima trasformazione, si ha il tipo:

l) $\boxed{q, xq, \dots x^{r-4}q, p, 2xp+(r-4)yq, x^2p+(r-4)xyq \quad r>3}$

Quando $c \neq 0$ ed $r=4$ abbiamo il tipo

m) $\boxed{q, p, xp, x^2p+cxq}$

Caso h')

Abbiamo le trasformazioni generatrici

$$q, xq, \dots x^{r-4}q, p, xp+[(r-3)y+x^{r-3}]q, x^2p+\eta q.$$

Come nel caso g') se ne trae dapprima che si può porre

$$\eta = ay + (r-4)xy + \theta(x)$$

e formando

$$(p, x^2p+\eta q) = 2xp + \frac{\partial \eta}{\partial x}q =$$
$$= 2xp + \{(r-4)y + \theta'(x)\}q,$$

vediamo che questa dovrebbe essere la penultima trasformazione duplicata, onde seguirebbe

$$r-4 = 2(r-3),$$

cioè $r=2$ – Questo caso è adunque impossibile.

(Caso i')

Abbiamo le trasformazioni

$$q,\ xq \ldots x^{r-5}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+\eta q$$

Ora

$$(q,\ x^2p+\eta q) = \frac{\partial\eta}{\partial y}q,$$

quindi

$$\eta = (a_0x^{r-5}+a_1x^{r-4}+\ldots a_{r-5})y + ay^2 + \theta(x)$$

Da

$$(yq,\ x^2p+\eta q) = \left(y\frac{\partial\eta}{\partial y}-\eta\right)q = (ay^2-\theta)q$$

segue $a=0$ e si può omettere $\theta(x)$ in η, poichè $\theta.q$ è già nel gruppo; resta

$$x^2p+\eta q = x^2p + (a_0x^{r-5}+\ldots+a_{r-5})y.q$$

Da

$$(p,\ x^2p+\eta q) = 2xp + \{(r-5)a_0x^{r-6}+\ldots+a_{r-6}\}yq$$

segue

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{r-7} = 0,$$

onde l'ultima trasformazione diventa

$$x^2p + (a_{r-6}x + a_{r-5})yq$$

Omettendo il termine yq, comparendo già yq nel gruppo, abbiamo

$$x^2p+\eta q = x^2p + cxyq$$

In fine
$$(x^{r-5}q,\ x^2p+cxyq)=(c-r+5)x^{r-4}q$$
e per ciò $c=r-5$. Nel tipo attuato abbiamo dunque il gruppo

$$n)\quad \boxed{q,\ xq,\dots x^{r-5}q,\ yq,\ p,\ xp,\ x^2p+(r-5)xyq}$$

Caso j')

Le trasformazioni generatrici sono le 6
$$q,\ yq,\ y^2q,\ p,\ xp,\ x^2p+\eta q$$
Abbiamo
$$(q,\ x^2p+\eta q)=\frac{\partial\eta}{\partial y}q$$
$$(p,\ x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$
onde si rileva
$$\eta=\alpha y^3+\beta y^2+\gamma y+\delta x+\varepsilon$$
con $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ costanti. Di queste si possono porre nulle le β,γ,ε comparendo già
$$y^2q,\ yq,\ q$$
nel gruppo e resta
$$\eta=\alpha y^3+\delta x$$
Ora
$$(xp,\ x^2p+\eta q)=x^2p+\delta xq\,.$$
dunque $\delta=0$ e da
$$(y^2q,\ x^2p+\alpha y^3q)=\alpha y^4q$$
segue anche $\alpha=0$. Resta dunque il tipo

$$\boxed{q\,.\,yq\,.\,y^2q\,.\,p\,,\,xp,\,x^2p}$$

Caso k')

Perché le tre trasformazioni
$$p\,,\,xp+q\,,\,x^2p+\eta q$$
generino un gruppo, essendo
$$(p,\,x^2p+\eta q)=2xp+\frac{\partial\eta}{\partial x}q$$
$$(xp+q,\,x^2p+\eta q)=x^2p+\left\{x\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right\}q$$
dovremo avere
$$\eta=2x+\theta(y)$$
con $\theta'(y)=\theta(y)$, quindi $\theta=ae^y$.
Se $a=0$, abbiamo il tipo

$$q)\quad\boxed{p\,.\,xp+q\,,\,x^2p+2xq}$$

Quando $a\neq 0$ prendendo per nuova y la
$$\bar{y}=x+ae^y$$
abbiamo l'altro tipo

$$r)\quad\boxed{p+q\,.\,xp+yq\,.\,x^2p+y^2q}$$

Caso in cui G_{r-1} è intransitivo

Resta da ultimo a considerare il caso eventuale in cui il sottogruppo G_{r-1} considerato al principio del presente paragrafo sia intransitivo.
Ciò richiede che si abbia $r=3$ e le trasformazio-

ni generatrici saranno

$$p+\eta_1 q\,,\quad xp+\eta_2 q\,,\quad x^2p+\eta_3 q\,.$$

Ma il gruppo formato dalle prime due essendo intransitivo sarà $\eta_2 = x\eta_1$ - Cangiando la y ci riduciamo al gruppo

$$p\,.\; xp\,,\; x^2p+\eta q$$

Essendo

$$(p,\, x^2p+\eta q) = \frac{\partial \eta}{\partial x}\, q$$

$$(xp,\, x^2p+\eta q) = x^2p + x\frac{\partial \eta}{\partial x}\, q\,.$$

dobbiamo avere $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$, onde segue $\eta = 0$ - Il gruppo G_3 sarebbe dunque esso stesso intransitivo.

Così risultano effettivamente trovati tutti i possibili tipi di gruppi continui finiti del piano.

Per gli imprimitivi resterebbe ancora da risolvere la questione di ridurre questi tipi al minimo numero riconoscendo quali dei tipi trovati sono equivalenti fra loro - Rimandiamo per questa ricerca all'opera stessa del Lie (*).

(*) Lie-Engel III pag. 58 e seg^ti -

Capitolo XI°

Prime applicazioni della teoria dei gruppi continui finiti ai problemi d'integrazione delle equazioni differenziali —

§ 139
Preliminari

Nei capitoli precedenti abbiamo cercato di far conoscere le parti principali della teoria dei gruppi continui di trasformazioni, costruita da Lie. Converrebbe ora che ci occupassimo delle applicazioni analitiche e geometriche di queste teorie, che sono numerose ed importanti. Ma la ristrettezza dei limiti imposti ad un corso obbligandoci ad una scelta, noi daremo qui la preferenza alle applicazioni che riguardano i problemi d'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie. Esporremo in questo primo capitolo quelle prime ricerche di Lie sulla integrazione delle equazioni differenziali, con un gruppo noto di trasformazioni in se medesime, che hanno accompagnato, ed in certe parti determinato, lo sviluppo della teoria dei gruppi continui.

In generale diciamo che nei problemi d'integrazione la teoria dei gruppi continui compie un ufficio analogo a quello della teoria dei gruppi di sostituzioni nello studio delle equazioni algebriche secondo Galois.

Queste interessanti relazioni appaiono nel modo più evidente nelle applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari che Picard iniziò, e Picard stesso e Vessiot svolsero poi parallelamente alla nota teoria di Galois. Di queste tratteremo nel prossimo capitolo.

Ritorniamo alle prime ricerche di Lie sulle equazioni differenziali, già sopra accennate e delle quali ora vogliamo occuparci. I noti metodi che per certe classi di equazioni differenziali conducono alla risoluzione per quadrature, o all'abbassamento delle equazioni stesse, si presentarono ai matematici sino dal primo sviluppo della teoria. Essi sembravano per altro dovuti più ad una felice ispirazione che non conseguenze di principii generali. Il Lie coordinò la massima parte di questi metodi sotto un unico principio, dimostrando che il successo dipendeva quasi sempre dal fatto che era noto, od immediatamente visibile, un gruppo continuo di trasformazioni ad uno o più parametri, ammesso dall'equazione differenziale, cioè tale che le sue trasformazioni finite riconducevano l'equazione in-de stessa - Così è sorta una teoria della integrazione delle equazioni differenziali con un gruppo noto di trasformazioni in se medesime. Noi ci proponiamo nel presente capitolo di compendiarne brevemente i risultati, che si trovano diffusamente esposti nel libro di Lie - Scheffers: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen -

§ 140

Equazioni differenziali del primo ordine che ammettono un gruppo Xf

Cominciamo le nostre ricerche dal caso più semplice di un'equazione differenziale del primo ordine

$$f(x, y, y') = 0$$

che supponiamo inoltre dapprima risoluta rispetto alla derivata $y' = \frac{dy}{dx}$ e scriviamo quindi sotto la forma

$$(1) \qquad \beta dx - \alpha dy = 0$$

essendo α, β funzioni note di x, y - Se $\omega(x, y)$ è un integrale della (1) il sistema ∞^1 di curve integrali

$$(\Sigma) \qquad \omega(x, y) = \text{cost}^{\text{te}}$$

da' una divisione del piano – Diciamo che l'equazione differenziale (1) ammette un gruppo G_r di trasformazioni quando ogni trasformazione di G_r cangia in se medesimo il sistema di curve (2), cioe' cangia ogni curva integrale in un' altra curva integrale; in altre parole l'equazione differenziale (1) ammette il gruppo G_r, quando la divisione (2) del piano fornita dalle curve integrali é una divisione d'imprimitività rispetto al gruppo (§ 51) –

Consideriamo dapprima il caso di un gruppo G_1 ad un parametro e sia

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

la sua trasformazione infinitesima generatrice – I risultati ottenuti ai §§ 51. 52 conducono subito ai criterii che permettono di decidere se l'equazione differenziale (1) ammette il gruppo

$$G_1 \equiv Xf$$

Basta per ciò ricordare che l'integrazione della (1) é perfettamente equivalente a quella dell'equazione associata a derivate parziali

$$(3) \qquad Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

nel senso che ogni integrale della (1) é una soluzione della (3) e viceversa – I teoremi stabiliti al § 52 ci danno quindi subito i criterii seguenti.

I) – L'equazione differenziale (1) ammette il gruppo Xf allora ed allora soltanto quando applicando l'opera_ zione X ad un integrale ω della (1) il risultato $X\omega$ è funzione di ω stessa, cioè un altro integrale.

L'applicazione di questo criterio richiede la previa integrazione della equazione differenziale.

Ma abbiamo altresì l'altro criterio:

II) Affinchè l'equazione differenziale (1) ammetta il gruppo ad un parametro Xf, è necessario e sufficiente che fra le operazioni Af, Xf sussista un'identità della forma

$$(XA) = \lambda Af \qquad (4)$$

essendo λ una funzione di x, y.

Per applicare questo criterio basta evidentemente conoscere l'equazione differenziale e la trasformazione infinitesima Xf.

In ogni caso la questione proposta si riporta dal gruppo G_1 alla trasformazione infinitesima generatrice Xf, ciò che possiamo esprimere dicendo che la equazione differenziale ammette il gruppo G_1 quando ne ammette la trasformazione infinitesima generatrice Xf.

Un'osservazione è subito necessaria. Per qualunque equazione differenziale (1) si possono immediatamente assegnare infinite trasformazioni infinitesime Xf ammesse dall'equazione; se prendiamo infatti

$$Xf = \rho \cdot Af,$$

dove ρ è un fattore qualunque di proporzionalità funzione di x, y, si vede subito, applicando il criterio I) o II), che la trasformazione infinitesima $\rho . Af$ cangia l'equazione differenziale (1) in se medesima - È evidente che in tal caso il gruppo G_1 generato dalla $\rho . Af$ cangia non solo il sistema delle curve integrali (2) in se medesimo, ma singolarmente ogni curva integrale in se stessa. Diremo di una tale trasformazione infinitesima che essa non è essenziale per l'equazione differenziale. Al contrario diremo essenziale la trasformazione infinitesima Xf, ammessa dall'equazione differenziale (1), quando non sia proporzionale alla Af, ossia quando le traiettorie del gruppo Xf non coincidano colle curve integrali della (1) - Ciò equivale a dire che consideriamo come essenziale la trasformazione infinitesima Xf quando il gruppo G_1 da questa generato permuta effettivamente fra loro le curve integrali (2) -

§ 141

Relazione fra le trasformazioni infinitesime essenziali ed i fattori integranti

Supponiamo che della equazione differenziale (1)

$$(1) \qquad \beta dx - \alpha dy = 0$$

si conosca una trasformazione infinitesima essenziale

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Essendo ω un integrale della (1), ossia una soluzione dell'equazione aggiunta (3), avremo

$$A\omega = 0 \;, \quad X\omega = F(\omega)$$

essendo F una funzione di ω che non può ridursi a zero, altrimenti la Xf non sarebbe essenziale contro l'ipotesi. Cangiando ω in una sua conveniente funzione possiamo rendere [*]

$$X\omega = 1$$

e dalle due equazioni simultanee

$$\begin{cases} \xi \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 1 \\ \alpha \dfrac{\partial \omega}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial \omega}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

---

[*] Si ha infatti

$$X(\theta(\omega)) = \theta'(\omega) X\omega$$

e facendo $\theta'(\omega) = \frac{1}{F(\omega)}$ o $\theta = \int \frac{d\omega}{F(\omega)}$ si avrà

$$X(\theta(\omega)) = 1$$

si trae

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\beta}{\beta\xi - \alpha\eta} \; , \; \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{-\alpha}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

cioè

$$d\omega = \frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

Questo dimostra che il fattore

$$M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un moltiplicatore, o fattore integrante, del primo membro dell'equazione differenziale.

Abbiamo così il teorema fondamentale:

A) Se l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesima essenziale

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} \, ,$$

l'espressione

$$M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un fattore integrante dell'equazione differenziale.

La conoscenza di quella trasformazione infinitesima riduce alle quadrature l'integrazione della proposta colla formola

$$\int \frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta} = \text{cost}^{te}.$$

Al medesimo risultato si può arrivare anche dalla formola (4) che assegna la condizione perchè l'equazione differenziale (1) ammetta la trasformazione infinitesima Xf – La (4) sviluppata ci dà infatti

$$(5)\qquad \frac{X\alpha - A\xi}{\alpha} = \frac{X\beta - A\eta}{\beta},$$

che si può scrivere sotto la forma equivalente

$$(5^*)\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\beta\xi - \alpha\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\beta x - \alpha\eta}\right) = 0$$

ed esprime appunto che l'espressione

$$\frac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

è un differenziale esatto —

Esempi

Applichiamo subito questi primi risultati ad alcuni esempi semplici:

1° Nell'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

i coefficienti α, β siano funzioni omogenee del medesimo grado di x, y, ossia l'equazione abbia la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Essa ammette evidentemente la trasformazione infinitesima

$$Xf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$$

generatrice del gruppo d'omotetia rispetto all'origine ed ha quindi il fattore integrante

$$M = \frac{1}{\beta x - \alpha y}$$

2° Si consideri nel piano xy una curva qualunque e se ne deduca un sistema ∞^1 di curve assoggettando la curva data ad una traslazione continua, ovvero ad una rotazione continua attorno ad un punto. Questo sistema di curve ammetterà quindi un gruppo G_1 noto di movimenti. —

Si proponga ora il problema di trovare le traiettorie ortogonali di questo sistema di curve, o più in generale le loro traiettorie sotto un angolo fisso dato. Si ha così, per determinare queste traiettorie, un'equazione differenziale del 1° ordine, che ammette evidentemente questo G_1 e per ciò si integra con quadrature. Le medesime deduzioni valgono sostituendo al G_1 di movimenti un G_1 di trasformazioni conformi, p. e. l'omotetia continua rispetto ad un punto fisso.

§ 142
Determinazione di tutte le trasformazioni infinitesime ammesse da una data equazione differenziale

Il risultato contenuto nel teorema A) può facilmente invertirsi nel modo seguente. Se M è un fattore integrante di $\beta dx - \alpha dy$ e si prendono ξ, η in guisa che sia

$$\beta\xi - \alpha\eta = \frac{1}{M}$$

l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammetterà la trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

E infatti essendo $\dfrac{\beta dx - \alpha dy}{\beta\xi - \alpha\eta}$ un differenziale esatto, è soddisfatta la (5*), ossia l'equivalente (5); e questa esprime appunto che l'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

ammette la trasformazione infinitesima $\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$ -

Ora è ben noto che esistono infiniti fattori integranti M di un'espressione differenziale $\beta dx - \alpha dy$ e precisamente se M_1 è uno di essi ed ω è l'integrale di $\beta dx - \alpha dy = 0$, il più generale fattore integrante M è dato da

$$M = M_1 \cdot \theta(\omega)$$

dove θ è una funzione arbitraria dell'argomento ω.

Ne risulta che ogni equazione differenziale del primo ordine ammette infinite trasformazioni infinitesime in sè medesima (dipendenti da funzioni arbitrarie); queste formano, come vedremo ora più da vicino, un gruppo continuo infinito nel senso di Lie, determinato dall'equazione differenziale stessa - Intanto cerchiamo la più generale trasformazione infinitesima Xf in questione, supposta ne nota una particolare $X_1 f$, che sia per altro essenziale -

Se
$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$
sarà

$$M_1 = \frac{1}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1}$$

un particolare fattore integrante e quindi il più generale M sarà

$$M = \frac{M_1}{\theta(\omega)},$$

essendo $\theta(\omega)$ funzione arbitraria di ω - Pel teorema A) ed il suo inverso, la più generale trasformazione infinitesima cercata Xf si avrà determinando ξ, η da

$$\beta\xi - \alpha\eta = \frac{1}{M} = \theta(\omega)(\beta\xi_1 - \alpha\eta_1)$$

ossia

$$\frac{\xi - \theta(\omega)\xi_1}{\alpha} = \frac{\eta - \theta(\omega)\eta_1}{\beta}$$

ciò che dà

$$\begin{cases} \xi = \theta(\omega)\xi_1 + \rho\alpha \\ \eta = \theta(\omega)\eta_1 + \rho\beta, \end{cases}$$

essendo ρ una funzione, che può essere qualunque, di x, y - Si ha quindi

$$Xf = \theta(\omega) \cdot X_1 f + \rho Af.$$

cioè il teorema:

B) Se $X_1 f$ è una trasformazione infinitesima essenziale dell'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

e si pone

$$Af = \alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}$$

l'espressione più generale Xf di una trasformazione infinitesima dell'equazione stessa è data da

$$(6) \qquad Xf = \theta(\omega) X_1 f + \rho A f$$

dove $\theta(\omega)$ è una funzione arbitraria dell' integrale ω dell' equazione differenziale e ρ una funzione arbitraria di x, y —

Le infinite trasformazioni infinitesime Xf generano un gruppo continuo infinito di Lie (§ 36), le equazioni di definizione di questo gruppo si riducono qui all' unica (5) che sviluppata si scrive:

$$\beta \left\{ \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \eta \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right\} =$$

$$= \alpha \left\{ \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial \eta}{\partial y} - \xi \frac{\partial \beta}{\partial x} - \eta \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\}$$

È facile riconoscere in effetto che ad una tale equazione di definizione appartiene la proprietà caratteristica c) § 35, che cioè se

$$(\xi_1, \eta_1) \quad (\xi_2, \eta_2)$$

ne sono soluzioni, anche

$$\bar{\xi} = \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y}$$

$$\bar{\eta} = \xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$$

ne sono nuovamente soluzioni — Nel modo più semplice riconosciamo ciò applicando il criterio I) § 140, onde segue che se l'equazione differenziale ammette le trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

ammette anche l'alternata $(X_1 X_2)$ -

Si osservi ancora che nella formola (6) che lega due trasformazioni infinitesime qualunque Xf, $X_1 f$ dell'equazione differenziale il coefficiente $\theta(\omega)$ è il quoziente $\frac{M_1}{M}$ dei due rispettivi fattori integranti

$$M_1 = \frac{1}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1}, \quad M = \frac{1}{\beta\xi - \alpha\eta}$$

Riguardiamo Xf, $X_1 f$ come effettivamente diverse rispetto all'equazione differenziale quando $\theta(\omega)$ è un'effettiva funzione di ω, non una costante; in caso contrario diremo Xf, $X_1 f$ equivalenti. Si vede subito che due trasformazioni equivalenti trasformano nel medesimo modo le curve integrali -

Dopo ciò possiamo enunciare il teorema.

Se

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

sono due trasformazioni distinte (non equivalenti) dell'equazione differenziale $\beta dx - \alpha dy = 0$, si ha immediatamente un integrale, senza quadrature, dal quoziente

$$\frac{\beta\xi - \alpha\eta}{\beta\xi_1 - \alpha\eta_1}$$

Il risultato principale conseguito nel presente paragrafo consiste in questo che: ogni equazione dif.

ferenziale del 1º ordine possiede un gruppo continuo infinito di trasformazioni in sè stessa.

Invece si vedrà che le equazioni differenziali d'ordine superiore solo eccezionalmente ammettono gruppi continui di trasformazioni (cf. §.156)

§.143
Interpretazione geometrica dei fattori integranti

Alle relazioni sopra studiate fra i fattori integranti di un'equazione differenziale

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

e le sue trasformazioni infinitesime si lega una elegante interpretazione geometrica data da Lie pei fattori integranti. - Sia M un fattore integrante di $\beta dx - \alpha dy$, talché

$$M(\beta dx - \alpha dy)$$

sarà il differenziale esatto di una funzione di x, y che indicheremo con u:

$$(\alpha) \qquad M(\beta dx - \alpha dy) = du$$

Consideriamo altresì le traiettorie ortogonali delle curve integrali dell'equazione data: esse hanno per equazione differenziale

$$\alpha dx + \beta dy = 0$$

e sia N un fattore integrante di $\alpha dx + \beta dy$, sicché

$$(\beta) \qquad N(\alpha dx + \beta dy) = dv,$$

dove v è una funzione di x, y – Le due funzioni u, v sono evidentemente fra loro indipendenti e possono essere scelte a nuove variabili in luogo di x, y – Calcoliamo l'elemento lineare

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

in coordinate (curvilinee) u, v. dalle (α), (β) abbiamo

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\beta N du + \alpha M dv}{(\beta^2 + \alpha^2) MN} \\[2ex] dy = \dfrac{-\alpha N du + \beta M dv}{(\beta^2 + \alpha^2) MN} \end{cases}$$

e quindi

$$(\gamma) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{1}{\beta^2 + \alpha^2} \left\{ \frac{du^2}{M^2} + \frac{dv^2}{N^2} \right\}$$

Se indichiamo con ds_v l'elemento lineare delle linee $v = \text{cost}^{te}$, traiettorie ortogonali delle curve integrali dell'equazione differenziale data, abbiamo dalla (γ)

$$ds_v = \frac{du}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \cdot M},$$

cioè

$$\frac{1}{M} = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} \frac{ds_v}{du}.$$

L'inversa del fattore integrante M risulta così decomposta nel prodotto di due fattori

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \frac{ds_v}{du}$$

Il primo $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ è già fissato dall'equazione differenziale; il secondo è proporzionale a ds_v cioè al_ la distanza infinitesima normale di una curva integrale $u = cost^e$ dalla successiva $u+du$ — Cangiando u in una funzione di u, il fattore integrante si muta in un qualunque altro —

Di questa interpretazione geometrica diamo due semplici applicazioni —

1°

Supponiamo che le curve integrali $u = cost^e$ della equazione

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$

siano parallele, cioè le loro traiettorie ortogonali siano rette — Allora il tratto infinitesimo di normale compreso fra una curva u e la successiva $u+du$ è costante e per ciò sarà $M = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ un fattore integrante. Dunque: Condizione necessaria e sufficiente affinchè le curve integrali dell'equazione $\beta dx - \alpha dy = 0$ siano parallele è che l'espressione

$$\frac{\beta dx - \alpha dy}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

risulti un differenziale esatto.

2°

Le curve integrali delle due equazioni differenziali

$$\beta dx - \alpha dy = 0$$
$$\alpha dx + \beta dy = 0$$

formano un doppio sistema ortogonale — Questo dicesi isotermo se divide il piano in quadrati infinitesimi

Perchè ciò sia, è necessario e sufficiente che nella (7) risulti il coefficiente di du eguale a quello di dv, cioè $M = N$ - Le due espressioni differenziali

$$\beta dx - \alpha dy,\quad \alpha dx + \beta dy$$

hanno dunque in tal caso un fattore integrante comune M. Scrivendo le relative condizioni

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (M\beta)}{\partial y} + \dfrac{\partial (M\alpha)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial (M\alpha)}{\partial y} - \dfrac{\partial (M\beta)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial \log M}{\partial x} + \beta \dfrac{\partial \log M}{\partial y} = -\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial \beta}{\partial y}\right) \\ -\beta \dfrac{\partial \log M}{\partial x} + \alpha \dfrac{\partial \log M}{\partial y} = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} \end{cases}$$

se ne traggono i valori di $\dfrac{\partial \log M}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \log M}{\partial y}$ in funzione di x, y e quindi $\log M$ con una quadratura. Dunque: Se le curve integrali di $\beta dx - \alpha dy = 0$ appartengono a un doppio sistema ortogonale isotermo, si avranno con quadrature le equazioni in termini finiti delle curve stesse e delle loro traiettorie ortogonali -

§ 144
Caso di equazioni del 1° ordine non risolute rapporto ad y'

In ciò che precede abbiamo sempre supposto che l'equazione differenziale del 1° ordine fosse risoluta rispetto alla derivata prima y'. Ma molte volte accadrà che tale risoluzione non si sappia o non si possa eseguire, e converrà stabilire ancora dei criterii per riconoscere se la data equazione differenziale ammette un dato gruppo e dei processi per trovare le equazioni differenziali che ammettono un dato gruppo – Gli studî che abbiamo fatto nel Cap. IX sui gruppi prolungati agli elementi lineari e sugli invarianti differenziali ci pongono in grado di risolvere, in tutta generalità, questi problemi –

Scriviamo una generale equazione del 1° ordine sotto la forma

$$(8) \qquad \Omega(x, y, y') = 0$$

Essa stacca dalla totalità ∞^3 di elementi lineari del piano una doppia infinità di tali elementi, ed il problema d'integrazione consiste nell'ordinare questi ∞^2 elementi lineari in ∞^1 serie, costituite ciascuna dagli ∞^1 elementi lineari di una curva –

Osserviamo che la (8) sarà un' effettiva equazione differenziale solo quando Ω contenga effettivamente y' -

Però anche se Ω contiene solo x, y la (8) definisce sempre una doppia infinità di elementi lineari del piano e precisamente tutti quelli che escono dai punti della curva $\Omega(x, y) = 0$ -

Poniamo ora di voler riconoscere se l'equazione differenziale (8) ammette il gruppo ad un parametro G_1 generato dalla trasformazione infinitesima:

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Per le trasformazioni di G_1 gli elementi lineari del piano vengono permutati fra loro secondo le trasformazioni del gruppo prolungato $G_1^{(1)}$ (§ 112) generato dalla trasformazione infinitesima prolungata

$$X^{(1)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y'},$$

dove il coefficiente η_1 si calcola, secondo i risultati del § 119, dalla formola

$$\eta_1 = \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2$$

Perchè l'equazione differenziale (8) ammetta il gruppo G_1, è necessario e sufficiente che riguardando x, y, y' come tre variabili indipendenti, l'equazione $\Omega(x, y, y') = 0$ ammetta il gruppo $G_1^{(1)}$, cioè che la superficie

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

sia invariante rispetto al gruppo $G_1^{(1)}$ - Basta applicare i criterii generali stabiliti al § 44 per dedurne il teorema fondamentale:

Affinchè l'equazione differenziale del 1° ordine fra x, y

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

ammetta il gruppo ad un parametro

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

è necessario e sufficiente che l'equazione

$$\xi \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial \Omega}{\partial y'} = 0$$

sia una conseguenza della $\Omega = 0$

Naturalmente se l'equazione $\Omega(x, y, y') = 0$ è scritta sotto forma risoluta

$$\beta - \alpha y' = 0,$$

applicando il criterio precedente si ritrova la (5) del § 141, come è facile verificare.

§ . 145

Determinazione delle equazioni di 1° ordine che ammettono un dato G_r

---

Dopo le osservazioni fondamentali del paragrafo precedente, dato un gruppo G_r su due variabili x, y, la ricerca delle equazioni differenziali del 1° ordine che ammettono il gruppo G_r è ridotta ad una questione che abbiamo già imparato a risolvere nel Cap.

IV - Se costruiamo infatti il gruppo prolungato $G_r^{(1)}$ agli elementi lineari e riguardiamo x, y, y' come variabili indipendenti, il problema equivale a ricercare tutte le superficie invarianti rispetto al gruppo $G_r^{(1)}$ - Quando le equazioni finite di G_r, e quindi quelle di $G_r^{(1)}$, siano note il problema si risolve con processi algebrici, e se sono date le trasformazioni infinitesime generatrici di G_r mediante integrazione di sistemi completi.

In particolare cerchiamo tutte le equazioni di 1° ordine

$$\Omega(x, y, y') = 0$$

che ammettono il G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dovremo costruire il gruppo prolungato $G_1^{(1)}$ generato da

$$X^{(1)}f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\} \frac{\partial f}{\partial y'}$$

e cercare, nello spazio generato dalle tre variabili x, y, y', le superficie invarianti rispetto a $G_1^{(1)}$ - In ordine di risultati generali del Cap. IV queste superficie invarianti o sono luoghi di ∞^1 trajettorie del gruppo $G_1^{(1)}$ o sono costituite da punti tutti invarianti - Ma siccome escludiamo il caso delle equazioni $\Omega = 0$ non contenenti y', quest'ultimo caso non può presentarsi, per ogni punto invariante rispetto a $G_1^{(1)}$

dovendo aversi simultaneamente

$$\xi=0, \quad \eta=0$$

Secondo il risultato finale del § 47 troveremo tutte le cercate equazioni $\Omega(x\, y\, y')=0$ costruendo i due invarianti del gruppo $G_1^{(1)}$ a tre variabili x, y, y' e ponendo l'uno eguale ad una funzione arbitraria dell'altro. Rispetto al gruppo dato G_1 possiamo dunque dire: Tutte le equazioni differenziali del 1° ordine invarianti rispetto a G_1 si ottengono eguagliando a zero un invariante differenziale del 1° ordine di G_1 stesso.

