CAPITOLO IX

MEDODO DELLE PROIEZIONI ASSONOMETRICHE

- § 32 -

ASSONOMETRIA ORTOGONALE

167 - Abbiamo avuto occasione di constatare che la rappresentazione di una figura, col metodo delle proiezioni ortogonali, offre il modo di poter ricavare direttamente dal disegno, e in maniera semplice e spedita tutte le dimensioni della figura stessa, mentre il metodo delle proiezioni centrali è quello al quale conviene ricorrere, quando si voglia una rappresentazione della figura che renda una chiara idea della sua forma e della disposizione delle sue parti.

Il metodo delle proiezioni assonometriche si propone, per quanto è possibile, di conciliare in sè i vantaggi dei due metodi di rappresentazione sopra detti.

Nel metodo delle proiezioni assonometriche la figura F da rappresentare si suppone riferita ad un sistema di assi cartesiani ortogonali. Il quadro Π, su cui si fa la rappresentazione, è un piano generalmente distinto dai piani coordinati xy, yz, zx, e situato in posizione generica rispetto agli assi.

Se F è una figura dello spazio, le sue proiezioni ortogonali sui piani yz, zx, xy si indicano rispettivamente con F_x, F_y, F_z, e, dal metodo di Monge, sappiamo già che due qualunque di queste individuano (in modo unico) la figura obiettiva F.

Se è determinata la posizione del quadro rispetto agli assi x, y, z, è chiaro che le figure (piane) F_x, F_y, F_z riescono perfettamente individuate quando si conoscono le loro proiezioni F'_x, F'_y, F'_z nel quadro secondo una data direzione.

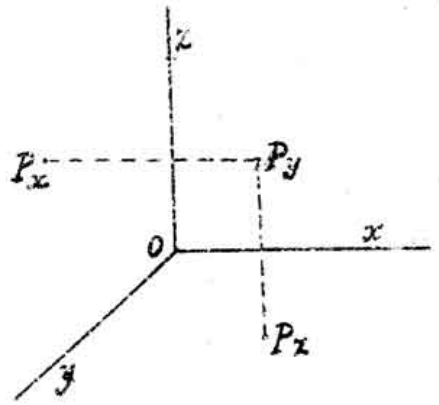


fig. 260

Le figure F'_x, F'_y, F'_z si chiamano proiezioni assonometriche della figura F. Si chiama poi proiezione vera di questa e si indica con F' la proiezione di F sul quadro secondo la direzione prefissata.

La figura F si rappresenta mediante la proiezione vera F' e le tre proiezioni assonometriche F'_x, F'_y, F'_z.

È chiaro che queste quattro proiezioni non sono indipendenti fra loro e che ogni due qualunque fra esse individuano la figura obiettiva e per conseguenza le proiezioni rimanenti.

Se la direzione dei raggi proiettanti è perpendicolare al quadro, l'assonometria si dice ortogonale in caso contrario si dice obliqua.

Noi ci occuperemo soltanto della prima, e quindi d'ora in avanti supporremo che la direzione dei raggi proiettanti sia perpendicolare al quadro.

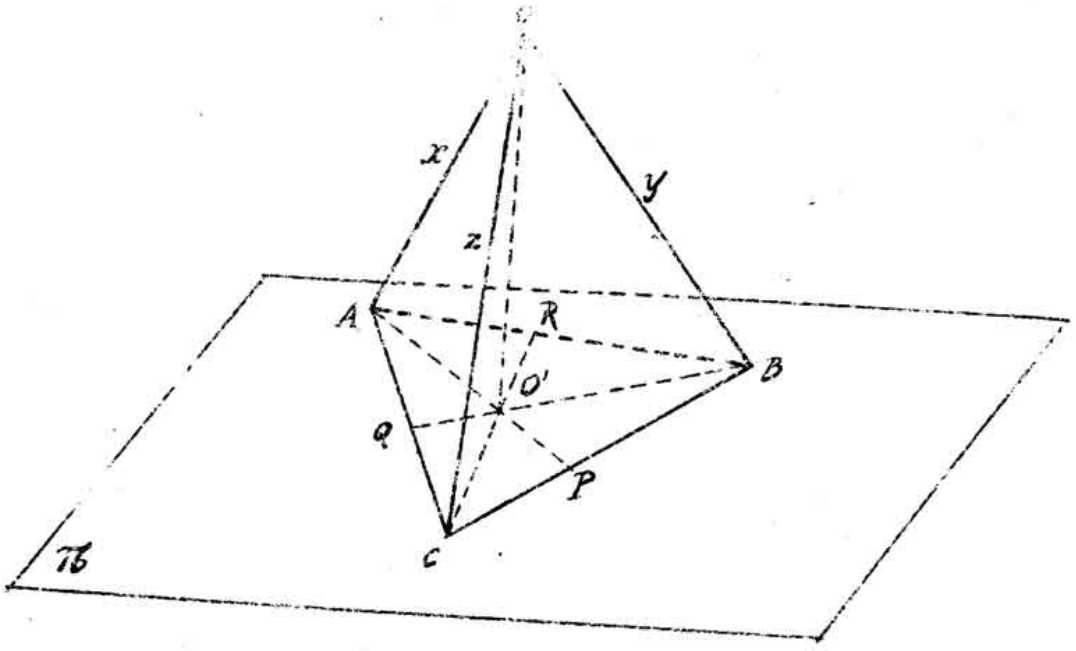


Fig. 261

168 - Triangolo delle tracce e proiezione degli assi. Nell'assonometria ortogonale si suppone sempre che l'origine delle coordinate sia al disopra del quadro e che gli assi siano disposti genericamente rispetto a questo in modo da incontrarlo in tre punti A, B, C, che si dicono tracce degli assi coordinati.

Il triangolo ABC i cui lati AB, BC, CA sono evidentemente le intersezioni col quadro dei piani coordinati xy, yz, zx, dicesi triangolo delle tracce.

Se O' è la proiezione di O sul quadro, le proiezioni degli assi x, y, z sono rispettivamente le rette O'A,

O'B, O'C che si chiamano assi assonometrici e si denotano con x', y', z'.

a) La proiezione O' di O è l'ortocentro del triangolo delle tracce, quindi le proiezioni degli assi sono le altezze del triangolo delle tracce. Infatti consideriamo ad esempio il piano $\tau = \Lambda OO'$. Questo piano poichè passa per la retta x ed OO', è perpendicolare sia al piano yz che al quadro; ed è quindi perpendicolare alla retta BC, intersezione di questi due piani. Ne segue che la retta $AO' = \tau \Pi$ è perpendicolare a BC cioè AO' è l'altezza del triangolo ABC relativa al lato BC.

In modo del tutto analogo si prova che è $BO' \perp AC$ e (di conseguenza) $CO' \perp AB$; il teorema è quindi dimostrato.

b) Il triangolo delle tracce è acutangolo.

Indichiamo con P, Q, R i piedi delle altezze del triangolo ABC uscenti rispettivamente da A, B, C. Se congiungiamo ad es. P con O, la OO' come altezza del triangolo rettangolo AOP relativa all'ipotenusa, ha il suo piede (su questa) interno al segmento finito AP. Analogamente l'ortocentro di ABC è interno al segmento di perpendicolare compreso fra un vertice e il lato opposto e ciò, come è noto, basta per concludere che il triangolo ABC è acutangolo.

c) - Gli assi assonometrici formano due a due angoli ottusi.

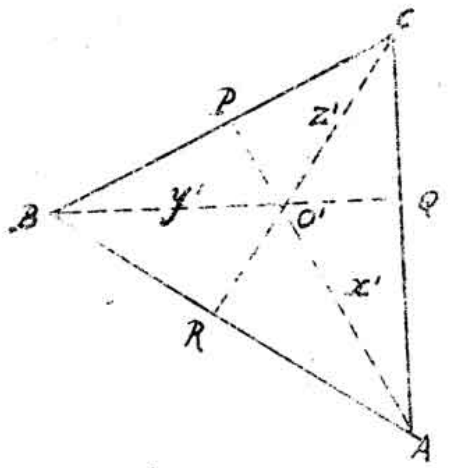


fig. 262

Ed infatti se consideriamo ad es. il quadrangolo CPO'Q vediamo subito che per essere l'angolo in $\hat{C}$ acuto e retti gli angoli in $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ deve necessariamente essere ottuso l'angolo PO'Q e quindi tale è il suo op. posto al vertice $\widehat{AO'B} \equiv \widehat{x'y'}$

Lo stesso dicasi per gli angoli $\widehat{x'z}$ ed $\widehat{y'z'}$.

È assai importante invertire gli enunciati precedenti dimostrando che:

Dato sul quadro un triangolo acutangolo ABC esiste un unico sistema di assi ortogonali x, y, z, concorrenti in un punto O situato al disopra del quadro e passanti ordinatamente per A, B, C. L'ortocentro del triangolo ABC coincide con la proiezione ortogonale del punto O sul quadro.

Sia ABC il triangolo acutangolo dato ed O' il suo ortocentro.

È noto dalla geometria elementare che sussiste la relazione:

$$AO' \cdot O'P = BO' \cdot O'Q = CO' \cdot O'R \qquad (1)$$

Se consideriamo infatti i triangoli rettangoli simili: $AO'Q$, $BO'P$ otteniamo:

$$\frac{AO'}{O'Q} = \frac{BO'}{O'P} \quad \text{cioè} \quad AO' \cdot O'P = BO' \cdot O'Q \qquad (2)$$

analogamente dai triangoli $AO'R$, $CO'P$ si trae:
$AO' \cdot O'P = CO' \cdot O'R$ (3) e dalle (2) e (3) segue la (1).

Si conduca ora per O' la perpendicolare al quadro e si prenda su questa, al disopra di π, un punto O tale che il segmento OO' sia medio proporzionale fra i segmenti AO', ed $O'P$. In virtù della (1) il segmento OO' sarà medio proporzionale anche fra le coppie di segmenti BO', $O'Q$; CO', $O'R$.

Il punto O scelto in tal modo è tale che il triedro $O(ABC)$ risulta trirettangolo.

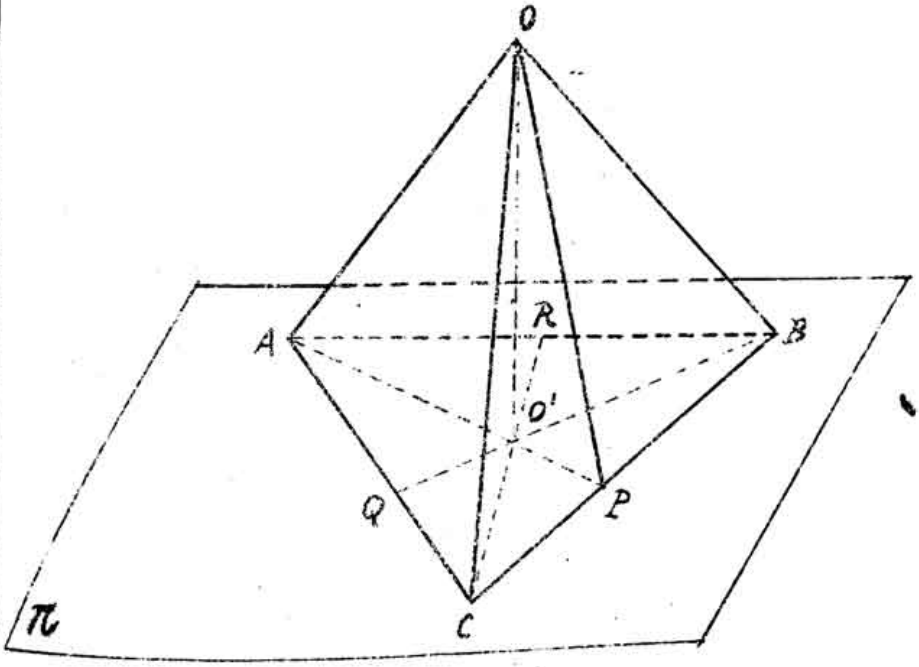


fig. 263

Per dimostrare, ad esempio, che OA è perpendicolare al piano delle rette OB, OC basterà far vedere che OA è perpendicolare a tutte le rette uscenti da O e che si appoggiano a

BC.

Essendo intanto, per costruzione, OO' medio proporzionale fra AO' ed $O'P$ segue che l'angolo $A\hat{O}P$ è retto. Il piano $\tau = A\hat{O}P$, poichè passa per OO' è perpendicolare al quadro e quindi la retta BC del quadro, perpendicolare alla retta $AP \equiv \tau\,\pi$, è normale al piano τ (in P).

Per il noto teorema delle tre perpendicolari (applicato alla retta CP, al piano τ e alla retta OA di terzo piano) segue allora che OA è perpendicolare a tutte le rette che congiungono O con punti di BC, risulta cioè OA normale al piano BOC.

In modo analogo si prova che OB è normale al piano COA e OC normale al piano AOB.

L'unicità del sistema di assi ortogonali determinato come sopra, segue immediatamente dai teoremi diretti e dall'unicità del segmento medio proporzionale fra due segmenti dati.

Il teorema è così dimostrato, e possiamo quindi affermare che:

Un sistema di proiezione assonometriche è perfettamente determinato quando si segni ad arbitrio sul quadro un triangolo acutangolo come triangolo delle tracce.

Se invece sono date nel quadro tre semirette, aventi la stessa origine e formanti due a due angoli

ottuso, esistono infiniti triedri trirettangoli, differenti fra loro per una traslazione ortogonale al quadro, tali che le proiezioni ortogonali degli spigoli coincidono con le semirette date.

Siano x', y', z' le tre semirette date e, fissato ad arbitrio un punto A su x', si conducano le perpendicolari ad y' e z', fino ad incontrare in C e B rispettivamente z' ed y'. Si dimostra, senza difficoltà, che il punto O' comune ad x', y', z', è l'ortocentro del triangolo ABC e che questo è acutangolo.

Un triedro del teorema precedente rimane allora individuato un triedro trirettangolo che ammette ABC come triangolo delle tracce ed x', y', z', come proiezioni degli spigoli. Gli infiniti triangoli che si possono costruire, (al variare di A su x') sono manifestamente omotetici, e le infinite terne di assi ortogonali, corrispondenti a questi triangoli hanno

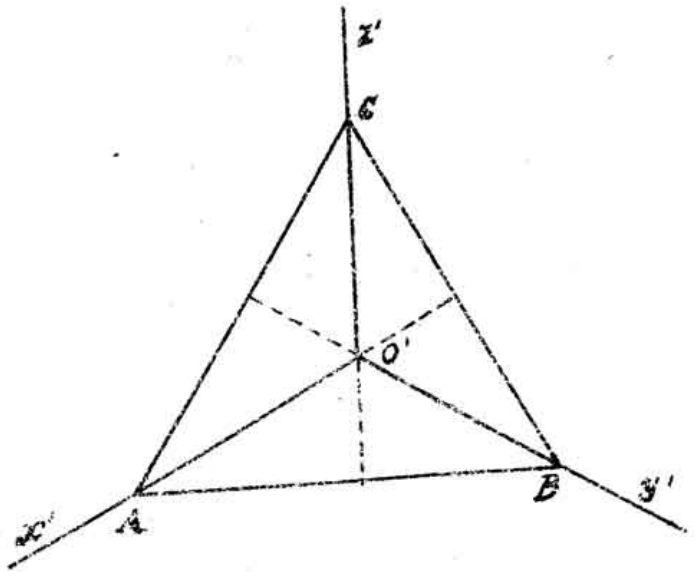


fig. 264

l'origine sulla perpendicolare al quadro condotta per O' e ne ottengono, come è facile vedere, l'una dall'altra mediante una traslazione verticale.

