LUIGI BIANCHI

PROFESSORE DELLA REGIA UNIVERSITÀ DI PISA

LEZIONI

SULLA

Teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni

Anno 1902-1903

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

1903

INDICE DEI CAPITOLI

Capitolo I.

Generalità sui gruppi continui finiti di trasformazioni. — Equazioni differenziali fondamentali. — Trasformazioni infinitesime come generatrici del gruppo.

Capitolo II.

I tre teoremi fondamentali della teoria dei gruppi. — I gruppi misti.

Capitolo III.

Equazioni di definizione di un gruppo. — Ordine delle trasformazioni infinitesime.

Capitolo IV.

Funzioni e varietà invarianti rispetto ad un gruppo. — Gruppi transitivi ed intransitivi. — Gruppi imprimitivi. — Gruppi sistatici ed asistatici.

Capitolo V.

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime. — Sottogruppi invarianti e serie di composizione di un gruppo.

Capitolo VI.

Il gruppo aggiunto e i sottogruppi di un gruppo. — Sottogruppi a due parametri. — Equazione caratteristica. — Composizione o struttura di un gruppo. — Genere di un gruppo.

Capitolo VII.

Prime ricerche sulla simiglianza dei gruppi. — Trasformazioni permutabili con tutte le trasformazioni di un gruppo. — Gruppi semplicemente transitivi reciproci.

Capitolo VIII.

Isomorfismo dei gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime. — Gruppi parametrici. — Isomorfismo dei gruppi in relazione colle trasformazioni finite. — Risoluzione del problema generale di riconoscere la simiglianza di due gruppi.

Capitolo IX.

Gruppi ampliati e prolungati. — Invarianti differenziali.

Capitolo X.

I gruppi continui finiti sopra una e sopra due variabili.

Capitolo XI.

Prime applicazioni della teoria dei gruppi continui finiti ai problemi d'integrazione delle equazioni differenziali.

Capitolo XII.

Applicazioni alla teoria delle equazioni differenziali lineari. — Estensione delle teorie di Galois secondo Picard e Vessiot.

Capitolo I°

Trasformazioni e loro composizione - Serie di trasformazioni e parametri essenziali - Concetto di gruppo continuo finito secondo Lie - Equazioni differenziali fondamentali - Gruppi ad un parametro - Trasformazioni infinitesime - Le r trasformazioni infinitesime indipendenti per un gruppo a r parametri -

§. 1

Trasformazioni e loro composizione

Siano $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ n variabili indipendenti, che in generale supporremo complesse - Chiameremo trasformazione il passaggio da queste n variabili ad n nuove variabili indipendenti $x_1'\ x_2' \ldots\ldots x_n'$, legate alle primitive da un sistema di formule:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \end{cases}$$

o come scriveremo più brevemente

$$(1^*)\qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Rispetto alle funzioni $f_1, f_2 \ldots f_n$ supporremo sempre, ove non si dica esplicitamente il contrario, che siano funzioni analitiche delle variabili x, definite dunque in un campo primitivo da una serie assolutamente convergente, procedente secondo le potenze intere e positive degli argomenti

$$x_1 - x_1^{(0)},\ x_2 - x_2^{(0)} \ldots\ldots x_n - x_n^{(0)},$$

dove con $x_i^{(0)}$ indichiamo valori fissi delle x - Le funzioni f_i, definite così dapprima solo nell'intorno di un punto $(x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$, si potranno poi prolungare analiticamente secondo i principii della teoria generale delle funzioni analitiche -

L'ipotesi che le x_i' siano fra loro indipendenti porta che il determinante funzionale

$$\frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_n)}$$

sia in generale diverso da zero - È ben noto allora che, restringendo convenientemente l'intorno del punto $(x_i^{(0)})$, si possono risolvere le (1) rispetto alle x, esprimendo così le x per le x' colle formole della trasformazione inversa

$$(2) \qquad x_i = F_i(x_1', x_2' \ldots x_n').$$

Come si è detto, si riterranno in generale le variabili come complesse - Per altro dallo sviluppo stesso delle ricerche risulterà che esse sono ancora applicabili a variabili e trasformazioni reali quando si supponga che le funzioni f_i, da cui la trasformazione dipende, siano ad un sol valore, finite e continue in un certo campo insieme colle loro derivate prime, seconde ecc., fino all'ordine che conviene considerare.

Una trasformazione come la (1) si indicherà spesso con una sola lettera (o simbolo) S, nel qual caso la trasformazione inversa (2) si dinoterà con S^{-1}. Ciò che vi ha di essenziale nella trasformazione S rappresentata dalle (1) è naturalmente la specie delle funzioni f_i e non già il modo come si indicano le variabili primitive e le trasformate; e così la trasformazione

$$y_i^* = f_i(y_1, y_2 \cdots y_n)$$

sarà ancora la S stessa.

Consideriamo una prima trasformazione

$$S) \quad x_i' = f_i(x_1, x_2 \cdots\cdots x_n)$$

~~ed~~ una seconda

$$T) \quad x_i'' = \varphi_i(x_1', x_2' \cdots\cdots x_n')$$

Se supponiamo che le variabili x si mantengano in un ~~tale~~ campo che i risultanti valori delle x_i' appartengano al campo in cui sono definite le φ_i, potremo eseguire le due trasformazioni successivamente e la trasformazione che ne risulta

$$x_i'' = \varphi_i(f_1(x_1 \cdots x_n), f_2(x_1 \cdots x_n), \cdots\cdots f_n(x_1 \cdots x_n)),$$

o ~~come~~ ~~spesso~~ scriveremo per brevità

$$x_i'' = \varphi_i(f_1(x), f_2(x) \cdots f_n(x)),$$

si dirà la trasformazione <u>composta</u> o il <u>prodotto</u> delle due <u>nell'ordine stabilito</u>. Essa si indicherà col simbolo

$$ST,$$

ponendo a sinistra la trasformazione eseguita prima. Si osservi che componendo una trasformazione S colla sua inversa S^{-1}, il risultato è la sostituzione identica o l'identità

$$x_i' = x_i$$

che si indica col simbolo 1, sicché

$$SS^{-1} = 1.$$

Colla definizione del prodotto di due trasformazioni risulta altresì stabilito il significato del prodotto di più trasformazioni $S_1, S_2 \ldots\ldots S_m$, ritenendo

$$S_1 S_2 \ldots\ldots S_m = (S_1 S_2 \ldots S_{m-1}) \cdot S_m .$$

Si osservi subito che in un prodotto di più trasformazioni non vale in generale la legge permutativa, ma vale però quella associativa. Questa proprietà, che risulta immediatamente dal significato stesso delle trasformazioni (*), è importante perchè permette di eseguire sopra un prodotto di trasformazioni quelle riduzioni che per la legge associativa sono permesse in un prodotto di ordinarie quantità; così per es:

(*) Basta invero dimostrare che sussiste la legge associativa elementare espressa dalla formola

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3)$$

Ora se S_1 porta le x_i nelle x_i', la S_2 le x_i' nelle x_i'' e infine la S_3 le x_i'' nelle x_i''', l'effetto della trasformazione a sinistra è di portare le x_i nelle x_i'''. D'altronde siccome la $S_2 S_3$ porta le x_i' nelle x_i''', così anche quella

$$(S_1 S_2).(S_3 S_4) = S_1 S_2 S_3 S_4$$
$$(S_1 S).(S^{-1} S_2) = S_1 S_2 \quad \text{etc.}$$

Quando sopra le antiche variabili x e le nuove x' in una trasformazione

$$S) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

si eseguisca una medesima trasformazione

$$T \begin{cases} y_i = \varphi_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) \\ y'_i = \varphi_i(x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_n) \end{cases},$$

la trasformazione che ne nasce pel passaggio dalle y alle y' è precisamente la

$$T^{-1} S T,$$

che dissi la trasformata della S per mezzo della T. In vero colla T^{-1} si passa dalle y alle x, colla S dalle x alle x', e infine colla T dalle x' alle y'; dunque colla $T^{-1}ST$ dalle y alle y'.

§ 2

Serie ∞^r di trasformazioni

Supponiamo che nelle espressioni di una trasformazione S entrino $\underline{r}$ parametri $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$ sicchè si abbia

$$(3) \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n; a_1, a_2 \ldots a_r)$$

Questi parametri, come le variabili x, si supporranno *in generale* complessi e le f_i saranno funzioni analitiche.

---

a destra trasforma le x_i nelle x''_i e però le due trasformazioni sono identiche —

anche dei parametri $\underline{a}$. Diremo che gli $\underline{r}$ parametri $\underline{a}$ sono essenziali nelle f, quando queste funzioni non possono ridursi a dipendere da un numero minore di parametri $\underline{b}$ funzioni delle a (*) –

Facendo percorrere ai parametri $\underline{a}$ tutti i valori di un certo campo, la trasformazione S percorrerà una serie continua di trasformazioni – Ma si noti che, ove i parametri $a_1, a_2 \ldots a_r$ non siano tutti essenziali, ogni trasformazione della serie si otterrà infinite volte da diversi sistemi particolari di valori dei parametri, mentre quando sono essenziali, a quella trasformazione corrisponderà un solo sistema di valori dei parametri $a_1, a_2 \ldots a_r$, ovvero un numero discreto di tali sistemi.

La prima asserzione è d'immediata evidenza, e la seconda risulta dimostrata osservando che negli sviluppi in serie che definiscono le f_i come funzioni delle x i coefficienti α sono certe funzioni delle $\underline{a}$; il numero $\underline{s}$ di queste α indipendenti è certo $\leq r$.

Quando $s < r$ introducendo i parametri α al posto dei parametri $\underline{a}$, si vede che questi non sono essenziali; e inversamente se i parametri $\underline{a}$ non sono essenziali, sarà $s < r$ poichè le α potranno scriversi come funzioni

---

(*) Se per es. i due parametri a_1, a_2 compariscono nelle f solo nella combinazione $a_1 + a_2$, il numero dei parametri effettivi si abbasserebbe evidentemente almeno a $r-1$ –

~~di~~ quei parametri b in numero minore di r che possano sostituirsi alle a.

Quando i parametri a sono essenziali è dunque $s=r$ e le eguaglianze

$$f_i(x,a)=f_i(x,a')$$

richiedono che si abbia

$$\alpha_1(a)=\alpha_1'(a')$$
$$\alpha_2(a)=\alpha_2'(a')$$
$$- - - - - - - -$$
$$\alpha_r(a)=\alpha_r'(a')$$

e quindi i valori ammissibili per $a_1' \dots a_r'$ o si riducono all'unico sistema $a_1\, a_2 \dots a_r$ o formano una serie discreta, c. d. d. -

Per le circostanze ora osservate, allorquando nelle (3) i parametri $a_1, a_2 \dots a_r$ siano essenziali, si dirà che la serie (3) è una serie ∞^r di trasformazioni. Propriamente quando i parametri a siano complessi, la serie è ∞^{2r}, ma la locuzione introdotta ed ormai in uso in casi simili, non può generare confusione quando si rammenti che nel caso di parametri complessi il grado effettivo d'infinità della serie è sempre il doppio di quello addotto.

È importante stabilire un criterio per riconoscere, data una serie (3) di trasformazioni, se gli r parametri a sono o no essenziali - Per questo incominciamo dall'osservare che se $a_1, a_2 \dots a_r$ non sono essenziali, ma si possono ridurre agli $s<r$ parametri:

$$b_1\,,\ b_2\ \ldots\ldots\ b_s$$

funzioni delle a, potremo determinare tali r funzioni A delle a che le n funzioni f_i, considerate come funzioni delle a soddisfino tutte all'equazione lineare omogenea alle derivate parziali

$$(\alpha)\qquad A_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+A_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots\ldots+A_r\frac{\partial\varphi}{\partial a_r}=0$$

Basta infatti determinare le A in guisa che soddisfino alle $s<r$ equazioni lineari omogenee

$$(\beta)\qquad A_1\frac{\partial b_i}{\partial a_1}+A_2\frac{\partial b_i}{\partial a_2}+\ldots\ldots+A_r\frac{\partial b_i}{\partial a_r}=0$$

$$(i=1,2,\ldots s)$$

e allora, poiché le a entrano nelle f_i solo nelle combinazioni $b_1, \ldots b_s$, si vede subito che tutte le f soddisferanno alla (α) – Si osservi di più che le s equazioni (β) lineari omogenee nelle A hanno una caratteristica precisamente $= s$, poiché $b_1\,b_2 \ldots b_s$ si suppongono indipendenti (altrimenti il numero dei parametri essenziali sarebbe ancora $<s$); perciò $r-s$ delle A restano arbitrarie; cioè in luogo della sola (α) potremo scrivere un sistema di $r-s$ tali equazioni indipendenti, che formeranno un sistema completo avendo le $r-(r-s)$ soluzioni b, e di questo sistema (α) saranno altrettante soluzioni le $f_1\,f_2 \ldots f_n$ –

Inversamente se esiste una equazione (α), o un sistema di tali equazioni colle A funzioni delle sole $\underline{a}$ di cui le f_i siano soluzioni, in queste funzioni i parametri $a_1, a_2 \ldots\ldots a_r$ non saranno tutti essenziali, ma si ridurranno ad $\underline{s}$ soltanto supposto che esistano $\underline{r-s}$ equazioni (indipendenti) come le (α) di cui le f_i siano soluzioni. E infatti in tale ipotesi il sistema delle $r-s$ equazioni (α) (supposto completo) ammetterà solo $s = r-(r-s)$ soluzioni indipendenti

$$b_1 \quad b_2 \ldots\ldots\ldots b_s$$

e le f_i quindi, in quanto dipendono dalle $\underline{a}$ e sono per ipotesi soluzioni del sistema (α), si ridurranno a funzioni delle sole b.

Concludiamo di qui. Condizione necessaria e sufficiente affinchè nelle n funzioni

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r)$$

gli $\underline{r}$ parametri $\underline{a}$ non siano essenziali è che esista una o più equazioni della forma

$$(\alpha) \qquad A_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + A_r\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0$$

colle A funzioni delle $\underline{a}$, di cui tutte le f_i siano soluzioni - Precisamente se esistono $\underline{r-s}$ equazioni (α) indipendenti, formanti un sistema completo, di cui le f_i siano soluzioni, i parametri essenziali nelle f si riducono ad $\underline{s}$ soltanto.

§. 3

Criterio per riconoscere il numero dei parametri essenziali

Resta da trasformarsi il criterio teorico testè stabilito in un altro di pratica applicazione. Ma prima osserviamo che le considerazioni del § precedente si applicano non solo al caso di un numero n di funzioni f_i eguale al numero delle variabili indipendenti $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$, ma più in generale per riconoscere, dato un numero qualunque m di funzioni

$$f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n\,;\, a_1, a_2 \ldots\ldots a_r)$$
$$(i = 1, 2 \ldots\ldots m)$$

delle n variabili indipendenti x e di r parametri a, a quanti parametri essenziali si possono ridurre i parametri a.

Tutto si riduce a trovare il numero $r-s$ delle equazioni lineari indipendenti

$$A_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + A_r\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0,$$

colle A funzioni delle sole a, cui soddisfano eventualmente tutte le funzioni $f_1, f_2 \ldots\ldots f_m$. Dovendo sussistere per ipotesi le m equazioni

$$(4)\qquad A_1\frac{\partial f_i}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial f_i}{\partial a_2} + \ldots\ldots + A_r\frac{\partial f_i}{\partial a_r} = 0$$
$$(i = 1, 2 \ldots\ldots m),$$

cominciamo dal costruire la matrice

$$M = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & \frac{\partial f_2}{\partial a_r} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_r} \end{matrix} \right\|$$

e sia μ la sua caratteristica – Si ha certamente $\mu \leq r$; ma se $\mu = r$ allora nelle (4) si annullano forzatamente tutte le A, cioè gli r parametri sono tutti essenziali e la questione è risoluta. Il numero sopra indicato con ϱ è allora $= r$. Se $\mu < r$ dalle (4) derivando una prima volta rispetto a $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ si formino le nuove nm equazioni lineari omogenee nelle A

$$(4_1) \qquad A_1 \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_1 \partial x_k} + A_2 \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_2 \partial x_k} + \cdots\cdots + A_r \frac{\partial^2 f_i}{\partial a_r \partial x_k} = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots\ldots m; \quad k = 1, 2 \ldots\ldots n$$

e si costruisca la matrice completa delle equazioni lineari (4) (4_1) nelle A che indicheremo con

$$M_1 = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_1 \partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial a_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_2 \partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial a_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & \frac{\partial f_2}{\partial a_r} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_m}{\partial a_r} & \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_r \partial x_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 f_m}{\partial a_r \partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

e che si forma dalla M aggiungendo alle $f_1, f_2 \cdots f_m$, come nuove funzioni, tutte le loro derivate prime rapporto alle x.

Se indichiamo con μ_1 la caratteristica della matrice M_1 sarà evidentemente

$$\mu \leq \mu_1 \leq r$$

Quando fosse $\mu_1 = r$ le (4) colle (4.) mostrano che le A sono tutte nulle e gli r parametri $\underline{a}$ sono tutti essenziali – Supposto ancora $\mu_1 < r$ si derivino nuovamente le (4.) rispetto a tutte le x e si formino le nuove $n^2 m$ equazioni

$$(4_2) \qquad A_1 \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_1 \partial x_k \partial x_l} + A_2 \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_2 \partial x_k \partial x_l} + \cdots\cdots + A_r \frac{\partial^3 f_i}{\partial a_r \partial x_k \partial x_l} = 0 ,$$

e si indichi con μ_2 la caratteristica della matrice M_2 formata aggiungendo alle colonne di M_1 a destra quelle relative alle equazioni (4_2), cioè associando alle

$$f_i \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

anche le derivate seconde $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}$ – Sarà $\mu_1 \leq \mu_2 \leq r$ e se $\mu_2 = r$, gli r parametri saranno essenziali – Così proseguendo costruiremo le successive matrici

$$M, \; M_1, \; M_2 \; \cdots\cdots$$

di caratteristiche rispettive

$$\mu \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \mu_3 \cdots\cdots$$

Poiché tutte le μ sono $\leq r$ non potrà la serie

$$\mu, \; \mu_1, \; \mu_2 \cdots\cdots$$

essere sempre crescente e ad un certo punto sarà necessariamente una μ uguale alla precedente, diciamo

$$\mu_k = \mu_{k-1}$$

Allora si vede subito che tutte le successive $\underline{\mu}$ conserveranno lo stesso valore μ_{k-1} – E infatti essendo $\mu_k = \mu_{k-1}$ le colonne aggiunte alla matrice M_{k-1} per formare la matrice M_k sono combinazioni lineari omogenee di μ_{k-1} colonne fisse in M_{k-1}: queste relazioni, derivate rispetto alle x, dimostrano che le nuove colonne in M_{k+1} sono pure combinazioni lineari omogenee delle dette μ_{k-1} colonne di M_{k-1}; così dicasi per M_{k+2}, M_{k+3} ....., come risulta successivamente derivando – Dunque: la serie di numeri

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{k-1} \ldots$$

è sempre crescente fino ad un massimo valore μ_{k-1}, dopo il quale tutte le μ eguagliano μ_{k-1}, onde basterà calcolare le μ sino a μ_{k-1} –

Se diciamo $s = \mu_{k-1}$ questo massimo valore delle μ, sarà certamente $s \leq r$, talchè in ogni caso, essendo almeno $\mu = 1$, e la serie di numeri

$$\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{k-1}$$

crescendo ad ogni passo almeno di un'unità, sarà anche $k \leq r$, sicchè colla costruzione di r al più delle nostre matrici si arriverà al termine del calcolo.

Dimostriamo ora che: questo numero $\underline{s}$ che dà il massimo valore delle caratteristiche delle matrici

$$M, M_1, M_2 \ldots$$

eguaglia precisamente il numero dei parametri essenziali nelle $\underline{m}$ funzioni $f_i(x, a)$

Perciò osserviamo che le equazioni

$$(4), (4_1), (4_2) \ldots (4_{k-1})$$

si riducono precisamente ad $\underline{s}$ equazioni indipendenti nelle A, mentre delle successive $(4_k), (4_{k+1}) \ldots$ è inutile tener conto perchè sono conseguenze delle $\underline{s}$ già scritte

Dunque se $s = r$, sono necessariamente nulle tutte le A e, non esistendo alcuna equazione

$$A_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + \cdots + A_r\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0,$$

di cui le f_i siano soluzioni, gli r parametri $\underline{a}$ sono in effetto essenziali.

Se invece $s < r$ è certo possibile soddisfare le dette equazioni

$$(4), (4_1), (4_2) \cdots (4_{k-1})$$

con dei valori delle A in generale funzioni non solo delle $\underline{a}$ ma anche delle $\underline{x}$ stesse ed in ciò si possono prendere ad arbitrio $r-s$ delle A — Ora facciamo vedere che se si prendono per queste $r-s$ A arbitrarie delle funzioni dei parametri $\underline{a}$ soltanto, anche le rimanenti s A conterranno le sole $\underline{a}$ — Suppongasi per fissare le idee che le $\underline{r-s}$ A arbitrarie siano $A_1, A_2 \cdots A_{r-s}$ e le dette equazioni diano poi

$$A_{r-s+1}, \cdots\cdots A_r$$

come funzioni lineari omogenee delle prime, diciamo p. e.

$$(5) \qquad A_{r-s+i} = \lambda_{i1}A_1 + \lambda_{i2}A_2 + \cdots + \lambda_{i,r-s}A_{r-s}$$

dove le λ sono funzioni note delle x e delle $\underline{a}$. Se deriviamo le

$$(4) \quad (4_1) \cdots\cdots (4_{k-1})$$

rispetto ad una qualunque x, sia x_l, ed osserviamo che le A soddisfano anche le equazioni (4_k), ne deduciamo che le dette equazioni sono ancora soddisfatte sostituendo ad $A_1, A_2 \ldots\ldots A_r$ le loro derivate

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_l}, \frac{\partial A_2}{\partial x_l} \ldots\ldots \frac{\partial A_r}{\partial x_l}$$

rispetto ad una medesima x. Perciò, insieme alla (5), sussiste l'altra

$$\frac{\partial A_{r-s+i}}{\partial x_l} = \lambda_{i1}\frac{\partial A_1}{\partial x_l} + \lambda_{i2}\frac{\partial A_2}{\partial x_l} + \ldots\ldots + \lambda_{i,r-s}\frac{\partial A_{r-s}}{\partial x_l};$$

e ne risulta appunto che prendendo $A_1, A_2 \ldots A_{r-s}$ funzioni dei soli parametri $\underline{a}$, anche $A_{r-s+1} \ldots\ldots A_r$ conterranno questi soli parametri. Manifestamente otteniamo così precisamente $r-s$ equazioni indipendenti del tipo

$$A_1\frac{\partial f}{\partial a_1} + A_2\frac{\partial f}{\partial a_2} + \ldots\ldots + A_r\frac{\partial f}{\partial a_r} = 0, \quad (*)$$

colle A funzioni dei soli parametri $\underline{a}$, di cui tutte le $f_i(x, a)$ sono soluzioni e quindi (§ 2) il numero dei parametri essenziali si abbassa appunto ad $\underline{s}$.

Riepiloghiamo i risultati ottenuti nella regola seguente. Per vedere quanti sono i parametri essenziali $\underline{a}$ in $\underline{m}$ date funzioni

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r) \quad (i=1, 2 \ldots m)$$

delle x e dei parametri $\underline{a}$ si cominci dal costruire la matrice funzionale M delle derivate delle f rapporto alle $\underline{a}$, poi la matrice analoga M_1 aggregando alle f_i tutte le loro prime derivate risp.

(*) Per avere queste $r-s$ equazioni indipendenti basterà fare per es. successivamente

$$A_1=1,\ A_2=0,\ A_3=0 \ldots\ldots A_{r-s}=0$$
$$A_1=0,\ A_2=1,\ A_3=0 \ldots\ldots A_{r-s}=0$$

Queste $r-s$ equazioni, essendo le uniche a cui soddisfano tutte le $f_i(x, a)$ formano certo un sistema completo.

porto alle x, indi la matrice M_2 ottenuta aggregando ancora le derivate seconde e così di seguito. Si prolunghi la costruzione di queste matrici $M, M_1, M_2 \ldots\ldots$ finchè la serie $\mu, \mu_1, \mu_2 \ldots\ldots$ delle loro caratteristiche cessi di crescere, dopo di che le μ successive conservano un valore costante $s \leq r$. Questo numero $\underline{s}$ dà precisamente il numero dei parametri essenziali. (* pg. 17)

§. 4

Definizione dei gruppi continui finiti di trasformazioni

Le trasformazioni essendo operazioni suscettibili di composizione, sono loro applicabili i concetti generali dei gruppi di operazioni. Diremo che: una serie finita o infinita di trasformazioni costituisce un gruppo quando il prodotto di due trasformazioni qualunque della serie (distinte od anche coincidenti) è nuovamente contenuto nella serie stessa.

Quei gruppi che constano di un numero discreto, finito o infinito di trasformazioni diconsi discontinui. Tali sono p. e. i gruppi di sostituzioni sopra lettere la cui teoria è diventata, per opera specialmente di Galois, di fondamentale importanza per lo studio delle equazioni algebriche. Altri gruppi discontinui ma infiniti si incontrano in importanti rami di analisi (funzioni ellittiche modulari,

---

$$A_1 = 0\ ,\quad A_2 = 0\ ,\quad A_3 = 0 \ldots\ldots A_{r-s} = 1$$

e calcolare le rimanenti ~~A~~ ogni volta dalle (5).

funzioni automorfe) –

I gruppi di cui ci occuperemo nel presente corso sono invece i gruppi continui, nelle cui trasformazioni entrano dei parametri arbitrarî, suscettibili di assumere con continuità tutti i valori di un certo campo – La teoria di questi gruppi continui, quale oggidì la possediamo, è stata costruita quasi per intero da Sophus Lie; Essa ha acquistato nella scienza matematica una grande importanza, tanto nel campo analitico come nel campo geometrico; in particolare per l'analisi nella teoria della integrazione delle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, dove l'ufficio della teoria dei gruppi continui è comparabile a quello che la teoria dei gruppi di sostituzioni compie nello studio delle equazioni algebriche –

I gruppi continui diconsi finiti, secondo Lie, quando le loro trasformazioni dipendono da un numero finito di parametri arbitrarî – I gruppi continui finiti più semplici sono quelli le cui trasformazioni sono definite da un unico sistema di equazioni

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots\dots x_n\,;\, a_1, a_2 \dots a_r) \quad \text{--}$$

$$i = 1, 2 \dots\dots n,$$

con r parametri che possono supporsi senz'altro essenziali – La proprietà della serie ∞^r di trasformazioni (6) di costituire un gruppo si traduce nella seguente proprietà funzionale per le f_i – Poichè due successive trasformazioni della serie (6)

*) In particolare risulta: Affinchè gli r parametri siano essenziali è necessario e sufficiente che la matrice funzionale, rispetto ai parametri, delle funzioni e delle loro derivate fino alle $(r-1)^e$ sia di caratteristica r

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1 a_2 \dots a_r)$$
$$x_i'' = f_i(x_1', x_2' \dots x_n' ; b_1, b_2 \dots b_r)$$

debbono comporsi in una terza trasformazione

$$x_i'' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; c_1, c_2 \dots c_r),$$

i parametri c della trasformazione composta dipendendo unicamente da quelli a, b delle componenti, le funzioni f_i debbono soddisfare alle relazioni funzionali

$$f_i(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_n(x,a); b_1 b_2 \dots b_r) = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; c_1 c_2 \dots c_r)$$

essendo le c funzioni delle a, b, diciamo

$$c_s = \varphi_s(a_1, a_2 \dots a_r ; b_1 b_2 \dots b_r)$$

In generale quando parleremo di un gruppo di trasformazioni, intenderemo che si tratti di un gruppo continuo finito, le cui trasformazioni sono contenute in un'unica serie (6). Gli altri gruppi finiti più generali che conviene considerare sono quelli nei quali le trasformazioni del gruppo, in luogo di costituire una sola serie (6), costituiscono più di tali serie ed anche un numero infinito ma discreto. Per altro lo studio di tali gruppi finiti più generali, che si dicono gruppi misti, si riporta, come dimostreremo nel prossimo capitolo, a quello dei gruppi semplici (6) combinati con ordinarii gruppi discontinui.

Ogni gruppo continuo non finito potrebbe dirsi un gruppo continuo infinito. Per altro questa denominazione è adottata da Lie solo nel caso, sul quale più tardi ritorneremo (v. § 36), che le trasformazioni del gruppo stesso risultino definite da un certo sistema di equazioni a derivate parziali.

Del resto noi ci occuperemo affatto in questo corso dei gruppi infiniti nel senso di Lie od in senso più generale e sottintenderemo sempre che il gruppo sia finito.

Un'osservazione è subito necessaria per evitare un facile errore. Nei gruppi ordinarii di un numero finito di operazioni esiste sempre nel gruppo l'operazione identica, come pure insieme ad ogni operazione la sua inversa. Ma per i gruppi continui facciamo l'osservazione (che vale pure per i gruppi discontinui infiniti): Dalla definizione di gruppo continuo non segue affatto che il gruppo debba sempre contenere la trasformazione identica e tanto meno che insieme ad ogni trasformazione nel gruppo debba comparirvi la sua inversa.

Più avanti dimostreremo soltanto che se il gruppo contiene la trasformazione identica, corrispondente ai valori

$$a_1^{(0)}\ a_2^{(0)} \ldots\ldots a_r^{(0)}$$

dei parametri, e se questi valori appartengono all'interno del campo ove le f_i sono definite, allora restando le $\underline{a}$ in un intorno sufficientemente ristretto di $(a_i^{(0)})$, insieme ad ogni trasformazione S_a nel gruppo, esisterà effettivamente la sua inversa S_a^{-1}.

§ 5

Esempi di gruppi continui finiti

Per illustrare i concetti generali posti nel § precedente adduciamo alcuni semplici esempi di gruppi continui tolti dalla geometria ove si presentano nel modo più intuitivo.

1° Se una figura si muove nello spazio senza cangiare di forma, le coordinate $x' y' z'$ di ogni punto della figura nella nuova posizione si esprimono per funzioni lineari intere delle coordinate primitive x, y, z. Supposti assi ortogonali, le formole si scrivono:

$$\alpha) \begin{cases} x' = a_1 x + a_2 y + a_3 z + a \\ y' = b_1 x + b_2 y + b_3 z + b \\ z' = c_1 x + c_2 y + c_3 z + c \end{cases}$$

dove le nove costanti

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale <u>destrorsa</u> e si esprimono quindi per tre sole indipendenti, per es. gli angoli θ, φ, ψ Euleriani. La totalità dei movimenti rigidi dello spazio, rappresentata dalle formole (α) dove

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

percorre tutte le sostituzioni ortogonali destrorse ed a, b, c

assumono tutti i valori possibili, costituisce quindi un gruppo continuo finito con 6 parametri essenziali. È chiaro che in questo gruppo esiste la trasformazione identica ed insieme ad ogni trasformazione la sua inversa.

2° Se a tutti i movimenti α) associamo la simmetria rispetto per es. al piano xy data dalle formole

$$x'=x\ ,\ y'=y\ ,\ z'=-z$$

otteniamo una seconda serie di trasformazioni che differisce dalla α) solo in questo che le corrispondenti sostituzioni ortogonali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

sono sinistrorse. Le due serie insieme ci forniscono un semplice esempio di gruppo misto.

3° I movimenti delle figure piane sul proprio piano formano un gruppo continuo a tre parametri; insieme ai ribaltamenti ci danno un gruppo misto.

Il primo è rappresentato analiticamente dalle formole

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\,\mathrm{sen}\,\alpha+a \\ y'=x\,\mathrm{sen}\,\alpha+y\cos\alpha+b\ , \end{cases}$$

il secondo associando a queste le altre

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha+a \\ y'=x\,\mathrm{sen}\,\alpha-y\cos\alpha+b \end{cases}$$

4° Se al gruppo totale dei movimenti dello spazio associamo una similitudine

$$x'=kx\ ,\ y'=ky\ ,\ z'=kz$$

a parametro k variabile, otteniamo un gruppo continuo a 7 parametri, il gruppo delle similitudini.

5° Combinando i movimenti dello spazio con tutte le inversioni per raggi vettori reciproci rispetto alle sfere dello spazio si ottiene un gruppo continuo con 10 parametri che è il gruppo delle trasformazioni conformi. Secondo un teorema di Liouville, esso contiene tutte e sole le trasformazioni dello spazio che conservano gli angoli.

6° La totalità delle collineazioni dello spazio forma un gruppo continuo con 15 parametri, il così detto gruppo projettivo dell' S_3. In esso formano un sottogruppo a 7 parametri quelle collineazioni che lasciano fissa una conica non degenere, un sottogruppo a 6 parametri quelle che lasciano fissa una quadrica non degenere, in fine un sottogruppo a 3 parametri quelle che riportano in sè una cubica gobba.

Così ancora quelle collineazioni dello spazio che lasciano fisso un complesso lineare non speciale formano un gruppo a 10 parametri.

In tutti gli esempi sopra addotti, le formole di trasformazione sono date da sostituzioni lineari salvo che nell'esempio 5° ove abbiamo sostituzioni quadratiche (*).

(*) È questo un particolare esempio dei gruppi Cremoniani, ove le formole di trasformazione danno le nuove variabili espresse razionalmente per le antiche ed inversamente.

La generalizzazione allo spazio a n dimensioni è immediata — Così le sostituzioni lineari omogenee sopra n variabili

$$(\beta) \qquad x'_i = \sum_k^{1\ldots n} a_{ik} x_k ,$$

cogli n^2 parametri a_{ik}, ci danno evidentemente un gruppo di Lie — Componendo la precedente colla

$$x''_l = \sum_i^{1\ldots n} b_{li} x'_i$$

si ha la sostituzione composta

$$x''_l = \sum_k c_{lk} x_k ,$$

dove le c si esprimono per le a, b colle formole

$$c_{lk} = \sum_i a_{ik} b_{li}$$

Se nella (β) poniamo fra i parametri a la relazion espressa da

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 1$$

avremo evidentemente un sottogruppo con n^2-1 parametri. Se invece facciamo percorrere al modulo a della sostituzione (β) solo le r radici r^{me} dell'unità, r essendo un intero fisso, avremo evidentemente un gruppo misto con r serie di trasformazioni a n^2-1 parametri — Così pure formano un gruppo a $\frac{n(n-1)}{2}$ parametri le sostituzioni $\beta)$ ortogonali destrorse —

§ 6

Risolubilità delle equazioni $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$ rispetto alle $\underline{a}$ o alle $\underline{b}$

Supponiamo di avere una serie ∞^r di trasformazioni

$$(6)\qquad x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots\ldots a_r) \qquad i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

che formano un gruppo – Dalle equazioni funzionali

$$(7)\qquad f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

le quali risultano identicamente soddisfatte quando per le x' vi si pongano i loro valori in funzione delle x, a

$$(7^*)\qquad x'_i = f_i(x, a)$$

e per le $\underline{c}$ i loro valori in funzione delle a, b

$$(8)\qquad c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b),$$

si possono trarre alcune conseguenze preliminari importanti – Dimostriamo in primo luogo che le (8) sono risolubili rispetto alle b, cioè il determinante funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \ldots\ldots b_r)}$$

non può esser nullo – In caso contrario infatti, si potrebbero determinare tali funzioni $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_r$ delle a, b da soddisfare il sistema delle $\underline{r}$ equazioni lineari omogenee

$$(9)\qquad \sum_k^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_k} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots\ldots r)$$

Ora derivando l'identità (7) (ove si immaginano eseguite le sostituzioni (7*), (8)) rispetto alla b_k, otteniamo:

$$\frac{\partial f_i(x';b)}{\partial b_k} = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i(x,\varphi)}{\partial \varphi_\lambda} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_k} \quad ,$$

onde moltiplicando per α_k e sommando da $k=1$ a $k=r$, ne dedurremo per le (9)

$$\sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_k \frac{\partial f_i(x';b)}{\partial b_k} = 0$$

Se in queste identità si pongono per le $\underline{a}$ i valori di un sistema particolare qualunque che non annullino tutte le α, queste risulterebbero delle funzioni B_k delle sole b. Le funzioni

$$f_i(x';b)$$

sarebbero quindi soluzioni di un'equazione del tipo

$$B_1 \frac{\partial f}{\partial b_1} + B_2 \frac{\partial f}{\partial b_2} + \ldots\ldots + B_r \frac{\partial f}{\partial b_r} = 0 \, ,$$

onde si concluderebbe (§ 4) che nelle funzioni $f_i(x';b)$ gli $\underline{r}$ parametri b non sarebbero tutti essenziali, contro il supposto -

Per dimostrare che le relazioni (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$, basta osservare che sussiste il teorema seguente:

Se le ∞^r trasformazioni (6) costituiscono un gruppo, anche le loro trasformazioni inverse

$$x'_i = F_i(x_1 \ldots\ldots x_n ; a_1 \ldots a_r)$$

costituiscono un gruppo a $\underline{r}$ parametri -

Se indichiamo infatti simbolicamente con S_a la trasformazione (6) corrispondente ai valori $\underline{a}$ dei parametri si ha, poichè le (6) formano un gruppo:

$$S_a S_b = S_c \quad ,$$

e quindi

$$S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1},$$

ciò che dimostra che le trasformazioni inverse formano pure un gruppo. — Il numero dei parametri nel gruppo inverso è poi ancora $= r$, poiché nel passaggio da un gruppo al suo inverso il numero dei parametri non può evidentemente aumentare e quindi nemmeno diminuire.(*)

Dopo ciò, siccome le relazioni (8) sono le stesse che pel gruppo primitivo, corrispondono alla eguaglianza $S_a S_b = S_c$ e per l'inverso alla $S_b^{-1} S_a^{-1} = S_c^{-1}$, è chiaro che le (8) sono altresì risolubili rispetto alle $\underline{a}$ c. d. d.

Abbiamo dunque stabilito il risultato:

(*) Analiticamente si può stabilire questo risultato servendosi delle identità

$$f_i\left(F_1(x,a) \ldots\ldots F_n(x,a);\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r\right) = x_i$$

che derivate rapporto ad a_k danno

$$(a) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\partial f_i}{\partial F_\lambda}\frac{\partial F_\lambda}{\partial a_k} = 0$$

Se $a_1\, a_2 \ldots\ldots a_r$ non fossero tutti essenziali nelle F_i queste soddisferebbero tutte ad un'equazione della forma

$$A_1 \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots\ldots + A_r \frac{\partial F}{\partial a_r} = 0$$

colle A funzioni delle $\underline{a}$. Le identità (a) ci dimostrano che vi soddisferebbero anche le f, nelle quali i parametri a_k non sarebbero dunque tutti essenziali.

Le equazioni (8) $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$, che per una serie ∞^r di trasformazioni costituenti gruppo legano i parametri $\underline{a}$, $\underline{b}$ delle trasformazioni componenti S_a, S_b a quelli $\underline{c}$ della composta $S_c = S_a S_b$, sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$, cioè i determinanti funzionali

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(a_1, a_2 \cdots a_r)}, \quad \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2 \cdots \varphi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots b_r)}$$

sono ciascuno diverso dal zero -

§ 7

Equazioni differenziali fondamentali

Procediamo ora ad una ricerca fondamentale per la teoria dei gruppi continui finiti, a dimostrare cioè come le equazioni funzionali (7) si traducano, per le funzioni f_i di trasformazione che figurano in una serie ∞^r (6) costituente un gruppo, in un sistema di equazioni ai differenziali totali, illimitatamente integrabile, cui debbono soddisfare le f_i stesse, considerate come funzioni dei parametri $\underline{a}$ -

Le equazioni funzionali

$$(7) \quad f_i(x', b) = f_i(x, c)$$

debbono tradursi, come sappiamo, in identità, rispetto alle x, a, b riguardate come indipendenti, quando vi si pongano per le x', c i valori

$$(6) \qquad x'_i = f_i(x, a)$$

$$(8)\qquad c_2 = \varphi_2(a, b)$$

Siccome le (8) sono risolubili rispetto alle $\underline{b}$ (§ 6) possiamo invece riguardare le (7) come identità nelle x, a, c, ove per le x' si pongano i valori (6) e per le b i valori in funzione delle a, c tratti dalle (8) - Derivando la (7) rispetto ad una qualunque delle $\underline{a}$ in questo concetto, ne deduciamo

$$(10)\qquad \sum_{l}^{1\ldots n} \frac{\partial f_i}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial a_k} + \sum_{s}^{1\ldots r} \frac{\partial f_i}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial a_k} = 0$$

$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

Poiché il determinante funzionale

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial(x'_1, x'_2 \ldots x'_n)}$$

non è zero, possiamo risolvere le $\underline{n}$ equazioni (10) lineari in

$$\frac{\partial x'_1}{\partial a_k}, \frac{\partial x'_2}{\partial a_k}, \ldots \frac{\partial x'_n}{\partial a_k}$$

rispetto a queste derivate - Se indichiamo con θ_{il} il quoziente del complemento algebrico di $\frac{\partial f_i}{\partial x'_l}$ nel determinante J per il determinante stesso, la risoluzione delle (10) ci dà

$$\frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = -\sum_{s}^{1\ldots r}\sum_{i}^{1\ldots n} \theta_{ij}\frac{\partial f_i}{\partial b_s}\frac{\partial b_s}{\partial a_k} -$$

Ora la somma

$$-\sum_{i}^{1\ldots n} \theta_{ij}\frac{\partial f_i(x' b)}{\partial b_s}$$

è una certa funzione delle $x' b$ che indichiamo con $\Phi_{sj}(x' b)$, mentre la derivata $\frac{\partial b_s}{\partial a_k}$ è una funzione delle a, b, che si può calcolare dalle (8), e che indichiamo con

$$\frac{\partial b_s}{\partial a_k} = \Psi_{sk}(a, b)$$

Con queste notazioni le formole superiori diventano

$$(11) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \Psi_{sk}(a, b)\, \Phi_{sj}(x', b)$$

Queste, come le (7) da cui sono tratte per derivazione, sono identicamente soddisfatte quando vi si ponga

$$x'_j = f_j(x, a),$$

poiché le x, a, b sono affatto indipendenti.

Nei primi membri delle (11)

$$\frac{\partial f_j(x, a)}{\partial a_k}$$

non compariscono le b, onde si vede che anche nei secondi possono essere solo apparenti. E se diamo quindi alle b un sistema fisso di valori, del resto arbitrarii

$$b_i = b_i^{(0)},$$

e poniamo

$$\Phi_{sj}(x', b^{(0)}) = \xi_{sj}(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$$

$$\Psi_{sk}(a, b^{(0)}) = \psi_{sk}(a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

le (11) ci danno il cercato sistema di equazioni fondamentali

$$(A) \qquad \frac{\partial x'_j}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{sj}(x')\, \psi_{sk}(a)$$

$$\begin{cases} j = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots r \end{cases},$$

cui soddisfano le funzioni

$$x_j' = f_j(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

che definiscono il nostro gruppo.

Le nostre equazioni (A) possono anche scriversi sotto la forma equivalente

$$(A^*) \quad dx_j' = \sum_k^{1\dots r}\left(\sum_s^{1\dots r} \xi_{sj}(x')\psi_{sk}(a)\right) da_k \qquad (j = 1, 2, \dots n)$$

e costituiscono un sistema di equazioni di differenziali totali - Negli integrali

$$(\gamma) \qquad x_j' = f_j(x, a)$$

le n x figurano come costanti arbitrarie, e poichè le (γ) sono risolubili rispetto alle x ne segue che il nostro sistema di equazioni di differenziali totali (A) o (A^*) è illimitatamente integrabile

Ricapitoliamo i risultati ottenuti fin qui nel teorema:

Se le equazioni

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2, \dots n$$

rappresentano un gruppo con r parametri a essenziali, le funzioni $f(x, a)$, considerate come dipendenti dalle a, soddisfano ad un sistema di equazioni di differenziali totali della forma

$$(A) \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\psi_{sk}(a) = \xi_{1i}(x')\psi_{1k}(a) + \xi_{2i}(x')\psi_{2k}(a) + \dots \dots + \xi_{ri}(x')\psi_{rk}(a)^{(*)};$$

(*) Si osservi la forma particolare dei secondi membri di queste equazioni come somme di (r) prodotti di funzioni questo sistema è illimitatamente integrabile e le $f_i(x,a)$ ne danno gli integrali generali

Come esempio si prenda il gruppo dei movimenti nel piano (§ 5) rappresentato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos a_3 - x_2 \operatorname{sen} a_3 + a_1 \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} a_3 + x_2 \cos a_3 + a_2 \end{cases}$$

dove x_1, x_2 rappresentano coordinate cartesiane ortogonali e $a_1\ a_2\ a_3$ i parametri – Le equazioni differenziali sono qui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_1} = 1 \qquad \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_2} = 0 \qquad \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_3} = a_2 - x_2' \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1 \qquad \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_3} = x_1' - a_1 \end{cases}$$

e rientrano nella forma generale (A) ponendo

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2' & -x_1' \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

§ 8

Alcune proprietà delle funzioni $\psi_{sk}(a)$, $\xi_{si}(x')$

Abbiamo stabilito il risultato di fondamentale importanza che le funzioni $f_i(x,a)$ che danno una serie ∞^r di trasformazioni

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x,a)$$

---

delle sole $\underline{a}$ per funzioni delle sole x' –

questo sistema è illimitatamente integrabile e le $f_i(x,a)$ ne danno gli integrali generali

Come esempio si prenda il gruppo dei movimenti nel piano (§ 5) rappresentato dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos a_3 - x_2 \operatorname{sen} a_3 + a_1 \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} a_3 + x_2 \cos a_3 + a_2 \end{cases}$$

dove x_1, x_2 rappresentano coordinate cartesiane ortogonali e $a_1\ a_2\ a_3$ i parametri – Le equazioni differenziali sono qui

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_1} = 1 & \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_2} = 0 & \dfrac{\partial x_1'}{\partial a_3} = a_2 - x_2' \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0 & \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1 & \dfrac{\partial x_2'}{\partial a_3} = x_1' - a_1 \end{cases}$$

e rientrano nella forma generale (A) ponendo

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_2' & -x_1' \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

§ 8

Alcune proprietà delle funzioni $\psi_{sk}(a)$, $\xi_{si}(x')$

Abbiamo stabilito il risultato di fondamentale importanza che le funzioni $f_i(x,a)$ che danno una serie ∞^r di trasformazioni

$$(6) \qquad x_i' = f_i(x,a)$$

---

delle sole $\underline{a}$ per funzioni delle sole x' –

costituenti un gruppo, soddisfano necessariamente ad un sistema di equazioni differenziali della forma (A). Diciamo però subito che le condizioni espresse dalle (A) necessarie perchè le (6) costituiscano un gruppo non sono a ciò del tutto sufficienti (*) ma si richieggono ancora alcune condizioni complementari che vedremo esaminate nel prossimo capitolo. Intanto osserviamo alcune proprietà semplici ma importanti, che si verificano per ogni serie ∞^r di trasformazioni (6), quando siano soddisfatte le equazioni differenziali di un sistema (A), anche se quella serie non costituisce un gruppo.

In primo luogo diciamo che il determinante delle funzioni $\psi_{ik}(a)$

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1r} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \cdots & \psi_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{r1} & \psi_{r2} & \cdots & \psi_{rr} \end{vmatrix}$$

è necessariamente diverso da zero. In caso contrario infatti

(*) Un esempio dimostra subito la cosa. Il sistema semplice

$$\frac{dx_1'}{da} = \frac{x_1'}{x_2'} \quad , \quad \frac{dx_2'}{da} = 1 \; ,$$

con un solo parametro $\underline{a}$, ha la forma tipica (A) (ove si faccia $\xi_{11} = \frac{x_1'}{x_2'}$, $\xi_{12} = 1$, $\psi_{11}(a) = 1$); ma gli integrali generali

$$x_1' = x_1 (x_2 + a) \qquad x_2' = x_2 + a$$

<u>non</u> danno le trasformazioni di un gruppo.

potremmo determinare r funzioni

$$A_1\,,\ A_2 \dots A_r$$

delle $\underline{a}$, non tutte nulle, tali da soddisfare il sistema delle $\underline{r}$ equazioni lineari omogenee

$$\sum_k^{1\dots r} A_k\, \psi_{sk}(a) = 0 \qquad (s = 1, 2 \dots r)$$

Dalle equazioni differenziali (A) risulterebbero allora le seguenti

$$\sum_k^{1\dots r} A_k \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)\ ;$$

dunque (§ 2) gli $\underline{r}$ parametri $\underline{a}$ non sarebbero essenziali, contro l'ipotesi -

Dopo ciò, se consideriamo le $\underline{r}$ equazioni (A) che si ottengono tenendo fisso $\underline{i}$ e ponendo $k = 1, 2, \dots r$, è chiaro che potremo risolverle appunto a

$$\xi_{1i} \quad \xi_{2i} \dots\dots \xi_{ri}$$

e le formole risolute prenderanno l'aspetto seguente:

$$(B) \qquad \xi_{ji}(x') = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}\,,$$

dove con α_{jk} è indicato il complemento algebrico di ψ_{jk} in ψ, diviso per ψ stesso -

Segue di qui un risultato importante per il seguito e cioè che è impossibile determinare $\underline{r}$ costanti non tutte nulle

$$e_1 \quad e_2 \dots\dots e_r$$

che soddisfino le $\underline{n}$ equazioni

$$(12) \qquad \sum^{1\dots r} e_j\, \xi_{ji}(x') = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Le (12) ci darebbero infatti per le (B) le equazioni -

$$\sum_k^{1\ldots r}\Big(\sum_j^{1\ldots r} e_j\,\alpha_{jk}(a)\Big)\frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_k}=0$$

e i parametri $a_1\ a_2 \ldots a_r$ non sarebbero tutti essenziali —

Formuliamo i risultati ottenuti nel teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x,a)$$

soddisfa ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A), 1°: il determinante delle ψ è necessariamente diverso da zero, e le (A), risolute rapporto alle ξ possono porsi sotto la forma equivalente (B), 2°: è impossibile determinare r costanti $e_1, e_2 \ldots e_r$ (non nulle) che soddisfano alle n equazioni lineari

$$\sum_j^{1\ldots r} e_j\,\xi_{ji}(x')=0 \qquad (i=1,2\ldots n)$$

§ 9

Gruppi ad un parametro

Cominciamo dall'applicare questi primi principii della teoria al caso dei gruppi ad un parametro, questi formano in certa guisa gli elementi con cui si compongono i gruppi continui finiti (ed anche infiniti) e si può dire che compiono nella teoria generale dei gruppi continui un ufficio analogo a quello dei gruppi di potenze nella teoria dei gruppi discontinui —

Se la serie ∞^1 di trasformazioni

(13) $$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n ; a) \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

con un parametro $\underline{a}$ costituisce un gruppo, pel teorema fondamentale del § 7 le x'_i, considerate come funzioni di $\underline{a}$ soddisferanno ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie della forma

(14) $$\frac{dx'_i}{da} = \psi(a) \cdot \xi_i(x'_1 x'_2 \ldots x'_n)$$
$$i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

e ne costituiranno l'integrale generale —

Per determinare completamente le $f_i(x, a)$ basterà quindi conoscere la forma che queste f_i, ossia le x'_i, assumono per un particolare valore di $\underline{a}$, diciamo per $a = a_0$

È chiaro che il sistema integrale delle (14), cioè delle equazioni

$$\frac{dx'_1}{\xi_1} = \frac{dx'_2}{\xi_2} = \ldots\ldots = \frac{dx'_n}{\xi_n} = \psi(a)\, da$$

può porsi sotto la forma risoluta rispetto alle costanti arbitrarie

(15) $$\begin{cases} \Omega_1(x'_1, x'_2 \ldots\ldots x'_n) = C_1 \\ \Omega_2(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_{n-1}(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n) = C_{n-1} \\ \Omega_n(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n) = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da + C_n \end{cases}$$

dove le $\Omega_i(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$ sono certe $\underline{n}$ funzioni indipendenti delle $x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n$ e le $C_1, C_2 \ldots C_n$ sono costanti arbitrarie —

Supponiamo ora che nella serie (13) sia contenuta la sostituzione identica e corrisponda al valore a_0 di a, talchè si abbia

$$x_i' = x_i \quad \text{per } a = a_0$$

Facendo $a = a_0$ nelle (15) ne viene

$$C_i = \Omega_i(x_1, x_2 \dots x_n)$$

ed il sistema integrale (15), cangiato per semplicità il parametro ~~a~~ in

$$t = \int_{a_0}^{a} \psi(a)\, da,$$

prende la forma

$$(16) \begin{cases} \Omega_i(x_1' x_2' \dots x_n') = \Omega_i(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \qquad i = 1, 2 \dots\dots n-1 \\ \Omega_n(x_1' x_2' \dots x_n') = \Omega_n(x_1 x_2 \dots x_n) + t, \end{cases}$$

che è perfettamente equivalente alle (13) sotto l'ipotesi

$$x_i' = x_i \quad \text{per } t = 0 \quad (a = a_0)$$

Le equazioni (16) manifestano nel modo più semplice la proprietà di gruppo, poichè se cangiamo le variabili x_i nelle

$$y_i = \Omega_i(x_1, x_2 \dots x_n)$$
$$i = 1, 2, \dots n,$$

essi prendono la forma semplicissima

$$y_1' = y_1, \; y_2' = y_2, \dots\dots y_{n-1}' = y_{n-1}$$
$$y_n' = y_n + t$$

Questa trasformazione si dirà una traslazione dello spazio a $\underline{n}$ dimensioni $(y_1, y_2 \dots y_n)$ –

In generale se in un gruppo qualunque G si fa contemporaneamente sulle variabili primitive e sulle trasformate una medesima sostituzione T, ed anche, se si vuole, si cangiano i parametri in modo arbitrario, le considerazioni alla fine del § 1 provano che le nuove trasformazioni percorrono nuovamente un gruppo, il gruppo $T^{-1}GT$ - Due tali gruppi, ottenuti l'uno dall'altro con un cangiamento di variabili e di parametri diconsi simili -

Possiamo dunque enunciare questo primo risultato:
Se un gruppo continuo ad un parametro contiene l'identità, esso è simile ad un gruppo di traslazioni e le sue trasformazioni sono permutabili fra loro e a due a due inverse l'una dell'altra -

Supponiamo ora, più in generale, di avere soltanto una serie ∞^1 di trasformazioni (13), che soddisfi ad un sistema di equazioni differenziali della forma (14 e indichiamo con

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x) \ldots\ldots \varphi_n(x)$$

le funzioni delle x in cui si riducono le $f_i(x,a)$ per $a=a_0$; il sistema (15) equivalente alle (13) si scriverà:

$$\Omega_i(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = \Omega_i(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n) \quad (i=1,2,\ldots n-1)$$

$$\Omega_n(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = \Omega_n(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n) + t$$

Questa trasformazione si ottiene eseguendo prima la trasformazione

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n), \ldots\ldots\ldots y_n = \varphi_n(x_1 x_2 \ldots x_n)$$

[e] di l'altra

$$\begin{cases} \Omega_i(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = \Omega_i(y_1, y_2 \ldots y_n) & (i=1,2 \ldots n-1) \\ \Omega_n(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = \Omega_n(y_1, y_2 \ldots y_n) + t \end{cases}$$

La prima è una trasformazione fissa della serie (13) [c]orrispondente ad $a = a_0$) e la seconda, variando t, genera [u]n gruppo della specie sopra considerata. Abbiamo dun[q]ue il teorema:

Se una serie ∞^1 di trasformazioni (13) soddisfa ad equazio[n]i differenziali del tipo (14), le sue trasformazioni si ottengono com[pon]iendo una trasformazione fissa della serie stessa con tutte le [tr]asformazioni del gruppo ad un parametro (colla sostituzione [id]entica) definito dalle equazioni differenziali (14) stesse

§ . 10

Trasformazione infinitesima di un G_1

Ritorniamo alla considerazione dei gruppi ad un [p]arametro contenenti l'identità e quindi contenenti insieme [a]d ogni trasformazione la sua inversa (§ 9); tali gruppi l'indicheremo d'ora innanzi col simbolo G_1, l'indice ri[f]erendosi al numero dei parametri. Le formole relative [a]d un tal gruppo G_1 si ottengono, come si è visto, inte[g]rando un sistema di equazioni differenziali

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$$

colle condizioni iniziali

$$x'_i = x_i \qquad \text{per } t=0.$$

Se funzioni $\xi_i(x')$ sono supposte analitiche, e se si ammette di più che il punto $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sia un punto regolare per queste funzioni, sappiamo che gli integrali x'_i saranno sviluppabili in serie di potenze di t secondo la formola

$$x'_i = x_i + \xi_i(x).t + \frac{t^2}{2}\sum_k^{1\ldots n} \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \ldots\ldots\ldots$$

Possiamo scrivere questa in modo più espressivo introducendo, per una funzione qualunque $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ delle variabili x, il simbolo d'operazione

$$Xf = \sum_k^{1\ldots n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

e indicando con

$$X^2 f,\ X^3 f, \ldots\ldots\ldots$$

il risultato dell'operazione stessa ripetuta due, tre ...... volte; lo sviluppo precedente prende allora la forma:

(17) $$x'_i = x_i + tXx_i + \frac{t^2}{1.2}X^2x_i + \frac{t^3}{1.2.3}X^3x_i + \ldots\ldots\ldots$$

Più in generale, se vogliamo sviluppare secondo potenze di t una funzione qualunque $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, regolare nel punto $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, avremo

(18) $$f(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = f(x_1\, x_2 \ldots x_n) + tXf + \frac{t^2}{1.2}X^2f + \ldots\ldots + \frac{t^3}{\underline{|3}}X^3f + \ldots\ldots$$

Qualche volta indicheremo questo sviluppo per brevità col simbolo

$$f(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = e^{tX}.f$$

dove si svilupperà formalmente e^{tX} colla serie esponenziale e le potenze di X si considereranno poi come operanti sulla f.