Gli invarianti indipendenti di $G_1^{(1)}$ sono due, che diciamo u, v. Pel primo u si può prendere la soluzione $u(x,y)$ dell'equazione

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

sicchè le curve $u=$ cost^{te} sono le trajettorie di G_1 e il secondo invariante $v(x,y,y')$ (che sarà un effettivo invariante differenziale del 1° ordine di G_1) sarà l'ulteriore soluzione dell'equazione

$$(9)\qquad X^{(1)}F=\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$$

(cf. § 119). La forma più generale di un'equazione differenziale del 1° ordine che ammette il gruppo G_1 sarà allora

$$(10)\qquad v-\varphi(u)=0$$

ove $\varphi(u)$ è una funzione arbitraria di u.

Importa ora osservare che: noto l'invariante ordinario u, l'invariante differenziale v si calcolerà con una quadratura.

E infatti la ricerca delle soluzioni della (9) equivale all'integrazione del sistema simultaneo

$$(11) \qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2}$$

di cui è già noto per ipotesi un integrale

$$(12) \qquad u(x, y) = c \qquad (c \text{ costante})$$

Eliminando dalle (11) p. e. la y per mezzo della (12) si ha l'equazione differenziale del tipo di Riccati

$$(12^*) \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\xi} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} y'^2 \right\},$$

contenente il parametro c. Ma di questa ci è già nota la soluzione particolare

$$y' = \frac{\eta}{\xi},$$

come si verifica facilmente osservando che dalla (11) si trae appunto per y' questo valore e d'altronde

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{\partial y'}{\partial x} + y' \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\eta}{\xi}\right) + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

e sostituendo nella (12*) si trova subito identicamente verificata (*). Poiché dunque conosciamo della equazione di Riccati (12*) un integrale particolare, avremo

---

(*) Si può anche riconoscere a priori questo fatto osservando che gli ∞^2 elementi lineari delle curve $u = c$, traiettorie di G_1, formano una varietà invariante rispetto a $G_1^{(1)}$, cioè danno un integrale del sistema simultaneo (11) -

anche con quadrature l'integrale generale.

Così abbiamo dimostrato: Data la trasformazione infinitesima generatrice Xf di un gruppo G_1, e note le traiettorie di questo gruppo, si possono determinare con quadrature tutte le equazioni differenziali del 1° ordine che ammettono il gruppo G_1.

§ 146

Sistemi di equazioni differenziali e loro trasformazioni infinitesime

Volendo ora passare alla ricerca delle equazioni differenziali d'ordine superiore ed alle eventuali loro trasformazioni infinitesime, dobbiamo in primo luogo ricordare che ogni sistema di equazioni differenziali ordinarie si può ridurre, aumentando convenientemente il numero delle funzioni incognite, ad un sistema del 1° ordine della forma normale

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx_0}{\alpha_0} = \frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dx_2}{\alpha_2} = \dots = \frac{dx_n}{\alpha_n}$$

dove con x_0 si è indicata la variabile indipendente, con $x_1, x_2 \dots x_n$ n funzioni incognite di questa e le

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$$

sono funzioni note delle $n+1$ variabili $x_0\ x_1 \dots x_n$ —

Dobbiamo dunque occuparci dei gruppi continui di trasformazioni ammessi dal sistema (I), che cangiano cioè in se medesimo il sistema delle curve integrali della (I) nello spazio ad $n+1$ dimensioni $S_{n+1}' \equiv (x_0 x_1 \dots x_n)$

Alla considerazione del sistema (I) si può sostituire quella dell'equazione a derivate parziali associata

$$(\mathrm{II}) \qquad Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

della quale ogni soluzione dà un integrale del sistema (I) e viceversa.

Come al § 140 dobbiamo in primo luogo stabilire i criterii per riconoscere se il sistema differenziale (I), o l'equazione a derivate parziali associata $Af = 0$, ammette un gruppo G_1 ad un parametro di cui sia data la trasformazione infinitesima generatrice

$$Xf = \xi_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Basta applicare i risultati stabiliti al § 52 per dedurne i criterii richiesti sotto l'una o sotto l'altra delle due forme seguenti:

a) Perchè il sistema differenziale (I) ammetta il gruppo Xf, è necessario e sufficiente che, applicando l'operazione X ad un qualunque integrale $\omega(x_0 \dots x_n)$ di (I), il risultato $X\omega$ sia un altro integrale (o una costante).

b) Il sistema differenziale (I) ammette il gruppo Xf solo quando fra le due operazioni del primo ordine Xf, Af sussiste una identità della forma

$$(XA) = \lambda Af,$$

essendo λ una funzione di $x_0\ x_1 \dots x_n$.

Basta in ogni caso che il sistema differenziale ammetta la trasformazione infinitesima Xf perchè ammetta il gruppo G_1 da essa generato.

§ 147
Proprietà delle trasformazioni infinitesime ammesse da un sistema differenziale (I)

Per trattare i problemi fondamentali che abbiamo in vista conviene premettere uno studio sulle trasformazioni infinitesime ammesse da un sistema differenziale (I) o ciò che è lo stesso da un'equazione a derivate parziali (II) $Af=0$

Per maggiore chiarezza cominciamo dall'enunciare esplicitamente la seguente proprietà d'immediata evidenza - Se l'equazione a derivate parziali $Af=0$ ammette le q trasformazioni infinitesime $X_1f, X_2f \dots X_qf$ e con un cangiamento qualunque delle variabili $x_0\, x_1 \dots \dots x_n$ nelle $x'_0\, x'_1 \dots x'_n$ si cangiano rispettivamente $Af, X_1f \dots X_qf$ in $A'f, X'_1f, \dots X'_qf$, l'equazione

$$A'f=0$$

ammetterà le q trasformazioni infinitesime trasformate

$$X'_1f, X'_2f, \dots X'_qf$$

Dopo ciò dimostriamo il teorema:

1° Un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots\cdots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

a $n+1$ variabili $(x_0 \ldots x_n)$ ammette sempre n e non più trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_n f$$

non legate fra loro ed alla Af da una relazione della forma:

$$\mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \cdots\cdots + \mu_n X_n f + \lambda Af = 0$$

dove le μ e λ sono funzioni delle x.

E infatti, con una trasformazione di variabili, possiamo fare p. e.

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0}$$

e prendendo

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots\ldots \quad X_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

abbiamo subito le n trasformazioni infinitesime dotate delle proprietà richieste — Che poi non si possano avere più di $\underline{n}$ trasformazioni X indipendenti fra loro e dalla Af ciò è evidente perchè le variabili sono $n+1$.

Suppongasi ora di conoscere q trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots\ldots X_q f$$

ammesse dalla $Af = 0$; sussiste allora il teorema:

2° Qualunque trasformazione Xf della forma

$$Xf = \omega_1 X_1 f + \omega_2 X_2 f + \cdots\cdots + \omega_q X_q f + \lambda Af$$

dove le $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_q$ sono soluzioni della $Af = 0$ (o costanti) e λ una funzione arbitraria delle x sarà anche una trasformazione infinitesima della $Af=0$ _

Per vederlo basta applicare il criterio b) del paragrafo precedente, osservando che per ipotesi

(13) $(X_1 A) = \lambda_1 Af\,,\ (X_2 A) = \lambda_2 Af \ldots\ldots (X_q A) = \lambda_q Af$

onde risulta

(13*) $(X, A) = \left(\sum_i^q \omega_i X_i f + \lambda Af,\ Af\right) = \sum_i \omega_i \lambda_i Af - \sum_i A\omega_i X_i f - A\lambda . Af$

ossia (essendo $A\omega_i = 0$)

$$(X, A) = \left(\sum_i \omega_i \lambda_i - A\lambda\right). Af = \rho . Af$$

Ora di più trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f, \ldots X_q f$$

ammesse dalla $Af=0$ diremo che sono essenzialmente distinte solo quando fra di esse e la Af non sussiste alcuna identità lineare (a coefficienti variabili).

Se si pone

$$X_i f = \sum_k^{0\ldots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \ldots q)$$

saranno le $X_1 f, \ldots X_q f$ essenzialmente distinte quando la matrice

$$\left\|\begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots\ldots & \alpha_n \\ \xi_{10} & \xi_{11} & \ldots\ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{20} & \xi_{21} & \ldots\ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \xi_{q0} & \xi_{q1} & \ldots\ldots & \xi_{qn} \end{matrix}\right\|$$

abbia la caratteristica $q+1$ - In generale se la caratteristica é $r+1$ con $r<q$, r soltanto delle X saranno essenzialmente distinte e le $q-r$ rimanenti si comporranno linearmente con quelle r o con Af (*) -

Ciò premesso, veniamo a dimostrare un teorema che dà la proprietà inversa di quella stabilita nel teorema 2° e cioè:

3° Se X_1f, X_2f .... X_qf sono q trasformazioni infinitesime distinte ammesse dalla $Af=0$ e la $Af=0$ ammette ancora la trasformazione infinitesima

(14) $$Xf = \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f + \dots + \mu_q X_q f + \lambda Af$$

combinazione lineare delle X_1f .... X_qf e della Af i coefficienti $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_q$ saranno altrettante soluzioni di $Af=0$ (o costanti) -

Per il calcolo eseguito nelle (13*) si ha infatti

(*) Si noti che fra le $q+1$ forme lineari nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$:

$$X_1 f, \; X_2 f, \dots X_q f, \; Af$$

ve ne saranno precisamente $r+1$ indipendenti e fra queste si può sempre far figurare Af, perchè se p.e.

$$X_1 f, \; X_2 f \dots X_r f, \; X_{r+1} f$$

sono indipendenti sarà Af una loro combinazione lineare che possiamo sostituire ad una di esse, p.e. a $X_{r+1}f$ ed allora le $$X_1 f, X_2 f \dots X_r f, Af$$

sono indipendenti

$$(X,A)=\Big(\sum_i^{1\dots q}\lambda_i\mu_i-A\lambda\Big)\cdot Af-\sum_i^{1\dots q}A\mu_i\cdot X_if$$

e poiché per ipotesi (X,A) è proporzionale ad Af, avremo

$$\sum_i^{1\dots q}A\mu_i\cdot X_if=\rho\cdot Af$$

Ma, non sussistendo per ipotesi alcuna identità di questa forma fra $X_1f \dots X_qf$ ed Af si avrà necessariamente

$$A\mu_1=0,\quad A\mu_2=0\ \dots\ A\mu_q=0 \quad \text{c. d. d.}$$

Così il teorema è dimostrato applicando il criterio b) del paragrafo precedente. Possiamo dimostrarlo ancora applicando invece il criterio a), nel modo seguente. Siano $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$ n soluzioni indipendenti di $Af=0$. Sostituendo nella (14) per f successivamente $f=\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n$, avremo

$$(15)\qquad X\omega_i=\mu_1X_1\omega_i+\mu_2X_2\omega_i+\dots+\mu_qX_q\omega_i$$
$$(i=1,2\dots n);$$

ma $X_1\omega_i, X_2\omega_i \dots X_q\omega_i, X\omega_i$ sono altrettante soluzioni di $Af=0$ e se proviamo che la matrice delle n equazioni lineari (15) rispetto alle q incognite $\mu_1 \dots \mu_q$ ha precisamente la caratteristica q, sarà provato che le μ sono funzioni di soluzioni e quindi esse stesse soluzioni. Ora se la matrice

$$\left\| X_1\omega_i,\ X_2\omega_i \dots X_q\omega_i \right\|$$
$$i=1,2\dots n$$

avesse una caratteristica $<q$ si potrebbero determina-

re q tali funzioni a_i delle x da soddisfare alle relazioni

$$a_1 X_1 \omega_i + a_2 X_2 \omega_i + \dots\dots + a_q X_q \omega_i = 0$$

$$i = 1, 2 \dots\dots n$$

e perciò l'equazione a derivate parziali

$$a_1 X_1 f + a_2 X_2 f + \dots\dots + a_q X_q f = 0,$$

ammettendo tutte le n soluzioni di $Af = 0$ sussisterebbe, contro l'ipotesi, un'identità della forma

$$a_1 X_1 f + \dots\dots + a_q X_q f = \rho Af$$

Notiamo in fine il teorema seguente.

1: Se l'equazione $Af = 0$ ammette le due trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f$ ammetterà anche la trasformazione infinitesima alternata $(X_1 X_2)$.

La dimostrazione segue subito dal criterio a) 5°. ovvero dal criterio b) applicando l'identità Jacobiana.

§ 148

Integrazione di un'equazione $Af = 0$ di cui sia noto un certo numero di trasformazioni infinitesime

Servendoci dei risultati sopra stabiliti, veniamo ora a trattare la questione fondamentale seguente.

Data un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

(o un sistema differenziale (I)) e noto un certo numero di sue trasformazioni infinitesime, cercare le semplificazioni che se ne possono trarre per la integrazione della $Af=0$.

Le trasformazioni infinitesime note siano X_1f, X_2f, ... X_qf e supponiamole senz'altro distinte rispetto alla $Af=0$; altrimenti le ridurremmo al minimo numero di trasformazioni distinte. Se costruendo le trasformazioni alternate

$$(X_iX_k) \qquad i, k=1, 2 \dots q,$$

che sono pure ammesse dalla $Af=0$ (teorema 4° del paragrafo precedente), ne troviamo qualcuna distinta dalle X_1f, X_2f ... X_qf l'aggiungeremo alle precedenti e così continueremo formando le nuove trasformazioni alternate e così via, finchè ci ridurremo, come è chiaro al caso seguente.

Della $Af=0$ è noto un certo numero di trasformazioni distinte, diciamo ancora

$$X_1f, X_2f, \dots\dots X_qf,$$

tali che ogni trasformazione alternata

$$(X_iX_k) \qquad i, k=1, 2 \dots q$$

è una combinazione lineare omogenea

$$(16) \qquad \omega_1X_1f+\omega_2X_2f+\dots\dots+\omega_qX_qf+\lambda Af$$

di $X_1f, \dots\dots X_qf$, Af, le ω essendo soluzioni della $Af=0$ (teorema 3°).

Semplifichiamo ulteriormente le espressioni di $X_1f, X_2f \dots X_qf$ nel modo seguente — Supposto p. e. $\alpha_0 \neq 0$, sostituendo a ciascuna X_if una trasformazione equivalente

$$X_if + \rho Af$$

possiamo ridurla a mancare del termine in $\frac{\partial f}{\partial x_0}$ —

Così le $X_1f, X_2f \dots X_qf$ avranno tutte la forma

$$X_if = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \dots q)$$

e nelle espressioni alternate stesse (X_iX_k) mancherà il termine in $\frac{\partial f}{\partial x_0}$, cioè sarà nella (16) $\lambda = 0$, ossia

$$(X_iX_k) = \omega_1 X_1f + \omega_2 X_2f + \dots + \omega_q X_qf$$

I coefficienti ω in queste espressioni alternate sono soluzioni della $Af = 0$, ovvero costanti. Se sono tutte costanti ciò significa che le $X_1f, X_2f \dots X_qf$ sono le trasformazioni generatrici di un gruppo G_q sulle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ nelle cui equazioni finite entra inoltre come parametro l'$(n+1)^{ma}$ variabile x_0 — In caso contrario, se le ω ci forniscono r soluzioni indipendenti della $Af = 0$ (soluzioni che si hanno senza alcuna integrazione) potremo servirci di queste soluzioni note per abbassare l'ordine del problema.

Prendendo infatti queste r soluzioni come prime r variabili indipendenti $x'_0\, x'_1 \dots x'_{r-1}$, la Af si ridurrà ad

$$Af = \alpha'_r \frac{\partial f}{\partial x'_r} + \dots + \alpha'_n \frac{\partial f}{\partial x'_n} = 0$$

e da un problema d'ordine n saremo ridotti ad un problema d'ordine $n-r$.

Così o abbassiamo l'ordine del sistema differenziale proposto o ci riduciamo alla questione seguente:

Della equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

si conoscono q trasformazioni infinitesime distinte

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad i = 1, 2 \dots q$$

che soddisfano alle condizioni

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\dots q} c_{iks} X_s f$$

colle c costanti, e generano quindi un gruppo G_q sulle n variabili $x_1\, x_2 \dots x_n$, contenente inoltre il parametro x_0; si deve utilizzare nel miglior modo la conoscenza di queste trasformazioni per la integrazione della $Af = 0$.

Un'ulteriore osservazione ci permette di ridurci al caso in cui il numero q di queste trasformazioni infinitesime è precisamente $= n$. Se infatti $q<n$ le $q+1$ equazioni

$$Af = 0,\ X_1 f = 0,\ X_2 f = 0 \dots X_q f = 0$$

hanno $n-q$ soluzioni comuni che si trovano integrando un sistema differenziale d'ordine $n-q$. Prendendo queste $n-q$ soluzioni, insieme ad altre $q+1$ funzioni delle x, come nuove variabili indipendenti, ci riduciamo al caso di una equazione $A'f=0$ a $q+1$ variabili di cui sono note q trasformazioni distinte.

§ 149
Equazioni $Af=0$ a gruppo G_n integrabile

Le considerazioni del paragrafo precedente riducono la questione al seguente problema normale:

È data l'equazione di $n+1$ variabili

$$Af = \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

e se ne conoscono n trasformazioni infinitesime distinte (*)

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

generatrici di un gruppo G_n. Si cercano le semplificazioni che la conoscenza di questo gruppo di trasformazioni permette di apportare al processo d'integrazione.

Cominciamo qui dal trattare il caso più semplice

(*) Ciò equivale a dire che il determinante delle ξ_{ik} non è nullo, che cioè G_n è transitivo.

in cui il gruppo G_n è integrabile secondo la denominazione introdotta al § 61 — Dimostriamo allora che la integrazione della $Af=0$ si può ottenere eseguendo n quadrature. Con ciò resterà appunto giustificata, a questo riguardo, la denominazione di gruppi integrabili —

Il gruppo G_n, essendo per ipotesi integrabile, possederà un sottogruppo G_{n-1} invariante, esso stesso integrabile; poniamo per semplicità che sia

$$G_{n-1} \equiv [X_1 f, X_2 f \dots X_{n-1} f]$$

Le n equazioni ad $n+1$ variabili

$$(17) \qquad Af=0 \;, X_1 f=0 \;, \dots X_{n-1} f=0$$

formano un sistema completo che ha quindi una soluzione, diciamo u — Il sistema completo (17) ammette la trasformazione $X_n f$ ed è perciò $X_n u$ una funzione della sola u, scriviamo

$$X_n u = \theta(u)$$

Ma non può essere $X_n u = 0$ perchè le $n+1$ equazioni

$$Af=0 \;, X_1 f=0 \;, \dots \dots X_n f=0$$

sono indipendenti e non possono quindi avere una soluzione comune — Essendo adunque $\theta(u) \neq 0$, cangiando u in una sua funzione possiamo rendere

dere

$$X_n u = 1$$

Questa insieme colle

$$Au = 0 \;,\; X_1 u = 0 \;\ldots\ldots\; X_{n-1} u = 0$$

forma un sistema di $n+1$ equazioni risolubile rispetto alle $n+1$ incognite

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

e si ha quindi u con una quadratura.

Dopo ciò facendo un cangiamento di variabili in cui u sia una delle nuove variabili, le nuove

$$\bar{A}f \;,\; \bar{X}_1 f \;\ldots\; \bar{X}_{n-1} f$$

non conterranno $\frac{\partial f}{\partial u}$ e della equazione a n variabili

$$\bar{A}f = 0$$

conosceremo le $n-1$ trasformazioni infinitesime distinte $\bar{X}_1 f \ldots \bar{X}_{n-1} f$ che generano ancora un gruppo $\bar{G}_{n-1}$ integrabile – Così ci troveremo nelle stesse condizioni di prima, cangiato però n in $n-1$ – Procedendo ora sulla $\bar{A}f = 0$ (dove la prima variabile u contenuta nei soli coefficienti si riguarda come parametro) come prima sulla $Af = 0$ si perviene evidentemente, dopo n quadrature, alla integrazione completa della $Af = 0$ c. d. d –

§ . 150

Riduzione di una equazione $Af=0$ a gruppo composto a successive equazioni a gruppi semplici

Senza supporre che il gruppo G_n, ammesso dalla $Af=0$, sia integrabile, supponiamo ora soltanto che sia un gruppo composto e sia
$$G_{n-n_1} \equiv [X_{n_1+1}f, X_{n_1+2}f \ldots X_n f]$$
un suo sottogruppo invariante massimo.

Supponiamo inoltre che del gruppo G_n si conoscano le equazioni in termini finiti. Questa condizione non è veramente necessaria ed i risultati di Lie (Math. Annalen Bd 25) che ora andiamo a far conoscere in questa ipotesi sussistono ancora, come ha dimostrato Vessiot,(*) supposto solo note le trasformazioni infinitesimali. Qui però ci limitiamo a trattare il caso indicato che basta per riconoscere quale relazione ha la composizione del gruppo G_n di $Af=0$ coi processi d'integrazione della equazione stessa.

Per semplificare la trattazione scriviamo la Af sotto la forma

(*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse t. 8 (1894).

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

rendendo, come è lecito, $\alpha_0 = 1$ — Le n trasformazioni generatrici di G_n avranno la forma

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

e staranno fra loro e colla Af nelle relazioni espresse dalle formole

(18) $\qquad (X_i A) = 0 \quad , \quad (X_i X_k) = \sum_s^{1\dots n} c_{iks} X_s f$

Le n_1+1 soluzioni del sistema completo

(19) $\qquad X_{n_1+1} f = 0 \,,\; X_{n_1+2} f = 0 \,, \dots X_n f = 0 \,,$

invarianti di G_{n-n_1}, sono note senza integrazione poichè conosciamo di G_{n-n_1} le equazioni finite — Prendendo queste n_1+1 soluzioni, fra le quali figura x_0, come prime variabili

$$x_0 \;\; x_1 \;\dots\dots\; x_{n_1} \,,$$

vediamo facilmente che tanto nella Af come nella $X_i f$ i coefficienti di

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \,, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_{n_1}}$$

dipenderanno solo da $x_0\; x_1 \dots x_{n_1}$ e non dalle rimanenti variabili

$$x_{n_1+1} \;\dots\dots\; x_n$$

Essendo infatti

$$(X_{n_1+i}\, A) f = 0 \,,$$

facendo qui $\quad f = x_j \quad (j = 1, 2 \dots n_1)$ viene

$$X_{n_1+i}(Ax_j) - A(X_{n_1+i}\, x_j) = X_{n_1+i}(Ax_j) = 0$$

e quindi Ax_j è una soluzione del sistema (19), e perciò una funzione delle soluzioni indipendenti $x_0\, x_1 \dots x_{n_1}$.

Il sottogruppo G_{n-n_1} essendo inoltre invariante in G_n si ha

$$(X_{n_1+i}\, X_k) = \gamma_1 X_{n_1+1} f + \gamma_2 X_{n_1+2} f + \dots + \gamma_{n-n_1} X_n f$$

colle γ costanti, e facendo in questa identità ancora

$$f = x_j \qquad (j = 1, 2 \dots n_1)$$

si ha

$$X_{n_1+i}(X_k x_j) = 0,$$

onde ancora

$$X_k x_j \qquad \begin{cases} k = 1, 2 \dots n \\ j = 1, 2 \dots n_1 \end{cases}$$

dipende solo da $x_0\, x_1 \dots x_{n_1}$ – Di più in

$$X_{n_1+1} f\,;\ X_{n_1+2} f, \dots X_n f$$

mancano affatto i termini in

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_{n_1}}$$

Potremo quindi scrivere Af, $X_1 f$, $X_2 f, \dots X_{n_1} f$ sotto la forma

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_k^{1\dots n_1} \alpha_k(x_0\, x_1 \dots x_{n_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_k^{n_1+1\dots n} \beta_k(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n_1} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_{n_1}) \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_k^{n_1+1\dots n} \eta_{ik}(x_0\, x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$i = 1, 2 \dots n_1$$

Indichiamo ora con $A'f$, $X'_i f$ le espressioni che si formano da Af, $X_i f$ sopprimendo i termini in

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n_1+1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

cioè poniamo

$$A'f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_k^{1\ldots n_1} \alpha_k(x_0\, x_1 \ldots x_{n_1})\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$X'_i f = \sum_k^{1\ldots n_1} \xi_{ik}(x_0\, x_1 \ldots x_{n_1})\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Se si ha riguardo alle relazioni (18) ed alla forma superiore di Af. $X_i f$, si vede subito che sussistono le relazioni

$$(X'_i A') = 0 \qquad (X'_i X'_k) = \sum_s^{1\ldots n_1} c_{iks} X_s f$$

Le seconde ci dimostrano che le

$$X'_1 f,\ X'_2 f, \ldots\ldots X'_{n_1} f$$

generano un gruppo G'_{n_1} e poichè i valori delle costanti di composizione sono i medesimi che quelli delle c_{iks} nelle (18) per

$$i,\ k,\ s = 1,\ 2, \ldots n_1$$

le osservazioni in fine del § 96 ci dimostrano che questo G'_{n_1} non è altro che il gruppo complementare $\frac{G_n}{G_{n-n_1}}$ del gruppo G_n rispetto al sottogruppo invariante G_{n-n_1} -

Essendo poi, come si è detto, $(X'_i A') = 0$, della equazione a derivate parziali con n_1+1 variabili $x_0\, x_1 \ldots x_{n_1}$

$$A'f = 0$$

sappiamo che ammette il gruppo G'_{n_1}, il quale è un gruppo semplice perchè G_{n-n_1} è invariante massimo in G_n –

Di più è essenziale osservare che le

$$X'_1 f \dots X'_{n_1} f$$

non sono legate da alcuna relazione, poichè in caso contrario sarebbe nullo il determinante dei loro coefficienti, e come subito si vede, sarebbe conseguentemente pur nullo il determinante dei coefficienti delle primitive

$$X_1 f,\ X_2 f, \dots X_n f,$$

che contiene il precedente determinante come fattore – Così la $A'f=0$ è in condizioni analoghe alla primitiva $Af=0$, il gruppo G_n essendo sostituito da G'_{n_1} –

Supponiamo di avere integrata questa equazione ad n_1+1 variabili ed a gruppo semplice G'_{n_1} e vediamo come verrà conseguentemente ridotto il problema della integrazione della $Af=0$ – Siano $x'_1\ x'_2 \dots x'_{n_1}$ le soluzioni, supposte ora note di $A'f=0$ che sono altresì soluzioni di $Af=0$, precisamente tutte e sole quelle che sono funzioni di

$$x_0\ x_1 \dots x_{n_1}$$

Sostituiamo a queste prime n_1+1 variabili come nuove variabili

$$x_0\ x'_1\ x'_2 \dots x'_{n_1}$$

e la $Af=0$ prenderà la forma

$$\bar{A}f = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_{k}^{n_1+1 \dots n} \beta_k(x_0\, x_1'\, x_2' \dots x_{n_1}'\, x_{n_1+1} \dots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

mentre le trasformazioni infinitesime

$$X_{n_1+1}f\,,\ X_{n_1+2}f \dots\dots X_nf$$

danno luogo ad un gruppo G_{n-n_1} ammesso dalla $\bar{A}f=0$ e nel quale le variabili

$$x_0\ x_1'\ x_2' \dots x_{n_1}'$$

figurano solo come parametri nei coefficienti. La integrazione della $Af=0$ è così ridotta a quella della

$$\bar{A}f=0$$

con $n-n_1+1$ variabili $x_0\,,\ x_{n_1+1} \dots x_n$ e con un gruppo noto G_{n-n_1} di trasformazioni, che è precisamente il sottogruppo invariante di G_n da cui siamo partiti.

Per tal modo la integrazione della $Af=0$ con n_1+1 variabili col gruppo G_n è ridotta alla integrazione successiva delle due seguenti equazioni, 1° all'integrazione della

$$A'f=0$$

con n_1+1 variabili col gruppo semplice $G'_{n_1} = \frac{G_n}{G_{n-n_1}}$ complementare di G_n rispetto al sottogruppo invariante massimo G_{n-n_1}; 2° alla integrazione della $\bar{A}f=0$ con $n-n_1+1$ variabili, e col gruppo G_{n-n_1}.

Sulla $\bar{A}f=0$ possiamo poi procedere nello stesso modo e supposto che sia $G'_{n-n_1-n_2}$ un sottogruppo invariante te massimo di G_{n-n_1} potremo sostituire all'integrazione della $Af=0$, la successiva integrazione d'una equazione ad n_2+1 variabili col gruppo G'_{n_2} complementare di G_{n-n_1} rispetto al sottogruppo invariante $G_{n-n_1-n_2}$, indi l'integrazione di un'equazione ad $n-n_1-n_2+1$ variabili col gruppo $G_{n-n_1-n_2}$ –

Così proseguendo arriviamo evidentemente al teorema finale seguente:

Se l'equazione

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \sum_i^{1\dots n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

ad $n+1$ variabili ammette il gruppo (transitivo) G_n generato dalle

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ki}(x_0 x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

ed è

$$G_n \quad G_{n-n_1} \quad G_{n-n_1-n_2} \quad G_{n-n_1-n_2-n_3} \dots\dots 1$$

una serie di composizione di G_n, l'integrazione della $Af=0$ si può ridurre alla successiva risoluzione di equazioni ausiliarie della stessa specie rispettivamente con

$$n_1+1, \; n_2+1, \; n_3+1, \dots\dots$$

variabili e coi rispettivi gruppi semplici

$$\frac{G_n}{G_{n-n_1}}, \quad \frac{G_{n-n_1}}{G_{n-n_1-n_2}} \dots\dots$$

Questa riduzione di un'equazione $Af=0$ a gruppo composto a successive equazioni a gruppi semplici ha perfetta analogia con quella che nella teoria delle equazioni algebriche si effettua per un'equazione a gruppo di Galois composto, riducendola alla risoluzione di successive equazioni ausiliarie a gruppi di Galois semplici.

