Capitolo V.°

Forme di terza specie proiettive
a) Forme reciproche sovrapposte: b) Complesso tetraedrale.

In questo capitolo noi vogliamo studiare brevemente le principali proprietà delle forme fondamentali di terza specie reciproche, o collineari (necessariamente sovrapposte) e dell'ente generato da quest'ultime il complesso tetraedrale.

Per esse poi ricordiamo ancora come già abbiamo trovato che:

"In due spazii collineari vi sono al più, in generale, quattro punti e quattro piani uniti costituenti i vertici e le facce di un tetraedro. — Vi sono infiniti elementi uniti nel caso (1) dell'omologia e dell'omografia biassiale: nel caso dell'omologia i due spazii hanno

(1) Ma non in questi casi soltanto - Vedi Reye Geom. der Lage II Abth. pag. 71.

uniti tutti i punti di un piano (piano d'omologia) e tutti i piani di una stella (centro d'omologia); nel caso dell'omografia biassiale hanno uniti tutti i punti e tutti i piani di due rette delle assi dell'omografia.

In due casi soltanto la collineazione è involutoria e precisamente nel caso dell'omologia armonica e dell'omografia biassiale involutoria; in ogni altro caso non può darsi involuzione.

Riassunte rapidamente così le proprietà generali delle forme collineari di terza specie possiamo senz'altro allo studio delle forme reciproche, e osserviamo subito che tutte le considerazioni che faremo si estenderanno immediatamente con facili modificazioni al caso di sistemi piani reciproci sovrapposti o di stelle reciproche concentriche.

Qualunque reciprocità fra due spazii Σ e Σ_1 può individuarsi analiticamente ponendo uguali le coordinate dei piani di Σ_1 a funzioni lineari omogenee delle coordinate dei punti di Σ, ossia, un-

Capitolo V.°

Forme di terza specie proiettive
a) Forme reciproche sovrapposte: b) Complesso tetraedrale.

In questo capitolo noi vogliamo studiare brevemente le principali proprietà delle forme fondamentali di terza specie reciproche, o collineari (necessariamente sovrapposte) e dell'ente generato da quest'ultime il complesso tetraedrale.

Per esse poi ricordiamo ancora come già abbiamo trovato che:

"In due spazii collineari vi sono al più, in generale, quattro punti e quattro piani uniti costituenti i vertici e le facce di un tetraedro. — Vi sono infiniti elementi uniti nel caso (1) dell'omologia e dell'omografia biassiale: nel caso dell'omologia i due spazii hanno

(1) Ma non in questi casi soltanto — Vedi Reye Geom. der Lage II Abth. pag. 71.

uniti tutti i punti di un piano (piano d'omologia) e tutti i piani di una stella (centro d'omologia); nel caso dell'omografia biassiale hanno uniti tutti i punti e tutti i piani di due rette dette assi dell'omografia.

In due casi soltanto la collineazione è involutoria e precisamente nel caso dell'omologia armonica e dell'omografia biassiale involutoria; in ogni altro caso non può darsi involuzione."

Riassunte rapidamente così le proprietà generali delle forme collineari di terza specie possiamo senz'altro allo studio delle forme reciproche, e osserviamo subito che tutte le considerazioni che faremo si estenderanno immediatamente con facili modificazioni al caso di sistemi piani reciproci sovrapposti o di stelle reciproche concentriche.

Qualunque reciprocità fra due spazii Σ e Σ_1 può individuarsi analiticamente ponendo uguali le coordinate dei piani di Σ_1 a funzioni lineari omogenee delle coordinate dei punti di Σ, ossia, in dicendo le x_i le coordinate di un punto X di Σ e le ξ_i le coordinate del piano corrispondente ξ di Σ_1, con lo scrivere

1) $$\xi_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

In queste espressioni le a_{ik} sono affatto qualunque, essendo del tutto generica la reciprocità fra Σ e Σ_1 che noi consideriamo; solo però esse dovranno soddisfare, come è chiaro, alla disuguaglianza

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

perchè la reciprocità non sia degenere.

Le formule 1) non solo determinano completamente la reciprocità fra Σ e Σ_1, ma mostrano anche come dato un punto di Σ si possa immediatamente costruire il suo piano corrispondente in Σ_1; noi vogliamo far vedere come se ne deducano tre altri sistemi di formule: che ci daranno per ogni punto di Σ_1 il piano corrispondente di Σ e per ogni piano di Σ o Σ_1 il punto corrispondente in Σ_1 o Σ.

Per questo osserviamo che se $Y \equiv y_i$ è

un punto qualunque del piano $\xi \equiv \xi_i$ corrispondente in Σ_1 al punto $X \equiv x_i$ di Σ si ha:

$$\sum_i \xi_i y_i = 0$$

ossia, sostituendo:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_k y_i = 0$$

Ora se noi consideriamo il punto Y come appartenente a Σ_1 ad esso corrisponderà un piano in Σ passante per X; quindi se nell'equazione precedente consideriamo le y come costanti e le x come coordinate correnti, otterremo tutti i punti di Σ i cui piani corrispondenti in Σ_1 passano per Y e quindi tutti i punti del piano di Σ corrispondente al punto Y di Σ_1.

L'equazione di questo piano è dunque:

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_k y_i = 0$$

e le sue coordinate y_i sono date da:

2) $$\eta_i = \sum_k a_{ki} y_k$$

Risolvendo le 1) e 2) rispetto alle x_i o alle y_i si ottengono immediatamente le formule (1)

---

(1) Veramente avremmo dovuto scrivere

$$\Delta x_i = \sum_k A_{ki} \xi_k \qquad \Delta y_i = \sum_k A_{ik} \eta_k$$

ma trattandosi di coordinate omogenee possiamo trascurare qualsiasi fattore di proporzionalità —

$$x_i = \sum_k A_{ki} \xi_k$$
$$y_i = \sum_k A_{ik} \eta_k$$

che ci danno le coordinate dei punti di Σ o Σ_1 corrispondenti ai piani di Σ_1 o Σ quando siano date le coordinate di questi.

Adesso siamo in grado di proporci il problema di trovare i punti di uno spazio che giacciono nei piani che ad essi corrispondono nell' altro. —

Per questo supponiamo che il punto $X \equiv x_i$ di Σ si trovi nel suo piano corrispondente $\xi = \xi_i$ di Σ_1; allora dovrà essere:

$$\sum_i \xi_i x_i = 0$$

ossia sostituendo

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0$$

Viceversa se questa relazione è soddisfatta il punto X giace nel suo piano corrispondente dunque:

"Il luogo dei punti dello spazio Σ che giacciono nei piani ad essi corrispondenti in Σ_1 è una quadrica φ^2 d'equazione:

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = 0$$

Se si cercasse il luogo dei punti di Σ_1

che giacciono nei piani ad essi corrispondenti in Σ si troverebbe la stessa quadrica φ^2, quindi possiamo dire senz'altro:

"Il luogo dei punti che giacciono nei loro piani corrispondenti, si considerino essi come appartenenti all'uno o all' altro spazio è una quadrica φ^2"

Similmente se il piano $y \equiv y_i$ di Σ passa pel suo punto corrispondente $Y \equiv y_i$ di Σ_1 si ha:

$$\sum_i \eta_i y_i = 0$$

ossia sostituendo

$$\sum_{ik} A_{ik} y_i \eta_k = 0 ;$$

e viceversa se questa relazione è soddisfatta il piano y di Σ passa pel suo punto corrispondente in Σ_1, dunque, per una osservazione analoga alla precedente:

"L'inviluppo dei piani che passano pei loro punti corrispondenti, si considerino essi come appartenenti all'uno o all'altro spazio, è un inviluppo di 2ª classe Φ^2, d'equazione:

$$\sum_{ik} A_{ik} y_i \eta_k = 0 "$$

Si noti che in generale l'inviluppo Φ^2 non coincide coll'inviluppo dei piani tangenti di φ^2.

Analogamente a tutto ciò si ha pei sistemi piani e per le stelle reciproche sovrapposte.

"In due sistemi piani reciproci sovrapposti il luogo dei punti che giacciono nelle loro rette corrispondenti è una conica; e l'inviluppo delle rette che passano pei loro punti corrispondenti è un inviluppo di seconda classe"

"In due stelle reciproche concentriche l'inviluppo dei piani che passano per le loro rette corrispondenti è un cono di seconda classe, e le rette che giacciono nei loro piani corrispondenti costituiscono un cono di second'ordine"

Un'altra questione molto interessante in quest'ordine di idee è quella di cercare se vi sono dei punti che considerati come appartenenti all'uno o all'altro spazio abbiano sempre per corrispondente il medesimo piano: punti che per brevità chiameremo anche involutorii.

Se $X \equiv x_i$ è un punto qualunque e ξ_i ed y_i sono le coordinate dei piani ad esso corrispondenti secondochè si considera come appartenente a Σ o Σ_1, si ha per le formule già trovate:

$$\xi_i = \sum_k a_{ik} x_k$$
$$y_i = \sum_k a_{ki} x_k$$

dunque se X è un punto involutorio deve essere per un conveniente valore di ρ

$$\rho \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k a_{ki} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ossia

$$3) \qquad \sum_k (a_{ki} - \rho a_{ik}) x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Per la coesistenza di queste quattro equazioni fra le x_k le quali non possono essere tutte nulle, deve essere

$$4) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - \rho a_{11} & a_{21} - \rho a_{12} & a_{31} - \rho a_{13} & a_{41} - \rho a_{14} \\ a_{12} - \rho a_{21} & a_{22} - \rho a_{22} & a_{32} - \rho a_{23} & a_{42} - \rho a_{24} \\ a_{13} - \rho a_{31} & a_{23} - \rho a_{32} & a_{33} - \rho a_{33} & a_{43} - \rho a_{34} \\ a_{14} - \rho a_{41} & a_{24} - \rho a_{42} & a_{34} - \rho a_{43} & a_{44} - \rho a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

dunque vi sono in generale quattro valori di ρ pei quali il sistema d'equazioni 3) è risolubile con valori non tutti nulli delle x e quindi in generale quattro punti involutorii.

Con un ragionamento analogo si ha

verebbe che vi sono quattro piani involutorii e non è difficile vedere che essi sono appunto le facce del tetraedro formato da quei quattro punti.

Infatti se 1, 2, 3, 4 sono i quattro punti involutorii il piano 123. per es. passando per 1, 2, 3 che corrispondono in doppio modo a tre certi piani α, β, γ corrisponderà in ~~certo~~ doppio modo all'intersezione $\alpha\beta\gamma$ di questi tre piani e sarà un piano involutorio.

Per studiare più davvicino la distribuzione dei punti 1, 2, 3, 4 e dei piani che ad essi corrispondono in doppio modo faremo le osservazioni seguenti.

Se $X \equiv x_i$ è un punto involutorio si deve avere, ρ essendo una conveniente radice dell'equazione di quarto grado 4).

$$\rho \sum_k a_{ik} x_k = \sum_k a_{ki} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

quindi moltiplicando successivamente queste quattro uguaglianze per x_1, x_2, x_3, x_4 e poi sommando deve anche essere:

$$\rho \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k = \sum_{i,k} a_{ki} x_k x_i$$

ossia, evidentemente:

$$(\rho - 1) \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0$$

Perchè quest'ultima uguaglianza sia soddisfatta deve essere $\rho = 1$ oppure

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = 0;$$

ma in generale ρ non è uguale all'unità perchè in tal caso sarebbe nullo il determinante emisimmetrico di ordine pari:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{21}-a_{12} & a_{31}-a_{13} & a_{41}-a_{14} \\ a_{12}-a_{21} & 0 & a_{32}-a_{23} & a_{42}-a_{24} \\ a_{13}-a_{31} & a_{23}-a_{32} & 0 & a_{43}-a_{34} \\ a_{14}-a_{41} & a_{24}-a_{42} & a_{34}-a_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

che invece è uguale al quadrato d'una espressione razionale dei suoi elementi: dunque deve essere

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0.$$

Da ciò e da un ragionamento correlativo deduciamo il teorema:

"I quattro punti involutorii 1, 2, 3, 4 giacciono sulla quadrica φ^2 dei punti che si trovano nei loro piani corrispondenti e i quattro piani involutorii 123, 234, 341, 412 appartengono all'inviluppo di seconda classe Φ^2 dei piani che passano pei loro punti corrispondenti"

Alquanto differentemente avvengono le cose pei sistemi piani reciproci sovrapposti e per le stelle reciproche concentriche.

Volgiamoci per brevità ai soli sistemi piani.

In tal caso se si cercano i punti involutorii si giunge in un modo affatto analogo al precedente, riducendo a tre il numero delle coordinate correnti, a un'equazione di terzo grado in ρ:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho a_{11} & a_{21}-\rho a_{12} & a_{31}-\rho a_{13} \\ a_{12}-\rho a_{21} & a_{22}-\rho a_{22} & a_{32}-\rho a_{23} \\ a_{13}-\rho a_{31} & a_{23}-\rho a_{32} & a_{33}-\rho a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

che per ogni sua radice ρ dà un punto involutorio, le cui coordinate sono date dalle tre equazioni:

$$\sum_k (a_{ki} - \rho a_{ik}) x_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ora questa equazione ammette sempre la radice $\rho = 1$ perchè un determinante emisimmetrico d'ordine dispari è identicamente nullo; quindi mentre per un ragionamento analogo al precedente troveremmo che due dei tre punti involutorii giacerebbero sulla conica k^2 dei punti che giacciono nelle loro rette corrispondenti, troveremmo che il terzo corrispondente alla radice $\rho = 1$ giacerebbe fuori di questa conica.

Similmente delle tre rette involutorie che coincidono coi lati del triangolo dei punti involutorii due apparterranno all'inviluppo K^2 delle rette che passano pei loro punti corrispondenti, la terza no.

Per esaminare più davvicino la cosa, siano 1. 2. 3 i punti involutorii e sia 2 uno dei punti che appartiene alla conica k^2: allora la retta che ad esso corrisponde in doppio modo essendo una retta involutoria dovrà essere un lato del triangolo 123 e dovrà anche passare per 2. Sia ad es. fissando convenientemente le denominazioni la retta 23: allora al punto 3 corrisponderà la retta 21, e al punto 1 finalmente la retta 13.

Io dico che le due coniche k^2 e K^2 sono bitangenti nei punti 1 e 2 e che in essi toccano le rette 13 e 23.

Infatti prendiamo come triangolo di riferimento il triangolo 1. 2. 3 ed osserviamo che ai punti 1. 2. 3 di coordinate rispettivamente 1. 0. 0; 0. 1. 0; 0. 0. 1 corrispondono ordinatamente le rette 13, 23, 1.

di coordinate 0, 1, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1. Le formule della reciprocità considerata:

$$\xi_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3)$$

devono quindi ridursi a:

$$\xi_1 = a_{12} x_2 \quad \xi_2 = a_{21} x_1 \quad \xi_3 = a_{33} x_3$$

e le equazioni delle coniche k^2 e K^2 ad:

$$a_{33} x_3^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 = 0$$

$$a_{12} a_{21} y_3^2 + a_{33} (a_{12} + a_{21}) y_1 y_2 = 0.$$

La forma di queste equazioni mostra precisamente che nei punti 1, 2 le coniche k^2 e K^2 toccano le rette 13 e 23.

Ritornando al caso delle forme di terza specie siano 1, 2, 3, 4 i quattro punti involutorii e sia, fissando convenientemente le denominazioni, 123 il piano corrispondente in doppio modo al punto 2, piano che come abbiamo visto deve essere una delle quattro facce del tetraedro 1234 e deve passare per 2. Ma allora al punto 3 che si trova nel piano corrispondente a 2 corrisponderà un piano passante per 2; e come questo piano deve anche passare per 3, sarà il piano 234. Nello stesso modo si troverebbe che ai punti 4 e 1 corrispondono in doppio modo i piani 341

e 412.

Per vedere come siano situate rispetto a questo tetraedro le quadriche φ^2 e Φ^2 vediamo cosa diventano le loro equazioni quando si prenda questo tetraedro come tetraedro di riferimento.

Allora dovendo ai punti 1, 2, 3, 4 di coordinate 1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0; 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1 corrispondere, nella reciprocità considerata, rispettivamente i piani 412, 123, 234, 341 di coordinate 0, 0, 1, 0; 0, 0, 0, 1; 1, 0, 0, 0; 0, 1, 0, 0 le formule della reciprocità dovranno ridursi a:

$$\xi_1 = a_{13} x_3 \,.\; \xi_2 = a_{24} x_4 \,.\; \xi_3 = a_{31} x_1 \,.\; \xi_4 = a_{42} x_2$$

e le equazioni delle quadriche φ^2 e Φ^2 ad:

$$(a_{13} + a_{31}) x_1 x_3 + (a_{24} + a_{42}) x_2 x_4 = 0$$

$$a_{24} a_{42} (a_{13} + a_{31}) y_1 y_3 + a_{13} a_{31} (a_{24} + a_{42}) y_2 y_4 = 0$$

Da ciò risulta che le quadriche φ^2 e Φ^2 contengono tutte e due i quattro spigoli 12, 14, 23, 34 del tetraedro 1234; perchè per es. le equazioni dello spigolo 12 in coordinate di punti sono

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 0$$

e in coordinate di piani

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0$$

ed è evidente quindi che esso si trova tanto su $\mathcal{Q}^2$ quanto su Φ^2. -
Inoltre le quadriche $\mathcal{Q}^2$ e Φ^2 si toccano nei punti 1. 2. 3. 4 ossia hanno in essi il medesimo piano tangente.

