PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO MATEMATICO DELLA
REGIA UNIVERSITÀ DI ROMA

R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE
PISA
Y
III
45

FRANCESCO SEVERI

SERIE, SISTEMI D'EQUIVALENZA E CORRISPONDENZE ALGEBRICHE SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE

A CURA DI F. CONFORTO E DI E. MARTINELLI

VOLUME PRIMO





EDIZIONI CREMONESE
DELLA S. A. EDITRICE PERRELLA - ROMA

Tivoli, Stabilimento di Arti Grafiche di Aldo Chicca. - 1942-XX

PREFAZIONE

Queste lezioni sono state tenute all'Università di Roma negli anni dal 1936-37 al 1938-39 (1) *e al Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica nel 1940-41* (2). *In esse ho voluto metodicamente esporre, in modo accessibile a chiunque abbia un principio di preparazione nella geometria algebrica, sia i fondamenti della teoria che ho iniziato nel 1932 e che è stata sviluppata da allora in poi, da me e da altri, delle serie e dei sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche, sia i fondamenti della geometria sopra una superficie, intimamente fusi, da un nuovo punto di vista, colla predetta teoria.*

La linea direttiva dell'opera era naturalmente chiara al mio spirito fin dall'inizio; ma l'elaborazione, in talune parti espositiva, in altre originale, si è compiuta man mano che le lezioni procedevano, dominata perciò dalle suggestioni che la prova del fuoco dell'esposizione continuamente imponeva.

Qualche ritorno, qualche deviazione o digressione sono appunto conseguenza di questo modo di formazione del libro, stampato a riprese, ma la cui unità fondamentale non mi pare sensibilmente turbata.

La vastità della materia, che voglio abbracciare, non si esaurisce col presente volume. In un secondo mi resta

(1) Esattamente fino a pag. 111 nel 1936-37; da pag. 111 a pag. 178 nel 1937-38; da pag. 178 a pag. 239 nel 1938-39.

(2) L'ultima parte, da pag. 239 a pag. 404.

da trattare della teoria generale dei sistemi continui e della teoria degli integrali abeliani semplici e doppi sopra una superficie, nonché di taluni preliminari di topologia e di geometria sopra una varietà: insomma di tutto ciò che mi occorre per sboccare nello studio generale delle serie e dei sistemi di equivalenza dal punto di vista topologico e trascendente e nella teoria delle corrispondenze algebriche fra varietà, quale son venuto creando negli ultimi anni.

Mentre la stampa procedeva, il mio caro amico GAETANO SCORZA, *che primo mi propose la pubblicazione, è mancato ai vivi, lasciando dietro di sé largo rimpianto e tracce pregevoli e durevoli nell'algebra e nella geometria algebrica* [1]. *Sia onore alla Sua memoria.*

ENRICO BOMPIANI, *succeduto a* SCORZA *nella Direzione dell'Istituto Matematico dell'Università di Roma, ha continuato ad appoggiare e a seguire con vivo interesse la pubblicazione. Di ciò lo ringrazio e volentieri consento che anche il secondo volume vegga la luce fra le pubblicazioni dello stesso Istituto, anziché fra quelle del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, già iniziate coi corsi litografati di* BORTOLOTTI, RICCI, CONFORTO.

I miei cordiali ringraziamenti ai Professori CONFORTO *e* MARTINELLI *che, avendo preso le note alle mie lezioni, hanno seguito e curato l'opera mia con intelletto d'amore.*

FRANCESCO SEVERI

Staggiano d'Arezzo, 15 ottobre 1941-XIX.

(1) Ved. SEVERI, *L'opera scientifica di Gaetano Scorza*, « Annali di Matematica », 1940.

CAPITOLO I.

Trasformazioni, varietà, intersezioni di varietà.

1. *Trasformazioni razionali.* — Siano S_d, $S'_{d'}$ due spazi lineari proiettivi di dimensioni d, d', e $(x_1, \dots, x_d)$, $(x'_1, \dots, x'_{d'})$ siano le rispettive coordinate non omogenee di punto.