I teoremi di Jordan e Hölder, estesi da Lie ed Engel ai gruppi continui (§§ 66, 97), acquistano ora, in queste teorie d'integrazione, il significato seguente che, comunque si effettui la riduzione della $Af=0$, variando la serie di composizione di G_n, il numero delle variabili nelle successive equazioni ausiliarie ed i loro gruppi rimangono sempre gli stessi.

§ 151
I moltiplicatori di Jacobi di una equazione $Af=0$

Intimamente legati colle trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots \ldots + \alpha_n(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

sono i così detti moltiplicatori di Jacobi, dei quali andiamo ora a trattare.

Siano $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$ $n-1$ soluzioni indipendenti di $Af=0$; l'equazione

$$\frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ - - & - - & - - & - - \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ha tutte le soluzioni di $Af=0$ ed il suo primo membro non differisce quindi dall'espressione Af che per un fattore M, funzione di $x_1, x_2 \ldots x_n$ — Si ha quindi un'identità della forma

$$(20) \quad M.Af = \frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)};$$

questo fattore M dicesi appunto un moltiplicatore di Jacobi dell'equazione a derivate parziali, ovvero del sistema differenziale equivalente

$$\frac{dx_1}{\alpha_1} = \frac{dx_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\alpha_n}$$

Naturalmente cangiando le soluzioni fondamentali $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1}$, cangia il moltiplicatore M, ed ora appunto studieremo le relazioni che passano fra i diversi moltiplicatori.

Intanto cominciamo dal dimostrare il teorema.

Ogni moltiplicatore M soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$(21) \qquad \frac{\partial(M\alpha_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(M\alpha_2)}{\partial x_2}+\cdots\cdots+\frac{\partial(M\alpha_n)}{\partial x_n}=0$$

ovvero

$$(21^*) \qquad \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M}{\partial x_i} = -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

Infatti dall'identità (20) risulta:

$$(21^*) \quad \begin{cases} M\alpha_1 = \dfrac{\partial(x_1, \omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\ x_2 \dots x_n)} = \dfrac{\partial(\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_2\ x_3 \dots x_n)} \\ M\alpha_2 = \dfrac{\partial(x_2\ \omega_1\ \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\ x_2 \dots x_n)} = -\dfrac{\partial(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1 x_3 \dots x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ M\alpha_n = \dfrac{\partial(x_n\ \omega_1\ \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\ x_2 \dots x_n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{\partial(\omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1 x_2 \dots x_{n-1})} \end{cases}$$

Formando il primo membro della (21) e ponendo insieme i determinanti che contengono le medesime derivate seconde delle ω si vede subito che due a due si distruggono -

Si osserverà che nel caso $n=2$ la (21) esprime che

$$M(\alpha_2 dx_1 - \alpha_1 dx_2)$$

è un differenziale esatto, cioè M è un ordinario moltiplicatore Euleriano, o fattore integrante di $\alpha_2 dx_1 - \alpha_1 dx_2$.

Dimostriamo ora successivamente le seguenti proprietà dei moltiplicatori:

1) Il quoziente $\frac{M}{M'}$ di due moltiplicatori è una soluzione di $Af=0$ -

E infatti, soddisfacendo M, M' alla (21), sottraendo le corrispondenti relazioni si ottiene

$$\sum \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{M}{M'}\right)=0$$

Risulta da quanto precede che se M è un moltiplicatore, ogni altro moltiplicatore ha la forma $M\omega$, essendo ω una soluzione di $Af=0$ - Ma anche viceversa

3) Se M è un moltiplicatore ed ω una soluzione qualunque di $Af=0$, sarà anche $M'=M\omega$ un moltiplicatore. (*)

E infatti si ha

$$\sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M'}{\partial x_i} = \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log M}{\partial x_i} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial \log \omega}{\partial x_i} =$$

$$= -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

Da queste proprietà si deduce facilmente:

4) Ogni soluzione M della (21) o (21*) è un moltiplicatore - Infatti se M' è un particolare moltiplicatore, esso soddisfa alla (21*) e perciò $\frac{M}{M'}$ alla $Af=0$, cioè è una soluzione ω, quindi $M=M'\omega$ è un moltiplicatore -

Osserviamo infine il modo come si comportano i moltiplicatori per un cangiamento di variabili - Esso è dato dal teorema seguente:

5) Se cangiando le variabili $x_1\ x_2 \dots x_n$ in $x'_1\ x'_2 \dots x'_n$ si cangia Af in $A'f$ ed M è un moltiplicatore di Af, sarà

(*) La dim.ne qui data si riferisce solo alle soluzioni della (21). Ma il teorema si [illegible] giando ω_1 in $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})$, si moltiplica per $\frac{\partial \Omega}{\partial \omega_1}$ che può identificarsi

$$M' = \frac{M}{\dfrac{\partial(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)}}$$

un moltiplicatore di $A'f$ –

Si ha per ipotesi, tenendo conto delle relazioni fra le x e le x'

$$Af = A'f\,;$$

ora

$$M.Af = \frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)} = \frac{\partial(f, \omega_1 \ldots \ldots \omega_{n-1})}{\partial(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)} \cdot \frac{\partial(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)}$$

dunque

$$M'.A'f = \frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \cdots \omega_{n-1})}{\partial(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)}$$

ciò che dimostra il teorema –

Supponiamo ora di conoscere della $Af=0$ un moltiplicatore M ed r soluzioni indipendenti

$$\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_r$$

Prendendo per r prime variabili

$$x'_1 = \omega_1\,,\ x'_2 = \omega_2 \ldots\ldots x'_r = \omega_r$$

e cangiando comunque le altre, la Af si trasformerà in

$$A'f = \alpha'_{r+1} \frac{\partial f}{\partial x'_{r+1}} + \cdots + \alpha'_n \frac{\partial f}{\partial x'_n}$$

e della $A'f$ conosceremo, pel teorema precedente, un moltiplicatore $M' = \dfrac{M}{\dfrac{\partial(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)}}$ –

Se supponiamo dunque $r = n-2$, la $A'f=0$ sarà a due variabili e, conoscendone un moltiplicato-

Si dimostra subito direttamente osservando che il det.te funz: $\dfrac{\partial(f, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{n-1})}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)}$ con una soluzione qualunque prefissata ω di $Af=0$

re, l'integrazione si compirà con una quadratura.
Dunque: Se di un'equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

si conoscono tutte le soluzioni, tranne una, ed un moltiplicatore, si troverà con una quadratura la soluzione mancante.

È questo il principio dell'ultimo moltiplicatore di Jacobi, che si applica principalmente nell'integrazione dei problemi di dinamica.

§. 152

Relazioni fra i moltiplicatori e le trasformazioni infinitesime

---

Della equazione a derivate parziali

$$Af = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

supponiamo di conoscere le $n-1$ trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik}(x, x_2 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x} \qquad (i = 1, 2 \dots n-1)$$

indipendenti fra loro e dalla Af (§ 147).

Il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \dots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

è dunque diverso da zero; e noi vogliamo provare che l'inversa di questo determinante è un moltiplicatore di Af

Se costruiamo infatti il prodotto

$$\Delta \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} = \Delta \times \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\omega_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\omega_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\omega_2}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\omega_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots & \\ \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 \dots\dots 0 & 1 \end{vmatrix}$$

colla regola di moltiplicazione dei determinanti troviamo

$$\Delta \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} = \begin{vmatrix} A\omega_1 & A\omega_2 \dots & A\omega_{n-1} & \alpha_n \\ X_1\omega_1 & X_1\omega_2 \dots & X_1\omega_{n-1} & \xi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}\omega_1 & X_{n-1}\omega_2 \dots & X_{n-1}\omega_{n-1} & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_n \cdot \begin{vmatrix} X_1\omega_1 & X_1\omega_2 \dots\dots & X_1\omega_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ X_{n-1}\omega_1 & X_{n-1}\omega_2 \dots & X_{n-1}\omega_{n-1} \end{vmatrix}$$

Ma il secondo fattore nel secondo membro è una funzione di soluzioni di $Af = 0$ e perciò una soluzione Ω; si ha dunque

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\alpha_n} \frac{\partial(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2 \dots x_{n-1})} \cdot \Omega$$

Ora per l'ultima delle (21*)

$$\frac{1}{\alpha_n}\frac{\partial(\omega_1\,\omega_2\ldots\omega_{n-1})}{\partial(x_1\,x_2\ldots x_{n-1})}$$

è un moltiplicatore, ed essendo Ω una soluzione di $Af=0$, anche $\frac{1}{\Delta}$ è un moltiplicatore c. d. d. -

Dunque: Se l'equazione

$$Af = \alpha_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

ammette le $n-1$ trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots n} \xi_{ik}\frac{\partial f}{\partial x_k},$$

ed il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n-1,1} & \xi_{n-1,2} & \ldots & \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

non è nullo, la sua inversa $M = \frac{1}{\Delta}$ è un moltiplicatore di Af

Per $n=2$ il teorema ora dimostrato dà, come caso particolare, il teorema A) del §. 141 -

Supponiamo ora soltanto di conoscere un moltiplicatore M ed una trasformazione infinitesima Xf della Af e dimostriamo come se ne potrà dedurre, in certi casi, la conoscenza di una soluzione della $Af=0$

Siccome la $Af=0$ ammette la Xf, avremo l'identità (§. 146).

$$(22)\qquad (XA) = \lambda Af$$

che ci dà

$$X\alpha_i - A\xi_i = \lambda\alpha_i \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

ovvero

$$\sum_k \alpha_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \sum_k \xi_k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} + \lambda\alpha_i = 0$$

Derivando questa rapporto a x_i e sommando rispetto ad i otteniamo

$$(23)\qquad A\left(\sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right) - X\left(\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) + \lambda \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} + A\lambda = 0$$

D'altronde se nella identità (22) poniamo

$$f = \log M$$

e rammentiamo che per la (21*)

$$A(\log M) = -\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}$$

ne deduciamo

$$X\left(\sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) + AX(\log M) = \lambda \sum_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i},$$

indi sommando con la (23)

$$A\left\{X(\log M) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \lambda\right\} = 0$$

Questa formola ci dà il teorema:

Se la $Af=0$ ha il moltiplicatore M ed ammette la trasformazione infinitesima Xf, per modo che

$$(XA) = \lambda Af,$$

l'espressione

$$X(\log M) + \sum_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} + \lambda$$

sarà una soluzione di $Af=0$, ovvero una costante.

Nella prima ipotesi la conoscenza di un moltiplicatore v di una trasformazione infinitesima basta a dedurne una soluzione della $Af=0$

§ 153

Integrazione delle equazioni $Af=0$ a tre variabili, con una trasformazione infinitesima nota

Le ricerche dei §§. 148 - 150 ci hanno fatto conoscere i principii generali per la riduzione del problema di integrazione della $Af=0$, in un numero qualunque di variabili, quando ne siano note delle trasformazioni infinitesime -

Per lo studio delle equazioni differenziali di 2° ordine con date trasformazioni infinitesime ci è necessario approfondire queste ricerche pel caso in cui l'equazione $Af=0$ sia a tre variabili x, y, z -

Scriviamo la $Af=0$ sotto la forma

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \beta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

e trattiamo nel presente paragrafo il caso in cui ne sia nota una trasformazione infinitesima essenziale Xf (non proporzionale alla Af) -

Possiamo assumere la Xf già ridotta alla forma (§. 150)

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial y} + \eta\frac{\partial f}{\partial z}$$

essendo ξ, η funzioni note di x, y, z. Si avrà per ipotesi

$$(XA) = 0$$

e quindi il sistema

$$Af = 0 \quad , \quad Xf = 0$$

è Jacobiano e possiede una soluzione $\varphi(x, y, z)$ -

Questa si trova applicando il metodo di Mayer (o di Du-Bois Reymond), integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine. Supponiamo eseguita questa integrazione e trovata quindi la $\varphi(x y z)$, che dovrà certamente contenere almeno una delle due variabili y, z, poniamo p. e. la z. Cangiando le variabili x, y, z in x, y, φ le Af, Xf diventeranno

$$\begin{cases} A_1 f = \alpha_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ X_1 f = \xi_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta_1(x, y, \varphi)\dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

e poichè $(X_1 A_1) = 0$ l'equazione

$$\alpha_1 dy - \beta_1 dx = 0$$

associata alla $Af = 0$ avrà il fattore integrante (§ 141)

$$\frac{1}{\alpha_1\eta_1 - \beta_1\xi_1}$$

e quindi

$$\psi = \int \frac{\alpha_1 dy - \beta_1 dx}{\alpha_1 \eta_1 - \beta_1 \xi_1} = \psi(x, y, \varphi),$$

dove nella integrazione φ figura come parametro, darà la soluzione di $A_1 f = 0$ — Ponendo entro ψ per φ la sua espressione per x, y, z si avrà dunque la seconda soluzione di $Af = 0$

Abbiamo così dimostrato il teorema:

Se un'equazione a derivate parziali

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y} + \beta(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

possiede una trasformazione infinitesima (essenziale) nota, la sua integrazione si effettua integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine ed eseguendo successivamente una quadratura.

§ 154

Caso in cui della $Af = 0$ si conoscono due trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f$

Supponiamo che della

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y} + \beta\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

si conoscano due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f \quad , X_2 f$$

che supponiamo naturalmente non legate alla Af da una relazione della forma

$$c_1 X_1 f + c_2 X_2 f + \rho A f = 0$$

con c_1, c_2 costanti e $\rho = \rho(x, y, z)$ - Dimostriamo allora che se fra $X_1 f, X_2 f, A f$ non sussiste alcuna relazione lineare, a coefficienti variabili, l'integrazione della $Af=0$ si effettua con due quadrature al massimo, mentre se una tale relazione sussiste occorrerà al massimo l'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine -

a) Consideriamo ora il primo caso, ed in primo luogo riduciamo, come nel paragrafo precedente, le $X_1 f, X_2 f$ a non contenere $\frac{\partial f}{\partial x}$, cioè alla forma

$$(23^*) \quad \begin{cases} X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial z} \\ X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} ;$$

l'ipotesi fatta equivarrà a dire che il ~~determinante~~ $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$ è diverso da zero -

Costruendo l'espressione alternata $(X_1 X_2)$, questa si comporrà certo colle X_1, X_2 secondo una formola

$$(24) \quad (X_1 X_2) = \mu_1 X_1 f + \mu_2 X_2 f$$

e le μ saranno pel teorema terzo al § 147 o soluzioni della $Af=0$ o costanti - Saranno pure soluzioni della $Af=0$ o costanti le funzioni

$$X_1 \mu_1, \; X_1 \mu_2, \; X_2 \mu_1, \; X_2 \mu_2$$

Se fra le quattro precedenti e μ_1 μ_2 esistono due effettive soluzioni indipendenti di $Af=0$, è compiuta l'integrazione senza alcuna quadratura.

Quando ne esista una sola, potremo ricorrere al teorema del § 152 che, essendo note le due trasformazioni infinitesime X_1f, X_2f di Af ci fornisce un moltiplicatore

$$M=\frac{1}{\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1}$$

e, pel teorema alla fine del § 151, conoscendo una soluzione ed un moltiplicatore, si troverà la seconda soluzione con una quadratura(*).

Resta in fine da considerare il caso in cui nella (24) μ_1, μ_2 risultino costanti. Allora X_1f, X_2f generano un gruppo G_2 ammesso dalla $Af=0$; e

(*) Senza ricorrere alla teoria dei moltiplicatori di Jacobi si può procedere anche nel modo seguente. Essendo già nota una soluzione φ, conosciamo anche di Af la trasformazione infinitesima

$$Uf=X_2\varphi X_1f-X_1\varphi X_2f$$

ed il sistema $Af=0$, $Uf=0$ ha la soluzione nota φ. Ci troviamo allora nel caso del §. precedente dopo avere già integrato la equazione del 1° ordine e basta quindi una successiva quadratura.

poichè un G_2 a due parametri è sempre integrabile (§. 76), il risultato generale ottenuto al §149 ci dimostra che la $Af=0$ si integrerà con due quadrature.

Osserviamo qui di più che se il gruppo G_2 è Abeliano le due quadrature saranno indipendenti, mentre nel caso contrario porteranno l'una sull'altra.

E infatti se G_2 è Abeliano cioè

$$(X_1 X_2) = 0$$

possiamo prendere, applicando il processo del §.149, come sottogruppo invariante di G_2 sia $X_1 f$, sia $X_2 f$ e conseguentemente determinare con una quadratura una soluzione φ dalle equazioni

$$(25) \qquad A\varphi=0\,,\ X_1\varphi=0\,,\ X_2\varphi=1$$

ed una seconda ψ con una seconda quadratura indipendente dalla prima da

$$A\psi=0\,,\ X_1\psi=1\,,\ X_2\psi=0$$

e le due soluzioni φ, ψ saranno certo indipendenti fra loro -

Quando al contrario G_2 non è Abeliano si può supporre p. e.

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

e la prima soluzione φ si determina ancora con una quadratura dalla (25) - Successivamente il pro caso del § 149 dà la seconda soluzione φ con una nuova quadratura, ma questa porta su quella già eseguita per trovare φ.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nel teorema:

Se una equazione a tre variabili

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ammette due note trasformazioni infinitesime, non legate alla Af da alcuna relazione lineare, l'integrazione della $Af=0$ richiede al massimo due quadrature.

b) Veniamo ora a trattare il secondo caso in cui nelle (23*) $\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = 0$ _ Si ha per ciò

$$X_2 f = \varphi . X_1 f$$

ed il coefficiente φ è una soluzione di $Af=0$ (non una costante). Insieme a φ è anche una soluzione $X_1\varphi$; onde se $X_1\varphi$ non è funzione di φ la $Af=0$ è già integrata completamente senza quadrature.

Poniamo ora che $X_1\varphi$ sia funzione di φ, e supposto p. e. che φ contenga z, prendiamo per variabili x, y, φ; risulterà

$$\overline{A}f = \alpha_1(x,y,\varphi)\frac{\partial f}{\partial x} + \beta_1(x,y,\varphi)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\overline{X}_1 f = \overline{\xi}_1(x,y,\varphi)\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{\eta}_1(x,y,\varphi)\frac{\partial f}{\partial y} + X_1\varphi . \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Ora se $X_1\varphi = 0$ siamo ridotti ad integrare la $Af=0$ a due variabili x, y colla trasformazione infinitesima nota

$$\overline{X}_1 f = \overline{\xi}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \overline{\eta}_1 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

la variabile y comparendo solo come parametro. Basterà dunque al solito una quadratura

$$\psi = \int \frac{\alpha_1 dy - \beta_1 dx}{\alpha_1 \overline{\eta}_1 - \beta_1 \overline{\xi}_1}$$

per compiere l'integrazione di $Af = 0$.

In caso contrario (quando cioè $\overline{X}_1 \psi \neq 0$), non si può dire altro che il problema è ridotto ad integrare la $\overline{A}f = 0$ a due variabili, cioè un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine.

Così: Se della

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} + \beta \frac{\partial f}{\partial z}$$

si conoscono due trasformazioni infinitesime distinte $X_1 f, X_2 f$ legate alla Af da una relazione lineare, la $Af = 0$ si integrerà secondo i casi o senza quadrature, o con una quadratura o, nel caso più sfavorevole, integrando un'equazione differenziale ordinaria del 1° ordine.

Come si vede il vantaggio che si ottiene in quest'ultimo caso sul caso del § 153 quando si supponeva nota una sola trasformazione, consiste solo nel risparmiare una quadratura.

§ 155

Criterio per riconoscere se un'equazione del 2º ordine $y'' = \omega(x, y, y')$ ammette un gruppo Xf

Veniamo ora alla considerazione delle equazioni differenziali d'ordine superiore che ammettono un gruppo di trasformazioni — Cominciamo da quelle di 2º ordine che, risolute rapporto alla derivata seconda y'', scriveremo

$$(26) \qquad y'' = \omega(x, y, y')$$

La ricerca fondamentale di cui dobbiamo in primo luogo occuparci è la seguente:

Come si riconosce se l'equazione differenziale ammette il gruppo G_1 ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesima

$$(27) \qquad Xf = \xi(x, y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial f}{\partial y} \quad ?$$

Per risolverla basta procedere come al § 144 per le equazioni del 1º ordine e prolungare due volte il gruppo G_1 nel gruppo G_1'' che agisce sugli elementi del 2º ordine

$$x, y, y', y''$$

ed è generato dalla trasformazione infinitesima

Xf prolungata due volte in

$$(28) \qquad X_1^{(2)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y''},$$

dove η_1, η_2 si calcolano, secondo le regole del § 119, dalle formole

$$(29) \quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{d\eta}{dx} - y'\dfrac{d\xi}{dx} \\[2ex] \eta_2 = \dfrac{d\eta_1}{dx} - y''\dfrac{d\xi}{dx} \quad (*) \end{cases}$$

I valori effettivi di η_1, η_2, scritti per disteso, sono:

$$(30) \quad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\partial\eta}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}y'^2 \\[2ex] \eta_2 = \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \left(2\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)y' + \left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)y'^2 - \\[2ex] \qquad - \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}y'^3 + \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} - 2\dfrac{\partial\xi}{\partial x} - 3\dfrac{\partial\xi}{\partial y}y'\right)y'' \end{cases}$$

Ora affinchè un'equazione differenziale

$$\Omega(x, y, y', y'') = 0$$

ammetta il gruppo G_1, è necessario e sufficiente che, considerando l'equazione stessa come un'equazione finita fra le variabili

$$x, y, y', y''$$

essa rappresenti, nell'S_4 generato da queste varia-

(*) Si ricordi che il simbolo $\frac{d}{dx}$ da applicarsi ad una funzione $f(x, y, y', \ldots)$ rappresenta derivazione totale rapporto ad x, cioè:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' + \cdots$$

bili, una varietà invariante rispetto al gruppo $G_1^{(2)}$.

Per i criteri generali stabiliti al § 44, sarà quindi necessario e sufficiente che l'espressione

$$X_1^{(2)}\Omega$$

si annulli identicamente in forza della $\Omega=0$. Applicando il criterio al caso dell'equazione (26) risoluta rispetto ad y'', troviamo il teorema fondamentale:

Affinchè l'equazione differenziale del 2° ordine

$$y''=\omega(x,y,y')$$

ammetta il gruppo ad un parametro

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y},$$

è necessario e sufficiente che la relazione

$$\eta_2-\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}-\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}-\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'}=0,$$

cioè

$$(A)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}-3\frac{\partial\xi}{\partial y}y'\right)\omega-\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}y'^3+\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)y'^2+\\&+\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)y'+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}-\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}-\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}-\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\right.\\&\left.-\frac{\partial\xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial\omega}{\partial y'}=0\end{aligned}\right.$$

sia identicamente soddisfatta in x, y, y', riguardate come indipendenti.

Molte volte riesce più utile dare a questo criterio un'altra forma equivalente, alla quale perveniamo nel modo seguente. L'equazione differenziale del 2° ordine data è equivalente al sistema differenziale del 1° ordine

$$(31) \qquad \frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\omega(x, y, y')}$$

nelle tre variabili x, y, y'. Ora nello spazio di queste tre variabili il G_1 dato induce il gruppo ad un parametro generato dalla prima trasformazione prolungata

$$X_1^{(1)} f = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y'}$$

La condizione richiesta si può quindi anche esprimere così: che il sistema differenziale (31), ovvero la equazione a tre variabili associata

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

deve ammettere il gruppo $G_1^{(1)}$ generato da $X_1^{(1)} f$.

Per ciò è necessario e sufficiente che sussista una identità della forma

$$(X_1^{(1)} A) = \lambda Af \qquad (\lambda = \lambda(x, y, y'))$$

essendo λ un fattore conveniente di proporzionalità.

Calcolando effettivamente quest'ultima condizione coll'osservare che $Af = \frac{df}{dx}$, troviamo le tre

$$\frac{d\xi}{dx} = -\lambda$$

$$\eta_1 - \frac{d\eta}{dx} = \lambda y'$$

$$\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}+\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'}-\frac{d\eta_1}{dx}=\lambda\omega$$

Ma la seconda, per la prima delle (29), è una conseguenza della prima e l'ultima, eliminando λ, diventa

$$\eta_2-\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}-\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}-\eta_1\frac{\partial\omega}{\partial y'}=0,$$

che è precisamente la (A) — Così è nuovamente dimostrato il teorema fondamentale.

§ 156

Massimo numero di trasformazioni infinitesime ammesse da un'equazione del 2° ordine

Il criterio testè stabilito per riconoscere se una data equazione del 2° ordine

$$y''=\omega(x,y,y')$$

ammette un gruppo ad un parametro dato

$$Xf=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

conduce anche a determinare, ove esistano, tutte le trasformazioni infinitesime ammesse da una data equazione del 2° ordine — Per ciò, essendo nota ω in funzione di x, y, y', dovremo determinare le funzioni incognite ξ, η di x, y in guisa che la (A) risulti identicamente soddisfatta - Ora se, per fissare le idee, ammettiamo che ω considerata come funzione di y' sia sviluppabile in serie di potenze di y' (*)

(82) $\quad \omega = \theta_0 + \theta_1 y' + \theta_2 y'^2 + \theta_3 y'^3 + \dots,$

dove i coefficienti θ sono funzioni note di x, y, dovremo ordinare il primo membro della (A) secondo le potenze di y' ed eguagliare a zero i coefficienti di queste varie potenze.

Così si ottengono altrettante equazioni a derivate parziali del 2° ordine, lineari ed omogenee rispetto a ξ, η - Ora si intende bene che, se $\omega(x\,y\,y')$ è qualunque, non sarà possibile soddisfare tutte queste equazioni, ciò che si pone fuori di dubbio considerando un caso particolare in cui le dette equazioni sono incompatibili; come p. e. assumendo

$$\omega = e^{y'} + xy \quad (**)$$

(*) Altrimenti svilupperemmo in serie di potenze di $y' - c$ (c costante)

(**) Per vederlo basta sostituire in (A) ed osservare che il coefficiente di $e^{y'}$ deve essere nullo - Si trova così facilmente che si ha di necessità

$$\xi = 0, \quad \eta = 0$$

Così dunque, al contrario di quello che accade per le equazioni del 1° ordine.

Ogni equazione differenziale del 2° ordine non ammette, in generale, un gruppo di trasformazioni in sè medesima. Lo stesso vale, a più forte ragione, per le equazioni differenziali d'ordine superiore.

Ma ritorniamo alla formazione delle equazioni a derivate parziali per le funzioni incognite ξ, η. Se sostituiamo nella (A) lo sviluppo (32) per ω, basta eguagliare a zero il termine indipendente da y' ed i coefficienti di

$$y', y'^2, y'^3$$

per dedurre le 4 equazioni del tipo seguente:

$$(B)\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = f_1\left(x, y, \xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\\ &2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = f_2\left(x, y, \xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\\ &2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} = f_3(\text{- - - - - - - - - -})\\ &\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = f_4(\text{- - - - - - - - - -}),\end{aligned}\right.$$

dove i secondi membri sono funzioni note degli argomenti

$$x, y;\ \xi, \eta, \frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y}, \frac{\partial\eta}{\partial x}, \frac{\partial\eta}{\partial y}$$

e di più lineari omogenee negli ultimi 6.

Basta già l'esame di queste quattro equazioni per assicurarsi che nell'integrale generale del nostro sistema di equazioni per ξ, η (supposto che si si possa soddisfare) entrano soltanto costanti arbitrarie, che sono al massimo in numero di 8.

Se deriviamo infatti ciascuna delle quattro equazioni (B) rapporto ad x e ad y, vediamo subito che se ne deducono tutte le derivate terze di ξ, η, espresse (linearmente ed omogeneamente) per ξ, η e le loro derivate prime e seconde. Prendendo ξ, η e queste derivate per funzioni incognite abbiamo un sistema di equazioni ai differenziali totali in 12 funzioni incognite, al quale sono da associarsi le quattro equazioni (B) in termini finiti.

Il numero delle costanti arbitrarie nell'integrale generale sarà dunque al massimo

$$12 - 4 = 8 \quad \text{c. d. d.}$$

Perchè questo massimo sia effettivamente raggiunto, bisogna:

1° che le successive equazioni (del 1° ordine) ottenute eguagliando a zero, nello sviluppo del 1° membro della (A), i coefficienti delle potenze di y' superiori alla terza siano tutte identità. (*)

(*) Ciò porta, come facilmente si vede, che ω deve essere un polinomio di 2° grado in y'

2° che le (B) e le equazioni alle derivate parziali terze ricordate formino un sistema completo di Mayer.

Nel prossimo paragrafo determineremo tutte le equazioni del 2° ordine per le quali questo accade –

Ora osserviamo come sia a priori evidente che se un'equazione differenziale (del resto di qualunque ordine) possiede una serie continua di trasformazioni, queste formano un gruppo. Nel caso nostro ciò risulta anche dall'osservare che se la equazione differenziale proposta ammette le due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, \quad X_2 f,$$

ammette anche l'alternata $(X_1 X_2)$, come segue dal teorema 4° al §. 147 e dalla proprietà osservata in fine al §. 113 –

Abbiamo così dimostrato il teorema.

Se un'equazione differenziale del 2° ordine ammette una serie continua di trasformazioni in se medesima, queste formano un gruppo continuo finito, che possiede al massimo 8 parametri.

§. 157
Equazioni differenziali del 2° ordine con un gruppo G_8

Resta ora a vedersi se il numero di 8 parametri, sopra trovato come massimo pel gruppo di un'equazione differenziale del 2° ordine, può essere effettivamente raggiunto – Che ciò sia lo dimostra l'esempio della semplice equazione differenziale

$$y'' = 0 ;$$

le sue linee integrali formano il sistema delle rette del piano che si trasforma in sè stesso per il gruppo G_8 delle proiettività.

Del resto se determiniamo direttamente il gruppo dell'equazione differenziale $y''=0$, seguendo il metodo del paragrafo precedente, troviamo che le condizioni (necessarie e sufficienti) cui debbono soddisfare ξ, η sono date dalle equazioni del secondo ordine

$$(B^*) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \,, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \,, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}$$

Queste, derivate rapporto ad x, y, dimostrano che tutte le derivate terze di ξ, η sono nulle, cioè ξ, η sono polinomi di 2° grado in x, y; le (B^*) danno poi per i valori

più generali di ξ, η
$$\xi = ax + by + c + dx^2 + exy$$
$$\eta = \alpha x + \beta y + \gamma + ey^2 + dxy$$
($a, b, c; \alpha, \beta, \gamma; d, e$ costanti) – Queste formole definiscono appunto la più generale trasformazione projettiva del piano.