Se $X \equiv x_i$ è un piano involutorio deve essere per un conveniente valore di ρ

$$\Sigma (a_{ki} - \rho a_{ik}) x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

quindi se noi vogliamo che ciò avvenga per qualsiasi punto, ossia che la reciprocità sia involutoria deve essere identicamente qualunque siano i e k:

$$a_{ki} - \rho a_{ik} = 0$$

In tale ipotesi deve essere anche

$$a_{ik} - \rho a_{ki} = 0$$

ossia, combinando quest' ultime due uguaglianze,

$$\rho^2 a_{ki} = a_{ki}$$

da cui si trae

$$\rho = \pm 1 \qquad a_{ki} = \pm a_{ik}$$

Viceversa se $a_{ki} = \pm a_{ik}$ la reciprocità è involutoria perchè è un sistema polare o un sistema nullo dunque:

"Una reciprocità involutoria fra due spazii o è un sistema polare o è un

sistema nullo.

Pei sistemi piani e per le stelle non essendo possibile il caso del sistema nullo, l'unico caso di reciprocità involutoria è quello del sistema polare.

Complesso tetraedrale.

Essendo dati due spazii collineari Σ e Σ_1 chiameremo complesso tetraedrale o complesso di Reye la totalità delle ∞^3 rette che congiungono i punti di Σ ai punti corrispondenti di Σ_1.

Prima di cercare l'equazione e le proprietà principali del complesso tetraedrale mostreremo come esso può definirsi in altri due modi mediante sempre spazii collineari.

Se r è una retta di Σ che incontra la sua retta corrispondente r_1 di Σ_1, tanto r quanto r_1 appartengono al complesso tetraedrale generato da Σ e Σ_1.

Infatti al punto $A_1 \equiv r r_1$ considerato come appartenente a Σ_1 corrisponde in Σ un punto A di r, poichè A_1 è situato su r_1: dunque r come congiungente i punti corrispondenti A e A_1 di Σ e Σ_1 appartiene al complesso tetraedrale. Lo stesso dicasi della r_1.

Viceversa se una retta r appartiene al complesso tetraedrale essa incontra la sua retta corrispondente sia che si consideri come appartenente a Σ,† perchè se A ed A_1 sono i punti corrispondenti di Σ e Σ_1 che si trovano su r le rette corrispondenti ad r in Σ_1 e Σ passano rispettivamente per A_1 ed A; dunque il complesso tetraedrale può anche definirsi come la totalità delle rette che incontrano le loro corrispondenti.

Ma ciò non basta: esso può venir considerato ancora come la totalità delle rette d'intersezione dei piani corrispondenti di Σ e Σ_1.

Infatti se α ed α_1 sono due tali piani le rette corrispondenti ad $\alpha\alpha_1$ in Σ_1 e Σ si trovano rispettivamente nei piani α_1 ed α ed incontrano la retta $\alpha\alpha_1$: quindi $\alpha\alpha_1$ appartiene al complesso.

Viceversa se una retta r appartie-

† sia che si consideri come appartenente a Σ_1:

ne al complesso cioè incontra la sua corrispondente r_1 al piano rr_1 di Σ_1 passante per r_1 corrisponde in Σ un piano passante per r e quindi r è l'intersezione di due piani corrispondenti.

Per trovare l'equazione del complesso tetraedrale prendiamo come tetraedro di riferimento il tetraedro degli elementi uniti di Σ e Σ_1: le formule della collineazione fra Σ e Σ_1 saranno della forma:

$$x_i = \alpha_i y_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Allora se r è una retta del complesso congiungente i punti corrispondenti di Σ e Σ_1, $X \equiv x_i$, $Y \equiv y_i$, si ha:

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i = (\alpha_i - \alpha_k) y_i y_k$$

dove le p_{ik} sono le coordinate della retta r.

Di qui segue:

$$\frac{p_{13}}{p_{14}} : \frac{p_{23}}{p_{24}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\, y_1 y_3}{(\alpha_1 - \alpha_4)\, y_1 y_4} : \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)\, y_2 y_3}{(\alpha_2 - \alpha_4)\, y_2 y_4} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_4)} : \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_4)}$$

e quindi indicando con δ il valore del rapporto anarmonico $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4)$

$$p_{13}\, p_{24} = \delta\, p_{23}\, p_{14}$$

Questa è l'equazione del complesso tetraedrale: esso è quindi un complesso quadratico: i coni del complesso taranno coni del second'ordine e le curve del complesso saranno coniche.

Un'altra generazione del nostro complesso indipendentemente da spazii collineari è data dalle ricerche seguenti.

Preso un tetraedro 1234 come tetraedro di riferimento siano $X = x_i$ $Y = y_i$ due punti qualunque d'una retta r: le coordinate d'ogni altro punto della retta potranno mettersi sotto la forma $x_i - \lambda y_i$. L'equazione del piano 234 essendo $x_1 = 0$ il punto ove la retta r incontra il piano 234 sarà dato dalla formula precedente ponendovi $\lambda = \frac{x_1}{y_1}$. Similmente si otterranno i punti ove la retta r incontra i piani 341, 412, 123 ponendo successivamente $\lambda = \frac{x_2}{y_2}$, $\lambda = \frac{x_3}{y_3}$, $\lambda = \frac{x_4}{y_4}$. Da ciò segue che il rapporto anarmonico di quei quattro punti è dato da:

$$\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \frac{x_4}{y_4}\right) = \frac{\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_3}{y_3}}{\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_4}{y_4}} : \frac{\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3}}{\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_4}{y_4}} = \frac{p_{13}}{p_{14}} : \frac{p_{23}}{p_{24}}$$

avendo indicato con le p_{ik} le coordinate della retta r.

In modo affatto analogo si sarebbe trovato che il rapporto anarmonico dei quat-

tro piani che dalla retta r proiettano i vertici 1, 2, 3, 4 del tetraedro è dato da:

$$\frac{q_{13}}{q_{14}} : \frac{q_{23}}{q_{24}}$$

dove le q_{ik} sono le coordinate q della retta r: ma poichè per una medesima retta

$$p_{ik} = \rho \frac{\partial (qq)}{\partial q_{ik}}$$

si ha:

$$\frac{p_{13}}{p_{14}} : \frac{p_{23}}{p_{24}} = \frac{q_{13}}{q_{14}} : \frac{q_{23}}{q_{24}}$$

dunque abbiamo intanto il teorema:

"Il rapporto anarmonico dei punti nei quali una retta qualunque taglia le facce d'un tetraedro, è uguale al rapporto anarmonico dei piani mediante i quali sono proiettati dalla medesima retta i vertici opposti." (1)

Risulta ancora dalla formula precedente che le rette di un complesso tetraedrale tagliano le quattro facce del tetraedro degli elementi uniti in un rapporto anarmonico costante uguale al rapporto anarmonico pure costante dei quattro piani secondo cui ne proiettano

---

(1) Staudt. Beiträge etc. N. 35.

i quattro vertici, e che viceversa la totalità delle rette che tagliano le facce d'un tetraedro in un rapporto anarmonico costante è appunto un complesso tetraedrale.

Segue da ciò una terza definizione interessante del nostro complesso e la giustificazione della sua denominazione.

Il tetraedro rispetto a cui è definito il complesso si chiama tetraedro fondamentale.

"Un complesso tetraedrale è pienamente individuato dal suo tetraedro fondamentale e da una sua retta non passante per alcun vertice e non giacente in alcuna faccia del tetraedro.

Infatti dato il tetraedro fondamentale e una retta è individuato il rapporto anarmonico che deve essere costante per tutte le altre rette del complesso.

Da ciò segue che dati due spazii collineari Σ e Σ_1 è individuato un complesso tetraedrale: ma viceversa dato un complesso tetraedrale si possono stabilire ∞^2 trasformazioni collineari dello spazio in sè stesso le quali generino nel

modo che sappiamo il complesso dato.

Infatti se 1234 è il tetraedro fondamentale del complesso dato, i punti 1, 2, 3, 4 devono essere uniti in ogni collineazione che generi il complesso: e se δ è il valore del rapporto anarmonico costante relativo al complesso ed

$$x_i = \alpha_i y_i$$

sono le formule d'una collineazione generante il complesso rispetto al tetraedro 1234 preso come tetraedro di riferimento deve essere:

$$(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = \delta.$$

Viceversa è chiaro che se preso il tetraedro 1234 come tetraedro del riferimento si costruisce una trasformazione collineare dello spazio definita dalle formule $x_i = \alpha_i y_i$ in modo che

$$(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = \delta$$

questa collineazione genera il complesso dato: dunque la questione si riduce a cercare in quanti modi si può rendere

$$(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, \alpha_4) = \delta$$

Per questo si osservi che le formule

$$x_i = \alpha_i y_i$$

moltiplicate per qualsiasi fattore di proporzionalità rappresentano sempre la medesima trasformazione collineare quindi possiamo benissimo supporre per es. $\alpha_1 = 1$ senza venir meno in nulla alla generalità. Allora dei quattro parametri $\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4$ due soli rimangono arbitrari se di più si assoggettano a formare un rapporto anarmonico costante e quindi vi sono ∞^2 collineazioni che determinino un dato complesso tetraedrale.

Possiamo vedere tutto questo ancora più semplicemente.

Un complesso tetraedrale si può pensare come individuato dal suo tetraedro fondamentale 1234 e da una sua retta r: quindi se si costruisce una collineazione per la quale 1, 2, 3, 4 siano elementi uniti e due punti qualunque A ed A_1 della retta r siano corrispondenti, essa genererà il complesso considerato. Ora è chiaro che di queste collineazioni ce ne sono ∞^2.

"Ogni retta passante per un vertice o giacente in una faccia del tetraedro

fondamentale appartiene al complesso tetraedrale"

Ciò si può vedere in più modi. Una retta r uscente per es. dal vertice 1 ha la $p_{34} = p_{23} = p_{24} = 0$ e quindi essa soddisfa all'equazione del complesso

$$p_{13}\, p_{24} = \delta\, p_{23}\, p_{24} \; ;$$

oppure essa può considerarsi come congiungente due punti corrispondenti coincidenti in 1, o come retta che incontra la sua corrispondente nel punto 1; oppure siccome essa proietta i vertici 2, 3, 4 secondo piani distinti e il vertice 1 secondo un piano indeterminato, si può condurre questo quarto piano in modo che il rapporto anarmonico formato dai quattro piani proiettanti sia uguale a δ, ecc. ecc.

Prima di procedere avanti noi escluderemo dalle nostre considerazioni quei complessi tetraedrali pei quali $\delta = 0, \infty, 1$

In tali casi il complesso tetraedrale si scinde in coppie di complessi lineari speciali.

Infatti se $\delta = 0$ una retta appartiene al complesso se per essa

$$p_{13}\, p_{24} = 0$$

e quindi il complesso si compone di tutte le rette per le quali è $p_{13} = 0$ $p_{24} = 0$, ossia di tutte le rette che si appoggiano allo spigolo 24 o 13.

Considerazione analoga si fa nel caso di $\delta = \infty$

Se $\delta = 1$ allora l'equazione del complesso diventa:

$$p_{13}\, p_{42} + p_{23}\, p_{14} = 0$$

ossia, in virtù della relazione identica $(pp) = 0$

$$p_{12}\, p_{34} = 0$$

e quindi ancora il complesso tetraedrale si scinde nei due complessi lineari speciali di assi 34 e 12 rispettivamente.

Adesso consideriamo un complesso tetraedrale qualunque di tetraedro fondamentale 1234 e il cono del complesso relativo a un punto P: tra le rette del complesso uscenti da P saranno anche le rette $P(1, 2, 3, 4)$. — quindi:

"I coni del complesso sono tutti circoscritti al tetraedro fondamentale".

Dualmente:

"Le coniche del complesso sono tutte

inscritte nel tetraedro fondamentale."

Se il punto P giace su una faccia del tetraedro fondamentale per es. sulla faccia 234, allora il cono del complesso relativo al punto P si scinde evidentemente nel fascio di centro P e di piano 234 e in un altro fascio di centro P e il cui piano passa pel vertice 1, opposto alla faccia 234.

Dualmente se un piano π passa per un vertice del tetraedro fondamentale per es. per 1, l'inviluppo di seconda classe formato dalle rette del complesso contenute in π si ridurrà al punto 1 e a un punto della intersezione di π colla faccia 234 opposta ad 1.

Se il punto P giace per es. sullo spigolo 12 allora appartengono al complesso tutte le rette uscenti da P e giacenti nei piani 123 e 124: e se δ non è $0, \infty$ né 1, come abbiamo supposto, nessun'altra retta uscente da P all'infuori di queste può appartenere al complesso.

E infatti se r fosse una tal retta uscente da P e non contenuta né in 123 né in 124, dei quattro piani che da r proisterebbero i vertici 1234 del tetraedro fondamentale due coinciderebbero e allora il loro rapporto anarmonico cioè δ sarebbe uguale (vedi pag. 79) a $0, \infty, 1$.

Da questa osservazione segue immediatamente che il cono del complesso relativo a un punto P degenera solo quando il punto P si trova su una faccia del tetraedro fondamentale.

Infatti se il cono relativo al punto P si scinde nei due fasci di raggi (P,α), (P,β), dovendo esso passare d'altronde per i punti 1, 2, 3, 4 vuol dire che dei due piani α e β uno passerà per es. per 12 l'altro per 34. Allora P non essendo su alcuna faccia del tetraedro vi sarebbero infinite rette appoggiantesi agli spigoli 12 e 34 appartenenti al complesso e non giacenti in alcuna faccia del tetraedro: il che non è possibile. Dunque:

"Il luogo geometrico dei punti pei quali i coni del complesso si scindono in coppie di piani è costituito dalle quattro faccie del tetraedro fondamentale.

Dualmente:

"I vertici del tetraedro fondamentale costituiscono l'inviluppo dei piani pei quali le coniche del complesso degenerano in coppie di punti" (1)

Consideriamo ora una delle ∞^2 collineazioni che generano il nostro complesso e se r è una retta di questo siano V e V' i due punti di r che si corrispondono in quella collineazione. I punti V e V' saranno centri di due stelle collineari corrispondentisi nella collineazione dello spazio fissata e genereranno quindi una cubica, le cui corde essendo intersezioni di piani corrispondenti appartengono al complesso. Tale cubica sarà chiamata brevemente cubica del complesso.

---

(1) Queste proposizioni sono casi particolari della seguente:
"Il luogo dei punti pei quali i coni di un complesso di secondo grado affatto generale degenerano in coppie di piani è una superficie di 4° ordine detta superficie di Kummer. - I suoi piani tangenti costituiscono inoltre l'inviluppo dei piani pei quali le coniche del complesso degenerano in coppie di punti"

Se A è un punto della cubica del complesso or ora trovata, in esso si incrocieranno le rette corrispondenti delle stelle V e V', VA e V'A; e quindi se A' è il punto corrispondente ad A nella collineazione considerata il punto A' deve trovarsi sulla retta V'A poichè A giace su VA.

Segue da ciò:

"Se si considera una delle ∞^2 omografie generanti un dato complesso tetraedrale e il cono del complesso relativo a un punto qualunque V e su ogni generatrice del cono si segnano i due punti A e A' [illegible] una cubica del complesso.

Insieme alle cubiche del complesso si suole considerare le quadriche del complesso; esse sono caratterizzate dal fatto che tutte le rette di un loro sistema appartengono al complesso e si ottengono facilmente considerando una collineazione che generi il complesso e considerando le quadriche generate dai fasci di piani corrispondenti che hanno per assi rette corrispondenti.

Oltre alle cubiche si hanno, per la
che si corrispondono in quella collineazione, il luogo di ciascuno dei punti A e A'

legge di dualità, le sviluppabili di terza classe del complesso: i loro assi sono tutte rette del complesso. Le considerazioni che seguono ci condurranno ad una facile generazione del complesso tetraedrale mediante forme proiettive.

Sia 1234 il tetraedro fondamentale del complesso ed r una sua retta qualunque, indichiamo con A e B le traccie di r sulle facce 134 e 234 del tetraedro e con X ed X' le proiezioni di A e B sullo spigolo 34 fatte rispettivamente dai vertici 1 e 2. –

Proiettando dalla retta r i vertici del tetraedro e poi segando collo spigolo 34 si ottengono i punti X, X', 3, 4 ordinatamente: quindi il rapporto anarmonico di questi quattro punti è uguale al rapporto anarmonico costante del complesso. Segue da ciò che la congruenza lineare avente per direttrici le rette 1X e 2X' appartiene tutta al complesso tetraedrale perchè per ogni suo raggio si può ripetere quello che si è detto per la r.

Allora sia s una retta del complesso non appartenente a questa congruenza e siano per essa Y e Y' i punti analoghi ad X e X': la congruenza lineare di direttrici 1Y e 2Y' apparterrà pure interamente al complesso tetraedrale e si avrà:

$$(XX'34) = (YY'34)$$

Seguitando in questa maniera si verranno a costruire ∞ congruenze lineari che esauriranno il complesso tetraedrale e le cui direttrici formeranno intorno ai vertici 1, 2 e nei piani 134 e 234 due fasci di raggi segati dallo spigolo 34 nelle punteggiate (XY....) ed (X'Y'....) rispettivamente. Ora queste punteggiate sono proiettive perchè le coppie di punti corrispondenti formano coi punti 3, 4 un rapporto anarmonico costante, dunque quei due fasci sono proiettivi.

