di una quadrica. (Vedi pag. 71 e seg.)

Infatti allora data una quadrica Q^2 si consideravano due suoi diametri coniugati normali d e d_1 e si esaminavano le forme generate da d_1 mentre d si muoveva in un piano qualunque. Ora è facile mostrare che d e d_1 descrivono due stelle in corrispondenza quadratica involutoria.

Infatti poichè d e d_1 sono coniugati rispetto alla quadrica Q^2 saranno coniugati anche rispetto al cono asintotico di Q^2, ossia rispetto al cono circoscritto a Q^2 col vertice nel suo centro, e poichè sono normali, sono coniugati rispetto al cono che dal centro di Q^2 proietta il circolo immaginario all'infinito. Per conseguenza d e d_1 sono coniugati rispetto al fascio di coni determinato da quei due, e descrivono due stelle in corrispondenza quadratica involutoria. Il triedro fondamentale di tale trasformazione è il triedro formato dagli assi di Q^2.

Capitolo III°:

Geometria della retta

Alle forme di prima specie appartiene un solo elemento: il punto alla punteggiata, il raggio al fascio di raggi, il piano al fascio di piani. Alle forme di seconda specie appartengono due sorta di elementi; il punto e la retta al sistema piano, la retta e il piano alla stella, e dalle proprietà di un elemento contenuto nella forma si passa alle proprietà dell'altro elemento per mezzo della legge di dualità. Nella forma di terza specie, ossia nello spazio, si sogliono considerare come elementi primitivi legati dalla legge di dualità, il punto e il piano, mentre la retta si considera, o meglio, l'abbiamo considerata finora come un elemento generato da un punto e da un piano; e fino a poco tempo fa non si era mai pensato a fondare una geometria, considerando come elemento primordiale dello spazio la linea retta. Ma per opera del Cayley e più specialmente del Plücker, che diede alle sue ricerche l'impronta di una vera trattazione metodica, è stata costruita ultimamente una geometria, nella quale si considera come elemento primitivo la retta e che appunto perciò si suol chiamare geometria della retta o geometria rigata.

La geometria del punto e la geometria del piano sono collegate fra di loro dalla legge di dualità e quindi si può dalle ricerche e dai risultati dell'una passare immediatamente alle ricerche e ai resultati dell'altra; ma tra di esse e la geometria della retta esistono differenze essenziali.

Una prima diversità si rileva subito da questo, che mentre i punti e i piani dello spazio costituiscono una tripla infinità, le rette dello spazio sono in numero di quattro volte infinito. Infatti se si prendono due piani fissi qualunque,

una retta generica dello spazio segna su ciascun piano un punto, mentre reciprocamente preso un punto su ciascun piano è in generale individuata una retta. Ora la posizione di un punto in un piano dipende da due parametri, quindi la posizione d'una retta nello spazio dipende da quattro parametri, e la totalità delle rette dello spazio costituirà un'infinità quadrupla.

Come nella geometria del punto e del piano, la prima questione che naturalmente si presenta nella nostra geometria è quella di stabilire un sistema di coordinate, ossia un modo di collegare biunivocamente la posizione di una retta nello spazio con parametri variabili. Si potrebbe pensare per la considerazione fatta precedentemente a prendere come coordinate di una retta, le coordinate cartesiane per es. delle sue traccie su due piani fissi α e β dello spazio: ma è facile vedere che un tal sistema di coordinate non sarebbe conveniente, perchè le rette dei piani α e β, avrebbero indeterminate due loro coordinate, mentre d'altra parte sarebbe indeterminata la retta corrispondente a quei valori delle coordinate che rappresentano uno stesso punto dell'intersezione $\alpha\beta$.

Anzi si dimostra in generale che non si può trovare alcun sistema di coordinate per il quale la posizione d'una retta sia fissata da quattro parametri indipendenti.

Perciò senza dilungarci più oltre a dire di altri sistemi proposti per le coordinate di retta, esponiamo senz'altro il sistema attualmente usato.

Fissato nello spazio un sistema di coordinate proiettive omogenee, prendiamo su di una retta qualunque r due punti $X \equiv x_i$ $Y \equiv y_i$ e coi valori delle loro coordinate formiamo i binomii

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

che si ottengono dando ad i e k i valori 1, 2, 3, 4 e considerando per essi valori differenti, perché per $i=k$ si ha evidentemente $p_{ik}=0$.

Si avrebbero così dodici binomii: ma osservando che $p_{ik} = -p_{ki}$ si vede che sei soli

di questi binomii sono veramente diversi.

Dimostriamo anzitutto che se si prendono altri due punti qualunque $Z \equiv z_i$. $T \equiv t_i$ sulla retta r i binomii corrispondenti p'_{ik} coincidono con quelli già trovati a meno di un fattore di proporzionalità –

Infatti, poiché i punti Z e T giacciono sulla retta r le loro coordinate possono ottenersi combinando linearmente le coordinate di X ed Y, quindi possiamo porre

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad , \quad t_i = x_i + \mu y_i$$

da cui segue

$$p'_{ik} = z_i t_k - z_k t_i = (x_i + \lambda y_i)(x_k + \mu y_k) - (x_k + \lambda y_k)(x_i + \mu y_i) = (\mu - \lambda)(x_i y_k - x_k$$

$$= (\mu - \lambda)\, p_{ik}$$

Da questa osservazione risulta subito che i rapporti di cinque dei numeri p_{ik} al sesto, non dipendendo affatto dalla scelta dei punti di r, sono qualche cosa di inerente alla posizione della retta; e quindi si incomincia già ad intravedere che saranno questi numeri appunto che noi potremo assumere come coordinate della retta r –

Se si sviluppa il determinante nullo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix}$$

secondo i minori contenuti nelle prime due orizzontali (1) si ha:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} x_1 x_2 \\ y_1 y_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_3 x_4 \\ y_3 y_4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x_1 x_3 \\ y_1 y_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_4 x_2 \\ y_4 y_2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} x_1 x_4 \\ y_1 y_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_2 x_3 \\ y_2 y_3 \end{vmatrix}$$

ossia

$$\Delta = 2(p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23})$$

dunque, qualunque sia la retta r, si ha sempre

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0$$

La relazione trovata testè è perfettamente d'accordo col risultato che noi otterremo più innanzi, che cioè sei numeri soddisfacenti a una tale relazione possono assumersi come i numeri p_{ik} corrispondenti a una certa retta dello spazio. Che i valori di p_{ik} dovessero essere legati tra di loro da qualche relazione è prevedibile perchè se fossero completamente arbitrarii

(1) Vedi p. es. Cesàro - Corso di Analisi Algebrica pag. 11

la posizione di una retta dipenderebbe da ~~sei~~ cinque parametri indipendenti, e quindi le rette dello spazio costituirebbero una quintupla infinità, contrariamente a quanto sappiamo.

Adesso vogliamo vedere a che si riducono i valori delle p_{ik} per posizioni particolari della retta r.

Indichiamo con 1, 2, 3, 4 i vertici del tetraedro fondamentale e supponiamo che la retta r si appoggi ad un suo spigolo, per es. allo spigolo 12. L'equazione di un piano passante per la retta 12 è della forma

$$x_3 - \lambda x_4 = 0 ;$$

quindi se la retta giace in un piano con 12, tra le coordinate dei punti X ed Y si avranno relazioni della forma:

$$\frac{x_3}{x_4} = \lambda \qquad \frac{y_3}{y_4} = \lambda$$

e sarà

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4} \quad \text{ossia} \quad x_3 y_4 - x_4 y_3 = p_{34} = 0$$

mentre inversamente se è $p_{34} = 0$ è

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{y_3}{y_4} \quad \text{cioè} \quad x_3 - \lambda x_4 = 0 \quad y_3 - \lambda y_4 = 0$$

essendo x_i, y_i due punti della retta: dunque questi giacciono in un piano con la 12 e quindi la nostra retta si appoggia effettivamente a questo spigolo.

Più particolarmente ancora supponiamo che la retta r passi per un vertice ad es. pel vertice 1, del tetraedro fondamentale, oppure giaccia in una delle sue faccie: p. es. sulla faccia 123.

Nel primo caso la retta r incontra gli spigoli 12, 13, 14 e quindi si ha pel risultato precedente

$$p_{34} = p_{24} = p_{23} = 0 \;;$$

nel secondo si appoggia agli spigoli 12, 13, 23 e quindi si ha:

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = 0$$

e siccome, se una retta incontra due spigoli del tetraedro fondamentale o giace nel loro piano o passa per un vertice segue da ciò che:

"L'annullarsi di due dei numeri p_{ik} aventi un indice a comune porta l'annullarsi di un altro dei numeri rimanenti."

Il che del resto resulta ancora dalla identica

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0$$

Se la retta r giace nella faccia 123 e contemporaneamente passa per 1 si ha:

$$p_{34} = p_{24} = p_{23} = p_{14} = 0$$

e se finalmente coincide per es. collo spigolo 12 si ha:

$$p_{34} = p_{24} = p_{14} = p_{13} = p_{23} = 0$$

In particolare risulta da questi esempii che i sei numeri p_{ik} non possono essere tutti nulli; e d'altra parte è evidente che nessuno di essi può essere infinito, poichè le x_i, y_i le abbiamo sempre supposte finite.

Le equazioni dei punti $X \equiv x_i$ ed $Y \equiv y_i$ in coordinate di piani sono

$$1)\qquad \begin{aligned} \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 &= 0 \\ \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 &= 0 \end{aligned}$$

e qualunque equazione che sia una combinazione lineare di queste due rappresenta un punto della retta $XY \equiv r$. In particolare adunque saranno sulla retta r i punti rappresentati dalle equazioni:

$$2)\qquad \begin{aligned} \cdot\; + \xi_2 p_{12} + \xi_3 p_{13} + \xi_4 p_{14} &= 0 \\ \xi_1 p_{21} + \;\cdot\; + \xi_3 p_{23} + \xi_4 p_{24} &= 0 \\ \xi_1 p_{31} + \xi_2 p_{32} + \;\cdot\; + \xi_4 p_{34} &= 0 \\ \xi_1 p_{41} + \xi_2 p_{42} + \xi_3 p_{43} + \;\cdot\; &= 0 \end{aligned}$$

ottenute dalle 1) eliminandone rispettivamente $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$; e siccome esse mancano rispettivamente di queste coordinate, rappresenteranno i punti d'incontro della retta r colle facce 234, 341, 412, 123 del tetraedro fondamentale.

Queste equazioni 2) non possono essere tutte indipendenti fra di loro perchè datene due, sono determinati due punti pei quali la retta r deve passare: dunque se ne devono poter scegliere due da cui si possono derivare le altre mediante combinazioni lineari. (1)

Ciò mostreremo effettivamente facendo vedere che se per es. $p_{12} \neq 0$ la 3ª e la 4ª equazione sono combinazioni lineari delle prime due.

Infatti moltiplicando la 1ª per p_{23} e la 2ª per p_{13} e sottraendo si ha:

$$\xi_2 p_{12} p_{23} + \xi_1 p_{21} p_{31} + \xi_4 (p_{14} p_{23} + p_{42} p_{13}) = 0$$

ossia per essere $p_{12} \neq 0$ e

$$p_{14} p_{23} + p_{42} p_{13} = - p_{12} p_{34}$$

$$\xi_1 p_{31} + \xi_2 p_{32} + \xi_4 p_{34} = 0$$

che è appunto la 3ª.

(1) Questo si può anche verificare direttamente osservando che la caratteristica della matrice formata dai coefficienti delle 2) è 2.

Similmente moltiplicando la 1ª per p_{24} e la 2ª per p_{14} e poi sottraendo si ha:

$$\xi_1 p_{41} + \xi_2 p_{42} + \xi_3 p_{43} = 0$$

ossia la 4ª e si noti che tale dipendenza analiticamente segue dal solo fatto che le p_{ik} soddisfano alla relazione identica

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

Avvertiamo inoltre prima di passare avanti che le 2) esprimono anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè il piano (ξ_i) passi per la retta r.

A questo punto siamo in grado di dimostrare che sei numeri qualunque a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{42}, a_{34} non tutti nulli e soddisfacenti alla relazione

$$3) \qquad a_{12} a_{34} + a_{13} a_{42} + a_{14} a_{23} = 0$$

si possono assumere come le p_{ik} di una retta determinata dello spazio, che cioè le p_{ik} possono considerarsi come vere e proprie coordinate di retta.

Per uniformità nella scrittura conveniamo di porre $a_{ik} = - a_{ki}$ e consideriamo le equazioni in coordinate di piano:

$$\cdot + \xi_2 a_{12} + \xi_3 a_{13} + \xi_4 a_{14} = 0$$

$$\xi_1 a_{21} + \cdot + \xi_3 a_{23} + \xi_4 a_{24} = 0$$

$$\xi_1 a_{31} + \xi_2 a_{32} + \cdot + \xi_4 a_{34} = 0$$
$$\xi_1 a_{41} + \xi_2 a_{42} + \xi_3 a_{43} + \cdot = 0$$

Esse rappresenteranno quattro punti posti nelle quattro facce del tetraedro, e siccome le a_{ik} sono legate fra loro dalla 3), e non sono tutte nulle, due di queste equazioni saranno combinazioni lineari delle rimanenti, e i quattro punti in discorso si troveranno sopra una medesima retta r. Ma se con p_{ik} indichiamo i binomii relativi a questa retta, per quanto precede le equazioni di questi quattro punti sono pur date dalle 2); dunque deve essere ordinatamente:

$$a_{12} : a_{13} : a_{14} = p_{12} : p_{13} : p_{14}$$
$$a_{21} : a_{23} : a_{24} = p_{21} : p_{23} : p_{24} \quad \text{etc.}$$

ossia, in breve, come volevasi dimostrare

$$a_{ik} = \rho p_{ik}$$

dove ρ indica un conveniente fattore di proporzionalità.

Da tutte queste ricerche risulta pienamente giustificata la scelta delle p_{ik} a coordinate della retta r; perchè da esse risulta che data la retta sono individuati sei numeri p_{ik} non tutti nulli legati dalla

relazione fondamentale.

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

che noi in seguito per brevità indicheremo anche scrivendo simbolicamente

$$(p\,p) = 0$$

e che viceversa dati sei numeri non tutti nulli e legati da una tale relazione è individuata una retta r dello spazio.

Considerando della r invece che due punti $X \equiv x_i$ $Y \equiv y_i$ due piani $\pi \equiv \xi_i$ $\sigma \equiv \eta_i$ avremmo potuto costruire i binomii

$$q_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

e svolgere le considerazioni duali a quelle fatte fin qui.

Così avremmo trovato che le q_{ik} soddisfano alla relazione

$$q_{12} q_{34} + q_{13} q_{42} + q_{14} q_{23} = 0$$

e che viceversa, dati sei numeri non tutti nulli legati da una tale relazione è determinata una retta dello spazio: sicchè avremmo potuto prendere per coordinate di retta anche le q_{ik}.

Ora è essenziale dimostrare che le q_{ik} a meno dell'ordine ed a meno di un fattore di proporzionalità che non ha alcuna influenza, trattandosi di coordinate omogenee coincidono colle p_{ik}.

Infatti poichè i piani $\pi \equiv \xi_i$, $\sigma \equiv \eta_i$ passano per la retta r devono essere soddisfatte le condizioni espresse dalle equazioni 2), e quindi deve aversi p. es.

$$\xi_2 p_{12} + \xi_3 p_{13} + \xi_4 p_{14} = 0$$
$$\eta_2 p_{12} + \eta_3 p_{13} + \eta_4 p_{14} = 0$$

Considerando le p_{ik} come incognite, per un noto teorema d'algebra, dovrà essere per la coesistenza di queste equazioni:

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} = \begin{vmatrix} \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_4 & \xi_2 \\ \eta_4 & \eta_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

ossia:

$$p_{12} : p_{13} : p_{14} = q_{34} : q_{42} : q_{23}$$

Similmente, combinando le altre equazioni e seguendo l'identico processo si troverebbe che le p sono proporzionali alle q e precisamente che la p_{ik} è proporzionale a quella q che si ottiene facendo la derivata parziale dell'espressione (99) rapporto a q_{ik}, ossia che:

$$p_{ik} = \rho \frac{\partial (99)}{\partial q_{ik}}$$

dunque resta dimostrato quel che volevasi. C.

Osserviamo che viceversa si ha

$$q_{ik} = \rho \frac{\partial (pp)}{\partial p_{ik}}$$

La conseguenza più importante di questo teorema è che noi non avremo più bisogno di occuparci delle ricerche duali, poichè le une e le altre coordinate condurrebbero allo stesso risultato.

E ora passiamo alla risoluzione di alcune delle quistioni più importanti.

La prima che si presenta è quella di trovare la condizione necessaria e sufficiente a cui devono soddisfare le coordinate p_{ik} e p'_{ik} (o q_{ik} e q'_{ik}) di due rette r ed r' perchè queste s'incontrino.

Prendendo due punti qualunque $X \equiv x_i$ $Y \equiv y_i$ sulla r e due altri $Z \equiv z_i$ $T \equiv t_i$ sulla r' si avrà:

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$
$$p'_{ik} = z_i t_k - z_k t_i$$

e i punti X, Y, Z, T giaceranno in un sol stesso piano se le rette r ed r' s'incontrano. Si avrà dunque:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando questo determinante nel

solito modo si trova:

$$p_{12}p'_{34}+p_{13}p'_{42}+p_{14}p'_{23}+p'_{12}p_{34}+p'_{13}p_{42}+p'_{14}p_{23}=0$$

ossia simbolicamente

$$(pp')=0$$

Viceversa è chiaro che se $(pp')=0$ e si prendono quattro punti X, Y, Z, T i primi due nell'una gli altri nella seconda retta e si forma il determinante colle loro coordinate questo riuscirà nullo; quindi i quattro punti giacciono in un piano e però le rette r ed r' si incontrano. Dunque:

" La condizione necessaria e sufficiente perchè due rette r ed r' s'incontrino, è che le loro coordinate p_{ik} e p'_{ik} soddisfino alla relazione espressa simbolicamente dall'uguaglianza:

$$(pp')=0 \text{ "}$$

Si abbiano due rette $r\equiv p_{ik}$ ed $r'\equiv p'_{ik}$ le quali s'incontrino, cioè si abbia

$$(pp)=0 \quad (pp')=0 \quad (p'p')=0$$

io dico che le coordinate p''_{ik} di una retta variabile del fascio determinato da r ed r' sono date da:

$$p''_{ik}=p_{ik}+\lambda p'_{ik}$$

ove λ è un parametro variabile.

Intanto le p''_{ik} così ottenute possono assumersi come coordinate di una retta r'' poichè si ha sviluppando

$$(p''p'')=(pp)+\lambda(pp')+\lambda^2(p'p')=0$$

quindi resta a far vedere che la retta r'' giace nel piano rr' e passa pel punto rr'.

Per questo si osservi che se ξ_i sono le coordinate del piano rr' sono soddisfatte le equazioni 2) e le analoghe che si ottengono ponendovi p'_{ik} al posto di p_{ik}: dunque si ha anche moltiplicando queste ultime per λ e poi sommando ordinatamente

$$\begin{array}{lllll} \cdot & +\xi_2 p''_{12} & +\xi_3 p''_{13} & +\xi_4 p''_{14} & =0 \\ \xi_1 p''_{21} & +\ \cdot & +\xi_3 p''_{23} & +\xi_4 p''_{24} & =0 \\ \xi_1 p''_{31} & +\xi_2 p''_{32} & +\ \cdot & +\xi_4 p''_{34} & =0 \\ \xi_1 p''_{41} & +\xi_2 p''_{42} & +\xi_3 p''_{43} & +\ \cdot & =0 \end{array}$$

ossia, come volevasi, che la retta r'' giace nel piano rr'.

Con un ragionamento duale si proverebbe che la retta r'' passa per il punto rr', dunque resta completamente dimostrato il nostro assunto.

Se invece di avere due rette si hanno tre rette $r\equiv p_{ik}$ $r'\equiv p'_{ik}$ $r''\equiv p''_{ik}$ e si forma una combinazione lineare delle loro coordinate

$$p'''_{ik} = p_{ik} + \lambda p'_{ik} + \mu p''_{ik}$$

Si fa vedere come prima che le p'''_{ik} sono ancora le coordinate di una retta r''', la quale giace con le r, r', r'' in uno stesso piano se quelle tre rette giacciono in un piano, o passa con le r, r', r'' per uno stesso punto se r, r' ed r'' passano per un punto: quindi la retta r''' al variare di λ e μ descrive il piano rigato $r r' r''$ o la stella $r r' r''$.

I teoremi testè dimostrati ci possono servire a trovare una condizione analitica a cui devono soddisfare le coordinate di una retta immaginaria perchè sia di prima specie o di seconda.

