Capitolo VII.

Superficie

a) Superficie in generale.
b) Superficie algebriche.

Una superficie è il luogo descritto da una curva che si muove e si deforma (se occorre) con continuità nello spazio secondo una determinata legge assumendo una semplice infinità di posizioni. La curva si dice curva generatrice della superficie, e questa contiene una doppia infinità di punti.

Correlativamente, chiameremo inviluppo di piani la totalità dei piani di una sviluppabile che si muove deformandosi (se occorre) con continuità nello spazio secondo una determinata legge e assumendo una ~~superficie~~ semplice infinità di posizioni. La sviluppabile si dice sviluppabile generatrice dell'inviluppo e questo contiene ∞^2 piani.

Due superficie hanno in generale una semplice infinità di punti a comune costituenti una curva detta la loro curva d'intersezione: una curva ed una superficie hanno in generale un numero ~~in~~finito di punti a comune o un numero infinito di punti discreti, e quindi tre superficie hanno anch'esse in generale un numero finito di punti a comune, o infiniti punti discreti. Essi sono i punti che una delle tre superficie ha a comune coll'intersezione delle altre due.

In particolare i punti in cui una retta qualunque dello spazio taglia una superficie sono tutti e soli i punti ove essa incontra la curva intersezione del piano colla superficie; e quindi se la retta è tangente in un punto A a questa curva, cioè ha a comune con essa due punti infinitamente vicini, avrà anche a comune colla superficie il punto A ed un punto infinitamente vicino ad A.

Ora una retta che incontri una

superficie in un punto e in un punto infinitamente vicino a quello si dice una tangente della superficie. Dunque segue da quanto si è detto che una retta tangente in un punto A ad una superficie tocca in quel punto qualunque sezione piana della superficie ottenuta con un piano passante per la retta, e che viceversa se una retta tocca in un punto A una sezione della superficie ottenuta con un piano passante per essa, essa tocca ancora la superficie nel punto A.

Correlativamente chiameremo tangente di un inviluppo la intersezione di due piani infinitamente vicini dell'inviluppo.

Sia A un punto di una superficie e siano t e t' due rette tangenti in esso alla superficie facenti fra di loro un angolo finito: io dico che se A è un punto ordinario della superficie, tutte e sole le rette del piano tt' passanti per A toccano la superficie in A.

Se infatti io taglio la superficie

col piano tt' la linea di intersezione ammette come tangenti in A tanto la retta t quanto la retta t', e quindi ha in A un punto doppio. Allora ogni retta del piano tt' passante per A ha con questa linea d'intersezione due punti comuni, coincidenti in A (ha con essa un contatto bipunto) quindi è tangente in A alla superficie.-

Di più se t'' è una retta fuori del piano tt' che ha colla superficie un contatto bipunto in A, allora ogni retta passante per A ha ivi un contatto bipunto colla superficie e quindi A non è certo un punto ordinario della superficie.

Infatti in tal caso tutte le rette dei piani tt', $t't''$, $t''t$ hanno per la dimostrazione precedente un contatto bipunto colla superficie e quindi un piano qualunque passante per A sega la superficie in una linea con un punto doppio in A, avendo ivi un contatto bipunto colle rette ove il piano taglia i piani tt', $t't''$, $t''t$. Da ciò segue che tutte le rette di questo piano hanno colla superficie un contatto bipunto e quindi il teorema resta dimostrato. —

Il piano t t' contenente tutte e sole le tangenti in A alla superficie si chiama piano tangente alla medesima, e da quel che abbiamo detto segue ancora immediatamente che:

"Condizione necessaria e sufficiente perchè un piano α tocchi una superficie in un suo punto ordinario A è che tagli la superficie in una linea avente ivi un punto doppio."

Correlativamente:

"Le tangenti di un inviluppo giacenti in un suo piano sono in generale tutte e sole le rette di un fascio il cui centro si dice punto di contatto dell'inviluppo in quel piano, e condizione necessaria e sufficiente perchè un punto A di un piano α di un inviluppo sia punto di contatto dell'inviluppo in quel piano è che il cono circoscritto all'inviluppo dal punto A (cioè il cono formato dalla semplice infinità di piani dell'inviluppo passanti per A) abbia in α un piano doppio."

Se si considerano tutti i piani tangenti di una superficie si ottiene una doppia infinità di piani costituenti un inviluppo detto inviluppo aderente alla superficie, e correlativamente se si considerano tutti i punti di contatto di un inviluppo di piani si ottiene una doppia infinità di punti costituenti una superficie detta superficie aderente all'inviluppo. Allora è evidente che se si considera l'inviluppo aderente ad una data superficie Σ e poi la superficie aderente a questo inviluppo si ottiene nuovamente la superficie Σ.

Dopo ciò risulta chiaro come alla considerazione di una superficie sia strettamente connessa la considerazione di un inviluppo e viceversa.

Abbiamo visto che se A è un punto ordinario della superficie Σ il piano α tangente in A a Σ sega tale superficie

in una linea avente in A un punto dop-
pio: allora vi sono nel piano α due rette
passanti per A e aventi con questa linea
un contatto tripunto in A e quindi due
rette aventi in A un contatto tripunto col-
la superficie Σ. Queste due rette si dico-
no tangenti principali o d'inflessione o
rette osculatrici della superficie in A: es-
se possono essere reali distinte (nel caso
che nel punto A s'incrocino due rami
reali della curva, nel qual caso il pun-
to A si dice un nodo della curva) reali
coincidenti (nel caso che A sia un punto
di regresso di quella linea) o immagi-
narie (nel caso che i due rami della li-
nea passanti per A siano immagina-
rii e quindi A sia un punto isolato
della linea). In vista di questo un pun-
to A di una superficie ~~si~~ dice iperboli-
co, parabolico od ellittico secondo che le
rette osculatrici alla superficie in A so-
no reali distinte, reali coincidenti o im-
maginarie.

Le superficie sviluppabili hanno tut-
ti punti parabolici, le quadriche han-

no o tutti punti iperbolici, o tutti punti pa-
rabolici o tutti punti ellittici; ma una su-
perficie d'ordine superiore contiene in gene-
rale punti di tutte e tre le specie.

In generale su ogni superficie si ha u-
na regione di tutti i punti iperbolici se-
parata da una regione di tutti punti
ellittici mediante una linea di tutti pun-
ti parabolici. Per es. in una superficie
generale del terz'ordine la regione dei pun-
ti iperbolici è separata dalla regione dei
punti ellittici mediante una linea del
12° ordine di punti parabolici.

Le tangenti principali o rette oscula-
trici si chiamano anche tangenti d'in-
flessione, perchè un piano qualunque
passante per una di esse taglia la su-
perficie in una curva avente quella
retta per tangente di flesso.

Si dice che due superficie Σ e Σ, aven-
ti a comune un punto A, ordinario per
entrambe, si toccano in A, quando han-
no in quel punto il medesimo piano tan-
gente. Allora noi siamo in grado di di-

mostrare un teorema di cui ci siamo serviti per lo studio della quartica gobba.

"Condizione necessaria e sufficiente perchè due superficie Σ e Σ_1 si tocchino in un loro punto comune A, ordinario per entrambe, è che il punto A sia doppio per la loro linea d'intersezione"

Supponiamo che le due superficie Σ e Σ_1 abbiano in A lo stesso piano tangente α e siano: k la loro linea d'intersezione, π un piano qualunque passante per A. Il piano π segherà le due superficie in due curve, che avranno entrambe in A per tangente la retta $\alpha\pi$ e quindi in due curve aventi due punti infinitamente vicini a comune. —

Ciò porta che la linea k ha col piano π e con qualunque piano condotto per A due punti a comune infinitamente vicini, riuniti in A, quindi siccome in un punto ordinario di una curva non c'è che una semplice infinità di piani che taglino la curva in due punti infinitamente vicini, A sarà almeno un punto doppio per l'interse-

zione k delle due superficie Σ e Σ_1.

Inversamente supponiamo che la linea k intersezione delle due superficie Σ e Σ_1 abbia in A un punto doppio e sia π un piano qualunque passante per A. Esso avrà in A due punti comuni con k infinitamente vicini e quindi le due curve secondo cui π taglia le superficie Σ e Σ_1 dovendo contenere entrambe questi punti avranno in A la medesima tangente; ossia nel punto A Σ e Σ_1 hanno intanto una tangente a comune. Basta ripetere questo ragionamento per un altro piano qualunque e ricordare che un piano tangente è determinato da due delle tangenti che esso contiene per dedurne la verità del teorema.

Se il punto A è un punto doppio ordinario per la linea d'intersezione k allora si dice che le due superficie Σ e Σ_1 hanno in A un contatto ordinario: se invece il punto A è un punto di regresso di k si dice che le due superficie Σ e Σ_1 hanno ivi un contatto stazionario.

Vediamo come si modifichino i numeri

Cayleyani d'una quartica gobba intersezione di due quadriche quando le due quadriche abbiano un contatto ordinario o stazionario

Se le due quadriche hanno un contatto ordinario la quartica ha un punto doppio effettivo e quindi si ha:

$$n = 4 \quad \alpha = 0 \quad h = 3$$

da cui per le formule di Cayley

$$m = 6 \quad r = 6 \quad \beta = 4 \quad g = 6 \quad x = 6 \quad y = 4 \quad p = 0;$$

se invece le due quadriche hanno un contatto stazionario la quartica ha un punto di regresso e quindi si ha per esempio

$$n = 4 \quad \alpha = 1 \quad h = 2$$

da cui per le formule di Cayley

$$m = 4 \quad r = 5 \quad \beta = 1 \quad g = 2 \quad x = 2 \quad y = 2 \quad p = 0$$

Facciamo osservare infine che la quartica si spezza in curve d'ordine minore se le quadriche si toccano in più di un punto.

Un punto di una superficie si dice doppio se qualunque retta passante per quel punto ha ivi due punti a comune colla superficie; cosicchè ogni piano passante per un punto doppio taglia

la superficie in una curva avente in quel punto un punto doppio.