Consideriamo ora quella trasformazione del gruppo G_1 che corrisponde ad un valore infinitamente piccolo δt del parametro t. Questa trasformazione infinitesima del gruppo, quando si trascurino gli infinitesimi d'ordine superiore a δt, dà alle x gli incrementi infinitesimi

$$\delta x_i = \xi_i . \delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

e quindi ad una funzione qualunque f l'incremento

$$\delta f = Xf . \delta t$$

È chiaro che l'espressione effettiva del simbolo Xf determina di per sè completamente la trasformazione infinitesima, poichè fornisce i valori delle ξ. Perciò il simbolo stesso Xf è riguardato da Lie come simbolo della trasformazione stessa, che si dice quindi la trasformazione infinitesima Xf. Naturalmente se si cangia il parametro t in un nuovo τ ponendo

$$t = \varphi(\tau)$$

i valori delle ξ vengono moltiplicati contemporaneamente per un fattore costante, cioè pel valore di $\frac{dt}{d\tau}$ per $t=0$.

Non si altera dunque una trasformazione infinitesima moltiplicandola per una costante c qualunque.

Si osservi ora che le equazioni differenziali

$$\frac{dx'_i}{dt} = \xi_i (x'_1, x'_2 \ldots x'_n),$$

interpretate geometricamente nello spazio a n dimensioni $(x'_1\, x'_2 \ldots x'_n)$, determinano un sistema ∞^{n-1} di curve integrali; queste diconsi le traiettorie del gruppo, ovvero anche, secondo Monge, le caratteristiche dell'equazione a derivate parziali

$$Xf = 0$$

Possiamo quindi dire: Il simbolo Xf della trasformazione infinitesima non è altro che la derivata della funzione f calcolata nella direzione della traiettoria del gruppo.

Introdotto così il concetto di trasformazione infinitesima, vediamo che ogni gruppo G_1 contiene una trasformazione infinitesima Xf, determinata a meno di un fattore costante; questa alla sua volta individua perfettamente il gruppo, che viene generato dalla Xf secondo le formule (17) o (18). Il gruppo stesso si indica per ciò semplicemente come gruppo Xf.

Formuliamo ancora il teorema alla fine del § 9 sotto la nuova forma:

Ogni gruppo ad un parametro

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a)$$

individua una trasformazione infinitesima Xf, e le sue trasformazioni si ottengono tutte combinando una sua trasformazione fissa colle trasformazioni del gruppo G_1, contenente l'identità, generato da Xf.

§ 11
Cangiamento di variabili nelle trasformazioni infinitesime

Si è visto come un gruppo G_1^r, contenente l'identità, risulta perfettamente determinato dalla sua trasformazione infinitesima Xf - Ora se, mediante un cangiamento di variabili indipendenti espresso dalla formole

$$(19) \qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2 \cdots x_n)$$

che fanno passare dalle antiche variabili x alle nuove y, si trasforma il gruppo G_1^r in un gruppo simile (§ 9) Γ_1, si può domandare come si calcolerà la trasformazione infinitesima Yf del gruppo Γ_1 - È facile vedere che il nuovo simbolo Yf si otterrà semplicemente esprimendo nell'antico Xf le x per le y - Se supponiamo infatti

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = F(y_1, y_2 \cdots y_n),$$

avremo

$$Xf = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \frac{\partial F}{\partial y_\nu} \cdot X y_\nu$$

Espresse le Xy_ν per le y, si ponga

$$X y_\nu = \eta_\nu (y_1, y_2 \cdots y_n)$$

e

$$YF = \sum_{\nu}^{1\ldots n} \eta_\nu \frac{\partial F}{\partial y_\nu};$$

qualunque sia f, si avrà identicamente

$$Xf = YF,$$

purchè le x, y siano legate dalle formole di trasformazione (19) - Sarà quindi anche

$$X^2 f = Y^2 F\,,\quad X^3 f = Y^3 F \;\ldots\ldots$$

in generale

$$X^s f = Y^s F\,.$$

In conseguenza la (18) si muta in

$$F(y_1', y_2' \ldots y_n') = F(y_1, y_2 \ldots y_n) + t\,YF + \frac{t^2}{1.2} Y^2 F + \ldots =$$
$$= e^{tY}.F\,,$$

formola che vale per qualunque F e dimostra la proprietà enunciata.

Così ogni trasformazione finita

$$x_i' = x_i + t\,X x_i + \frac{t^2}{1.2} X^2 x_i + \ldots\ldots$$

di G_1 si muta pel gruppo trasformato nell'altra

$$y_i' = y_i + t\,\eta_i + \frac{t^2}{1.2} Y \eta_i + \ldots\ldots,$$

il valore di t essendo lo stesso nelle due formole

§. 12

Le serie ∞^r di trasformazioni e le relative trasformazioni infinitesime

---

Scopo delle ricerche che andiamo ora a fare è quello di estendere ai gruppi continui finiti a più parametri i risultati sopra conseguiti pei gruppi ad un parametro. In particolare dimostreremo che un gruppo ad r parametri, che contenga l'identità e insieme ad ogni trasformazione la sua inversa, si genera mediante r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f\,,\ X_2 f, \dots \dots X_r f$$

fra di loro linearmente indipendenti, nel senso che non abbia luogo alcuna identità della forma

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots \dots + e_r X_r f = 0\,,$$

dove le e siano costanti numeriche.

Per stabilire questi risultati fondamentali è utile premettere alcune considerazioni generali sulle serie ∞^r di trasformazioni in generale:

$$(20) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n\,;\ a_1, a_2 \dots a_r)$$

e le trasformazioni infinitesime che esse determinano.

Così stabiliremo, fra altro, nuovamente le equazioni differenziali (A) del §7, riconoscendone il significato intrinseco.

Prendiamo una trasformazione qualunque S_a (*) della serie (20), ed una trasformazione <u>infinitamente vicina</u> $S_{a+\delta a}$ della medesima serie, ove i parametri a hanno ricevuto incrementi infinitesimi δa. Se osserviamo che si ha

$$S_{a+\delta a} = S_a \cdot (S_a^{-1}\, S_{a+\delta a})$$

$$S_{a+\delta a} = (S_{a+\delta a}\, S_a^{-1}) \cdot S_a\,,$$

vediamo che dalla S_a si può passare alla infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$ o eseguendo prima la S_a, indi la tra=

(*) Indichiamo al solito simbolicamente con S_a quella trasformazione che corrisponde ai valori $a_1, a_2 \dots a_r$ dei parametri in (20).

sformazione infinitesima

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a},$$

od anche eseguendo per prima la trasformazione infinitesima $S_{a+\delta a} S_a^{-1}$ e poi la S_a - Rispetto a queste due trasformazioni infinitesime si osservi che esse non appartengono in generale alla serie (20) e che l'una è la trasformazione dell'altra per mezzo della S_a, come si vede dalla formola

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a} = S_a^{-1} (S_{a+\delta a} S_a^{-1}) S_a$$

Si possono scrivere facilmente le espressioni analitiche effettive di queste due trasformazioni infinitesime - Se si suppone infatti che le (20), risolute rispetto alle x, danno

$$(20^*) \qquad x_i = F_i(x_1', x_2' \dots x_n'; a_1, a_2 \dots a_r),$$

la prima trasformazione $S_a^{-1} S_{a+\delta a}$ sarà data da

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a}) \quad x_i' = f_i \Big(F_1(x,a), F_2(x,a) \dots F_n(x,a); a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, \dots a_r + \delta a_r \Big)$$

e la seconda da

$$S_{a+\delta a} S_a^{-1}) \quad x_i' = F_i \Big(f_1(x, a+\delta a), f_2(x, a+\delta a) \dots f_n(x, a+\delta a); a_1, a_2 \dots a_r \Big)$$

Siccome le (20), (20*) sono inverse l'una dell'altra, si può scrivere per questo

$$(21) \quad S_a^{-1} S_{a+\delta a}) \quad x_i' = x_i + \sum_k^{1\dots r} \left[\frac{\partial f_i(\xi, a)}{\partial a_k} \right]_{\xi = F(x,a)} . \delta a_k$$

$$S_{a+\delta a}S_a^{-1}) \qquad x_i' = x + \sum_k^{1\dots r}\delta a_k \sum_\nu^{1\dots n}\frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k}\left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial \xi_\nu}\right]_{\xi=f(x,a)}$$

L'espressione della seconda può semplificarsi osservando che dall'identità

$$F_i\left(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots\dots f_n(x,a)\right) = x_i\ ,$$

derivando rapporto ad a_k deduciamo

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=f(x,a)} + \sum_\nu^{1\dots n}\left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial \xi_\nu}\right]_{\xi=f(x,a)} \cdot \frac{\partial f_\nu(x,a)}{\partial a_k} = 0\ ,$$

onde risulta per la $S_{a+\delta a}S_a^{-1}$

$$(21^*) \qquad S_{a+\delta a}S_a^{-1}) \qquad x_i' = x_i - \sum_k\left[\frac{\partial F_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=f(x,a)} \cdot \delta a_k$$

Se immaginiamo fissate le $\underline{a}$ e variabili ad arbitrio le δa, le (21), (21*) coordinano alla S_a due serie di trasformazioni infinitesime mediante le quali si passa da S_a a qualunque altra trasformazione infinitamente vicina nella serie (20). Ora osserviamo che la (21) si scrive, colla notazione delle trasformazioni infinitesime:

$$Z\Phi = \sum_k^{1\dots r}\delta a_k \sum_i^{1\dots n}\left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

ed è quindi una combinazione lineare delle $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime

$$(22) \qquad Z_k\Phi = \sum_i\left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$$

Queste, per valori qualunque delle $\underline{a}$ sono certo fra loro linearmente indipendenti, altrimenti gli r parametri a non sarebbero tutti essenziali - La stessa cosa vale naturalmente per la serie (21*), la quale non è altro che una trasformata della serie (21) -

Viceversa è chiaro che in una serie qualunque (21) di trasformazioni, se le r trasformazioni infinitesime Z_k date dalla (22) sono indipendenti, gli r parametri a saranno essenziali -

Si osservi infine che la trasformazione infinitesima generica (21)

$$Z\Phi = \sum_k^{1\dots r} \delta a_k Z_k \Phi ,$$

dipendendo dagli $r-1$ rapporti delle δa percorre una serie ∞^{r-1} di trasformazioni infinitesime distinte.

Riepilogando i risultati ottenuti, abbiamo adunque:

Ogni serie (20) ∞^r di trasformazioni coordina ad ogni sua trasformazione S_a due serie (21), (21*) di ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime, mediante le quali si passa, nel modo indicato, dalla S_a a tutte le trasformazioni infinitamente vicine nella serie stessa -

§. 13

Caso particolare di un gruppo

Supponiamo ora che la serie ∞^r data dalle (20) costituisca un gruppo - Allora due trasformazioni qualunque S_a, S_b della serie si compongono in una terza trasformazione S_c della serie stessa:

$$(23)\qquad S_a S_b = S_c ,$$

dove i parametri $\underline{c}$ sono certe funzioni di a, b

$$(24)\qquad c_\lambda = \psi_\lambda(a_1, a_2 \dots a_r ; b_1, b_2 \dots b_r)$$
$$\lambda = 1, 2, \dots r$$

e queste relazioni, come abbiamo dimostrato al § 6, sono risolubili tanto rispetto alle $\underline{a}$ che alle b - Del resto ciò risulta ora subito dall'eguaglianza simbolica (23), osservando che, se teniamo fisse le $\underline{a}$ e facciamo variare arbitrariamente le b, la S_c percorrerà, come la S_b, una serie ∞^r di trasformazioni e perciò le $\underline{r}$ funzioni $\underline{c}$ sono indipendenti rispetto alle b, cioè

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_r)}{\partial(b_1, b_2 \cdots b_r)} \neq 0 ;$$

analogamente dicasi di $\dfrac{\partial(\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_r)}{\partial(a_1, a_2 \cdots a_r)}$ -

Diamo ora tanto alle $\underline{a}$ che alle $\underline{b}$ incrementi arbitrari $\delta a, \delta b$; basterà calcolare i corrispondenti incrementi δc dalle (24) colle formole

$$\delta c_\lambda = \sum_k^{1 \dots r} \left(\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial a_k} \delta a_k + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial b_k} \delta b_k \right)$$

e si avrà

$$S_{a+\delta a}\, S_{b+\delta b} = S_{c+\delta c}$$

Ora prendiamo i $\delta a, \delta b$ così legati fra loro che ne risultino nulli i δc, cioè

$$(25)\qquad \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_k}\delta a_k + \sum_k^{1\ldots r} \frac{\partial \chi_\lambda}{\partial b_k}\delta b_k = 0 \qquad \lambda = 1, 2 \ldots r$$

e allora risulterà

$$S_{a+\delta a}\, S_{b+\delta b} = S_c = S_a S_b\,,$$

ossia

$$S_a^{-1} S_{a+\delta a} \cdot S_{b+\delta b} S_b^{-1} = 1\,,$$

ciò che dimostra che la $S_{b+\delta b} S_b^{-1}$ è la inversa di $S_a^{-1} S_{a+\delta a}$ - Ma evidentemente l'inversa di $S_{b+\delta b} S_b^{-1}$ si ottiene cangiando i segni di tutte le δb, e però come conseguenza delle (25) abbiamo.

$$(26)\qquad S_a^{-1} S_{a+\delta a} = S_{b-\delta b} S_b^{-1}\,.$$

Si osservi ora che nelle (25) possiamo prendere ad arbitrio le δa e trarne le δb o inversamente; ne segue che la trasformazione a sinistra nella (26) può identificarsi con una qualunque della serie (21), e così quella a destra con una qualunque della serie (21*).

In questo caso dunque le due serie di trasformazioni coincidono. Ma di più se teniamo fisse le b e facciamo variare ad arbitrio le a, la (26) dimostra che la prima serie di trasformazioni infinitesime (21), coordinata alla S_a, rimane la stessa al variare di S_a e altrettanto naturalmente accade della seconda serie (21*).

Concludiamo adunque: Ad ogni gruppo di trasformazioni a r parametri è coordinata una serie perfettamente determinata di ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime, per le quali moltiplicando sia a destra che a sinistra la S_a si ottengono tutte le trasformazioni del gruppo infinitamente vicine alla S_a –

§. 14

Nuova deduzione delle equazioni differenziali fondamentali (A) §7

Traduciamo ora in formole l'eguaglianza simbolica (26), sostituendo per le trasformazioni infinitesime dei due membri le loro espressioni effettive date dalle (21), (21*), ed avremo:

$$(27)\qquad \sum_k^{1\ldots r}\left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)}\cdot\delta a_k=\sum_j^{1\ldots r}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial b_j}\right]_{\xi=f(x,b)}\cdot\delta b_j$$

$$i=1,\,2\ldots n,$$

relazioni che sono una conseguenza delle (25) – Ora risolvendo le dette equazioni (25) rapporto alle δb scriviamo

$$(28)\qquad \delta b_j=\sum_k^{1\ldots r}\psi_{jk}(a,b)\,\delta a_k$$

e le ψ_{jk} avranno precisamente il significato loro attribuito al §7 poichè rappresentano le derivate delle $\underline{b}$ rapporto alle $\underline{a}$, quando si tengano fisse le $\underline{c}$ –

Sostituendo i valori (28) nelle (27) e ricordando che le δa sono indipendenti, ne dedurremo

$$(29)\qquad \left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)}=\sum_j^{1\ldots r}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial b_j}\right]_{\xi=f(x,b)}\cdot\psi_{jk}(a,b)$$

Se introduciamo ora la notazione

$$(a)\qquad \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial b_j}\right]_{\xi = f(x,b)} = \Phi_{ji}(x, b),$$

poi nella (29) cangiamo x_i in $x'_i = f_i(x, a)$, otteniamo le equazioni seguenti:

$$(30)\qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_j^{1\dots r} \Phi_{ji}(x', b)\,\psi_{jk}(a, b).$$

Queste sono le equazioni stesse (11) che abbiamo già stabilito al § 7, poiché non solo le $\psi_{jk}(a, b)$ hanno il significato loro attribuito al § 7, ma anche le $\Phi_{ji}(x', b)$ come risulta dalle osservazioni seguenti:— Si ha identicamente

$$(b)\qquad \left[F_i(\xi, b)\right]_{\xi = f(x, b)} = x_i$$

e quindi derivando rapporto a b_j

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial b_j}\right]_{\xi = f(x,b)} = -\sum_\lambda \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x,b)} \cdot \frac{\partial f_\lambda(x, b)}{\partial b_j}$$

onde per la (a)

$$\Phi_{ji}(x, b) = -\sum_\lambda \left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x,b)} \cdot \frac{\partial f_\lambda(x, b)}{\partial b_j}.$$

Basterà dunque dimostrare, per provare l'asserita coincidenza, che si ha

$$\left[\frac{\partial F_i(\xi, b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi = f(x,b)} = \theta_{\lambda i},$$

essendo $\theta_{\lambda i}$ il quoziente del complemento algebrico di $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}$ nel determinante funzionale $J = \frac{\partial(f_1 f_2 \dots f_n)}{\partial(x_1 x_2 \dots x_n)}$

diviso per J stesso – Ma ciò risulta subito dalle (6) derivate rapporto ad una x qualunque, per es. x_l, il che dà:

$$\sum_{\lambda}^{1\ldots n}\left[\frac{\partial F_i(\xi,b)}{\partial \xi_\lambda}\right]_{\xi=f(x,b)}\cdot\frac{\partial f_\lambda(x,b)}{\partial x_l}=\varepsilon_{\lambda l}\quad(*)$$

Ottenute così nuovamente le (30), che coincidono colle (14) §7, basterà dare ancora alle b valori fissi qualunque per dedurne le equazioni differenziali fondamentali (A) §7

$$(A)\qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}=\sum_s^{1\ldots r}\xi_{si}(x')\psi_{sk}(a)\qquad\begin{cases} i=1,2\ldots n\\ k=1,2\ldots r\end{cases}$$

Queste appaiono, colla nuova deduzione, sotto un nuovo aspetto come la traduzione in formole dell'equazione simbolica (26) alla quale equivalgono.

§ 15

Le r trasformazioni infinitesime $X_\lambda f=\sum_i^{1\ldots n}\xi_{\lambda i}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(\lambda=1,2,\ldots r)$

Se supponiamo soltanto che la serie ∞^r di trasformazioni (20) verifichi il sistema di equazioni differenziali (A), la qual cosa avverrà certamente in particolare se la serie costituisce un gruppo, potremo porre

(*) Si ricordi il significato di $\varepsilon_{\lambda l}$:

$$\varepsilon_{\lambda l}=0 \quad\text{per}\quad \lambda\neq l$$
$$\varepsilon_{\lambda l}=1 \quad\text{per}\quad \lambda=l$$

sotto altra forma le r trasformazioni infinitesime del § 12

$$Z_1\Phi \;,\; Z_2\Phi \;\ldots\ldots\; Z_r\Phi$$

mediante le quali si combinano linearmente tutte le trasformazioni infinitesime (21) che fanno passare da una trasformazione S_a alle infinitamente vicine $S_{a+\delta a}$ —

Essendo soddisfatte le (A), gli incrementi δx_i che ricevono le x per una qualunque trasformazione infinitesima (21) sono dati da

$$\delta x_i = \sum_k^{1\ldots r}\left[\frac{\partial f_i(\xi,a)}{\partial a_k}\right]_{\xi=F(x,a)} \cdot \delta a_k =$$

$$= \sum_k^{1\ldots r}\delta a_k \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x)\,\psi_{sk}(a)$$

La più generale trasformazione infinitesima in discorso si scrive dunque:

$$\mathfrak{X}f = \sum_{s,k}^{1\ldots r}\delta a_k\,\psi_{sk}(a)\cdot\sum_i^{1\ldots n}\xi_{si}\frac{\partial f}{\partial x_i}\;,$$

ovvero posto

$$\sum_k^{1\ldots r}\psi_{sk}(a)\delta a_k = \lambda_s$$

$$\mathfrak{X}f = \sum_s^{1\ldots r}\lambda_s\sum_i^{1\ldots n}\xi_{si}\frac{\partial f}{\partial x_i}\;,$$

dove le λ sono costanti arbitrarie. Se poniamo

(31) $\quad X_1 f = \sum_i \xi_{1i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\;,\; X_2 f = \sum_i \xi_{2i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\;,\ldots\ldots X_r f = \sum_i \xi_{ri}\frac{\partial f}{\partial x_i}$

vediamo che la $\mathfrak{X}f$ è una combinazione lineare a coefficienti costanti di queste r trasformazioni infinitesime fondamentali

$$X_1 f \;,\; X_2 f \;,\ldots\ldots\; X_r f$$

Queste sono linearmente indipendenti, come risulta da quanto abbiamo già detto al § 12, ed anche dalle osservazioni alla fine del § 8 dalle quali segue che non sussiste alcuna identità della forma

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \cdots + e_r X_r f = 0$$

colle e costanti –

Dunque: Se una serie ∞^r di trasformazioni soddisfa le equazioni differenziali (A), si passa da una trasformazione qualunque S_a della serie ad una infinitamente vicina $S_{a+\delta a}$ componendo la S_a con una trasformazione infinitesima $\sum_s^{1\dots r} \lambda_s X_s f$, combinazione lineare a coefficienti λ costanti delle r trasformazioni infinitesime fisse, linearmente indipendenti $X_s f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{si} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(s = 1, 2 \dots r)$ –

Se si ricorda (§ 10) che una trasformazione infinitesima genera un gruppo ad un parametro, è ben naturale domandare ora se la proprietà sopra dimostrata per la trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$ vale anche per le trasformazioni *finite* del gruppo G_1 ad un parametro da questa generato, se cioè componendo S_a con una trasformazione finita di G_1 si ottiene ancora una trasformazione della serie primitiva –

La risposta è affermativa come andiamo ora a dimostrare, e da questo risultato si deducono conseguenze di fondamentale importanza per la teoria dei gruppi.

§ 16

Teorema fondamentale per le serie di trasformazioni che soddisfano le (A)

Per dimostrare quanto abbiamo sopra asserito, cominciamo dall'osservare che essendo per valori generici delle a diverso da zero il determinante delle ψ, possiamo, come già abbiamo fatto al § 8, risolvere le (A) rispetto alle ξ e scriverle sotto la forma equivalente

$$(B) \qquad \xi_{ji}(x') = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x'_i}{\partial a_k}$$

La trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$, scritta per disteso, e' data da

$$\delta x_i = \delta t \sum_s^{1\dots r} \lambda_s \xi_{si}(x) \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

e calcolata dalle (A) si scrive

$$\delta x_i = \sum_{s,k}^{1\dots r} \xi_{si}(x) \psi_{sk}(a) \delta a_k ,$$

onde paragonando si ha

$$\sum_s^{1\dots r} \xi_{si} \left(\lambda_s \delta t - \sum_k^r \psi_{sk}(a) \cdot \delta a_k\right) = 0$$
$$(i = 1, 2, \dots n)$$

e però (*)

$$\sum_k \psi_{sk}(a) \delta a_k = \lambda_s \delta t$$

(*) altrimenti le $X_1 f, X_2 f \dots\dots X_r f$ non sarebbero indipendenti -

Risolvendo rapporto alle δa_k, abbiamo le formole

$$(c) \qquad \delta a_k = \delta t \sum_s^{1\ldots r} \alpha_{sk}(a)\, \lambda_s \;;$$

colle quali sono da calcolarsi gli incrementi delle $\underline{a}$ nel passaggio dalla S_a alla $S_{a+\delta a}$ che risulta dalla composizione di S_a colla trasformazione infinitesima $\sum_s \lambda_s X_s f$

Fissiamo per le $\underline{a}$ un sistema di valori particolari

$$a_1^{(0)}, a_2^{(0)} \ldots\ldots a_r^{(0)}$$

tali soltanto che per essi il determinante delle $\psi_{ik}(a^{(0)})$ e quindi quello delle $\alpha_{ik}(a^{(0)})$ non sia nullo - Fissati poi per le λ valori costanti qualunque si determinino le $\underline{a}$ in funzione di t, secondo le ($\underline{c}$), dalle equazioni differenziali:

$$(32) \quad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\ldots r} \lambda_s\, \alpha_{sk}(a)$$

colle condizioni iniziali

$$a_k = a_k^{(0)} \quad \text{per} \quad t = 0$$

La trasformazione S_a corrispondente, al variare di t percorrerà altrettante trasformazioni della serie (20) nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ - È anzi facile vedere che, facendo poi variare le λ, la S_a percorrerà <u>tutte</u> le trasformazioni nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ - È invero per la forma delle (32) è evidente che gli integrali $\underline{a}$ dipenderanno dalle variabili

$$u_1 = \lambda_1 t, \quad u_2 = \lambda_2 t, \ldots\ldots u_r = \lambda_r t \;;$$

e poichè il determinante funzionale delle $\underline{a}$ rapporto alle $\underline{u}$ si riduce per $t=0$ appunto a $|\alpha_{ik}(a^0)| \neq 0$, segue che possiamo inversamente esprimere le $u_1, u_2 \ldots u_r$ per $a_1, a_2 \ldots a_r$, cosicchè prendendo convenientemente le λ e t, i parametri $\underline{a}$ riceveranno valori arbitrarii -

Ora se, come sopra, teniamo fisse le λ e facciamo variare t, la S_a percorrerà una serie ∞^1 di trasformazioni entro la serie completa

$$x'_i = f_i(x, a)$$

tale che le x'_i, considerate come funzioni di t, soddisferanno a causa delle equazioni fondamentali (A) e delle (32) le equazioni differenziali

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x') \sum_k^{1\dots r} \psi_{sk}(a) \sum_j^{1\dots r} \lambda_j \, \alpha_{jk}(a)$$

ossia

$$\frac{dx'_i}{dt} = \sum_j^{1\dots r} \lambda_j \, \xi_{ji}(x')$$

Secondo il risultato ottenuto pei gruppi ad un parametro alla fine del § 9, la trasformazione S_a nasce quindi eseguendo prima la trasformazione fissa $S_{a^{(0)}}$ poi una trasformazione finita del gruppo G_1 contenente l'identità generato dalla trasformazione infinitesima $\sum_j \lambda_j X_j f$, e ciò è appunto quello che volevamo provare.

Possiamo enunciare dunque il teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

soddisfa ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A) ed $S_{a^{(0)}}$ è una sua particolare trasformazione per la quale il determinante delle $\psi_{ik}(a^0)$ non è nullo, ogni trasformazione S_a della serie nell'intorno di $S_{a^{(0)}}$ si ottiene facendo seguire alla $S_{a^{(0)}}$ una trasformazione del gruppo ad un parametro G_1 generato da una trasformazione infinitesima $\sum_j^{1\dots r} \lambda_j X_j f$, combinazione lineare a coefficienti costanti delle r trasformazioni indipendenti:

$$X_j f = \sum_i^{1 \dots n} \xi_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Viceversa, comunque si prendano le λ, la composizione delle $S_{a^{(0)}}$ con una trasformazione finita del gruppo $\sum_j \lambda_j X_j f$ dà luogo ad una trasformazione della serie stessa —

Capitolo II°

I tre teoremi fondamentali della teoria dei gruppi. I gruppi misti —

§. 17
Il primo teorema fondamentale

L'intera teoria dei gruppi continui è stata fondata da Lie sopra tre successivi teoremi, di cui andiamo ora ad occuparci —

Il primo di essi, al quale già altrove abbiamo accennato, dà in certo modo l'inversione del teorema finale al § 7, stabilendo che le equazioni differenziali del tipo (A), insieme ad alcune condizioni secondarie, sono caratteristiche per le serie costituenti un gruppo —

Per le serie ad un parametro abbiamo già stabilito il teorema in discorso ed ora vogliamo estenderlo al caso di una serie ad r parametri

$$(1)\quad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a_1, a_2 \dots a_r),$$

che supponiamo soddisfare ad un sistema di equazioni differenziali del tipo (A)

$$(A)\quad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\,\psi_{sk}(a)$$

$$i = 1, 2, \dots n\ ;\ k = 1, 2 \dots r.$$

Basta per ciò applicare i risultati conseguiti nel § precedente. Cominciamo dal supporre che la serie (1) contenga la trasformazione identica, la quale corrisponda ai valori $a_i = a_i^{(0)}$ dei parametri, e supponiamo inoltre che per questi valori dei parametri che danno $S_{a^{(0)}} = 1$ risulti diverso da zero il determinante delle ψ. Applicando il teorema alla fine del § 16 prendendo per S_a la $S_{a^{(0)}} = 1$, vediamo intanto che la serie (1), almeno in un certo intorno dell'identità, non è altro che l'insieme di tutte le trasformazioni degli ∞^{r-1} gruppi G_1 generati dalle trasformazioni infinitesime

$$\sum_i \lambda_i X_i f$$

Se poi applichiamo un'altra volta il teorema prendendo per S_a una trasformazione nell'intorno di $S_{a^{(0)}} = 1$, e con S_b indichiamo una trasformazione di uno dei gruppi G_1, che è pure una trasformazione qualunque della serie (1), risulterà

$$S_a\, S_b = S_c\,,$$

dove S_c è una nuova trasformazione della serie. Così è appunto dimostrato che, sotto le condizioni supposte, la serie (1) costituisce un gruppo ed anzi un gruppo a coppie di trasformazioni inverse, poichè tale proprietà appartiene pel § 9 ai gruppi G_1 che compongono il nostro gruppo a r parametri.

Riassumendo i risultati ora ottenuti con quelli diretti stabiliti al § 7, possiamo dare al primo teorema fondamentale l'enunciato seguente:

Se una serie ∞^r di trasformazioni

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\, a_1\, a_2 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2, \dots\dots n$$

forma un gruppo, le x'_i, considerate come funzioni delle a, soddisfano un sistema di equazioni differenziali della forma

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x')\, \psi_{sk}(a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \dots\dots n \\ k = 1, 2 \dots\dots r \end{cases}$$

dove il determinante delle $\psi_{sk}(a)$ non è identicamente nullo, e le $\xi_{si}(x')$ sono tali funzioni delle x' che le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sono linearmente indipendenti.

Viceversa, se una serie ∞^r di trasformazioni soddisfa ad un sistema di equazioni del tipo (A) e contiene la trasformazione identica come corrispondente ai valori $a^{(0)}$ dei parametri, e di più il determinante $|\psi_{sk}(a^0)|$ non è nullo, la serie stessa è un gruppo a coppie di trasformazioni inverse e coincide colla totalità delle trasformazioni contenute nei gruppi ad un parametro G_1 generati dalle ∞^{r-1} trasformazioni infinitesime $\sum_i \lambda_i X_i f$.

Nell'ipotesi dell'ultima parte del teorema il gruppo (a coppie di trasformazioni inverse) si indicherà con G_r e si dirà generato dalle r trasformazioni infinitesime

$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_r f$

§ . 18
Casi ulteriori

Per potere applicare il teorema superiore nella sua seconda parte bisogna che il determinante

$$|\psi_{ik}(a^0)|$$

pei valori $a^{(0)}$ dei parametri che danno l'identità sia diverso da zero. Ma supponiamo ora soltanto che la serie ∞^r di trasformazioni (1) soddisfi ad un sistema (A), e sia $S_{\bar{a}}$ una particolare trasformazione della serie tale che

$$|\psi_{ik}(\bar{a})| \neq 0 .$$

La serie

$$S_{\bar{a}}^{-1} S_a$$

contiene ∞^r trasformazioni e per $a_i = \bar{a}_0$ dà l'identità.

D'altronde le formole effettive per la serie $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ essendo

$$x'_i = f_i\left(F_1(x,\bar{a}), F_2(x,\bar{a}) \ldots F_n(x,\bar{a}); a_1, a_2 \ldots a_r\right),$$

queste nuove funzioni x'_i soddisfano ancora il sistema (A) perchè dalle funzioni primitive differiscono solo per avervi cambiato le x_i in $F_i(x,\bar{a})$.

Dunque a questa serie $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ è applicabile il teorema fondamentale, onde abbiamo il risultato:

Se una serie ∞^r di trasformazioni (1) soddisfa ad un sistema (A) e la $S_{\bar{a}}$ è una tale trasformazione che il determinante $|\psi_{ik}(\bar{a})|$ non sia nullo, le ∞^r trasformazioni $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$, variando le a, costituiscono un gruppo G_r, generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1, 2, \dots r)$$

Se supponiamo ora che la serie ∞^r di trasformazioni (1) costituisca un gruppo, ne segue di per sé che esse soddisfano ad un sistema di equazioni del tipo (A) e presa nel gruppo una trasformazione fissa $S_{\bar{a}}$ tale che $|\psi_{ik}(\bar{a})| \neq 0$, le ∞^r trasformazioni $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ costituiranno un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse generato dalle trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f, \dots X_r f$ – Ora se nel gruppo oltre la $S_{\bar{a}}$ figura l'inversa $S_{\bar{a}}^{-1}$, la detta serie $S_{\bar{a}}^{-1} S_a$ coincide col gruppo stesso – Si ha quindi l'importante teorema:

Ogni gruppo a r parametri, le cui trasformazioni siano due a due inverse (*), è un gruppo G_r generato da r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, \; X_2 f, \dots\dots X_r f \; ,$$

le cui espressioni si ottengono nel noto modo stabilendo il sistema di equazioni differenziali (A) cui soddisfano le trasformazioni del gruppo –

(*) Per quanto si è visto, basta che insieme ad una _certa_ trasformazione $S_{\bar{a}}$ esista nel gruppo l'inversa $S_{\bar{a}}^{-1}$, purchè sia diverso da zero il determinante $|\psi_{ik}(\bar{a})|$, ed il teorema del testo risulta applicabile

I gruppi G_r a coppie di trasformazioni inverse sono quelli che quasi esclusivamente si presentano e la sempli-cità della loro teoria consiste principalmente in ciò che il loro studio può farsi sulle r trasformazioni infinitesime che li generano. È di questi gruppi soltanto che inten-diamo sempre di parlare in seguito, ove non si avverta espli-citamente il contrario.

§. 19

Il sistema completo di equazioni a derivate parzia-li equivalente al sistema (A)

I gruppi sui quali si concentra tutto l'interesse dei nostri studi sono, come si è detto, i gruppi G_r generati da r trasformazioni infinitesimali

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1,2,\ldots r)$$

linearmente indipendenti.

Ora queste r trasformazioni

$$X_1 f, X_2 f, \ldots X_r f,$$

per potere generare un gruppo, non possono essere prese ad arbitrio ma debbono soddisfare a certe speciali condizio-ni, chè altrimenti il complesso dei gruppi G_1 ad un pa-rametro

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots + \lambda_r X_r f$$

formerebbe soltanto una serie ∞^r di trasformazioni senza il carattere di gruppo. Nella espressione di queste condizioni come necessarie e sufficienti per la generazione di un gruppo G_r consiste il secondo teorema fondamentale, che Lie chiama il teorema principale (Hauptsatz) come il più importante dei tre. Cominciamo dal ricercare queste condizioni come necessarie. Supposto che la serie (1) costituisca un gruppo G_r dovranno le $f_i(x, a)$, considerate come funzioni delle $\underline{a}$, soddisfare ad un sistema di equazioni ai differenziali totali (A), che deve essere illimitatamente integrabile (§7). Le condizioni d'integrabilità del sistema (A), che ora andiamo a sviluppare, danno appunto le condizioni cercate.

Sappiamo che l'integrazione di un sistema di equazioni ai differenziali totali come il sistema (A) è perfettamente equivalente a quella di un sistema completo di equazioni lineari omogenee per un'unica funzione incognita delle variabili indipendenti e delle funzioni incognite primitive.

Nel caso nostro si tratta di una funzione incognita

$$F(x_1', x_2' \dots x_n' ; a_1, a_2 \dots a_r)$$

delle $\underline{n+r}$ variabili x', a che deve soddisfare alle $\underline{r}$ equazioni lineari omogenee

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial a_k} + \sum_i^{1\dots n} \sum_s^{1\dots r} \xi_{si}(x') \psi_{sk}(a) \frac{\partial F}{\partial x_i'} = 0 \quad , (k = 1, 2, \dots r)$$

Perchè il sistema sia illimitatamente integrabile, è necessario e sufficiente che il sistema (2) sia completo. Ora per il calcolo delle condizioni d'integrabilità è più utile scrivere le (2) sotto la forma seguente. Nel determinante non nullo delle ψ indichiamo, come al solito, con $\alpha_{jk}(a)$ il complemento algebrico di ψ_{jk} diviso per ψ stesso - Moltiplicando la (2) per α_{jk} e sommando rispetto a k da 1 ad r, indi dando a j i suoi r valori $1, 2, \dots r$ sostituiamo alle (2) il sistema equivalente:

$$(2^*) \qquad \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum_i^{1\dots n} \xi_{ji}(x')\frac{\partial f}{\partial x'_i} = 0$$
$$j = 1, 2, \dots r$$

Delle due somme che costituiscono il primo membro la seconda, i cui coefficienti contengono solo le x', non è altro che l'espressione $X_j(f)$, ove alle x si sostituiscano le x', e che indicheremo perciò con

$$X'_j f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ji}(x')\frac{\partial F}{\partial x'_i}$$

Anche i coefficienti della prima somma dipendono dalle sole variabili a, rispetto alle quali sono prese le derivate di F.

Introducendo il simbolo

$$(3) \qquad A_j F = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a)\frac{\partial F}{\partial a_k},$$

il sistema completo (2) la cui integrazione equivale a quella delle equazioni differenziali fondamentali (A), si scrive

$$(C) \qquad A_j F + X'_j F = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots r)$$

§ 20
Condizioni d'integrabilità

Affinchè il sistema (C) sia completo debbono tutte le operazioni alternate

$$(A_j + X'_j,\ A_k + X'_k) \qquad j, k = 1, 2, \dots r$$

comporsi linearmente coi primi membri delle (C) stesse. Se si osserva che nelle A non entrano le $\underline{x}'$ e nelle X non entrano le $\underline{a}$, queste condizioni si scrivono:

$$(4) \qquad (A_j, A_k) + (X'_j, X'_k) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks} (A_s F + X'_s F)$$

dove le ϑ_{jks} indicano convenienti funzioni delle x' e delle $\underline{a}$, che per altro, come ora si vedrà, si riducono a costanti.

Intanto, dovendo le (4) sussistere per una funzione qualunque F delle x' e quindi anche per una funzione qualsiasi delle sole a o delle sole x', avremo separatamente

$$(5) \qquad (A_j, A_k) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks} A_s F$$

$$(6) \qquad (X'_j, X'_k) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks} X'_s F$$

Paragonando nelle (5) i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial a_i}$ da una parte e dall'altra abbiamo

$$A_j(\alpha_{ki}) - A_k(\alpha_{ji}) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks} \alpha_{si}$$

$$i = 1, 2, \dots r$$

Queste possono considerarsi come $\underline{r}$ equazioni lineari nelle

$$\vartheta_{jk1}, \vartheta_{jk2}, \dots \vartheta_{jkr}$$

e poichè il determinante delle $\underline{\alpha}$ non è zero, possono risolversi rispetto alle ϑ_{jks} $(s = 1, 2, \dots r)$ - Segue dunque intanto che le ϑ_{jks} non contengono le x' - Similmente se nelle (6) paragoniamo i coefficienti di $\frac{\partial F}{\partial x'_i}$ da una parte e dall'altra, abbiamo:

$$X'_j(\xi_{ki}) - X'_k(\xi_{ji}) = \sum_s^{1\dots r} \vartheta_{jks}\, \xi_{si}(x'),$$

onde derivando rispetto ad una qualunque a_λ:

$$\sum_s^{1\dots r} \frac{\partial \vartheta_{jks}}{\partial a_\lambda} X'_s F = 0\ ;$$

dunque le derivate $\frac{\partial \vartheta_{jks}}{\partial a_\lambda}$ debbono essere tutte nulle, giacchè le

$$X'_1 F,\ X'_2 F, \dots\dots X'_r F$$

sono linearmente indipendenti. Se ne conclude che le ϑ_{jks} non contenendo nè le x' nè le a sono costanti numeriche; queste indichiamo con c_{jks}.

Dunque: Le condizioni d'illimitata integrabilità delle equazioni fondamentali (A) si scrivono

$$(\alpha)\qquad (X'_j, X'_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{jks} X'_s F$$

$$(\beta)\qquad (A_j, A_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{jks} A_s F,$$

essendo le c_{jks} costanti numeriche.

§ 21

Le condizioni (α), (β) come sufficienti

Supponiamo ora inversamente che le r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti nelle $x'_1, x'_2 \dots x'_n$:

$$X'_j F = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x'_i}$$

soddisfino la (α) e le r trasformazioni infinitesime nelle

a, pure linearmente indipendenti

$$A_j F = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial F}{\partial a_k}$$

soddisfino le (β). Allora il sistema (C) è completo, ed il sistema equivalente (2), essendo risoluto rispetto alle derivate

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}, \frac{\partial F}{\partial a_2}, \dots \frac{\partial F}{\partial a_r}$$

è Jacobiano di forma normale - Fissato un sistema particolare di valori delle a

$$a_1^{(0)} \ a_2^{(0)} \dots a_r^{(0)}$$

tale soltanto che il determinante

$$|\psi_{ik}(a^{(0)})|$$

non sia nullo, consideriamo le soluzioni principali

$$F_1, F_2 \dots F_n$$

del sistema (2) che per $a_1 = a_1^{(0)}, \dots a_r = a_r^{(0)}$ si riducono rispettivamente a

$$x_1', x_2' \dots x_n'$$

Se risolviamo il sistema di equazioni

$$F_i(x_1', x_2' \dots x_n'; a_1 \, a_2 \dots a_r) = x_i$$

$$i = 1, 2 \dots n$$

rispetto alle x' ed otteniamo

$$(7) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \dots x_n; a_1 \, a_2 \dots a_r)$$

queste funzioni $f_i(x, a)$ soddisfano, come sappiamo, al sistema (A) di equazioni ai differenziali totali - Poiché inoltre la serie ∞^r di trasformazioni contiene l'identità che corrisponde ai valori $a^{(0)}$ delle a, ed è $|\psi_{ik}(a^{(0)})| \neq 0$, basta invocare la seconda parte del primo teorema fondamentale (§ 17) per vedere che le (7) definiscono un gruppo G_r, generato dalle r trasformazioni infinitesime $X_1f,\ X_2f \ldots X_rf$

§ 22

Nuova dimostrazione del primo teorema fondamentale

Invece di ricorrere, come ultimamente abbiamo fatto, alla seconda parte del primo teorema fondamentale, possiamo anzi dedurre dalle considerazioni del § precedente una nuova dimostrazione di questo teorema, dovuta a Schur.

Supponiamo infatti 1° che la serie ∞^r di trasformazioni

$$(a)\qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n;\ a_1, a_2 \ldots a_r)$$

soddisfi ad un sistema di equazioni differenziali della forma

$$(b)\qquad \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x')\,\psi_{sk}(a)$$

2° che nella (a) sia contenuta l'identità, per $a = a^{(0)}$ e il determinante $|\psi_{sk}(a^0)|$ non sia nullo.

Allora siccome le (b) formano un sistema illimitatamente integrabile, le trasformazioni infinitesime

$$X_jf\ ,\quad A_jf$$

soddisferanno necessariamente le (α), (β). Ora cerchiamo di determinare r funzioni incognite $c_1, c_2 \ldots c_r$ di r variabili $b_1, b_2 \ldots b_r$ dal sistema di equazioni ai differenziali totali

$$(c)\qquad \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \sum_s^{1\ldots r} \alpha_{s\lambda}(c_1\, c_2 \ldots c_r)\,\psi_{sk}(b_1\, b_2 \ldots b_r)$$

$$\lambda, k = 1, 2, \dots r$$

Questo sistema (c) è illimitatamente integrabile; perchè il corrispondente sistema di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali per una funzione incognita $\Phi(b_1 b_2 \dots b_r; c_1 \dots c_r)$ si scrive

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \sum_{\lambda, s}^{1 \dots r} \alpha_{s\lambda}(c)\, \psi_{sk}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

$$k = 1, 2, \dots r;$$

moltiplicando la precedente per $\alpha_{ik}(b)$ e sommando da $k=1$ a $k=r$ si ha il sistema equivalente

$$\sum_{k}^{1 \dots r} \alpha_{ik}(b) \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} + \sum_{\lambda}^{1 \dots r} \alpha_{i\lambda}(c) \frac{\partial \Phi}{\partial c_\lambda} = 0$$

Ora questo è un sistema completo a causa delle (β).

Ciò posto, integriamo le (c) sotto le condizioni iniziali

$$c_i = a_i \text{ per } b_k = a_k^{(0)}$$

e siano

$$(d) \qquad c_i = \theta_i(a_1, a_2 \dots a_r;\ b_1\ b_2 \dots b_r)$$

gli integrali corrispondenti.

Se poniamo

$$(e) \qquad x_i'' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; c_1\ c_2 \dots c_r)$$

avremo per le (b)

$$\frac{\partial x_i''}{\partial c_\lambda} = \sum_{s}^{1 \dots r} \xi_{si}(x'')\, \psi_{s\lambda}(c);$$

quindi sostituendo per le c nelle (e) i valori (d) e avendo riguardo alle (c), troviamo

$$\frac{\partial x_i''}{\partial b_k} = \sum_{\lambda} \frac{\partial x_i''}{\partial c_\lambda} \frac{\partial c_\lambda}{\partial b_k} = \sum_{\lambda s t} \xi_{si}(x'')\, \psi_{s\lambda}(c)\, \alpha_{t\lambda}(c)\, \psi_{tk}(b)$$

Ma

$$\sum_\lambda \psi_{s\lambda}(c)\,\alpha_{t\lambda}(c) = \varepsilon_{st} = \begin{cases} 0 & \text{per } s \neq t \\ 1 & \text{,, } s = t \end{cases} ;$$

dunque

$$\frac{\partial x''_i}{\partial b_k} = \sum_s^{1\ldots r} \xi_{si}(x'')\,\psi_{sk}(b)$$

Queste sono per le x''_i, considerate come funzioni delle b, precisamente come le equazioni (b) e poichè per $b_k = a_k^{(0)}$ si riducono per le (e) ad

$$f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1\, a_2 \ldots a_r) = x'_i$$

ne risulta (pel teorema d'unicità):

$$x''_i = f_i(x';\, b)$$

Sono dunque soddisfatte le equazioni funzionali

$$f_i\big(f_1(x,a), f_2(x,a) \ldots f_n(x,a);\, b_1\, b_2 \ldots b_r\big) = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, c_1\, c_2 \ldots c_r)$$

caratteristiche di un gruppo.

Si osserverà che in questa dimostrazione di Schur del primo teorema fondamentale le formole che legano i parametri $\underline{c}$ della trasformazione composta $S_c = S_a S_b$ a quelli $\underline{a}$, $\underline{b}$ delle componenti si ottengono integrando le equazioni ai differenziali totali (c), senza che sia necessario conoscere le equazioni finite (a) del gruppo. Su questo ritorneremo più tardi trattando dei così detti gruppi parametrici.

§ 23

Il secondo teorema fondamentale
(Teorema principale)

Affinchè le trasformazioni infinitesime
$$X_1 f \; , X_2 f \; \cdots\cdots X_r f$$
linearmente indipendenti generino un gruppo G_r è necessario e sufficiente, come si è visto alla fine del § 21, che siano soddisfatte le condizioni (α) e (β) - Ma poichè il gruppo è già perfettamente determinato, ove esista, dalle espressioni delle sole X, è naturale domandarsi se non bastino già le prime condizioni (α)

$$(\alpha) \qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

per assicurarne l'esistenza, per dedurne cioè che gli ∞^{r-1} gruppi G_1 generati dalle combinazioni lineari a coefficienti λ costanti delle X
$$\sum_k^{1\cdots r} \lambda_k X_k f$$
costituiscono un gruppo G_r - La risposta alla domanda è affermativa e per dimostrarlo basterà stabilire, secondo il § 21, che se le r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti
$$X_k f = \sum_i^{1\cdots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
soddisfano le (α), si possono sempre trovare altre r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti

$$A_i f = \sum_k^{1 \dots r} \alpha_{ik}(a_1\, a_2 \dots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k}$$

$$i = 1, 2, \dots r$$

in r variabili indipendenti $a_1\, a_2 \dots a_r$ tali che sussistano anche le

$$(\beta) \qquad (A_i, A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f.$$

Per trovare le cercate $A_i f$ si può procedere, secondo Lie, nel modo seguente.

Scriviamo r volte le espressioni X in r sistemi di variabili indipendenti

$$\begin{array}{l} (x_1^{(1)}\; x_2^{(1)} \dots\dots x_n^{(1)}) \\ (x_1^{(2)}\; x_2^{(2)} \dots\dots x_n^{(2)}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_1^{(r)}\; x_2^{(r)} \dots\dots x_n^{(r)}), \end{array}$$

ponendo

$$X_i^{(\lambda)}\Phi = \sum_k^{1 \dots n} \xi_{ik}(x_1^{(\lambda)}\, x_2^{(\lambda)} \dots x_n^{(\lambda)})\frac{\partial \Phi}{\partial x_k^{(\lambda)}}$$

$$i, \lambda = 1, 2, \dots r,$$

e poniamo

$$(8) \qquad W_i\Phi = X_i^{(1)}\Phi + X_i^{(2)}\Phi + \dots\dots + X_i^{(r)}\Phi,$$

essendo Φ una funzione qualunque delle rn variabili $x_k^{(\lambda)}$. Prima di tutto è facile dimostrare che il sistema di r equazioni lineari omogenee nelle derivate parziali della Φ

$$(9) \quad W_1\Phi = 0, \; W_2\Phi = 0, \dots\dots W_r\Phi = 0$$

è costituito di equazioni tutte indipendenti, che cioè non può sussistere un'identità della forma

$$\chi_1 W_1 \Phi + \chi_2 W_2 \Phi + \cdots\cdots + \chi_r W_r \Phi = 0$$

essendo le χ convenienti funzioni delle rn variabili $x_i^{(\lambda)}$ -

Una tale identità trarrebbe infatti con sè le rn identità

$$(10)\qquad \chi_1 \xi_{1k}(x^{(\lambda)}) + \chi_2 \xi_{2k}(x^{(\lambda)}) + \cdots\cdots + \chi_r \xi_{rk}(x^{(\lambda)}) = 0$$

$$k = 1, 2, \ldots n\ ; \quad \lambda = 1, 2, \ldots r,$$

e se le supponiamo compatibili, nel primo gruppo di n equazioni ottenute facendo $\lambda = 1$, vi debbono essere solo $v_1 < r$ equazioni indipendenti. Le n equazioni seguenti ottenute facendo $\lambda = 2$ non possono essere tutte conseguenze delle precedenti, altrimenti potremmo soddisfare le n equazioni

$$\sum_i \chi_i\, \xi_{ik}(x_1^{(2)} x_2^{(2)} \ldots x_n^{(2)}) = 0$$

$$k = 1, 2 \ldots n.$$

con valori delle χ indipendenti dalle $x^{(2)}$ (funzioni solo delle $x^{(1)}$) e quindi le r espressioni

$$X_1^{(2)}\Phi\ ,\ X_2^{(2)}\Phi, \ldots X_r^{(2)}\Phi$$

non sarebbero indipendenti. Dunque il numero v_2 delle equazioni del secondo gruppo $(\lambda = 2)$ indipendenti fra loro e dalle precedenti è certo > 1 - Nello stesso modo si vede che in ciascuno degli r gruppi si trova almeno un'equazione indipendente dalle precedenti; si arriva così ad r equazioni indipendenti onde si deduce che debbono annullarsi tutte le χ (*) -

Ora il sistema di r equazioni ~~...~~ (9) è un sistema completo, perchè avendosi in generale

$$\left(X_i^{(\lambda)}, X_k^{(\lambda)}\right) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s^{(\lambda)} \varphi,$$

si ha anche evidentemente

$$(W_i, W_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} W_s \varphi;$$

esso ammette dunque $rn-r$ soluzioni indipendenti; siano

$$u_1, u_2 \ldots\ldots u_{rn-r}$$

Facciamo un cambiamento delle variabili indipendenti

(*) La proprietà qui dimostrata equivale alla seguente - Si considerino le matrici

$$M_1 \equiv \left| \xi_{ik}(x^{(1)}) \right| , M_2 \equiv \left| \xi_{ik}(x^{(1)}), \xi_{ik}(x^{(2)}) \right| , \ldots\ldots\ldots$$

$$M_s \equiv \left| \xi_{ik}(x^{(1)}), \xi_{ik}(x^{(2)}) \ldots \xi_{ik}(x^{(s)}) \right| \ldots\ldots$$

e siano $\nu_1, \nu_2 \ldots\ldots \nu_s \ldots$ le loro caratteristiche; finchè $\nu_s < r$ sarà $\nu_{s+1} > \nu_s$, onde certamente $\nu_r = r$. Ciò si dimostra anche facilmente in modo diretto così - Se $\nu_s < r$ si estragga da M_s un minore d'ordine ν_s diverso da zero e se ne faccia un minore d'ordine ν_s+1 in M_{s+1} aggiungendovi una colonna formata colle $\xi_{ik}(x^{(s+1)})$ ed una linea ad arbitrio - Se fosse $\nu_{s+1} = \nu_s$, questo minore d'ordine $1+\nu_s$ sarebbe nullo; ciò legherebbe necessariamente le $x^{(s+1)}$ alle precedenti $x^{(1)} \ldots x^{(s)}$, poichè quelle $\xi_{ik}(x^{(s+1)})$ non possono annullarsi identicamente, altrimenti sarebbe stato nullo anche il minore d'ordine ν_s prima estratto da M_s, contro l'ipotesi.

$x_k^{(2)}$ prendendo per nuove variabili le

$$u_1\ u_2 \ldots\ldots u_{2n-r}$$

insieme ad r nuove funzioni indipendenti fra loro e dalle u che indicheremo con

$$a_1\ a_2 \ldots\ldots a_r$$

Se trasformiamo le W_i nelle nuove variabili e indichiamo le operazioni trasformate con $\overline{W}_i\Phi$, siccome le u sono soluzioni delle (9) avremo

$$\overline{W}_i\Phi = W_i(a_1)\frac{\partial\Phi}{\partial a_1} + W_i(a_2)\frac{\partial\Phi}{\partial a_2} + \ldots\ldots + W_i(a_r)\frac{\partial\Phi}{\partial a_r}$$

Le r nuove $\overline{W}_i\Phi$ sono ancora linearmente indipendenti e soddisfano le relazioni

$$(\overline{W}_i, \overline{W}_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks}\overline{W}_s\Phi$$

Ma poichè nelle $\overline{W}_i$ non figurano le derivate delle Φ rapporto alle u, è chiaro che le proprietà ora osservate sussistono ancora se per $u_1, u_2 \ldots u_{2n-r}$ poniamo delle costanti arbitrarie. Chiamando allora

$$A_i\Phi = \sum_k^{1\ldots r}\alpha_{ik}(a_1\ a_2 \ldots a_r)\frac{\partial\Phi}{\partial a_k}$$

le espressioni che così otteniamo dalle $\overline{W}_i$, avremo evidentemente costruito le espressioni $A_i\Phi$ domandate.

Abbiamo così dimostrato in tutte le sue parti il secondo teorema fondamentale che si enuncia:

Ogni gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse è generato da r trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_i f = \sum_k^{1\ldots n} \xi_{ik}(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k} ,$$

che soddisfano a relazioni della forma

$$(\alpha) \qquad (X_i, X_j) = \sum_s^{1\ldots r} c_{ijs} X_s f$$

$$i, j = 1, 2, \ldots r$$

essendo le c_{ijs} costanti numeriche.

Viceversa, se le r trasformazioni infinitesime indipendenti $X_i f$ soddisfano relazioni della forma (α), esse generano un tale gruppo G_r, il quale è l'insieme di tutti i gruppi G_1 a un parametro generati dalle trasformazioni infinitesime $\sum_k \lambda_k X_k f$.

§. 24
Le relazioni fra le costanti c_{iks}

Nelle relazioni (α) che legano le r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, X_2 f, \ldots X_r f$$

generatrici di un gruppo G_r, le quantità c_{ijs} sono r^3 costanti numeriche. Ora è assai importante osservare che queste r^3 costanti non sono indipendenti, bensì legate da certe relazioni che ora andiamo a stabilire.

In primo luogo avendosi identicamente

$$(X_i, X_k) + (X_k, X_i) = 0$$

ne risulta

$$\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} + c_{kis}) X_s f = 0 ;$$

e poichè Xf sono linearmente indipendenti segue intanto

$$c_{iks}+c_{kis}=0$$

Queste sono le prime relazioni cercate -

In secondo luogo se i, k, j sono tre indici qualunque sussiste l'identità di Jacobi

$$(11)\quad ((X_i, X_k), X_j) + ((X_k, X_j), X_i) + ((X_j, X_i), X_k) = 0,$$

che si dimostra subito nel modo seguente.

Si ha

$$((X_i, X_k), X_j) = X_i X_k X_j f - X_k X_i X_j f - X_j X_i X_k f + X_j X_k X_i f,$$

e siccome il terzo termine deriva dal primo per scambio circolare degli indici $i\,k\,j$ e medesimamente il quarto dal secondo così è chiaro che, applicando due volte la permutazione ciclica $(i\,k\,j)$ e sommando i risultati, si ottiene l'identità Jacobiana (11) -

Ora in questa identità (11) poniamo per le espressioni alternate (X_i, X_k) le loro espressioni in funzione lineare delle X date dalle (α) - Troviamo dapprima -

$$((X_i, X_k), X_j) = \left(\sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f, X_j f\right) =$$

$$= \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} (X_s, X_j) = \sum_s^{1\ldots r} \sum_\lambda^{1\ldots r} c_{iks}\, c_{sj\lambda} X_\lambda f,$$

e per ciò la (11) diventa

$$\sum_\lambda^{1\ldots r} \left[\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda})\right] X_\lambda f = 0$$

Essendo le Xf indipendenti, segue che le c debbono soddisfare le equazioni

$$\sum_s^{1\ldots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) = 0$$

per tutti i valori da 1 a r degli indici i, k, j, λ.

