R.ª Università di Pisa

Lezioni di Geometria

dettate dal Prof.re Cav. E. Bertini

nell'Anno Accademico 1895-96.

e redatte dagli Studenti

M. Arnaldi A. G. Scorza

Autografia Bertini
Via l'arancio N.º 16-

Capitolo I°

Quadriche.

Dalla considerazione delle forme proiettive di prima specie abbiamo tratte le curve e i coni di second'ordine, gl'inviluppi e i coni di seconda classe, e le serie rigate - faremo vedere ora e nel seguito come dalle forme proiettive di seconda specie possano trarsi nuovi enti geometrici, le cui proprietà sono non meno importanti di quelle già studiate.

Date due stelle reciproche S ed S' aventi centri diversi, chiameremo superficie di second'ordine, o più brevemente chiameremo quadrica il luogo dei punti ove i raggi

Dati due sistemi piani reciproci σ e σ', i cui sostegni non coincidono, chiameremo superficie di 2.a classe l'inviluppo dei piani congiungenti le rette di σ coi punti corrispondenti di S incontrano i piani corrispondenti di S'.

Si badi che nella definizione della quadrica le stelle S ed S' non compariscono come parrebbe in modo differente, poichè il luogo dei punti ove i raggi di S incontrano i piani corrispondenti di S' è anche il luogo dei punti ove i piani di S incontrano i raggi corrispondenti di S'.

Infatti se il punto P della quadrica è l'intersezione del raggio p di S col piano π di S', al raggio $S'P = t'$ di S' giacente in π, corrisponderà un piano τ di S passante per p, e quindi il punto P può considerarsi anche ottenuto

ti di σ'.

Si noti che in questa definizione i sistemi piani σ e σ' non compariscono come parrebbe in modo differente, poichè l'inviluppo dei piani congiungenti i raggi di σ coi punti corrispondenti di σ', è anche l'inviluppo dei piani congiungenti i punti di σ' coi raggi corrispondenti di σ.

Infatti se il piano π della superficie congiunge il raggio p di σ col punto P' di σ', al raggio $\sigma'\pi \equiv t'$ di σ' passante per P', corrisponderà un punto T di σ giacente su p, e quindi il

dall'intersezione di un raggio di S col piano corrispondente di S'.

il piano π può considerarsi anche come congiungente un raggio di σ col punto corrispondente di σ'.

Definiti questi nuovi enti geometrici premettiamo allo studio ulteriore delle loro proprietà le seguenti osservazioni.-

La quadrica P^2 che viene generata dalle due stelle reciproche S ed S' passa anche pei loro centri S ed S'.

Infatti ad un piano qualunque passante per la retta SS' considerato come appartenente ad una delle due stelle corrisponde un raggio dell'altra, e il punto ove incontra questo raggio coincide col centro di una delle due stelle.-

La superficie di 2ª classe Q^2 che viene generata dai due sistemi piani reciproci σ e σ', contiene anche i loro sostegni σ e σ'.

Infatti ad un punto qualunque della retta $\sigma\sigma'$ considerato come appartenente ad uno dei due sistemi piani corrisponde un raggio dell'altro, e quindi il piano secondo cui proietta questo raggio

Di più si osservi che tutti i raggi, per es. di S corrispondenti ai piani del fascio SS' considerati come appartenenti alla stella S' costituiscono un fascio e che ogni raggio di questo fascio incontra la quadrica nel solo punto di S, mentre ogni altra retta passante per S incontra la quadrica oltre che in S anche nel punto ove sega il suo piano corrispondente. Perciò appunto questi raggi si dicono tangenti alla quadrica e il piano del loro fascio, ~~ossia quello che ha un sol punto a comune colla quadrica~~ si chiama piano

coincide appunto con uno dei due piani σ o σ'.
Di più si osservi che tutti i raggi per es. di σ corrispondenti ai punti della punteggiata $\sigma\sigma'$ considerata come appartenente al sistema σ', costituiscono un fascio, e che per ogni raggio di questo fascio passa il solo piano σ dell'inviluppo, mentre per ogni altra retta di σ passa oltre σ anche il piano secondo cui essa è proiettata dal suo punto corrispondente. Perciò appunto questi raggi si dicono tangenti alla superficie di 2ª classe, e il centro del loro

tangente.

"La quadrica F^2 da ogni piano passante per S od S' è segata in una conica K^2; conica che può in alcuni casi degenerare in una coppia di rette."
Infatti si consideri un piano π passante ad es. per S ed in questo piano il fascio di raggi che ha per centro S. A questo fascio di raggi corrisponderà in S' un fascio di piani avente per asse il raggio p' corrispondente al piano π, e il luogo dei punti della quadrica giacenti in π sarà dato dal luogo dei punti d'intersezione dei raggi del primo fascio di centro S coi

fascio, ~~poichè giace in uno sol piano dell'inviluppo~~ si chiama punto di contatto.
"I piani della superficie di seconda classe Φ^2, che passano per un medesimo punto di σ o σ', costituiscono un cono di seconda classe, che può in alcuni casi degenerare in due fasci di piani."
Infatti si consideri nel piano σ un fascio di raggi avente per centro un punto qualunque P. A questo fascio di raggi corrisponderà in σ' una punteggiata avente per sostegno il raggio p' corrispondente al punto P, e l'insieme dei piani

stente in π coi piani corrispondenti del fascio p'. Ora questo luogo è una conica, poichè, per la reciprocità delle stelle S ed S', i due fasci che sono forme corrispondenti sono proiettivi.

La conica k' degenera in una coppia di rette, quando un raggio t' del fascio S giace nel piano corrispondente τ di S', perchè allora il fascio S viene ad avere un raggio unito e quindi ad essere prospettivo al fascio, che si ottiene segando con π il fascio p': allora ogni altro piano passante per quel raggio t sega la quadrica in una cop-

della superficie passanti per P sarà dato dall'insieme dei piani che proiettano i raggi del fascio P dai punti corrispondenti della punteggiata p'.

Ora questi piani costituiscono appunto un cono di seconda classe, poichè il fascio e la punteggiata sono proiettivi perchè forme corrispondenti nella reciprocità dei sistemi σ e σ'.

Il cono di seconda classe degenera in due fasci di piani, quando un raggio t' del fascio P di σ contiene il suo punto corrispondente T'.

pia di rette per ognuno di essi valgono le considerazioni fatte pel piano π.

Si noti inoltre che questo raggio t giace nel piano tangente alla quadrica nel punto S: infatti ogni suo punto appartenendo alla quadrica il piano ad esso corrispondente dovrà contenerlo, e quindi passare per la retta SS'.

Ciò dimostra che se pel punto S passano rette della quadrica esse sono contenute nel piano tangente in S, e ci apre ancora la via a dimostrare che le ta-

di σ': perchè allora il fascio P viene ad avere il raggio t unito col fascio di raggi che si ottiene proiettando da p la punteggiata p' corrispondente di p in σ': allora i piani dell'inviluppo passanti per ogni altro punto di quel raggio t, costituiscono due fasci, perchè per ogni punto di t valgono le considerazioni fatte per P.

Si noti inoltre che questo raggio t passa pel punto di contatto della superficie posto nel piano σ: infatti ogni piano passante per t appartiene all'invile rette pel punto S non ne passano che due, una, o nessuna.

Infatti al fascio delle tangenti in S corrisponde in S il fascio di piani Σ, che è segato dal piano tangente in S in un fascio di raggi projettivo al fascio delle tangenti. Ora questi due fasci concentrici e projettivi hanno due, uno o nessun raggio unito, quindi corrispondentemente due, una o nessuna delle tangenti è contenuta nel piano corrispondente; cioè due una o nessuna retta della quadrica passa per S.

"Una retta qua-

luppo, e quindi il suo punto corrispondente deve giacere su di essa, e perciò sulla retta σσ'. Ciò dimostra che se nel piano σ esistono assi di fasci di piani appartenenti all'inviluppo, questi passano pel suo punto di contatto, e si rende anche facile dimostrare che di tali assi nel piano σ non ve ne sono che due, uno o nessuno.

Infatti al fascio delle tangenti in σ corrisponde in σ' la punteggiata σσ' che è projettata dal punto di contatto di σ in un fascio di raggi concentrico e projetti-

lunq. e dello spazio incontra una quadrica in due punti, uno o nessuno, o giace completamente in essa."

Infatti il piano passante per essa e per uno dei centri S o S' delle stelle che generano la quadrica, la sega in una conica che ha con essa retta due uno o nessun punto in comune. Se dà il caso che la retta giaccia per intero sulla quadrica, essendo la conica sezione si scinde in una coppia di rette di cui una appunto sia la retta considerata.

vo al fascio delle tangenti. Ora questi due fasci hanno due, uno o nessun raggio unito, quindi corrispondentemente due una o nessuna delle tangenti passa pel punto corrispondente: cioè due uno o nessun asse di fasci di piani dell'inviluppo giace in σ.

"Per una retta qualunque dello spazio passano due, uno, nessuno o infiniti piani di una superficie di seconda classe."

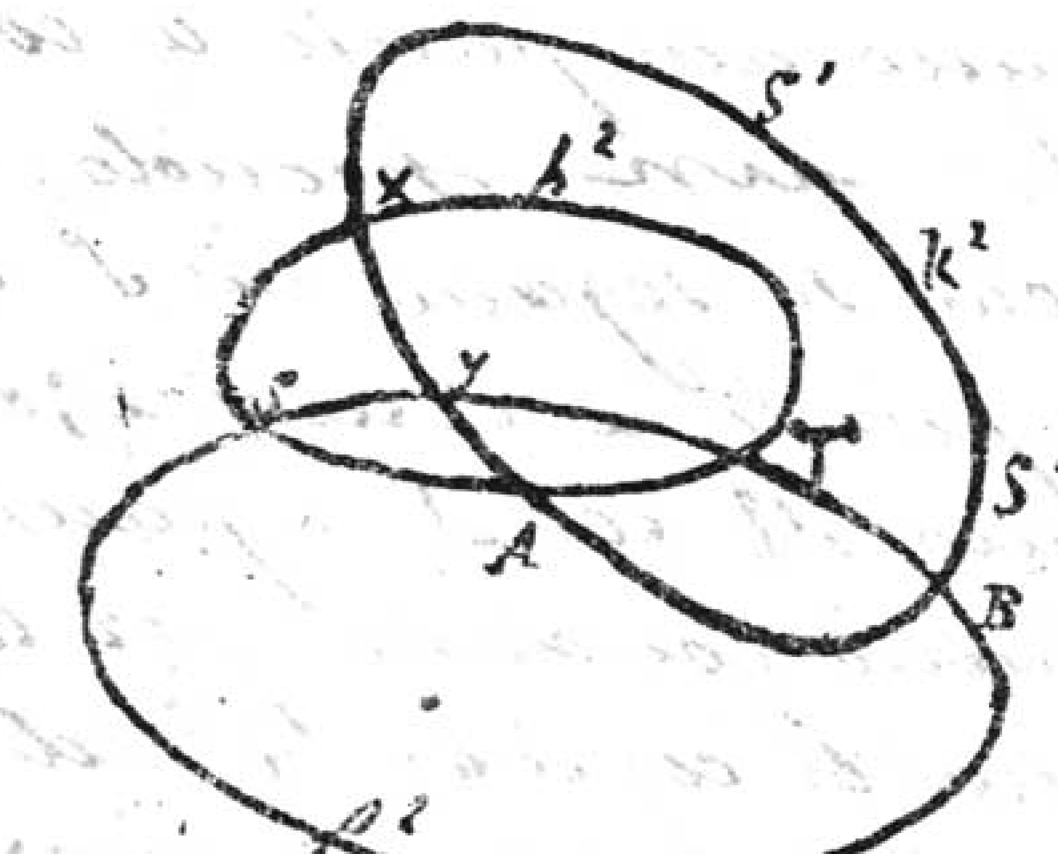
Infatti i piani della superficie passanti pel punto o ove la retta incontra uno dei due piani σ o σ' che generano la superficie costituiscono un cono di seconda classe, di cui due, uno o nessun piano passeranno per quella retta; e ne passeranno infiniti nel caso che il cono degeneri in due fasci di piani e che la retta considerata sia l'asse di uno di essi.

Tutte queste proprietà di cui molte abbiamo dimostrato soltanto pei sostegni delle forme generanti la quadrica o la superficie di seconda classe saranno dimostrate in generale quando siasi fatto vedere che rispetto alla quadrica F^2 i punti S ed S' possono considerarsi come due suoi punti qualunque. Al tal uopo noi dimostreremo il seguente doppio teorema:

"Una quadrica qualunque F^2 può considerarsi come generata da due stelle aventi i loro centri in due suoi punti qualunque, tra le quali si stabilisca una conveniente reciprocità."

Una qualunque superficie di 2.ª classe Φ^2 può considerarsi come generata da due sistemi piani reciproci aventi i loro sostegni in due piani qualunque, e tra i quali si stabilisca una conveniente reciprocità.

Sia (vedi a sinistra) S'' un punto qualunque della quadrica F^2 generata dalle stelle reciproche S ed S' e sia k^2 la conica secondo cui un piano generico pas-



dente per la retta $S'S''$ taglia la quadrica F'^2. Assunti su questa conica k^2 due punti arbitrarii X ed Y si facciano passare per le rette SX ed SY due piani qualunque che taglino la quadrica in due altre coniche h^2 ed l^2. queste coniche avendo già un punto a comune colla k^2 la incontreranno in un altro punto, perchè se si pensa alle intersezioni dei piani delle coniche h^2 l^2 risp. col piano della k^2 queste ~~rette~~ rette hanno già un punto X, Y risp. a comune con la quadrica, e quindi ne avranno ancora un altro A, B risp. (che potrebbe anche essere infinitamente vicino ad X, Y) che per essere del piano della k^2 esisteranno sulla k^2 istessa. Abbiamo ora provato che due coniche della quadrica se hanno un punto a comune ne hanno anche ~~un~~ secondo; e quindi le h^2 ed l^2 che si segano in S avranno un secondo punto a comune; chiamiamolo T. Siano M ed N i punti ove un piano arbitrario condotto per la retta $S''T$ incontra le coniche h^2 ed l^2.

Tutto ciò noi potremo riferire reciproca-

mente le stelle S ed S'' facendo corrispondere ai fasci di raggi di S che da S proiettano le coniche h^2 ed l^2 i fasci di piani di S'' che dalle rette $S''M$ ed $S''N$ proiettano le medesime coniche, poichè i fasci di raggi sono proiettivi ai fasci di piani rispettivamente, ed è soddisfatta la condizione che al raggio comune dei due fasci di raggi corrisponda il piano comune dei due fasci di piani in ambedue le proiettività. Infatti per la prima proiettività al raggio ST corrisponde il piano $S''MT$, e per la seconda al raggio ST corrisponde il piano $S''NT$ che si confonde col piano $S''MT$, perchè i quattro punti S'', M, N, T sono, per costruzione, in un medesimo piano. Con tutto questo la reciprocità fra le stelle S ed S'' è pienamente fissata e perciò esse genereranno una quadrica F^2 che ha intanto a comune colla F'^2 le coniche h^2 ed l^2. Anche la conica k^2 giace su F^2. infatti la conica secondo cui il piano di k^2 sega la quadrica F^2 ha a comune con essa il punto S'' e i quattro punti ove k^2 incontra h^2 ed l^2; quindi coincide con essa. Inoltre sia P un punto qualunque della quadrica F^2: il piano PSS'' segherà l'una e l'altra quadrica secondo due coniche le quali per avere a comune i punti S. S'' ed oltre questi un punto a comune con ciascuna delle coniche k^2, h^2 l^2; le quali dette sono tagliate in due punti dal piano PSS'', perchè esso ha già per ipotesi un punto a comune con ciascuna di esse coincidono completamente. Dunque le quadriche F^2 ed F'^2 sono la stessa cosa, e la F^2 può anche ottenersi dalle stelle reciproche S ed S''.

Si è fatto ora vedere che la quadrica generata dalle stelle S ed S' si poteva anche generare per mezzo delle stelle S ed S'' essendo S'' un punto qualunque della quadrica; prendiamo ora un terzo punto S''' sulla quadrica; nella stessa maniera si può far vedere che la quadrica generata da S ed S'' si può anche generare con le stelle S''' ed S', che sono due punti qualunque della quadrica c d d.

Seguono immediatamente da questo teorema e dai precedenti le seguenti proprietà:

a) "Un piano qualunque dello spazio o sega una quadrica in una conica o la tocca in un punto o non ha con essa alcun punto comune.

b) "In ogni punto d'una quadrica esiste un piano tangente che ha con essa a comune quel punto solamente.

c) "Per ogni punto d'una quadrica passano due, una o nessuna retta giacenti per intero su di essa."

a') "Per un punto dello spazio o passano infiniti piani di una superficie di 2a classe costituenti un cono di 2a classe o ne passa uno solo, o non ne passa alcuno."

b') "In ogni piano di una superficie di 2a classe esiste un punto di contatto, pel quale passa solo quel piano della superficie."

c') "In ogni piano d'una superficie di 2a classe giacciono due una o nessuna asse di fasci di piani appartenenti alla superficie."

La costruzione fatta mostra non solo che una quadrica (una superficie di 2ª classe) può essere generata da due stelle reciproche (sistemi piani reciproci) aventi i loro centri (sostegni) in due punti (piani) qualunque della quadrica (della superficie di 2ª classe) ma per la sua arbitrarietà fa ancora vedere che:

"Dati due punti qualunque di una quadrica F^2 questi possono considerarsi come centri di stelle che in infiniti modi possono riferirsi reciprocamente in guisa da generare la F^2 medesima.

"Dati due piani qualunque d'una superficie di 2ª classe questi possono considerarsi come sostegni di due sistemi piani che in infiniti modo possono riferirsi reciprocamente in guisa da generare la superficie medesima"

Infatti (teor. a sinistra) il piano $S''MNT$ è un piano qualunque del fascio $S''T$, e quindi tante sono le reciprocità diverse che possono stabilirsi fra le stelle S ed S'' quanti sono i piani del fascio $S''T$: ossia esse costituiscono una semplice infinità.-

L'arbitrarietà delle coniche k^2 ed l^2 è solo apparente e questo non porta alcuna indeterminazione nella costruzione, poichè, una volta stabilito il piano $S''MNT$, qualunque altra coppia di coniche si fosse stabilita fra le stelle S ed S'' sempre ai fasci di raggi che da S proiettano le coniche k^2 ed l^2 avrebbero dovuto corrispondere i fasci di piani che dalle rette $S''M$ ed $S''N$ proiettano le medesime coniche.

Di più siamo in grado, finalmente, di enunciare anche i seguenti teoremi:

"Se due quadriche F^2 ed F'^2 hanno a comune due coniche k^2 ed l^2 ed un punto fuori di esse esse coincidono completamente"

"Per due coni di seconda classe, e per un piano non appartenente ad essi passa una ed una sola superficie di 2ª classe"

"Una superficie le cui sezioni piane siano sempre delle coniche, è una quadrica, ossia una superficie generabile nel modo che sappiamo.

"Un inviluppo, i cui piani passanti per un punto dello spazio costituiscono sempre un cono di seconda classe, è una superficie di seconda classe"

Ora noi vogliamo studiare più da vicino quante punteggiate può contenere una quadrica e quanti fasci di piani una superficie di 2a classe, e come queste forme sono su di esse distribuite.

Prima di tutto se una quadrica F^2 contiene una retta g ne contiene infinite altre, poichè immaginando che un piano ruoti intorno a g, esso in ogni posizione incontrerà la quadrica in una nuova retta che si appoggia alla g.

Siano v e v_1 due rette della quadrica corrispondenti a due posizioni qualunque del piano mobile intorno a g: noi distingueremo

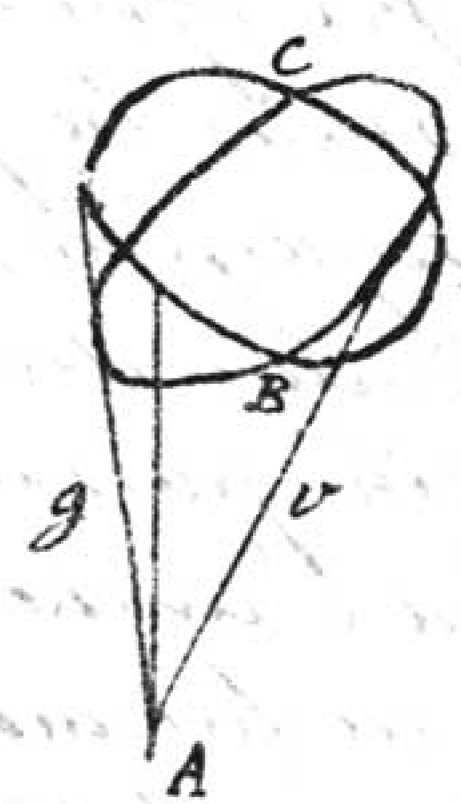
Prima di tutto se una superficie di 2a classe contiene un asse g (1) ne contiene infiniti altri, poichè immaginando che un punto si muova sulla g, per esso in ogni posizione passerà un nuovo asse della superficie perchè il cono da esso punto circoscritto alla superficie contiene già un fascio di piani.

Siano v e v_1 due assi della superficie corrispondenti a due posi-

(1) Noi diciamo che una superficie contiene un asse g quando contiene tutti i piani del fascio g, e ciò per la brevità.

due casi, e dimostreremo che la F^2 è un cono di secondo ordine se v e v_1, e quindi, come vedremo, tutte le altre rette passano per un medesimo punto di g - e che la F^2 è una superficie rigata se v e v_1 e quindi tutte le altre rette incontrano la g in punti tutti diversi.

Si dia il primo caso e v e v_1 incontrino g in uno stesso punto A: allora presi due punti qualunque B e C della F^2 si facciano passare per la



zioni qualunque del punto mobile: noi distingueremo due casi, e dimostreremo che la superficie si riduce al complesso dei piani tangenti ad una conica se v e v_1, e quindi, come vedremo, tutte le altre rette giacciono in uno stesso piano con g - e che la superficie si riduce al complesso dei piani tangenti di una superficie rigata se v e v_1, e quindi tutte le altre rette giacciono con la g in piani differenti.

Se v e v_1 giacciono con g in un medesimo piano α presi due piani qualunque β e γ della superficie si considerino i coni di 2a classe appartenenti alla superficie e aventi i loro vertici in due retta BC due piani che seghino la quadrica in due coniche e le rette g, v e v_1 in tre punti ciascuno appartenenti a queste due coniche rispettivamente. Poi si proiettano queste due coniche dal punto A e si considerino i due coni di second'ordine che ne risultano. Essi si confondono in un sol cono poichè hanno a comune le cinque generatrici AB, AC, g, v e v_1 e questo cono non è altro cosa che la F^2 poichè ogni sua generatrice ha in comune con F^2 il punto A e i punti ove incontra le coniche suddette e quindi giace su di essa per intero. Ed è anche chiaro

punti qualunque della intersezione $\beta\gamma$ dei piani β e γ. Poi si seghino questi due coni di seconda classe col piano α e si considerino i due inviluppi di seconda classe che ne derivano. Essi si confondono in un solo poichè hanno a comune le cinque rette $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, g, v e v_1 il questo è costituito dagli assi dei fasci di piani in cui si dispongono i piani della superficie. Infatti per ogni sua retta passano tre piani della superficie, cioè α e i due piani dei coni suddetti passanti per essa. Ed è anche chiaro che in tal modo si esauriscono tutti i pia-

che il cono esaurisce la F^2 poichè in caso contrario non sarebbero più del second'ordine le sezioni piane, contrariamente a quanto abbiamo stabilito.

ni della superficie, perchè altrimenti i piani passanti per un punto non costituirebbero più sempre un cono di 2ª classe.