Innanzi tutto osserviamo che se le coordinate immaginarie p_{ik} di una retta immaginaria si pongono sotto la forma:

$$p_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$$

distinguendo la parte reale dalla parte puramente immaginaria si deve avere:

$$(pp) = (\alpha\alpha) + i(\alpha\beta) - (\beta\beta) = 0$$

ossia separatamente:

$$(\alpha\alpha) - (\beta\beta) = 0 \quad (\alpha\beta) = 0$$

Ora siano:

$$p_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$$
$$p'_{ik} = \alpha_{ik} - i\beta_{ik}$$

le coordinate di due rette immaginarie coniugate.

Se sono di prima specie, esse si incontrano e deve quindi essere:

$$(pp') = 2(\alpha\alpha) + 2(\beta\beta) = 0$$

ossia

$$(\alpha\alpha) + (\beta\beta) = 0$$

relazione che associata all'altra

$$(\alpha\alpha) - (\beta\beta) = 0$$

dà separatamente

$$(\alpha\alpha) = 0 \quad (\beta\beta) = 0$$

Viceversa se queste condizioni sono soddisfatte la retta di coordinate

$$p_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}$$

incontra la $p_{ik} = \alpha_{ik} - i\beta_{ik}$ cioè è immaginaria di prima specie, dunque la condizione necessaria e sufficiente richiesta è espressa dalle uguaglianze:

$$(\alpha\alpha) = 0 \quad (\beta\beta) = 0$$

insieme all'altra a cui soddisfano tutte le rette immaginarie:

$$(\alpha\beta)=0$$

In altri termini:

"La retta immaginaria di coordinate

$$p_{ik}=\alpha_{ik}+i\beta_{ik}$$

è di prima o di seconda specie, secondochè le α_{ik} e le β_{ik} possono o no assumersi come coordinate di rette. Nel primo caso le rette di coordinate α_{ik} e β_{ik} s'incontrano e determinano un fascio a cui appartiene la retta immaginaria considerata."

Nella geometria del punto o del piano abbiamo dalla totalità dei punti o dei piani staccato quegli elementi che colle loro coordinate soddisfacevano a certe relazioni ed abbiamo trovato così le superficie o gli inviluppi. Analogamente a tutto ciò consideriamo delle ∞^4 rette dello spazio rigato le ∞^3 che soddisfano colle loro coordinate a una equazione lineare omogenea:

$$\alpha)\qquad a_{12}p_{34}+a_{13}p_{42}+a_{14}p_{23}+a_{34}p_{12}+a_{42}p_{13}+a_{23}p_{14}=0$$

dove abbiamo adoperata per le a, che del resto sono affatto arbitrarie, questa notazione a doppio indice per poter indicare il primo membro di questa equazione più brevemente col simbolo (ap).

La totalità delle ∞^3 rette dello spazio soddisfacenti all'equazione $\alpha)$ vien chiamata complesso lineare di rette.

In generale si chiama complesso nello spazio rigato una forma di ∞^3 rette: il complesso si dice poi lineare, quadratico, cubico, etc. secondochè la relazione fra le p che ne è la rappresentazione analitica è lineare, quadratica, cubica etc.

Nella $\alpha)$ compariscono sei coefficienti di cui cinque soltanto, cioè i rapporti di tutti gli altri a uno non nullo, sono arbitrari e perciò:

"Nello spazio rigato sono possibili ∞^5 complessi lineari."

Tra i complessi lineari sono interessanti i cosidetti complessi lineari speciali. Essi si ottengono sottoponendo le a nella $\alpha)$ alla relazione solita $(aa)=0$: allora tutte le rette del complesso soddisfacendo alla relazione

$$(ap)=0$$

si appoggiano alla retta di coordinate a_{ik}, e il complesso stesso non è altro che la totalità delle rette appoggiantisi ad una retta fissa che vien detta asse del complesso e che appartiene anch'essa al complesso.

Così p.es. le rette coniugate ad una data retta r rispetto a una quadrica costituiscono un complesso lineare speciale che ha per asse la retta r' polare di r rispetto alla quadrica medesima.

"Nello spazio rigato sono possibili ∞^4 complessi lineari speciali"

Ciò risulta immediatamente dal fatto che in tal caso i cinque coefficienti dell'equazione α) non sono più indipendenti fra di loro, ma legati dalla relazione $(aa) = 0$, oppure dal fatto che ogni retta dello spazio è asse di un complesso lineare speciale: e le rette dello spazio sono appunto ∞^4.

Le ricerche seguenti ci mostreranno come ad un complesso lineare è collegata strettamente una trasformazione reciproca involutoria dello spazio in se stessa detta sistema nullo (Nullsystem — Möbius) così che si può indifferentemen-

te partir dal complesso e arrivare al sistema nullo, oppure partire dal sistema nullo e giungere alla teoria dei complessi.

"Le rette di un complesso lineare passanti per un punto X (o giacenti in un piano) costituiscono un fascio di rette."

Sia $X \equiv x_i$, e sia $Y \equiv y_i$ un punto dello spazio che congiunto con X dia una retta XY del complesso lineare rappresentato dall'equazione α). Allora le coordinate p_{ik} della retta XY sono proporzionali ai binomii:

$$x_i y_k - x_k y_i$$

e quindi dovrà essere, appartenendo la XY al complesso.

$$\beta)\quad a_{12}(x_3y_4 - x_4y_3) + a_{13}(x_4y_2 - x_2y_4) + a_{14}(x_2y_3 - x_3y_2) + a_{34}(x_1y_2 - x_2y_1) + a_{42}(x_1y_3 - x_3y_1) + a_{23}(x_1y_4 - x_4y_1) = 0$$

Ora si faccia variare y nello spazio in modo che la retta XY appartenga al complesso: le sue coordinate y_i soddisferanno sempre alla β): e reciprocamente è chiaro che se le coordinate di un punto Y soddisfano all'equazione β) dove le a e le x sono costanti, la retta XY appartiene al complesso. L'equazione β) essendo lineare nelle y rappresenta un piano ξ passanti per X: con che il teorema rimane completamente dimostrato.

Con un ragionamento perfettamente analogo scrivendo l'equazione del complesso in coordinate q invece che in coordinate p si dimostra la seconda parte del teorema.

Così mediante il complesso viene stabilita una corrispondenza nello spazio fra punto e piano, se ad ogni punto si fa corrispondere il piano che contiene le rette del complesso passanti per esso, e ad ogni piano il punto per cui passano le rette del complesso in esso contenute. È facile convincersi che questa corrispondenza è una reciprocità involutoria.

Infatti se indichiamo con $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3\, \xi_4$ le coordinate del piano ξ rappresentato dall'equazione β) si ha per note proprietà:

$$\gamma)\quad \begin{aligned} \xi_1 &= \;\cdot\; - a_{34}x_2 - a_{42}x_3 - a_{23}x_4 \\ \xi_2 &= a_{34}x_1 \;\cdot\; - a_{14}x_3 + a_{13}x_4 \\ \xi_3 &= a_{42}x_1 + a_{14}x_2 \;\cdot\; - a_{12}x_4 \\ \xi_4 &= a_{23}x_1 - a_{13}x_2 + a_{12}x_3 \;\cdot \end{aligned}$$

e siccome queste relazioni danno le ξ in funzioni lineari omogenee delle x così

resta stabilito intanto che la corrispondenza in discorso è una reciprocità.

La reciprocità è degenere se il complesso lineare è speciale: infatti in tal caso si ha: (1)

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{34} & -a_{42} & -a_{23} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & +a_{13} \\ a_{42} & a_{14} & 0 & -a_{12} \\ a_{23} & -a_{13} & +a_{12} & 0 \end{vmatrix} = (aa)^2 = 0$$

e le γ) non possono risolversi rispetto alle x; ma si vede ancora che se il complesso non è speciale, la reciprocità non è degenere. Appunto per questo noi escludiamo dalle ricerche seguenti i complessi lineari speciali.

Per dimostrare che la reciprocità è involutoria osserviamo che se un punto della seconda figura ha per coordinate y_1, y_2, y_3, y_4 la sua equazione in coordinate di piani è

$$y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 + y_4\xi_4 = 0$$

(1) È noto che un determinante emisimmetrico di ordine pari è il quadrato di una espressione razionale ed intera dei suoi elementi. Vedi p. es. Cesàro loc. cit. pag. 31.

e quindi per le γ) l'equazione del piano della prima figura corrispondente al punto considerato è data dall'equazione β) dove le y siano considerate come costanti e le x come coordinate correnti di punto. Ora l'equazione β) è simmetrica rispetto alle x e alle y, quindi se indichiamo con $\eta_1 : \eta_2 : \eta_3 : \eta_4$ le coordinate di questo piano si prova che le y sono funzioni delle η come le ξ delle x. Ciò prova appunto che vi è involuzione poichè in tal modo resta dimostrato che ad un punto corrisponde sempre lo stesso piano sia che esso si consideri come appartenente alla prima figura, sia che si consideri come ~~appa~~ appartenente alla seconda.

Questa speciale reciprocità è appunto quella che ha ricevuto il nome di "sistema nullo": elementi corrispondenti in essa si dicono elementi polari o focali, e vale il teorema seguente analogo a un altro già trovato trattando della polarità rispetto a una quadrica.

"Se un punto B giace nel piano polare α di un altro punto A, il piano

polare β di B passa per A."

Infatti il piano β contiene tutte le rette del complesso passanti per B e quindi anche la retta BA: ossia β contiene come volevasi il punto A.

Due rette polari r ed r' in generale sono sghembe fra di loro; poichè se fosse altrimenti tutti i punti della punteggiata r non sarebbero contenuti nei piani corrispondenti del fascio r' ciò avvenendo solo pel punto rr'. - Da ciò segue che due rette polari r ed r' o non si incontrano o sono coincidenti ed appartengono al complesso.

Viceversa ogni retta del complesso è evidentemente unita, nel sistema nullo, cioè polare di sè stesso, dunque:

"La totalità delle rette del complesso coincide colla totalità delle rette unite del sistema nullo."

Prima di passare oltre a studiare altre proprietà del sistema nullo e del complesso lineare, mostriamo come partendo da un sistema nullo, cioè da una reciprocità tale che punto e piano corrispondenti si appartengano, si possa arrivare a un complesso lineare.

Le relazioni fra coordinate di punto e piano:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \;\cdot\; - a_{34}x_2 - a_{42}x_3 - a_{23}x_4 \\
\xi_2 &= a_{34}x_1 \;\cdot\; - a_{14}x_3 + a_{13}x_4 \\
\xi_3 &= a_{42}x_1 + a_{14}x_2 \;\cdot\; - a_{12}x_4 \\
\xi_4 &= a_{23}x_1 - a_{13}x_2 + a_{12}x_3 \;\cdot
\end{aligned}$$

definiscono appunto un sistema nullo, poiché da esse, moltiplicandole ordinatamente per x_1, x_2, x_3, x_4 e poi sommandole si ricava che è identicamente

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

e quindi un punto e il piano corrispondente si appartengono, come si voleva. Sia adesso $Y \equiv y_i$ un punto qualunque del piano $\xi \equiv \xi_i$ corrispondente al punto $X \equiv x_i$: la retta XY sarà unita cioè polare di se stessa perché contenuta nei piani polari di X ed Y e si otterrà una relazione fra le sue coordinate p_{ik} osservando che per le ipotesi fatte su Y si ha:

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0$$

ossia, sostituendo alle ξ i loro valori in funzione delle x, ordinando e osservando che

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

$$a_{12}p_{34} + a_{13}p_{42} + a_{14}p_{23} + a_{34}p_{12} + a_{42}p_{13} + a_{23}p_{14} = 0$$

Questa è appunto l'equazione di un complesso lineare, dunque un complesso lineare può anche considerarsi come costituito dalla totalità delle rette unite di un certo determinato sistema nullo.

Le osservazioni seguenti si usano frequentemente:

"Ogni retta x che taglia due rette polari $d\,d'$ fa parte del complesso."

Consideriamo il piano dx: il suo polo dovendo trovarsi in esso e sulla retta d' sarà il punto $d'x$, e la retta x essendo contenuta nel piano dx e passando pel suo polo sarà una retta del complesso.

Le ∞^2 rette che si appoggiano a due rette sghembe formano una congruenza lineare di raggi; dunque:

"La congruenza lineare di raggi determinata da due rette polari d e d' appartiene interamente al complesso."

"Ogni retta x del complesso che taglia una retta d, taglia anche la sua polare d'".

Consideriamo il punto dx: il suo polo si troverà nella sua intersezione colla retta d', e siccome la retta x appartiene al complesso dovrà passare per questo punto e quindi incontrerà la retta d'.

L'equazione di un complesso lineare e le formule del corrispondente sistema nullo prendono una forma molto semplice, se due spigoli opposti del tetraedro di riferimento come 13 e 24 sono rette polari.

In tal caso infatti gli spigoli 12, 14, 34, 32 sono rette del complesso, per le osservazioni precedenti e quindi l'equazione

$$(\alpha p) = 0$$

del complesso deve essere soddisfatta dalle loro coordinate. Ora le coordinate di 12 sono tutte nulle meno p_{12} quindi deve essere $\alpha_{34} = 0$: similmente deve essere $\alpha_{23} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = 0$ dunque l'equazione del complesso si riduce ad:

$$\alpha_{13}\, p_{42} + \alpha_{42}\, p_{13} = 0$$

e le formule del sistema nullo diventano

$$\xi_1 = -\alpha_{42}\, x_3 \quad \xi_2 = \alpha_{13}\, x_4 \quad \xi_3 = \alpha_{42}\, x_1 \quad \xi_4 = -\alpha_{13}\, x_2$$

"Due coppie di rette polari a, a', b, b' appartengono a un medesimo sistema rigato d'una quadrica".

Consideriamo infatti la quadrica generata da una retta x che si appoggia ad a, a', b. Le generatrici x di questa quadrica fanno parte del complesso, poichè tagliano a ed a', e siccome esse tagliano b, bisognerà che taglino anche b'. Dunque a, a', b, b' sono quattro generatrici dell'altro sistema della quadrica ossia quattro direttrici del sistema generato dalla retta x.

In generale supponiamo che le generatrici x d'un sistema di una quadrica facciano parte del complesso lineare; e consideriamo una direttrice y di questo sistema: la polare y' di y è necessariamente un'altra direttrice dello stesso sistema. Infatti tutte le generatrici x fanno parte del complesso e tagliano y, quindi devono tutte tagliare anche y'.

In tal modo noi otteniamo che le generatrici del secondo sistema sono due a due associate in coppie di rette polari: io dico che sono anche distribuite in coppie di una involuzione.

Per dimostrare tutto ciò si considerino le punteggiate descritte sopra una generatrice x del sistema appartenente al complesso dai punti Y ed Y' dove essa è incontrata da y ed y' quando y e y' variano assumendo le posizioni di tutte le possibili coppie di rette polari del secondo sistema. Poichè Y si trova su y ed x il suo piano polare passerà per y' e per x e sarà il piano tangente alla quadrica nel punto Y': di più il fascio dei piani tangenti alla quadrica nei punti della generatrice x è proiettivo alla punteggiata costituita dai loro punti di contatto, dunque le punteggiate descritte da Y ed Y' essendo proiettive al medesimo fascio di piani sono proiettive fra di loro. Di più esse sono anche evidentemente in involuzione.

Una quadrica cosiffatta che tutte le rette di un suo sistema appartengano al complesso e le rette dell'altro costituiscano una involuzione di rette polari, la chiameremo brevemente in appresso, quadrica del complesso.

Un notevole teorema su queste quadriche è il seguente:

"Il complesso lineare è polare reciproco di se stesso rispetto ad ogni sua quadrica."

Sia F^2 una di queste quadriche: siano x le generatrici del sistema appartenente al complesso, y le generatrici del secondo sistema, che due a due sono polari nel sistema nullo, e sia u una retta generica del complesso. La retta u incontrerà F^2 in due punti X ed Y e in essi due rette polari y ed y' del secondo sistema di F^2. La retta polare di u rispetto ad F^2 sarà data dall'intersezione dei piani tangenti ad F^2 in X ed Y contenenti rispettivamente y y' e quindi incontrano y e y' sarà ancora una retta del complesso. Con ciò il teorema resta dimostrato.

Procediamo ora a qualche costruzione del complesso lineare e del sistema nullo.

Premettiamo che:

"Cinque rette date ad arbitrio individuano in generale un complesso lineare ed uno solo a cui esse appartengono."

Infatti dare cinque rette di un complesso lineare significa assoggettare i coefficienti dell'equazione

$$(\alpha \beta) = 0$$

a cinque equazioni lineari che bastano in generale a determinare i rapporti di cinque di essi al rimanente; quindi resta determinata l'equazione del complesso.

Segue da ciò che:

"Cinque rette date ad arbitrio determinano in generale un sistema nullo, nel quale esse sono unite."

"Mediante un pentagono semplice gobbo ABCDE è determinato un sistema nullo, nel quale i cinque spigoli del pentagono sono rette unite, e quindi ad ogni vertice corrisponde il piano che lo congiunge coi due vertici vicini."

Infatti riferiamo due sistemi dello

spazio reciprocamente fra di loro in modo che ai cinque punti A, B, C, D, E corrispondono i piani EAB, ABC, BCD, CDE, DEA: il pentagono essendo generico, la reciprocità sarà pienamente determinata. In questa reciprocità gli spigoli del pentagono sono tutti uniti perchè ad es. AB è nel tempo stesso la congiungente i punti A e B e l'intersezione dei piani ad essi corrispondenti EAB, ABC dunque in seguito all'osservazione precedente e al teorema or ora dimostrato, essa è un sistema nullo - c. d. d.

"Mediante tre rette sghembe a due a due r, r', u è determinato un sistema nullo, nel quale r ed r' sono rette polari ed u è una retta unita."

Prendiamo ad arbitrio sulla r due punti A e B, e siano AEF, BCD le rette che passano per A e B e si appoggiano ad r' ed u in E, F e C, D rispettivamente - finalmente prendiamo su r' un punto arbitrario M e consideriamo il sistema nullo determinato dal pentagono semplice gobbo MBDFA.

in questo la retta $u \equiv DF$ è unita e le rette r ed r' sono polari perchè ai punti A e B di r corrispondono i piani FAM ed MBD i quali si segano appunto nella retta r'.-

Per trovare direttamente in questo caso il piano polare di un punto qualunque P cominciamo col costruire il polo del piano Pu. Esso deve trovarsi su u, deve anche trovarsi sulla congiungente i punti d'intersezione del piano Pu colle rette r ed r', poichè ogni retta ~~unita~~, che si appoggia a due rette polari è una retta unita, dunque è pienamente determinata. Poi si osservi che la congiungente P con questo polo e la retta di P che si appoggia ad r ed r' sono due rette unite passanti per P; dunque il piano di quest'ultime è il piano cercato.-

In modo correlativo si troverebbe direttamente il polo di un piano dato ad arbitrio.

A questa costruzione si può ridurre quella accennata in principio.

"Costruire un sistema nullo (e quindi il corrispondente complesso linea-

re) di cui sono date cinque rette unite a, b, c, d, e.

Infatti esistono in generale due rette r ed r' che si appoggiano contemporaneamente alle quattro rette a, b, c, d: ed allora il sistema nullo cercato è quello individuato dalle rette r ed r' come rette polari e dalla retta e come retta unita. Se le rette r ed r' fossero immaginarie e quindi le rette a, b, c, d sghembe fra di loro, si considerino i sistemi rigati a cui appartengono le due terne di rette a b c, c d e e che sono composti di rette unite del sistema nullo da costruire; poi si prendano su di essi due punti, uno su ciascuno, e si congiungano. La congiungente r incontrerà in due punti ciascuno i sistemi a b c, c d e e in ciascuno di questi quattro punti si appoggerà a un raggio del sistema corrispondente che nel sistema nullo da costruire deve essere unito.- Se questi quattro raggi sono a' b' c' d' ad essi si appoggerà non solo la retta r, ma anche una seconda retta r': quindi la costruzione si può condurre come nel caso precedente considerando invece delle rette a, b, c, d, e le rette a', b', c', d', e –

"Costruire un sistema nullo (e il corrispondente complesso lineare) di cui sono date due coppie di rette polari a, a', b, b' (appartenenti naturalmente a un medesimo sistema rigato)."

Se m, n, p sono tre direttrici del sistema rigato $V \equiv aa'bb'$ ed r ed s due rette, di cui una incontra a ed a', l'altra b e b' senza appartenere al sistema delle direttrici, il sistema nullo determinato dalle cinque rette m, n, p, r, s è evidentemente il sistema nullo richiesto. L'involuzione $aa'.bb'\ldots$ determinata dalle rette polari nel sistema rigato V è segata da un piano qualunque π in una involuzione fra i punti della conica k^2 sezione della superficie rigata. Le congiungenti i punti coniugati di questa conica sono tutte rette unite nel sistema nullo, dunque il centro d'involuzione di k^2 è il polo del piano π.