Abbiamo quindi l'importante risultato:

Le costanti c_{iks} delle relazioni

$$(X_i, X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

che legano le r trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots X_r f$ generatrici di un gruppo G_r soddisfano, per tutti i valori degli indici da 1 ad r, alle equazioni seguenti

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_s^{1\dots r} (c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}) = 0 \end{array} \right.$$

Si osservi che queste relazioni sono indipendenti affatto dal numero delle variabili su cui opera il gruppo.

Le r^3 costanti c_{iks} hanno la massima importanza per la natura del gruppo e diconsi, per una ragione che apparirà dagli studi ulteriori, le costanti di composizione o struttura del gruppo.

Affinchè le r^3 costanti c_{iks} appartengano, come costanti di composizione, ad un gruppo G_r è dunque <u>necessario</u> che soddisfino le (I). Ma tali condizioni, come andiamo ora a dimostrare, sono altresì <u>sufficienti</u>: in questa proprietà ~~consiste~~ il 3º teorema fondamentale della teoria.

§ 25
Proprietà del simbolo $|UV|$

Per dimostrare che le relazioni (I) fra le costanti c_{iks}

sono sufficienti perché esista un gruppo G_r che ammetta le c_{iks} come costanti di composizione, basterà costruire, in un conveniente numero $\underline{n}$ di variabili, $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti

$$X_1 f \,,\, X_2 f \ldots\ldots X_r f$$

tali che risulti

$$(X_i \,.\, X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$

Consideriamo dapprima $\underline{r}$ variabili indipendenti

$$y_1 \,,\, y_2 \ldots\ldots y_r$$

ed essendo U, V due funzioni qualunque delle y, studiamo l'espressione bilineare nelle derivate delle U, V data da

$$\sum_s^{1\ldots r} \sum_{i,k}^{1\ldots r} c_{iks} y_s \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_k}$$

che indichiamo col simbolo $|UV|$

$$(12) \qquad |U,V| = \sum_{s,i,k}^{1\ldots r} c_{iks} y_s \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial V}{\partial y_k}$$

Notiamo che avendosi

$$|U, y_k| = \sum_{is} c_{iks} y_s \frac{\partial U}{\partial y_i} \,,$$

possiamo scrivere la (12) anche così

$$(12^*) \qquad |U,V| = \sum_k |U, y_k| \frac{\partial V}{\partial y_k} \,.$$

Ora per le prime relazioni (I) cui soddisfano le c_{iks} si vede subito che il simbolo $|U,V|$ possiede la prima proprietà delle espressioni alternate espressa dalla formola

$$(13) \qquad |U,V| + |V,U| = 0$$

In secondo luogo diciamo che se U, V, W sono tre funzioni qualunque delle y sussiste altresì l'identità analoga a quella di Jacobi (11)

$$(14)\qquad |\,|U,V|,W| + |\,|V,W|,U| + |\,|W,U|,V| = 0$$

Per questo incominciamo dal dimostrare che se la (14) vale per due date U, V con $W = y_i$, varrà pure colle medesime U, V e W qualunque. E infatti si ha per la (12*)

$$|U,W| = \sum_i |U, y_i| \frac{\partial W}{\partial y_i} = AW$$

$$|V,W| = \sum_i |V, y_i| \frac{\partial W}{\partial y_i} = BW$$

indicando con AW, BW le relative operazioni del 1° ordine eseguite su W, e quindi

$$|U, |V,W|| - |V, |U,W|| = A(BW) - B(AW) =$$

$$= \sum_i \{A(|V,y_i|) - B(|U,y_i|)\} \frac{\partial W}{\partial y_i}$$

$$= \sum_i \{|U, |V,y_i|| - |V, |U,y_i||\} \frac{\partial W}{\partial y_i}$$

Ma sussistendo per ipotesi la (14) per $W = y_i$ si ha

$$|U, |V,y_i|| - |V, |U,y_i|| = |\,|U,V|, y_i|$$

e quindi la precedente diviene

$$|U, |V,W|| - |V, |U,W|| = \sum_i |\,|U,V|, y_i| \frac{\partial W}{\partial y_i} = |\,|U,V|, W|,$$

che è precisamente la (14) —

Basta ora osservare che facendo

$$U = y_i \qquad V = y_k\,, \qquad W = y_j$$

la (14) sussiste perchè si ha

$$(y_i\, y_k) = \sum_s c_{iks}\, y_s$$

e quindi

$$((y_i\, y_k)\, y_j) = \sum_s c_{iks}\, (y_s\, y_j) = \sum_s c_{iks} \sum_\lambda c_{sj\lambda}\, y_\lambda\ ;$$

l'identità da verificarsi segue dunque dalle relazioni quadratiche (I) cui soddisfano le c_{iks} -

Ciò posto, siccome la (14) vale per

$$U = y_i\ ,\quad V = y_k\ ,\quad W = y_j\ ,$$

essa vale anche per

$$U = y_i\quad V = y_k\ ,\quad W \text{ qualunque},$$

indi per

$$U = y_i\ ,\quad V \text{ qualunque},\quad W \text{ qualunque}$$

e in fine per U, V, W qualunque c. d. d.

Se poniamo

$$A_i f = (y_i\, f) \quad (i = 1, 2, \ldots r),$$

per l'identità (14) avremo:

$$(A_i\, A_k) = ((y_i\, y_k)\, f) = \sum_s c_{iks}\, (y_s\, f)$$

cioè

$$(A_i\, A_k) = \sum_s c_{iks}\, A_s f$$

Le r trasformazioni infinitesimali

$$A_1 f,\ A_2 f,\ \ldots A_r f$$

nelle r variabili $y_1, y_2, \ldots y_r$ soddisfano dunque alle relazioni di composizione richieste

$$(A_i\, A_k) = \sum_s c_{iks}\, A_s f$$

Se esse risultano dunque linearmente indipendenti, lo scopo è già raggiunto - .

Ma che così sempre non accada, lo dimostra l'esempio semplice in cui tutte le c_{iks} siano nulle; allora tutte le $A_i f$ si annullano identicamente -

§. 26
Cangiamento di variabili

Per ottenere in tutti i casi le r trasformazioni richieste linearmente indipendenti giova innanzi tutto eseguire un tale cangiamento di variabili indipendenti, dalle $y_1\, y_2 \dots$ $\dots y_r$ nelle $Y_1, Y_2 \dots Y_r$ che tutti i simboli $|Y_i\, Y_k|$ abbiano il valore zero od uno, ciò che si ottiene nel modo seguente -

In primo luogo, se tutte le c_{iks} sono nulle basta prendere $Y_i = y_i$ (cioè non cangiare le variabili) e lo scopo è già raggiunto (*) - In caso contrario poniamo per es. che non tutte le c_{iks} $(k, s = 1, 2 \dots r)$ siano nulle e prendiamo una soluzione X_1 della equazione a derivate parziali

$$|y_1 f| = \sum_{k,s} c_{1ks}\, y_s \frac{\partial f}{\partial y_k} = 1$$

e ponendo $P_1 = y_1$ la coppia di funzioni P_1, X_1 soddisferà

(*) Del resto in questo caso basta prendere

$$A_i f = \frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2 \dots r)$$

e le r trasformazioni sono indipendenti ed hanno la composizione voluta - Esse generano il gruppo delle traslazioni

$$y_i' = y_i + a_i$$

alle condizione

$$|P_1 X_1| = 1$$

Consideriamo ora le due equazioni simultanee

$$(15) \qquad A_1 f = |P_1 f| = 0 \quad , \quad A_2 f = |X_2 f| = 0 \,,$$

le quali sono certo indipendenti perchè $f = P_1$ soddisfa la prima e non la seconda. Esse formano inoltre un sistema completo perchè

$$(A_1, A_2) = |P_1, |X_1 f|| - |X_1, |P_1 f|| =$$

$$= ||P_1 X_1|, f| = |1. f| = 0 \;;$$

ammettono dunque $r-2$ soluzioni indipendenti

$$y'_1 \; y'_2 \cdots\cdots y'_{r-2}$$

Queste sono anche indipendenti da P_1, X_1 perchè supponendole legate da una relazione

$$\varphi(P_1, X_1, y'_1, y'_2 \cdots y'_{r-2}) = 0$$

le operazioni A_1, A_2 eseguite nella φ darebbero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = 0$$

Inoltre, applicando l'identità (14) col fare

$$U = y'_i \,, \quad V = y'_k \,, \quad W = \begin{cases} P_1 \\ X_1 \end{cases} ,$$

vediamo che $|y'_i y'_k|$ è altresì una soluzione del sistema (15) e quindi è una funzione di $y'_1 \; y'_2 \cdots y'_{r-2}$

soltanto. Così le r funzioni indipendenti

$$P_1 \,, X_1 \,, y'_1 \,, y'_2 \,---\, y'_{r-2}$$

soddisfano alle condizioni.

$$|P_1 X_1| = 1 \,,\; |P_1 y'_i| = 0 \,,\quad |X_1 y'_i| = 0$$

$$|y'_i y'_k| = \varphi_{ik} (y'_1 \, y'_2 \,----\, y'_{r-2})$$

Se tutte le φ_{ik} fossero nulle avremmo già conseguito il richiesto cangiamento di variabili - In caso contrario procedendo sopra

$$y'_1 \; y'_2 \,---\, y'_{r-2}$$

come prima per $y_1 \,, y_2 \,---\, y_r$,(*) troveremo $r-2$ funzioni indipendenti delle y'

$$P_2 \,, X_2 \,, y''_1 \; y''_2 \,---\, y''_{r-4}$$

tali che

$$|P_2 X_2| = 1 \,,\; |P_2 y''_i| = 0 \,,\; |X_2 y''_i| = 0$$

$$|y''_i y''_k| = \psi_{ik} (y''_1 \; y''_2 \,---\, y''_{r-4})$$

Così procedendo, troveremo $r = 2m + q$ funzioni indipendenti di $y_1 \, y_2 \,--\, y_r$

(*) Se per es. non tutte le φ_{ik} sono nulle, posto

$$A'_1 f = |y'_1 f| = \sum_k \varphi_{1k} \frac{\partial f}{\partial y'_k}$$

si troverà una soluzione X_2 (funzione delle y') della equazione $\quad A'_1 f = 1$

e si farà $P_2 = y'_1$ ecc.

$$P_1, P_2 \ldots P_{m+q} ; X_1 X_2 \ldots X_m$$

tali che si avrà

$$(16) \quad |P_i P_k| = 0 \qquad |P_i X_k| = \varepsilon_{ik}$$
$$|X_i X_k| = 0$$

Assumendo come nuove variabili le P e le X si raggiunge lo scopo proposto.

§ 27

Il terzo teorema fondamentale

Esprimendo il simbolo $|U. V|$ nelle nuove variabili P, X avremo:

$$|UV| = \sum_{i,k}^{1, m+q} |P_i P_k| \frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial P_k} + \sum_{i,k}^{1 \ldots m} |X_i X_k| \frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{\partial V}{\partial X_k} +$$
$$+ \sum_i^{1 \ldots m+q} \sum_k^{1 \ldots m} |P_i X_k| \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial X_k} - \frac{\partial U}{\partial X_k} \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)$$

e quindi per le (16)

$$|UV| = \sum_i^{1 \ldots m} \left(\frac{\partial U}{\partial P_i} \frac{\partial V}{\partial X_i} - \frac{\partial U}{\partial X_i} \frac{\partial V}{\partial P_i} \right)$$

Indicando con

$$y_i = \Omega_i(P, X)$$

le formole di trasformazione delle variabili, le r operazioni

$$A_k f = |y_k f| \qquad k = 1, 2 \ldots r$$

costruite al § 25, espresse per le nuove variabili diventano

$$(17) \quad A_k f = \sum_i^{1 \ldots m} \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right)$$

Naturalmente anche nelle nuove variabili le $A_i f$ soddisfano alle relazioni

$$(A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f \; ;$$

però il numero delle linearmente indipendenti fra le $A_i f$ è rimasto ancora lo stesso e non abbiamo fino ad ora conseguito alcun vantaggio sulla trattazione primitiva. Per altro la forma delle (17) suggerisce un artifizio semplice per conseguire lo scopo - Alle $r = 2m+q$ variabili

$$P_1, P_2 \ldots P_{m+q} \; ; \; X_1, X_2 \ldots X_m$$

aggiungiamo q nuove variabili indipendenti

$$X_{m+1} \; , X_{m+2} \ldots\ldots X_{m+q}$$

e poniamo

$$(18) \quad B_k f = \sum_1^{1\ldots m+q} \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} \right),$$

ossia, siccome le Ω non contengono $X_{m+1} \ldots X_{m+q}$

$$(18^*) \quad B_k f = A_k f + \sum_1^{1\ldots q} \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}} .$$

Dico che le r trasformazioni infinitesime

$$B_1 f \; , \; B_2 f \ldots\ldots B_r f$$

nelle $2m+2q$ variabili P, X soddisfano alle relazioni di composizione

$$(B_i B_k) = \sum_s c_{iks} B_s f$$

e sono linearmente indipendenti.

La prima cosa risulta osservando che dalla (18*), non comparendo $X_{m+1} \ldots X_{m+q}$ nei coefficienti delle A_k, si ha:

$$(B_i, B_k) = (A_i, A_k) + \sum_{\lambda}^{1\dots r} \left\{ A_i \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}} \right) - A_k \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\lambda}} \right) \right\} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}}$$

Ma si trova subito dalle (17)

$$A_i \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial P_{m+\lambda}} \right) - A_k \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_{m+\lambda}} \right) = \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} \sum_{\nu}^{1\dots m} \left(\frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\nu} \frac{\partial \Omega_k}{\partial X_\nu} - \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\nu} \frac{\partial \Omega_k}{\partial P_\nu} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} (y_i \, y_k) = \frac{\partial}{\partial P_{m+\lambda}} \sum_{s}^{1\dots r} c_{iks} \, \Omega_s =$$

$$= \sum_{s}^{1\dots r} c_{iks} \frac{\partial \Omega_s}{\partial P_{m+\lambda}}$$

e quindi

$$(B_i, B_k) = \sum_{s}^{1\dots r} c_{iks} A_s f + \sum_{s}^{1\dots r} c_{iks} \sum_{\lambda}^{1\dots q} \frac{\partial \Omega_s}{\partial P_{m+\lambda}} \frac{\partial f}{\partial X_{m+\lambda}} = \sum_s c_{iks} B_s f$$

come si voleva.

Ammesso ora che fra le $B_i f$ sussistesse una relazione

$$\sum_{i}^{1\dots r} e_i B_i f = 0$$

colle e costanti, facendo in questa successivamente

$$f = P_1, P_2 \dots P_{m+q} \; ; \; X_1, X_2 \dots X_{m+q}$$

ne verrebbe

$$\sum_i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial X_\lambda} = 0 \; , \; \sum_i e_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial P_\lambda} = 0$$

$$\lambda = 1, 2, \dots m+q$$

e quindi

$$\sum_i e_i \Omega_i = \sum_i e_i y_i = \text{costante},$$

ciò che, essendo le y indipendenti, dà:

$$e_1 = e_2 = \dots\dots = e_r = 0 .$$

Così sono effettivamente costruite le r trasformazioni richieste e possiamo in fine formulare il terzo teorema fondamentale della teoria dei gruppi, che si enuncia:

Se un gruppo G_r, in un numero qualunque n di variabili $x_1\, x_2 \cdots x_n$, possiede r trasformazioni infinitesime

$$X_i f = \sum_k \xi_{ik}(x_1\, x_2 \cdots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

le costanti c_{iks} delle relazioni di composizione

$$(X_i\, X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

soddisfano alle relazioni

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \displaystyle\sum_s^{1\ldots r} \left(c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Viceversa se le r^3 costanti c_{iks} soddisfano le (I), si possono sempre trovare, in un numero conveniente di variabili, r trasformazioni infinitesime linearmente indipendenti per le quali le costanti di composizione abbiano i valori c_{iks} -

§ 28

Le equazioni di Maurer per le ψ_{ik}

I tre teoremi che abbiamo dimostrato nel presente capitolo sono di fondamentale importanza per la teoria dei gruppi, ed è utile conoscerne diverse dimostrazioni _

Già al § 22 abbiamo esposto una nuova dimostrazione del 1° teorema ed ora ci proponiamo di fare altrettanto per gli altri due - Le nuove dimostrazioni sono dovute ancora a Schur e noi le esporremo colle modificazioni e semplificazioni apportatevi da Engel e da Lie stesso.

Dimostreremo perciò che se le r^3 costanti c_{iks} soddisfano le relazioni (I) si possono trovare in r variabili $a_1, a_2 \dots a_r$ r trasformazioni linearmente indipendenti

$$(19) \qquad A_i f = \sum_k^{1\dots r} \alpha_{ik}(a_1, a_2 \dots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k}$$

che soddisfino alle relazioni di composizione

$$(20) \qquad (A_i A_j) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs} A_s f$$

Con ciò verrà dimostrato nuovamente il terzo teorema fondamentale ed insieme anche il secondo, come risulta subito dal § 21.

Si tratta dunque di trovare r^2 funzioni α_{ik} di $a_1\ a_2 \dots a_r$ il cui determinante sia $\neq 0$ (ciò che assicura l'indipendenza lineare delle (19)) e che soddisfino alle relazioni (20)

$$A_i(\alpha_{j\mu}) - A_j(\alpha_{i\mu}) = \sum_s c_{ijs}\, \alpha_{s\mu} .$$

ossia alle seguenti

$$(21). \quad \sum_k^{1\dots r}\left(\alpha_{ik}\frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial a_k} - \alpha_{jk}\frac{\partial \alpha_{i\mu}}{\partial a_k}\right) = \sum_s^{1\dots r} c_{ijs}\, \alpha_{s\mu}$$

In armonia colle notazioni già usate al § 19, indichi ψ_{ik} il quoziente del complemento algebrico di α_{ik} nel determinante delle α pel determinante stesso. Le equazioni (21) possono cambiarsi in equazioni equivalenti per le ψ nel modo seguente -

Moltiplichiamo la (21) per $\psi_{t\mu}$, essendo t, μ indici qualunque da 1 a r e sommiamo rispetto a μ otteniamo

$$(22) \qquad \sum_{k\mu} \left(\alpha_{ik} \psi_{t\mu} \frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial a_k} - \alpha_{jk} \psi_{t\mu} \frac{\partial \alpha_{i\mu}}{\partial a_k} \right) = c_{ijt}$$

Ma si ha

$$\sum_{\mu} \psi_{t\mu} \alpha_{j\mu} = \varepsilon_{tj} \quad , \quad \sum_{\mu} \psi_{t\mu} \alpha_{i\mu} = \varepsilon_{ti}$$

e quindi derivando

$$\sum_{\mu} \psi_{t\mu} \frac{\partial \alpha_{j\mu}}{\partial a_k} = - \sum_{\mu} \alpha_{j\mu} \frac{\partial \psi_{t\mu}}{\partial a_k}$$

$$\sum_{\mu} \psi_{t\mu} \frac{\partial \alpha_{i\mu}}{\partial a_k} = - \sum_{\mu} \alpha_{i\mu} \frac{\partial \psi_{t\mu}}{\partial a_k} \quad ,$$

onde la (22) diventa

$$\sum_{k\mu} \alpha_{jk} \alpha_{i\mu} \frac{\partial \psi_{t\mu}}{\partial a_k} - \sum_{k\mu} \alpha_{ik} \alpha_{j\mu} \frac{\partial \psi_{t\mu}}{\partial a_k} = c_{ijt}$$

e permutando nella seconda somma gli indici di sommazione k, μ abbiamo

$$\sum_{k\mu} \alpha_{jk} \alpha_{i\mu} \left(\frac{\partial \psi_{t\mu}}{\partial a_k} - \frac{\partial \psi_{tk}}{\partial a_\mu} \right) = c_{ijt}$$

In fine moltiplicando quest'ultima per

$$\psi_{i\lambda} \psi_{j\nu}$$

e sommando rispetto a i, j si ottengono le equazioni cercate

$$(II) \qquad \frac{\partial \psi_{t\lambda}}{\partial a_\nu} - \frac{\partial \psi_{t\nu}}{\partial a_\lambda} = \sum_{ij} c_{ijt} \psi_{i\lambda} \psi_{j\nu}$$

Come le (II) si deducono dalle (22), così, invertendo il calcolo ora eseguito, si vede che le (22) seguono dalle (II), alle quali equivalgono dunque perfettamente

Le equazioni (II) furono stabilite da Maurer.
La questione proposta si riduce dunque a trovare r^2 funzioni ψ_{ik} delle $a_1\, a_2 \dots a_r$ a determinante non nullo e che soddisfino le equazioni (II) di Maurer.

§ 29

Dimostrazione di Schur del secondo e terzo teorema fondamentale.

Con un opportuno artificio si può trovare, come Schur dimostra, un sistema di r^2 funzioni ψ che soddisfino le (II), integrando soltanto un sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti, ciò che richiede solo, come è ben noto, operazioni algebriche, la risoluzione della così detta equazione caratteristica.
Così non soltanto si trovano le cercate trasformazioni infinitesime $A_1 f, A_2 f \dots A_r f$, ma si dimostra che occorrono per ciò soltanto operazioni algebriche.
A tale scopo operiamo nelle (II) un cangiamento di variabili e di funzioni incognite ponendo

$$a_1 = \lambda_1 t\ ,\ a_2 = \lambda_2 t\ ,\ \dots\dots\dots\ a_r = \lambda_r t$$

$$t\,\psi_{ik}(a_1\, a_2 \dots a_r) = \theta_{ik}(\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_r ; t)\ ;$$

con ciò le (II)

$$\frac{\partial \psi_{s\alpha}}{\partial a_\beta} - \frac{\partial \psi_{s\beta}}{\partial a_\alpha} = \sum_{ij} c_{ijs}\, \psi_{i\alpha}\, \psi_{j\beta}$$

diventano

$$(\text{II}^*) \qquad \frac{\partial \theta_{s\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{s\beta}}{\partial \lambda_\alpha} = \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\, \theta_{j\beta}$$

Ora si integri il sistema di equazioni differenziali lineari ordinarie rispetto a t

$$(23)\qquad \frac{\partial \theta_{s\alpha}}{\partial t} = \varepsilon_{s\alpha} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\alpha} \quad (s, \alpha = 1, 2 \dots r)$$

colle condizioni iniziali

$$(24)\qquad \theta_{s\alpha} = 0 \quad \text{per } t = 0\,,$$

dove nella integrazione si riguarderanno le λ come costanti (parametri). Dalla forma di queste equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti risulta subito che le funzioni $\frac{\theta_{s\alpha}}{t}$ conterranno le variabili $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r, t$ appunto nei prodotti

$$\lambda_1 t,\ \lambda_2 t,\ \dots \lambda_r t\,;$$

ed ora dimostreremo che le $\theta_{s\alpha}$ così determinate soddisferanno le (II^*), e perciò le $\psi_{s\alpha}$ soddisferanno le (II) come si voleva.

Pongasi infatti

$$(25)\qquad V_{s\alpha\beta} = \frac{\partial \theta_{s\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{s\beta}}{\partial \lambda_\alpha} - \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\, \theta_{j\beta}$$

e si derivi rispetto a t osservando le (23); si avrà

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta}\Big[\varepsilon_{s\alpha} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\alpha}\Big] - \frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha}\Big[\varepsilon_{s\beta} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j\, \theta_{i\beta}\Big] -$$

$$- \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{j\beta}\Big[\varepsilon_{i\alpha} + \sum_{k\nu} c_{k\nu i}\, \lambda_\nu\, \theta_{k\alpha}\Big] -$$

$$- \sum_{ij} c_{ijs}\, \theta_{i\alpha}\Big[\varepsilon_{j\beta} + \sum_{k\nu} c_{k\nu j}\, \lambda_\nu\, \theta_{k\beta}\Big]\,,$$

ossia

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t} = \sum_i c_{i\beta s}\, \theta_{i\alpha} - \sum_i c_{i\alpha s}\, \theta_{i\beta} + \sum_{ij} c_{ijs}\, \lambda_j \Big(\frac{\partial \theta_{i\alpha}}{\partial \lambda_\beta} - \frac{\partial \theta_{i\beta}}{\partial \lambda_\alpha}\Big) -$$

$$-\sum_j c_{\alpha js}\,\theta_{j\beta}-\sum_i c_{i\beta s}\,\theta_{i\alpha}-\sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu i}\,\lambda_\nu\,\theta_{j\beta}\,\theta_{k\alpha}-$$

$$-\sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu j}\,\lambda_\nu\,\theta_{i\alpha}\,\theta_{k\beta}$$

Le somme semplici si distruggono per la prima delle relazioni (I) per le c e ponendo per

$$\frac{\partial\theta_{i\alpha}}{\partial\lambda_\beta}-\frac{\partial\theta_{i\beta}}{\partial\lambda_\alpha}$$

l'espressione data dalla (25)

$$V_{i\alpha\beta}+\sum_{k\nu} c_{k\nu i}\,\theta_{k\alpha}\,\theta_{\nu\beta}$$

resta

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t}=\sum_{ij} c_{ijs}\,\lambda_j\,V_{i\alpha\beta}-\sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{\nu ki}\,\lambda_j\,\theta_{k\alpha}\,\theta_{\nu\beta}-$$

$$-\sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu i}\,\lambda_\nu\,\theta_{j\beta}\,\theta_{k\alpha}-\sum_{ijk\nu} c_{ijs}\,c_{k\nu j}\,\lambda_\nu\,\theta_{i\alpha}\,\theta_{k\beta}$$

e permutando nella seconda delle somme quadruple gli indici j, ν e nell'ultima eseguendo sugli indici la sostituzione ciclica $(ik\nu j)$ si vede che le tre somme quadruple si distruggono –

Dunque le $V_{s\alpha\beta}$, definite dalle (25) soddisfano alle equazioni lineari omogenee

$$\frac{\partial V_{s\alpha\beta}}{\partial t}=\sum_{ij} c_{ijs}\,\lambda_j\,V_{i\alpha\beta}\ ;$$

d'altronde per $t=0$ si annullano, a causa delle condizioni iniziali (24), e per conseguenza sono sempre nulle, ciò che dimostra sussistere le (II*)

Così dunque abbiamo dimostrato:

Dato un sistema di r^3 costanti c_{iks}, che verifichino le (I), si possono trovare, con sole operazioni algebriche, r trasformazioni infinitesime indipendenti

$$A_i f = \sum_k \alpha_{ik}(a_1, a_2 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_k}$$

in r variabili $a_1, a_2, \ldots a_r$ che soddisfino alle relazioni di composizione

$$(A_i, A_k) = \sum_s c_{iks} A_s f$$

e generino quindi un gruppo G_r -

§ 30

Composizione di due serie ∞^r di trasformazioni

Coi tre teoremi di cui ci siamo occupati nel presente capitolo abbiamo posto i fondamenti per la teoria generale dei gruppi continui finiti G_r a coppie di trasformazioni inverse, le cui equazioni finite sono contenute in un'unica serie ∞^r

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n; a_1, a_2 \ldots a_r)$$

Già al §. 4 abbiamo indicato che si possono considerare gruppi più generali a r parametri le cui trasformazioni in luogo di formare una sola serie ∞^r, costituiscono più di tali serie od anche un numero infinito ma discreto. Ora vogliamo dimostrare quanto fu allora asserito che lo studio di tali gruppi misti si riporta ad gruppi G_r combinati con ordinarii gruppi discontinui.

Per questo converrà che riprendiamo, estendendole, le considerazioni dei §§ 12 - 14 ed innanzi tutto ci occupiamo della questione seguente -

Dati due serie, ciascuna ∞^r, di trasformazioni

$$(26) \qquad x'_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n ; a_1 a_2 \dots a_r)$$

$$(27) \qquad x''_i = \varphi_i(x'_1 x'_2 \dots x'_n ; b_1 b_2 \dots b_r),$$

se componiamo una qualunque trasformazione S_a della prima con una qualunque T_b della seconda, nella trasformazione composta $S_a T_b$

$$S_a T_b) \qquad x''_i = \varphi_i(f_1(x,a) \dots f_n(x,a) ; b_1 \dots b_n)$$

il numero dei parametri essenziali è al massimo $2r$ e al minimo r (*) - Domandiamo: quali relazioni debbono passare fra le due serie ∞^r S_a, T_b affinchè la serie composta $S_a T_b$ abbia ancora soltanto r parametri essenziali?

Indicando con $c_1 c_2 \dots c_r$ gli r parametri essenziali della serie composta potremo scrivere

$$(28) \qquad x''_i = \psi_i(x_1 x_2 \dots x_n ; c_1 c_2 \dots c_r)$$

dove i parametri c sono funzioni delle a e delle b

$$(29) \qquad c_\lambda = \theta_\lambda(a_1 \dots a_r ; b_1 \dots b_r)$$

Dalla osservazione stessa fatta al principio del § 13 risulta che queste relazioni (28) sono risolubili sia rispetto alle a che alle b, cioè i determinanti funzionali

---

(*) Ciò è evidente perchè, tenendo per es. fisse le b e facendo variare le a, la $S_a T_b$ percorre ∞^r trasformazioni -

$$\frac{\partial(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_r)}{\partial(a_1, a_2, \dots a_r)} \qquad \frac{\partial(\theta_1, \theta_2 \dots \theta_r)}{\partial(b_1, b_2 \dots b_r)}$$

saranno ciascuno diverso da zero - Ora diamo alle a, b tali incrementi infinitesimi $\delta a, \delta b$ da soddisfare alle condizioni $\delta e_h = 0$, cioè

$$(30) \qquad \sum_k^{1\dots r} \frac{\partial \theta_h}{\partial a_k} \delta a_k + \sum_k^{1\dots r} \frac{\partial \theta_h}{\partial b_k} \delta b_k = 0,$$

nella qual cosa, per quanto è detto sopra, si potranno prendere ad arbitrio le δa e calcolare le δb e inversamente - Precisamente come al § 13 ne seguirà

$$(31) \qquad S_a^{-1} S_{a+\delta a} = T_b\, \delta_b T_b^{-1}$$

Fissando ad arbitrio le $\underline{a}$ e facendo variare comunque le δa, il primo membro della (31) percorre una serie ∞^{r-1} di trasformazioni infinitesime; lo stesso dicasi del 2° membro ove si fissino le $\underline{b}$ e si facciano variare ad arbitrio le δb -

L'eguaglianza (31) esprime quindi (cf. § 13) che queste due serie ∞^{r-1} di trasformazioni infinitesime rimangono sempre le stesse qualunque siano i valori attribuiti alle $\underline{a}$ e alle $\underline{b}$.

Siccome adunque le trasformazioni della serie (26) infinitamente vicine alla S_a si ottengono combinando S_a con una trasformazione infinitesima della detta serie fissa, è applicabile ancora il ragionamento del § 14 e ne risulta che la serie (26) soddisfa ad un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\frac{\partial x_i'}{\partial a_k} = \sum_j^{1\ldots r} \psi_{jk}(a)\, \xi_{ji}(x'),$$

per le quali il determinante delle ψ non è identicamente nullo. Se diamo quindi alle $\underline{a}$ un particolare sistema di valori $a^{(o)}$, tale soltanto che sia

$$|\psi_{jk}(a^o)| \neq 0,$$

segue dal teorema alla fine del § 16 che le trasformazioni

$$S_{a^{(o)}}^{-1} S_a$$

formano il gruppo G_r, a coppie di trasformazioni inverse, generato dalle $\underline{r}$ trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1, x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

D'altronde se fissiamo una trasformazione qualunque $T_{b^{(o)}}$ della serie (27), possiamo soddisfare alla relazione

$$S_a T_b = S_{a^{(o)}} T_{b^{(o)}}$$

cioè alle

$$(32) \qquad \theta_\lambda(a, b) = \theta_\lambda(a^{(o)}, b^{(o)}) \qquad (\lambda = 1, 2 \ldots r)$$

sia prendendo ad arbitrio S_a e calcolandone T_b sia inversamente. Se scriviamo la (32) così:

$$S_{a^{(o)}}^{-1} S_a = T_{b^{(o)}} T_b^{-1}$$

vediamo che $T_{b^{(o)}} T_b^{-1}$ percorre le stesse trasformazioni come $S_{a^{(o)}}^{-1} S_a$, cioè le trasformazioni del gruppo G_r. Indicando queste ultime col simbolo E_λ, avremo

$$S_a = S_{a(0)} E_\lambda$$

e poichè l'inversa $T_b T_{b(0)}^{-1}$ di $T_{b(0)} T_b^{-1}$ è pure una E

$$T_b = E_\mu T_{b(0)}$$

Viceversa se E_λ percorre le trasformazioni di un gruppo G_r ed $S_{a(0)}$, $T_{b(0)}$ sono due trasformazioni fisse arbitrarie, è chiaro che le due serie ∞^r

$$S_{a(0)} E_\lambda \quad , \quad E_\lambda T_{b(0)}$$

godono della voluta proprietà perchè

$$(S_{a(0)} E_\lambda) \cdot (E_\mu T_{b(0)}) = S_{a(0)} (E_\lambda E_\mu) T_{b(0)} =$$
$$= S_{a(0)} E_\nu T_{b(0)}$$

contiene i soli r parametri della trasformazione composta E_ν - Abbiamo dunque stabilito il teorema:

Affinchè due serie ∞^r di trasformazioni S_a, T_b diano luogo ad una serie composta $S_a T_b$ con soli r parametri essenziali, è necessario e sufficiente che esista un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse, tali che indicando con E_λ una trasformazione variabile in G_r e con A, B due trasformazioni fisse, l'una della prima l'altra della seconda serie, ogni trasformazione della prima serie sia data da

$$S_a = A E_\lambda$$

ed ognuna della seconda da

$$T_b = E_\mu B \, .$$

Se supponiamo in particolare che le due serie ∞^r coincidano, si dovrà avere

$$S_{a^{(0)}} E_\lambda = E_\mu S_{a^{(0)}} ,$$

cioè

$$S_{a^{(0)}}^{-1} E_\mu S_{a^{(0)}} = E_\lambda ,$$

onde abbiamo il teorema:

Se una serie ∞^r di trasformazioni S_a gode della proprietà che la trasformazione composta di due qualunque della serie abbia solo r parametri essenziali, la serie stessa ha la forma

$$S_a = A E_\lambda ,$$

dove E_λ percorre le trasformazioni di un gruppo G_r ed A è una trasformazione fissa (qualunque) nella serie, che dovrà soddisfare alla condizione

$$A^{-1} G_r A = G_r ,$$

cioè sarà permutabile col gruppo.

§ 31

Serie ∞^r di trasformazioni nelle quali i prodotti di m trasformazioni sono nella serie

---

Passiamo ora a risolvere la questione seguente. Quali condizioni deve verificare una serie ∞^r di trasformazioni perchè componendo m trasformazioni qualunque della serie nasca sempre una trasformazione della serie stessa, nè ciò accada componendone un numero minore?

Osserviamo in primo luogo che la trasformazione composta di due della serie dovrà contenere solo r parametri, perchè se ne contenesse di più questi non potrebbero più sparire componendovi le successive. Applicando il secondo teorema del § precedente, vediamo intanto che le trasformazioni della nostra serie avranno certo la forma

$$S_a = AE_\lambda$$

del detto teorema. Ora componendo due qualunque ~~tra~~sformazioni della serie

$$AE_\lambda\ ,\ AE_\mu$$

essendo $AE_\mu A^{-1} = E_\nu$ e $AE_\mu = E_\nu A$, si ha

$$(AE_\lambda).(AE_\mu) = A^2 E_\nu$$

In generale componendo s trasformazioni della serie, si avrà una trasformazione della forma

$$A^s E_\lambda$$

La nostra ipotesi porta adunque che si abbia

$$A^m E_\lambda = AE_\mu\ ,$$

cioè

$$A^{m-1} = E_\nu\ ,$$

vale a dire che la potenza $(m-1)^{ma}$ di A appartenga a G_r, ma nessuna altra potenza d'ordine inferiore.

Concludiamo che: Ogni serie della specie voluta si ottiene componendo colle sostituzioni E_λ di un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse una trasformazione fissa A permutabile col gruppo G_r, e tale che la potenza A^{m-1} di A, ma nessuna potenza d'ordine inferiore, appartenga a G_r -

È necessario ricordare che per l'esatta applicazione di questo teorema conviene limitarsi a considerare quelle trasformazioni della serie che giaciono in un intorno convenientemente ristretto della A, poichè la validità del teorema alla fine del § 16 sul quale ci siamo appoggiati è soggetta appunto ad una tale limitazione.

Se si applica il teorema superiore al caso $m=2$, cioè nell'ipotesi che la serie S_a costituisca un gruppo Γ, senza supporre che in Γ vi sia l'identità nè coppie di trasformazioni inverse, vediamo che in tal caso le trasformazioni di Γ appartengono ad un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse - Se ne conclude che le equazioni di qualsiasi gruppo finito a $\underline{r}$ parametri si ottengono da quelle di un gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse con un cangiamento di parametri e per prolungamento analitico - Così appare l'opportunità, nella teoria dei gruppi continui finiti, di limitarsi alla considerazione dei gruppi G_r a coppie di trasformazioni inverse -

§ 32

I gruppi misti

Si supponga ora di avere un numero dapprima finito, diciamo $\underline{m}$, di serie di trasformazioni continenti ciascuna r parametri

$$x_i' = f_i^{(k)}(x_1, x_2 \ldots x_n ; a_1^{(k)}, a_2^{(k)} \ldots a_r^{(k)})$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

$$k = 1, 2 \ldots m$$

e che queste m serie, insieme considerate, formino un gruppo misto. Considerando ciascuna di queste serie per sè e paragonandole due a due saranno applicabili i teoremi del § 30. Quindi, indicando con $S_1, S_2 \ldots S_m$ m trasformazioni fisse prese nelle rispettive serie e con

$$S_{a^{(1)}} \;,\; S_{a^{(2)}} \;\ldots\ldots\; S_{a^{(m)}}$$

trasformazioni variabili nelle serie stesse, ~~risulta~~ che le m serie

$$S_1^{-1} S_{a^{(1)}} \;,\; S_2^{-1} S_{a^{(2)}} \;\ldots\ldots\; S_m^{-1} S_{a^{(m)}}$$

coincidono in un unico gruppo G_r a coppie di trasformazioni inverse, gruppo permutabile con tutte le trasformazioni delle serie. Indicando con E_λ una trasformazione variabile in G_r le m serie saranno ~~date~~ dalle trasformazioni

(33) $$S_1 E_\lambda \;,\; S_2 E_\lambda \;\ldots\ldots\; S_m E_\lambda$$

Ora se si moltiplicano tutte queste trasformazioni per una qualunque di esse si riprodurranno (poichè formano un gruppo) le trasformazioni stesse, ma di più essendo le S permutabili col gruppo G_r le m serie non faranno che permutarsi fra loro. E invero il prodotto $S_i S_k$ appartenendo alle serie stesse ha necessariamente la forma

$$S_i S_k = S_l E_{\lambda'} ,$$

e si ha:

$$(S_i E_\lambda)(S_k E_\mu) = S_i E_\lambda S_k E_\mu = S_i S_k E_\nu E_\mu =$$
$$= S_l S_{\lambda'} E_\nu E_\mu = S_l E_\alpha$$

Questa formola ci dice che componendo due qualunque trasformazioni della serie (33) l'indice della serie della trasformazione composta dipende unicamente dagli indici delle serie da cui furono prese le due componenti, e ciò dimostra appunto che componendo tutte le trasformazioni (33) con una fissa (da una medesima parte) le m serie stesse subiranno una permutazione, e la permutazione stessa dipenderà unicamente dall'indice della trasformazione fissa.

Così avremo sulle m serie m permutazioni distinte soltanto che si produrranno per es. moltiplicando successivamente per

$$S_1 , S_2 \ldots\ldots S_m$$

Le corrispondenti sostituzioni sulle m serie formano manifestamente un gruppo finito e fra queste sostituzioni vi è quindi l'identità – Supponendola per es. prodotta da S_1, ciò significa che S_1 appartiene a G_r stesso e quindi si può fare senz'altro $S_1 = 1$ –

Di qui vediamo che i gruppi misti composti di un numero finito di serie, ciascuna ∞^r, si ottengono dai gruppi G_r cercando in primo luogo le trasformazioni S permutabili con G_r, del quale problema ci occuperemo in seguito. In secondo luogo bisogna scegliere m di tali trasformazioni

$$S_1, S_2 \dots S_m$$

in guisa che rispetto al gruppo G_r diano luogo ad un gruppo finito ordinario.

Se il numero delle serie ∞^r componenti il gruppo misto è soltanto discreto ma infinito, il risultato è del tutto analogo; ma allora le trasformazioni moltiplicatrici

$$S_1, S_2, S_3 \dots\dots$$

sono in numero infinito e costituiscono un gruppo discontinuo. In ogni caso vediamo, come si è asserito al § 4, che questi gruppi misti partecipano insieme della natura dei gruppi continui G_r e di quella dei gruppi discontinui.

Apparentemente i gruppi misti che abbiamo qui considerati sono di natura speciale perchè le serie che li compongono hanno lo stesso numero r di parametri; ma in realtà vediamo facilmente che a questo riduce il caso più generale. Supponiamo infatti che le m serie componenti il gruppo abbiano rispettivamente

$$r_1, r_2 \dots\dots r_m$$

parametri e sia r il massimo dei numeri r_i. Combinando una serie con r_i parametri con un'altra a r_k parametri si ottiene un'unica serie il numero dei cui parametri essenziali è al massimo $r_i + r_k$ e, supposto $r_i > r_k$, al minimo r_i. — Perciò quelle fra le ~~m~~ serie che hanno il numero massimo r di parametri costituiscono già di per sè un gruppo misto Γ della specie sopra considerata e in particolare vi è in Γ un sottogruppo G_r (una particolare serie)

$$a) \quad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n;\ a_1\, a_2 \dots a_r)$$

contenente l'identità — Ma allora se con questo combiniamo le sostituzioni di un'altra delle serie con $r_k \leq r$ parametri

$$b) \quad x_i'' = \varphi_i(x_1'\, x_2' \dots x_n';\ b_1\, b_2 \dots b_k)$$

la serie composta ha r parametri ed è quindi in Γ. Ma in questa serie è contenuta completamente la b) perchè in a) vi è l'identità. Si può dunque senz'altro sopprimere la serie b) come già contenuta in un'altra di Γ.

Dalle ricerche ultime risulta come lo studio dei gruppi continui finiti si riduca in sostanza unicamente a quello dei gruppi G_r generati da r trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f, \dots X_r f$, e contenenti l'identità e con ogni ~~trasformazione~~ la sua inversa. In seguito ci occuperemo quindi ormai solo di questi gruppi G_r, sui quali si concentra tutto l'interesse.

Capitolo III°

Equazioni di definizione di un gruppo G_r — Ordine delle trasformazioni infinitesime.

§ 33

Eliminazione di costanti arbitrarie da un sistema di funzioni

Un gruppo G_r è perfettamente definito dalle sue r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x_1 x_2 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

soddisfacenti alle condizioni di composizione

$$(X_k X_l) = \sum_s^{1\dots r} c_{kls} X_s f$$

La più generale trasformazione infinitesima di un tale G_r è data da

$$\mathfrak{X} f = \sum_k^{1\dots r} e_k X_k f = \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots r} e_k \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

dove $e_1, e_2 \dots e_r$ sono r costanti arbitrarie. I coefficienti ξ_i di una tale trasformazione $\mathfrak{X} f$ essendo dati da

$$\xi_i = \sum_k^{1\dots r} e_k \xi_{ki} \qquad (i = 1, 2, \dots n),$$

contengono (linearmente ed omogeneamente) le r costanti arbitrarie c_k.

Fissate le ξ_{ki} è individuato il gruppo G_r e quindi le espressioni delle ξ_i. – Ora invece di dare esplicitamente le ξ, si possono anche definire come le soluzioni più generali di un certo sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali, che hanno grande importanza in molte ricerche e diconsi le equazioni di definizione del gruppo.

Per arrivare a costruire il sistema in discorso dobbiamo premettere alcune osservazioni generali sulla eliminazione di costanti da un gruppo di funzioni di un numero qualunque di variabili indipendenti.

Siano $z_1, z_2 \ldots z_m$ m funzioni di n variabili indipendenti $x_1, x_2 \ldots x_n$, contenenti inoltre r parametri (o costanti) $a_1, a_2 \ldots a_r$, che potremo supporre e supporremo essenziali, sia

$$(1) \qquad z_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\ a_1\ a_2 \ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots m$$

Dovendo considerare nel seguito le derivate dei varii ordini delle z, è opportuno introdurre una notazione abbreviata per indicarle; e noi porremo

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = z_{i;k}\ , \quad \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2}} = z_{i;k_1k_2}\ , \ldots$$

in generale

$$\frac{\partial^s z_i}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\dots\partial x_{k_s}} = z_{i;k_1 k_2 \dots k_s} :$$

Ciò posto aggiungiamo alle (1) le equazioni che ne risultano con una prima derivazione

$$(1_1) \qquad z_{i;k} = f_{i;k}(x,a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \dots m \\ k = 1, 2 \dots n \end{cases},$$

indi quelle che se ne ottengono con una seconda derivazione

$$(1_2) \qquad z_{i;k_1 k_2} = f_{i;k_1 k_2}(x,a) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \dots m \\ k_1, k_2 = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

e così continuiamo protraendo le derivazioni finchè sia possibile l'eliminazione degli r parametri dal sistema delle equazioni

$$(1), \quad (1_1) \quad .(1_2) \dots$$

ciò che necessariamente dovrà accadere, come ora andiamo a precisare. Riprendendo a tale scopo le considerazioni del § 3, indichiamo con μ_0 la caratteristica della matrice funzionale delle (1) cioè delle f_i rispetto ai parametri, con μ_1 quella del sistema (1), (1_1) cioè delle funzioni

$$f_i \quad e \quad f_{i;k} ,$$

indi con μ_2 quella del sistema (1), (1_1) e (1_2), ossia delle funzioni

$$f_i \ , \ f_{i;k} \ , \ f_{i;k_1 k_2}$$

e così di seguito. Per quanto abbiamo visto al § 3 i numeri

$$\mu_0\,,\,\mu_1\,,\,\mu_2\,\ldots\ldots,$$

che sono tutti $\leq r$, formano una serie crescente fino al massimo $= r$ (perchè gli r parametri $\underline{a}$ sono per ipotesi essenziali) e da quel punto in poi la serie delle μ è stazionaria. Indichiamo con μ_{s-1} la prima $\mu = r$ ed avremo

$$\mu_0 < \mu_1 < \mu_2 \ldots \mu_{s-2} < \mu_{s-1} = r$$

Il sistema di equazioni

$$(1),\,(1_1)\,,\,(1_2)\,\ldots(1_{s-1})\,.$$

avendo la matrice funzionale dei secondi membri rispetto agli r parametri $\underline{a}$ appunto la caratteristica $\underline{r}$, è certo risolubile rispetto a questi parametri $\underline{a}$, che risulteranno così espressi per le x, le z e le loro derivate fino all'ordine $s-1$. Questi valori delle $\underline{a}$ sostituiti nelle equazioni stesse $(1), (1_1)$ $\ldots (1_{s-1})$ danno luogo ad un numero $\underline{q}$ di equazioni in termini finiti fra le x le z e le loro derivate fino all'ordine $s-1$:

$$(2) \qquad W_j(x\,,\,z_i\,,\,z_{i;k}\,\ldots\ldots z_{i;k_1 k_2 \ldots k_{s-1}}) = 0$$
$$j = 1, 2 \ldots q$$

Questo numero q eguaglia la differenza fra il numero totale delle equazioni $(1), (1_1) \ldots (1_{s-1})$ ed il numero r. Se indichiamo in generale con ε_k il numero delle derivate delle $\underline{z}$ d'ordine k (*), e per simmetria poniamo

(*) Evidentemente è $\varepsilon_k = m\,\dfrac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}$

mo $\xi_0 = m$, avremo

$$(\alpha)\qquad q = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{s-1} - r$$

Consideriamo altresì le successive equazioni (A_s) cioè

$$z_{i;k_1k_2\dots k_s} = f_{i;k_1k_2\dots k_s}(x, a)$$

e poniamo al posto delle $\underline{a}$ le loro espressioni per le x, le z e le derivate fino all'ordine $s-1$; avremo così equazioni del tipo

$$(\beta)\qquad z_{i;k_1k_2\dots k_s} = \psi_i^{(k_1k_2\dots k_s)}(x, z_i, z_{i;k}\dots z_{i;k_1\dots k_{s-1}})$$

mediante le quali tutte le ξ_s derivate parziali d'ordine $\underline{s}$ delle $\underline{z}$ sono espresse per quelle d'ordine inferiore, delle z e delle x. Il sistema di equazioni a derivate parziali (α), (β) è appunto quello che ci proponevamo di costruire.

§ 34

Il sistema (α), (β) come sistema di Mayer. Proprietà di questi sistemi

Riconosciamo subito alcune importanti proprietà di questo sistema ricordando che esso è soddisfatto dalle funzioni date

$$z_i = f_i(x_1 x_2 \dots x_n; a_1 \dots a_r)$$

contenenti $\underline{r}$ costanti essenziali arbitrarie. Se assumiamo oltre le z_i, come altrettante nuove funzioni incognite le derivate delle z fino all'ordine $s-1$, potremo sostituire al sistema $(\alpha)(\beta)$ un sistema perfettamente equivalente di equazioni ai differenziali totali per le $\varrho_0+\varrho_1+\dots+\varrho_{s-1}$ funzioni incognite

$$z_i\ ,\ z_{i;k}\ ,\ z_{i;k_1k_2}\ \dots\dots\ z_{i;k_1\dots k_{s-1}}$$

combinato colle q equazioni in termini finiti fra queste che risultano dalle (α) -

Secondo la teoria delle equazioni ai differenziali totali, il sistema integrale generale può contenere al massimo

$$\varrho_0+\varrho_1+\dots+\varrho_{s-1}-q=r$$

costanti arbitrarie e ne avrà precisamente r solo quando il sistema differenziale sia illimitatamente integrabile - Ma questo massimo r è effettivamente raggiunto dalle espressioni $z_i=f_i(x_1\,x_2\dots x_n;\,a_1\dots a_r)$ (e le loro derivate sino all'ordine $s-1$), onde si conchiude che queste espressioni ci danno l'integrale ~~generale~~ del sistema differenziale, il quale deve essere illimitatamente integrabile -

Dopo ciò vediamo che il sistema di equazioni a derivate parziali (α), (β) gode delle proprietà seguenti:

a) Il sistema permette di esprimere tutte le derivate parziali d'ordine s delle funzioni incognite z per le derivate d'ordine inferiore per le z e le x stesse - È impossibile invece esprimere tutte le derivate d'ordine $s-1$ per quelle d'ordine inferiore (*)

(*) Perchè ciò fosse possibile infatti, bisognerebbe che dalle

b) Derivando le (α), (β) e sostituendovi per le derivate d'ordine s le espressioni (β) ed eliminandone quelle d'ordine $s+1$, si ottengono sole equazioni che sono conseguenze delle (α), (β)(**) stesse. In altro modo si può dire che le conseguenze differenziali del sistema (α), (β) fino all'ordine $s-1$ sono già contenute nel sistema stesso.

In generale un sistema di equazioni simultanee a derivate parziali, che goda delle proprietà a), b), dicesi un sistema di Mayer, perchè la sua integrazione si riduce a quella di un sistema di equazioni ai differenziali totali illimitatamente integrabile, sistemi che Mayer specialmente ha considerato. E infatti se si assumono come altrettante nuove funzioni incognite le derivate prime, seconde etc.. fino all'ordine $s-1$ delle z, si può sostituirvi un sistema di equazioni ai differenziali totali che risulta, per la proprietà b), illimitatamente integrabile. Il numero effettivo di costanti arbitrarie che comporta l'integrale generale è sempre dato da

$$z = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_{s-1} - q$$

---

quazioni (1), (1_1, ... (1_{s-2})
si potessero eliminare le z a per sostituirle nelle 1_{s-1};
ma ciò non è perchè μ_{s-2} ~~$\ge z$~~ -

(**) Ciò segue dall'illimitata integrabilità del sistema di equazioni ai differenziali totali.

Dagli sviluppi del § precedente risulta in generale che: Se un sistema di equazioni simultanee alle derivate parziali è tale che nella espressione del suo integrale generale entri solo un numero finito di costanti arbitrarie, esso è equivalente ad un sistema di Mayer.

Spesse volte è opportuno sostituire alle equazioni (α) di un sistema di Mayer un sistema equivalente ottenuto nel modo seguente. Può darsi che fra le equazioni del sistema (α) ve ne siano di quelle contenenti solo le x, z, ovvero che vi siano di tali equazioni conseguenza del sistema (α). Poniamo che esistano precisamente ν_0 relazioni fra le sole x, z, conseguenza del sistema (α). Per riconoscere il valore di ν_0 basta il calcolo della caratteristica di una matrice cioè della matrice funzionale di

$$W_1 \, , \; W_2 \, , \; --- \; W_q$$

rispetto alle

$$z_{i;k} \, , \; z_{i;k_1k_2} \; --- \; z_{i;k_1k_2 --- k_{s-1}}$$

Se questa caratteristica è data da σ_0 che è necessariamente $\leq q$, sarà

$$\nu_0 = q - \sigma_0 \;(*)$$

(*) L'essere σ_0 quella caratteristica significa che fra le funzioni $W_1, W_2 --- W_q$ le x e le z sussistono $q - \sigma_0 = \nu_0$ relazioni indipendenti le quali per $W_1 = 0$, $W_2 = 0$ --- $W_q = 0$ danno altrettante relazioni fra le x e le z

Similmente indichiamo con ν_1 il numero delle relazioni fra le

$$x\ ,\ z\ ,\ z_{i;k}$$

che seguono dalle (α), non computando le ν_0 precedenti fra le x, z; con ν_2 il numero delle relazioni, conseguenze delle (α), fra le x, z e le derivate prime e seconde - I numeri

$$\nu_0\ ,\ \nu_1\ ,\ \nu_2 \text{------} \nu_{s-1}$$

si calcoleranno come il primo ν_0, osservando i valori delle caratteristiche di matrici funzionali, e si avrà naturalmente

$$\nu_0+\nu_1+\nu_2 - - - - + \nu_{s-1} = q$$

e quindi

$$r=(\varepsilon_0-\nu_0)+(\varepsilon_1-\nu_1)+ - - - - +(\varepsilon_{s-1}-\nu_{s-1})$$

Al sistema (α) potremo sostituire un sistema equivalente formato 1° da ν_0 equazioni che esprimono ν_0 delle z per le rimanenti z e per le x, 2° da ν_1 equazioni che danno ν_1 delle derivate prime delle z espresse per le rimanenti $\varepsilon_1-\nu_1$ per le z e per le x ecc... in generale ν_k delle derivate d'ordine k verranno espresse per le rimanenti $\varepsilon_k-\nu_k$ e per quelle d'ordine inferiore $(k=0, 1, 2, ---s-1)$

E' chiaro che sarà sempre

$$\nu_k < \varepsilon_k\ ;$$

perchè se <u>tutte</u> le ε_k derivate d'ordine k potessero esprimersi per quelle d'ordine inferiore, essendo $k<s$, ciò

ciò contraddirebbe alla prima a) delle proprietà del sistema di Mayer —

§ 35

Le equazioni di definizione di un gruppo G_r

Applichiamo ora le osservazioni generali dei due §§. precedenti alla formazione di quel sistema di equazioni a derivate parziali (del tipo di Mayer) cui soddisfano i coefficienti ξ_i della più generale trasformazione infinitesima

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

del gruppo G_r generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Avendosi

$$(3) \qquad \xi_i = e_1 \xi_{1i} + e_2 \xi_{2i} + \ldots + e_r \xi_{ri}$$
$$i = 1, 2 \ldots n,$$

le ξ contengono linearmente ed omogeneamente le r costanti essenziali arbitrarie $e_1\, e_2 \ldots e_r$ — Secondo quanto si è detto in generale al § 33, si associeranno alle (3) le espressioni

$$(3_1) \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} = e_1 \frac{\partial \xi_{1i}}{\partial x_k} + \ldots \ldots + e_r \frac{\partial \xi_{ri}}{\partial x_k}$$
$$i, k = 1, 2 \ldots n$$

ottenute dalle (3) derivando una prima volta, indi quelle ottenute con due derivazioni:

$$(3_2) \qquad \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l} = e_1 \frac{\partial^2 \xi_{1i}}{\partial x_k \partial x_l} + \text{-----} e_r \frac{\partial^2 \xi_{ri}}{\partial x_k \partial x_l}$$

$$i, k, l = 1, 2 \ldots n$$

E così si seguiterà, protraendo le derivazioni fino a quell'ordine $s-1$ che rende possibile l'eliminazione di tutte le r $\underline{e}$ dalle equazioni

$$(3), (3_1), (3_2) \text{--} (3_{s-1})$$

Ciò darà luogo ad un certo numero

$$q = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \text{---} \varepsilon_{s-1} - r$$

di relazioni fra le ξ_i e le loro derivate fino all'ordine $\underline{s-1}$. E utilizzando poi le seguenti equazioni (3_s) si esprimeranno tutte le ε_s derivate d'ordine $\underline{s}$ delle ξ per le derivate d'ordine inferiore per le ξ e per le x. Essendo le (3) lineari ed omogenee nelle $\underline{e}$, tutte le equazioni del sistema di Mayer che così si ottengono saranno chiaramente lineari ed omogenee nelle ξ e le loro derivate; esse saranno dunque del tipo:

$$(D) \qquad \sum_i^{1 \ldots r} A_{ui} \xi_i + \sum_{i,k} B_{uki} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \text{-----} = 0$$

$$(u = 1, 2, 3 \text{-----})$$

Esse diconsi le equazioni di definizione del gruppo, perchè definiscono l'insieme di tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo e quindi il gruppo stesso -

Supponiamo ora inversamente di avere un sistema di Mayer (I) lineare ed omogeneo nelle n funzioni incognite $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n$ delle n variabili indipendenti e domandiamo come si riconoscerà se le equazioni (I) costituiranno le equazioni di definizione di un gruppo –

Intanto, il sistema (I) essendo di Mayer, nell'integrale generale $\xi_1\ \xi_2 \dots \xi_n$ entrerà un numero finito r di costanti; ma poichè le (I) sono lineari ed omogenee, si potrà porre l'integrale generale sotto la forma

$$\xi_i = \sum_k^{1\dots r} e_k\, \xi_{ki}$$

dove $e_1, e_2 \dots e_r$ sono le r costanti arbitrarie e

$$\xi_{k1},\ \xi_{k2} \dots \xi_{kn} \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

sono r sistemi indipendenti di integrali particolari –

La trasformazione infinitesima

$$\mathfrak{X}f = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

sarà la trasformazione generale di un gruppo G_r se le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \dots r)$$

sono tali che soddisfino alle condizioni di composizione, che cioè l'espressione alternata

$$(X_k, X_l) = \sum_i^{1\dots n} \left\{ X_k(\xi_{li}) - X_l(\xi_{ki}) \right\} \frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_i^{1\dots n} \sum_\nu^{1\dots n} \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{li}}{\partial x_\nu} - \xi_{l\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

si componga linearmente (con coefficienti costanti) colle $X_k f$ stesse. Ciò vuol dire che pel sistema (II) deve aver luogo la terza proprietà

c) Se $(\xi_{k1}, \xi_{k2} \dots \xi_{kn})$, $(\xi_{l1}, \xi_{l2} \dots \xi_{ln})$ sono due particolari soluzioni del sistema (II) anche le espressioni

$$\xi_i = \sum_\nu \left(\xi_{k\nu} \frac{\partial \xi_{li}}{\partial x_\nu} - \xi_{l\nu} \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_\nu} \right)$$

debbono essere soluzioni.