Da un teorema precedente segue che se tre rette passanti per un punto A di una superficie non giacenti in un piano hanno ivi un contatto bipunto colla superficie, ciò avviene per ogni altra retta passante per A e quindi A è un punto doppio della superficie. Così per verificare che il punto A è doppio basta verificare se due piani almeno passanti per A tagliano la superficie in una curva avente in A un punto doppio, poichè allora ciò si verifica per ogni altro piano segante.

Per un punto doppio A esiste una semplice infinità di rette aventi ivi un contatto tripunto colla superficie: esse si ottengono costruendo per ogni piano segante condotto per A le tangenti alla curva sezione nel punto A e costituiscono come vedremo tra poco un cono di second'ordine.

Un punto A d'una superficie si dice r^{plo} quando ogni retta uscente da A ha in A r intersezioni riunite colla superficie, ossia ha colla superficie un contatto r-punto. Un piano qualunque condotto per A taglierà la superficie in una curva avente ivi un punto r^{plo}, e se viceversa tutte le sezioni piane ottenute con piani passanti per un punto A hanno ivi un punto r^{plo}, A è un punto r^{plo} anche per la superficie.

In un punto r^{plo} A esistono infinite rette che abbiano un contatto $(r+1)$-punto colla superficie: esse si ottengono costruendo per ogni piano condotto per A le r tangenti agli r rami della curva-sezione incrociantesi in A.

Supponiamo che due superficie Σ e Σ_1 abbiano a comune un punto A il quale sia r^{plo} per la prima ed s^{plo} per la seconda: il punto A è almeno rs^{plo} per la loro linea d'intersezione.

Infatti un piano qualunque passante per A taglia Σ in una curva avente in A un punto r^{plo} e Σ_1 in una curva avente in A un punto s^{plo} dunque nel punto A si condensano rs intersezioni

di queste due curve (pag. 421) ossia rs punti della intersezione di Σ e Σ_1.

Abbiamo detto che il punto A è almeno rs^{plo} per l'intersezione poichè in casi particolari il suo grado di molteplicità può essere ancora maggiore.-

Così per es. se il punto A è r^{plo} per ambedue le superficie Σ e Σ_1 e le rette che hanno con Σ in A un contatto $(r+1)$-punto coincidono con quelle analoghe di Σ_1, A non è più multiplo d'ordine r^2 per l'intersezione ma d'ordine $r(r+1)$. Infatti allora un piano condotto per A taglia le due superficie Σ e Σ_1 in due curve aventi in A un punto r^{plo} e i cui rami ammettono le stesse tangenti, ossia si toccano: quindi nel punto A si riuniscono non più r^2 intersezioni delle due curve ma $r(r+1)$.

Dimostriamo ora che le rette aventi un contatto tripunto con una superficie in un punto doppio A costituiscono un cono di second'ordine, detto cono tangente alla superficie nel punto A.

Per questo siano r_1, r_2 r_3 r_4 r_5 cinque rette aventi in A un contatto tripunto colla superficie e consideriamo il cono di secondo ordine da esse determinato: questo cono taglierà la superficie in una linea avente in A un punto quadruplo almeno, poichè A è doppio tanto pel cono che per la superficie. Un piano qualunque condotto per r_1 taglia la superficie in una curva avente in A un punto doppio e di cui un ramo tocca la retta r_1; ma r_1 rappresenta anche una parte dell'intersezione del cono col piano dunque nel punto A si riuniscono almeno cinque punti d'intersezione del piano colla linea secondo cui il cono taglia la superficie. Ripetendo per r_2, r_3, r_4, r_5 ciò che è stato detto per r_1 si troverebbero cinque fasci di piani aventi con quella linea d'intersezione un contatto cinquipunto in A: dunque A è almeno quintuplo per essa poichè una curva cui un punto quadruplo ammette soltanto quattro fasci di piani che abbiano ivi con essa un contatto cinqui-

punto. Tanto basta per concludere che tutte le rette del cono considerato hanno un contatto tripunto colla superficie: poichè se almeno due sue generatrici r_6, r_7 avessero in A un contatto bipunto colla superficie il piano r_6 r_7 taglierebbe la superficie in una curva con un punto doppio in A e il cono nelle due rette r_6, r_7 non tangenti ai rami di quella curva: quindi soltanto 4 intersezioni del piano r_6 r_7 colla linea secondo cui il cono taglia la superficie si riunirebbero in A, contro quel che abbiamo dimostrato. Poichè se mai una sola generatrice del cono non avrebbe in A un contatto tripunto colla superficie: ma ciò si esclude osservando che per le ipotesi fatte le rette aventi in A un contatto tripunto colla superficie si succedono con continuità.

Un punto doppio pel quale il cono tangente è un vero e proprio cono di secondo ordine dicesi punto conico della superficie: si dice invece punto biplanare od uniplanare un punto doppio pel quale il cono tangente degeneri in una coppia di piani distinti o in una coppia di piani coincidenti.

Possiamo dare un esempio di tutte queste specie di punti.

Una curva simmetrica rispetto a un asse XY che abbia un punto doppio in un punto dell'asse, genera ruotando intorno ad esso una superficie di rivoluzione avente ivi un punto conico, il cono tangente essendo un cono circolare retto. Un punto della linea doppia di una superficie sviluppabile è evidentemente un punto biplanare; poichè esso fa parte di due falde della superficie e le rette aventi un contatto tripunto colla superficie passanti per esso sono appunto le tangenti a queste due falde condotte per quel punto. Invece un punto dello spigolo di regresso della superficie sviluppabile è evidentemente un punto uniplanare; il piano doppio in cui degenera il cono essendo il piano osculatore in quel punto allo spigolo di regresso.

Supponiamo che un punto A sia doppio per una superficie ed esaminiamo le sezioni prodotte in esso dai piani passanti per A.

Se il punto A è conico le sezioni hanno evidentemente in A un punto doppio che può essere a seconda dei casi un nodo, un regresso o un punto isolato: è un regresso nel caso che il piano segante tocchi il cono tangente alla superficie nel punto A.

Se il punto è biplanare un piano generico taglia la superficie in una curva avente in A un nodo; ma se il piano passa per l'intersezione dei due piani tangenti allora A è un punto di regresso per la curva sezione, la tangente nel punto di regresso essendo questa intersezione. I due piani tangenti tagliano infine la superficie in una curva avente in A un punto triplo.

Se il punto è uniplanare allora un piano generico taglia la superficie in una curva con un punto di regresso nel punto A, mentre il piano tangente taglia la superficie in una curva avente ivi un punto triplo.

Una linea si dice r^{pla} per una superficie quando in essa s'incontrino r falde della superficie; quindi un punto qualunque A d'una linea r^{pla} è evidentemente un punto r^{plo}; vedremo che essa costituiscono in tal caso le infinite rette aventi in A colla superficie un contatto (r+1)-punto.

Prescindendo dalle altre r-1 falde della superficie passanti pel punto A consideriamo il piano tangente in A a una falda della superficie: tutte le rette uscenti da A e contenute in questo piano avranno un contatto (r+1)-punto colla superficie, e quindi il luogo richiesto si compone di r piani. Un punto r^{plo} che gode di tale proprietà si dice r-planare, dunque:

"I punti di una linea r^{pla} sono tutti r-planari".

Correlativamente al punto doppio chiameremo piano doppio di un in-

viluppo un piano tale che per ogni sua retta passino due piani dell'inviluppo coincidenti con esso. Allora esisteranno in un piano doppio infinite rette per le quali passerà oltre il piano doppio un altro piano dell'inviluppo infinitamente vicino ad esso e che costituiranno un inviluppo di seconda classe. Da ciò segue che il piano doppio tocca la superficie aderente all'inviluppo in tutti i punti della conica inviluppata da quelle rette.

Quando l'inviluppo di seconda classe considerato degenera in una coppia di fasci di raggi, allora il piano doppio tocca in due punti distinti la superficie aderente e si chiama un piano bitangente della medesima: esso la taglia in una curva avente due punti doppii nei due punti di contatto.

Lasciamo al lettore la cura di mostrare per gli inviluppi tutte le proprietà correlative a quelle trovate per le superficie.

b) Superficie algebriche.

Rivolgiamoci adesso più particolarmente alle superficie algebriche, cioè a quelle di cui è possibile una rappresentazione analitica mediante un'equazione algebrica.

Sia pertanto $f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ una forma quaternaria di grado n delle quattro variabili x_1, x_2, x_3, x_4 e consideriamo la superficie rappresentata dall'equazione

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0 \; ;$$

il grado della f esprimerà nel tempo stesso, come si verifica facilmente, il numero dei punti che una retta qualunque dello spazio ha a comune colla superficie e l'ordine di una sua qualunque sezione piana. Esso sarà chiamato per questo l'ordine della superficie.

Segue ancora da ciò che se una retta ha $n+1$ punti a comune con una superficie d'ordine n, la retta giace per intero sulla superficie, e quindi

che: "Una superficie d'ordine n con un punto n^{plo} è un cono d'ordine n col vertice in quel punto."

Due superficie algebriche d'ordine n ed m rispettivamente hanno a comune una curva gobba algebrica di ordine nm, e tre superficie algebriche d'ordine n, m, p rispettivamente hanno in generale a comune soltanto nmp punti. Tutto ciò si dimostra con tutta facilità facendo ragionamenti analoghi a quelli fatti a proposito delle curve algebriche piane.

Se si ordina la forma quaternaria f di grado n secondo le potenze di una delle variabili, per es. di x_1 si trova che essa può scriversi sotto la forma:

$$u_0\, x_1^n + u_1 x_1^{n-1} + \dots\dots u_{n-1} x_1 + u_n$$

dove u_s è una forma ternaria di grado s delle tre variabili x_2, x_3, x_4. Risulta da ciò, siccome la u_s contiene $\frac{(s+1)(s+2)}{2}$ termini, che la f contiene $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$ termini e quindi l'equazione:

$$f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6} - 1$ coefficienti indipendenti.