Si dia il secondo caso, (teor. a sinistra: abbandoniamo la ricerca a destra perchè affatto priva d'interesse) cioè le rette v e v_1 incontrino la g in punti differenti; allora tutte le altre rette v_2, v_3 .... ottenute nel modo sopradetto incontreranno la g in punti diversi per la dimostrazione fatta nel caso precedente, e saranno tutte sghembe fra di loro due a due. Si considerino le tre rette v, v_1, v_2 e la superficie rigata formata dalle rette g, g', g'' ..... che ad esse si appoggiano: queste giaceranno tutte sulla quadrica poichè hanno a comune con essa i tre punti in cui incontrano le v, v_1, v_2.

Pertanto la F^2 comprende la superficie rigata suddetta ed è poi anche evidentemente esaurita dalla medesima.

I teoremi precedenti (a sinistra) mostrano che se una quadrica contiene delle rette ne contiene infinite e che allora essa non è altro che un cono o una superficie rigata; quindi per tutti i punti d'una quadrica o non passa alcuna retta della quadrica, o ne passa una (caso del cono) o ne passano due (caso della superficie rigata). Ora un punto d'una superficie si chiama ellittico, parabolico, o iperbolico secondo che si trova nell'una o nell'altra di tali condizioni, rispettivamente, dunque possiamo fare una prima divisione delle quadriche distinguendole in quadriche a punti ellittici, parabolici o iperbolici, e possiamo anche osservare che una quadrica non contiene che punti di una medesima specie.

Segue il capitolo I.

La divisione fatta delle quadriche è completa dal punto di vista proiettivo, ma come abbiamo veduto per le coniche, si suole ancora suddividere ogni specie di quadriche, mettendole in relazione col piano all'infinito e considerando la sezione di questo piano colle quadriche medesime.

Così le quadriche a punti ellittici si chiamano ellissoidi quando non hanno alcun punto a comune col piano all'infinito, si dicono paraboloidi ellittici quando sono tangenti al piano all'infinito e, finalmente, iperboloidi a due falde quando sono segate secondo una conica (immaginaria).

Appartiene al genere ellissoide anche la sfera, perchè essa contiene tutti punti proprii ed è una quadrica perchè viene tagliata secondo un circolo (che è una conica) da un piano qualunque dello spazio. Del resto che la sfera sia una quadrica possiamo anche dimostrarlo direttamente facendo proprio vedere che essa è generabile mediante stelle reciproche.

Prendiamo due stelle qualunque S ed S' e facciamo corrispondere alle rette di S i piani a queste perpendicolari passanti per S', e così pure ai piani di S le perpendicolari calate su di essi dal punto S'. Abbiamo così fra S ed S' un riferimento, anzi una reciprocità perchè in tal modo ad una retta o a un piano di S corrisponde un piano o una retta di S' e di più se più rette di S giacciono in un medesimo piano π, i piani corrispondenti di S' passano per la retta p' corrispondente a π. Dopo ciò è chiaro che la forma generata da S ed S' è una sfera di diametro SS'.

Le quadriche a punti parabolici si suddividono in coni propriamente detti (cioè coni col vertice a distanza finita) e in cilindri (cioè coni col vertice a distanza infinita) ed è noto che i cilindri si suddividono ancora in cilindri ellittici, parabolici od iperbolici, a seconda della natura delle loro sezioni.

In un cono il vertice V è un punto singolare della superficie, perchè una retta passante per esso o non incontra la superficie che in quel punto o vi giace per intero. Ora quando un punto di una quadrica gode di tale proprietà si suol chiamare punto doppio, e fra le quadriche esaminate finora abbiamo trovato solo i coni e i cilindri con un punto doppio; nè ce ne possono essere altre; perchè se P è un punto doppio di una quadrica e C è una conica della superficie proiettando da P un punto di C si ha una retta che giace intera sulla superficie: e quindi la superficie altro non può essere che il cono (o cilindro) che si ottiene proiettando da P la C.

Ha poi una semplice infinità di punti doppi la prima degenerazione del cono: la coppia di piani. Infatti in una quadrica che si riduce ad una coppia di piani, tutti i punti dell'intersezione di questi soddisfano alla definizione di punti doppi. Quando poi la coppia di piani è rappresentata da un piano solo contato due volte, allora vi ha una doppia infinità di punti cosiffatti, poichè ogni punto del piano in discorso soddisfa ancora alla definizione.

Insieme al punto doppio si presenta come considerazione correlativa il concetto di piano doppio per la superficie di 2ª classe (caso della conica e delle sue degenerazioni) dei quali può avercene uno solo (il piano della conica inviluppata) od infiniti formanti un fascio (quando l'inviluppo degenera in un paio di punti, ed allora la congiungente di questi punti è l'asse del fascio) od anche una doppia infinità formanti una stella, quando l'inviluppo degeneri in un punto contato due volte.

Finalmente le quadriche a punti iperbolici si dividono, come a noi è già noto, in paraboloidi iperbolici e in iperboloidi a una falda secondo che il piano all'infinito le sega in una coppia di rette (improprie) o in una conica (impropria).

Da queste definizioni segue immediatamente:

1º "Le sezioni piane di un ellissoide sono tutte ellissi".

2º "Le sezioni piane d'una paraboloide ellittico sono in generale delle ellissi: sono delle parabole solo quando il piano segante appartiene alla stella che ha per centro il punto all'infinito della paraboloide.

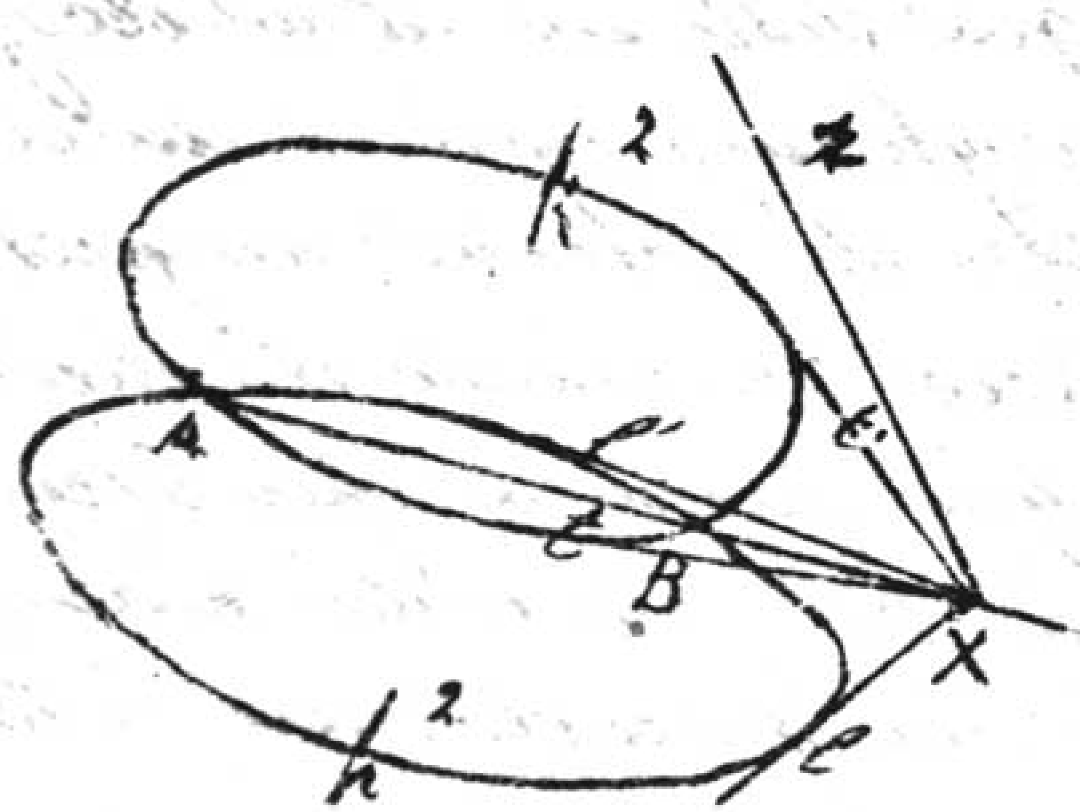
3º Un'iperboloide a due falde ammette tutte e tre le specie di sezioni.

Quanto alle sezioni delle altre quadriche noi non abbiamo nulla da aggiungere perchè lo abbiamo già visto in altra occasione.

Adesso noi vogliamo aprirci un campo ancora più esteso di ricerche su queste importanti superficie, cercando di stabilire per esse ciò che già facemmo per le coniche, ossia la teoria dei poli e dei piani polari. Per questo noi premettiamo il lemma seguente:

"Essendo date due coniche k^2 e k'^2 poste in piani differenti, ma aventi due punti A e B a comune, (posti evidentemente sulla comune intersezione di quei piani) per ogni retta r che si appoggi alla AB in un punto X qualunque, possono condursi infiniti piani che seghino in due punti tanto k^2 quanto k'^2.

La retta AB da ciascuna delle coniche k^2 e K^2 è divisa in due segmenti l'uno finito e l'altro infinito, di cui uno è tutto interno alla conica che si considera, l'altro è tutto esterno alla conica medesima. —
Se il punto X è interno ad una almeno delle due coniche per es. a k^2; preso un punto qualunque Y di k^2



si consideri il piano rY: questo piano incontra la k^2 in due punti perchè ha già con essa il punto Y a comune, e incontra in due punti anche la K^2 perchè la sua intersezione col piano di K^2, come quella che contiene il punto X interno a K^2 incontra questa conica in due punti. Se il punto X è esterno ad ambedue le coniche si conducano per esso le tangenti l ed l' ad k^2 e le tangenti t e t' a K^2; delle rette passanti per X quelle contenute in quegli angoli di l, l' e di t, t' che

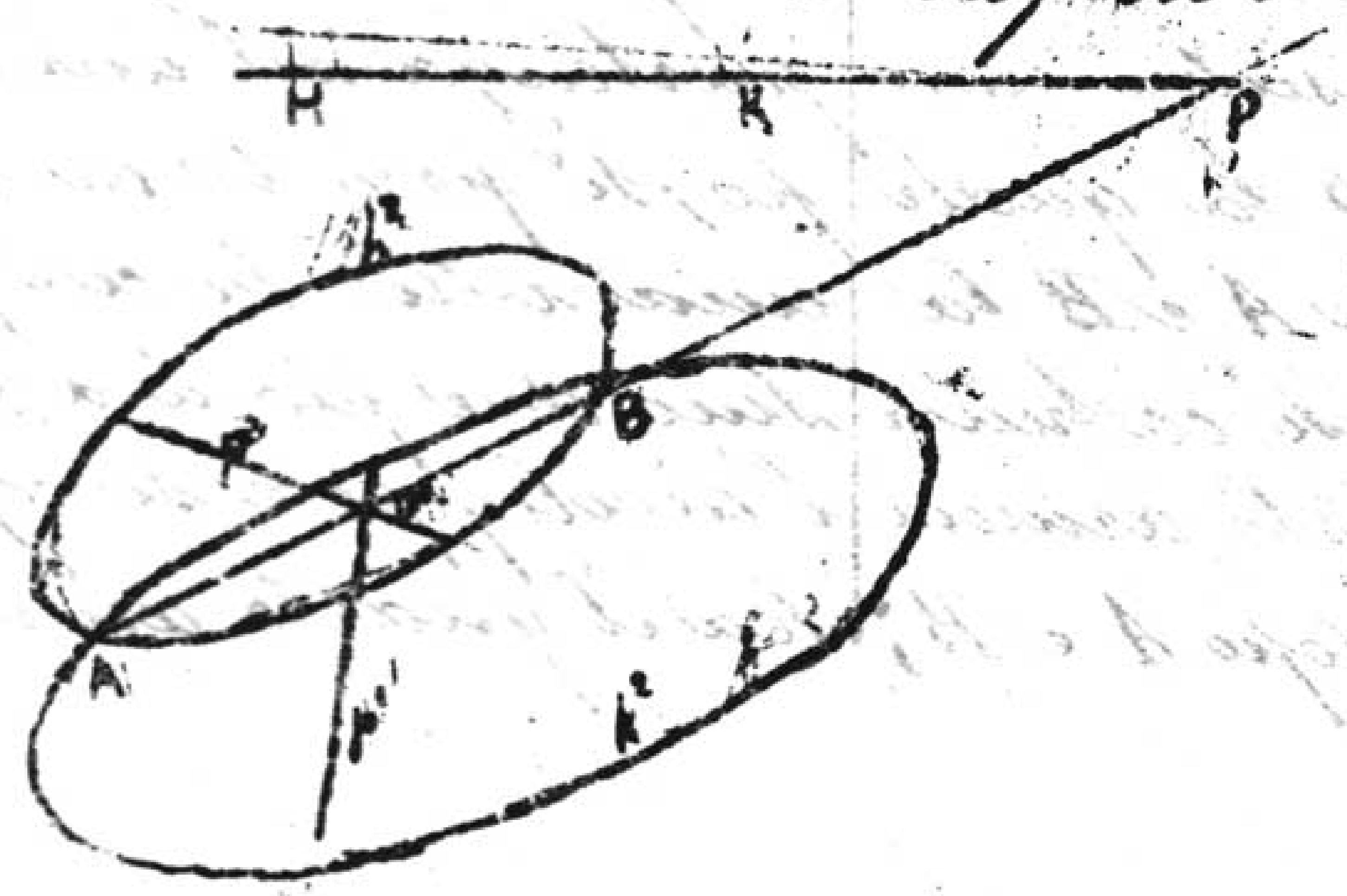
contengono la AB, segano tutte e sole, come sappiamo, le coniche k^2 e K^2 rispettivamente; e quindi anche tutti e soli i piani contenuti nel diedro che ha per facce rl, rl' incontrano la conica k^2 in due punti, e tutti e soli i piani contenuti nel diedro che ha per facce rt, rt' segano la conica K^2. Ora questi due angoli diedri aventi la medesima costola hanno certo una parte a comune perchè il piano r AB è interno all'uno e all'altro e non coincide con nessuna delle loro facce; dunque il teorema è dimostrato, poichè tutti i piani contenuti in questa parte comune segano tanto la conica k^2 quanto la conica K^2.

Abbiasi una quadrica F^2 ed un punto P che non giace su di essa; si consideri una retta per P la quale incontri in A e B la quadrica; si costruisca il quarto armonico P' di P dopo A e B;

Abbiasi una superficie di 2ª classe Φ^2, ed un piano π che non appartenga all'inviluppo; si prenda in π una retta su cui passino due piani α β dell'inviluppo e si costruisca il quarto armonico

al variare della retta attorno a P, e P' si mantiene in un piano che noi diciamo piano polare di P rispetto alla quadrica F^2.	co π' di π dopo A e B; al variare della retta in π, π' passa costantemente per un punto che diremo punto polo di π rispetto alla φ^2.

Conduciamo (teorema a sinistra) per la retta AB due piani che seghino la quadrica F^2 in due coniche h^2 e k^2: tutti i coniugati armonici di P rispetto alla quadrica e che esistono nei piani di h^2 e k^2 saranno evidentemente i coniugati armonici di P rispetto alle coniche h^2 e k^2 e quindi si troveranno sulle polari p e p' di P rispetto alle coniche h^2 e k^2: polari che evidentemente passeranno per P'. Tiriamo inoltre per P un'altra retta r che seghi in H e K la F^2; costruiamo il coniugato armonico P'' di P rispetto ad H e K



ghi in H e K la F^2; costruiamo il coniugato armonico P'' di P rispetto ad H e K e conduciamo per r un piano che tagli entrambe le coniche h^2 e k^2 - e precisamente la conica h^2 nei punti L_1 ed L_2, la conica k^2 nei punti M_1 ed M_2. Allora la polare di P rispetto alla conica sezione della quadrica col piano condotto per r, che deve evidentemente passare per P'', deve anche passare per i coniugati armonici di P rispetto ad $L_1 L_2$ e rispetto ad M_1, M_2: ma questi sono evidentemente due punti delle rette p e p', quindi il punto P'' è situato nel piano $p\,p'$.

Questo dimostra che il punto P' al variare della trasversale AB si muove sopra un piano π, che è il piano polare di P rispetto alla quadrica F^2; ma il processo seguito nella dimostrazione fa anche vedere che:

Il piano polare π di un punto P rispetto ad una quadrica F^2 contiene ancora tutte le polari di P rispetto	Pel polo P di un piano π rispetto ad una superficie di 2ª classe φ^2 passano tutte le rette polari di π

Disp.ª 5ª

alle coniche sezioni prodotte in F^2 dai piani passanti per P.

rispetto ai coni di 2^a classe formati dai piani di Φ^2 passanti per uno stesso punto di π.

Altre proprietà dei poli e dei piani polari emergono dalle considerazioni seguenti: Sia PAB una trasversale che incontri la F^2 in due punti A e B e sia k^2 la conica secondo cui un piano qualunque passante per essa sega la quadrica: le tangenti t e t' a questa conica nei punti A e B che sono pure tangenti alla quadrica s'incontreranno in un punto della polare di P rispetto a k^2, ossia in un punto di π. Variando il piano segante intorno alla AB varieranno le tangenti t e t' ma si conserveranno sempre nei piani tangenti alla quadrica in A e B: e la loro intersezione si manterrà sempre in π: dunque anche l'intersezione di questi piani che sono poi piani tangenti della quadrica in due punti qualunque allineato con P giace nel piano π.

Da ciò i teoremi:

Il piano polare π di un punto P rispetto ad una quadrica F^2 contiene le intersezioni dei piani tangenti alla quadrica F^2 i cui punti di contatto sono allineati con P.

Pel polo P di un piano π rispetto a una superficie di 2^a classe Φ^2 passano le congiungenti i punti di contatto dei piani di Φ^2 che passano per una stessa retta di π.

Tutte queste proprietà finora dimostrate possono considerarsi come tante definizioni del piano polare (del polo) di un punto (di un piano) rispetto ad una quadrica (ad una superficie di 2^a classe): servendosi dell'una o dell'altra si riconosce facilmente che i piani tangenti ad una quadrica (i punti di contatto dei piani di una superficie di 2^a classe) sono i piani polari (i poli) dei loro punti di contatto (dei piani dell'inviluppo passanti per essi) e così viene considerato anche il caso dei punti giacenti sulla quadrica, escluso finora.—

Reciprocamente, è chiaro che se un punto P giace nel suo piano polare, esso è un punto della quadrica, poichè se ciò non fosse P dovrebbe esser coniugato armonico di sa stesso rispetto ai due punti A e B da esso distinti in cui una trasversale tirata per esso incontra la quadrica; il che è assurdo.

Quando la quadrica F^2 non è un cono, una coppia di piani o un piano doppio, ad ogni punto dello spazio corrisponde un piano polare ed uno solo: ma non è così quando si fanno le medesime considerazioni per il cono, e per le sue forme di degenerazione. – Nel caso di un cono, lo sappiamo già, un punto qualunque P dello spazio che non sia il vertice ammette come piano polare un piano che è pure piano polare di tutti i punti allineati con P e col vertice V del cono: mentre il vertice V ammette come piano polare qualunque piano dello spazio.

Infatti se π è un piano arbitrario che incontra una generatrice g nel punto V, e si costruiscono su g due punti A e B che separino armonicamente V da V' e si ripete questa costruzione per tutte le altre generatrici si vede che π contiene il 4° armonico di P rispetto a infinite coppie di punti che rette passanti per V hanno a comune

ne colla quadrica onde può considerarsi come piano polare di V rispetto al cono.

Dualmente si ha che è ancora determinato il polo P di un piano π rispetto ad una superficie di 2ª classe φ^2 la quale degeneri in una conica, ed è un punto che è pure polo di ogni piano del fascio che ha per asse la retta in cui π sega il piano della conica; mentre per polo rispetto alla superficie del piano della conica si può assumere un punto qualunque dello spazio.

Quando la quadrica degenerasse in una coppia di piani allora un punto generico dello spazio avrebbe ancora un piano polare determinato; il quarto armonico del piano che si ottiene proiettando il punto dall'intersezione dei piani in cui degenera la quadrica rispetto ai piani della quadrica; ma quando si trattasse di un punto della retta doppia allora qualunque piano dello spazio potrebbe considerarsi come piano polare di esso, come si verifica facilmente facendo considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso del cono.

Dualmente si ha che è ancora piena

mente determinato il polo di un piano generico dello spazio rispetto ad un inviluppo di 2ª classe che degeneri in un paio di punti, e solo quando il piano appartenga al fascio di piani che ha per asse la congiungente di questi due punti per polo si può assumere un punto qualunque dello spazio.

Nei casi poi più particolari di tutti quelli in cui la superficie si riduca ad un piano (stella) allora il piano polare (punto polo) di un punto (piano) generico dello spazio è ancora determinato ed è il piano (centro della stella) in cui la quadrica degenera, mentre per piano polare (polo) di un punto (piano) del piano (della stella) in cui degenera la quadrica (l'inviluppo) si può prendere un piano (punto) qualunque dello spazio.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema fondamentale nella teoria dei poli e piani polari.

"Se π è il piano polare di P rispetto ad una quadrica F^2, il piano polare π' di un pun-	Se P è il polo di un piano π rispetto ad una superficie di seconda classe Φ^2, il polo P' di un pia-

to P' di π passa per P.	no π' passante per P, giace su π.

Consideriamo un piano σ (teor. a sinistra) che passi per la retta PP' e seghi F^2 in una conica k^2; la polare di P rispetto a k^2 è evidentemente la retta $\pi\sigma$ che passa per P'. Ora poichè P' giace sulla polare di P rispetto alla conica k^2, la sua polare p' rispetto alla medesima conica dovrà passare per P: ma p' giace in π' dunque π' passa per P.

Coll'aiuto di questo teorema si risolve immediatamente la questione:

Dato un piano π cercare se vi è un punto dello spazio di cui esso si possa considerare come piano polare.	Dato un punto P cercare se vi è un piano dello spazio di cui esso possa considerarsi come polo.

Si prendano (probl. a sinistra) su π tre punti A, B, C e di questi si costruiscano i piani polari α, β, γ; questi si segheranno nel punto P richiesto. Infatti il piano polare di P dovendo passare per A, B, C poli di α, β, γ coinciderà col piano π.

Il problema sarebbe indeterminato solo

nel caso che i tre piani $\alpha . \beta . \gamma$ formassero parte di un fascio $\underline{r}$: allora ogni punto della retta $\underline{r}$ sarebbe polo del piano π - Ma in questo caso la quadrica si riduce ad un cono col vertice nel punto V ove $\underline{r}$ sega π. Infatti poichè π è il piano polare di tutti i punti della $\underline{r}$ sarà anche piano polare di V, e quindi V giace intanto sulla quadrica. Di più se σ è un piano qualunque passante per $\underline{r}$ che seghi la quadrica, non potrà certo segarla in una conica, non degenere perchè rispetto a questa sezione la retta $\pi\sigma$ deve essere polare di tutti i punti della $\underline{r}$: dunque ogni piano σ che passi per $\underline{r}$ e seghi la quadrica la sega in una coppia di rette passanti per V e la quadrica si riduce per conseguenza a un cono col vertice in V-

Se poi la retta $\underline{r}$ giacesse per intero nel piano ABC per ogni punto di essa si potrebbe ripetere il ragionamento fatto sopra, e quindi la quadrica dovendo da ogni piano essere segata in un paio di rette non può esser altro che un paio di piani-

Considerazioni analoghe si intendano fatte pel problema correlativo.