È ben naturale che se nell'equazione differenziale $y'' = 0$ si fa un cangiamento qualunque di variabile indipendente e di funzione incognita, l'equazione differenziale trasformata ammetterà ancora un gruppo ad 8 parametri. Ma è notevole che inversamente: Ogni equazione differenziale del 2° ordine che ammette un gruppo ad 8 parametri è riducibile, con un opportuno cangiamento di variabili, alla forma $y'' = 0$.

Per dimostrarlo supponiamo di avere una tale equazione differenziale del 2° ordine con un gruppo G_8 di trasformazioni e vediamo quali conseguenze si possono trarre rispetto alla costituzione di questo G_8, dalle sue equazioni di definizione che sono le (B) del paragrafo precedente – Calcolando, secondo le regole del § 39, i numeri caratteristici ε per gli ordini delle trasformazioni infinitesime di G_8 abbiamo
$$\varepsilon_0 = 2 \qquad \varepsilon_1 = 4 \qquad \varepsilon_2 = 6$$
$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 0 \qquad \nu_2 = 4$$

indi

$$\tau_0 = 2 \;,\; \tau_1 = 4 \;,\; \tau_2 = 2$$

Vi sono dunque nel nostro G_8 quattro trasformazioni infinitesime del 1° ordine, colle quali non è possibile comporre trasformazioni d'ordine superiore – Dunque, pei risultati del § 114, il sottogruppo di stabilità di G_8 relativo ad un punto P_0 del piano trasforma le coordinate omogenee degli elementi lineari uscenti da P_0 secondo il gruppo lineare omogeneo Γ_4 su due variabili, indi il fascio degli elementi lineari stessi secondo il gruppo generale projettivo – Concludiamo intanto di qui, per quanto si è visto al §. 122, che il nostro G_8 su due variabili x, y è primitivo – Dunque, con una trasformazione di variabili x, y, possiamo ridurre questo G_8 al gruppo generale proiettivo su x, y (§ 133), generato dalle trasformazioni infinitesimali

$$p,\; q,\; xp,\; yp,\; xq,\; yq,\; x^2p + xyq,\; xyp + y^2q.$$

Restano ora solo a trovarsi le equazioni differenziali del 2° ordine $y'' = \omega(x, y, y')$ che ammettono le singole trasformazioni infinitesime di questo gruppo – Perciò dovrà essere ω una tale funzione di x, y, y' che la (A) § 155 risulti soddisfatta ponendovi per ξ, η i coefficienti di una qualunque delle 8 trasformazioni infinitesime - Ma basta già adoperare le prime quattro

$$p,\ q\ ,\ xp,\ yp$$

per dedurre che sarà necessariamente $\omega = 0$ - E infatti dobbiamo fare successivamente

$$\xi = 1\ ,\quad \eta = 0$$
$$\xi = 0\ ,\quad \eta = 1$$
$$\xi = x\ ,\quad \eta = 0$$
$$\xi = \eta\ ,\quad \eta = 0$$

Le prime due, sostituite in (A), danno

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0\ ,\ \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0\ ;$$

dunque ω è una funzione solo di y' - La terza dà

$$y'\frac{d\omega}{dy'} - 2\omega = 0$$

e la quarta

$$y'^2\frac{d\omega}{dy'} - 3\omega y' = 0$$

onde appunto $\omega = 0$ - Così è adunque dimostrato il teorema enunciato -

§ 158

Determinazione di tutte le equazioni differenziali del 2º ordine o d'ordine superiore che ammettono un dato G_1

Dato un gruppo G_1 ad un parametro, generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

ricerchiamo ora la forma più generale delle equazioni differenziali del 2° ordine

$$(33)\qquad \Omega(x, y, y', y'') = 0$$

che ammettono questo G_1 - La risoluzione di questo problema si fa in modo del tutto analogo a quello del §. 145 per le equazioni del 1° ordine.

Il gruppo $G_1^{(2)}$ prolungato due volte da G_1 ha la trasformazione infinitesima

$$X_1^{(2)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \eta_1\frac{\partial f}{\partial y'} + \eta_2\frac{\partial f}{\partial y''}$$

e nello spazio S_4 delle variabili x, y, y', y'' la (33) deve rappresentare una varietà (ipersuperficie) invariante rispetto a $G_1^{(2)}$ - Essa è quindi o un luogo di ∞^2 traiettorie di $G_1^{(2)}$ o un insieme di punti invarianti -

Ma quest'ultimo caso si esclude subito poichè si suppone che la (33) contenga effettivamente y'' (cf. § 145); dunque la (33) è nell'S_4 una varietà invariante di prima classe (§ 47) e per ciò essa si otterrà stabilendo una relazione fra i tre invarianti di $G_1^{(2)}$.

Ciò equivale a dire: Le equazioni differenziali del 2° ordine invarianti rispetto a G_1 si ottengono tutte eguagliando a zero un invariante differenziale del 2° ordine di G_1 -

Ora diciamo, come al § 145, $\underline{u}$ l'invariante assoluto di G_1, v l'invariante del 1° ordine, che si ottiene (come si è visto al § 145) con una quadratura, appena noto $\underline{u}$; allora (§ 119) il più generale invariante differenziale del 2° ordine di G_1 sarà del tipo

$$f\left(u, v, \frac{dv}{du}\right)$$

Possiamo dunque concludere:

La più generale equazione differenziale del 2° ordine che ammette un gruppo G_1 generato da

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y},$$

ha la forma

$$\frac{dv}{du} = \Phi(u, v),$$

dove Φ è una funzione arbitraria di due argomenti u, v; di questi il primo $\underline{u}$ è un invariante assoluto di G_1(*), il secondo $\underline{v}$ è l'invariante del 1° ordine che si calcola con una quadratura da u.

Così p. e. pel gruppo $Xf = \frac{\partial f}{\partial x}$ (o $x' = x + a$) abbiamo $u = y$, $v = y'$ e la più generale equazione del 2° ordine che ammette questo G_1 di traslazioni è

$$y'' = \psi(y, y')$$

Servendoci dei risultati ottenuti al § 119 per gli invarianti differenziali dei gruppi a due variabili

---

(*) o se si vuole l'integrale dell'equazione del 1° ordine $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$

un processo perfettamente analogo si applica alla ricerca delle equazioni d'ordine $m>2$ che ammettono il gruppo G_1. Si giunge così al risultato finale:

Ogni equazione differenziale d'ordine m, che ammette il gruppo G_1 ha la forma

$$(\alpha) \qquad \frac{d^{m-1} v}{du^{m-1}} = \Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2 v}{du^2}, \dots \frac{d^{m-2} v}{du^{m-2}}\right)$$

essendo u, v gli invarianti differenziali d'ordine 0 e 1 di G_1.

Di qui si vede che per integrare una tale equazione differenziale basta integrare l'equazione del 1° ordine $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{d\eta}{\eta}$, ciò che dà u, e con una quadratura calcolare v; indi con operazioni algebriche si pone l'equazione data sotto la forma (α) — Integrata questa equazione d'ordine $m-1$ è noto v in funzione di u ed $m-1$ costanti arbitrarie ed una successiva quadratura dà y in funzione di x.

§. 159

Integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine con un noto G_1

Ritorniamo al caso particolare delle equazioni di 2° ordine per esaminare più da vicino quali vantaggi offre per l'integrazione la conoscenza di una o più trasformazioni infinitesimali

$$X_1f,\ X_2f \dots X_rf$$

della equazione in se stessa. Formando le loro espressioni alternate ed aggregandole alle trasformazioni date, se già non ne sono combinazioni lineari a coefficienti costanti, possiamo sempre ridurci al caso che quelle r trasformazioni generino un gruppo e sarà in ogni caso (§ 156) $r \leq 8$. Siccome poi qualunque gruppo a più di due parametri contiene sempre sottogruppi G_2 che si determinano algebricamente, basterà che trattiamo soltanto due casi e cioè che sia noto, per mezzo della due trasformazioni infinitesime o un gruppo G_1 ad un parametro o un gruppo G_2 a due parametri dell'equazione.

Cominciamo qui dal trattare il primo caso e sia

$$Xf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}$$

la trasformazione infinitesima nota dell'equazione differenziale data

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

Ciò che abbiamo detto in generale alla fine del paragrafo precedente dimostrerebbe soltanto che si può ridurre l'integrazione della proposta, 1º ad integrare l'equazione del 1º ordine $\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$, 2º ad una quadratura, 3° all'integrazione di una seconda equazione del 1° ordine, 4° ad un'altra quadratura. Ma se applichiamo i risultati del § 153 facilmente vediamo che si può sostituire a queste operazioni l'integrazione di una sola equazione del 1° ordine ed una quadratura.

E infatti alla equazione del 2° ordine sostituiamo l'equazione a derivate parziali equivalente

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Di questa conosciamo, per quanto si è visto alla fine del § 155, la trasformazione infinitesima

$$X^{(1)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \left\{\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial \xi}{\partial y}y'^2\right\}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

prolungata una volta dalla Xf. Questa $X^{(1)}f$ è evidentemente essenziale, cioè non può aversi

$$X^{(1)}f = \rho(x, y, y')\cdot Af$$

Secondo quanto abbiamo dimostrato nel § 153 basta dunque l'integrazione di un'equazione del 1° ordine equivalente, secondo il metodo di Mayer, al sistema completo

$$Af = 0 \quad , \quad X^{(1)}f = 0 ;$$

indi una quadratura compie l'integrazione.

Così adunque: L'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine, di cui sia nota una trasformazione infinitesima, si riduce all'integrazione di una quazione del 1° ordine e ad una successiva quadratura.

§. 160

Riduzione a forma normale dei gruppi Abeliani G_2 su due variabili

Per esaminare le ulteriori semplificazioni apportate dalla conoscenza di una seconda trasformazione infinitesima, che generi colla prima un gruppo G_2, conviene che facciamo una ricerca preliminare sulla riduzione dei gruppi G_2 del piano a forma normale. Queste forme normali si potrebbero già subito trarre dai risultati generali del Cap. precedente ove si sono determinati tutti i possibili tipi dei gruppi nel piano; ma il nostro scopo attuale è quello di determinare altresì le operazioni necessarie a questa riduzione.

Supponiamo dunque dato un G_2 sulle due variabili x, y per mezzo delle sue due trasformazioni infinitesime

$$\begin{cases} X_1 f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial y} \\ X_2 f = \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Dovremo distinguere due casi, secondo che il gruppo

G_2 è Abeliano o no; ed in ciascuno di questi casi sta distinguere a seconda della transitività od intransitività del gruppo.

a) Il gruppo G_2 sia Abeliano transitivo, cioè si abbia

$$(X_1 X_2) = 0 \quad , \quad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \neq 0$$

Per il risultato generale al § 85, cangiando le variabili x, y in convenienti u, v potremo rendere

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial u} \quad , \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

ed avere il gruppo sotto la forma normale

$$G_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right]$$

Quali operazioni sono a ciò necessarie? Poichè dobbiamo avere

$$X_1 u = 1 \quad , \quad X_2 u = 0$$

e

$$X_1 v = 0 \quad , \quad X_2 v = 1$$

calcoliamo immediatamente le derivate parziali sia di u che di v rispetto ad x, y e si avranno quindi u, v con due quadrature indipendenti.

b) Il gruppo G_2 sia Abeliano intransitivo, cioè si abbia

$$(X_1 X_2) = 0 \qquad \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$$

ossia

$$X_2 f = \rho X_1 f,$$

dove ρ è una funzione nota di x, y – Siccome

$$(X_1, X_2) = 0$$

segue di qua

$$X_1\,\rho = 0,$$

vale a dire conosciamo la soluzione ρ di

$$X_1 f = 0$$

Assumiamo ρ come variabile u e prendiamo una tale seconda variabile v che risulti:

$$\bar{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

Così il gruppo G_2 sarà ridotto alla funzione normale

$$G_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial v}, u\frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Quali operazioni sono a ciò necessarie? La nuova variabile u è già determinata senza integrazione – La seconda v deve determinarsi in guisa che risulti

$$X_1 v = \xi_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 1,$$

per il che bisogna integrare il sistema

$$(\beta) \qquad \frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1} = \frac{dv}{1}$$

Ma essendo già noto l'integrale $u = c$ di

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1}$$

il calcolo di v si fa con una quadratura. Infatti traendo per es. y da $u(x,y)=c$, si avrà con una quadratura

$$v=\varphi(x,c)+c'$$

e rimettendo per c, $u(x,y)$:

$$v=\psi(x,y)+c' \text{ (*)}$$

Riassumiamo i risultati ottenuti nel teorema:

Un gruppo Abeliano su due variabili si può ridurre alla forma normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u},\ \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

o all'altra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v},\ u\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

secondo che il gruppo è transitivo o intransitivo. Per

(*) La stessa cosa si può anche esprimere così: l'integrazione di (β) equivale a quella dell'equazione a derivate parziali in tre variabili

$$\xi_1\frac{\partial F}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}=0;$$

ora di questa conosciamo la soluzione u ed il moltiplicatore

$$M=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\eta_1}=-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\xi_1},$$

onde l'altra soluzione si ha con una quadratura.

effettuare la trasformazione occorrono nel primo caso due quadrature (indipendenti), nel secondo una sola quadratura.

§ 161

Caso di un G_2 non Abeliano

Supponiamo ora che il dato G_2 non sia Abeliano; allora potremo supporre (§ 76) che abbia la composizione

$$(X_1 X_2) = X_1 f$$

Distinguiamo anche qui nuovamente il caso della transitività da quello della intransitività.

c) Sia G_2 di composizione $(X_1 X_2) = X_1 f$ e transitivo $(\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \neq 0$ - Possiamo introdurre tali variabili u, v che sia

$$\overline{X}_1 f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

e se

$$\overline{X}_2 f = \xi \frac{\partial f}{\partial u} + \eta \frac{\partial f}{\partial v},$$

a causa di $(\overline{X}_1 \overline{X}_2) = \overline{X}_1 f$, sarà

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = 1$$

cioè

$$\overline{X}_2 f = U \frac{\partial f}{\partial u} + (v + U_1) \frac{\partial f}{\partial v},$$

con U, U_1 funzioni della sola u - Cangiando il parametro u potremo rendere $U=1$ (*) e mettendo $v+U_1$ al posto di v avremo

$$X_2 f = \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}$$

Dunque possiamo ridurre qui il G_2 alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v}$$

Resta da vedere con quali operazioni si potranno calcolare u, v. Ora dobbiamo avere

$$X_1 u = 0 \quad , \quad X_2 u = 1$$

onde u si calcola con una quadratura. In secondo luogo deve essere

$$X_1 v = 1 \quad , \quad X_2 v = v$$

onde risulta per v un'equazione lineare ai differenziali totali, e perciò anche v si ha con una quadratura, perché delle due quadrature necessarie a trovare v una è quella stessa che dà u (**).

(*) Si noti che non può essere $U=0$, altrimenti G_2 sarebbe intransitivo.

(**) Colla risoluzione effettiva si ha infatti

$$du = \frac{-\eta_1 dx + \xi_1 dy}{\Delta} \qquad (\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)$$

$$dv = v\,du + \frac{\eta_2 dx - \xi_2 dy}{\Delta}\ ,$$

la quale ultima si può scrivere

d) Sia G_2 intransitivo e di composizione

$$(X_1X_2) = X_1f ;$$

avremo

$$X_2f = \rho X_1f$$

Si può ridurre al solito X_1f a

$$\overline{X}_1f = \frac{\partial f}{\partial v}$$

e però

$$\overline{X}_2f = \rho\frac{\partial f}{\partial v} ;$$

ma essendo

$$(\overline{X}_1\overline{X}_2) = \overline{X}_1$$

segue

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 1 , \ \rho = v + U$$

e cangiando v in $v+U$ possiamo rendere $U=0$, in modo che $\rho = v$.

Il nostro G_2 si riduce dunque alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v} , \ v\frac{\partial f}{\partial v}$$

La nuova variabile v si calcola in termini finiti da $v = \rho$, la seconda u non deve soddisfare ad altra condizione che alla $X_1u=0$, onde per determinarla conviene integrare l'equazione del 1º ordine

$$\frac{dx}{\xi_1} = \frac{dy}{\eta_1} ,$$

$$d(ve^{-u}) = e^{-u} . \frac{\eta_2 dx - \xi_2 dy}{\Delta}$$

e dà v con una sola quadratura.

che dà le trajettorie del gruppo G_2 —

Concludiamo: Un gruppo non Abeliano G_2 su due variabili si può ridurre alla forma normale

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\,,\ \frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

od all'altra

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\,,\ v\frac{\partial f}{\partial v}\right),$$

secondo che è transitivo o intransitivo — La riduzione si effettua nel primo caso con due quadrature successive, nel secondo integrando l'equazione differenziale del 1° ordine che dà le trajettorie del gruppo derivato.

§. 162

Integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine con un noto G_2

Veniamo ora al problema proposto nel § 159 e supponiamo che della equazione differenziale del 2° ordine

$$(\gamma)\qquad y''=\omega(x,y,y')$$

ci siano note le due trasformazioni infinitesime

$$X_1 f=\xi_1\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_1\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_2 f=\xi_2\frac{\partial f}{\partial x}+\eta_2\frac{\partial f}{\partial y}$$

generatrici di un gruppo G_2. Dimostreremo che in ogni caso l'integrazione della proposta (γ) si ottiene effettuando al massimo due quadrature.

L'integrazione della (γ) equivale a quella dell'equazione a derivate parziali a tre variabili x, y, y' —

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y} + \omega(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Di questa conosciamo due trasformazioni infinitesime e così le prolungate di $X_1 f$, $X_2 f$:

$$\begin{cases} X_1^{(1)} f = \xi_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta_1 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \left\{\dfrac{\partial \eta_1}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial \eta_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} y'^2\right\}\dfrac{\partial f}{\partial y'} \\ X_2^{(1)} f = \xi_2 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \eta_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \left\{\dfrac{\partial \eta_2}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial \eta_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} y'^2\right\}\dfrac{\partial f}{\partial y'} \end{cases}$$

Secondo i risultati del § 154, quando fra Af, $X_1^{(1)} f$, $X_2^{(1)} f$ non sussista alcuna identità lineare occorrono al massimo due quadrature per l'integrazione, ed è dimostrato quanto sopra abbiamo asserito.

Resta dunque solo da considerarsi il caso che le date trasformazioni

$$X_1 f, \quad X_2 f$$

siano tali da avere per conseguenza una relazione lineare fra Af, $X_1^{(1)} f$, $X_2^{(1)} f$, cioè da annullare (identicamente in x, y, y') il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & y' & \omega(x, y, y') \\ \xi_1 & \eta_1 & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial \eta_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} y'^2 \\ \xi_2 & \eta_2 & \dfrac{\partial \eta_2}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial \eta_2}{\partial y} - \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x}\right)y' - \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} y'^2 \end{vmatrix}$$

In primo luogo osserviamo che se il
$$G_2 \equiv (X_1 f, X_2 f)$$
e' intransitivo ciò non è possibile - In tal caso si ha infatti
$$X_2 f = \rho X_1 f = \qquad (\rho = \rho(x, y))$$
$$\xi_2 = \rho \xi_1 \qquad \eta_2 = \rho \eta_1$$
e il determinante Δ diventa
$$\Delta = (\eta_1 - \xi_1 y') \left\{ \eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) y' - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} y'^2 \right\}$$
Il primo fattore certamente non si annulla perchè ξ_1, η_1 non sono insieme nulli - Perchè si annullasse il secondo, dovrebbe aversi
$$\eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \eta_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} - \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \xi_1 \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$
e quindi
$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,$$
ossia ρ costante ciò che è escluso, la $X_2 f$ essendo distinta dalla $X_1 f$ -

Dobbiamo ora dunque ricercare soltanto se può annullarsi Δ quando G_2 sia transitivo -

Distinguiamo per ciò secondo che G_2 è Abeliano o no - Nel primo caso si può con due quadrature ridurre il gruppo alla forma normale (§ 160)
$$\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$$
ed il determinante relativo Δ diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \omega(u,v,v') \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \omega(u,v,v');$$

perciò l'equazione differenziale si riduce alla semplice

$$v'' = 0$$

Dunque la proposta risulta integrata colle due quadrature che danno u, v.

Nel secondo caso si può ancora (§ 161) ridurre con due quadrature il G_2 alla forma normale

$$\frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} + v\frac{\partial f}{\partial v},$$

dopo di che Δ diventa

$$\begin{vmatrix} 1 & v' & \omega(v,v,v') \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & v & v' \end{vmatrix} = v' - \omega,$$

onde $\omega = v'$. Colle due quadrature che danno u, v si riduce dunque l'equazione differenziale alla forma

$$v'' = v'$$

coll'integrale generale

$$v = a e^{u} + b$$

Possiamo dunque enunciare il teorema finale:

Se di un'equazione differenziale del 2° ordine sono note due trasformazioni infinitesime distinte che generano un gruppo G_2, la sua integrazione si effettua con due quadrature.

Si può aggiungere, per quanto si è visto, che i due quadrature sono indipendenti quando il gruppo è Abeliano.

Capitolo XVI°

Applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari - Estensione della teorie di Galois secondo Picard e Vessiot -

§. 163

Criterio per la dipendenza lineare di più funzioni

Come già abbiamo detto al §139, è oggetto di quest'ultimo capitolo del corso l'esposizione delle ricerche di Picard e Vessiot sulla teoria delle equazioni differenziali lineari, che danno l'estensione a questo campo delle teorie di Galois per le equazioni algebriche - Per altro la nostra esposizione dovrà necessariamente limitarsi ai principii della teoria -

Ci converrà prima ricordare alcune proprietà fondamentali delle equazioni differenziali lineari. Indichi t una variabile indipendente ed x una funzione incognita di essa, che debba soddisfare ad una data equazione differenziale lineare ed omogenea d'ordine m:

$$(1)\qquad x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \cdots + p_{m-1} x' + p_m x$$

$$\left(x' = \frac{dx}{dt},\ x'' = \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots x^{(m)} = \frac{d^m x}{dt^m} \right)$$

dove i coefficienti p sono assegnate funzioni di t. Diciamo subito che qui noi adottiamo il punto di vista delle variabili complesse, e cioè pensiamo t come variabile complessa, la x come funzione (analitica) incognita di essa, e $p_1, p_2 \ldots p_m$ come funzioni (analitiche) date di t. Del resto la massima parte delle considerazioni seguenti varrebbero ancora limitandosi al campo reale.

I teoremi generali d'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ci accertano che se $t = t_0$ è un punto regolare pei coefficienti p, esiste un integrale x della (1) tale che per $t = t_0$ esso e le sue prime $m-1$ derivate assumono valori prefissati ad arbitrio:

$$x_0,\ x_0',\ x_0'' \dots x_0^{(m-1)}$$

Anzi, nel caso nostro delle equazioni lineari, è noto che se i coefficienti p sono finiti, continui e monodromi entro un certo cerchio col centro in $t=t_0$, anche l'integrale x sarà certamente regolare (finito, continuo e monodromo) entro il medesimo cerchio. Ora se abbiamo un certo numero r di integrali particolari della (1)

$$(2)\qquad x_1,\ x_2 \dots x_r,$$

sarà pure un integrale ogni loro combinazione lineare omogenea

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r$$

a coefficienti costanti - Diciamo poi che gli r integrali (2) sono linearmente indipendenti quando non sussiste fra di essi alcuna relazione della forma

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r = 0,$$

colle c costanti - Occorre in primo luogo stabilire un criterio per riconoscere, dato un certo numero r di funzioni

$$x_1,\ x_2 \dots x_r$$

di una variabile (complessa) t se queste r funzioni sono linearmente dipendenti. La questione si può riportare immediatamente al computo del numero dei parametri essenziali c nella espressione lineare

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_r x_r ;$$

le considerazioni del § 2 dimostrano infatti che se fra $x_1\ x_2 \dots x_r$ sussistono $r-\rho$ relazioni lineari omogenee indipendenti, il numero dei parametri essenziali c nella F si ridurranno precisamente a ρ. Dal criterio generale stabilito al § 3 segue ora facilmente il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le r funzioni $x_1\ x_2 \dots x_r$ di t siano linearmente dipendenti è che si annulli il determinante (Wronskiano)

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & x_1'' \dots\dots & x_1^{(r-1)} \\ x_2 & x_2' & x_2'' \dots\dots & x_2^{(r-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_r & x_r' & x_r'' \dots\dots & x_r^{(r-1)} \end{vmatrix} \quad (*)$$

E infatti, se W non si annulla, le successive caratteristiche $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ delle matrici $M, M_1, M_2 \dots$ considerate al § 3 raggiungono il massimo r, e perciò tutti i parametri sono essenziali, cioè $\rho = r$, e non esiste alcuna relazione lineare fra le x. Se invece

---

(*) Indicheremo in seguito brevemente il Wronskiano di $x_1\ x_2 \dots x_r$ con $W(x_1\ x_2 \dots x_r)$.

W si annulla, la sua caratteristica sarà per e le caratteristiche $\mu, \mu_1, \mu_2 \dots$ formeranno la serie

$$1, 2, 3, \dots \rho \dots$$

crescente fino a ρ e d'allora in poi stazionaria – Vi saranno quindi $r-\rho$ relazioni distinte lineari omogenee a coefficienti costanti fra le x.

I risultati generali ottenuti al § 3 servono altresì per riconoscere, dato un numero qualunque m di funzioni $y_1, y_2 \dots y_m$ di quante si vogliano variabili indipendenti $x_1, x_2 \dots x_n$, se fra le $y_1, y_2 \dots y_m$ hanno luogo relazioni lineari omogenee a coefficienti costanti e a computare il numero di queste relazioni distinte.

Applicando infatti i teoremi del § 3 ... vien... il teorema seguente che è utile osservare per il seguito:

Si costruiscano le successive matrici

$$M_1 = \left| y_i \; \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \; \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \right| \qquad i = 1, 2 \dots m$$

$$M_2 = \left| y_i \; \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \; \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \; \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1^2} \; \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1 \partial x_2} \dots \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_n^2} \right|$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

ciascuna matrice deducendosi dalla precedente coll'aggiun ta di colonne formate colle derivate dell'ordine superiore delle y. Le caratteristiche

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots\ldots$$

di queste matrici formano una serie crescente fino ad un massimo ρ, raggiunto il quale rimane stazionaria. Il numero delle relazioni lineari omogenee da cui le y sono legate sarà allora $r - \rho$.

§ 164
Sistemi fondamentali d'integrali

Ritornando ora all'equazione differenziale lineare (1), vediamo subito che si può, in infiniti modi, scegliere $\underline{m}$ suoi integrali particolari

$$x_1, x_2 \ldots x_m,$$

che siano linearmente indipendenti; poichè, essendo arbitrari per $t = t_0$ i valori di ciascun integrale e delle sue prime $m-1$ derivate, possiamo sempre fare in guisa che il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 \ldots\ldots x_1^{(m-1)} \\ x_2 \ldots\ldots x_2^{(m-1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_m \ldots\ldots x_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

sia differente da zero per $t = t_0$ e allora, a causa della continuità, rimarrà diverso da zero almeno in un intorno di t_0. È facile anzi vedere di più che, comunque si prolunghino analiticamente gli integrali (per un medesimo cammino), essi rimarranno sempre linearmente indipendenti. E infatti se questi prolungamenti analitici fossero legati da una relazione lineare, la medesima relazione dovrebbe sussistere, retrocedendo fra i rami primitivi. La stessa cosa risulta dalla notevole formola seguente, dovuta a Liouville. Se si forma la derivata rapporto a t del Wronskiano W, derivando per colonne, ed osservando che $x_1, x_2, \ldots x_m$ sono integrali particolari della (1), si trova subito

$$\frac{dW}{dt} = p_1 W,$$

cioè

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\int p_1 dt} W\right) = 0,$$

da cui integrando si ha la formola di Liouville:

$$(3) \qquad W = C e^{\int_{t_0}^{t} p_1 dt} \qquad (C \text{ costante})$$

Questa ci dimostra appunto che se W non si annulla per $t = t_0$, non potrà mai annullarsi in alcun altro punto regolare.

Un sistema di m integrali particolari della (1) linearmente indipendenti dicesi un sistema fondamentale – La denominazione proviene da ciò che se

$$x_1,\ x_2 \ldots x_n$$

è un tale sistema d'integrali, ogni altro integrale x sarà necessariamente una combinazione lineare omogenea a coefficienti costanti di quegli m integrali particolari:

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_m x_m$$

E infatti il Wronskiano W di $x, x_1, x_2 \ldots x_m$ è necessariamente nullo, come si vede tenendo conto della (1) cui soddisfano $x, x_1, x_2 \ldots x_m$ –

Esistono evidentemente infiniti sistemi fondamentali d'integrali – Essi si ottengono tutti da uno $x_1, x_2 \ldots x_m$ effettuando sopra le x sostituzioni lineari omogenee a coefficienti costanti

$$(4) \qquad y_i = \sum_k^{1\ldots m} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

con determinante $|a_{ik}| \neq 0$ –

Queste sostituzioni (4) formano il gruppo lineare omogeneo a m^2 parametri, gruppo che indichiamo con L – Si osservi che le m^2 trasformazioni infinitesime generatrici di L sono le seguenti

$$(4^*) \qquad X_{ik} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

§. 165

Invarianti differenziali razionali del gruppo L

Date ad arbitrio m funzioni della variabile t

$$x_1, x_2, \dots x_m,$$

le quali siano linearmente indipendenti, possiamo sempre formare un'equazione differenziale lineare dell'ordine m che abbia $x_1, x_2 \dots x_m$ per un sistema (fondamentale) d'integrali = Essa è data, in modo univoco, come risulta dalle osservazioni del § 33 relative alla eliminazione di costanti arbitrarie, dall'eguagliare a zero il determinante d'ordine $m+1$:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} x^{(m)} & x^{(m-1)} & \dots & x'' & x' & x \\ x_1^{(m)} & x_1^{(m-1)} & \dots & x_1'' & x_1' & x_1 \\ x_2^{(m)} & x_2^{(m-1)} & \dots & x_2'' & x_2' & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^{(m)} & x_m^{(m-1)} & \dots & x_m'' & x_m' & x_m \end{vmatrix} = 0$$

Se la scriviamo sotto la forma (1)

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} x' + p_m x,$$

possiamo trarre i coefficienti p espressi razionalmente per $x_1, x_2 \dots x_m$ e le loro derivate fino all'ordine m.