Se indichiamo per brevità questo numero col simbolo $N(n)$ abbiamo subito il teorema:

"Per $N(n)$ punti generici dello spazio passa una ed una sola superficie d'ordine n"

Cerchiamo allora che cosa costituiscono le ∞^1 superficie d'ordine n passanti per $N(n)-1$ punti. Esse per ragioni vedute già altre volte, saranno tutte rappresentate dall'equazione

$$1) \qquad f + \lambda\varphi = 0$$

dove f e φ sono forme quaternarie di grado n e λ è un parametro variabile che può assumere tutti i valori tra $-\infty$ e $+\infty$. I punti della curva d'ordine n^2 comune alle due superficie rappresentate dalle equazioni

$$f = 0 \qquad \varphi = 0$$

soddisfano colle loro coordinate all'equazione 1) qualunque sia λ, dunque:

"Le ∞^1 superficie d'ordine n che possano per $N(n)-1$ punti e che si dicono costituire un fascio hanno a comune altri infiniti punti costituenti una curva d'ordine n^2."

Così le quadriche di un fascio di quadriche hanno a commune i punti di una quartica gobba, le superficie di terz'ordine appartenenti ad un fascio hanno a commune i punti di una curva gobba del nono ordine.

Le ∞^2 superficie di ordine n passanti per $N(n)-2$ punti generici dello spazio sono tutte rappresentate dall'equazione

$$f + \lambda\varphi + \mu\psi = 0$$

ove λ e μ sono parametri variabili ed f, φ e ψ sono forme quaternarie di grado n, e si dice che costituiscono una rete di superficie d'ordine n.

Ora le superficie

$$f = 0 \quad \varphi = 0 \quad \psi = 0$$

hanno n^3 punti communi e questi si trovano su tutte le superficie della rete, dunque:

"Le ∞^2 superficie d'ordine n passanti per $N(n)-2$ punti hanno oltre quelli altri

$$n^3 - N(n) + 2$$

punti a comune, determinati completamente da quelli.

Così le quadriche passanti per sette punti hanno un ottavo punto a comune pienamente individuato mediante quei sette, e le superficie del terz'ordine passanti per 17 punti contengono altri 10 punti individuati da quelli.

Volendo studiare adesso le singolarità delle superficie algebriche risolviamo anzitutto il problema di trovare i punti che una retta ha a comune con una superficie d'ordine n, ricorrendo al solito metodo di Joachimstal.

Se $Y \equiv y_i$ e $Z \equiv z_i$ sono due punti qualunque della retta considerata tutti gli altri punti della retta avranno coordinate della forma $\lambda y_i + \mu z_i$ e quindi; se

$$f(x_1\, x_2\, x_3\, x_4) = 0$$

è l'equazione di una superficie φ^n d'ordine n, si otterranno i punti richiesti trovando gli n valori del rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$

che soddisfano all'equazione di grado n in $\frac{\lambda}{\mu}$

$$f(\lambda y_1 + \mu z_1\,,\ \lambda y_2 + \mu z_2\,,\ \lambda y_3 + \mu z_3\,,\ \lambda y_4 + \mu z_4) = 0$$

ossia all'equazione:

$$2)\ \lambda^n f(y_1 y_2 y_3 y_4) + \dots \frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{2!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(2)} + \dots \frac{\mu^n}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(n)} = 0$$

dove il simbolo

$$\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(r)}$$

ha il solito significato.

Supponiamo che il punto $Y \equiv y_i$ si trovi sulla superficie φ^n; allora

$$f(y_1\, y_2\, y_3\, y_4) = 0$$

e l'equazione 2) ammette la radice $\mu = 0$ ossia $\frac{\lambda}{\mu} = \infty$, con che si trova naturalmente il punto Y.

Liberata la 2) da questa radice, ossia diviso il primo membro per μ, la 2) si riduce a:

$$3)\ \frac{\lambda^{n-1}}{1}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right) + \frac{\lambda^{n-2}\mu}{2!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(2)} + \dots \frac{\mu^{n-1}}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)$$

e questa equazione di grado $n-1$ nel rapporto $\frac{\lambda}{\mu}$ ci darà gli $n-1$ punti rimanenti che la retta YZ ha a comune con φ^n.

Se la retta YZ ha un contatto bipunto colla superficie, questa equazione dovrà ammettere di nuovo la radice $\frac{\lambda}{\mu} = \infty$ cioè il suo primo membro dovrà essere divisibile nuovamente per μ e quindi sarà:

$$4)\quad z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}=0$$

Viceversa se le coordinate del punto Z soddisfano alla 4) la retta YZ ha un contatto bipunto colla superficie φ^n e quindi se essa non è identica cioè non si ha contemporaneamente:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

si ha che tutte le rette aventi un contatto bipunto colla superficie giacciono nel piano rappresentato dall'equazione 4), ove in essa si considerino le z come coordinate correnti. Questo piano, passante evidentemente per Y, poichè per il teorema d'Eulero

$$y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\dots y_4\frac{\partial f}{\partial y_4}=n f(y_1 y_2 y_3 y_4)=0$$

è il piano tangente alla superficie nel punto Y.

Nel caso in cui si abbia

$$\frac{\partial f}{\partial y_i}=0 \quad (i=1,2,3,4)$$

ogni retta uscente da Y ha ivi un contatto bipunto colla superficie e quindi Y è un punto doppio della superficie medesima.

Allora l'equazione che dà gli $n-2$ punti rimanenti che la retta YZ ha a comune colla superficie φ^n sarà la seguente:

$$5)\ \frac{\lambda^{n-2}}{2!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(2)}+\dots\frac{\mu^{n-2}}{n!}\left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\dots z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(n)}=0$$

e si otterranno le rette aventi un contatto tripunto colla superficie nel punto Y, proiettando da Y i punti Z che colle loro coordinate z_i soddisfano all'equazione quadratica:

$$6)\qquad \left(z_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial y_2}+z_3\frac{\partial f}{\partial y_3}+z_4\frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(2)}=0$$

Questa equazione quando non sia identicamente soddisfatta cioè quando nel punto Y non siano nulle tutte le derivate seconde della f rappresenta un cono di second'ordine col vertice in Y, dunque le rette che hanno un contatto tripunto con φ^n nel suo punto doppio Y giacciono, come ci era noto per altra via, sopra un cono del second'ordine.

Se le derivate seconde della f fossero tutte nulle nel punto Y, ma non fossero tali tutte le derivate terze, allora il punto Y sarebbe un punto triplo di φ^n poichè ogni retta passante per Y avrebbe con essa un contatto tripunto, e le rette aventi colla φ^n un contatto quadripunto in Y giacerebbero sul cono di terz'ordine rappresentato dall'equazione

$$\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots \; z_4 \frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(3)} = 0$$

considerando le z_i come coordinate correnti.

Così continuando possiamo evidentemente enunciare il seguente teorema generale:

"Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto Y sia r^{plo} per una superficie φ^n rappresentata dall'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

è che nel punto Y si annullino tutte le derivate $(r-1)^{esime}$ della f ma non tutte le r^{me}. Allora le rette aventi un contatto $(r+1)$- punto colla φ^n giaceranno sul cono di $r°$ ordine rappresentato dall'equazione

$$\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \dots \; x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4}\right)^{(r)} = 0$$

Di qui risulta, come altra volta per le curve algebriche piane, che una superficie generale d'ordine n non am-

mette punti multipli, poichè l'esistenza di tali punti porta a relazioni tra i coefficienti dell'equazione della superficie, che in generale non sono soddisfatte.

Correlativamente alle superficie algebriche noi potremmo considerare gli inviluppi algebrici cioè quelli di cui è possibile una rappresentazione analitica mediante equazioni algebriche fra coordinate di piano. Allora troveremmo che ogni inviluppo algebrico ha una classe, che è nel tempo stesso il grado dell'equazione che lo rappresenta, il numero dei suoi piani passanti per una retta arbitraria dello spazio, e la classe di un suo qualunque cono circoscritto, e troveremmo teoremi correlativi ai precedenti per l'esistenza dei piani doppi, tripli .... r^{pli}; ma noi lasciamo la cura di ciò al lettore.

Si chiama classe di una superficie algebrica, la classe del suo inviluppo aderente, inviluppo che è evidentemente algebrico; e sull'ordine della superficie è in la classe m, in generale è data da:

$$m = n(n-1)^2$$

Per dimostrar questo introduciamo le seguenti denominazioni.

Se $Y \equiv y_i$ è un punto qualunque dello spazio si chiama piano polare del punto rispetto alla superficie φ^n di equazione

$$f(x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = 0$$

il piano rappresentato dall'equazione

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} = 0$$

cosicchè se, in particolare, il punto Y giace su φ^n il piano polare coincide col piano tangente. Inoltre si chiama prima polare del punto Y rispetto a φ^n la superficie d'ordine $n-1$ rappresentata dall'equazione:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\ y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 :$$

e in generale si chiama $\underline{r}^{ma}$ polare del punto Y la superficie d'ordine $n-r$ rappresentata dall'equazione

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots\ y_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}\right)^{(r)} = 0$$

Allora presso un punto qualunque $Y \equiv y_i$ sia a un piano tangente a φ^n nel punto $Z \equiv z_i$ e passante per Y: dovrà essere

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots\ y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

cioè il punto Z dovrà trovarsi oltre che su φ^n anche sulla prima polare del punto Y. Viceversa se Z è un tal punto si ha:

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \dots\ y_4 \frac{\partial f}{\partial z_4} = 0$$

e quindi il piano tangente alla superficie φ^n nel punto Z passa per Y.

Segue da ciò che se sopra una retta si scelgono due punti qualunque Y e Y' i piani tangenti alla superficie φ^n passanti per essa toccano la superficie in punti appartenenti alle prime polari di Y ed Y': ma questi punti sono $n(n-1)^2$ dunque questo sarà il numero dei piani tangenti di φ^n passanti per la retta YY', ossia la classe richiesta di φ^n.

Correlativamente si otterrebbe che l'ordine della superficie aderente ad un inviluppo di piani di m^a classe è dato da $m(m-1)^2$: ma tanto in questo caso che nel precedente noi supponiamo che non vi siano elementi singolari, i quali richiederebbero una più completa discussione.