Analogamente dato un punto P se ne trova il piano polare costruendo il piano d'involuzione del cono di seconda classe

involutorio secondo cui P proietta il sistema rigato V.

Passiamo ora ad alcune generazioni del complesso lineare mediante forme proiettive.

Presa una quadrica F^2 del complesso lineare sia $U \equiv (gg_1\ldots\ldots)$ il sistema delle rette di F^2 appartenenti al complesso lineare, e $V \equiv (aa'.bb'\ldots)$ il sistema involutorio formato dalle rette che due a due sono polari fra di loro nel sistema nullo congiunto al complesso lineare. I fasci di piani $g(aa'bb'\ldots)$ $g_1(a'abb'\ldots)$ saranno proiettivi perchè

$$aa'bb'\ldots \;\overline{\wedge}\; a'abb'\ldots$$

e dalle rette del complesso e da questi soltanto saranno segati in punteggiate proiettive in involuzione.

Infatti se una retta r appartiene al complesso essa taglia la quadrica F^2 in due punti appartenenti certo a una coppia di rette polari b, b' per es. del sistema V; quindi sega i due fasci g e g_1 in due punteggiate sovrapposte in involuzione, perchè in queste si corrispondono doppiamente i punti ove essa incontra i piani gb e g_1b e gb' e g_1b'.

Invece se s è una retta non appartenente al complesso ed X ed Y sono i due punti ove incontra F^2 le due generatrici a e b del sistema V passanti per essi non saranno polari, e quindi al punto X considerato come appartenente alla prima delle due punteggiate proiettive che si hanno sempre sulla s corrisponderà il punto ove s incontra il piano $g_1 a'$, considerato come appartenente alla seconda corrisponderà il punto $g a'$: punti che non possono coincidere perchè altrimenti Y cadrebbe su a'. In tal caso pertanto non si ha involuzione.

Infine tutte le rette del sistema U tagliano evidentemente i fasci g e g_1 in punteggiate involutorie, dunque tutte e sole le rette del complesso lineare segano i fasci g e g_1 in punteggiate involutorie.

Viceversa: dati due fasci proiettivi di piani g e g_1 (i cui assi non s'incontrano) vi sono ∞^3 rette che li tagliano in punteggiate proiettive sovrapposte in involuzione e che formano un complesso lineare.

Per dimostrarlo conduciamo una retta a che si appoggi a g e g_1 e consideriamo la retta a' ove si incontrano i piani di g_1 e g corrispondenti rispettivamente ai piani ga e $g_1 a$ di g e g_1, che pure si appoggia a g e g_1: qualunque retta che incontri contemporaneamente a ed a' segherà i due fasci proiettivi g e g_1 in una punteggiata involutoria. Infatti ai piani ga e $g_1 a'$ di g e g_1 corrispondono rispettivamente in g_1 e g i piani $g_1 a$ e ga', quindi i due punti ove quella retta taglia a ed a' si corrispondono in doppio modo nella proiettività in discorso. Costruiamo nello stesso modo due altre rette b e b': allora ogni retta che incontra a, a' e b incontra anche b'. Infatti una retta che taglia a ed a' sega i due fasci proiettivi g e g_1 in una punteggiata involutoria, e quindi siccome essa incontra b deve anche incontrare b' perchè altrimenti non avremmo più doppia corrispondenza in una coppia di quell'involuzione.

Segue da ciò che se noi consideriamo le due coppie di rette aa' e bb' esse determinano un sistema nullo nel quale siano rette polari, perchè appartengono ad un medesimo sistema rigato V. Ora in questo sistema nullo le rette g e g_1 sono unite e l'involuzione delle rette polari nel sistema rigato V è pienamente individuata dalle due coppie aa' e bb'; dunque, per le considerazioni precedenti, le rette che tagliano in punteggiate involutorie i fasci proiettivi $g\,(aa'bb')$ e $g_1\,(a'a\,b'b)$, che coincidono coi fasci proiettivi dati, costituiscono il complesso lineare annesso al sistema nullo in discorso.

Possiamo concludere pertanto che:

"Le rette che tagliano in una punteggiata involutoria due fasci di piani proiettivi (i cui assi non si incontrano) generano un complesso lineare passante pei due assi: viceversa ogni complesso lineare può in infiniti modi pensarsi come generato in tal maniera." (Charles-Aschieri)

Poichè due fasci di raggi proiettivi in un piano sono evidentemente, tagliati in punteggiate involutorie da tutte e sole le rette che passano per l'intersezione dei due raggi corrispondenti nei due fasci al raggio comune considerato come appartenente all'uno e all'altro, così si vede immediatamente come definito un complesso lineare nel modo precisato dal teorema or ora dimostrato si possa trovare il polo di un piano qualunque.

Correlativamente si vede che:

"Un complesso lineare consta anche di tutte le rette dalle quali due punteggiate proiettive qualunque vengono proiettate secondo fasci di piani proiettivi involutorii." (1)

Dato un complesso lineare sia r una retta non appartenente ad esso: A un punto qualunque di r e β un piano qualunque passante per la medesima

(1) Vedi Sturm - Die Gebilde ersten und zweiten grades der Liniengeometrie - etc. I Theil. pag. 103.

retta.

Al muoversi di r nel piano β intorno al punto A la sua polare r' descriverà un fascio proiettivo a quello descritto da r intorno al polo B di β e nel piano polare α di A. I due fasci proiettivi (A, β) e (B, α) avranno il raggio $AB \equiv \alpha\beta$ come raggio unito, perchè esso appartenendo al complesso è polare di sè medesimo. Allora siccome ogni retta che si appoggia a due rette polari appartiene al complesso e viceversa una retta del complesso che incontri un'altra retta deve anche incontrare la sua polare, così possiamo asserire che le rette del complesso e soltanto esse sono quelle che incontrano contemporaneamente una coppia di raggi corrispondenti qualunque dei due fasci precedenti. — Inversamente due fasci (A, β) e (B, α) coi centri (distinti) A e B sull'intersezione dei piani α e β posti riferiti proiettivamente in modo da avere come raggio unito il raggio $AB \equiv \alpha\beta$: io dico che le rette che incontrano le

coppie dei loro raggi omologhi costituiscono un complesso lineare.

Per questo basta considerare due raggi corrispondenti qualunque r ed r' di quei fasci, una retta u che incontri due altri raggi corrispondenti s ed s' ed il sistema nullo in cui r ed r' sono polari ed u è una retta unita. In questo sistema nullo la retta $AB \equiv \alpha\beta$ è unita perchè incontra le due polari r ed r': ai punti A e B corrispondono quindi rispettivamente come polari i piani α e β e tutte le altre rette unite del sistema nullo, per le cose dette precedentemente, incontrano i piani α e β in punti che congiunti con B e A rispettivamente danno raggi di due fasci (B, α) e (A, β) proiettivi. In questi due fasci alla retta r corrisponde la r', alla retta s la retta s' perchè u è una retta unita, la retta AB è unita, dunque la proiettività fissata dal sistema nullo tra questi fasci è propri quella data. Con ciò resta dimostrato quanto volevasi — ossia:

"Dati due fasci di raggi proiettivi non concentrici, situati in piani diversi, ma aventi un raggio comune, unito nella proiettività generano un complesso lineare: esso è costituito da tutte le rette che tagliano contemporaneamente due raggi omologhi qualunque dei fasci" (Sylvester).

Ogni piano π taglia i due fasci di piani proiettivi in due punteggiate prospettive, il cui centro di prospettiva è il polo P di π: e da ogni punto P essi sono proiettati secondo due fasci di piani prospettivi il cui piano di prospettiva è il piano polare π di P. (1)

"Quattro punti qualunque A, B, C, D e i loro piani polari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costituiscono due tetraedri dei quali ciascuno è inscritto e circoscritto all'altro."

Infatti non solo i vertici A, B, C, D del primo tetraedro giacciono sulle facce $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ del secondo, ma anche i vertici $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$ giacciono sulle

(1) Sturm - loc. cit. pag. 104.

facce ABC, BCD, CDA, DAB del primo, perchè quei punti sono ordinatamente i poli di questi piani. -

La possibilità di tali tetraedri fu mostrata per la prima volta dal Möbius, quindi essi si sogliono anche chiamare tetraedri di Möbius. (1)

Per essi vale il teorema seguente:

"Gli otto vertici dei due tetraedri $ABCD$, $\alpha\beta\gamma\delta$ sono otto punti associati, ossia sono gli otto punti base di una rete di quadriche: e correlativamente, le otto facce sono otto piani associati, ossia gli otto piani base di un tessuto di quadriche."

Il piano α contiene i vertici A, $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$; il piano BCD contiene i vertici $\beta\gamma\delta$, B, C, D; dunque gli otto punti in discorso giacciono sulla coppia di piani α, BCD. Essi giacciono ancora sulle coppie β, CDA; γ, DAB; δ, ABC e una coppia di piani può considerarsi come una quadrica; dunque la prima parte del teorema resta dimostrata.

(1) Sturm - loc. cit. pag. 66.

Per la seconda basta fare il ragionamento correlativo.

Adesso esponiamo brevemente alcune importanti proprietà metriche di un complesso lineare e dell'annesso sistema nullo.

Dato un sistema nullo i piani e le rette polari dei punti e delle rette del piano all'infinito si dicono diametri e piani diametrali del sistema nullo: essi sono tutti paralleli fra di loro perchè passano per il punto all'infinito che è polo del piano all'infinito.

"I piani polari dei punti di un diametro sono fra di loro paralleli, e viceversa i poli di un fascio di piani paralleli si trovano su di un diametro."

I poli dei piani normali alla direzione comune dei diametri si trovano quindi su di un diametro detto asse del sistema nullo. Esso è dunque perpendicolare ai piani polari dei suoi punti.

"Due rette polari qualunque l ed l' e un diametro d appartengono a una medesima serie rigata di un paraboloide

iperbolico."

Infatti due coppie di rette polari qualunque giacciono su un sistema rigato, dunque l l', d e la sua polare all'infinito d_∞' giacciono su una serie rigata che appartiene ad un paraboloide iperbolico perchè ha una retta all'infinito. Dei piani direttori, un fascio è determinato dalla retta d_∞'. L'altro fascio è costituito dai piani paralleli ad l, l' e d.

Immaginando che d sia l'asse a del sistema nullo si ha immediatamente che:

"Due rette polari qualunque l ed l' appartengono coll'asse a a una medesima serie rigata di un paraboloide iperbolico equilatero."

Si sa che la retta perpendicolare a due raggi qualunque di una serie rigata appartenente ad un paraboloide iperbolico equilatero taglia ortogonalmente tutte le rette della serie medesima, dunque:

"La retta della minima distanza fra due rette polari l ed l' incontra ortogonalmente l'asse.

Dalla definizione stessa dell'asse segue che:

"Tutti i raggi del complesso lineare che tagliano l'asse lo tagliano ortogonalmente: e viceversa ogni raggio che taglia ortogonalmente l'asse appartiene al complesso."

"Se una retta a taglia ortogonalmente quattro raggi di un complesso lineare, essa è il suo asse."

Infatti la seconda retta che taglia quei quattro raggi e che è la polare di a rispetto al complesso lineare è la retta all'infinito dei piani normali ad a.

In un complesso lineare speciale l'asse, così come lo abbiamo definito, coincide colla retta da cui il complesso stesso è determinato e che abbiamo già chiamato asse; infatti in tal caso questa retta è polare di ogni altra retta dello spazio, in particolare è polare quindi anche della retta all'infinito comune ai piani ad essa normali.

I raggi del complesso lineare situati in un piano diametrale, quindi in un

piano qualunque parallelo all'asse, formano un fascio di raggi paralleli, avente per centro il polo del piano medesimo situato all'infinito e i raggi giacenti in piani paralleli qualunque formano fasci coi centri su ~~di~~ ~~un~~ diametro, dunque:

"Il complesso lineare non si altera per una traslazione in sua direzione parallela all'asse."

Sia ora γ un piano qualunque perpendicolare all'asse a nel punto C, e in γ si prenda un cerchio qualunque di centro C: allora se un punto descrive il cerchio C, il suo piano polare π, siccome gli corrisponde in una reciprocità, inviluppperà un cono di second' ordine K^2 col vertice in C: dico che questo cono è di rotazione intorno all'asse a.

Infatti la retta all'infinito di γ è la polare di C rispetto al cerchio, quindi l'asse a, polare nel sistema nullo a quella retta all'infinito, sarà polare del piano γ, polare di C nel sistema nullo, rispetto al cono K^2; di più a e γ sono perpendicolari, dunque a è intanto un asse di K^2. Poi l'involuzione ortogonale dei diametri coniugati del cerchio C, essendo trasformata dal sistema nulla in sè stessa, sarà pure un'involuzione di rette ortogonali rispetto al cono, dunque il cono ammette infiniti triedri trirettangoli autoconiugati, ed è un cono di rotazione.

Segue da ciò che se si fa ruotare intorno all'asse a un punto P insieme col suo piano polare π, il punto P descrive il cerchio corrispondente al cono di rotazione descritto da π, rimanendo sempre il polo di π, ossia:

"Il complesso lineare non si altera per una rotazione intorno all'asse".

Combinando questo teorema con un altro ottenuto precedentemente si ha che:

"Il complesso lineare non si altera per un movimento elicoidale intorno all'asse".

Adesso assumiamo un cilindro di rotazione H^2 intorno ad a e su di esso un punto qualunque P: il raggio del complesso lineare tangente al cilindro in quel punto sarà uno solo e sarà determinato dal-

l'intersezione del piano tangente ad H^2 nel punto P col piano polare del punto stesso rispetto al complesso lineare. Ora il complesso lineare non si altera per una traslazione in direzione dell'asse o per una rotazione intorno al medesimo, dunque se il punto P ruota intorno all'asse, rimanendo quindi sempre sul cilindro, anche la tangente del cilindro appartenente al complesso e passante per P ruoterà intorno all'asse e farà quindi con esso un angolo costante. Facendo un ragionamento analogo per la traslazione di P in direzione parallela all'asse, si ha che tutte le ∞^2 rette del complesso tangenti al cilindro H^2 formano il medesimo angolo coll'asse a.

Allora se, preso un punto P e la tangente in esso così determinata p, si costruisce la tangente analoga pel secondo punto d'intersezione di p con H^2 infinitamente vicino a P, e così si seguita successivamente, si ottiene sul cilindro H^2 una linea pienamente determinata dal complesso, le cui tangenti formano coll'asse un angolo costante. Essa è dunque un'elica piegata in un determinato senso.

Come poi il complesso non si altera per una rotazione intorno all'asse così abbiamo intanto che:

"Le ∞^2 rette del complesso tangenti al cilindro di rotazione H^2 sono le tangenti di ∞^1 eliche situate su H^2 tutte uguali fra di loro e piegate tutte a destra, o tutte a sinistra."

Facendo variare di infinitamente poco il raggio di H^2 si ottiene un altro cilindro di rotazione e su questo le eliche ottenute nel modo suddetto differiscono di infinitamente poco dalle precedenti; dunque sono anch'esse tutte piegate a dritta o tutte piegate a sinistra. Il senso di queste eliche essendo pienamente determinato dal complesso è intimamente connesso al medesimo, tanto che Plücker ha fatto una classificazione dei complessi, chiamando complessi piegati a dritta o destrorsi quelli le cui eliche sono tutte piegate a destra, e complessi piegati a si-

nistra o sinistrorsi quelli le cui eliche sono piegate tutte a sinistra.

Inoltre egli chiamò parametro di un complesso il prodotto costante del valore assoluto della minima distanza di un raggio del complesso dall'asse per la tangente dell'angolo formato dalle due rette e dimostrò, facendo opportune convenzioni, che il parametro è positivo o negativo secondochè il complesso è destrorso o sinistrorso.(1)

Per i complessi lineari speciali il parametro è evidentemente nullo, quindi essi formano come l'anello di congiunzione fra i complessi destrorsi e quelli sinistrorsi.

Su questo teorema e sui seguenti noi per brevità non insisteremo più oltre e ci limiteremo semplicemente ad enunciarli, servendoci essi più che altro a interessare lo studioso per queste ricerche importanti mostrando come il sistema nullo si connetta strettamente ad alcune questioni di Statica grafica ed i

---

(1) Sturm. loc. cit. pag. 92.93

meccanica.

Definito il momento di due rette come il prodotto della loro minima distanza per il seno del loro angolo si ha il teorema:

"Se r ed r' sono due rette polari di un complesso lineare ed u è un suo raggio qualunque si ha:

$$\frac{\text{mom}(r, u)}{\text{mom}(r', u)} = \text{cost.}"\ ;$$

notevole anche pel fatto che è invertibile e quindi da una generazione metrica molto semplice del complesso lineare.

Le prime considerazioni sul sistema nullo sono dovute all'italiano Gaetano Giorgini; (1) più tardi Möbius

(1) "Sopra alcune proprietà dei piani de' momenti principali etc."
Memorie della Società Italiana delle Scienze residente in Modena T. XX. 1828, pag. 243-254. Sulla priorità del Giorgini nella scoperta del sistema nullo vedine il cenno biografico che il Prof. Gino Loria ha inserito nel Vol. XXXI (pag. 23) del Giornale di Matematiche del Battaglini.

e Chasles lo hanno ritrovato in questioni di Statica grafica e di meccanica.

Möbius (Crelle's Journal ed. T. 10. pag. 317) vi giunse a proposito del problema: "Costruire le due forze equivalenti a un sistema di forze dato comunque nello spazio."

Il problema comporta una infinità di soluzioni e le coppie di forze equivalenti che si trovano, giacciono su coppie di rette polari di un determinato sistema nullo. Le rette unite del sistema nullo sono poi quelle rispetto a cui il momento statico del sistema di forze è nullo. (1)

Chasles (Aperçu historique. Paris 1889 pag. 686) dimostrò tra gli altri teoremi che:

---

(1) Ricordiamo che per momento statico di un sistema di forze rispetto a una retta si intende la somma algebrica dei momenti delle sue forze rispetto alla medesima retta e che per momento di una forza rispetto ad una retta si intende il prodotto dell'intensità della forza per il momento che la retta su cui essa giace fa colla retta data.

" Se un corpo solido si muove di infinitamente poco i piani normali alle traiettorie dei suoi punti sono polari di questi punti in un determinato sistema nullo."

Le rette unite del sistema nullo così determinato sono tutte e sole quelle perpendicolari alle traiettorie dei loro punti.

Si abbiano ora i due complessi Γ, Γ_1 rappresentati dalle equazioni

$$(ap) = a_{12}p_{34} + a_{13}p_{42} + a_{14}p_{23} + a_{34}p_{12} + a_{42}p_{13} + a_{23}p_{14} = 0$$

$$(a'p) = a'_{12}p_{34} + a'_{13}p_{42} + a'_{14}p_{23} + a'_{34}p_{12} + a'_{42}p_{13} + a'_{23}p_{14} = 0$$

e proponiamoci il problema di trovare la distribuzione delle ∞^2 rette che essi hanno a comune.

In generale una forma dello spazio rigato di ∞^2 rette si chiama congruenza di raggi (Plücker) e si chiama ordine di una congruenza il numero dei suoi raggi passanti per un punto e classe, il numero dei suoi raggi situati in un piano: dimostreremo che due complessi lineari hanno a

comune una congruenza di 1º ordine e 1ª classe, o, come si dice più brevemente una congruenza lineare.

Lo studio propostoci ci sarà facilitato come in altre occasioni dal considerare tutti i complessi lineari rappresentati dall'equazione

$$\lambda(ap) + \mu(a'p) = 0$$

al variare del parametro arbitrario $\frac{\mu}{\lambda}$, e costituenti un fascio di complessi lineari.

Anzitutto è evidente che la congruenza comune ai complessi Γ e Γ_1 è comune anche a tutti i complessi del fascio; reciprocamente, la congruenza comune a due complessi qualunque del fascio

$$\lambda_1(ap) + \mu_1(a'p) = 0$$

$$1) \qquad \lambda_2(ap) + \mu_2(a'p) = 0$$

è comune anche a Γ e Γ_1 e quindi a tutti gli altri perchè dalle 1) segue

$$(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(ap) = 0 \quad (\lambda_2\mu_1 - \mu_2\lambda_1)(a'p) = 0$$

ossia

$$(ap) = 0 \qquad (a'p) = 0\,;$$

dunque la congruenza da studiare sarà determinata da due complessi qualunque del fascio.

Allora cerchiamo se nel fascio vi sono dei complessi lineari speciali. Per questo bisogna che i valori di λ e μ soddisfino all'equazione

$$(\lambda a + \mu a', \ \lambda a + \mu a') = 0$$

ossia

$$2) \quad \lambda^2 (a\,a) + 2\lambda\mu (a\,a') + \mu^2 (a'a') = 0$$

la quale dà in generale due valori reali, distinti o coincidenti, o immaginarii coniugati pel rapporto $\frac{\mu}{\lambda}$; dunque:

"In generale in un fascio di complessi lineari vi sono due complessi lineari speciali con assi reali, distinti o coincidenti, o immaginarii coniugati.