Per ciò, ponendo

$$W = \begin{vmatrix} x_1^{(m-1)} & x_1^{(m-2)} & \dots & x_1' & x_1 \\ x_2^{(m-1)} & x_2^{(m-2)} & \dots & x_2' & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m^{(m-1)} & x_m^{(m-2)} & \dots & x_m' & x_m \end{vmatrix}$$

e indicando con W_i il determinante che si ottiene dal Wronskiano W sostituendo agli elementi della colonna i^{ma} gli altri

$$x_1^{(m)}\ x_2^{(m)} \dots x_m^{(m)},$$

troviamo per le formole richieste

$$(5^*) \qquad p_i = \frac{W_i}{W}$$

Osserviamo ora che ove si operi sopra $x_1 x_2 \dots x_m$ e le loro derivate una sostituzione qualunque (A) del gruppo lineare omogeneo L, i coefficienti p restano evidentemente inalterati. Secondo i concetti generali di Lie, che abbiamo sviluppato nel Cap. IX, possiamo dunque dire che

$$p_1, p_2 \dots p_m$$

sono invarianti differenziali d'ordine m del gruppo L. Di più essi sono in numero di m evidentemente indipendenti, e razionali nei loro argomenti. I risultati generali di Lie esposti nel Cap. IX ci dimostrano ora facilmente che non esistono altri invarianti differenziali d'ordine m, indipendenti da $p_1, p_2 \ldots p_m$, e tutti gli invarianti differenziali d'ordine superiore si ottengono dalle successive derivate dei coefficienti p. Se prolunghiamo infatti il gruppo $\mathfrak{L}$ r volte in $\mathfrak{L}^{(r)}$, secondo le regole del § 116, per le sostituzioni generatrici di $\mathfrak{L}^{(r)}$ troviamo le m^2 seguenti

$$X_{ik}^{(r)} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} + x_i' \frac{\partial f}{\partial x_k'} + \cdots + x_i^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_k^{(r)}} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

Gli invarianti differenziali d'ordine r (o inferiore) si otterranno quindi integrando il sistema completo

$$(6) \qquad X_{ik}^{(r)} f = 0 \qquad (i, k = 1, 2 \ldots m)$$

Ora, finché $r < n$, vi sono precisamente $(r+1)m$ di queste equazioni linearmente indipendenti, cioè tante quante sono le variabili

$$x_i, x_i', x_i'' \ldots x_i^{(r)} \quad (i = 1, 2 \ldots m)$$

Prendansi infatti fra le (6) le $(r+1)m$ equazioni

$$(6^*) \qquad X_{ik}^{(r)} f = 0 \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r+1 \\ k = 1, 2 \ldots m; \end{cases}$$

il loro determinante, come subito si vede, è la potenza m^{ma} del determinante

$$W(x_1 x_2 \ldots x_{r+1}) = \begin{vmatrix} x_1^{(r)} & x_1^{(r-1)} & \ldots & x_1' & x_1 \\ x_2^{(r)} & x_2^{(r-1)} & \ldots & x_2' & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{r+1}^{(r)} & x_{r+1}^{(r-1)} & \ldots & x_{r+1}' & x_{r+1} \end{vmatrix}$$

ed è perciò $\neq 0$, onde le (6*) sono linearmente indipendenti. Per $r \geq m$ le (6) sono in numero di m^2 indipendenti. Si conclude di qui che il gruppo L non possiede invarianti differenziali d'ordine $r < m$, e per $r \geq m$ vi sono precisamente

$$(r+1)m - m^2 = m(r+1-m)$$

invarianti d'ordine r, in particolare m invarianti differenziali d'ordine m. Questi sono evidentemente $p_1, p_2, \dots p_m$. Ogni qualvolta l'ordine r cresce (da m in poi) di un'unità, cresce di m il numero degli invarianti differenziali, onde si vede appunto che questi invarianti differenziali si riducono unicamente ai coefficienti p ed alle loro successive derivate (*).

Pel nostro scopo attuale occorre considerare in particolare gli invarianti che sono razionali nelle

$$x_1, x_2, \dots x_m$$

e nelle loro derivate successive. Sussiste per questi invarianti il teorema fondamentale (Appell).

(*) Si noti che, essendo $p_1, p_2, \dots p_m$ funzioni arbitrarie di t, non può sussistere una relazione fra i coefficienti p e le loro successive derivate.

Ogni funzione razionale di $x_1, x_2 \dots x_m$ e delle loro derivate fino ad un certo ordine, che rimanga invariata per tutte le sostituzioni del gruppo lineare omogeneo L, si esprime razionalmente per i coefficienti p e le loro derivate.

La dimostrazione di questo teorema, che assimila gli invarianti razionali del gruppo L alle funzioni simmetriche delle radici di un'equazione algebrica, si potrebbe trovare facilmente dalle teorie generali di Lie ora ricordate. Ma si può anche dimostrarlo in modo elementare come segue.

Data una funzione razionale

$$R(x_1, x_2 \dots x_m; x_1' \dots x_m'; \dots x_1^{(\mu)} \dots x_m^{(\mu)})$$

delle x e loro derivate fino ad un certo ordine μ, si potrà in primo luogo, ove sia $\mu > m$, abbassare l'ordine delle derivazioni fino a $m-1$, facendo uso delle identità

$$x_i^{(m)} = p_1 x_i^{(m-1)} + \dots + p_m x_i \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

e di quelle che ne seguono per derivazione. Per tal modo si porrà la R identicamente sotto la forma di una funzione razionale delle x e loro derivate fino all'ordine $m-1$ e dei coefficienti e loro derivate successive; diciamo:

(7) $\mathcal{R}(x_1 \ldots x_m ; x'_1 \ldots x'_m ; \ldots x_1^{(n)} \ldots x_m^{(n)}) =$

$$= R(x_1 \ldots x_m ; x'_1 \ldots x'_m ; \ldots x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)} ; p_1 \ldots p_m ; p'_1 \, p'_2 \ldots p'_m \ldots),$$

e spesso indicheremo più brevemente il secondo membro con $R(x, p)$ - Se supponiamo che la primitiva $\mathcal{R}$ sia un invariante differenziale, essendo la (7) un'identità, sarà pure un invariante differenziale $R(x, p)$, cioè eseguendo sulle x una sostituzione qualunque di $\mathcal{G}$

$$x_i = \sum_k a_{ik} X_k \quad , \quad x_i^{(r)} = \sum_k a_{ik} X_k^{(r)}$$

si dovrà avere, qualunque siano le a;

(7*) $R(x_1 \ldots x_m ; x'_1 \ldots x'_m ; \ldots x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)} ; p_1 \ldots p_m ; p'_1 \ldots p'_m \ldots) =$

$$= R(X_1 \ldots X_m ; X'_1 \ldots X'_m ; \ldots X_1^{(m-1)} \ldots X_m^{(m-1)} ; p_1 \ldots p_m ; p'_1 \ldots p'_m \ldots)$$

poiché le p e le loro derivate restano invariate.

Ora, per un valore arbitrario di t, si può disporre delle m^2 costanti $\underline{a}$ in guisa da far assumere alle

$$X_1 \ldots X_m ; X'_1 \ldots X'_m ; \ldots X_1^{(m-1)} \ldots X_m^{(m-1)}$$

valori affatto arbitrarii e la identità (7*) non potrebbe aver luogo se la $R(x, p)$ dipendesse effettivamente dalle x e loro derivate.

L'invariante differenziale supposto deve dunque ridursi, per la trasformazione eseguita, ad una funzione razionale dei coefficienti p_i e loro derivate. Ciò dimostra l'enunciato teorema di Appell.

§ 166

Invarianti dei sottogruppi di un gruppo G_r

Come in algebra, per la formazione delle risolventi di una data equazione, è essenziale di considerare, accanto alle funzioni simmetriche, funzioni razionali non simmetriche delle radici, così nel campo delle equazioni differenziali lineari importa considerare, insieme agli invarianti differenziali, delle funzioni razionali qualunque delle $x_1\, x_2 \dots x_m$ e delle loro derivate. Se in una tale funzione

$$R(x_1\, x_2 \dots x_m;\, x_1' \dots x_m';\, \dots x_1^{(\mu)} \dots x_m^{(\mu)})$$

eseguiamo le sostituzioni del gruppo $\mathcal{L}$ (prolungato) sulle x e loro derivate, potrà darsi che la R, pur non rimanendo invariata per tutte le sostituzioni di $\mathcal{L}$ (pur non essendo un invariante differenziale) rimanga invariata per una parte di queste. Ed è a priori evidente che quelle sostituzioni di $\mathfrak{L}$ che lasciano invariata la forma di R costituiscono in $\mathfrak{L}$ un sottogruppo; questo può essere del resto un sottogruppo puro di Lie (generato da trasformazioni infinitesime, ovvero un sottogruppo misto. In ogni caso la questione fondamentale che dobbiamo qui esaminare è la seguente: se operando sugli argomenti di R le sostituzioni di $\mathfrak{L}$ la funzione che si ottiene conterrà tutti gli m^2 parametri a_{ik} come essenziali, ovvero se questi si ridurranno ad un numero minore. È opportuno proporre e risolvere la questione stessa in modo generale per un gruppo qualsiasi G_r di trasformazioni sulle x

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_m; a_1\, a_2 \ldots a_r),$$

ricercando se per una data funzione F delle x, operando sugli argomenti le trasformazioni di G_r, la funzione risultante

$$F(x_1' x_2' \ldots x_m') = F(f_1(x,a), f_2(x,a) \ldots f_m(x,a)) =$$

$$= \Phi(x_1 x_2 \ldots x_m; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

verrà a contenere tutti gli r parametri a come essenziali, ovvero questi si ridurranno a un numero minore. A tale domanda risponde il teorema generale seguente (Vessiot):

Affinchè la funzione $\Phi(x,a)$ contenga soltanto come parametri essenziali $r-\rho$ combinazioni dei parametri $\underline{a}$, è necessario e sufficiente che la funzione $F(x, x_2 \dots x_m)$ ammetta precisamente ρ trasformazioni infinitesime distinte di G_r. Queste trasformazioni generano allora in G_r un sottogruppo G_ρ (intransitivo) a ρ parametri di cui F è un invariante.

La seconda parte del teorema è evidentemente una conseguenza della prima, a dimostrare la quale basterà provare 1° che se $\Phi(x,a)$ contiene $r-\rho$ parametri essenziali soltanto, la $F(x, x_1 \dots x_m)$ ammetterà <u>almeno</u> ρ trasformazioni infinitesime di G_r; 2° che se $F(x, \dots x_m)$ ammette ρ trasformazioni infinitesime di G_r, la $\Phi(x,a)$ dipenderà al più da $r-\rho$ parametri essenziali.

Queste proprietà risultano dimostrate dalle osservazioni seguenti: 1° Suppongasi che $\Phi(x,a)$ contenga solo $r-\rho$ parametri essenziali. Con un cangiamento di parametri si può supporre che questi siano

$$a_{\rho+1}, a_{\rho+2} \dots a_r,$$

onde la $\Phi(x,a)$ non dovrà contenere $a_1, a_2 \dots a_\rho$ e per ciò sarà

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0 \quad \text{per } k = 1, 2 \dots \rho$$

Ma si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_i^{1\dots m} \frac{\partial F(x_1' x_2' \dots x_m')}{\partial x_i'} \cdot \frac{\partial x_i'}{\partial a_k},$$

ed avendo riguardo alle equazioni differenziali fondamentali (A) § 7 (pag. 29)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_i^{1\dots m} \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x') \psi_{sk}(a) \frac{\partial F(x_1' \dots x_n')}{\partial x_i'} = 0,$$

cioè

$$(8) \qquad \sum_s^{1\dots r} \psi_{sk}(a) X_s' F' = 0 \quad (k = 1, 2 \dots \rho)$$

Il determinante $|\psi_{sk}|$ essendo diverso da zero, se diamo alle $\underline{a}$ un sistema qualunque di valori particolari che non annullino quel determinante, i primi membri delle (8) sono ρ combinazioni lineari indipendenti di

$$X_1' F', X_2' F', \dots X_r' F'$$

onde si conclude appunto che la $F(x_1 x_2 \dots x_m)$ ammette ρ trasformazioni infinitesime indipendenti di G_r.

2° Inversamente supponiamo che $F(x_1 \dots x_m)$ ammetta ρ trasformazioni infinitesime di G_r e siano

$$X_1 f, X_2 f, \dots X_\rho f,$$

sarà quindi:

$$X'_j F' = \sum_i \xi_{ji}(x') \frac{\partial F(x'_1 \dots x'_m)}{\partial x'_i} = 0, \text{ per } j = 1, 2, \dots \rho$$

A causa delle formole (B) § 8 (pag. 33), le precedenti possono scriversi

$$\sum_i^{1\dots m} \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F(x'_1 \dots x'_m)}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0$$

$$j = 1, 2 \dots \rho$$

Queste sono ρ equazioni distinte, cui soddisfa Φ come funzione delle $\underline{a}$, con coefficienti α_{jk} funzioni delle a, e per ciò i parametri essenziali si ridurranno <u>al</u> <u>massimo</u> ad $r - \rho$ (cf. § 2)

Il processo stesso di dimostrazione dato pel teorema può servire a trovare il sottogruppo G_ρ di G_r che lascia invariata la funzione assegnata $F(x_1 x_2 \dots x_m)$ - Calcolate infatti le r funzioni

$$X_1 F = \xi_1, \; X_2 F = \xi_2 \dots\dots X_r F = \xi_r,$$

la questione si riporta a riconoscere se le funzioni note $\xi_1 \; \xi_2 \dots \xi_r$ sono legate fra loro da relazioni lineari omogenee e da quante - Per questo basterà applicare i criteri stabiliti alla fine del § 163, ciò che fornirà anche i valori dei coefficienti costanti nelle dette relazioni lineari e farà quindi conoscere le trasformazioni infinitesime generatrici del sottogruppo G_ρ -

§ 167
Risolventi delle equazioni differenziali lineari

Ritornando al nostro argomento principale delle equazioni differenziali lineari, consideriamo una qualunque funzione razionale delle $x_1, x_2 \dots x_m$ e loro derivate fino ad un certo ordine μ – Quando sia $\mu \geq m$ riduciamo, col processo del § 165, l'ordine delle derivazioni fino a $m-1$ ponendo la R sotto la forma

$$R(x, p).$$

ove la R contiene razionalmente le x e loro derivate fino all'ordine $m-1$, e inoltre i coefficienti p e le loro derivate –

Per ricercare allora il sottogruppo di $\mathfrak{L}$ che lascia invariata $R(x, p)$, dovremo eseguire una sostituzione qualunque

$$X_i^{(\lambda)} = \sum_k a_{ik} x_k^{(\lambda)} \quad \begin{cases} i = 1, 2 \dots m \\ \lambda = 1, 2 \dots m-1 \end{cases}$$

di $\mathfrak{L}$, e porre la relazione

$$(9) \qquad R(x, p) = R(X, p).$$

cercando di determinare i corrispondenti valori ammissibili per i coefficienti a_{ik} –

Ordinando la (9) rispetto alle $x_1\ x_2 \ldots x_m$ e loro derivate, dovremo per ciò eguagliare da una parte e dall'altra i coefficienti corrispondenti, ciò che fornirà un certo numero di relazioni algebriche indipendenti fra i coefficienti a_{ik}. Queste daranno le condizioni necessarie e sufficienti affinché le corrispondenti trasformazioni sulle x lascino la $R(x,p)$ invariata; tali trasformazioni formeranno entro $\mathcal{L}$ un sottogruppo, che potrà secondo i casi essere un gruppo puro di Lie, ovvero un gruppo misto H. In ogni caso H conterrà un sottogruppo G_ρ a ρ parametri generato da ρ trasformazioni infinitesime di $\mathcal{L}$ (cf. § 82) - È da osservarsi che il gruppo H, come G_ρ, dipenderà algebricamente dai parametri in esso contenuti; si dirà per ciò un sottogruppo algebrico di $\mathcal{L}$ - Il calcolo delle trasformazioni infinitesime generatrici di G_ρ si eseguirà, come si è visto in generale al paragrafo precedente, mediante risoluzione di sistemi di equazioni lineari; così troveremo le ρ trasformazioni generatrici di G_ρ che indichiamo con

$$Z_1 f, \quad Z_2 f \; ---- \; Z_\rho f,$$

e che saranno ρ combinazioni lineari indipendenti (a coefficienti costanti) delle m^2 trasformazioni X_{ik}

generatrici di $\mathcal{S}$.

Ora la $R(X,p)$ è una funzione di t, che indichiamo con

$$V = R(X,p)$$

contenente $m^2 - \rho$ costanti arbitrarie essenziali.

Dai teoremi generali sulla formazione delle equazioni differenziali per eliminazione di costanti arbitrarie (cf. § 33) risulta che si potrà formare una equazione differenziale d'ordine $m^2-\rho$ a cui soddisfa la $V(t)$.

Per precisare meglio il modo di formazione e la natura di questa equazione differenziale, facciamo uso delle considerazioni seguenti. Formiamo le successive derivate rapporto a t degli ordini $1, 2, \dots m^2-\rho$ della funzione $R(x,p)$ ed ogni volta riduciamo, col processo del § 165, l'ordine delle derivate delle $\underline{x}$ a $\underline{m-1}$; le funzioni così ottenute indichiamo con

$$R_1(x,p)\,,\quad R_2(x,p)\ \dots\dots\ R_{m^2-\rho}(x,p)\ ^{(*)}$$

(*) Così sarà p. e. $R_1(x,p)$ definita dalla formola

$$R_1(x,p) = \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i}\, p_i' + \sum_i \frac{\partial R}{\partial p_i'}\, p_i'' + \dots +$$
$$+ \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i}\, x_i' + \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i'}\, x'' + \dots\dots +$$
$$+ \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i^{(m-2)}}\, x_i^{(m-1)} + \sum_i \frac{\partial R}{\partial x_i^{(m-1)}} \left(p_1 x_i^{(m-1)} + \dots + p_m x_i\right)$$

Derivando successivamente, rapporto a t, la (9) si vede chiaramente che le $m^2-\rho+1$ funzioni

(10) $R(x,p),\ R_1(x,p),\ R_2(x,p) \ldots\ldots R_{m^2-\rho}(x,p)$

ammetteranno tutte, come la prima, il gruppo G_ρ, e saranno quindi invarianti differenziali d'ordine $\leq m-1$ di G_ρ - Come funzioni delle m^2 variabili

$x_1\ x_2 \ldots x_m\ ;\ x_1' \ldots x_m'\ ; \ldots\ldots ;\ x_1^{(m-1)} \ldots x_m^{(m-1)}$

le (10) saranno quindi soluzioni del sistema completo delle ρ equazioni

(11) $\quad Z_1^{(m-1)} f=0,\ \ Z_2^{(m-1)} f=0,\ \ldots\ldots Z_\rho^{(m-1)} f=0,$

che si ottengono eguagliando a zero le trasformazioni infinitesime del gruppo $G_\rho^{(m-1)}$ prolungato $(m-1)$ volte da G_ρ - Le (11) sono ρ combinazioni lineari distinte delle m^2 trasformazioni infinitesime $X_{ik}^{(m-1)}$ di $\mathfrak{L}^{(m-1)}$; queste ultime, come si è visto al § 165, danno eguagliate a zero m^2 equazioni linearmente indipendenti, e perciò anche le ρ equazioni (11) sono linearmente indipendenti - Questo sistema completo (11) ammette dunque soltanto $m^2-\rho$ soluzioni, onde segue che fra le $m^2-\rho+1$ soluzioni (10) ha luogo necessariamente una relazione - Ciò equivale a dire che dalle $m^2-\rho+1$ relazioni

---

e analogamente per le successive -

$$V = R(x,p)\,,\ \frac{dV}{dt} = R_1(x,p),\ \frac{d^2V}{dt^2} = R_2(x,p), \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \frac{d^{m^2-p}V}{dt^{m^2-p}} = R_{m^2-p}(x,p)$$

si possono eliminare le m^2-p quantità $x_i, x_i' \ldots x_i^{(m-1)}$ $(i=1, 2, \ldots m)$; ne risulterà quindi una relazione della forma

$$(12)\qquad \Phi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^{m^2-p}V}{dt^{m^2-p}}\right) = 0\,,$$

dove Φ sarà una funzione razionale intera dei suoi argomenti, con coefficienti funzioni razionali di $p_1, p_2 \ldots p_m$ e delle loro derivate.

Pel modo stesso come la (12) è stata formata, utilizzando soltanto l'equazione differenziale (1) cui soddisfano $x_1, x_2 \ldots x_m$, è chiaro che operando in $R(x,p)$ una qualunque sostituzione lineare omogenea a coefficienti costanti sulle x (anche se a determinante nullo) si avrà un'altra soluzione della (12) stessa. È da osservarsi ancora che l'equazione differenziale (12) ha l'ordine minimo di un'equazione differenziale cui può soddisfare $R(X,p)$, perchè contenendo questa m^2-p costanti essenziali, non può soddisfare ad un'equazione d'ordine $< m^2-p$.

Così adunque, presa ad arbitrio una funzion razionale d'un sistema fondamentale d'integrali della (1) e delle loro derivate, si può sempre formare, con processi algebrici, un'equazione differenziale algebrica come la (12), a cui soddisfa la data funzione razionale, insieme a tutte le sue trasformate per mezzo delle sostituzioni di $\mathfrak{L}$, e che ha il minimo ordine possibile. Queste equazioni (12) corrispondono evidentemente, nel campo attuale, alle risolventi delle equazioni algebriche e si diranno perciò le risolventi della equazione differenziale lineare.

Per addurre un esempio semplicissimo di formazione di risolventi basterà ricordare le formole (3) di Liouville (§ 164) - Se come funzione razionale delle x e loro derivate prendiamo il Wronskiano $W(x_1 \ldots x_m)$, è chiaro che essa rimane invariata per tutte e sole quelle sostituzioni di $\mathfrak{L}$ che hanno il determinante $|a_{rs}| = 1$. Queste formano in $\mathfrak{L}$ un sottogruppo invariante con $\rho = m^2 - 1$ parametri; perciò W deve soddisfare ad una risolvente di 1° grado. Ed in effetto la formola di Liouville

$$\frac{dW}{dt} - p_1 W = 0$$

ci dà appunto la risolvente in questione.

§ 168.

La risolvente di Picard e le sue proprietà fondamentali

Come nella teoria di Galois le più importanti risolventi di un'equazione algebrica sono quelle formate con funzioni razionali delle radici che mutano di valore per ogni permutazione effettuata sulle radici (risolventi di Galois), così nel campo delle equazioni differenziali lineari hanno importanza fondamentale le risolventi cui soddisfano quelle funzioni razionali degli integrali di un sistema fondamentale $(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ e loro derivate, che mutano di valore per ogni sostituzione del gruppo lineare omogeneo L. Queste funzioni razionali $R(x_1\, x_2 \ldots x_m; p)$ debbono dunque esser tali che nella

$$R(X, p) = R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i, \ldots \Sigma a_{mi} x_i; p)$$

gli m^2 parametri a_{ik} siano tutti essenziali. Le corrispondenti risolventi di grado m^2 si diranno risolventi di Picard.

Ma qui importa subito fare una distinzione essenziale fra due sorta d'invariabilità, che si possono considerare nelle dette funzioni razionali $R(x, p)$

rispetto alle sostituzioni di $\mathcal{L}$ - L'eguaglianza

$$(\alpha)\quad R(x_1, x_2 \dots x_m; p) = R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i \dots \Sigma a_{mi} x_i; p)$$

può aver luogo (per certi valori delle a) o identicamente negli m^2 argomenti

$$x_i, x_i', x_i'' \dots x_i^{(m-1)} \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

riguardati come arbitrari, o solo in quanto ponendovi per questi le loro espressioni in funzione di t, le due funzioni di t nei due membri della (α) sono effettivamente eguali - Nel primo caso parleremo d'invariabilità _formale_, nel secondo d'invariabilità _numerica_. È chiaro che l'invariabilità formale ha per conseguenza l'invariabilità numerica, ma non viceversa. Così le sostituzioni di $\mathcal{L}$ che lasciano _formalmente_ invariata una funzione razionale $R(x; p)$ formano certamente un gruppo, altrettanto però non si può asserire in generale di quelle che la lasciano soltanto _numericamente_ invariata.

Per costruire una risolvente di Picard, quale importa per la teoria, occorre ora prendere una funzione razionale $R(x; p)$ che cangi _numericamente_ di valore per ogni sostituzione di $\mathcal{L}$ eseguita sulle x, tale cioè che nella

$$R(\Sigma a_{1i} x_i, \Sigma a_{2i} x_i \dots \Sigma a_{mi} x_i; p),$$

pensata come funzione di t, tutti gli m^2 parametri $\underline{a}$ siano essenziali. Nel modo più semplice troviamo una tale funzione V ponendo

$$V = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_m x_m,$$

dove le $\underline{u}$ sono funzioni fisse di $\underline{t}$, comunque scelte. Eseguendo sulle x entro la V una sostituzione qualunque $|a_{ik}|$ di $\mathfrak{L}$, se ne ottiene la funzione

$$\overline{V} = \sum_{ik} a_{ik}\, u_i x_k\,;$$

e facilmente si intende che, salvo particolari determinazioni per le u, nella $\overline{V}$ risulteranno essenziali tutti gli m^2 parametri a_{ik}, ossia le m^2 funzioni di t $u_i x_k$ saranno linearmente indipendenti. Per dimostrarlo in tutto rigore, basterà assegnare una determinazione particolare delle u per la quale questo accada realmente (*)

Supposto, per fissare le idee, che $t=0$ sia un punto regolare pei coefficienti p_i dell'equazione differenziale data (1), e quindi per gli integrali prendiamo semplicemente

$$u_i = t^{(i-1)m}$$

e si vedrà che le m^2 funzioni

$$u_i\, x_k = t^{(i-1)m} x_k$$

(*) Cf. Bel. Math. Annalen Bd 56

sono linearmente indipendenti. Al contrario, suppongasi che siano legate da un'identità lineare

$$(13)\qquad \sum_{ik} c_{ik} u_i x_k = \sum_k c_{1k} x_k + t^m \sum_k c_{2k} x_k + t^{2m} \sum_k c_{3k} x_k + \dots + t^{(m-1)m} \sum_k c_{mk} x_k = 0.$$

Sviluppando gli integrali x_k in serie di Taylor secondo le potenze di t, abbiasi

$$(14)\qquad x_k = \bar{x}_k + t\,\bar{x}_k' + \frac{t^2}{1.2}\bar{x}_k'' + \dots\dots,$$

dove $\bar{x}_k$, $\bar{x}_k'$, $\bar{x}_k''$ ... indicano i valori per $t=0$ della x_k e delle sue derivate.

Sostituendo nella (13) ed eguagliando a zero i coefficienti di $1, t, t^2, \dots t^{m-1}$ nello sviluppo, si ottengono le equazioni:

$$\sum_k c_{1k}\bar{x}_k = 0,\quad \sum_k c_{1k}\bar{x}_k' = 0,\quad \sum_k c_{1k}\bar{x}_k'' = 0, \dots\dots \sum_k c_{1k}\bar{x}_k^{(m-1)} = 0,$$

e poichè il Wronskiano

$$\begin{vmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_1' & \dots\dots & \bar{x}_1^{(m-1)} \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_2' & \dots\dots & \bar{x}_2^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}_m & \bar{x}_m' & \dots\dots & \bar{x}_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

è differente da zero, ne segue intanto

$$c_{11} = c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1m} = 0$$

Dopo di ciò dalla (13) si deduce l'altra

$$\sum_k c_{2k} x_k + t^m \sum_k c_{3k} x_k + \dots\dots + t^{(m-2)m} \sum_k c_{mk} x_k,$$

dalla quale, collo stesso ragionamento, si deduce:

$$c_{21} = c_{22} = \ldots\ldots = c_{2m} = 0\,;$$

e così proseguendo si vede che tutte le c_{ik} sono nulle, cioè la relazione supposta (13) non può esistere –

Immaginiamo dunque nella

$$(15) \qquad V = \sum_i u_i x_i$$

scelte le u in guisa che le m^2 funzioni $u_i x_k$ siano linearmente indipendenti, e formiamo le derivate di V rapporto a t degli ordini $1, 2, \ldots m^2$, riducendo ogni volta, col processo del § 165, l'ordine delle derivazioni delle x_i a non superare $m-1$ – Per tal modo otteremo le m^2+1 funzioni

$$(16) \quad V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \ldots\ldots \frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}}$$

espresse linearmente ed omogeneamente per le m^2 quantità

$$(16^*) \quad x_i, x_i', x_i'' \ldots\ldots x_i^{(m-1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

con formole del tipo seguente:

$$(15^*) \qquad \frac{d^rV}{dt^r} = \sum_{ik} \alpha_{ik}^{(r)} x_i^{(k-1)} \qquad r = 0, 1, 2 \ldots\ldots m^2,$$

dove le $\alpha_{ik}^{(r)}$ saranno funzioni note di t formate colle u e loro derivate e coi coefficienti p e loro derivate.