Un sistema di relazioni del tipo:

$$x'_i = \varphi_i\ (x_1, \dots, x_d) \qquad (i = 1, \dots, d'), \tag{1}$$

ove le φ_i sono funzioni razionali delle x, definisce una *trasformazione razionale* tra i due spazi. Ad un punto variabile x di S_d corrisponde un punto ben determinato x' variabile in $S'_{d'}$. Se $d < d'$, il punto x' necessariamente non descrive tutto l'$S'_{d'}$ al variare del punto x in S_d; del resto lo stesso può accadere anche se $d \geq d'$ (quando le φ_i siano tra loro funzionalmente dipendenti).

Comunque, sia M la *varietà* (intesa, per il momento, come insieme di punti) descritta da x' al variare di x in S_d. La varietà M (e non, in generale, tutto l'$S'_{d'}$) dicesi la *trasformata razionale* di S_d. Così pure, assegnata una varietà in S_d, la varietà corrispondente immersa in M, dicesi *trasformata razionale della varietà di partenza.*

La varietà M si dirà anche *unirazionale*, in quanto le (1) ci assicurano che il punto variabile su di essa è funzione razionale in *un* senso del punto variabile in uno spazio lineare. Non si confonda tale denominazione con quella delle varietà che il FANO ha chiamato *semirazionali* [1].

La dimensione di M risulta inferiore od uguale a quella dello spazio lineare di cui è trasformata [2]. Se però lo spazio S_d può a sua volta ottenersi, in virtù delle (1), come trasformato razionale di M,

[1] « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », (1908), pag. 973. Le varietà semirazionali possiedono tutti i generi geometrici e aritmetici nulli, pur senza essere varietà *razionali* (ved. appresso), ed hanno dimensione > 2. Non appena la dimensione è > 2, la classe delle varietà razionali è meno ampia di quella delle varietà unirazionali (ved. la fine del n. 1), mentre quest'ultima non si sa se sia meno od ugualmente ampia della classe delle varietà semirazionali.

[2] Se risulta minore, si dimostra (n. 49) che M può anche ottenersi come trasformata razionale di uno spazio lineare della stessa dimensione.

dicesi che M si ottiene da S_d mediante una trasformazione *birazionale*, cioè razionale nei due sensi. Allora M chiamasi una varietà *razionale*, e la sua dimensione risulta uguale a d. In tal caso le (1) possono invertirsi, fornendo relazioni del tipo:

$$x_j = \psi_j (x'_1, \dots, x'_{d'}) \qquad (j = 1, \dots, d), \tag{2}$$

ove le ψ_j sono funzioni razionali delle x'. Ben s'intende che le (2) sono valide *allorché il punto x' varia sopra M*.

Indichiamo con M_r una varietà unirazionale di dimensione r. Se $r = 1$, un noto teorema di LÜROTH [1] afferma che *ogni M_1 unirazionale è razionale* (beninteso cangiando, se del caso, la rappresentazione parametrica).

Del pari, per $r = 2$, *ogni M_2 unirazionale risulta razionale*; ciò invero equivale al teorema di CASTELNUOVO, affermante essere razionale ogni involuzione piana [2].

Non è così per $r > 2$, potendo benissimo aversi M_r unirazionali non risultanti di necessità razionali. Il primo esempio in proposito è stato fornito da ENRIQUES, per $r = 3$ [3].

2. *Varietà algebriche.* — Chiamasi *ipersuperficie* o *forma algebrica* di un S_d ogni varietà a $d - 1$ dimensioni soddisfacente ad un'equazione del tipo:

$$f(x_1, \dots, x_d) = 0,$$

ove f è un polinomio nelle d variabili $x_1, \dots, x_d$ [4]. L'ipersuperficie dicesi *irriducibile* o *riducibile* a seconda che f è un polinomio primo, ovvero decomponibile in fattori di grado inferiore (s'intende, nel campo complesso).

Chiamiamo *varietà algebrica V_r*, ad r dimensioni, ogni trasformata razionale ∞^r di una forma algebrica di un S_{r+1} [5]. La varietà

(1) « Mathematische Annalen », Bd. 9, (1875), p. 163. Ved. anche, p. es., F. SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, Vol. I, parte 1, pag. 32, oppure F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Teubner, Leipzig Berlin, pag. 16.