I piani tangenti e le tangenti di una quadrica F^2 passanti (eventualmente) per uno stesso punto P costituiscono un cono di secondo ordine rispettivamente.	I punti di contatto e le tangenti d'una superficie di 2^a classe φ^2 che (eventualmente) giacciono in un piano π costituiscono una conica ed un inviluppo di 2^a classe rispettivamente.

Per la prima parte (teor. a sinistra) notiamo che se un piano π' tangente a F^2 in un punto P' passa pel punto P, il piano π polare di P dovrà passare per P' poichè P giace nel piano π' polare di P'. Viceversa, se P' è un punto della conica secondo cui π taglia la F^2, (supposto che la seghi) il piano π' tangente ad F^2 in P' passa pel punto P, perchè π' è allora il piano polare di un punto P' del piano polare di P: dunque l'inviluppo dei piani tangenti alla F^2 passanti per P essendo costituito dall'insieme dei piani che da P proiettano le tangenti alla conica intersezione di π con F^2 è appunto un cono di 2.ª classe.

Per la seconda parte osserviamo che se PP' è una retta che tocchi la F^2 nel punto P', il punto P' dovrà giacere nel piano polare π di P; perchè PP' e quindi P giace nel piano tangente ad F^2 in P' ossia nel piano polare π' di P'. Viceversa se P' è un punto della conica secondo cui π taglia la quadrica F^2 la retta PP' è una tangente della quadrica. Infatti in tal caso il piano π' tangente ad F^2 nel punto P' dovendo passare per P per la solita ragione conterrà la retta PP', e quindi PP' toccherà la quadrica in P'. Da tuttociò risulta, come precedentemente, che l'insieme delle rette tangenti ad F^2 e passanti per P costituisce un cono di 2.º ordine.

Ed ora immaginiamo di avere una figura Σ composta di punti e di piani ed una quadrica F^2. Ad ogni punto di Σ corrisponderà per effetto della F^2 un piano come suo piano polare, e ad ogni piano, un punto come suo polo. Questi piani e questi punti costituiranno una nuova figura Σ' che noi chiameremo figura polare reciproca

di Σ. - E diciamo reciproca perchè effettivamente tra Σ e Σ' resta in tal modo stabilita una reciprocità in quanto ad ogni punto e ad ogni piano dell'una figura corrisponde un piano ed un punto nell'altra figura rispettivamente: e se due elementi dell'una si appartengono anche gli elementi corrispondenti dell'altra si appartengono. Tra Σ e Σ' v'è dunque reciprocità: quindi per un teorema già noto ad ogni retta r di Σ considerata come luogo di punti corrisponderà una retta r' di Σ' considerata come inviluppo di piani - e le forme di prima e seconda specie in esse contenute saranno proiettive.

Però tale reciprocità è affatto speciale, perchè se noi consideriamo un punto P di Σ e il suo piano corrispondente π di Σ', a P considerato come appartenente a Σ' corrisponderà in Σ lo stesso piano π - il che in generale non avviene. Infatti se consideriamo i piani passanti per P come appartenenti a Σ' questi avranno per punti corrispondenti in Σ i loro poli che giacciono nel piano π, e quindi al punto P

corrisponderà ancora il piano π.

La reciprocità determinata fra le figure dello spazio da una quadrica F^2 nel modo che abbiamo detto si chiama sistema polare di F^2.

Dalle considerazioni precedenti e dalle correlative che agevolmente potrebbero farsi seguono i teoremi e le definizioni qui appresso:

Se un punto P descrive una retta r il suo piano polare π rispetto ad una quadrica F^2 ruota parimenti intorno a una retta r': e viceversa, se un punto descrive la r', il suo piano polare ruota intorno alla r. Due rette cosiffatte r ed r' si chiamano rette polari.

Inoltre la punteggiata descritta da P sulla r è proiettiva

al fascio descritto da π intorno ad r': come pure se il punto P descrive un sistema piano σ, il suo piano polare π descriverà intorno al polo S di σ una stella reciproca al sistema piano σ.

Se un piano π ruota intorno a una retta r il suo polo P rispetto ad una superficie di 2.a classe Φ^2 descrive parimenti una retta r'; e se un piano ruota intorno r', il suo polo descrive la r. Due rette cosiffatte r ed r' si chiamano rette polari.

Inoltre il fascio descritto dal piano π intorno alla r è proiettivo alla punteggiata descritta da P su r: come pure se il piano π descrive una stella S, il suo polo P descriverà sul piano polare σ di S un sistema piano reciproco alla stella S.

Fermiamoci in particolare sulle rette polari, e siano r ed r' due di tali rette. Se un piano σ del fascio r sega la quadrica F^2 in una conica K^2 il punto $R \equiv r'\sigma$ sarà il polo di r rispetto a K^2. Infatti il piano polare ρ di R rispetto alla F^2 deve per quanto abbiamo detto passare per r, e siccome d'altronde la polare di R rispetto a K^2 deve giacere sui piani ρ e σ essa sarà la retta r.

Cosicchè data una retta r per costruirne la polare r' basterà per r condurre due piani seganti della quadrica, costruire i poli di r rispetto alle coniche sezioni e congiungere questi due punti. La congiungente sarà appunto la retta r'.

Correlativamente è chiaro che se data

una retta r. Si considerano i coni di seconda classe aventi i vertici nei punti di r e formati dai piani della superficie di 2ª classe passanti per essi, e si considerano poi i piani polari di r rispetto a ciascuno di questi coni; essi passeranno per la retta r' polare di r rispetto alla superficie medesima.

Due rette polari r ed r' in generale non s'incontrano: poiché se esse hanno un punto a commune allora esse toccano la quadrica. Infatti se A è il punto commune ad r ed r', il piano polare di A dovendo passare per r ed r', poiché A giace su r' e su r rispettivamente, coinciderà col piano $r\,r'$ e passerà per A - quindi A giace sulla quadrica e il piano $r\,r'$ e le rette r, r' la toccano nel punto A.

Reciprocamente, se una retta r tocca la quadrica in un punto A la sua retta polare r' toccherà pure la quadrica in quel punto. Infatti poiché r passa pel punto A e giace nel piano α tangente alla quadrica in A e polare di A, r' sua retta polare dovrà giacere in α piano

polare di A e dovrà passare per A polo di α, ossia toccherà la quadrica nel punto A.

Analoghe considerazioni si potrebbero fare correlativamente per le superficie di 2ª classe.

Se di due rette polari r ed r' l'una r sega la quadrica nei due punti A e B i piani $r'A$ ed $r'B$ toccheranno la quadrica nei punti A e B.	Se per una r' di due rette polari r ed r' passano due piani d'una superficie di 2ª classe α e β, i punti $r'\alpha$ ed $r'\beta$ saranno i punti di contatto di α e β.

Infatti (teor. a sinistra) i piani polari di A e B sono i piani tangenti alla quadrica in A e B e passano per r' perché r' è polare di r.

Se si ha una tangente r che esista nel piano α tangente in A alla superficie, e si prende di r la polare r', al variare di r attorno ad A in α, r' ruoterà attorno ad A in α', e si avranno così due fasci sovrapposti proiettivi, perché forme che si corrispondono negli spazi Σ-Σ' reciproci, anzi in involuzione perché se r' è polare di r anche r è polare di r'; esisteranno quindi due elementi doppi (uno solo quando l'involuzione sia degenere) o nessuno. - Nel primo caso ogni punto dei raggi uniti è punto della quadrica la quale però viene ad essere segata in due rette dal piano tangente, ed è quindi una quadrica a punti iperbolici; nel secondo invece il piano tangente non potrà contenere nessuna generatrice, perchè del resto questa sarebbe polare di sè stessa, e quindi raggio doppio dell'involuzione; e però la quadrica è in questo caso a punti ellittici.

Da ciò segue che:

Per una tangente r di una quadrica F^2 che non sia una generatrice non passa che un sol piano tangente di F^2; perchè se ne passassero due rA ed rB i punti di contatto A e B giacerebbero sulla sua polare r' e questa non sarebbe più tangente ad F^2 come abbiamo sopra dimostrato.

Sopra una tangente r di una superficie di 2ª classe che non sia un asse Φ^2 non giace che un sol punto di contatto di Φ^2; poichè se ve ne giacessero due $r\alpha$ ed $r\beta$, i piani α e β della superficie passerebbero per la sua polare r' e questa non sarebbe più, come abbiamo visto sopra tangente a Φ^2.

A questo punto siamo in grado di dimostrare le relazioni seguenti che passano tra le quadriche e le superficie di 2ª classe.

L'insieme dei piani tangenti ad una quadrica F^2 costituisce una superficie di 2ª classe Φ^2 i cui punti di contatto coincidono coi punti di F^2.

L'insieme dei punti di contatto d'una superficie di 2ª classe Φ^2 costituisce una quadrica F^2 i cui piani tangenti coincidono coi piani di Φ^2.

Infatti (teor. a sinistra) i piani tangenti ad una quadrica F^2 costituiscono un insieme tale che dei suoi piani quelli passanti per uno stesso punto formano un cono di 2ª classe, e quindi per un teorema antecedentemente dimostrato esso è appunto una superficie di 2ª classe Φ^2. - Di più se dei piani di Φ^2 si costruiscono i punti di contatto questi coincideranno coi punti di F^2.

Infatti se noi consideriamo nel piano π di φ^2 che tocca F^2 nel punto P il fascio delle tangenti ad F^2 che ha il centro nel punto P, per ciascuna delle rette di questo fascio non passerà (eccezion fatta delle due rette appartenenti ad F^2 che possono trovarsi in questo fascio) che un solo piano tangente ad F^2 e precisamente il solo piano π: dunque P è veramente il punto di contatto del piano π della superficie φ^2.

Cosicchè ora dato un punto P ed il suo piano polare π rispetto ad una quadrica F^2, si potrà poi considerare il polo di π rispetto alla superficie di 2.^{a} classe φ^2 formata dai piani tangenti di F^2 e ci si potrà proporre la quistione di vedere se questo polo coincide con P.

Ma evidentemente così deve avvenire perchè se P è il polo di π e PAB una trasversale che incontri F^2 nei punti A e B, i piani α e β che toccano F^2 nei punti A e B si segheranno in una retta r di π. Quindi se si vuol costruire il polo di π rispetto alla superficie φ^2 si dovranno considerare i piani α e β di φ^2 passanti per r e poi la congiungente i loro pun-

ti di contatto A e B; questa retta al variare di r passa costantemente per P dunque si ritorna come volevasi dimostrare al punto P. -

Crediamo opportuno dare di questo teorema una seconda dimostrazione, che da un certo punto di vista può considerarsi come più diretta della precedente. -

Siano S ed S' due stelle reciproche generanti la F^2 e siano σ e σ' i piani tangenti ad F^2 in S ed S' ossia i piani corrispondenti al raggio SS' secondo che si considera come appartenente alla stella S' o alla stella S rispettivamente: σ e σ' saranno ancora i piani polari di S ed S'. Per la polarità determinata nello spazio dalla quadrica F^2 i raggi e i piani di S verranno riferiti ai raggi e ai punti di σ, e i piani e i raggi di S' ai punti e alle rette di σ' in modo che sarà $\sigma \,\bar{\wedge}\, S$ e $\sigma' \,\bar{\wedge}\, S'$. Ma $S \,\bar{\wedge}\, S'$ dunque σ e σ' saranno reciproci e genereranno una superficie di 2.^{a} classe φ^2: Un piano qualunque di questa superficie π come congiungente un punto di σ al raggio corrispondente di s' avrà per polo il punto d'intersezione del piano e del raggio corrispondenti in S e in S'.

Questo punto appartiene alla quadrica F^2 dunque π è tangente alla quadrica. Ciò dimostra appunto il teorema.

"Due punti A e B si dicono coniugati rispetto ad una quadrica F^2 quando l'uno giace nel piano polare dell'altro." –

Una retta ed un punto si dicono coniugati quando il punto giace sulla polare della retta, e quindi la retta giace nel piano polare del punto.

"Due piani α e β si dicono coniugati, rispetto ad una quadrica F^2 quando l'uno passa pel polo dell'altro."

Una retta ed un piano si dicono coniugati quando il piano passa per la polare della retta, e quindi la retta passa pel polo del piano.

"Due rette r ed s si dicono coniugate quando l'una di esse s incontra la polare r' dell'altra, poichè allora anche r incontra la polare s' di s."

Infatti se noi chiamiamo A il pun-

to d'incontro di s ed r', il piano polare di A, trovandosi A tanto su s quanto su r', dovrà passare per s' ed r ossia coinciderà col loro piano e quindi r incontra s'.

Da queste definizioni segue per es: che il luogo dei punti coniugati di un punto A è il suo piano polare α, che il luogo dei punti coniugati ad una retta r è la sua retta polare r', che le rette coniugate ad una retta r costituiscono l'insieme di tutte le rette che si appoggiano alla sua polare r'; queste rette in numero triplamente infinito si dice che formano un complesso lineare speciale. Segue ancora che un punto è coniugato di sè stesso quando giace sulla quadrica, e che un piano ed una retta sono coniugati di sè medesimi quando la toccano. Da ciò †

Se consideriamo un punto (un piano) dello spazio esiste uno e in generale un solo punto (piano) coniugato di quello e che giaccia su (passi per) di una retta generica dello spazio. Esso infatti è il punto (piano) in cui il piano polare del punto (secondo cui il polo del piano)

† segue che la quadrica si può definire come il luogo dei punti autoconiugati.

che si considera taglia (proietta) la retta generica data.

Siano r ed s due rette non coniugate fra di loro e facciamo corrispondere ad ogni punto della retta r il suo coniugato che trovasi su s: le due punteggiate verranno in tal modo riferite proiettivamente.

Infatti la punteggiata s è una sezione fatta con la retta s nel fascio di piani proiettivo alla punteggiata r, che è costituito dai piani polari dei punti di questa retta.

Correlativamente, se date due rette non coniugate r ed s si fa corrispondere ad ogni piano di r il coniugato che passa per s, si verranno a riferire proiettivamente i due fasci r ed s.

I sostegni r ed s che noi abbiamo supposto diversi fin qui possono anche coincidere, e allora le due forme proiettive sovrapposte sono anche in involuzione. Dunque:

" Se una retta r non è ~~polare~~ coniugata a ~~di~~ sè stessa (ossia non ~~è~~ ~~una generatrice~~ è una tangente

della quadrica) i suoi punti (i piani passanti per essa) possono distribuirsi in coppie di punti (piani) coniugati rispetto alla quadrica e coniugati in una involuzione (in un fascio involutorio) giacente sulla r (che ha per asse la retta r)", l'involuzione diventa degenere quando la retta r sia una tangente; perchè allora il piano polare di ogni punto della retta passa pel punto di contatto.

Anche pei fasci di raggi possiamo fare delle considerazioni analoghe.

Siano α e β due piani non coniugati e A e B siano due loro punti pure non coniugati. Allora ad ogni retta a di α passante per A corrisponderà una ed una sola retta a' di β passante per B e coniugata ad a, e questa sarà la retta congiungente B col punto ove il piano β sega la polare di a - e di più il fascio descritto da a intorno al punto A nel piano α sarà proiettivo al fascio descritto da a' nel piano β intorno al punto B.

Infatti quest'ultimo fascio è prospettivo al fascio descritto dalla polare di a nel piano polare del punto A intorno al polo del piano α, e che è proiettivo al fascio descritto dalla retta a.

I piani α e β, come i punti A e B possono coincidere, e allora si ha il teorema:

"Dato un piano α e in questo un punto A, l'uno e l'altro non essendo coniugati di sè medesimi, se si fa corrispondere ad ogni retta di A giacente nel piano α la sua coniugata passante pure per A giacente nel piano α, si ottiene intorno al punto A un fascio involutorio di raggi."

Siano σ e σ_1 due piani non coniugati e si facciano corrispondere ai punti e alle rette di σ, le rette e i punti di σ_1 ad essi coniugati: i sistemi piani σ e σ_1 verranno così ad essere riferiti reciprocamente.

Siano S ed S_1 due punti non coniugati e si facciano corrispondere ai piani e alle rette di S, le rette e i piani di S_1 ad essi coniugati: le stelle S ed S_1 verranno in questo modo ad essere riferite reciprocamente.

Infatti il sistema piano σ_1 è la sezione fatta col piano σ_1 nella stella, costituita dai piani e dalle rette polari dei punti e delle rette di σ, che ha per centro il polo S del piano σ: e questa stella è reciproca al sistema piano σ, perchè gli corrisponde nel sistema polare determinato nello spazio dalla quadrica che si considera. Supponendo che i piani σ e σ_1 coincidano si ha il teorema.

"Se ai punti e alle rette di un piano σ, non coniugato di se stesso, si fanno corrispondere le rette e i punti ad essi coniugati e già

Infatti la stella S_1 è la proiezione fatta dal punto S_1 del sistema piano, costituito dai punti e dalle rette poli e polari dei piani e delle rette di S, che ha per sostegno il piano polare σ del punto S: e questo sistema piano è reciproco della stella S, perchè le corrisponde nel sistema polare determinato nello spazio dalla quadrica che si considera. Basta far coincidere il punto S col punto S_1 per avere il teorema:

"Se ai piani e alle rette di un punto S, non coniugato di sè stesso, si fanno corrispondere le rette e i piani ad centi nello stesso piano σ, si vengono a costruire due sistemi piani reciproci sovrapposti in involuzione.

Infatti in tale ipotesi se al punto P considerato come appartenente al primo sistema piano corrisponde la retta p nel secondo, alla retta p considerata come appartenenti al primo sistema piano, corrisponderà nel secondo il punto P.

Supponiamo inoltre che il piano σ seghi la quadrica in una conica k^2: allora se al punto P corrisponde la retta p, P saranno coniugati rispetto alla quadrica, ma rispetto

essi coniugati e passanti per lo stesso punto S, si vengono a costruire due stelle reciproche concentriche in involuzione".

Infatti in tale ipotesi se al piano π considerato come appartenente alla prima stella corrisponde la retta p nella seconda alla retta p considerata come appartenente alla prima stella corrisponderà nella seconda il piano π.

Supponiamo inoltre che pel punto S passi un cono di 2ª classe K^2 circoscritto alla quadrica: allora se al piano π corrisponde la retta p, π e p saranno coniugati

alla conica k^2 saranno nelle relazioni di polo a polare.

Infatti la retta p giace in σ e nel piano polare π di p.

Dunque possiamo dire in tal caso che la reciprocità determinata nel piano σ dalla presenza della quadrica nello spazio, coincida col sistema polare determinato nel piano σ dalla conica k^2.

In particolare un triangolo autopolare di k^2, sarà un triangolo autoconiugato della quadrica ossia un triangolo nel quale il piano polare di un vertice passa pel lato opposto.

rispetto alla quadrica: ma rispetto al cono K^2 p sarà la polare del piano π.

Infatti la retta p passa per S e pel polo del piano π. Dunque possiamo dire in tale caso che la reciprocità determinata nella stella S dalla presenza della quadrica nello spazio, coincide col sistema polare determinato nella stella S dal cono di 2ª classe K^2.

In particolare un triedro autopolare di K^2 sarà un triedro autoconiugato della quadrica, ossia un triedro nel quale il polo di ogni faccia giace sullo spigolo opposto.

Anzi si noti che di triangoli autoconiugati rispetto alla quadrica giacenti nel piano σ si può parlare anche quando la conica k^2 non esiste perchè σ non sega la quadrica: col infatti per costruirne uno basta, preso un punto arbitrario A di σ costruire la retta coniugata <u>a</u> di A giacente in σ, su questa retta prendere un punto B qualsiasi e costruire la sua coniugata b, giacente in σ, che passerà per A, e segherà la retta a in un terzo punto C: ABC sarà un triangolo autoconiugato

Anzi si noti che di triedri autoconiugati rispetto alla quadrica aventi il vertice in S si può parlare anche quando il cono K non esiste perchè per S non passano piani tangenti della quadrica: col infatti per costruirne uno basta, preso un piano arbitrario α di S costruire la sua retta coniugata <u>a</u> passante per S, per questa retta far passare un piano β qualsiasi e costruire la sua coniugata b che giacerà in α e determinerà colla retta a un terzo piano γ: αβγ sarà un triedro autoconiugato della quadrica.

della quadrica.

Difatti il piano polare di C poichè esso giace su a e b e quindi è coniugato di A e B, passa per la retta AB.

Se insieme ai tre vertici A, B, C di un triangolo autoconiugato si considera il polo S del piano σ in cui giace il triangolo, si ha un tetraedro SABC nel quale, come è facile verificare, ogni vertice ha per piano polare la faccia opposta, ogni spigolo è polare dell'opposto e coniugato dei rimanenti, e due vertici e due facce qualunque sono coniugate.

Difatti il polo di γ poichè esso passa per a e b e quindi è coniugato di α e β, giace sulla retta αβ.

Se insieme alle tre facce α, β, γ di un triedro autoconiugato si considera il piano polare σ del vertice S del triedro, si ha un tetraedro σαβγ nel quale, come è facile verificare, ogni faccia ha per polo il vertice opposto, ogni spigolo è polare dell'opposto e coniugato dei rimanenti, e due facce o due vertici qualunque sono coniugati.

Tali tetraedri (poichè in quest'ultima ricerca le due figure duali coincidono completamente) si dicono tetraedri autopolari della quadrica, e formano in tutto una sestupla infinità.

Nei teoremi precedenti abbiamo sempre escluso il caso che i sostegni delle due forme proiettive costituiti da elementi coniugati rispetto alla quadrica, non fossero coniugati, poiché è evidente che nell'ipotesi contraria tutte quelle proiettività diventerebbero degeneri.

Appendice

Proprietà metriche delle quadriche.

Si chiama centro d'una quadrica F^2 il polo C del piano all'infinito: quindi tutte le rette che escono da C ed incontrano la F^2 la incontrano in punti separati armonicamente da C e dal punto ove esse segano il piano all'infinito – ossia:

"Le corde di una quadrica passanti pel centro sono bisecate in quel punto."

"Se per un punto C passano tre corde d'una quadrica F^2 bisecate in quel punto e non giacenti tutte in un piano, C è il centro della F^2."

Infatti se si vuol costruire il piano

polare di C occorrerà prendere i coniugati armonici di C rispetto agli estremi di quelle tre corde ossia i punti all'infinito di esse e congiungerli con un piano. Questo è il piano all'infinito, dunque C è il centro di F^2.

Si chiamano diametri d'una quadrica le rette polari delle rette all'infinito, e si chiamano piani diametrali i piani polari dei punti all'infinito.

Siccome i punti e le rette all'infinito dello spazio giacciono tutte nel piano all'infinito, si avrà che:

"I diametri e i piani diametrali d'una quadrica passano tutti per il suo centro."

Secondo la natura delle quadriche che si prendono a considerare il centro può variare di posizione rispetto ad esse e appunto in vista di questo si chiamano quadriche a centro quelle che non toccando affatto il piano all'infinito o segandolo in una conica hanno un centro a distanza finita, mentre si dicono quadriche prive di centro quelle che toccando il piano all'infinito hanno il loro centro in questo punto improprio di contatto. Escludendo i coni e i cilindri, apparterranno alla prima specie di quadriche gli ellissoidi e gli iperboloidi, alla seconda i paraboloidi.