Si osservi subito che nei calcoli eseguiti per trovare queste formole (15*) abbiamo tenuto conto solo di questo che le x_i soddisfano all'equazione differenziale (1); e per ciò le formole stesse valgono ancora per le

x_i. mettiamo in loro combinazioni lineari qualunque a coefficienti costanti

$$\sum_k c_{ik} x_k$$

qualunque siano le costanti c_{ik}, anche se a determinante nullo. Ciò posto, essendo per le (15*) le m^2+1 funzioni (16) funzioni lineari omogenee delle m^2 quantità (16*), fra quelle m^2+1 funzioni sussisterà almeno una identità lineare

(17) $$P_0 \frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}} + P_1 \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}} + \dots\dots + P_{m^2-1} \frac{dV}{dt} + P_{m^2} V = 0,$$

dove i coefficienti P saranno funzioni note di t formate colle $\alpha_{ik}^{(h)}$. Le considerazioni superiori dimostrano che di questa equazione differenziale lineare (17) sono soluzioni le m^2 funzioni

$$u_i x_k$$

che sono linearmente indipendenti, e per ciò è impossibile che la (17) sia d'ordine $< m^2$; cioè sarà certamente $P_0 \neq 0$. Questo dimostra altresì che la caratteristica della matrice delle $\alpha_{ik}^{(r)}$ è precisamente eguale a m^2; cioè ha luogo la sola identità (17) fra le (16). Siccome poi $P_0 \neq 0$ non è altro che il determinante dei secondi membri delle prime m^2-1 equazioni (15*), si conclude che queste possono risolversi rispetto alle (16*) e se ne dedurranno in particolare le formole

$$
(18)\begin{cases}
x_1 = \lambda_{11} V + \lambda_{12}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots + \lambda_{1,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\\
x_2 = \lambda_{21} V + \lambda_{22}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots + \lambda_{2,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\\
-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
x_m = \lambda_{m1} V + \lambda_{m2}\dfrac{dV}{dt} + \cdots\cdots + \lambda_{m,m^2}\dfrac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}},
\end{cases}
$$

dove le λ sono funzioni note di t.

Scriveremo la (17), dividendola per P_0, sotto la forma

$$
(P)\quad \frac{d^{m^2}V}{dt^{m^2}} + P_1\frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}} + \cdots\cdots + P_{m^2-1}\frac{dV}{dt} + P_{m^2}V = 0
$$

e diremo questa la risolvente di Picard della proposta (1), costruita colla funzione $V = \sum u_i x_i$. Come già si è detto, la soluzione più generale V della risolvente di Picard è data da

$$
V = \sum_{ik} c_{ik} u_i x_k ,
$$

i coefficienti costanti c_{ik} essendo affatto arbitrarii. Ad una soluzione qualsiasi V corrisponde, secondo le (18), un sistema di m integrali particolari della equazione proposta (1), perfettamente determinati. Questi possono formare e non formare un sistema fondamentale, ed importando distinguere le soluzioni V dell'una specie della risolvente (P) di Picard da quelle dell'altra specie, diremo che la soluzione V della (P) è fondamentale se le $x_1, x_2 \dots x_m$ calcolate dalle (18) formano uno sistema fondamentale d'integrali della (1) e nel caso opposto diremo che la V è non fondamentale.

Come si distinguono le soluzioni fondamentali V dalle altre? Per una soluzione V non fondamentale deve annullarsi il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' & \dots & x_1^{(m-1)} \\ x_2 & x_2' & \dots & x_2^{(m-1)} \\ - & - & - & - \\ x_m & x_m' & \dots & x_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

e se in questo per $x_1, x_2 \dots x_m$ poniamo le espressioni (18), e per le derivate quelle che si ottengono similmente per risoluzione delle prime m^2 (15*), otterremo

$$W = \varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2}, \dots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right),$$

dove φ è una funzione razionale intera degli argomenti scritti, con coefficienti funzioni note di t. Così adunque:

Le soluzioni non fondamentali V della risolvente di Picard sono tutte e sole quelle che soddisfano alla equazione differenziale algebrica d'ordine m^2-1 (*):

$$(19) \qquad \varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2} \dots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right) = 0$$

§ 169
Campo di razionalità ed equazioni differenziali algebriche.

Le proprietà fondamentali ora studiate della risolvente di Picard conducono alla importante nozione di un gruppo continuo di trasformazioni (sottogruppo di L) che per una data equazione differenziale lineare compie l'ufficio del gruppo di Galois per un'equazione algebrica. Ma per arrivarvi è necessario prima precisare ciò che s'intende per campo di razionalità.

Sia dato un certo numero di funzioni fondamentali della variabile t

$$v_1(t),\ v_2(t) \dots v_\rho(t),$$

tali che nessuna di esse possa esprimersi per una funzione razionale di t e delle rimanenti v e loro derivate, d'ordine comunque elevato. L'insieme

---

(*) L'ordine di questa non può essere minore di m^2-1 perchè sono soluzioni di essa tutte le V della forma

$$V = \sum_{ik} c_{ik} u_i x_k,$$

quando il determinante delle c sia $=0$, ciò che lascia in questa V precisamente m^2-1 parametri essenziali.

di tutte quelle funzioni di t che si esprimono razionalmente per t stessa, per $v_1, v_2 \dots v_p$ e le loro derivate successive, si dice formare un campo di razionalità, che è determinato dagli elementi fondamentali $v_1\ v_2 \dots v_p$ - Ogni funzione appartenente al campo dicesi razionalmente nota nel campo stesso. Il campo meno ampio di razionalità è quello assoluto delle ordinarie funzioni razionali di t; esso è contenuto in ogni altro campo. Si può ampliare un campo di razionalità aggiungendovi nuovi elementi (funzioni) che prima non vi appartenevano, in tal caso le nuove funzioni si dicono aggiunte -

Passiamo ora a considerare, in un campo qualsiasi di razionalità, delle equazioni differenziali algebriche, che abbiano cioè la forma

(20) $\quad F(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0$

denotando x una funzione incognita di t e la F essendo una funzione razionale intera delle x e sue derivate fino ad un certo ordine m, con coefficienti funzioni di t appartenenti al campo di razionalità attuale -

Se parliamo senz'altro di un'equazione differenziale algebrica (20), intendiamo (ove non si avverta il contrario) che il campo di razionalità sia quello naturale determinato dai coefficienti.

Così per un' equazione differenziale lineare

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$$

il campo naturale di razionalità sarà quello meno ampio in cui sono contenuti i coefficienti $p_1, p_2, \dots p_m$.

Poste queste definizioni, cominciamo dal dimostrare il lemma seguente.

Se in un dato campo di razionalità due equazioni differenziali algebriche del medesimo ordine m:

$$F(x, x', x'', \dots x^{(m)}) = 0$$

$$F_1(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0$$

hanno una soluzione comune x_1, o esisterà nel medesimo campo un' equazione differenziale algebrica d'ordine $< m$ a cui x_1 soddisfa, ovvero quella di esse che ha grado maggiore od eguale rispetto alla più alta derivata $x^{(m)}$ sarà algebricamente riducibile rispetto a questa.

Se il grado in $x^{(m)}$ di F, F_1 è lo stesso si può subito eliminare fra F, F_1 questa più alta potenza di $x^{(m)}$ e ridursi al caso in cui il grado in $x^{(m)}$ è disuguale. Supponiamo dunque p. e. che la F sia in $x^{(m)}$ di grado maggiore della F_1. Considerando F, F_1 come polinomii in $x^{(m)}$, procediamo alla ricerca del loro massimo comun divisore (ciò che si fa con operazioni razionali nel campo), e sia questo $\Phi(x, x', x'' \dots x^{(m)})$.

La soluzione comune supposta x, delle $F=0$, $F_1=0$ soddisfa certamente la

$$\Phi(x, x', x'' \dots x^{(m)}) = 0,$$

per cui se Φ non contiene $x^{(m)}$ la x, soddisfa ad un'equazione differenziale algebrica d'ordine $<m$. Se Φ contiene $x^{(m)}$, la contiene ad un grado minore di F, e si ha

$$F(x, x' \dots x^{(m)}) = \Phi(x, x' \dots x^{(m)}) \cdot \Psi(x, x' \dots x^{(m)})$$

essendo Ψ una funzione della medesima specie, e per ciò F è algebricamente riducibile rapporto ad $x^{(m)}$, c. d. d. -

Dimostrato il lemma, procediamo a stabilire il seguente teorema fondamentale dovuto a Königsberger:

Se un'equazione differenziale algebrica d'ordine m

$$(a) \qquad F(x, x' x'' \dots x^{(m)}) = 0$$

ha a comune una soluzione con un'equazione differenziale algebrica

$$(b) \qquad f(x, x', x'' \dots x^{(n)}) = 0$$

d'ordine $n \leq m$, la quale sia irriducibile rispetto al la più alta derivata $x^{(n)}$, e quella soluzione comune x_1 non soddisfa ad alcun'altra equazione differenziale algebrica di ordine $< n$, ogni soluzione (non singolare) della $f=0$ sarà anche soluzione della prima $F=0$

Dalla (6) derivando si ha successivamente:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\, x^{(n+1)} = f_1(x, x', x'' \dots x^{(n)}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x^{(n)}}\, x^{(n+2)} = f_2(x, x', x'' \dots x^{(n)}), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dove $f_1, f_2 \dots$ sono polinomii negli stessi argomenti, $x, x', \dots x^{(n)}$. Ora si osservi in primo luogo che per la soluzione comune x_1 non può annullarsi $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$, altrimenti essendo $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$ di grado minore della f in $x^{(n)}$, pel lemma dimostrato o dovrebbe la f essere riducibile rispetto a $x^{(n)}$, oppure esisterebbe un'equazione differenziale d'ordine $< n$ cui la x_1 soddisferebbe; ambedue queste ipotesi sono escluse dall'enunciato del teorema. Così dalle (21) si trarranno tutte le derivate della x d'ordine $> n$ e, sostituendo in (a), ne risulterà un'equazione

$$\Phi(x, x', x'', \dots x^{(n)}) = 0,$$

che dovrà essere soddisfatta da $x = x_1$. E viceversa tutte le soluzioni comuni a $f=0$, $\Phi=0$ che non annullino $\frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}$ (non singolari per f) soddisferanno anche $F=0$. Ora la Φ, che contiene certamente $x^{(n)}$ (altrimenti x, soddisferebbe un'equazione d'ordine $<n$), ~~non~~ può avere, pel lemma, un grado in $x^{(n)}$ inferiore o eguale a quello di f, ed ha quindi un grado maggiore. Il massimo comun divisore ordinario di Φ, f, non potendo avere in $x^{(n)}$ che certamente contiene, grado minore di f, avrà lo stesso grado e per ciò sarà la f stessa. Si avrà dunque

$$\Phi(x, x', \dots x^{(n)}) = f(x, x' \dots x^{(n)}) . \Psi(x, x' \dots x^{(n)}),$$

onde tutte le soluzioni di $f=0$ sono anche soluzioni di $\Phi=0$ c.d.d.

Osserviamo di passaggio che un'equazione differenziale algebrica $f(x, x', x'' \dots x^{(n)})=0$ si dice irriducibile, secondo Königsberger, quando possiede le due proprietà seguenti: 1° sia irriducibile nel senso algebrico rispetto alla più alta derivata $x^{(n)}$; 2° non abbia alcuna soluzione comune con equazioni differenziali algebriche d'ordine minore. Dal teorema dimostrato segue subito la proprietà, che fa riscontro ad una ben nota nell'algebra.

Se un'equazione differenziale algebrica ammette una soluzione di un'altra equazione differenziale algebrica irriducibile, essa ammette tutte le soluzioni di questa ultima.

§. 170
Gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare

Fondandoci sui risultati ottenuti nel paragrafo precedente, riprendiamo le considerazioni della risolvente (P) di Picard per una data equazione differenziale lineare – Può darsi che nessuna sua soluzione fondamentale soddisfi ad un'altra equazione differenziale algebrica d'ordine minore (lineare o non lineare) nel campo di razionalità che si considera – Questo avverrà certamente, come fra breve proveremo, se l'equazione differenziale lineare proposta è generale.

Può darsi invece che esistano delle equazioni differenziali algebriche d'ordine minore, cui soddisfa qualche soluzione V, fondamentale di (P) –

Supponiamo che una di queste sia

$$(22) \qquad f\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2} \ldots \frac{d^rV}{dt^r}\right) = 0$$

ed abbia il minimo ordine r possibile; supporremo inoltre, come è lecito, che la f sia irriducibile nel senso algebrico rispetto alla più alta derivata $\frac{d^rV}{dt^r}$, altrimenti sostituiremmo alla $f=0$

un suo fattore irriducibile - S'intende che, ove abbia luogo il primo caso sopra ricordato, si dovrà prendere per la $f=0$ la risolvente stessa (P) di Picard. Osserviamo ora che dalle proprietà supposte alla $f=0$ e dal teorema di Königsberger (§ precedente), segue immediatamente.

Ogni soluzione (non singolare) della (22), che non sia soluzione della (19) § 168

$$\varphi\left(V, \frac{dV}{dt}, \cdots\cdots \frac{d^{m^2-1}V}{dt^{m^2-1}}\right)=0,$$

è una soluzione fondamentale della risolvente di Picard.

Ricordiamo ora che ad ogni soluzione fondamentale V della risolvente di Picard corrisponde un sistema fondamentale d'integrali della proposta perfettamente individuato dalle formule (18). Se ora indichiamo con V_1 una particolare soluzione fondamentale della risolvente di Picard e con $x_1\ x_2 \ldots x_m$ il sistema fondamentale corrispondente della (1), avremo

$$V_1 = u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_m x_m$$

Essendo ora V un'altra soluzione fondamentale qualunque della (P), ed $y_1\ y_2 \ldots y_m$ il corrispondente sistema fondamentale d'integrali, avremo ancora:

$$V = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_m y_m,$$

e le x_i saranno legate alle y_i da una sostituzione S perfettamente determinata dal gruppo $\mathcal{G}$

$$(S) \qquad y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

Potremo quindi opportunamente indicare la V col simbolo V_S, apponendovi per indice la sostituzione S che lega i due sistemi fondamentali x_i, y_i; così avremo

$$V_S = \sum_{ik} a_{ik} u_i x_k$$

Se in questa per le x_k poniamo i valori (18), espressi linearmente ed omogeneamente per

$$V_1, \frac{dV_1}{dt}, \dots\dots \frac{d^{m-1}V_1}{dt^{m-1}},$$

otteniamo la formola notevole

$$(23) \qquad V_S = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 \frac{dV_1}{dt} + \alpha_3 \frac{d^2V_1}{dt^2} + \dots + \alpha_m \frac{d^{m-1}V_1}{dt^{m-1}},$$

dove i coefficienti α sono razionali nel campo che si considera e dipendono unicamente dai coefficienti fissi λ nelle (18) e (linearmente) dai coefficienti a della sostituzione S. Abbiamo dunque la seguente proprietà delle soluzioni fondamentali della risolvente di Picard, che fa riscontro alla ben nota proprietà delle radici della risolvente di Galois per un'equazione algebrica.

Se V_1, V sono due soluzioni fondamentali qualunque della risolvente di Picard, la V si esprime linearmente ed omogeneamente per la V_1 e le sue derivate mediante la $(23)^0$, con coefficienti α razionali nel campo e che dipendono unicamente dalla sostituzione S sugli integrali fondamentali della proposta, colla quale si passa da V_1 a V.

Segue dall' ultima osservazione che nella 23 è lecito cangiare la V_1 in un' altra qualunque soluzione fondamentale V' senza mutare le α, purchè per V_S s' intenda quella nuova soluzione che nasce da V' applicando la S. Così, se S' indica una altra sostituzione qualunque di $\mathcal{L}$, ponendo nel secondo membro della (23) per V_1 la $V_{S'}$, il risultato sarà un' altra soluzione della risolvente di Picard che, secondo le convenzioni fondamentali del $\S.1$, sarà da indicarsi con $V_{S'S}$ e si avrà quindi:

$$(23^*)\quad V_{S'S} = \alpha_1 V_{S'} + \alpha_2 \frac{dV_{S'}}{dt} + \ldots\ldots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V_{S'}}{dt^{m^2-1}}$$

Ciò posto, veniamo alla dimostrazione del teorema fondamentale della teoria che consiste nella proprietà seguente:

A) - Se V_1 indica una soluzione fondamentale fissa della (22) e V una sua soluzione fondamentale variabile le sostituzioni S di $\mathcal{L}$ colle quali si passa dalla soluzione fissa V_1 a tutte le altre V formano un gruppo (sottogruppo di $\mathcal{L}$) -

Per dimostrarlo basterà provare che se V_s, $V_{s'}$ sono due soluzioni fondamentali qualunque della (22) anche la $V_{s's}$ sarà una soluzione della medesima equazione.

Si ha per ipotesi

$$f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt}, \ldots \frac{d^r V_s}{dt^r}\right)=0$$

$$f\left(V_{s'}, \frac{dV_{s'}}{dt}, \ldots \frac{d^r V_{s'}}{dt^r}\right)=0;$$

d'altronde sostituendo in $f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt} \ldots\right)$ per V_s l'espressione (23) si ottiene

$$f\left(V_s, \frac{dV_s}{dt}, \ldots \frac{d^r V_s}{dt^r}\right) = \psi\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \frac{d^2V_1}{dt^2} \ldots\right)$$

dove la ψ è razionale intera in V_1 e nelle derivate successive, e poichè sussiste anche la (23*) abbiamo altresì:

$$(24)\quad f\left(V_{s's}, \frac{dV_{s's}}{dt} \ldots\right) = \psi\left(V_{s'}, \frac{dV_{s'}}{dt}, \frac{d^2V_{s'}}{dt^2} \ldots\right)$$

Ora avendo la

$$\psi\left(V, \frac{dV}{dt}, \frac{d^2V}{dt^2} \ldots\right)=0$$

a comune colla $f\left(V, \frac{dV}{dt} \ldots\right)=0$ la soluzione V_1, ammette, pel teorema di Königsberger, ogni altra soluzione (fondamentale) di questa, per es. la $V_{s'}$; la (24) dimostra allora appunto che anche $V_{s's}$ è una soluzione della (22)

$$f\left(V, \frac{dV}{dt}, \ldots \frac{d^{m-1}V}{dt^{m-1}}\right)=0,$$

come si era asserito.

Il sottogruppo G di L così determinato di-così il gruppo continuo di trasformazioni dell'equazione differenziale lineare proposta (1) od anche il suo gruppo di razionalità - Queste denominazioni resteranno giustificate dalle proprietà fondamentali per questo gruppo, affatto analoghe alle proprietà del gruppo di Galois per un'equazione algebrica, che dimostreremo nel prossimo paragrafo, le quali proveranno altresì che il gruppo stesso è perfettamente determinato, a meno di una sostituzione lineare omogenea trasformatrice.

Intanto osserviamo che questo gruppo G di razionalità può essere un gruppo puro di Lie con r parametri ovvero un gruppo misto (§32); in ogni caso è facile vedere che le sostituzioni di G dipendono algebricamente dagli r parametri essenziali -

Se esprimiamo infatti che la

$$V_\sigma = \sum_{ik} a_{ik} u_i x_k$$

soddisfa la (22), troveremo un certo numero di relazioni algebriche fra i coefficienti a_{ik} che esprimono le condizioni a ciò necessarie e sufficienti e debbono lasciare $\underline{r}$ parametri arbitrarii.

§ 171

Proprietà fondamentali del gruppo di razionalità

Veniamo ora a stabilire le proprietà caratteristiche del gruppo G di razionalità, esse sono date dai teoremi seguenti:

I) Ogni funzione razionale degli integrali fondamentali $x_1\ x_2 \ldots x_m$ e loro derivate (con coefficienti razionalmente noti nel campo di razionalità) che sia eguale ad una funzione di t razionalmente nota deve rimanere numericamente invariata per tutte le sostituzioni di G.

Sia $R(x_1\ x_2 \ldots x_m;\ x_1'\ x_2' \ldots x_m') = \varphi(t)$ una tale funzione razionale - Per mezzo delle formole fondamentali (18) potremo convertirla in una funzione razionale di $V_1, \frac{dV_1}{dt}, \frac{d^2V_1}{dt^2}, \ldots$ ed in questa, servendoci della (22) cui soddisfa V_1

$$f\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots \frac{d^rV_1}{dt^r}\right) = 0$$

potremo far sparire razionalmente le derivate di V_1 d'ordine superiore ad r; così avremo

(25) $$R(x_1, x_2 \ldots x_m;\ x_1'\ x_2' \ldots x_m') = F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt} \ldots \frac{d^rV_1}{dt^r}\right)$$

dove la F è razionale nei suoi argomenti, e di può anche supporre di più che se il grado della f nella più alta derivata $\frac{d^r V}{dt^r}$ è μ, quello della F sia ridotto $\leq \mu$.

Se con S indichiamo una sostituzione qualunque di G, che cangi le x nelle y, per le proprietà fondamentali stabilite al paragrafo precedente avremo anche

(25*) $R(y_1\, y_2 \ldots y_m ; y_1' y_2' \ldots y_m' \ldots) = F\left(V_S, \frac{dV_S}{dt} \ldots \frac{d^r V_S}{dt^r}\right)$

Ora è per ipotesi

$$F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt}, \ldots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = \varphi(t),$$

cioè l'equazione

$$(26) \quad F\left(V, \frac{dV}{dt}, \ldots \frac{d^r V}{dt^r}\right) - \varphi(t) = 0$$

ha colla (22)

$$(22) \quad f\left(V, \frac{dV}{dt}, \ldots \frac{d^r V}{dt^r}\right) = 0$$

la soluzione (fondamentale) V_1 comune - Dunque nel teorema di Königsberger (§ 169), anche la V_S è soluzione della (26), cioè

$$F\left(V_S, \frac{dV_S}{dt}, \ldots \frac{d^r V_S}{dt^r}\right) = \varphi(t)$$

e per la (26*) si ha quindi

$$R(x_1\, x_2 \ldots x_m ; x_1' \ldots x_m' \ldots) = R(y_1\, y_2 \ldots y_m ; y_1' \ldots y_m' \ldots)$$

vale a dire la R resta numericamente invariata per la S, c.d.d.

II) Inversamente ogni funzione razionale

$$R(x_1\, x_2 \ldots x_m ; x_1' \ldots x_m' \ldots)$$

che rimanga numericamente invariata per tutte le sostituzioni S del gruppo G è una funzione di t razionalmente nota.

Esprimiamo infatti la $R(x_1 \ldots x_m; x'_1 \ldots)$ per mezzo della (26) ed avremo

$$F\left(V_1, \frac{dV_1}{dt} \ldots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = \psi(t).$$

dove la $\psi(t)$ sarà una certa funzione di t che dobbiamo dimostrare essere razionalmente nota.

Per l'ipotesi fatta si ha anche

$$F\left(V_S, \frac{dV_S}{dt}, \ldots \frac{d^r V_S}{dt^r}\right) = \psi(t)$$

qualunque sia la soluzione (fondamentale) V_S della (22). Ma poichè, per una tale soluzione generale V, sono arbitrarii, per un valore fisso ad arbitrio di t, i valori:

$$\xi_1 = V, \quad \xi_2 = \frac{dV}{dt}, \ldots \quad \xi_r = \frac{d^{r-1}V}{dt^{r-1}}$$

ed il valore

$$\eta = \frac{d^r V}{dt^r}$$

deve unicamente soddisfare l'equazione

$$(27). \qquad f(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_r, \eta) = 0$$

di grado μ in η, possiamo anche dire che sarà sempre

$$F(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r, \eta) = \psi(t)$$

comunque si prendano $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_r$ (in funzione di t) perchè η soddisfi la (27) - Indicando con le radici della (27) in η $\eta_1\,\eta_2 \ldots\ldots \eta_\mu$ si ha quindi

$$F(\xi_1 \ldots \xi_r, \eta_1) = F(\xi_1 \ldots \xi_r, \eta_2) = \ldots\ldots = F(\xi_1 \ldots \xi_r\, \eta_\mu)$$

e però

$$\psi(t) = \frac{1}{\mu}\{F(\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_r, \eta_1) + F(\xi_1\,\xi_2 \ldots\ldots \xi_r, \eta_2) + \ldots\ldots$$
$$+ F(\xi_1\,\xi_2 \ldots\ldots \xi_r, \eta_\mu)\}.$$

Il secondo membro è una funzione simmetrica di $\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_\mu$ e si esprime quindi per una funzione Θ razionale intera degli argomenti $\xi_1\,\xi_2 \ldots\ldots \xi_r$, con coefficienti razionalmente noti in funzione di t; si ha dunque

$$\Theta(\xi_1\,\xi_2 \ldots\ldots \xi_r) = \psi(t),$$

e la Θ serba per ipotesi sempre lo stesso valore $\psi(t)$ comunque si prendano $\xi_1\,\xi_2 \ldots \xi_r$ in funzione di t.

Se ne conclude che Θ non può contenere esplicitamente gli argomenti $\xi_1\,\xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ e la $\varphi(t)$ è dunque razionalmente nota, c. d. d.

A queste proprietà fondamentali è bene aggiungere una terza d' immediata dimostrazione:

III) Nessuna sostituzione del gruppo lineare omogeneo L che sia fuori del gruppo G di razionalità può lasciare numericamente invariate tutte le funzioni razionali $R(x_1\, x_2 \dots x_m ; x'_1 \dots)$ razionalmente no, te.

Infatti si ha

$$f\left(V_1 , \frac{dV_1}{dt} , \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = 0$$

e ponendo per V_1 la sua espressione $\Sigma u_i x_i$ si cangia la $f(V_1 , \frac{dV_1}{dt} \dots\dots)$ in una funzione razionale di $x_1\, x_2 \dots x_m , x'_1 \dots x'_m \dots$ razionalmente nota perchè $= 0$: sia

$$f\left(V_1 , \frac{dV_1}{dt} , \dots \frac{d^r V_1}{dt^r}\right) = R(x_1\, x_2 \dots x_m ; x'_1 \dots x'_m \dots)$$

Se una sostituzione T di $\mathfrak{L}$ lascia la R numericamente invariata, si avrà

$$f\left(V_T , \frac{dV_T}{dt} , \dots \frac{d^r V_T}{dt^r}\right) = 0,$$

cioè V_T è soluzione (fondamentale) della (22), e quindi, per la definizione stessa, T appartiene al gruppo di razionalità G.

§. 172
Altra definizione del gruppo di razionalità _ Gruppo dell'equazione generale

Le proprietà dimostrate nel paragrafo precedente si possono riassumere in quest'altra definizione del gruppo di razionalità (Vessiot).

Il gruppo G di razionalità di un'equazione differenziale lineare è il più ampio sottogruppo del gruppo lineare omogeneo L le cui sostituzioni lasciano numericamente invariate tutte quelle funzioni razionali di un sistema fondamentale $x_1\, x_2 \dots x_m$ di integrali e loro derivate che, nel campo di razionalità assegnato, sono funzioni note di t.

Ne risulta immediatamente che questo gruppo è unico, se si fa naturalmente astrazione dalla indeterminazione proveniente dalla scelta del sistema fondamentale $(x_1 \dots x_m)$. È evidente che se G è il gruppo corrispondente a questo sistema e G_1 è quello corrispondente ad un secondo sistema fondamentale $(y_1\, y_2 \dots y_m)$ che si deduce dal primo mediante la sostituzione T, sarà

$$G_1 = T^{-1}GT$$

La sola indeterminazione che resta nel gruppo di razionalità consiste in questo che ad esso si può sostituire qualunque gruppo affine entro L.

Nel modo di Picard di pervenire al gruppo G, l'unicità non è così evidente. Si può però dimostrare che, aggiungendo alcune semplici osservazioni, si può ancora arrivare al medesimo risultato. Indichi infatti W_1 un'altra soluzione particolare (fondamentale) qualunque della risolvente di Picard e sia

$$(27^*) \qquad f_1(W_1, W_1' \ldots W_1^{(r_1)}) = 0$$

l'equazione differenziale algebrica, irriducibile rispetto alla più alta derivata $W^{(r_1)}$ e di ordine minimo r_1 cui soddisfa; indichi inoltre G_1 il gruppo determinato da W_1 come G da V_1. Se T è la sostituzione che fa passare dagli integrali fondamentali $(x_1\ x_2 \ldots x_m)$ relativi a V_1 a quelli $(y_1\, y_2 \ldots y_m)$ corrispondenti a W_1, si avrà per la (23)

$$(28) \qquad W_1 = V_T = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_1' + \ldots + \alpha_{m^2} V_1^{(m^2-1)},$$

le α dipendendo unicamente dalla sostituzione T - Essendo ora g una qualunque sostituzione di G avremo anche per la (23*)

$$(28^*) \qquad V_{gT} = \alpha_1 V_g + \alpha_2 V_g' + \ldots\ldots + \alpha_{m^2} V_g^{(m^2-1)}$$

Sostituendo nel primo membro della (27*), ne verrà

$$f_1(V_{gT}, V_{gT}' \ldots\ldots V_{gT}^{(r_1)}) = \Theta(V_g, V_g', V_g'' \ldots\ldots),$$

la Θ essendo razionale nei suoi argomenti, con coefficienti razionalmente noti - Ora è per ipotesi

$$\Theta(V_1, V_1', V_1'' \ldots) = 0$$

cioè la $\Theta(V, V', V'' \ldots\ldots) = 0$ ammette la soluzione V_1 della (22) e però anche la V_g; dunque

$$f_1(V_{gT}, V'_{gT}, \ldots\ldots V^{(r)}_{gT}) = 0,$$

ossia la V_{gT} è, come la V_T, una soluzione della (27*).

Se indichiamo con g_1 una qualunque sostituzione di G_1, tutte le soluzioni della (27*) sono date dalle V_{Tg_1}, quindi è $Tg_1 = gT$, ossia $T^{-1}gT$ qualunque sia g, è una sostituzione di G_1 — Ciò vuol dire che $T^{-1}GT$ è contenuto in G_1 e poichè, per la considerazione inversa, TG_1T^{-1} è contenuto in G, sarà necessariamente

$$G_1 = T^{-1}GT$$

Così è nuovamente dimostrata l'unicità del gruppo G.