Supponiamo dapprima che gli assi u e v siano distinti: allora la congruenza-base del fascio essendo costituita dalle rette comuni a due complessi qualunque, sarà anche costituita dalle rette comuni ai due complessi lineari speciali u e v, e quindi conterrà tutte e sole le ∞^2 rette che ~~to~~ appoggiano contemporaneamente ad u e v.

Le rette u e v si dicono direttrici della congruenza e la congruenza è lineare:

il suo raggio passante per un punto qualunque è in generale, l'unico raggio che passa pel punto e si appoggia alle direttrici u e v, ed il raggio situato in un piano è, in generale, la retta che giace nel piano e taglia u e v.

Supponendo che il punto o il piano appartengono a una delle due direttrici si ha subito che:

"Le direttrici della congruenza lineare sono polari rispetto a tutti i complessi del fascio" —;

come pure si ha reciprocamente che:

"Se due rette u e v sono polari rispetto a due complessi di un fascio esse sono polari rispetto a tutti gli altri e sono le direttrici della congruenza-base del fascio".

Infatti in tal caso le rette della congruenza lineare determinata dalle direttrici u e v appartenendo a due complessi del fascio appartengono a tutti gli altri.

La determinazione di un complesso in un fascio dipendendo da un solo pa rametro variabile $\frac{\mu}{\lambda}$ è analoga alla determinazione di un punto su una retta o sopra una conica, di una retta in un fascio o in una serie rigata; quindi può dar luogo a definizioni di proiettività fra fasci di complessi e forme elementari ponendo a base della definizione la nozione di rapporto anarmonico.

"Dati quattro complessi lineari $\Gamma' \Gamma''$ Γ'''. Γ'''' del fascio

$$\lambda(a p) + \mu(a' p) = 0$$

mediante i quattro valori $\frac{\mu_1}{\lambda_1}$, $\frac{\mu_2}{\lambda_2}$, $\frac{\mu_3}{\lambda_3}$, $\frac{\mu_4}{\lambda_4}$ del parametro $\frac{\mu}{\lambda}$, che li determinano, chiameremo rapporto anarmonico dei quattro complessi $\Gamma' \Gamma'' \Gamma''' \Gamma''''$ il rapporto anarmonico.

$$\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \frac{\mu_3}{\lambda_3}, \frac{\mu_4}{\lambda_4}\right) "$$

Dopo ciò riesce ovvio il senso delle espressioni: "fasci di complessi lineari proiettivi fra di loro, fasci di complessi proiettivi a punteggiate. a fasci di piani etc."

L'importanza di queste considerazioni risulta dalle ricerche seguenti.

Preso un punto qualunque $X \equiv x_i$, sia m il raggio della congruenza (u, v)

passante per esso e siano $\xi_1 . \xi_2 . \xi_3 . \xi_4$ i suoi piani polari rispetto ai quattro complessi $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \Gamma''''$: essi passeranno tutti per m e le loro equazioni saranno rispettivamente, indicando con le y le coordinate correnti e ponendo: (vedi pag. 199)

$$P \equiv a_{12}(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots\ldots a_{23}(x_1 y_4 - x_4 y_1)$$
$$Q \equiv a'_{12}(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots\ldots a'_{23}(x_1 y_4 - x_4 y_1),$$
$$\lambda_1 P + \mu_1 Q = 0$$
$$\lambda_2 P + \mu_2 Q = 0$$
$$\lambda_3 P + \mu_3 Q = 0$$
$$\lambda_4 P + \mu_4 Q = 0 \;;$$

dunque il rapporto anarmonico $(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ è anche dato da

$$\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1}, \frac{\mu_2}{\lambda_2}, \frac{\mu_3}{\lambda_3}, \frac{\mu_4}{\lambda_4}\right)$$

ossia dal rapporto anarmonico dei quattro complessi $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''', \Gamma''''$.

Segue da ciò che comunque si prenda il punto X il rapporto anarmonico dei quattro piani corrispondenti è costante e che quindi:

"Costruendo i piani polari di due punti qualunque X ed Y rispetto a tutti i complessi del fascio questi formano due fasci di piani proiettivi fra di loro."

Infatti i due fasci sono ambedue proiettivi al fascio dei complessi.

Correlativamente:

"I poli di due piani qualunque rispetto a tutti i complessi del fascio costituiscono due punteggiate proiettive".

I sostegni di tutte queste ∞^2 forme proiettive sono i raggi della congruenza base del fascio.

Essendo al solito u e v le direttrici della congruenza base del fascio considerato, proponiamoci il problema di studiare la distribuzione nello spazio degli assi di tutti i complessi del fascio.

Per questo osserviamo che la perpendicolare comune di u e v, essendo u e v polari rispetto a tutti i complessi del fascio, incontra ortogonalmente tutti codesti assi; quindi questi assi bisogna cercarli tra le rette che si appoggiano alla retta u e alla retta $U_\infty V_\infty$ congiungente i punti all'infinito di u, v e sostegno della punteggiata dei poli del piano all'infinito rispetto a tutti i complessi del fascio. -

Intanto è evidente che per ogni punto della $U_\infty V_\infty$, essendo esso polo del piano all'infinito rispetto a un determinato complesso del fascio, passa un solo asse; mentre per ogni punto della u ne passano due.

Per dimostrar questo prendiamo un punto qualunque X su u e determiniamo il fascio u dei piani polari di X rispetto a tutti i complessi del fascio: il fascio u e la punteggiata $U_\infty V_\infty$ saranno, per ciò che precede, riferiti proiettivamente fra di loro quando ad un piano di u, polare di X in un certo complesso del fascio si faccia corrispondere il punto di $U_\infty V_\infty$ che è polo del piano all'infinito rispetto al complesso medesimo. - Su un piano f perpendicolare ad u nel punto X costruiamo il fascio delle rette ortogonali ai piani del fascio u: questo fascio di raggi proiettivo evidentemente al fascio dei piani u sarà anche proiettivo della punteggiata $U_\infty V_\infty$. - Ma il piano f, come perpendicolare ad u, è parallelo ad u e v, quindi passa per $U_\infty V_\infty$, e se ~~questa~~ con questa retta segliamo quel fascio di raggi si ottengono su di essa due punteggiate proiettive sovrapposte. I due punti uniti di queste due punteggiate congiunti con X danno gli assi cercati passanti per esso.

Infatti se A_∞ è uno di tali punti, A_∞ sarà polo del piano all'infinito rispetto ad un complesso nel quale il piano perpendicolare ad $A_\infty X$ nel punto X è il piano polare di X; $A_\infty X$ è dunque l'asse di tale complesso. —

Come vedremo più innanzi risulta da ciò che:

"Gli assi dei complessi di un fascio si trovano sopra una superficie rigata del terzo grado di cui la retta u è una direttrice doppia, la retta $U_\infty V_\infty$ una direttrice semplice. Tutte le generatrici della superficie tagliano ortogonalmente la direttrice u.

Questa speciale superficie rigata di terzo grado ha ricevuto dal Cayley il no-

me di Cilindroide.

Se di una retta r sghemba con ambedue le direttrici della congruenza u e v, si costruiscono le polari rispetto a tutti i complessi del fascio, si trova che tutte queste polari giacciono nella serie rigata cui appartengono u, v ed r, (pag. 207), e di più, come si riconosce proiettando questa serie da un suo punto mediante un fascio di piani, o segandola con un piano passante per uno dei suoi raggi, la serie rigata è proiettiva al fascio dei complessi, corrispondendosi gli elementi nel modo già tante volte indicato.

Questo teorema è il complemento naturale di un altro già osservato. (pag. 240).

Passiamo ora al caso in cui l'equazione 2) a pag. 236 abbia due radici reali coincidenti cioè al caso in cui si abbia

$$(aa')^2 - (aa)(a'a') = 0 \quad ;$$

allora il fascio dei complessi contiene un solo complesso lineare speciale, le due direttrici della congruenza-base si avvicinano indefinitamente all'asse a di questo complesso lineare speciale, è quindi a, essendo polare di sè stesso rispetto a tutti i complessi del fascio, è un raggio della congruenza.

Come poi questa congruenza è determinata da due complessi qualunque del fascio ed in particolare dal complesso lineare speciale d'asse a e da un altro qualunque Γ, così essa conterrà tutte e sole le rette di Γ che si appoggiano ad a. Esse costituiscono adunque ∞^1 fasci di raggi coi centri nei punti di a e coi piani nei piani polari di quei punti rispetto a Γ: e poichè ogni punteggiata è proiettiva al fascio dei piani polari dei suoi punti rispetto a un complesso lineare, possiamo asserire che:

"Se ad un fascio di complessi lineari appartiene un solo complesso lineare speciale d'asse a, la congruenza base si compone di ∞^1 fasci di raggi coi centri in a e coi piani passanti per a: di più tra la punteggiata dei centri e il fascio dei piani-sostegno

vi è proiettività".

Reciprocamente:

"Se si riferiscono proiettivamente i punti di una retta a ai piani passanti per essa, e poi si considerano gli ∞^1 fasci di raggi che hanno i centri in quei punti e giacciono nei piani corrispondenti, gli ∞^2 raggi di questi fasci costituiscono una congruenza (evidentemente lineare) base di un fascio di complessi lineari".

Infatti siano A_1, A_2, A_3 tre punti qualunque di a, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i loro piani corrispondenti ed r_1, r_2, r_3 tre rette (differenti da a) appartenenti rispettivamente ai fasci (A_1, α_1), (A_2, α_2), (A_3, α_3) — I complessi lineari passanti per quattro rette costituiscono un fascio, (1) dunque le

(1) Infatti assoggettare il complesso lineare

$$(a\,p) = 0.$$

a passare per quattro rette significa dare quattro equazioni lineari omogenee a cui devono soddisfare i coefficienti a: quindi per un ragionamento solito l'equazione generale dei complessi che soddisfano alla questione può mettersi sotto la forma

$$U + \lambda V = 0$$

dove U e V sono funzioni lineari nelle coordinate correnti p_{ik}, ed i complessi medesimi costituiscono un rette a, r_1, r_2, r_3 appartengono ad ∞^1 complessi lineari costituenti un fascio. A questi fasci appartiene il solo complesso lineare speciale d'asse a, quindi la congruenza-base del fascio si comporrà di ∞^1 fasci di raggi disposti nel modo voluto dal teorema precedente.

Ma se Γ è un altro complesso qualunque del fascio, come esso passa per a, r_1, r_2, r_3, i piani polari dei punti $A_1 \equiv a r_1, A_2 \equiv a r_2\ A_3 \equiv a r_3$ rispetto a Γ sono rispettivamente $\alpha_1 \equiv a r_1, \alpha_2 \equiv a r_2, \alpha_3 \equiv a r_3$, dunque la congruenza-base contiene i tre fasci $(A_1, \alpha_1)\ (A_2, \alpha_2)(A_3, \alpha_3)$ e coincide colla congruenza dell'enunciato.

Un caso particolare molto notevole del fascio di complessi è quello in cui l'equazione 2)

$$\lambda^2 (a a) + 2\lambda\mu (a a') + \mu (a' a') = 0$$

sia identicamente soddisfatta da qualunque valore di $\frac{\mu}{\lambda}$; allora essendo

$$(a a) = 0 \quad (a a') = 0 \quad (a' a') = 0$$

i due complessi Γ e Γ_1

$$(a p) = 0 \quad (a' p) = 0$$

sono speciali, e i loro assi di coordinate

a_{ik} e a'_{ik} si incontrano.

In tal caso tutti i complessi del fascio sono speciali e i loro assi si trovano nel fascio determinato dai due assi di Γ e Γ_1, perchè l'asse di qualunque complesso viene ad avere per coordinate combinazioni lineari delle coordinate a_{ik} e a'_{ik}. Inoltre la congruenza-base si compone di tutte le rette del piano di quel fascio degli assi e di tutte le rette passanti pel suo centro. Essa può ~~annullar~~ considerarsi anche come spezzata in due congruenze molto particolari; l'una di ordine 0 e classe 1 è costituita dalle rette di quel piano - l'altra di ordine 1 e classe 0 è costituita dalle rette di quella stella.

Supponiamo infine che nell'equazione 2) sia

$$(a a') = 0 ;$$

allora le due radici che danno i valori di $\frac{\mu}{\lambda}$ sono uguali e di segno contrario, quindi il rapporto anarmonico che i due complessi speciali del fascio fanno coi complessi Γ e Γ_1

$$(a p) = 0 \quad (a' p) = 0$$

è dato da

$$(k, -k, 0, \infty) = -1$$

essendo k e $-k$ i valori di $\frac{\mu}{\lambda}$ pei comples-si speciali, 0 ed ∞ i valori dello stesso rapporto pei complessi Γ e Γ_1; ossia, se $(aa')=0$ i due complessi Γ e Γ_1 formano gruppo armonico coi complessi speciali del loro fascio.

Inversamente è chiaro che se due complessi Γ e Γ_1 formano gruppo armonico coi complessi speciali del fascio da essi individuato, si ha $(aa')=0$.

Due tali complessi Γ e Γ_1 si dicono in involuzione (Klein).

Segue anche da ciò che se in un fascio di complessi si associano i complessi due a due, in modo che ogni coppia sia una coppia di complessi in involuzione, i complessi del fascio restano accoppiati in una involuzione di cui i due complessi lineari speciali del fascio sono gli elementi doppii. — Ma si badi bene a non confondere i diversi significati che questa volta ha la parola involuzione.

Siano Γ e Γ_1 due complessi in involuzione e siano u e v le direttrici della

congruenza - base del fascio da essi determinato e gli assi dei complessi speciali con cui Γ e Γ_1 formano gruppo armonico. Sia inoltre s un raggio di Γ ed s' la sua polare rispetto a Γ_1: le quattro rette s, s', u, v apparterranno ad una medesima serie rigata, e siccome sono le polari di s rispetto a Γ, Γ_1 e i complessi speciali d'assi u e v, (1) formeranno un gruppo armonico. —

Ora le rette u, v, s determinano una quadrica del complesso Γ di cui, la serie rigata che si appoggia ad u, v, s è costituita tutta di rette di Γ e l'altra cui appartengono u, v, s è costituita di rette due a due polari rispetto a Γ e accoppiate in involuzione. Di questa involuzione i raggi doppii appartengono evidentemente a Γ: l'uno è s, l'altro, poiché u e v è una coppia di tale involu-

---

(1) Infatti è chiaro che l'asse di un complesso lineare speciale è polare di tutte le rette dello spazio rispetto al complesso medesimo. —

zione, sarà s'.

Questo risultato dà luogo al teorema seguente:

"Di due complessi lineari in involuzione Γ e Γ_1 ciascuno è polare di sè stesso rispetto al sistema nullo individuato dall'altro."

Inversamente è chiaro che:

"Se due rette s ed s' di un complesso lineare Γ sono polari rispetto a un altro Γ_1, i complessi Γ e Γ_1 sono in involuzione."

Infatti se u e v sono le direttrici della congruenza comune ai complessi Γ e Γ_1, le quattro rette u, v, s s' sono due coppie di rette polari rispetto a Γ_1; quindi giacciono sopra una medesima superficie rigata e su questa, ripetendo un ragionamento già fatto, costituiscono un gruppo armonico. Ma il rapporto anarmonico che i complessi Γ e Γ_1 formano coi complessi speciali d'assi u e v è uguale al rapporto anarmonico delle quattro rette s, s', u, v perchè esse sono le polari di s rispetto a quei quattro

complessi, dunque questo rapporto anarmonico è uguale a -1 e i complessi Γ e Γ_1 sono in involuzione.

Insieme ai fasci di complessi possiamo studiare altri sistemi più generali di complessi.

Dati tre complessi lineari Γ, Γ_1, Γ_2 non appartenenti a un medesimo fascio, rappresentati dalle equazioni:

$$(a\,p)=0 \quad (a'p)=0 \quad (a''p)=0$$

rimane individuata una rete di complessi, dati dall'equazione

$$\lambda(a\,p)+\mu(a'p)+\nu(a''p)=0$$

facendovi variare in tutti i modi possibili λ, μ, ν. La rete comprende ∞^2 complessi lineari, sicchè suole anche chiamarsi sistema doppiamente infinito di complessi lineari.

Essa è individuata non solo dai complessi Γ, Γ_1, Γ_2 ma anche da tre suoi complessi qualunque non formanti fascio.

Infatti siano

$$\lambda_1(a\,p)+\mu_1(a'p)+\nu_1(a''p)=0$$
$$\lambda_2(a\,p)+\mu_2(a'p)+\nu_2(a''p)=0$$
$$\lambda_3(a\,p)+\mu_3(a'p)+\nu_3(a''p)=0$$

le equazioni di tre complessi Γ', Γ'', Γ''' della rete considerata e sia

$$\lambda(ap)+\mu(a'p)+\nu(a''p)=0$$

l'equazione di un altro complesso qualunque della medesima rete. Se questo complesso appartiene alla rete determinata da Γ', Γ'', Γ''' dovrà esser possibile determinare tre numeri l, m, n in modo che si abbia:

$$l\lambda_1 + m\lambda_2 + n\lambda_3 = \lambda$$
$$l\mu_1 + m\mu_2 + n\mu_3 = \mu$$
$$l\nu_1 + m\nu_2 + m\nu_3 = \nu$$

e perché questo sistema d'equazioni dia valori determinati per l, m, n dovrà essere:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ora il non annullarsi di questo determinante esprime appunto che i complessi Γ', Γ'', Γ''' non formano fascio, dunque resta dimostrato quanto abbiamo asserito —

"In una rete, vi sono in generale, ∞^1 complessi lineari speciali"

Infatti perché il complesso

$$\lambda(ap)+\mu(a'p)+\nu(a''p)=0$$

sia speciale, basta che sia

$$(\lambda a+\mu a'+\nu a'',\ \lambda a+\mu a'+\nu a'')=0$$

ossia

$$\lambda^2(aa)+\mu^2(a'a')+\nu^2(a''a'')+2\lambda\mu(aa')+2\lambda\nu(aa'')+$$
$$+2\mu\nu(a''a'')=0.$$

Ora questa equazione è soddisfatta da infiniti sistemi di valori dei rapporti $\frac{\mu}{\lambda}$ e $\frac{\nu}{\lambda}$; e precisamente da ∞^1 in generale.

L'equazione precedente è identicamente soddisfatta da tutti i valori di $\frac{\mu}{\lambda}$ e $\frac{\nu}{\lambda}$ e la rete si compone di complessi tutti speciali se

$$(aa)=(a'a')=(a''a'')=(aa')=(aa'')=(a'a'')=0;$$

in tal caso gli assi dei complessi speciali Γ, Γ_1, Γ_2 sono le rette di coordinate a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik} giacenti in uno stesso piano, o passanti per uno stesso punto: (1) quindi gli assi di tutti gli altri complessi della rete avendo per coordinate combinazioni lineari delle

---

(1) Si avverta però che queste tre rette non formeranno mai un fascio = altrimenti anche Γ, Γ_1 e Γ_2 contro l'ipotesi fatta, formerebbero un fascio.

a, a', a'' o giaceranno nel sistema piano individuato dagli assi di Γ, Γ_1 e Γ_2 o faranno parte della stella da questi medesimi determinata.

"I complessi di una rete hanno ∞^1 rette comuni, costituenti, in generale, una serie rigata"

Infatti se u e v sono le direttrici della congruenza comune a Γ e Γ_1 ed u' e v' le polari di u e v rispetto a Γ_2, le quattro rette u, v, u', v' appartengono ad un sistema rigato il cui sistema direttore è composto tutto di rette comuni a $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ e quindi a tutti i complessi della rete.

Se la congruenza comune a Γ e Γ_1 ha le due direttrici coincidenti in una retta u, ed u' è la polare di u rispetto a Γ_2 le rette comuni a Γ, Γ_1 e Γ_2 saranno quelle e quelle soltanto della congruenza che si appoggiano ad u'. Ma in tal caso la congruenza si compone di ∞^1 fasci coi centri su u e coi piani per u, e il fascio dei piani è proiettivo alla punteggiata dei centri, dunque le rette comu-

ni a $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ si appoggiano ad u e u' e determinano su queste due punteggiate proiettive. Dunque esse costituiscono ancora una serie rigata.

Reciprocamente:

"I complessi lineari passanti per una serie rigata costituiscono una rete."

Infatti perché un complesso passi per una serie rigata basta assoggettarlo a passare per sole tre rette della serie, e assoggettare un complesso

$$(ap) = 0$$

a contenere tre rette equivale a porre tra i coefficienti a tre equazioni lineari omogenee che determinano tre di essi in funzione dei tre rimanenti. Tanto basta per potere affermare, secondo un ragionamento solito, che gli ∞^2 complessi passanti per una serie rigata costituiscono una rete.