Il teorema precedente nel caso dei paraboloidi può dunque enunciarsi così:

"I diametri e i piani diametrali di un paraboloide sono tutti paralleli fra di loro."

Quando una quadrica ha dei punti impropri e i piani ad essa tangenti in quei punti sono piani a distanza finita, si suole chiamare quei piani, piani assintotici della quadrica. Così è chiaro che:

"I piani assintotici d'un iperboloide inviluppano un cono di second'ordine, detto cono assintotico, avente il vertice nel centro della superficie."

"I piani assintotici di un paraboloide iperbolico coincidono coi due fasci di piani paralleli che hanno per assi le sue rette giacenti sul piano all'infinito."

"Il paraboloide ellittico e l'ellissoide mancano affatto di piani assintotici."

Una costruzione assai semplice del

centro per l'iperboloide iperbolico, è fornita dall'osservare che se g, g', g'' sono tre sue direttrici ed una generatrice che si appoggi a g' e g'' ma sia parallela a g, il piano dg è un piano assintotico della superficie, poichè ha per punto di contatto il punto dg che si trova a distanza infinita. Costruiti tre di questi piani assintotici il centro sarà dato dal loro punto d'incontro.

Un piano diametrale ha il suo polo all'infinito, quindi le sue rette coniugate sono tutte parallele ad una certa direzione che si dice la direzione coniugata del piano diametrale che si considera. Da ciò segue che le corde della quadrica parallele a quella direzione sono bisecate dal piano diametrale e che se la quadrica è dotata di centro, esisterà un diametro ed un solo coniugato a quel piano diametrale.

Similmente la retta polare di un diametro è una retta all'infinito e quindi i piani ad esso coniugati saranno tutti paralleli ad una certa giacitura, che si dice la giacitura coniugata del diametro che si considera. E se la quadrica è dotata di centro, fra i piani diametrali se ne potrà assegnare uno ed uno solo che sia anche coniugato di quel diametro.

"Se π è un piano coniugato al diametro d e sega la quadrica in una conica k^2, il punto $O \equiv d\pi$ è il centro di questa conica."

Infatti il piano polare ϖ di O, giacendo O su d, deve passare per la retta polare di d, ossia per la retta all'infinito del piano π: dunque la polare di O rispetto a k^2 dovendo trovarsi su ϖ e π contemporaneamente sarà la retta all'infinito di π, ed O sarà il centro di k^2.

Oltre a ciò se per la retta d si conducono due piani diametrali coniugati μ e μ' questi costituiranno col piano π un triedro autoconiugato della quadrica.

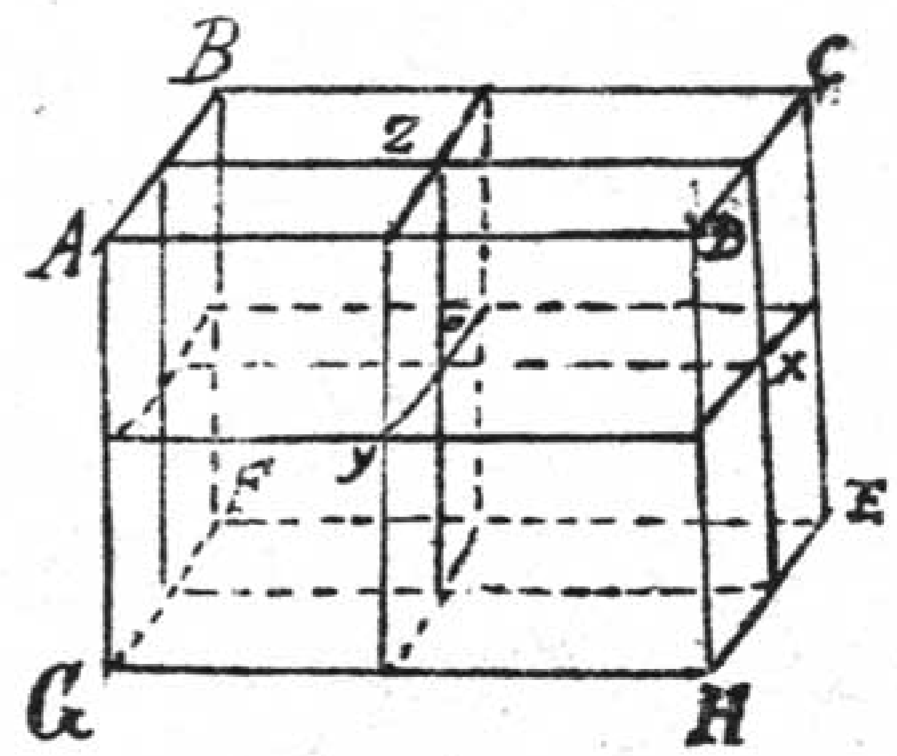
Infatti il polo di π si trova sulla retta d: il piano μ passa per la retta d, dunque il suo polo dovendosi trovare sul piano π e sul piano μ' coinciderà col punto all'infinito della retta $\pi\mu'$: similmente il punto all'infinito della retta $\pi\mu$ è il polo del piano μ'; dunque il triedro $\pi\mu\mu'$ è

un triedro autoconiugato.

Segue dalle osservazioni fatte or ora che le rette $\pi\mu$ e $\pi\mu'$ sono due diametri coniugati di k^2; quindi il fascio involutorio dei piani diametrali coniugati, che passano per d, è segato dal piano π nel fascio involutorio costituito dai diametri coniugati di k^2.

"Se un parallelepipedo ABCDEFGH è inscritto in una quadrica, i suoi tre spigoli sono paralleli ai tre spigoli di un triedro autoconiugato della quadrica."

Intanto le diagonali AE, BH, DF si bisecano scambievolmente nel loro punto d'incontro O e non giacciono in uno stesso piano, dunque O è il centro della quadrica.— Poi si considerino i piani tirati per O parallelamente alle coppie di faccie opposte e siano OX, OY, OZ le tre rette secondo cui questi piani si segano.—



Il piano OYZ dividendo per metà le corde AD, BC, GH, EF, è coniugato alla loro direzione, e quindi è il piano polare del punto all'infinito di OX. Similmente i piani OXY ed OXZ sono i piani polari dei punti all'infinito delle rette OZ, OY dunque il triedro $OXYZ$ è un triedro autoconiugato.—

Reciprocamente:

" Se $OXYZ$ è un triedro autoconiugato di una quadrica F^2 avente il vertice nel centro O, e si tirano i piani paralleli ai suoi spigoli per due punti A ed A' diametralmente opposti si ottiene un parallelepipedo inscritto nella quadrica.

Lo spigolo AC parallelo ad OX incontrando la quadrica nel punto A dovrà incontrarla in un altro punto che dovrà essere separato armonicamente da A mediante il piano OYZ e il piano all'infinito. Ora il piano OYZ biseca lo spigolo AC dunque il punto C trovasi sulla quadrica.

In modo affatto analogo si dimostra che tutti gli altri vertici del parallelepipedo giacciono sulla F^2. Si sa che in un parallelepipedo rettangolo tutte le diagonali sono uguali e che quindi il loro punto

d'incontro è equidistante dai vertici. Ciò porta che se i parallelepipedi inscritti in una quadrica sono tutti rettangoli, la quadrica è una sfera.

Inversamente è chiaro che se in una sfera si considerano i triedri autoconiugati che hanno il vertice nel centro della sfera, si ottengano tanti triedri trirettangoli.—

La ricerca che noi ci proponiamo di fare è appunto quella di vedere se fra i triedri autoconiugati aventi il vertice nel centro di una quadrica ve ne sono di quelli trirettangoli, e posto che esistano, determinarne il numero.

Chiameremo asse d'una quadrica un diametro che sia perpendicolare alla sua giacitura coniugata.

"Un paraboloide ammette un asse ed uno solo. Infatti in una paraboloide tutti i diametri sono paralleli, e la giacitura coniugata all'asse richiesto sarà data dai piani normali alla direzione comune dei diametri.

L'asse a di una paraboloide incontra la superficie in un punto a distanza finita detto vertice del paraboloide, e il piano tangente alla quadrica in quel punto, come coniugato all'asse $\underline{a}$ è ad esso perpendicolare.

Le coppie di piani diametrali coniugati passanti per a costituiscono, come abbiamo dimostrato, un fascio involutorio; quindi, per un teorema noto, vi sarà certo tra di esse una coppia di piani coniugati ed ortogonali.

Siano α ed α_1 questi due piani: ciascuno di essi sarà perpendicolare alla sua direzione coniugata, e costituirà un piano di simmetria ortogonale del paraboloide.

Un piano μ perpendicolare ad $\underline{a}$ formerà insieme ad α e α_1, per considerazioni fatte precedentemente, un triedro autoconiugato trirettangolo del paraboloide: e se μ sega la quadrica secondo la conica k^2, le rette $\mu\alpha$ e $\mu\alpha_1$ saranno gli assi di k^2. Nel caso che l'involuzione dei piani diametrali coniugati passanti per $\underline{a}$ fosse ortogonale, qualunque sezione k^2 fatta con un

piano perpendicolare all'asse a avrebbe tutti i diametri coniugati ortogonali e quindi sarebbe un cerchio. In tale caso il paraboloide sarebbe una superficie di rotazione, e precisamente si otterrebbe facendo ruotare una parabola intorno al suo asse.

Si noti che un paraboloide di rotazione è sempre ellittico - mai iperbolico - poichè, come sappiamo, un paraboloide iperbolico non può essere segato lungo ellissi e quindi nemmeno secondo circoli.

Sia ora F^2 una quadrica col centro C a distanza finita e sia $\underline{d}$ un suo diametro qualunque. Il piano diametrale δ coniugato a d in generale non sarà ad esso perpendicolare; ma se conduciamo per C un piano δ_1 normale a d, potremo avere nell'intersezione $\delta\delta_1 \equiv d_1$ di questi due piani un diametro coniugato e ortogonale a $\underline{d}$.

Supponiamo che il diametro d si muova in un piano π: il suo piano diametrale coniugato δ ruoterà intorno al diametro coniugato p di π, e il piano δ_1 ruoterà intorno alla retta p, per pendicolare a π nel punto C. I due fasci di piani p e p_1 sono proiettivi perchè ambedue proiettivi al fascio di raggi descritto da d nel piano π, dunque l'intersezione dei piani corrispondenti, ossia la retta d_1 descrive al muoversi di d nel piano π un cono di 2º ordine col vertice in C.

Questo cono degenera in una coppia di piani quando il piano $p\,p_1$ è perpendicolare al suo diametro coniugato ossia quando il piano π passa per un asse; perchè allora il piano $p\,p_1$ è unito nei due fasci proiettivi p, p_1 e questi sono prospettivi. Ma in generale ciò non avviene. Infatti si prenda un piano σ non perpendicolare al suo diametro coniugato d e si costruisca di σ il diametro ~~coniugato~~ normale d_1 ~~d_1~~: basterà prendere il piano $d\,d_1$ pel piano π del nostro ragionamento, perchè si ottenga un cono di second'ordine e non una coppia di piani. Infatti in tale caso le rette p, p_1 giacciono ambedue in σ e σ non è normale al suo diametro

coniugato.

Ciò posto supponendo che il diametro d_1 descriva un cono di 2º ordine K^2 mentre d descrive un piano π, tiriamo per C due rette $\underline{a}$ e $\underline{b}$ di cui una sia interna a K^2 e l'altra esterna. Poi presi i diametri a_1, b_1 coniugati e perpendicolari ad a e b consideriamo il loro piano $a_1 b_1 \equiv \pi_1$ e il cono di second'ordine K_1^2 ad esso corrispondente nel modo che sappiamo. Il cono K_1^2 passerà per le rette a e b poichè a_1 e b_1 giacciono in π_1 e quindi avrà a comune col cono K^2 almeno due generatrici g e g_1 - al più quattro - Una delle rette $g\,g_1$ per es. g sarà la coniugata normale della retta $\pi\,\pi_1$, poichè tale retta giace tanto sul cono K^2 quanto sull'altro K_1^2; l'altra g_1 come appartenente a K^2 sarà coniugata normale di una retta di π, e come appartenente a K_1^2, coniugata normale di una retta di π_1. Il piano di queste due ultime rette sarà dunque coniugato e ortogonale alla retta g_1 - cioè g_1 sarà un asse della quadrica F^2

Dispª 10ª

Una quadrica a centro F^2 ha dunque almeno un asse $\underline{a}$; è facile ora dimostrare che essa ne ammette ancora altri due che costituiscono con $\underline{a}$ un triedro autoconiugato trirettangolo di F^2. - Infatti il fascio involutorio dei piani diametrali coniugati passanti per $\underline{a}$ ammette una coppia di piani ortogonali σ e σ, che insieme al piano diametrale α coniugato ad $\underline{a}$ costituiscono un triedro autoconiugato trirettangolo di F^2. I tre spigoli di questo triedro sono appunto tre assi della F^2.

Se il fascio involutorio $\underline{a}$ fosse ortogonale, la F^2 sarebbe come precedentemente abbiamo visto pel paraboloide una superficie di rotazione.

Possiamo dunque dire che:
"Un ellissoide e un iperboloide a una o due falde ammettono tre e in generale soltanto tre assi e tre corrispondenti piani di simmetria"

Torniamo per un momento sulla corrispondenza stabilita fra i diametri di F^2 facendo corrispondere a un diametro $\underline{d}$ il suo coniugato ortogonale d_1, e

siano C il centro, a, b, c gli assi di F^2 —

A ciascuno degli assi corrisponde per la definizione data della corrispondenza, un diametro qualunque del piano degli altri due: quindi essi costituiscono nella corrispondenza tre elementi eccezionali. Inoltre il cono di second'ordine K^2 descritto da d_1 mentre d si muove in un piano π passante per C passa per a, b, c poichè per es. l'asse a corrisponde al diametro secondo cui π è tagliato dal piano degli altri due; dunque se noi immaginiamo i coni di second'ordine K^2 e K_1^2 corrispondenti in tal modo a due piani qualunque π e π_1 di C questi avranno sempre quattro generatrici a comune.

Infine il diametro d_1 descrive invece che un cono di second'ordine un piano π_1 quando il piano π descritto da d appartiene ad uno dei tre fasci a, b, c —

Capitolo II°:

Elementi immaginarii coniugati. Altre proprietà delle quadriche.

Si ottiene una notevole facilitazione nelle ricerche e nelle dimostrazioni dei teoremi geometrici, introducendo, corrispondentemente a quello che si suol fare nell'Algebra, accanto agli elementi reali delle forme fondamentali di cui ci siamo occupati fin qui, gli elementi immaginarii. Per questo lo Staudt (1) ha indicato una via per la quale si potrebbero definire e considerare elementi immaginarii con considerazioni puramente geometriche, ma noi anche per maggiore facilità introdurremo nella geometria tali elementi servendoci dei risultati dell'Algebra e dell'Analitica. Si sa da questa che per fissare la posizione di un elemento in una forma qualunque di prima specie basta stabilire una cor-

(1) Staudt – Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856.

rispondenza biunivoca tra gli elementi della forma e un numero t, detto coordinata, variabile tra $-\infty$ e $+\infty$. Finchè la coordinata t assume valori reali, ad essa corrisponderanno elementi reali nella forma che potranno effettivamente costruirsi; ma se t assume valori complessi nessuna operazione più potrà indicarci l'elemento corrispondente della forma che si considera. Pure per avere la massima generalità e per rendere più completa la corrispondenza biunivoca in discorso, noi diremo che ai valori immaginari di t corrispondono elementi immaginari della forma - cosicchè questi potranno considerarsi solo in quanto ammettono una coordinata sulla quale si può operare come su qualunque altra coordinata reale.

" Due elementi immaginarii d'una forma di prima specie si dicono coniugati quando le coordinate corrispondenti sono due numeri complessi coniugati.

Essendo dati quattro elementi qualunque a, b, c, d, d'una forma fondamentale di prima specie, si sa che il loro rapporto anarmonico (a b c d) è uguale al rapporto anarmonico delle coordinate corrispondenti - cosicchè se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sono queste coordinate il valore di quel doppio rapporto sarà dato da:

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \frac{\lambda_1-\lambda_3}{\lambda_2-\lambda_3} : \frac{\lambda_1-\lambda_4}{\lambda_2-\lambda_4}$$

Inoltre è noto che delle 24 permutazioni differenti a cui danno luogo i quattro elementi a b c d soltanto sei danno rapporti anarmonici distinti, mentre le altre 18 danno rapporti uguali tre a tre a uno dei sei precedenti; i quali alla lor volta dipendono tra di loro in modo che dal valore di uno di essi possono ricavarsi facilmente i valori dei cinque rimanenti.

I sei rapporti anarmonici distinti sono:

α) $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4), (\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_3), (\lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4), (\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_2), (\lambda_1\lambda_4\lambda_2\lambda_3), (\lambda_1\lambda_4\lambda_3\lambda_2)$

e se si pone $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \mu$ si ha:

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \mu \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_3) = \frac{1}{\mu}$$
$$(\lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4) = 1-\mu \qquad (\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_2) = \frac{1}{1-\mu}$$
$$(\lambda_1\lambda_4\lambda_2\lambda_3) = \frac{\mu-1}{\mu} \qquad (\lambda_1\lambda_4\lambda_3\lambda_2) = \frac{\mu}{\mu-1}$$

Dalle uguaglianze precedenti segue che, in generale, i sei rapporti anarmonici α) sono veramente distinti fra di loro; ma

può avvenire benissimo che due di essi o più diventino uguali.

Supponiamo per es. che si voglia:

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_3)$$

bisognerà che sia

$$\mu = \frac{1}{\mu} \quad \text{ossia} \quad \mu^2 = 1 \quad \mu = \pm 1$$

Se $\mu = +1$ ossia $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = +1$ si verifica facilmente che due di queste coordinate, e quindi anche gli elementi corrispondenti devono coincidere: se $\mu = -1$ ossia $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = -1$ si dice che il rapporto anarmonico $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)$ è armonico. Nel primo caso il 1° e il 2° dei sei rapporti anarmonici α) sono uguali ad 1, il 3° e il 5° si riducono a zero, il 4° e il 6° diventano ∞; nel secondo il 1° e il 2° sono uguali a -1, il 3° e il 5° sono uguali a 2, il 4° e il 6° a $1/2$ - Cosicchè risulta in particolare da ciò che se quattro elementi d'una forma ordinati in un cert' ordine danno un rapporto armonico, lo danno ancora permutandoli in altri sette modi differenti; e che se ordinati in un modo, danno un rapporto anarmonico uguale a 2 o a $1/2$ possono anche disporsi convenientemente -

mente in modo da dare un rapporto armonico.

Supponiamo invece che si voglia:

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = (\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_2):$$

bisognerà che sia

$$\mu = \frac{1}{1-\mu} \qquad \text{ossia} \qquad \mu^2 - \mu + 1 = 0$$

e quindi μ uguale all'una o altra delle radici cubiche immaginarie (coniugate) dell'unità negativa, come si vede osservando che

$$\mu^2 - \mu + 1 = \frac{\mu^3+1}{\mu+1}$$

Indicando con α e β queste radici si ha evidentemente:

$$\alpha + \beta = 1 \qquad \alpha\beta = 1$$

quindi se poniamo $\mu = \alpha$ sarà ordinatamente:

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4) = \alpha \qquad (\lambda_1\lambda_2\lambda_4\lambda_3) = \beta$$
$$(\lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4) = \beta \qquad (\lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_2) = \alpha$$
$$(\lambda_1\lambda_4\lambda_2\lambda_3) = \alpha \qquad (\lambda_1\lambda_4\lambda_3\lambda_2) = \beta$$

e siccome un doppio rapporto si dice equianarmonico se è uguale ad una radice cubica immaginaria dell'unità negativa, così abbiamo il teorema:

"Se quattro elementi d'una forma fondamentale di prima specie ordinati

in un certo modo danno un rapporto equianarmonico, essi lo daranno tale anche se ordinati in un altro modo qualunque. –

Dalla definizione stessa segue che il caso del rapporto equianarmonico non può mai darsi considerando elementi reali d'una forma, poichè a elementi reali corrispondono valori reali di λ, e quindi valori reali per il loro rapporto anarmonico.

Un esempio di rapporto equianarmonico ci è fornito dalla considerazione d'una certa proiettività ciclica. (1) cioè d'una

(1) Una proiettività si dice ciclica quando avvenga che ad n elementi dell'una forma

$$x_1 \; x_2 \quad x_{n-1} \; x_n$$

corrisponda una sostituzione circolare dei medesimi

$$x_2 \; x_3 \quad x_n \; x_1$$

è evidente che tale proiettività ripetuta n volte dà l'identità; di più se si prendono elementi

$$y_1 \; y_2 \quad y_{n-1} \; y_n$$

tali che ognuno sia il corrispondente

Disp.ª 11.ª

proiettività tale che agli elementi a, b, c di una delle due forme corrispondano gli elementi $b\ c\ a$ della seconda, ottenuti dai primi mediante una sostituzione circolare. Supponendo che le due forme sieno sovrapposte. Queste tali forme proiettive non hanno elementi uniti reali; ma se indichiamo con u la coordinata immaginaria di uno di essi e con $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ le coordinate degli elementi a, b, c si ha, per la corrispondenza stabilita:

$$(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ u) = (\lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_1\ u)$$

e quindi per quello che si è detto innanzi $(\lambda_1, \lambda_2\ \lambda_3\ u)$ è un rapporto equianarmonico.

Tranne che nei casi considerati, i sei

---

da quello che lo precede per la proiettività a questo deve corrispondere una loro sostituzione circolare ossia anche ad y_n deve corrispondere y_1; infatti chiamiamo W il corrispondente di y_n e ripetiamo n volte la proiettività; allora nella proiettività risultante che è un'identità ad y_1 viene a corrispondere W; e quindi $W = y_1$. c.v.d.

rapporti anarmonici α) non possono in nessun altro caso coincidere fra di loro due a due o tre a tre.

In una forma di 2ª specie, per es. per fissar le idee, in un piano punteggiato la posizione di un punto è individuata da una coppia di numeri x, y (coordinate cartesiane) o dai rapporti di tre numeri $x_1\ x_2\ x_3$, detti le coordinate omogenee di quel punto.

Così definiremo nel piano i punti immaginari come quelli corrispondenti a valori complessi delle coordinate $x_1\ x_2\ x_3$.

Due punti immaginari $Y \equiv y_i$, $Z \equiv z_i$ $(i = 1, 2, 3)$ li diremo coniugati quando i numeri complessi che ne rappresentano le coordinate sono numeri complessi coniugati, o ciò che fa lo stesso quando i primi membri delle loro equazioni in coordinate di rette

$$y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3 = 0$$
$$z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3 = 0$$

sono espressioni immaginarie coniugate.

Dopo ciò è ovvio cosa intendiamo

per rette e piani immaginari e immaginari coniugati nel piano rigato e nella stella di raggi e di piani — e per ciò non ci fermeremo più oltre su questo_ solo ricorderemo che, nel piano punteggiato e rigato:

"Due rette immaginarie coniugate si incontrano in un punto reale".

"Due punti immaginari coniugati sono congiunti da una retta reale" e che nella stella di raggi e di piani:

"Due rette immaginarie coniugate sono contenute in un piano reale".