Il gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare

$$(1) \qquad x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \ldots + p_m x$$

dipende essenzialmente dai coefficienti e dal campo di razionalità che si considera — Poniamo ora che l'equazione proposta (1) sia quella generale, talchè $p_1, p_2 \ldots p_m$ sono da riguardarsi come funzioni arbitrarie di t, ed il campo di razionalità sia quello naturale determinato dai coefficienti (§ 169) - È facile vedere che il gruppo di razionalità è allora il gruppo lineare totale L. Infatti nel campo attuale di razionalità le funzioni razionali di $x_1, x_2 \dots x_m$ e loro derivate razionalmente note sono unicamente quelle esprimibili razionalmente per $p_1\, p_2 \dots \dots p_m$ e loro derivate. Una tale funzione $R(x_1\, x_2 \dots x_m;\, x'_1 \dots x'_m \dots)$ sarebbe dunque numericamente eguale ad un' invariante differenziale. Ma siccome le $p_1, p_2 \dots p_m$ sono qui funzioni arbitrarie di t, e tali debbono anche riguardarsi $x_1, x_2 \dots x_m$, l'eguaglianza numerica equivale in questo caso all' eguaglianze formale. Si conclude che ogni tale funzione $R(x_1\, x_2 \dots x_m;\, x'_1 \dots x'_m \dots)$, razionalmente nota resta invariata per tutte le sostituzioni di L (è invariante differenziale) e per ciò il gruppo G coincide con L stesso.

Dunque: L'equazione differenziale generale d'ordine m

$$x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$$

nel campo naturale di razionalità determinato dai coefficienti, ha per gruppo di razionalità il gruppo lineare omogeneo totale L con m^2 parametri.

§ 173

Riduzione del gruppo di razionalità per l'aggiunta di una funzione razionale $R(x_1, \dots x_m; x'_1 \dots x'_m \dots)$

Il gruppo di razionalità G di un'equazione differenziale lineare dipende essenzialmente dal campo di razionalità che si considera. Se si amplia il campo di razionalità per aggiunta di nuove funzioni, può accadere che cangi il gruppo. In ogni caso, dalla definizione stessa di Vessiot del gruppo G, discende il teorema.

Ampliando il campo di razionalità, il gruppo di razionalità di un'equazione differenziale lineare non può variare che riducendosi ad un suo sottogruppo(*).

(*) La stessa cosa si vede colla definizione di Picard pel gruppo G (§ 170), osservando che se alla (22)

$$f(V, V', V'' \dots V^{(r)}) = 0$$

viene a sostituirsi nel nuovo campo di raziona-

Il problema della integrazione completa della proposta consiste appunto in questo di ampliare il campo di razionalità fino a ridurre il gruppo all'Identità, chè allora le soluzioni stesse $x_1, x_2 \dots x_m$ saranno razionalmente note. La prima e più importante ricerca da farsi, concernente la riduzione del gruppo, è la seguente:

Come varia il gruppo G di un'equazione differenziale lineare allorquando si amplii il campo di razionalità per l'aggiunta di una funzione razionale $R(x_1, x_2 \dots x_m, x'_1 \dots x'_m \dots)$ delle $x_1\, x_2 \dots x_m$ e loro derivate?

La risposta è affatto analoga alla corrispondente nelle teorie algebriche di Galois e noi esponiamo appunto le considerazioni relative parallelamente a quelle note della teoria di Galois.

In primo luogo osserviamo che la funzione aggiunta $R(x_1, x_2 \dots x_m; x'_1 \dots x'_m \dots)$ non deve rima-

---

lità la

$$f(V, V', V'' \dots V^{(n_1)}) = 0$$

che abbia a comune colla precedente la soluzione V_1 tutte
" " soluzioni fondamentali V_3 della seconda saran
(teorema di Königsberger)

nere numericamente invariata per tutte le sostituzioni di G, altrimenti sarebbe già nota razionalmente nel campo primitivo e la sua aggiunta non lo ampierebbe. Però può darsi che parte delle sostituzioni di G lascino R numericamente invariata e a questo proposito dimostriamo:

Quelle sostituzioni γ di G che lasciano numericamente invariata una funzione razionale

$$R(x_1 x_2 \dots x_m ; x'_1 \dots x'_m \dots)$$

formano in G un sottogruppo Γ.

E infatti siano γ, γ' due qualunque delle dette sostituzioni; si avrà

$$R\gamma = R_1 \ , \quad R\gamma' = R_1$$

indicando con R_1 la R primitiva, $R\gamma, R\gamma'$ ciò che diventa applicandovi rispettivamente γ, γ'.

La funzione razionale delle $x_i, x'_i \dots\dots$

$$R\gamma - R_1$$

essendo razionalmente nota, perché nulla, dovrà (§ 171, I) rimanere numericamente invariata per la γ' che appartiene al gruppo di razionalità G; dunque

$$R\gamma\gamma' - R\gamma' = 0,$$

e quindi $R\gamma\gamma' = R_1$. - Ciò dimostra che il prodotto $\gamma\gamma'$ lascia anche numericamente invariata R, ed appartiene perciò alle γ, c. d. d.

Diremo Γ il sottogruppo numerico della funzione $R(x_1 \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots)$ rispetto a G.

Ciò posto, dimostriamo il teorema fondamentale:

Se si amplia il campo di razionalità coll'aggiunta di una funzione razionale

$$R_1 = R(x_1 \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots),$$

il gruppo di razionalità G si abbassa a quel suo sottogruppo Γ che lascia numericamente invariata R.

Poiché nel nuovo campo di razionalità la R è razionalmente nota, le sostituzioni del nuovo gruppo G_1 di razionalità non possono essere che fra le γ, cioè G_1 è certo sottogruppo di Γ. Per dimostrare che coincide con Γ bisognerà provare inversamente che qualunque γ appartiene a G_1, ossia per la 3ª proprietà al § 171 che la γ lascia numericamente invariata ogni funzione razionale

$$U(x_1 \ldots x_m; x'_1 \ldots x'_m \ldots)$$

razionalmente nota nel nuovo campo. Una tale U sarà una funzione razionale $\Theta(R_1)$, con coefficienti appartenenti all'antico campo di razionalità, sarà cioè

$$U_1 = U(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m' \ldots) - \Theta(R_1(x_1 \ldots x_m; x_1' \ldots x_m')) = 0$$

La funzione del primo membro è dunque razionalmente nota nel campo primitivo (=0) ed applicandovi la γ dell'antico gruppo G, avremo quindi

$$U\gamma = \Theta(R_\gamma) = \Theta(R_1) = U_1$$

cioè la γ lascia numericamente invariata la U, c. d. d.

Come immediata applicazione di questo risultato generale osserviamo la seguente. Consideriamo un'equazione differenziale lineare (1) il cui gruppo sia il gruppo totale L, p. e. l'equazione differenziale generale. Se aggiungiamo al campo di razionalità il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_1' \ldots\ldots & x_1^{(m-1)} \\ x_2 & x_2' \ldots\ldots & x_2^{(m-1)} \\ \vdots & & \\ x_m & x_m' \ldots\ldots & x_m^{(m-1)} \end{vmatrix},$$

che è una funzione razionale il cui gruppo numerico è il sottogruppo lineare speciale L_1

$$\bar{x}_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

a determinante $|a_{ik}| = 1$, il gruppo dell'equazione si ridurrà appunto a L_1 - Possiamo dunque dire, rammentando la formola (3) di Liouville (§ 164):

Se per l'equazione differenziale lineare generale (a gruppo totale L) si aggiunge al campo di razionalità la funzione di t

$$e^{\int p_1 dt}$$

il gruppo di razionalità L a m^2 parametri si abbassa al sottogruppo lineare speciale L_1 a m^2-1 parametri invariante in L.(*)

§ 174.

Riduzione del gruppo G ad un gruppo puro G_r di Lie

Cogli studii degli ultimi paragrafi, noi non abbiamo fatto altro che porre i principii fondamentali delle teorie di Picard e Vessiot.

(*) È notissima del resto la trasformazione

$$x = e^{\int p_1 dt} \cdot y$$

colla quale si cangia la proposta in una nuova equazione differenziale per y in cui manca il termine in $y^{(m-1)}$; allora il Wronskiano è una costante ed il gruppo della nuova equazione è L_1 -

L'ulteriore sviluppo della teoria richiederebbe 1° la formazione generale delle risolventi, cioè delle equazioni differenziali algebriche cui soddisfano le funzioni razionali di $x, x_2 \dots x_m$ e loro derivate, 2° l'esame dell'abbassamento che si produce nel gruppo di razionalità per la risoluzione di una tale risolvente (riduzione ad un sottogruppo invariante), o più in generale di un'equazione differenziale ausiliaria.

Ma tutto ciò richiederebbe uno studio più accurato dei sottogruppi algebrici del gruppo lineare L e dei loro invarianti differenziali, studio nel quale non possiamo qui addentrarci. Ci limiteremo perciò ad esporre le belle ricerche di Vessiot sulle equazioni differenziali lineari integrabili per quadrature, che corrispondono alle ricerche di Galois sulle equazioni algebriche risolubili per radicali, e per le quali bastano già le cognizioni fin qui acquistate.

Prima però vogliamo accennare alla questione seguente. Il gruppo di razionalità G di un'equazione differenziale lineare può essere, come più volte si è avvertito, un gruppo puro Γ_r di Lie (generato da r trasformazioni infinitesime) oppure un gruppo misto. In ogni caso esso è un gruppo algebrico e per ciò se G è misto esso conterrà, pei risultati del § 32, un gruppo puro Γ_r di Lie ad r parametri e conterrà di un numero finito q di serie di trasformazioni della forma

$$\Gamma_r, \; \mathcal{C}_2\Gamma_r, \mathcal{C}_3\Gamma_r, \ldots\ldots \mathcal{C}_q\Gamma_r,$$

le q sostituzioni moltiplicatrici

$$\mathcal{C}_1 = 1, \; \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3 \ldots\ldots \mathcal{C}_q$$

essendo permutabili con Γ_r.

Vogliamo ora dimostrare che, aggiungendo al campo di razionalità una funzione algebrica in questo campo, si può ridurre il gruppo di razionalità al sottogruppo puro Γ_r. Ammettiamo per ciò che si possa trovare una funzione razionale

$$y = R(x_1, x_2 \ldots x_m; x_1' x_2' \ldots x_m' \ldots)$$

il cui sottogruppo numerico sia precisamente Γ_r. Applicando alla y le sostituzioni di G, essa acquista soltanto i q valori distinti

$$y_1 = y, \; y_2 = y_{\mathcal{C}_2}, \; y_3 = y_{\mathcal{C}_3} \; \ldots\ldots \; y_q = y_{\mathcal{C}_q}$$

Le funzioni simmetriche di questi valori rimangono numericamente invariate per tutte le sostituzioni di G, e sono per ciò razionalmente note nel campo primitivo. Si può dunque costruire un'equazione di grado q

$$(29) \qquad \Theta(y)=0$$

con coefficienti funzioni di t razionalmente note, di cui $y_1, y_2 \dots y_q$ sono le radici. Dunque la y_1 è una funzione algebrica nel detto campo; la sua aggiunta abbassa il gruppo da G a Γ_r (§ prec.^{te})

E siccome nella teoria delle equazioni differenziali riguardiamo come operazione effettuabile la risoluzione di equazioni algebriche, vediamo che ci si può sempre limitare a considerare il caso in cui il gruppo di razionalità è ridotto ad un gruppo puro di Lie.

Si può ancora osservare che, per quanto si è visto al § 32, eseguendo entro $y_1, y_2 \dots y_q$ le sostituzioni di G, queste radici si permutano fra loro secondo le sostituzioni di un gruppo finito ordinario d'ordine q. Questo è manifestamente il gruppo di Galois per l'equazione (29) nel campo di razionalità che si considera.

§ 175

Condizioni necessarie per l'integrabilità per quadrature

Andiamo ora ad occuparci delle equazioni differenziali lineari integrabili per successive quadrature. Intendiamo con ciò che si debba pervenire a trovare tutte le soluzioni della proposta ampliando via via il campo di razionalità coll'aggiunta di funzioni del tipo $\int \varphi(t)\,dt$ o dell'altro

$$e^{\int \varphi(t)\,dt}$$

dove $\varphi(t)$ è razionalmente nota nel campo primitivo, ovvero in uno dei campi ottenuti per ampliamenti precedenti. Aggiungere una funzione di questo tipo non è altro che aggiungere una e quindi tutte le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t)\,, \quad o \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(t)\cdot y$$

La questione fondamentale è qui di esaminare quale abbassamento può produrre nel gruppo G di un'equazione differenziale lineare una tale aggiunta. Più in generale supponiamo di ampliare il campo di razionalità coll'aggiunta della soluzione generale di un'equazione differenziale di 1° ordine

$$(30) \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi(y, t)$$

e domandiamoci quale potrà essere eventualmente l'abbassamento prodotto nel gruppo di razionalità (*). Dimostriamo il teorema: Se per l'aggiunta della soluzione generale dell'equazione del 1° ordine (30) il gruppo di razionalità G con r parametri della proposta si abbassa ad un sottogruppo Γ di un numero minore di parametri, Γ avrà precisamente r-1 parametri e sarà sottogruppo invariante in G.

Nel campo attuale di razionalità il gruppo G dell'equazione avendo r parametri, l'equazione differenziale algebrica irriducibile (22) § 170 cui soddisfano le soluzioni della risolvente di Picard dedotte da una fissa con sostituzioni di G, sarà un'equazione

$$(31) \qquad f(V, V', V'' \ldots V^{(r)}) = 0$$

d'ordine r. Per l'aggiunta della soluzione gene-

(*) Una questione analoga e più generale si può risolvere aggiungendo le soluzioni di un'equazione differenziale algebrica irriducibile. Il gruppo G si abbassa in ogni caso ad un sottogruppo invariante (Picard. T. III pag. 562) rale y della (32) riducendosi il gruppo G ad un sottogruppo Γ con $r_1 < r$ parametri, alla (31) verrà a sostituirsi l'altra d'ordine r_1

$$(32)\quad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r_1)}; y) = 0$$

nei cui coefficienti comparirà razionalmente la y. Ora se deriviamo una volta la (32) otteniamo

$$(32^*)\quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial V} V' + \frac{\partial f_1}{\partial V'} V'' + \dots\dots + \frac{\partial f_1}{\partial V^{(r_1)}} V^{(r_1+1)} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \varphi(y, t) = 0$$

e fra questa e la precedente eliminando y formeremo un'equazione differenziale algebrica d'ordine r_1+1 con coefficienti razionalmente noti nel campo primitivo

$$(33)\qquad \Phi_1(V, V', V'' \dots\dots V^{(r_1+1)}) = 0$$

Avendo questa soluzioni comuni colla (31) irriducibile e d'ordine r, sarà necessariamente $r_1+1 \geq r$, e poiché $r_1 < r$ ne segue appunto

$$r_1 = r - 1,$$

cioè intanto Γ ha $r-1$ parametri. Resta a provarsi che Γ è invariante in G. Per ciò cominciamo dall'osservare che l'equazione (33) d'ordine $r = r_1+1$ ammette tutte le soluzioni di (31) le quali si ottengono adunque dalla soluzione generale della (32) facendo variare la costante arbitraria che entra in y.

Ora siano y_1, y_2 due soluzioni particolari della (30) (due particolari determinazioni di y) e

$$(\alpha) \qquad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r-1)}; y_1) = 0$$

$$(\beta) \qquad f_1(V, V', V'' \dots V^{(r-1)}; y_2) = 0$$

Indicando con V_1 una particolare soluzione di (α), con V_T una particolare di β), sarà per quanto si è visto alla fine del § 172 V_γ la soluzione generale di (α) e $V_{\gamma T}$ la soluzione generale di (β), percorrendo γ le sostituzioni di T. Ora per le proprietà fondamentali delle soluzioni della risolvente di Picard (V: § 170, formola (23)) abbiamo

$$(34) \qquad V_\gamma = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 \frac{dV_1}{dt} + \dots \dots + \alpha_{m^2} \frac{d^{m^2-1} V}{dt^{m^2-1}},$$

i coefficienti α dipendendo unicamente dalla sostituzione γ. Si ha quindi per la (23*) § 170

$$(34^*) \qquad V_{T\gamma} = \alpha_1 V_T + \alpha_2 \frac{dV_T}{dt} + \dots \dots$$

Sostituendo la V_γ in (α) questa deve essere soddisfatta, sicchè ponendo

$$\theta = \alpha_1 V + \alpha_2 V' + \dots \dots$$

l'equazione

$$(35) \qquad f_1(\theta, \theta', \theta'' \dots \theta^{(r-1)}; y_1) = 0$$

avrà la soluzione V_1 della (α) e quindi tutte le altre. Abbassando nella (35), per mezzo della (α) stessa e della

$$y_1' = \varphi(y_1, t),$$

l'ordine delle derivazioni di V ad $r-1$ questa (35) deve ridursi ad un'identità (in virtù del primo teorema al §. 169) - Se ne conchiude che anche la

$$f_1(\theta, \theta', \theta'' \ldots ; y_1) = 0$$

ammette tutte le soluzioni della (β) poichè la y_2 verifica la medesima relazione

$$y_2' = \varphi(y_2, t);$$

dunque: qualunque sia γ sarà $V_{T\gamma}$ una soluzione della (β). D'altra parte ogni soluzione della (β) è, come si è ricordato sopra, una $V_{\gamma_1 T}$, appartenendo γ_1 a T, e per ciò

$$T\gamma = \gamma_1 T$$

ossia

$$T\gamma T^{-1} = \gamma_1$$

Questo dimostra appunto che T è invariante in G.

Dimostrato così il teorema enunciato, osserviamo che se l'equazione differenziale lineare proposta è integrabile per quadrature, l'ampliamento successivo del campo prodotto dall'aggiunta di queste quadrature, deve da ultimo ridurre all'identità il gruppo di razionalità. Ma ogni volta che il gruppo si riduce ad un sottogruppo di un minor numero di parametri, questo ha precisamente un parametro di meno ed è invariante nel primitivo - Dunque, supponendo l'integrabilità per quadrature, il gruppo dell'equazione deve possedere una serie di composizione i cui indici siano tutti eguali ad 1, cioè il gruppo stesso deve essere integrabile (V: § 61) - Stabiliremo poi fra breve che la condizione d'integrabilità del gruppo trovata così come necessaria perchè l'equazione sia integrabile per quadrature è altresì sufficiente. Risulterà così dimostrato in tutte le sue parti il bel teorema di Vessiot.

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'equazione differenziale lineare sia integrabile per quadrature è che essa abbia un gruppo di razionalità integrabile.

§ 176

Equazione differenziale lineare generale. Semplicità del gruppo L_1

Applichiamo subito i risultati precedenti alla dimostrazione del teorema:

A) L'equazione differenziale lineare generale (d'ordine $m > 1$) non è integrabile per quadrature.

Il gruppo di razionalità di una tale equazione è infatti il gruppo lineare omogeneo totale L (§ 172); e si è già osservato alla fine del § 173 che ampliando il campo di razionalità colla aggiunta della funzione

$$e^{\int p_1 dt}$$

il gruppo si abbassa al gruppo lineare speciale L_1. Si osserverà ora che questo modo di abbassamento corrisponde al teorema generale del § 174 giacchè, avendo L m^2 parametri, L_1 ne ha m^2-1 ed è invariante in L. Tale riduzione corrisponde perfettamente, nella teoria algebrica di Galois, a quella che mediante l'aggiunta della radice quadrata del discriminante abbassa il gruppo totale al gruppo alterno di sostituzioni sulle radici.

Per dimostrare il teorema A) basterà ora dimostrare che il gruppo L_1 non è integrabile. Anzi sussiste, come Lie ha dimostrato, la proprietà molto più generale:

B) Il gruppo lineare speciale L_1 è un gruppo semplice.

Riguardando le variabili $x_1\, x_2 \ldots x_m$ come coordinate omogenee nello spazio lineare S_{m-1} ad $m-1$ dimensioni, vediamo che L_1 non è altro che il gruppo generale projettivo in questo spazio -

Ponendo cioè

$$y_i = \frac{x_i}{x_m} \qquad (i=1,2,\ldots m-1).$$

L_1 diventa il gruppo generale di sostituzioni lineari frazionarie della forma

$$(i=1,2,\ldots m-1)\quad y_i' = \frac{a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \cdots + a_{i\,m-1}y_{m-1} + a_{im}}{a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{m,m-1}y_{m-1} + a_{mm}}$$

dove, per la forma stessa frazionaria delle sostituzioni, è inutile imporre pel determinante $A\,(a_{ik})$ il valore 1, potendosi sempre ottenere questo valore di A col moltiplicare tutti i coefficienti a per un fattore.

Così il gruppo L_1 è posto in relazione d'isomorfismo oloedrico col gruppo generale projettivo dello spazio S_{m-1}, ed il teorema (B) equivale all'altro:

C) Il gruppo generale projettivo nello spazio S_{m-1} a $m-1$ dimensioni è un gruppo semplice

Usando nella formola precedente le lettere x in luogo delle y, cioè chiamando ora

$$x_1,\ x_2 \ldots\ldots x_{m-1}$$

le usuali coordinate metriche nell'S_{m-1}, scriviamo le equazioni finite del gruppo projettivo G_{m^2-1}

$$(36)\qquad x_i' = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{i\,m-1}x_{m-1} + a_{im}}{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{m,m-1}x_{m-1} + a_{mm}}$$

Procedendo come al § 133 pel caso dell'S_2 determiniamo le m^2-1 trasformazioni infinitesime generatrici osservando che l'identità corrisponde ai valori

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} \ (*)$$

e quindi la più generale trasformazione infinitesima si otterrà ponendo

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + b_{ik}\,\delta t,$$

le b_{ik} essendo costanti arbitrarie. Con queste posizioni si trova subito dalle (36):

$$\delta x_i = x_i' - x_i = \{[b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \dots + b_{i,m-1} x_{m-1} + b_{im}] - x_i[b_{m1} x_1 + b_{m2} x_2 + \dots + b_{m,m-1} x_{m-1} + b_{mm}]\}\delta t$$

cioè per la corrispondente trasformazione infinitesima:

$$Xf = \sum_i \{(b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \dots + b_{im}) - x_i(b_{m1} x_1 + \dots + b_{mm})\}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Se delle costanti b prendiamo dapprima nulle tutte le b tranne $b_{km} = 1$, abbiamo per la corrispondente trasformazione infinitesima

$$\alpha) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \dots m-1$$

poi facendo nulle tutte le b tranne

$$b_{ik} = 1 \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} = 1.2 \dots m-1$$

(*) Si ricordi il significato del simbolo ε_{ik}, cioè

$$\varepsilon_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ per } i \neq k \\ 1 \text{ per } i = k \end{cases}$$

abbiamo le altre

$$\beta) \qquad x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \; ; \quad i, k = 1, 2 \ldots m-1$$

In fine facendo nulle tutte le b, tranne

$$b_{mk} = 1 \; ;$$

avremo le $m-1$ seguenti

$$\gamma) \qquad x_k \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \; ; \quad k = 1, 2 \ldots m-1$$

Le $\alpha)$ $\beta)$ $\gamma)$ danno già le

$$(m-1) + (m-1)^2 + (m-1) = m^2-1$$

trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo projettivo – Per esse, indicando per brevità $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ con p_i, introduciamo i simboli

$$(37) \qquad p_i \; , \quad T_{ik} = x_i p_k \; , \quad P_i = x_i \sum_k x_k p_k$$
$$i, k = 1, 2, \ldots m-1$$

Di queste le prime $m-1$ p_i hanno il significato geometrico di traslazioni; esse sono evidentemente tutte affini fra loro entro il gruppo projettivo (anzi già entro il sottogruppo dei movimenti) –

Notiamo le formole di composizione

$$(38) \qquad (p_i p_k) = 0 \quad ; (p_j , T_{ik}) = \varepsilon_{ij} p_k \, ,$$

$$(p_j , P_i) = T_{ij} + \varepsilon_{ij} \sum_k T_{kk} \, ,$$

dalle quali facilmente risulta la verità del teorema $C)$, che cioè il gruppo projettivo G_{m^2-1} non possiede alcun sottogruppo invariante – Sia al contrario Γ un tale sottogruppo ed

(39) $$U=\sum_i^{1\ldots m-1}\alpha_i p_i+\sum_{ik}^{1\ldots m-1}\beta_{ik}T_{ik}+\sum_i^{1\ldots m-1}\gamma_i P_i$$

una sua trasformazione infinitesima, le α,β,γ essendo costanti. Dimostriamo che Γ possiede tutte le trasformazioni infinitesime (37) e coincide quindi con G_{m^2-1}. Insieme alla U si troverà in Γ qualunque trasformazione alternata (SU) essendo S una qualunque delle (37). In particolare avremo in Γ la $U'=(p_j U)$, cioè per le (38)

(40) $$U'=\sum_k\beta_{jk}p_k+\sum_i\gamma_i T_{ij}+\gamma_j\sum_k T_{kk},$$

quindi anche

$$U''=(p_2 U'),$$

che ci dà

(41) $$U''=\gamma_2 p_j+\gamma_j p_2$$

Ne segue che in Γ vi è certo una combinazione delle p, cioè una traslazione infinitesima, e quindi tutte le p_i; poichè la (41) dà certo di tali traslazioni se non sono nulle tutte le γ. Se poi tutte le γ sono nulle, la (40) dà una traslazione infinitesima quando non siano nulle tutte le β_{ik}; ma in tal caso la (39) sarebbe già una traslazione infinitesima. Dunque Γ contiene tutte le p, e quindi anche, per le ultime 38, tutte le

$$T_{ij} + \varepsilon_{ij} \sum_k T_{kk}$$

cioè tutte le

$$T_{ij} \quad \text{per } i \neq j$$

e le

$$T_{ii} + \sum_k T_{kk},$$

onde anche, sommando queste ultime rispetto ad i

$$m \sum_i T_{ii} \quad \text{o} \quad \sum_k T_{kk},$$

e sottraendo dalla precedente anche la T_{ii}; dunque tutte le T_{ij} sono in Γ. Infine avremmo in Γ la trasformazione

$$(T_{ii}, P_i) = (x_i p_i,\ x_i \sum_k x_k p_k) = x_i \sum_k x_k p_k = P_i,$$

e quindi tutte le (37) si trovano in Γ c. d. d.

Il teorema C) è così dimostrato. Il gruppo generale projettivo dà una delle quattro classi di gruppi semplici trovate da Lie a cui abbiamo accennato alla fine del § 82. Come semplice notizia aggiungiamo che le altre tre classi sono date ancora dai gruppi projettivi che trasformano in sè una quadrica non degenere, od un complesso lineare non degenere in uno spazio di un numero impari di dimensioni (V. Lie Vol. III pag. 682).

§ 177
La seconda parte del teorema di Vessiot

Veniamo ora alla seconda parte del teorema di Vessiot, già enunciato al § 175, che cioè:
Ogni equazione differenziale lineare con un gruppo di razionalità integrabile è integrabile per quadrature.

Per dimostrarlo ci fonderemo sopra un risultato conseguito da Lie, che riguarda la costituzione dei sottogruppi integrabili nel gruppo lineare omogeneo (*). Se si considerano tutte le sostituzioni della forma

$$(K)\begin{cases} \bar{x}_1 = a_{11}x_1 \\ \bar{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ \bar{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{x}_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mm}x_m, \end{cases}$$

si ha evidentemente un gruppo K con $\frac{m(m+1)}{2}$ pa-

(*) Lie-Engel - Transformationsgruppen I pag. 589
Lie-Scheffers - Vorlesungen über continuierliche Gruppen (pag. 533)

rametri, sottogruppo di L_{m^2} - Le sue trasformazioni infinitesime generatrici sono

$$x_1 p_1 \,;\; x_1 p_2 ,\, x_2 p_2 \,;\; x_1 p_3 ,\, x_2 p_3 ,\, x_3 p_3 ;\, \dots ;\, x_1 p_m ,\, x_2 p_m \dots x_m p_m$$

Il gruppo K è integrabile e tali sono quindi tutti i suoi sottogruppi. Il risultato stabilito di Lie consiste in questo che ogni sottogruppo integrabile di L_{m^2} è affine ad un sottogruppo di K.

Sarà dunque provata la seconda parte del teorema di Vessiot se si dimostra che un'equazione differenziale lineare, avente per gruppo di razionalità il gruppo K (od un suo sottogruppo), è integrabile per quadrature - Supponendo di avere una tale equazione, consideriamo l'integrale particolare x_1 ed i successivi Wronskiani

$$W_2 = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} , \quad W_3 = \begin{vmatrix} x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \quad \dots \quad W_m = \begin{vmatrix} x_1^{(m-1)} & \dots & x_m^{(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_m \end{vmatrix}$$

si vede subito che ciascuna di queste funzioni razionali di $x_1\, x_2 \dots x_m$ e derivate si moltiplica per un fattore costante per qualsiasi sostituzione di K, onde segue che le loro derivate logaritmiche

$$(42) \qquad \frac{W_1'}{W_1} = \frac{x_1'}{x_1} \,,\; \frac{W_2'}{W_2} \,,\; \frac{W_3'}{W_3} , \dots \dots \frac{W_m'}{W_m}$$

sono razionalmente note. Siamo dunque ridotti a provare che quando per un'equazione differenziale lineare sono razionalmente note le derivate logaritmiche (42) dei Wronskiani

$$W_1, W_2 \dots W_m$$

l'equazione è integrabile per quadrature. Essendo razionalmente nota, diciamo $= \varphi(t)$, la derivata logaritmica di x_1, con una quadratura si conosce l'integrale particolare

$$x_1 = e^{\int \varphi(t)\,dt}$$

Con una trasformazione ben nota, si abbassa allora l'equazione differenziale proposta d'ordine m

(43) $x^{(m)} = p_1 x^{(m-1)} + p_2 x^{(m-2)} + \dots + p_m x$

all'ordine $m-1$, cangiando la funzione incognita x_1 in y colla trasformazione

$$x = x_1 \int y\,dt \qquad (44)$$

Ciò dà per y l'equazione lineare d'ordine $m-1$

(45) $y^{(m-1)} = q_1 y^{(m-2)} + q_2 y^{(m-3)} + \dots + q_{m-1} y,$

i coefficienti q esprimendosi pei primitivi colle formole:

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{1}{x_1}\left(-m x_1' + p_1 x_1\right) \\ q_2 = \dfrac{1}{x_1}\left\{-\binom{m}{2} x_1'' + p_1 m x_1' + p_2 x_1\right\} \\ \dots\dots\dots\dots \\ q_r = \dfrac{1}{x_1}\left\{-\binom{m}{r} x_1^{(r)} + \binom{m}{r-1} p_1 x_1^{(r-1)} + \dots + p_r x_1\right\} \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

onde si vede appunto che la (45) ha i coefficienti q razionalmente noti nel campo ampliato coll'aggiunta di $x_1 = e^{\int q(t)dt}$. Indichino ora

$$y_1,\ y_2 \dots y_{m-1}$$

gli integrali particolari della (45), corrispondenti, secondo la (44), a $x_2, x_3 \dots x_m$, cioè

(46) $x_2 = x_1\int y_1\,dt\,,\quad x_3 = x_1\int y_2\,dt\,, \dots\ x_m = x_1\int y_{m-1}\,dt$

Se si costruisce il Wronskiano

$$W_r = W(x_1\, x_2 \dots x_r) = \begin{vmatrix} x_1^{(r-1)} & x_2^{(r-1)} & \dots & x_r^{(r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_r \end{vmatrix},$$

sostituendovi i valori (46), con semplici trasformazioni su questo determinante si trova subito la formula

(47) $W_r = x_1^{\,r}\, W(y_1\, y_2 \dots y_{r-1}) = x_1^{\,r}\, \overline{W}_{r-1}$

Questa, facendo $r = m$, ci prova che gli integrali

$$y_1\ y_2 \dots y_{m-1}$$

della (45) formano un sistema fondamentale.