Osservazione. È importante osservare che in generale una figura F, s'intende rigidamente connessa al triedro fondamentale. Ne segue che, se a questo si fa subire una traslazione normale al quadro, i punti delle figure F, F_x, F_y, F_z scorrono sopra normali a Π e però non variano le F', F'_x, F'_y, F'_z.

Si vedrà difatti che nei problemi che risolveremo occorre solo la conoscenza delle x', y', z', (che fissano, come or ora si è visto, la posizione del triedro fondamentale a meno di una traslazione siffatta) quando si costruiscono solamente le proiezioni vere e le proiezioni assonometriche; mentre occorre fissare la posizione del triangolo delle tracce (e quindi del triedro fondamentale) se nei problemi stessi compaiono le tracce su Π di rette o piani di F.

169. Angoli d'inclinazione, angoli di direzione. Gli angoli acuti che i tre assi coordinati x, y, z formano col quadro, si chiamano angoli d'inclinazione e si denotano rispettivamente con α, β, γ.

Gli angoli che formano due a due le proiezioni

degli assi coordinati, cioè gli angoli $\widehat{y'z'}$, $\widehat{z'x'}$, $\widehat{x'y'}$ si chiamano <u>angoli di direzione</u> e si denotano rispettivamente con ξ, η, ξ. Questi angoli, come abbiamo già visto sono tutti e tre <u>ottusi</u> e si ha:

$$\xi+\eta+\xi = 360°,\quad 180° < \xi+\eta < 270°,\quad 180° < \eta+\xi < 270°,\quad 180° < \xi+\xi < 270°$$

Dal triedro $O(AO'B)$ si ricava:

$$\widehat{AOO'} + \widehat{BOO'} > \widehat{AOB}$$

cioè

$$\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} - \beta > \frac{\pi}{2}$$

ossia

$$\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

analogamente

$$\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}\ ;\quad \gamma + \alpha < \frac{\pi}{2}$$

<u>cioè la somma di due qualunque degli angoli di direzione è ancora un angolo acuto.</u>

Posto $z \equiv OO'$ e quindi $z\widehat{x} = O'\widehat{O}A$, $z\widehat{y} = \widehat{O'OB}$ $z\widehat{z} = \widehat{O'OC}$, come è noto dalla geometria analitica, si ha:

$$\cos^2 z\widehat{x} + \cos^2 z\widehat{y} + \cos^2 z\widehat{z} = 1$$

cioè

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma = 1$$

ovvero:

$$1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$$

cioè

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2 \qquad (1)$$

e poichè $\cos\gamma < 1$ dalla (1) si trae:

$$(2)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta > 1 \\ \cos^2\beta + \cos^2\gamma > 1 \\ \cos^2\gamma + \cos^2\alpha > 1 \end{cases}$$

e analogamente:

$$(3)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha + \cos^2\beta > \cos^2\gamma \\ \cos^2\beta + \cos^2\gamma > \cos^2\alpha \\ \cos^2\gamma + \cos^2\alpha > \cos^2\beta \end{cases}$$

Quando sia dato il triangolo delle tracce, la determinazione degli angoli d'inclinazione non presenta alcuna difficoltà.

Invero si supponga di ribaltare sul quadro il piano del triangolo AOP attorno alla retta AP. Dal ribaltamento (O) di O il segmento AP dovrà vedersi ancora sotto angolo retto e la $(O)O'$, ribaltamento di $O'O$, sarà sempre perpendicolare ad AP. Ciò segue che per trovare il ribaltamento (O) di O, basta descrivere una semicirconferenza di diametro AP, e intersecarla con la perpendicolare a questa retta per

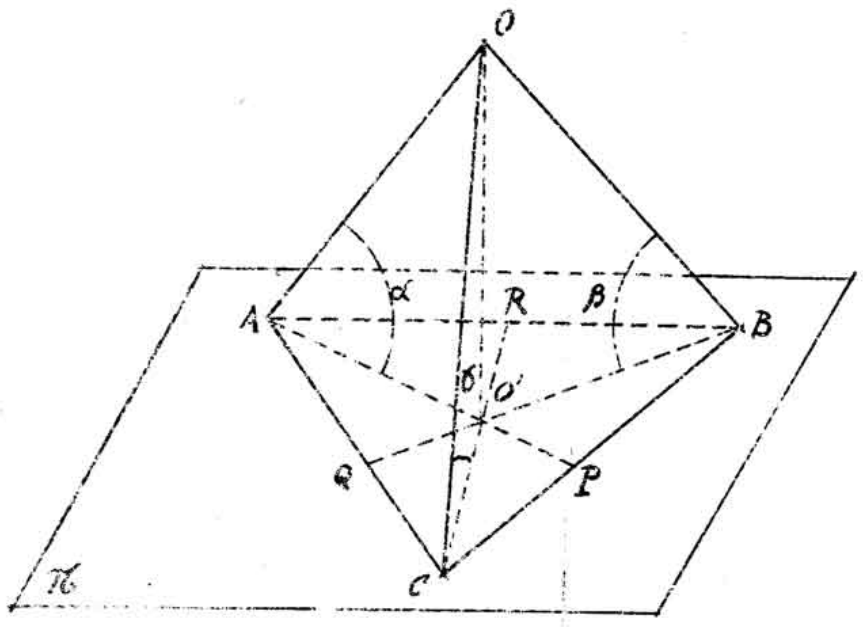


fig. 265

il punto O'.

L'angolo $(o)\hat{A}P$ è manifestamente eguale all'angolo α.

In modo analogo si determinano gli angoli β e γ.

170 - Rapporti di accorciamento. Scale assonometriche -

Sia z una scala non perpendicolare al quadro ed z' la proiezione ortogonale su questo. È noto che se $A'B'$ è la proiezione di un segmento comunque preso su z si ha:

$$(4)\quad A'B' = AB \cos \hat{z}z' \quad \text{ossia} \quad \frac{A'B'}{AB} = \cos \hat{z}z'$$

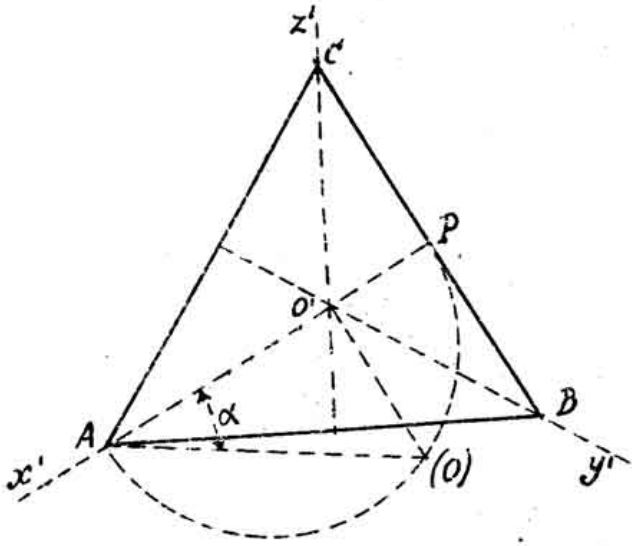


fig. 266

Ne segue che al variare di AB su z, e su qualunque retta a questa parallela, non varia il rapporto della proiezione al segmento obiettivo, poichè questo rapporto essendo eguale a $\cos \hat{z}z'$, varia soltanto col variare della direzione della retta z. Questo rapporto costante dicesi rapporto di accorciamento relativo alla direzione della retta data.

È di grande importanza in assonometria la considerazione dei rapporti di accorciamento relativi al

le direzioni degli assi x, y, z, che si sogliono indicare rispettivamente con λ, μ, ν; si ha evidentemente:

$$\lambda = \cos . x\hat{x}' = \cos\alpha, \quad \mu = \cos\beta, \quad \nu = \cos\gamma.$$

e quindi dalle relazioni (1), (2), (3) del n° precedente seguono:

$$(2') \qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2$$

$$(3') \qquad \lambda^2 + \mu^2 > 1; \; \mu^2 + \nu^2 > 1; \; \nu^2 + \lambda^2 > 1;$$

$$(4) \qquad \lambda^2 + \mu^2 > \nu^2; \; \mu^2 + \nu^2 > \lambda^2; \; \nu^2 + \lambda^2 > \mu^2.$$

Dalla relazione (4) segue facilmente che se è dato in grandezza un segmento AB sull'asse x, per avere in grandezza la proiezione $A'B'$, basta costruire l'angolo di ampiezza α, prendere su un lato a partire per es. dal vertice V un segmento $VM \equiv AB$ ed abbassare da M la perpendicolare MN sull'altro lato. Si ha evidentemente

$$A'B' = VN.$$

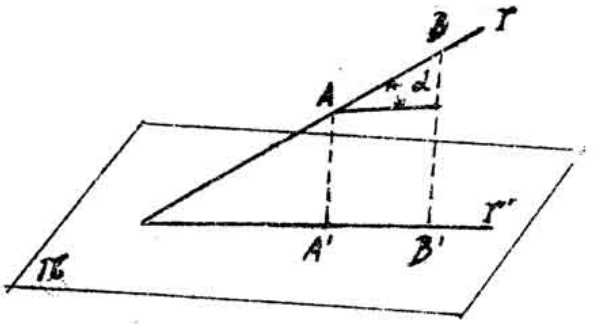


fig. 267

In particolare, se VU è un segmento eguale all'unità lineare di misura u, procedendo come prima, se ne può determinare la proiezione $l = VL$. Se indichiamo con x_0 la misura di VM rispetto ad u, dalla relazione:

$$\frac{VN}{VM} = \frac{VL}{VU}$$

si trae:

$$\overline{VN} = \frac{x_0 \ell}{1} = x_0 \ell.$$

Adunque, se un segmento sull'asse delle x, ha per misura x_0 rispetto ad u, la sua proiezione ha per misura x_0 rispetto ad i, essendo i la proiezione di u.

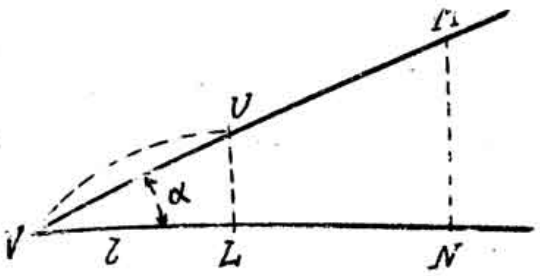


fig. 268

In modo del tutto analogo si determinano le proiezioni del segmento unitario u preso successivamente sugli assi y e z.

I tre segmenti proiezioni di u sono in generale diversi fra loro (perchè tali sono in generale α, β, γ) e si indicano per solito con le lettere ℓ, m, n. Essi si sono legati a λ, μ, ν dalle relazioni:

$$\lambda = \frac{\ell}{u}, \qquad \mu = \frac{m}{u}, \qquad \nu = \frac{n}{u}$$

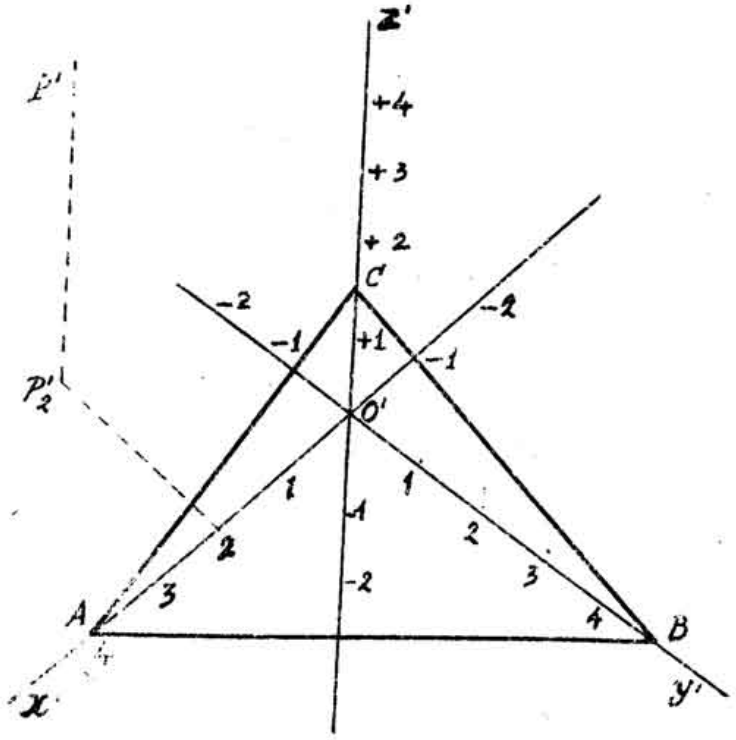


fig: 269

Quadrando e sommando si ricava, tenendo presente la (2') $\ell^2 + m^2 + n^2 = 2u^2$. Si deduce inoltre dalle

(k) $l^2 + m^2 > n^2$; $m^2 + n^2 > l^2$, $n^2 + l^2 > m^2$.

Dotti i segmenti l, m, n, si costruiscano facilmente sopra le proiezioni x', y', z' degli assi, i punti che sono le proiezioni di quelli che si ottengono sugli assi x, y, z, portandovi successivamente l'unità di misura u a partire dall'origine O.

Si avranno così le tre <u>scale assonometriche</u> che sono di somma utilità in pratica perchè permettono di costruire speditamente le proiezioni assonometriche e la proiezione vera di ogni punto P dello spazio di cui si conoscono le coordinate x, y, z.

Per vedere come si possa eseguire questa costruzione, osserviamo . la spezzata $OQP_z P$ che si ottiene abbassando da P la perpendicolare PP_z al piano xy e da P_z la perpendicolare $P_z Q$ all'asse delle x. I tre lati OQ, QP_z, $P_z P$ sono rispettivamente paralleli agli assi x, y, z; e poichè da un centro impropio rette parallele si proiettano in rette parallele, segue che le proiezioni ortogonali di questi segmenti sull'asse x danno ri-

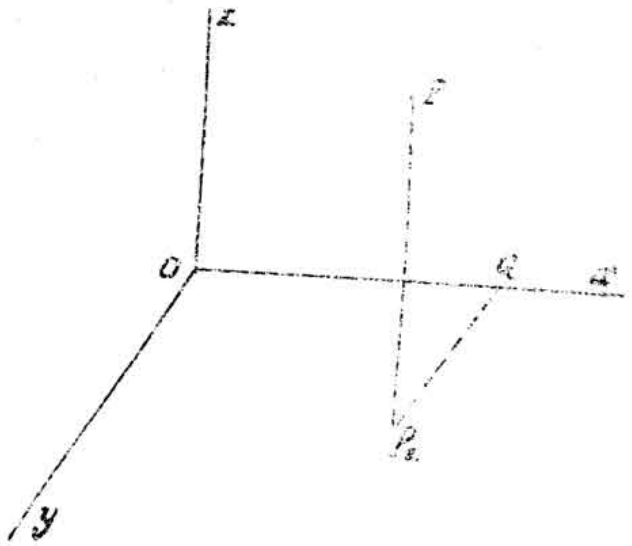


fig. 270

spettivamente paralleli agli assi assonometrici x', y', z'. Ricordando che se x_0 è la lunghezza di un segmento sopra l'asse x, o sopra una retta a questa parallela, la lunghezza della sua proiezione è $x_0 l$, e che analogamente $y_0 m$, $z_0 n$ sono le lunghezze delle proiezioni di segmenti di lunghezza y_0, z_0 presi rispettivamente sugli assi y, z, o su rette ad esse parallele; segue che le proiezioni dei lati della spezzata si possono determinare anche ricorrendo alle scale assonometriche.