Capitolo VIII.

Superficie gobbe.

Noi diremo superficie rigata la superficie descritta da una retta che si muove con continuità nello spazio secondo una determinata legge, assumendo una semplice infinità di posizioni. Le rette di una superficie rigata si dicono le sue generatrici.

Una superficie rigata di cui ogni generatrice incontri la successiva è una superficie sviluppabile per ragioni che ormai ci sono note: mentre una superficie rigata di cui due generatrici successive generiche ~~che~~ non s'incontrano si dice superficie gobba ed è appunto di queste superficie che noi intendiamo occuparci nel presente capitolo.

Quelle generatrici di una superficie gobba in numero finito che in via d'eccezione incontrano le generatrici successive saranno dette generatrici singolari.

Sia adesso A un punto qualunque di una superficie gobba e g la generatrice passante per A; una delle due rette osculatrici della superficie passanti per A coinciderà evidentemente con g, l'altra si otterrà tirando per A la retta t che si appoggia alle due generatrici successive a g, g' e g'' poichè questa retta ha colla superficie tre punti successivi a comune. Allora il piano gt è evidentemente il piano tangente alla superficie nel punto A e quindi si ha che se il punto A si muove sulla retta g il piano α tangente alla superficie in A descrive il fascio g e se A descrive tutta la retta g il piano α descrive pure evidentemente tutto il fascio g. Ora il piano $\alpha \equiv gt$ tangente nel punto A alla superficie gobba considerata tocca in A anche la quadrica rigata determinata dalle tre rette g, g', g'', dunque ricorrendo a un noto teorema su queste superficie si ha che:

"I piani tangenti ad una superficie gobba nei punti di una sua generatrice costituiscono un fascio avente per asse la generatrice stessa e proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto" (Chasles).

La quadrica determinata dalle tre rette g, g', g'' si chiama quadrica osculatrice della superficie lungo la generatrice g.

Due superficie gobbe qualunque abbiano una generatrice a comune g: allora un piano qualunque α condotto per g tocca la prima superficie in un certo punto A di g e la seconda in un certo punto A', e se si fa ruotare α intorno a g A ed A' si muovono su g descrivendo due punteggiate proiettive al fascio descritto da α e quindi proiettive fra di loro. Da ciò segue che le due superficie si toccano nei due punti uniti di queste punteggiate e che, in particolare, se le due superficie si toccano in tre punti di g allora si toccano in ogni altro punto della retta stessa. In quest' ultimo caso si dice che le due superficie gobbe si raccordano lungo la generatrice g.

Sia g una generatrice qualunque di una superficie gobba Σ e sia g' la generatrice successiva a g: io dico che vi sono infinite quadriche che si raccordano con Σ lungo la stessa retta g.

Infatti se g'' è un' altra generatrice qualunque di Σ e t una retta che uscendo da un punto A di g si appoggia a g' e g'' il piano gt è evidentemente tangente nel punto A tanto a Σ quanto alla quadrica determinata da g, g' e g'' e quindi potendo ripetere questo ragionamento per ogni punto di g, la quadrica suddetta si raccorda con Σ lungo la generatrice g.

Fra le quadriche che si raccordano con una superficie gobba lungo una sua generatrice si capisce che è più particolarmente interessante la quadrica osculatrice lungo la generatrice medesima, come quella che ha la più intima connessione possibile colla superficie.

"Le normali ad una superficie gobba Σ nei punti di una sua generatrice g costituiscono una serie rigata di un paraboloide iperbolico equilatero."

Infatti se in un piano σ perpendicolare a g in un suo punto qualunque M si tirano le perpendicolari a tutti i piani del fascio g si ottiene un fascio di raggi proiettivo evidentemente a questo fascio di piani che taglia la retta all'infinito di σ in una punteggiata projettiva al fascio medesimo e quindi projettiva alla punteggiata dei punti di contatto dei suoi piani. Segue da ciò che le normali a Σ nei punti di g non essendo altro che le congiungenti dei punti di questa punteggiata coi punti ad essi corrispondenti in quella punteggiata all'infinito costituiscono una serie rigata di un paraboloide iperbolico.

Le giaciture dei piani direttori di questo paraboloide sono ortogonali fra di loro, quindi il paraboloide è equilatero.

Presa una generatrice di una superficie gobba Σ si chiama piano assintotico della superficie lungo quella

generatrice il piano tangente a Σ nel punto all'infinito di g: esso è parallelo alla generatrice successiva g' perchè la retta congiungente i punti all'infinito di g e g' come congiungente due punti successivi di Σ tocca Σ nel punto all'infinito di g e quindi deve essere contenuta nel piano assintotico: questo allora passando pel punto all'infinito di g' è parallelo a g'.

Se MN è la minima distanza fra le due generatrici g e g', il piano g MN tangente a Σ nel punto M è perpendicolare al piano assintotico lungo g, quindi siccome si chiama linea di gola o di stringimento di Σ il luogo del piede sopra g della minima distanza fra essa g e la successiva g', al variare di g, si può dire che la linea di gola è anche il luogo del punto di g nel quale il piano tangente è perpendicolare al piano assintotico lungo g.

Supponiamo ora che senza super

ficie gobba Σ sia algebrica e che sia n il suo ordine: allora una retta qualunque taglierà n generatrici di Σ e ciascuna di queste determinerà con quella retta un piano tangente di Σ. Segue da ciò che per una retta qualunque passano n piani tangenti di Σ, e quindi, poichè la considerazione può invertirsi, si trova che l'ordine di una superficie gobba è uguale alla classe.

Il loro valore comune si indica col nome di grado.

Come abbiamo già osservato in una superficie gobba non vi è che un numero finito di generatrici che incontrino le generatrici successive, e quindi corrispondentemente un numero finito di elementi sviluppabili della superficie. Per i punti di una generatrice singolare si possono ripetere tutte le cose dette per le superficie sviluppabili così per es. il piano tangente è lo stesso per tutti i punti della generatrice e precisamen-

te è il piano contenente quella generatrice e la generatrice successiva.

Però come vedremo, per una superficie gobba di grado superiore al 2.° una generatrice incontra sempre un certo numero di generatrici non successive ad essa e quindi abbiamo sulla superficie una linea, costituita da questi punti d'intersezione, nella quale si tagliano due falde della superficie, ossia una linea doppia. Essa conterrà in particolare anche quel numero finito di punti a cui danno luogo le generatrici singolari incontrando le loro successive, punti, che per una proprietà facile a dimostrare, si dicono punti cuspidali della superficie.

Infatti un piano qualunque taglia la superficie in una curva avente tanti punti doppii quanti sono i punti in cui esso taglia la linea doppia: ma se il piano passa per uno dei punti cuspidali la curva sezione ha in esso evidentemente un punto di regresso (o cuspide)

Occupiamoci più davvicino di questa linea doppia e dimostriamone l'esistenza per $n > 2$.

Se la superficie gobba è di grado n un piano qualunque passante per una sua generatrice g la taglia in una curva d'ordine n la quale si spezza nella retta g e in una curva residua di ordine $n-1$ tagliata dalla retta g in $n-1$ punti. Di questi $n-1$ punti, doppii tutti per la curva sezione, siccome il piano considerato è tangente alla superficie uno sarà il punto di contatto, gli altri $n-2$ saranno effettivi punti doppii della superficie. Essi saranno punti nei quali la generatrice è incontrata da altre $n-2$ generatrici non successive.

Questo dimostra l'esistenza della linea doppia se $n > 2$.

Correlativamente alla linea doppia si può definire la sviluppabile bitangente di una superficie gobba:

essa è costituita dai piani contenenti due generatrici della superficie e contiene quel numero finito di piani che sono determinati dalle generatrici singolari e dalle loro generatrici successive.

Questi piani si dicono piani di flesso della superficie: poichè se si considera il cono circoscritto alla superficie relativo a un punto di un tal piano, questo è pel cono un piano di flesso.

La sviluppabile bitangente esiste effettivamente per superficie gobba di grado superiore al 2° poichè è chiaro oramai che per ogni generatrice di una superficie gobba di grado n passano $n-2$ piani bitangenti e quindi $n-2$ piani della sviluppabile.

Indichiamo con d l'ordine della linea doppia di una superficie gobba Σ di grado n, con δ la classe della sviluppabile bitangente; io dico che $d = \delta$.

Infatti se noi tagliamo la superficie Σ con un piano generico otteniamo una curva di ordine n la quale avrà d punti doppii e nessun punto di regresso, poichè il piano essendo qualunque non passerà per alcun punto cuspidale di Σ: e se projettiamo tutte le generatrici di Σ da un punto generico otteniamo il cono circoscritto a Σ relativo a quel punto, cono che sarà di classe n, avrà δ piani doppii e nessun piano di flesso, perchè il punto essendo generico non si troverà su alcun piano di flesso di Σ. Per le formule di Plücker la classe della curva e l'ordine del cono sono dunque dati rispettivamente da

$$m = n(n-1) - 2d \qquad r = n(n-1) - 2\delta;$$

ma $m = r$ perchè tanto m che r rappresentano il numero delle tangenti della superficie esistenti in un piano e passanti per un punto, dunque

$$n(n-1) - 2d = n(n-1) - 2\delta \quad \text{e} \quad d = \delta.$$

Un modo molto comune di generare superficie gobbe è il seguente: si prendono tre curve qualunque (piane o gobbe) C_1, C_2, C_3 e si considerano le ∞^1

rette che si appoggiano contemporaneamente a C_1, C_2, C_3: esse riempiono una superficie gobba di cui C_1, C_2, C_3 si dicono curve direttrici e che si indica scrivendo $(C_1 C_2 C_3)$.

Supponendo che le curve C_1 C_2 C_3 siano algebriche siano m_1, m_2, m_3 i loro ordini rispettivi e sia A un punto qualunque di C_1: si otterranno le generatrici della superficie passanti per A considerando i coni che da A proiettano le curve C_2 e C_3 e cercando le loro generatrici comuni. Ora questi coni sono rispettivamente di ordine m_2 ed m_3 dunque pel punto A passano $m_2 m_3$ generatrici della superficie generale Σ, e la curva C_1 è una linea $(m_2 m_3)^{pla}$ della superficie Σ.