Da ciò noi deduciamo il teorema:

"Un complesso tetraedrale si può immaginare come costituito dalla totalità delle rette che si appoggiano alle coppie di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi di raggi."

Completeremo questa proposizione

cercando di invertirla.

Siano dati due fasci di raggi proiettivi qualunque, l'uno di centro 1 in un piano 134, l'altro di centro 2 in un piano 234, la retta 34 essendo l'intersezione di questi due piani: i due fasci proiettivi segneranno sulla retta 34 due punteggiate proiettive sovrapposte di cui indicheremo con 3 e 4 i punti uniti: sicchè ai raggi 13, 14 del primo fascio corrisponderanno rispettivamente nell'altro 23 e 24. Allora se a, a' sono due raggi corrispondenti dei due fasci ed r è una retta che si appoggi ad a e a', consideriamo il complesso tetraedrale determinato dal tetraedro 1234 come tetraedro fondamentale e dalla retta r, noi troviamo per le cose dette precedentemente che questo complesso è costituito dalla totalità delle rette che incontrano coppie di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi di centri 1 e 2 e di piani 134 e 234 e nei quali ai raggi 13, 14, a corrispondono rispettivamente i raggi 23, 24, a'; questi fasci proiettivi sono dunque i fasci dati si ha il teorema:

"Due fasci di raggi proiettivi che non si trovano in posizioni speciali generano un complesso tetraedrale: il complesso si compone delle rette che tagliano due loro raggi corrispondenti qualunque. I vertici del tetraedro fondamentale del complesso sono dati dai centri dei due fasci e dai due punti uniti delle punteggiate proiettive sovrapposte che quei fasci segnano sulla intersezione dei loro piani".

Combinando questo teorema col precedente si ha che:

"Un complesso tetraedrale qualunque è generabile nel modo che si è detto mediante fasci proiettivi in sei modi differenti".

Se due fasci proiettivi (A,α), (B,β) hanno unito il raggio comune $AB \equiv \alpha\beta$ al loro, per una proprietà nota del complesso lineare il complesso tetraedrale da essi generato si scinde nel complesso lineare speciale di asse AB e nel complesso lineare costituito dalle rette appoggiantesi alle altre coppie di raggi omologhi. -

Le osservazioni fatte ci conducono a una costruzione semplicissima del complesso tetraedrale e alla dimostrazione di un altro teorema notevole. -

Infatti se 1234 è il tetraedro fondamentale che insieme col valore δ del rapporto anarmonico costante determina il complesso tetraedrale, basta per es. sullo spigolo 34 considerare due punti X e X' in modo che sia:

$$(XX'34) = \delta;$$

allora tutte le rette della congruenza lineare le cui direttrici sono $1X$ e $2X'$ appartengono al complesso tetraedrale. In particolare dunque se P è un punto qualunque e p è la retta che passa per P e si appoggia ad $1X$ e $2X'$, il cono del complesso relativo al punto P sarà pienamente determinato dalle cinque sue generatrici $P1$, $P2$, $P3$, $P4$ e p. Il punto S ove la p incontra il piano 234 è anche il punto ove essa incontra la retta $2X'$ e quindi il punto ove la retta $2X'$ incontra il piano $P1X$; cosicchè se il punto P si muove sopra una retta se-

scente dal vertice S la retta p ruota in-
torno al punto S. Quello che abbiamo det-
to per la retta p si può dirsi per qua-
lunque altra generatrice del cono rela-
tivo a P; dunque:

"I coni del complesso relativi ai punti
di una retta passante per uno dei verti-
ci del tetraedro fondamentale segano la
faccia opposta nella medesima conica."

Il complesso tetraedrale oltre che con
forme proiettive di prima specie può
generarsi anche con forme proiettive
di seconda specie, come mostrano le ri-
cerche seguenti.

Una stella S sia riferita collinearmen-
te a un sistema piano π di modo che
ad ogni punto di π corrisponda un
raggio di S: la totalità delle rette par-
tenti dai punti di π e appoggiantesi
ai raggi corrispondenti di S costituisce
un complesso tetraedrale.

Infatti se noi seghiamo la stella S
col piano π otteniamo in questo piano
due sistemi collineari sovrapposti che
hanno tre punti uniti A, B, C, di modo

che ai punti A, B, C di π corrispondono i
raggi S(A, B, C) di S; e se X, X'; Y, Y' sono
due coppie di punti corrispondenti ai
punti X ed Y corrisponderanno i raggi SX'
ed SY'. Le due coniche ABCXY ed ABCX'Y'
saranno coniche corrispondenti in questi
due sistemi piani collineari e quindi la
serie di punti ABCXY.... sarà proietti-
va alla serie ABCX'Y'..... Allora se D è
il quarto punto comune a queste coniche
i fasci D(ABCXY.....), D(ABCX'Y'....)
saranno proiettivi, e avendo tre raggi u-
niti coincideranno; ossia il punto D è
dato dall'intersezione delle rette XX' ed YY'.
Ora, poichè i sei punti A, B, C, D, X, Y
giacciono sopra una conica,

$$X(ABCD) \barwedge Y(ABCD)$$

e $D \equiv XX' . YY'$, dunque

$$X(ABCX') \barwedge (ABCY'):$$

o in altre parole, il rapporto anarmoni-
co formato dalle quattro rette che da un
punto X proiettano i tre punti uniti e
il punto corrispondente X' è costante. (1)

(1) Questa proprietà è evidentemente una proprietà ge-
nerale per ogni piano trasformato collinearmente in se stesso.

D'altronde se r è una retta che uscendo dal punto X si appoggia alla retta SX' si ha evidentemente che il fascio di piani $r(A, B, C, S)$ è prospettivo al fascio di raggi $X(A, B, C, X')$ dunque anche il rapporto anarmonico secondo cui le rette della totalità considerata proiettano i vertici del tetraedro $ABCS$ è costante.

Da ciò segue senz'altro quel che volevasi dimostrare.

Inversamente:

"Ogni complesso tetraedrale può in infiniti modi pensarsi come generato, nel modo or ora considerato, mediante forme proiettive di seconda specie".

Infatti se 1234 è il tetraedro fondamentale del complesso, r è una sua retta qualunque che sega per es. la faccia 234 nel punto X ed x è una retta arbitraria del piano $1r$, basta riferire collinearmente il sistema piano 234 alla stella 1 in modo che ai punti $2, 3, 4, X$ del primo corrispondano rispettivamente i raggi $12, 13, 14, x$ della seconda perché il complesso generato da queste forme col-

lineari nel modo che sappiamo, coincida col complesso dato.

Siano date nello spazio due quadriche φ^2 e ψ^2; esse determinano un fascio di quadriche e se rispetto alle quadriche di questo fascio si costruiscono i piani polari di un punto P si trova che tutti questi piani passano per una retta p, detta polare del punto rispetto al fascio (pag. 133).

Ora noi abbiamo già dimostrato (pag. 134) che è costante il rapporto anarmonico secondo cui la retta p proietta i quattro vertici del tetraedro autopolare comune 1234 di φ^2 e ψ^2, al variare del punto P, quindi si ha senz'altro che le polari di tutti i punti dello spazio rispetto a un fascio di quadriche costituiscono un complesso tetraedrale.

Ma le quadriche φ^2 e ψ^2 considerate come inviluppi dei loro piani tangenti determinano anche una schiera di quadriche, e noi sappiamo che se rispetto alle quadriche di una schiera si costruiscono i poli di un medesimo piano π si trova che tutti questi poli giacciono sopra una retta p detta polare di π rispetto alla schiera, che taglia le quattro facce del tetraedro autopolare comune 1234 di φ^2 e ψ^2 secondo un rapporto anarmonico indipendente dalla posizione di π: dunque anche le polari di tutti i piani dello spazio rispetto alla schiera determinata da φ^2 ψ^2 costituiscono un complesso tetraedrale.

Ora si sa che il rapporto anarmonico formato dai quattro punti secondo cui una retta sega le quattro facce di un tetraedro è uguale al rapporto anarmonico dei quattro piani secondo cui la retta medesima proietta i quattro vertici opposti del tetraedro, dunque il complesso tetraedrale che nasce dalla considerazione della schiera determinata da φ^2 e ψ^2 coincide col complesso tetraedrale che nasce dalla considerazione del fascio determinato dalle quadriche medesime.

Nè si creda che questo complesso tetraedrale sia un complesso speciale; perchè si ha inversamente che ogni complesso tetraedrale si può in infiniti modi pensare come costituito dalla totalità delle

polari dei punti dello spazio rispetto alle quadriche di un fascio.

Sia dato un complesso tetraedrale qualunque e siano: 1234 il suo tetraedro fondamentale, p una sua retta qualunque, α e β due piani qualsivogliano passanti per p.

Fra le ∞^3 quadriche (1) che hanno 1234 come tetraedro autopolare si scelgano quelle due φ^2 e ψ^2 rispetto alle quali α e β sono i piani polari di un certo punto P arbitrariamente scelto; il complesso tetraedrale generato dalle polari dei punti dello spazio rispetto al fascio determinato da φ^2 e ψ^2 avendo il tetraedro 1234 per tetraedro fondamentale e contenendo la retta p, come polare di P, coincide col complesso dato.

---

(1) Difatti le quadriche per le quali 1234 è un tetraedro autopolare sono date tutte dall'equazione

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 = 0$$

quando si prenda 1234 come tetraedro di riferimento. Ora in questa equazione tre coefficienti sono arbitrarii.

Anzi delle due quadriche φ^2 e ψ^2 una può scegliersi ad arbitrio fra quelle ∞^3 che hanno 1234 come tetraedro autopolare e l'altra ψ^2 arbitrariamente fra ∞^2 altre quadriche.

Infatti una volta fissata arbitrariamente la quadrica φ^2 se P è il polo rispetto a φ^2 di un piano qualunque π passante per p, una qualunque delle ∞^1 quadriche, di quelle ∞^3, rispetto alle quali P hà per piano polare un piano qualsivoglia passante per p associata con φ^2 determinerà un fascio generante il complesso tetraedrale considerato. —

Ora il piano π può assumere ∞^1 posizioni diverse dunque vi sono in conclusione ∞^2 quadriche che associate a φ^2 determinano un fascio generante il dato complesso tetraedrale.

Ci sarà utile in appresso la considerazione seguente.

Se si considera il complesso tetraedrale a cui dà luogo la schiera individuata dalle quadriche φ^2 e ψ^2 su ogni retta del complesso r si trovano due

punti R ed R' che sono i poli di un certo piano ρ rispetto a φ^2 e ψ^2; e viceversa. —

Ora questi due punti R ed R' si corrispondono nella collineazione prodotta (1) dalle due polarità rispetto a φ^2 e ψ^2; e questa collineazione genera il complesso considerato: dunque per un teorema ormai noto:

"Se una retta r del complesso ruota intorno a un punto P, descrivendo il cono del complesso relativo a quel punto i due punti R ed R' e che si trovano su di essa e che sono i poli di uno stesso piano rispetto a φ^2 e ψ^2 descrivono due cubiche del complesso."

---

(1) Una corrispondenza geometrica φ qualunque per la quale agli elementi A B C D.... corrispondono rispettivamente gli elementi A' B' C' D'.... s'indichi scrivendo:

$$\varphi = \begin{pmatrix} A' B' C' D' \dots \\ A\ B\ C\ D \dots \end{pmatrix}$$

Allora si chiama prodotto delle due corrispondenze geometriche:

$$\varphi = \begin{pmatrix} A' B' C' D' \dots \\ A\ B\ C\ D \dots \end{pmatrix}; \quad \varphi' = \begin{pmatrix} A'' B'' C'' D'' \dots \\ A' B' C' D' \dots \end{pmatrix}$$

e si indica con $\varphi\varphi'$ la corrispondenza

Consideriamo la schiera determinata da una quadrica arbitraria φ^2 e dal circolo immaginario all'infinito C_∞ considerato come inviluppo dei suoi piani tangenti; o in altri termini, la schiera delle quadriche omofocali con φ^2. Il complesso tetraedrale formato dalle polari di tutti i piani dello spazio rispetto a questa schiera sarà da noi chiamato complesso degli assi della quadrica φ^2.

Facciamo vedere innanzi tutto che tale complesso è pienamente determinato dalla sola quadrica φ^2

Infatti se r è una retta del complesso e π è il piano di cui essa è polare rispetto alla schiera, r contiene il polo P di π rispetto a φ^2 e il polo P_∞ di π rispetto a C_∞: ora tale polo è il polo della traccia all'infinito di π rispetto a C_∞ dunque la retta $r \equiv PP_\infty$ è perpendicolare

---

$$\varphi\varphi' = \begin{pmatrix} A'' & B'' & C'' & D'' & \ldots \\ A & B & C & D & \ldots \end{pmatrix}$$

(Vedi a pag. 108-9, dove abbiamo considerato la collineazione piana prodotta dalle polarità rispetto a due coniche).

al piano π.

Reciprocamente se una retta r è perpendicolare e coniugata a un piano π rispetto alla quadrica φ^2, essa è una retta del complesso.

Infatti in quanto la retta r è coniugata a π contiene il polo P di π rispetto a φ^2 e in quanto è perpendicolare a π contiene il polo P_∞ di π rispetto al circolo immaginario all'infinito.

Segue da ciò che il complesso degli assi può anche definirsi come costituito dalla totalità delle rette coniugate normali ai piani dello spazio rispetto alla quadrica φ^2.

Osserviamo che se una retta r appartiene al complesso vi appartiene anche la sua polare r' rispetto a φ^2, e che r ed r' sono fra di loro perpendicolari.

Infatti se r appartiene al complesso essa sarà coniugata normale di un certo piano π, e allora questo piano contiene la r', la r' è perpendicolare alla retta r e per la r si può condurre un pia-

no che sia perpendicolare alla r' e di
cui la r' contenga il polo.

Il punto P polo del piano π cui la
retta r del complesso è coniugata norma-
le si chiama fuoco della retta r.

Per giustificare la denominazione
di complesso degli assi dato al nostro com-
plesso faremo vedere che ogni retta del
complesso è asse di una certa sezione pia-
na della quadrica φ^2 e di un certo cono
circoscritto a φ^2.

Sia r una retta del complesso, P il
suo fuoco, π il suo piano coniugato nor-
male, r' la sua polare contenuta in π.
Allora se per r si conduce un piano π'
parallelo alla retta r', il piano π' sega
la φ^2 in una conica di cui r è l'asse.
Infatti il piano polare del punto all'infi-
nito della retta $\pi\pi'$, che è anche il pun-
to all'infinito della r' è un certo piano
passante per la retta r e quindi r, es-
sendo l'intersezione di questo piano con
π', per una proprietà nota della teoria
della polarità, è la polare di quel pun-
to all'infinito rispetto alla conica secon-

do cui π' sega φ^2. La retta r è dunque
un diametro di tale conica e ne è anche
un asse perchè la direzione della $\pi\pi'$ è
perpendicolare ad r.

Ma di più se si considera il cono cir-
coscritto a φ^2 col vertice nel punto $r\pi$ ri-
spetto a questo cono la retta r, che pas-
sa per P polo di π, è polare del pia-
no π; ma r è anche normale a π
dunque π è un asse di quel cono.

Il tetraedro fondamentale del com-
plesso degli assi è formato dai tre pia-
ni principali di φ^2 e dal piano all'in-
finito. Dunque tutti i coni del comples-
so sono coni equilateri (1) e tutte le
coniche del complesso sono parabole.

Al complesso appartengono tutte le
normali di φ^2: anzi si può dare una
definizione del complesso appunto in re-

---

(1) Un cono si dice equilatero (Schröter) quan-
do è circoscritto a un triedro trirettangolo, os-
sia a un triangolo autopolare di C_∞: allora
esso è circoscritto a infiniti altri triedri tri-
rettangoli (Reye - Geom. der L. - Abth. II^a p. 1[illegible]

sazione a queste normali.

Se m ed n sono due normali di φ^2 che si incontrano ed M ed N sono i loro piedi, la retta MN è una retta del complesso.

Infatti i piani polari dei punti M ed N essendo i piani tangenti a φ^2 in M ed N sono perpendicolari ad m ed n in quei punti e la loro intersezione sarà perpendicolare al piano MN. Ma la loro intersezione è anche la polare di MN, dunque MN appartiene al complesso.

Reciprocamente se una retta MN del complesso taglia la quadrica φ^2 in due punti M ed N le normali a φ^2 in M ed N si incontrano.

Infatti se MN è del complesso per essa può condursi un piano perpendicolare alla sua retta polare, il quale essendo perpendicolare a tutti i piani coniugati ad MN è perpendicolare anche ai piani tangenti in M ed N e quindi contiene le normali a φ^2 in questi punti.

Di qui segue la definizione del complesso da noi accennata. (Waelsch.) —

Il complesso degli assi non è evidente-

mente esaurito dalle normali di φ^2: ma è esaurito però dalle normali di tutte le quadriche omofocali con φ^2.

Che tali normali appartengano al complesso è evidente, che viceversa ogni retta del complesso è normale a una certa quadrica omofocale con φ^2, si vede subito.