Inoltre, derivandola logaritmicamente, si trae

$$\frac{\overline{W}'_{r-1}}{\overline{W}_{r-1}} = \frac{W'_r}{W_r} - r\,\frac{x'_1}{x_1}\,,$$

onde segue che (nel nuovo campo di razionalità) le derivate logaritmiche dei nuovi Wronskiani $\overline{W}_i$ sono razionalmente note. Si può dunque procedere nuovamente sulla trasformata (45) come prima sulla proposta (43), onde risulta stabilito il teorema di Vessiot.

NOTA I (*)

Le trasformazioni finite di un gruppo $G_r \equiv (X_1f, X_2f \ldots X_rf)$ composte con r trasformazioni prese rispettivamente dagli r sottogruppi ad un parametro $[X_1f], [X_2f], \ldots [X_rf]$

Come complemento agli studi sulla generazione di un gruppo G_r (Cap. I, II) aggiungiamo le osservazioni seguenti

Le r trasformazioni infinitesime
$$X_1f = \sum_i \xi_{1i} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad X_2f = \sum_i \xi_{2i} \frac{\partial f}{\partial x_i} \; \ldots \; X_rf = \sum_i \xi_{ri} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
generatrici di un gruppo G_r generano ciascuna un gruppo G_1 ad un parametro. Scegliamo ad arbitrio dal primo gruppo X_1f una trasfor-

(*) Scheffers - Lie pag. 192
Lie - Engel III pag. 802 (nota)

mazione finita S_{t_1}, indicando t_1 il corrispondente valore del parametro, così dal secondo gruppo $X_2 f$ una trasformazione S_{t_2}, ... dall' r^{mo} gruppo $X_r f$ una trasformazione S_{t_r} -

È chiaro che la trasformazione S composta da queste r successive

(1) $$S = S_{t_1} S_{t_2} \ldots\ldots S_{t_r}$$

apparterrà a G_r - Ora domandiamo inversamente se una qualunque trasformazione S di G_r potrà decomporsi in un prodotto (1) di trasformazioni prese rispettivamente dagli r sottogruppi ad un parametro

$$X_1 f \ldots\ldots X_r f .$$

La risposta, come si vedrà, è affermativa almeno finchè la trasformazione S di G_r è presa in un intorno sufficientemente ristretto dell' identità.

Per dimostrarlo basterà provare che nella trasformazione composta (1) tutti gli r parametri t_1, $t_2 \ldots t_r$ sono essenziali, poichè allora la serie (1) sarà una serie ∞^r e quindi, almeno in un certo intorno dell' identità, coinciderà con G_r (*). Ora sci-

(*) Se le equazioni finite di G_r sono

$$x'_i = f_i(x_1 x_2 \ldots x_n ; a_1 a_2 \ldots a_r)$$

riamo le successive equazioni finite di $S_{t_1}, S_{t_2} \ldots S_{t_r}$ sviluppate in serie, tenendo conto dei soli termini del primo ordine; avremo (§ 9)

$$\text{per la } S_{t_1} \ldots\ldots x_i' = x_i + t_1 \xi_{1i}(x) + \ldots\ldots$$

$$\text{"} \quad S_{t_2} \ldots\ldots x_i'' = x_i' + t_2 \xi_{1i}(x') + \ldots\ldots$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\text{"} \quad S_{t_r} \ldots\ldots x_i^{(r)} = x_i^{(r-1)} + t_r \xi_{1i}(x^{(r-1)}) + \ldots\ldots$$

Componendo ed indicando con $\overline{x}_i$ le variabili trasformate nella S, avremo quindi

$$(2) \ldots \text{per la } S \ldots \overline{x}_i = x_i + t_1 \xi_{1i}(x) + t_2 \xi_{2i}(x') + \ldots + t_r \xi_{ri}(x^{(r-1)}) + \ldots\ldots,$$

i termini non scritti contenendo le potenze superiori dei parametri t.

Bisogna dunque provare che in questa serie (2) gli r parametri $t_1, t_2 \ldots t_r$ sono essenziali —

Se ciò non fosse, applicando la S, anzichè ad un

---

la $S_{t_1}, S_{t_2} \ldots S_{t_r} = S$ appartenendo a G_r sarà data da certi valori dei parametri $\underline{a}$

$$(\alpha) \qquad a_k = \psi_k(t_1\, t_2 \ldots t_r)$$

e poichè $t_1\, t_2 \ldots t_r$ sono essenziali in S sarà

$$\frac{\partial(\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_r)}{\partial(t_1\, t_2 \ldots t_r)} \neq 0;$$

dunque, almeno in un campo abbastanza ristretto, si potranno invertire le (α) esprimendo $t_1, t_2 \ldots t_r$ per $a_1\, a_2 \ldots a_r$

solo punto $(x_1\, x_2 \dots x_n)$, ad un gruppo di r punti

$$\begin{array}{c}(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)})\\ (x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \dots\dots x_n^{(2)})\\ \dots\dots\dots\dots\\ (x_1^{(r)}\ x_2^{(r)} \dots\dots x_n^{(r)})\end{array}$$

anche nella relativa trasformazione data dalle formole:

$$(3)\dots\ \bar{x}_i^{(\lambda)} = x_i^{(\lambda)} + t_1 \xi_{1i}(x^{(\lambda)}) + t_2 \xi_{2i}(x^{(\lambda)}) + \dots + t_r \xi_{ri}(x^{(\lambda)}) + \dots$$
$$\lambda = 1, 2 \dots r$$

gli r parametri $t_1\, t_2 \dots t_r$ non sarebbero tutti essenziali - Sappiamo invece dal § 23 (nota) che già la matrice:

$$\left\| \begin{array}{l} \xi_{11}(x^{(1)})\ \xi_{12}(x^{(1)}) \dots \xi_{1n}(x^{(1)})\ \xi_{11}(x^{(2)}) \dots \xi_{1n}(x^{(2)}) \dots \xi_{11}(x^{(r)}) \dots \xi_{1n}(x^{(r)}) \\ \xi_{21}(x^{(1)}),\ \xi_{22}(x^{(1)}) \dots \xi_{2n}(x^{(1)})\ \xi_{21}(x^{(2)}) \dots \xi_{2n}(x^{(2)}) \dots \xi_{21}(x^{(r)}) \dots \xi_{2n}(x^{(r)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi_{r1}(x^{(1)})\ \xi_{r2}(x^{(1)}) \dots \xi_{rn}(x^{(1)})\ \xi_{r1}(x^{(2)}) \dots \xi_{rn}(x^{(2)}) \dots \xi_{r1}(x^{(r)}) \dots \xi_{rn}(x^{(r)}) \end{array} \right\|$$

ha la caratteristica r; dunque gli r parametri t_i sono essenziali nella (3), e quindi nella (2). c.d.d.

Esempio. Applichiamo il risultato generale ora stabilito al gruppo G_6 di movimenti dello spazio.

I sei gruppi ad un parametro generatori di G_6 sono qui: 1° i tre gruppi continui di traslazioni secondo gli assi coordinati, 2° i tre gruppi continui di rotazioni attorno agli assi coordinati. Nel caso attuale il teorema generale conduce dunque a questo risultato ben noto che ogni movimento dello spazio si può decomporre in tre successive traslazioni secondo gli assi ed in tre rotazioni attorno agli assi stessi.

NOTA II

Le equazioni differenziali ordinarie che posseggono sistemi di soluzioni fondamentali (Sistemi di Lie).

1
Enunciato del problema

Le teorie di Picard e Vessiot relative alle equazioni differenziali lineari ordinarie, i cui principii abbiamo svolto nell'ultimo Capitolo, furono estese dallo stesso Vessiot (*) ad una classe più generale di sistemi di equazioni differenziali ordinarie

(*) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. VIII. 18

che si avvicinano alle lineari per la proprietà di cui sono dotati: che il loro integrale generale si esprime, in determinato modo, per un conveniente numero di soluzioni particolari e per le costanti arbitrarie -

Vogliamo brevemente occuparci in questa nota dello studio di questi particolari sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che offrono un interessante applicazione della teoria dei gruppi continui finiti ad un problema analitico.

Partiamo dapprima dalla considerazione di un sistema di equazioni differenziali lineari ed omogenee che, ridotto al primo ordine ed alla forma normale, scriviamo

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

dove $x_1, x_2 \dots x_n$ sono n funzioni incognite della variabile indipendente t e i coefficienti a_{ik} sono funzioni assegnate (analitiche) di t. Se prendiamo n diversi sistemi di integrali particolari

$$(2)\quad \begin{cases} \left(x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)}\right) \\ \left(x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \dots\dots x_n^{(2)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \left(x_1^{(n)}\ x_2^{(n)} \dots\dots x_n^{(n)}\right) \end{cases}$$

tali che il loro determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ x_1^{(n)} \dots\dots x_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Sia, per un particolare valore di t per es. per $t=0$ diverso da zero, si vede subito che l'integrale generale delle (1) si comporrà nel modo seguente cogli $\underline{n}$ integrali particolari.

$$(3)\qquad x_i = c_1 x_i^{(1)} + c_2 x_i^{(2)} + \dots c_n x_i^{(n)};\quad i=1,2\dots n$$

dove le $\underline{c}_i$ sono le $\underline{n}$ costanti arbitrarie. E infatti, prendendo convenientemente le $\underline{c}$, possiamo fare acquistare nelle (3) a $x_1\ x_2 \dots x_n$ valori iniziali arbitrarii per $t=0$ —

È questo un primo e più semplice esempio di equazioni differenziali dotate della proprietà in discorso. Un altro esempio ci viene fornito dalle equazioni del tipo di Riccati

$$(4)\qquad \frac{dx}{dt} = ax^2 + bx + c.$$

dove a, b, c sono funzioni date della variabile indipendente t. È ben noto che se x_1, x_2, x_3, x_4 sono quattro soluzioni particolari della (4), il loro rapporto anarmonico

$$(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_4}$$

è costante. Se conosciamo quindi tre soluzioni particolari x_1, x_2; x_3 della (4), la soluzione generale x è determinata dalla formola

$$\frac{x_2 - x}{x_1 - x} = C\,\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3},$$

essendo C la costante arbitraria.

Considerati questi casi particolari, enunciamo il problema generale che si tratta di risolvere sotto la forma seguente:

Trovare tutti i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

$$\text{(A)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\,; t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

dotati della proprietà che per un numero sufficientemente grande m di soluzioni particolari arbitrariamente scelte

$$(x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots\ldots x_n^{(k)}) \qquad k = 1, 2 \ldots m$$

possano esprimersi le soluzioni generali $x_1\, x_2 \ldots x_n$ con formole del tipo

$$\text{(B)} \qquad x_i = \Phi_i(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)}, x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)} \ldots x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)}; a_1 a_2 \ldots a_n),$$

essendo le Φ funzioni determinate delle m soluzioni particolari e delle n costanti arbitrarie (essenziali) $a_1, a_2 \dots a_n$ -

Un sistema differenziale (A) che goda dell'enunciata proprietà si dirà un sistema con soluzioni fondamentali - Di questi sistemi differenziali si sono occupati Lie, Vessiot e Guldberg, la soluzione più generale del problema è stata data da Lie e questi sistemi (A) diconsi perciò ~~anche~~ sistemi di Lie

Procederemo alla determinazione dei sistemi di Lie dimostrando dapprima come da ogni gruppo finito continuo di trasformazioni deduconsi appunto dei sistemi di Lie e dimostreremo poi che i sistemi di Lie così ottenuti sono i più generali possibili -

2
Serie ∞^1 di trasformazioni contenute in un gruppo G_r

Consideriamo un gruppo G_r di Lie generato dalle r trasformazioni ~~infinitesime~~

$$X_i f = \sum \xi_{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

e siano

$$(5) \qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ; a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

le equazioni finite del gruppo. Entro il gruppo G_r prendiamo una serie ∞^1 qualsiasi di trasformazioni, ciò che si otterrà ponendo nelle (5) gli r parametri $\underline{a}$ funzioni di un unico parametro t.

Così avremo la serie ∞^1

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x_1 . x_2 \ldots x_n\, ; a_1(t) . a_2(t) \ldots a_r(t))$$

che scriviamo anche

$$(6^*) \qquad x_i' = \psi_i(x_1\, x_2 \ldots x_n\, ; t)$$

Derivando la (6) rapporto a $\underline{t}$ abbiamo

$$\frac{dx_i'}{dt} = \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_k} \frac{da_k}{dt}$$

e, tenendo conto delle equazioni differenziali fondamentali del gruppo G_r (§ 7 (1) pag. 29), ne dedurremo

$$(7) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x') \sum_k \psi_{sk}(a) . \frac{da_k}{dt}$$

La somma $\sum_k \psi_{sk}(a) \frac{da_k}{dt}$ è una certa funzione di t, che indichiamo con $\theta_s(t)$, poniamo cioè

$$(8) \qquad \sum_k^{1\ldots r} \psi_{sk}(a) \frac{da_k}{dt} = \theta_s(t)\, ;$$

da questa inversamente, colle notazioni del Cap. I, si trae

$$(8^*) \qquad \frac{da_j}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \alpha_{sj}(a) . \theta_s(t)$$

Dopo ciò la (7) si scrive

$$(C) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \theta_s(t) \xi_{si}(x')$$

Così adunque: se la serie ∞^1 di trasformazioni (6*) è contenuta nel gruppo $G_r \equiv (X_1 f \dots\dots X_r f)$ le equazioni differenziali caratteristiche della serie (ottenute eliminando $x_1\, x_2 \dots x_n$ fra le x'_i e le loro derivate) debbono porsi sotto la forma (C).

Inversamente dimostriamo: Se la serie ∞^1 di trasformazioni (6*) soddisfa a un sistema di equazioni differenziali del tipo (C) e di più contiene una trasformazione iniziale $S_a^{(0)}$ del gruppo G_r (p.e. l'identità) essa è interamente contenuta in G_r, almeno in un intorno di $S_a^{(0)}$.

Infatti gli integrali y_i delle (C) sono perfettamente determinati dal ridursi per un valore iniziale di t, diciamo per $t=0$, alle

$$f_i(x_1, x_2 \dots x_n;\ a_1^{(0)}\, a_2^{(0)} \dots a_r^{(0)})$$

Integrando ora il sistema (8*), colle condizioni iniziali

$$a_j = a_j^{(0)} \quad \text{per } t=0,$$

e sostituendo nelle $f(x, a)$ per le $\underline{a}$ questi integrali delle (8*), le funzioni così ottenute

$$\bar{x}_i = f_i(x, a)$$

soddisferanno alle (C) come le x_i e riducendosi così inizialmente, per $t=0$, ai medesimi valori $f_i(x, a^{(0)})$, coinciderauno con esse c. d. d.

Dunque si può dire che i sistemi differenziali della forma (C) sono caratteristici per le serie ∞^1 di trasformazioni contenute nel gruppo G_r. Ci proponiamo ora di dimostrare che questi sistemi differenziali (C) ammettono sempre soluzioni fondamentali e sono i più generali possibili dotati di questa proprietà.

3

I sistemi differenziali (C) come sistemi di Lie

Cominciamo dal dimostrare il teorema diretto:

Ogni sistema di equazioni differenziali del tipo (C):

$$(C^*) \quad \frac{dx_i}{dt} = \theta_1(t)\,\xi_{1i}(x) + \theta_2(t)\,\xi_{2i}(x) + \dots\dots + \theta_r(t)\,\xi_{ri}(x)$$

$$i = 1, 2 \dots\dots n,$$

dove le θ sono funzioni arbitrarie della variabile t e le $\xi_{ki}(x)$ sono i coefficienti delle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad k = 1, 2 \dots r$$

generatrici di un gruppo G_r, è un sistema con soluzioni fondamentali (un sistema di Lie).

Questo teorema può dedursi dalla teoria degli invarianti di gruppi di punti sviluppata al Cap. IX. Risulta particolarmente dagli sviluppi ai §§ 110-111 che, ampliando il gruppo G_r un numero $\underline{m}$ abbastanza grande di volte in $G_r^{(m)}$, il gruppo $G_r^{(m)}$ agendo sul sistema di $\underline{m}$ punti

$$(x_i^{(1)})\ (x_i^{(2)})\ \ldots\ (x_i^{(m)}),$$

potremo far sì che le $\underline{r}$ equazioni caratteristiche per gli invarianti di $G_r^{(m)}$

$$(9)\qquad X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \ldots + X_i^{(m)}F = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots r$$

siano tutte linearmente indipendenti e sia di più

$$nm > r$$

Allora il sistema (9) nelle $\underline{nm}$ variabili

$$(x_i^{(1)})\ (x_i^{(2)})\ \ldots\ (x_i^{(m)})$$

ammette precisamente $s = nm - r$ soluzioni indipendenti, che indichiamo con

$$\psi_1\ \psi_2\ \ldots\ \psi_s\ {}^{(*)}$$

e sono gli invarianti di $G_r^{(m)}$.

Se agli m punti precedenti ne aggiungiamo un $(m+1)^{mo}$ generico $(x_1\ x_2 \ldots x_n)$, gli invarianti del gruppo di $\underline{m+1 \text{ punti}}$ saranno le soluzioni del sistema di $\underline{r}$

(*) Può anche darsi che sia $s = 0$

equazioni indipendenti con $n(m+1)$ variabili:

$$(9^*) \qquad X_i^{(1)}F + X_i^{(2)}F + \ldots\ldots + X_i^{(m)}F + X_iF = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots\ldots r,$$

e saranno per ciò in numero di

$$n(m+1) - r = s + n$$

indipendenti. Ne avremo dunque, oltre $\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_s$, $\underline{n}$ nuovi che diciamo

$$\mathcal{J}_1(x_i^{(1)}\, x_i^{(2)} \ldots x_i^{(m)}\, x_i),\ \mathcal{J}_2(\quad)\ \ldots\ldots\ \mathcal{J}_n(\ldots)\,.$$

È facile vedere che $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \ldots\ldots \mathcal{J}_n$ saranno indipendenti rispetto a $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, cioè

$$(10) \qquad \frac{\partial(\mathcal{J}_1\, \mathcal{J}_2 \ldots \mathcal{J}_n)}{\partial(x_1\, x_2 \ldots x_n)} \neq 0$$

Cangiamo infatti le $nm = s + r$ variabili

$$x_i^{(1)}\ x_i^{(2)} \ldots\ldots x_i^{(m)}$$

in altre variabili indipendenti delle quali le prime $\underline{s}$ siano $\psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_s$ e le rimanenti r indichiamole con $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_r$. Il sistema (9) prenderà evidentemente la forma

$$\Omega_i F = \sum_k^{1\ldots r} \alpha_{ik}(\psi, \varphi) \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} \qquad i = 1, 2 \ldots r,$$

il determinante delle α essendo $\neq 0$. Il sistema (9^*) diventerà quindi

$$(11) \qquad \Omega_i F + X_i F = 0$$

Ora se sussistesse la (10) avremmo fra $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \ldots \mathcal{J}_n, \psi_1, \psi_2 \ldots \psi_s, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ almeno una relazione, sia

$$(12) \qquad \Phi(J_1 J_2 \dots J_n \psi_1 \dots \psi_s \varphi_1 \dots \varphi_r) = 0$$

A questa funzione Φ identicamente nulla applicando l'operazione (11), e badando che $J_1 \dots J_n \psi_1 \dots \psi_s$ sono soluzioni di (11), ne seguirebbe

$$\alpha_{i1}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + \alpha_{i2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} + \dots + \alpha_{ir}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_r} = 0 \qquad i = 1, 2 \dots r$$

onde, poiché $|\alpha_{ik}| \neq$, dedurremmo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} = \dots = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_r} = 0,$$

e però la (12) stabilirebbe una relazione fra $J_1 J_2 \dots J_n \psi_1 \psi_2 \dots \psi_s$, ciò che è assurdo. Ciò premesso, dimostriamo che:

Se in una qualunque J delle n funzioni $J_1 J_2 \dots J_n$ al posto di $x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \dots x_i^{(m)}, x_i$ si pongono $m+1$ soluzioni del sistema differenziale (C), questa J diventerà una costante.

E infatti si avrà:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_i \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_i^{(1)}}\frac{dx_i^{(1)}}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(2)}}\frac{dx_i^{(2)}}{dt} + \dots + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(m)}}\frac{dx_i^{(m)}}{dt} + \frac{\partial J}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \right\}$$

$$= \sum_i^{1\dots n} \sum_s^{1\dots r} \left\{ \frac{\partial J}{\partial x_i^{(1)}}\theta_s(t)\xi_{si}(x^{(1)}) + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(2)}}\theta_s(t)\xi_{si}(x^{(2)}) + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\partial J}{\partial x_i^{(m)}}\theta_s(t)\xi_{si}(x^{(m)}) + \frac{\partial J}{\partial x_i}\theta_s(t)\xi_{si}(x) \right\} =$$

$$= \sum_s \theta_s(t)\left\{ X_i^{(1)}J + X_i^{(2)}J + \dots + X_i^{(m)}J + X_i J \right\} = 0$$

Dunque $m+1$ soluzioni qualunque

$$(x_i^{(1)})\quad (x_i^{(2)})\ \ldots\ldots (x_i^{(m)})\ (x_i)$$

del sistema differenziale (C) sono legate dalle n relazioni, indipendenti rispetto alle $x_1 \ldots x_n$:

$$\begin{cases} J_1(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(m)}\, x) = a_1 \\ J_2(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(m)}\, x) = a_2 \\ \text{-----------------} \\ J_n(x^{(1)}\, x^{(2)} \ldots x^{(m)}\, x) = a_n, \end{cases}$$

le $a_1\ a_2 \ldots a_n$ essendo costanti. – Queste, risolute rispetto alle $x_1\ x_2 \ldots x_n$, danno appunto la soluzione generale del sistema (C) espressa per le m soluzioni particolari

$$x_i^{(1)}\quad x_i^{(2)} \ldots x_i^{(m)}$$

e per n costanti arbitrarie. Ciò dimostra che il sistema (C) è un sistema di Lie.

4.

I sistemi (C) come i sistemi più generali di Lie

Suppongasi ora inversamente che il sistema (A) di equazioni differenziali sia un sistema di Lie e sussistano quindi formole del tipo (B), che permettono di esprimere la soluzione generale $x_1\ x_2 \ldots x_n$ per <u>m</u>

soluzioni particolari

$$x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \ldots\ldots x_i^{(m)}$$

e per le n costanti arbitrarie $a_1\, a_2 \ldots a_n$ -

In primo luogo poichè le (B) debbono lasciare arbitrarii i valori iniziali di $x_1\, x_2 \ldots x_n$ per $t=0$, dovranno essere risolubili rispetto ad $a_1\, a_2 \ldots a_n$ - Alle (B) potremo dunque sostituire il sistema equivalente

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(x_1^{(1)} \ldots x_n^{(1)};\, x_1^{(2)} \ldots x_n^{(2)}; \ldots x_1^{(m)} \ldots x_n^{(m)};\, x_1 \ldots x_n) = a_1 \\ \mathcal{J}_2(- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -) = a_2 \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ \mathcal{J}_n(- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -) = a_n \end{cases}$$

le $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \ldots \mathcal{J}_n$ essendo funzioni delle $n(m+1)$ variabili $x_i^{(1)}, x_i^{(2)} \ldots x_i^{(m)}, x_i$, indipendenti inoltre rispetto a $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

Ciascuna funzione $\mathcal{J}$ diventando una costante quando le dette variabili soddisfano al sistema differenziale

$$\frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(x_1 \ldots x_n;\, t),\; \frac{dx_i^{(1)}}{dt} = \varphi_i^{(1)},\; \frac{dx_i^{(2)}}{dt} = \varphi_i^{(2)} \ldots\ldots \frac{dx_i^{(m)}}{dt} = \varphi_i^{(m)},$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

(dove per brevità si è posto $\varphi_i^{(\lambda)} = \varphi_i(x_1^{(\lambda)} \ldots x_n^{(\lambda)} t)$), sarà un integrale di questo sistema e dovrà quindi soddisfare alla equazione associata alle derivate parziali del 1° ordine

$$(13) \qquad \sum_i \varphi_i^{(1)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(1)}} + \sum_i \varphi_i^{(2)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(2)}} + \dots + \sum_i \varphi_i^{(m)} \frac{\partial F}{\partial x_i^{(m)}} + \sum_i \varphi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$$

A questa equazione (13), con coefficienti funzioni delle $x^{(1)} \dots x^{(m)}$, x e di t, dovranno soddisfare le n funzioni J che non contengono t esplicitamente. Dando dunque nella (13) a t valori particolari qualsiasi si avranno altrettante equazioni che saranno tutte soddisfatte da $J_1 J_2 \dots J_n$ - Dalla (13) si deducono così quante si vogliano equazioni particolari, ma il numero q delle indipendenti non può superare $n(m+1)-n$ cioè $q \leq nm$. È chiaro quindi che prendendo un numero q sufficientemente grande di queste equazioni lineari particolari, l'equazione generale (13) con t variabile dovrà essere una conseguenza lineare di quelle q - Di più queste equazioni particolari avranno la forma stessa della (13), cioè i loro primi membri saranno aggregati di operazioni simili costruite sopra ciascun gruppo di variabili $(x_1 x_2 \dots x_n)$, $(x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)})$ $\dots (x_1^{(m)} \dots x_n^{(m)})$ - Le operazioni alternate formate con queste avranno pure manifestamente la medesima forma. Aggiungendo quindi al sistema quelle operazioni alternate che non sono combinazioni lineari delle precedenti, e così continuando, dovremo dunque trovare un sistema completo di tali equazioni, il cui numero r sarà ancora $\leq nm$.

Ponendo

$$X_i f = \sum_k^{1\dots n} \xi_{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

dove le ξ_{ik} sono certe funzioni delle $x_1\, x_2 \dots x_n$ il detto sistema completo avrà dunque la forma

$$(14) \quad Y_i F = X_i^{(1)} F + X_i^{(2)} F + \dots + X_i^{(m)} F + X_i F = 0$$
$$i = 1, 2 \dots r$$

La condizione che il sistema sia completo si traduce in questo che le operazioni alternate $(Y_i Y_l)$ siano combinazioni lineari delle Y_i stesse, cioè si abbia

$$(Y_i Y_l) = \sum_s \vartheta_{ils} Y_s f,$$

dove le ϑ_{ils} appajono dapprima come funzioni delle $n(m+1)$ variabili $x_i^{(1)} \dots x_i^{(m)}\, x$. Ma, a causa della forma (14) delle Y, esse si decompongono nelle

$$\begin{cases} (X_i X_l) = \sum_s \vartheta_{ils} X_s f \\ (X_i^{(k)} X_l^{(k)}) = \sum_s \vartheta_{ils} X_s^{(k)} f \qquad k = 1, 2 \dots m \end{cases}$$

onde, le $\xi_{i\lambda}^{(k)}$ contenendo il solo gruppo di variabili $x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)}$, si deduce che le ϑ_{ils} debbono essere costanti assolute c_{ils}.

Dunque le r trasformazioni infinitesime

$$X_1f,\ X_2f \dots X_rf$$

generano un gruppo G_r ad r parametri ed i primi membri delle (14) non sono altro che le trasformazioni infinitesime del gruppo $G_r^{(m+1)}$ ampliato $m+1$ volte di G_r.

Dovendo poi il primo membro della (13) risultare da una combinazione lineare dei primi membri delle (14) si avranno identità della forma

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_i(x, x_2 \dots x_n; t) = \sum_s \theta_s\, \xi_{si}(x) \\ \varphi_i^{(\lambda)} = \varphi_i(x_1^{(\lambda)} x_2^{(\lambda)} \dots x_n^{(\lambda)}; t) = \sum_s \theta_s\, \xi_{si}(x^{(\lambda)});\ \lambda = 1, 2 \dots m \end{cases}$$

e i moltiplicatori θ_s non potranno contenere che la variabile t; dunque

$$\varphi_i(x, x_2 \dots x_n; t) = \sum_s^{1 \dots r} \theta_s(t)\, \xi_{si}(x)$$

ed il sistema (A) ha quindi necessariamente la forma (C).

Concludiamo dunque:

I più generali sistemi differenziali con soluzioni fondamentali (sistemi di Lie) sono quelli del tipo (C), che caratterizzano le serie ∞^1 di trasformazioni contenute in un gruppo continuo finito.

Osserviamo, per terminare, che i due semplici

esempi addotti al n° 1 di questa nota del sistem
di Lie rappresentato dalle equazioni linea
omogenee (1), e l'altro dato dall'equazion
(4) di Riccati, corrispondono, il primo al g
po lineare omogeneo totale L, il secondo
gruppo projettivo sopra una variabile.

FINE