Similmente C_2 e C_3 sono linee multiple di Σ di ordine $m_3 m_1$, $m_1 m_2$ rispettivamente.

Adesso vogliamo determinare il grado μ de Σ in funzione degli ordini m_1, m_2, m_3 di C_1, C_2, C_3.

Per questo osserviamo che μ è il

numero dei punti che una retta arbitraria r ha a commune colla superficie Σ ossia il numero delle rette che si appoggiano contemporaneamente a C_1, C_2, C_3, r, e quindi μ è anche uguale al numero dei punti che la curva C_1 ha a commune colla superficie gobba $(C_2 C_3 r)$. Essendo m_1 l'ordine di C_1, se μ_1 è il grado di questa superficie si ha dunque:

$$\mu = m_1 \mu_1 .$$

Ora per la medesima ragione

$$\mu_1 = m_2 \mu_2$$

se μ_2 è il grado della superficie gobba avente per direttrici la curva C_3, la retta r ed un'altra retta qualunque s; e nel medesimo modo

$$\mu_2 = 2 m_3$$

poichè la superficie gobba $(r s t)$, ove t è una retta qualunque dello spazio è del secondo grado, dunque finalmente

$$\mu = 2 m_1 m_2 m_3$$

Abbiamo veduto in generale che una generatrice di una superficie

gobba di grado n è incontrata da altre $n-2$ generatrici: nel nostro caso una generatrice qualunque g di Σ sarà incontrata da altre $2m_1 m_2 m_3 - 2$ generatrici. Ora se g taglia $C_1 C_2 C_3$ in A_1, A_2, A_3 rispettivamente, $m_2 m_3 - 1$ di queste generatrici passano per A_1, $m_3 m_1 - 1$ per A_2 ed $m_1 m_2 - 1$ per A_3 dunque la generatrice g è incontrata fuori dei punti A_1, A_2, A_3 da altre

$$N = 2 m_1 m_2 m_3 - (m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2) + 1$$

generatrici.

Questo numero N è nullo se due delle curve direttrici sono rettilinee.

Questi risultati vanno modificati nel caso che le curve direttrici $C_1 C_2 C_3$ abbiano qualche punto a commune.

Infatti se per es. C_2 e C_3 hanno un punto a commune il cono che dal vertice A proietta la curva C_1 fa parte per un certo rispetto della superficie gobba $(C_1 C_2 C_3)$; ma se noi vogliamo considerare soltanto le rette che si appoggiano a C_1, C_2, C_3 in punti distinti,

Risp: 65a.

dobbiamo escludere dalla superficie quel cono d'ordine m_1 e quindi il grado della superficie si abbassa a $2m_1m_2m_3 - m_1^2$ e l'ordine di molteplicità della linea C_1 non è più m_2m_3 ma m_2m_3-1.

Segue da ciò che se le curve C_1, C_2 hanno δ_{12} punti a comune, C_2 e C_3 δ_{23} punti a comune e C_3 e C_1 δ_{31} punti a comune, il grado della superficie gobba $(C_1 C_2 C_3)$ è

$$2m_1m_2m_3 - \delta_{23}m_1 - \delta_{31}m_2 - \delta_{12}m_3$$

e le curve C_1, C_2, C_3 sono linee multiple della superficie degli ordini

$$m_2m_3 - \delta_{23} \quad m_3m_1 - \delta_{31} \quad m_1m_2 - \delta_{12}$$

rispettivamente.

Un altro modo di generazione delle superficie gobbe che ci sarà poi utile per risolvere un importante problema sulla superficie gobba avente per direttrici le tre curve C_1, C_2, C_3, è il seguente.

Consideriamo una retta r ed una curva gobba C_1 priva di punti doppii effettivi d'ordine m_1, con h_1 punti doppii apparenti, e della congruen-

za costituita dalle bisecanti di C_1 consideriamo le ∞^1 rette che si appoggia[no] ad r: esse costituiranno una superficie gobba Σ_1 di grado

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2} + h_1.$$

Infatti per ogni punto della retta r passano h_1 generatrici di Σ_1 e quindi la retta r è una linea h_1^{pla} della superficie medesima. Allora un piano qualunque passante per r taglia Σ_1 in una curva di cui fa parte la retta r contata h_1 volte; di più se P è un altro suo punto qualunque e p la generatrice di Σ_1 passante per esso, la retta p dovendo incontrare an[che] r giace per intero nel piano condotto per r e quindi fa parte della curva-sezione considerata. Essa consterà pertanto della retta r contat[a] h_1 volte e di tutte le generatrici di Σ_1 contenute nel suo piano, le quali poichè C_1 ha m_1 punti a comune con un piano qualunque dello spa[zio], saranno $\frac{m_1(m_1-1)}{2}$; quindi il suo ordine che è anche il grado di Σ_1, dato da:

$$\frac{m_1(m_1-1)}{2}+h_1.$$

Segue da questo teorema che il grado della superficie gobba Σ_2 costituita dalle bisecanti di C_1 appoggiantesi ad una curva C_2 d'ordine m_2 è dato da:

$$m_2\left[\frac{m_1(m_1-1)}{2}+h_1\right]$$

Infatti il grado di Σ_2 uguaglia il numero delle bisecanti di C_1 che si appoggiano contemporaneamente a C_2 e ad una retta arbitraria r dello spazio, od anche, il che fa lo stesso il numero delle generatrici della superficie Σ_1, formata dalle bisecanti di C_1 appoggiantesi ad r, che incontrano C_2. L'ordine di C_2 è m_2; dunque tale numero, che è anche uguale al numero dei punti che C_2 e Σ_1 hanno a comune, è dato da:

$$m_2\left[\frac{m_1(m_1-1)}{2}+h_1\right]$$

Consideriamo adesso la superficie gobba Σ generata dalle tre curve C_1, C_2, C_3 d'ordine m_1, m_2, m_3 con h_1, h_2, h_3 punti doppii apparenti, e cerchiamo quante generatrici doppie ha la superficie Σ.

Una generatrice che sia bisecante di C_1 per es. è evidentemente una generatrice doppia di Σ e viceversa, dunque troveremo tutte queste generatrici doppie cercando le bisecanti di ciascuna delle tre curve C_1, C_2, C_3 che si appoggiano alle altre due.

Ma pei teoremi precedenti il numero delle bisecanti di C_1 per es. che si appoggiano a C_2 e C_3 è dato da

$$m_2\,m_3\left[\frac{m_1(m_1-1)}{2}+h_1\right]$$

dunque il numero richiesto è dato da:

$$m_2m_3\left[\frac{m_1(m_1-1)}{2}+h_1\right]+m_3m_1\left[\frac{m_2(m_2-1)}{2}+h_2\right]+m_1m_2\left[\frac{m_3(m_3-1)}{2}+\right.$$

ossia da:

$$m_1m_2m_3\left[\frac{m_1+m_2+m_3-3}{2}+\frac{h_1}{m_1}+\frac{h_2}{m_2}+\frac{h_3}{m_3}\right]$$

Come applicazione della teoria generale precedente faremo adesso un breve studio della superficie gobba algebrica più semplice dopo le quadriche rigate, cioè della superficie gobba del terzo grado.

Sia pertanto Σ una tale superficie e supponiamo che essa non si spezzi in superficie di grado inferiore: una retta qualunque dello spazio che non giaccia su di essa la incontrerà in tre punti e sarà situata su tre dei suoi piani tangenti.

Consideriamo quattro generatrici qualunque di Σ, g, g', g'', g''' e siano d ed s le rette che si appoggiano contemporaneamente ad esse: le rette d ed s apparterranno per intero a Σ poiché hanno con essa quattro punti a comune, cioè i punti ove incontrano quelle quattro generatrici. - Io dico che le rette d ed s si appoggiano a tutte le generatrici di Σ, o, in altri termini, che le rette d ed s non variano se invece di considerare quelle quattro generatrici se ne considerano altre quattro qualunque.

Per questo immaginiamo di tener ferme le generatrici g, g' e g'' e di fare assumere a g''' le posizioni di tutte le generatrici rimanenti di Σ,

se per ogni quaterna di generatrici che così si ottengono delle rette d ed s una almeno variasse la quadrica determinata dalle tre rette g, g', g'' e la superficie Σ avrebbero infinite rette a comune. -

Ma una superficie di terzo grado irriducibile e una di secondo hanno soltanto una linea del sest'ordine a comune, dunque le rette d ed s non variano al variare di g''' e il teorema resta dimostrato.

Sappiamo da un teorema generale che in una superficie gobba di grado n ogni generatrice è incontrata da altre $n-2$ e che i punti d'intersezione descrivono al variare della generatrice la linea doppia della superficie, dunque nel caso nostro ogni generatrice g di Σ è incontrata da un'altra g' e il punto d'intersezione descrive al variare della generatrice g la linea doppia di Σ. - Ora il punto gg' deve trovarsi sopra d o sopra s, poiché se ciò non fosse, siccome g e g'

si appoggiano a d ed s, il piano gg' conterrebbe anche le rette d ed s ed avrebbe a comune colla superficie gobba di terzo grado irriducibile una linea del 4° ordine spezzata nelle quattro rette g, g', d, s. E siccome al variare della generatrice g con continuità il punto gg' deve pure variare con continuità e descrivere la linea doppia di Σ, così segue che questa linea doppia si confonde o con d o con s. Supponendo che essa coincida con d, chiameremo la retta d direttrice doppia della superficie Σ, e la retta s direttrice semplice della superficie medesima.

Riassumendo abbiamo il seguente teorema:

"Le generatrici di una superficie gobba di terzo grado Σ si appoggiano tutte a due rette dette le direttrici della superficie. Per ogni punto di una di esse passano due generatrici della superficie, e quindi si chiama direttrice doppia; per ogni punto

dell'altra ne passa una sola e quindi si dice direttrice semplice. La direttrice doppia costituisce la linea doppia della superficie, e tutti i suoi punti sono biplanari, i due piani tangenti essendo i piani che da d proiettano le due generatrici della superficie passanti per essa. Correlativamente ogni piano passante per la direttrice semplice è un piano bitangente della superficie (onde la sviluppabile bitangente si riduce al fascio che ha per asse questa direttrice), i punti di contatto essendo i punti ove essa è incontrata dalle due generatrici contenute in quel piano.