Se ad es. le coordinate di un punto P sono $x=2$, $y=-2$, $z=4$ per avere la proiezione assonometrica P'_z di P e la proiezione <u>vera</u> P' si procederà come segue: si consideri sull'asse x' il segmento $O'Q = 2l$ proiezione assonometrica del lato OQ, quindi a partire da Q' si tiri il segmento $Q'P'_z$ equipollente al segmento $O'A = -2m$ dell'asse y' e a partire da P'_z si segni il segmento $P'_z P'$ equipollente al segmento $O'B = 4n$ di z'. $Q'P'_z$, $P'_z P'$ sono evidentemente le proiezioni assonometriche dei lati QP_z, $P_z P$ della spezzata, per cui gli estremi P'_z e P sono la proiezione assonometrica P'_z e la proiezione vera P' del punto P.

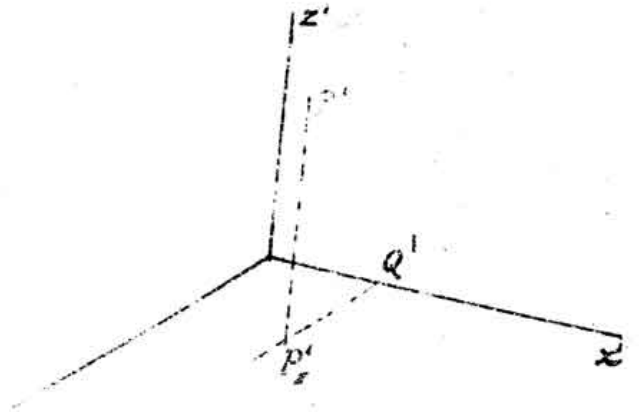


fig. 271

se e che come tale si può assumere un qualunque triangolo acutangolo del quadro stesso.

173 - Si è dimostrato ancora che date sul quadro tre semirette aventi l'origine comune, e formanti fra di loro angoli ottusi, il triangolo delle tracce resta definito a meno di una omotetia, e il triedro triretangolo fondamentale a meno di una traslazione ortogonale al quadro. Ora si vede senza difficoltà che per una traslazione siffatta, non variano nessuno degli elementi detti in b), c), d) e non variano quindi le proiezioni assonometriche e la proiezione vera di una figura, le quali proiezioni, come si è avuto modo di vedere attraverso le costruzioni esposte al n° 170, dipendono essenzialmente dagli elementi b), c), d), e non dal triangolo delle tracce.

Rimane così più chiaramente lumeggiata l'osservazione posta in fine al n° 168.

Al caso in discorso si è subito condotti quando:

Siano dati due degli angoli di direzione ξ, η, ζ.

Si osservi anzitutto che gli angoli dati, per es. ξ, η, devono soddisfare alla relazione: $180° < \xi + \eta < 270°$.

Supponendo verificata questa disuguaglianza si ha: $\zeta = 360° - (\xi + \eta)$.

- § 33 -

I PROBLEMI FONDAMENTALI DELL'ASSONOMETRIA

171 - Nei numeri precedenti del presente capitolo abbiamo introdotto:

a) - Il triangolo delle tracce (triangolo intersezione del triedro fondamentale col quadro).

b) - Gli angoli di direzione ξ, η, ζ (angoli delle proiezioni degli assi formano a due a due).

c) - Gli angoli di inclinazione α, β, γ (angoli che gli assi formano col quadro).

d) - Le unità delle scale assonometriche $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ (ossia le proiezioni ortogonali sul quadro di tre segmenti eguali tutti al segmento unitario $\underline{u}$, presi rispettivamente sugli assi x, y, z), ed abbiamo altresì rilevato talune fra le più importanti relazioni intercedenti fra gli elementi suddetti.

Ci possiamo ora domandare quali e quanti di questi elementi occorrono e bastano per avere un sistema non determinato di proiezioni assonometriche.

172 - Abbiamo già visto che detto sistema risulta determinato se è dato sul quadro il triangolo delle trac-

Assunto ad arbitrio un punto O' si costruiscano intorno ad O' gli angoli:

$$\xi = y'O'z' \quad , \quad \eta = z'O'x' \quad \zeta = x'O'y'$$

È chiaro dopo ciò che le tre semirette x', y', z', aventi l'origine comune O', si trovano nelle condizioni sopra indicate, e quindi, procedendo come al n° 168, si determina il triangolo delle tracce a meno della nominata omotetia.

174 - Supponiamo ora che:

siano dati per es. β e γ. Essi devono essere tali che sia $\beta + \gamma < 90°$. L'angolo α risulta allora determinato perchè sappiamo che sussiste la relazione:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$, e deve essere α acuto.

Si fissi ad arbitrio l'asse z' e su questo i due punti O' e C. Si potrà subito determinare $O'O$ come cateto di un triangolo rettangolo che ha per altro cateto OO' e per angolo ad esso adiacente l'angolo γ. Se immaginiamo di ribaltare nel quadro questo triangolo intorno a CO' il punto O verrà a cadere nella normale a z' per O' in un punto (O) tale che sia:

$$(O)O' = OO' \quad \text{e} \quad \widehat{(O)CO'} = \gamma.$$

Se ora si conduce per (O) la perpendicolare a $C(O)$ questa incontrerà z' nel punto R per il quale dovrà

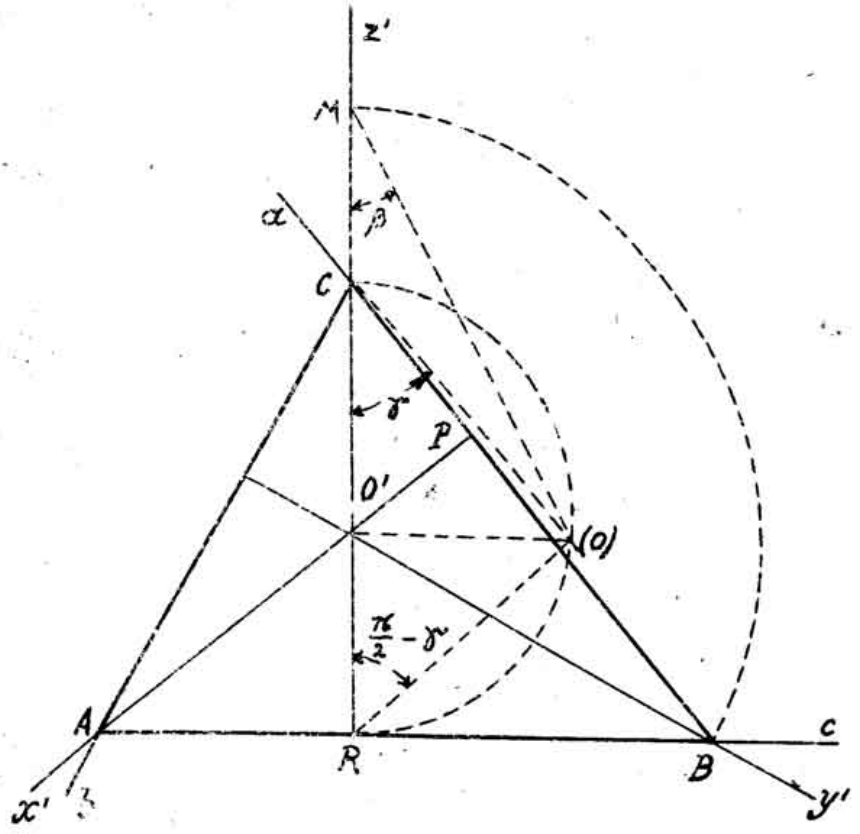


fig. 272

passare il lato c del triangolo delle tracce opposto a C, e perciò questo lato risulta pienamente determinato dovendo essere perpendicolare a z'. Su c si traccia il punto B ad una distanza da O' eguale al cateto di un triangolo rettangolo avente un cateto eguale ad OO' e come angolo opposto l'angolo dato β. Se O'(O)M è un tale triangolo il punto B si ottiene subito come una delle due intersezioni del lato c con la circonferenza di centro O' e raggio O'M. Determinato così (a meno di una simetria ortogonale rispetto a z') il punto B, si completa in modo ovvio la costruzione del triangolo delle tracce ABC.

Osservazione - Affinchè la soluzione esposta conduca ad un triangolo delle tracce ABC reale, la retta c deve secare in due punti reali e distinti la circonferenza di centro O' e raggio O'M, deve in altri termini risultare $O'M > O'R$.

Ora questa condizione è sempre soddisfatta sempre che sia:

$$\beta - \gamma < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Infatti in tali ipotesi si ha:

$$\beta < \frac{\pi}{2} - \gamma$$

e perciò esaminando il triangolo $M(O)R$ si ricava $(O)R < (O)M$ e conseguentemente $O'R < O'M$.

Si noti ancora che preso sulla perpendicolare al quadro in O', un segmento $O'O = O'(O)$, il triedro $O(ABC)$ è trirettangolo. Difatti essendo il triangolo $C(O)R$ rettangolo in (O), il segmento $OO' = O'(O)$ risulta medio proporzionale fra $O'C$ ed $O'R$, e perciò CO sarà perpendicolare ad OR ov'onde si ricava subito che OC è perpendicolare al piano BOA.

Dimostrato in modo analogo che OB è perpendicolare a QO se ne ricava facilmente che anche BO è perpendicolare al piano AOC, onde ecc. ecc.

175 - Prima di passare a discutere l'ultimo caso, dimostreremo il seguente teorema dovuto a Schläfli:

I lati del triangolo, che ha per vertici i piedi delle altezze del triangolo delle tracce sono proporzionali ai quadrati dei rapporti di raccorciamento.

Il quadrangolo $QO'RA$ avente retti gli angoli $\widehat{AQO'}$, $\widehat{O'RA}$ è inscrittibile in un cerchio, ne segue che i due angoli $\widehat{QAO'}$, $\widehat{QRC}$, come angoli che insistono sullo stesso arco QO' della circonferenza, sono eguali.

Analogamente si vede che sono eguali gli angoli $\widehat{ACO'}$ e $\widehat{QPA}$.

I due triangoli CAO' e CQR, aventi a comune l'angolo $\hat{C}$, ed eguali gli angoli in A ed R sono simili e pure simili risultano i due triangoli $\widehat{CO'A}$ e $\widehat{PQA}$. Da queste similitudini deriva:

$$\frac{QR}{QC} = \frac{O'A}{O'C} \quad \text{e} \quad \frac{QA}{QP} = \frac{O'A}{O'C}$$

e quindi:

$$\frac{QR \cdot QA}{QC \cdot QP} = \frac{\overline{O'A^2}}{\overline{O'C^2}} \quad \text{ossia:} \quad \frac{QR}{QP} = \frac{\overline{O'A^2}}{\overline{O'C^2}} \cdot \frac{QC}{QA} \qquad (I)$$

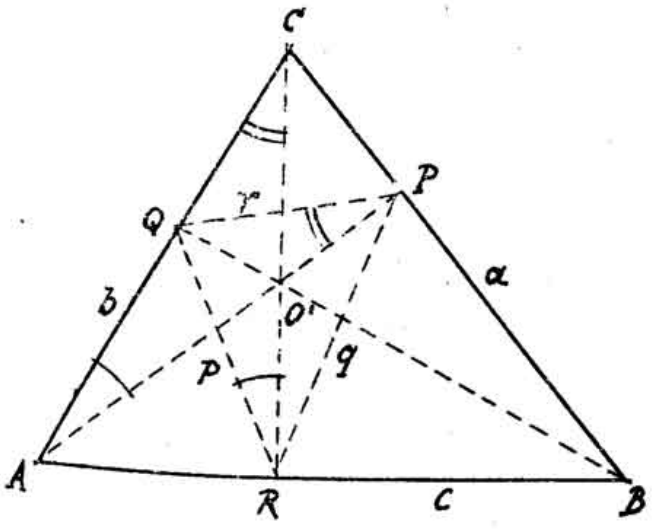


fig. 273

ora nel triangolo rettangolo AOC la $O'Q$ è altezza relativa all'ipotenusa, quindi:

$\overline{OC^2} = AC \cdot QC$, $\overline{OA^2} = AC \cdot QA$

ossia: $\frac{QC}{QA} = \frac{\overline{OC^2}}{\overline{OA^2}}$ sostituendo nella (I) si ha:

$\frac{QR}{QP} = \frac{\overline{O'A^2}}{\overline{OA^2}} : \frac{\overline{O'C^2}}{\overline{OC^2}}$ e poiché

$\frac{O'A}{OA} = \cos\alpha = \lambda$; $\frac{O'C}{OC} = \cos\gamma = \nu$, si ricava infine

$$\frac{QR}{QP} = \frac{\lambda^2}{\nu^2}$$

Similmente si prova che:

$$\frac{QP}{PR} = \frac{\nu^2}{\mu^2}$$

e quindi indefinitiva

$$QR : RP : PQ = \lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 .$$

Se, per semplicità, si denotano con p, q, r, i lati QR, RP, PQ dal triangolo PQR l'ultima relazione scritta assume la forma:

$$p : q : r = \lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 \qquad (II)$$

Rammentiamo ora che è

$$l = u\lambda, \quad m = u\mu, \quad n = u\nu .$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned} l : m : n &= \lambda : \mu : \nu \\ l^2 : m^2 : n^2 &= \lambda^2 : \mu^2 : \nu^2 \end{aligned}\right\} \qquad (III)$$

e tenendo presente la (II):

$$l^2 : m^2 : n^2 = p : q : r .$$

176 - Siamo ora in grado di rispondere alla seguente domanda:

Dati tre segmenti l_1, m_1, n_1, vincolati dalle relazioni

$$l_1^2 + m_1^2 > n_1^2, \quad m_1^2 + n_1^2 > l_1^2, \quad n_1^2 + l_1^2 > m_1^2 \qquad (IV)$$

tali cioè che l'ipotenusa del triangolo rettangolo aventi

per cateti due qualunque dei segmenti dati sia maggiore del terzo, è possibile costruire un sistema di proiezioni assonometriche tale che le unità delle scale l, m, n (e quindi per la (III) i rapporti di accorciamento λ, μ, ν) siano proporzionali ad l_1, m_1, n_1, tale cioè che si abbia $l \cdot m : n = l_1 : m_1 : n_1$?

La risposta è affermativa.