È questa la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di Mayer (II) costituisca le equazioni di definizione di un gruppo G_r.

§ 36

Altro modo di definire un gruppo continuo finito. Cenno sui gruppi continui infiniti

---

In luogo di definire un gruppo continuo finito per mezzo di un sistema (II) di equazioni a derivate parziali di cui i coefficienti della sua generale trasformazione infinitesima sono gli integrali, si può anche formare un sistema di equazioni a derivate parziali del tipo di Mayer a cui soddisfano le funzioni f_i che figurano nelle sue trasformazioni finite

(1) $\qquad x'_i = f_i(x_1, x_2 \dots x_n; a_1\ a_2 \dots a_r)$

Basta per ciò procedere secondo il metodo generale del § 33, eliminando le r costanti $\underline{a}$ fra le (4) e le equazioni (4_1) (4_2) .... che ne seguono per derivazione rispetto alle x sufficientemente protratta. Si costruirà così un sistema di Mayer

$$(5) \qquad W_\lambda\left(x'_1 . x'_2 \ldots\ldots x'_n , \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} , \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_l} \ldots\ldots\right) = 0$$

$$\lambda = 1, 2 \ldots\ldots$$

del quale le (4) costituiranno l'integrale generale.

A causa della proprietà caratteristica di un gruppo, un tale sistema (5) di Mayer è così costituito che se

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_i(x_1, x_2 \ldots x_n) \\ \psi_i(x_1, x_2 \ldots x_n) \end{array}\right\} i = 1, 2 \ldots n$$

ne sono due particolari soluzioni, anche le funzioni

$$\psi_i\left(\varphi_1(x) . \varphi_2(x) \ldots \varphi_n(x)\right)$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

ne daranno una nuova soluzione

Le proprietà precedenti, convenientemente estese, servono a Lie per definire i gruppi continui infiniti.

Suppongasi di avere ancora un sistema di equazioni

$$(5^*) \qquad W\left(x'_1 , x'_2 \ldots x'_n , \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} , \frac{\partial^2 x'_i}{\partial x_k \partial x_l} \ldots\ldots\right) = 0$$

ma che l'integrale generale di un tale sistema non dipenda da un numero finito di costanti arbitrarie (non equivalga ad un sistema di Mayer), bensì da un numero infinito di tali costanti o, per adoperare un linguaggio più preciso, nel suo integrale generale entrino delle funzioni arbitrarie. Allora se al sistema competerà ancora la proprietà superiore che due soluzioni particolari

$$\varphi_1(x_1\, x_2 --- x_n)\ ,\ \varphi_2(x_1\, x_2 --- x_n) ---- \varphi_n(x_1 -- x_n)$$

$$\psi_1(x_1 --- x_n)\ ,\ \psi_2(x_1 -- x_n) ---- \psi_n(x_1 -- x_n)$$

diano luogo per composizione ad una terza soluzione

$$\psi_1(\varphi_1(x), \varphi_2(x) -- \varphi_n(x)) ; ---- \psi_n(\varphi_1(x) --- \varphi_n(x)),$$

le trasformazioni finite date dall'integrale generale

$$x_i' = \theta_i(x_1, x_2 --- x_n)$$

si diranno costituire un gruppo continuo infinito -

Così, come già abbiamo accennato al § 4, il concetto di gruppo continuo infinito viene limitato da Lie nel senso che le trasformazioni finite del gruppo debbono esser date dagli integrali di un sistema (5^*) di equazioni a derivate parziali -

Per illustrare queste definizioni con esempi, osserviamo che la totalità delle trasformazioni della forma

(6) $x_1' = \theta_1(x_1)\ ,\ x_2' = \theta_2(x_2)\ , ------ \ x_n' = \theta_n(x_n)$

dove la θ_i è una funzione arbitraria dell'argomento x_i, formano evidentemente un gruppo nel senso ge=

-nerale ed anche un gruppo continuo infinito nel senso di Lie. Le (6) danno infatti l'integrale generale del sistema di equazioni a derivate parziali

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = 0 \,, \text{ per } i \neq k \,.$$

Invece se nelle (6) prendiamo per $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$ la medesima funzione arbitraria θ, è chiaro che le formole

(6*) $\quad x'_1 = \theta(x_1),\ x'_2 = \theta(x_2) \dots x'_n = \theta(x_n)$

definiscono ancora un gruppo nel senso generale, ma non un gruppo infinito di Lie perchè, stante l'arbitrarietà della θ, è impossibile definire le (6*) come integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali.

Esempi notevoli di gruppi continui infiniti nel senso di Lie sono il gruppo delle trasformazioni conformi (che conservano gli angoli) nel piano — Le equazioni finite del gruppo:

$$x' = x'(x,y) \quad , \quad y' = y'(x,y)$$

sono caratterizzate dal sistema ben noto di equazioni a derivate parziali del 1° ordine:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 \,,$$

che esprime essere $x'+iy'$ funzione della variabile complessa $x+iy$ — In secondo luogo il gruppo delle trasformazioni equivalenti (che conservano le aree) caratterizzate dall'unica equazione del 1° ordine

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}=1$$

Accenniamo in fine che un gruppo continuo infinito di Lie si può egualmente definire per mezzo di un sistema lineare omogeneo alle derivate parziali, come il sistema (D) del §35, cui soddisfano i coefficienti ξ_i delle sue trasformazioni infinitesime.

Ad un tale sistema (D) deve ancora appartenere la proprietà c) del § 35; ma il sistema stesso non deve essere più un sistema di Mayer, dovendo entrare nel suo integrale generale delle funzioni arbitrarie.

Così pel gruppo delle trasformazioni conformi, essendo ξ, η i coefficienti della più generale trasformazione infinitesima, le equazioni di definizione del gruppo sono

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial y}\quad,\quad\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,$$

e per quelle del gruppo delle trasformazioni equivalenti si riducono all'unica

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}=0\ .$$

Si verificherà subito che sussiste qui appunto la proprietà c) del §35.

§ 37
Ordine di una trasformazione infinitesima

Dopo questa digressione sui gruppi infiniti ritorniamo ai gruppi continui finiti G_r — I coefficienti ξ_i di una trasformazione infinitesima qualunque

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

del gruppo sono funzioni analitiche delle x e sviluppabili quindi in serie di Taylor procedente per le potenze intere e positive di

$$x_1 - x_1^{(0)}, \; x_2 - x_2^{(0)} \dots x_n - x_n^{(0)},$$

essendo $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ un punto fisso nell'intorno del quale le funzioni ξ sono regolari — Siano

$$(7) \qquad \xi_i = \alpha_i + \sum_k \beta_{ik} (x_k - x_k^{(0)}) + \sum_{kl} \gamma_{ikl} (x_k - x_k^{(0)})(x_l - x_l^{(0)}) + \dots$$

$$+ \dots\dots\dots$$

questi sviluppi, dove le α_i, β_{ik}, $\gamma_{ikl} \dots$ sono coefficienti costanti — Se per tutte le ξ_i mancano tutti i termini degli ordini

$$0, 1, 2, \dots s-1$$

ma non tutti quelli d'ordine $\underline{s}$ diremo per abbreviare che la trasformazione Xf, nel punto $(x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ è d'ordine $\underline{s}$ —

Così la Xf sarà d'ordine zero se non sono nulle negli sviluppi (7) tutte le α, d'ordine 1 se son nulle tutte le α ma non tutte le β, e così via. In generale una trasformazione che non sia d'ordine zero si dirà d'ordine superiore.

È importante osservare che l'ordine di una trasformazione infinitesima non muta se si cangiano comunque le variabili su cui opera il gruppo.

Supponiamo infatti che la trasformazione infinitesima Xf sia d'ordine k nel punto $x_i^{(0)}$ che per semplicità di scrittura poniamo nell'origine $(0, 0 - - - 0)$. Ponendo in evidenza nello sviluppo di Xf i termini d'ordine più basso avremo

$$Xf = \sum_i^{1 \dots n} \left(\xi_i^{(k)} + - - - \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

dove le $\xi_i^{(k)}$ sono forme di grado k nelle x, non tutte nulle, e i termini non scritti sono d'ordine superiore a k.

Cangiamo le variabili x nelle y e siano

$$(8) \qquad y_i = \sum_\lambda a_{i\lambda} x_\lambda + - - -$$

gli sviluppi delle y in serie di potenze delle x, dove il determinante delle a (coefficienti delle prime potenze) sarà $\neq 0$, perchè supponiamo le formole invertibili nell'intorno dell'origine e il detto determinante non è altro che il valore nell'origine del determinante funzionale

$$\frac{\partial (y_1 y_2 - - - y_n)}{(x_1 x_2 - - - x_n)}$$

Mutando le variabili x nelle y, la $\mathfrak{X}f$ si trasforma (§ 11) in

$$\mathfrak{X}f = \Sigma X(y_i)\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

e per valutare l'ordine della $\mathfrak{X}f$ nelle y (nell'origine) bisogna sviluppare i coefficienti $\mathfrak{X}y_i$ in serie di potenze delle y ed osservare quale è l'ordine più basso dei termini che rimangono. Intanto, sviluppando $\mathfrak{X}y_i$ per potenze delle x, si ha

$$\mathfrak{X}y_i = \sum_\lambda a_{i\lambda}\xi_\lambda^{(k)} + \cdots$$

e i termini d'ordine più basso sono d'ordine k nelle x, nè possono tutti sparire perchè non tutte le $\xi^{(k)}$ sono nulle ed i $|a_{i\lambda}| \neq 0$. Invertendo le (8), le x si esprimono per serie di potenze delle y dove non mancano i termini di primo ordine e quindi esprimendo le $\mathfrak{X}y_i$ per le y anzichè per le x l'ordine rimane sempre $= k$, c. d. d.

Paragoniamo ora due trasformazioni infinitesime

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$Yf = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

di ordini rispettivi h, k e formiamo la trasformazione infinitesima alternata

$$(X, Y) = \sum_i [X(\eta_i) - Y(\xi_i)]\frac{\partial f}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_i \sum_\lambda \left(\xi_i \frac{\partial \eta_i}{\partial x_\lambda} - \eta_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\lambda} \right) \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

Poichè le ξ, η sono dei rispettivi ordini h, k, e la derivazione fa diminuire l'ordine di un'unità, si vede che spariscono certamente nella (X, Y) tutti i termini di ordine inferiore ad $h+k-1$ senza che si possa escludere che spariscano ancora i termini d'ordine $h+k-1$ o d'ordine superiore -

Si ha quindi il teorema: Se le due trasformazioni Xf, Yf sono degli ordini h, k, la trasformazione alternata (X, Y) è almeno d'ordine $h+k-1$ (*) -

Ne segue che se le due trasformazioni sono ciascuna d'ordine >1, l'alternata (X, Y) ha certamente un ordine superiore a quello dell'una e dell'altra trasformazione -

§ 38

Distribuzione degli ordini delle trasformazioni infinitesime di un gruppo

---

Siano

$$X_1 f \ , X_2 f, \text{-----} X_r f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di un

(*) Che non si possa in generale precisare l'ordine della (X, Y) risulta chiaro se si pensa che può anche essere identicamente $(X, Y) = 0$

gruppo G_r – Dato il gruppo G_r, queste trasformazioni infinitesime generatrici non sono perfettamente determinate, ma possono essere sostituite da r loro combinazioni lineari omogenee a coefficienti costanti, purchè indipendenti; in altre parole le $X_1f, X_2f \dots X_rf$ sono determinate solo a meno di una sostituzione lineare omogenea (a coefficienti costanti) di determinante non nullo.

Ora fissato un punto qualunque $x_i^{(0)}$ dello spazio, nell'intorno del quale i coefficienti ξ_{ki} delle X_kf siano regolari, si possono scegliere le trasformazioni generatrici in guisa che i loro ordini offrano una successione perfettamente determinata dal punto, ciò che si ottiene nel modo seguente.

Una trasformazione infinitesima qualunque del gruppo è data da

$$(8) \qquad \lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \dots + \lambda_r X_r f$$

colle λ costanti e noi cerchiamo in primo luogo quante di queste trasformazioni, linearmente indipendenti e d'ordine ≥ 0 vi sono nel gruppo. Per ciò dovremo eguagliare a zero nello sviluppo della espressione (8) per serie di potenze di

$$x_1 - x_1^{(0)},\ x_2 - x_2^{(0)} \dots x_n - x_n^{(0)}$$

tutti i termini costanti, ciò che darà un certo numero k di equazioni lineari omogenee nelle λ.(*)

(*) Questo numero k sarà al massimo n e potrà an-

Se diciamo τ_0 la caratteristica di questo sistema lineare, nelle cercate trasformazioni si potranno prendere ad arbitrio $r-\tau_0$ delle λ e le altre τ_0 saranno determinate (linearmente ed omogeneamente) da queste, cioè: esisteranno precisamente nel gruppo $r-\tau_0$ trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine >0 - Assumendole come le $r-\tau_0$ ultime delle $X_k f$, cioè come $X_{\tau_0+1} f, \dots X_r f$, le prime τ_0 che indichiamo con

$$X_1^{(0)} f\, ;\ X_2^{(0)} f \dots\dots X_{\tau_0}^{(0)} f$$

saranno tutte di ordine zero e nessuna loro combinazione lineare avrà un ordine superiore.

Cerchiamo ora fra le combinazioni lineari di

$$X_1^{(0)} f, X_2^{(0)} f \dots X_{\tau_0}^{(0)} f; X_{\tau_0+1} f, \dots X_r f$$

quante indipendenti vi ne sono d'ordine >1 - In una tale combinazione lineare non potranno entrare le prime τ_0 perchè essa sarebbe allora d'ordine zero; giacchè è di quest'ordine la parte proveniente da $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)} \dots X_{\tau}^{(0)}$ e la rimanente è invece d'ordine >0. Le combinazioni cercate avranno dunque la forma

$$(9) \qquad \mu_1 X_{\tau_0+1} + \mu_2 X_{\tau_0+2} + \dots + \mu_{r-\tau_0} X_r\,,$$

colle μ costanti - Nello sviluppo della (9) per serie sono nulli i termini costanti e scrivendo che sono nulli anche tutti quelli del 1° ordine, avremo un si-

---

che scendere a zero, ove tutte le $X_i f$ siano di ordine superiore -

stema di equazioni lineari nelle u, la cui caratteristica indicheremo con r_1. – Le espressioni (9) indipendenti e d'ordine >1 sono allora $r - r_0 - r_1$. – Sostituendo queste ad $r - r_0 - r_1$ delle $X_{r_0+1} \dots X_r$, le rimanenti r_1 che indicheremo con

$$X_1^{(1)}f,\ X_2^{(1)}f, \dots\dots X_{r_1}^{(1)}f$$

saranno tutte d'ordine $=1$ e nessuna loro combinazione sarà d'ordine maggiore. Proseguendo nello stesso modo verremo evidentemente a scegliere le trasformazioni generatrici disposte in sistemi comprendenti ciascuno trasformazioni del medesimo ordine e tali che ogni combinazione lineare delle trasformazioni d'ordine r_k d'uno stesso sistema avrà pure l'ordine r_k e non mai un ordine superiore.

Indicando con

$$(\gamma)\quad [X_1^{(0)} X_2^{(0)} \dots X_{r_0}^{(0)}],\ [X_1^{(1)} X_2^{(1)} \dots X_{r_1}^{(1)}] \dots\dots [X_1^{(k)} X_2^{(k)} \dots X_{r_k}^{(k)}]$$

$$\dots\dots [X_1^{(l)} X_2^{(l)} \dots X_{r_l}^{(l)}]$$

questi sistemi, avremo evidentemente

$$r = r_0 + r_1 + \dots + r_k + \dots + r_l$$

Il calcolo di questi numeri

$$r_0 \ r_1 \dots\dots r_l$$

si fa nel modo più semplice, riducendosi a calcolare caratteristiche di matrici. In generale, siccome $r - r_0 - r_1 \dots - r_k$ è il numero delle trasformazioni infinitesime del gruppo linearmente indipendenti e d'ordine r_k, si calcolerà questo numero dalla caratteristica del sistema lineare nelle λ che si ha eguagliando a zero, nello sviluppo dell'espressione

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \cdots + \lambda_r X_r f,$$

tutti i termini d'ordine $0, 1, 2, \ldots k$; tale caratteristica sarà appunto $\tau_0 + \tau_1 + \cdots + \tau_k$ - Siccome i termini iniziali dello sviluppo di $\sum_k \lambda_k X_k f$ sono evidentemente

$$\sum_k \lambda_k \xi_{ki}(x^{(0)}),$$

così τ_0 sarà la caratteristica della matrice

$$\mathfrak{M} = \left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x^{(0)}) & \xi_{12}(x^{(0)}) & \cdots & \xi_{1n}(x^{(0)}) \\ \xi_{21}(x^{(0)}) & \xi_{22}(x^{(0)}) & \cdots & \xi_{2n}(x^{(0)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x^{(0)}) & \xi_{r2}(x^{(0)}) & \cdots & \xi_{rn}(x^{(0)}) \end{matrix} \right\|$$

Analogamente $\tau_0 + \tau_1$ sarà la caratteristica della matrice $\mathfrak{M}_1$ formata aggiungendo ad $\mathfrak{M}$ altrettante colonne formate con tutte le derivate prime delle ξ_{ki} e così via -

È da osservarsi che siccome l'ordine di una trasformazione infinitesima non muta cangiando le variabili (§ 37), anche i numeri $\tau_0\ \tau_1 \ldots \tau_k$ dipenderanno solo dal gruppo e dal punto a cui sono relativi non mutando al cangiare di coordinate -

Osserviamo in fine che, una volta scelte le r trasformazioni infinitesime generatrici di G_r nel modo indicato nel quadro (γ), si calcolerà subito l'ordine di qualunque trasformazione infinitesima del gruppo — Questa sarà una loro combinazione lineare e il suo ordine eguaglierà l'ordine più basso dei sistemi le cui trasformazioni vi figurano effettivamente —

§ 39

Calcolo dei numeri τ dalle equazioni di definizione del gruppo

La serie di numeri

$$\tau_0 \quad \tau_1 \ldots\ldots \tau_l$$

è dapprima relativa al punto $x_i^{(0)}$, nell'intorno del quale si eseguiscono gli sviluppi in serie delle trasformazioni infinitesime, e può cambiare quando si cangia il punto —

Ma se i punti che si confrontano sono scelti nello spazio in modo generale, evitando soltanto di farli cadere sopra certe varietà eccezionali, che ora definiremo più da vicino, le due serie di numeri τ rimarranno sempre le stesse — Per dimostrarlo costruiamo le matrici M, M_1, M_2 ...... del § precedente lasciando le $x^{(0)}$ variabili comunque ed indicandole dunque con x :

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{M}_0 = \left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) \end{matrix} \right\| \\[2em]
\mathfrak{M}_1 = \left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) & \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_{1n}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) & \frac{\partial \xi_{r1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_{rn}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \\[2em]
\mathfrak{M}_2 = - - - - - - - - -
\end{array}\right.$$

e siano r_0, r_0+r_1, $r_0+r_1+r_2$, ... le loro rispettive caratteristiche. Siccome, in virtù delle equazioni di definizione del gruppo (§ 35), per qualunque delle sue trasformazioni infinitesime

$$Xf = \sum_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

le derivate s^{me} delle ξ si esprimono linearmente ed omogeneamente per quelle d'ordine inferiore risulta da quanto abbiamo detto al § 3 (*) che i numeri

$$r_0\,,\ r_1\,,\ r_2\ \dots\dots\ r_{s-1}$$

sono tutti diversi da zero ed i seguenti tutti nulli mentre

$$r_0+r_1+\dots\dots+r_{s-1}=r$$

(*) Basta applicare quei teoremi generali prendendo per le funzioni f le ξ_i che contengono gli r parametri essenziali e nelle loro espressioni $\xi_i = \sum_k e_k\, \xi_{ki}$

Ora finchè diamo ad $x^{(0)}$ una posizione tale che le caratteristiche delle corrispondenti matrici conservino i loro valori generici che hanno per le x variabili, è chiaro che i numeri r avranno sempre i medesimi valori. Le varietà eccezionali sopra accennate sono dunque quelle che eventualmente si ottengono eguagliando a zero tutti i minori d'ordine r_0 di $\mathfrak{M}_0$ o tutti quelli d'ordine r_0+r_1 di $\mathfrak{M}_1$, ec... Così è dimostrato quanto sopra abbiamo asserito rispetto all'invariabilità dei numeri r.

Per calcolare i valori dei numeri r col metodo precedente occorre conoscere le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo. Ora importa osservare che si può anche eseguire questo calcolo conoscendo soltanto le equazioni di definizione del gruppo, nella qual cosa ci limiteremo a calcolare i valori generici delle r.

Prendiamo queste equazioni (D) § 35 e, nel modo indicato al § 34, operiamo la risoluzione del sistema rispetto a ν_0 delle ξ, a ν_1 delle loro derivate prime, a ν_2 delle derivate seconde ...., ν_{s-1} delle derivate d'ordine $s-1$ e in fine a tutte le ξ derivate d'ordine s.

Osserviamo subito che nelle equazioni lineari (D) così risolute compariranno in generale certe funzioni delle $\underline{x}$ ai denominatori onde potrà darsi che in un punto $x_i^{(0)}$ ove sono regolari le ξ_{ki} non lo siano invece i coefficienti delle (D) risolute. Intendiamo che il punto $x_i^{(0)}$ attorno al quale effettuiamo lo sviluppo in serie di potenze delle ξ_i non appartenga a questa classe particolare. Se questo sviluppo è dato da:

$$\xi_i = c_i + \sum_k c_{ik}(x_k - x_k^{(0)}) + \sum_{kl} c_{ikl}(x_k - x_k^{(0)})(x_l - x_l^{(0)}) + \ldots\ldots$$

i primi coefficienti c_i non sono altro che i valori delle ξ nel punto $x_i^{(0)}$, i secondi c_{ik} quelli delle loro derivate prime, i seguenti c_{ikl} (salvo fattori numerici) quelli delle derivate seconde e così via. Ora i valori iniziali delle ξ e loro derivate fino all'ordine $s-1$ sono unicamente vincolati dalle equazioni di definizione che lasciano arbitrari

$\varepsilon_0 - \nu_0$ coefficienti c_i dei termini d'ordine zero,
$\varepsilon_1 - \nu_1$ coefficienti dei termini di 1° ordine
$\varepsilon_2 - \nu_2$ " " di 2° ordine

— — — — — — — — — — — — — — — — —

ε_{s-1} ν_{s-1} " " di $(s-1)^{mo}$ ordine,

mentre quelli dei termini d'ordine s e superiori si esprimono tutti linearmente ed omogeneamente per questi.

Dunque intanto se negli sviluppi delle ξ si annullano tutti i coefficienti dei termini fino all'ordine $s-1$, si annullerebbero anche tutti i seguenti e le ξ sono per ciò identicamente nulle; ne concludiamo: Se nel punto $x_i^{(0)}$ si comportano regolarmente i coefficienti delle equazioni di definizione del gruppo risolute, non esiste nel gruppo alcuna trasformazione d'ordine s o superiore. Per un dato punto generico esiste dunque un limite superiore $s-1$ per l'ordine delle trasformazioni infinitesime del gruppo, come risulta anche da quanto si è detto sopra.

Cerchiamo ora in generale quante trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine $\geq k$ vi sono nel gruppo (dove naturalmente si suppone $k < s-1$). Perciò dovremo uguagliare nello sviluppo di ξ_i tutti i coefficienti dei termini degli ordini $0, 1, 2 \ldots k$ e resteranno quindi arbitrarî

$$(\varepsilon_{k+1} - \nu_{k+1}) + (\varepsilon_{k+2} - \nu_{k+2}) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

coefficienti in tutti i termini d'ordine superiore a k; altrettante saranno dunque le trasformazioni infinitesime indipendenti d'ordine $\geq k$. Per quanto si è visto alla fine del § precedente è adunque

$$r - r_0 - r_1 - \cdots - r_k = (\varepsilon_{k+1} - \nu_{k+1}) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

Supposto $k > 0$ possiamo cangiare in questa k in $k-1$ e sottraendo deduciamo

$$(10) \qquad r_k = \varepsilon_k - \nu_k$$

Questa formola dimostrata così per $k > 0$ vale anche per $k = 0$, giacchè si ha

$$r - r_0 = (\varepsilon_1 - \nu_1) + (\varepsilon_2 - \nu_2) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

e per la (2*) § 34

$$r = (\varepsilon_0 - \nu_0) + (\varepsilon_1 - \nu_1) + \cdots + (\varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1})$$

Colla (10) si calcolano effettivamente, come si voleva, i numeri caratteristici

$$\tau_0\,,\ \tau_1\,,\ \tau_2 \ldots\ \tau_{s-1}$$

unicamente conoscendo le equazioni di definizione del gruppo - Abbiamo dunque il teorema: Se le equazioni di definizione del gruppo possono risolversi rispetto a ν_0 delle ξ, a ν_1 delle derivate prime, ν_2 delle derivate seconde ...., ν_{s-1} delle derivate d'ordine $s-1$ e a tutte le derivate di ordine s, i valori (generici) dei numeri caratteristici τ, per ogni punto ove i coefficienti delle equazioni risolute si comportano regolarmente sono dati da

$$\tau_0 = \varepsilon_0 - \nu_0\ ,\quad \tau_1 = \varepsilon_1 - \nu_1\,,\ \text{-----}\ \ \tau_{s-1} = \varepsilon_{s-1} - \nu_{s-1}\,,$$

indicando con ε_k il numero totale delle derivate d'ordine k delle ξ -

Indirettamente risulta di qui che nei punti delle varietà eccezionali definite al principio del paragrafo i coefficienti delle equazioni (II) risolute non possono comportarsi regolarmente -

§. 40

Sottogruppi di G_r generati dalle trasformazioni degli ordini superiori

---

Qualunque sia il punto $x_i^{(0)}$ rispetto al quale consideriamo i diversi ordini delle trasformazioni infinitesime generatrici di G_r, potremo scegliere queste nel modo indicato nel quadro (γ) al § 38 - Questa distribuzione delle trasformazioni generatrici di G_r pone in evidenza l'esistenza in G_r di speciali sottogruppi (*). Consideriamo infatti quelle trasformazioni infinitesime di G_r i cui ordini superano un dato ordine k; esse si compongono linearmente con quelle trasformazioni del quadro (γ) che si ottengono sopprimendo i primi $k+1$ sistemi, cioè con

$$(10)\quad [X_1^{(k+1)} X_2^{(k+1)} \cdots\cdots X_{r_{k+1}}^{(k+1)}] \cdots\cdots\cdots\cdots [X_1^{(l)} X_2^{(l)} \cdots\cdots X_{r_l}^{(l)}].$$

Ora se per due qualunque trasformazioni $X_i^{(p)}$, $X_j^{(q)}$ di questo quadro si costruisce l'espressione alternata

$$[X_i^{(p)} X_j^{(q)}]$$

questa, pel teorema alla fine del § 37, sarà almeno d'ordine $p+q-1$ e quindi certamente d'ordine $> k$; essa sarà conseguentemente una combinazione lineare delle trasformazioni stesse in (10) - Applicando allora il secondo teorema fondamentale (§ 23), vediamo che le trasformazioni (10), le quali sono in numero di

$$r - r_0 - r_1 - \cdots\cdots - r_k$$

<u>generano un gruppo</u> con altrettanti parametri, che

(*) Col nome di sottogruppo di un gruppo G si indica un gruppo le cui operazioni sono tutte contenute in G

è adunque un sottogruppo di G_r. Si ha quindi il teorema: Quelle trasformazioni infinitesime di G_r che hanno un ordine superiore ad un ordine fissato k generano un sottogruppo di G_r con $r-r_0-r_1-\dots-r_k$ parametri, i numeri r_i avendo il significato fissato al § 38.

Il caso particolare più importante, che vogliamo ora specialmente considerare, è quello di $k=0$, ove le trasformazioni d'ordine >0 generano un sottogruppo con $r-r_0$ parametri - Si osservi che essendo r_0 la caratteristica della matrice

$$\left\|\begin{matrix} \xi_{11}(x^0) & \dots\dots\dots & \xi_{1n}(x^0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x^0) & \dots\dots\dots & \xi_{rn}(x^0) \end{matrix}\right\|$$

si ha certamente $r_0 \leq n$ per cui se supponiamo $n<r$, abbiamo $r-r_0 \geq r-n$, onde il teorema:

Ogni gruppo G_r ad r parametri sopra $n<r$ variabili possiede certamente sottogruppi con $r-n$ o più parametri

Consideriamo in generale il sottogruppo G_{r-r_0} generato dalle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore rispetto al punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)}\, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$, che per semplicità assumiamo nell'origine $(0, 0, \dots 0)$

Ogni trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

gode della proprietà che in P_0 si annullano contemporareamente le ξ e perciò la direzione della caratteristica fissata dalle proporzioni

$$dx_1 : dx_2 : \ldots\ldots : dx_n = \xi_1 : \xi_2 : \ldots\ldots : \xi_n$$

resta ivi indeterminata - Gli incrementi

$$\xi_1 \delta t\ ,\ \xi_2 \delta t\ , \ldots\ldots \xi_n \delta t$$

che ricevono le coordinate di P_0 applicandovi la trasformazione infinitesima sono evidentemente nulli, cioè la Xf lascia stazionario il punto P_0 - Ma facilmente vediamo che non solo per la trasformazione infinitesima Xf, ma anche per le trasformazioni finite del gruppo G_1 ad un parametro generato da Xf resta P_0 stazionario (fisso) - Basta invero applicare la formola fondamentale (17) § 10

$$x_i' = x_i + t\, X x_i + \frac{t^2}{1.2} X^2 x_i + \ldots\ldots$$

facendovi $x_i = 0$ ed osservando che per le $x_i = 0$ si annullano le ξ e quindi tutte le

$$Xf = \Sigma\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad X^2 f = \left(\Sigma\, \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \ldots\ldots \text{(*}$$

(*) In altro modo anche così: Le equazioni in termini finiti del gruppo G_1 si ottengono integrando le equazioni

$$\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i (x_1', x_2' \ldots\ldots x_n')$$

colle condizioni iniziali

$$x_i' = 0 \quad \text{per } t = 0$$

Ma poichè tutte le ξ si annullano per le $x' = 0$, il sistema $x_i' = 0$ per t qualunque è un sistema integrale ed è quindi l'unico possibile

Risulta di qui che le trasformazioni finite di G_{r-r_0} lasciano fisso il punto P_0. Ora è a priori evidente che tutte quelle trasformazioni di G_r che lasciano fisso P_0 formano un sottogruppo a coppie di trasformazioni inverse e contenente quindi in ogni caso un gruppo di Lie G_{r-r}, che si vede subito coincidere con G_{r-r_0}, poiché le trasformazioni infinitesime generatrici di G_{r-r} debbono lasciare P_0 stazionario ed essere quindi d'ordine >0. Dunque: Il sottogruppo G_{r-r_0} generato dalle $r-r_0$ trasformazioni infinitesime di G_r d'ordine superiore rispetto a P_0 consta di quelle trasformazioni finite di G_r che lasciano fisso P_0. Lo diremo perciò il sottogruppo di stabilità del punto P_0.

Quando siano note le equazioni finite

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n ; a_1, a_2 \ldots\ldots a_r)$$
$$i = 1, 2 \ldots\ldots n$$

del gruppo G_r, si trovano subito anche quelle del sottogruppo G_{r-r_0} che lascia fisso un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} x_2^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$; basterà infatti legare gli r parametri $\underline{a}$ colle relazioni

$$x_i^{(0)} = f_i\,(x_1^{(0)} \ldots\ldots x_n^{(0)} ; a_1 \ldots ; a_r),$$

e se queste costituiscono r_0 relazioni indipendenti fra le $\underline{a}$ rimarranno $r-r_0$ parametri liberi e il detto sottogruppo avrà appunto $r-r_0$ parametri (*).

(*) Può darsi anche che sia $r_0 = r$ e quindi il sottogruppo

Già dal § 38 risulta come si calcolano le $r-r_0$ trasformazioni generatrici del sottogruppo G_{r-r_0} - Qui vogliamo esprimerle sotto nuova forma nell'ipotesi che r_0 abbia il suo valore generico, cioè eguagli la caratteristica h della matrice

$$\alpha)\quad \left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x) & \xi_{22}(x) & \cdots\cdots & \xi_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x) \end{matrix} \right\|$$

Poniamo, per fissare le idee, che sia diverso da zero il minore principale d'ordine h

$$\begin{vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \cdots\cdots & \xi_{1h}(x^0) \\ \xi_{21}(x^0) & \cdots\cdots & \xi_{2h}(x^0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{h1}(x^0) & \cdots\cdots & \xi_{hh}(x^0) \end{vmatrix}$$

e quindi anche

$$\beta)\quad \begin{vmatrix} \xi_{11}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1h}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{h1}(x) & \cdots\cdots & \xi_{hh}(x) \end{vmatrix}$$

Allora per le prime h trasformazioni infinite-

(*) che lascia fermo P_0 si riduce alla sola identità o ad un gruppo discontinuo - In tal caso restringendo il campo di variabilità dei parametri attorno ai valori corrispondenti all'identità si potrà ridurre il sottogruppo alla sola identità -

sime $X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_h f$ (considerate come forme linea-ri nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$) non passa alcuna relazione lineare della forma

$$\chi_1 X_1 f + \chi_2 X_2 f + \cdots + \chi_h X_h f = 0$$

colle χ funzioni delle x;(*) ma invece tutte le seguenti $X_{h+1} f, \ldots\ldots X_r f$ si esprimono linearmente ed omogeneamente, con coefficienti variabili, per $X_1, X_2 \ldots X_h$ —

Se poniamo

$$X_{h+j} f = \varphi_{j1} X_1 f + \varphi_{j2} X_2 f + \cdots + \varphi_{jh} X_h f$$

$$j = 1, 2, \ldots r-h,$$

saranno le φ funzioni delle x date da quozienti di minori d'ordine h della matrice α) il denominatore essendo il minore β), che è diverso da zero non solo per le x qualunque, ma anche per $x = x^0$ —

Allora le $r-h$ trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_{h+j} f - \varphi_{j1}(x^0) X_1 f - \varphi_{j2}(x^0) X_2 f - \cdots - \varphi_{jh}(x^0) X_h f.$$

$$j = 1, 2 \ldots r-h$$

hanno tutte un ordine superiore a zero e sono quindi le cercate trasformazioni generatrici del sottogruppo G_{r-h} (o G_{r-r_0}) che lascia fisso P_0 —

(*) Per le χ costanti ciò si intende da sè e vale per qualunque h essendo $X_1 f \ldots\ldots X_r f$ trasformazioni indipendenti.

§ 41

Esempio del gruppo dei movimenti

Per illustrare le teorie esposte nel presente capitolo prendiamo un esempio semplicissimo, quello del gruppo dei movimenti dello spazio che è a 6 parametri ed è quindi generato da sei trasformazioni infinitesime che si tratta di calcolare. Basta per ciò considerare le tre traslazioni infinitesime lungo gli assi coordinati e le tre rotazioni infinitesime attorno a questi. Esse sono date da

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_4 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_5 f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_6 f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}$$

Le espressioni alternate hanno i valori

$$\left\{\begin{array}{l}
(X_1X_2)=0\ ,\ (X_1X_3)=0\ ,\ (X_2X_3)=0 \\
(X_1X_4)=-X_2\ ,(X_2X_5)=-X_3\ ,\ (X_3X_6)=-X_1 \\
(X_1X_5)=0\ ,\ (X_2X_6)=0\ ,\ (X_3X_4)=0 \\
(X_4X_5)=X_6\ ,(X_5X_6)=X_4\ ,\ (X_6X_4)=X_5 \\
(X_1X_6)=X_3\ ,\ (X_2X_4)=X_1\ ,\ (X_3X_5)=X_2
\end{array}\right.$$

che sono combinazioni lineari delle X; questo, se già non lo sapessimo, ci direbbe che quelle sei trasformazioni infinitesime generano un gruppo.

Formiamo, secondo il §35, le equazioni di definizione del nostro gruppo eliminando per derivazione le 6 costanti e dai valori dei coefficienti ξ nella espressione della più generale trasformazione infinitesima del gruppo:

$$Xf = e_1 X_1 f + \cdots\cdots + e_6 X_6 f$$

Abbiamo

$$\begin{cases} \xi_1 = e_1 + e_4 y - e_6 z \\ \xi_2 = e_2 - e_4 x + e_5 z \\ \xi_3 = e_3 - e_5 y + e_6 x \end{cases}$$

e derivando ed eliminando le e abbiamo per le equazioni di definizione del gruppo le 6 seguenti del 1° ordine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_3}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x} = 0 \;, \quad \dfrac{\partial \xi_2}{\partial z} + \dfrac{\partial \xi_3}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial \xi_3}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi_1}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

insieme con quelle del 2° ordine che risultano dall'eguagliare a zero tutte le derivate seconde. Qui abbiamo evidentemente $s = 2$

$$\varepsilon_0 = 3 \qquad \varepsilon_1 = 9$$
$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 6$$

indi

$$\sigma_0 = 3 \qquad \sigma_1 = 3$$

Siccome i coefficienti delle nostre equazioni di definizione risolute sono tutti costanti, e si comportano sempre regolarmente, non vi sono punti eccezionali e per ogni punto dello spazio abbiamo tre trasformazioni infinitesime di ordine zero e tre di 1° ordine, nessuna di ordine superiore. Così p. e. per l'origine le prime tre sono

$$X_1 f \quad X_2 f \quad X_3 f$$

e le seconde

$$X_4 f \quad X_5 f \quad X_6 f$$

Queste generano dunque il sottogruppo a tre parametri che lascia fisso l'origine, cioè il gruppo delle rotazioni attorno a questo. Per un punto qualunque dello spazio basta naturalmente sostituire alle tre ultime le altre

$$(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial y}\,, \quad (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial y} - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial z} - (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial x}$$

Se invece di considerare il gruppo dei movimenti dello spazio consideriamo quello G_3 del piano, abbiamo per le sue trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$X_3 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}$$

con

$$(X_1 X_2) = 0\,, \quad (X_1 X_3) = -X_2 f\,, \quad (X_2 X_3) = X_1 f$$

Le equazioni di definizione del gruppo sono

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = 0 ,$$

associate con quelle che si ottengono uguagliando a zero tutte le derivate seconde (che sono del resto conseguenze delle superiori)(*).

Qui si ha $s = 2$

$$\varepsilon_0 = 2 \qquad \varepsilon_1 = 4$$
$$\nu_0 = 0 \qquad \nu_1 = 3$$

indi $\qquad \tau_0 = 2 \qquad \tau_1 = 1$ ecc.

Si possono facilmente estendere le cose ora dette al gruppo di movimenti del generale spazio (Euclideo) a n dimensioni – Questi movimenti sono rappresentati dalle formole

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k + c_i ,$$

dove le a_{ik} sono i coefficienti della più generale sostituzione ortogonale (destrorsa) e le c_i sono parametri arbitrari – È questo un gruppo a $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri, generato dalle $\frac{n(n+1)}{2}$ trasformazioni infinitesime

(*) Si osservi che queste equazioni di definizione del gruppo di movimenti risultano dall'associare quelle del gruppo conforme a quelle del gruppo equivalente (§ 36) – In effetto i movimenti del piano sono (insieme coi ribaltamenti) le uniche trasformazioni del piano che siano insieme conformi ed equivalenti.

sime

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad X_{ik} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i \neq k)$$

Le equazioni di definizione del gruppo sono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0 \end{cases}$$

con

$$\varepsilon_0 = n \;, \quad \varepsilon_1 = n^2 \;; \quad \nu_0 = 0 \,, \quad \nu_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

e quindi

$$\tau_0 = n \quad , \quad \tau_1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Capitolo IV°

Funzioni e varietà invarianti rispetto ad un gruppo - Gruppi transitivi e intransitivi - Gruppi infinitesimi - Gruppi sistatici ed asistatici -

§ 42

Funzioni invarianti

Se una funzione $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$ e' tale che eseguendovi una certa trasformazione

$$(S) \qquad x_i' = f_i(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad i = 1, 2 \dots n$$

si abbia identicamente

$$\Phi(f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)) = \Phi(x_1, x_2 \dots x_n)$$

si dice che la Φ è invariante rispetto alla trasformazione S, ovvero che essa ammette questa trasformazione.

Quando la Φ ammetta tutte le trasformazioni di un gruppo G_r, diremo che è un invariante rispetto a G_r, od anche che ammette il gruppo stesso.

Ricerchiamo ora un criterio per decidere se una data funzione Φ ammette il gruppo G_1 ad un parametro generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Siccome il gruppo G_1 è perfettamente caratterizzato (§ 10) dalle equazioni differenziali

$$(1) \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \xi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$$

colle condizioni iniziali

$$x'_i = x_i \quad \text{per } t=0,$$

la funzione $\Phi(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$ è una funzione perfettamente determinata delle x e di t e si ha per le (1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} \xi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n) = X'\Phi\ -$$

Affinché Φ sia un invariante di G_1 è necessario e sufficiente che sia indipendente da t, cioè $X\Phi = 0$; dunque:

Il gruppo G_1 generato da una trasformazione infinite simale Xf ha per invarianti tutte e sole le soluzioni dell'equazione a derivate parziali $X\Phi = 0$.

Quando $X\Phi = 0$ si può dire che la funzione Φ ammette la trasformazione infinitesima Xf, onde il risultato precedente si può anche enunciare dicendo che: una funzione Φ ammette un gruppo G_1 se ne ammette la trasformazione infinitesima generatrice.

È ben noto che ogni soluzione comune a due equazioni a derivate parziali

$$Xf = 0\ ,\quad Yf = 0$$

è anche soluzione della terza

$$(X, Y)f = 0$$

Questa proprietà può ora enunciarsi così: Ogni invariante comune ai due gruppi ad un parametro Xf, Yf è anche invariante del gruppo $(X, Y)f$.

§ 43
Varietà nello spazio S_n

Dobbiamo ora passare a considerare delle totalità di punti nello spazio S_n che vengono trasformate in sé stesse dalle trasformazioni di un gruppo, tali cioè che ogni punto di quella totalità, per qualsiasi trasformazione del gruppo, si trasporta in un altro punto della totalità stessa. È necessario per ciò che premettiamo alcune brevi nozioni generali sulle possibili totalità di punti (varietà o moltiplicità) nello spazio S_n -

Si ottiene nel modo più generale una tale varietà ponendo le n coordinate $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ del punto eguali a n funzioni qualunque di $m<n$ variabili indipendenti $u_1, u_2 \ldots\ldots u_m$, colle formole

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2 \ldots\ldots u_m) \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots n$$

Supposto che nelle φ le m variabili u siano essenziali, cioè che le φ non possano esprimersi per un numero di variabili, la varietà si dice una varietà V_m a m dimensioni - Perchè il numero delle dimensioni sia effettivamente m occorre e basta che la matrice funzionale

$$\frac{\partial(\varphi_1\, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n)}{\partial(u_1\, u_2 \ldots\ldots u_m)}$$

sia di caratteristica m (cf. § 3) - Quando la varietà sia ad una dimensione, dicesi anche una curva.(*)

In luogo di definire la varietà V_m per mezzo delle (2) esplicitamente, si può anche definire per mezzo di $n-m$ equazioni fra le x che siano indipendenti

$$(2^*) \quad \Omega_1(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \Omega_{n-m}(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n) = 0$$

(*) Per $m=2$ la varietà dicesi una superficie, per $m=n-1$ un'ipersuperficie.

Quando le (2) siano equivalenti ad un sistema (2.*) di equazioni lineari nelle x la V_m dicesi una varietà (o spazio subordinato) lineare e si indica con S_m^r; se $m=1$ si dice una retta – Questa è definita da due suoi punti $(x_i^{(0)})$ $(x_i^{(1)})$ p. e. colle formole

$$x_i = x_i^{(0)} + (x_i^{(1)} - x_i^{(0)}) . u ,$$

essendo $\underline{u}$ il parametro –

Se consideriamo in S_n^r una curva qualunque

$$x_i = x_i (u) \qquad i=1, 2, \ldots n$$

e preso un punto fisso $x_i^{(0)}$ sulla curva lo congiungiamo con una retta con un punto vicino $x_i^{(1)}$ sulla curva, indi facciamo avvicinare indefinitamente $x_i^{(1)}$ a $x_i^{(0)}$ la corda che li congiunge converge verso una posizione limite definita dalle formole

$$x_i = x_i^{(0)} + \left(\frac{dx_i}{du}\right)_0 . v .$$

Questa retta dicesi la tangente nel punto $x_i^{(0)}$ alla curva ed i valori

$$\xi_i = \left(\frac{dx_i}{du}\right)_0$$

chiamansi le costanti di direzione della curva nel punto – Cangiando in un modo qualunque il parametro u esse si alterano solo per un fattore comune: possono dirsi per ciò coordinate omogenee dell'elemento in quella direzione –

Si considerino uscenti da un medesimo punto $x_i^{(0)}$ $\underline{m}$ direzioni colle rispettive costanti di direzione

$$(\xi_i^{(1)}),\ (\xi_i^{(2)}) \dots\dots (\xi_i^{(m)})$$

La varietà lineare definita dalle formole

$$(3)\qquad x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)} u_1 + \xi_i^{(2)} u_2 + \dots + \xi_i^{(m)} u_m$$

$$i = 1, 2, \dots n,$$

dove $u_1\ u_2 \dots\dots u_m$ sono $\underline{m}$ parametri, contiene tutte le $\underline{m}$ direzioni; essa sarà ad $\underline{m}$ dimensioni, cioè un S_m, se $\underline{m}$ è la caratteristica della matrice

$$\| \xi_i^{(1)}\ \xi_i^{(2)} \dots\dots \xi_i^{(m)} \| \qquad i = 1, 2, \dots\dots n$$

In tal caso le $\underline{m}$ direzioni diconsi indipendenti. Al contrario se la caratteristica è $r < m$, allora le $\underline{m}$ direzioni giacciono in un S_r e diconsi dipendenti.

Supposto di essere nel primo caso, ogni altra direzione uscente da $x_i^{(0)}$ nell'S_m dato dalle (3) avrà per costanti ξ_i di direzione $\underline{n}$ combinazioni lineari omogenee

$$(4)\qquad \xi_i = \lambda_1 \xi_i^{(1)} + \lambda_2 \xi_i^{(2)} + \dots + \lambda_m \xi_i^{(m)}$$

delle prime $\underline{m}$ e viceversa, qualunque siano le costanti λ, questa direzione giace nell'S_m dato dalle (3).

Si osservi ora che per un punto (ordinario) di una varietà V_m

$$x_i = \varphi_i(u_1\ u_2 \dots\dots u_m)$$

si possono condurre $\underline{m}$ direzioni indipendenti tangenti alla varietà, p. e. le $\underline{m}$ che hanno per costanti di direzione

$$\xi_1^{(r)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_r}, \quad \xi_2^{(r)} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_r} \quad \dots\dots \quad \xi_n^{(r)} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_r}$$

$$r = 1, 2, \dots\dots m$$

mentre ogni altra direzione tangente alla varietà giace nell' S_m individuata da quelle m; questo dicesi lo spazio ~~lineare~~ S_m tangente nel punto alla varietà.

Quando le equazioni della varietà sono date sotto la forma (2*)

$$\Omega_j(x_1\, x_2 \dots x_n)=0 \qquad j=1,\ 2 \dots n-m$$

lo spazio S_m tangente sarà definito dalle $n-m$ equazioni simultanee lineari nei differenziali:

$$(3^*) \qquad \sum_k \frac{\partial\Omega_j}{\partial x_k}\, dx_k=0$$

§ 44
Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_1

Diciamo che una varietà V_m ammette una trasformazione

$$S) \qquad x_i'=f_i(x_1,\ x_2 \dots x_n)$$

quando per la S ogni punto di V_m si trasporta in un altro punto di V_m. E se la V_m ammette tutte le trasformazioni di un gruppo, diciamo che la V_m è una varietà invariante rispetto al gruppo, o che ammette il gruppo.

Domandiamoci ora in primo luogo sotto quali condizioni una varietà V_m ammetterà un gruppo G_1 ad un parametro generato da una trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Siccome i punti di V_m devono muoversi per le trasformazioni di G_1 entro V_m stessa, è manifestamente perciò necessario e sufficiente che le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m giacciano interamente in V_m - Dunque nei punti di V_m la direzione della traiettoria, che ha le costanti di direzione

$$\xi_1 \quad \xi_2 \dots \dots \xi_n$$

deve essere tangente alla varietà, cioè se nelle ξ esprimiamo le x per le u, dovranno le ξ_i risultare da combinazioni lineari omogenee delle

$$\xi_i^{(k)} = \frac{\partial x_i}{\partial u_k}$$

secondo le (4)

$$(5) \quad \xi_i = \sum_k^{1\dots m} \eta_k \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \qquad i = 1, 2 \dots n.$$

dove le η saranno convenienti funzioni delle u -

Queste esprimono che le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m toccano V_m, cioè che la V_m ammette la trasformazione infinitesima Xf - Ma tale condizione necessaria è altresì sufficiente perché la V_m ammetta il gruppo G_1, generato dalla Xf. E infatti, supposte soddisfatte le (5), si considerino entro V_m le curve integrali delle equazioni differenziali

$$(6) \quad \frac{du_1}{\eta_1} = \frac{du_2}{\eta_2} = \dots \dots = \frac{du_m}{\eta_m} = dt.$$

Queste curve, considerate come esistenti nello spazio ambiente S_n, soddisfano, a causa delle (5) e delle (6), le equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \cdots\cdots = \frac{dx_n}{\xi_n} = dt$$

e sono per ciò le traiettorie di G_1 uscenti dai punti di V_m - Esse giacciono in V_m, che è dunque varietà invariante rispetto a G_1 -

Si osservi che il gruppo G_1, in quanto opera entro la varietà V_m, dà luogo ad un gruppo Γ_1 per la varietà stessa -

Le considerazioni superiori dimostrano che dalla espressione Xf della trasformazione infinitesima di G_1 si ottiene subito quella $U\Phi$ di Γ_1, ponendo

$$(7) \qquad U\Phi = \sum_k^{1\ldots m} \eta_k \frac{\partial \Phi}{\partial u_k},$$

le η essendo da calcolarsi dalla (5) -

In ciò che precede si è tacitamente supposto che nei punti di V_m non tutte le ξ contemporaneamente si annullino -

Se questo caso si presenta, vuol dire che i singoli punti di V_m restano fissi per le trasformazioni di G_1, perchè la Xf è in tutti i punti di V_m d'ordine >0 (§ 40).

La V_m è certo allora una varietà invariante, anzi una varietà di punti fissi ed il gruppo Γ_1 si riduce all'identità -

Quando le equazioni della varietà V_m in luogo di esser date sotto la forma esplicita (2), lo sono sotto la forma implicita (2*), troviamo subito le condizioni perchè la varietà ammetta il gruppo Xf, esprimendo che la direzione $(\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_n)$ della traiettoria di G_1 uscente da un punto di V_m deve toccare la V_m - Per ciò basta sostituire le ξ_k al posto dei dx_k nella (3*) § 43, ciò che dà

$$\sum_k \xi_k \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_k} = X\Omega_j = 0$$

$$(j = (1, 2 \dots n-m),$$

relazioni che debbono aver luogo sulla varietà. - Dunque: Affinchè la varietà V_m definita da

$$\Omega_1(x_1 \dots x_n) = 0 \;,\; \Omega_2(x_1 \dots x_n) = 0 \dots \Omega_{n-m}(x_1 \dots x_n) = 0$$

ammetta il gruppo Xf è necessario e sufficiente che in forza di queste equazioni risultino soddisfatte le

$$X\Omega_1 = 0 \quad, X\Omega_2 = 0 \quad \dots \dots \quad X\Omega_{n-m} = 0$$

E' bene osservare il caso particolare in cui le equazioni della varietà sono risolute rapporto ad $n-m$ delle x, p. e. della forma

$$\Omega_1 = x_{m+1} - \varphi_{m+1}(x_1\, x_2 \dots x_n) = 0, \dots \dots \Omega_{n-m} = x_n - \varphi_n(x_1\, x_2 \dots x_n),$$

che possiamo considerare come un caso particolare delle (2), ove si faccia

$$u_1 = x_1 \;.\; u_2 = x_2 \dots \dots u_m = x_m$$

$$\varphi_1 = u_1 \,,\; \varphi_2 = u_2 \,\ldots\ldots\; \varphi_m = u_m$$

Le (5) ci danno allora

$$\eta_1 = \xi_1 \quad \eta_2 = \xi_2 \,\ldots\ldots\; \eta_m = \xi_m$$

$$\xi_{m+j} = \sum \xi_k \frac{\partial \varphi_{m+j}}{\partial x_k},$$

le quali ultime si scrivono $X\Omega_j = 0$ e confermano il teorema superiore – È notevole poi che la (7) diventa semplicemente

$$Uf = \sum_k^{1\ldots m} \xi_k (x_1 x_2 \ldots x_m, \varphi_{m+1} \ldots \varphi_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

onde la regola semplice:

Se la varietà V_m, definita dalle formole

$$x_{m+j} = \varphi_{m+j}(x_1\, x_2 \ldots x_m)$$

$$j = 1, 2 \ldots, n-m$$

è invariante rispetto al gruppo G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

l'espressione della trasformazione infinitesima Uf del gruppo G_1, come operante sulla varietà V_m, si ottiene semplicemente sopprimendo in Xf i termini in $\frac{\partial f}{\partial x_{m+1}} \ldots \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}$ e ponendo nelle espressioni delle rimanenti ξ al posto di $x_{m+1} \ldots x_n$ le loro espressioni per $x_1, x_2 \ldots x_m$

§ 15
Varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_r

Affinchè una varietà V_m ammetta un gruppo G_r è evidentemente necessario e sufficiente che ne ammetta le r trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Considerando il gruppo G_r come operante sui punti di V_m, esso darà luogo ad un gruppo Γ il numero dei cui parametri non può eccedere manifestamente r ma che può essere minore (fino anche a ridursi a zero) e ciò avverrà quando esista un sottogruppo di G_r che lasci fisso ciascun punto della varietà V_m (cf. § 2) - Per decidere quanti parametri ha il gruppo Γ, basta applicare i risultati del § precedente e calcolare le corrispondenti trasformazioni infinitesime $U_k \Phi$ di Γ.