Infatti se p è una retta del complesso degli assi essa è la polare di un certo piano π rispetto alla schiera delle quadriche omofocali con φ^2; quindi anche il suo punto $p\pi$ è polo di π rispetto a una certa quadrica Ψ^2 della schiera. Allora π è tangente a Ψ^2 e, come p è normale a π, p sarà la normale di Ψ^2 sul punto $p\pi$.

Le ∞^2 normali della quadrica φ^2 costituiscono una congruenza di cui l'ordine è 6, la classe è 2.

Per dimostrar questo sia A un punto arbitrario dello spazio, e si consideri il cono del complesso relativo ad A: i fuochi delle generatrici di questo cono si troveranno, per una osservazione fatta, sopra una cubica k^3 del complesso. La cubica k^3 incontra la quadrica φ^2 in sei punti che saranno fuochi di certe sei generatrici del cono A; e come questi fuochi si trovano anche su φ^2 le sei generatrici saranno sei normali della quadrica φ^2.

Invece sia α un piano qualunque e si consideri la parabola del complesso in esso contenuta: il luogo dei fuochi delle tangenti di questa curva è una retta tangente alla curva medesima.

Infatti quei fuochi sono i poli dei piani coniugati e normali ad α passanti per la retta $\mathfrak{A}$ calata perpendicolarmente su α dal suo polo: e quindi giacciono anch'essi sopra una retta e, che essendo la polare di e appartiene al complesso e tocca la parabola del complesso contenuta in α.

La retta taglia la conica secondo cui φ^2 è segata dal piano α in due punti M ed N che sono fuochi di due rette del complesso contenute in α e normali a φ^2 perchè M ed N giacciono su φ^2.

Tanto basta per assicurare quanto abbiamo asserito intorno all'ordine e alla classe della congruenza costituita dalle normali di φ^2.

Capitolo VI.°

Curve e sviluppabili

a) Generalità sulle curve piane e sui coni. Curve piane e coni algebrici.
b) Curve gobbe e sviluppabili.

Noi intendiamo per curva piana la linea tracciata nel piano da un punto che si muove con continuità sopra un piano in un certo senso secondo una determinata legge, assumendo una semplice infinità di posizioni; senza occuparci per ora se questa legge sia o no traducibile in formule che leghino fra di loro le coordinate del punto mobile.

Considerando la cosa in un modo così generale è evidente che non potremo parlare di ordine rispetto a una curva generica finchè non si pongano altre limitazioni alla definizione assunta, cosicchè pure prendendo per ora questa definizione ci riserveremo di limitarla in seguito per approfondire maggiormente lo studio di alcune curve.

Sia A un punto di una curva qualsiasi e supponiamo di indicare con A', A, A'', A'''..... le successive posizioni del punto mobile che descrive la curva con continuità in un determinato senso; cosicchè se noi supponiamo che tale senso sia appunto indicato dalla successione A', A, A''.... il punto della curva precedente ad A sarà A' e il punto seguente sarà A''. Allora noi definiremo come tangente della curva nel punto A la retta AA'' congiungente il punto A col punto seguente A''; definizione che coincide con l'altra adoperata comunemente nei testi di Calcolo differenziale, la quale definisce la tangente come la posizione limite di una corda AB della curva uscente da A, quando il punto B si avvicina indefinitamente al punto A.

Da quel che abbiamo detto segue che delle due rette $A'A$ ed AA'' la prima tocca la curva nel punto A', la seconda nel punto A, e quindi abbiamo che mentre nel punto A una sola retta è tangente

alla curva, per esso passano invece due tangenti alla curva infinitamente vicine.

Correlativamente alle curve noi considereremo gli inviluppi di rette e chiameremo inviluppo l'insieme delle ∞ posizioni successive di una retta che si muove nel piano con continuità secondo una determinata legge e in un certo senso; e chiamate $a'\ a\ a''\ a'''$.... le posizioni successive della retta mobile, chiameremo punto di contatto dell'inviluppo sulla retta a il punto $a\,a''$ in cui la a incontra la retta seguente. Allora sulla retta a l'inviluppo ha due punti di contatto infinitamente vicini; il punto di contatto della retta a e il punto $a'a$ che è il punto di contatto della retta a'.

Poste queste definizioni se noi supponiamo che un punto A descriva una curva trascinando con sè la sua tangente a per modo che mentre il punto A descrive la curva la tangente a assuma successivamente le posizioni di tutte le sue tangenti, noi otterremo che le tangenti di una curva formano un inviluppo, perchè esse possono tutte ottenersi col far muovere una retta nel piano secondo una legge determinata.

Similmente si ha che i punti di contatto di un inviluppo costituiscono una curva.

Chiameremo inviluppo aderente a una curva l'inviluppo formato dalle sue tangenti e curva aderente a un inviluppo la curva costituita dai suoi punti di contatto.

Se si considera l'inviluppo aderente a una curva data e poi la curva aderente a quell'inviluppo si trova di nuovo la curva data da prima: poichè se $A'A\,A''A'''$... sono posizioni successive del punto mobile sulla curva, $A'A$, AA'', $A''A'''$ ... sono le tangenti successive dell'inviluppo e quindi i punti di contatto sono ordinatamente A, A''.... che sono evidentemente punti della curva da cui siamo partiti.

Data adunque una curva ne discende la considerazione di un inviluppo e queste due forme sono talmente collegate fra di loro che è indifferente considerare l'una

a preferenza dell'altra.

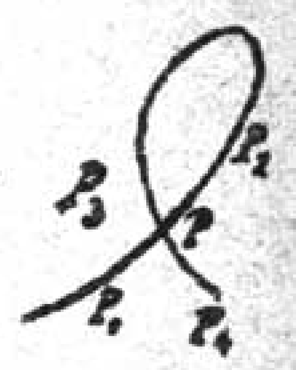
Se il punto mobile che descrive la curva ripassa per una posizione M che prima aveva già occupata, allora si dice che il punto M è un punto doppio della curva; e in generale si dice che il punto M è un punto r^{plo} quando il punto mobile che descrive la curva passa per esso r volte, per modo che in M vengono ad incrociarsi r rami della curva. Una retta la quale non passi per M ma sia molto prossima ad M taglia in un punto ciascuno dei rami che vengono a segarsi in M, e questo rimane sempre vero per quanto la retta si avvicini a quel punto; quindi se supponiamo che la retta venga infine a passare per M dobbiamo ritenere che tutte quelle r intersezioni cogli r rami vengono a riunirsi nell'unico punto M.

Cosicchè per es. se una curva ha costantemente n punti a comune con una retta (ossia è d'ordine n) essa avrà soltanto $n-r$ punti a comune con una retta che passi per un suo punto r^{plo} oltre questo punto medesimo.

Dualmente è ovvio il significato dell'espressione tangente r^{pla} di un inviluppo.—

La parte di curva formata dai due rami che vengono a ricongiungersi in un punto multiplo dicesi cappio.

Supponiamo di avere una curva con un punto doppio P; e consideriamo un punto mobile che descriva la curva: esso comincerà ad occupare su di un ramo la posizione precedente a P, P_1, poi occuperà la posizione P_2 successiva a P e descrivendo il cappio occuperà finalmente sull'altro ramo le posizioni successive P_3, P, P_4. Per il punto P dunque passano due coppie di tangenti successive alla curva P_1P, PP_2 e P_3P, PP_4, delle quali le due PP_2 e PP_4 sono le tangenti che possono condursi nel punto P ai due rami della curva. Inoltre, per una osservazione precedente, mentre ogni retta passante per P ha ivi due intersezioni coincidenti colla curva, le due tangenti PP_2 e PP_4 hanno colla curva una terza intersezione infinitamente vicina a P.

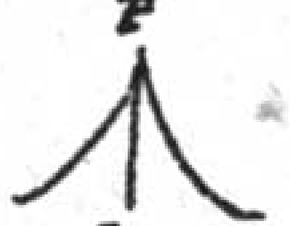


Viceversa, se da un punto partono due

coppie di tangenti successive alla curva quel punto è un punto doppio. Infatti in tal caso per quel punto, certo multiplo perchè altrimenti per esso passerebbe una sola coppia di tangenti successive, passano due rami della curva.

Si può dare il caso che le due tangenti in P coincidono ossia che la tangente in P al primo ramo PP_2 coincida colla tangente PP_4 in P al secondo ramo: allora per il punto P passano tre sole tangenti alla curva, il cappio si annulla e il punto P si dice un punto di regresso della curva.

Inversamente se per un punto P passano tre tangenti successive alla curva, il punto P è necessariamente un punto di regresso. Infatti in tal caso il punto P non può essere nè un punto semplice nè un punto doppio ordinario.



Se il punto P anzichè essere un punto doppio fosse un punto r^{plo} varrebbero considerazioni analoghe alle precedenti.

Se si prendono gli r punti precedenti

ti a P. sugli r rami passanti per esso e gli r seguenti, allora le 2r rette che congiungono P. con quei 2r punti sono r coppie di tangenti successive della curva passanti per P. Di esse r toccano la curva in P e mentre per una retta qualunque passante per P, si hanno r intersezioni colla curva condensate in P, per una di queste tangenti si hanno r+1 intersezioni colla curva delle quali r al solito riunite in P ed una infinitamente vicina a P.

Dualmente alle proprietà dei punti doppi o r^{pli} per le curve, abbiamo per gli inviluppi le proprietà delle tangenti doppie o r^{ple} in generale.

Sopra una tangente doppia p un inviluppo ha due coppie di punti di contatto successivi dei quali due sono i punti di contatto della tangente p; sopra una tangente r^{pla} p un inviluppo ha r coppie di punti di contatto successivi, dei quali r sono i punti di contatto della tangente p. E mentre per un punto qualunque preso su p si hanno r tangenti

dell'inviluppo passanti per esso e condensate in p, per uno di quei punti di contatto si hanno r+1 tangenti dell'inviluppo, r riunite in p ed una infinitamente vicina a p.

Quando i due punti di contatto di una tangente doppia p vengono a coincidere allora sulla p non si hanno che tre punti di contatto successivi e la tangente si dice stazionaria o di flesso; e si può notare che come l'avere sopra una retta due coppie di punti di contatto caratterizza una tangente doppia, così l'avere su una retta tre punti di contatto successivi definisce la tangente di flesso.

Osserviamo infine che mentre la curva dei punti di contatto non traversa una tangente ordinaria nel suo punto di contatto, traversa invece una tangente di flesso.

Supponiamo che un punto descriva una curva trascinando con sè la propria tangente; allora avverrà che il punto si muoverà sulla tangente in una ce ta direzione mentre la tangente ruoterà pure intorno al punto in un certo senso; e quando il punto descriverà la curva passando per un regresso esso cangierà direzione sulla tangente, mentre la tangente continuerà a ruotare sempre nel medesimo senso. La cosa opposta avviene quando la tangente passa per un flesso; allora la tangente cangia il senso di rotazione ma il punto di contatto continuerà sempre a muoversi sulla tangente nella direzione medesima.-

Questa considerazione giustifica le denominazioni punto di regresso e tangente di flesso.

Intendendo per superficie conica in una stella la superficie descritta da un raggio della stella che si muove con continuità secondo una determinata legge assumendo una semplice infinità di posizioni, si possono estendere immediatamente alle superficie coniche, o più brevemente ai coni, tutte le cose dette per le curve; come pure sarà facile definire gli inviluppi di piani ed estendere ad essi

le cose dette per gli inviluppi di rette. Avremo così per un cono i piani tangenti le generatrici doppie, r^{ple}, di regresso, ec. e per un inviluppo di piani le generatrici di contatto, i piani doppii, r^{pli}, di flesso o stazionarii ec. ed avremo, analogamente a quanto abbiamo detto pel piano, che i piani di un inviluppo sono i piani tangenti di un certo cono (quello formato dalle generatrici di contatto) e che le generatrici di un cono sono le generatrici di un inviluppo (quello formato dai piani tangenti.)-

Premesso ciò è evidente che se con un piano si sega un cono o un inviluppo di piani si ottengono una curva o un inviluppo di rette i cui elementi singolari sono sezioni degli elementi singolari del cono o dell'inviluppo; così a una generatrice di regresso o r^{pla} del cono corrisponderà un punto di regresso o r^{plo} della curva-sezione, sezione di quella generatrice e a un piano di flesso o r^{plo} dell'inviluppo di piani corrisponderà una retta di flesso o 2^{pla} dell'inviluppo di rette, sezione di quei piani. Viceversa è anche chiaro che proiettando una curva o un inviluppo di rette da un punto esterno al loro piano si ottiene un cono o un inviluppo di piani i cui elementi singolari sono proiezioni degli elementi singolari della curva o dell'inviluppo di rette.

Del resto tutto ciò non è che un caso particolare delle considerazioni seguenti assai più generali.

Supponiamo che fra due piani π e π_1 sia fissata una collineazione; allora ad ogni punto di π corrisponderà un punto di π_1 e ad ogni successione continua di punti in π corrisponderà in π_1 una successione di punti pure continua. — Da ciò segue che ad una curva k di π corrisponde per la collineazione in π_1 una curva k_1 e che i punti e le rette di π_1 corrispondenti ai punti 2^{pli}, ai punti di regresso alle tangenti 2^{pla} o di flesso della curva k, sono altrettanti punti 2^{pli} o di regresso e altrettante tangenti 2^{ple} o di flesso della curva k_1.

Invece, se due piani π e π_1 sono riferiti reciprocamente fra di loro, a una curva k di π corrisponde un inviluppo K_1 di π_1, a un punto 2^{plo} di k, una tangente 2^{pla} di K_1, a un punto di regresso di k una tangente di flesso di K_1, e a una tangente 2^{pla} o di flesso di k un punto 2^{plo} o di regresso di K_1. — Ec.

Considerazioni analoghe si potrebbero fare per sistemi piani e stelle collineari o reciproche e per stelle reciproche o collineari fra di loro.

Prima di lasciare quest'argomento osserviamo che con tutto questo siamo ben lungi dall'aver esaurito tutte le singolarità che una curva può presentare: esse possono rendersi per es. molto più complicate aggruppandole fra di loro in vario modo.

Supponiamo di avere per es. nel foglio del disegno una curva arbitraria e di voler costruire la tangente ad essa in un certo punto A con sufficiente approssimazione.

Si tirino delle corde della curva AA_1, AA_2, AA_3

dall'una parte del punto A e delle corde AB_1, AB_2, AB_3 dall'altra; poi descritto un cerchio di raggio qualunque col centro in A siano K_1, K_2, K_3, L_1, L_2, L_3 i punti posti da una stessa parte di A ove questo cerchio incontra le corde AA_1, AA_2, AA_3, AB_1, AB_2, AB_3. Allora a partire dai punti K_1, K_2, K_3 si portino sui raggi del cerchio corrispondenti delle lunghezze uguali alle corde AA_1, AA_2, AA_3 rispettivamente verso per es. l'interno del circolo, e una costruzione analoga si faccia pei punti L_1 L_2 L_3 riportando però i segmenti verso l'esterno del circolo. Gli estremi di questi segmenti costituiranno una curva detta curva d'errore che incontrerà il circolo in un punto che congiunto con A darà la tangente richiesta.

Ora di questa curva si possano costruire tanti punti quanti si voglino all'interno e all'esterno del circolo e quindi si può fare in modo che i due rami vengano ad avvicinarsi tanto da poterli poi congiungere con un curvilineo senza errore sensibile.

Proponiamoci al contrario di risolvere il problema:

"Data nel foglio del disegno una curva e una tangente ad essa, trovare il punto di contatto.

Per questo tiriamo delle corde della curva parallele alla tangente data t e dagli estremi di queste corde AB, A_1B_1, A_2B_2 caliamo altrettante perpendicolari su t (od oblique parallele in una direzione qualsiasi) di cui indicheremo ordinatamente i piedi con P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2; poi su queste perpendicolari a partire dai punti P, P_1, P_2 portiamo in un certo senso tanti segmenti uguali rispettivamente alle corde AB, A_1B_1, A_2B_2 e lo stesso facciamo dai punti Q, Q_1, Q_2 ma in senso opposto. In tal modo noi verremo a trovare su queste perpendicolari dei punti R, R_1, R_2, S, S_1, S_2 che congiunti fra di loro ci daranno una curva detta come precedentemente curva d'errore che col suo punto d'incontro colla tangente ci darà il punto di contatto richiesto. Ora di questa curva si possono costruire tanti punti quanti si vogliono dall'una e dall'altra parte della tangente t, e si può fare in modo che i due rami dall'una e dall'altra parte si accostino tanto da potere poi senza errore sensibile congiungerli senz'altro con un curvilineo, quindi se il disegnatore è molto abile può con questa costruire scegliere con maggior precisione il punto di contatto che coll'affidarsi all'occhio.

Essendo data una curva e la tangente a in un punto A di essa vi sono i circoli, costituenti un fascio, tangenti in A alla medesima tangente a e i cui centri si trovano tutti sulla normale in A alla curva; chiamando normale ad una curva in un punto, la perpendicolare alla tangente in quel punto elevata dal quel punto medesimo. Ora, come è noto, fra tutti questi circoli ve n'ha uno di grande importanza detto cerchio osculatore che ha a comune colla curva tre punti infinitamente vicini ad A e il cui centro detto centro di curvatura della curva in quel punto è dato dall'intersezione del-

la normale in A colla normale successiva. Quindi noi ci proponiamo il problema di costruire il cerchio osculatore ad una curva data nel foglio del disegno in un suo punto qualunque; o ciò che fa lo stesso di costruirne il centro.