(2) « Mathematische Annalen », Bd. 44, (1894), pag. 125.

(3) « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », 1° sem., (1912), pag. 81.

(4) Introducendo coordinate omogenee $x_0, x_1, \dots, x_d$, l'equazione dell'ipersuperficie si ottiene uguagliando a zero una certa forma algebrica nelle $x_0, \dots, x_d$: donde la denominazione di *forma*, che si dà ad un'ipersuperficie.

(5) La trasformata razionale di una forma di S_{r+1} può avere dimensione $t < r$. In tal caso essa è pure trasformata razionale d'una forma di S_{t+1}.

si dirà irriducibile o riducibile a seconda che tale è la forma. Si noti che le varietà algebriche irriducibili, a norma di questa definizione, lo sono anche nel senso della teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse; cioè una *falda* [1] qualunque di una siffatta varietà può ottenersi per prolungamento analitico di ogni altra falda della medesima.

Una V_r algebrica, eventualmente spezzata in parti della *medesima* dimensione, la diremo una *varietà algebrica pura.*

Dalle definizioni date si traggono varie conseguenze, le quali hanno formato oggetto di una trattazione rigorosa per la prima volta per opera di KRONECKER [2], indi — e sotto forma più geometrica — di SEVERI [3]. Qui ci limitiamo ad enunciare tali conseguenze:

a) Ogni varietà algebrica (pura) V_{d-1} di S_d è una forma algebrica.

b) Il concetto di irriducibilità e di riducibilità di una varietà algebrica è invariante per trasformazioni birazionali.

c) Ogni V_r algebrica si può definire come intersezione completa di più forme algebriche.

d) Viceversa: l'insieme dei punti comuni a più forme algebriche di S_d, si distribuisce in un numero finito di varietà algebriche irriducibili, che possono avere dimensioni da $d-1$ a 0.

Una varietà che consti di t parti irriducibili coincidenti, dicesi una *varietà multipla secondo* t di una varietà irriducibile. La considerazione delle varietà multiple non ha nulla di artificioso o di arbitrario, perchè una forma di S_d può avere come primo membro della propria equazione la potenza t-esima di un polinomio irriducibile ed allora la forma è t-pla di una forma irriducibile. Inoltre quando si considerano i punti comuni a più forme di S_d, può darsi che il cono che proietta da un S_{d-k-2} generico una parte di dimensione k comune a quelle forme, risulti una forma t-pla; e allora anche la parte proiettata da quel cono è t-pla.

D'ora innanzi le varietà che si considerano saranno sempre *semplici e pure*, se non si avverta esplicitamente del contrario.

3. *Trasformazioni birazionali fra varietà algebriche.* — Supponiamo che una V_r di S_d sia la trasformata razionale di un'altra V'_r di $S'_{d'}$. Cioè, se con x, x' s'indicano rispettivamente i punti

(1) Cfr. F. SEVERI, *Vorlesungen...*, cit., pag. 309.
(2) « Journal für Math. », Bd. 92, pagg. 1-122, (1881).
(3) *Lezioni di Analisi*, Bologna, Zanichelli, vol. I, pag. 399 e segg.

variabili sopra V_r, V'_r, il punto x risulti funzione razionale del punto x' su V'_r. Può accadere che su V'_r esistano più punti cui corrisponde lo stesso punto x di V_r. In ogni caso questi punti x' omologhi del *generico* x (1), sono in numero finito, attesa l'uguaglianza delle dimensioni delle due varietà.

Se si dà il caso invece che un punto generico di V_r provenga da un sol punto di V'_r, allora x' risulta funzione algebrica *ad un valore* di x, e quindi, in base ad un teorema di algebra ben noto (2), *funzione razionale* di x. In tal caso si dice che V_r e V'_r sono trasformata razionale l'una dell'altra, oppure che sono fra loro in *corrispondenza birazionale* o *cremoniana*.