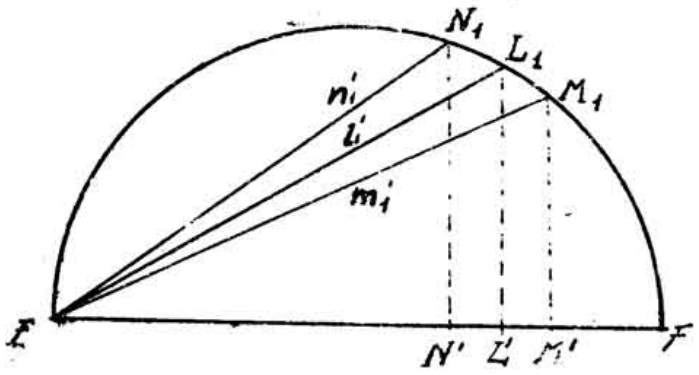


fig. 274

Si costruisca un semicerchio di diametro EF maggiore di l_1, m_1, n_1, e si trovino le tre corde EL_1, EM_1, EN_1 rispettivamente eguali ad l_1, m_1, n_1. Siano poi L', M', N', i piedi delle normali ad EF condotte per i punti L_1, M_1, N_1.

Si avrà:

$$\overline{EL_1}^2 = EF \cdot EL', \quad \overline{EM_1}^2 = EF \cdot EM', \quad \overline{EN_1}^2 = EF \cdot EN'$$

ossia:

$$EL' : EM' : EN' = l_1^2 : m_1^2 : n_1^2$$

e però, poichè l_1, m_1, n_1, verificano per ipotesi la (IV) si avrà che la somma di due qualunque dei segmenti EL', EM', EN' è maggiore del terzo e quindi è possibile costruire un triangolo con i lati rispettivamente

li a questi tre segmenti. Sia PQR un triangolo siffatto e sia precisamente:

$$QR = p = E'L', \quad RP = q = E'M', \quad PQ = r = E'N'$$

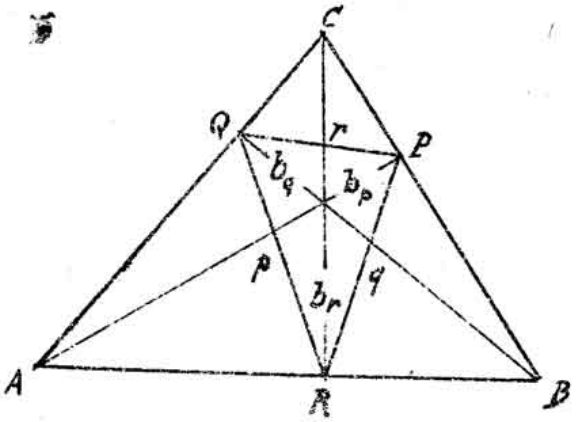


fig. 275

Se ABC è un triangolo acutangolo che ammette come triangolo ortico il triangolo PQR, preso appunto ABC come triangolo delle tracce, rimane determinato un sistema di proiezione assonometriche tale che se l, m, n, sono le unità delle scale assonometriche si ha (teor. prec.):

$$l^2 : m^2 : n^2 = p : q : r$$

poichè d'altra parte:

$$p : q : r = l_1^2 : m_1^2 : n_1^2$$

si ha:

$$l : m : n = l_1 : m_1 : n_1 .$$

Dopo ciò ci rimane da far vedere soltanto come le costruzioni a partire dal triangolo PQR si arrivi al triangolo ABC [1].

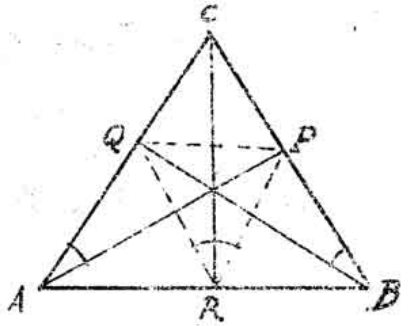


fig. 276

[1] È noto che le altezze di un triangolo acutangolo sono le bisettrici degli angoli interni del triangolo ortico. Infatti i due triangoli rettangoli ACP, BCQ,

Si conducano le bisettrici b_p, b_q, b_r degli angoli $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ e siano rispettivamente a, b, c, le perpendicolari ad esse condotte per i punti P, Q, R.

Detto A il punto d'incontro di b e c e analogamente posto: $B \equiv ca$, $C \equiv ab$ per notissime proprietà sulle bisettrici degli angoli (interni ed esterni) di un triangolo si ha che i punti A, B, C appartengono rispettivamente alle bisettrici b_p, b_q, b_r.

Abbiamo così costruito un triangolo ABC manifestamente acutangolo il quale ha il triangolo PQR come triangolo ortico e però nel sistema assonometrico individuato da questo triangolo le tre unità assonometriche l, m, n sono tali che si ha:

$$l : m : n = l_1 : m_1 : n_1 .$$

---

* sono equiangoli e perciò $\widehat{CAP} = \widehat{CBQ}$. Ma (cfr. teor. di Schlömilch $\widehat{CAP} = \widehat{CRP}$, $\widehat{CBQ} = \widehat{CRQ}$, quindi $\widehat{CRQ} = \widehat{CRP}$ e però CR è bisettrice dell'angolo $\widehat{QRP}$.

- §. 34 -

RAPPRESENTAZIONE DEGLI ELEMENTI FONDAMENTALI

177- Occupiamoci in primo luogo della rappresentazione di un punto qualunque P dello spazio, ossia vediamo quali relazioni passano fra le quattro proiezioni P', P'_x, P'_y, P'_z di esso. Sul quadro supporremo segnate le proiezioni x', y', z' degli assi, le quali, come è noto, determinano il triedro cartesiano a meno di una traslazione ortogonale al quadro stesso.

Le relazioni in discorso si stabiliscono nel modo più semplice considerando il parallelepipedo rettangolo che viene a determinarsi condncendo per il punto P i piani paralleli ai piani coordinati. Siccome ad esempio $P P_z$ è parallelo a z dovrà essere $P' P'_z$ parallela a z'.

Viceversa se ciò accade il piano normale a π passante per $P' P'_z$ è parallelo al piano zz' e quindi in esso giace la parallela condotta per P_z all'asse z e la perpendicolare al quadro per P' onde queste s'incontrano in un punto P. Pertanto:

a)- La congiungente la proiezione vera di un punto con una qualunque delle sue proiezioni asso-

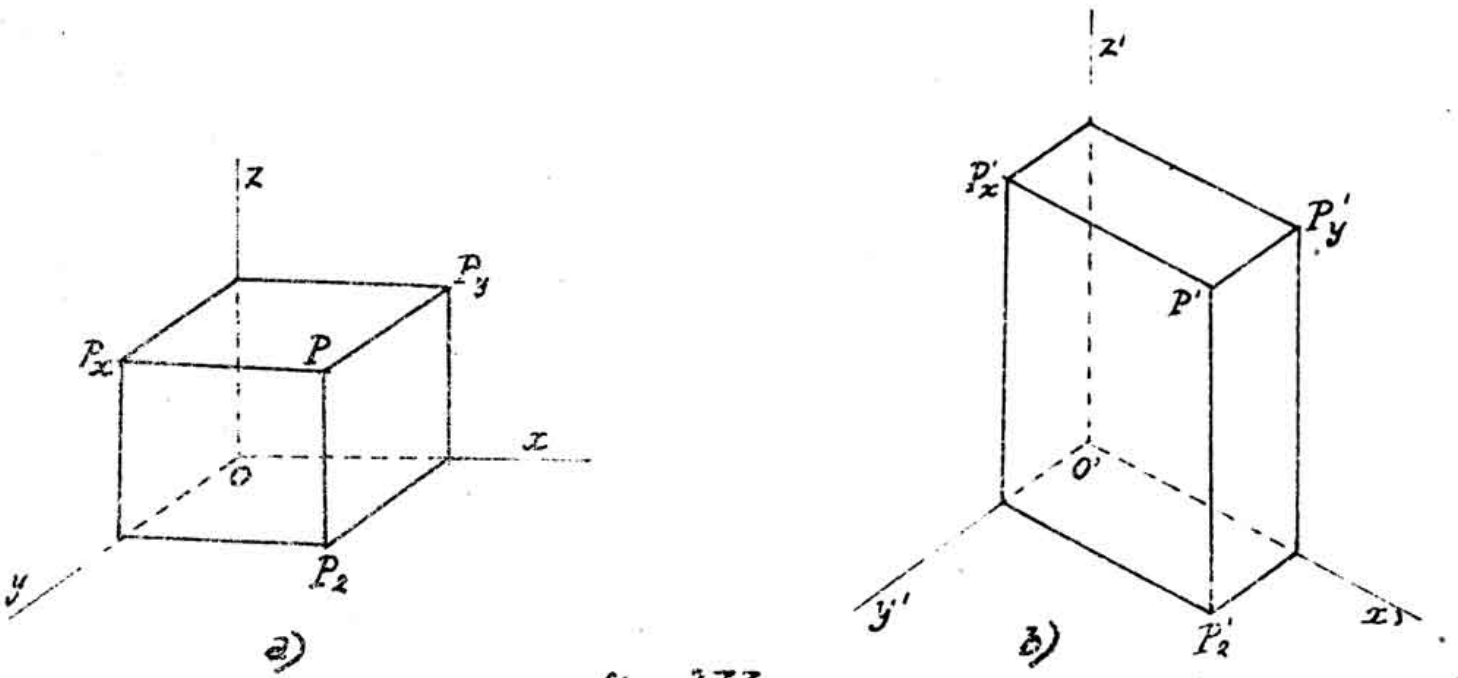


fig. 277

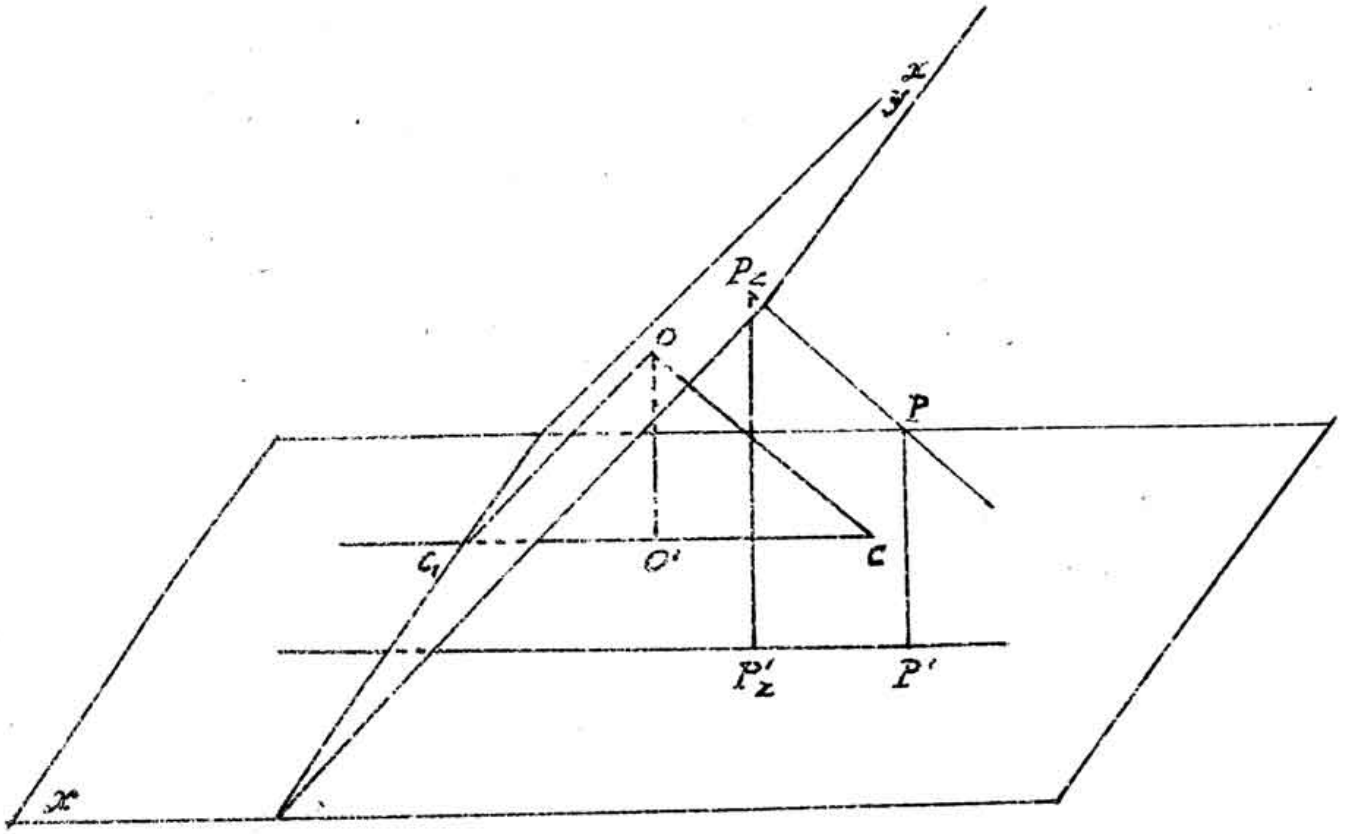


fig. 278

nometriche è parallela all'asse relativo a questa proiezione.

Rammentiamo ora dal metodo di Monge che due qualunque dei punti P_x, P_y, P_z, per esempio P_y P_z determinano in modo unico il punto P e poichè le perpendicolari condotte da P_z, P_y all'asse x s'incontrano su quest'asse, osservando che queste rette sono parallele rispettivamente all'asse y e all'asse z, se ne deduce, in riguardo alle proiezioni che le parallele ad y', z' condotte rispettivamente per P'_z e P'_y s'incontrano in un punto di x'.

Viceversa siano P'_z e P'_y due punti del quadro tali che la parallela ad y' per P'_z e la parallela a z' per P'_y incontrino l'asse x' nello stesso punto M'.

Chiamiamo P_z e P_y i punti ove le perpendicolari al quadro incontrano i piani x y e x z. Per la proprietà dette le parallele condotte da P_z e P_y rispettivamente agli assi y e z si incontreranno in un punto M dell'asse x e perciò P_z e P_y determinano in modo unico un punto P dello spazio. Pertanto.

b) - Se si considerano due proiezioni assonometriche di un punto e da ciascuna di esse si conduce la parallela all'asse che è relativo all'altra, si ottengono due rette incidenti in un punto dell'asse rimanente.

Un punto è dunque individuato da due qualunque delle sue quattro proiezioni e le proposizioni a) e b) permettono di completare la rappresentazione di un punto dato mediante due sue proiezioni (legate naturalmente dalla relazione a) se si tratta della proiezione vera e di una proiezione assonometrica, e dalla relazione b) se si tratta di due proiezioni assonometriche.