Per questo condotta la normale in A alla curva (dopo aver costruito col metodo già dato la tangente) si tirino per A delle corde dalla curva dall'una e dall'altra parte della normale e siano queste le AA_1, AA_2, AA_3 .... AB_1, AB_2, AB_3... nei punti di mezzo di queste corde si elevino tante perpendicolari alle corde medesime e dai punti ove queste perpendicolari incontrano la normale P_1, P_2, P_3... Q_1, Q_2, Q_3 .... si elevino ancora delle perpendicolari alla normale medesima. Su queste perpendicolari si portino poi dei segmenti P_1R_1, P_2R_2, P_3R_3 .... Q_1S_1, Q_2S_2, Q_3S_3.... uguali rispettivamente alle corde AA_1, AA_2, AA_3 ... AB_1, AB_2, AB_3 .... i segmenti P_1R_1, P_2R_2 .... essendo diretti tutti in un medesimo senso e i segmenti Q_1S_1, Q_2S_2 ... essendo diretti tutti nel senso opposto. La curva d'errore $R_1 R_2 \ldots$ $S_1 S_2 \ldots$ è quella che col punto ove incontra la normale risolve il problema propostoci.

A questo punto noi lasciamo queste considerazioni affatto generali per rivolgerci allo studio di una classe interessantissima di curve piane.

Fra le curve piane di cui è possibile una rappresentazione analitica mediante un'equazione fra coordinate $f(x, y) = 0$ si distinguono le curve trascendenti da quelle algebriche chiamando trascendente o algebrica una curva secondochè è tale la funzione $f(x, y)$ che comparisce nel primo membro della sua equazione. Noi ci rivolgeremo allo studio delle curve algebriche e quindi, supponendo le coordinate omogenee, dovremo sempre occuparci di curve le cui equazioni avranno nel primo membro funzioni razionali intere ed omogenee delle tre coordinate correnti x_1, x_2, x_3.

Sia $f(x_1 x_2 x_3)$ una funzione razionale intera, omogenea delle tre

variabili x_1, x_2, x_3 di grado n o come dicesi brevemente una forma ternaria di grado n, e consideriamo la curva rappresentata dall'equazione

$$1) \qquad f(x_1 x_2 x_3) = 0 ;$$

io dico che il grado della forma $f(x_1, x_2, x_3)$ rappresenta il numero dei punti (reali distinti o coincidenti o immaginarii coniugati) che la curva rappresentata ha a comune con una retta qualunque del piano.—

Infatti se insieme all'equazione 1) di grado n consideriamo l'equazione lineare di una retta

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

per un noto teorema d'algebra vi saranno in generale n sistemi di valori dei rapporti $\frac{x_1}{x_3}$ e $\frac{x_2}{x_3}$ che soddisferanno alle due equazioni e quindi la retta considerata, che del resto è qualunque, avrà n punti a comune colla curva f.

Per questa proprietà il grado n della forma $f(x_1 x_2 x_3)$ si chiama anche l'ordine della curva rappresentata.

Dispa 51a

Nel caso particolare che l'equazione risultante del sistema or ora considerata fosse identica allora tutti i punti della retta apparterrebbero alla curva e la curva stessa si scinderebbe in quella retta e in una curva residua d'ordine $n-1$.— In tal caso la forma $f(x_1 x_2 x_3)$ è divisibile per il fattore lineare $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$. Anzi siccome si sa che affinchè una equazione di grado n^2 sia identica è necessario e sufficiente che essa ammetta $n+1$ radici; così possiamo enunciare il teorema:

"Una retta appartiene per intero ad una curva algebrica d'ordine n, se ha con essa $n+1$ punti a comune„

Da ciò risulta in particolare:

"Una curva d'ordine n con un punto n^{plo} P^{li} scinde nel sistema di n rette uscenti da P„

Questi due teoremi sono facilmente generalizzabili.

Una curva si dice riducibile o irriducibile secondochè tale è la forma che comparisce nel primo membro della sua equazione: Cosicchè quando la curva rappresentata dall'equazione di grado n:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

è riducibile allora la forma f si spezza nel prodotto di più forme $f_1, f_2, f_3 \dots$ i cui gradi $n_1, n_2, n_3 \dots$ soddisfano evidentemente alla relazione

$$n_1 + n_2 + n_3 \dots = n$$

e la curva si spezza in altrettante curve d'ordine $n_1, n_2 n_3 \dots$ costituenti ciascuna un tutto a sè.

Allora siano date due curve di ordine n ed m rispettivamente

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0 \quad \varphi(x_1 x_2 x_3) = 0$$

e cerchiamo quanti punti esse hanno a comune:

Il problema sarà risoluto immediatamente costruendo la resultante di f e φ e siccome questa resultante è di grado $n\,m$, così potremo dire che:

"In generale una curva d'ordine n e un'altra d'ordine m hanno $n\,m$ punti a comune„

Ma se la risultante di f e φ è un equazione identica e per questo basta che siano $n\,m+1$ le sue radici, allora le due equazioni

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0 \qquad \varphi(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

ammettono infiniti sistemi comuni di valori pei rapporti $\frac{x_1}{x_3}$ e $\frac{x_2}{x_3}$ che le soddisfano e quindi le due forme f e φ hanno certo a commune un fattore ψ. Questo dimostra che:

" Se una curva d'ordine n e un'altra d'ordine m hanno a commune $nm+1$ punti esse hanno a commune tutta una parte; e se in particolare una di esse è irriducibile, per es. la seconda, allora la prima si spezza in una curva irreducibile d'ordine m ed in una residua d'ordine $n-m$."

Se noi ordiniamo la forma ternaria f di grado n secondo le potenze decrescenti di x_1 per es., allora essa prende la forma:

$$u_0\, x_1^n + u_1\, x_1^{n-1} + u_2\, x_1^{n-2} + \dots \; u_{n-1}\, x_1 + u_n$$

dove u_i per l'omogeneità della f è una forma binaria di grado i^o tra le due variabili x_2 e x_3. Nella u_i compariscono pertanto $i+1$ coefficienti e quindi

in tutta la f:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

coefficienti, dei quali i rapporti di

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

fra essi al rimanente bastano a determinare completamente l'equazione della curva.

Segue da ciò che per $\frac{n(n+3)}{2}$ punti passa in generale una sola curva d'ordine n.

Infatti assoggettare una curva d'ordine n

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

a passare per un punto $(x_1'\, x_2'\, x_3')$ significa porre tra i coefficienti della f l'equazione lineare

$$f(x_1'\, x_2'\, x_3') = 0$$

ed è noto che in generale $\frac{n(n+3)}{2}$ equazioni fra altrettante incognite ammettono un solo sistema di soluzioni.

Così per es. per cinque punti passa in generale una sola curva di second'ordine, per nove punti una sola curva del terz'ordine, ecc. Ma è evidente che se per es. dei cinque punti che si danno per individuare una curva del secondo ordine quattro oppure tutti e cinque giacciono sopra una medesima retta, le curve che soddisfano al problema sono rispettivamente ∞^1 e ∞^2 e si spezzano tutte in coppie di rette. Noi vediamo di qui che appena la scelta dei cinque punti per fissare una curva del second'ordine si fa in modo da rendere il problema indeterminato le curve che si ottengono sono tutte riducibili; ma non bisogna credere che così avvenga in generale.

Ciò risulterà più chiaramente dalle considerazioni che seguono.

Se invece di dare $\frac{n(n+3)}{2}$ punti per fissare una curva d'ordine n se ne danno $\frac{n(n+3)}{2}-1$ allora tra i coefficienti della forma di grado n $f(x_1 x_2 x_3)$ si ha un numero d'equazioni inferiore di un'unità al loro, e quindi si possono soltanto determinare tutti in funzioni lineari di una qualunque di essi. Chiamando λ questo coefficiente che rimane arbitrario la forma $f(x_1 x_2 x_3)$ può scriversi

$$f_1(x_1 x_2 x_3) + \lambda f_2(x_1 x_2 x_3)$$

dove le f_1 ed f_2 sono ambedue forme ternarie di grado n con coefficienti noti e quindi le equazioni di tutte le curve d'ordine n passanti per i punti dati si ottengono dall'equazione:

$$f_1 + \lambda f_2 = 0$$

facendo variare λ tra $-\infty$ e $+\infty$. Esse sono ∞^1 passano per tutti i punti comuni alle curve.

$$f_1 = 0 \qquad f_2 = 0$$

e si dice che costituiscono un fascio.

Ora i punti che queste due curve hanno a comune sono n^2, quindi tutte le curve del fascio oltre gli $\frac{n(n+3)}{2}-1$ punti da cui siamo partiti hanno a comune altri

$$n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

punti a comune.

Così per es. le ∞^1 curve di terz'ordine passanti per otto punti hanno un nono punto a comune determinato da quegli otto, e le ∞^1 curve del quart'ordine passanti per tredici punti hanno altri tre punti a comune individuati da quei primi tredici.

Da ciò apparisce chiaro che se $\frac{n(n+3)}{2}$ punti non bastano a individuare una curva d'ordine n, le infinite curve che risolvono il problema possono benissimo non essere riducibili, contrariamente a quanto avviene nel caso delle coniche.

Conseguenze importanti del teorema or ora enunciato sono le seguenti.

– Una cubica piana non può avere più di sei punti a comune con una conica senza spezzarsi in essa e in una retta residua, pel fatto che due curve d'ordine m ed n hanno al più mn punti a comune. Allora supponiamo che due cubiche piane k^3 e k_1^3 abbiano sei punti a comune situati su una conica φ^2 e sia r una retta che contenga due delle tre ulteriori intersezioni di k^3 e k_1^3 – Le tre cubiche k^3, k_1^3 e quella formata dall'insieme della conica φ^2 e della retta r hanno otto punti a comune, e precisamente sei su φ^2 e due su r, dunque devono averne anche un nono. Quest'ultimo dovendo trovarsi sulla cubica spez-

zata in φ^2 ed r e non potendo giacere su φ^2 perchè altrimenti k^3 e k_1^3 avrebbero più di sei punti a comune con φ^2, è situato su r e quindi:

"Se dei nove punti comuni a due cubiche k^3 e k_1^3 sei giacciono su una conica φ^2, i tre rimanenti giacciono su una retta r."

Con un ragionamento perfettamente analogo si dimostrebbe che:

"Se, di nove punti comuni a due cubiche k^3 e k_1^3 tre giacciono su di una retta r, gli altri sei giacciono su una conica φ^2."

Di qui noi deduciamo come caso particolare il teorema di Pascal.

Sia $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un esagono semplice inscritto in una conica φ^2: io dico che i punti d'intersezione delle coppie di lati opposti giacciono sopra una retta.

Infatti se si considerano le due cubiche spezzate nelle terne di rette (A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6) e (A_2A_3, A_4A_5, A_6A_1) si ha che, dei loro nove punti a comune, sei, cioè $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ giacciono sulla conica q.^e dunque i tre rimanenti cioè i punti ove le rette A_1A_2; A_2A_3, A_3A_4 incontrano rispettivamente le rette A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1 giacciono sopra una linea retta.

Questo dimostra appunto il teorema di Pascal.

Per studiare più da vicino le singolarità che può presentare una curva algebrica d'ordine n, noi ci serviremo di un metodo già usato altra volta (pag. 92. e seg) e detto metodo di Joachimsthal.

Sia

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

l'equazione d'una curva algebrica d'ordine n, K^n, e siano $Y \equiv y_i$ $Z \equiv z_i$ due punti qualunque: le coordinate d'ogni altro punto della retta YZ saranno della forma $\lambda y_i + \mu z_i$ e quindi i punti ove la retta YZ incontra la curva K^n si avranno ponendo pel rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ in questa formula gli n suoi valori che soddisfano all'equazione di grado n in $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$f(\lambda y_1 + \mu z_1,\ \lambda y_2 + \mu z_2,\ \lambda y_3 + \mu z_3) = 0$$

Questa equazione può scriversi pel teorema di Taylor generalizzato:

$$1)\ \lambda^n f(y_1 y_2 y_3) + \frac{\lambda^{n-1}\mu}{1}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(1)} + \dots \frac{\lambda^{n-r}\mu^r}{r!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)} + \dots \frac{\mu^n}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(n)} = 0$$

dove è noto il significato del simbolo

$$\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)}$$

Prima di andare innanzi notiamo che tale sviluppo potrebbe anche porsi sotto la forma:

$$\mu^n f(z_1 z_2 z_3) + \dots \frac{\mu^r\lambda^{n-r}}{(n-r)!}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^{(n-r)} + \dots \frac{\lambda^n}{n!}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^{(n)} = 0$$

e quindi dovendo essere identiche le due somme che compariscono nei primi membri di questi sviluppi dovranno essere identicamente uguali i coefficienti di $\lambda^{n-r}\mu^r$ per $r = 1, 2, 3 \dots n-1$, cioè dovrà aversi:

$$2)\ \frac{1}{r!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)} = \frac{1}{(n-r)!}\left(y_1\frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2\frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial z_3}\right)^{(n-r)}$$

Supponiamo che il punto $Y \equiv y_i$ giaccia sulla curva K^n: allora

$$f(y_1 y_2 y_3) = 0$$

l'equazione 1) ammette la radice $\mu = 0$ ossia $\frac{\lambda}{\mu} = \infty$ che ci dà il punto Y, come era da prevedere, e liberata da questa radice si riduce all'equazione di grado

$(n-1)^{\circ}$ in $\frac{1}{\mu}$

3) $$\lambda^{n-1}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)+\frac{\lambda^{n-2}\mu}{2!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(2)}+\cdots \frac{\mu^{n-1}}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(n)}=0$$

che ci dà i rimanenti $n-1$ punti che la retta YZ ha a comune colla curva k^n. Se vogliamo che di questi punti ancora un altro coincida con Y dovrà essere il primo membro della 3) divisibile ancora identicamente per μ ossia dovrà essere identicamente:

4) $$z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=0$$

e quindi se supponiamo che il punto Z varii in modo che congiunto con Y dia una retta YZ di cui due intersezioni colla curva k^n coincidono in Y troviamo che il luogo di questo punto Z è la retta rappresentata dall'equazione 4) quando si considerino le Z_i come coordinate correntise.

Questa retta poi passa per il punto $Y \equiv y_i$ perché pel teorema d'Eulero è:

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial y_3}=nf(y_1y_2y_3)=0$$

quindi troviamo che fra tutte le rette

uscenti da Y in generale una sola incontra la curva in n punti di cui due coincidono con Y.

Essa è la tangente in Y alla curva. In forza dell'identità 2) l'equazione di tale tangente può scriversi ancora:

$$\left(y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+y_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-1)}=0$$

Nel caso particolare in cui fosse

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial y_2}=\frac{\partial f}{\partial y_3}=0$$

ogni retta uscente da Y incontrerebbe la curva in due punti coincidenti con Y e quindi Y sarebbe un punto doppio di k^n e viceversa se $Y \equiv y_i$ è un punto doppio deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial y_2}=\frac{\partial f}{\partial y_3}=0$$

quindi queste tre eguaglianze esprimono la condizione necessaria e sufficiente perché un punto $Y \equiv y_i$ sia un punto doppio della curva k^n, poiché dall'essere esse soddisfatte segue anche

$$f(y_1y_2y_3)=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}+\frac{\partial f}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)=0$$

In tal caso l'equazione 4) manca dei suoi due primi termini; è divisibile per μ^2 cioè ammette due radici $\frac{1}{\mu}=\infty$

con che troviamo due volte il punto Y e si riduce, liberata da queste radici all'equazione:

$$\frac{\lambda^{n-2}}{2!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(2)}+\dots\frac{\mu^{n-2}}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(n)}=0$$

di grado $(n-2)$ che ci dà gli $n-2$ punti rimanenti che la retta YZ ha a comune con k^n.

Se vogliamo che di questi punti ancora un altro coincida con Y dovrà essere come prima, identicamente,

$$\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(2)}=\sum_{i,k} z_i z_k\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_k}=0$$

e quindi troviamo che se il punto Z si muove in modo che congiunto con Y dia una retta YZ che abbia tre punti a comune con k^2 coincidenti con Y, il punto Z deve sodisfare colle sue coordinate all'equazione quadratica

$$5)\qquad \sum z_i z_k\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_k}=0$$

Io dico che questa equazione è l'equazione complessiva di due rette, delle due tangenti a k^n nel punto Y.

Per questo osserviamo che il discriminante di questa equazione:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_1} & \partial y_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2} \end{vmatrix}$$

è identicamente nullo perchè pel teorema di Eulero si ha:

$$y_1\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}+y_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_2}+y_3\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_3}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$$

$$y_1\frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_1}+y_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}+y_3\frac{\partial^2 f}{\partial y_2\partial y_3}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y_2}=0$$

$$y_1\frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_1}+y_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_3\partial y_2}+y_3\frac{\partial^2 f}{\partial y_3^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y_3}=0$$

senza che y_1, y_2, y_3 siano tutte nulle. Ciò porta che l'equazione 5) rappresenta una coppia di rette incrociantesi nel punto Y.