"Due piani immaginari coniugati si segano in una retta reale.

Chiameremo conica il luogo dei punti del piano le cui coordinate (reali o complesse) soddisfano a un'equazione omogenea di 2° grado:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2$$

e supporremo sempre che i coefficienti $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{23}$ siano reali.

Da ciò segue che se una conica contiene un punto immaginario essa contiene anche il punto immaginario

coniugato.

Il primo membro dell'equazione della conica quando facciasi la convenzione di porre $a_{ik}=a_{ki}$ $(i, k=1, 2, 3)$ può scriversi più brevemente $\Sigma a_{ik}x_i x_k$ e l'equazione stessa può scriversi:

$$\Sigma a_{ik}x_i x_k=0$$

Nella forma di 3ª specie un elemento (punto o piano) è fissato nella sua posizione da una terna di numeri x, y, z (u, v, w) coordinate cartesiane o plückeriane o dai rapporti di quattro numeri $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ $(\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4)$ detti coordinate omogenee dell'elemento. —

I punti e i piani immaginari nello spazio si otterranno come i punti e i piani corrispondenti a valori complessi delle x o delle ξ: e due punti o due piani immaginari, saranno detti coniugati quando avvenga che le coordinate corrispondenti siano numeri complessi coniugati; oppure il che fa lo stesso, quando i primi membri delle loro equazioni in coordinate di piani o di punti, sono delle espressioni complesse coniugate.

Una retta nello spazio può considerarsi come intersezione di due piani o come congiungente di due punti - considerandola per es: come intersezione di piani noi avremo una retta immaginaria nel caso che si tratti dell' intersezione di un piano reale con un piano immaginario, o di due piani ambedue immaginari:

Nel primo caso se la retta immaginaria r è commune ai piani

$$u = 0$$
$$v + iw = 0$$

dove u, v, w sono funzioni lineari delle x, bisognerà considerare come sua coniugata la retta

$$u = 0$$
$$v - iw = 0$$

e allora avremo nel piano $u = 0$ due rette immaginarie le cui equazioni nel piano stesso sono espressioni complesse coniugate. In altri termini noi otterremo nuovamente la specie di rette immaginarie coniugate già considera-

te, aventi un punto reale e un piano reale a commune.

Se invece la retta immaginaria r è commune ai piani ambedue immaginarii

$$u + iv = 0$$
$$\omega + i\theta = 0$$

considerando come sua coniugata la retta r' commune ai piani

$$u - iv = 0$$
$$\omega - i\theta = 0$$

si avrà che in generale r ed r' non hanno alcun punto a commune. Infatti se ciò avvenisse dovrebbe contemporaneamente essere per uno stesso sistema di valori delle x

$$u + iv = 0 \qquad \omega + i\theta = 0$$
$$u - iv = 0 \qquad \omega - i\theta = 0$$

ossia separatamente

$$u = 0 \quad v = 0 \quad \omega = 0 \quad \theta = 0$$

e quindi i quattro piani rappresentati da quelle equazioni passerebbero per uno stesso punto reale, il che in generale non avviene.

Ma vi ha di più: se questa condizione fosse verificata, si potrebbero trovare quattro numeri a, b, c, d non tutti nulli soddisfacenti alla relazione identica:

$$bu + av + d\omega + c\theta = 0$$

e quindi sarebbe reale il piano

$$(a+ib)(u+iv) + (c+id)(\omega+i\theta) = 0$$

passante evidentemente per l'intersezione dei due:

$$u+iv=0 \qquad \omega+i\theta=0$$

Allora la retta r comune a questi due piani immaginarî potrebbe anche considerarsi come intersezione di uno di essi con un piano reale, e si ricadrebbe così nel primo caso.

Risulta da ciò che nello spazio insieme alla specie di rette immaginarie coniugate di cui ci siamo già occupati nel piano, esiste anche una specie di rette immaginarie coniugate sghembe fra di loro. - Le prime si dicono immaginarie coniugate di prima specie, le altre, rette immaginarie coniugate di seconda specie.

Diamo ora qualche rapido accenno

della via seguita dallo Staudt per introdurre nella geometria gli elementi immaginarii. -

Egli chiamava coppia di punti (piani) immaginarî coniugati una involuzione rettilinea (un fascio di piani involutorio) privo di punti (piani) doppii, e chiamava coppia di rette immaginarie coniugate di prima specie un fascio involutorio di raggi privo di raggi doppii. Con ciò egli veniva a considerare volta per volta una coppia di elementi coniugati come un tutto a sè: e almeno dalla definizione data non appariva immediatamente come si potesse far distinzione fra elemento e elemento. Ma siccome due forme proiettive involutorie prive di elementi doppii sono concordanti, cosicchè possono considerarsi come percorse da due elementi corrispondenti entrambi in un senso o entrambe nell'altro, così associando i due sensi ai due elementi immaginarii coniugati veniva a distinguerli, e poteva considerarli separatamente.

Disp^a. 12^a.

Infine definiva come coppia di rette immaginarie coniugate, di 2ª specie una involuzione priva di rette doppie, stabilita fra le rette di una serie rigata.

Una definizione più simmetrica di queste rette può darsi per mezzo di un'omografia biassiale involutoria priva di assi reali.

Allora su ogni serie rigata determinata dalla congiungente di tre coppie qualunque di punti corrispondenti nell'omografia, questa omografia determina un'involuzione priva di raggi doppi. Cosicchè si vede che due tali rette possono in infiniti modi definirsi secondo la definizione dello Staudt.

Ritornando alla nostra trattazione analitica, chiameremo quadrica il luogo dei punti dello spazio le cui coordinate (reali o complesse) soddisfano all'equazione omogenea di 2º grado:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{14}x_1x_4+2a_{23}$$
$$+2a_{24}x_2x_4+2a_{34}x_3x_4=0$$

in cui supponiamo che i coefficienti siano tutti numeri reali.

Da ciò segue che se un punto giace sulla quadrica ad essa appartiene anche il punto immaginario coniugato.

Facendo la convenzione di porre $a_{ik}=a_{ki}$ $(i,k=1,2,3,4)$ l'equazione della quadrica può scriversi più brevemente così:

$$1)\quad \sum_k \sum_i a_{ik}x_i x_k = 0$$

L'equazione 1) può anche esser soddisfatta da soli valori complessi delle x: come per es. l'equazione

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0\ ;$$

allora si suol dire che la quadrica rappresentata dall'equazione 1) è totalmente immaginaria: per noi, ora che abbiamo introdotti nel nostro studio anche gli elementi immaginari questo caso non sarà un caso d'eccezione.

Dalla Geometria Analitica risulta che le quadriche rappresentate dall'equazione 1) coincidono colle quadriche da noi studiate fin qui, con metodi puramente geometrici, tranne, come è evidente le quadriche totalmente immaginarie. Facciamo vedere però come anche per queste valgono le proprietà dimostrate per quell'altre; per questo sarà necessario stabilire in modo tutt'affatto generale la teoria della polarità.

Siano $X \equiv x_i$ $Y \equiv y_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ due punti qualunque dello spazio: le coordinate di ogni altro punto della retta XY si otterranno facendo variare λ nell'espressione $x_i + \lambda y_i$ da $-\infty$ a $+\infty$; in particolare per $\lambda = 0$ si otterrà il punto X, per $\lambda = \infty$ il punto Y.

Poste le cose in tal modo, la ricerca dei punti comuni alla quadrica rappresentata dall'equazione 1) e alla retta XY si effettuerà facilmente ponendo $x_i + \lambda y_i$ al posto di x_i nella 1) e ricavando i valori di λ che soddisfano all'equazione in λ che così veniamo a costruire.

L'equazione in λ è

$$\sum_{ik} a_{ik} (x_i + \lambda y_i)(x_k + \lambda y_k) = 0$$

ossia, sviluppando e notando che $a_{ik} = a_{ki}$

$$2) \quad \Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda \Sigma a_{ik} x_i y_k + \lambda^2 \Sigma a_{ik} y_i y_k = 0$$

dunque i valori λ_1 e λ_2 di λ (reali distinti o coincidenti, o immaginari coniugati) che soddisfano a questa equazione di 2° grado sono appunto i valori di λ che ci danno le coordinate dei punti richiesti.

Ciò prova ancora una volta che una retta qualunque dello spazio incontra una quadrica sempre in due punti che possono essere reali, distinti o coincidenti, o immaginari coniugati.

Inoltre, quando siansi definiti per punti coniugati rispetto a una quadrica due punti che siano separati armonicamente dalle intersezioni della loro congiungente colla quadrica, l'equazione 2) ci fornisce un criterio analitico semplice per stabilire se i due punti X e Y sono o no coniugati rispetto alla quadrica rappresentata dall'equazione 1). Infatti se X e Y sono coniugati, dovrà essere uguale a -1 il rapporto anarmonico che questi due punti formano coi punti d'intersezione della quadrica colla retta XY. Tale rapporto anarmonico è dato dal rapporto anarmonico dei valori di λ in quei quattro punti, cioè è dato da:

$$(0 \infty \lambda_1 \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

dunque deve essere per le nostre ipotesi

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1$$

o in altri termini deve essere zero la somma delle radici dell'equazione 2) - Perciò, occorre che sia zero il coefficiente del secondo termine, ovvero che sia

$$\Sigma a_{ik}\, x_i\, y_k = 0$$

Viceversa se la condizione precedente è soddisfatta i punti X ed Y sono coniugati rispetto alla quadrica, quindi la relazione soprascritta esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè due punti X ed Y siano coniugati rispetto alla quadrica rappresentata dall'equazione 1) -

Ora supponiamo di mantenere fisse le coordinate di X e di chiamarle x_i' e di prendere poi tutti i possibili valori delle y che soddisfano all'equazione precedente: otterremo in tal modo tutti e soli i punti coniugati di X rispetto alla quadrica, i quali poichè colle loro coordinate soddisfano tutti a un'equazione lineare, costituiscono un piano - quello appunto che si chiama piano polare di X. Mettendo al posto di x_i, x_i' e al posto delle y le coordinate correnti nell'espressione $\Sigma a_{ik}\, x_i\, y_k$ si ha subito l'equazione del piano polare di X.

$$3) \quad \sum_{ik} a_{ik}\, x_i'\, x_k = 0$$

In questa equazione 3) non compariscono che i coefficienti della 1) e le coordinate del punto X: se dunque questo punto è reale, anche il piano rappresentato dalla 3) è reale perchè le a_{ik} sono reali; e abbiamo il teorema che:

"Il piano polare di un punto reale rispetto ad una quadrica rappresentata da un'equazione a coefficienti reali, è reale anche se la quadrica è totalmente immaginaria."

Riprendiamo l'equazione 2) che ci dà le intersezioni della retta XY colla quadrica e supponiamo che il punto $X \equiv x_i'$ sia sulla quadrica, allora sarà:

$$\Sigma a_{ik}\, x_i'\, x_k' = 0$$

e l'equazione 2) si ridurrà all'altra

$$2\lambda \Sigma a_{ik}\, x_i'\, y_k + \lambda^2 \Sigma a_{ik}\, y_i\, y_k = 0$$

di cui una radice è nulla, e dà come era da prevedersi il punto $X \equiv x_i'$, e l'altra è data da:

$$\lambda = -2\,\frac{\Sigma a_{ik}\, x_i'\, y_k}{\Sigma a_{ik}\, y_i\, y_k}$$

Se noi vogliamo pertanto che la retta

ta XY abbia a comune colla quadrica un solo punto dovrà essere nulla anche questa radice, ossia dovrà essere:

$$\Sigma a_{ik}\, x'_i\, y_k = 0\ ;$$

e viceversa è evidente che se le coordinate del punto Y soddisfano a questa relazione, la retta XY ha un solo punto a comune colla quadrica, ossia le è tangente. Da ciò segue ponendo nella relazione precedente invece delle y le coordinate correnti che

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x'_i\, x_k = 0$$

è l'equazione del piano tangente alla quadrica nel punto X.

La somiglianza di questa equazione coll'equazione 3) del piano polare di un punto $X \equiv x'_i$ mostra che il piano polare di un punto della quadrica è il piano tangente in quel punto alla superficie, e che quindi contiene il suo polo. Viceversa se un punto giace nel suo piano polare, esso è un punto della quadrica. Infatti se il punto $X \equiv x'_i$ giace nel suo piano polare deve essere

$$\Sigma a_{ik}\, x'_i\, x'_k = 0$$

ossia le coordinate x'_i devono soddisfare all'equazione 1) e il punto X giace sulla quadrica da essa rappresentata.

Notiamo finalmente come il teorema fondamentale di reciprocità risulta immediatamente dall'ispezione dell'equazione del piano polare.

Se coordinate ξ di un piano essendo date come si fa dai coefficienti dell'equazione del piano in coordinate di punti, saranno le coordinate del piano polare di x'_i:

$$\alpha)\ \xi'_1 = \Sigma a_{i1}\, x'_i \quad \xi'_2 = \Sigma a_{i2}\, x'_i\ , \quad \xi'_3 = \Sigma a_{i3}\, x'_i\ , \quad \xi'_4 = \Sigma a_{i4}\, x'_i$$

Queste somiglianze mentre mostrano che dato un punto è determinato pienamente il suo piano polare, mostrano ancora come dato un piano è determinato pienamente il suo polo, a meno che la quadrica non sia un cono. Infatti se la quadrica non è un cono, il discriminante dell'equazione 1) è differente da zero, e quindi si può risolvere il sistema d'equazioni α) considerando come note le ξ' e come incognite le x. Risolvendolo si trova

$$\sigma x_1 = \Sigma A_{1i}\, \xi'_i\ , \ \sigma x'_2 = \Sigma A_{2i}\, \xi'_i\ , \ \sigma x'_3 = \Sigma A_{3i}\, \xi'_i\ , \ \sigma x'_4 = \Sigma A_{4i}\, \xi'_i$$

dove σ è uguale al valore del determinante della 1) e A_{ik} è il complemento algebrico del a_{ik} nel determinante stesso.

Adesso se il punto x_i' giace nel suo piano polare ξ_i' dovrà essere non solo

$$\xi_1' = \Sigma a_{i1} x_i' \,,\quad \xi_2' = \Sigma a_{i2} x_i' \,,\quad \xi_3' = \Sigma a_{i3} x_i' \,,\quad \xi_4' = \Sigma a_{i4} x_i'$$

ma anche

$$\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3' + \xi_4' x_4' = 0$$

e quindi per la coesistenza di queste cinque relazioni fra le quattro quantità x_i' dovrà essere

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \xi_1' \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \xi_2' \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \xi_3' \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \xi_4' \\ \xi_1' & \xi_2' & \xi_3' & \xi_4' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

L'annullarsi di questo determinante esprime dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè un piano di coordinate ξ_i contenga il suo polo, ossia tocchi la quadrica: pertanto, ponendo al posto delle ξ_i le coordinate correnti e sviluppando si ha l'equazione dell'inviluppo di 2^a classe formato dai piani tangenti della quadrica rappresentata dall'equazione 1)-

Essa è evidentemente:

$$\sum_{ik} A_{ik}\, \xi_i \xi_k = 0$$

Partendo invece che dall'equazione della quadrica in coordinate di punti, da quella dell'inviluppo di 2^a classe in coordinate di piani avremmo potuto evidentemente fare tutte le considerazioni correlative a quelle fatte sin qui, e saremmo giunti poi come risultato finale all'equazione della quadrica in coordinate di punti -

Sappiamo dalla geometria analitica che tutti i circoli di un piano passano per due punti immaginari coniugati posti sulla retta all'infinito del piano, chiamati punti ciclici: e che dopo l'introduzione di tali punti l'angolo α di due rette qualunque si può definire come il logaritmo neperiano del rapporto anarmonico k delle due rette date colle rette che dalla loro intersezione proiettano i punti ciclici, diviso per 2i. - (teorema di Laguerre) per modo che si ha:

$$\alpha = \frac{1}{2i}\, lg\, k$$

Se α è un angolo retto deve essere

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2i}\, lg\, k \,,\quad lg\, k = i\pi \,,\quad k = e^{i\pi} = -1$$

se cioè due rette sono ortogonali, esse formano gruppo armonico colle rette che dal loro punto d'intersezione proiettano i punti ciclici, e quindi i due punti ciclici possono anche considerarsi come i punti doppî dell'involuzione secondo cui la retta all'infinito taglia un fascio ortogonale qualunque.

Supponiamo ora che un piano muovendosi generi lo spazio, e consideriamo il luogo descritto dai suoi punti ciclici.

Notiamo che questo luogo appartiene a tutte le sfere dello spazio, perché se si taglia una sfera qualunque con un piano arbitrario π, il circolo sezione passerà pei punti ciclici di π e questi si troveranno sulla sfera. Se allora noi consideriamo la più generale equazione di una sfera in coordinate omogenee

$$x^2+y^2+z^2+W(ax+by+cz+dW)=0$$

dovendo i punti del nostro luogo soddisfare a questa equazione qualunque siano i coefficienti a, b, c, dovrà per essi essere separatamente

$$x^2+y^2+z^2=0 \qquad W=0$$

Il loro luogo è dunque completamente immaginario, ma essendo determinato da equazioni a coefficienti reali gode della proprietà che se un punto (immaginario) si trova su di esso, esso contiene anche il punto (immaginario) coniugato. A questo luogo comune a tutte le sfere dello spazio si dà il nome di assoluto o di circolo immaginario all'infinito (Poncelet) e lo indicheremo sempre nelle nostre ricerche ulteriori con C_∞. Notiamo fin d'ora che, inversamente, se una quadrica passa per C_∞ è una sfera: in tal caso infatti tutte le sue sezioni sono circolari.

Supponiamo ora di avere due rette ortogonali p e q i cui punti all'infinito siano P_∞ e Q_∞: P_∞ e Q_∞ saranno coniugati armonici rispetto a C_∞ # nei due punti ciclici, e questi separano armonicamente P_∞ e Q_∞.

Da ciò segue che se la retta q si muove rimanendo sempre in un piano π perpendicolare alla retta p, il punto Q_∞ si muoverà sulla retta all'infinito di π, e rimarrà sempre coniugato

infatti un piano passante per P_∞ e Q_∞ sega C_∞ ....

armonico di P_∞ rispetto a C_∞, ossia la retta all'infinito di π sarà polare del punto all'infinito di p rispetto a C_∞.

Segue ancora che se due piani σ e σ' sono ortogonali, le loro rette all'infinito s_∞ ed s'_∞ sono coniugate rispetto a C_∞. Infatti le rette di σ' # perpendicolari al piano σ; quindi il loro punto all'infinito che è un punto di s_∞ deve essere polo di s'_∞ rispetto a C_∞, ossia le due rette s_∞ ed s'_∞ devono essere coniugate rispetto a C_∞.

Le inverse di questi teoremi sono evidentemente vere, e perciò ciascuno di essi da la condizione necessaria e sufficiente perchè due rette, due piani o una retta e un piano siano fra di loro perpendicolari.

Un'importante applicazione di tutto ciò può farsi nella ricerca degli assi di una quadrica che ora possiamo fare in modo più rapido che non precedentemente.

Anzitutto è chiaro che in una sfera ogni diametro è un asse.

Infatti in tal caso la polarità de-

\# perpendicolari all'intersezione $\sigma\sigma'$ sono....

terminata nel piano all'infinito da C_∞ è una sezione della stella di elementi coniugati determinata intorno al suo centro da una sfera qualunque dello spazio (vedi pag. β e seg.) quindi le traccie all'infinito di un diametro della sfera e del suo piano diametrale coniugato saranno nelle relazioni di polo a polare rispetto a C_∞ e perciò il diametro e il suo piano diametrale coniugato saranno ortogonali.

Ora consideriamo il caso in cui la quadrica abbia il centro a distanza finita (genere dell'ellissoide e dell'iperboloide) e sia S_∞ la conica secondo cui il piano all'infinito sega la quadrica. C_∞ ed S_∞ avranno a comune quattro punti immaginari $A\,B\,A'B'$ di cui due saranno coniugati ai rimanenti e che costituiranno un quadrangolo inscritto tanto in C_∞ quanto in S_∞. Il triangolo diagonale $P\,Q\,R$ di questo quadrangolo, avendo posto $AA'\,BB' \equiv P$, $AB\,A'B' \equiv Q$, $AB'\,A'B \equiv R$, sarà un triangolo autopolare comune a C_∞ ed S_∞ ed avrà tutti i suoi vertici reali; perchè essi o, come P, sono intersezioni di rette reali; o come Q ed R, sono intersezioni di rette immaginarie coniugate. Ma il triangolo PQR come autopolare di S_∞ è anche autoconiugato rispetto alla quadrica f, dunque il triedro che si ottiene proiettando dal centro O della quadrica il triangolo PQR è un suo triedro autoconiugato. Esso triedro è anche trirettangolo, perchè il triangolo PQR è un triangolo autopolare di C_∞ - dunque i tre spigoli di questo triedro sono i tre assi della quadrica. Dei quattro punti comuni a C_∞ ed S_∞ alcuni possono coincidere: e se si osserva che due punti immaginarii coniugati non possono coincidere perchè altrimenti coinciderebbero con un punto reale, ne viene che l'unico caso particolare da considerare dopo quello generale già considerato è quello in cui A coincida con B e quindi A' con B'; in tal caso C_∞ ed S_∞ sono come si suol dire bitangenti, ossia ammettono la medesima tangente tanto in A quanto in A'. Queste tangenti sono rette immaginarie coniugate, perchè i punti di contatto sono

coniugati e le coniche C_∞, S_∞ sono rappresentate da equazioni a coefficienti reali - quindi il loro punto d'incontro Q sarà reale ed avrà per polare rispetto a C_∞ ed S_∞ la retta reale AA' - Di più due punti qualunque della AA' H e K coniugati rispetto a una delle coniche saranno coniugati anche rispetto all'altra, quindi le due coniche avranno a comune infiniti triangoli autopolari analoghi a QHK - Ciò dimostra, chiamando sempre O il centro della quadrica, che OQ è un asse a cui è coniugato il piano OAA' - che ogni diametro contenuto nel piano OAA' è un asse e che ogni piano passante per OQ è un piano di simmetria - Inoltre si osservi che ogni piano passante per AA' (normale quindi alla retta OQ) sega la quadrica in una conica passante per i due punti ciclici A ed A'; dunque questa conica è un cerchio, e la quadrica è di rotazione essendo OQ l'asse di rotazione.

Trattiamo ora il caso delle quadriche col centro a distanza infinita (genere del paraboloide).

La sezione S_∞ che il piano all'infinito produce nella quadrica è allora una coppia di rette reali (caso del paraboloide iperbolico) o immaginarie coniugate (caso del paraboloide ellittico) incrocianteisi nel centro della superficie - e se manteniamo le notazioni precedenti, del triangolo diagonale PQR un vertice sarà il centro della quadrica - (sarà P nel caso del paraboloide iperbolico perchè allora la sezione S_∞ si compone di una coppia di rette reali, sarà Q o R nel caso di quello ellittico) quindi tutti i diametri della quadrica come passanti pel centro saranno perpendicolari ai piani passanti pel lato opposto a quel vertice - Allora preso un piano qualunque π passante per questo lato e differente dal piano all'infinito se ne costruisca il polo e si congiunga col centro; questo diametro sarà coniugato e ortogonale al piano π e quindi sarà l'asse del paraboloide -

Vediamo se può darsi che un paraboloide sia di rotazione.