Supposte le equazioni della varietà V_m date sotto la forma

$$x_i = \varphi_i(u_1\ u_2 \dots\dots u_m),$$

avremo

$$(8) \qquad U_k \Phi = \sum_i^{1\dots m} \eta_{ki} \frac{\partial \Phi}{\partial u_i}$$

le η_{kl} dovendo calcolarsi per mezzo delle ξ_{ki} dalle (5) cioè da

$$(9) \qquad \xi_{ki} = \sum_{l}^{1\ldots m} \eta_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial u_l}$$

Allora se avverrà che fra le r trasformazioni infinitesime $U_1 f, U_2 f \ldots U_r f$ ve ne siano $s < r$ indipendenti, il gruppo Γ avrà precisamente s parametri –

Fra le varietà invarianti rispetto ad un gruppo G_r hanno particolare importanza le varietà minime invarianti a cui arriviamo colle considerazioni seguenti – Diciamo per brevità equivalenti due punti dello spazio rispetto a G_r se si passa dall'uno all'altro con una trasformazione del gruppo – Evidentemente due punti equivalenti ad uno stesso sono anche equivalenti fra loro – Se P è un punto di una varietà V invariante anche tutti i punti equivalenti a P sono in V – D'altra parte è evidente che la varietà costituita da tutti i punti equivalenti ad uno dato P è una varietà V invariante. Questa è evidentemente la minima varietà invariante contenente P, poichè ogni altra varietà invariante che contenga P contiene necessariamente tutta V –

La ricerca fondamentale relativa alle varietà invarianti, di un gruppo è quella delle sue varietà minime; ogni altra varietà invariante si otterrà associando un numero finito o infinito di varietà minime invarianti secondo una data legge –

Intanto osserviamo che quando siano note le equazioni in termini finiti del gruppo G_r

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n\, ;\, a_1\, a_2 \dots a_r)$$

è ben facile trovare la varietà minima invariante relativa ad un punto $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ - Basta perciò porre nelle f_i al posto delle x_i le $x_i^{(0)}$ e le formole

$$x_i = f_i(x_1^{(0)}\, x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)}\, ;\, a_1 \dots a_r)$$

facendo variare liberamente i parametri $\underline{a}$ daranno la richiesta varietà minima invariante contenente P_0 -

La dimensione di questa varietà minima è naturalmente al massimo $= r$; in generale è data dalla caratteristica $\underline{s}$ della matrice:

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \dots\dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \dots\dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r} & \frac{\partial f_2}{\partial a_r} & \dots\dots & \frac{\partial f_n}{\partial a_r} \end{matrix}\right\|$$

dove le x_i sono fatte $= x_i^{(0)}$

§ 46
Dimensione della varietà minima invariante

Se si tratta solo di calcolare il numero $\underline{s}$ delle dimensioni della varietà minima invariante contenente

$x_i^{(0)}$, alla matrice precedente si può sostituire l'altra

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x^0) & \xi_{12}(x^0) \ldots\ldots & \xi_{1n}(x^0) \\ \xi_{21}(x^0) & \xi_{22}(x^0) \ldots\ldots & \xi_{2n}(x^0) \\ \multicolumn{3}{c}{\text{- - - - - - - - - - - - - - -}} \\ \xi_{r1}(x^0) & \xi_{r2}(x^0) \ldots\ldots & \xi_{rn}(x^0) \end{Vmatrix}$$

formata coi coefficienti delle r trasformazioni infinitesime del gruppo. Poiché infatti avendosi in virtù delle equazioni differenziali fondamentali del gruppo (A), (B) §§ 7, 8:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{\lambda}^{1\ldots r} \xi_{\lambda i}(x^0)\, \psi_{\lambda k}(a),$$

come inversamente

$$\xi_{ji}(x^0) = \sum_{k}^{1\ldots r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k},$$

le due matrici hanno evidentemente la medesima caratteristica - Ne deduciamo la regola importante:

Date le trasformazioni infinitesime

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

generatrici di un gruppo G_r, il numero s delle dimensioni della varietà minima invariante contenente un punto $P_0 \equiv x_i^{(0)}$ eguaglia la caratteristica della matrice

$$\| \xi_{k1}(x^0) \quad \xi_{k2}(x^0) \text{-----} \xi_{kn}(x^0) \|$$
$$k = 1, 2 \ldots\ldots r$$

Alla medesima conclusione si arriva anche osservando che se s è la caratteristica di quest'ultima matrice, le trasformazioni infinitesime del gruppo

$$X_1 f, \; X_2 f \ldots\ldots X_r f$$

danno in P_0 precisamente s direzioni indipendenti per le loro traiettorie (§ 43) – Queste essendo tangenti alla varietà minima invariante V, la V ha almeno s dimensioni; d'altra parte non ne può avere di più perchè tutte le direzioni uscenti da P_0 in V sono date dalle traiettorie dei gruppi ad un parametro che formano G_r –

È utile confrontare il significato ora stabilito per la caratteristica s della matrice

$$\| \xi_{k1}(x^0) \quad \xi_{k2}(x^0) \; \ldots\ldots \; \xi_{kn}(x^0) \|$$

$$k = 1, 2, \ldots\ldots r$$

con quello trovato al § 40, ove la caratteristica stessa fu indicata con r_0; si vide allora che il sottogruppo di G_r che lascia fisso P_0 ha precisamente $r-s$ parametri.

Si può spiegare a priori questa relazione mediante considerazioni che servono inversamente a dimostrare nuovamente il risultato stesso.

Siano T, T' due trasformazioni di G_r che trasportano P_0 in uno stesso punto P; la trasformazione $T'T^{-1}$ lascia fisso P_0 ed appartiene quindi al sottogruppo Γ che lascia fisso P_0 – Per ciò se indichiamo con γ le trasformazioni di Γ, avremo

$$T'T^{-1} = \gamma$$

o

$$T' = \gamma T$$

Dunque se T è una trasformazione fissa di

G_r che trasporta P_0 in P, tutte le altre T' si otterranno da $T' = \gamma T$ facendo percorrere a γ tutte le trasformazioni di Γ. Se indichiamo con m il numero dei parametri di Γ, la γ percorre ∞^m trasformazioni e la T' ne percorre ∞^s, indicando con s la dimensione della varietà minima invariante contenente P_0. Per ciò si ha precisamente

$$m + s = r \quad , \quad m = r - s \text{ (*)}$$

§ 47

Determinazione di tutte le varietà minime invarianti.

Una varietà V è invariante rispetto ad un gruppo se insieme ad ogni suo punto P la V contiene anche tutti i punti equivalenti a P. Ora osserviamo che se P, P' sono due punti equivalenti e Γ è il sottogruppo di G che lascia P stazionario, mentre T è una determinata trasformazione che trasporta P in P', sarà

(* Il dubbio che potesse aversi $r < m + s$ si elimina subito osservando che due trasformazioni γT sono diverse se non sono identiche le coordinate dei due punti in cui le corrispondenti T trasportano P_0, ed anche se essendo le stesse queste coordinate, sono diverse le corrispondenti γ.

$$\Gamma' = T^{-1}\Gamma T$$

il sottogruppo che lascia stazionario P', cioè: il sottogruppo stazionario di P' è il trasformato del sottogruppo stazionario di P per mezzo di una trasformazione T di G che trasporti P in P'.

In particolare i due sottogruppi Γ, Γ' hanno lo stesso numero di parametri, ossia: due punti equivalenti ammettono lo stesso numero di trasformazioni infinitesime del gruppo.

Di qui e dalle osservazioni precedenti risulta: La totalità dei punti che ammettono precisamente ∞^m trasformazioni di G_r forma una varietà invariante rispetto al gruppo.

I punti in questione rendono la caratteristica della matrice

$$\left\| \xi_{k1}(x) \quad \xi_{k2}(x) \; \cdots\cdots \; \xi_{kn}(x) \right\|$$

precisamente uguale a $r-m$. Formano quindi una varietà invariante (composta di varietà della specie ora considerata) tutti i punti dello spazio pei quali la caratteristica della matrice superiore è $\overline{\gtrless}\, r-m$.

Segue quindi l'importante teorema:

Se si eguagliano a zero tutti i minori di un dato ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \cdots\cdots & \xi_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \cdots\cdots & \xi_{rn}(x) \end{matrix} \right\|$$

supposto che vi siano effettivamente dei valori delle x che soddisfano a tutte queste equazioni, la varietà da queste rappresentata è sempre una varietà invariante rispetto al gruppo.

Ciò premesso, ecco come si può procedere per determinare tutte le varietà minime invarianti rispetto al gruppo. Si cominci dal calcolare in un punto generico la caratteristica della solita matrice, e sia $= q$. Allora ogni varietà minima invariante sarà di dimensione $= q$ per punti generici e potrà essere di dimensione $< q$ per punti speciali. Diremo le prime varietà di prima classe, le altre di seconda classe. Le varietà di prima classe, cioè di dimensione q, esistono naturalmente soltanto quando $q < n$ perchè se $q = n$ una tale varietà riempie lo spazio S_n o una sua regione (caso della transitività v: § seg^{te})

Per determinarle supposto dunque $q < n$ basta osservare che le $\underline{r}$ equazioni lineari

$$X_1 f = 0\ , \ X_2 f = 0 \ \ldots\ldots X_r f = 0$$

formano un sistema completo di $q < n$ equazioni e perciò ammettono precisamente $n-q$ soluzioni indipendenti che indichiamo con

$$\Phi_1\ ,\ \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$$

Ciascuna di queste è un invariante (§ 42) rispetto a ciascuno degli $\underline{r}$ gruppi ad un parametro $X_i f$.

$X_2 f \ldots\ldots X_r f$ e perciò anche rispetto a G_r - Dunque se in un punto della cercata varietà minima invariante V_q le $\Phi_1, \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$ hanno i valori $a_1\ a_2 \ldots\ldots$ $\ldots a_{n-q}$, conserveranno i medesimi valori - Le equazioni

$$(10) \quad \Phi_1 = a_1 \quad \Phi_2 = a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \Phi_{n-q} = a_{n-q}$$

rappresentano dunque una varietà di dimensione q che coincide, almeno in una certa estensione, colla varietà cercata. Lo spazio resta così diviso in ∞^{n-q} varietà minime invarianti di dimensione q.

Passiamo ora alle varietà di seconda classe. Supposta una tale varietà V_p di dimensione $p<q$ dovranno nei suoi punti annullarsi tutti i minori d'ordine $p+1$, e non tutti quelli d'ordine p. Eguagliamo dunque a zero tutti i minori d'ordine $p+1$ e siano $\Delta_1, \Delta_2 \ldots\ldots \Delta_\rho$; se le equazioni

$$(11) \qquad \Delta_1 = 0\ ,\ \Delta_2 = 0 \ldots\ldots \Delta_\rho = 0$$

sono compatibili e non hanno per conseguenza l'annullarsi anche dei minori d'ordine p, esisteranno le varietà cercate e saranno contenute nella varietà (11) che è per sè stessa (a causa dell'ultimo teorema) una varietà invariante W.

Questa varietà W potrà del resto scindersi in più varietà irriducibili anche di diversa dimensione che saranno evidentemente singole varietà invarianti. Se prendiamo una di esse V di dimensione $s=p$ essa coincide senz'altro con una delle cercate varietà minime V_p - Quando sia invece $s>p$ la detta varietà V si scinderà in ∞^{s-p} varietà minime invarianti di dimensione p - Per trovare queste basterà evidentemente considerare il gruppo G_r come agente sui punti di V e procedere come nel primo caso per scindere lo spazio in ∞^{n-q} varietà invarianti di prima classe - Converrà cioè calcolare, secondo il § 45, le trasformazioni infinitesime

$$U_k \Phi$$

del gruppo indotto sui punti di V ed integrare quindi il sistema completo

$$U_1\Phi=0, \quad U_2\Phi=0 \quad \ldots\ldots \quad U_r\Phi=0$$

che si ridurrà a p equazioni indipendenti sopra s variabili -

Osserviamo in fine che se V_s è una varietà invariante qualunque (non minima), essa dovrà contenere tutte le minime varietà invarianti relative ad ogni suo punto - Per ciò se supponiamo che in ogni punto di V_s la caratteristica della solita matrice $\|\xi_{ik}\|$ conservi il suo valore generico q, sarà $s>q$ e la V_s si scinderà in ∞^{s-q} varietà minime di prima classe V_q. Le sue equazioni si otterranno dunque stabilendo nelle (10) fra le costanti a $n-s$ relazioni -

Abbiamo dunque il teorema:

Le equazioni di ogni varietà V_s invariante, rispetto ad un gruppo, quando nei punti di V_s la matrice $|\xi_{ik}|$ conserva la sua caratteristica generica q, si ottengono stabilendo $n-s$ relazioni fra gli invarianti del gruppo.

§. 48
Gruppi transitivi

Le considerazioni svolte nei §§ precedenti si applicano ad una importante distinzione dei gruppi in due classi, dei gruppi transitivi e dei gruppi intransitivi -

Un gruppo dicesi transitivo se da un punto generico P dello spazio si può passare, con trasformazioni del gruppo, ad un altro punto qualunque dello spazio od almeno a tutti quelli di un conveniente intorno ad n dimensioni di P. In caso contrario il gruppo dicesi intransitivo - Così il gruppo totale G_6 dei movimenti dello spazio è transitivo; è invece intransitivo quello G_3 delle rotazioni attorno ad un punto -

Quando sono date le equazioni finite del gruppo

(12) $\quad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n ; a_1\, a_2 \dots a_r)$

si decide subito se il gruppo è transitivo; è necessario per ciò e basta che fissate le x si possa no prendere gli r parametri a in guisa da far acquistare alle f_i valori prefissati qualunque x'; le (12) debbono quindi essere risolubili rispetto ai parametri a - Naturalmente perchè il gruppo sia transitivo è necessario che il numero r dei parametri non sia inferiore al numero n delle variabili - Un gruppo transitivo sopra n variabili e con n parametri contiene in generale una ed una sola trasformazione che trasporta un punto arbitrario in un altro punto arbitrario dello spazio, il gruppo dicesi allora semplicemente transitivo -

Per decidere della transitività o intransitività di un gruppo non occorre avere le sue equazioni finite ma basta conoscere le trasformazioni infinitesime od anche soltanto le equazioni di definizione. Ed infatti il gruppo è transitivo allora soltanto quando la dimensione delle varietà minime invarianti di prima classe eguaglia la dimensione dello spazio; dunque:

Un gruppo è transitivo se la caratteristica della matrice

$$\left\| \xi_{k1}(x), \xi_{k2}(x) \dots \xi_{kn}(x) \right\|$$

$$k = 1, 2, \dots r$$

eguaglia precisamente il numero n delle variabili. intransitivo nel caso contrario.

La stessa cosa può anche significarsi dicendo che il gruppo è transitivo quando le r equazioni lineari in $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}$

$$X_1 f = 0 \,, X_2 f = 0 \dots\dots X_r f = 0$$

sono in numero di n indipendenti, intransitivo nel caso contrario.

Se ricordiamo poi i risultati del § 39 rispetto al calcolo degli ordini caratteristici

$$r_0 \; r_1 \dots\dots$$

delle trasformazioni del gruppo in un punto generico dello spazio ed osserviamo che $r_0 = \varepsilon_0 - \nu_0$ è precisamente la caratteristica della solita matrice, vediamo che basta conoscere le equazioni di definizione del gruppo per riconoscerne la transitività od intransitività. E precisamente siccome per un gruppo transitivo deve essere $r_0 = n$ e d'altronde $\varepsilon_0 = n$ sarà $\nu_0 = 0$, onde il teorema: Se le equazioni di definizione di un gruppo non contengono equazioni in termini finiti fra $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n$ il gruppo è transitivo, intransitivo nel caso opposto.

§ 49

Invarianti dei gruppi intransitivi

Ogni invariante $\Phi(x_1\, x_2 \dots\dots x_n)$ di un gruppo G_r deve essere una soluzione del sistema

$$X_1 \Phi = 0 \quad X_2 \Phi = 0 \;\dots\dots\; X_r \Phi = 0$$

ed inversamente ogni tale soluzione è un invariante (§ 42) - Per ciò se il numero q delle equazioni indipendenti di questo sistema completo, ossia la caratteristica della matrice

$$\| \xi_{k1} \ \xi_{k2} \dots \xi_{kn} \| \quad k = 1, 2, \dots r,$$

eguaglia il numero n delle variabili non esistono invarianti - Quando invece $q < n$ vi sono $n-q$ invarianti indipendenti, le soluzioni del sistema completo sopra considerato - Per quanto si è visto al § precedente possiamo dunque dire:

Un gruppo transitivo non possiede invarianti; un gruppo intransitivo $G_r = (X_1 f, X_2 f \dots X_r f)$ ha per invarianti tutte e sole le soluzioni del sistema completo

$$(13) \qquad X_1 f = 0 \quad X_2 f = 0 \ \dots \dots X_r f = 0$$

Indicando come al § 47 con $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_{n-q}$ le soluzioni indipendenti del sistema (13), fra le coordinate $x_1 x_2 \dots x_n$; $x_1' x_2' \dots x_n'$ di due punti equivalenti rispetto al gruppo passano le $n-q$ relazioni

$$(14) \quad \begin{cases} \Phi_1(x_1' x_2' \dots x_n') = \Phi_1(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \Phi_2(x_1' x_2' \dots x_n') = \Phi_2(x_1 x_2 \dots x_n) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Phi_{n-q}(x_1' x_2' \dots x_n') = \Phi_{n-q}(x_1 x_2 \dots x_n) \end{cases}$$

Se in queste pensiamo p. e. fisse le x' e variabili le x, abbiamo (§ 47) le equazioni della varietà minima invariante relativa al punto x' - È chiaro che sui punti di una tale varietà il gruppo G_r agisce transitivamente e per ciò le (14) ci danno in sostanza le condizioni perchè due punti (x_i), (x'_i) siano equivalenti -

Il calcolo degli invarianti di un gruppo (intransitivo), di cui siano note soltanto le trasformazioni infinitesime, richiede, come si è visto, l'integrazione del sistema completo (13). Ma è facile vedere che se di un gruppo intransitivo G_r si conoscono le equazioni in termini finiti, bastano operazioni algebriche di eliminazione per calcolarne gli invarianti -

E infatti note le equazioni (12) in termini finiti ed essendo la caratteristica della matrice funzionale

$$\frac{\partial(f_1 f_2 \dots f_n)}{\partial(a_1 a_2 \dots a_r)}$$

precisamente uguale a $q<n$ (§ 4), rispetto ad $a_1 a_2 \dots \dots a_r$ le f sono in numero di q sole indipendenti, cioè fra le x' e le x hanno luogo precisamente $n-q$ relazioni che si trovano eliminando fra le (12) i parametri $\underline{a}$ - Poniamo che questa eliminazione dia le $n-q$ relazioni indipendenti fra le x e le x'

$$W_1(x_1\, x_2 \dots x_n;\, x'_1\, x'_2 \dots x'_n)=0 \dots\dots W_{n-q}(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n)=0$$

Risolvendo queste rispetto ad $n-q$ delle x' poniamo rispetto a $x'_1\ x'_2 \dots\dots x'_{n-q}$, avremo

$$\begin{cases} x'_1 = \varphi_1(x_1\ x_2 \dots x_n;\ x'_{n-q+1} \dots x'_n) \\ x'_2 = \varphi_2(x_1\ x_2 \dots x_n;\ x'_{n-q+1} \dots x'_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_{n-q} = \varphi_{n-q}(x_1\ x_2 \dots x_n;\ x'_{n-q+1} \dots x'_n) \end{cases}$$

Ora queste non possono essere, sotto altra forma, che le relazioni (14) e per ciò nei secondi membri le $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$ non possono figurare che nelle combinazioni

$$\Phi_1(x)\ ,\ \Phi_2(x) \ldots\ldots\ldots \Phi_{n-q}(x)$$

Ne risulta che basta nelle funzioni $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ porre per $x'_{n-q+1} \ldots\ldots x'_n$ altrettante costanti arbitrarie per dedurne $n-q$ invarianti indipendenti del gruppo.

§ 50
Esempî varii

Prima di procedere ad ulteriori distinzioni fra i gruppi sarà bene illustrare con esempî particolari le proprietà fin qui studiate nel capitolo.

1º) Come primo esempio prendiamo il gruppo G_6 dei movimenti dello spazio euclideo (cf. § 41). La matrice delle ξ è qui

$$\left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ y & -x & 0 \\ 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \end{matrix}\right|$$

ed è di caratteristica $=3$, onde il gruppo è transitivo. Questa caratteristica non s'abbassa in nessun punto dello spazio, per cui non vi è alcuna varietà invariante o se si vuole, ve n'è una sola costituita da tutto lo spazio —

Si consideri il sottogruppo G_3 delle rotazioni generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\ , \quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

La matrice (determinante) delle ξ é

$$\begin{vmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

ed ha la caratteristica generica $= 2$ e si abbassa soltanto nell'origine $x = y = z = 0$, ove si annullano tutti gli elementi. Il gruppo é intransitivo ed ha l'invariante $\varPhi = x^2 + y^2 + z^2$, soluzione comune di

$$X_1 \varPhi = 0\ , \quad X_2 \varPhi = 0\ , \quad X_3 \varPhi = 0\ ;$$

ciascun punto si muove sulla varietá

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{cost}^e$$

cioé sopra una sfera col centro nell'origine —

Se riferiamo i punti di una tale sfera p. e. della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ alle coordinate geografiche $u_1\ u_2$ ponendo

$$x = \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 \qquad y = \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 \qquad z = \cos u_1$$

e calcoliamo secondo il § 45 le trasformazioni infinitesime $U_1 f,\ U_2 f,\ U_3 f$ del gruppo indotto sui punti della sfera troviamo

$$\begin{cases} U_1 f = \operatorname{sen} u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \cot u_1 \cos u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \\ U_2 f = \cos u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_1} - \cot u_1 \operatorname{sen} u_2 \dfrac{\partial f}{\partial u_2} \\ U_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial u_3} \end{cases}$$

Queste sono indipendenti e generano il G_3 di movimenti della sfera in sé –

2°) Si considerino le 5 trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} \quad , \quad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x X_2 f \ , \ X_4 f = y X_2 f \ , \ X_5 f = z X_2 f \ ;$$

esse generano un gruppo (proiettivo) G_5 perché si ha:

$$(X_1 X_2) = 0 \ , \ (X_1 X_3) = X_4 \ , \ (X_1 X_4) = -X_3 \ , \ (X_1 X_5) = 0$$

$$(X_2 X_3) = X_3 \ , \ (X_2 X_4) = X_4 \ , \ (X_2 X_5) = X_5 \ , \ (X_3 X_4) = 0$$

$$(X_3 X_5) = 0 \ , \ (X_4 X_5) = 0$$

La caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} -y & x & 0 \\ x & y & z \\ x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{Vmatrix}$$

è $= 2$. Il gruppo è quindi intransitivo ed ha un unico invariante, la soluzione del sistema

$$X_1 f = 0 \ ; \ X_2 f = 0$$

che è $\frac{x^2+y^2}{z^2}$; dunque le varietà (minime) invarianti di prima classe sono i coni

$$x^2+y^2=Cz^2$$

di rotazione attorno all'asse z. Le altre varietà invarianti (di seconda classe) si ottengono eguagliando in primo luogo a zero i minori di 2° ordine, ciò che dà o la soluzione

$$x=0 \qquad y=0$$

ossia l'asse delle z, o l'altra

$$x^2+y^2=0\;,\; z=0$$

ossia le rette cicliche per l'origine nel piano xy – Queste sono tre varietà V_1 invarianti. In fine per $x=0$, $y=0$, $z=0$ si annullano tutti gli elementi della matrice, onde un'unica varietà invariante V_0 costituita dall'origine –

Se si vogliono le trasformazioni infinitesime Uf del gruppo G come agente sui punti di uno dei detti coni p.e. del cono

$$x^2+y^2=z^2$$

si potrà porre

$$x=u_1 \operatorname{sen} u_2 \quad , \quad y=u_1 \cos u_2 \quad . \quad z=u_1$$

ed applicando la formola del § 45 si trova subito

$$U_1f=\frac{\partial f}{\partial u_2}\;,\quad U_2f=u_1\frac{\partial f}{\partial u_1}\;.\quad U_3f=u_1^2\cos u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\;.$$

$$U_4f=u_1^2\operatorname{sen} u_2\frac{\partial f}{\partial u_1}\;,\quad U_5f=u_1^2\frac{\partial f}{\partial u_1}\;.$$

Per i punti dell'asse delle z, che è pure una varietà invariante, le trasformazioni del gruppo si ridu–

cono a

$$Z_1 f = 0 \ , \ Z_2 f = z\frac{\partial f}{\partial z} \quad Z_3 f = 0 \quad Z_4 f = 0 \quad Z_5 f = z^2\frac{\partial f}{\partial z}$$

cioè alle due sole distinte $Z_2 f$, $Z_3 f$ ed il gruppo indotto ha qui soltanto due parametri –

§ 51
Gruppi imprimitivi

Si è visto (§§ 47–49) che un gruppo G_r intransitivo nello spazio S_n scinde questo spazio in ∞^{n-q} varietà (invarianti)

(15) $\Phi_1(x) = C_1 \ , \ \Phi_2(x) = C_2 \ \ldots\ldots \ \Phi_{n-q}(x) = C_{n-q}$,

di dimensione $= q$, tali che ogni punto dello spazio si muove (transitivamente) per le trasformazioni di G_r entro la varietà (15) cui appartiene. Ora può darsi che anche per un gruppo transitivo sia possibile scindere lo spazio in ∞^{n-q} varietà V_q, di dimensione q, in guisa che le trasformazioni del gruppo o lascino ciascuna varietà V_q in sè stessa o scambino queste varietà di fra loro.

Un gruppo che ammetta una tale divisione dello spazio dicesi imprimitivo. Lie riguarda l'intransitività come un caso particolare dell'imprimitività, per cui un gruppo intransitivo è sempre imprimitivo.

Se poi la divisione dello spazio è impossibile il gruppo dicesi primitivo, ogni gruppo primitivo è quindi di necessità transitivo –

Notiamo subito che un gruppo imprimitivo può talora consentire non una sola divisione dello spazio in sistemi (varietà) d'imprimitività ma anche più tali divisioni e persino un numero infinito.

Per es. se consideriamo il gruppo G_3 delle traslazioni nello spazio, generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1f=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_2f=\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_3f=\frac{\partial f}{\partial z}\ ,$$

esso è transitivo ed imprimitivo perché un sistema qualunque di piani paralleli dà una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività - Come si vede, qui il numero delle divisioni è infinito - Ancora se al gruppo G_3 delle rotazioni attorno all'origine associamo il gruppo G_1 delle omotetie col centro nell'origine, abbiamo evidentemente un gruppo G_4 che ha per trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1f=y\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_2f=z\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial z}, X_3f=x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$X_4f=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

Questo gruppo transitivo è evidentemente imprimitivo, la divisione cercata dello spazio effettuandosi mediante le sfere col centro nell'origine -

Domandiamoci ora in generale: A quali criteri si può riconoscere se un dato gruppo transitivo G_r è imprimitivo?

Perché ciò accada, bisogna che sia possibile una divisione (15) dello spazio. Ora le $n-q$ funzioni indipendenti $\Phi_1 \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_{n-q}$ possono riguardarsi come le soluzioni di un conveniente sistema completo di q equazioni

$$(16) \qquad A_1 f=0 \quad A_2 f=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A_q f=0,$$

che è perfettamente determinato dalle funzioni Φ ed inversamente le determina -(*) La questione viene così ridotta a trovare quali relazioni deve avere il sistema completo (16) col gruppo. Ora eseguendo una tale trasformazione

$$x_i' = f_i(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, a_1\, a_2 \ldots a_r)$$

sopra una varietà (15), essa deve trasformarsi in una altra tale varietà dove soltanto i valori delle C sa-

---

(*) È ben noto come si forma il sistema completo in discorso. - Poichè le Φ sono indipendenti, uno almeno dei determinanti funzionali delle Φ rispetto ad $n-q$ delle x è diverso da zero, poniamo per es. che sia

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2 \ldots \Phi_{n-q})}{\partial(x_1\; x_2 \ldots x_{n-q})} \neq 0$$

Allora basta porre

$$A_i f = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-q}} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q+i}} & \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_{n-q}} & \ldots & \dfrac{\partial \Phi_{n-q}}{\partial x_1} \end{vmatrix}$$

$i=1, 2, \ldots q$

ranno cangiate in C' (funzioni delle C e dei parametri a) - Bisogna dunque che si equivalgano i due sistemi

$$\Phi_i(f_1(x,a), f_2(x,a) \dots f_n(x,a)) = C_i$$

$$\Phi_i(x_1, x_2 \dots x_n) = C'_i$$

per la qual cosa è necessario e sufficiente che le funzioni

$$\Phi_i(x'_1\, x'_2 \dots x'_n) \qquad i = 1, 2 \dots n$$

siano funzioni di $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_{n-q}$ e perciò ancora soluzioni del sistema completo (16) - Se diciamo dunque che un sistema completo (16) ammette una trasformazione

$$S) \qquad x'_i = \psi_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

quando ogni soluzione del sistema, applicandovi la trasformazione S, si cangia in una nuova soluzione, possiamo dire che il sistema completo (16) deve ammettere tutte le trasformazioni del gruppo G_r - Viceversa se questo accade, eguagliando $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema ad altrettante costanti arbitrarie otterremo una divisione dello spazio in varietà di imprimitività - Concludiamo che: Un gruppo transitivo è imprimitivo quando è possibile costruire dei sistemi completi che ammettano il gruppo (tutte le trasformazioni del gruppo) -

§ 52

Sistemi completi che ammettono un gruppo

Ritorneremo più tardi sulla questione di trovare (se esistono) i sistemi completi che ammettono un dato gruppo G_r — Per ora ci limitiamo a stabilire i criteri per riconoscere se un sistema completo dato (16) ammette un gruppo G_r.

Prendiamo in primo luogo un gruppo G_1 di cui sia Xf la trasformazione infinitesima generatrice. Se il sistema (16) ammette il gruppo G_1, presa una qualunque sua soluzione $\varphi_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n)$ e supposto che siano

$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n\, t)$$

le equazioni finite di G_1, anche $\varphi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$ dovrà essere una soluzione.

Prese dunque $n-q$ soluzioni indipendenti del sistema (16)

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \varphi_{n-q}$$

dovranno le $\varphi_i(x'_1\, x'_2 \ldots\ldots x'_n)$ essere funzioni di $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \ldots \varphi_{n-q}$ (e di t) — Ora sviluppando in serie di potenze di t si ha

$$\varphi_i(x') = \varphi_i + t X_{\varphi_i} + \frac{t^2}{1.2} X^2_{\varphi_i} + \ldots\ldots,$$

e siccome la proprietà precedente deve aver luogo per tutti i valori di t, ne segue in particolare che

$$X\varphi_1 \quad X\varphi_2 \ldots\ldots X\varphi_{n-q}$$

debbono essere altrettante funzioni di $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q}$ –

Viceversa se ciò accade, anche

$$X^2\varphi_i\ ,\ X^3\varphi_i \ldots\ldots$$

sono funzioni delle φ e però il sistema (16) ammette il gruppo G_1 (*) – Dunque perchè il sistema completo (16) ammetta il gruppo Xf, è necessario e sufficiente che l'operazione X applicata ad una soluzione qualunque del sistema dia una nuova soluzione –

L'applicazione di questo criterio richiede l'integrazione del sistema completo, ma si può facilmente trasformare il criterio in un altro pel quale ciò non sia più necessario – Basta per ciò osservare che l'espressione alternata

$$(A_k, X) = A_k(Xf) - X(A_k f) \qquad k = 1, 2, \ldots q$$

si annulla per $f = \varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ perchè $A_k\varphi_i = 0$ e $X\varphi_i$ è nuovamente una soluzione – Dunque l'equazione

$$(A_k X) = 0$$

è una conseguenza delle (16) e per ciò l'espressione alternata $(A_k X)$ deve essere una combinazione lineare, a coefficienti in generale variabili, di

---

(*) Essendo $X\varphi_i = F(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{n-q})$ si ha

$$X^2\varphi_i = \sum_k^{1 \ldots n-q} \frac{\partial F}{\partial \varphi_k} X\varphi_k, \text{ etc.} \ldots$$

$$A_1 f\,,\ A_2 f \ldots\ldots A_q f$$

Viceversa se ciò accade, se φ è una soluzione qualunque del sistema (16) anche $X\varphi$ è una soluzione, e per ciò una funzione di $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-q}$ - Dunque:

Affinchè un sistema completo

$$A_1 f=0\ ,\quad A_2 f=0\ \ldots\ldots A_q f=0$$

ammetta il gruppo G_1 ad un parametro, generato dalla trasformazione infinitesima Xf, è necessario e sufficiente che le espressioni alternate

$$(A_k, X) \qquad k=1,2\ldots q$$

siano combinazioni lineari (a coefficienti in generale variabili) di $A_1 f, A_2 f \ldots\ldots A_q f$ -

Basta ora ricordare che un gruppo $G_r=(X_1 X_2 \ldots X_r)$ non è altro che l'insieme di tutti i gruppi ad un parametro

$$Xf= \lambda_1 X_1 f+\lambda_2 X_2 f+\ldots\ldots+\lambda_r X_r f$$

(colle λ costanti) per dedurne il teorema generale:

Un sistema completo

$$A_1 f=0\ ,\quad A_2 f=0\ \ldots\ldots A_q f=0$$

ammette il gruppo $G_r=(X_1 X_2 \ldots\ldots X_r)$ allora soltanto quando ciascuna delle espressioni alternate

$$(A_k\,, X_i) \quad \begin{cases} k=1,2\ldots q \\ i=1,2\ldots r \end{cases}$$

si compone linearmente con $A_1 f, A_2 f \ldots\ldots A_q f$

Per es. se prendiamo il gruppo G_3 delle traslazioni

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ed il sistema completo

$$A_1 f = c\frac{\partial \Phi}{\partial x} - a\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

$$A_2 f = c\frac{\partial \Phi}{\partial y} - b\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

con a, b, c costanti; manifestamente le espressioni alternate (A_k, X_i) sono nulle e la condizione è soddisfatta — Dunque eguagliando ad una costante arbitraria la soluzione

$$\Phi = ax + by + cz$$

del sistema completo, si ha una divisione dello spazio (cf. § 51) — Così pure se prendiamo il secondo esempio di questo paragrafo

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad X_4 f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}$$

si ha l'identità

$$xX_1 f + yX_2 f + zX_3 f = 0$$

ed il sistema completo

$$A_1 f = X_1 f = 0 \qquad A_2 f = X_2 f = 0$$

sta nella relazione voluta col gruppo —

La sua soluzione $\Phi = x^2 + y^2 + z^2$ eguagliata a costante dà la richiesta divisione dello spazio —

§ 53
Gruppi sistatici ed asistatici

Altre importanti distinzioni fra i gruppi si desumono dalle considerazioni seguenti – Un gruppo G_r di trasformazioni dello spazio $S_n = (x_1\, x_2 \ldots x_n)$ può essere così costituito che tutte le trasformazioni di G_r che lasciano fisso un punto generico P dello spazio lascino fissi contemporaneamente tutti i punti di una varietà (continua) contenente P. Il gruppo si dice allora, secondo Lie-Engel, sistatico, altrimenti asistatico – Così ogni gruppo semplicemente transitivo è sistatico perchè se un punto resta fisso, restano fissi anche tutti gli altri punti dello spazio – Così pure è sistatico il gruppo G_3 delle rotazioni attorno ad un punto O perchè se resta fisso un punto P, restano immobili anche tutti i punti della retta OP. Al contrario per es. il gruppo totale di movimenti nel piano o nello spazio è asistatico, il sottogruppo delle rotazioni attorno ad un punto non lasciando fisso alcun altro punto –

Ricerchiamo ora i criterii per decidere, appena date le r trasformazioni generatrici del gruppo

$$X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x_1\, x_2 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$k = 1, 2, \ldots r,$$

se il gruppo appartiene alla classe dei gruppi sistatici o a quella degli asistatici -

Indichiamo, come al § 47, con q la caratteristica della matrice:

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \dots\dots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x) & \xi_{22}(x) & \dots\dots & \xi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \dots\dots & \xi_{rn}(x) \end{Vmatrix},$$

onde sarà q la dimensione delle varietà minime invarianti di prima classe (§ 47) ed il sottogruppo che lascia P stazionario ha precisamente $r-q$ parametri.

Quando $q = r$, il gruppo è certamente sistatico perchè riducendosi il detto sottogruppo all'identità lascia fissi tutti i punti dello spazio - Supponiamo dunque $q < r$; ciò significa che fra le r espressioni

$$X_1 f \;, X_2 f \dots\dots X_r f$$

ve ne sono precisamente q indipendenti nel senso che non sono legate da alcuna relazione lineare a coefficienti variabili, mentre le rimanenti $r-q$ si esprimono linearmente ed omogeneamente per quelle q. Senza alterare la generalità possiamo supporre come al § 40

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{q1} & \xi_{q2} & \dots & \xi_{qq} \end{vmatrix} \neq 0$$

ed allora

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_q f$$

sono forme lineari nelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ indipendenti, mentre le rimanenti si esprimono per queste colle formule

(17) $X_{q+j} f = \varphi_{j1}(x) X_1 f + \varphi_{j2}(x) X_2 f + \ldots\ldots + \varphi_{jq}(x) X_q f$

$$j = 1, 2 \ldots r-q,$$

dove le $\varphi_{j\lambda}$ sono delle funzioni delle x.

Dimostreremo che: Il gruppo G_r è sistatico quando fra le $q(r-q)$ funzioni φ delle x ve ne sono meno di n indipendenti, al contrario asistatico se il numero delle φ indipendenti è precisamente $= n$.

Intanto il caso già esaminato $q = \overset{r}{n}$ rientra nel criterio ora enunciato perchè allora è zero il numero delle φ ed il gruppo è sistatico.

In generale osserviamo che il sottogruppo di stabilità di un punto generico $P_0 \equiv (x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)})$ ha $\overset{r}{n}-q$ parametri e le sue $\overset{r}{n}-q$ trasformazioni generatrici sono pel § 40

(18) $X_{q+j} f - \varphi_{j1}(x^0) X_1 f - \varphi_{j2}(x^0) X_2 f - \ldots\ldots - \varphi_{jq}(x^0) X_q f$

$$j = 1, 2 \ldots r-q$$

Ora se il numero delle φ indipendenti è $n-\rho$ soltanto, con $\rho > 0$, le equazioni

(19) $\varphi_{j\lambda}(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \varphi_{j\lambda}(x_1^0\, x_2^0 \ldots x_n^0)$

sono in numero di $n-\rho$ indipendenti soltanto e definiscono una varietà V_ρ di dimensione ρ - Tutti i punti di questa varietà ammettono lo stesso sottogruppo di stabilità del punto P_0, poichè se nelle (18) al posto delle $x_i^{(0)}$ si pongono le coordinate $x_i^{(1)}$ di un altro punto qualunque di V_ρ le trasformazioni infinitesime (18) rimangono per le (19) le stesse; il gruppo è dunque sistatico, c.d.d. Di più notiamo che tutti i punti che hanno lo stesso gruppo di stabilità di P_0 appartengono alla varietà V_ρ definita dalle (19). Poichè se $x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \ldots\ldots x_n^{(1)}$ sono le coordinate di un tal punto, le $r-q$ trasformazioni

$$X_{q+j}f - \sum_k^{1\ldots q} \varphi_{jk}(x^{(1)})X_k f \quad (j=1,2\ldots r-q)$$

debbono comporsi linearmente, con coefficienti costanti, colle (18) e ciò esige che si abbia

$$\varphi_{jk}(x^{(1)}) = \varphi_{jk}(x^{(0)}) \quad \begin{cases} j=1,2\ldots r-q \\ k=1,2\ldots q \end{cases}$$

Ogni varietà V_ρ definita dalle (19) può dunque dirsi una varietà sistatica del gruppo perchè consta di tutti e soli i punti che ammettono il medesimo sottogruppo di stabilità –

È manifesto in fine che se $\rho=0$, se cioè le φ_{jk} sono in numero di n indipendenti, il gruppo è asistatico perchè le (19) possono soddisfarsi solo con un numero discreto di valori per le x.

Come esempio, se consideriamo il gruppo G_3 delle rotazioni attorno all'origine, fra

$$X_1 f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ X_2 f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\ ,\ X_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

abbiamo la sola relazione

$$X_3 f = -\frac{x}{z} X_1 f - \frac{y}{z} X_2 f\ ;$$

le funzioni φ sono due soltanto ed il gruppo è quindi sistatico. Le varietà sistatiche hanno le equazioni

$$\frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}\ ,\ \frac{y}{z} = \frac{y_0}{z_0}\ ,$$

cioè sono le rette per l'origine –

§. 54
Imprimitività di un gruppo sistatico

Supponiamo che sia G_r un gruppo sistatico ed indichiamo con

$$\varphi_1\ \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-\rho}$$

le $n-\rho$ indipendenti fra le funzioni φ, dove $\rho > 0$ e supponiamo dapprima $n-\rho > 0$. Le equazioni

$$\varphi_1(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_1\ ,\ \varphi_2(x_1 x_2 \ldots x_n) = c_2 \ldots\ldots \varphi_{n-\rho}(x_1 \ldots\ldots x_n) = c_{n-\rho}$$

danno una divisione dello spazio in $\infty^{n-\rho}$ varietà sistatiche V_ρ ed è facile vedere che essa è altresì una divisione in sistemi d'imprimitività. E infatti se P, Q sono due punti qualunque di una stessa varietà sistatica V_ρ, essi hanno lo stesso sottogruppo di stabilità G_{r-q}; se una trasformazione qualunque T di G_r trasporta P, Q in P', Q', anche P', Q' hanno a comune

il sottogruppo di stabilità nel sottogruppo trasformato
$$T^{-1} G_{r-q} T$$
Dunque P', Q' appartengono ad una medesima varietà sistatica V'_ρ, onde si vede che tutte le trasformazioni di G_r o lasciano singolarmente invariata ciascuna varietà sistatica o scambiano queste varietà fra loro.

Le varietà sistatiche costituiscono dunque sistemi d'imprimitività del gruppo.

Se poi si ha $n-\rho=0$, non vi sono funzioni φ e perciò $q=r\leq n$. Se vale il segno di diseguaglianza, il gruppo è intransitivo quindi anche imprimitivo. Se poi $q=r=n$ il gruppo è semplicemente transitivo e dimostreremo più tardi (V: § 93) che un tale gruppo è sempre imprimitivo. Ammettendo per un momento questo teorema, abbiamo il risultato:
Ogni gruppo sistatico è necessariamente imprimitivo; le varietà sistatiche danno una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività.

La stessa cosa si può provare, secondo il § 52, dimostrando direttamente che tutte le espressioni
$$X_i \varphi_\nu \begin{cases} i=1,2\ldots r \\ \nu=1,2\ldots n-\rho \end{cases}$$
si esprimono per $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{n-\rho}$, ciò che segue facilmente dalle formole di composizione del gruppo
$$(X_i, X_k) = \sum_s^{1\ldots r} c_{iks} X_s f$$
tenendo conto delle identità (17) - Abbiamo infatti

$$(\alpha)\quad (X_i\,.\,X_{q+j}) = \Big(X_i\,,\ \sum_\lambda^{1\ldots q}\varphi_{j\lambda}(x).X_\lambda\Big) = \sum_s^{1\ldots q} X_i(\varphi_{js})\,X_s f + \\ + \sum_\lambda^{1\ldots q}\varphi_{j\lambda}\,(X_i\,.\,X_\lambda)$$

D'altronde è

$$(X_i\,,X_\lambda) = \sum_s^{1\ldots r} c_{i\lambda s}X_s f = \sum_s^{1\ldots q}\Big\{c_{i\lambda s} + \sum_\mu^{1\ldots r-q} c_{i\lambda,q+\mu}\,\varphi_{\mu s}\Big\}X_s f$$

e similmente

$$(X_i\,,X_{q+j}) = \sum_s^{1\ldots q}\Big\{c_{i,q+j,s} + \sum_\lambda^{1\ldots r-q} c_{i,q+j,q+\lambda}\,\varphi_{\lambda s}\Big\}X_s f$$

e sostituendo nelle (α), la relazione che ne viene fra $X_1 f$, $X_2 f$ ..... $X_q f$ deve essere un'identità, onde eguagliando i coefficienti di $X_s f$ da una parte e dall'altra ne risultano le formole:

$$(20)\quad X_i(\varphi_{js}) = c_{i,q+j,s} + \sum_\lambda^{1\ldots r-q} c_{i,q+j,q+\lambda}\,\varphi_{\lambda s} - \\ - \sum_\lambda^{1\ldots q}\varphi_{j\lambda}\Big\{c_{i\lambda s} + \sum_\mu^{1\ldots r-q} c_{i\lambda q+\mu}\,\varphi_{\mu s}\Big\},$$

che ci dimostrano essere le espressioni

$$X_i(\varphi_{js})$$

funzioni quadratiche delle φ stesse, dipendenti unicamente dalle costanti c_{iks} di composizione del gruppo.

§ 55

Criterio per la sistaticità del gruppo dedotto dalle equazioni di definizione

Per decidere della sistaticità o meno di un gruppo non occorre conoscere le espressioni delle sue trasformazioni infinitesime, come sopra si è ammesso, ma basta avere le equazioni di definizione del gruppo. – Ecco come procede Lie a tale scopo. Intanto, date le equazioni di definizione, si può subito calcolare la caratteristica generica q della solita matrice e se riesce $q=r$ il gruppo è senz'altro sistatico (§ 53). Supponiamo dunque $q<r$; allora esistono le $q(r-q)$ funzioni $\varphi_{j\lambda}$ del § 53. Queste non si conoscono direttamente quando siano date sole le equazioni di definizione, ma si può da queste calcolare un sistema di equazioni ai differenziali totali di cui le $\varphi_{j\lambda}$ sono gli integrali, ed allora si può anche decidere, senza integrare queste equazioni, quante delle φ sono indipendenti.

Se costruiamo le $q(r-q)$ equazioni ai differenziali totali

$$(21) \qquad \Omega_{j\lambda} = \sum_{s}^{1\ldots n} \frac{\partial \varphi_{j\lambda}}{\partial x_s} dx_s = 0 \qquad \begin{cases} j = 1, 2 \ldots r-q \\ \lambda = 1, 2 \ldots q \,, \end{cases}$$

di esse gli integrali sono naturalmente le funzioni φ stesse – Ora dalla identità (17) risulta

$$\xi_{q+j,i} = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}\, \xi_{\lambda i}$$

e quindi

$$\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \xi_{\lambda i} \frac{\partial \varphi_{j\lambda}}{\partial x_s},$$

onde

$$(22)\qquad \sum_{s}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} \right\} dx_s = \sum_{\lambda}^{1\dots q} \xi_{\lambda i}\, \Omega_{j\lambda}$$

Le equazioni (21) hanno dunque per conseguenza le seguenti

$$(23)\qquad \sum_{s}^{1\dots n} \left\{ \frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_s} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda} \frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_s} \right\} dx_s = 0\ ;$$

Ma viceversa da queste seguono le (21) perchè la matrice $|\xi_{\lambda i}|$ ha la caratteristica q; dunque le (21) e le (23) si equivalgono e le (23) hanno dunque per integrali le funzioni $\varphi_{j\lambda}$ – Naturalmente basta scrivere delle (23) quelle linearmente indipendenti che formano un sistema illimitatamente integrabile –

Il sistema (23) può alla sua volta sostituirsi da un altro equivalente, che si calcola dalle equazioni di definizione del gruppo – Perciò ricerchiamo, per un punto generico $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$, le trasformazioni infinitesime del gruppo d'ordine superiore e in esse calcoliamo i termini di 1° ordine (cf. §§ 38-39) – Intanto le $r-q$ trasformazioni d'ordine superiore sono date da

$$X_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) X_\lambda f$$

e la più generale di esse da

$$(24) \qquad \sum_{j}^{1\dots r-q} e_j \left\{ X_{q+j}f - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) X_\lambda f \right\},$$

dove le e_j sono parametri arbitrari – Ponendo in evidenza nella (24) i termini di 1° ordine essa si scrive

$$(25) \sum_{j}^{1\dots r-q} e_j \sum_{i,k}^{1\dots n} \left\{ \left(\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k} \right)_{x=x^0} - \sum_{\lambda}^{1\dots q} \varphi_{j\lambda}(x^0) \left(\frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_k} \right)_{x=x^0} \right\} (x_k - x_k^0) \frac{\partial f}{\partial x_i} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots ;$$

i coefficienti sono composti, come si vede, linearmente coi valori per $x = x^0$ dei termini fra parentesi nelle (23). Ma i termini di 1° ordine nelle (25) si possono calcolare direttamente dalle equazioni di definizione del gruppo come segue (v. § 39) - La trasformazione più generale d'ordine superiore ha pel § 39 lo sviluppo

$$\xi_i = \sum_k c_{ik} (x_k - x_k^{(0)}) + \dots$$

dove dei coefficienti c_{ik} possono prendersene ad arbitrio $\tau_1 = \varepsilon_1 - \nu_1$ e i rimanenti sono determinati linearmente ed omogeneamente per mezzo di questi.

Indicando dunque con

i coefficienti c_{ik} $e'_1\ e'_2 \ldots\ldots e'_{r_1}$ che restano arbitrari, le stesse espressioni (25) potranno anche scriversi in questo altro modo

$$(25^*)\quad \sum_j^{1\ldots r_1} e'_j \sum_{ik}^{1\ldots n} \alpha_{jik}(x^0)(x_k - x_k^{(0)})\frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots\cdots,$$

dove i coefficienti $\alpha_{jik}(x^0)$ sono determinate funzioni analitiche delle $x^{(0)}$ calcolabili dalle equazioni di definizione. Il confronto delle (25), (25*) dimostra che si può soddisfare alle relazioni

$$\sum_j^{1\ldots r-q} e_j \left\{\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k} - \sum_\lambda^{1\ldots q} \psi_{j\lambda}(x^0)\frac{\partial \xi_{\lambda i}}{\partial x_k}\right\}_{x=x^{(0)}} =$$
$$= \sum_j^{1\ldots r_1} e'_j\, \alpha_{jik}(x^0)$$
$$(i,\ k = 1, 2 \ldots n)$$

sia prendendo ad arbitrio le $r-q$ costanti e_j e determinando convenientemente le r_1 costanti e'_j, sia inversamente. E poiché ciò vale per qualunque sistema di valori delle $x^{(0)}$ e quindi per le $x^{(0)}$ variabili, si conclude che si possono soddisfare le n^2 equazioni

$$\sum_j^{1\ldots r-q} e_j \left\{\frac{\partial \xi_{q+j,i}}{\partial x_k} - \sum_\lambda \psi_{j\lambda}(x)\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}\right\} =$$

$$= \sum_j^{1\ldots r_1} e'_j\, \alpha_{jik}(x) \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n)$$

sia prendendo per le e_j funzioni arbitrarie delle x e determinando in modo opportuno le e'_j, sia inver=

samente —

Moltiplicando le precedenti per dx_k e sommando rispetto a k, vediamo che le (23) sono perfettamente equivalenti alle seguenti

$$\sum_k^{1\dots n}\sum_j^{1\dots r} e_j'\, \alpha_{jik}(x)\, dx_k = 0\,,$$

e quindi, siccome le e_j' restano funzioni arbitrarie delle x, alle nr equazioni seguenti

$$(26)\qquad \sum_k^{1\dots n} \alpha_{jik}(x)\,dx_k = 0 \qquad \begin{cases} j = 1, 2 \dots r, \\ k = 1, 2 \dots n \end{cases}$$

Così il sistema di equazioni ai differenziali totali (21) (che sono le equazioni differenziali delle varietà sistatiche) è surrogato, come si voleva, dal sistema (26) che si può calcolare appena date le equazioni di definizione del gruppo —

Calcolate adunque le $\alpha_{jik}(x^0)$ da queste equazioni basterà costruire la matrice

$$\left\| \alpha_{ji1}(x^0),\ \alpha_{ji2}(x^0) \dots\dots \alpha_{jin}(x^0) \right\|$$

$$\begin{cases} j = 1, 2, \dots r, \\ i = 1, 2, \dots n \end{cases}$$

e se la caratteristica sarà $< n$ il gruppo sarà sistatico, invece asistatico quando la detta caratteristica sia $= n$.

Esempio. Prendansi le equazioni di definizione del gruppo dei movimenti calcolate al § 41 e si sviluppino in serie i coefficienti $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ delle trasformazioni infinitesime d'ordine superiore, tenendo conto dei termini del 1° ordine.

$$\xi_i = \{c_{i1}(x-x_0) + c_{i2}(y-y_0) + c_{i3}(z-z_0)\} + \cdots$$

Le equazioni di definizione danno

$$c_{ii} = 0 \qquad c_{ik} + c_{ki} = 0$$

onde le $r_1 = 3$ trasformazioni indipendenti fra queste sono

$$(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial z} - (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial y}\ ,\ (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial y} - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial x},$$

le (26) diventano

$$dx = 0\ ,\ dy = 0,\ dz = 0$$

ed il gruppo e' asistatico -

Capitolo V°

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime - Sottogruppi invarianti e serie di composizione di un gruppo -

§ 56

Serie invarianti di trasformazioni infinitesime

Siano

$$X_k f = \sum_i^{1,\dots,n} \xi_{ki}(x_1\, x_2 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
$$k = 1, 2, \dots, q$$

q trasformazioni infinitesime delle quali supponiamo per ora soltanto che siano indipendenti senza esigere che generino un gruppo G_r - Indicando con

$$e_1 \; e_2 \; \dots \; e_q$$

q parametri arbitrarii, consideriamo la serie di ∞^{q-1} trasformazioni

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_q X_q f$$

Se in questa serie introduciamo nuove variabili x' al posto delle x, essa si muterà in una nuova serie formalmente diversa. Ma può anche darsi che la nuova serie non differisca dall'antica, sussistendo per valori qualunque delle e identità della forma

$$(1) \quad \sum_k^{1,\dots,q} e_k \sum_i^{1,\dots,n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k^{1,\dots,q} e'_k \sum_i^{1,\dots,n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x'_i} \,,$$

dove le $\xi_{ki}(x')$ sono le medesime funzioni delle x' come le $\xi_{ki}(x)$ delle x e le e' sono convenienti funzioni delle e. Se ha luogo una tale identità (1), o come scriviamo più brevemente

$$(1^*) \quad \sum_k^{1,\dots,q} e_k X_k f = \sum_k^{1,\dots,q} e'_k X'_k f \,,$$

diremo che la serie delle ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime $\sum_k^{1,\dots,q} e_k X_k f$ è invariante per la trasformazione delle x nelle x', od anche che essa ammette quest'ultima trasformazione.

Così per es. la serie
$$\sum_i^{1\dots n} e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$
ammette ogni trasformazione lineare omogenea nelle x
$$x'_i = \sum_k^{1\dots n} a_{ik}\, x_k$$
e si ha
$$e'_i = \sum_k^{1\dots n} a_{ik}\, e_k$$

Cominciamo dal dimostrare che se la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k^{1\dots q} e_k X_k f$ ammette la trasformazione
$$x'_i = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$
saranno in ogni caso nella relazione (1) o (1*) le e' funzioni lineari omogenee nelle e.

Esprimendo le x per le x', abbiamo
$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} X_k(x'_i) \frac{\partial f}{\partial x'_i}$$
e ponendo
$$X_k(x'_i) = \eta_{ki}(x'_1\, x'_2 \dots x'_n)$$
la (1*) ove si eguaglino da una parte e dall'altra i coefficienti di $\frac{\partial f}{\partial x'_i}$ dà:

$$(2)\qquad \sum_k^{1\ldots q} e'_k\,\xi_{ki}(x') = \sum_k^{1\ldots q} e_k\,\eta_{ik}(x').$$

Per ipotesi è possibile porre per le e' tali funzioni delle e da rendere identiche le (2) - Ma se poniamo nelle (2) per le x' q sistemi di variabili indipendenti,

$$\begin{array}{c} x'_1 \;\; x'_2 \;\ldots\ldots\; x'_n \\ x''_1 \;\; x''_2 \;\ldots\ldots\; x''_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(q)}_1 \;\; x^{(q)}_2 \;\ldots\ldots\; x^{(q)}_n \end{array}$$

e ricordiamo che, secondo una discussione già fatta al §. 23, la matrice:

$$\left\| \xi_{k1}(x') \ldots \xi_{kn}(x') \;\; \xi_{k1}(x'') \ldots \xi_{kn}(x'') \ldots\ldots \xi_{k1}(x^{(q)}) \ldots\ldots \xi_{kn}(x^{(q)}) \right\|$$
$$k = 1, 2 \ldots q$$

ha precisamente la caratteristica q, vediamo che le equazioni ottenute sono risolubili rispetto ad $e'_1, e'_2 \ldots$ $\ldots e'_q$ e però le e' sono appunto funzioni lineari omogenee delle e, c. d. d. -

§ . 57

Serie invarianti rispetto ad un gruppo G_1

Ricerchiamo ora la condizione affinchè la serie di ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime

$$\sum_k^{1\ldots q} e_k X_k f$$

ammetta ogni trasformazione finita del gruppo G_1 ad un parametro generato da

$$Yf = \sum_i^{1\dots n} \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Per ciò, supposto che siano

$$x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots\dots x_n ; t)$$

le trasformazioni finite di G_1 consideriamo

$$X_k' f = \sum_i \xi_{ki}(x_1' x_2' \dots x_n') \frac{\partial f}{\partial x_i'}$$

e sviluppiamo $X_k' f$ per potenze di t, calcolando il coefficiente di t nello sviluppo – Il calcolo si fa molto semplicemente se si immagina prima d'aver ridotto, con una trasformazione di variabili il gruppo G_1 alla forma (§ 9)

$$x_i' = x_i \qquad i = 1, 2 \dots\dots n-1$$

$$x_n' = x_n + t,$$

con che Yf assume la forma

$$Yf = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Allora si ha:

$$X_k' f = \sum_i \xi_{ki}(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, x_n + t) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

onde sviluppando per potenze di t

$$X_k' f = X_k f + t \sum_i \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dots\dots$$

che possiamo scrivere

$$(3) \qquad X_k' f = X_k f + t(Y X_k) f + \dots,$$

dopo di che lo sviluppo vale per qualunque sistema di variabili.[*]

Ciò premesso, la $X'_k f$ deve essere, per qualunque t, una combinazione lineare omogenea di $X_1 f$, $X_2 f, \ldots X_q f$; in particolare ciò deve valere per $\frac{X'_k f - X_k f}{t}$ per $t=0$, e quindi avremo necessariamente

$$(4) \qquad (YX_k) = \sum_j^{1\ldots q} g_{kj} X_j f \qquad (k=1,2\ldots q),$$

le g_{kj} essendo costanti numeriche.