In particolare:

Se un punto appartiene ad un piano coordinato, la

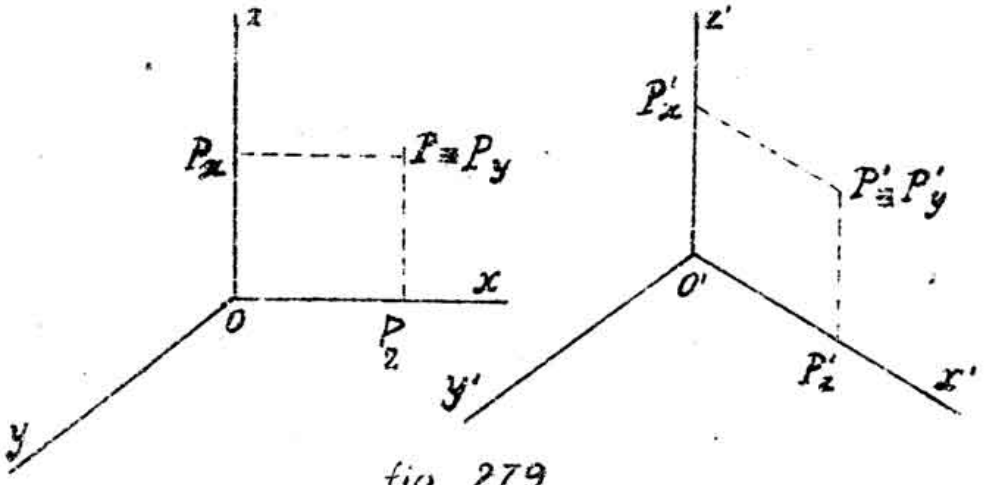


fig. 279

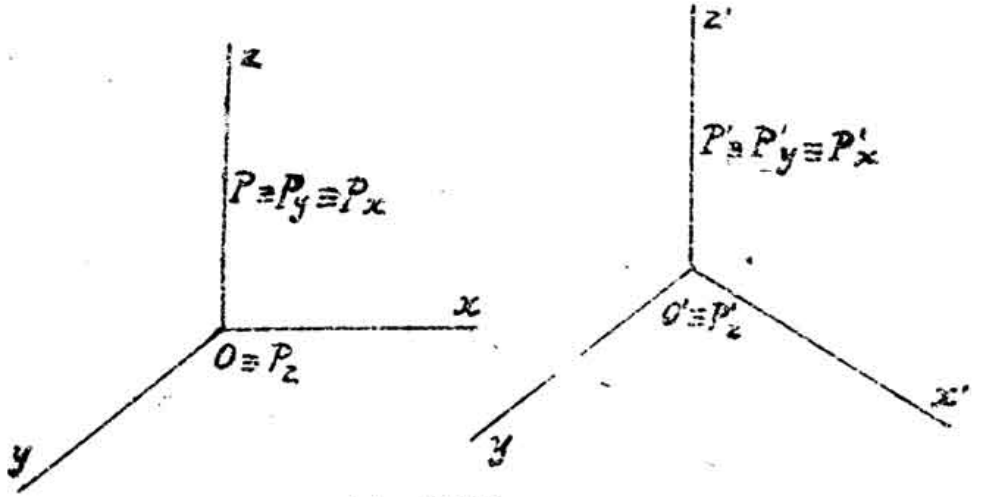


fig 280

proiezione vera coincide con la proiezione assonometrica relativa a quel piano (e reciprocamente) e le altre due proiezioni assonometriche cadono nelle proiezioni degli assi contenuti in quel piano.

Se un punto cade sopra un asse la sua proiezione vera coincide con due delle proiezioni assonometriche, quelle relative ai piani coordinati che passano per quell'asse, la terza proiezione cade nell'origine.

Si noti infine che l'origine O delle coordinate ha le sue quattro proiezioni coincidenti sul punto O'.

178. Rappresentazione di un piano. Un piano generico α taglia i tre piani coordinati yz, zx, xy secondo tre rette x_α, y_α, z_α, che s'incontrano due a due sugli assi coordinati e si chiamano tracce di α. Le proiezioni ortogonali di queste tre rette x'_α, y'_α, z'_α, sul quadro si chiamano tracce assonometriche di α, e se questo è generico formano un triangolo con i vertici su x', y', z'.

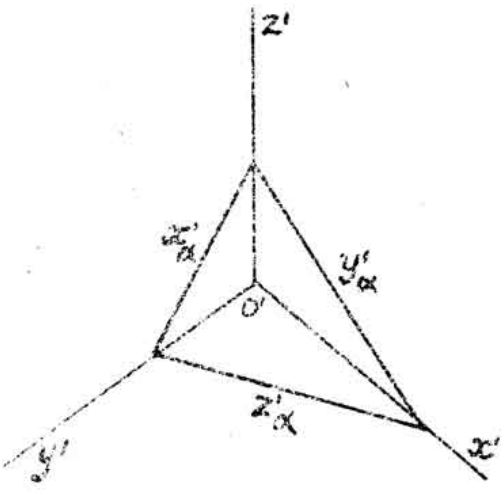


fig. 29

È evidente che dato il piano α rimangono determinate le sue tracce assonometriche e viceversa queste determinano quello.

Quando è dato il triangolo del-

le tracce (ossia quando è fissata la posizione del triedro fondamentale rispetto al quadro) si considera pure la retta $t_\alpha = \alpha\pi$ intersezione del piano α col quadro. Questa retta dicesi traccia vera di α.

Sussiste, in proposito il teorema:

Il triangolo delle tracce, ed il triangolo che ha per lati le tracce assonometriche di un piano α, sono omologici e l'asse di omologia è la traccia vera di α.

Infatti i due triangoli in questione hanno i vertici situati sulle rette $x'y'z'$ uscenti da O' e allora se si chiamano omologhi due vertici quando siano allineati con questo punto; da quanto è noto dalla Geometria proiettiva, segue che le coppie di lati: a, x'_α; b, y'_α; c, z'_α, si tagliano in tre punti L, M, N, di una medesima retta.

Si consideri ora la retta x_α comune al piano α e al piano yz. Poichè x_α appartiene ad yz la sua traccia in π appartiene alla traccia del piano yz cioè alla retta $a \equiv BC$. Ricordando d'altra parte che l'immagine di una retta passa per la sua traccia segue che la traccia di x_α è il punto comune ad a e ad x'_α cioè il punto L; e però L è un punto della retta t_α.

Analogamente dicasi dei punti M ed N e quindi: la traccia vera del piano α è l'asse di omologia dei due triangoli di cui si parla nell'enunciato.

La determinazione delle rimanenti tracce di un piano quando ne siano date due qualunque si esegue mediante costruzioni ovvie sulle quali non insistiamo.

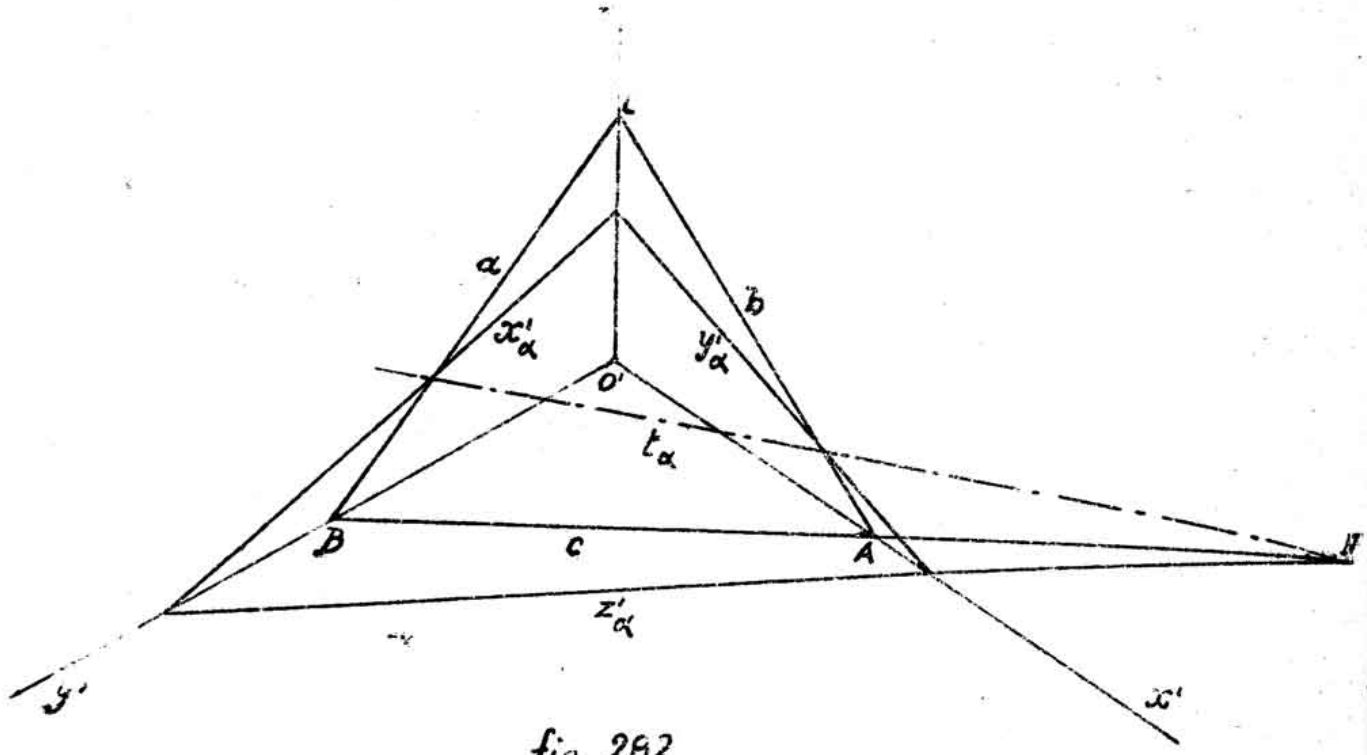


fig. 282

179 - Posizioni particolari di un piano.

a) - Se il piano α è parallelo ad uno degli assi ad es. all'asse z, x_α, y_α sono parallele a z' e reciprocamente.

b) - Se il piano α è parallelo ad un piano coordinato, ad es. al piano x y x_α ed y_α sono parallele ad y ed x e quindi x'_α e y'_α sono parallele ad y' ed x' e viceversa.

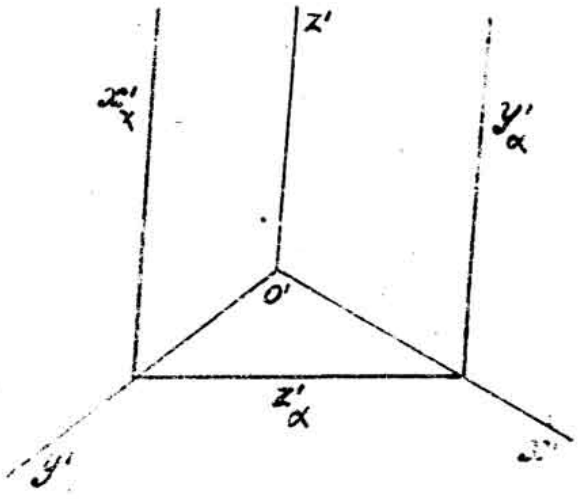


fig. 283

c) - Se il piano α passa per O, l'omologia sopra ricordata viene a mancare, ma si noti

che anche in questo caso le intersezioni delle tracce assonometriche x'_α, y'_α, z'_α rispettivamente coi lati a, b, c, del triangolo delle tracce sono i punti della traccia vera di α, e quindi resta fissato il triangolo delle tracce, date due delle quattro rette α π, x'_α y'_α z'_α è sempre possibile costruire le altre due. Se poi sono date solo le proiezioni degli assi e non note due delle tracce assonometriche, ad es. x'_α e y'_α per costruire la terza, basterà ricorrere ad un piano parallelo al piano α le cui tracce si costruiscono facilmente osservando che piani paralleli hanno tracce omonime parallele e viceversa.

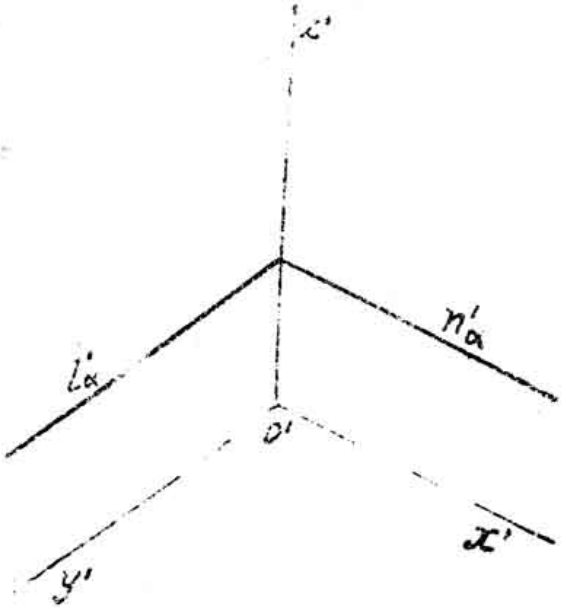


fig. 284

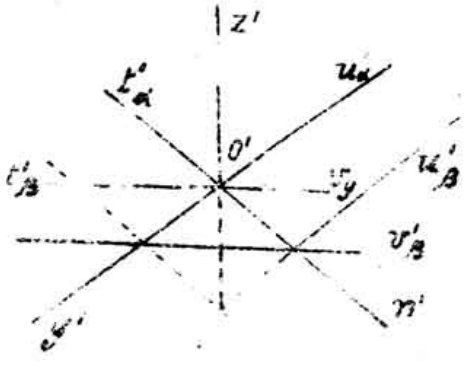


fig. 285

180. Rappresentazione della retta. Se un punto P dello spazio descrive una retta r, le sue quattro proiezioni P', P'_x, P'_y, P'_z, descrivono quattro rette r', r'_x, r'_y, r'_z la prima delle quali dicesi proiezione vera di r, e le altre proiezioni assonometriche.

In generale due qualunque di queste quattro proiezioni ba-

stano ad individuare la retta r ed una due di essi possono prendere arbitrariamente. Invero se, ad es., sono date r'_x ed r'_y, i piani normali a π passanti per esse secano rispettivamente i piani yz e zx in due rette r_x ed r_y, le quali, come abbiamo appreso nel metodo di Monge, individuano nello spazio una retta $\underline{r}$ che è ben determinata tranne il caso in cui entrambe le rette r_x ed r_y siano perpendicolari all'asse z (linea di terra). Quando ciò si verifichi, se r_x ed r_y sono distinte, la retta $\underline{r}$ non esiste, quando invece $r_x \equiv r_y$ la retta $\underline{r}$ risulta indeterminata e per determinarla occorre dare o la terza proiezione assonometrica o la proiezione orizzontale. Il primo caso eccezionale si verifica quando per esempio è r'_x parallela all'asse y' ed r'_y parallela ad x' senza che r'_x ed r'_y si incontrino in uno stesso punto dell'asse z'. Il 2° caso (di indeterminazione) si verifica quando r'_x è parallela all'asse y', r'_y è parallela all'asse x' e il punto comune ad r'_x r'_y appartiene all'asse z'.