Segue da ciò che se U è la serie rigata delle rette comuni a tutti i complessi della rete determinata da Γ, Γ_1 e Γ_2, gli assi dei complessi speciali appartenenti alla rete sono tutte e sole le rette della serie rigata V direttrice di U.

Consideriamo ora alcuni casi speciali.
Se la congruenza comune a Γ e Γ_1 si spezza nelle rette di un piano β e di una stella A, il cui centro si trova su β, le rette comuni a Γ, Γ_1, Γ_2 saranno le rette dei fasci (A,α), (B,β) dove α e B sono il piano polare e il polo di A e β rispetto a Γ_2. I due fasci hanno a comune il raggio $AB \equiv \alpha\beta$.

Inversamente:

"I complessi passanti per due fasci di raggi (A,α), (B,β) aventi a comune un raggio $AB \equiv \alpha\beta$ costituiscono una rete"

Infatti se r è una retta qualunque del fascio (A,α) ed s una del fascio (B,β), i complessi lineari passanti per le tre rette r, s, AB passano pei due fasci (A,α), (B,β) e costituiscono una rete.

Segue da ciò che se le rette comuni a tutti i complessi della rete determinata da Γ, Γ_1, Γ_2 formano due fasci di raggi (A,α), (B,β), gli assi dei complessi speciali appartenenti alla rete sono i raggi dei due fasci (A,β) e (B,α).

Un caso di ulteriore particolarizzazione è quello in cui il centro A della stella è polo del piano β rispetto al complesso Γ_2: allora le rette comuni a tutti i complessi della rete si riducono alle rette del fascio (A,β).

Quattro complessi Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 le cui equazioni siano rispettivamente:

$$(a\beta)=0,\ (a'p)=0\ (a''p)=0,\ (a'''p)=0$$

non appartenenti a una medesima rete, determinano un sistema triplamente infinito di complessi lineari, le cui equazioni sono date da:

$$\lambda(ap)+\mu(a'p)+\nu(a''p)+\rho(a'''p)=0$$

facendovi variare in tutti i modi possibili i rapporti $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\nu}{\lambda}$, $\frac{\rho}{\lambda}$. Esso contiene ∞^3 complessi e ∞^2 complessi lineari speciali.

Consideriamo le due congruenze delle rette comuni a Γ e Γ_1, Γ_2 e Γ_3 rispettivamente e siano u, v le direttrici della prima, s, t le direttrici della seconda. Le quattro rette u, v, s, t non appartengono a una medesima serie rigata, perchè se ciò avvenisse Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3 avrebbero a comune tutte le rette della serie direttrice e quindi apparterrebbero a una rete. Dunque vi sono due sole rette che si appoggino ad u, v, s, t e quindi:

"I complessi di un sistema triplamente infinito di complessi lineari, hanno in generale soltanto due rette a comune."

Infatti se u e v sono le direttrici della congruenza comune a Γ e Γ_1 ed r, s le direttrici della congruenza comune a Γ_2, Γ_3 le rette u, v, r, s non apparterranno ad una medesima serie rigata, perchè altrimenti i complessi $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ avrebbero a comune la serie rigata direttrice ed apparterrebbero contro l'ipotesi fatta ad una medesima rete. Quindi vi sono due sole rette che si appoggino contemporaneamente ad u, v, r, s e il teorema resta dimostrato.

Si capisce però che in casi particolari le rette comuni possono essere anche più di due e anche infinite. Così per es. è chiaro che gli ∞^3 complessi lineari passanti per un fascio di raggi costituiscono un sistema triplamente

infinito.

Cinque complessi non appartenenti a un medesimo sistema triplamente infinito individuano nel solito modo un sistema quattro volte infinito di complessi non aventi in generale alcuna retta a comune. Ma anche qui si hanno dei casi particolari: così per es: gli ∞^4 complessi lineari passanti per una retta costituiscono un sistema quattro volte infinito.

Il sistema più generale che si può determinare nel modo fin qui mediante sei complessi generici è quello costituito da tutti gli ∞^5 complessi dello spazio rigato.

Abbiamo già detto (pag. 197) cosa s'intende per complesso quadratico, cubico e in generale di grado n. Osserviamo però che qui a differenza della Geometria del punto o del piano, l'equazione di un complesso di grado superiore al primo può prendere aspetti differenti anche senza cambiare il tetraedro fondamentale di riferimento.

Ed infatti se

$$\varphi(p)$$

è una forma di grado n nelle coordinate p, e

$$\omega(p)$$

è una forma di grado $(n-2)$ nelle medesime coordinate, la

$$\varphi(p)+\omega(p)(pp)$$

dove (pp) ha il solito significato è ancora una forma di grado n nelle p e le due equazioni

$$\varphi(p)=0\,,\quad \varphi(p)+\omega(p)(pp)=0$$

rappresentano il medesimo complesso di grado n, poichè tutte le rette dello spazio soddisfano alla relazione

$$(pp)=0$$

"Le rette di un complesso di grado n passanti per un punto costituiscono un cono di grado n; quelle giacenti in un piano formano un inviluppo di n^a classe".

Sia $X\equiv x_i$ un punto qualunque ed $Y\equiv y_i$ un punto che congiunto con X dà una retta XY del complesso di $n°$ grado

rappresentato dall'equazione

$$1)\qquad \varphi(p)=0$$

Allora le coordinate p_{ik} della retta XY sono proporzionali ai binomii

$$x_i y_k - x_k y_i$$

e l'equazione 1) dovrà essere soddisfatta quando alle p si costituiscano questi binomii. Facendo variare Y in modo che la retta XY appartenga al complesso, le sue coordinate y_i soddisferanno sempre all'equazione ottenuta dalla 1) per quella sostituzione, e viceversa. Il luogo del punto Y è pertanto una superficie di grado n, e siccome essa è costituita di rette uscenti tutte dal punto fisso X, è un cono del grado suddetto. Con un ragionamento correlativo si proverebbe la seconda parte del teorema enunciato.

Dalle cose dette segue che il grado di un complesso può anche definirsi geometricamente, intendendo per grado di un complesso il numero determinato dei suoi raggi che appartengono a un fascio di raggi dato comunque. (1)

(1) - Sturm - loc. cit. pag. 8

In particolare segue dal teorema or ora dimostrato che le rette di un complesso quadratico passanti per un punto o giacenti in un piano costituiscono una superficie conica del secondo ordine o inviluppano una curva di seconda classe.

Infine notiamo che, in generale, si chiamano coni e curve di un complesso i coni e le curve determinate dalle rette del complesso passanti per i punti o giacenti nei piani dello spazio.

Adesso noi vogliamo studiare un particolarissimo complesso quadratico, quello costituito dalle ∞^3 tangenti di una quadrica: così troveremo l'equazione di una quadrica in coordinate di rette. I coni del complesso sono i coni di 2^o ordine circoscritti alla quadrica, le curve del complesso sono le coniche-sezioni della quadrica medesima.

Sia:

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$$

l'equazione della quadrica e siano

$\xi \equiv \xi_i$ $\eta \equiv \eta_i$ i piani polari dei punti $X \equiv x_i$ $Y \equiv y_i$ rispetto ad essa sarà (pag. 97)

$$\xi_i = \sum_k a_{ik}\, x_k$$

$$\eta_i = \sum_k a_{ik}\, y_k$$

e se indichiamo con q'_{ik} le coordinate della retta $\xi\eta$ polare rispetto alla quadrica della retta $XY \equiv p_{ik}$ sarà:

$$q'_{ik} = \xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i = \begin{vmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + a_{k4}x_4 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + a_{i3}y_3 + a_{i4}y_4 & a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + a_{k3}y_3 + a_{k4}y_4 \end{vmatrix}$$

$$" = \begin{Vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{Vmatrix} =$$

$$" = \sum_{s,t} \begin{vmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{ks} & a_{kt} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix} = \sum_{s,t} \begin{vmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{ks} & a_{kt} \end{vmatrix} p_{st}$$

Ma da una formula già trovata e dall'essere le coordinate q di una retta qualunque legate alle coordinate p della medesima mediante la relazione

$$q_{ik} = \frac{\partial (pp)}{\partial p_{ik}}$$

si ricava che condizione necessaria e sufficiente perchè due rette si incontrino, quando l'una sia data per le coordinate p e l'altra per le coordinate q, è che sia

$$\sum_{ik} p_{ik}\, q_{ik} = 0\,;$$

dunque la relazione

$$\sum_{ik} p_{ik}\, q'_{ik} = 0$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè le rette XY e $\xi\eta$ si incontrino.

Ora le rette XY e $\xi\eta$ sono polari rispetto alla quadrica, quindi quella relazione medesima esprime che esse s'incontrano in un punto della quadrica e che in quel punto la toccano; perciò se in essa si sostituiscono alle q' i loro valori in funzione delle p si ottiene l'equazione

$$\sum_{ik} p_{ik} \sum_{st} \begin{vmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{ks} & a_{kt} \end{vmatrix} p_{st} = \sum_{i,k,s,t} \begin{vmatrix} a_{is} & a_{it} \\ a_{ks} & a_{kt} \end{vmatrix} p_{ik}\, p_{st} = 0$$

a cui soddisfano colle loro coordinate tutte e sole le tangenti alla quadrica.

Questa è l'equazione del complesso considerato. - Ad essa possiamo pervenire anche in altro modo.

Siano $\xi = \xi_i$ $\eta = \eta_i$ due piani qualunque e siano

$$\lambda \xi_i + \mu \eta_i$$

le coordinate di un piano del loro fascio; se indichiamo con x_i le coordinate del polo X di quest'ultimo piano rispetto alla quadrica si avrà

$$2) \quad \lambda \xi_i + \mu \eta_i = \sum_k a_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Ora se noi scriviamo che il polo X di questo piano si trova nei piani ξ ed η cioè sulla loro comune intersezione $\xi\eta$, verremo a scrivere che X si trova nel suo piano polare e che quindi questo, come la retta $\xi\eta$ tocca la quadrica. Viceversa se la retta $\xi\eta$ tocca la quadrica il polo del piano tangente in cui è contenuta giace su di essa e quindi anche sui piani ξ ed η dunque la coesistenza delle quattro equazioni soprascritte colle altre

$$0 = \sum_k \xi_k\, x_k$$

$$0 = \sum_k \eta_k\, x_k$$

dove le incognite sono λ, μ x_1 x_2 x_3 x_4 è la condizione necessaria e sufficiente a cui devono soddisfare le coordinate dei piani ξ ed η perchè la retta $\xi\eta$ tocchi la quadrica.

Essa è espressa come è noto dall'annullarsi del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \xi_1 & \eta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \xi_2 & \eta_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \xi_3 & \eta_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \xi_4 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Se si sviluppa questo determinante rispetto ai determinanti che si ricavano dalla matrice formata dall'ultime due colonne o dall'ultime due orizzontali osservando che questi determinanti sono proporzionali alle coordinate q della retta $\xi\eta$ si arriva appunto a un'equazione della forma di quella già trovata.-

Capitolo IV:

Della cubica gobba e della sviluppabile di terza classe.-

Riprendiamo lo studio degli enti geometrici generati dalle forme proiettive di seconda specie; finora abbiamo trattato delle quadriche e degli inviluppi di seconda classe ossia degli enti generati da stelle e sistemi piani reciproci ci facciamoci adesso a considerare stelle e sistemi piani collineari.

Per ora ci limiteremo alle stelle collineari: enunceremo poi i teoremi correlativi per i sistemi piani senza darne la dimostrazione, perchè questa si può sempre facilmente ottenere colla legge di dualità.-

Siano adunque date due stelle collineari non concentriche S, S_1 e supponiamo, pur continuando ad usare di quelle generalizzazioni dei risultati geometrici che si ottengono mediante l'introduzione degli elementi immaginarii, che le stelle e la collineazione tra essa stabilita siano reali: intendendo per collineazioni reali quelle che sono rappresentate analiticamente da forme lineari omogenee a coefficienti reali.

Due sono gli enti generati dalle due stelle collineari S ed S_1; il primo nasce dalla considerazione delle rette dell'una stella che incontrano le corrispondenti nell'altra, cercando il luogo del loro punto d'incontro: il secondo, dal considerare le intersezioni dei piani corrispondenti.

Per questo distinguiamo alcuni casi.

Se le stelle S ed S_1 fossero prospettive cioè avessero unito il raggio SS_1 e tre piani (e quindi tutti) passanti per esso, tutti i raggi corrispondenti delle due stelle si incontrerebbero e i punti d'intersezione giacerebbero in un piano. In tal caso non si ha nulla di notevole e perciò va escluso senz'altro dalle nostre ricerche.

Se le stelle S ed S_1 hanno unito il raggio SS_1, ma non sono prospettive, hanno anche uniti due piani η e φ pas-

santi per SS_1 che possono essere reali, distinti o coincidenti, o immaginarii coniugati. Allora i fasci di raggi omologhi di S ed S_1 giacenti in η e φ avendo unito il raggio SS_1 oltrechè proiettivi saranno anche prospettivi, e quindi le loro intersezioni giaceranno su due rette u e v situate rispettivamente in η e φ. Di più se P è l'intersezione di due raggi omologhi a ed a_1 di S ed S_1 il piano $PSS_1 \equiv a \cdot SS_1 \equiv a_1 \cdot SS_1$ è unito, dunque in tal caso il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di S ed S_1 che si incontrano si riduce alle tre rette u, v, SS_1 e le intersezioni dei piani corrispondenti, poichè ogni piano della stella S passante per un punto di u o di v ha a comune questo punto col piano corrispondente di S_1, costituiranno le rette della congruenza lineare avente per direttrici u e v e le rette dei piani η e φ.

Se invece le stelle collineari S ed S_1 non hanno unito il raggio SS_1 ma solo un piano η passante (naturalmente) per esso, i fasci di raggi omologhi di S ed giacenti in η non saranno prospettivi e genereranno una conica k^2 passante per S ed S_1: k^2 sarà parte del luogo considerato. Gli altri punti del luogo li troveremo tutti cercandoli nei piani passanti per SS_1, e, precisamente, se σ è un tale piano e σ_1 è il piano corrispondente a σ considerato come appartenente alla stella S, alla retta $r_1 \equiv \sigma\sigma_1$ di S_1 giacente in σ_1 corrisponderà in S una retta r giacente in σ e il punto $X \equiv rr_1$ sarà uno dei punti del luogo - e l'unico giacente in σ oltre S ed S_1 perchè altrimenti σ contenendo due coppie di raggi omologhi sarebbe unito. Rotando il piano σ intorno ad SS_1 il punto X descriverà il luogo residuo domandato.

Siano H e K due delle posizioni di X: ai raggi $S(H,K)$ di S corrisponderanno i raggi $S_1(H,K)$ di S_1 e quindi al piano SHK di S corrisponderà il piano S_1HK di S_1; questi due piani segheranno il piano unito η in due rette corrispondenti s, s_1 che si incroceranno in un

punto L della conica k^2. Allora al fascio di raggi di S contenuto nel piano SHK corrisponderà un fascio di raggi di S_1 contenuto nel piano S_1HK e siccome tre raggi del primo incontrano i tre raggi corrispondenti dell'altro in tre punti H, K ed L della comune intersezione dei due piani ciò avverrà per tutti, e quindi tutti i punti della retta $l \equiv HKL$ apparterranno al luogo domandato.

Inoltre le rette d'intersezione dei piani omologhi di S ed S_1 hanno con k^2 ed l un punto comune, e viceversa ogni retta che si appoggia ad l e k^2 è intersezione di due piani corrispondenti di S ed S_1: dunque tutte le intersezioni dei piani corrispondenti di S ed S_1 sono date dalle rette del piano η e dalle rette che si appoggiano contemporaneamente ad l e k^2 costituenti, com'è chiaro, una congruenza di primo ordine e seconda classe.

Riassumendo:

"Nel caso che le stelle S ed S_1 abbiano un solo piano unito η, il luogo delle intersezioni dei raggi corrispondenti si compone di una conica k^2 e di una retta l che si appoggia alla conica: le intersezioni dei piani corrispondenti costituiscono le rette di una congruenza di primo ordine e seconda classe; e le rette del piano η; di più esse si ottengono tutte (meno quelle del piano η) congiungendo un punto qualunque di k^2 ad uno qualunque di l.

Supponiamo infine che le stelle S ed S_1 non abbiano alcun elemento unito. Allora il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di S ed S_1 che si incontrano è una curva del terz'ordine detta cubica gobba.

Giustifichiamo queste denominazioni. Intanto segue da un'osservazione fatta precedentemente che in ogni piano (senza eccezione) passante per SS_1 giace un solo punto del luogo oltre i punti S ed S_1 appartenenti evidentemente ad esso, cosicchè se si fa ruotare un piano σ intorno ad SS_1 fino a ritornare alla posizione primitiva si ha che il punto del luogo giacente in esso, pure muoventesi

con continuità, torna alla posizione primitiva, assumendo le posizioni di tutti i punti del luogo. Il luogo è adunque una curva chiusa.

Essa è del terz'ordine perchè da un piano qualunque dello spazio è segata in tre punti.

Infatti se il piano segante σ passa per SS_1 ciò risulta dalle cose già dette: altrimenti σ taglia le stelle in due sistemi piani collineari sovrapposti che non possono avere più di tre punti uniti stante le ipotesi fatte sulle stelle S ed S_1. – Ora questi tre punti sono precisamente i punti che σ ha a comune colla curva; dunque essa è del terz'ordine. (1)

Quando si aggiunga che essa ap-

---

(1) Lasciamo al lettore la cura di verificare il teorema nel caso che il piano segante passi per S od S_1 soltanto: omettiamo tale considerazione perchè vedremo fra poco che i punti S ed S_1 sono punti qualunque della cubica.

Disp.a 35.a

punto perchè con qualsiasi piano non ha che tre punti a comune non giace tutta in un piano, si trova subito giustificata la denominazione di cubica gobba data a questa curva.

"Una retta non può avere più di due punti a comune con una cubica gobba."

Ed infatti se una retta avesse più di due punti a comune colla curva, un piano passante per quella retta e per un altro punto della cubica avrebbe a comune con essa più di tre punti: il che è assurdo.

Allo studio della cubica gobba è strettamente collegato lo studio della totalità delle ∞^2 rette ove si intersecano i piani corrispondenti delle due stelle: esse costituiscono una congruenza di primo ordine e di terza classe.

Prima di mostrar questo osserviamo che esse sono tutte e sole le bisecanti o corde della cubica gobba.

Intanto se una retta r si appoggia a due punti H e K della cubica ai raggi $S(H,K)$ di S corrisponderanno i raggi $S_1(H,K)$ di S_1 e quindi al piano

$SHK \equiv S_2$ di S corrisponderà il piano $S_1HK \equiv S_1$ di S_1 ed r sarà intersezioni di questi due piani corrispondenti.

Inversamente sia r l'intersezione di due piani corrispondenti α ed α_1 di S ed S_1: al fascio di raggi di S contenuto in α corrisponderà in S_1 un fascio di raggi nel piano α_1 ad esso proiettivo, e quindi avremo sulla retta r due punteggiate proiettive sovrapposte segnatevi da questi fasci. Nei due punti uniti H e K di tali punteggiate si incontreranno due coppie di raggi corrispondenti di S ed S_1 e quindi essi saranno due punti della cubica e la retta r sarà una sua corda.

Dopo ciò si vede immediatamente che la congruenza in discorso è di terza classe: infatti un piano qualunque σ dello spazio taglia la cubica in tre punti, le cui tre congiungenti sono appunto per quel che precede le rette della congruenza situate nel piano σ.

Per mostrare che essa è di prim'ordine, osserviamo che, se P è un punto generico dello spazio, al fascio di piani $SP \equiv g$

di S corrisponde un fascio g_1 di S_1 il cui asse g_1 non passa in generale per P: allora soltanto il piano Pg_1 di S_1 e il suo corrispondente in S s'incontrano in una retta passante per P, e quindi una sola retta della congruenza passa per P.

Pel punto P passano più di una retta della congruenza e ne passano infinite solo quando la retta g incontra la retta g nel punto P ossia P appartiene alla cubica. In tal caso le intersezioni di tutti i piani corrispondenti dei fasci g e g_1 sono rette della congruenza passanti per P e costituiscono un cono di second'ordine. Siccome poi le rette della congruenza sono bisecanti della cubica e viceversa, così si ottiene che

"Se da un punto P della cubica si proiettano tutti gli altri, si ottiene un cono di second'ordine."

Si hanno pertanto ∞^1 coni di secondo ordine passanti per la cubica.

In generale si chiamano punti o piani singolari di una congruenza i punti o i piani cui appartengono infinite

rette della congruenza: quindi possiamo riguardare la cubica gobba generata dalle stelle S ed S_1 anche come il luogo dei punti singolari della congruenza da esse medesime generata.

Oltre gli ∞^1 coni già trovati possono costruirsi altre ∞^2 quadriche passanti per la cubica.