Dimostriamo ora che queste condizioni (4) sono altresì sufficienti perchè la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammetta il gruppo Vf. Bisogna per ciò provare che si possono assumere per le e' tali funzioni (lineari omogenee) delle e e di t che le e' si riducano alle e per $t=0$ e ne risulti l'identità:

$$\sum_k e'_k X'_k f = \sum_k e_k X_k f,$$

per la qual cosa è necessario e sufficiente che risulti il primo membro indipendente da t. Dobbiamo dunque avere

$$(5) \qquad \sum_k \frac{de'_k}{dt} X'_k f + \sum_k e'_k \frac{\partial X'_k f}{\partial t} = 0$$

(*) Se per un cangiamento qualunque di variabili x nelle $\bar{x}$ le operazioni Af, Bf si mutano in $\bar{A}f$, $\bar{B}f$, la (A,B) si muta infatti in $(\bar{A},\bar{B})$.

Per calcolare $X'_k f$ riprendiamo la Yf sotto la forma normale $\frac{\partial f}{\partial x_n}$, abbiamo

$$(6)\qquad X'_k f = X_k f + t\sum_i \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{t^2}{\underline{|2}}\sum_i \frac{\partial^2 \xi_{ki}}{\partial x_n^2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \frac{t^m}{\underline{|m}}\sum_i \frac{\partial^m \xi_{ki}}{\partial x_n^m}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots$$

Ma dalle identità (4) supposte segue ora

$$(4^*)\qquad \frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_n} = \sum_j g_{kj}\,\xi_{ji},$$

e quindi

$$\frac{\partial^m \xi_{ki}}{\partial x_n^m} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\,\frac{\partial^{m-1}\xi_{ji}}{\partial x_n^{m-1}}$$

Dopo di ciò derivando la (6) rapporto a t viene

$$\frac{\partial X'_k}{\partial t} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\left\{X_j f + t\sum_i^{1\dots n}\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \cdots + \frac{t^{m-1}}{\underline{|m-1}}\sum_i^{1\dots n}\frac{\partial^{m-1}\xi_{ji}}{\partial x_n^{m-1}}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\}$$

e questa per la (6) stessa si scrive

$$(6^*)\qquad \frac{\partial X'_k f}{\partial t} = \sum_j^{1\dots q} g_{kj}\, X'_j f \qquad (*)$$

(*) In luogo di servirsi degli sviluppi in serie per stabilire queste formole del testo si possono dedurre per derivazione così. Si ha

$$X'_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1 \dots x_{n-1}, x_n + t)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

indi

$$\frac{\partial X'_k f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \xi_{ki}(x_1\dots x_{n-1}, x_n+t)}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

e per la (4*)

Sotto questa forma essa vale, come subito si vede, in qualunque sistema di variabili, senza che occorra ridurre la Yf alla forma $\frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Sostituendo nella (5) e scambiando nella seconda somma gli indici j, k, otteniamo

$$\sum_k^{1\ldots q}\left\{\frac{de'_k}{dt}+\sum_j^{1\ldots q} g_{jk}\, e'_j\right\} X'_k f=0$$

Poichè le $X'_k f$ sono indipendenti dobbiamo dunque prendere per le e' tali funzioni di t da soddisfare il sistema di equazioni lineari a coefficienti costanti

$$(7)\qquad \frac{de'_k}{dt}+\sum_j^{1\ldots q} g_{jk}\, e'_j=0$$

$$(k=1,2\ldots q)$$

Viceversa, se operiamo in questo modo e indichiamo con e_i i valori iniziali delle e'_i (per $t=0$), avremo:

$$\sum_k e'_k X'_k f=\sum_k e_k X_k f$$

Formuliamo questi risultati nell'importante teorema:

Una serie di ∞^{q-1} trasformazioni infinitesime

$$e_1X_1f+e_2X_2f+\ldots+e_qX_qf$$

ammette le trasformazioni del gruppo G_1 ad un pa-

$$\frac{\partial X'_k f}{\partial t}=\sum_i\sum_j g_{kj}\,\xi_{ji}(x_1\ldots x_{n-1},x_n+t)\frac{\partial f}{\partial x_i}=$$

$$=\sum_j g_{kj}\,X'_j f$$

rametro Yf solo quando la Yf e le $X_k f$ sono legate da relazioni della forma

$$(Y, X_k) = \sum_j^{1\ldots q} g_{kj} X_j f,$$

a coefficienti g_{kj} costanti - Soddisfatte queste condizioni, la trasformazione

$$\sum_k e_k X_k f$$

prende per una trasformazione finita

$$x_i' = x_i + t Y x_i + \frac{t^2}{1.2} Y^2 x_i + \ldots$$

di G_1 la forma $\sum_k e_k' X_k' f$, dove le e' si determinano, in funzione di t, dalle equazioni differenziali (7)

$$(7) \qquad \frac{de_k'}{dt} + \sum_j^{1\ldots q} g_{jk} e_j' = 0$$

colle condizioni iniziali $e_i' = e_i$ per $t = 0$ -

Si osservi che dalle (7) risulta nuovamente il fatto, già constatato al § precedente, che le e' dipendono linearmente ed omogeneamente dalle e, le corrispondenti formole

$$e_k' = \sum_j^{1\ldots q} \beta_{kj}(t) e_j$$

daranno le equazioni finite di un gruppo Γ_1 individuato dalle equazioni differenziali (7).

Come conseguenza del teorema generale superiore, osserviamo che se la serie di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammette separatamente i due gruppi ad un parametro

$$Y_1 f \quad , \quad Y_2 f$$

ammetterà pure il gruppo

$$aY_1f+bY_2f$$

con a, b costanti, come pure (Y_1Y_2) - La prima cosa risulta dalla formola

$$(aY_1+bY_2\,,X_k)=a(Y_1X_k)+b(Y_2X_k)$$

e la seconda dall'identità Jacobiana

$$((Y_1Y_2),X_k)+((Y_2,X_k)\,,Y_1)+((X_k,Y_1),Y_2)=0$$

quando si applichi il teorema stesso -

§.58
Trasformazioni finite della serie $\Sigma e_k X_k f$

Supponiamo ancora che la serie ∞^{q-1} di trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ ammetta il gruppo Yf - Ciascuna delle trasformazioni infinitesime $\sum_k e_k X_k f$ genera un gruppo G_1 che per le trasformazioni finite $x_i'=f_i(x_1,x_2\ldots x_n\,;t)$ del gruppo Yf si muta precisamente nel gruppo generato dalla trasformazione infinitesima $\sum_k e_k' X_k' f$ (§11) pg 43 Ne segue che le trasformazioni di Yf non solo trasformano in se stessa la serie di trasformazioni infinitesime $\Sigma e_k X_k f$ ma ancora quella delle ∞^q trasformazioni finite da esse generata -

Ogni trasformazione finita di questa serie ha lo sviluppo

$$(8) \qquad \bar{x}_i = x_i + \sum_k^{1\dots q} e_k X_k x_i + \sum_{k,j}^{1\dots q} \frac{e_k e_j}{1.2} X_k X_j x_i + \cdots$$

per la trasformazione delle x nelle x' si muta in

$$(8^*) \qquad \bar{x}'_i = x'_i + \sum_i^{1\dots q} e'_k X'_k x'_i + \sum_{k,j}^{1\dots q} \frac{e'_k e'_j}{1.2} X'_k X'_j x'_i + \cdots$$

(cf. §11 alla fine), dove la relazione fra le e' e le e è quella già fissata dalla formola

$$\Sigma e_k X_k f = \Sigma e'_k X'_k f$$

Ciò dimostra ancora che la nuova serie di ∞^q trasformazioni finite ha la stessa forma nelle nuove variabili x' come nelle antiche x e di più fa vedere che una trasformazione finita (8) coi parametri $e_1\, e_2 \dots e_q$ si cangia nella (8*) coi parametri $e'_1\, e'_2 \dots e'_q$, essendo le e' definite dalle equazioni differenziali (7) colle condizioni iniziali $e'_i = e_i$ per $t=0$ –

Ora possiamo riguardare, e riguarderemo nel seguito, il simbolo $\Sigma e_k X_k f$ non solo come simbolo di una trasformazione infinitesima, ma ben anche come simbolo della trasformazione finita (8), nel quale ultimo caso bisogna aver riguardo ai valori effettivi delle e e non soltanto ai loro rapporti come nel primo caso.

Con questa nuova interpretazione del simbolo $\Sigma e_k X_k f$ possiamo dire:

La trasformazione finita $\sum_k e_k X_k f$, introducendo le nuove variabili x', si cangia nell'altra $\sum_k e'_k X'_k f$.

Supponiamo ora che la serie di ∞^q trasformazioni finite $\sum_k e_k X_k f$ venga trasformata in sè medesima da ogni trasformazione della serie stessa.

Secondo il teorema del paragrafo precedente sarà perciò necessario e sufficiente che fra le q trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f, \dots X_q f$ sussistano relazioni della forma

$$(X_i, X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f.$$

colle c_{iks} costanti numeriche. Ma in questo caso, pel teorema principale, le ∞^q trasformazioni finite $\sum e_k X_k f$ costituiscono un gruppo G_q. Abbiamo dunque il teorema molto notevole:

Ogni serie di ∞^q trasformazioni finite $\sum_k e_k X_k f$, che possegga la proprietà di essere trasformata in sè stessa da qualunque sua trasformazione, è necessariamente un gruppo G_q.

§ 59

Trasformazioni permutabili

Come caso particolare dei risultati al paragrafo precedente possiamo ricercare la condizione affinchè ogni trasformazione finita del gruppo $X_i f$ sia permutabile con qualunque trasformazione del gruppo Yf. Per ciò dovrà l'espressione alternata (XY) differire sì da Xf che da Yf per un fattore costante; e siccome Xf, Yf sono supposte indipendenti, si avrà dunque

$$(X\,Y) = 0$$

Viceversa, soddisfatta questa relazione, le equazioni differenziali (7) si riducono all'unica

$$\frac{de'}{dt} = 0$$

e danno $e' = e$, ciò che dimostra come ogni trasformazione finita di Xf trasformi in se stessa una qualunque di Yf e inversamente. Abbiamo quindi il teorema:

Le trasformazioni finite di due gruppi Xf, Yf sono fra loro permutabili allora ed allora soltanto che si ha $(XY) = 0$

Non sarà inutile far vedere come si può stabilire direttamente questo semplice risultato riducendo prima, con una trasformazione di variabili, una delle due trasformazioni Xf, Yf per es. la prima alla forma

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Allora il primo gruppo ha le equazioni finite

$$A)\quad \begin{cases} x_i' = x_i & i = 1, 2 \ldots n-1 \\ x_n' = x_n + t \end{cases}$$

e se poniamo che quelle del secondo siano

$$B) \begin{cases} x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n\, ;\, \tau) \\ x_n' = f_n(x_1\, x_2 \dots x_n\, ,\, \tau) \,, \end{cases}$$

dove con τ abbiamo indicato il parametro nel 2° gruppo e supponiamo che per $\tau = 0$ venga la trasformazione identica. Per ipotesi una qualunque trasformazione A nel gruppo $A)$ deve essere permutabile con una qualunque B in $B)$ cioè

$$AB = BA$$

Questo ci dà che per qualunque t e τ si deve avere

$$f_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, ,\, x_n + t_1\, \tau) = f_i(x_1 \dots x_{n-1}\; x_n\;\; \tau)$$
$$\text{per } i = 1, 2, \dots n-1$$

e

$$f_n(x_1 , x_2 \dots x_{n-1} , x_n + t , \tau) = f_n(x_1 , \dots \dots x_n , \tau) + t$$

Ne segue che le f_i per $i = 1, 2 \dots n-1$ debbono essere indipendenti da x_n, diciamo $f_i(x_1 \dots x_n\, \tau) = \varphi_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\, \tau)$ e la f_n deve porsi sotto la forma

$$f_n = x_n + \varphi_n(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\; \tau)$$

riducendosi $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_{n-1}$ ad $x_1\, x_2 \dots x_{n-1}$ per $\tau = 0$ e la φ_n a zero. Il 2° gruppo deve dunque avere equazioni finite della forma

$$(9) \begin{cases} x_i' = \varphi_i(x_1\, x_2 \dots x_{n-1}\; \tau) \qquad i = 1, 2 \dots n-1 \\ x_n' = x_n + \varphi_n(x_1 \dots x_{n-1}\, \tau) \end{cases}$$

La trasformazione infinitesima generatrice di questo gruppo ha dunque l'espressione $\quad Yf = \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$

dove le η_i non contengono x_n e perciò $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_n} = 0$, ossia $(XY) = 0$ —

Viceversa se questo accade, le trasformazioni finite del secondo gruppo hanno la forma (9) e perciò ha luogo la permutabilità richiesta c.d.d. –

Dal teorema dimostrato segue un importante criterio per riconoscere se un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ consta di trasformazioni due a due permutabili; questo formuliamo nel teorema:

Le trasformazioni finite di un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ sono due a due permutabili solo quando tutte le espressioni alternate $(X_i X_k)$ sono identicamente nulle.

Se, come nella teoria dei gruppi finiti, diciamo Abeliano un gruppo quando consta di trasformazioni permutabili possiamo enunciare il risultato anche così: Un gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ è Abeliano quando tutte le sue costanti c_{iks} di composizione sono nulle.

§ 60
Sottogruppi invarianti – Gruppi semplici

Sia G_r un gruppo generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f ,\ X_2 f \dots X_r f$$

e G_m un sottogruppo di G a m parametri.

Se accade che il sottogruppo G_m sia permutabile con ogni trasformazione T di G_r, che si abbia cioè

$$T^{-1} G_m T = G_m.$$

allora si dice che G_m è un sottogruppo invariante di G_r — Il sottogruppo G_m sarà generato da $\underline{m}$ trasformazioni infinitesime che, senza alterare la generalità, possiamo supporre siano le prime $\underline{m}$

$$X_1 f, X_2 f \dots X_m f$$

Allora il fatto che G_m è invariante in G_r si traduce in questo (§§ 57. 58) che le espressioni alternate

$$(X_i, X_k) \begin{cases} i = 1, 2 \dots r \\ k = 1, 2 \dots m \end{cases}$$

si esprimono tutte linearmente con coefficienti costanti per

$$X_1 f, X_2 f \dots X_m f$$

Secondo i risultati dei paragrafi precedenti, possiamo anche dire:

Se nel gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_m X_{m+1} \dots X_r)$ le trasformazioni della serie

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_m X_m f$$

costituiscono una serie invariante, esse formano un sottogruppo invariante G_m di G_r, generato dalle $\underline{m}$ trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots X_m f$

E infatti allora tutte le espressioni alternate $(X_i X_k)$ sopra considerate debbono in tal caso comporsi linearmente con $X_1, X_2 \dots X_m$ —

Ogni gruppo G_r si può dire possedere almeno due sottogruppi invarianti, cioè l'identità ed il gruppo stesso. Quando non esiste in G_r alcun altro sottogruppo invariante, il gruppo G_r si dice un gruppo semplice.

Per es. se esaminiamo la composizione del gruppo G_6 di movimenti dello spazio, quale fu stabilita al § 41, vediamo che in esso il gruppo G_3 delle traslazioni è un sottogruppo invariante (Abeliano); questo gruppo non è adunque semplice.

Osserviamo ora i due teoremi seguenti d'immediata dimostrazione:

1°. Le trasformazioni comuni a due sottogruppi invarianti Γ_m, $\Gamma'_{m'}$ di un gruppo G_r formano un nuovo sottogruppo invariante.

Una trasformazione comune a Γ_m, $\Gamma'_{m'}$ è infatti trasformata da una qualunque di G_r in un'altra che appartiene sì a Γ_m che a $\Gamma'_{m'}$.

2°. Se due sottogruppi invarianti di G_r non hanno alcuna trasformazione infinitesima comune (alcun sottogruppo comune), le trasformazioni finite dell'uno saranno permutabili con quelle dell'altro.

Se X_1f, X_2f ... X_mf sono le trasformazioni infinitesime del primo sottogruppo e Y_1f, Y_2f ... $Y_{m'}f$ quelle del secondo, queste $m+m'$ trasformazioni sono indipendenti, altrimenti i due sottogruppi avrebbero trasformazioni infinitesime a comune - D'altronde le espressioni alternate

$$(X_i . Y_k) \begin{cases} i = 1, 2, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots m' \end{cases}$$

debbono comporsi linearmente sia con $X_1 \ldots X_m$, sia con $Y_1 \ldots Y_{m'}$ e però sono identicamente nulle -

§ 61

Serie di composizione - Gruppi integrabili

Un sottogruppo invariante G_{r_1} di un gruppo G_r si dice massimo quando non esiste in G_r alcun sottogruppo invariante contenente G_{r_1} e più ampio.

Dato un gruppo G_r, prendiamo un suo sottogruppo invariante massimo G_{r_1}, indi un sottogruppo invariante massimo di G_{r_1}, sia G_{r_2}, e così via finchè si arrivi ad un gruppo semplice che non ha altro sottogruppo invariante (puro) fuori dell'identità.

La serie di gruppi

$$G_r, G_{r_1}, G_{r_2} \ldots G_{r_q}, 1,$$

così costituita che ciascun gruppo sia invariante massimo nel precedente dicesi una serie di composizione del gruppo -

Per un gruppo semplice la serie di composizione è unica e si riduce a due soli termini, il gruppo dato è l'identità –

Un gruppo non semplice può possedere differenti serie di composizione, come fra poco vedremo, ma le differenze

$$r-r_1\,,\; r_1-r_2 \ldots\ldots r_{q-1}-r_q\,,\; r_q\,,$$

che danno ogni volta l'eccesso del numero dei parametri di un gruppo nella serie su quello dei parametri nel gruppo successivo rimangono sempre le stesse, salvo l'ordine, comunque si cangi la serie di composizione – Dimostreremo questo teorema nel prossimo paragrafo; per ora osserviamo che esso è, nella teoria dei gruppi continui, l'analogo del noto teorema di Jordan sui fattori di composizione pei gruppi di un numero finito di operazioni.(*)

Un gruppo si dice integrabile, secondo Lie, quando possiede una serie di composizione in cui

(*) L'analogia diventa anche più evidente se si osserva che un gruppo a r parametri contiene ∞^r trasformazioni – Così G_{r_i} ha ∞^{r_i} trasformazioni e $G_{r_{i+1}}$ ne ha $\infty^{r_{i+1}}$, cioè G_{r_i} in confronto a $G_{r_{i+1}}$ ne possiede $\infty^{r_i - r_{i+1}}$ Le differenze $r_i - r_{i+1}$ misurano perciò in certo modo il grado d'infinità delle trasformazioni in G_{r_i} rispetto a quelle di $G_{r_{i+1}}$; corrispondono perciò esattamente ai fattori di composizione di Jordan.

tutte le differenze

$$r-r_1 \,,\, r_1-r_2 \,, \ldots\ldots$$

siano uguali all'unità - In questo caso, pel teorema testé enunciato (teorema di Jordan), ogni altra serie di composizione ha la stessa proprietà - La denominazione d'integrabile data a tali gruppi proviene da ciò che nelle applicazioni ai problemi di integrazione l'integrabilità del gruppo significa che il problema è riducibile alle quadrature - Nella teoria dei gruppi continui i gruppi integrabili fanno riscontro ai gruppi risolubili (per radicali) nella teoria delle sostituzioni (V. Cap. XI di queste Lezioni § 149) -

Come esempio di gruppi integrabili abbiamo:

Ogni gruppo Abeliano è integrabile -

E infatti se $G_r = (X_1 X_2 \ldots X_r)$ è un gruppo Abeliano (§ 59) vuol dire che tutte le espressioni alternate (X_i, X_h) sono nulle - Per ciò le $h < r$ trasformazioni infinitesime $X_1, X_2 \ldots X_h$ generano un sottogruppo G_h invariante - Se poniamo dunque:

$$G_1 = X_1 \,,\; G_2 = (X_1, X_2) \,,\; G_3 = (X_1, X_2, X_3) \ldots\ldots$$

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \ldots X_{r-1})$$

la serie

$$G_r \,,\, G_{r-1} \ldots\ldots G_{r-2} \ldots G_2 \;\; G_1 \;\; 1$$

sarà evidentemente una serie di composizione in cui il numero dei parametri va diminuendo ogni volta, da un gruppo al successivo, appunto di un'unità.

§ 62
Gruppo derivato

Per un gruppo qualunque

$$G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$$

si può formare uno speciale sottogruppo invariante, la cui considerazione è importante in diverse ricerche, in particolare in quelle che riguardano l'integrabilità del gruppo. Dimostriamo perciò il seguente teorema: Le trasformazioni infinitesime date dalle espressioni alternate $(X_i X_k)$ generano esse stesse un gruppo, che è in ogni caso un sottogruppo invariante del gruppo primitivo G_r.

A questo sottogruppo di G_r si dà il nome di gruppo derivato di G_r

Che le trasformazioni infinitesime

$$Y_{ik}f = (X_i X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

generino un gruppo risulta dal formare le espressioni alternate:

$$(Y_{ik}, Y_{lm}) = \left(\sum_s c_{iks} X_s f \,, \sum_t c_{lmt} X_t f\right) =$$

$$= \sum_s \sum_t c_{iks} c_{lmt} (X_s, X_t) =$$
$$= \sum_s \sum_t c_{iks} c_{lmt} Y_{st} f,$$

onde, pel teorema principale, le $Y_{ik} f$ generano un gruppo - Questo è evidentemente un sottogruppo di G_r perchè le Y_{ik} si compongono colle X_i; di più esso è invariante in G_r come dimostra la formola

$$(X_l, Y_{ik}) = \sum_s c_{iks} (X_l, X_s) = \sum_s c_{iks} Y_{ls} -$$

Questo gruppo derivato di G_r può del resto coincidere coll'identità o col gruppo stesso. La prima cosa avviene solo quando le costanti c_{iks} sono tutte nulle, cioè pei gruppi Abeliani; la seconda avviene di necessità quando G_r è semplice - Ma si osservi che non inversamente si può concludere che sia semplice il gruppo quando coincide col gruppo derivato - L'esempio del gruppo G_6 di movimenti lo dimostra chiaramente; il gruppo derivato coincide con G_6 come si legge nelle formole di composizione (§ 41); e tuttavia il gruppo non è semplice ammettendo come sottogruppo invariante il gruppo G_3 delle traslazioni -

Quando il gruppo derivato di G_r non coincide con G_r (o coll'identità) vi ha luogo a considerare il secondo gruppo derivato e così via -

Supposto che il gruppo derivato G_{r_1} di G_r contenga $r_1 < r$ parametri, possiamo prendere le r_1 trasformazioni infinitesime di G_{r_1} come le prime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_{r_1} f$$

di G_r e le rimanenti siano

$$X_{r_1+1} \ldots\ldots X_r f$$

Poichè tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

si compongono linearmente dalle prime r_1, è evidente che aggregando a queste quante altre si vogliano indipendenti in G_r si verrà sempre a generare un sottogruppo invariante di G_r contenente G_{r_1} —

Così prendendo:

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \ldots X_{r_1}, X_{r_1+1} \ldots X_{r-1})$$

$$G_{r-2} = (X_1 X_2 \ldots X_{r_1}, X_{r_1+1} \ldots X_{r-2})$$

$$- - - - - - - - - - - - -$$

$$G_{r_1+1} = (X_1 X_2 \ldots\ldots X_{r_1} X_{r_1+1})$$

avremo in

$$G_r\ \ G_{r-1}\ \ G_{r-2} \ldots\ldots G_{r_1+1}\ \ G_{r_1}$$

i primi termini di una serie di composizione di G_r che si completerà aggregandovi una serie di composizione di G_{r_1} — E poichè da G_r a G_{r_1} il numero dei parametri va decrescendo ad ogni passo di una unità, ne segue il teorema: Se il primo gruppo derivato di un gruppo G_r è integrabile, anche G_r è integrabile —

§ 63
Condizioni d'integrabilità di un gruppo

Dopo di ciò possiamo procedere alla ricerca delle condizioni d'integrabilità di un gruppo. In primo luogo se un gruppo G_r è integrabile deve possedere sottogruppi invarianti G_{r-1} con $r-1$ parametri e noi cominciamo dal dimostrare il teorema:
Affinchè un gruppo G_r possegga sottogruppi invarianti a $r-1$ parametri, è necessario e sufficiente che il primo gruppo derivato possegga $r_1 < r$ parametri (sia un puro sottogruppo) -
Che la condizione sia sufficiente si è già visto sopra. Per provare che è necessaria poniamo che sia

$$G_{r-1} = (X_1 X_2 \ldots X_{r-1})$$

un sottogruppo invariante di

$$G_r = (X_1 X_2 \ldots X_{r-1} X_r)$$

Allora tutte le espressioni alternate

$$(X_i X_k)$$

si compongono linearmente con $X_1 X_2 \ldots X_{r-1}$ soltanto e perciò il gruppo derivato G_{r_1} è certo contenuto in G_{r-1}, cioè

$$r_1 \leq r-1 \quad c.d.d.$$

Notiamo ancora la proprietà d'immediata evidenza che il gruppo derivato di un sottogruppo è sempre contenuto nel gruppo derivato del gruppo –

Ciò premesso, si può formulare il criterio per l'integrabilità di un gruppo col teorema seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G_r a r parametri sia integrabile è che l'r^{mo} suo gruppo derivato coincida coll'identità

Questa condizione è necessaria; e infatti sia G_r integrabile e diciamo

$$G_r \; G_{r-1} \; G_{r-2} \ldots\ldots G_2 \; G_1 \; 1$$

una sua serie di composizione, ove il numero dei parametri va successivamente decrescendo di una unità. Il primo gruppo derivato di G_r è contenuto in G_{r-1}; il secondo gruppo derivato è quindi contenuto nel gruppo derivato di G_{r-1}, che è alla sua volta contenuto nel sottogruppo invariante G_{r-2} di G_{r-1}; dunque il secondo gruppo derivato è contenuto in G_{r-2} –

Per la medesima ragione il terzo è contenuto in G_{r-3}, ... l'$(r-1)^{mo}$ in G_1, onde l'r^{mo} coincide certamente coll'identità –

La condizione è poi sufficiente perchè se l'r^{mo} gruppo derivato è l'identità, l'$(r-1)^{mo}$ è Abeliano e perciò integrabile; pel teorema alla fine del paragrafo precedente ne segue successivamente che sono integrabili l'$(r-2)^{mo}$ gruppo derivato, l'$(r-3)^{mo}$... ec... fino al primo e quindi il gruppo stesso, c.d.d.

Si noti che nella serie dei gruppi derivati di un gruppo qualsiasi G_r

$$G_r\,,\,G_{r_1}\,,\,G_{r_2}\,,\,G_{r_3}\,\ldots\ldots$$

il numero dei parametri va sempre decrescendo ogni volta almeno di un'unità finchè non si arresta ed allora tutti i gruppi derivati seguenti coincidono coll'ultimo, ciò che avviene al più tardi all' r^{mo} gruppo derivato.—

Si può quindi enunciare il teorema superiore nel modo seguente:

Un gruppo G_r non è integrabile quando la serie dei suoi gruppi derivati termina ad un gruppo G_ρ che non è l'identità.

Segue facilmente da questi risultati l'altro teorema: Ogni sottogruppo di un gruppo integrabile è altresì integrabile.

Poniamo che sia G_r integrabile ed un suo puro sottogruppo G_q $(q<r)$ sia, se è possibile, non integrabile — L'ultimo gruppo derivato G_ρ di G_q è allora, per quanto precede, un effettivo gruppo non l'identità (pro). Chiamando

$$X_1 f\,,\,X_2 f\ldots\ldots X_\rho f$$

le trasformazioni infinitesime generatrici di G_ρ, le espressioni alternate

$$(X_i X_k)\qquad i,k=1,2\ldots\rho$$

riproducono già tutte le $X_1\,X_2\ldots X_\rho$ e perciò qualunque gruppo derivato di G_ρ conterrebbe certamente G_ρ, onde G_r non sarebbe integrabile

§ 64

Prodotto di due gruppi permutabili

Ci volgiamo ora alla dimostrazione del già accennato teorema di Jordan, esteso da Lie di gruppi continui. E per questo premettiamo due teoremi che sono perfettamente gli analoghi dei teoremi preliminari al teorema di Jordan, nella teoria dei gruppi di sostituzioni.

Il 1.° teorema che dimostriamo è il seguente: Siano G_m. $G_{m'}$ due gruppi di trasformazioni, ad m e m' parametri rispettivamente, e fra loro permutabili nel senso che ciascuno ammetta le trasformazioni dell' altro. Se il sottogruppo comune Γ_μ a G_m. $G_{m'}$ ha μ parametri, le trasformazioni infinitesime di G_m e $G_{m'}$ riunite saranno in numero di $m+m'-\mu$ indipendenti e daranno luogo ad un gruppo $H_{m+m'-\mu}$, con $m+m'-\mu$ parametri, contenente tanto G_m quanto $G_{m'}$ e Γ_μ stesso come sottogruppi invarianti.

Suppongasi

$$\Gamma_\mu = (X_1 X_2 \ldots X_\mu)$$

$$G_m = (X_1 X_2 \ldots\ldots X_\mu X_{\mu+1} \ldots X_m)$$

$$G_{m'} = (X_1 X_2 \ldots X_\mu Y_{\mu+1} \ldots\ldots Y_{m'}),$$

sicché ogni trasformazione infinitesima comune a G_m, $G_{m'}$ si comporrà con

$$X_1 f \cdot X_2 f \ldots\ldots X_\mu f$$

soltanto. Ciò porta che le $m+m'-\mu$ trasformazioni infinitesime

$$X_1 X_2 \ldots\ldots X_\mu X_{\mu+1} \ldots\ldots X_m Y_{\mu+1} \ldots\ldots Y_{m'}$$

sono fra loro indipendenti. Esse generano un gruppo perché le loro espressioni alternate si compongono per l'ipotesi della permutabilità di G_m con $G_{m'}$ colle trasformazioni stesse. Questo gruppo H ha adunque $m+m'-\mu$ parametri.

$$H_{m+m'-\mu} = (X_1 X_2 \ldots X_\mu \ldots X_m Y_{\mu+1} \ldots Y_{m'})$$

e si vede subito che esso contiene G come sottogruppo invariante e medesimamente $G_{m'}$, indi anche G'_μ (§ 60).

Dimostrato così il teorema, osserviamo che si può dargli ancora una forma più vicina a quella del teorema analogo dell'ordinaria teoria, in quanto che: il gruppo H consta di tutti e soli i prodotti di una trasformazione di G per una di G'.

Che tutti questi prodotti gg' appartengano ad H è naturale perché ogni trasformazione g di G è in H, come ogni g' di G' e quindi anche il prodotto gg'. Per l'inversa si osserva che tutti i prodotti

$$gg'$$

costituiscono per sé un gruppo di trasformazioni a causa della permutabilità di G con G', la quale porta che si può scrivere

$$gg' = g'g, \quad g_1 g' = g'_1 g$$

essendo g_1 un'altra trasformazione di G e g'_1 un'altra di G'. Ne segue p. e.

$$(gg')(g_1 g'_2) = g g_1 g'_2 g'_1 = \bar{g}\,\bar{g}'$$

le lettere g senza accento indicando trasformazioni di G, quelle coll'accento trasformazioni di G'.

Così i prodotti gg' costituiscono un gruppo che contiene tanto G che G' ed avendo fra le sue trasformazioni infinitesime quelle dell'uno e quelle dell'altro gruppo, coincide con $H_{m+m'-\mu}$. c. d. d. –

§ 65

Teorema relativo a due sottogruppi invarianti massimi

Per formulare più brevemente il secondo teorema che occorre al nostro scopo, introduciamo anche nella teoria dei gruppi continui la nozione di indice di un sottogruppo in un gruppo. Se G_r è un gruppo e G_q un suo sottogruppo, chiameremo indice di G_q rispetto a G_r la differenza $r-q$ fra i rispettivi numeri dei parametri.

Ciò posto, ecco l'enunciato del teorema in discorso:

Se un gruppo G_r contiene due diversi sottogruppi invarianti massimi $G_{r_1}, G_{r'_1}$ ed è Γ_h il sottogruppo comune a $G_{r_1}, G_{r'_1}$, si avrà $h = r_1 + r'_1 - r$ ed il gruppo Γ_h sarà invariante massimo tanto in G_{r_1} quanto in $G_{r'_1}$ coll'indice $r_1 - h$ in G_{r_1} eguale all'indice di $G_{r'_1}$ in G_r e coll'indice $r'_1 - h$ in $G_{r'_1}$ eguale all'indice di G_{r_1} in G_r -

Supponiamo che si abbia

$$\Gamma_h = (X_1 X_2 \dots X_h)$$

$$G_{r_1} = (X_1 X_2 \dots X_h X_{h+1} \dots X_{r_1})$$

$$G_{r'_1} = (X_1 X_2 \dots X_h Y_{h+1} \dots Y_{r'_1});$$

pel teorema del § precedente le $r_1 + r'_1 - h$ trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 X_2 \dots X_h X_{h+1} \dots X_{r_1} Y_{h+1} \dots Y_{r'_1}$$

generano un sottogruppo H contenente sì G_{r_1} che $G_{r'_1}$ come sottogruppi invarianti e contenuto manifestamente in G_r, alla sua volta come sottogruppo invariante perchè le trasformazioni di H si compongono coi prodotti gg' di trasformazioni di G_{r_1} per trasformazioni di $G_{r'_1}$, ed essendo T una qualunque trasformazione di G_r la trasformata

$$T^{-1}(gg')T = (T^{-1}gT)(T^{-1}g'T)$$

è di nuovo un prodotto gg' (*). Ne risulta che

(*) La stessa cosa si vede anche subito ricorrendo

$H_{r_1+r_1'-h}$ coincide con G_r, altrimenti G_{r_1} (o $G_{r_1'}$) non sarebbero invarianti massimi in G_r. Dunque intanto

$$r_1+r_1'-h=r$$

o $h=r_1+r_1'-r$ come nell'enunciato del teorema.

Sappiamo già che Γ_h è invariante in G_r ed anche quindi in G_{r_1} o $G_{r_1'}$, ma in questi ultimi è invariante massimo. E infatti se fra Γ_h e G_{r_1} esiste un sottogruppo Λ_{h+k} invariante in G_{r_1} e contenente Γ_h, possiamo supporre

$$\Lambda_{h+k}=(X_1X_2\ldots X_h X_{h+1}\ldots X_{h+k})$$

naturalmente con $h+k<r_1$ e le espressioni alternate

$$(X_i, X_j)\begin{cases} i=1,2\ldots r_1 \\ j=1,2\ldots h+k\end{cases}$$

si comporranno linearmente con

$$X_1 X_2 \ldots\ldots X_{h+k}$$

Allora le $h+k+(r_1'-h)=r_1'+k<r$ trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 X_2\ldots X_h X_{h+1}\ldots X_{h+k} Y_{h+1}\ldots Y_{r_1'}$$

genererebbero un sottogruppo (puro) di G_r invariante in G_r, a causa della proprietà sopra osservata delle espressioni alternate (X_i, X_j), e contenente $G_{r_1'}$, che non sarebbe dunque invariante massimo in G_r.

---

alle proprietà delle espressioni alternate.

§ . 66
Teorema di Jordan - Lie

Col sussidio dei teoremi precedenti è facile ora dimostrare il teorema di Jordan, trasportato da Lie nella teoria dei gruppi continui, che si enuncia:

In due diverse serie di composizione

a) $G_r \; G_{r_1} \; G_{r_2} \ldots\ldots G_{r_q} \quad 1$

b) $G_r \; \Gamma_{\rho_1} \; \Gamma_{\rho_2} \ldots\ldots \Gamma_{\rho_s} \quad 1$

di un medesimo gruppo G_r, le due serie di differenze

$$r-r_1 \, , \, r_1-r_2 \, , \ldots\ldots r_q$$

$$r-\rho_1 \, , \, \rho_1-\rho_2 \ldots\ldots \rho_s \, ,$$

cioè degli indici dei successivi gruppi nel precedente nella serie, sono le stesse prescindendo dall'ordine -

Questi numeri fissi si diranno per abbreviare gli indici di composizione del gruppo.

Ne segue in particolare che il numero dei gruppi in ciascuna serie è il medesimo $(q=s)$.

La dimostrazione si fa ora nel modo stesso dell'ordinaria teoria, provando che il teorema è vero pei gruppi a r parametri, supposto che lo sia per quelli ad un numero di parametri $< r$, siccome per $r=1,2$ sussiste certamente, così è vero in generale.

Ora essendo $G_{r_1} \; \Gamma_{\rho_1}$ due distinti sottogruppi in=

varianti massimi in G_{r}, possiamo applicare il teorema del paragrafo precedente, e se Γ_h è il loro sottogruppo comune, questo sarà invariante massimo sì in G_{r_1} che in Γ_{ρ_1} — Sia ora

$$\Gamma_h\ \Gamma_{h_1}\ \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

una serie di composizione di Γ_h; saranno due nuove serie di composizione di G_r le seguenti

$$\alpha)\quad G_r\ G_{r_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1}\ \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

$$\beta)\quad G_r\ \Gamma_{\rho_1}\ \Gamma_h\ \Gamma_{h_1}\ \Gamma_{h_2} \ldots\ldots 1$$

Le due serie a) α), avendo a comune il primo ed il secondo gruppo ed essendo $r_1 < r$, hanno i medesimi indici di composizione; per la stessa ragione le due serie b) β) — Basterà dunque provare che le due serie α) β) hanno gli stessi indici di composizione perchè ne risulti la medesima cosa per le due serie a) b), come si voleva.

Ora α) β) coincidono da Γ_h in poi e quindi da quel punto hanno i medesimi indici (nello stesso ordine). Quanto ai due primi che sono per la α)

$$r - r_1 \qquad r_1 - h$$

e per la β

$$r - \rho_1 \qquad \rho_1 - h$$

basta ricordare che pel teorema al § 65 si ha

$$h = r_1 + \rho_1 - r$$

e quindi

$$r - r_1 = \rho_1 - h \quad , \quad r - \rho_1 = r_1 - h$$

Dunque nelle due serie $\alpha)$ $\beta)$ i due primi indici sono soltanto permutati e ciò completa la dimostrazione del teorema -

Termineremo queste prime ricerche sulle serie di composizione dei gruppi continui col ricordare che nella teoria dei gruppi di sostituzioni il teorema di Jordan riceve un importante complemento nel teorema di Hölder. Questo vale ancora nella teoria dei gruppi continui, ma non potremo dimostrarlo che più tardi quando avremo introdotta la nozione d'isomorfismo dei gruppi e ne avremo studiate le proprietà (Cf. Cap. VIII § 97) -

Capitolo VI°

Il gruppo aggiunto e i sottogruppi di un gruppo - Sottogruppi a due parametri - Equazione caratteristica - Composizione o struttura di un gruppo - Il genere (Rang) di un gruppo secondo Killing -

§. 67

Permutazioni fra le trasformazioni di un gruppo indotte dalle trasformazioni stesse

Ad ogni gruppo G_r ad r parametri è collegato un gruppo di sostituzioni lineari omogenee sopra r variabili, con un numero di parametri uguale o inferiore ad r, il così detto gruppo aggiunto (adjungirte Gruppe) - La considerazione di questo gruppo aggiunto è di grande importanza in molte parti della teoria, in particolare nella ricerca dei sottogruppi di G_r e della loro classificazione -

Perveniamo al gruppo aggiunto nel modo seguente. Consideriamo un gruppo G_r a r parametri, le cui trasformazioni finite siano

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2 \dots x_n, a_1, a_2 \dots a_r)$$
$$i = 1, 2 \dots n$$

e indichiamo in generale con S_a la trasformazione coi parametri $a_1, a_2 \dots a_r$ –

Se trasformiamo tutte le S_a con una trasformazione fissa S_α di G_r, le trasformate

$$S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha$$

coincidono, in altro ordine, colle S_a stesse, onde avremo

$$S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha = S_{a'},$$

dove i parametri a' dipenderanno evidentemente dai parametri a e dai parametri α, scriviamo

(2) $$a'_i = \varphi_i(a_1\, a_2 \dots a_r;\, \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_r)$$

È facile vedere che queste formole (2), quando vi si riguardino le a come variabili e le α come parametri, definiscono un gruppo di trasformazioni – È infatti se trasformiamo nuovamente le $S_{a'}$ colla S_β e poniamo

$$S_\beta^{-1} S_{a'} S_\beta = S_{a''},$$

avremo

(2*) $$a''_i = \varphi_i(a'_1\, a'_2 \dots a'_r;\, \beta_1\, \beta_2 \dots \beta_r)$$

Ma si può scrivere

$$S_{a''} = S_\beta^{-1} S_\alpha^{-1} S_a S_\alpha S_\beta = (S_\alpha S_\beta)^{-1} S_a (S_\alpha S_\beta)$$

e poiché la $S_\alpha S_\beta$ è di nuovo una trasformazione di G_r, diciamo

$$S_\alpha S_\beta = S_\gamma$$

(dove i parametri γ saranno certe funzioni di $\alpha\beta$) ne risulterà

$$S_{a''} = S_\gamma^{-1} S_a S_\gamma$$

e quindi

$$a''_i = \varphi_i(a_1 a_2 \cdots a_r ; \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_r),$$

e ciò dimostra appunto che componendo due trasformazioni qualunque (2), (2*) della serie (2) coi rispettivi parametri α, β si ottiene una terza trasformazione della serie stessa, coi parametri γ: dunque le (2) sono le equazioni finite di un gruppo. Come si vede, questo gruppo (2) definisce la legge secondo cui si permutano fra loro le trasformazioni del gruppo dato G_r, quando si trasformino contemporaneamente con una trasformazione di G_r stesso. Il gruppo (2) contiene sempre l'identità e insieme ad ogni trasformazione anche l'inversa. Il numero dei suoi parametri essenziali non supera certo r, ma può essere $< r$; ciò avviene quando esista una continuità di trasformazioni in G_r producenti la medesima permutazione sulle sue trasformazioni e quindi in G_r un sottogruppo effettivo le cui trasformazioni siano tutte permutabili con quelle di G_r. Se questo sottogruppo commutativo di G_r ha p parametri, il gruppo (2) possiede, come facilmente si vede e come confermeremo fra breve calcolando le sue trasformazioni infinitesime, precisamente $r-p$ parametri. Può darsi che sia $p=r$; allora il gruppo G_r è Abeliano ed il gruppo (2) si riduce alla pura identità.

§ 68

Forma canonica delle equazioni di G_r

Se nel gruppo (1) facciamo un cangiamento di parametri, il gruppo (2) assume una forma diversa; però gli infiniti gruppi (2) che corrispondono ad un medesimo gruppo (1) sono chiaramente tutti simili fra loro. Fra le infinite forme che si possono dare al gruppo (2) ve ne ha una molto notevole, caratterizzata dal fatto che le (2) sono lineari omogenee nei parametri $\underline{a}$.

Per ottenere il gruppo (2) sotto questa forma speciale basta porre le equazioni (1) del gruppo G_r sotto la forma già considerata al § 58 dove abbiamo parlato delle trasformazioni finite

$$\sum_k e_k X_k f$$

del gruppo. Questa forma è data dagli sviluppi in serie

$$(4)\quad x_i' = x_i + \sum_k e_k X_k x_i + \frac{1}{1.2}\sum_{k,j} e_k e_j X_k X_j x_i + \cdots\cdots,$$

essa dicesi la forma canonica delle equazioni del gruppo ed i parametri sono

$$e_1\ e_2 \ldots\ldots e_r$$

Invece di definire la forma canonica delle equazioni del gruppo cogli sviluppi in serie (4) si può ricorrere ad un sistema di equazioni differenziali.

Ricordando per ciò che le trasformazioni di G_r non sono altro che la totalità delle trasformazioni dei gruppi ad un parametro generati dalle trasformazioni infinitesime

$$\lambda_1 X_1 f + \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f,$$

colle λ costanti, basta integrare il sistema di equazioni differenziali simultanee:

$$\frac{dx'_1}{\sum_k \lambda_k \xi_{k1}(x')} = \frac{dx'_2}{\sum_k \lambda_k \xi_{k2}(x')} = \ldots\ldots = \frac{dx'_n}{\sum_k \lambda_k \xi_{kn}(x')} = dt$$

colle condizioni di limiti

$$x'_i = x_i \quad \text{per } t=0,$$

e nelle equazioni integrali

$$x'_i = \varphi_i(x_1\ x_2 \ldots x_n ; \lambda_1 t, \lambda_2 t \ldots \lambda_r t)$$

che contengono le λ e la t solo nei prodotti $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t \ldots \lambda_r t$, porre

$$e_1 = \lambda_1 t\ ,\ e_2 = \lambda_2 t \ldots\ldots e_r = \lambda_r t\,.$$

Così si ottengono le equazioni del gruppo sotto la forma

$$(4^*) \qquad x'_i = \varphi_i(x_1, x_2 \ldots x_n ; e_1, e_2 \ldots e_r),$$

che è appunto la forma canonica.

È da notarsi poi che, secondo i risultati ottenuti al § 16, gli antichi parametri a son definiti in funzione dei parametri canonici $e_1 \dots e_r$ dal sistema di equazioni differenziali ivi segnate (32) pag. 56 cioè dal sistema

$$(A) \qquad \frac{da_k}{dt} = \sum_s^{1\dots r} \lambda_s \, \alpha_{sk}(a_1 \dots\dots a_r)$$

colle condizioni iniziali

$$a_k = a_k^{(0)} \quad \text{per } t = 0$$

La forma canonica (4) o (4*) delle equazioni del gruppo non è per sè perfettamente fissata poichè essa cangia quando per trasformazioni infinitesime generatrici di G_r si prendano, al posto di

$$X_1 f,\ X_2 f \dots\dots X_r f$$

r loro combinazioni lineari indipendenti. - Con questo i parametri e subiscono una sostituzione lineare omogenea, che può del resto essere qualunque.

Dunque: La forma canonica delle equazioni di un gruppo è determinata a meno di una sostituzione lineare omogenea nei parametri e.

L'importanza della forma canonica delle equazioni di un gruppo risulta subito dalle considerazioni seguenti. Ogni trasformazione finita $\sum e_k X_k f$ (§ 58) del gruppo è fissata dai valori dei parametri $e_1\, e_2 \dots e_r$. Se interpretiamo $e_1, e_2 \dots e_r$ come coordinate cartesiano in uno spazio lineare a r dimensioni, che indichiamo con E_r, le trasformazioni di G_r sono rappresentate biunivocamente sui punti di E_r – Ora diciamo che: In questa rappresentazione ogni sottogruppo G_m a m parametri di G_r è rappresentato da uno spazio lineare subordinato a m dimensioni E_m passante per l'origine $e_1 = e_2 = \dots\dots = e_r = 0$

È infatti se

$$Y_1 f = \sum_i^{1\dots r} h_{1i} X_i f \quad , \quad Y_2 f = \sum_i^{1\dots r} h_{2i} X_i f, \dots\dots$$

$$Y_m f = \sum_i^{1\dots r} h_{mi} X_i f$$

sono le m trasformazioni infinitesime generatrici di G_m (colle h_{ki} costanti), qualunque trasformazione finita di G_m è rappresentata dal simbolo

$$\sum_s^{1\dots m} \varepsilon_s Y_s f$$

e però da $\sum_k e_k X_k f$, dove le e si esprimono per le ε colle formole

$$e_i = \sum_s^{1\dots m} h_{si} \varepsilon_s \quad (i = 1, 2 \dots\dots r)$$

Variando le ε il punto $(e_1\, e_2 \dots e_r)$ descrive appunto uno spazio lineare E_m per l'origine. Così un sottogruppo G_1 sarà rappresentato da una retta per l'origine, il sottogruppo G_2 da un piano per l'origine etc.

Diciamo però subito che non inversamente qualunque E_m per l'origine rappresenterà un sottogruppo G_m; ciò avverrà solo in casi eccezionali (cf. § 73).

§ 69

Il gruppo aggiunto e le sue trasformazioni infinitesime

Se le equazioni del gruppo (1) si pongono sotto forma canonica, i risultati ottenuti ai §§ 57, 58 sulle serie invarianti di trasformazioni dimostrano immediatamente che le equazioni (2) daranno i nuovi parametri e' espressi linearmente ed omogeneamente pei parametri e. Secondo il § 57, possiamo definire le e' in funzione delle e per mezzo di un sistema di equazioni differenziali, le equazioni (7) di quel §.

Prendiamo per ciò un sottogruppo G_1 ad un parametro di G_r e sia

$$Yf = \sum_k \lambda_k X_k f$$

la sua trasformazione infinitesima e supponiamo che per la trasformazione finita di G_r dal simbolo

$$\sum \lambda_k t . X_k f$$

la trasformazione $(e_1\, e_2 \dots e_r)$ si cangi in $(e'_1 \dots e'_r)$. Poiché si ha

$$(Y X_k) = \sum_i^{1\dots r} \lambda_i (X_i X_k) = \sum_{i,s}^{1\dots r} c_{iks} \lambda_i X_s f$$

le costanti g_{ks} del § 57 sono date da

$$g_{ks} = \sum_i^{1\dots r} c_{iks}\,\lambda_i$$

e per ciò le citate equazioni differenziali (7) diventano qui

$$(5)\qquad \frac{de'_k}{dt} + \sum_{i,j}^{1\dots r} c_{ijk}\,\lambda_i\, e'_j = 0$$

colle condizioni iniziali

$$e'_k = e_k \quad \text{per } t=0$$

Integrando questo sistema, ciò che richiede soltanto la risoluzione di un'equazione algebrica, e ponendo

$$\alpha_1 = \lambda_1 t\,,\quad \alpha_2 = \lambda_2 t\,,\ \dots\dots\ \alpha_r = \lambda_r t$$

si avranno le formole

$$(6)\qquad e'_i = \sum_k^{1\dots r} \rho_{ik}(\alpha_1\,\alpha_2 \dots \alpha_r)\, e_k\,.$$

dove i coefficienti ρ_{ik} sono funzioni dei parametri α – Le (6) danno, come si voleva, al gruppo (2) del § 67 la forma lineare che si cercava.

Così vediamo che: Ad ogni gruppo G_r a r parametri è coordinato un gruppo (6) di sostituzioni lineari omogenee sopra r variabili $\underline{e}$. Questo gruppo (6) definisce la legge secondo cui si permutano le operazioni di G_r, trasformate con una medesima operazione di G_r stesso; esso dicesi il gruppo aggiunto di G_r.

Le equazioni (5) conducono subito a trovare le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto esprimendole soltanto per le costanti di composizione c_{ijk} - Infatti queste equazioni differenziali, colle condizioni iniziali $e'_k = e_k$ per $t=0$ tenendovi costanti le λ, definiscono un sottogruppo ad un parametro del gruppo aggiunto, generato dalla trasformazione infinitesima

$$\sum_i^{1\dots r} \lambda_i \sum_{jk}^{1\dots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Se poniamo adunque

$$(7) \qquad E_i f = \sum_{j,k}^{1\dots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

$$i = 1, 2, \dots r$$

abbiamo il risultato:

Tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto si compongono linearmente colle r trasformazioni

$$E_1 f = \sum_{jk}^{1\dots r} c_{j1k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}, \quad E_2 f = \sum_{jk}^{\dots r} c_{j2k}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}, \dots\dots$$

$$E_r f = \sum_{jk}^{1\dots r} c_{jrk}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Queste r trasformazioni $E_i f$ possono essere o no indipendenti secondo la natura del gruppo G_r (delle costanti c_{iks}), cioè il gruppo aggiunto può avere r o meno parametri, come già abbiamo osservato al § 67 e come meglio vedremo nel prossimo paragrafo. In ogni caso osserviamo che fra le r trasformazioni (7) ha sempre luogo la relazione lineare omogenea a coefficienti variabili,

$$e_1 E_1 f + e_2 E_2 f + \cdots\cdots + e_r E_r f = 0,$$

ciò che risulta immediatamente dalla relazione

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0$$

Segue di qui il teorema:

"Il gruppo aggiunto sui parametri $\underline{e}$ è sempre intransitivo".

Come è naturale, le espressioni alternate

$$(E_i, E_k)$$

debbono comporsi linearmente colle E stesse.

Ma eseguendo il calcolo troviamo:

$$(E_i E_k) = \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \left\{ \sum_\mu c_{\mu ks} E_i(e_\mu) - \sum_\nu c_{\nu is} E_k(e_\nu) \right\} =$$

$$= \sum_s \frac{\partial f}{\partial e_s} \sum_{\mu\nu} (c_{\mu ks} c_{\nu i\mu} - c_{\mu is} c_{\nu k\mu}) e_\nu ,$$

che per le relazioni quadratiche (I) § 27 fra c_{iks}, si scrive

$$(E_i E_k) = \sum_\mu c_{ik\mu} \sum_{\nu, s} c_{\nu\mu s} e_\nu \frac{\partial f}{\partial e_s} = \sum_\mu c_{ik\mu} E_\mu f ;$$

dunque:

Le trasformazioni infinitesime (7) del gruppo aggiunto sono legate fra loro dalle relazioni

$$(E_i E_k) = \sum_s c_{iks} E_s f$$

colle medesime costanti di composizione c_{iks} del gruppo dato.

§ 70

Numero dei parametri del gruppo aggiunto

Si è già detto (§ 67) che il numero dei parametri del gruppo aggiunto di un gruppo G_r può essere inferiore ad r, e persino ridursi a zero (nel caso di un gruppo Abeliano). Il numero ρ di questi parametri essenziali eguaglia il numero di trasformazioni infinitesime indipendenti fra le $E_1 f, E_2 f \dots E_r f$, non legate cioè da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Una relazione

$$g_1 E_1 f + g_2 E_2 f + \dots \dots + g_r E_r f = 0$$

a coefficienti costanti g_i si traduce, per l'espressione (7) della E_i, nelle r^2 equazioni omogenee fra le g

$$(8) \quad \sum_i g_i c_{jik} = g_1 c_{j1k} + g_2 c_{j2k} + \dots + g_r c_{jrk} = 0$$
$$j, k = 1, 2, \dots r$$

Vi sono quindi tante delle $E_i f$ fra loro indipendenti quante unità sono nella caratteristica della matrice

$$\| c_{j1k} \; c_{j2k} \cdots c_{jrk} \|$$
$$j, k = 1, 2 \dots r$$

Dunque: Il numero ρ dei parametri del gruppo aggiunto eguaglia la caratteristica della matrice

$$\| c_{j1k} \; c_{j2k} \ldots\ldots c_{jrk} \| \qquad j, k = 1, 2 \ldots r$$

formata colle costanti di composizione del gruppo dato G_r.

Ma si può porre questo risultato sotto un'altra forma più importante. Il sussistere delle (8) equivale perfettamente all'annullarsi dell'espressione alternata

$$\left(\sum_i g_i X_i , X_j \right) = 0$$
$$j = 1, 2 \ldots r$$

Ciò significa (§§ 57, 58) che tutte le trasformazioni finite del sottogruppo G_1 generato dalla trasformazione infinitesima

$$g_1 X_1 f + g_2 X_2 f + \ldots\ldots + g_r X_r f$$

sono permutabili con ogni trasformazione di G_r — Diremo allora, per abbreviare che la trasformazione infinitesima $\sum_i g_i X_i f$ é permutabile con tutte le $X_i f$ e la trasformazione infinitesima stessa si dirà eccezionale (ausgezeichnet secondo Lie) — Ad ogni identità lineare

$$\sum_i g_i E_i f = 0$$

fra $E_1 f, \ldots E_r f$ corrisponde dunque una trasformazione infinitesima eccezionale in G_r ed inversamente. Saranno dunque tante le relazioni indipendenti fra $E_1 f \ldots\ldots E_r f$ quante trasformazioni infinitesime eccezionali distinte possiede il gruppo G_r - Poniamo che queste siano $\underline{m}$ e prendiamole per

$$X_1 f, X_2 f \ldots\ldots X_m f;$$

queste generano manifestamente un sottogruppo (invariante) G_m di G_r precisamente il sottogruppo già detto al § 67 il sottogruppo commutativo, formato da tutte e sole le trasformazioni di G_r permutabili con ogni altra nel gruppo - Come si vede, se il sottogruppo commutativo possieda $\underline{m}$ parametri, il gruppo aggiunto ne ha precisamente $r-m$ -

Supponiamo che il gruppo G_r possegga un effettivo sottogruppo commutativo G_m $(m>0)$, cioè che il gruppo aggiunto abbia meno di r parametri - È facile allora vedere che il gruppo G_r è necessariamente sistatico (§ 53) - Infatti il sottogruppo commutativo G_m cangia un punto arbitrario P dello spazio in punti che hanno a comune il sottogruppo di stabilità, che restano cioè fissi per tutte le trasformazioni che lasciano P stazionario; dunque il gruppo G_r è sistatico -

Ne segue che: Il gruppo aggiunto di un gruppo asistatico ha sempre tanti parametri quanti il gruppo.

Se si ricorda che un gruppo sistatico è sempre anche imprimitivo, si vede anche che: Il gruppo aggiunto di ogni gruppo primitivo a r parametri possiede pure r parametri essenziali.

La stessa cosa risulta dall'osservare che se il gruppo G_r possiede una trasformazione infinitesima eccezionale $\Sigma g_i X_i f$, l'equazione lineare omogenea a derivate parziali

$$\sum_i g_i X_i f = 0$$

ammette il gruppo G_r, che è per conseguenza imprimitivo (§§ 51, 52).

Terminiamo queste generalità sul gruppo aggiunto coll'osservare che, per la definizione stessa di questo gruppo, fra le trasformazioni del gruppo G_r e quelle del suo aggiunto Γ_{r-m} viene stabilita una tale corrispondenza che ad una di G_r ne corrisponde una perfettamente determinata in Γ_{r-m}, laddove ad una di Γ_{r-m} ne corrisponde una serie ∞^m in G_r; la corrispondenza poi soddisfa alla proprietà caratteristica che al prodotto di due trasformazioni in G_r corrisponde il prodotto delle corrispondenti in Γ_{r-m}.