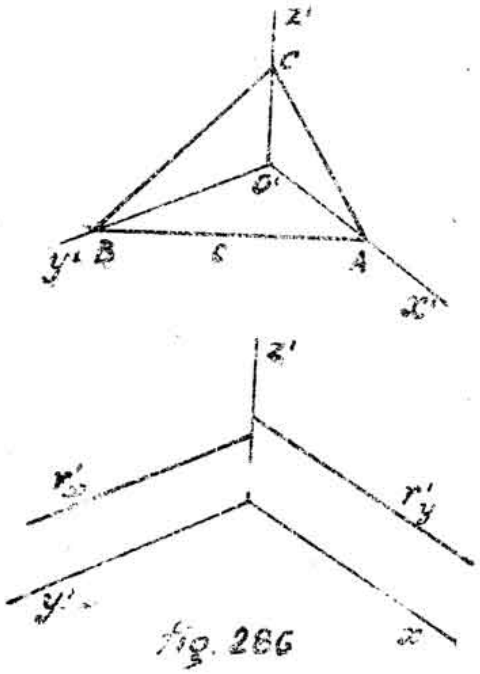


Fig. 286

Se poi sono date ad esempio r'_x ed r'_z la retta $\underline{r}$ risulterà dalla intersezione del piano normale

a π e per r' col piano normale ad xy per r_z (essendo r_z la retta comune ad xy e al piano perpendicolare a π per r'_z). Vi sarà indeterminazione solo se questi due piani coincidono in un unico piano che dovrà allora risultare perpendicolare alla retta $c \equiv \pi(xy)$ e quindi parallelo al piano $r r'$. Ciò avviene quando e solo quando r'_z ed r' coincidono in una unica retta parallela a z'. In tal caso per individuare la retta occorre la conoscenza di un altra delle sue proiezioni assonometriche. Anche in questo punto si può verificare un caso di incompatibilità analogo al precedente quando r' e r'_z sono distinte e parallele all'asse z.

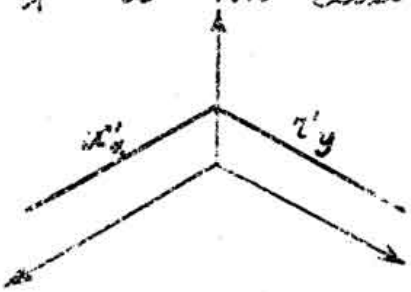


fig. 287

Di una retta r si considerano pure le proiezioni dei quattro punti T, X, Y, Z, in cui essa seca rispettivamente il quadro π' e i piani coordinati yz, zx, xy.

Il primo di questi punti si dice <u>traccia vera di r</u>, le proiezioni vere dei rimanenti, si dicono <u>tracce assonometriche</u>.

Delle 16 proiezioni cui danno luogo i quattro punti considerati, alcune coincidono. Essendo infatti X un punto del piano yz si ha: $X' \equiv X'_x$ e analogamente $Y' \equiv Y'_y$, $Z' \equiv Z'_z$, essendo poi T un punto del quadro basta segnare la sola proiezione vera $T' \equiv T$ e perciò

sul quadro si disegneranno al più dieci dei 16 punti detti.

Vediamo come esse si distribuiscono:

Essendo r_x la proiezione ortogonale di $\underline{r}$ sul piano y,z, ad esso appartengono le proiezioni ortogonali dei punti di $\underline{r}$ su questo piano; in particolare, r_x contiene $X \equiv X_x$, Y_x, Z_x.

Ne segue che r'_x contiene: $X' \equiv X'_x$, Y'_x, Z'_x

Analogamente r'_y " X'_y, $Y \equiv Y'_y$ Z'_y

e r'_z " X'_z Y'_z $Z' \equiv Z'_z$

Si osservi d'altra parte che:

X_y appartiene a Z e X_z a Y quindi:

X'_y appartiene a z' e X'_z appartiene a y'

analogamente Y'_z " x' Y'_x " z'

Z'_x " y' Z'_y " x'

Osservando infine che X', Y', Z', appartengono alla traccia vera di $\underline{r}$ la quale contiene anche il punto $T \equiv T'$, possiamo concludere che:

a) - La proiezione vera di una retta e contiene la traccia vera R e le tracce assonometriche X', Y', Z'.

b) - Una fra le proiezioni assonometriche di una retta contiene: la traccia assonometrica relativa, (punto di intersezione con la proiezione vera della retta) e le proiezioni assonometriche dello stesso indice delle altre due tracce, (nei punti di intersezione con le proiz-

zioni dei due assi di nome diverso delle rispettive proiezioni assonometriche considerate).

Le due proposizioni a) e b) permettono di completare la rappresentazione di una retta quando siano dati elementi sufficienti a determinarla.

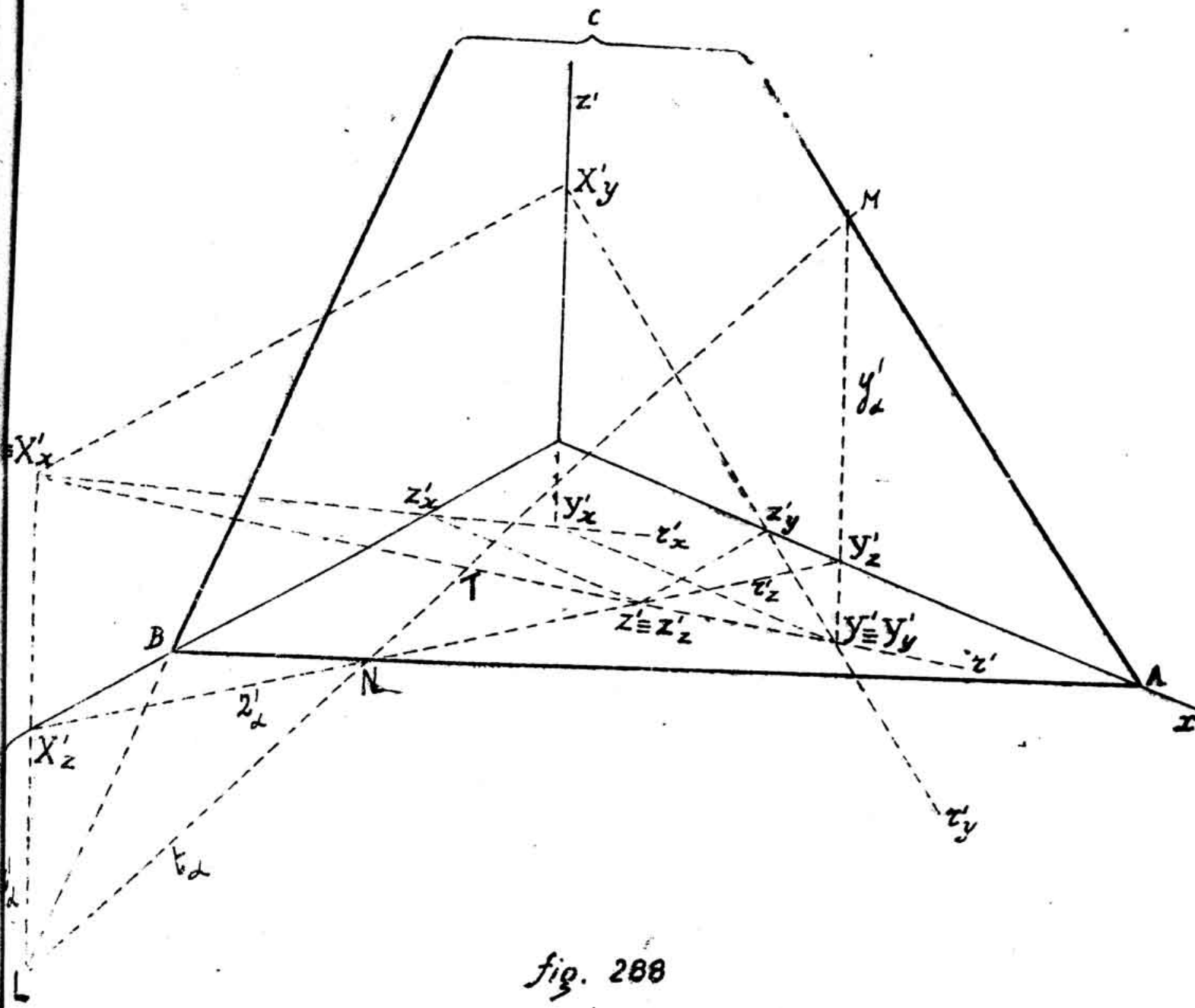


fig. 288

181 - Risolviamo in proposito i seguenti problemi:

Problema 1°. Data una retta r mediante la sua proiezione vera r' e una delle proiezioni assonometriche, ad es. r'_z, costruire le tracce e le rimanenti due proiezioni della retta.

Cominciamo col determinare le tracce assonometriche X', Y', Z' di r. Si ha subito: $Z' \equiv r' r'_z$. Osservando che si ha: $X'_z = r'_z y'$, $Y'_z = r'_z x'$, e ricordando le proprietà a) dei nn. 177, 181 si costruiscono i punti X' ed Y' conducendo per X'_z e Y'_z le parallele all'asse z' e intersecandole con r'. Dei punti X ed Y si conoscono così due proiezioni e si potrà completare la loro rappresentazione determinando X'_y e Y'_x. I punti Z'_x e Z'_y si determinano poi intersecando le parallele ad y' per z' rispettivamente con y' ed x'.

I punti X, Y, Z, sono così completamente rappresentati e però r y conterrà X'_y, Y'_y, Z'_y.

Per determinare infine la traccia vera T di r si consideri il piano α proiettante la retta r sul piano xy. Si avrà evidentemente $z'_\alpha \equiv r'_z$ e x'_α, y'_α saranno parallele all'asse z'. Sappiamo ora, dal metodo di Monge, che su una retta e un piano si appartengono le tracce (vere) rispettive si appartengano

e quindi poiché α passa per r, $t_\alpha = \alpha\pi$ deve passare per T. Ma T appartiene anche ad r', poiché la traccia domandata è il punto comune alla proiezione vera di r con la traccia di α la quale (n° 178) è la retta che congiunge due qualunque dei punti

$$L \equiv a x'_\alpha \quad M \equiv b y'_\alpha \quad N \equiv c z'_\alpha .$$

Osservazione. Potrebbe avvenire che $\alpha\pi$ risultasse parallela o coincidente con r'.

Nel primo caso r sarebbe parallela al quadro, nel secondo apparterrebbe a questo.

Problema II°. Determinare le tracce e le rimanenti proiezioni di una retta r data mediante due proiezioni assonometriche.

Siano date ad es. r'_x ed r'_y. Di ha subito:

$y'_x \equiv r'_x z'$, $z_x = r'_x y'$; $X'_y \equiv r'_y z'$, $Z'_y \equiv r'_y x'$

Il punto X' si determina intersecando r'_x con la parallela ad y' condotta per X'_y.

Analogamente, Y' è il punto comune ad r_y ed alla parallela ad x' passante per Y'_{x_1}.

Si ha allora $r' \equiv X'Y'$ e siamo quindi ricondotti al problema 1°.

Problema III°. Completare la rappresentazione di una retta data mediante due tracce assonometriche, ad es. X' ed Y'.

Intersecando gli assi y' ed x' con le parallele a z' passanti per X' ed Y' si ottengono i punti X'_z e Y'_z. Ed ora poiché si ha $r' \equiv X'Y'$, $r'_z \equiv X'_z Y'_z$ siamo ancora nel caso previsto nel problema I°.

Problema IV°. Completare la rappresentazione di una retta r data mediante la traccia vera T ed una delle tracce assonometriche X'.

Si ha in primo luogo $r' \equiv TX'$. Il punto X'_z si trova intersecando l'asse y' con la parallela a z' condotta per X'. Abbiamo così determinato un punto di r'_z. Per averne un secondo, si congiunga T col punto $L \equiv a.X'X'_z$ e si intersichi in N questa congiungente con il lato c del triangolo delle tracce. Il punto N è un punto di r'_z e però $r'_z \equiv NX'_z$.

Note r' ed r'_z siamo ricondotti al problema I°.

Le costruzioni ora esposte si giustificano facilmente tenendo presenti le considerazioni svolte in fine del problema I° per determinare la traccia vera di r.

181. Posizioni particolari di una retta.

Se una retta è parallela ad uno dei piani coordinati, ad x, al piano xy si ha, come è noto $r \parallel r_z$ e quindi $r' \parallel r'_z$. Inoltre il piano α passante per r e parallelo al piano xy, essendo normale a z, risulta perpendicolare ad ambedue i piani yz e zx, cioè α proiet-

sta ortogonalmente a tanto su yz che su zx.

Ne segue che le tracce di α su questi due piani, cioè le rette r_x ed r_y risultano parallele rispettivamente ad y ed x, ed incidenti su z. Sarà quindi $r'_x \parallel y'$, $r'_y \parallel x'$ e queste due rette si incontrano in un punto di z'.

Reciprocamente se r'_z è parallela ad r', il loro punto comune Z' è improprio e quindi tale è anche Z. Ne risulta $r \parallel r_z$ ossia r parallela al piano xy. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta sia parallela ad uno dei piani coordinati è che la sua proiezione obliqua sia parallela alla proiezione assonometrica relativa a quel piano.

Le altre due proiezioni assonometriche sono parallele alle proiezioni degli assi contenuti in quel piano e s'incontrano in un punto della proiezione del terzo asse.

In particolare se r appartiene ad xy si ha:

$$r' \equiv r'_z \ , \quad r'_x \equiv y' \ , \quad r'_y \equiv x'.$$

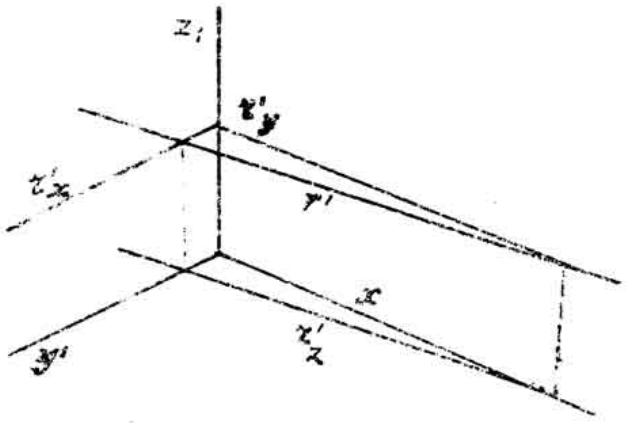
In modo analogo si trova facilmente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta sia parallela ad uno degli assi coordinati è che la sua proiezione obliqua sia parallela alle due proiezioni assonometriche relative ai piani coordinati

passanti per quell'asse.

E si ha pure:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una retta passi per l'origine delle coordinate è che due delle sue proiezioni passino per O'. In conseguenza anche le altre due proiezioni passeranno per O'. La loro determinazione verrà fatta più avanti (n°).



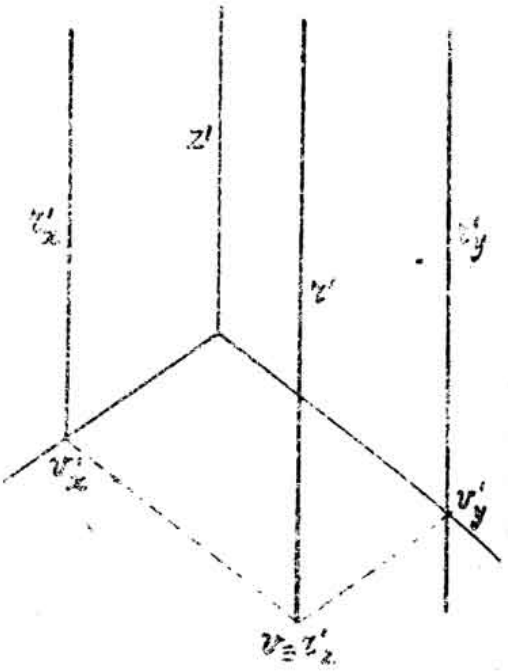


Fig. 289

- § 38 -

CONDIZIONI FONDAMENTALE DI PARALLELISMO ED APPARTENENZA PROBLEMI GRAFICI FONDAMENTALI.