Ed infatti se le rette corrispondenti g e g_1 di S ed S_1 non si incontrano i fasci di piani corrispondenti che hanno per sostegni g e g_1 generano una superficie rigata del second'ordine contenente la cubica: poichè se P è un suo punto qualunque al raggio SP di S corrisponde il raggio S_1P di S_1 e quindi al piano $SP \cdot g \equiv Pg$ di S corrisponde il piano $S_1P \cdot g_1 \equiv Pg_1$ di S_1: ossia il punto P giace sulla superficie rigata or ora costruita.

Facendo variare g e g_1 si ottengono così ∞^2 quadriche passanti per la cubica (si hanno coni quando g e g_1 si incontrano) e si ottengono anche tutte, come risulta dalle ricerche seguenti.

Supponiamo che la cubica esista

sopra una certa quadrica Γ, di cui indicheremo con le g le generatrici e con le d le direttrici, e consideriamo il piano tangente a Γ in un punto qualsiasi A: questo piano conterrà due rette g, d di Γ e taglierà la cubica in tre punti situati su g e d e per es. due giaceranno su g e uno su d non potendo giacere tutte e tre sopra una medesima retta. Attorno alla g facciamo ruotare un piano: questo taglierà sempre la quadrica in un'altra retta d e la cubica in tre punti di cui, due essendo su g, uno ed uno solo si troverà sulla nuova d: dunque tutte le rette d hanno un sol punto a comune con la cubica, o, come si suol dire, sono unisecanti.

Similmente facendo ruotare un piano intorno a d si troverebbe che tutte le rette g sono bisecanti, quindi abbiamo ottenuto il resultato che:

"Se una quadrica contiene la cubica, dei suoi due sistemi rigati di rette uno si compone tutto di unisecanti, l'altro tutto di bisecanti."

Adesso facciamo vedere che Γ si può ottenere da due fasci di piani corrispondenti nelle due stelle collineari S ed S_1.

Siano d e d_1 le unisecanti della quadrica passanti per S ed S_1: tutte le rette g della quadrica bisecanti della cubica si appoggeranno a d e d_1 e se le proiettiamo da d e d_1 otterremo due fasci di piani proiettivi. Ora poiché ogni retta g è bisecante al piano Sg di S corrisponderà nella collineazione delle due stelle il piano S_1g di S_1, ossia al piano dg il piano d_1g: dunque le rette d e d_1 come sostegni di fasci di piani corrispondenti delle stelle saranno anch'esse corrispondenti e la proiettività subordinata fra i fasci d e d_1 dalla collineazione delle due stelle, coincide colla proiettività determinata fra i medesimi fasci proiettando da d e d_1 le rette g. Ciò dimostra appunto che la quadrica Γ può ottenersi nel modo che si è detto.

"Una quadrica passante per una cubica è pienamente determinata quando debba anche contenerne due corde."

Infatti se a e b sono le corde della cubica e d e d_1 sono le rette uscenti da S ed S_1 e appoggiantesi ad a e b, una quadrica che passi per la cubica e per le corde a e b deve anche contenere d e d_1: ora tale quadrica deve anche potersi generare mediante fasci proiettivi di piani di S ed S_1, dunque l'unica quadrica soddisfacente alla questione è quella generata dai due fasci proiettivi di piani d e d_1. – (Che le rette d e d_1 si corrispondano effettivamente nella collineazione delle due stelle segue subito dal fatto che d è intersezione dei due piani Sa, Sb di S cui corrispondono rispettivamente i piani S_1a, S_1b di S_1 che si segano lungo la retta d_1).

A questo teorema si può dare un'altra forma se si pensa che la congruenza delle corde di una cubica è di primo ordine e che quindi per dare una corda basta dare un punto dello spazio per cui essa passa: individuando le corde a e b per due loro punti si ha:

"Per una cubica e per due punti

generici dello spazio passa una quadrica ed una soltanto."

"Data una unisecante m di una cubica vi è una sola quadrica che passi per la cubica e contenga l'unisecante."

Infatti siano A e B due punti qualunque dell'unisecante: la quadrica che passa per la cubica e pei due punti A e B contiene anche l'unisecante m, perchè di essa contiene i punti A, B e il punto ove incontra la cubica.

Che poi vi sia una sola di queste quadriche risulta immediatamente. – Infatti due quadriche Γ e Γ' che passino per la cubica e per l'unisecante m contengono tutte le bisecanti della cubica medesima appoggiantesi ad m, come aventi con ciascuna di esse tre punti a comune: e quindi Γ e Γ' avendo a comune il sistema rigato delle bisecanti coincidono.

Questo teorema può anche enunciarsi così:

"Il luogo delle corde di una cubica

che si appoggiano ad una unisecante è una serie rigata„

Siano a e b due corde qualunque d'una cubica e sia Γ la quadrica passante per a, b e per la cubica. Se da a e b, appartenenti ad una medesima serie rigata di Γ proiettiamo le rette appartenenti all'altra serie otteniamo due fasci di piani proiettivi: ma le rette dell'altra serie sono unisecanti e proiettare una unisecante da a e b equivale a proiettare dalle medesime rette il punto che essa ha a comune con la cubica, dunque:

"I fasci di piani secondo cui una cubica vien proiettata da due sue corde qualunque, sono proiettivi„

Questa proprietà non cessa naturalmente di sussistere se una delle rette a e b od entrambe queste rette sono tangenti alla cubica, ossia hanno con essa due punti infinitamente vicini a comune. quindi si ha in particolare che i piani proiettanti da una corda a e da una tangente b in B alla cubica un punto X di questa, descrivono al

variare di X due fasci di piani proiettivi. Allora quando il punto X si avvicina infinitamente a B il piano bX viene ad avere colla cubica tre punti infinitamente vicini riuniti in B, e si chiama allora piano osculatore alla cubica nel punto B; d'altronde quando X si avvicina indefinitamente a B il piano aX corrispondente a bX nella proiettività fra a e b tende a confondersi col piano Ba, dunque:

"Il piano osculatore in B alla cubica è quel piano del fascio b che nella proiettività fra a e b corrisponde al piano Ba del fascio a„

Una costruzione geometrica semplice del piano osculatore alla cubica in un suo punto è la seguente. – Sia B il punto dato e b la tangente in esso alla cubica: poi sia $BA \equiv a$ una corda qualunque passante per B; i fasci secondo cui le rette b ed a proiettano un punto variabile X della cubica saranno proiettivi e genereranno un cono: il cono che da B proietta la cubica. Ora quando il punto X si avvicina indefinitamente a B il piano bX tende a divenire il piano osculatore in B, mentre il piano aX tende a divenire il piano ab. Dunque il piano osculatore in B corrisponde nella proiettività fra i fasci a e b al piano a b, considerato come appartenente ad a. Esso tocca pertanto il cono proiettante da B la cubica secondo la tangente b alla medesima e si ha il teorema:

"Il piano osculatore in un punto della cubica è il piano tangente al cono proiettante la cubica da quel punto lungo la tangente in esso alla cubica."

Dimostriamo ora che i punti S ed S_1 non sono punti speciali della cubica, o in altri termini che due punti qualunque di essa possono assumersi come centri di due stelle collineari generanti la cubica medesima.

Per questo basterà che noi dimostriamo come preso un altro punto qualunque della cubica S_2, si possa stabilire fra le stelle S ed S_2 un'opportuna

collineazione, in modo che la cubica da esse generata coincida con quella generata da S ed S_1.

Riferiamo le stelle S ed S_2 in modo che piani corrispondenti siano quelli proiettanti da S ed S_2 una corda della cubica, fissando perchè la corrispondenza sia stabilita completamente che al piano proiettante da S una corda S_2T passante per S_2 corrisponda il piano tangente (1) in S_2 e passante per T ed al piano che da S proietta la tangente in S_2 il piano osculatore in S_2. -- In questo modo le stelle S ed S_2 vengono ad essere riferite proiettivamente.

Infatti se un piano σ di S ruota attorno ad una retta s il piano corrispondente σ_1 di S_1 ruota intorno alla retta corrispondente s_1 e la retta $\sigma\sigma_1$ che è la corda della cubica contenuta in σ descrive una serie rigata di una quadrica passante per la cubica e quindi per S_2. Ora i piani σ_2 di S_2 corrispondenti nel modo che abbiamo detto ai piani σ di S passanti per s si ottengo-

(1) Per piano tangente alla cubica in un punto, intendiamo un piano qualunque passante per la tangente in quel punto alla cubica.

no proiettando da S_2 le rette $\sigma\sigma_1$ di quella serie rigata, dunque appartenendo S_2 alla quadrica, anch'essi costituiscono un fascio.

Le stelle S ed S_2 essendo pertanto riferite in modo che a un piano di S corrisponda un piano di S_2 e che a un fascio di piani di S corrisponda un fascio di piani di S_2 saranno collineari e genereranno una congruenza di primo ordine e terza classe coincidente evidentemente con quella generata da S ed S_1. Ora la cubica generata da S ed S_2 è il luogo dei punti singolari della congruenza, che costituiscono anche la cubica generata da S ed S_1 dunque queste due cubiche coincidono e il teorema è dimostrato.

Talora nello studio delle quadriche non riesce molto opportuno considerarle come generate da stelle collineari cosicchè bisogna cercare altre sue proprietà che ci forniscano anche dei nuovi modi di generarla.

Per questo osserviamo che se due co-

ni di vertice V e V' passano per la cubica, essi oltre che i punti della cubica hanno a comune tutti i punti della generatrice VV', di modo che la quartica (vedi pag. 126) secondo cui essi si segano si spezza nella cubica e nella sua corda VV'.

Anche la quartica comune a due quadriche qualunque φ^2, ψ^2 passanti per la cubica si spezza in questa curva e in una sua corda.

Siano infatti d e d_1 le unisecanti di φ^2 passanti per S ed S_1, d' e d_1' le unisecanti analoghe di ψ^2: per un ragionamento già fatto le d e d_1, d' e d_1' si corrispondono nella collineazione delle due stelle S ed S_1. Allora al piano dd' di S corrisponderà il piano d_1d_1' di S_1 e la retta $r \equiv dd' \cdot d_1d_1'$ sarà una bisecante della cubica comune ad ambedue le quadriche φ^2 e ψ^2.

Inversamente:

"La residua intersezione di due quadriche aventi una retta a comune è una cubica gobba avente quella retta per corda."

Supponiamo che si tratti dapprima di due coni V, V' aventi a comune la generatrice VV' e consideriamo un piano variabile intorno alla retta VV'; questo segherà costantemente i due coni in due altre generatrici (oltre VV') g e g' rispettivamente e il punto $X \equiv gg'$ sarà un punto del luogo residuo considerato. Le rette g e g' al variare del piano segante descrivono sui coni V e V' due serie proiettive fra di loro perchè ambedue prospettive al fascio di piani VV', quindi si può stabilire fra le stelle V e V' una tale collineazione che alle generatrici del cono V corrispondano le generatrici del cono V' e precisamente alla serie delle rette g la serie delle g'. Tanto basta per dimostrare che la residua intersezione dei coni V e V' è la cubica gobba generata dalle stelle collineari V e V'.

La dimostrazione suppone che i coni non abbiano lungo la generatrice VV' il medesimo piano tangente, perchè in tal caso riferendo le due stelle V, V' collinearmente fra di loro nel modo prece-

dente esse verrebbero ad avere unita la retta VV' e ogni piano passante per essa e quindi sarebbero prospettive. - L'intersezione dei coni giacerebbe allora nel piano di prospettiva e sarebbe una conica: il che del resto ci era già noto.

Passiamo ora al caso di due quadriche qualunque φ^2 e ψ^2 aventi a comune una generatrice g e consideriamo un piano variabile intorno alla retta g: esso in ogni posizione segherà le quadriche φ^2 e ψ^2 in altre due rette h ed h' rispettivamente, e le rette h ed h' variando il piano intorno a g descriveranno sulle quadriche φ^2 e ψ^2 due serie proiettive fra di loro, perchè ambedue prospettive al fascio di piani g. Di più il punto $X \equiv hh'$ al variare di h ed h' descrive l'ulteriore intersezione di φ^2 e ψ^2.

Sia $X \equiv hh'$ un punto di questa intersezione e siano k e k' le altre due generatrici di φ^2 e ψ^2 rispettivamente passanti per X; i fasci di piani k e k' che si ottengono proiettando da k e k' le serie descritte da h e h' sono proiettivi e generano col le intersezioni dei piani corrispondenti un cono di secondo ordine col vertice in X, passante evidentemente per la residua intersezione di φ^2 e ψ^2. Preso un altro punto Y di questa intersezione si avrà un altro cono passante per essa, e quindi essa, essendo la residua intersezione di due coni aventi una generatrice XY a comune sarà per la dimostrazione precedente una cubica gobba.

La generatrice comune g di φ^2 e ψ^2 è una corda della cubica gobba.

Infatti le punteggiate dei punti di contatto dei piani del fascio g colle quadriche φ^2 e ψ^2 sono due punteggiate projettive sovrapposte aventi due punti uniti H e K; cosicchè in H e K le quadriche φ^2 e ψ^2 hanno il medesimo piano tangente. Ciò mostra che per due posizioni particolari di quel piano variabile intorno a g il punto $X \equiv hh'$ viene a cadere su g e precisamente in H e K; dunque g è una corda della cubica.

I teoremi or ora dimostrati fanno vedere che la cubica gobba può anche

definirsi come la residua intersezione di due quadriche aventi una sola retta a comune. Se a, b, c sono tre corde qualunque d'una cubica i fasci di piani secondo cui a, b, c proiettano i punti della cubica sono proiettivi; sicchè ciascun punto della cubica viene ad essere punto d'intersezione di tre piani corrispondenti in questi tre fasci.

Inversamente si abbino tre fasci di piani proiettivi a, b, c; io dico che il punto d'intersezione di tre piani corrispondenti si muove al variare di questi su di una cubica gobba.

Infatti i fasci proiettivi a e b colle intersezioni dei loro piani omologhi generano una serie rigata di una quadrica φ^2; e similmente i fasci b e c generano una serie rigata di una quadrica ψ^2. Ogni punto comune alle due quadriche φ^2 e ψ^2 fuori di b, di cui tutti i punti appartengono a φ^2 e ψ^2, è punto d'intersezione di tre piani corrispondenti dei fasci a, b, c; e reciprocamente ogni cosiffatta intersezione appartiene a φ^2 e ψ^2

dunque la cubica gobba residua intersezione di φ^2 e ψ^2 può anche pensarsi come generata dai tre fasci proiettivi a, b, c e nel modo che abbiamo detto.

Questo teorema offre evidentemente una terza definizione della cubica gobba.

E' noto che per fissare una collineazione fra due stelle si possono dare quattro coppie di raggi corrispondenti o tre coppie di raggi ed una di piani, o tre coppie di piani ed una di raggi, od infine anche quattro coppie di piani. Allora ricordando questa proprietà si deduce subito che una cubica è pienamente determinata mediante sei dei suoi punti.

Infatti due di essi si possono pensare come centri di due stelle fra cui la collineazione è stabilita in modo unico assegnando come corrispondenti le rette che dai due punti proiettano gli altri quattro: e allora la cubica generata da queste stelle collineari è appunto la cubica che risolve la quistione. Si possono anche dare cinque punti ed una corda della

cubica perchè questo equivale ad assegnare una proiettività fra due stelle per mezzo di tre coppie di raggi ed una di piani; così pure si possono dare tre punti e tre corde perchè questo equivale ad assegnare una proiettività fra due stelle per mezzo di tre coppie di piani ed una di raggi, o infine due punti e quattro corde.

La cubica passante per sei punti A, B, C, D, E, F può ottenersi ancora costruendo i coni A e B aventi per generatrici A(B, C, D, E, F) e B(A, C, D, E, F) rispettivamente che hanno la generatrice AB a comune, e poi considerando la loro residua intersezione.

Invece di sei punti d'una cubica se ne possono dare cinque, quattro, tre e le tangenti in uno, due o tre di essi, perchè Dare un punto e la tangente in esso significa dare due punti della cubica infinitamente vicini su quella retta.

Così p. es. per determinare la cubica passante per i punti A, B, C e aventi in essi le tangenti a, b, c rispettivamente, basta costruire due coni passanti per essa. L'uno, che la proietta da A, si ottiene pensando che esso deve contenere le rette a, AB, AC e toccare lungo queste ultime i piani Ab e Ac rispettivamente, con che è pienamente determinato: gli altri due che la proiettano da B e C si ottengono nello stesso modo e questi tre coni hanno due a due una generatrice a commune; dunque la loro intersezione è proprio la cubica richiesta.

Delle cubiche gobbe si suol fare una classificazione avendo riguardo alle diverse posizioni in cui esse si possono trovare rispetto al piano all'infinito.

Si hanno così le seguenti quattro specie di cubiche: (Seydewitz)

1° Iperbole cubica - Essa ha col piano all'infinito tre punti reali distinti a commune, e le tangenti e i piani osculatori ad essa in quei tre punti giacciono coincidentemente a distanza finita; sicchè la curva ha tre asintoti (1) e tre piani asintotici.

(1) Si chiama in generale asintoto d'una curva una retta propria che la tocchi a distanza infinita, e piano asintotico un piano proprio che la osculi all'infinito.

Inoltre passano per essa tre cilindri iperbolici, che si ottengono proiettandola dai suoi tre punti all'infinito, i cui sei piani asintotici sono tre coppie di piani paralleli.

2° Ellisse cubica - Essa ha col piano all'infinito un solo punto reale a commune; gli altri due sono immaginari coniugati e quindi la tangente e il piano osculatore in quel punto giacciono a distanza finita. La curva ha dunque un solo asintoto e un solo piano asintotico reali, ed è situata sopra un solo cilindro, e precisamente sopra un cilindro ellittico.

3° Iperbole parabolica cubica. Essa ha col piano all'infinito tre punti reali a commune, di cui due sono coincidenti: perchè delle tangenti nei due punti all'infinito una giace all'infinito, l'altra a distanza finita, mentre i due piani osculatori in essi sono ambedue situati a distanza finita - La curva ha dunque un asintoto e due piani asintotici ed è situata sopra due cilindri, l'uno iperbolico, l'altro parabolico. Il primo si ottiene proiettandola dal punto ove essa è toccata dal piano all'infinito: il secondo si ottiene proiettandola dall'altro punto che essa ha all'infinito.

4°. = Parabola cubica. Essa ha col piano all'infinito tre punti reali a comune infinitamente vicini, o in altri termini oscula il piano all'infinito. In tal caso la curva non ha nè asintoti nè piani asintotici e giace sopra un solo cilindro parabolico. Sono queste le quattro specie principali di cubiche: ma si capisce facilmente che si potrebbero immaginare molti altri casi supponendo che i suoi punti all'infinito abbiano delle posizioni particolari rispetto per es. al circolo immaginario all'infinito.

Un caso contemplato dallo Hurwitz è quello in cui la cubica ha due punti sul circolo immaginario all'infinito e l'altro fuori di esso. ed ha dimostrato che allora passa per la cubica (che è evidentemente una ellisse cubica) una quadrica di rotazione ed una soltanto.

Ciò possiamo vedere facilmente nel modo

che segue.

Siano A e B i punti (immaginari coniugati) che la curva ha a comune col circolo immaginario all'infinito C_∞ e sia D il terzo suo punto all'infinito. Allora sulla conica k^2 (pienamente individuata) passante per D e bitangente a C_∞ sulla retta AB si prendano due punti qualunque E ed F e si consideri la quadrica φ^2 passante per questi due punti e per la cubica. Essa contenendo la cubica conterrà i punti A, B, D e quindi tutta la conica k^2 perchè di essa contiene i cinque punti A, B, D, E, F, e sarà di rotazione perchè k^2 è bitangente a C_∞ (vedi pag. 105).

Inoltre è evidente che φ^2 è l'unica quadrica di rotazione passante per la cubica.

Finora noi non ci siamo occupati che di stelle collineari, ma avremmo potuto anche svolgere come trattazione correlativa le proprietà dei sistemi piani collineari. Noi le enunceremo rapidamente lasciando al lettore la cura di dimostrarle.