Se il paraboloide è iperbolico i quattro punti $A\,A'\,B\,B'$ sono tutti distinti, perchè se A coincidesse con B (non potendo coincidere con A'), A' coinciderebbe con B' e la quadrica avrebbe a comune col piano all'infinito una sola generatrice contrariamente a quanto sappiamo.

Se il paraboloide è ellittico, supponiamo che Q sia il centro e che quindi AB ed $A'B'$ siano le rette che esso ha a comune col piano all'infinito - e supponiamo che A venga a coincidere con B ed A' con B', ossia che le rette QA e QA' siano tangenti a C_∞ in A ($\equiv B$) e in A' ($\equiv B'$). Applicando la costruzione generale si troverebbe l'asse del paraboloide ma si avrebbe di più che ogni piano passante per la polare di Q rispetto a C_∞ ossia (in questo caso) per la retta AA', sarebbe normale all'asse non solo ma segherebbe anche il paraboloide in un circolo perchè la sezione contiene i punti A ed A' -

Dunque se un paraboloide è di rotazione esso è certamente ellittico.

Tornando ora al caso delle quadriche a centro, osserviamo che colle ricerche precedenti abbiamo dimostrato che una quadrica ha in generale un solo triedro autoconiugato trirettangolo col vertice nel centro, e che quando ne ha infiniti, questi hanno tutti uno spigolo a comune. Noi vogliamo far vedere con delle semplici considerazioni, che se una quadrica ha due triedri autoconiugati trirettangoli col vertice nel centro perfettamente distinti, li avrà tutti trirettangoli e sarà una sfera.

Perciò presi in un piano due coniche qualunque C ed S (adoperiamo queste notazioni perchè poi ci occorre applicare al piano all'infinito e a C ed S le considerazioni affatto generali che ora facciamo) - Si costruisca di un punto M la polare m rispetto a C e poi della retta m si costruisca il polo M' rispetto ad S: similmente presa una retta qualunque r si costrui-

sca la polare r' rispetto ad S del polo di r rispetto a C: in questo modo i punti M M' e le rette r, r' del piano si corrisponderanno in una collineazione perchè due sistemi piani reciproci a un terzo sono collineari fra di loro. Allora sia PQR il triangolo diagonale del quadrangolo inscritto comune a C ed S: i vertici P, Q, R e i lati opposti QR, RP, PQ saranno i punti e i raggi uniti di questa collineazione - Se invece le coniche C ed S sono bitangenti in A e in A' allora la collineazione considerata diviene un'omologia con la retta AA' per asse e col punto Q per centro, e le coniche C ed S hanno infiniti triangoli autopolari comuni aventi tutti però un vertice nel punto Q.

Da ciò risulta il teorema:

"Se due coniche C ed S hanno due triangoli autoconiugati comuni perfettamente distinti (cioè che non abbiano nessun vertice e nessun lato a comune) sono coincidenti".

Sia ABC uno dei triangoli autopolari comuni a C ed S: i suoi vertici e i suoi lati saranno punti e raggi uniti nella collineazione precedente. – Poi si prenda a considerare un lato m dell'altro triangolo autopolare comune: questo non potendo coincidere con nessuna delle rette AB, BC, CA potrà in casi particolari passare per uno dei punti A, B, C ma non mai per due. Ad ogni modo m incontrerà uno dei lati per es. BC in un punto D differente da A e da C: la retta BC è unita come la retta m nella solita collineazione, dunque anche il punto D è unito, e per conseguenza poichè tre punti della retta BC sono uniti, saranno uniti tutti. Ed ora o m non passa per A e allora sega in punti distinti da A. Anche le rette AB, AC e quindi anche queste si compongono di punti tutti uniti, o m passa per A e allora noi potremo ricorrere a un altro lato n del secondo triangolo. Questo lato non potrà anch'esso passare per A perchè allora i due triangoli avrebbero un vertice a

comune, e quindi dovrà incontrare almeno uno dei lati AB e AC in un punto distinto da A e C. – Ciò porta che, in ogni caso, nella collineazione considerata si hanno più di una punteggiata e di un fascio uniti – e quindi la collineazione è identica e le due coniche C ed S coincidono.

Adesso si osservi che l'esistenza in una quadrica di due triedri autoconiugati trirettangoli col vertice nel centro e totalmente distinti, porterebbe nel piano all'infinito l'esistenza di due triangoli autopolari comuni a C_∞ ed S_∞ totalmente distinti – quindi C_∞ ed S_∞ coinciderebbero e la quadrica sarebbe una sfera. Andiamo ora ad occuparci dei piani che possono produrre sezioni circolari in una quadrica.

Supponiamo dapprima la quadrica col centro a distanza finita e siano, mantenendo le notazioni precedenti, $A\,B\,A'B'$ i punti che essa ha a comune con C_∞. Evidentemente le sei rette AA', BB', AB, $A'B'$, AB', $A'B$ sono assi di altrettanti fasci di piani che producono sezioni circolari nella quadrica poichè la conica sezione di uno qualunque di questi piani passa per due punti ciclici. Ma i piani dei quattro ultimi fasci sono tutti immaginari perchè un piano reale incontra il piano all'infinito in una retta reale: dunque possiamo concludere che nel caso di una quadrica a centro vi sono due fasci di piani paralleli reali che la segano lungo circoli. Anzi possiamo aggiungere che questi piani sono tutti paralleli a un certo asse della quadrica, poichè essi contengono tutti il punto all'infinito $P = AA' - BB'$ dell'asse OP: cosicchè per quest'asse passano due piani seganti la quadrica in circoli: precisamente essi sono i piani OAA', OBB'.

Se invece la quadrica ha il centro a distanza infinita ed è un paraboloide iperbolico allora delle sei congiungenti AA', BB', AB, $A'B'$, AB', $A'B$ le prime due reali sono le generatrici del paraboloide incrociantesi nel centro,

e quindi i piani passanti per esse danno per sezioni coniche degeneranti in coppie di rette. Restano a dare sezioni circolari i piani dei rimanenti quattro fasci AB, $A'B'$, AB', $A'B$, ma questi come si sa sono tutti immaginari.

La cosa cangia d'aspetto se la quadrica è un paraboloide ellittico: allora le due rette reali AA', BB' non sono generatrici del paraboloide e quindi esse sono assi di fasci di piani reali seganti la superficie in circoli. Delle altre quattro rette AB, $A'B'$, AB', $A'B$, due coniugate saranno le generatrici del paraboloide e daranno coi piani passanti per esse sezioni degeneranti in coppie di rette: le altre due daranno fasci di piani immaginarii seganti la quadrica lungo circoli.

In generale in ogni fascio di piani producenti sezioni cicliche, esistono due piani tangenti alla quadrica: i loro punti di contatto si chiamano ombelichi: e appunto del me-

mero di questi e della loro natura che noi vogliamo occuparci.

Perciò è necessario che noi premettiamo i teoremi seguenti:

"Su di una quadrica a punti ellittici esistono ∞^2 rette immaginarie di prima specie, e non ne esistono affatto di seconda specie.

In un punto reale A della quadrica si conduca il piano tangente α e si seghi con questo la superficie: la sezione, poichè la quadrica è a punti ellittici consterà di una coppia di rette immaginarie coniugate di prima specie incrociantesi in quel punto. - Di più una di tali rette non potrà passare per un ulteriore punto reale della quadrica perchè allora essa contenendo due punti reali sarebbe reale; e una quadrica a punti ellittici non contiene rette reali. Dunque le rette immaginarie di prima specie giacenti sulla quadrica costituiscono un'infinità uguale a quella dei suoi punti, cioè una doppia infinità. -

Di più non vi sono rette immaginarie di seconda specie. Se ci fosse una tal retta r vi sarebbe anche la sua coniugata r', ed r ed r' non si incontrerebbero. Preso allora un punto reale A della quadrica i piani immaginari coniugati Ar ed Ar' si incontrerebbero in una retta reale avente a comune colla quadrica i punti ov'essa si appoggia alle r, r' e il punto A, e quindi in una retta reale giacente per intero sulla quadrica - il che è assurdo -

Invece

"Su di una quadrica a punti iperbolici esistono ∞^2 rette immaginarie di seconda specie e non ne esistono affatto di prima specie"

Anzitutto è evidente che non contengono rette immaginarie di prima specie. Infatti se vi fosse una tal retta r vi sarebbe anche la sua coniugata r' e per il punto reale $A \equiv rr'$ passerebbero oltre alle due generatrici reali che passano pei punti d'una quadrica a punti iperbolici anche le altre due r ed r' - il che è assurdo - Adesso osserviamo che se una retta immaginaria di seconda specie r, e quindi anche la sua coniugata r', giace sulla quadrica, r ed r' apparterranno ad uno stesso dei due sistemi di rette della superficie: perchè se A è un suo punto reale, i piani immaginarii coniugati Ar, Ar' si segheranno in una generatrice reale della quadrica appoggiantesi ad r ed r'. Dunque otterremo tutte le rette immaginarie di seconda specie richieste accoppiando in involuzioni ellittiche in tutti i modi possibili le rette dell'uno e dell'altro sistema e ne otterremo il grado di infinità trovando l'ordine d'infinità delle involuzioni ellettiche che si possono stabilire fra le rette di un sistema ossia fra i punti d'una retta dell'altro sistema. Ora un'involuzione di punti dipende da un'equazione bilineare

$$a\lambda\mu + b(\lambda+\mu) + c = 0$$

con due coefficienti indipendenti ed il volere che essa sia ellittica ossia l'imporre che sia

$b^2 - ac < 0$ non scema l'ordine d'infinità: dunque sopra una retta possono costruirsi ∞^2 involuzioni ellittiche e quindi ∞^2 sono le rette immaginarie di seconda specie giacenti sopra una quadrica a punti iperbolici.

Nelle quadriche poi totalmente immaginarie è chiaro che non ci saranno che rette immaginarie di seconda specie.

Coll'aiuto di questi teoremi possiamo ora dimostrare i seguenti altri sulla posizione delle rette polari rispetto ad una quadrica.

"Se una retta reale r taglia la quadrica in due punti reali, la sua polare r' taglia la quadrica in due punti reali o immaginarii coniugati secondochè la quadrica è a punti iperbolici o a punti ellittici."

La retta r seghi in A e B una quadrica a punti iperbolici e piano g, d le rette della superficie passanti per A; g', d' quelle passanti per B: g e g' appartenendo a uno dei due sistemi rigati, d e d' all'altro. I piani gd, g'd' saranno i piani tangenti alla quadrica nei punti A e B, ossia i piani polari di questi punti, e quindi la loro comune intersezione ossia la retta che congiunge i punti gd', g'd sarà la polare r' di r. I punti gd', g'd sono punti reali della superficie dunque la prima parte del teorema resta stabilita.

Se la quadrica è a punti ellittici siano g, g' le sue rette immaginarie coniugate (necessariamente di prima specie) passanti per A, e d, d' quelle passanti per B. - Il piano polare di A è manifestamente il piano gg' e il piano polare di B è dd'. - dunque la loro comune intersezione sarà la retta polare di r. I punti ove questa intersezione incontra la quadrica, come comuni anche alle sezioni della medesima contenute nei piani gg' dd' saranno p. es. gd e g'd' ossia saranno due

punti immaginarii coniugati.

Similmente:

"Se una retta r incontra una quadrica in due punti immaginari coniugati, la sua polare r' la incontrerà in due punti immaginarî coniugati o in due punti reali, secondochè la quadrica è a punti iperbolici o a punti ellittici„

La prima parte è subito provata perchè se la polare r' di r, che incontra la quadrica nei punti immaginarî coniugati A e B, la segasse in punti reali, allora r polare di r' dovrebbe anch'essa segarla in punti reali, contro l'ipotesi.-

Se la quadrica è invece a punti ellittici e sono g e d le rette immaginarie di prima specie passanti per A e g', d' quelle passanti per B, saranno g' d' coniugate di g e d. Il piano polare di A è gd, quello di B è g'd', e la retta polare r' di r sarà la congiungente i punti della quadrica gg', dd'.- reali perchè intersezioni di rette immaginarie coniugate

Ritornando ora alle ricerche e alle notazioni precedenti, osserviamo che nel caso d'una quadrica col centro a distanza finita, gli ombelichi sono dati dai dodici punti di contatto dei dodici piani tangenti condotti alla quadrica per le sei rette AA', BB', AB, A'B', AB', A'B: e prima di occuparci della loro natura, dimostriamo che:

"I dodici ombelichi d'una quadrica a centro, giacciono tre a tre sopra otto rette immaginarie"

Si consideri una delle due rette immaginarie della quadrica passanti per A e si chiami g: questa dovrà sempre incontrare una delle due rette passanti per ciascun altro punto A', B, B', perchè in generale le sezioni fatte con due piani in una quadrica hanno sempre due punti a comune, cioè i punti ove la intersezione dei due piani sega la quadrica. cosicchè abbiamo ottenuto sulla retta g questi tre punti. Essi sono tre ombelichi, perchè se p. es. m è la retta immaginaria della quadrica passante per B e incontrata da g, il piano gm sarà tangente alla quadrica nel punto gm e passerà per AB: dunque il teorema è dimostrato.

"I dodici ombelichi d'una quadrica a centro giacciono quattro a quattro sui tre piani principali"

Infatti i punti di contatto dei piani tangenti alla quadrica condotti p. es. per AA' e BB', che sono quattro ombelichi, giacciono sulle polari di AA' e BB', e queste rette giacciono nel piano polare del punto AA'·BB' ≡ P ossia nel piano principale coniugato all'asse OP, O essendo al solito il centro della quadrica.

Un ombelico sarà reale quando il piano tangente in esso è reale, e un piano reale incontra il piano all'infinito in una retta reale, quindi dobbiamo restringerci volendo considerare gli ombelichi reali, ad esaminare i quattro dati dai piani tangenti passanti per le rette reali AA' e BB', trascu

rando gli altri che saranno certo imma-
ginarii. Siccome poi questi ombelichi
sono anche dati dai punti ove le pola-
ri di AA' e BB' segano la quadrica
così la discussione è presto fatta.

Se la quadrica è:

Un ellissoide o un iperboloide a due falde
AA' e BB' segano la superficie, che è
a punti ellittici, in due punti imma-
ginarii; dunque le loro polari la in-
contrano in punti reali. Si hanno co-
sì quattro ombelichi reali.

Un iperboloide a una falda - AA' e BB'
segano la superficie, che è a punti i-
perbolici, in due punti immaginari,
dunque le loro polari la incontrano
pure in punti immaginarî.

Non si hanno pertanto in questo
caso ombelichi reali.

Un paraboloide ellittico - Le polari di
AA' e BB' segano la superficie che è
a punti ellittici, in punti reali. -
Ma queste polari sono anche due
diametri, e quindi due ombelichi si
confondono col centro a distanza infi-

nita: dunque in questo caso si hanno
due soli ombelichi reali a distanza finita.

Un paraboloide iperbolico - Non si ha alcun
ombelico, perchè, come abbiamo già osser-
vato, in tal caso i piani passanti per
AA' e BB' segano la superficie in co-
niche degeneri perchè allora AA' e
BB' sono rette della quadrica.

Nelle considerazioni fatte finora ab-
biamo sempre escluso il caso che la
quadrica sia un cono: ma eviden-
temente non vi è alcuna difficoltà
a verificare supponendo per sempli-
cità il vertice a distanza finita, che
ogni cono ha in generale tre assi sol-
tanto; e che ne ha infiniti quando è
di rotazione; che vi sono sei fasci di
piani paralleli che lo seghino in cir-
coli, di cui due soltanto reali, e che gli om-
belichi cadono tutti nel vertice.

Adesso noi vogliamo esporre in
breve ciò che s'intende per rette foca-
li di un cono e il modo di determinar-
le - (Magnus)

Una retta che passi pel vertice V

di un cono è asse di un fascio involuto-rio di piani coniugati rispetto al cono, e in questo fascio esisterà in generale una ed una sola coppia di piani coniugati ortogonali. Se avviene che tutte le coppie del fascio sia-no ortogonali allora quella retta si chia-ma una retta focale del cono.

Consideriamo il quadrilatero formato dalle quattro tangenti comuni a C_∞ ed alla conica $\mathcal{L}$ secondo cui il cono ta-glia il piano all'infinito, e sia il qua-drilatero $aa'bb'$, ove i suoi lati a e b sono immaginari coniugati di a' e b'.

Allora se poniamo $aa' \equiv K$, $bb' \equiv M$, $ab \equiv H$, $a'b' \equiv H'$ $ab' \equiv L$, $a'b \equiv L'$, H ed H', L ed L' saranno punti immaginarii coniugati, K ed M saranno reali_ Quin-di sarà reale il triangolo diagonale del quadrilatero che ha per lati KM, HH' ed LL'; e si noti che questo triangolo diagonale essendo autopolare rispetto a C_∞ ed S_∞ è la traccia sul piano all'in-finito del triedro formato dai tre assi. Dal punto K per es. partono due tan-genti comuni a C_∞ ed S_∞ dunque l'in-

voluzione delle rette coniugate rispetto a C_∞ passanti per K coincide col fascio in-volutorio delle rette coniugate di S_∞ pas-santi per lo stesso punto; e quindi il fascio involutorio dei piani coniugati rispetto al cono, passanti per VK è orto-gonale, perchè le traccie all'infinito dei piani coniugati sono coniugate rispetto a C_∞.

Il cono, dunque, ha sei rette focali VK, VM, VH, VH', VL, VL'; ma di queste due soltanto sono reali, e cioè VK e VM. Esse giacciono nel piano principale VKM, e siccome K ed M, per una nota pro-prietà del quadrilatero, sono separati armonicamente da HH' ed LL', le rette VK e VM saranno separati armonica-mente dagli assi contenuti nel piano principale VKM. Gli assi sono ortogona-li, dunque:

"Le due rette focali d'un cono sono contenute in un suo piano principale e formano angoli bisecati dagli assi contenuti in quel piano."

Un teorema ovvio poi sulle rette foceli è il seguente:

"Se si sega il cono con un piano perpendicolare a una delle sue rette focali, la conica sezione ha un fuoco nel punto ove il piano sega quella retta."

Infatti l'involuzione di piani coniugati rispetto al cono darà luogo ad un'involuzione di rette coniugate rispetto alla sezione, che nelle ipotesi fatte saranno coppie ortogonali.

Adesso passiamo alla considerazione del sistema formato da due quadriche qualunque φ e ψ e indichiamone brevemente le equazioni con:

1) $\quad U = 0 \qquad V = 0$

La loro linea d'intersezione sarà una linea del quart' ordine: ossia ogni piano dello spazio avrà con essa quattro punti a comune. Infatti i punti comuni a un piano π e alla linea d'intersezione suddetta che brevemente chiameremo quartica, sono dati dai punti comuni alle due coniche secondo cui π taglia φ e ψ, e questi sono appunto quattro.

Inoltre se noi formiamo una combinazione lineare dei primi membri delle 1) ossia consideriamo l'equazione

$$U + \lambda V = 0$$

ove λ è un parametro arbitrario, otterremo l'equazione d'una quadrica, passante evidentemente per la quartica secondo cui si segano φ e ψ; quindi se facciamo variare λ tra $-\infty$ e $+\infty$ otterremo infinite quadriche passanti per quella quartica.

L'insieme delle quadriche date dall'equazione

$$U + \lambda V = 0$$

quando λ varia tra $-\infty$ e $+\infty$ si chiama fascio di quadriche, ed è evidente che tutte le quadriche di un fascio hanno a comune una quartica che si dice sostegno del fascio.

È subito visto che per un punto $P \equiv (x_1' \, x_2' \, x_3' \, x_4')$ fuori della quartica passa una ed una sola quadrica del fascio perchè se indichiamo con U' e V' i risultati della sostituzione delle coordinate di P in U e V sarà evidente -

mente necessario e sufficiente porre

$$\lambda = -\frac{u'}{v'}$$

nella equazione

$$U + \lambda V = 0$$

perchè essa sia l'equazione rappresentativa della quadrica del fascio che passa per P.

È facile dimostrare che le quadriche passanti per otto punti generici dello spazio costituiscono un fascio. Infatti si indichino con x_i', x_i'' ..... $x_i^{(8)}$ ($i = 1$...) le loro coordinate; sarà allora possibile risolvere le equazioni

$$\Sigma a_{ik} \; x_i' \; x_k' = 0$$

$$\Sigma a_{ik} \; x_i'' \; x_k'' = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Sigma a_{ik} \; x_i^{(8)} \; x_k^{(8)} = 0$$

rispetto a otto dei nove rapporti di uno dei coefficienti a_{ik} al decimo rimanente. — Otterremo così otto di questi rapporti espressi mediante funzioni lineari del nono, per cui se si sostituiscono poi questi valori nell'equazione

$$\Sigma a_{ik} \; x_i \; x_k = 0$$

si otterrà un'equazione con tutti i coef-

ficienti espressi in funzioni lineari d'una medesima quantità λ e che qualunque sia λ dà una quadrica passante per quegli otto punti. Allora raccogliendo λ a fattor comune si potrà porre codesta equazione sotto la forma

$$U + \lambda V = 0$$

e si avrà così quello che si voleva dimostrare.

Segue da ciò il teorema:

"Le quadriche passanti per otto punti generici dello spazio contengono tutte infiniti altri punti costituenti una quartica."

Se noi seghiamo un fascio di quadriche con un piano π otterremo in questo piano un fascio di coniche aventi per punti-base i punti ove quel piano sega la quartica comune alle quadriche del fascio: ed è evidente che finchè una di queste coniche non degeneri, il piano π non potrà mai essere tangente alla quadrica che vi ha dato luogo.

Le quadriche del fascio tangenti a π sono dunque tante, quante sono le coni-

Disp. 17.ª

che di un fascio degeneranti in coppie di rette, ossia tre.

I punti ove una retta r incontra le quadriche di un fascio sono anche i punti ove r incontra le coniche del fascio secondo cui un piano passante per r sega quelle quadriche; dunque queste determineranno in generale coi loro punti d'incontro sulla r un'involuzione di punti, essendo coniugati due punti di r giacenti sulla medesima quadrica del fascio. Da ciò segue immediatamente che una retta generica dello spazio tocca due quadriche di un fascio.

L'equazione di un fascio di quadriche può scriversi anche, ponendo $U \equiv \sum a_{ik} x_i x_k \quad V \equiv \sum a'_{ik} x_i x_k$,

$$1) \quad \sum (a_{ik} + \lambda a'_{ik}) x_i x_k = 0$$

e sotto questa forma essa ci serve a stabilire se in un fascio di quadriche esistono dei coni, e, se esistono, a precisarne il numero.

Si sa che un'equazione omogenea di secondo grado nelle coordinate correnti rappresenta un cono di second'or-

dine, se il suo discriminante s'annulla, e che, reciprocamente, se tale condizione è soddisfatta, la superficie rappresentata è un cono: dunque: perchè l'equazione 1) rappresenti un cono sarà necessario e sufficiente che λ soddisfi all'equazione.-

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a'_{11} & a_{12}+\lambda a'_{12} & a_{13}+\lambda a'_{13} & a_{14}+\lambda a'_{14} \\ a_{21}+\lambda a'_{21} & a_{22}+\lambda a'_{22} & a_{23}+\lambda a'_{23} & a_{24}+\lambda a'_{24} \\ a_{31}+\lambda a'_{31} & a_{32}+\lambda a'_{32} & a_{33}+\lambda a'_{33} & a_{34}+\lambda a'_{34} \\ a_{41}+\lambda a'_{41} & a_{42}+\lambda a'_{42} & a_{43}+\lambda a'_{43} & a_{44}+\lambda a'_{44} \end{vmatrix} = 0$$

Essa è di quarto grado in λ: dunque: "In un fascio di quadriche esistono in generale quattro coni di second'ordine".