Possiamo provare anche questo in modo che possa estendersi facilmente ai casi seguenti:

Evidentemente per dimostrare che l'equazione 5) rappresenta una curva del second'ordine l^2 con un punto doppio nel punto Y.

Per questo osserviamo che se Y fosse soltanto un punto semplice di l^2, ogni retta uscente da Y incontrerebbe questa curva l^2 in un secondo punto $Z = z_i$ tale da aversi

$$\Sigma z_i z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0$$

e quindi qualunque retta uscente da Y incontrerebbe la curva in tre punti coincidenti con Y per il ragionamento precedente. Allora l'equazione

$$\Sigma z_i z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0$$

sarebbe identicamente soddisfatta perchè ad essa soddisferebbero le coordinate di ogni punto del piano e si avrebbe contro l'ipotesi fatta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

giacchè noi supponiamo che nel punto Y si annullino soltanto tutte le derivate prime.

Dimostrato che Y è un punto doppio di l^2, come l^2 è del secondo ordine, segue subito che l^2 si decompone in due rette uscenti da Y.

Se nel punto Y oltre che le derivate prime si annullassero anche tutte le derivate seconde, allora risulterebbe, da quanto abbiamo detto, che Y

è un punto triplo di k^n e si proverebbe in modo analogo al precedente che considerando le Z_i come coordinate correnti nell'equazione di terzo grado

$$\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(3)} = 0$$

questa rappresenta tre rette uscenti da Y e aventi in Y quattro punti a comune colla k^n.

In generale risulta subito il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto $Y = y_i$ di una curva k^n sia punto r^{plo} della curva stessa, rappresentata dall'equazione di n^o grado:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

è che in esso si annullino tutte le derivate parziali di ordine $1^o, 2^o \ldots (r-1)^o$ della funzione f prese rispetto a x_1, x_2, x_3, ma non tutte quelle di ordine r^o, altrimenti Y sarebbe un punto $(r+1)^{plo}$ della curva k^n.

Di più in tale ipotesi l'equazione

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)} = 0$$

rappresenta le r tangenti della curva nel punto Y."

Le condizioni a cui devono soddisfare le ogni retta uscente da y incontrerebbe questa curva l^2 in un secondo punto $z = z_i$ tale da aversi

$$\sum z_i z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0$$

e quindi qualunque retta uscente da y incontrerebbe la curva in tre punti coincidenti con y per il ragionamento precedente. Allora l'equazione

$$\sum z_i z_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0$$

sarebbe identicamente soddisfatta perchè ad essa soddisferebbero le coordinate di ogni punto del piano e si avrebbe contro l'ipotesi fatta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

giacchè noi supponiamo che nel punto y si annullino soltanto tutte le derivate prime.

Dimostrato che y è un punto doppio di l^2, come l^2 è del secondo ordine, segue subito che l^2 si decompone in due rette uscenti da y.

Se nel punto y oltre che le derivate prime si annullassero anche tutte le derivate seconde, allora risulterebbe, da quanto abbiamo detto, che y

è un punto triplo di k^n e si proverebbe in modo analogo al precedente che considerando le z_i come coordinate correnti nell'equazione di terzo grado

$$\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + z_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(3)} = 0$$

questa rappresenta tre rette uscenti da y e aventi in y quattro punti a comune con k^n.

In generale risulta subito il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto $y = y_i$ di una curva k^n sia punto r^{plo} della curva stessa, rappresentata dall'equazione di n^o grado:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0$$

è che in esso si annullino tutte le derivate parziali di ordine $1^o, 2^o \dots (r-1)^o$ della funzione f prese rispetto a x_1, x_2, x_3, ma non tutte quelle di ordine r^o, altrimenti y sarebbe un punto $(r+1)^{plo}$ della curva k^n.

Di più in tale ipotesi l'equazione

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)} = 0$$

rappresenta le r tangenti della curva nel punto y."

Le condizioni a cui devono soddisfare le coordinate del punto Y perchè esso sia un punto r^{plo} di k^n si possono evidentemente ridurre a queste soltanto: basta che nel punto $Y \equiv y_i$ si annullino tutte le derivate parziali d'ordine $(r-1)^\circ$ della funzione $f(x_1\, x_2\, x_3)$ ma non tutte quelle d'ordine r.

Infatti pel teorema di Eulero dall'annullarsi di tutte le derivate parziali d'ordine $(r-1)^\circ$ segue che si annullano tutte quelle d'ordine $(r-2)^\circ$; dall'annullarsi di queste segue l'annullamento di quelle d'ordine $(r-3)^\circ$ e così via via fino a che dall'annullarsi delle derivate prime segue che anche $f(y_1\, y_2\, y_3) = 0$ e che quindi Y giace su k^n.

Quindi possiamo enunciare brevemente il nostro teorema così:

"Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto $Y \equiv y_i$ sia un punto r^{plo} della curva d'ordine k^n rappresentata dall'equazione:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

e che sia identicamente nulla l'espressione:

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{r-1}$$

e non l'altra

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}\right)^{(r)}$$

Anzi quest'ultima uguagliata a zero dà l'equazione complessiva delle r tangenti della curva nel punto Y."

In forza dell'identità 2) l'equazione complessiva delle r tangenti di una curva in un suo punto r^{plo} $Y \equiv y_i$ può scriversi ancora:

$$6)\quad \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-r)} = 0$$

e nel punto Y si avrà identicamente

$$7)\quad \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-r+1)} = 0$$

Supponiamo che, essendo 123 il triangolo di riferimento rispetto a cui si considerano le coordinate, il vertice 1 sia un punto r^{plo} della curva k^n rappresentata dall'equazione di n° grado:

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0:$$

io dico che questa equazione ordinata rispetto alle potenze decrescenti della coordinata x_1 prende la forma:

$$u_r x^{n-r} + u_{r+1} x^{n-r-1} \ldots + u_{n-1} x + u_n = 0$$

dove u_s, come al solito è una forma binaria di s° grado delle due variabili x_2 e x_3

per ciò basterà far vedere che posta l'equazione di k^n sotto la forma

8) $\quad u_0 x^n + u_1 x^{n-1} + \ldots u_{r-1} x^{n-r+1} + u_r x^r + \ldots u_n = 0$

deve essere

$$u_0 = u_1 = \ldots u_{r-1} = 0$$

Intanto poichè il vertice 1 appartiene alla curva k^n l'equazione 8) deve essere soddisfatta per le coordinate $y_1 = 1, y_2 = y_3 = 0$ del punto 1 e quindi deve essere intanto $u_0 = 0$. Poi siccome 1 è anche un punto doppio della curva k deve essere identicamente nulla l'espressione:

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y \frac{\partial f}{\partial x_2} + y \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} = 0$$

che per essere $y_2 = y_3 = 0$ si riduce a: $y_1^{n-1} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}$

e quindi deve essere identicamente

$$\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1^{n-1}} = 0$$

ossia derivando la 8) deve essere identicamente:

$$u_1 = 0$$

Ma per l'ipotesi il vertice 1 è anche un punto triplo della curva k^n e quindi deve essere identicamente nulla l'espressione:

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-2)}$$

ossia per essere $y_2 = y_3 = 0$ deve essere identicamente

$$\frac{\partial^{n-2} f}{\partial x_1^{n-2}} = 0$$

o ciò che fa lo stesso

$$u_2 = 0$$

Si vede pertanto proseguendo in questo modo il ragionamento che se il vertice 1 è un punto r^{plo} della curva k^n l'equazione di questa prende la forma:

$$u_r x^{n-r} + \ldots\ldots u_n = 0$$

e l'equazione complessiva delle sue r tangenti nel punto 1 è data dal porre

$$u_r = 0$$

Infatti essa è data in generale per la 6) da:

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(n-r)} = 0$$

e quindi nel nostro caso essendo $y_2 = y_3 = $

$$\frac{\partial^{n-r} f}{\partial x_1^{n-r}} = 0$$

ossia da $u_r = 0$

Da questo teorema noi dedurremo l'altro:

"Se due curve d'ordine n ed m rispettivamente hanno un punto V a comune che sia r^{plo} per la prima ed s^{plo} per la seconda esse hanno oltre V altri $mn-$

punti a comune".

Infatti se si prende come vertice 1 del triangolo di riferimento il punto Y, le equazioni delle due curve d'ordine n ed m prendono la forma

$$u_r x_1^{n-r} + u_{r+1} x_1^{n-r-1} + \dots \; u_n = 0$$
$$v_s x_1^{m-s} + v_{s+1} x_1^{m-s-1} + \dots \; v_m = 0$$

e i loro punti a comune si otterranno costruendo la resultante di queste due equazioni, resultante che rispetto al quoziente $\frac{x_2}{x_3}$ è di grado $nm - rs$. Ciò porta appunto che le curve hanno oltre il punto Y altri $nm - rs$ punti a comune e quindi, in ordine a un teorema generale già dimostrato, dobbiamo dire che il punto Y assorbe rs intersezioni delle due curve.

Si voglia che una curva d'ordine n passi per un punto Y e abbia quel punto come punto r^{plo}: allora se indichiamo con

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$$

l'equazione di k^n dovranno essere nulle nel punto Y tutte le derivate parziali d'ordine $(r-1)^\circ$ cioè dovranno essere

soddisfatte dai coefficienti della f tutte le equazioni ~~della~~ forma:

$$\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_1^{t_1}\, \partial x_2^{t_2}\, \partial x_3^{t_3}} = 0$$

che si ottengono da questa facendovi in tutti i modi possibili:

$$t_1 + t_2 + t_3 = r-1$$

Esse sono in tutto $\frac{r(r+1)}{2}$ e sono lineari nei coefficienti: quindi siccome per individuare una curva d'ordine n occorrono in generale $\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni lineari, così se vogliamo che una curva d'ordine n abbia in un punto dato un punto r^{plo} restano soltanto

$$\frac{n(n+3)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}$$

condizioni disponibili.

Invece se noi vogliamo che una curva k^n abbia un punto r^{plo} ma non fissiamo la posizione di questo, allora dovranno essere nulle per certi valori di $(x_1\, x_2\, x_3)$ tutte le derivate parziali d'ordine $(r-1)^\circ$ dell'equazione rappresentativa della curva $f(x_1\, x_2\, x_3) = 0$; cosicché se fra queste $\frac{r(r+1)}{2}$ relazioni eliminiamo i rapporti $\frac{x_1}{x_3}$ e $\frac{x_2}{x_3}$ restano $\frac{r(r+1)}{2} - 2$ relazioni che devono essere soddisfatte dai coefficienti della f.

Questo dimostra che una curva generale d'ordine n non ammette punti multipli, poichè infatti dall'esistenza di questi seguono delle relazioni pei coefficienti dell'equazione della curva che in generale non sono soddisfatte.

Quanto al numero dei punti doppii d'una curva possiamo dimostrare il teorema seguente:

"Una curva irriducibile d'ordine n non può avere più di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppii."

Sia Δ il numero dei punti doppii della curva irriducibile d'ordine n, k^n, e si faccia passare per $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ suoi punti, fra i quali si trovino quei Δ punti doppî una curva d'ordine $n-1$, k^{n-1}. Le due curve k^n e k^{n-1} avranno in ciascuno di quei Δ punti due intersezioni coincidenti, almeno, e nei rimanenti $\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\Delta$ punti almeno altrettante intersezioni: quindi deve essere:

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\Delta+2\Delta \leq n(n-1)$$

poichè esse hanno $n(n-1)$ punti a comune.

Di qui si ricava

$$\Delta \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

Così una curva irriducibile del terz'ordine non può avere più di un punto doppio, una curva irriducibile del quart'ordine non può averne più di tre, etc.

A completare il teorema or ora dimostrato potremmo far vedere che si può effettivamente costruire una curva d'ordine n con $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppii: noi lo proveremo per le curve del terzo e quart'ordine servendoci per questo della trasformazione quadratica.

Abbiamo visto come trasformando quadraticamente un piano π in un altro π' si trova che la corrispondenza è biunivoca per tutti i punti dei due piani tranne che per i vertici dei due triangoli fondamentali ABC ed $A'B'C'$, e che ad una conica di π circoscritta al triangolo ABC, corrisponde in π' una retta, come ad una retta di π corrisponde in π' una conica circoscritta ad $A'B'C'$.

Noi faremo vedere adesso come ad una conica k^2 di π passante per uno dei vertici del triangolo ABC per es. per A, corrisponda in π' una curva del terz'ordine, l^3, avente in A' un punto doppio.

Infatti se noi chiamiamo l^3 la linea di π' corrispondente alla conica k^2 di π e cerchiamo i punti che essa ha a comune con una retta qualunque r' di π' troviamo che questi punti corrispondono ai punti che la conica k^2 ha a comune con la conica ρ^2 di π, circoscritta ad ABC e corrispondente alla retta r' di π', tranne il punto A. Ora k^2 e ρ^2 hanno tre punti a comune oltre A dunque la linea l^3 essendo incontrata da una retta qualunque in tre punti è una curva del terz'ordine. Essa passa per A' poichè A' corrisponde in π' ai due punti M ed N che k^2 ha a comune con la retta BC, ed ha in esso un punto doppio perchè se immaginiamo che un punto X descriva la curva k^2 mentre che il punto corrispondente X' descrive la curva l^3 troviamo che X' deve passare per A' due volte e precisamente quando X assume le posizioni

M ed N.

Con ciò abbiamo costruito una curva indecibile del terz'ordine avente un punto doppio, e dalla costruzione segue anche che prendendo la conica k^2 in modo che tocchi il lato BC la curva del terz'ordine corrispondente l^3 ha in A' un punto di regresso.

Invece si prenda in π una conica qualunque k^2 non passante per alcun vertice del triangolo fondamentale ABC; ad essa corrisponderà in π' una curva del quart'ordine avente in A', B', C' tre punti doppii, per ragioni analoghe alle precedenti. Se la conica k^2 è tangente ai tre lati del triangolo ABC la curva corrispondente del quart'ordine ha nei tre punti A', B', C' tre punti di regresso.

Finora noi abbiamo considerato soltanto le curve algebriche ma si capisce senz'altro che partendo da una equazione omogenea di m^o grado in coordinate di rette

$$\varphi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

avremmo trovato altrettante proprietà

correlative per gli inviluppi algebrici. Così per es. avremmo visto che il grado n dell'equazione φ detto classe dell'inviluppo rappresenta il numero delle rette dell'inviluppo passanti per un punto e avremmo trovato che la condizione necessaria e sufficiente perchè una retta $e = \eta_i$ sia tangente r^{pla} di un inviluppo di n^a classe.

$$\varphi(\xi_1 \xi_2 \xi_3) = 0$$

è che sia identicamente nulla l'espressione:

$$\left(\xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_3}\right)^{(r-1)}$$

mentre l'equazione di r^o grado

$$\left(\xi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} + \xi_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_2} + \xi_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_3}\right)^{(r)} = 0$$

rappresenta allora gli r punti di contatto della tangente r^{pla} e.

L'inviluppo aderente a una curva algebrica è un inviluppo algebrico.

Infatti se l'equazione di una curva d'ordine n è

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

l'equazione della tangente alla curva in un suo punto $Y = y_i$ è

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

e quindi le coordinate ξ_i di tal retta sono date da:

$$\xi_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1}\ ,\ \xi_2 = \frac{\partial f}{\partial y_2}\ ,\ \xi_3 = \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

Eliminando y_1, y_2, y_3 fra queste tre uguaglianze e l'altra:

$$f(y_1\ y_2\ y_3) = 0$$

si ottiene una equazione fra le ξ

$$\varphi(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3) = 0$$

che è appunto l'equazione dell'inviluppo aderente alla curva data. Esso è dunque un inviluppo algebrico.

Per studiarne più da vicino la natura premettiamo le denominazioni seguenti.

Se $Y = y_i$ è un punto della curva di n^o ordine

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

l'equazione lineare

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

rappresenta la tangente alla curva nel punto Y: se il punto Y è fuori della curva, noi continueremo a considerare la retta rappresentata da quell'equazione e la chiameremo polare del punto Y rispetto alla curva; cosicchè la polare di un punto della curva coincide colla tangente alla curva in quel punto.

L'equazione di $(n-1)^o$ grado

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

rappresenta una curva di $(n-1)^o$ ordine che noi chiameremo prima polare del punto Y rispetto alla data: e in generale si chiama polare r^a del punto Y rispetto alla curva data la curva d'ordine $n-r$ rappresentata dall'equazione

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^{(r)} = 0$$

Adesso noi siamo in grado di provare il seguente teorema:

"La classe dell'inviluppo aderente a una curva algebrica d'ordine n è data in generale da $n(n-1)$"

Infatti preso un punto qualunque $Y \equiv y_i$ del piano sia YZ una retta uscente da Y e tangente alla curva data k^n

$$f(x_1\ x_2\ x_3) = 0$$

nel punto $Z \equiv z_i$; l'equazione della retta YZ sarà:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0$$

e quindi sarà

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0$$

il che dimostra che il punto Z oltre che su k^n si trova anche sulla prima polare del punto Y.

Viceversa se $Z \equiv z_i$ è un punto commune alla curva k^n e alla prima polare del punto Y sarà:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial z_3} = 0$$

e quindi la tangente a k^n in Z passerà per Y. Ora la curva data e la prima polare di Y essendo rispettivamente d'ordine n ed $n-1$ hanno $n(n-1)$ punti a commune dunque pel punto Y passano $n(n-1)$ tangenti di k^n e la classe richiesta, che suole dirsi senz'altro classe della curva k^n, è data da $n(n-1)$.