È questo un caso particolare della relazione così detta d'isomorfismo (in generale meriedrico) fra due gruppi di cui fra breve tratteremo. Per le trasformazioni infinitesime de due gruppi questa relazione si traduce nel fatto, già osservato alla fine del paragrafo precedente, che le costanti di composizione delle $Z_i f$ sono le medesime che per le $X_i f$.

§. 71

Ricerca dei sottogruppi di un gruppo

La considerazione del gruppo aggiunto è molto utile, come si è già detto, specialmente nella ricerca dei sottogruppi di un gruppo. Intanto cominciamo dal far vedere come questa ricerca si riconduca in ogni caso alla discussione di un sistema di equazioni algebriche. Sia G_r un gruppo generato dalle r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, \; X_2 f, \; \ldots \; X_r f$$

e si tratti di trovare i sottogruppi G_m a m parametri di G_r. Se con

$$Y_1 f, \; Y_2 f, \; \ldots \; Y_m f$$

indichiamo le m trasformazioni infinitesime generatrici di G_m, queste saranno combinazioni lineari, a coefficienti costanti delle X, poniamo

$$Y_i f = \sum_s^{1\ldots r} h_{is} X_s f$$
$$(i = 1, 2 \ldots m)$$

Perchè le Y_f generino un gruppo G_m è necessario e sufficiente determinare le rm costanti h_{is} in guisa che $Y_1 \ldots Y_m$ siano indipendenti, cioè la matrice

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{21} & \ldots & h_{m1} \\ h_{12} & h_{22} & \ldots & h_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{1r} & h_{2r} & \ldots & h_{mr} \end{Vmatrix}$$

abbia la caratteristica $\underline{m}$ e di più le espressioni alternate

$$(Y_i, Y_l) = \sum_{s,t}^{1\ldots r} h_{is} h_{lt} (X_s, X_t) =$$
$$= \sum_{s,t,\lambda}^{1\ldots r} c_{st\lambda} h_{is} h_{lt} X_\lambda f$$

siano combinazioni lineari, a coefficienti costanti, delle Y stesse. Se poniamo dunque

$$(Y_i, Y_l) = \sum_\tau^{1\ldots m} \gamma_{il\tau} Y_\tau f$$

ne verranno per le incognite h e γ le

$$(9) \qquad \sum_\tau^{1\ldots m} h_{\tau\lambda} \gamma_{il\tau} = \sum_{s,t}^{1\ldots r} c_{st\lambda} h_{is} h_{lt}$$
$$(i, l = 1, 2 \ldots m, \quad \lambda = 1, 2 \ldots r)$$

Per ogni coppia fissa (i, l), queste sono per le incognite $\gamma_{i1}, \gamma_{i2} \dots \gamma_{im}$ rm equazioni lineari, onde la matrice

$$(10)\qquad \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{m1} & \sum\limits_{s,t}^{1\dots r} c_{st1}\, h_{is}\, h_{lt} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{m2} & \sum\limits_{s,t}^{1\dots r} c_{st2}\, h_{is}\, h_{lt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1r} & h_{2r} & \dots & h_{mr} & \sum\limits_{s,t}^{1\dots r} c_{str}\, h_{is}\, h_{lt} \end{Vmatrix}$$

deve avere la stessa caratteristica della matrice delle h, cioè la caratteristica $\underline{m}$. Dunque le incognite h debbono annullare tutti i minori d'ordine $m+1$ nella matrice (10) e viceversa se soddisfano a queste equazioni algebriche, e di più danno alla matrice delle h caratteristica $= m$, le (9) danno per le γ valori determinati e finiti e le $Y_1 f, Y_2 f, \dots Y_m f$ generano effettivamente un sottogruppo G_m di G_r -

Così il problema è ricondotto ad una questione algebrica - Per altro questo metodo, teoricamente soddisfacente offrirebbe presto in pratica difficoltà insormontabili -

§ 72

Sottogruppi affini

Come nella teoria dei gruppi di sostituzioni, così anche in quella dei gruppi continui dire_ mo affini (gleichberechtigt) due trasformazioni S_a S_b di un gruppo G_r quando esista in G_r qualche trasformazione T che trasformi S_a in S_b -

$$T^{-1}S_aT = S_b$$

(e allora l'inversa T^{-1} trasformerà S_b in S_a) -

Similmente diremo affini due sottogruppi G_{r_1}, G'_{r_1} di G_r quando esistano in G_r trasformazioni T che trasformino l'uno nell'altro

$$T^{-1}G_{r_1}T = G'_{r_1} \quad , \quad TG'_{r_1}T^{-1} = G_{r_1}$$

Due sottogruppi affini ad un terzo sono manife_ stamente affini fra loro, sicchè i sottogruppi di G_r potranno ripartirsi in classi o tipi, compu_ tando nel medesimo tipo quelli tra loro affini. E potremo dire di conoscere tutti i sottogruppi di G_r quando per ogni tipo sia noto un rappre_ sentante -

Due sottogruppi affini G_{r_1}, G'_{r_1} sono rappresen_ tati nello spazio E_r del gruppo aggiunto da due spazii lineari per l'origine (§68)

$$E_{r_1} \;,\; E'_{r_1}$$

i quali nascono l'uno dall'altro per una trasfor_ mazione del gruppo aggiunto - Se dunque allo spa_ zio lineare E_{r_1}, rappresentante del sottogruppo G_{r_1} applichiamo tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto avremo una serie di E_{r_1}, i cui singoli spazii rappresenteranno tutti e soli i sottogruppi del tipo di G_{r_1} - In particolare se G_{r_1} è invariante in G_r, lo spazio E_{r_1} dovrà essere trasformato in sè medesimo da tutte le trasformazioni del gruppo aggiunto.

Applichiamo subito queste considerazioni a due casi più semplici e cioè:

1° a trovare i diversi tipi di trasformazioni finite in un gruppo,

2° alla ricerca dei diversi tipi dei sottogruppi ad un parametro.

Pel primo caso basta osservare che una trasformazione finita è rappresentata da un punto $(e_1 e_2 \ldots e_r)$ di E_r e due trasformazioni affini da due punti equivalenti di E_r rispetto al gruppo aggiunto.

Dunque: Per classificare in tipi le trasformazioni di un gruppo G_r si determinino nello spazio E_r del gruppo aggiunto le varietà minime invarianti rispetto a questo gruppo (§ 47); ciascuna di queste varietà rappresenta un tipo di trasformazioni.

Per risolvere anche il secondo osserviamo che ogni trasformazione finita T di G_r determina un sottogruppo G_1 in cui è contenuta, rappresentato in E_r dalla retta che unisce l'origine al punto immagine di T. Due trasformazioni T, T' affini appartengono a sottogruppi affini e viceversa, se due sottogruppi G_1 sono affini, ad una trasformazione dell'uno è affine una trasformazione dell'altro. Il secondo problema è così ricondotto al primo - Presa una delle varietà minime invarianti V sopra considerate, basterà proiettarla dall'origine e i raggi projettanti rappresenteranno i sottogruppi G_1 dello stesso tipo. Si osservi che può anche darsi che la varietà primitiva V contenga già uno dei raggi projettanti da O e quindi di tutti gli altri; allora accadrà che tutte le trasformazioni dei corrispondenti G_1 del tipo saranno affini -

§ 73

Rappresentazione nello spazio ad $r-1$ dimensioni

Spesse volte invece d'interpretare $e_1\, e_2 \ldots e_r$ come coordinate cartesiane in uno spazio E_r, riesce più utile dare ad $e_1\, e_2 \ldots e_r$ il significato di coordinate omogenee

$$e_1 : e_2 : \ldots\ldots : e_r$$

in uno spazio S_{r-1} ad $r-1$ dimensioni - In tal caso l'immagine di un G_1 in G_r sarà data in

S_{r-1} da un punto, che rappresenterà anche, se si vuole, la trasformazione infinitesima $\Sigma e_i X_i f$ generatrice di G_1; un G_2 sarà rappresentato da una retta (un S_1); in generale un sottogruppo G_m di G_r da un S_{m-1}. Possiamo ora facilmente ricercare a quali condizioni dovrà soddisfare un S_{m-1} di S_{r-1} perchè rappresenti un sottogruppo (G_m) di G_r. In ogni caso un tale S_{m-1} rappresenterà una serie ∞^m di trasformazioni in G_r, e questa sarà un gruppo allora e allora soltanto quando sarà invariante rispetto alle proprie trasformazioni, secondo il teorema alla fine del § 58. Per il significato del gruppo aggiunto ciò equivale a dire: Affinchè un S_{m-1} di S_{r-1} rappresenti un sottogruppo G_m di G_r, è necessario e sufficiente che esso venga trasformato in sè medesimo da quelle trasformazioni del gruppo aggiunto i cui punti immagine appartengono all'S_{m-1} stesso.

Naturalmente queste trasformazioni del gruppo aggiunto formeranno esse stesse in questo gruppo un sottogruppo con $m-1$ o meno parametri, secondo che il numero dei parametri nel gruppo aggiunto sarà r o inferiore.

In particolare se l'S_{m-1} considerato viene trasformato in sè medesimo da <u>tutte</u> le trasformazioni del gruppo aggiunto, esso rappresen-sarà un sottogruppo G_m di G_r, e precisamente un sottogruppo invariante, cioè: I sottogruppi invarianti di G_r sono rappresentati in S_{r-1} da spazi lineari che costituiscono varietà invarianti del gruppo aggiunto -

In generale, se si conosce una varietà minima invariante del gruppo aggiunto in S_{r-1}, i suoi punti rappresentano sottogruppi G_1 di G_r appartenenti al medesimo tipo -

Per determinare queste varietà si deve por mente che le coordinate $e_1\, e_2 \dots e_r$ sono omogenee e le varietà stesse debbono essere rappresentate da equazioni omogenee, cioè non debbono cangiare mutando $e_1\, e_2 \dots e_r$ in

(11) $\quad e_1' = \lambda e_1 \;,\; e_2' = \lambda e_2, \dots\dots e_r' = \lambda e_r$

dove λ è un parametro qualunque. Le formole precedenti rappresentano in E_r un gruppo ad un parametro (un'omotetia rispetto all'origine) la cui trasformazione generatrice è data da

$$Ef = e_1\frac{\partial f}{\partial e_1} + e_2\frac{\partial f}{\partial e_2} + \dots + e_r\frac{\partial f}{\partial e_r}$$

Le varietà in discorso debbono dunque rimanere invarianti non solo per le r trasformazioni

$$E_i f = \sum_{jk}^{1\dots r} c_{jik}\, e_j \frac{\partial f}{\partial e_k}$$
$$(i = 1, 2 \dots r)$$

ma anche per la

$$Ef = \sum_k e_k \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

Ora si vede subito che aggregando alle $E_i f$ la Ef si hanno le trasformazioni generatrici di un gruppo in cui il gruppo aggiunto $(E_1 E_2 \dots E_r)$ é contenuto come sottogruppo invariante poichè si ha identicamente, come subito si verifica

$$(E E_i) = 0$$

Questa cosa del resto é evidente a priori, poichè qualunque trasformazione lineare omogenea é permutabile coll'omotetia.

Così adunque: Per trovare le varietà invarianti in S_{r-1} rispetto al gruppo aggiunto Γ_{r-m} basta aggregare alle trasformazioni infinitesime di Γ_{r-m} la

$$Ef = \sum_i e_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

e cercare nel modo ordinario (§47) le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$(E_1 E_2 \dots\dots E_r E)$$

É bene osservare che questo gruppo é effettivamente più ampio del gruppo aggiunto e quindi contiene un parametro di più ($r-m+1$ parametri), giacchè la Ef non si compone linearmente, con coefficienti costanti c_i, colle E_i. — In caso contrario si avrebbe infatti

$$(12) \qquad Ef = \sum_i c_i E_i f$$

e siccome si ha identicamente (§ 69)

$$\sum_i e_i E_i f = 0$$

si avrebbe anche per qualunque f

$$Ef = \sum_i (c_i - e_i) E_i f$$

Il secondo membro si annullerebbe per qualunque f per le $e_i = c_i$, mentre ciò non può accadere evidentemente del primo (*).

Aggiungiamo, senza dimostrarlo, che la (12) non può sussistere nemmeno con coefficienti c_i funzioni delle e, che cioè l'equazione $Ef = 0$ è indipendente dalle

$$E_1 f = 0 \;,\; E_2 f = 0 \;\ldots\ldots\; E_r f = 0$$

§ 74

Esempio del gruppo dei movimenti nel piano

Prima di procedere ad ulteriori ricerche sul gruppo aggiunto sarà bene applicare a qualche esem-

(*) Basta p. e. prendere per f una soluzione di $Ef = 1$

piú semplice i risultati generali ottenuti.

Consideriamo il gruppo G_3 dei movimenti del piano le cui equazioni finite sono (§ 7)

$$(12)' \quad \begin{cases} x_1' = x_1 \cos a_3 - x_2 \operatorname{sen} a_3 + a_1 \\ x_2' = x_1 \operatorname{sen} a_3 + x_2 \cos a_3 + a_2 \end{cases}$$

Le sue trasformazioni infinitesime generatrici sono

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

e una trasformazione infinitesima qualunque è data da

$$(13) \qquad e_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + e_3 \left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)$$

Per la (12) essa si trasforma in

$$e_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1'} \cos a_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \operatorname{sen} a_3 \right) + e_2 \left(- \frac{\partial f}{\partial x_1'} \operatorname{sen} a_3 + \frac{\partial f}{\partial x_2'} \cos a_3 \right) +$$

$$+ e_3 \left\{ (a_2 - x_2') \frac{\partial f}{\partial x_1'} - (a_1 - x_1') \frac{\partial f}{\partial x_2'} \right\} =$$

$$= e_1' \frac{\partial f}{\partial x_1'} + e_2' \frac{\partial f}{\partial x_2'} + e_3' \left(x_1' \frac{\partial f}{\partial x_2'} - x_2' \frac{\partial f}{\partial x_1'} \right)$$

dove

$$(14) \quad \begin{cases} e_1' = e_1 \cos a_3 - e_2 \operatorname{sen} a_3 + a_2 e_3 \\ e_2' = e_1 \operatorname{sen} a_3 + e_2 \cos a_3 - a_1 e_3 \\ e_3' = e_3 \end{cases}$$

Queste sono precisamente le trasformazioni del gruppo aggiunto che nel caso attuale ha tre parametri come il gruppo G_3 primitivo, ciò che era prevedibile essendo G_3 asistatico (§ 70) -

Si osservi anzi che considerando $\frac{e_1}{e_3}$, $\frac{e_2}{e_3}$ come coordinate cartesiane ortogonali nel piano, il gruppo aggiunto Γ_3 è ancora il gruppo dei movimenti.

Le sue trasformazioni infinitesime si calcolano subito dalle (14) osservando che per

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

si ha l'identità e quindi per

$$a_1 = \varepsilon_1 \delta t \,,\quad a_2 = \varepsilon_2 \delta t \,,\quad a_3 = \varepsilon_3 \delta t$$

con $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3$ costanti arbitrarie la più generale trasformazione infinitesima – Per trasformazioni generatrici di Γ_3 possiamo prendere

$$(15)\qquad E_1 f = -e_3 \frac{\partial f}{\partial e_2} \,,\quad E_2 f = e_3 \frac{\partial f}{\partial e_1} \,,\quad E_3 f = e_1 \frac{\partial f}{\partial e_2} - e_2 \frac{\partial f}{\partial e_1}$$

come risultano anche direttamente dalla formola generale (7) §. 69 –

Prima di applicare i criterii generali stabiliti nei paragrafi precedenti alla classificazione in tipi delle trasformazioni di G_3 (movimenti) e sottogruppi, conviene ancora fare le osservazioni seguenti – Il simbolo

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$$

rappresenta anche una trasformazione finita del gruppo e importa riconoscere qual'è il significato geometrico dei parametri $e_1\ e_2\ e_3$ – Ciò si può fare facilmente per via diretta, ma per applicare le teorie generali ricorriamo alle equazioni differenziali (A) § 68 | che danno le relazioni fra i parametri a_1, a_2, a_3 ed i parametri canonici $e_1 = \lambda_1 t$, $e_2 = \lambda_2 t$, $e_3 = \lambda_3 t$ -

Per il gruppo dei movimenti i valori dei coefficienti $\psi_{ik}(a)$ sono (v. § 7 in fine)

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

e quindi quelle delle $\alpha_{ik}(a)$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_2 & -a_1 & -1 \end{vmatrix}$$

Le equazioni (A) dianzi citate diventano quindi nel caso nostro

$$\frac{da_1}{dt} = \lambda_1 + \lambda_3 a_2, \quad \frac{da_2}{dt} = \lambda_2 - \lambda_3 a_1, \quad \frac{da_3}{dt} = -\lambda_3$$

colle condizioni iniziali

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0 \quad \text{per } t = 0$$

Ciò dà intanto $a_3 = -\lambda_3 t = -e_3$, onde si vede che quando e_3 non è nullo (o multiplo di 2π) rappresenta l'ampiezza della rotazione del movimento corrispondente. Se poi $e_3 = a_3 = 0$ il movimento è una traslazione; risulta

$$a_1 = e_1 \qquad a_2 = e_2$$

e quindi e_1 e_2 sono le componenti secondo gli assi di questa traslazione.

Per classificare in tipi le trasformazioni di G_3 basta determinare nello spazio E_3 le varietà minime invarianti rispetto a Γ_3. Ora la matrice dei coefficienti di $E_1 f$, $E_2 f$, $E_3 f$ è qui

$$\begin{vmatrix} 0 & -e_3 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{vmatrix}$$

~~ed ha~~ la caratteristica generica $=2$, salvo per ~~$e_3=0$~~, ove la caratteristica diventa $=1$ (*)

In primo luogo il gruppo Γ_3 essendo intransitivo possiede l'invariante e_3, e le varietà minime invarianti corrispondenti sono i piani

$$e_3 = \text{cost.} \quad (\neq 0)$$

che rappresentano ciascuno un tipo di trasformazioni. Si conclude che sono affini due rotazioni della stessa ampiezza, ciò che è geometricamente evidente.

In secondo luogo il piano invariante

$$e_3 = 0$$

(*) La caratteristica diventa $=0$ per $e_1=e_2=e_3=0$, ma questo punto (l'origine) rappresenta l'identità in G_3, trasformazione che è naturalmente affine solo a se medesima.

rappresenta le traslazioni - Su questo piano le $E_1 f$, $E_2 f$ si annullano identicamente e il gruppo Γ_3 si riduce alle rotazioni attorno all'origine. Esso possiede l'invariante $\sqrt{e_1^2+e_2^2}$ che rappresenta l'ampiezza della traslazione - Sono dunque affini nel gruppo due traslazioni d'eguale ampiezza - Dal punto di vista reale la discussione è completa - Ma se si vuole considerare anche l'immaginario, bisogna avvertire che i punti ciclici del piano $e_3=0$

$$e_1 : e_2 : e_3 = 1 : \pm i : 0$$

formano ciascuno per sè una varietà isolata invariante e danno luogo alle traslazioni singolari

$$x_1' = x_1 + t \quad , \quad x_2' = x_2 \pm it ,$$

trasformate in sè medesime da ciascuna trasformazione del gruppo.

Venendo alla classificazione dei sottogruppi G_1, ed applicando quanto è detto alla fine del § 72, vediamo che si distinguono in due tipi, uno rappresentato in E_3 dalle rette per l'origine non giacenti nel piano $e_3=0$, l'altro dalle rette per l'origine in questo piano - Si vede subito che i primi sono sottogruppi rotatorii i secondi traslatorii, i primi come i secondi tutti affini fra loro -

§ 75
Applicazione al gruppo projettivo sopra una variabile

Prendiamo come secondo esempio il gruppo a tre parametri essenziali delle sostituzioni lineari sopra una variabile:

$$(15) \qquad x' = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

e cominciamo dal calcolare le trasformazioni infinitesime – Siccome nella (15) si ha l'identità facendo

$$\alpha=\delta\neq 0 \qquad \beta=\gamma=0$$

si avrà la più generale trasformazione infinitesima ponendo

$$\alpha=1+a\,\delta t\,,\ \beta=b\,\delta t\,,\ \gamma=c\,\delta t\,,\ \delta=1+d\,\delta t$$

con a, b, c, d costanti qualunque – La (15) diventa

$$x+\delta x = \frac{x+(ax+b)\delta t}{1+(d+cx)\delta t}$$

$$\delta x = \frac{b+(a-d)x-cx^2}{1+(d+cx)\delta t}\,\delta t$$

ossia trascurando le potenze superiori di δt

$$\delta x = \{b+(a-d)x-cx^2\}\,\delta t$$

o sotto altra forma

$$\delta x = (A+Bx+Cx^2)\,\delta t$$

con A, B, C costanti qualunque. La più generale trasformazione infinitesima del gruppo projettivo è dunque

$$(A+Bx+Cx^2)\frac{\partial f}{\partial x};\ ^{(*)}$$

esso è quindi generato dalle tre trasformazioni infinitesime

$$X_1f=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_2f=x\frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ X_3f=x^2\frac{\partial f}{\partial x}$$

Di queste calcoliamoci innanzi tutte le formole di composizione

$$(X_1X_2)=X_1f\ ,\ (X_1X_3)=2X_2f\ ,\ (X_2X_3)=X_3f,$$

onde deduciamo per le trasformazioni E_1f, E_2f, E_3f del gruppo aggiunto (§69)

$$\begin{cases} E_1f=-e_2\dfrac{\partial f}{\partial e_1}-2e_3\dfrac{\partial f}{\partial e_2}\\ E_2f=\ e_1\dfrac{\partial f}{\partial e_1}-e_3\dfrac{\partial f}{\partial e_3}\\ E_3f=2e_1\dfrac{\partial f}{\partial e_2}+e_2\dfrac{\partial f}{\partial e_3}\end{cases}$$

(*) È del resto ben noto che l'equazione differenziale di Riccati

$$\frac{dx'}{dt}=A+Bx'+Cx'^2,$$

detto x il valore iniziale di x' per $t=0$ ha un integrale generale lineare rispetto a x che qui figura come costante arbitraria cioè appunto un integrale della forma (15) con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ funzioni di t. Ciò conduce in

Queste sono indipendenti e il gruppo aggiunto è un Γ_3 a tre parametri, corrispondentemente al fatto che il gruppo projettivo G_3 è asistatico.

Qui cerchiamo i sottogruppi ad uno e due parametri di G_3 – Per classificare quelli ad un parametro adoperiamo il processo del § 73 riguardando e_1 e_2 e_3 come coordinate omogenee nel piano.

Dovremo associare alle E_1f, E_2f, E_3f la

$$Ef = \sum e_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$$

e ricercare le varietà invarianti rispetto al gruppo

$$\Gamma_4 = (E_1 E_2 E_3 E)$$

La matrice

$$\begin{Vmatrix} e_2 & 2e_3 & 0 \\ e_1 & 0 & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{Vmatrix}$$

ha la caratteristica 3 e Γ_4 è transitivo. Se eguagliamo a zero i minori di 3° ordine, escludendo naturalmente il caso $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, troviamo l'unica equazione

$$(16) \qquad e_2^2 - 4e_1 e_3 = 0$$

Dunque rispetto al gruppo aggiunto tutti i punti del piano sono equivalenti tranne i punti

altro modo di risultati del testo.

della conica (16) che sono equivalenti fra loro — I sottogruppi ad un parametro di G_3 si distinguono conseguentemente in due tipi, essendo affini quelli del primo al gruppo G_1 generato dalla $x\frac{\partial f}{\partial x}$ corrispondente a $e_1 = e_3 = 0$, e quelli del secondo al gruppo G_1 generato da $\frac{\partial f}{\partial x}$ corrispondente al punto $e_2 = e_3 = 0$ della conica — Le equazioni finite dei corrispondenti gruppi sono

$$x' = \lambda x$$

nel primo,

$$x' = x + a$$

nel secondo —

Per trovare anche i sottogruppi G_2 di G_3 si osservi che se

$$Xf = e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + e_3 X_3 f$$

$$Yf = \varepsilon_1 X_1 f + \varepsilon_2 X_2 f + \varepsilon_3 X_3 f$$

sono le due trasformazioni infinitesime di G_3 si ha

$$(XY) = (e_1 \varepsilon_2 - e_2 \varepsilon_1) X_1 f + 2(e_1 \varepsilon_3 - e_3 \varepsilon_1) X_2 f +$$

$$+ (e_2 \varepsilon_3 - e_3 \varepsilon_2) X_3 f = \eta_1 X_1 f + \eta_2 X_2 f + \eta_3 X_3 f$$

Essendo $(e_1\, e_2\, e_3)$, $(\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3)$ i punti rappresentativi di Xf, Yf rispettivamente, quello $(\eta_1\, \eta_2\, \eta_3)$ è il polo rispetto alla conica (16) della congiungente quei due punti. Ciò posto, un sottogruppo G_2 di G_3 deve avere per immagine nel piano una retta che deve contenere tutti i punti immagine delle trasformazioni infinitesime di G_2. Qui adunque la retta congiungente i punti immagine di Xf e Yf deve contenere il proprio polo e per ciò deve toccare la conica (16). Poiché il gruppo aggiunto scambia fra loro transitivamente le tangenti della conica, vediamo che: Tutti i sottogruppi a due parametri del gruppo proiettivo sono affini.

Come rappresentante del tipo si può prendere il sottogruppo

$$x' = a_1 x + a_2$$

che lascia fisso il punto $x = \infty$ e così ogni altro sottogruppo G_2 lascia fisso un punto $x = \alpha$ ed è individuato da questo punto; la sua equazione finita è data da

$$\frac{1}{x'-\alpha} = \frac{a_1}{x-\alpha} + a_2$$

§. 76

Sottogruppi a due parametri di un gruppo G_r

Riprendiamo ora le considerazioni generali ed occupiamoci di un problema che conduce ad importanti risultati per la teoria dei gruppi, alla ricerca dei gruppi G_2 a due parametri contenuti in un dato gruppo G_r -

In primo luogo vediamo quale composizione può offrire un gruppo G_2 a due parametri.

Siano $X_1 f$. $X_2 f$ le due trasformazioni generatrici; avremo

$$(X_1 X_2) = a X_1 + b X_2 ,$$

con a, b costanti. Se $a=0$, $b=0$ si ha $(X_1 X_2)=0$ ed il gruppo è Abeliano. Supponendo che sia invece $a \neq 0$, basta sostituire alla $X_1 f$ la

$$\overline{X}_1 f = X_1 f + \frac{b}{a} X_2 f.$$

perchè ne risulti

$$(\overline{X}_1 f, X_2 f) = a \overline{X}_1 f$$

e alterando $X_2 f$ pel fattore $\frac{1}{a}$ si può anche rendere $a=1$. Dunque: un gruppo G_2 a due parametri può offrire o la composizione $(X_1 X_2)=0$, o l'altra $(X_1 X_2) = X_1 f$ - Nel primo caso il gruppo è Abeliano, nel secondo caso ha per gruppo derivato $X_1 f$, quindi in ogni caso: un gruppo a due parametri è sempre integrabile.

Dimostriamo ora il teorema:

Ogni sottogruppo G_1 ad un parametro di un gruppo G_r è contenuto almeno in un sottogruppo G_2 a due parametri (reale od immaginario)(*).

(*) Se si ricorre alla rappresentazione del § 73

Sia $X_1 f$ la trasformazione generatrice di G_1 ed indichino

$$X_2 f,\ X_3 f \ldots\ldots X_r f$$

le rimanenti di G_r. Basterà dimostrare che con queste ultime si può comporre linearmente una trasformazione

$$Yf = \lambda_2 X_2 f + \ldots\ldots + \lambda_r X_r f,$$

prendendo le costanti λ non tutte nulle in guisa che si abbia

$$(17)\qquad (X_1 Y) = \alpha X_1 f + \beta\, Yf,$$

con α, β costanti. La (17) ci dà

$$\sum_i^{2\ldots r} \lambda_i (X_1 X_i) = \sum_{ik}^{1\ldots r} c_{1ik} \lambda_i X_k f = \alpha X_1 + \beta \sum_k^{2\ldots r} \lambda_k X_k f$$

e si scinde quindi nelle seguenti

$$\alpha = \sum_i^{2\ldots r} c_{1i1} \lambda_i$$

$$(18)\qquad \sum_i^{2\ldots r} c_{1ik} \lambda_i = \beta \lambda_k \quad (k = 2, 3 \ldots r)$$

La prima ci dà α note che siano le λ_i, le rimanenti $r-1$, lineari omogenee nelle λ, danno eliminando le λ l'equazione di grado $r-1$ in β

(*) dei sottogruppi di G_r nello spazio S_{r-1} ad $r-1$ dimensioni, i sottogruppi G_2 sono rappresentati da rette e il teorema del testo ci dice che queste rette riempiono lo spazio, giacchè per ogni punto ne passa una almeno.

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} c_{122}-\beta & c_{132} & \cdots\cdots & c_{r22} \\ c_{123} & c_{133}-\beta & \cdots\cdots & c_{r23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{12r} & c_{13r} & \cdots\cdots & c_{r2r}-\beta \end{vmatrix} = 0$$

Prendendo per β una radice qualunque di questa equazione, si può certamente soddisfare le (18) con valori non tutti nulli delle λ, onde risulta dimostrato il teorema — In generale si osservi che se quella radice β rende il determinante (19) di caratteristica $r-1-k$, ad altrettante equazioni distinte si ridurranno le (18) e però k delle λ resteranno arbitrarie, cioè vi saranno ∞^{k-1} sottogruppi G_2 contenenti il nostro G_1 —

Come è avvertito nell'enunciato del teorema può anche darsi che i sottogruppi G_2 contenenti il dato G_1 (reale) siano immaginarii perchè l'equazione (19) se di grado $r-1$ pari (cioè se r è impari) può avere tutte le radici immaginarie — Così p. e. se consideriamo nello spazio il gruppo G_3 di rotazioni attorno all'origine generato da

$$X_1f = y\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_2f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$$

colla composizione

$$(X_1X_2) = -X_3f, \quad (X_2X_3) = -X_1f, \quad (X_3X_1) = -X_2f$$

si vede subito che non ammette sottogruppi reali a due parametri. Per cercarli basta vedere se ne esistano di contenenti p. e. $X_1 f$ giacché evidentemente tutti i G_1 nel nostro gruppo sono affini.
Ora ponendo

$$(X_1, \lambda X_2 + \mu X_3) = \alpha X_1 + \beta(\lambda X_2 + \mu X_3)$$

e avendo riguardo alla composizione superiore si ha

$$-\lambda X_3 + \mu X_2 = \alpha X_1 + \beta\lambda X_2 + \beta\mu X_3$$

onde

$$\alpha = 0 \qquad \mu = \beta\lambda \ , \quad \lambda = -\beta\mu$$

e per ciò

$$\beta^2 = -1 \ , \quad \beta = \pm i \quad \text{ecc.}$$

Il teorema sopra dimostrato non è che un caso particolare del seguente, che per ora ci limitiamo ad enunciare:

Ogni sottogruppo G_m integrabile ad $\underline{m}$ parametri di un gruppo G_r è contenuto almeno in un sottogruppo G_{m+1} ad $m+1$ parametri.

Se il sottogruppo G_m non è integrabile il teorema non vale più in generale. Così per es. nel gruppo a 5 parametri

$$G_5 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

è contenuto il G_3 non integrabile

$$G_3 = \left(x\frac{\partial f}{\partial y}, y\frac{\partial f}{\partial x}, x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

—

e questo non è contenuto in alcun G_4 di G_5.

§ 77

L'equazione caratteristica

Prendiamo ora in G_r un G_1 generico e sia

$$\sum e_i X_i f = e_1 X_1 f + \dots\dots + e_r X_r f$$

la sua trasformazione generatrice. Cerchiamo di determinare i sottogruppi G_2 di G_r nei quali è contenuto il G_1 fissato. Dovremo determinare la seconda trasformazione generatrice

$$\sum \lambda_i X_i f$$

in guisa che le costanti λ non siano proporzionali alle e_i e si abbia

$$(\sum e_i X_i f, \sum \lambda_k X_k f) = a \sum_s e_s X_s f + \rho \sum_s \lambda_s X_s f$$

con a, ρ costanti.

Se il G_2 da costruirsi non ha per gruppo derivato precisamente G_1 $(a \neq 0, \rho = 0)$, potremo fare senz'altro $a = 0$, cangiando nel modo indicato al principio del paragrafo precedente, la seconda trasformazione senza cangiare la prima. Così la relazione precedente si riduce alla

$$(20) \qquad (\sum e_i X_i f, \sum \lambda_k X_k f) = \rho \sum_s \lambda_s X_s f$$

e, per quanto si è detto ora, discutendo la possibilità di soddisfare alla (20) con convenienti valori delle λ (non proporzionali alle e) veniamo a risolvere il problema seguente: Determinare i sottogruppi G_2 di G_r nei quali è contenuto un dato sottogruppo $G_1 \equiv \Sigma e_i X_i f$, senza esserne il primo gruppo derivato.

Il primo membro della (20), a causa delle relazioni di composizione, si scrive

$$\sum_{iks} c_{iks}\, e_i\, \lambda_k\, X_s f$$

e, confrontato col secondo, dà luogo alle r relazioni lineari omogenee nelle λ

$$(20^*) \qquad \sum_{ik} c_{iks}\, e_i\, \lambda_k = \rho \lambda_s \qquad (s = 1, 2 \dots r)$$

Scriviamo queste più brevemente ponendo

$$(21) \qquad e_{ks} = \sum_i c_{iks}\, e_i$$

e allora le (20*) diventano

$$(22) \qquad \sum_k e_{ks}\, \lambda_k = \rho \lambda_s \qquad (s = 1, 2 \dots r)$$

Osserviamo che le funzioni lineari omogenee e_{ks} delle e introdotte colle (21) non sono altro che i coefficienti delle trasformazioni infinitesime $E_k f$ del gruppo aggiunto; e infatti con queste notazioni si ha (cf. (7) § 69) *)

$$(23) \qquad E_k f = \sum_s e_{ks} \frac{\partial f}{\partial e_s}$$

Eliminando dalle r equazioni lineari omogenee

(21) nelle $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_r$ queste incognite, ne viene per ρ l'equazione di grado r

$$(24) \qquad \Delta(\rho) = \begin{vmatrix} e_{11}-\rho & e_{12} & \cdots & e_{1r} \\ e_{21} & e_{22}-\rho & \cdots & e_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rr}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

Il primo membro, cioè il determinante $\Delta(\rho)$ dicesi il determinante caratteristico e l'equazione stessa $\Delta(\rho)=0$ l'equazione caratteristica, relativa al sottogruppo $\Sigma e_i X_i f$; quando le e si lascino variabili, si dicono poi rispettivamente il determinante caratteristico e l'equazione caratteristica del gruppo. Queste denominazioni saranno poi giustificate dalle proprietà che dimostreremo nei prossimi paragrafi.-

Intanto osserviamo subito che l'equazione caratteristica ha sempre la radice $\rho=0$ poichè, a causa della intransitività del gruppo aggiunto (§ 69). il determinante $|e_{ik}| = \Delta(0)$ è certamente nullo (*)

Ma se prendiamo una radice ρ non nulla (supposta esistente) della equazione caratteristica, a questa corrisponde almeno una soluzione del problem[a]

(*) La stessa cosa risulta dall'osservare che si soddisfa certamente alla (20) e quindi alle (22) ponendo $\lambda_k = e_k$; $\rho=0$

perchè le corrispondenti d che soddisfano le (22) non possono riuscire proporzionali alle e; altrimenti a causa delle identità

$$\sum e_{hs}\, e_h = 0$$

ne verrebbe $\rho = 0$ - Così avremo, corrispondentemente a quella radice ρ, uno o infiniti sottogruppi G_2 in cui è contenuto G_1 (senza esserne il primo gruppo derivato( ), secondo che quella radice ρ annullerà o non annullerà tutti i minori di $(r-1)^o$ ordine. (*)

Quanto alla radice $\rho = 0$ se essa non annulla i minori di $(r-1)^o$ ordine di $\Delta(0)$ non vi corrisponde alcuna soluzione effettiva del problema perchè i valori delle d ne risultano unicamente proporzionali alle e. Ma se $\Delta(0)$ ha caratteristica $< r-1$, allora si hanno sempre altre soluzioni per le d (non proporzionali alle e).

Di qui si vede che: a) condizione necessaria e sufficiente affinchè il sottogruppo G_1 sia contenuto in un sottogruppo Abeliano G_2 è che il determinante caratteristico relativo a G_1 abbia per $\rho = 0$ una caratteristica $< r-1$.

Notiamo in fine come possa anche darsi che

(*) Più precisamente se quella radice ρ rende $\Delta(\rho)$ di caratteristica $r-s$, esisteranno ∞^{s-1} tali sottogruppi G.

il problema proposto non ammetta alcuna soluzione - Le considerazioni superiori fanno conoscere le condizioni a ciò necessarie e sufficienti che possiamo enunciare così: b) Un gruppo G_1 è contenuto solo in sottogruppi G_2 che hanno per gruppo derivato G_1 quando l'equazione caratteristica $\Delta(\rho)=0$ di G_1 ha l'unica radice $\rho=0$ e questa non annulla tutti i minori d'ordine $r-1$ di $\Delta(\rho)$ -

Che un tale caso possa darsi, lo dimostra l'esempio del gruppo projettivo G_3 sopra una variabile (cf. §75) colla composizione

$$(X_1X_2) = X_1 f \,, \quad (X_1X_3) = 2X_2 f \,, \quad (X_2X_3) = X_3 f$$

Qui abbiamo

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} -e_2-\rho & -2e_3 & 0 \\ e_1 & -\rho & -e_3 \\ 0 & 2e_1 & e_2-\rho \end{vmatrix} = 0$$

che per $e_1=1 \quad e_2=e_3=0$ ha l'unica radice $\rho=0$, ma questa non annulla tutti i minori di secondo ordine - In questo caso il gruppo $G_1 \equiv X_1 f$ è contenuto nel solo sottogruppo $G_2 \equiv [X_1 f, X_2 f]$ di cui G_1 è il gruppo derivato -

§ 78
Proprietà dell'equazione caratteristica

Se si riflette al significato delle radici dell'equazione caratteristica s'intende facilmente che l'equazione stessa deve essere indipendente dalle r particolari trasformazioni infinitesime

$$X_1 f \quad X_2 f \dots X_r f$$

scelte come ~~radici~~ trasformazioni generatrici del gruppo. Dimostriamo questa proprietà, che giustifica la denominazione d'equazione caratteristica, in modo rigoroso e diretto così. Supponiamo di sostituire alle r trasformazioni $X_i f$ le altre r indipendenti $X'_i f$ colle formole

$$(25) \qquad X'_i = \sum_s a_{is} X_s f$$

dove le a sono coefficienti costanti, soggetti alla sola condizione che il loro determinante $|a_{is}|$ non sia nullo. La trasformazione infinitesima generica

$$\sum_k e_k X_k f$$

si cangierà in

$$\sum_i e'_i X'_i f = \sum_{ki} a_{ik} e'_i X_k f$$

e si avranno quindi le formole

$$(26) \qquad e_k = \sum_i a_{ik}\, e'_i$$

Indichiamo con $E'_i f$ le trasformazioni infinitesime del gruppo aggiunto calcolate rispetto alle trasformazioni generatrici $X'_i f$. Basta considerare che per la definizione stessa del gruppo aggiunto ad ogni trasformazione finita o infinitesima del gruppo primitivo ne corrisponde una perfettamente determinata del gruppo aggiunto per intendere che le $E'f$ si esprimeranno per le Ef come le $X'f$ per le X, cioè colle formole

$$(25^*) \qquad E'_i f = \sum_s a_{is}\, E_s f$$

Colle notazioni del § precedente abbiamo

$$E_s f = \sum_k e_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

e analogamente

$$E'_i f = \sum_s e'_{is} \frac{\partial f}{\partial e'_s}$$

dove le e'_{is} sono costruite colle e'_λ e colle nuove costanti di composizione c'_{iks} come le e_{is} colle e_λ e colle c_{iks} secondo le (21).

Per la (26) la $E'_i f$ si scrive

$$E'_i f = \sum_{sk} e'_{is}\, a_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

onde sostituendo in (25*)

$$\sum_{sk} e'_{is}\, a_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k} = \sum_{sk} a_{is}\, e_{sk} \frac{\partial f}{\partial e_k}$$

e per ciò

$$(27) \qquad \sum_s a_{sk}\, e'_{is} = \sum_s a_{is}\, e_{sk}$$

$$(i, k = 1, 2 \ldots r)$$

Indicando al solito con ε_{is} lo zero o l'unità secondo che $i \neq s$ o $i = s$, si vede subito che dalla (27) segue l'altra

$$(27^*) \qquad \sum_s a_{sk}\,(e'_{is} - \varepsilon_{is}\rho) = \sum_s a_{is}\,(e_{sk} - \varepsilon_{sk}\rho), \quad (i, k = 1 \ldots r)$$

dove ρ è un' indeterminata qualunque.

Ora il determinante caratteristico $\Delta(\rho)$ relativo alle $X_1 f \ldots X_r f$ è

$$\Delta(\rho) = \left| e_{sk} - \varepsilon_{sk}\rho \right| ,$$

quello $\Delta'(\rho)$ relativo a $X'_1 f \ldots X'_r f$ è

$$\Delta'(\rho) = \left| e'_{is} - \varepsilon_{is}\rho \right|$$

e dalle (27*) segue subito che questi due determinanti sono eguali (per qualunque valore di ρ) - Infatti, se indichiamo per un momento con b_{ik} il valore comune del primo e secondo membro nelle (27), con B il determinante delle b_{ik}, con A quello delle a_{ik}, segue dalla (27*)

$$B = A\Delta(\rho) = A\Delta'(\rho)$$

e siccome $A \neq 0$

$$\Delta(\rho) = \Delta'(\rho) \quad \text{c. d. d.}$$

Dunque:

Cangiando comunque le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo G_r, il determinante caratteristico $\Delta(\rho)$ non cangia.

§ 79
I coefficienti del polinomio $\Delta(\rho)$ come invarianti del gruppo aggiunto

Le radici non nulle dell'equazione caratteristica $\Delta(\rho)=0$ sono delle funzioni (algebriche) di $e_1\, e_2 \dots e_r$ ed è facile vedere a priori, almeno quando le radici sono tutte semplici, che esse sono invarianti del gruppo aggiunto. E infatti, se ρ è una radice non nulla di $\Delta(\rho)=0$ relativa ad un G_1 generico generato da

$$Xf = \Sum e_i X_i f\,,$$

ciò vuol dire che esiste un secondo G_1' generato da una Yf tale che

$$(XY) = \rho\, Yf$$

Se trasformiamo G_1, G_1' con una medesima trasformazione T qualsiasi in G_r, le Xf, Yf si trasformeranno in $\overline{X}f$, $\overline{Y}f$ e si avrà ancora

$$(\overline{X}f\,,\,\overline{Y}f) = \rho\, \overline{Y}f$$

rimanendo ρ la stessa. Il trasformare per me-di una T equivale ad eseguire sulle e una trasformazione del gruppo aggiunto;

$$e'_i = \sum \rho_{ik} e_k,$$

onde risulta

$$\rho(e_1 e_2 \dots e_r) = \rho(e'_1 e'_2 \dots e'_r) \quad \text{c. d. d.}$$

Sviluppando il polinomio $\Delta(\rho)$ di grado r in ρ scriviamo

$$(-1)^r \Delta(\rho) = \rho^r - \psi_1(e)\rho^{r-1} + \psi_2(e)\rho^{r-2} + \dots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(e)\rho;$$

i coefficienti ψ sono funzioni razionali intere ed omogeneo delle $e_1\, e_2 \dots e_r$ e precisamente $\psi_k(e)$ sarà una forma nelle $e_1 \dots e_r$ di grado $= k$. Da quanto si è visto sopra risulta che queste forme ψ sono altrettanti invarianti del gruppo aggiunto, come funzioni simmetriche elementari delle radici. Di questa proprietà importante (trovata da Killing) diamo una dimostrazione diretta, che vale comunque siano le radici, semplici o multiple (dimostrazione di Engel) - Bisogna dunque provare che ciascun polinomio ψ è un invariante del gruppo aggiunto, che cioè soddisfa alle equazioni a derivate parziali

$$E_1\psi = 0 \quad E_2\psi = 0 \quad \dots \quad E_r\psi = 0$$

Per questo basterà provare che, restando ρ indeterminata, si ha

$$E_k \Delta(\rho) = 0 \qquad k = 1, 2 \dots r$$

indicando con

$$(28)\qquad \gamma_{ij} = e_{ij} - \rho\,\varepsilon_{ij}$$

l'elemento generico di Δ, abbiamo

$$E_k\Delta = \sum_s e_{ks}\frac{\partial\Delta}{\partial e_s} = \sum_{sij} e_{ks}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial e_s} = \sum_{sij} e_{ks}\frac{\partial e_{ij}}{\partial e_s}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}$$

cioè per la (21)

$$E_k\Delta = \sum_{sij} c_{sij}\, e_{ks}\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}} = \sum_{sij\lambda} c_{\lambda ks}\, c_{sij}\, e_\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}$$

Ma, per le relazioni quadratiche fra le c (formole (1) §24), si ha

$$\sum_s c_{\lambda ks}\, c_{sij} = \sum_s (c_{kis}\, c_{\lambda sj} + c_{skj}\, c_{\lambda is})$$

e perciò

$$E_k\Delta = \sum_{sij\lambda}(c_{kis}\, c_{\lambda sj} + c_{skj}\, c_{\lambda is})\, e_\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}} =$$

$$= \sum_{sij}(c_{kis}\, e_{sj} + c_{skj}\, e_{is})\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}$$

Questa per la (28) si scrive

$$E_k\Delta = \sum_{sij}(c_{kis}\,\gamma_{sj} + c_{skj}\,\gamma_{is})\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}} +$$

$$+\rho\sum_{sij}(c_{kis}\,\varepsilon_{sj} + c_{skj}\,\varepsilon_{is})\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}$$

Nella seconda somma il coefficiente di $\frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_{ij}}$ è

$$\sum_s(c_{kis}\,\varepsilon_{sj} + c_{skj}\,\varepsilon_{is}) = c_{kij} + c_{ikj} = 0$$

ed anche la prima s'annulla come si vede osservando che si ha

$$\sum_j \gamma_{sj} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} = \varepsilon_{is} \Delta \,, \quad \sum_i \gamma_{is} \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_{ij}} = \varepsilon_{js} \Delta \,,$$

onde la prima somma diventa

$$\sum_{is} (c_{kis}\, \varepsilon_{is} + c_{ski}\, \varepsilon_{is}) \Delta = \sum_i (c_{kii} + c_{iki}) \Delta = 0$$

Dunque si ha $E_k \Delta = 0 \quad (k = 1, 2 \ldots r)$ c. d. d.

Abbiamo quindi il teorema:

I coefficienti $\psi_1(e)$, $\psi_2(e)$ - - - - $\psi_{r-1}(e)$ dell'equazione caratteristica sono altrettanti invarianti del gruppo aggiunto.

§ 80

Composizione (struttura) di un gruppo

Ci sarebbe impossibile sviluppare le numerose ed importantis conseguenze che derivano per la teoria generale dei gruppi continui dalla formazione dell'equazione caratteristica. Esse formano un ampio capitolo della teoria che trovasi sviluppata (con molte lacune nelle dimostrazioni) da Killing in tre successive memorie nei Math. Annalen (*), indi da Umlauf e Cartan nelle loro dissertazioni (**)

(*) Bd 31, 33, 35.

(**) Umlauf - Ueber die Zusammensetzung der endli-

Ci limiteremo qui ad accennare alla classificazione che Killing ne ha tratto per i gruppi continui. Ma prima diciamo del significato dato da Lie al termine di composizione o struttura (Zusammensetzung) di un gruppo – La parte maggiore e più importante delle proprietà di un gruppo G_r generato da r trasformazioni infinitesime

$$X_1 f,\ X_2 f \ldots X_r f$$

si trova dipendere unicamente dai valori delle costanti c_{iks} nelle relazioni fondamentali

$$(29)\qquad (X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

Così p. e. il gruppo aggiunto di G_r, l'esistenza dei sottogruppi di G_r e la loro divisione in tipi, le varie serie di composizione ed i loro indici dati dalle differenze

$$r - r_1,\ r_1 - r_2 \ldots$$

dipendono unicamente, come abbiamo visto, dalle costanti c_{iks} – Lie indica col nome di composizione del gruppo il complesso di quelle proprietà che dipendono solo dalle c_{iks}, e parla quindi di un gruppo di composizione (c_{iks}) – Bisogna subito osservare che vi sono infiniti sistemi di valori per le c_{iks} determinanti la medesima composizione, poichè questi valori dipendono dalle r trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f$

---

chen continuierlichen Transformationsgruppen (Leipzig 1891) –

Cartan – Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Paris – 1894) –

.... $X_r f$ scelte come generatrici del gruppo. Se cangiamo queste (come al § 78) con una sostituzione lineare

$$(30) \qquad X'_k f = \sum_i a_{ki} X_i f \qquad (k=1, 2 \dots r)$$

dove le costanti a_{ki} debbono solo avere un determinante $|a_{ki}| \neq 0$, ed indichiamo con c'_{iks} i valori delle costanti $\underline{c}$ relative alle $X'_i f$, le composizioni (c_{iks}) (c'_{iks}) sono identiche – È facile scrivere le formole che esprimono (linearmente ed omogeneamente) le c' per le c. Avendosi infatti

$$(X'_i X'_k) = \sum_s c'_{iks} X'_s f$$

ed esprimendo le X' per le X colle (30), risulta

$$\left(\sum_j a_{ij} X_j f, \sum_\lambda a_{k\lambda} X_\lambda f\right) = \sum_s c'_{iks} \sum_\mu a_{s\mu} X_\mu f,$$

ossia

$$\sum_{j,\lambda} a_{ij} a_{k\lambda} (X_j, X_\lambda) = \sum_{j,\lambda,\mu} a_{ij} a_{k\lambda} c_{j\lambda\mu} X_\mu f =$$
$$= \sum_{s,\mu} c'_{iks} a_{s\mu} X_\mu f$$

e quindi

$$(31) \qquad \sum_s^{1\dots r} a_{s\mu} c'_{iks} = \sum_{j\lambda}^{1\dots r} a_{ij} a_{k\lambda} c_{j\lambda\mu}$$

$$i, k, \mu = 1, 2 \dots r$$

Se si indica con α_{ik} il complemento algebrico di a_{ik} nel determinante A delle a, diviso per A stesso, le precedenti, risolute rispetto alle c', danno

$$(32) \qquad c'_{ikl} = \sum_{j,\lambda,\mu} a_{ij} a_{k\lambda} \alpha_{l\mu} c_{j\lambda\mu}$$

che sono le formole cercate –

§ 81
Le relazioni fra le c e le c' come individuanti un gruppo

Sussiste ora la seguente notevole proprietà:
Se nelle formole (32) riguardiamo le c'_{iks} non più come costanti, ma come r^3 variabili indipendenti, le formole stesse danno un gruppo di sostituzioni lineari omogenee su queste r^3 variabili cogli r^2 parametri a_{ik} —

Si tratta dunque di provare che se si passa dalle c' alle c'' con una trasformazione come la (31) coi nuovi parametri b_{ik}, sia

$$(33) \qquad \sum_l b_{ls}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{i,k} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, c'_{iks}$$

eliminando le c' fra le (31) (33) si otterranno relazioni della forma

$$(34) \qquad \sum_l \gamma_{l\mu}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{j\lambda} \gamma_{\alpha j}\, \gamma_{\beta\lambda}\, c_{j\lambda\mu}$$

dove le costanti γ_{ik} dipendono solo dalle a, b.

Per dimostrarlo si moltiplichi la (33) per $a_{s\mu}$ e si sommi rispetto ad s; ne risulta per la (31)

$$\sum_{s,l} a_{s\mu}\, b_{ls}\, c''_{\alpha\beta l} = \sum_{iks} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, a_{s\mu}\, c'_{iks} =$$

$$= \sum_{ikj\lambda} b_{\alpha i}\, b_{\beta k}\, a_{ij}\, a_{k\lambda}\, c_{j\lambda\mu}\,,$$

che si può scrivere

$$\sum_l c''_{\alpha\beta l}\left(\sum_s a_{s\mu} b_{ls}\right) = \sum_{j\lambda}\left(\sum_i a_{ij} b_{\alpha i}\right)\left(\sum_k a_{k\lambda} b_{\beta k}\right) c_{j\lambda\mu}$$

e basta porre

$$\gamma_{l\mu} = \sum_s a_{s\mu} b_{ls}$$

per dedurne appunto la (34)

$$\sum_l \gamma_{l\mu} c''_{\alpha\beta l} = \sum_{j\lambda} \gamma_{\alpha j} \gamma_{\beta\lambda} c_{j\lambda\mu}$$

Supponiamo ora che le c_{iks} siano legate dalle equazioni (I) § 24

$$(I)\begin{cases} c_{iks} + c_{kis} = 0 \\ \sum_s^{1\dots r} \left(c_{iks} c_{sj\lambda} + c_{kjs} c_{si\lambda} + c_{jis} c_{sk\lambda}\right) = 0\,; \end{cases}$$

è facile vedere che anche le c' definite dalle (31) o (32) soddisferanno le medesime equazioni (I) - E invero, pel terzo teorema fondamentale, soddisfacendo le c alle (I), esiste un gruppo

$$G_r = (X_1 X_2 \dots X_r)$$

di composizione (c_{iks}) - Ma sostituendo alle $X_i f$ le $X'_i f$ colle (30) le c diventano le c'; queste soddisfano perciò le (I) -

Dunque: Il gruppo continuo sulle c_{iks} definito dalle (31) trasforma in se medesimo il sistema (I)

Se interpretiamo le c_{iks} come r^3 variabili omogeneo in uno spazio lineare S_{r^3-1}, le (I) definiscono una certa varietà che indichiamo con V e l'osservazione fatta equivale a dire che il gruppo Γ_{r^2} di collineazioni (31), a r^2 parametri, trasforma in sè medesima questa varietà V che è adunque invariante rispetto a Γ_{r^2}. -

Ogni punto P di questa varietà V rappresenta una composizione di un gruppo a r parametri; due punti rappresenteranno la medesima composizione quando siano equivalenti rispetto a Γ_{r^2}.

Per determinare adunque tutte le possibili composizioni dei gruppi a r parametri basterà definire entro V le varietà minime invarianti rispetto a Γ_{r^2}; di ciascuna di queste varietà si prenda un punto e si avranno così tutte le possibili composizioni cercate - Siccome del gruppo Γ_{r^2} si hanno le equazioni (32) in termini finiti applicando i risultati del § 45, vediamo che: La determinazione di tutte le possibili composizioni dei gruppi a r parametri si fa con sole operazioni algebriche.

§ 82
Genere di un gruppo

Ritorniamo ora alla equazione caratteristica. Essa dipende unicamente dalla composizione del gruppo (§ 78) e così le radici stesse della equazione, il loro grado di moltiplicità, la caratteristica che riceve per ognuna di esse il determinante $\Delta(\rho)$ ecc. sono tutti elementi inerenti alla composizione del gruppo. Killing ha fissato particolarmente l'attenzione sui coefficienti

$$\psi_1(e)\ ,\ \psi_2(e)\ \ldots\ldots \psi_{r-1}(e)$$

di $\Delta(\rho)$ che sono forme nelle $e_1\, e_2 \ldots e_r$ e danno altrettanti invarianti del gruppo aggiunto - Fra questi (particolari invarianti) del gruppo aggiunto ve ne sarà un certo numero, diciamo p, di indipendenti - Il numero p si chiama il genere del gruppo (Rang secondo Killing). Dunque: Il genere p di un gruppo è il numero delle funzioni indipendenti nella serie

$$\psi_1(e)\ .\ \psi_2(e)\ \ldots\ldots \psi_{r-1}(e)\,.$$

Naturalmente il genere di un gruppo non può superare il numero totale degli invarianti del gruppo aggiunto, cioè delle soluzioni indipendenti del sistema

$$E_1 f = 0 \quad E_2 f = 0 \quad \ldots\ldots E_r f = 0$$

Se la caratteristica del determinante delle e_{ik} cioè di $\Delta(0)$ è $= q$, quest'ultimo numero è precisamente $r-q$, onde

$$p \leq r-q$$

D'altronde essendo nulli in $\Delta(0)$ tutti i minori d'ordine $q+1$ e superiori, si ha evidentemente

$$\psi_{q+1}(e)=0, \;\ldots\; \psi_{r-2}(e)=0, \; \psi_{r-1}(e)=0$$

onde l'equazione caratteristica ha almeno $r-q$ radici nulle. Ne segue:

Il genere di un gruppo non può superare il numero delle radici nulle nell'equazione caratteristica.

Meritano particolare menzione i gruppi di genere zero; essi sono caratterizzati dalla proprietà seguente: Un gruppo è di genere zero allora ed allora soltanto quando tutti i suoi sottogruppi a due parametri sono Abeliani.

Difatti l'essere il gruppo di genere zero significa che tutti i coefficienti

$$\psi_1(e), \; \psi_2(e) \;\ldots\; \psi_{r-1}(e)$$

di $\Delta(\rho)$ sono zero e l'equazione caratteristica ha quindi l'unica radice $\rho=0$ — Ora prendiamo in G_r un sottogruppo qualunque a due parametri — Scegliendo convenientemente le due trasformazioni generatrici X_1f, X_2f di questo G_2, la sua composizione è data (§ 76) da

$$(X_1X_2)=\rho X_2f$$

dove $\rho=0$ se il gruppo G_2 è Abeliano e $\rho\neq0$ nel caso contrario — In ogni caso ρ è una radice dell'equazione caratteristica relativa ad X_1f e per ciò è sempre $\rho=0$ quando il gruppo è di genere zero — L'inversa è pure evidente.