Osserviamo che se l'equazione 1) è l'equazione d'un cono del fascio, le coordinate del suo vertice saranno date dai valori non tutti nulli delle x_i soddisfacenti alle equazioni

$$(2) \quad \begin{cases} (a_{11}+\lambda a'_{11})x_1 + (a_{12}+\lambda a'_{12})x_2 + (a_{13}+\lambda a'_{13})x_3 + (a_{14}+\lambda a'_{14})x_4 = 0 \\ (a_{21}+\lambda a'_{21})x_1 + (a_{22}+\lambda a'_{22})x_2 + (a_{23}+\lambda a'_{23})x_3 + (a_{24}+\lambda a'_{24})x_4 = 0 \\ (a_{31}+\lambda a'_{31})x_1 + (a_{32}+\lambda a'_{32})x_2 + (a_{33}+\lambda a'_{33})x_3 + (a_{34}+\lambda a'_{34})x_4 = 0 \\ (a_{41}+\lambda a'_{41})x_1 + (a_{42}+\lambda a'_{42})x_2 + (a_{43}+\lambda a'_{43})x_3 + (a_{44}+\lambda a'_{44})x_4 = 0 \end{cases}$$

I quattro vertici V_1, V_2, V_3, V_4 di questi così formano un tetraedro molto importante nella teoria dei fasci di quadriche come risulta dalle ricerche seguenti.

Si considerino un punto qualunque $P \equiv x_i'$ dello spazio e i suoi piani polari rispetto a tutte le quadriche del fascio: l'equazione di uno di essi sarà:

$$\sum_{ik} (a_{ik} + \lambda a'_{ik}) x_i x_k' = 0$$

ossia

3) $$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k' + \lambda \sum_{ik} a'_{ik} x_i x_k' = 0$$

e si otterranno le equazioni di tutti gli altri facendo variare λ nella 3) da $-\infty$ a $+\infty$. Da ciò risulta immediatamente che tutti questi piani passano per la retta d'intersezione dei due rappresentati dalle equazioni

$$\sum a_{ik} x_i x_k' = 0 \qquad \sum a'_{ik} x_i x_k' = 0$$

ossia dei due piani polari di P rispetto alle quadriche:

$$\sum a_{ik} x_i x_k = 0 \qquad \sum a'_{ik} x_i x_k = 0$$

e che quindi i piani polari di P, in discorso, formano un fascio.

In tal modo ad ogni punto P dello spazio viene a corrispondere mediante il fascio di quadriche un fascio di

piani che ha per asse $\underline{p}$ il luogo dei punti coniugati a P rispetto a tutte le quadriche del fascio: e se si considerano i fasci p, q corrispondenti a due punti $P \equiv x_i'$ $Q \equiv x_i''$ si ha che i fasci p e q saranno riferiti proiettivamente se si fanno corrispondere tra loro due piani che siano polari di quei due punti rispetto a una medesima quadrica del fascio.

Di fatto si hanno le equazioni di due tali piani: dando un valore qualunque a λ nelle due equazioni

$$\sum a_{ik} x_i x_k' + \lambda \sum a'_{ik} x_i x_k' = 0$$
$$\sum a_{ik} x_i x_k'' + \lambda \sum a'_{ik} x_i x_k'' = 0$$

ossia piani corrispondenti dei due fasci hanno la medesima coordinata e vi è quindi proiettività.

La retta p si suol chiamare polare di P rispetto al fascio di quadriche o alla quartica-base, e se si considerano le rette polari di tutti i punti dello spazio, che costituiscono evidentemente una tripla infinità, si ottiene una forma geometrica detta complesso tetraedale o complesso di Reye dal nome del geometra che ne ha messo in luce le proprietà più importanti.

Siano p e q le polari di P e Q: per p e q passeranno rispettivamente tutti i piani polari di P e Q rispetto alle quadriche e formeranno intorno ad esse due fasci di piani proiettivi: per conseguenza i piani polari di P e Q rispetto ai quattro coni V_1, V_2, V_3, V_4 dovendo passare per V_1, V_2, V_3 V_4 rispettivamente saranno $p(V_1 . V_2 . V_3 . V_4)$ e $q(V_1 . V_2 . V_3 . V_4)$ e sarà

$$p(V_1 V_2 V_3 V_4) \barwedge q(V_1 V_2 V_3 V_4)$$

In altri termini:

"I piani che proiettano da una retta qualunque del complesso tetraedrale i quattro punti $V_1 V_2 V_3 V_4$ hanno un rapporto anarmonico costante."

Un'altra proprietà di questi punti la troveremo cercando se vi siano dei punti dello spazio per cui i piani polari rispetto a tutte le quadriche del fascio coincidono completamente. Perciò notiamo che se due di tali piani coincidono con essi coincidono tutti gli altri, quindi se $P \equiv x_i'$ è un tal pun-

to, sarà necessario e sufficiente che coincidano i piani

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k' = 0 \qquad \Sigma a'_{ik} x_i x_k' = 0$$

ossia, bisognerà che si abbia, indicando con ρ un opportuno coefficiente di proporzionalità:

$$\begin{aligned} \Sigma a_{1k} x_k' &= \rho \, \Sigma a'_{1k} x_k' \\ \Sigma a_{2k} x_k' &= \rho \, \Sigma a'_{2k} x_k' \\ \Sigma a_{3k} x_k' &= \rho \, \Sigma a'_{3k} x_k' \\ \Sigma a_{4k} x_k' &= \rho \, \Sigma a'_{4k} x_k' \end{aligned}$$

o, ciò che fa lo stesso,

$$\begin{aligned} \Sigma (a_{1k} - \rho a'_{1k}) \, x_k' &= 0 \\ \Sigma (a_{2k} - \rho a'_{2k}) \, x_k' &= 0 \\ \Sigma (a_{3k} - \rho a'_{3k}) \, x_k' &= 0 \\ \Sigma (a_{4k} - \rho a'_{4k}) \, x_k' &= 0 \end{aligned}$$

ora queste equazioni sono della stessa forma delle 2) colla sola differenza che λ è qui mutato in ρ, dunque si ha che i punti richiesti sono precisamente i punti V_1, V_2, V_3, V_4. Inoltre siccome è evidente per es. che il piano polare di V_1, unico, rispetto a tutte le quadriche, è il piano $V_2 V_3 V_4$, segue che:

"Il tetraedro $V_1V_2V_3V_4$ è un tetraedro autopolare comune a tutte le quadriche del fascio."

Questo teorema può anche dimostrarsi geometricamente. Infatti il piano $\pi \equiv V_1V_2V_3$ sega il fascio di quadriche in un fascio di coniche di cui le generatrici dei coni V_1, V_2, V_3 giacenti nel piano π costituiscono le tre coniche degeneri. Segue da ciò che i punti V_1, V_2, V_3 sono i punti diagonali del quadrangolo base del fascio di coniche e che quindi il triangolo $V_1V_2V_3$ è autopolare rispetto a tutte queste coniche ed è autoconiugato rispetto a tutte le quadriche del fascio. I piani polari di V_1 rispetto a queste quadriche devono per conseguenza passare tutti per V_2V_3: si dimostrerebbe nel medesimo modo che essi devono passare tutti per V_3V_4 dunque essi coincidono tutti col piano $V_2V_3V_4$.

La teoria stabilita fin qui sul fascio di quadriche dà luogo alla teoria della figura correlativa, cioè della schiera di quadriche, per la legge di

dualità, e noi ci contenteremo di darne qualche breve cenno, lasciando al lettore la cura di svilupparla interamente.

Partendo invece che da due quadriche φ e ψ, da due inviluppi di seconda classe Φ e Ψ rappresentati dalle equazioni

$$\Sigma a_{ik}\xi_i\xi_k = 0 \quad \Sigma a'_{ik}\xi_i\xi_k = 0$$

consideriamo l'equazione

$$\Sigma (a_{ik} + \lambda a'_{ik})\xi_i\xi_k = 0$$

ove λ è un parametro variabile tra $-\infty$ e $+\infty$. Essa ci rappresenterà una semplice infinità di inviluppi di seconda classe, schiera di quadriche, tutte contenenti la semplice infinità di piani comuni agli inviluppi Φ e Ψ, i quali costituiscono, per una ragione che vedremo poi, una sviluppabile, che diremo di quarta classe, perchè per un punto arbitrario P dello spazio passano quattro piani di essa, i quali sono dati dai piani comuni ai due coni di seconda classe formati dai piani di Φ e Ψ passanti per P; e che sono appunto quattro.

Dispª 18ª

Le quadriche della schiera che hanno per punto di contatto un punto P dello spazio sono tre, come si vede subito considerando il fascio di coni di vertice P circoscritto alle quadriche della schiera, e contando quanti di essi degenerano in coppie di fasci di piani.

"Ad una schiera di quadriche appartengono in generale quattro coniche considerate come inviluppi dei loro piani tangenti. I poli di un piano π rispetto a tutte le quadriche della schiera giacciono sopra una retta p: e le punteggiate p ed s corrispondenti in questo modo a due piani qualunque π e σ dello spazio sono proiettive, essendo omologhi quei loro punti che sono poli di π e σ rispettivamente riguardo a una medesima quadrica. Il complesso triplamente infinito delle rette p si chiama complesso tetraedrale (che vedremo in appresso coincidere col complesso tetraedrale già considerato) ed ogni sua retta taglia i quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ delle quattro coniche della schiera in quattro punti formanti un rapporto anarmonico costante. Finalmente i quattro piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ costituiscono un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche della schiera."

Prima di passare oltre e fare utili applicazioni di tutti questi risultati, noi vogliamo fermare la nostra attenzione ad un caso particolare di un teorema già incontrato, che ci servirà opportunamente in seguito.

Se si sega un fascio di quadriche con un piano π passante pel vertice V di un cono appartenente al fascio, si ottiene un fascio di coniche di cui i quattro punti base giacciono sulle due generatrici di V giacenti in π. Ma se π oltre che passare per V tocca il cono lungo una	Se si considerano i coni circoscritti alle quadriche di una schiera col vertice in un punto P giacente nel piano della conica k^2 appartenente alla schiera, si ottiene una schiera di coni di cui i quattro piani base passano per le tangenti condotte da P a k^2. Ma

na generatrice g allora i quattro punti-base si avvicinano infinitamente a due punti A e B della retta g, che in tal caso rappresenta una conica del fascio doppiamente degenerata. In altri termini, le coniche del fascio sono tutte bitangenti fra di loro in A e B, ossia ammettono in A e B le medesime tangenti.

Inversamente:

"Se il fascio di coniche secondo cui un piano π sega un fascio di quadriche è dato dalle coniche bitangenti fra di loro nei punti

se P oltrechè giacere nel piano di k^2 giace su k^2, allora i quattro piani-base si avvicinano infinitamente a due piani α e β passanti per la tangente g a k^2 nel punto P, e il fascio g rappresenta un cono doppiamente degenerato della schiera. In altri termini i coni della schiera sono tutti bitangenti fra di loro lungo i piani α e β.

"Se la schiera dei coni circoscritti alle quadriche di una schiera e aventi il vertice in un punto P, è data dei coni bitangenti fra di loro

A e B di una retta g, il piano π è un piano tangente di uno dei quattro coni del fascio."

Infatti in tal caso la retta g rappresenta una conica del fascio di coniche doppiamente degenerata e quindi vi è nel fascio di quadriche una quadrica che ha a comune col piano π due rette coincidenti in g. Essa è dunque a punti parabolici, ossia è un cono. —

ai due piani α e β d'una retta g, il punto P giace su una delle quattro coniche della schiera.

Infatti in tal caso il fascio g rappresenta un cono di seconda classe della schiera doppiamente degenerato, e quindi vi è nella schiera di quadriche una quadrica, il cui cono circoscritto col vertice in P si riduce a due fasci di piani coincidenti col fascio g. Essa è dunque una conica considerata come inviluppo dei suoi piani tangenti.

Ed ora consideriamo la schiera di quadriche determinata da una quadrica arbitraria φ^2 e dal circolo immaginario all'infinito considerato come inviluppo di tutti i suoi piani tangenti, noi otterremo notevoli proprietà della quadrica Q^2 studiando le proprietà della schiera particolare suddetta.

Anzitutto apparterranno alla schiera, oltre il circolo immaginario all'infinito C_∞, altre tre coniche k^2, k^2, l^2: queste tre coniche noi le chiameremo coniche focali di ogni quadrica della schiera, in particolare quindi di Q^2, e chiameremo la schiera di quadriche, schiera di quadriche omofocali.

Di tale schiera tre quadriche passeranno in generale per un punto arbitrario P dello spazio: e il triedro formato dai piani ad esse tangenti in P sarà autoconiugato rispetto a tutte le quadriche della schiera: in particolare esso sarà anche autoconiugato rispetto al circolo immaginario all'infinito. Da ciò segue che:

"Per un punto P dello spazio in generale passano tre quadriche della schiera di quadriche omofocali, e

queste si segano ivi ortogonalmente".

I piani di C_∞, k^2, k, l^2 costituiscono un tetraedro autopolare rispetto a tutte le quadriche della schiera; in particolare dunque il piano all'infinito ha il medesimo polo rispetto a tutte queste superficie, ossia:

"Le quadriche omofocali hanno tutte il medesimo centro, centro che è comune alle loro coniche focali".

I tre piani di k^2, k^2, l^2 costituiscono un triedro autoconiugato rispetto a tutte le quadriche della schiera: in particolare esso è dunque autoconiugato rispetto a C_∞, k^2, k^2 ed l^2. - In quanto è autoconiugato rispetto a C_∞ è anche trirettangolo, dunque:

"Le quadriche omofocali hanno tutte i medesimi assi e i medesimi piani principali (gli spigoli e le facce di quel triedro). Questi assi sono anche due a due gli assi delle loro coniche focali, le quali giacciono nei piani principali.

Coni circoscritti alle quadriche omofocali e aventi il vertice in un punto P di una conica focale sono fra di loro bitangenti e siccome appartiene alla schiera il cono secondo cui si proietta da P il circolo immaginario all'infinito, così ne viene che tutti questi coni sono bitangenti al circolo immaginario all'infinito, ossia sono coni di rotazione.

Se si enuncia questo teorema per la quadrica φ^2, osservando che è vera anche la sua inversa per una considerazione precedente, si ha che:

"Il luogo dei punti dai quali φ^2 è proiettata secondo coni di rotazione è costituito dai punti delle tre coniche focali di φ^2."

Sia K^2 il cono di rotazione circoscritto a φ^2 e avente il vertice in un punto P di una conica focale di φ^2: K^2 sarà bitangente al circolo immaginario all'infinito, e i due piani tangenti che ha a comune con esso passeranno, per quanto sappiamo, per la tangente p di quella conica nel punto P: la retta p è adunque l'asse del

cono K^2.

Inoltre due piani ortogonali qualunque passanti per p saranno coniugati non solo rispetto a K^2 ma anche rispetto a φ^2; dunque possiamo anche asserire che:

"Il fascio involutorio costituito dai piani coniugati rispetto a φ^2 e passanti per una tangente qualunque di una conica focale di φ^2 è ortogonale."

Quindi:

"Se si sega una quadrica φ^2 con un piano normale ad una tangente p di una sua conica focale nel punto di contatto si ottiene una conica, con un fuoco in quel punto."

Un'ultima proprietà delle coniche focali è espressa dal seguente teorema:

"Ogni conica focale di φ^2 passa per gli ombelichi di φ^2 contenuti nel piano principale in cui giace la conica che si considera."

Per dimostrare tutto ciò basta far osservare che il cono circoscritto a φ^2 e col vertice in un suo ombelico degenera in ses na coppia di fasci di piani aventi per assi le rette di Φ^2 passanti per quell'ombelico. Queste rette si appoggiano al circolo immaginario all'infinito, dunque questo cono (degenere) è bitangente a un tal circolo, e il suo vertice giace per una proprietà precedentemente dimostrata sopra una conica focale di Φ^2.

Chiuderemo questo capitolo e queste ricerche sui sistemi di quadriche colle seguenti considerazioni.

Tre quadriche $\varphi^2 \psi^2 \chi^2$ d'equazioni

$$u=0 \quad v=0 \quad w=0$$

rispettivamente determinano una rete di quadriche contenente una doppia infinità di quadriche e rappresentata dall'equazione

$$u+\lambda v+\mu w=0$$

nella quale λ e μ sono dei parametri arbitrarii.

I punti comuni a

$\varphi^2 \psi^2 \chi^2$ sono evidentemente anche su tutte le quadriche della rete, e sono otto, per un noto teorema d'algebra; essi si sogliono chiamare i punti-base della rete.

"Le quadriche passanti per sette punti generici dello spazio costituiscono una rete".

Infatti dare sette punti d'una quadrica vuol dire dar sette equazioni lineari fra i nove coefficienti arbitrarî da cui dipende l'equazione di una quadrica qualunque. Queste sette equazioni lineari determinano sette coefficienti in funzione lineari dei due rima-

Tre inviluppi di 2.a classe Φ^2, Ψ^2, X^2 d'equazioni

$$U=0 \quad V=0 \quad W=0$$

rispettivamente determinano un tessuto di quadriche inviluppi contenenti una doppia infinità di tali inviluppi e rappresentato dall'equazione

$$U+\lambda V+\mu W=0$$

nella quale λ e μ sono due parametri arbitrarii.

I piani comuni a Φ^2, Ψ^2, X^2 sono anche evidentemente piani di ciascun inviluppo del tessuto sono otto e si chiamano piani-base del tessuto.

Gli inviluppi contenenti sette piani generici dello spazio formano un tessuto.

Infatti dare sette piani d'un tale inviluppo di 2.a classe vuol dire dare sette equazioni lineari fra i nove coefficienti dai cui dipende l'equazione d'un inviluppo qualunque di 2.a classe. Queste sette equazioni lineari determinano sette coefficienti in funzioni lineari dei due rimanenti, sicchè nenti, dimodochè se poi si sostituiscono questi valori nell'equazione della quadrica e si ordina rispetto a questi due coefficienti λ e μ. l'equazione prende la forma.

$$u + \lambda v + \mu w = 0.$$

Ciò dimostra il teorema enunciato e prova nel tempo stesso che degli otto punti-base di una rete di quadriche sette soli sono arbitrarii, l'ottavo essendo pienamente determinato da quelli. Appunto perciò si sogliono chiamare questi punti, anche punti associati.

Combinando lineamente le equazioni di quattro quadriche

se poi si sostituiscono questi valori nell'equazione dell'inviluppo e si ordina rispetto a questi due coefficienti λ e μ l'equazione prende la forma

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

Ciò dimostra il teorema enunciato e prova in pari tempo che degli otto piani base di un tessuto di inviluppi, sette soli sono arbitrarii, l'ottavo essendo pienamente determinato da quelli. Appunto perciò questi piani si sogliono chiamare anche piani associati.

Combinando lineamente le equazioni di quattro inviluppi

si ottiene l'equazione di un sistema lineare di quadriche triplamente infinito, che in generale non hanno alcun punto a comune; e così si possono ottenere altri sistemi di quadriche ancora più generali, combinando linearmente le equazioni di cinque sei o più quadriche.

Il sistema più generale è naturalmente quello costituito da tutte le quadriche dello spazio, che ne comprende una nonupla infinità.

di 2ª classe si ottiene l'equazione di un sistema lineare di inviluppi di 2ª classe, triplamente infinito, che in generale non hanno alcun piano a comune; e così si possono ottenere altri sistemi d'inviluppi di 2ª classe ancora più generali, combinando linearmente le equazioni di cinque, sei o più inviluppi di 2ª classe.

Il sistema più generale è naturalmente quello costituito da tutti gli inviluppi di 2ª classe dello spazio, che ne comprende una nonupla infinità.

Appendice

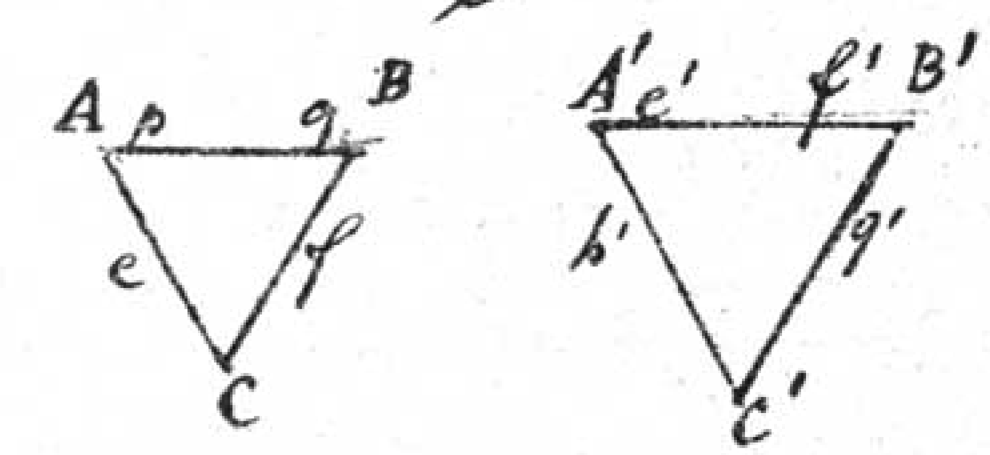
Cenno sulla trasformazione quadratica.

In due piani π e π' (sovrapposti o no) si considerino due coppie di fasci di raggi A e A', B e B' proiettivi fra di loro, e precisamente giacciono A e B in π, A' e B' in π'. Mediante questi fasci di raggi si potrà ad ogni punto di π far corrispondere in generale un punto ed uno solo di π', facendo corrispondere al punto d'intersezione X dei raggi m ed n di A e B rispettivamente, il punto d'intersezione X' dei raggi m' ed n' corrispondenti rispettivamente ad m ed n in A' e B'.

Se per la proiettività data tra i fasci A e A', come pure per quella tra B e B', al raggio AB corrisponde il raggio $A'B'$, allora la corrispondenza stabilita in questo modo tra π e π' è una collineazione: ma se una tale condizione non è soddisfatta la corrispondenza non sarà evidentemente una collineazione: noi la chiameremo corrispon-

denza quadratica, oppure diremo che il piano π è trasformato nel piano π' mediante una trasformazione quadratica. (1)

La trasformazione quadratica ha prima di tutto questo di particolare: che per essa è in generale fissata tra i punti di π e π' una corrispondenza biunivoca, ma vi sono in π e π' dei punti eccezionali ai quali corrispondono nell'altro piano infiniti punti anzi che uno solo. Ciò risulterà meglio dalle considerazioni seguenti.