"Due sistemi piani collineari σ e σ_1 non sovrapposti e non prospettivi generano, in generale, una congruenza di terz' ordine e prima classe e una sviluppabile di terza classe. Ogni raggio della congruenza congiunge due punti omologhi; ogni piano della sviluppabile congiunge due rette omologhe di σ e σ_1. Chiamando asse della sviluppabile ogni retta nella quale si incontrino due suoi piani si ha che la congruenza considerata consta appunto di tutti e soli gli assi della sviluppabile. Viceversa i piani della sviluppabile sono tutti e soli i piani singolari della congruenza. - In un piano qualunque giace in generale un solo asse della sviluppabile: ma se il piano appartiene alla sviluppabile allora in esso giacciono infiniti assi inviluppanti una conica. L'intersezione di un piano della sviluppabile con quello consecutivo è la generatrice di contatto di quel piano, e il suo punto di osculazione è il punto in cui è incontrato da due piani infinitamente vicini della sviluppabile. Per un punto qualunque dello spazio passano tre piani della sviluppabile e quindi anche tre assi. -

La sviluppabile di terza classe è tagliata da due suoi assi qualunque in due punteggiate proiettive, e precisamente ogni suo piano è tagliato in due punti corrispondenti delle punteggiate. Tre punteggiate proiettive a, a_1, a_2 i cui sostegni non giacciono in un piano, generano coi piani che congiungono i punti corrispondenti una sviluppabile di terza classe di cui a, a_1 ed a_2 sono tre assi. La sviluppabile di terza classe è circoscritta ad ∞^2 quadriche (tra cui ∞^1 coniche considerate come inviluppi dei loro piani tangenti) che due a due hanno un fascio di piani tangenti a comune; anzi essa si può anche pensare come la residua totalità dei piani, tangenti comuni a due quadriche aventi già un fascio di tali piani a comune.

In casi particolari la sviluppabile di terza classe può spezzarsi in tre fasci di piani o in un cono di seconda classe e in un fascio di piani il cui asse tocca il cono; e allora corrispondentemente la congruenza di terz' ordine e prima classe si spezza in una congruenza lineare e nelle rette di due stelle, o in una congruenza di second'ordine e prima classe e nelle rette di una stella - ecc. ecc.

Tornando alla cubica gobba noi ne troveremo nuove proprietà col cosiddetto metodo delle proiezioni.

Da un centro S proiettiamo la cubica Γ sopra un quadro π; l'immagine Γ' sarà una linea piana del terz'ordine, cioè una linea che ha tre punti a comune con una retta qualunque del piano. -

Infatti ogni punto che l'immagine ha a comune con una retta g del quadro è proiezione di un punto che la cubica Γ ha a comune col piano Sg; e siccome questo piano a tre punti a comune con Γ così resta provato quanto volevasi.

Inoltre Γ' ha un punto doppio, cioè un punto per cui la curva passa due volte; e questo è l'immagine dei due soli punti della cubica Γ allineati con S, cioè è l'intersezione del quadro colla corda di Γ passante per S.

Se il centro di proiezione S è situato sulla

la cubica Γ, l'immagine sul quadro si riduce a una conica; si può allora facilmente da teoremi noti sulle coniche risalire a teoremi per la cubica.

Per es. siano $A'B'C'D'E'F'$ sei punti della conica immagini di sei punti A, B, C, D, E, F della cubica Γ, cioè siano le intersezioni col quadro di sei corde di Γ passanti per il punto S. Per l'esagono semplice $A'B'C'D'E'F'$ vale il teorema di Pascal, quindi i tre punti ove si segano le tre coppie di lati opposti giacciono su una medesima retta. Ma il punto ove si segano due lati opposti è la traccia della retta d'intersezione di due facce opposte del seispigolo costituito da quelle sei corde, dunque abbiamo che:

"Le tre coppie di facce opposte di un seispigolo semplice ottenuto proiettando da un settimo suo punto qualunque S sei punti A, B, C, D, E, F di una cubica Γ si incontrano in tre rette situate in un medesimo piano σ. Questo piano σ oltre S contiene altri due punti di Γ che non si alterano al variare di S su Γ, rimanendo fissi gli altri sei punti"

Sia S_1 un altro punto di Γ e σ_1 il piano su cui si incontrano le coppie di facce opposte del seispigolo $S_1(A,B,C,D,E,F)$; basterà per dimostrare la seconda parte del teorema enunciato far vedere che la retta $\sigma\sigma_1$ è una corda di Γ.

Perciò osserviamo che assumendo il punti S ed S_1 come centri di stelle collineari generanti la cubica Γ, in questa collineazione devono corrispondersi le rette $S(A,B,C,D,E,F)$ ed $S_1(A,B,C,D,E,F)$ come proiettanti dai centri S ed S_1 punti di Γ. Da ciò segue che nella collineazione così stabilita fra S ed S_1 alle facce del seispigolo S corrispondono le facce del seispigolo S_1; a tre coppie di facce opposte di quello tre coppie di facce opposte di questo, e alle tre rette in cui si incontrano quelle coppie, le tre rette in cui si segano queste. Ma quelle tre rette giacciono nel piano σ e queste nel piano σ_1, dunque σ e σ_1 si corrispondono nelle due stelle collineari S ed S_1 e la loro retta d'intersezione $\sigma\sigma_1$ è una corda della cubica Γ.

Un caso particolare del teorema di Pascal esteso or ora alle cubiche e che ci piace far rilevare per le sue importanti conseguenze è il seguente:

"Se A, B, C sono tre punti qualunque di una cubica Γ, a, b, c sono le tangenti a Γ in A, B, C ed S è un quarto punto arbitrario di Γ i piani Sa, Sb, Sc incontrano ordinatamente i piani SBC, SCA, SAB in tre rette di un medesimo piano; questo piano al variare di S su Γ ruota intorno a una corda di Γ."

Esso si ottiene facendo avvicinare indefinitamente tre dei sei punti A, B, C, D, E, F ai tre rimanenti.

Sia ora s la tangente alla cubica in S e siano A', B', C', S' i punti ove le rette a, b, c, s incontrano rispettivamente le facce BCS, CSA, SAB, ABC del tetraedro $SABC$; io dico che:

"Dei due tetraedri $ABCS$ ed $A'B'C'S'$ ciascuno è inscritto e circoscritto all'altro."

Infatti per il teorema precedente le rette SA', SB', SC' non essendo altro che le intersezioni dei piani Sa, Sb, Sc coi piani SBC, SCA, SAB rispettivamente giacciono in uno stesso piano $SA'B'C'$ e quindi la faccia $A'B'C'$ del secondo tetraedro passa per S. Nello stesso modo scambiando successivamente S con A, B, C si otterrebbe che le facce $B'C'S'$, $C'S'A'$, $S'A'B'$ del secondo tetraedro passano pei vertici A, B, C del primo. Ma viceversa è evidente che ogni faccia del primo passa per un vertice del secondo, dunque resta dimostrato quanto volevasi.

Supponiamo ora che il vertice S del tetraedro $SABC$ si muova sulla cubica e si avvicini indefinitamente ad A; il piano Sa tenderà a confondersi col piano osculatore alla cubica in A, il piano SBC col piano ABC e la retta SA' coll'intersezione del piano ABC col piano osculatore alla cubica in A. - Ma la retta SA' deve pure trovarsi nel piano $SA'B'C'$ che al muoversi di S sulla cubica ruota intorno a una corda l della medesima: dunque se T è il punto ove l incontra ABC la retta SA' tende

a confondersi colla AT e quindi il piano osculatore alla cubica in A passa per T. Facendo avvicinare il punto S ai punti B e C invece che al punto A si sarebbe ottenuto che anche i piani osculatori alla cubica in B e C passano per T, dunque:

"I piani osculatori alla cubica in tre suoi punti A, B, C passano per un punto del piano ABC"

Per invertire in un certo senso questo teorema ci occorre prima dimostrare che:

"I piani osculatori di una cubica Γ costituiscono una sviluppabile di terza classe"

Siano A, B, C tre punti di Γ ed α, β, γ i piani osculatori in essi a Γ; il punto $M \equiv \alpha\beta\gamma$ si troverà per quanto sappiamo nel piano ABC. Allora facciamo muovere C su Γ e con esso il piano osculatore γ; il punto $M \equiv \alpha\beta\gamma$ scorrerà sulla retta $\alpha\beta$ e descriverà su di essa una punteggiata prospettiva al fascio descritto dal piano ABC intorno alla retta AB. Associando il punto mobile C invece che ai due punti fissi A e B a due altri A' e B' e chiamando α' e β' i piani osculatori a Γ in A' e B' si ottiene similmente che il punto $M' \equiv \alpha'\beta'\gamma$ descrive al muoversi di C su Γ una punteggiata prospettiva al fascio $A'B'$ descritto dal piano $A'B'C$. Ma poichè da due sue corde qualunque una cubica è proiettata secondo fasci di piani proiettivi, i fasci descritti da ABC ed $A'B'C$ al muoversi di C intorno ad AB ed $A'B'$ saranno proiettivi, e quindi saranno anche proiettive le punteggiate descritte dai punti M ed M' sulle rette $\alpha\beta$ ed $\alpha'\beta'$ al muoversi di γ. Similmente se α'', β'' sono due altri piani osculatori qualunque di Γ, il punto $M'' \equiv \alpha''\beta''\gamma$ descrive sulla $\alpha''\beta''$ una punteggiata proiettiva ad $\alpha\beta$ ed $\alpha'\beta'$ dunque, il piano γ, poichè muovendosi traccia sulle tre rette $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ tre punti corrispondentisi in tre proiettività, descrive una sviluppabile di terza classe.

Da questo teorema combinato col precedente risulta subito che:

" I tre piani osculatori di una cubica passanti per un punto P qualunque dello spazio, la osculano in tre punti

di un piano passante per P."

Vedremo tra poco nella trattazione analitica che questo punto P e il piano dei punti di contatto passante per esso sono polo e polare in un determinato sistema nullo.

Rappresentazione analitica della cubica gobba.

Data una cubica gobba Γ prendiamo come tetraedro fondamentale di riferimento 1234 un tetraedro i cui vertici 1, 4 siano due punti di Γ e i vertici 2 e 3 siano rispettivamente i punti ove le tangenti alla cubica in 4 e 1 segano rispettivamente i piani osculatori in 1 e 4: cosicchè del tetraedro, gli spigoli 12, 34 toccano la cubica in 1 e 4 rispettivamente, i piani 214 e 143 la toccano in quei punti medesimi, mentre in essi ancora i piani 123 e 234 la osculano. Di più prendiamo il punto unità su Γ; dopo ciò il sistema delle coordinate è fissato e non resta altro che trovare la rappresentazione analitica della cubica Γ.

Consideriamo la cubica Γ come generata da tre fasci di piani proiettivi e precisamente dai fasci 34, 41, 12 i quali hanno rispettivamente per equazioni

$$1) \qquad x_1 - \lambda x_2 = 0$$
$$2) \qquad x_2 - \mu x_3 = 0$$
$$3) \qquad x_3 - \nu x_4 = 0$$

λ, μ, ν essendo dei parametri variabili.

Si tratta di stabilire delle relazioni bilineari tra i parametri λ e μ, μ e ν (e quindi fra λ e ν) in modo che le proiettività stabilite tra i fasci 34, 41, 12 da queste relazioni bilineari coincidano colle proiettività fra essi determinate dalla cubica. Per questo osserviamo che essendo piani corrispondenti quelli che proiettano un medesimo punto della cubica al piano 342 del fascio 34 osculatore alla cubica in 4, corrisponderà nel fascio 41 il piano tangente alla cubica in 4 e passante per 1 cioè il piano 413, ossia al piano $x_1 = 0$ del fascio 1) deve corrispondere per le condizioni poste il piano $x_2 = 0$ del fascio 2). Nello stesso modo al piano 341 del fascio 34 corrisponde il piano 412 del fascio 41, dunque al piano $x_2 = 0$ del fascio 1) deve corri-

spondere il piano $x_3 = 0$ del fascio. 2). Infine il punto unità u essendo della cubica al piano $34u$ corrisponde il piano $41u$. ossia al piano $x_1 - x_2 = 0$ del fascio 1) deve corrispondere il fascio $x_2 - x_3 = 0$ del fascio 2).

In altri termini la relazione bilineare fra λ e μ che fissa tra i fasci 1) e 2) la proiettività fra essi determinata dalla cubica deve essere tale che ai valori $0, \infty, 1$ di λ faccia corrispondere ordinatamente i valori $0, \infty, 1$ di μ e quindi essa non può essere altro che l'identità $\lambda = \mu$. Procedendo nello stesso modo si troverebbe che analogamente avviene dei fasci 2) e 3) o 1) e 3) e quindi le loro equazioni scritte nel modo seguente:

$$4) \qquad x_1 - \lambda x_2 = 0$$
$$5) \qquad x_2 - \lambda x_3 = 0$$
$$6) \qquad x_3 - \lambda x_4 = 0$$

danno subito per un medesimo valore di λ le equazioni di tre piani concorrenti in un punto della cubica.

Eliminando λ fra le equazioni 4) e 5), 5), e 6) o 6) e 4 si ottengono tre equazioni fra le x di secondo grado

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \qquad x_2 x_4 - x_3^2 = 0 \qquad x_3 x_2 - x_4 x_1 = 0$$

che rappresenteranno evidentemente tre quadriche passanti per la cubica: quadriche che non fanno parte di un medesimo fascio perchè mentre le prime due hanno a comune la retta

$$x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

questa non giace sulla terza.

Allora siccome evidentemente le ∞^2 quadriche passanti per una cubica costituiscono una rete, così le equazioni di tutte le quadriche passanti per la cubica si ottengono immediatamente tutte facendo variare in tutti i modi possibili i parametri α, β, γ nell'equazione omogenea

$$\gamma(x_1 x_3 - x_2^2) + \alpha(x_2 x_4 - x_3^2) + \beta(x_3 x_2 - x_4 x_1) = 0$$

che può scriversi anche sotto forma di determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \alpha \\ x_2 & x_3 & \beta \\ x_3 & x_4 & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

Sappiamo già che due quadriche qualunque di questa rete hanno oltre la cubica Γ una retta a comune, ma

non è difficile verificarlo per via diretta analiticamente.

Siano:

$$7) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \alpha_1 \\ x_2 & x_3 & \beta_1 \\ x_3 & x_4 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \alpha_2 \\ x_2 & x_3 & \beta_2 \\ x_3 & x_4 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

le equazioni di due quadriche della rete che si ottengono ponendo rispettivamente i valori α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 per α, β, γ nell'equazione generale: io dico che l'intersezione dei due piani rappresentati dalle equazioni

$$8) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ x_2 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x_2 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ x_3 & \beta_1 & \beta_2 \\ x_4 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$$

è appunto la retta comune alle due quadriche 7).

Siano x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di un punto generico di tal retta; esse soddisferanno alle sue equazioni cioè annulleranno i determinanti 8) - Ma quando un determinante è nullo gli elementi di una colonna sono le stesse combinazioni lineari degli elementi delle altre colonne, dunque si ha per tali coordinate

$$x_1 = \rho\alpha_1 + \sigma\alpha_2 \qquad x_2 = \rho'\alpha_1 + \sigma'\alpha_2$$
$$x_2 = \rho\beta_1 + \sigma\beta_2 \qquad x_3 = \rho'\beta_1 + \sigma'\beta_2$$
$$x_3 = \rho\gamma_1 + \sigma\gamma_2 \qquad x_4 = \rho'\gamma_1 + \sigma'\gamma_2$$

Allora è facile verificare che questo punto si trova sulle due quadriche 7). Infatti si ha per es.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \alpha_1 \\ x_2 & x_3 & \beta_1 \\ x_3 & x_4 & \gamma_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho\alpha_1 + \sigma\alpha_2 & \rho'\alpha_1 + \sigma'\alpha_2 & \alpha_1 \\ \rho\beta_1 + \sigma\beta_2 & \rho'\beta_1 + \sigma'\beta_2 & \beta_1 \\ \rho\gamma_1 + \sigma\gamma_2 & \rho'\gamma_1 + \sigma'\gamma_2 & \gamma_1 \end{vmatrix}$$

e il 2° determinante scritto è identicamente nullo, perchè si scompone nella somma di tanti determinanti che hanno tutti due o più colonne di elementi proporzionali - e che quindi sono identicamente nulli. -

Riprendiamo le equazioni 4), 5), 6); esse ci dicono che se x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate di un punto della cubica si ha per un certo determinato valore di λ

$$\frac{x_1}{x_2} = \lambda \qquad \frac{x_2}{x_3} = \lambda \qquad \frac{x_3}{x_4} = \lambda$$

ossia

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda^3}{\lambda^2} \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{\lambda^2}{\lambda} \quad \frac{x_3}{x_4} = \frac{\lambda}{1}$$

le quali relazioni possono scriversi simultaneamente ponendo

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1$$

Ora le x_1, x_2, x_3, x_4 essendo coordinate omogenee sono conosciute a meno di un fattore di proporzionalità e quindi possiamo addirittura scrivere, sottintendendo o no tale fattore:

$$x_1 = \lambda^3 \quad x_2 = \lambda^2 \quad x_3 = \lambda \quad x_4 = 1$$

Viceversa è chiaro che se queste relazioni sono soddisfatte (λ però essendo sempre qualunque) il punto $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ appartiene alla cubica, quindi abbiamo il seguente importantissimo risultato: (Möbius)

"Le coordinate di un punto qualunque di una cubica gobba si possono mettere sotto forma di funzioni razionali di terzo grado di un parametro variabile" (1)

---

(1) L'esser venute le funzioni di λ semplicissime e alcune anzi di grado inferiore al terzo, dipende naturalmente, come si vede anche da ciò che segue, dalla scelta particolare del tetraedro di riferimento.

Dunque:

"La cubica gobba è una curva razionale"

Ma quel che è più notevole è che questo teorema è invertibile; cioè:

"Se le coordinate di un punto sono funzioni razionali intere di terzo grado di un parametro variabile, al variare del parametro il punto descrive, in generale, una cubica gobba"

Si abbiano fra le coordinate di un punto e un parametro λ le relazioni

$$
9)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= A_1\lambda^3 + B_1\lambda^2 + C_1\lambda + D_1\\
x_2 &= A_2\lambda^3 + B_2\lambda^2 + C_2\lambda + D_2\\
x_3 &= A_3\lambda^3 + B_3\lambda^2 + C_3\lambda + D_3\\
x_4 &= A_4\lambda^3 + B_4\lambda^2 + C_4\lambda + D_4
\end{aligned}
$$

dove i coefficienti A, B, C, D sono affatto qualunque: solo supponiamo che il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3\\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

altrimenti come è facile vedere la curva rappresentata dalle relazioni 9) sarebbe tutta contenuta in un piano; io dico

che al variare di λ fra $-\infty$ e $+\infty$ si hanno infiniti valori per le x che danno le coordinate dei punti di una cubica gobba.[1]

---

(1) Infatti se fosse $\Delta = 0$, indicando con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ i complementi algebrici di A_1, A_2, A_3, A_4 sarebbe non solo

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4 = \Delta = 0$$

ma anche

$$
\begin{aligned}
B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + B_3\alpha_3 + B_4\alpha_4 &= 0\\
C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + C_4\alpha_4 &= 0\\
D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + D_3\alpha_3 + D_4\alpha_4 &= 0
\end{aligned}
$$

per una nota proprietà dei determinanti: e quindi sarebbe anche, moltiplicando le 9) ordinatamente per $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ e poi sommando, qualunque fosse λ:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

il che indicherebbe appunto che la curva giacerebbe tutta nel piano di coordinate α_i -

Si potrebbe dimostrare che essa è in tal caso una cubica piana:

Se poi il determinante Δ avesse caratteristica 2 allora la curva si riduce ad una retta, ma noi non ci occupiamo di questi casi particolari.

Infatti indicando con le y_i le coordinate correnti rispetto a un nuovo tetraedro di riferimento, scegliamo questo in modo che fra le x_i e le y_i si abbiano le relazioni

$$10) \quad \begin{aligned} x_1 &= A_1 y_1 + B_1 y_2 + C_1 y_3 + D_1 y_4 \\ x_2 &= A_2 y_1 + B_2 y_2 + C_2 y_3 + D_2 y_4 \\ x_3 &= A_3 y_1 + B_3 y_2 + C_3 y_3 + D_3 y_4 \\ x_4 &= A_4 y_1 + B_4 y_2 + C_4 y_3 + D_4 y_4 \end{aligned}$$

con che la trasformazione delle coordinate è pienamente determinata.

Adesso bisognerebbe risolvere le 10) rispetto alle y, sostituirvi per le x i loro valori in funzione di λ e così si otterrebbero le y in funzione di λ e si otterrebbe la rappresentazione della curva di cui ci occupiamo nelle coordinate y. Ma per evitare calcoli laboriosi, si osservi semplicemente che le 10) non sono altro che le 9) dove al posto di $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ si trovano rispettivamente y_1, y_2, y_3, y_4: e che quindi se si risolvono le 9) rispetto a $\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1$ e le 10) rispetto a y_1, y_2, y_3, y_4 si troveranno queste quantità uguali ordinatamente alle medesime funzioni delle x_1, x_2, x_3, x_4.