Secondo Umlauf i gruppi di genere zero sono sempre integrabili; non viceversa per ogni gruppo integrabile è zero il genere, ma se ciò non è pel gruppo ha luogo almeno pel suo gruppo derivato che possiede al massimo $r-2$ parametri.

Accenniamo da ultimo alle importanti ricerche di Killing sui gruppi semplici, confermate poi ed in parte rettificate da Cartan - Egli ha trovato che all'infuori di quattro grandi classi di gruppi semplici (projettivi) scoperti da Lie (e di cui tratteremo nel seguito di questi studî), nei quali il numero dei parametri resta indeterminato, esistono solo cinque gruppi semplici rispettivamente con

$$14\ ,\ 52,\ 78,\ 133,\ 248$$

parametri -

Qui limitiamoci ad osservare che la ricerca dei gruppi semplici G_r a $\underline{r}$ parametri si riduce immediatamente a quella dei gruppi Γ_r semplici di sostituzioni lineari omogenee a $\underline{r}$ variabili, cioè dei gruppi projettivi semplici a $\underline{r}$ parametri nell' S_{r-1}. - Infatti il gruppo aggiunto di un gruppo semplice ha necessariamente tanti parametri quanti il gruppo ed è quindi un Γ_r, poichè un G_r semplice non ha sottogruppi invarianti e tanto meno un sottogruppo commutativo (cf. § 67)

Capitolo VIII°

Prime ricerche sulla simiglianza dei gruppi - Trasformazioni permutabili con tutte le trasformazioni di un gruppo - Gruppi semplicemente transitivi reciproci -

§ 83

Simiglianza dei gruppi

Abbiamo già definito al paragrafo 9 la simiglianza di due gruppi - Due gruppi G_r, Γ_r, sullo stesso numero n di variabili $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, $(y_1\, y_2 \ldots y_n)$ e collo stesso numero r di parametri, le cui equazioni finite siano rispettivamente

$$x'_i = f_i(x_1, x_2 \ldots x_n\,;\, a_1 \ldots a_r)$$
$$y'_i = \varphi_i(y_1, y_2 \ldots y_n\,;\, b_1 \ldots b_r)$$

si dicono simili quando è possibile, ponendo i parametri b uguali a certe funzioni dei parametri a, di trovare poi una trasformazione sulle variabili

$$x_i = \theta_i(y_1\, y_2 \cdots y_n)$$
$$x'_i = \theta_i(y'_1\, y'_2 \cdots y'_n)$$

tale che le equazioni finite dell'un gruppo si trasformino in quelle dell'altro –

Stabilire i criterii per riconoscere la simiglianza di due gruppi è, come si intende, un problema fondamentale della nostra teoria che conviene saper risolvere – Intanto si può cominciare dal semplificare grandemente il problema, riportando la questione dalle equazioni finite dei due gruppi alle loro rispettive trasformazioni infinitesime generatrici

Siano

$$\text{per } G_r \ldots\ldots X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1,2\ldots r)$$

$$\text{per } \Gamma_r \ldots\ldots Y_k f = \sum_i^{1\ldots n} \eta_{ki}(y)\frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (k=1,2\ldots r)$$

le rispettive trasformazioni infinitesime generatrici – Se la trasformazione

$$T) \qquad x_i = \theta_i(y_1\, y_2 \cdots y_n)$$

sulle varie lili cangia G_r in Γ_r, dovrà cangiare ogni sottogruppo G_1 ad un parametro dell'uno in un analogo sottogruppo Γ_1 dell'altro e per ciò la trasformazione infinitesima generatrice di G_1 in quella di Γ_1 – e ne segue che per la T ogni trasformazione $X_k f$ deve mutarsi in una combinazione lineare $\sum^{r}_{1} f$ a coefficienti costanti di $Y_1 f \ldots Y_r f$

diciamo

$$(\alpha) \qquad Z_k f = \sum_j^{1\dots r} a_{kj} X_j f ,$$

dove il determinante $|a_{kj}|$ sarà $\neq 0$ - Viceversa se la T cangia ogni $X_k f$ in una $Z_k f$, data dalle (α), cangierà anche ogni sottogruppo G_1 di G_r in un sotto-gruppo Γ_1 di Γ_r e quindi G_r in Γ_r, come si vede subito paragonando le equazioni canoniche dei due gruppi - Abbiamo dunque intanto:

Affinchè i due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r) \qquad X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r) \ , \quad Y_k f = \sum_i \eta_{ki}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

siano simili, è necessario e sufficiente che esista una trasformazione

$$T) \qquad x_i = \theta_i(y_1 y_2 \dots y_n)$$

che cangi le r trasformazioni infinitesime $X_k f$ di G_r, in r trasformazioni infinitesime $Z_k f$ di Γ_r, combinazioni lineari delle $Y_i f$.

Se esiste una tale trasformazione T e si suppone

$$(X_i X_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} X_s f$$

sarà anche

$$(Z_i Z_k) = \sum_s^{1\dots r} c_{iks} Z_s f ;$$

per conseguenza i due gruppi G_r, Γ_r sono certo di eguale composizione -

Dunque: Condizione necessaria (non sufficiente perchè due gruppi siano simili è che siano egualmente composti —

La prima cosa da farsi per decidere della simiglianza di due gruppi è di riconoscere se essi sono egualmente composti, ciò che si fa con sole operazioni algebriche. Il problema è infatti questo di determinare, se sarà possibile, le r^2 costanti a_{ik} delle (d) in guisa che le $Z_1 f \dots Z_r f$ offrano la medesima composizione di $X_1 f \dots X_r f$ —

Se supponiamo

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f$$

$$(Y_i Y_k) = \sum_s \gamma_{iks} Y_s f.$$

(*) Che la condizione non sia sufficiente lo dimostra il seguente semplice esempio — I due gruppi

$$G_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \qquad \Gamma_2 \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

sono egualmente composti (Abeliani) — Ma le loro equazioni in termini finiti

$$G_2) \begin{cases} x_1' = x_1 + a_1 \\ x_2' = x_2 + a_2 \end{cases} \qquad \Gamma_2) \begin{cases} x_1' = x_1 + b_2 x_2 + b_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases}$$

fanno subito vedere che non sono simili perchè pel secondo si ha il sistema invariante delle rette $x_2 = \text{cost.}$ mentre pel primo non si ha un tale sistema di linee.

Del resto senza ricorrere alle equazioni in termini finiti, si rileva dalle loro trasformazioni infinitesime che il primo è transitivo, il 2° intransitivo, ciò che esclude la simiglianza.

il calcolo eseguito al § 80 dà per le incognite a_{ki} le r^3 equazioni

$$\sum_{j\lambda}^{1\dots r} a_{ij}\, a_{k\lambda}\, \gamma_{j\lambda\mu} = \sum_{s}^{1\dots r} a_{s\mu}\, c_{iks}$$

$$(i, k, \mu = 1, 2 \dots r)$$

È questo sistema di equazioni (quadratiche) nelle a che converrà discutere per risolvere la nostra questione preliminare -

È potrà darsi che il sistema sia assurdo, ovvero determini le a, o ne lasci un certo numero indeterminato -

Dopo ciò il problema è ridotto evidentemente al seguente:

A) Dati due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$$
$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r)$$

rispettivamente sulle variabili $x_1\, x_2 \dots x_n$; $y_1\, y_2 \dots y_n$, che siano egualmente composti:

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f \qquad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f\,,$$

riconoscere se esiste una trasformazione

$$T) \qquad x_i = \theta_i(y_1 \dots y_n)$$

che cangi le $X_1 f \dots X_r f$ rispettivamente in $Y_1 f \dots Y_r f$.

§ 84
Caso in cui la condizione d'eguale composizione è sufficiente

Vi ha un caso molto importante e semplice nel quale basta l'eguaglianza di composizione per concludere la simiglianza dei gruppi, nel quale cioè la risposta al problema A) testè enunciato è sempre affermativa -

Basta per ciò che per l'uno e per l'altro gruppo la dimensione della varietà minima invariante relativa ad un punto qualunque dello spazio eguagli il numero r dei parametri, che cioè le due matrici

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11}(x), & \xi_{12}(x) & \dots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x), & \xi_{22}(x) & \dots & \xi_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1}(x), & \xi_{r2}(x) & \dots & \xi_{rn}(x) \end{Vmatrix} , \quad \begin{Vmatrix} \eta_{11}(y) & \dots & \eta_{1n}(y) \\ \eta_{21}(y) & \dots & \eta_{2n}(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{r1}(y) & \dots & \eta_{rn}(y) \end{Vmatrix}$$

per valori generici delle x e delle y abbiano per caratteristica r (§ 46) - Ciò richiede naturalmente che sia $n \geq r$.

Bisogna dunque mostrare che in tale caso, e supposte soddisfatte le condizioni di eguale composizione enunciate in A):

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f \quad , \quad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f ,$$

esiste una trasformazione

$$(1)\qquad y_i = \Phi_i(x_1 x_2 \dots x_n)$$

che cangia le $X_k f$ nelle $Y_k f$.

Siccome trasformando risulta

$$X_k f = \sum_i^{1\dots n} X_k(\Phi_i)\frac{\partial f}{\partial y_i},$$

e d'altronde

$$Y_k f = \sum_i^{1\dots n} \eta_{ki}(y)\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_i^{1\dots n} Y_k(y_i)\frac{\partial f}{\partial y_i},$$

ne segue che la (1) trasformerà le $X_k f$ nelle $Y_k f$ solo quando in forza delle (1) sussistano identicamente le relazioni

$$(2)\qquad X_k(\Phi_i) - Y_k(y_i) = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Ora se, indicando con F una funzione qualunque delle x e delle y, poniamo

$$\Omega_k F = X_k F + Y_k F,$$

abbiamo

$$\Omega_k(\Phi_i - y_i) = X_k(\Phi_i) - Y_k(y_i)$$

e le (2) ~~(1)~~ equivalgono quindi alle

$$(2^*)\qquad \Omega_k(\Phi_i - y_i) = 0$$

Questo significa (§ 42) che il sistema di equazioni (1) nelle $2n$ variabili x, y deve ammettere le r trasformazioni infinitesime

$$\Omega_1 F,\ \Omega_2 F \dots\dots \Omega_r F$$

Queste d'altronde, a causa delle relazioni di composizione

$$(\Omega_i \Omega_k) = \sum_s c_{iks}\Omega_s f,$$

generano un gruppo G_r in quelle $2n$ variabili.
Possiamo dunque dire che la trasformazione (1) cangierà le $X_k f$ nelle $Y_k f$ solo quando le (1) nello spazio $S_{2n} \equiv (x_1\, x_2 \dots x_n;\, y_1\, y_2 \dots y_n)$ rappresentino una varietà V_n invariante rispetto al gruppo

$$G_r \equiv (\Omega_1\, \Omega_2 \dots \Omega_r)$$

Siccome la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} & \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} & \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \dots & \xi_{rn} & \eta_{r1} & \eta_{r2} & \dots & \eta_{rn} \end{Vmatrix}$$

nei punti della varietà (1) che cerchiamo deve essere di caratteristica r (poichè in quei punti sono di caratteristica $\underline{r}$ le matrici parziali $|\xi_{ik}|$, $|\eta_{ik}|$ ed in quei punti nè le x sono legate fra loro nè le y), se applichiamo il teorema alla fine del § 47, vediamo che le equazioni (1) debbono potersi porre sotto la forma di $\underline{n}$ relazioni fra gli invarianti di G_r – Viceversa ogni tale sistema di relazioni che sia risolubile sia rispetto alle x, sia rispetto alle y, darà una trasformazione (1) della specie voluta.

Ora gli invarianti di G_r sono le $2n-r$ soluzioni indipendenti del sistema completo

(3) $$\Omega_i F = X_i F + Y_i F = 0 \qquad (i = 1, 2 \dots r);$$

queste possono scegliersi evidentemente in guisa che le prime $n-r$

$$u_1(x)\,,\; u_2(x) \cdots\cdots u_{n-r}(x)$$

siano funzioni delle sole x, le seguenti $n-r$

$$v_1(y)\,,\; v_2(y)\,, \cdots\cdots v_{n-r}(y)$$

delle sole y, onde le r rimanenti

$$w_1(x,y)\;,\; w_2(x,y)\,. \cdots\cdots w_r(x,y)$$

contengono ciascuna necessariamente si le x che le y.

Importa poi osservare che gli n invarianti

$$u_1(x)\,,\; u_2(x) \cdots\cdots u_{n-r}(x)\;,\; w_1(x,y) \cdots\cdots w_r(x,y)$$

sono indipendenti rispetto alle n x e così

$$v_1(y)\;,\; v_2(y) \cdots\cdots v_{n-r}(y)\;,\; w_1(x,y) \cdots\cdots w_r(x,y)$$

rispetto alle n y, ossia che i determinanti funzionali

$$\frac{\partial(u_1, u_2 \cdots\cdots u_{n-r}\,, w_1 \cdots\cdots w_r)}{\partial(x_1, x_2 \cdots x_n)}$$

$$\frac{\partial(v_1, v_2 \cdots\cdots v_{n-r}\,, w_1 \cdots\cdots w_r)}{\partial(y_1\, y_2 \cdots y_n)}$$

sono ambedue diversi da zero. Per dimostrarlo basta osservare che le (3) sono risolubili rispetto ad r delle derivate $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial x_n}$ e così rispetto ad r delle derivate $\frac{\partial F}{\partial y_1} \cdots\cdots \frac{\partial F}{\partial y_n}$ - Se per fissare le idee supponiamo p. e. che lo siano rispetto a $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_r}$: si sa che le $2n$ funzioni

$$u_1\,.\; u_2 \cdots u_{n-r}\;,\; v_1\,.\; v_2 \cdots v_{n-r}\;,\; w_1\; w_2 \cdots w_r\;,\; x_1 \cdots x_r$$

sono certo indipendenti (*), ossia le $2n-r$

(*) Ricordiamo brevemente la dimostrazione - Se si avesse identicamente

lo sono rispetto a
$$u_1\, u_2 \ldots\ldots u_{n-r}\;\; v_1\, v_2 \ldots\ldots v_{n-r}\;\; w_1\, w_2 \ldots\ldots w_r$$
$$x_{r+1},\, x_{r+2} \ldots\ldots x_n\;\; y_1 \ldots\ldots y_n\,;$$
in altre parole è
$$\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots u_{n-r};\, v_1, v_2 \ldots v_{n-r};\, w_1\, w_2 \ldots w_r)}{\partial(x_{r+1} \ldots x_n \,;\, y_1\, y_2 \ldots y_n)} \neq 0.$$
Ma siccome le $\underline{u}$ dipendono solo dalle x e le $\underline{v}$ dalle sole y, questo determinante funzionale si risolve, come subito si vede, nel prodotto dei due
$$\frac{\partial(u_1, u_2 \ldots\ldots u_{n-r})}{\partial(x_{r+1} \ldots\ldots x_n)} \quad , \quad \frac{\partial(v_1\, v_2 \ldots\ldots v_{n-r}\, w_1 \ldots w_r)}{\partial(y_1\, y_2 \ldots y_n)}\,;$$
l'uno e l'altro è dunque diverso da zero, in particolare il secondo, c. d. d.

Ciò posto, dovendo pel nostro oggetto stabilire fra le u, v, w un tale sistema di $\underline{n}$ relazioni che sia risolubile tanto rispetto alle x che alle y, le proprietà sopra osservate dimostrano che esso deve potersi risol

---

$$(\beta) \qquad F(u_1 \ldots u_{n-r}\;\, v_1 \ldots v_{n-r}\;\, w_1 \ldots w_r\;\, x_1 \ldots x_r) = 0$$
applicandovi l'operazione Ω_k verrebbe
$$\Omega_k F = \sum_j^{1\ldots r} \frac{\partial F}{\partial x_j}\, \Omega_k\, x_j = \sum_j^{1\ldots r} \xi_{kj}\, \frac{\partial F}{\partial x_j}$$
$$k = 1, 2 \ldots\ldots r$$
e poichè per ipotesi $\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdots & \xi_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \cdots & \xi_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, sarebbero nulle $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial F}{\partial x_r}$, cioè la (β) legherebbe le
$$u,\; v,\; w$$
che sono invece indipendenti.

vere tanto rispetto alle v, w che alle u, w.(*)

Il sistema di equazioni richieste avrà dunque la forma

$$(1.)\begin{cases} v_1 = \theta_1(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}),\ v_2 = \theta_2(u_1 \dots u_{n-r}) \dots\dots v_{n-r} = \theta_{n-r}(u_1 \dots u_{n-r}) \\ w_1 = \psi_1(u_1 \dots\dots u_{n-r}),\ w_2 = \psi_2(u_1 \dots u_{n-r}) \dots\dots w_r = \psi_r(u_1 \dots u_{n-r}), \end{cases}$$

dove le funzioni $\theta_1\ \theta_2 \dots \theta_{n-r}$ sono $n-r$ funzioni <u>indipendenti</u> degli argomenti $\underline{u}$ (**), mentre le ψ sono affatto arbitrarie –

Così è dimostrato in effetto l'esistenza di trasformazioni (4) che cangiano le $X_k f$ nelle $Y_k f$; come si vede, la loro forma generale (4) contiene n funzioni arbitrarie –

(*) Se le dette relazioni fra le u, v, w sono

$$F_i(u,\ v,\ w) = 0$$
$$i = 1,\ 2 \dots n$$

perchè il sistema sia risolubile p. e. rispetto alle x bisogna che sia

$$\frac{\partial(F_1\, F_2 \dots F_n)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)} \neq 0\ ;$$

ma questo determinante è il prodotto dei due

$$\frac{\partial(F_1\, F_2 \dots F_n)}{\partial(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}\, w_1 \dots w_r)}\ ,\quad \frac{\partial(u_1\, u_2 \dots u_{n-r}\, w_1 \dots w_r)}{\partial(x_1\, x_2 \dots x_n)}$$

onde il primo deve essere $\neq 0$ come il secondo.

(**) Le θ debbono essere indipendenti affinchè il sistema (4) sia risolubile rispetto alle u, w.

§ 85
Caso dei gruppi Abeliani e dei gruppi semplicemente transitivi

Alcuni casi particolari del risultato generale sopra ottenuto meritano di essere specialmente rilevati – In primo luogo il caso in cui tutte le costanti c_{iks} di composizione del gruppo sono nulle, cioè il gruppo è Abeliano (§ 59), mentre di più la matrice $\|\xi_{ik}(x)\|$ è di caratteristica r. Quest'ultima condizione si può enunciare in altro modo dicendo che fra $X_1f, X_2f \ldots X_rf$ non sussiste alcuna identità lineare nemmeno con coefficienti funzioni delle x – Si ha quindi il teorema:

Ogni gruppo G_r Abeliano a r parametri, sopra n variabili x, fra le cui trasformazioni infinitesime generatrici

$$X_1f,\ X_2f \ldots\ldots X_rf$$

non sussista alcuna identità lineare

$$\chi_1 X_1f + \chi_2 X_2f + \ldots\ldots + \chi_r X_rf = 0,$$

a coefficienti χ funzioni delle variabili x, è simile al gruppo di traslazioni

$$\Gamma_r \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f}{\partial y_n}\right)$$

Un altro caso molto importante è quello in cui i due gruppi G_r, Γ_r siano semplicemente transitivi cioè $r=r$.

Conviene enunciare esplicitamente per questo caso i risultati del paragrafo precedente nel teorema:

Due gruppi G_n, Γ_n semplicemente transitivi ed egualmente composti in $\underline{n}$ rispettive variabili $(x_1\, x_2 \ldots x_n)$, $(y_1\, y_2 \ldots y_n)$ sono sempre simili. Se facendo corrispondere le n trasformazioni infinitesime generatrici di G_n

$$X_1 f\,,\, X_2 f \ldots\ldots X_n f \qquad \left(X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

ordinatamente alle n

$$Y_1 f\,,\ Y_2 f \ldots\ldots Y_n f \qquad \left(Y_k f = \sum_i^{1\ldots n} \eta_{ki} \frac{\partial f}{\partial y_i}\right)$$

di Γ_n, le relative costanti di composizione sono le stesse, la più generale trasformazione che cangia $X_1 f, X_2 f \ldots X_n f$ rispettivamente in $Y_1 f, Y_2 f \ldots Y_n f$ si ottiene eguagliando ad n costanti arbitrarie le n soluzioni indipendenti

$$w_1(x, y)\ ,\ w_2(x, y) \ldots\ldots w_n(x, y)$$

del sistema completo

$$\Omega_i F = X_i F + Y_i F = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

§ 86

Condizioni generali necessarie per la simiglianza

Riprendiamo ora a considerare il caso generale per stabilire dapprima le condizioni necessarie per la simiglianza dei gruppi. Siano dunque

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \ldots\ldots X_r) \ , \quad X_k f = \sum_i^{1\ldots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1\, Y_2 \ldots\ldots Y_r) \ , \quad Y_k f = \sum_i^{1\ldots n} \eta_{ki}(y) \frac{\partial f}{\partial y_i}$$

due gruppi d'eguale composizione

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f \ , \quad (Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s f$$

e cerchiamo se possono esistere trasformazioni (1)

$$(1) \qquad y_i = \Phi_i (x_1\, x_2 \ldots x_n) \, ,$$

che cangino rispettivamente le $X_k f$ nelle $Y_k f$ – In primo luogo tante debbono essere le trasformazioni

$$X_1 f \, . \, X_2 f \ldots X_r f$$

assolutamente indipendenti (cioè non legate da identità lineari a coefficienti variabili) quante le corrispondenti

$$Y_1 f \, , \, Y_2 f \ldots Y_r f \, .$$

cioè le due matrici

$$\left\| \xi_{ik} \right\| \qquad \left\| \eta_{ik} \right\|$$

debbono avere la medesima caratteristica generica q.(*)

Avendo già trattato (al § 84) il caso $q = r$, supponiamo ora

$$q < r$$

(*) La stessa cosa si vede ricordando che la caratteristica q della matrice $\left\| \xi_{ik} \right\|$ dà la dimensione della varietà minima invariante rispetto a G_r, che deve manifestamente eguagliare la dimensione della varietà minima invariante rispetto a Γ_r -

e per fissare le idee supponiamo che le prime q delle X_f siano assolutamente indipendenti, mentre le seguenti

$$X_{q+1}f \;.\;.\;.\;.\;.\; X_r f$$

si esprimono per $X_1 f \ldots X_q f$ colle formole (cf. §§ 40 e 53)

$$(5) \quad X_{q+j}f = \varphi_{j1}(x) X_1 f + \varphi_{j2}(x) X_2 f + \cdots + \varphi_{jq}(x) X_q f$$
$$j = 1, 2 \ldots r-q$$

ove le $\varphi_{jk}(x)$ sono funzioni delle x.

Se esiste la trasformazione cercata saranno

$$Y_1 f, \; Y_2 f \ldots Y_q f$$

fra loro assolutamente indipendenti mentre si avrà

$$(5^*) \quad Y_{q+j}f = \psi_{j1}(y) Y_1 f + \psi_{j2}(y) Y_2 f + \cdots + \psi_{jq}(y) Y_q f$$
$$j = 1, 2 \ldots r-q$$

colle ψ funzioni delle y. — Perché la (1) cangi le X_f nelle corrispondenti Y_f è manifestamente necessario che in forza delle (1) sussistano le $q(r-q)$ relazioni

$$(6) \quad \varphi_{jk}(x_1 \ldots x_n) = \psi_{jk}(y_1 \ldots y_n)$$

$$j = 1, 2, \ldots r-q, \quad k = 1, 2 \ldots q,$$

ciò che richiede in primo luogo che queste equazioni siano fra loro compatibili e non diano luogo né a relazioni fra le sole x, né a relazioni fra le sole y —

Intanto dunque il numero delle (6) effettivamente indipendenti deve ridursi $\leq n$.

Abbiamo dunque il risultato:

B) Se esiste una trasformazione che cangia $X_1 f$, $X_2 f$ ... $X_r f$ rispettivamente in $Y_1 f$, $Y_2 f$ .... $Y_r f$ e fra le $X_1 f$ .... $X_r f$ solo le prime q sono assolutamente indipendenti mentre le rimanenti si esprimono linearmente per queste colle formole (5), lo stesso deve accadere per le $Y f$, le ultime $r-q$ delle quali dovranno esprimersi per $Y_1 f$ ... $Y_q f$ con formole come le (5*), essendo $Y_1 f$ ... ... $Y_q f$ assolutamente indipendenti. Inoltre il sistema delle $q(r-q)$ equazioni (6) dovrà costituire un sistema compatibile e non dar luogo nè a relazioni fra le sole x, nè a relazioni fra le sole y.

§ 87

Caso di due gruppi asistatici

Queste condizioni così trovate come necessarie sono in effetto anche sufficienti per l'esistenza delle cercate trasformazioni, cioè per la simiglianza dei gruppi. Ma la dimostrazione di questo risultato generale rimanderemo ad un prossimo capitolo (Cap. VIII) quando le nuove nozioni sull'isomorfismo dei gruppi permetteranno di dare alla dimostrazione stessa una forma più semplice ed intuitiva. Per ora ci limiteremo a trattare il caso in cui le (6) determinano già completamente la trasformazione stessa. Intanto cominciamo dall'osservare che, se le equazioni (6) debbono soddisfare alle condizioni enunciate, tante debbono essere le funzioni φ fra loro indipendenti quante le ψ. Il numero delle φ indipendenti serve, come sappiamo dal § 53, a distinguere se il gruppo è sistatico od asistatico, verificandosi il primo caso se questo numero è $< n$ il secondo se è $= n$ - Ciò che ora abbiamo detto equivale ad asserire che due gruppi simili sono sempre insieme sistatici od insieme asistatici ed anzi nel primo caso le varietà ~~asistatiche~~ sistatiche corrispondenti hanno la medesima dimensione; tutto ciò è geometricamente evidente -

Il caso che tratteremo per ora è quello dei gruppi asistatici, dove appunto le (6), essendo in numero di $\underline{n}$ indipendenti, determinano completamente la trasformazione. Così colla nuova ricerca, e con quella già compiuta al § 84, avremo risoluto il problema nei due casi estremi in cui le (6) si riducono ad $\underline{n}$ indipendenti o spariscono affatto, cioè i casi di due gruppi asistatici o di due gruppi sistatici in cui le varietà sistatiche hanno la dimensione dello spazio ambiente -

Supponiamo adunque soddisfatte tutte le condizioni B) del paragrafo precedente ed inoltre che i due gruppi siano asistatici, cioè le (6) si riducano ad n indipendenti; dimostriamo allora che effettivamente la trasformazione individuata dalle (6) cangierà $X_k f$ in $Y_k f$ $(k=1,2\ldots r)$.

Perciò, secondo le osservazioni fondamentali del § 84, basterà provare che il sistema di equazioni (6) ammetterà le r trasformazioni infinitesime

$$\Omega F = X_k F + Y_k F$$

ossia che le (6) trarranno le relazioni

$$\Omega_l(\varphi_{jk}) = \Omega_l(\psi_{jk})$$

Queste si scrivono infatti

$$(6^*) \qquad X_l(\varphi_{jk}) = Y_l(\psi_{jk})$$

e il calcolo già eseguito alla fine del § 54 (pag. 192) ci dimostra che i primi membri sono funzioni quadratiche delle φ dipendenti unicamente dalle costanti di composizione, onde i secondi membri sono le stesse funzioni delle ψ come i primi delle φ. Ne segue appunto che le (6*) sono conseguenze delle (6) c.d.d.

§ 88
Simiglianza di un gruppo con sè stesso

Un caso particolare importante della simiglianza di due gruppi si ottiene supponendo che questi due gruppi

$$G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)\,, \quad X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\Gamma_r \equiv (Y_1 Y_2 \dots Y_r)\,, \quad Y_k f = \sum_i^{1\dots n} \eta_{ki}(y)\frac{\partial f}{\partial y_i}$$

coincidano, che cioè le $\eta_{ki}(y)$ siano le medesime funzioni delle y come le $\xi_{ki}(x)$ delle x. In questo caso una trasformazione T che cangi G_r in Γ_r trasforma ogni trasformazione finita di G_r in un altra tale trasformazione, ossia è permutabile col gruppo G_r. Il problema di trovare tutte le trasformazioni T che pongono un gruppo in relazione di simiglianza con sè medesimo si può dunque enunciare anche in questo modo: Trovare tutte le trasformazioni T, permutabili col gruppo, ossia tutte quelle che lo trasformano in sè medesimo.

É manifesto che fra le trasformazioni cercate T figurano sempre tutte le trasformazioni del gruppo stesso; le corrispondenti permutazioni indotte sulle trasformazioni di G_r sono date allora dal gruppo aggiunto. In generale il complesso di tutte le trasformazioni T permutabili con G_r è manifestamente un gruppo che può del resto essere un gruppo Γ finito o <u>infinito</u> ed in ogni caso contiene G_r stesso come sottogruppo. Se Γ è finito si può anche dire che è il più ampio gruppo in cui G_r è contenuto come sottogruppo invariante.

La ricerca di questo gruppo Γ si può facilmente ridurre ad operazioni algebriche e all'altro problema più semplice di trovare tutte le trasformazioni singolarmente permutabili colle trasformazioni di G_r, cioè quelle che trasformano non solo G_r in sè medesimo, ma ogni singola trasformazione di G_r in sè medesima.

E infatti se una trasformazione T trasforma G_r in sè stesso, trasformerà le r sue trasformazioni infinitesime

$$X_1 f\ .\ X_2 f. \ldots\ldots X_r f$$

in altre r

$$X'_1 f,\ X'_2 f, \ldots\ldots X'_r f$$

combinazioni lineari a coefficienti costanti delle prime r; siano le formole corrispondenti le (30) del paragrafo 80

$$(1) \qquad X'_k f = \sum_i a_{ki} X_i f$$

Le $X'_1, X'_2 \ldots X'_r$ debbono innanzi tutto offrire la medesima composizione delle primitive, ciò che si esprime, ponendo nelle (3) del citato § 80 le $c'_{iks} = c_{ik}$ - Così le costanti a_{ki} debbono soddisfare le r^3 equazioni

$$(8) \qquad \sum_{s}^{1\dots r} a_{s\mu}\, c_{iks} = \sum_{j\lambda}^{1\dots r} a_{ij}\, a_{k\lambda}\, c_{j\lambda\mu}$$

$$i,\ k,\ \mu = 1,\ 2 \dots r$$

le quali ammettono, come è naturale, la soluzione $a_{ki} = \varepsilon_{ki}$ - I possibili sistemi di valori delle $\underline{a}$ si otterranno discutendo questo sistema di equazioni quadratiche, le quali, dipendentemente dalla composizione del gruppo, potranno formare una serie discreta, ovvero una serie continua, restando alcune delle $\underline{a}$ indeterminate - Preso uno di questi sistemi di valori delle $\underline{a}$, se esisterà una trasformazione T che trasformi $X_1, X_2 \dots X_r$ in $X'_1, X'_2 \dots X'_r$ (ciò che si riconoscerà applicando i criterii per la somiglianza), tutte le altre che trasformano ancora $X_1 X_2 \dots X_r$ in $X'_1, X'_2 \dots X'_r$ si otterranno evidentemente combinando la T con tutte quelle trasformazioni U che trasformano ciascuna X'_k in sè medesima, e queste U non sono altro che le trasformazioni permutabili con ogni singola di G_r - Esse formano un gruppo H finito od infinito, che può anche ridursi alla sola identità. In ogni caso H è contenuto come sottogruppo in Γ e se H è finito lo è pure Γ, il numero dei parametri di Γ eccedendo quello di H al massimo per il numero dei coefficienti a_{ki} che le (8) lasciano arbitrari –

§ 89
Trasformazioni permutabili con le singole trasformazioni di un gruppo

Come si è visto, il problema di trovare tutte le trasformazioni permutabili con un gruppo G_r si riduce essenzialmente all'altro più semplice di trovare tutte le trasformazioni permutabili con ciascuna trasformazione del gruppo. Vogliamo ora occuparci particolarmente di questo problema, la cui risoluzione dà risultati importanti per la teoria generale dei gruppi.

Il caso che interessa per la teoria dei gruppi continui è quello in cui il gruppo, sopra indicato con H, formato dalle trasformazioni permutabili colle trasformazioni di G_r è un gruppo continuo.

Sia H finito od infinito, dovrà contenere in ogni caso delle trasformazioni infinitesime e dei sottogruppi G_1 ad un parametro da queste generati. La questione fondamentale da trattarsi per lo studio del gruppo H è quindi la seguente.

Trovare tutte le trasformazioni infinitesime

$$Zf = \sum_i^{1\ldots n} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

permutabili con tutte le trasformazioni infinitesime

$$X_1 f, X_2 f \ldots X_r f$$

di G_r, che soddisfano cioè alle r equazioni (cf. §. 19) –

$$(9) \qquad (X_i, Z) = 0$$

É chiaro che se $Z_1 f$, $Z_2 f$ sono due tali trasformazioni, anche qualsiasi loro combinazione lineare a coefficienti costanti $a Z_1 f + b Z_2 f$, come anche, a causa dell'identità Jacobiana, la loro espressione alternata $(Z_1 Z_2) f$ è una delle trasformazioni stesse – Le (9) danno per determinare le incognite ζ le equazioni

$$(9^*) \qquad X_i(\zeta_k) = Z(\xi_{ik}) \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r \\ k = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

cioè le rn equazioni lineari omogenee nelle ζ e nelle loro derivate prime

$$(10) \qquad \sum_\lambda^{1\ldots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \zeta_k}{\partial x_\lambda} = \sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu} \zeta_\nu \qquad \begin{cases} i = 1, 2 \ldots r \\ k = 1, 2 \ldots n \end{cases}$$

Se delle cercate trasformazioni Zf ne esiste solo un numero finito s di linearmente indipendenti

$$Z_1 f, Z_2 f \ldots Z_s f$$

queste generano un gruppo Γ_s di trasformazioni permutabili con tutte quelle di G_r. É chiaro che Γ_s coinciderà con H, o ne sarà un sottogruppo se

H è un gruppo misto. In questo caso il sistema (10) di equazioni a derivate parziali sarà un sistema di Mayer, od equivalente ad un tale sistema.

Quando invece esistano infinite trasformazioni Zf indipendenti, nell'integrale generale delle (10) entreranno delle funzioni arbitrarie e il gruppo generato dalle Zf sarà un gruppo infinito nel senso preciso di Lie (cf. §. 36)

Nell'ipotesi che esista qualche trasformazione infinitesima Zf è facile decidere se avrà luogo il primo od il secondo dei casi ora descritti. Diciamo che vi sarà un numero finito di Z linearmente indipendenti se il gruppo G_r è transitivo, invece un numero infinito se G_r è intransitivo. Infatti se G_r è transitivo, la caratteristica della matrice

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{r1} & \xi_{r2} & \cdots & \xi_{rn} \end{Vmatrix}$$

è precisamente $= n$, onde si vede subito che le (10) danno <u>tutte</u> le derivate parziali $\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_k}$ delle ζ espresse linearmente per le ζ (oltre ad un certo numero di equazioni finite lineari nelle ζ). Si può dunque formare un sistema di equazioni ai differenziali totali per le ζ e non esisterà quindi che un numero finito s di sistemi di valori linearmente distinti per le ξ; cioè s sole trasformazioni

$$Z_1 f,\ Z_2 f \dots\dots Z_s f$$

linearmente indipendenti.

Invece se G_r è intransitivo, esso possiede certamente degli invarianti Φ; uno qualunque di essi è una funzione arbitraria di un certo numero d'invarianti fondamentali e soddisfa le equazioni

$$X_i \Phi = \sum_{\lambda}^{1\dots n} \xi_{i\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial x_\lambda} = 0$$

Ne risulta che se alle (10) si soddisfa con

$$\xi_1\ ,\ \xi_2 , \dots\dots \xi_n$$

si soddisfa anche con

$$\Phi\xi_1\ ,\ \Phi\xi_2 , \dots\dots \Phi\xi_n$$

ciò che dimostra quanto si è asserito.

Concludiamo: Se esiste qualche trasformazione infinitesima permutabile con tutte le trasformazioni infinitesime $X_1 f, X_2 f \dots\dots X_r f$ di un gruppo G_r, la più generale trasformazione infinitesima permutabile colle $X_k f$ contiene soltanto parametri ovvero funzioni arbitrarie secondo che il gruppo è transitivo od intransitivo.

Quando avremo dimostrato in generale (ciò che faremo nel Cap. VIII) che le condizioni B), trovate al § 86 come necessarie per la simiglianza di due gruppi, sono altresì sufficienti, ne discenderà subito che: Esistono o non esistono tra, sformazioni infinitesime permutabili con tutte quelle di un gruppo G_r, secondo che il gruppo è sistatico od asistatico.

L'ultima cosa risulta del resto immediatamente da quanto si è dimostrato al § 87 e può anche provarsi così. Ponendo nella identità (5) $f = \xi_k$ e ricordando che deve essere

$$X_i(\xi_k) = Z(\xi_{ik}) \qquad i=1,2\ldots n$$

abbiamo

$$Z(\xi_{q+j,k}) = \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}(x)\, X_\lambda(\xi_k)$$

o

$$Z(\xi_{q+j,k}) = \sum_{\lambda}^{1\ldots q} \varphi_{j\lambda}\, Z(\xi_{\lambda k})$$

e poichè dalla (5) si ha

$$\xi_{q+j,k} = \sum_{\lambda} \varphi_{j\lambda}\, \xi_{\lambda k}$$

la precedente diventa

$$\sum_{\lambda}^{1\ldots q} \xi_{\lambda k}\, Z(\varphi_{j\lambda}) = 0 \qquad \begin{cases} k = 1,2\ldots n \\ j = 1,2\ldots r-q \end{cases}$$

La matrice delle ξ avendo appunto la caratteristica q, le precedenti equivalgono alle

$$Z(\varphi_{j\lambda}) = 0$$

$$j = 1,2\ldots r-q \quad , \quad \lambda = 1,2\ldots q$$

cioè alle equazioni lineari nelle ξ

$$(11) \qquad \sum_{\nu}^{1\dots n} \frac{\partial \varphi_{i\lambda}}{\partial x_\nu} \xi_\nu = 0$$

Se il gruppo è asistatico vi sono n funzioni φ indipendenti e le precedenti dimostrano che si ha necessariamente

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots \dots = \xi_n = 0$$

§ 90

Gruppi semplicemente transitivi reciproci

Il caso particolare più importante dei risultati precedenti si ottiene supponendo che il gruppo $G_r \equiv (X_1 X_2 \dots X_r)$ sia semplicemente transitivo, cioè che sia $n = r$ e la matrice delle ξ_{ki} abbia per caratteristica n.

In questo caso le trasformazioni

$$(12) \qquad x_i' = f_i(x_1\, x_2 \dots x_n)$$

del gruppo H, permutabili colle singole trasformazioni di G_n, debbono cangiare le

$$X_k f = \sum^{1\dots n} \xi_{ki}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad k = 1, 2 \dots n$$

singolarmente in

$$X_k' f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x') \frac{\partial f}{\partial x_i'} \qquad k = 1, 2, \dots n$$

Secondo il teorema alla fine del § 85, tutte le cercate trasformazioni (12) si ottengono eguagliando ad altrettante costanti arbitrarie le $\underline{n}$ soluzioni indipendenti del sistema completo

$$X_k f + X'_k f = 0$$

Se diciamo

$$\Omega_1(x, x'),\ \Omega_2(x, x'), \ldots \Omega_n(x, x')$$

queste soluzioni, le n equazioni

$$(13)\quad \begin{cases} \Omega_1(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = a_1 \\ \Omega_2(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Omega_n(x_1\, x_2 \ldots x_n;\, x'_1\, x'_2 \ldots x'_n) = a_n \end{cases}$$

che sono risolubili tanto rispetto alle x' che alle x, definiscono un gruppo Γ_n di trasformazioni cogli $\underline{n}$ parametri (evidentemente essenziali) $a_1\, a_2 \ldots a_n$ ed a coppie di trasformazioni inverse. Esso è generato da $\underline{n}$ trasformazioni infinitesime

$$Z_1 f,\ Z_2 f, \ldots Z_n f$$

che possono già determinarsi dalle trasformazioni infinitesime di G_r integrando il sistema (10), che nel caso attuale è un sistema puro di equazioni di differenziali totali per le ξ, illimitatamente integrabile.

Questo gruppo $\Gamma_n \equiv (Z_1\, Z_2 \ldots Z_n)$ le cui equazioni finite sono date dalle (13) è semplicemente transitivo come G_n, poichè il numero $\underline{n}$ delle variabili eguaglia quello dei parametri $\underline{a}$, rispetto ai quali le (13) sono già risolute. Questo gruppo Γ_n dicesi il gruppo reciproco di G_n ed è chiaro che inversamente il gruppo reciproco di Γ_n è G_n. I due gruppi semplicemente transitivi reciproci G_n, Γ_n stanno fra loro nella relazione caratteristica che tutte le trasformazioni dell'uno sono permutabili con tutte quelle dell'altro.

Riepiloghiamo questi risultati nel teorema:

Se $X_1f, X_2f, \dots X_nf$ sono le n trasformazioni infinitesime generatrici di un gruppo G_n semplicemente transitivo nelle n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, le n equazioni (9*) o (10)

$$(X_i, Z) = 0$$

definiscono la trasformazione infinitesima più generale di un altro gruppo $\Gamma_n = (Z_1 Z_2 \dots Z_n)$ semplicemente transitivo che dicesi reciproco di G_n. La relazione fra i due gruppi G_n, Γ_n è involutoria, ciascuno di essi constando di tutti quei gruppi ad un parametro le cui trasformazioni sono permutabili con ogni trasformazione dell'altro gruppo.

§ 91
Proprietà delle coppie di gruppi (G_n, Γ_n) reciproci

Prima di far conoscere alcune notevoli proprietà delle coppie (G_n, Γ_n) di gruppi semplicemente transitivi reciproci dimostriamo in altro modo i risultati precedenti, per il che basta provare direttamente l'illimitata integrabilità del sistema (10) di equazioni ai differenziali totali per le ξ, che essendo il determinante $|\xi_{ik}| \neq 0$ esprimono appunto tutte le derivate delle ξ linearmente ed omogeneamente per le ξ - Per le note relazioni fra le equazioni ai differenziali totali e i sistemi di equazioni lineari omogenee a derivate parziali, se indichiamo con

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n\,;\ \xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n)$$

una funzione delle $2n$ variabili x, ξ pensate come indipendenti, l'integrazione del sistema (9*) o (10) equivale all'integrazione del seguente sistema di n equazioni a derivate parziali per la F

$$(11)\qquad B_i F = X_i F + \sum_k^{1\ldots n} \left(\sum_\nu^{1\ldots n} \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu}\, \xi_\nu \right) \frac{\partial F}{\partial \xi_k} = 0$$

$$i = 1, 2 \ldots n$$

Ora, se si tien conto dell' identità

$$(X_i, X_j) = \sum_s^{1\ldots n} c_{ijs} X_s$$

$$X_i(\xi_{jk}) - X_j(\xi_{ik}) = \sum_s c_{ijs}\,\xi_{sk}$$

dalla quale derivando rapporto a x_ν risulta

$$X_i\left(\frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_\nu}\right) - X_j\left(\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\nu}\right) + \sum_\lambda\left(\frac{\partial \xi_{i\lambda}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_{jk}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial \xi_{j\lambda}}{\partial x_\nu}\frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x_\lambda}\right) =$$

$$= \sum_s c_{ijs}\frac{\partial \xi_{sk}}{\partial x_\nu},$$

si trova subito che le operazioni $B_i f$ dei primi membri delle (11) soddisfano, come le $X_i f$, alle relazioni

$$(12) \qquad (B_i\,.\,B_j) = \sum_s c_{ijs} B_s f$$

Il sistema (11) è dunque completo, quindi il sistema (10) illimitatamente integrabile –

Osserviamo di passaggio che il verificarsi delle (12) prova che le n trasformazioni infinitesime $B_i f$ nelle $2n$ variabili x, ξ generano un gruppo $\mathcal{G}_n$ nello spazio S_{2n} di queste variabili; in esso la varietà

$$\xi_1 = 0\,, \quad \xi_2 = 0\,, \ldots\ldots \xi_n = 0$$

è invariante e sui punti di questa varietà il gruppo $\mathcal{G}_n$ agisce secondo il gruppo G_n – Il gruppo intransitivo $\mathcal{G}_n$ possiede n invarianti, che possono assumersi lineari ed omogenei nelle ξ, ed eguagliandoli ad altrettante costanti se ne traggono i valori cercati delle ξ –

Veniamo ora alle accennate proprietà dei gruppi G_n, Γ_n reciproci, cominciando dal dimostrare il notevole teorema:

Due gruppi semplicemente transitivi reciproci sono sempre simili.

In ordine ai risultati del § 85, basterà per ciò provare che si possono scegliere le loro trasformazioni infinitesimali in guisa che i due gruppi offrano uguale composizione. In un punto generico dello spazio, essendo nelle notazioni del § 38: $r_0 = n$ le trasformazioni generatrici di G_n sono tutte di ordine zero; sia $(x_1^{(0)} x_2^{(0)} \dots x_n^{(0)})$ un tale punto e per semplificare la scrittura poniamo senz'altro che questo punto sia l'origine. Sviluppando le relative trasformazioni infinitesime in serie per le potenze delle x, avremo, ponendo in evidenza i termini di grado zero ed uno,

$$\overset{V}{X}_i f = \sum_k^{1\dots n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{k,l}^{1\dots n} b_{ikl}\, x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

e il determinante delle a_{ik} sarà per ipotesi diverso da zero.

Cangiando le $X_i f$ in $\underline{n}$ loro convenienti combinazioni lineari si potrà porre

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k,l} b_{ikl}\, x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

Poichè nell'origine il determinante delle $\xi_{i\lambda}$ è $\neq 0$, le equazioni ai differenziali totali (10) per le ξ permettono di assegnare ad arbitrio per le ξ i valori iniziali. Prendiamo allora per la $\overset{\nu}{Z}_i f$

$$\left.\begin{array}{c}\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0 \\ \xi_i = -1\end{array}\right\} \text{per } x_k = 0$$

ed avremo

$$\overset{\nu}{Z}_i f = -\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k,l} \beta_{ikl}\, x_k \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

Ma si deve avere identicamente

$$(X_i\, \overset{\nu}{Z}_j) = 0 \qquad i, j = 1, 2 \dots n$$

e scrivendo solo i termini costanti è

$$(X_i\, Z_j) = \sum_l (\beta_{jil} + b_{ijl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots ;$$

dunque

$$(13) \qquad \beta_{jil} = -b_{ijl}$$

D'altra parte si ha anche

$$(14) \qquad (X_i\, X_k) = \sum_l (b_{kil} - b_{ikl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

$$(\overset{\nu}{Z}_i\, \overset{\nu}{Z}_k) = \sum_l (\beta_{ikl} - \beta_{kil}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots .$$

la quale ultima per la (13) può scriversi

$$(15) \qquad (Z_i\, Z_k) = \sum_l (b_{kil} - b_{ikl}) \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

Supponendo ora

$$(X_i\, X_k) = \sum_l c_{ikl} X_l f = \sum_l c_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

$$(Z_i\, Z_k) = \sum_l c'_{ikl} Z_l f = -\sum_l c'_{ikl} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \dots$$

e paragonando colle (14), (15) si ottiene subito

$$c'_{ikl} = c_{ikl}$$

Dunque i due gruppi G_n, Γ_n sono egualmente composti c.d.d. —

Osserviamo ora che una trasformazione comune a G_n, Γ_n è permutabile con ciascuna trasformazione sì di G_n che di Γ_n, e viceversa una trasformazione di G_n permutabile con ogni altra di G_n trovasi in Γ_n. Dunque:

Le trasformazioni comuni a due gruppi semplicemente transitivi reciproci formano il sottogruppo commutativo dell'uno e dell'altro gruppo.

Evidentemente poi eseguendo una qualsiasi trasformazione sulle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ su cui operano G_n, Γ_n questi si cangiano nuovamente in una coppia di gruppi reciproci — In particolare si ha il teorema:

Tutte le trasformazioni che cangiano in sè medesimo il gruppo semplicemente transitivo G_n (che sono permutabili con G_n) cangiano pure in se stesso il gruppo reciproco Γ_n.

Segue di qui che il più ampio gruppo sulle variabili x che contiene G_n come sottogruppo invariante è anche il più ampio che contenga Γ_n — In ogni caso questo gruppo conterrà come sottogruppo il prodotto (§ 64) dei due G_n, Γ_n; quest'ultimo ha $2n-\mu$ parametri se μ è il numero dei parametri del sottogruppo commutativo di G_n (o di Γ_n).

§ 92

Costruzione diretta del gruppo reciproco Γ_n

Al gruppo reciproco Γ_n di un gruppo G_n semplicemente transitivo si può arrivare con considerazioni dirette, intuitive e molto semplici nel modo seguente.

Dato un gruppo G_n semplicemente transitivo nell' $S_n \equiv (x_1 x_2 \ldots x_n)$ proponiamoci di studiare la totalità di quelle trasformazioni γ che sono permutabili con qualsiasi trasformazione di G_n. Fissiamo nello spazio un punto O qualunque ma in posizione generale rispetto al gruppo, cioè in modo che la dimensione della minima varietà invariante relativa ad O abbia il valore generico $\underline{n}$, ossia in modo che O sia portato da G_n in tutti i punti di un intorno ad $\underline{n}$ dimensioni di O.(*)

Indichiamo con O' il punto in cui O è trasportato da γ, ciò che esprimiamo simbolicamente scrivendo

$$(\alpha) \qquad O(\gamma) \equiv O'$$

Essendo P un punto qualunque nell'intorno di O, sia P' il punto in cui γ lo trasporta, ossia

$$(\beta) \qquad P(\gamma) \equiv P'$$

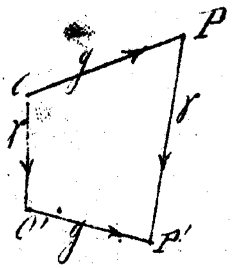
(*) Basta perciò che in O non si annulli il determinante delle $|\xi_{ik}|$ (§ 46) -

Nel gruppo G_n semplicemente transitivo vi è una trasformazione g che trasporta O nel punto P nel suo intorno, cioè

$$O(g) \equiv P$$

e quindi per la (β)

$$O(g\gamma) \equiv P(\gamma) \equiv P'$$



Ma essendo per ipotesi γ permutabile con g, si può scrivere

$$O(\gamma g) \equiv P'$$

ossia per la (α)

$$O'(g) \equiv P'$$

Dunque la trasformazione γ è perfettamente determinata quando sappiamo in quale punto O' trasporta O, giacchè allora trasporterà un punto qualsiasi P (nell'intorno di O) in quel punto P' che nasce da O' per quella determinata trasformazione g di G_n che trasporta O in P.

Viceversa prendiamo una coppia O, O' arbitraria (generica) di punti in S_n e stabiliamo una corrispondenza fra i punti dell'intorno di O e quelli dell'intorno di O' con questa legge che ad un punto P in cui è trasportato O da una g qualunque di G_n:

$$P \equiv O(g)$$

facciamo corrispondere il punto

$$P' \equiv O'(g),$$

così P occuperà tutte le posizioni dell'intorno di O e P'

tutte quelle dell'intorno di O'.

Quella trasformazione γ che porta ogni punto P nel corrispondente P' sarà permutabile con ogni g in G_n. Per dimostrarlo basta osservare che se (P, P') (Q, Q') sono due coppie qualunque di punti corrispondenti, che nascono da (O, O') colle rispettive trasformazioni g, g_1 di G_n, si passa ancora dalla coppia (P, P') alla (Q, Q') colla trasformazione $g^{-1}g_1$ di G_n, sicché partendo p. e. da (P, P') in luogo che da (O, O') si stabilisce ancora la medesima corrispondenza. È evidente allora che le due trasformazioni

$$g\gamma \ , \ \gamma g$$

hanno su qualunque punto M dello spazio (nell'intorno di O) lo stesso effetto e quindi $g\gamma = \gamma g$.

Dopo ciò vediamo anche subito che la totalità di queste trasformazioni γ è un gruppo Γ_n semplicemente transitivo. Intanto le γ formano un gruppo perché il prodotto di due trasformazioni permutabili con tutte le g gode della stessa proprietà. Nella espressione delle γ entrano poi manifestamente $\underline{n}$ parametri, le coordinate di O' che si fa corrispondere al punto fisso O, gli $\underline{n}$ parametri sono poi essenziali perché con una γ conveniente si può trasportare O dovunque. Dunque le γ formano un Γ_n semplicemente transitivo c. d. d.

Siamo pervenuti così nuovamente, con metodo diretto, alla nozione del gruppo Γ_n reciproco di G_n —

Di più da queste considerazioni si trae il modo di trovare le equazioni in termini finiti di Γ_n note quelle di G_n —

Siano

$$(\alpha) \qquad x_i' = f_i(x, a)$$

le equazioni finite di G_n e indichiamo con $x_i^{(0)}$ le coordinate fisse di O, con $b_1 b_2 \ldots b_n$ quelle variabili di O' e siano

$$P \equiv (y_1 y_2 \cdots y_n) \quad , \quad P' \equiv (y_1' y_2' \cdots y_n')$$

La trasformazione g di G_n che porta O in P ed O' in P' sia la (d); avremo:

$$\begin{cases} y_i = f_i(x_1^{(0)} \ldots x_n^{(0)}; a_1 a_2 \ldots a_n) \\ y_i' = f_i(b_1 \ldots b_n; a_1 a_2 \ldots a_n) \end{cases}$$

Eliminando le $\underline{a}$ fra queste si otterranno le relazioni cercate

$$y_i' = \varphi_i(y_1 y_2 \cdots y_n; b_1 b_2 \ldots b_n)$$

cioè le equazioni finite di Γ_n —

§ 93

Imprimitività di un gruppo semplicemente transitivo

Le considerazioni precedenti conducono a dimostrare il teorema già accennato al § 54. Ogni gruppo G_n semplicemente transitivo è imprimitivo —

Naturalmente si suppone qui $n>1$. Nel gruppo reciproco Γ_n è contenuto certamente qualche sottogruppo Γ_m con $m<n$ parametri. Le minime varietà invarianti (generiche) rispetto a Γ_m sono di dimensione m (*); per ciò il gruppo intransitivo Γ_m divide lo spazio in ∞^{n-m} varietà V_m, per ogni punto dello spazio passando una di queste varietà - È facile vedere che rispetto al gruppo G_n questa è una divisione in sistemi d'imprimitività, cioè che ogni trasformazione di G_n o lascia fissa ciascuna varietà V_m o scambia queste varietà fra loro. Siano infatti O, O' due punti qualunque di una stessa V_m e g una trasformazione qualsiasi in G_n, e siano P, P' i due punti in cui g trasporta O, O' - Quella trasformazione γ di Γ_n che trasporta O in O' appartiene a Γ_m e trasporta anche P in P' (§ preced.te); dunque P' è su quella varietà V_m che passa per P c. d. d. - Abbiamo dunque intanto: Ad ogni sottogruppo Γ_m del gruppo reciproco Γ_n di un gruppo G_n semplicemente transitivo corrisponde una divisione dello spazio in sistemi d'imprimitività rispetto a G_n, costituiti dalle minime varietà invarianti rispetto a Γ_m.

(*) Si ricordi che in un punto generico dello spazio le trasformazioni infinitesime di Γ_n, e per ciò quelle di Γ_m, sono tutte d'ordine zero.

Questo risultato si prova del resto anche subito applicando i criterii del § 52 per riconoscere se un sistema completo ammette un dato gruppo. E infatti se $Z_1 f$, $Z_2 f, \ldots Z_m f$ sono le trasformazioni infinitesime di Γ_m' il sistema

$$Z_1 f = 0\,,\quad Z_2 f = 0 \ldots\ldots Z_m f = 0$$

che integrato dà gli invarianti di Γ_m' ammette il gruppo $G_n = (X_1 X_2 \ldots X_n)$ perchè

$$(Z_i X_k) = 0 \qquad \begin{cases} i = \\ k = \end{cases} 1, 2 \ldots n$$

E facile di più vedere che così si ottengono tutte le possibili divisioni dello spazio in sistemi d'imprimitività rispetto al gruppo G_n – Supponiamo infatti di avere una tale divisione in ∞^{n-m} varietà V_m. Se del gruppo reciproco Γ_n consideriamo solo quelle trasformazioni γ che cangiano il punto O (generico) in tutti i punti O' della varietà V_m per O esse costituiranno una serie ∞^m. Se g è una trasformazione qualunque di G_n che porti O, O' in P, P' questi due apparterranno ad una stessa V_m e la γ che trasporta P in P' fa dunque scorrere anche questa V_m in se stessa. Ne segue che il prodotto di due γ è ancora una γ, cioè che le γ formano appunto un sottogruppo Γ_m' di Γ_n –

Così adunque per un gruppo semplicemente transitivo sappiamo risolvere completamente il problema (§§ 51, 52) di trovare tutti i sistemi completi che ammettono il gruppo. —

Capitolo VIII°

Isomorfismo dei gruppi riferito alle loro trasformazioni infinitesime. Gruppi parametrici. Isomorfismo dei gruppi in relazione colle trasformazioni finite. Risoluzione generale del problema di riconoscere la simiglianza di due gruppi.

§ 94

Isomorfismo fra due gruppi fondato sulla corrispondenza delle loro trasformazioni infinitesime

Come nella teoria dei gruppi di sostituzioni (dei gruppi finiti di operazioni) e più in generale nella teoria dei gruppi discontinui, così anche in quella dei gruppi continui di trasformazioni si può stabilire l'importante concetto d'isomorfismo fra i gruppi. Ma nella teoria dei gruppi continui si può arrivare in due modi diversi allo scopo e cioè o stabi-