Un piano generico π taglia la superficie Σ in una curva del terz'ordine con un punto doppio nel punto πd: ma se il piano π passa per una generatrice g allora la curva del terz'ordine si spezza nella retta g e in una conica passante pel punto gd, poichè questo punto deve essere sempre doppio per la curva-sezione.

Il secondo punto che la conica ha a comune colla retta g è evidentemente il punto di contatto del piano π. Se in casi ancora più particolari il piano π passa per la direttrice semplice s o per la direttrice doppia d allora, come è chiaro, la curva di terz'ordine si scinde in tre rette ed ha tre punti doppii o si scinde in due rette di cui una, d, va contata due volte, ed ha un punto triplo.

Correlativamente il cono circoscritto alla superficie Σ relativo a un punto generico P è un cono di terza classe con un piano doppio nel piano Ps che proietta da P la direttrice semplice, mentre se il punto P giace su di una generatrice g il cono si scinde nel fascio di piani g e in un cono di seconda classe contenente il piano gs.

Consideriamo un piano π passante per una generatrice di Σ; la sezione si comporrà della retta g e di una conica γ passante pel

punto gd, e ogni generatrice di Σ si appoggierà non solo a d ed s ma anche a γ. Quindi la superficie Σ si può anche immaginare come generata da tutte le rette che si appoggiano contemporaneamente a d, s, e γ.

Reciprocamente, per teoremi generali sulle superficie gobbe generate da direttrici curvilinee, è evidente che:

"La superficie gobba avente per direttrici due rette d ed s ed una conica γ che si appoggi a una di esse, a d per es. è una superficie gobba di terzo grado, di cui d è la direttrice doppia ed s la direttrice semplice.

Sia adesso π' un piano passante per un'altra generatrice g' e sia γ' la conica secondo cui il piano π' taglia ulteriormente la superficie Σ: la conica γ' passerà pel punto dg' e incontrerà inoltre γ in un punto della retta $\pi\pi'$. Infatti la retta $\pi\pi'$ ha a comune con Σ tre punti i quali devono trovarsi contemporaneamente sulle curve secondo cui Σ è tagliata da π e π': di questi, due sono i punti ove essa incontra le generatrici g e g', e il terzo sarà un punto comune a γ e γ'.

Segue da ciò che la superficie Σ può ancora pensarsi come costituita da tutte le rette che si appoggiano contemporaneamente a d, γ e γ', queste tre linee avendo due a due un punto a comune: ed è chiaro inversamente per i soliti teoremi che:

"La superficie gobba avente per direttrici una retta d e due coniche γ e γ', le quali si appoggiano alla retta d ed hanno un punto a comune fra di loro, è una superficie gobba di terzo grado avente la direttrice d per direttrice doppia."

Una quadrica rigata passante per due generatrici g e g' di Σ e per la sua direttrice semplice s taglia la superficie medesima in una linea del 6° ordine composta delle tre rette g, g', s e di una cubica residua, in generale, irriducibile. Questa cubica deve passare pei due punti dg e dg' perchè essi

sono punti doppii per la superficie Σ e semplici per la quadrica e quindi devono essere almeno doppii per la curva intersezione di 6° ordine; e deve anche passare per un punto della direttrice semplice s. Infatti le rette della quadrica si distribuiscono in due sistemi di rette l'uno costituito di tutte bisecanti della cubica, l'altro di tutte unisecanti. Ora una retta della quadrica che incontri g e g' taglia la superficie Σ in tre punti di cui due sono i suoi punti d'incontro con g e g' e il terzo giace sulla cubica quindi essa è, come anche la retta s, una unisecante della cubica. Il sistema delle bisecanti è il sistema cui appartengono g e g'.

Segue da tutto ciò che la superficie Σ può immaginarsi come generata da tutte le rette che si appoggiano contemporaneamente a d ed s, ed alla cubica trovata, ed è evidente, sempre colla scorta di quei teoremi che noi possiamo anche enunciare la proposizione reciproca:

"La superficie gobba avente per direttrici una cubica gobba, una bisecante d e una unisecante s della cubica è una superficie gobba di terzo grado, di cui d è la direttrice doppia ed s è la direttrice semplice"

Un piano π passante per una generatrice g di Σ taglia ulteriormente la superficie in una conica J passante pel punto dg e un piano variabile intorno a d taglia la conica J e la direttrice s in due punti X ed Y che al suo variare descrivono sopra J e sopra s due serie di punti proiettive. Infatti tanto l'una quanto l'altra è prospettiva al fascio di piani d descritto da quel piano variabile.

Ma la retta XY è anche la generatrice di Σ giacente in quel piano, dunque la superficie medesima può pensarsi come riempita dalla totalità delle rette congiungenti i punti di J coi punti corrispondenti di s, poichè quando il piano variabile intorno a d ha descritto tutto il fascio, la generatrice

XY ha assunto alla sua volta le posizioni di tutte le generatrici di Σ.

Reciprocamente supponiamo di riferire proiettivamente i punti di una conica J e di una retta s posta fuori del piano di J: io dico che le rette congiungenti i punti omologhi costituiscono una superficie gobba del terzo grado.

Infatti la conica J e la retta s sono ambedue linee semplici per la superficie generata in tal modo perchè per ogni loro punto passa una ed una sola sua generatrice: e quindi un piano qualunque passante per la retta s taglierà la superficie in una curva del terz'ordine composta di tre rette semplici, cioè della retta s e delle due rette che congiungono i punti ove il piano incontra la conica J coi loro punti corrispondenti sopra s. Il piano della conica J taglierà anch'esso la superficie in una curva del terz'ordine spezzata nella conica J e nella retta che congiunge il punto H, che es ha a comune con s, col punto corrispondente H di f: dunque in ogni modo, la superficie considerata è una superficie del terzo grado.

La direttrice semplice è la retta s e la direttrice doppia passerà pel punto K ove la retta HH' incontra di nuovo la conica f, poichè pel punto K passa la generatrice HH' della superficie e la generatrice KK' congiungente il punto K di f col suo punto corrispondente K' di s.

Questa costruzione ci permette di considerare un caso particolare delle superficie gobbe di terzo grado osservato per la prima volta dal Cayley.

Supponiamo che, nella figura precedente, la retta s rimanendo sempre riferita proiettivamente alla conica f venga a passare pel punto K: allora la retta KK' si confonde con essa e si confonde con essa anche una delle due generatrici ulteriori che un piano qualunque passante per s ha a comune colla superficie: quindi essa è non solo direttrice semplice ma anche direttrice

doppia della superficie.

In questo caso il piano passante per la retta s e per la tangente a f nel punto K ha tre rette a comune colla superficie riunite nella s e quindi tocca la superficie medesima in tutti i punti di s. Ciò significa che dei due piani tangenti alla superficie nei punti di s che sono tutti punti biplanari, uno rimane fisso.

Lasciamo al lettore la cura di mostrare che la superficie di terzo grado si spezza in un piano e in una quadrica rigata quando la retta s incontra la conica f e nel loro punto a comune hanno un punto unito.

Un'ultima proprietà interessante della superficie gobba di terzo grado risulterà dalle considerazioni seguenti.

Sia f la conica secondo cui un piano passante per una generatrice g di Σ taglia ulteriormente la superficie medesima e consideriamo un piano variabile intorno ad s: esso taglierà la conica $\mathfrak{J}$ in due punti X ed X' che congiunti col punto ove esso taglia la retta d daranno le due generatrici g' e g'' che, oltre S, ha a comune colla superficie Σ. Ora i punti X ed X' descrivono sulla conica $\mathfrak{J}$ al variare di quel piano una serie di punti involutoria dunque anche i piani dg' e dg'' descriveranno al loro variare un fascio di piani involutorio: e siccome essi non sono altro che i piani tangenti alla superficie Σ nel suo punto biplanare $g'g''$, così segue senz'altro il teorema:

"Le coppie di piani tangenti a una superficie gobba di terzo grado nei punti della sua direttrice doppia costituiscono le infinite coppie di una involuzione.

Correlativamente possiamo dire:

"Le coppie dei punti di contatto dei piani bitangenti della superficie Σ costituiscono una involuzione di punti sulla sua direttrice semplice,

Consideriamo gli elementi doppii di ciascuna di queste involuzioni.

Un piano doppio dell'involuzione intorno a d è piano tangente in un punto uniplanare. Si hanno adunque sulla direttrice d due punti uniplanari (e corrispondentemente due generatrici singolari).

Se questi punti sono reali, dividono la linea doppia in due segmenti, uno solo dei quali è intersezione di falde reali della superficie. Se invece sono immaginarii, ogni punto della linea doppia è su due falde reali della superficie.

Correlativamente.

La superficie gobba di terzo grado ci può servire a far lo studio di una interessante curva gobba del quart'ordine.

Una superficie gobba del terzo grado Σ e una quadrica S che passi per la direttrice doppia d di Σ hanno a comune una linea del sesto ordine la quale si spezza nella retta d contata due volte e in una curva residua del quarto ordine C^4, detta quartica di seconda specie in opposizione alla quartica base di un fascio di quadriche che dicesi di prima specie. Che queste due quartiche siano essenzialmente distinte fra di loro segue subito osservando che le rette del sistema di S cui appartiene d incontrano la superficie gobba Σ in tre punti appartenenti tutti alla quartica C^4, mentre le rette dell'altro sistema tagliano la superficie Σ in tre punti di cui due coincidenti cadono su d, e il terzo soltanto cade su C^4. In altri termini le rette di un sistema sono tutte trisecanti di C^4 e le rette dell'altro sono tutte unisecanti, il che non avverrebbe se C^4 fosse una quartica base di un fascio di quadriche, poichè una tal quartica è incontrata in due punti dalle rette di tutte le quadriche passanti per essa (pag. 461)

Di più per la quartica C^4 passa la sola quadrica S: poichè se un'altra quadrica S' passasse per C^4 essa avrebbe a comune con S le rette del sistema di S cui appartiene d, giacchè queste

incontrando in tre punti C^4 incontrerebbero in tre punti anche la S' e quindi giacerebbero su di essa: allora le quadriche S ed S' avendo a comune tutte le rette di un sistema coinciderebbero.