Il raggio AB secondochè si considera come appartenente al fascio A o al fascio B si indichi con p o q, e siano p' e q' i raggi corrispondenti a p e q in A' e B' rispettivamente: similmente si chiami e' o f' il raggio $A'B'$ secondochè si considera come appartenente al fascio A' o B' e siano e ed f i raggi ad essi corrispondenti in A e B. Poi si ponga $C \equiv ef$, $C' \equiv p'q'$. Allora a un punto qualunque della retta e che è proiettato da A secon-

(1) Seydewitz - Archivio di Grunert

do questa retta medesima e da B secondo un certo raggio variabile, corrisponderà il punto ove s'incontra il raggio di B' corrispondente a questo raggio di B, cioè il punto B'. Abbiamo così che a tutti i punti di π giacenti sulla retta e corrisponde in π' l'unico punto B', e si proverebbe ugualmente che ai punti A e B di π corrispondono in π' tutti i punti delle rette q' e p' rispettivamente e che al punto A' di π' corrispondono in π tutti i punti della retta e. Inoltre è evidente che al punto C di π corrispondono in π' tutti i punti di A'B', poichè ad e ed f corrispondono e' ed f' cioè l'unica retta A'B', e che al punto C' di π' corrispondono in π tutti i punti della retta AB.

I punti A ed A', B e B', C e C' si dicono omologhi e si ha quindi che i due triangoli ABC e A'B'C' sono così collegati fra di loro che a un vertice qualunque dell'uno corrispondono nell'altro piano i punti del lato opposto al vertice omologo: ma si badi a non confondere i punti omologhi coi punti corrispondenti.-

I due triangoli ABC, A'B'C' li chiameremo anche triangoli fondamentali.-

Ed ora supponiamo che un punto X del piano π descriva una retta r uscente da A: il punto corrispondente X' si muoverà sopra la retta r' di A' corrispondente ad r nella proiettività data tra i fasci A e A', e di più le punteggiate r ed r' saranno proiettive quando si prendano in esse come punti corrispondenti i punti che si corrispondono nella trasformazione quadratica.

Infatti esse sono prospettive ai fasci B e B' che sono proiettivi fra di loro.

Analogamente, al fascio di rette B del piano π corrisponde in π' il fascio B', e due tali rette corrispondenti si corrisponderanno anche nella proiettività data tra B e B', e saranno sostegni di due punteggiate proiettive.

Ora io dico che questo accade anche pei punti C e C', cosicchè si vede che i punti A A', B B' e C, C' godono delle stesse proprietà.-

Disp.ª 20.ª

Data in π una retta passante per C, per trovarne in π' la corrispondente, si proietti la s da A e B, e per ogni coppia di raggi di A e B incrociantesi in un punto di s si, costruiscano i raggi corrispondenti in A' e B'; il luogo delle intersezioni di questi raggi sarà appunto la linea richiesta corrispondente ad s.

Ora si osservi che in tal modo i fasci A e B vengono riferiti prospettivamente fra di loro: e che quindi i fasci A' e B' sono anche proiettivi tra di loro, perchè proiettivi rispettivamente ad A e B. Essi sono anche prospettivi perchè ai due raggi di A e B incrociantesi nel punto C di s corrisponde tanto in A' quanto in B' il raggio A'B': dunque il luogo delle intersezioni dei loro raggi corrispondenti è una retta passante per C' perchè in C' si incontrano i raggi p' e q' di A' e B' corrispondenti ai raggi p e q di A e B ($p \equiv q$) passanti per il punto s. AB.

Sia s' la retta di π' corrispondente

ad s: le punteggiate s ed s' saranno proiettive fra di loro se si prendono come corrispondenti due loro punti che si corrispondono in π e π' per la corrispondenza quadratica; e di più se s ruota intorno a C, s' ruota intorno a C' descrivendo un fascio di raggi proiettivo al fascio descritto da s.

Infatti questi fasci sono proiettivi a due punteggiate r ed r' i cui sostegni passino per A e A' e che abbiamo già detto esser proiettive.

Il ragionamento fatto qui sopra per dimostrare che a una retta di π' passante per C corrisponde in π' una retta passante per C', ripetuto per una retta qualunque di π non passante per alcun vertice del triangolo fondamentale mostra che a una tal retta corrisponde in π' una conica - poichè in tal caso non si ha più la prospettività dei fasci A' e B'.

Questa conica passa per A', B', C' poichè questi sono i punti di π' corrispondenti ai punti di π ove quella retta incontra i lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale.

Dunque:

" A una retta qualunque di π o π' corrisponde, per la trasformazione quadratica, nell'altro piano una conica circoscritta al triangolo fondamentale; mentre se una retta passa per uno dei vertici di un triangolo fondamentale, le corrisponde nell'altro piano una retta passante per il vertice omologo.

Segue immediatamente da questo teorema, l'altro, che:

" Ad un fascio di rette di un piano corrisponde nell'altro un fascio di coniche "

Infatti tutte le coniche corrispondenti alle rette del fascio passano pei tre vertici del triangolo fondamentale e pel punto corrispondente al centro di quel fascio di rette. (1).

(1) Se il centro è in un punto eccezionale ad es: A osserviamo che al fascio di rette A, per es., di π corrisponde in π' il fascio di rette A', e che fra A e A' vi è proiettività: dovremo pertanto assumere come corrispondente del raggio $AC \equiv e$ il raggio $e' \equiv A'B'$ di π' inquanto si riguarda AC come appartenente al fascio A.

Talvolta si sogliono assegnare per la costruzione d'una trasformazione quadratica altri procedimenti; ma tutti in fondo si riducono a quello considerato. Ne accenneremo qualcuno.

Una costruzione dovuta allo Steiner è la seguente:

Dati due piani π e π' e due rette sghembe r ed r' non giacenti in essi, si costruisca per un punto qualunque X del piano π, per es., la retta r'' che passa per esso e si appoggia alle rette r ed r', e si faccia corrispondere ad X in π' il punto $X' \equiv r''\pi'$; con questo π resta trasformato quadraticamente in π'.

Intanto è evidente che se il punto X descrive in π una retta s, X' descrive in π' una conica.

Infatti se X si muove su s, la retta r'' varia, rimanendo sempre appoggiata alle tre rette r, r' ed s sghembe in generale fra di loro due a due; e quindi descrive una serie rigata che da π' è segata lungo una conica.

Siano ora P e Q i punti ove r ed r'

incontrano π, P' e Q' i punti ove queste medesime rette incontrano il piano π'.

Allora se la retta s descritta dal punto X passa per P (o per Q) la retta r'', appoggiantesi ad r ed r' si manterrà sempre nel piano rs ($r's$) ossia il punto X' descriverà la retta s' secondo cui il piano rs (od $r's$) sega il piano π'.

In altri termini: un piano che passi per le rette r od r' sega i due piani π e π' in due rette corrispondenti, cosicché ai fasci di raggi P e Q di π corrispondono in π' i fasci P' e Q': e tra questi fasci vi è proiettività se si considerano come corrispondenti due raggi che si corrispondono nella trasformazione considerata.

Infatti i fasci P e P' sono prospettivi al fascio di piani r, e i fasci Q e Q' sono prospettivi al fascio di piani r'.

Questo basta per dimostrare che la costruzione dello Steiner porta ad una trasformazione quadratica, così come l'abbiamo noi definita: perché se si considera la trasformazione qua-

dratica tra π e π' determinata dalle due coppie di fasci proiettivi P e P', Q e Q' si ritrova appunto la costruzione indicata.

La terza coppia di punti omologhi dei due piani è data dai punti R ed R' ove le rette $P'Q'$ e PQ incontrano π e π' rispettivamente. Infatti se si cerca per es. il punto di π' corrispondente al punto R di π, si trova che la retta r'' uscente da esso e appoggiantesi ~~ad r~~ e r', cioè la retta $RP'Q'$ giace per ~~intero~~ in π' e che quindi ~~tutti~~ i suoi punti corrispondono ad R.

Un'altra costruzione è la seguente: Siano dati due piani π e π' e una quadrica Q^2, e sulla quadrica siano dati ancora due punti O e O': allora preso un punto qualunque X di π si assegni come suo punto corrispondente in π' il punto X' ove la retta $O'Y$, congiungente il punto O' colla seconda intersezione Y di Q^2 con OX, sega il piano π'. - La corrispondenza che così viene fissata tra π e π' è una corrispondenza quadratica.

Intanto se il punto X descrive in π una retta s, il raggio OX ruota intorno ad O nel piano Os e il punto Y descrive la conica intersezione di questo piano colla quadrica Q^2. Da ciò segue che il raggio $O'Y$ descrive un cono di 2° ordine e che quindi il punto X descrive nel piano π la conica secondo cui π' sega questo cono.

Questo se la retta s è una retta generica del piano π. Ma se essa passa per uno dei punti P (o Q) secondo cui π sega le generatrici di Q^2 passanti per O, allora il piano Os sega la quadrica secondo due rette perchè passa per la generatrice OP (o OQ) e quindi il raggio $O'Y$ si muove in un piano che da π' è segato lungo una retta. Di più il piano descritto da $O'Y$ poichè contiene una generatrice di Q^2 e passa per O' contiene anche la generatrice di Q^2 passante per O' ed appartenente con OP (od OQ) alla medesima serie rigata di Q^2, dunque se la retta s ruota intorno a P (o Q) la retta s' corrispondente ruota intorno al punto P'

(o Q') ove una delle generatrici di Q^2 passanti per O' incontra π'. E i due fasci descritti da s ed s' intorno ai punti P e P' (Q e Q') sono proiettivi quando si considerino come corrispondenti due rette che si corrispondono nella costruzione fatta.

Perciò basta osservare che i fasci P e P' (o Q e Q') sono prospettivi ai fasci di piani OP ed $O'P'$ (od OQ e $O'Q'$), i quali sono proiettivi perchè proiettano da queste due generatrici di Q^2, appartenenti a un medesimo sistema rigato, le rette dell'altro sistema rigato di Q^2.

Tanto basta per dimostrare che la corrispondenza in questione è la trasformazione quadratica determinata fra π e π' dai fasci di raggi proiettivi P e P', Q e Q'. La terza coppia di punti omologhi è evidentemente data dai punti ove la retta OO' sega π e π'.

Adesso vediamo di trovare le formule della trasformazione quadratica, ossia le relazioni che passano tra le coordinate di due punti che si corrispondono in due piani π e π' trasformati quadraticamente l'uno nell'altro.

Prendiamo in π e π' come triangoli di riferimento i triangoli fondamentali ABC, $A'B'C'$ e di più prendiamo come punti unità ~~di~~ U ed U' due punti di π e π' tra di loro corrispondenti. Allora se indichiamo con $x_1\ x_2\ x_3$ le coordinate correnti in π e con $y_1\ y_2\ y_3$ le coordinate correnti in π', saranno:

$$x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

le equazioni delle rette AC, AB e quindi sarà

$$x_2 - \lambda x_3 = 0$$

ove λ è un parametro variabile, l'equazione del fascio A. Similmente, l'equazione del fascio A' è

$$\mu y_2 - y_3 = 0$$

ove μ è un parametro arbitrario; e poichè tra i fasci A ed A' è stabilita una proiettività, se con λ e μ indichiamo i parametri relativi a raggi corrispondenti in A e in A', dovrà sussistere fra λ e μ una relazione bilineare della forma

$$a\lambda\mu + b\lambda + c\mu + d = 0$$

E siccome d'altra parte le cose sono poste in modo che ai raggi AC, AB, AU di A corrispondono i raggi $A'B'$, $A'C'$, $A'U'$ di A', cioè in modo che ai valori $0, \infty, 1$ di λ corrispondono i valori $0, \infty, 1$ di μ così segue che la relazione soprascritta fra λ e μ si riduce all'identità $\lambda = \mu$. Adunque le equazioni di due raggi corrispondenti di A e A' sono

$$x_2 - \lambda x_3 = 0 \qquad \lambda y_2 - y_3 = 0$$

dove λ è un parametro variabile.

Similmente, le equazioni di due raggi corrispondenti nei due fasci proiettivi B e B' sono

$$x_1 - \mu x_3 = 0 \qquad \mu y_1 - y_3 = 0$$

pertanto se x_1, x_2, x_3 sono le coordinate di un punto di π e $y_1, y_2\ y_3$ le coordinate del punto corrispondente si ha:

$$\frac{x_2}{x_3} = \lambda = \frac{y_3}{y_2} \qquad \frac{x_1}{x_3} = \mu = \frac{y_3}{y_1}$$

$$x_1 : x_2 : x_3 :: y_2 y_3 : y_3 y_1 : y_1 y_2$$

oppure:

$$y_1 : y_2 : y_3 :: x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2$$

Queste sono appunto le formule che legano le coordinate d'un punto di π

alle coordinate del punto corrispondente in π', e potrebbero servire a fare una trattazione analitica di tutto ciò che fin'ora abbiamo dimostrato geometricamente.

Quando si tratta di stabilire una corrispondenza quadratica tra due piani π e π' si può non solo assegnare arbitrariamente in essi due triangoli ABC, $A'B'C'$ come triangoli fondamentali, ma si può ancora prendere arbitrariamente in π' il corrispondente P' d'un punto qualunque P di π.

Per far questo infatti noi possiamo e dobbiamo riferire proiettivamente il fascio A al fascio A', in modo che ai raggi AB, AC, AP corrispondano i raggi $A'C'$, $A'B'$, $A'P'$, e il fascio B al fascio B' in modo che ai raggi BA, BC, BP corrispondano gli altri $B'C'$, $B'A'$, $B'P'$: dopo ciò la trasformazione quadratica è pienamente determinata.

Oppure:

Si può scegliere in π per es. quattro rette arbitrarie a b c d di cui tre non passino mai per uno stesso punto, e asse-

gnare ad esse come corrispondenti nel piano π' quattro coniche passanti per tre punti A', B', C' –

Infatti si trasformi quadraticamente il piano π' in un piano π'' scegliendo in π' per triangolo fondamentale il triangolo $A'B'C'$: allora alle quattro coniche passanti per quei punti corrisponderanno in π'' quattro rette $a''b''c''d''$. Poi si trasformi omograficamente il piano π'' nel piano π in modo che alle quattro rette a'', b'', c'', d'' di π'' corrispondano le rette a, b, c, d di π, con che l'omografia è pienamente determinata; i piani π e π' saranno con ciò trasformati quadraticamente l'uno nell'altro.

Per quanto in questa costruzione compariscano degli elementi arbitrarii pure si potrebbe dimostrare che anche in questo caso la trasformazione quadratica è individuata; ma noi non vogliamo addentrarci più oltre in questo.

Finora non abbiamo fatta alcuna ipotesi particolare sui sostegni dei piani π e π': adesso supponiamo che essi coincidano e proponiamoci di risolvere la questione che subito da sè medesima si presenta:

"Cercare se in due sistemi piani π e π' sovrapposti e trasformati quadraticamente l'uno nell'altro esistono dei punti uniti."

La questione si risolve immediatamente osservando che in tal caso i fasci proiettivi A ed A', B e B' generano due coniche, i cui punti comuni sono i punti richiesti.

Infatti se un punto X è unito, ai raggi AX e BX di A e B devono corrispondere nei fasci proiettivi A' e B' i raggi $A'X$ e $B'X$ e quindi X deve giacere su quelle coniche; e inversamente se X è un punto comune a queste due coniche esso è evidentemente un punto unito.

Da tutto ciò si conchiude, che i punti uniti (reali o immaginari coniugati) sono in generale quattro. E diciamo in generale, perchè in alcuni casi, come tra poco vedremo, i punti uniti possono anche essere infiniti.

Quando i due piani π e π' sono so-

vrapposti e c'è fra di essi una corrispondenza quadratica, un punto X del loro sostegno comune può considerarsi come appartenente all'uno o all'altro sistema piano: e quindi avrà come corrispondenti nel primo e nel secondo sistema piano due punti che in generale non coincideranno. Nel caso che al punto X qualunque esso sia, corrisponda sempre uno stesso punto X' sia che si consideri come appartenente a π, sia che si consideri come appartenente a π', si dice che la corrispondenza quadratica è involutoria, e i due sistemi piani π e π' si considerano come una sola forma involutiva di cui gli elementi si dicono coniugati due a due.

Supponiamo che fra due sistemi piani π e π' sovrapposti sia fissata una corrispondenza quadratica involutoria: e sia $A\ B\ C$ il triangolo fondamentale di π. Al punto A considerato come appartenente al piano π corrispondono in π' tutte i punti di una retta, dunque anche se si considera A

come appartenente a π' esso dovrà corrispondere a tutti i punti di una retta di π. Segue da ciò che i punti fondamentali di π sono anche punti fondamentali di π', e che quindi i due triangoli fondamentali coincidono: ma in generale non coincideranno i loro vertici omologhi.

Anzi si possono dare due casi -

Supponiamo che al vertice B considerato come appartenente a π corrispondano in π' tutti i punti di AB: allora sarà C l'omologo di B in π', e a C considerato come appartenente a π corrisponderanno in π' i punti di AC: mentre ad A corrisponderanno tutti i punti di BC e quindi sarà omologo di sè stesso. -

Da ciò segue che non si possono dare che due casi: o a un vertice corrispondono i punti di un lato passante per esso e allora ciò avviene anche per un altro vertice, mentre il terzo corrisponde ai punti del lato opposto, oppure ciascun vertice corrisponde ai punti del lato opposto e quindi è omologo di se stesso.

Supponiamo che si dia il primo

caso: cioè che a B e C corrispondano rispettivamente i punti di AB e AC e che ad A corrispondono i punti di BC, e che quindi coincida col suo omologo. Allora alle rette del fascio B corrisponderanno le rette del fascio C, i due fasci saranno proiettivi e genereranno una conica k^2 tangente in B e C alle rette AB e AC. Ogni punto X di questa conica è un punto unito, perchè alle rette BX e CX corrispondono le rette CX e BX, e quindi anche ogni retta passante per A è una retta unita, perchè passa per A che è omologo di sè stesso, e incontra la conica k^2 in punti che sono uniti.

Dunque abbiamo intanto che in tal caso:

"Due punti corrispondenti qualunque sono sempre allineati con A."

Di più sopra ogni retta uscente da A i punti corrispondenti individuano un'involuzione di cui i punti doppii giacciono sulla conica k^2, e quindi un'involuzione di punti coniugati rispetto

Disp: 22ª:

a k^2, dunque abbiamo ancora che:

"Due punti corrispondenti qualunque sono coniugati armonici rispetto alla conica k^2"

Questi due teoremi combinati insieme danno una costruzione semplicissima per costruire punti corrispondenti, essendo dato il punto A e la conica k^2, e mostrano ancora che con questi dati la corrispondenza, detta inversione quadrica di Hirst; è pienamente individuata.

Un caso particolare molto interessante della inversione quadrica è la così detta trasformazione per raggi vettori reciproci.

In tale caso si assume come conica di punti uniti un cerchio k^2 e come centro del fascio di rette unite il centro O di k^2. Allora il triangolo dei tre punti fondamentali è costituito da O e dai punti ciclici del piano, (punti di contatto delle tangenti al circolo condotte per O) e se X ed X' sono due punti corrispondenti ed r è il raggio del circolo k^2, si ha:

$$OX \cdot OX' = r^2$$

perchè X ed X' sono coniugati rispetto a k^2, e quindi sono separati armonicamente dalle estremità di un diametro di k^2.

La considerazione del secondo caso ci sarà facilitata dalla ricerca seguente.

Siano L, M, N, P i quattro punti base di un fascio di coniche e sia ABC il triangolo diagonale del quadrangolo LMNP ossia il triangolo autopolare comune a tutte le coniche del fascio. Rispetto a questo fascio si ottiene una trasformazione quadratica involutoria del piano in sè stesso, facendo corrispondere ad un suo punto generico X quel punto X' che è ad esso coniugato rispetto a due e quindi rispetto a tutte le coniche del fascio (teorema di Desargues).

Per dimostrare tutto ciò osserviamo che se il punto X descrive una retta s generica del piano, le sue polari rispetto a due coniche k^2 e k'^2 del fascio descrivono due fasci di raggi S ed S' proiettivi fra di loro perchè proiettivi alla punteggiata s, e quindi il punto X' descrive la conica generata dai fasci

S ed S'.

Se la retta s passa per uno dei vertici del triangolo autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio per es. per A, i punti S ed S' che non sono altro che i poli di s rispetto ad h^2 e k^2 cadono sulla retta BC, polare di A rispetto ad h^2 e k^2; e i due fasci S ed S' sono prospettivi avendo unito il raggio comune $SS' \equiv BC$: dunque se il punto X descrive la retta s, il punto X' descrive una retta s' passante pure per A, perchè quando X coincide col punto A: e di più le due punteggiate s ed s' sono proiettive perchè la s' è sezione per es. del fascio S proiettivo ad s.

Ora basta che noi mostriamo che s ed s' descrivono intorno ad A due fasci di raggi proiettivi perchè resti dimostrato che la trasformazione in discorso è una trasformazione quadratica.

Perciò basta osservare che se t e t' sono per es. due rette corrispondenti passanti per B, le punteggiate t e t' ≡ SBC il punto X' coincide col punto

sono proiettive e i fasci descritti da s ed s' sono proiezioni di queste punteggiate.

Che la corrispondenza infine sia anche involutoria segue dalla costruzione stessa indicata per trovare punti corrispondenti. – Osserviamo che se σ^2 è la conica corrispondente ad una retta s in tale trasformazione quadratica, σ^2 passa non solo per i vertici A, B, C del triangolo diagonale di $LMNP$ ma anche per i coniugati armonici dei punti ove s incontra i sei lati del quadrangolo $LMNP$ rispetto alle sei coppie dei suoi vertici.

Infatti questi punti sono coniugati ai punti ove s incontra quei lati rispetto a tutte le coniche passanti per $LMNP$, ossia rispetto a tutte le coniche del fascio.

Adesso torniamo alle nostre ricerche e supponiamo che ABC sia il triangolo fondamentale di un piano trasformato quadraticamente e involutivamente in se stesso, e di più supponiamo che ogni suo vertice coincida col suo omologo. In tal caso al fascio di rette A corrisponde un fascio di rette concentico e in involuzione, non coincidente, con esso, perchè al raggio AB del primo corrisponde il raggio AC del secondo.

Siano LN ed MP i raggi doppii di questo fascio involutorio e siano L ed N, M e P i punti doppii delle involuzioni che i punti corrispondenti determinano su LN ed MP ossia i punti uniti del piano trasformato quadraticamente in se stesso. esistenti sulle rette LN ed MP. Allora la retta BL per es. sarà una retta del fascio B corrispondente a se stessa, e poichè anche la retta MP corrisponde a se stessa sarà unito il punto d'incontro di BL ed MP ossia BL dovrà passare per uno dei punti M o P che sono i soli punti uniti della retta MP. Se BL passa per M, si troverebbe nello stesso modo che BP, CP e CN devono passare rispettivamente per N, L ed M, dunque il triangolo ABC non è altro che il triangolo diagonale del quadrangolo LMNP.

Da ciò risulta che se σ^2 è la conica corrispondente ad una retta s ge-

nerica del piano, σ^2 deve passare per A, B, C e per i punti separati armonicamente dai punti ove s incontra i sei lati del quadrangolo LMNP mediante i suoi vertici stessi, perchè due punti di un lato del quadrangolo corrispondenti nella trasformazione quadratica sono coniugati nella involuzione di cui i due vertici del quadrangolo giacenti su quel lato sono i punti doppii: dunque in tal caso la trasformazione quadratica non è altro che la trasformazione del piano in sè stesso mediante il fascio di coniche, circoscritte al quadrangolo LMNP, già considerata.

Finora abbiamo sempre parlato di trasformazione quadratica di un piano in un altro o di un piano in sè stesso, ma si capisce senz'altro che per la legge di dualità tutte le considerazioni fatte finora possono estendersi alle stelle.

Un esempio di trasformazione quadratica di una stella in sè stessa lo abbiamo già incontrato cercando gli assi