182. Le condizioni fondamentali di parallelismo ed appartenenza si esprimono nel metodo delle proiezioni

sono metriche senza nessuna difficoltà, quando si tengano presenti le condizioni analoghe enunciate nel metodo delle proiezioni ortogonali.

Lo stesso può dirsi per ciò che riguarda i problemi grafici fondamentali. A titolo di esempio, ci limiteremo ad esporre la risoluzione di uno solo di essi.

Determinare il punto comune ad una retta ed a un piano.

Come in tutti gli altri metodi, questo problema si risolve condurendo per la retta $r \equiv (r' r'_2)$ un piano ausiliario β, determinando la retta x, intersezione di questo piano col piano dato $\alpha \equiv (x_\alpha y_\alpha z_\alpha)$ e trovando infine il punto comune ad r ad x.

Scegliendo per semplicità come piano ausiliario β il piano proiettante la retta r sul piano xy si ha (n° 179):

$$x'_\beta \equiv X' X'_2 \,, \quad y'_\beta \equiv Y' Y'_2 \,, \quad z'_\beta \equiv T'_2$$

Dette X_1, Y_1, Z_1, le tracce della retta $u \equiv \alpha\beta$, sarà evidentemente:

$$X'_1 \equiv x'_\alpha x'_\beta \,, \quad Y'_1 \equiv y'_\alpha y'_\beta$$

e perciò

$$u' \equiv X'_1 Y'_1$$

Il punto comune ad r' ed u' sarà la proiezione orizzontale P' del punto P ed intersecando infine r'_2 con

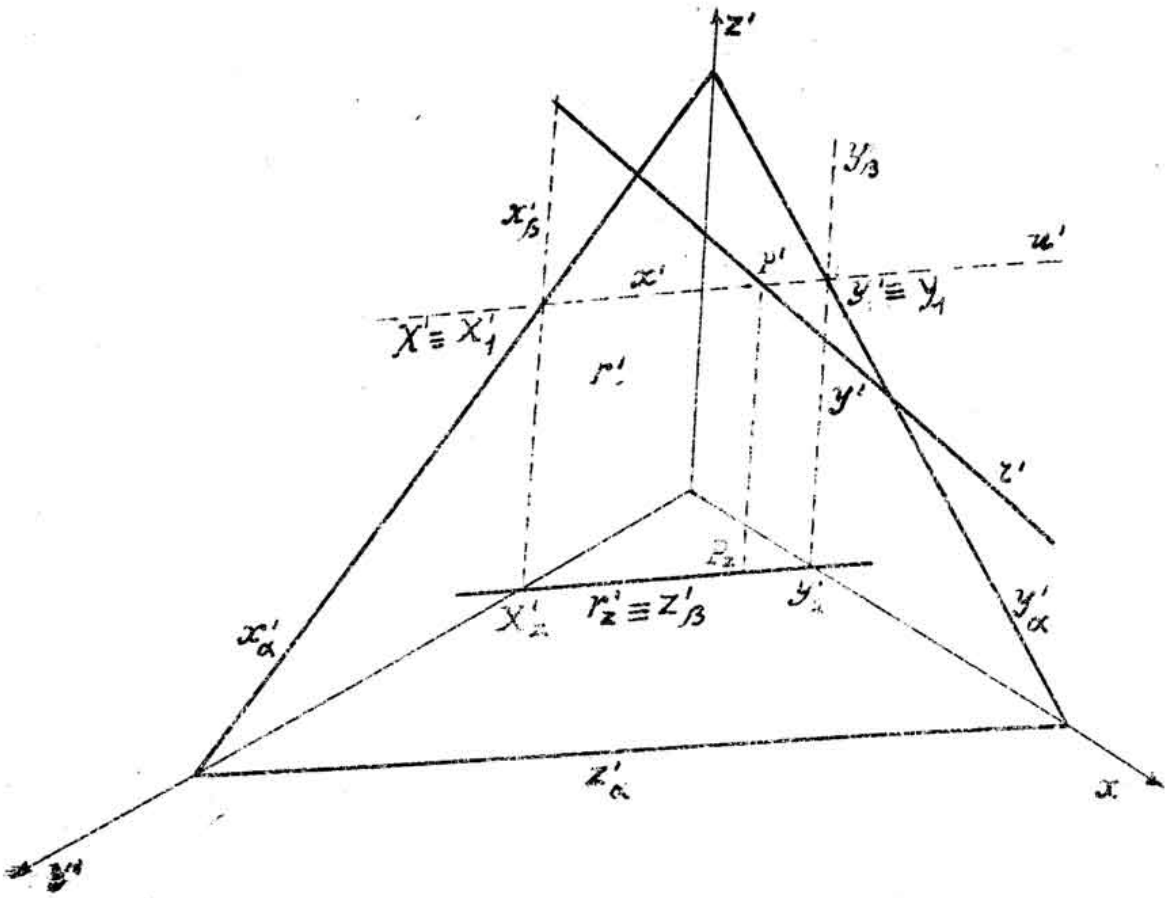


fig. 290

la parallela a z' condotta per P' si ha il punto P'_z. Il punto P rimane in tal modo determinato dalle sue proiezioni P' e P'_z.

- § 36 -

183 - CONDIZIONI DI PERPENDICOLARITA' FRA RETTA E PIANO

Siano r ed α una retta ed un piano fra loro perpendicolari ed in posizione generica rispetto al quadro.

Si ha evidentemente $r'_y \perp \pi_\alpha$ e sui piani coordinati si ha poi $r_x \perp x_\alpha$, $y \perp y_\alpha$, $r_z \perp z_\alpha$; ma questi

angoli non si proiettano in generale su π in angoli retti. Vi è però una proprietà che si mantiene in tale proiezione.

Consideriamo (ad es.) il piano xy ed in esso le tre coppie di rette perpendicolari x, y, c_z c_α $c(\subset AB)$ e la perpendicolare h a questa per un punto qualunque del piano xy ad esempio per O.

Queste tre coppie di rette, segnano nella retta impropria del piano xy coppie di punti di una stessa involuzione I (involuzione assoluta). Proiettando sul quadro π, la I si proietterà in una involuzione I' della retta impropria del quadro e perciò i punti impropri delle proiezioni delle tre coppie di rette apparterranno all'involuzione I'.

Possiamo allora dire: se r ed α sono perpendicolari, i punti impropri di r'_z e z'_α sono coniugati nella involuzione I' determinata sulla retta impropria di π dalle coppie di rette: x', y'; c, z', essendo z' la proiezione di h; (essendo c una retta del quadro ed h la perpendicolare a c per O, segue evidentemente $h' \perp c$ e quindi $h' \equiv z'$). L'involuzione I' nella quale devono corrispondersi i punti propri di r'_z e z'_α è quindi perfettamente determinata. Reciprocamente se è $r' \perp$ a π ed i punti impropri di r'_z e z'_α sono coniugati nella involuzione I', r ed α sono fra loro

perpendicolari. Infatti, dalla seconda ipotesi discende che le direzioni di r_z e z_α sono coniugate nella involuzione assoluta del piano xy ossia è $r_z \perp z_\alpha$.

Da ciò segue che il piano μ normale al piano xy e passante per r_z è perpendicolare a z_α e quindi ogni retta di μ è perpendicolare a z_α. Analogamente dall'ipotesi $r' \perp \alpha\pi$ segue che il piano verticale ν passante per r' è perpendicolare ad $\alpha\pi$. Si conclude allora che la retta $r \equiv \mu\nu$ essendo perpendicolare a due rette z_α, $\alpha\pi$ (se distinte e non parallele) del piano α è perpendicolare al piano α.

Adunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta $r \equiv (r' r'_z)$ ed un piano $\alpha \equiv (\alpha\pi, z'_\alpha)$[1] siano perpendicolari è che si abbia: $r' \perp \alpha\pi$ e che le direzioni di r'_z e z'_α siano coniugate nell'involuzione della retta impropria del quadro che è proiezione dell'involuzione assoluta del piano xy.

(Analogamente dicasi per r'_x e x'_α, r'_y e y'_α).[2]

Ricordando che ogni problema di perpendicolarità fra elementi fondamentali può sempre ricondursi ad un problema di perpendicolarità fra retta e piano, termineremo il presente paragrafo risolvendo il

Problema: per un punto dato $P \equiv (P' P'_z)$ condurre la perpendicolare ad un piano dato $\alpha \equiv (\alpha\pi, z'_\alpha)$.

(1) Non $\parallel c$, se no $z_\alpha \parallel \alpha\pi$

(2) Usando le tre coppie z'_z, z'_α; r'_x, x'_α; r'_y, y'_α il teorema non soffre eccezioni.

Se si conduce per O' la retta $d \parallel c$, le due coppie di rette $x'y'$; d, z' individuano una involuzione nel fascio di centro O' nella quale la corrispondente g della retta f condotta per O' e parallela a z'_α ha la stessa direzione della retta z'_z da costruire.

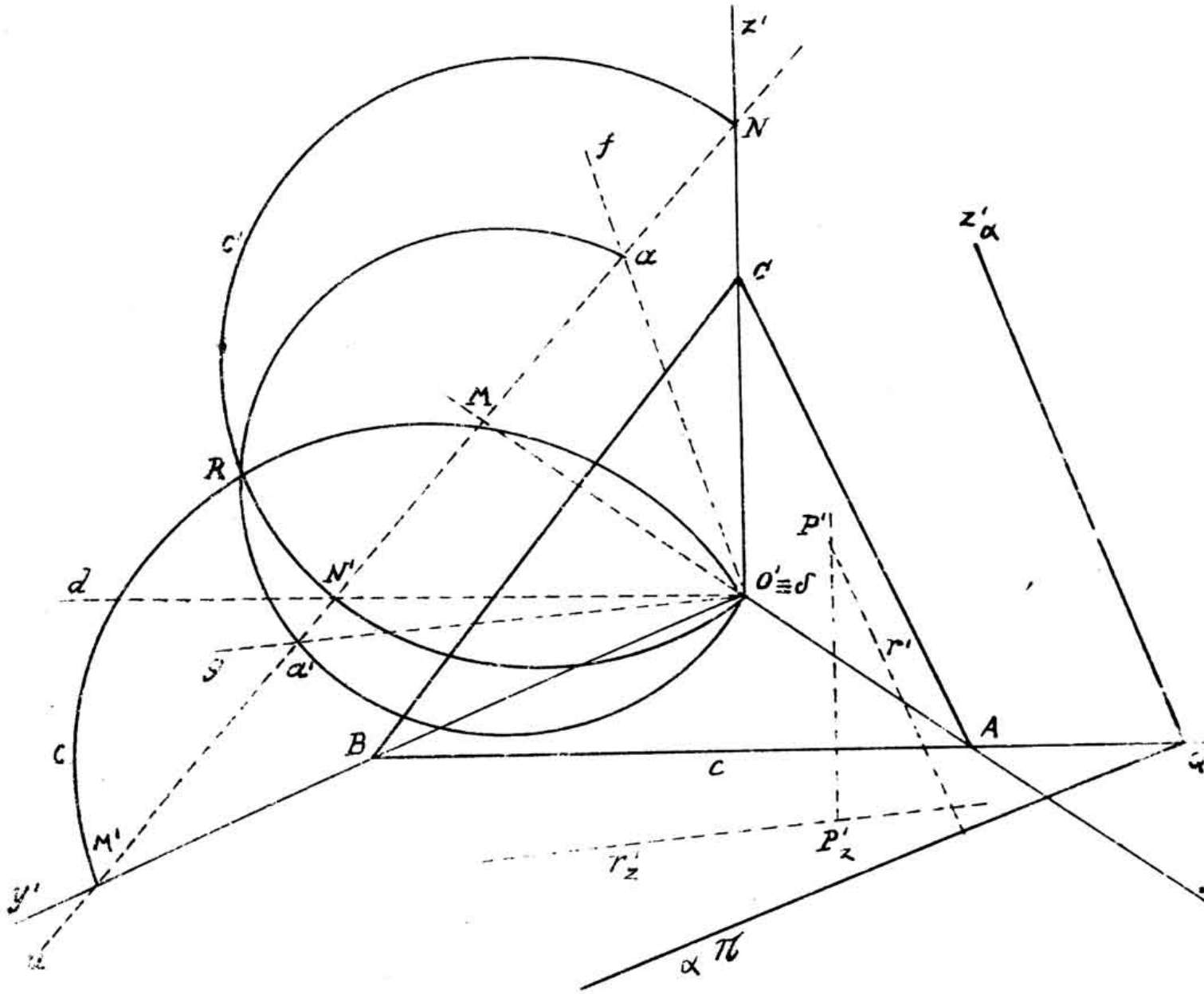


fig. 291

Determinata adunque (1) la retta g con uno dei procedimenti che insegna la geometria proiettiva, la parallela a g per P'_z è la retta z'_z cercata.

La retta z' è infine la perpendicolare ad $\alpha\,\pi$ condotta per P'.

---

(1) Uno di questi procedimenti è notoriamente il seguente:

Indichiamo con M, M', N ed N' i punti ove le rette x', y', z' e d segano una retta m non passante per O'. E siano R ed $S \equiv O'$ i punti d'incontro di due cerchi (segantisi) c e c' passanti rispettivamente per M, M', ed N ed N'. Il cerchio per R, S, e il punto Q ove c incontra m segherà ulteriormente m nel punto Q' omologo di Q nella inversione $\begin{pmatrix} M'N'R' \\ MM'N \end{pmatrix}$. La retta g cercata è perciò la retta $O'Q'$ e perciò z'_z è la parallela a g per P'_z.

RIBALTAMENTI

184. Sia α un piano generico dello spazio, e $a\pi$ la sua traccia vera.

Da quanto è stato detto in merito al problema del ribaltamento nel trattare del metodo delle proiezioni ortogonali, segue subito che:

Le proiezioni vere e i ribaltamenti dei punti di un piano generico si corrispondono in un'omologia affine ortogonale che ha per asse la traccia vera del piano.

Poichè a determinare questa omologia non occorre che la conoscenza di una coppia di punti corrispondenti, potremo ritenere risolto il problema del ribaltamento una volta che si sappia determinare una coppia siffatta, una volta cioè che di un particolare punto di α di cui sia data la proiezione vera, si riesca a determinare il ribaltamento.

Essendo i piani coordinati in posizione generica rispetto al quadro (non $\parallel$ nè $\perp$ al quadro) cominceremo col trattare del

Ribaltamento di un piano coordinato.

Consideriamo, ad es., il piano xy e proponiamoci di determinare il ribaltamento dell'origine O quan-

do il piano x y ruotando attorno alla sua traccia si porta a coincidere col quadro.

Ricorrendo ad esempio al teorema delle tre perpendicolari si vede subito che se, come al solito, si denota con R il piede dell'altezza del triangolo delle tracce relativa al lato AB la OR è perpendicolare ad AB: ossia OR è l'altezza del triangolo rettangolo AOB relativo all'ipotenusa.