Segue da ciò che la quartica gobba C^4 non può pensarsi come completa intersezione di due sole superficie, poichè il suo ordine essendo 4 le due superficie passanti per essa che dovrebbero determinarla completamente dovrebbero essere tutte e due del second'ordine.

Dimostriamo adesso che:

"Ogni curva gobba algebrica del quart'ordine irriducibile è una quartica gobba di prima o di seconda specie".

Sia C^4 una curva algebrica del quart'ordine irriducibile e si consideri la quadrica S passante per nove suoi punti qualunque: poichè C^4 è irriducibile ed ha nove punti a comune con la quadrica S giacerà per intero su di essa. Ora se α è un piano tangente qualunque di S i quattro punti che α ha a comune con C^4 dovranno essere situati sulle due rette che d ha a comune con S e quindi potranno essere situati in due modi differenti: o tre di essi giaceranno sopra una di queste rette e il quarto sarà situato sull'altra, o ciascuna delle due rette ne conterrà due, poichè è chiaro che una retta non può avere più di tre punti a comune con una curva gobba del quart'ordine irriducibile. Secondochè si dà il primo o il secondo caso si riconosce per un ragionamento analogo ad altro già fatto (pag. 278), che tutte le rette di un sistema di S sono trisecanti di C^4 mentre le rette dell'altro sono tutte unisecanti; oppure che tutte le rette di S sono bisecanti di C^4.

Supponiamo che si dia il primo caso. Sia d una retta di S trisecante di C^4 ed s una bisecante di C^4, situata certamente fuori di S e consideriamo la superficie gobba Σ avente per direttrici le rette d ed s e la curva C^4: siccome d incontra C^4 in tre

punti ed s la incontra in due la superficie gobba considerata sarà del terzo grado ed avrà la retta d per direttrice doppia e la retta s per direttrice semplice. La curva C^4 si trova adunque non solo sulla quadrica S ma anche sulla superficie gobba di terzo grado Σ avente per direttrice doppia una retta d di S e quindi è una quartica di seconda specie.

Siccome d è una qualunque trisecante di C^4 questo ragionamento mostra ancora che per una quartica di seconda specie passano infinite superficie gobbe di terzo grado.

Si dia invece il secondo caso: allora siccome da ogni punto di S partono due bisecanti di C^4 ciò avverrà per ogni altro punto dello spazio, poichè il numero delle bisecanti di una curva gobba algebrica qualunque passanti per un punto è costante.

Segue da ciò che se si considera una bisecante qualunque g di C^4 fuori della quadrica S e un piano variabile per essa la congiungente degli altri due punti che questo piano ha a comune con C^4 oltre i due punti di g descrive, al variare del piano intorno a g, una serie rigata di una quadrica S' passante per C^4 e distinta da S.

Infatti la retta g è certo una retta semplice della superficie S' poichè per ogni suo punto passa una sola generatrice di S' (cioè una sola bisecante di C^4) e quindi siccome un piano qualunque passante per g contiene oltre g un'altra sola generatrice di S', la superficie S' è una quadrica poichè da ognuno di questi piani è segata in una curva del second'ordine spezzata in due rette.

Adunque in questo caso la quartica C^4 è la completa intersezione delle due quadriche S ed S' ossia è di prima specie.

Troviamo adesso i numeri Cayleyani della quartica gobba di seconda specie comune alla quadrica S e alla superficie gobba di terzo grado Σ.

Per essa abbiamo intanto evidentemente $n=4$ ed $\alpha=0$, poichè la quadrica S e la superficie Σ non avendo fuori dei punti della direttrice doppia d di Σ altri punti doppii a comune e non essendo in generale tangenti fra di loro in alcun punto si tagliano oltre che in d in una curva del 4° ordine priva di punti doppii e quindi di punti di regresso.

Inoltre si ha $h=3$ poichè per un teorema invocato precedentemente il numero delle bisecanti di una curva gobba passanti per un punto qualunque è costante, e tale numero per la nostra quartica è uguale a tre poichè per un punto di S passa una trisecante della quartica, cioè tre bisecanti coincidenti con essa: dunque tutti gli altri numeri si troveranno ricorrendo alle formule di Cayley.

Noi non staremo qui a trascriverli poichè essi sono evidentemente uguali ai numeri Cayleyani di una quartica di prima specie con un punto doppio (pag. 478) poichè anche per questo si ha $n=4$, $h=3$, $\alpha=$

Disp.ª 68ª

Solo osserveremo che il genere della quartica di seconda specie è 0, mentre in generale la quartica di prima specie è di genere 1, e che il rango d'una quartica di seconda specie è dato da

$$r = 6$$

Ciò significa che la superficie sviluppabile F costituita dalle tangenti alla quartica di seconda specie C^4 comune alla quadrica S ed alla superficie gobba di terzo grado Σ è una superficie del sest'ordine.

Consideriamo la intersezione della superficie F colla quadrica S; essa sarà una linea del 12° ordine che si spezza nella C^4 contata due volte e in una curva residua del quart'ordine, poichè la curva C^4 essendo lo spigolo di regresso di F è una linea doppia per F ma una linea semplice per Σ. Io dico che la curva del quart'ordine intersezione residua di S con F si compone di quattro rette trisecanti di C^4.

Infatti se X è un punto fuori di C^4 comune ad S ed F, per X passa una generatrice di F cioè una tangente di C^4 che tocca questa curva in un punto Y differente da X. —

Allora la retta XY tocca anche la quadrica S nel punto Y e quindi avendo ancora a comune con essa il punto X giace completamente su di essa. Ciò dimostra che la retta XY è comune alla quadrica S ed alla superficie F, ossia che queste superficie hanno oltre C^4 altre quattro rette a comune.

Ma la retta XY siccome giace su S ed ha due punti a comune con C^4 riuniti in Y sarà necessariamente una trisecante di C^4 poichè le rette di S sono tutte trisecanti o unisecanti di C^4: dunque il teorema rimane dimostrato.

Esso può anche enunciarsi così:

"Se S è la quadrica passante per una quartica di seconda specie C^4, fra le trisecanti di C^4 contenute in S, quattro toccano la curva medesima."

Affatto analogamente si dimostra che una quadrica S passante per una quartica C^4 di prima specie ha a comune colla superficie sviluppabile F de 8° ordine (pag. 462) formata dalle sue tangenti una linea del 16° ordine la quale si spezza nella curva C^4 contata due volte e in otto rette: io dico che di queste otto rette quattro appartengono a un sistema rigato di S e quattro all'altro sistema.

Infatti se d è una di queste rette cioè è una tangente di C^4 situata sopra S ed A è il suo punto di contatto, la generatrice VA di un cono di second' ordine V passante per la quartica C^4 ha un secondo punto A' a commune colla quartica medesima, e la tangente g in A' a C^4 essendo anche tangente al cono nel punto A' sarà contenuta insieme colla retta d nel piano tangente al cono lungo la generatrice VA. Per conseguenza la retta g essendo tangente alla quadrica S nel punto A' e contenendone ulteriormente il punto gd giace su di essa ed è un'altra delle otto rette suaccennate. Ma g e d appartengono a sistemi rigati diversi di S perchè s'incontrano, dunque potendo ripetersi questo ragionamento per le altre sei rette rimanenti, resta provato ciò che abbiamo detto.

Possiamo osservare inoltre che se d, d_1, d_2, d_3; g, g_1, g_2, g_3 sono queste otto rette i punti dg, $d_1 g_1$, $d_2 g_2$ e $d_3 g_3$ si trovano nel piano $V_1 V_2 V_3$ contenente i vertici V_1, V_2, V_3 degli altri tre coni passanti per C^4 (pag. 462) e quindi anche

sulla conica secondo cui questo piano taglia la quadrica S. Segue da ciò che:

$$(d\,d_1\,d_2\,d_3)\,\overline{\wedge}\,(g\,g_1\,g_2\,g_3);$$

Anzi siccome tutto questo potrebbe ripetersi partendo dagli altri tre coni invece che dal cono V, così possiamo dire riassumendo:

"Delle otto tangenti di una quartica di prima specie C^4, situate sopra una quadrica S passante per essa, quattro appartengono a un sistema rigato di S e quattro appartengono all'altro sistema. Di più le due quaterne di rette possono considerarsi come proiettive in quattro modi differenti".

Infatti se d è una di queste rette cioè è una tangente di C^4 situata sopra S ed A è il suo punto di contatto, la generatrice VA di un cono di second'ordine V passante per la quartica C^4 ha un secondo punto A' a commune colla quartica medesima, e la tangente g in A' a C^4 essendo anche tangente al cono nel punto A' sarà contenuta insieme colla retta d nel piano tangente al cono lungo la generatrice VA. Per conseguenza la retta g essendo tangente alla quadrica S nel punto A' e contenendone ulteriormente il punto gd giace su di essa ed è un'altra delle otto rette suaccennate. Ma g e d appartengono a sistemi rigati diversi di S perchè s'incontrano, dunque potendo ripetersi questo ragionamento per le altre sei rette rimanenti, resta provato ciò che abbiamo detto.

Possiamo osservare inoltre che se d, d_1, d_2, d_3, g, g_1, g_2, g_3 sono queste otto rette i punti dg, $d_1 g_1$, $d_2 g_2$ e $d_3 g_3$ si trovano nel piano $V_1 V_2 V_3$ contenente i vertici V_1, V_2, V_3 degli altri tre coni passanti per C^4 (pag. 464) e quindi anche

sulla conica secondo cui questo piano taglia la quadrica S. Segue da ciò che:

$$(d\, d_1\, d_2\, d_3) \barwedge (g\, g_1\, g_2\, g_3);$$

Anzi siccome tutto questo potrebbe ripetersi partendo dagli altri tre coni invece che dal cono V, così possiamo dire riassumendo:

"Delle otto tangenti di una quartica di prima specie C^4, situate sopra una quadrica S passante per essa, quattro appartengono a un sistema rigato di S e quattro appartengono all'altro sistema. Di più le due quaterne di rette possono considerarsi come proiettive in quattro modi differenti".