Questo risultato è dovuto al Poncelet.

Esso mostra ancora che:

"I punti di contatto delle tangenti condotte da un punto qualunque ad una curva d'ordine n giacciono su una curva d'ordine $n-1$"

Così per es. i sei punti di contatto delle sei tangenti condotte da un punto qualunque ad una curva del terz'ordine giacciono sopra una conica.

Noi abbiamo supposto nella dimostrazione precedente che la curva data k^n sia generale, cioè che non ammetta punti singolari, poichè in tal caso come vedremo meglio, la classe della curva si abbassa.

Se la curva k^n ha un punto doppio P la retta che congiunge il punto P con un punto qualunque del piano Y non si suole considerare come tangente alla curva nel punto P, per quanto ciò per un certo rispetto potesse farsi: ora siccome dall'ispezione dell'equazione della prima polare risulta subito che essa passa per tutti i punti doppii della curva k^n e siccome si dimostra che vi passa semplicemente cioè che essi non sono suoi punti multipli e che in essi non tocca alcun ramo della curva k^n, così se questi punti doppii sono in tutto d, le ulteriori intersezioni di k^n e della prima polare di un punto Y si riducono ad $n(n-1)\,2d$ e altrettante saranno le tangenti di k^n uscenti dal punto Y.

Se invece la curva k^n ha un punto di regresso, si dimostra che non solo la prima polare di ogni punto Y passa per quel punto di regresso, ma che anche in esso tocca uno dei rami della curva k^n, quindi se k^n ha k punti di regresso le ulteriori intersezioni di k^n e della prima polare del punto Y si riducono ad $n(n-1)-3k$ e altrettante saranno le tangenti della curva passanti per Y.

Da queste osservazioni si deducono le formule seguenti:

"La classe m di una curva k^n di n^o ordine avente d punti doppii e k punti di regresso è data da:

9) $\quad m = n(n-1) - 2d - 3k\,,$

Correlativamente:

"L'ordine n di un inviluppo di m^a classe avente t tangenti doppie ed i tangenti di flesso è dato da:

10) $\quad n = m(m-1) - 2t - 3i\,$"

Adesso siccome abbiamo dimostrato che l'esistenza di un punto doppio per una curva k^n porta ad una relazione fra i coefficienti dell'equazione di k^n e siccome si potrebbe anche dimostrare che l'esistenza di un punto di regresso porta a due relazioni fra i coefficienti medesimi, così possiamo dire che per fissare una curva k^n d'ordine n con d punti doppii e k punti di regresso possono darsi soltanto

$$\frac{n(n+3)}{2} - d - 2k$$

condizioni indipendenti fra i coefficienti della sua equazione.

Ma se indichiamo con m la classe dell'inviluppo aderente alla curva k^n, con t ed i il numero delle sue tangenti doppie e delle sue tangenti di flesso, otteniamo in modo analogo che per fissarne l'equazione si possono dare soltanto

$$\frac{m(m+3)}{2} - t - 2i$$

condizioni indipendenti fra i coefficienti, dunque deve aversi:

$$11)\quad \frac{n(n+3)}{2} - d - 2k = \frac{m(m+3)}{2} - t - 2i.$$

Le tre formule 9), 10), 11) fondamentali nella teoria delle curve sono dovute al Plücker, e possono servire combinandole convenientemente a dedurne

molte altre. Noi esporremo le più interessanti

Sottraendo la 10) dalla 9) si ha:

$$m - n = n(n-1) - m(m-1) - 2(d-t) - 3(k-i)$$

ossia

$$2(d-t) - 3(k-i) = n(n-1) - m(m-1) - (m-n);$$

D'altronde dalla 11) si ricava

$$(d-t) + 2(k-i) = \frac{n(n+3)}{2} - \frac{m(m+3)}{2}$$

dunque, risolvendo rispetto alle differenze $(d-t)$ e $(k-i)$.

$$12)\quad 2(d-t) = (n-m)(n+m-9)$$

$$13)\quad (k-i) = 3(n-m).$$

Queste due formule danno subito i teoremi seguenti:

"Se per una curva k^n il numero dei punti di regresso eguaglia quello delle tangenti di flesso l'ordine n della curva è uguale alla classe della medesima; e inversamente."

"Se per una curva k il numero dei punti di regresso eguaglia quello delle tangenti d'flesso l'ordine n della curva è uguale alla classe della medesima, e inversamente"

"Se per una curva k^n il numero

dei punti doppii uguaglia quello delle tangenti doppie, l'ordine e la classe della curva sono uguali, oppure la somma dell'ordine e della classe è uguale a nove; e inversamente„

Dalle 12) e 13) si ricava

$$(d-t)+(k-i)=\frac{(n-m)(n+m-9)}{2}+3(n-m)$$

ossia riducendo e trasportando:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-k=\frac{(m-1)(m-2)}{2}-t-i;$$

questo numero $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d-k$ uguale al suo correlativo, essenzialmente positivo se la curva è irriducibile, per un teorema dimostrato sul numero dei punti doppii, si indica con p e si chiama il genere (Riemann-Clebsch) della curva k^n. La considerazione del genere ha importanza grandissima nella teoria delle curve piane, tanto più che il Clebsch ha dimostrato che la difficoltà dello studio di una curva aumenta coll'aumentare del genere.

Le coniche sono curve del genere 0; le cubiche del genere 1 se sono generali: invece una cubica che ammetta un punto doppio è anch'essa del genere 0.

Dalle formule 12) e 13) combinate colle 9) e 10 si possono dedurre i valori di d e k in funzione dei numeri m, t, i relativi alla classe della curva, e i valori di t ed i in funzione dei numeri n, d, k relativi all'ordine: noi daremo solo le più interessanti:

$$k=3m(m-2)-6t-8i$$

$$i=3n(n-2)-6d-8k$$

Esse ci mostrano immediatamente che la curva generale d'ordine n e classe $n(n-1)$ non è la più generale della sua classe.

Difatti se la curva k^n è una curva generale d'ordine n, per essa $d=k=0$ e quindi il numero delle sue tangenti di flesso è dato da:

$$i=3n(n-2)$$

mentre la curva generale della classe $n(n-1)$ non ammette nessuna tangente di flesso.

D'altronde ciò risulta anche dal fatto che la curva aderente all'inviluppo generale di classe $n(n-1)$ ha per ordine:

$$n(n-1)[n(n-1)-1].$$

Il teorema soffre eccezione nel caso di $n=2$: invece per $n=3$ dà subito l'altro: "Una curva generale del terz'ordine ammette nove tangenti di flesso."

b) Curve gobbe e sviluppabili.

Intendiamo per curva gobba il luogo descritto da un punto che si muove nello spazio con continuità secondo una certa legge e assumendo una semplice infinità di posizioni in modo che quattro sue posizioni generiche non si trovino mai in uno stesso piano.

Tra le curve gobbe di cui è possibile una rappresentazione analitica mediante equazioni si distinguono le curve trascendenti dalle curve algebriche: notiamo però che per tale rappresentazione occorrono almeno due equazioni fra le coordinate del punto mobile che descrive la curva e al più quattro.

Chiameremo tangente alla curva gobba in un suo punto A la retta che congiunge A col punto immediatamente

successivo; piano tangente alla curva nel punto A un piano qualunque passante per la tangente alla curva in quel punto e piano osculatore della curva nel punto A, il piano AA_1A_2 contenente il punto A e i due punti immediatamente successivi A_1A_2; quindi in ogni suo punto una curva gobba ammette una sola tangente mentre per esso ne passano due infinitamente vicine, quella nel punto e quella nel punto precedente, e in ogni suo punto un solo piano osculatore mentre per esso ne passano tre infinitamente vicini.

Infatti se $A'A''AA_1A_2$ sono cinque punti consecutivi della curva i piani $A'A''A$, $A''AA_1$, AA_1A_2 osculano tutti la curva e passano per A.

Correlativamente chiameremo sviluppabile l'insieme delle posizioni di un piano che si muove con continuità nello spazio secondo una determinata legge assumendo ∞^1 posizioni diverse, in modo che quattro generiche di esse non passino mai per uno stesso punto. Se... $\pi'\pi''\pi$, sono posizioni successive del piano mobile la retta $\pi\pi_1$ intersezione di un piano della sviluppabile col piano successivo si dice generatrice di contatto della sviluppabile nel piano π e il punto $\pi\pi_1\pi_2$ intersezione del piano π coi due piani successivi si dice punto di regresso della sviluppabile nel piano π.

Poste queste definizioni segue subito che i piani osculatori di una cubica gobba costituiscono una sviluppabile detta sviluppabile aderente od osculatrice della curva e che i punti di regresso d'una sviluppabile costituiscono una curva gobba detta spigolo di regresso della sviluppabile; in modo che i punti di regresso e le generatrici di contatto della sviluppabile aderente ad una curva gobba siano i punti e le tangenti della curva, e che le tangenti e i piani osculatori dello spigolo di regresso d'una sviluppabile siano le generatrici di contatto e i piani della sviluppabile stessa. Quindi lo studio di una curva gobba è inseparabile dallo studio della sviluppabile

osculatrice e viceversa.

Se si trasforma mediante la legge di dualità una curva gobba, coi suoi punti le sue tangenti ed i suoi piani osculatori si ottiene una sviluppabile colle sue generatrici di contatto e i suoi punti di regresso: ma vi sono altri due enti strettamente connessi alla curva ed alla sviluppabile che sono pure correlativi tra di loro.

Se si considerano tutti i piani tangenti ad una curva gobba si ha una doppia infinità di piani costituenti un inviluppo di piani: come pure i punti di tutte le generatrici di contatto di una sviluppabile costituiscono una superficie; chiameremo quell'inviluppo inviluppo aderente alla curva gobba e questa superficie superficie sviluppabile aderente alla sviluppabile.

Queste due forme sono molto interessanti anche per questo; che mentre per es. una curva gobba di cui sia possibile la rappresentazione analitica pensata come luogo di punti richiede almeno due equazioni e al più quattro in coordinate di punto, pensata come inviluppo di piani richiede una sola equazione in coordinate di piano.

Di ciò abbiamo già avuto degli esempi. Limitandoci per ora alla superficie sviluppabile notiamo che essa può pensarsi come descritta da una retta mobile in modo che ogni sua posizione incontri la successiva.

È noto che se, data una superficie qualunque in un punto di essa si tirano tutte le tangenti alle curve passanti per quel punto e che giacciono sulla superficie, queste tangenti riempiono in generale un piano, detto piano tangente alla superficie in quel punto; quindi il piano tangente in un punto può anche definirsi come il piano contenente tutte le rette che congiungono quel punto coi suoi punti infinitamente vicini giacenti sulla superficie.

Dopo ciò dimostriamo il teorema:

"I piani tangenti alla superficie svilup-

pabile aderente ad una sviluppabile nei punti di una sua generatrice coincidono con un piano osculatore dello spigolo di regresso della sviluppabile."

Infatti sia: g_1 una generatrice della superficie sviluppabile, g_2 la generatrice successiva e P un punto qualunque di g_1: le rette congiungenti il punto P coi punti della g_2 sono rette congiungenti il punto P con punti infinitamente vicini e quindi il piano tangente alla superficie in P è il piano $g_1 g_2$ che è un piano osculatore dello spigolo di regresso suddetto.

La superficie considerata si chiama sviluppabile perchè essa si può distendere sopra un piano senza rotture o ripiegature.

Infatti la superficie possiamo pensarla come divisa in tante strisce infinitesime comprese tra generatrici successive, e quindi se portiamo nel piano $g_1 g_2$ di una di queste strisce tutte le altre con successive rotazioni, verremo in fine a distendere tutta la superficie sul piano coprendo il piano una o più o infinite volte ma senza mai eseguire su di essa rotture o ripiegature.

Ad ogni linea tracciata sulla superficie verrà a corrispondere, quando questa sia sviluppata sopra un piano, una linea piana che noi diremo la trasformata di quella linea, ed è chiaro che l'arco AB della linea compreso fra due suoi punti A e B è uguale in lunghezza all'arco corrispondente A'B' della trasformata.

Infatti l'arco AB si può pensare come costituito dalle sue parti rettilinee infinitesime comprese nelle strisce infinitesime della superficie e questi segmenti infinitesimi si mantengono inalterati nello sviluppo.

Questo poi mostra ancora che se una linea tracciata sulla superficie fa un certo angolo α con una generatrice g, anche la trasformata fa colla posizione che g prende nello sviluppo lo stesso angolo α.

Invece non sono uguali gli angoli di contingenza della linea e della trasformata cioè gli angoli formati dal

tangenti successive.

Siano $g_1\, g_2\, g_3$ tre generatrici successive della sviluppabile, AB e BC i segmenti infinitesimi rettilinei della linea considerata compresi nelle strisce infinitesime $g_1 g_2$ e $g_2 g_3$: se supponiamo di sviluppare la superficie nel piano $g_1 g_2$ i punti A e B saranno ancora punti della trasformata e il punto C si porterà nel punto D della trasformata che si ottiene facendo ruotare il piano $g_2 g_3$ intorno a g_2 finchè venga a sovrapporsi al piano $g_1 g_2$ e seguendo la posizione che C viene ad assumere. – In questa rotazione il punto C descrive un arco di cerchio infinitesimo in un piano normale a $g_1 g_2$, che si confonde colla normale calata dal punto sul piano $g_1 g_2$; quindi il punto D in cui si porta C è dato dal piede di questa perpendicolare.

Sia F il piede della perpendicolare calata da D su AB e si congiunga C con F; per un noto teorema di stereometria la retta CF sarà perpendicolare alla AB.

Dal triangolo CDF rettangolo in D si ha:

$$\cos C\hat{F}D = \frac{DF}{CF}$$

ma si ha ancora

$$DF = DB \operatorname{sen} F\hat{B}D$$
$$CF = CB \operatorname{sen} C\hat{B}F$$

perchè anche i triangoli DFB e CFB sono rettangoli, dunque

$$\cos C\hat{F}D = \frac{DB \operatorname{sen} F\hat{B}D}{CB \operatorname{sen} C\hat{B}F} = \frac{\operatorname{sen} F\hat{B}D}{\operatorname{sen} C\hat{B}F}$$

perchè per quel che abbiamo osservato sulle lunghezze degli archi della linea e della trasformata $BC = BD$. –

Ora se indichiamo con ε ed ε' gli angoli di contingenza nel punto A della linea e della trasformata rispettivamente si ha appunto $\varepsilon = C\hat{B}F$, $\varepsilon' = F\hat{B}D$ ed $F\hat{C}D$ è il rettilineo φ del diedro formato dai piani $g_1 g_2$, tangente alla superficie nel punto A, ed ABC, osculatore alla linea nel punto A, dunque si ha:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\operatorname{sen}\varepsilon}$$

ossia

"Il coseno dell'angolo che il piano tangente in un punto A alla superficie fa col piano osculatore ad una linea tracciata sulla superficie in quel punto

è dato dal rapporto dei seni degli angoli di contingenza in quel punto della trasformata e della linea rispettivamente"

Ora per una nota formula del Calcolo Differenziale e per l'osservazione già fatta sulla lunghezza degli archi corrispondenti si ha che, indicando con ρ e ρ' il raggio di prima curvatura della linea nel punto A ed il raggio di curvatura della trasformata rispettivamente:

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon'}{\operatorname{sen}\varepsilon} = \frac{\rho}{\rho'},$$

dunque si ha ancora che:

"Il coseno dell'angolo che il piano tangente in un punto A alla superficie fa col piano osculatore ad una linea tracciata sulla superficie in quel punto è dato dal rapporto del raggio di prima curvatura della linea in quel punto e del raggio di curvatura della trasformata" – (Catalan) –

Se la curva trasformata ha nel punto A un punto d'inflessione, $\rho' = \infty$ dunque:

$$\cos\varphi = 0 \qquad \varphi = 90^\circ$$

e il primo tangente alla superficie in A è perpendicolare al piano osculatore alla linea in quel punto: e viceversa se ciò avviene si ha $\cos\varphi = 0$ $\rho' = \infty$ e quindi la trasformata ha in quel punto un punto d'inflessione.

Tra le linee tracciate sulla superficie sviluppabile scegliamo lo spigolo di regresso della sviluppabile cui aderisce: per esso in ogni punto $\varphi = 0$ perchè il piano tangente alla superficie coincide sempre con un piano osculatore dello spigolo quindi si ha sempre

$$\rho = \rho'$$

ossia:

"Il raggio di prima curvatura dello spigolo di regresso è sempre uguale (punto per punto s'intende) al raggio di curvatura della sua trasformata"

Dopo questo si capisce immediatamente che chiamando geodetica di una superficie sviluppabile ogni linea tracciata su di essa che si trasformi in una retta quando si svolge la superficie sopra un piano, si ha che in ogni punto d'una geodetica il piano osculatore alla

curva è normale al piano tangente alla superficie in quel punto.

Infatti una linea retta può considerarsi come una curva avente infiniti punti d'inflessione.

Reciprocamente; se una linea tracciata sopra una superficie sviluppabile è tale che il piano osculatore in ogni suo punto è normale al piano tangente della superficie in quel punto, essa è una geodetica della superficie.