Ne segue che il ribaltamento di OR cadrà sulla retta O'R (asse z') e che il punto (O) apparterrà a questa retta e vedrà sotto angolo retto il segmento AB. Il punto (O) si determina allora intersecando l'asse z' con la semicirconferenza di diametro AB situata da quella parte di AB che è relativa al verso del ribaltamento.

Da quanto abbiamo detto nel numero precedente segue che se $P' \equiv P'_2$ è la proiezione vera di un punto P nel piano x y, il ribaltamento (P) si otterrà determinando l'omologo di P' nella omologia affine ortogonale che ha per asse $c \equiv AB$ ed O', (O) come coppia di punti corrispondenti. Il punto (P) si otterrà cioè come intersezione della perpendicolare condotta da P' all'asse AB con la retta che congiunge il punto (O) col punto in cui l'asse

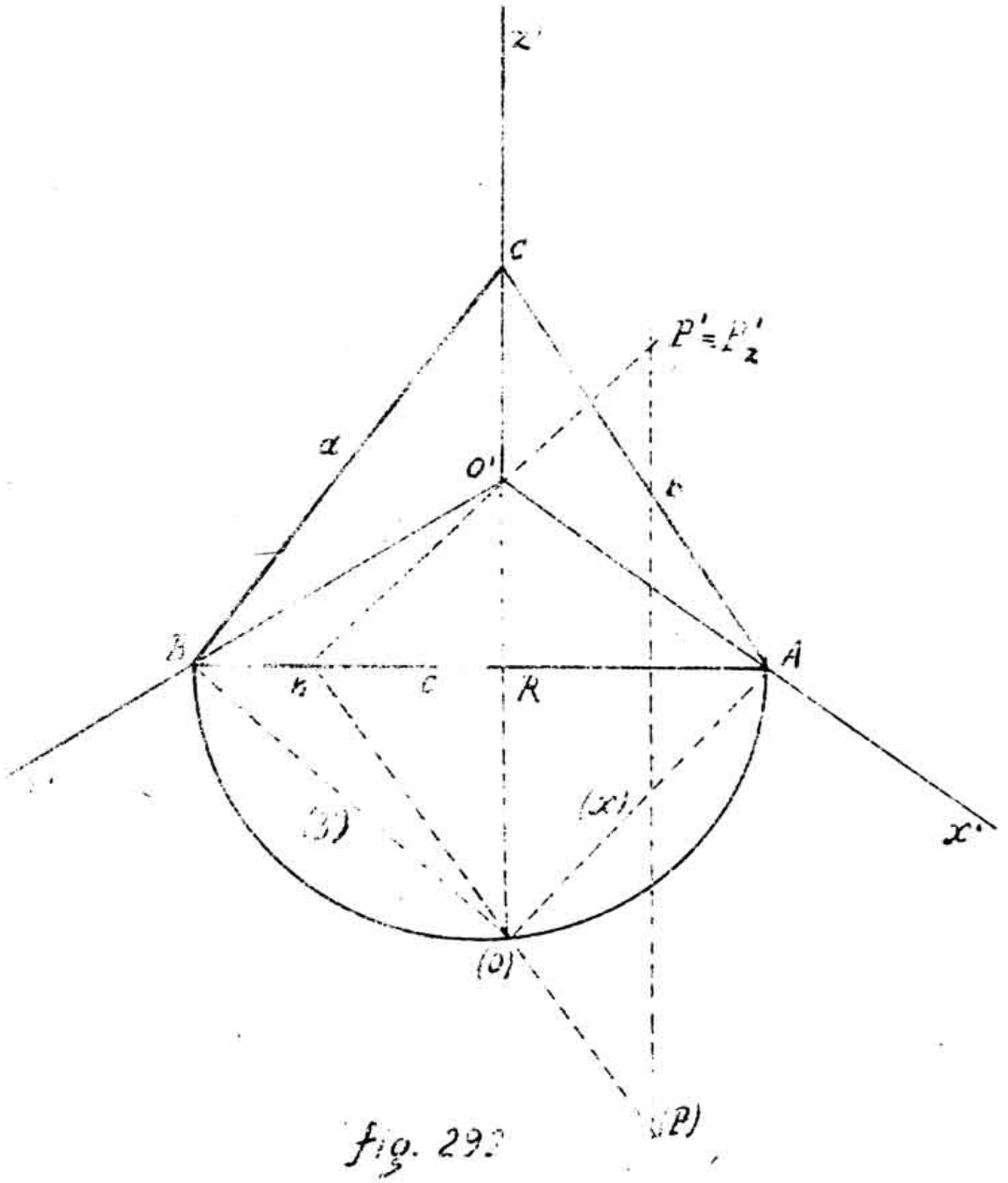


Fig. 293

AB incontra la retta O' P'.

Veniamo per ultimo al:

Ribaltamento di un piano generico - Sia α un piano che possiamo supporre dato mediante la sua traccia orizz. α Π e la traccia assonometrica z'_α. Come punto particolare da ribaltarsi, scegliamo il punto H in cui z_α taglia l'asse x. La proiezione ortog. H' di H è il punto comune ad x ed a z'_α. Il

ribaltamento (H) di H cadrà sulla perpendicolare ad $\alpha\pi$ condotta per H' e la sua posizione si potrà precisare quando si conosca la distanza di H da qualche punto della traccia $\alpha\pi$, cioè da un punto che rimanga fisso durante il ribaltamento. Scegliamo a tale

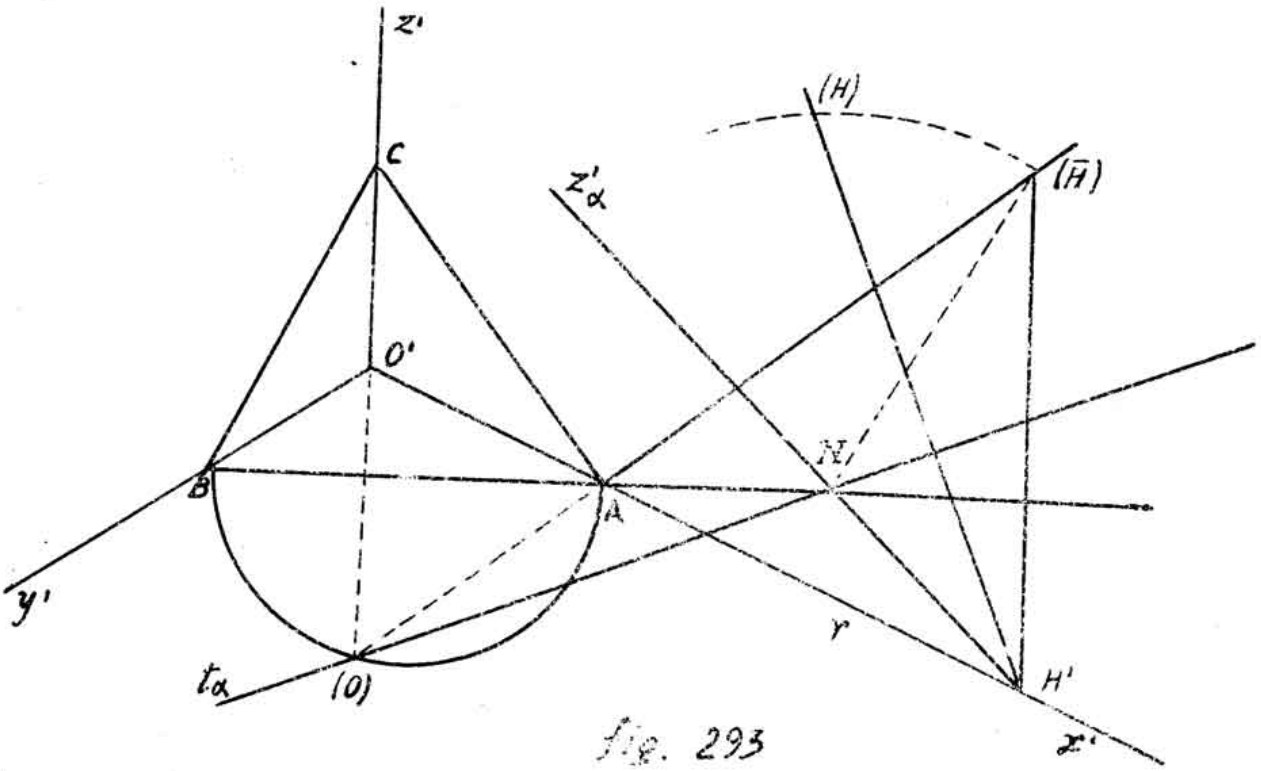


fig. 293

scopo il punto comune alla traccia di α e al piano xy ossia il punto N comune ad AB ed ad $\alpha\pi$. La distanza NH si determina operando il ribaltamento sul piano xy al quale appartengono i punti N ed H. Essendo N un punto dell'asse AB di rotazione, esso coincide col suo ribaltamento $(\bar{N})$ di N (come punto del piano xy) si determina come è detto nel numero precedente, ossia come l'intersezione del ribaltamento $(0)A$ dell'asse x con la perpendicolare condot-

ta da H' alla retta AB.

Nota la distanza dei punti N ed $H(=N(\bar{H}))$, basterà evidentemente intersecare (da banda conveniente) la perpendicolare ad α π per H' con la circonferenza di centro N e raggio $N(H)$ per avere il ribaltamento H come punto H del piano α.

Indice

della Geometria Descrittiva del Prof. Albanese

Introduzione pag. 3

Parte Iª

Capitolo Iº - Metodo delle proiezioni ortogonali.

§1 - Rappresentazione degli elementi fondamentali, diedri principali e piani bisettori " 5

§2 - Condizioni fondamentali di parallelismo e di appartenenza " 30

§3 - Terzo piano di proiezione " 44

§4 - Problemi grafici fondamentali " 51

§5 - Problemi metrici fondamentali - Condizione di perpendicolarità e problemi relativi " 65

§6 - Ribaltamenti e raddrizzamenti " 73

§7 - Spostamento della figura obbiettiva - Cambiamento degli elementi di riferimento " 92

Capitolo IIº -

§8 - Poliedri e loro rappresentazione " 106

§ 8 bis. Immersione delle superficie - Teorema di Eulero pag. 123
§ 8 ter. Rappresentazione di alcuni poliedri in proiezione ortogonale " 183

Capitolo III°

§ 9. Disgressione del concetto di retta tangente ad una curva e di piano tangente ad una superficie in un punto " 197
§ 10. Problemi relativi alle curve piane " 216
§ 11. Cenno sulle superficie coniche e cilindriche " 222
§ 12. Superficie di rotazione " 250
§ 13. Cenni sulla elica e sugli elicoidi " 257
§ 14. Cenni sulle superficie elicoidali " 272
§ 15. Viti a filetto rettangolare e triangolare " 280

Capitolo IV°

§ 16. Elementi della teoria delle ombre " 284

Capitolo V° - Metodo delle proiezioni quotate.

§ 17. Preliminari. Rappresentazione degli elementi fondamentali " 302
§ 18. Condizioni fondamentali di parallelismo ed appartenenza " 311
§ 19. Problemi grafici fondamentali " 315

§.20. Problemi metrici fondamentali -pag. 322

Capitolo VI° - Applicazioni

§.21 - Brevi cenni sulla copertura dei tetti " 332
§.22 - Superficie topografiche

Parte II^a

Capitolo VII° - Metodo delle proiezioni centrali

§.23 - Rappresentazione degli elementi fondamentali " 364
§24. Condizioni fondamentali di parallelismo ed appartenenza " 369
§25 - Problemi grafici fondamentali " 378
§.26 - Problemi metrici fondamentali " 389
§.27 - Ribaltamento
§.28 - Cambiamento del sistema di rappresentazione. Spostamento della figura obbiettiva " 411

Capitolo VIII°

§.29. Elementi di prospettiva lineare " 428
§.30 - Prospettiva cavaliera " 446
§.31 - Elementi di fotogrammetria " 454

Capitolo IX - Metodo delle proiezioni assonometriche

§.32 - Assonometria ortogonale " 476

§. 33. Problemi fondamentali dell'assonometria pag. 490
§. 34. Rappresentazione degli elementi fondamentali " 500
§. 35. Condizione fondamentale di parallelismo ed appartenenza. Problemi grafici fondamentali " 516
§. 36. Condizioni di perpendicolarità fra retta e piano " 518
§. 37. Ribaltamenti " 523

Conti Prof. G. - Lezioni di aerotecnica Vol. I . . . . . L. 180.—
» » » - » » » Vol. III . . . . . » 200.—
Gallo Prof. G. - Lezioni di Chimica applicata . . . . . » 750.—
Giovannozzi ing. R. - Costruzioni di macchine . . . . . » 450.—
Magini Prof. O. - Complementi di scienza delle costruzioni . . » 30.—
Pera Prof. L. - Architettura tecnica (*in corso di stampa*)
Pera Prof. L. - Lezioni di Tecnica Urbanistica . . . . . » 230.—
Pelilli Prof. M. - Storia dell'architettura e stili architettonici . . » 250.—
Pistolesi Prof E. - Meccanica applicata alle macchine . . . » 500.—
Pistolesi Prof. E. e Nerli Prof. M. - Lezioni di macchine termiche . » 800.—
Poggi Prof. L. - Fisica tecnica p. 1.a: Termodinamica . . . » 160.—
» » » - » » p. 2.a: Moto dei fluidi . . . » 65.—
» » » - » » p. 3.a e 4.a: Trasmissione del calore . » 100.—
» » » - » » p. 5.a Impianti di riscaldamento e ventilazione . . . . » 65.—
» » » - » » p. 6 a Macchine frigorifere . . » 56.—
» » » - » » p. 7.a: Cenni sull'illuminazione . . » 55.—
Quaglia Prof. G. - Costruzioni ferroviarie Vol. I . . . . . » 600.—
Roccatelli Prof. C. - Corso di architettura tecnica Vol. I . . . » 500.—
Rovini ing. C. - Applicazioni alla scienza delle costruzioni . . » 300.—

Agraria

Quartaroli Prof. A. - Lezioni di chimica agraria Vol. I . . . » 300.—
» » » - » » » » Vol. II . . . » 280.—
Russo Prof. G. - Lezioni di entomologia agraria - Parte Speciale: Parte I » 300.
» » » - » » » » - » » Parte II » 320.—
Stefanelli ing G. - Calcolo di massima di caldaie a carbone polverizzato e di caldaie con focolare e griglia mobile . » 40.—
» » » - Schemi di calcolo di motori lenti a combustione interna (Diesel e Semidiesel) . . . . . » 30.—
» » » - Costruzioni rurali e topografia (*in corso di stampa*)
Taruffi Prof. D. - Estimo e contabilità agraria . . . . . » 70.—
» » » - Economia rurale . . . . . » 70.—

Giurisprudenza e Scienze Economiche

Biscardi prof. A. - Corso di diritto romano . . . . . » 80.—
Bruguier prof. G. - Corso di politica economica (*in corso di stampa*)
De Vergottini prof. M. - Storia del diritto italiano. . . . . » 150.
De Vergottini prof. M. - Lezioni di statistica. . . . . » 180.
Frattini prof. E. - Corso di storia del diritto romano . . . » 150.—