Pag	Lin	Errata	Corrige
4	25	anche ottenuto	anche come ottenuto
6	11	punto di S	punto S
"	22	e il piano del loro fascio,.....si chiama	e il piano del loro fascio si chiama
7	1	fascio,.....,si chiama	fascio si chiama
9	1	di rette per ognuno	di rette perchè per ognuno
12	2	$\sigma\ o\ \sigma$	$\sigma\ o\ \sigma'$
12	22	punti qualunque	punti qualunque e che per la superficie φ^2 i piani σ e σ' possono considerarsi come due suoi piani qualunque.
16	24	S''' ed S'', che sono	S''' ed S'', i cui centri sono
17	11	tangente che.....sola=mente	tangente.
"	14	contatto, pel quale.......superficie	contatto
22	13	il quale è costituito	e questo unico inviluppo è costituito
23	8	abbandoniamo.....d'interesse	correlativamente per il teore=ma a destra
24	14	o iperbolici, e possiamo	o iperbolici.
27	21	di punti doppii	di punto doppio

31	21	retta per p	retta per P
32	1	dopo A e B;	dopo α e β;
"	2	a P, e P'	a P, il punto P'
33	1	...ghi in H e K.....rispetto ad H e K e conduciamo....	e conduciamo ....
"	16	che è il piano	che è detto il piano
34	23	allineato	allineati
36	12	vortice	vertice
37	18	ai piani della quadrica,	a questi piani,
39	10	dunque π	dunque π'
40	9	un piano qualunque passante per r che....	un piano passante per r e per un punto della quadrica che quindi...
43	23	Σ	Σ'
45	1	su r:	su r':
47	22	A' in α'	A in α
48	14	Da ciò segue che: Per una.....	Per una...
53	14	speciale.	speciale di asse r'
"	27	punti autoconiugati	punti autoconiugati o come inviluppo dei piani autoconiugati
54	24	polare	coniugata

54	25	generatrice	tangente
58	23	P saranno	P e p saranno
64	7	sono tutti paralleli fra di loro,	hanno una direzione comune.
65	3	ed	e d
71	25	δ	δ,
72	18	in σ il diametro coniugato normale d, di d:	il diametro d, normale a σ:
74	21	simmetria"	simmetria ortogonale"
76	1	Elementi immaginarii coniugati.	Elementi immaginarii
81	1	equinarmonico	equianarmonico
"	5	"	"
"	10	"	"
"	22	prendono elementi	prendono n elementi
82	16	da quello	di quello
"	17	a questo	a queste
90	9	Allora su ogni serie..	Allora sulla serie direttrice di ogni serie....
97	13	somiglianze	uguaglianze
103	13	dell'iperboloide	degli iperboloidi
105	16	simmetria.	simmetria ortogonale
110	18	distinti da A. Anche	distinti da A, anche
123	13	per semplicità	ben inteso
137	13	tutte	tutti

IV.

177	17	fino a poco tempo fa	fino alla metà di questo secolo circa
178	4	Cayley e più special. mente del Plücker	Cayley (1859) e più specialmente del Plücker (1865)
"	7	ultimamente una geometria.....	una geometria...
179	17	con parametri	coi valori di parametri
180	9	fissata da....	fissata senza eccezione dai valori di....
184	22	medesima identica:	relazione identica
185	4	In particolare..... nulli,	Le p_{ik} non possono essere tutte nulle, perchè ne risulterebbe $x_i = \rho y_i$, mentre i due punti X ed Y che individuano la retta devono essere distinti;
191	1	La conseguenza...... risultato. E ora....	E ora....
209	21	incontrano	incontrando
230	18	piegate a sinistra..	piegate a sinistra, poichè al variare del raggio del cilindro varia l'angolo delle rette del complesso coll'asse, ma non può divenire mai evidentemente nè 0 nè $\frac{\pi}{2}$

IX.

476	18	e con	che è una
"	25	almeno un punto doppio	un punto doppio
477	11	$A \Sigma$ e Σ,	A le superficie Σ e Σ,
480	11	che abbiano	che hanno
483	14	dimostrato. Sicchè... continuità.	dimostrato: - sicchè esistendo ∞ rette (generatrici del cono) per ciascuna delle quali passano ∞ piani aventi contatto 5punto colla linea d'intersezione del cono colla superficie il punto A deve essere sestuplo per detta linea (perchè in un punto quintuplo vi sono cinque fasci di tali piani). Adunque come si è affermato, la sezione di qualsiasi piano per A colla superficie deve avere per tangenti in A le due generatrici determinate nel cono dal piano segante.
484	12	Un punto....	Un punto generico....
"	19	per quel punto	per quel punto, le quali esistono nei rispettivi due piani

			tangenti
487	4	piano doppio	piano doppio π.
"	9	Da ciò segue....	E dall'osservare che ogni punto P' della conica aderente a quest'inviluppo è punto di contatto di un piano π' successivo a π (essendo P' punto di concorso della retta $\pi\pi'$ e della intersezione di π' col piano a questo successivo) segue...
489	11	facilità... curve algebriche piane.	facilità partendo da teoremi algebrici come si è fatto per le curve algebriche piane.
502	24	si raccordano	si toccano o si raccordano
503	6	generatrice qualunque di Σ	retta qualunque dello spazio
504	2	equilatero"	equilatero" (Paraboloide delle normali).

230	19	essendo....	essendo adunque..
240	7	∞^2	∞^3
258	8	Infatti....resta di-mostrato. Si capisce	Si capisce....
"	22	anche....anche	anche
259	13	modo fin qui	modo usato fin qui
277	6	Oltre.... cubica	Gli ∞^1 coni già trovati fanno parte di ∞^2 quadriche passanti per la cubica.
286	19	quadriche	cubiche
291	10	abbino	abbiano
296	16	rispetto perves. al circolo.....	rispetto al circolo.
307	12	in 4 e 1	in 1 e 4
"	13	in 1 e 4	in 4 e 1
315	19	Si potrebbe.... cubica piana.	Di più siccome essa da un piano arbitrario sarebbe tagliata in tre punti così essa sarebbe una curva piana del terz'ordine.
334		In questo capitolo..ec	In questo capitolo vogliamo studiare alcune proprietà delle forme fondamentali di terza specie reciproche o collineari, necessariamente so=

			vrapposte, proprietà che provengono appunto dal fatto della sovrapposizione: in particolare ci occuperemo del complesso tetredrale generato da due forme collineari. Per quest'ultime ricordiamo come .... etc.
336	9	come è chiaro, alla..	alla....
336	14	degenere. Le formule.....corrispondenti in Σ_1; noi vogliamo far vedere come se ne deducano tre.....	degenere, ossia perchè si possano dedurre dalle 1) le x espresse linearmente per le ξ. E diamo appunto qui tre....
344	23	troveremmo...conica	non potremmo concludere la stessa cosa per il terno corrispondente alla radice $\rho=1$.
348	6	piano	punto
357	20	δ e 0	δ è 0
358	3	le quali e $p_{13}=0$	le quali è $p_{13}=0$
367	23	$1X'$... $1X'$	$2X'$.. $2X'$
368	19	x	π
388	5	multiplo	doppio
393	20	avere per es. nel foglio...	Ovvero nel foglio....
398	7-8	costruire	costruzione

402	17	Da ciò risulta in particolare:	Da ciò risulta:
405	18-19	equazioni	equazioni lineari
408	2	Da ciò apparisce..... coniche.	E si vede così che se si prendono, per determinare una curva d'ordine $n>2$, $\frac{n(n+3)}{2}$ punti fra gli n^2 punti-base di un fascio la curva non è determinata, ma è in generale irriducibile, mentre, come avvertimmo, per il caso delle coniche la indeterminazione è accompagnata dalla riducibilità.
412	9	identicamente per μ	per μ
415	17	rappresenta una curva..	rappresenta una coppia di rette basta dimostrare che essa rappresenta una curva...
419	23	$u_r x^{n-r} + u_{r+1} x^{n-r-1} + \dots u_{n-1} x + u_n = 0$	$u_r x_1^{n-r} + u_{r+1} x_1^{n-r-1} + \dots u_{n-1} x_1 + u_n = 0$
420	3	$u_0 x^n + u_1 x^{n-1} + \dots u_{r-1} x^{n-r+1}$ $+ u_r x^{n-r} + \dots u_n = 0$	$u_0 x_1^n + u_1 x_1^{n-1} + \dots u_{r-1} x_1^{n-r+1} +$ $+ u_r x_1^{n-r} + \dots u_n = 0$
"	6	poichè	se
"	10	Poi siccome 1 è anche...	Che se 1 è...
"	21	Ma per ipotesi il vertice 1 è anche	Continuando, se il vertice 1 è

432	24	$n(n-1)2d$	$n(n-1)-2d$
433	5	uno dei rami della curva k^n	la tangente di regresso di k^n.
435	20	"Se per... inversamente". "Se per una curva k^n il numero	"Se per una curva k^n il numero
436	18	tanto più che il Clebsch ha dimostrato che...	perchè....
"	25	doppio è...	doppio o un punto di regresso è....
442	25	superficie sviluppabile	superficie
446	15	$F\hat{C}D$	$C\hat{F}D$
450	19	trasformazioni	posizioni
451	21	Allora un piano od una retta qualunque	Allora piani qualunque
"	25	rette ve ne sono in generale due che	piani ve ne sono due fasci tali che
452	1	hanno	ciascun piano ha
"	3	Esse sono	I loro assi sono
459	6. 7	del numero dei suoi piani doppii apparenti	del numero degli assi della sviluppabile giacenti in un piano.
464	14	V, A	V, e il punto A
469	18	del piano	di un piano per la retta
475	5	superficie	superficie algebriche