Infatti allora ogni punto della curva trasformata è un punto d'inflessione.

Siccome è molto importante per la descrizione di una curva conoscere se e dove ha dei punti d'inflessione, così quando si debba stendere una certa linea che è sopra una superficie sviluppabile si dovrà ricercare dapprima dove il piano tangente alla superficie è normale al piano osculatore alla linea.

Per fare un'applicazione di questo supponiamo di voler svolgere sopra un piano un cono retto circolare V (che è e-

Disg.º 57ª.

dentemente una superficie sviluppabile); esso si adatterà nell'angolo compreso fra due certe rette V'A, V'B e le sue generatrici prenderanno le posizioni di tutte le rette comprese in quest'angolo.

Allora è chiaro che il cerchio secondo cui un piano normale all'asse del cono sega il cono medesimo si svolge secondo un arco di circolo terminato alle rette V'A e V'B e col centro in V'; mentre la curva T' secondo cui si svolge una sezione conica T fatta nel cono con un piano qualunque si potrà descrivere riportando sulle rette comprese nell'angolo AV'B dei segmenti uguali alle distanze che il vertice V del cono ha dai punti di T giacenti sulle generatrici ad esse corrispondenti. I punti d'inflessione di T' saranno le trasformazioni di quei punti di T nei quali il piano osculatore alla curva (cioè il piano stesso di T) è normale al piano tangente del cono.

Per trovare questi punti si conduca da V la perpendicolare al piano di

T e dal piede di questa perpendicolare si conducano le tangenti VM e VN alla conica; i punti di contatto M ed N saranno evidentemente i punti richiesti, e quindi i punti d'inflessione di T' si troveranno portando sulle rette dell'angolo AV'B corrispondenti alle generatrici VM e VN i segmenti V'M' e V'N' uguali rispettivamente a VM e VN.

La costruzione è affatto analoga, salvo le necessarie modificazioni, nel caso che invece di un cono si tratti di un cilindro circolare retto. - Estendiamo ora alle curve gobbe ed alle sviluppabili le denominazioni già introdotte a proposito delle curve e degli inviluppi piani.

Un punto A di una curva gobba si dice doppio quando immaginando la curva come descritta da un punto mobile si trova che esso assume due volte la posizione A. - Allora un piano od una retta qualunque passanti per A devono considerarsi come aventi colla curva due punti a comune riuniti in A; ma fra queste rette ve ne sono in generale due che hanno colla curva tre punti comuni infinitamente vicini ad A.

Esse sono le tangenti in A ai due rami della curva. Quindi mentre, analogamente a quanto succede nel piano, per un punto ordinario di una curva gobba passano due tangenti successive, quella nel punto e quella nel punto precedente, per un punto doppio passano due coppie di tangenti successive.

Se a e b sono le due tangenti nel punto A ai due rami della curva, i piani dei fasci a e b hanno tutti colla curva tre punti comuni infinitamente vicini ad A: ma fra questi ve ne sono due che hanno quattro punti comuni colla curva infinitamente vicini ad A, e sono i piani osculatori in A ai due rami della curva. Così mentre per un punto ordinario di una curva gobba passano tre suoi piani osculatori successivi, cioè quello nel punto e quelli nei due punti precedenti, per un punto doppio passano due terne di piani osculatori successivi.

Un caso particolare del punto doppio è il punto di regresso; e si ottiene quando le due coppie di tangenti successive nel punto doppio si avvicinano infinitamente in modo che le tangenti nel punto coincidano in una sola. In tal caso il cappio si annulla e pel punto passano tre tangenti successive e quattro piani osculatori successivi della curva.

Come nel caso delle curve piane le proprietà trovate pel punto doppio e di regresso sono anche proprietà caratteristiche di quei punti; e le considerazioni fatte per essi possono estendersi ai punti di molteplicità superiore.

Correlativamente si hanno per le sviluppabili, i piani doppii e di flesso: quest'ultimi specialmente quando si considerano come piani osculatori dello spigolo di regresso si chiamano anche piani stazionarii di tale spigolo.

Adesso supponiamo di avere una curva gobba k colle sue ∞ tangenti e facciamone la proiezione da un punto O dello spazio sopra un quadro arbitrario. T punti della curva saranno proiettati secondo le generatrici di un cono col vertice in O, e le tangenti, secondo i piani tangenti di questo cono: cosicché la proiezione della curva sul quadro sarà una curva k' tale che un punto di k' e la tangente in esso a k' sono le proiezioni di un punto di k e della tangente in esso a k, rispettivamente.

Se la curva k ha dei punti doppii questi saranno proiettati evidentemente da O secondo generatrici doppie del cono $O(k)$ e quindi le loro proiezioni sul quadro saranno punti doppii della proiezione k' di k. Ma viceversa non ogni punto doppio della proiezione k' è proiezione di un punto doppio di k.

Le bisecanti di una curva gobba qualunque sono una doppia infinità ossia costituiscono una congruenza; quindi per un punto passa sempre un certo numero in generale finito di bisecanti della curva. Ora le bisecanti di k passanti per O sono evidentemente generatrici doppie del cono $O(k)$ e incontrano il quadro in punti doppii per la proiezione k', dunque il numero dei punti doppii di k' è eguale alla

somma del numero dei punti doppii di k e delle sue bisecanti passanti per O. Questi ultimi punti doppii di k' si chiamano punti doppii apparenti o virtuali della curva k in opposizione a quegli altri che si dicono punti doppii effettivi.

I punti di regresso di k danno luogo a generatrici di regresso del cono $O(k)$ ed hanno per proiezioni punti di regresso di k': ma se il centro O si trova sopra una tangente alla curva anche la proiezione del punto di contatto di questa tangente è un punto di regresso di k'. Ora questo in generale non avviene quindi possiamo asserire che, in generale, il numero dei punti di regresso della proiezione k' e delle generatrici di regresso del cono $O(k)$ è eguale al numero dei punti di regresso della curva k.

I piani osculatori di k passanti per O sono piani di flesso o stazionarii pel cono $O(k)$ e tagliano il quadro in tangenti di flesso o stazionarie della proiezione k' di k; e i piani bitangenti di k, cioè contenenti due tangenti non successive di k, passanti per O, saranno piani doppii per il cono $O(k)$ e taglieranno il quadro nelle tangenti doppie della curva k'.

Questi piani bitangenti essendo in numero semplicemente infinito costituiscono ciò che si chiama la sviluppabile bitangente della curva k.

Correlativamente una sviluppabile K è tagliata da un piano arbitrario ω in un inviluppo piano K' per modo che un piano della sviluppabile e la sua generatrice di contatto sono segati secondo una tangente e il relativo punto di contatto dell'inviluppo. I piani doppii di K daranno luogo a tante tangenti doppie di K': ma fra le tangenti doppie di K' saranno compresi anche gli assi (1) di K giacenti nel piano ω; i piani di flesso di K saranno segati lungo tangenti di flesso dell'inviluppo K'; lo spigolo di regresso di K sarà segato dal piano ω nei

(1) Chiamiamo assi di una sviluppabile le rette d'intersezione dei suoi piani. (cfr. pag. 298).

punti di regresso della curva aderente all'inviluppo K' e finalmente i punti doppii di K, cioè i punti per cui passano due generatrici di contatto non successive di K, giacenti in ω saranno i punti doppii della curva aderente a K'.

Questi punti doppii di K costituiscono una curva detta curva doppia della sviluppabile.

Le considerazioni fatte ci facilitano la dimostrazione di alcune formule dovute al Cayley relative alle curve gobbe e alle sviluppabili algebriche.

Data una curva gobba algebrica k siano rispettivamente: K la sviluppabile da essa osculatrice, k' l'inviluppo di piani costituito dai suoi piani tangenti K' la superficie sviluppabile costituita dai punti delle generatrici di contatto di K, (o ciò che fa lo stesso delle tangenti di k). Allora indicheremo con:

n – l'ordine della curva k ossia il numero costante dei punti che k, essendo algebrica, ha a comune con un piano arbitrario dello spazio.

m – (numero correlativo ad n) la classe della sviluppabile K ossia il numero costante dei piani di K che passano per un punto arbitrario dello spazio –

r – (numero correlativo a sè stesso) il rango della curva k ossia quel numero che indica nel tempo stesso la classe dell'inviluppo K' e l'ordine della superficie $\bar{K}$. Per convincersi di ciò basta osservare che se una retta p incontra le generatrici $g_1, g_2 \ldots g_r$ di k e quindi incontra in r punti la superficie $\bar{K}$, gli r piani $pg_1, pg_2 \ldots pg_r$ del fascio p sono tutti e soli i piani dell'inviluppo k' passanti per p.

h – il numero delle generatrici doppie di un cono proiettante la curva k da un punto arbitrario dello spazio, che si dimostra essere indipendente dalla posizione del punto per una curva gobba algebrica. Esso è eguale al numero dei punti doppii effettivi di k aumentato del numero dei suoi punti doppii apparenti.

g – il numero (correlativo ad h) delle

tangenti doppie di un inviluppo sezione della sviluppabile K, numero che si dimostra essere indipendente dalla posizione del piano segante. Esso è uguale al numero dei piani doppii effettivi della sviluppabile aumentato del numero dei suoi piani doppii apparenti.

α – il numero dei punti di regresso della curva k.

β – il numero (correlativo ad α) dei piani di flesso della sviluppabile K.

x – l'ordine della linea doppia della sviluppabile K.

y – (numero correlativo ad x) la classe della sviluppabile bitangente alla curva k.

Posto ciò se noi seghiamo il sistema delle forme considerate con un piano qualsiasi otteniamo un inviluppo piano algebrico di cui, per le cose già dette, m indicherà la classe, r l'ordine, x il numero dei punti doppii, α il numero dei punti di regresso, g il numero delle tangenti doppie, β il numero delle tangenti di flesso: quindi ponendo nelle formule di Plücker trovate a pag.

433-34.

$n=r,\ m=m,\ d=x,\ k=n,\ t=g,\ i=\beta$ si hanno tre delle sei formule di Cayley:

$$m = r(r-1) - 2x - 3n$$
$$r = m(m-1) - 2g - 3\beta$$
$$\frac{r(r+3)}{2} - x - 2n = \frac{m(m+3)}{2} - g - 2\beta.$$

Le altre formule di Cayley si ottengono proiettando la curva gobba da un punto qualunque dello spazio e applicando le formule di Plücker al cono che si ottiene.

Si trova:

$$r = n(n-1) - 2h - 3\alpha$$
$$n = r(r-1) - 2y - 3m$$
$$\frac{n(n+3)}{2} - h - 2\alpha = \frac{r(r+3)}{2} - y - 2m$$

Queste sei relazioni indipendenti fra i nove numeri Cayleyani di una curva gobba permettono di calcolare gli altri sei quando se ne conoscano tre.

Così per es. sapendo che per la cubica gobba si ha $n=3,\ m=3,\ r=4$ (pag. 323) si trova immediatamente

$$h=g=1,\quad \alpha=\beta=x=y=0;$$

come del resto già si sapeva.

Applicheremo le formule di Cayley an-

che al caso della quartica gobba intersezione di due quadriche φ^2 e ψ^2 e troveremo così delle notevoli proprietà di questa curva. –

Una quartica k^4 intersezione di due quadriche φ^2 e ψ^2 non ha in generale alcun punto doppio, perchè per un teorema che dimostreremo fra poco, l'intersezione di due superficie qualunque non ha punti doppii che nei punti doppii di una delle due superficie giacenti sull'altra o nei punti dove le superficie si toccano; quindi per la quartica k^4 sarà a maggior ragione $\alpha=0$.

Inoltre se P è un punto arbitrario dello spazio e χ^2 è la quadrica del fascio determinato da φ^2 e ψ^2 passante per P, le due generatrici di χ^2 passanti per P incontrano un'altra quadrica qualunque del fascio in coppie di punti appartenenti alla quartica, perchè i punti comuni a tutte le quadriche del fascio sono tutti e soli i punti della quartica: quindi per il punto P passano due bisecanti della nostra curva. Nè per P può passare una terza bisecante, perchè alla ra questa avendo tre punti a comune con la quadrica X^2 giacerebbe interamente su di essa, e X^2 contenendo tre rette passanti per un punto sarebbe un cono: il che non può essere perchè a un fascio di quadriche appartengono in generale soltanto quattro coni: dunque per la quartica k^4; $h = 2$.

Con ciò, ricordando che per k^4 si ha ancora $n = 4$, si ha il mezzo di calcolare gli altri sei numeri relativi alla quartica, ricorrendo alle formule di Cayley. Sostituendo per n, h, α i loro valori si trova:

$$m = 12,\ r = 8,\ g = 38,\ \beta = 16,\ x = 16,\ y = 8;$$

dunque:

"La sviluppabile osculatrice della quartica k^4 è di 12^a classe: l'inviluppo formato dai suoi piani tangenti è di 8^a classe e la superficie sviluppabile costituita dai punti delle sue tangenti è di 8^o ordine. - Il numero dei suoi piani stazionarii è 16: la sua linea doppia o linea nodale è di 16^o ordine e la sua sviluppabile bitangente è di 8^a classe: infine

un piano generico contiene 38 assi della quartica".

Fermiamoci brevemente sopra alcune di queste proprietà.

Sia V il vertice di uno dei quattro coni che passano per la quartica k^4 e sia Q^2 un'altra quadrica del fascio di cui k^4 è la quartica base: un piano qualunque passante per V sega il cono V in due rette e la quadrica Q^2 in una conica che avrà con quelle due rette quattro punti comuni appartenenti alla quartica k^4. Ma se il piano tocca il cono lungo una sua generatrice quei quattro punti si riducono a due coppie di punti infinitamente vicini e le congiungenti di queste coppie di punti sono due tangenti della quartica giacenti in quel piano. Dunque i piani tangenti del cono V sono tutti piani bitangenti della quartica, e ciò avvenendo anche per gli altri coni V_1, V_2, V_3 del fascio, la sviluppabile bitangente di 8^a classe della quartica si spezza nei quattro coni di seconda classe V, V_1, V_2, V_3.

Con ugual facilità possiamo dimostrare che la linea nodale di 16^o ordine si spezza in quattro curve piane di 4^o ordine contenute nelle facce del tetraedro $V\,V_1V_2V_3$.

Per questo, sia α un piano tangente del cono V e quindi un piano bitangente della quartica e siano t_1 e t_2 le tangenti della quartica contenute in α. Il punto $A \equiv t_1t_2$ sarà un punto della linea nodale e siccome t_1 e t_2 toccano anche la conica, che il piano α ha a comune colla quadrica φ^2, in due punti allineati con V, A giacerà nel piano polare di V rispetto alla quadrica φ^2: ora qualunque sia la quadrica φ^2 tale piano è il piano $V_1V_2V_3$ dunque al variare del piano tangente α il punto A comune alle due tangenti t_1 e t_2 non esce dal piano $V_1V_2V_3$. Viceversa se A è il punto d'intersezione di una tangente qualunque t_1 della quartica col piano $V_1V_2V_3$, proiettando da V la t_1 si ottiene un piano tangente al cono che contiene oltre t_1 un altra tangente t_2 della quar-

tica incontrante t_1 nel punto A per quel che precede, dunque il luogo descritto da A nel piano $V_1V_2V_3$ al variare di α rappresenta la completa intersezione del piano $V_1V_2V_3$ colla superficie sviluppabile aderente alla quartica. Questa superficie è di 8^o ordine, ogni punto del luogo descritto da A conta per due intersezioni della superficie col piano $V_1V_2V_3$, quindi esso luogo è una curva piana del 4^o ordine.

Ripetendo questo ragionamento per gli altri tre coni V_1, V_2, V_3 si giustifica facilmente l'asserzione precedente.

Dal vertice del cono V si conduca il cono circoscritto alla quadrica φ^2 e siano g_1, g_2, g_3, g_4 le quattro generatrici che questi due coni hanno a comune (generatrici che non variano qualunque sia la quadrica φ^2 scelta nel fascio): le rette g_1, g_2, g_3, g_4 saranno tangenti della quartica, e i piani tangenti al cono V lungo le rette medesime saranno piani stazionarii della quartica.

Disp.^{a} 59.^{a}

Infatti se π è il piano tangente a V lungo g, π sega la quadrica Q^2 in una conica tangente a g, e quindi i quattro punti che esso ha a comune colla quartica sono infinitamente vicini a quel punto di contatto. Esso contiene adunque tre tangenti successive della quartica ed è un suo piano stazionario.

Segue da ciò che:

"I 16 piani stazionarii della quartica si distribuiscono in quattro quaterne di piani tangenti rispettivamente ai coni $V, V_1, V_2 V_3$"

Inoltre siccome per il punto V passano quattro tangenti della quartica, la linea nodale di 4° ordine contenuta per es. nel piano VV_1V_2 passa per V ed ha in esso un punto doppio, dunque ciascuna delle quattro curve piane di quart' ordine in cui si spezza la linea nodale della quartica ha tre punti doppii nei vertici del tetraedro $VV_1V_2V_3$ giacenti sulla faccia che la contiene.

Ricordiamo che in generale si chiama genere di una curva gobba il genere di un cono che la proietta da un punto qualunque dello spazio: quindi se lo chiamiamo p esso è dato da:

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - h - d$$

La quartica k^4 è di genere 1.