Ciò porta senz'altro che si ha:

$$y_1 = \lambda^3; \quad y_2 = \lambda^2, \quad y_3 = \lambda, \quad y_4 = 1$$

e quindi resta dimostrato quel che volevasi.(1)

(1) Rammentiamo al lettore la grande analogia che questa teoria presenta con quella delle coniche - Anche le coordinate di un punto di una conica, quando ci si riferisca a un triangolo formato da due sue tangenti qualunque e dalla loro corda di contatto, sono funzioni semplici di secondo grado di un parametro variabile; si ha precisamente

$$x_1 = \lambda^2 \quad x_2 = \lambda \quad x_3 = 1;$$

e viceversa, se le coordinate di un punto del piano sono legate a un parametro variabile λ mediante le relazioni affatto generali di 2° grado

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \lambda^2 + B_1 \lambda + C_1 \\ x_2 &= A_2 \lambda^2 + B_2 \lambda + C_2 \\ x_3 &= A_3 \lambda^2 + B_3 \lambda + C_3 \end{aligned}$$

il punto descrive al variare di λ una conica. Naturalmente se il determinante dei coefficienti è nullo, i punti giacciono tutti sopra una retta. - Infatti se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono i complementi algebrici di A_1, A_2, A_3 in questo determinante si ha:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

Ritorniamo ora alla cubica I^a, riprendendo le formule che legano le coordinate di un suo punto qualunque ai valori di un parametro variabile:

$$x_1 = \lambda^3,\ x_2 = \lambda^2,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = 1$$

e cerchiamo i punti che essa ha in comune col piano:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

Essi saranno dati evidentemente dai tre valori di λ che soddisfano all'equazione di terzo grado:

$$11)\qquad \xi_1 \lambda^3 + \xi_2 \lambda^2 + \xi_3 \lambda + \xi_4 = 0\ ;$$

il che riconferma il risultato già noto che una cubica gobba è segata in tre punti da un piano arbitrario dello spazio.

Se vogliamo che il piano ξ_i sia tangente alla cubica, due radici della 11) dovranno essere coincidenti: quindi per trovare la relazione a cui devono soddisfare le coordinate ξ_i di un piano tangente bisogna cercare la condizione perchè l'equazione 11) abbia una radice doppia. (1)

---

(1) Data un'equazione di m^o grado $f(\lambda)=0$ si ha che condizione necessaria e sufficiente per-

Rendendo omogenea l'equazione 11), si ha:

$$f(\lambda, \mu) = \xi_1 \lambda^3 + \xi_2 \lambda^2 \mu + \xi_3 \lambda \mu^2 + \xi_4 \mu^3$$

---

chè questa abbia una radice λ_0 r^{pla} è che siano nulle per $\lambda = \lambda_0$ tutte le derivate della funzione sino alla $(r-1)^a$ inclusa. – A questa condizione si può dare un'altra forma se si rende omogenea la funzione scrivendo $\frac{\lambda}{\mu}$ al posto di λ e poi moltiplicando tutti i termini per μ^m; si ha così la funzione razionale omogenea di grado m.

$$f(\lambda, \mu),$$

e quei valori di λ corrispondenti a $\mu = 1$ per cui sarà $f(\lambda,\mu)=0$ saranno tutte e sole le radici della $f(\lambda)=0$.

Se una λ di queste radici è doppia allora deve essere

$$\frac{d f(\lambda)}{d\lambda} = 0$$

o ciò che fa lo stesso

$$\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = 0$$

quando dopo aver effettuata la derivazione si ponga $\mu = 1$.

Ma per il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee:

ed allora la condizione necessaria e sufficiente perchè essa abbia una radice doppia λ è che sia:

$$\lambda \frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = m f(\lambda,\mu)$$

dunque se λ è una radice doppia dell'equazione $f(\lambda)=0$ deve essere anche

$$\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = 0$$

quando dopo effettuata la derivazione si ponga $\mu=1$, perchè si ha in tal caso:

$$m f(\lambda,1)=0 \qquad \frac{\partial f(\lambda,1)}{\partial \lambda} = 0$$

Reciprocamente è chiaro che se per un determinato valore di λ si ha

$$\alpha) \quad \frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = 0$$

quando dopo la derivazione si ponga $\mu=1$, λ è una radice doppia dell'equazione $f(\lambda)=0$; dunque le $\alpha)$ esprimono anch'esse la condizione necessaria e sufficiente cui deve soddisfare λ perchè essa sia una radice doppia della $f(\lambda)=0$.

Se λ fosse una radice tripla della $f(\lambda)=0$ dovrebbe essere

$$\frac{d^2 f(\lambda)}{d\lambda^2} = 0$$

e quindi sarebbe anche

$$\frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = 3\xi_1 \lambda^2 + 2\xi_2 \lambda\mu + \xi_3 \mu^2 = 0$$

$$\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = \xi_2 \lambda^2 + 2\xi_3 \lambda\mu + 3\xi_4 \mu^2 = 0$$

quando dopo la derivazione si ponesse $\mu = 1$.

Ma nel tempo stesso si avrebbe per le cose dette precedentemente

$$\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = 0$$

con le solite convenzioni su μ, e per il teorema d'Eulero, poichè le derivate di funzioni omogenee sono sempre funzioni omogenee, si ha che:

$$(m-1)\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda} = \lambda \frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} + \mu \frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu}$$

$$(m-1)\frac{\partial f(\lambda,\mu)}{\partial \mu} = \lambda \frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \mu \partial \lambda} + \mu \frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \mu^2}$$

dunque se la radice λ è tripla deve essere anche, insieme a

$$\frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \lambda \partial \mu} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f(\lambda,\mu)}{\partial \mu^2} = 0$$

quando dopo effettuata la derivazione si ponga $\mu = 1$.

Inversamente, retrocedendo, si capisce che queste condizioni sono anche sufficienti; dunque la condizione perchè la $f(\lambda)=0$ abbia una radice tripla può anche essere espressa dall'annullarsi di quelle tre derivate seconde.

Così è chiaro che in generale:

quando si ponga $\mu = 1$ dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè il piano di coordinate ξ_i tocchi la cubica Γ nel punto corrispondente al valore λ del parametro è che sia contemporaneamente:

$$12) \quad \begin{cases} 3\xi_1 \lambda^2 + 2\xi_2 \lambda + \xi_3 = 0 \\ \xi_2 \lambda^2 + 2\xi_3 \lambda + 3\xi_4 = 0 \end{cases}$$

Di qui ~~caveremo~~ risolvendo rispetto a $\lambda^2, \lambda, 1$ e indicando con ρ un conveniente fattore di proporzionalità

$$\rho\lambda^2 = \begin{vmatrix} 2\xi_2 & \xi_3 \\ 2\xi_3 & 3\xi_4 \end{vmatrix} = 6\xi_2\xi_4 - 2\xi_3^2$$

$$\rho\lambda = \begin{vmatrix} \xi_3 & 3\xi_1 \\ 3\xi_4 & \xi_2 \end{vmatrix} = \xi_3\xi_2 - 9\xi_1\xi_4$$

$$\rho = \begin{vmatrix} 3\xi_1 & 2\xi_2 \\ \xi_2 & 2\xi_3 \end{vmatrix} = 6\xi_1\xi_3 - 2\xi_2^2$$

Ma evidentemente $(\rho\lambda)^2 = \rho \cdot \rho\lambda^2$, dunque sostituendo, deve essere

$$(6\xi_2\xi_4 - 2\xi_3^2)(6\xi_1\xi_3 - 2\xi_2^2) - (\xi_3\xi_2 - 9\xi_1\xi_4)^2 = 0.$$

"Condizione necessaria e sufficiente perchè una radice λ_0 dell'equazione $f(\lambda)=0$ sia r^{pla} è, che ridotta la funzione del primo membro a funzione omogenea di due variabili, si annullino per $\lambda = \lambda_0$ e $\mu = 1$ le $r+1$ derivate r^{esime}:

$$\frac{\partial^r f(\lambda,\mu)}{\partial\lambda^r}, \quad \frac{\partial^r f(\lambda,\mu)}{\partial\lambda^{r-1}\partial\mu}, \quad \ldots\ldots \frac{\partial^r f(\lambda,\mu)}{\partial\lambda\,\partial\mu^{r-1}}, \quad \frac{\partial^r f(\lambda,\mu)}{\partial\mu^r}$$

Questa equazione esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè un piano ξ_i tocchi la cubica gobba - e come cosa è di quarto grado, è l'equazione di un inviluppo di piani di quarta classe.

Dunque:

"La cubica gobba considerata come superficie inviluppo dei suoi piani tangenti deve ritenersi di quarta classe; ossia, per una retta arbitraria dello spazio passano in generale quattro suoi piani tangenti."

È notevole il fatto, di cui qui abbiamo un esempio, che mentre le curve nello spazio considerate come luoghi di punti sono rappresentate sempre da più equazioni, due (ad es. le coniche) tre (ad es. le cubiche) od anche quattro (mai però più di quattro), invece considerate come inviluppi dei loro piani tangenti sono rappresentate da una equazione sola.

Se correlativamente a quanto abbiamo fatto fin qui avessimo considerato invece che una cubica una sviluppabile di terza classe e avessimo scelto il tetraedro di riferimento nel modo duale a quello che abbiamo tenuto per la cubica, saremmo giunti evidentemente ai seguenti risultati:

"Le coordinate di un piano qualunque di una sviluppabile di terza classe si possono mettere sotto forma di funzioni razionali intere di terzo grado di un parametro variabile, e reciprocamente"

"La sviluppabile di terza classe considerata come superficie luogo dei punti delle sue generatrici di contatto è da ritenersi di quarto grado; cioè ad una retta qualunque dello spazio si appoggiano in generale le quattro generatrici di contatto della sviluppabile"

e avremmo potuto fare un'osservazione analoga alla precedente.

Le ∞^3 rette che si appoggiano a una cubica gobba costituiscono evidentemente un complesso di terzo grado, i coni del complesso essendo i coni di terz' ordine secondo cui la cubica viene proiettata dai punti dello spazio e gli inviluppi del complesso degenerando nelle terne di punti secondo cui essa viene segata dai piani dello spa-

zio (1)

Noi vogliamo cercare appunto l'equazione di questo specialissimo complesso di terzo grado.

Siano q_{ik} le coordinate q di una retta x del complesso passante per un punto $X \equiv x_i$ della cubica; poichè la retta x passa per il punto X dovranno essere soddisfatte le quattro relazioni: (pag. 187)

$$\begin{array}{lllll} \cdot & + x_2 q_{12} & + x_3 q_{13} & + x_4 q_{14} & = 0 \\ x_1 q_{21} & + \cdot & + x_3 q_{23} & + x_4 q_{24} & = 0 \\ x_1 q_{31} & + x_2 q_{32} & + \cdot & + x_4 q_{34} & = 0 \\ x_1 q_{41} & + x_2 q_{42} & + x_3 q_{43} & \cdot & = 0 \end{array}$$

le quali non saranno tutte, come sappiamo, indipendenti fra di loro - e precisamente se $q_{ik} \neq 0$ saranno indipendenti quelle nelle quali trovasi q_{ik}.

Ma il punto X trovasi sulla cubica e quindi si può porre per un conveniente valo-

---

(1) Questo del resto è affatto generale. Una curva d'ordine n dà origine colle ∞^3 rette, che si appoggiano ad essa, a un complesso di grado n^o, i cui coni sono i coni proiettanti la curva, e i cui inviluppi degenerano tutti in n punti.

re di λ

$$x_1 = \lambda^3 \quad x_2 = \lambda^2 \quad x_3 = \lambda \quad x_4 = 1$$

dunque deve essere contemporaneamente:

$$\begin{array}{llll} \cdot & \lambda^2 q_{12} + & \lambda q_{13} + & q_{14} = 0 \\ \lambda^3 q_{21} & \cdot & + \lambda q_{23} + & q_{24} = 0 \\ \lambda^3 q_{31} + & \lambda^2 q_{32} & \cdot & + q_{34} = 0 \\ \lambda^3 q_{41} + & \lambda^2 q_{42} & + \lambda q_{43} & \cdot \quad = 0 \, ; \end{array}$$

eliminando λ fra queste quattro equazioni si otterrà l'equazione richiesta del complesso.

Per fare questa eliminazione noi non terremo conto di tutte e quattro le equazioni 13); ma solo della prima e dell'ultima, supponendo, il che non altera in nulla la generalità $q_{14} \neq 0$. Per la dissimmetria del processo troveremo però un'equazione di quarto grado invece che di terzo; ma non sarà difficile sopprimere un fattore lineare estraneo che vi si presenterà.

Prendiamo adunque le relazioni

$$\lambda^2 q_{12} + \lambda q_{13} + q_{14} = 0$$
$$\lambda^2 q_{41} + \lambda q_{42} + q_{43} = 0$$

di cui la seconda è l'ultima delle 13) divisa per λ: si avrà risolvendo rispetto a λ^2, λ, 1 e indicando con ρ un fattore di proporzionalità

$$\rho \lambda^2 = q_{13} q_{43} - q_{14} q_{42}$$
$$\rho \lambda = -q_{14}^2 - q_{12} q_{43}$$
$$\rho = q_{12} q_{42} - q_{13} q_{41}$$

Ma $(\rho\lambda)^2 = \rho \cdot \rho\lambda^2$ dunque le q_{ik} soddisfano all'equazione

14) $$(q_{13} q_{43} - q_{14} q_{42})(q_{12} q_{42} - q_{13} q_{41}) - (q_{14}^2 + q_{12} q_{43})^2 = 0$$

che sarà l'equazione richiesta del complesso.

Essa è di quarto grado; ma solo apparentemente. — Aggiungendovi l'espressione $q_{12} q_{34} (q_{1}$ il che si può fare senza alterarla (vedi pag. 26 essa diventa:

$$q_{14} \left[q_{13}^2 q_{43} - q_{12} q_{42}^2 - q_{14} q_{42} q_{13} - q_{14}^3 - 2 q_{12} q_{14} q_{43} + q_{12} q_{34} q_{23} \right] =$$

ossia dividendo per q_{14} che si è supposto differente da zero:

$$q_{13}^2 q_{43} - q_{12} q_{42}^2 - q_{14} q_{42} q_{13} - q_{14}^3 - 2 q_{12} q_{14} q_{43} + q_{12} q_{34} q_{23} =$$

Volendo l'equazione del complesso in coordinate p invece che in coordinate q, non c'è altro da fare che porre:

$$q_{ik} = \frac{\partial (pp)}{\partial p_{ik}}$$

Cerchiamo ora la condizione perchè un piano ξ osculi la cubica.

Per questo basterà cercare le condizioni a cui devono soddisfare i coefficienti dell'equazione 11) perchè essa abbia tre radici uguali. Ora se λ è questa radice tripla, ta le condizioni sono espresse dall'annullarsi delle tre derivate seconde

$$15)\quad \begin{aligned} 3\xi_1\lambda + \xi_2 &= 0\\ \xi_2\lambda + \xi_3 &= 0\\ \xi_3\lambda + \xi_4 &= 0 \end{aligned}$$

della funzione omogenea

$$\xi_1\lambda^3 + \xi_2\lambda^2\mu + \xi_3\lambda\mu^2 + \xi_4\mu^3$$

dopo aver fatto $\mu = 1$, dunque quelle tre equazioni 15) sono le relazioni che legano le coordinate del piano osculatore al valore del parametro λ nel punto d'osculazione.

Esse possono scriversi

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = -\frac{1}{3\lambda} \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = -\frac{1}{\lambda} \quad \frac{\xi_3}{\xi_4} = -\frac{3}{\lambda}$$

ossia

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{1}{-3\lambda} \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{-3\lambda}{3\lambda^2} \quad \frac{\xi_3}{\xi_4} = \frac{3\lambda^2}{-\lambda^3}$$

Da cui

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = 1 : -3\lambda : 3\lambda^2 : -\lambda^3$$

Queste formule quando già non l'avessimo dimostrato geometricamente mostrerebbero per una osservazione già fatta che i piani osculatori di una cubica formano una sviluppabile di terza classe. - Infatti esse ci danno le coordinate del piano osculatore in funzione di terzo grado di un pa-

rametro variabile.

"Esiste un sistema nullo per cui una cubica si trasforma nella sviluppabile di terza classe costituita dai suoi piani osculatori."

Infatti se consideriamo la reciprocità definita dalle formule

$$\xi_1 = x_4 \quad \xi_2 = -3x_3 \quad \xi_3 = 3x_2 \quad \xi_4 = -x_1$$

ci accorgiamo immediatamente che essa è un sistema nullo e che trasforma la cubica nella propria sviluppabile di terza classe poichè se consideriamo un punto x_i della cubica e poniamo

$$x_1 = \lambda^3 \quad x_2 = \lambda^2 \quad x_3 = \lambda \quad x_4 = 1$$

otteniamo

$$\xi_1 = 1 \quad \xi_2 = -3\lambda \quad \xi_3 = 3\lambda^2 \quad \xi_4 = -\lambda^3$$

che sono appunto le coordinate del piano osculatore in quel punto.

Al complesso lineare formato dalle rette unite di questo sistema nullo appartengono evidentemente le tangenti della cubica perchè esse sono contenute nel piano osculatore alla cubica nel punto di contatto, dunque possiamo completa

Dispa. 42ª

re il teorema precedente aggiungendo che:

"Le tangenti d'una cubica gobba formano parte di uno stesso complesso lineare".

L'equazione di questo complesso si trova immediatamente.

Siano: ξ_i le coordinate del piano corrispondente al punto $X \equiv x_i$ e $Y \equiv y_i$ sia un altro punto qualunque contenuto in quel piano; sarà

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 = 0$$

ossia sostituendo

$$x_4 y_1 - 3 x_3 y_2 + 3 x_2 y_3 - x_1 y_4 = 0$$

Ma se p_{ik} sono le coordinate della retta XY appartenente evidentemente al complesso si ha

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

dunque

$$p_{41} - 3 p_{32} = 0$$

è l'equazione del complesso lineare cui appartengono le tangenti della cubica.

Dalla sua equazione non si può indurre che esso sia un complesso particolare; ciò significa soltanto (pag. 206) che gli spigoli 23 e 14 del tetraedro di

riferimento sono polari in questo complesso, come è facile convincersi direttamente.

Noi abbiamo già fatto vedere come l'equazione del più generale complesso lineare si possa ridurre alla forma

$$p_{41} + k\, p_{32} = 0 ,$$

ora per mettere questa equazione sotto l'altra:

$$p_{41} - 3 p_{32} = 0$$

non c'è che da fare una conveniente trasformazione di coordinate, mantenendo fisso il tetraedro di riferimento e variando opportunamente il punto unità (1), dunque il complesso lineare a cui siamo giunti è un complesso affatto generale.

Alla sua equazione potevamo giungere anche per altra via.

Le relazioni che legano le coordinate ξ_i di un piano tangente alla cubica al valore del parametro nel punto di contatto

$$3 \xi_1 \lambda^2 + 2 \xi_2 \lambda + \xi_3 = 0$$
$$\xi_2 \lambda^2 + 2 \xi_3 \lambda + 3 \xi_4 = 0$$

---

(1) Le formule di trasformazione sono evidentemente:
$X_1 = x_1 \quad X_2 = x_2 \quad X_3 = -\frac{k}{3} x_3 \quad X_4 = x_4$

quando si tenga fisso h e si facciano variare le ξ in modo che esse siano sempre soddisfatte, danno tutti i piani tangenti alla cubica in quel punto; quindi le equazioni precedenti interpretate come equazioni di punti danno due punti della tangente - Di questi punti le coordinate sono:

pel primo $x_1 = 3h^2$ $x_2 = 2h$ $x_3 = 1$ $x_4 = 0$

pel secondo $y_1 = 0$ y_2 h^2 $y_3 = 2h$ $y_4 = 3$

Dunque se p_{ik} sono le coordinate della tangente si ha

$p_{12} = 3h^4$ $p_{13} = 6h^3$ $p_{14} = 9h^2$ $p_{23} = 3h^2$ $p_{34} = 3$ $p_{24} = 6h$

Si può ora in parecchi modi eliminare h fra queste uguaglianze pervenendo ad equazioni fra le p che rappresenteranno complessi di cui faranno parte le tangenti della cubica; così ad es. osservando che

$$9p_{12} = 27h^4 \quad \text{e che} \quad p_{14}p_{23} = 27h^4$$

si ha che tutte le tangenti della cubica apparterranno al complesso di 2° grado

$$9p_{12} - p_{14}p_{23} = 0$$

ma il complesso lineare cui noi vogliamo giungere è dato dall'osservare che essendo

$$p_{14} = 9h^2 \qquad 3p_{23} = 9h^2$$

si ha per ogni tangente della cubica:

$$p_{14} - 3p_{23} = 0.$$

Chi avesse vaghezza di istruirsi maggiormente in un tale argomento può consultare con frutto il Reye (Geometrie der Lage. Abt. II), due memorie dello Hurwitz (Math. Annalen - 20 e 30) e come raccolte di teoremi sulla cubica una memoria del Caspary (Journal de Crelle - 100) e una nota dello Chasles nel suo Aperçu historique (Nota XXXIII).