In particolare possono aversi siffatte corrispondenze tra spazi lineari.

4. *Caratteri proiettivi delle varietà algebriche* (3). — Passiamo a considerare le varietà algebriche dal punto di vista *proiettivo*, cioè in relazione alle proprietà che non si alterano operando con trasformazioni proiettive.

Il primo carattere proiettivo è l'*ordine*, che si definisce per una V_r algebrica pura di S_d. Si dimostra intanto che gli eventuali S_{d-r} di S_d, che incontrano ciascuno V_r in un insieme di infiniti punti, non sono spazi generici. Ciò posto, il numero *finito* di punti intersezioni di un generico S_{d-r} con V_r ammette un massimo, n, che si dice l'*ordine* di V_r. Si dimostra di più che un generico S_{d-r} di S_d incontra V_r proprio in n punti (distinti).

Si introducono poi, al modo seguente, i concetti di punto

(1) La parola *generico*, in geometria algebrica, non ha un significato vago, come da taluni si crede, ma ben preciso. Tale significato non ha però valore assoluto, ma relativo alla questione che si considera. Si dice che l'ente *generico* variabile in un sistema di enti algebrici (p. es. punti) costituenti una varietà algebrica pura (n. 2), soddisfa ad una determinata proprietà, se gli enti del sistema che non vi soddisfanno formano una varietà algebrica subordinata di dimensione *inferiore*. Gli enti variabili nella varietà subordinata si diranno *particolari* (sempre in relazione a quella determinata questione). Cfr. F. Severi, *Lezioni di Analisi*, cit., pag. 330 e pag. 403.

(2) Cfr. F. Severi, *Lezioni di Analisi*, cit., pag. 351, oppure *Trattato di Geometria algebrica*, cit., pag. 4.

(3) Le nozioni fondamentali algebrico-geometriche, che permettono di introdurre questi caratteri in modo pienamente rigoroso, trovansi alle pagg. 404 e segg. delle citate *Lezioni di Analisi* di F. Severi. Fissato così il punto di partenza, ci si può poi riferire allo sviluppo della teoria dei caratteri proiettivi delle varietà, com'è esposta nel Cap. IX della *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* di E. Bertini (Principato, Messina, 2ª ediz., 1923).

semplice, doppio, e in generale, *s-plo* di una V_r di S_d. Un punto P di V_r si dice s-plo, allorchè fra le intersezioni di V_r con un generico S_{d-r} prossimo a passare per P, ve ne sono s prossime a P.

Si ha anche subito la nozione di retta *tangente* a V_r nel punto s-plo P. Tale dicesi ogni retta per P, siffatta che tra le intersezioni di V_r con un S_{d-r} prossimo a passare per essa, ve ne siano *almeno* $s+1$ prossime a P.

Si dimostra che l'insieme delle rette tangenti in P a V_r, costituisce un *cono algebrico* di dimensione r e di ordine s. Allorchè P è semplice ($s=1$), il cono si riduce ad uno spazio lineare S_r, che dicesi *spazio lineare tangente*.

Consideriamo ora un arbitrario spazio lineare Σ_{d-r} di S_d, il quale incontri V_r in un numero finito, t, di punti: $P_1, P_2, \ldots, P_t$. Allora, spostando infinitamente poco Σ_{d-r}, *in modo generico*, l'S_{d-r} prossimo a Σ_{d-r}, così ottenuto, incontra V_r in n punti (distinti), in tal modo distribuiti, che ve ne sono i_1 prossimi a P_1, i_2 prossimi a $P_2, \ldots, i_t$ prossimi a P_t, e risulta $i_1 + i_2 + \ldots + i = n$. Tali numeri $i_1, i_2, \ldots, i_t$ sono invarianti rispetto allo spostamento infinitesimo dell'S_{d-r} prossimo a Σ_{d-r}, e quindi possono definirsi, con tutto rigore, come *molteplicità d'intersezione* di Σ_{d-r} e di V_r, rispettivamente in $P_1, P_2, \ldots, P_t$.

L'introduzione e la giustificazione di tutti questi concetti e degli altri più complessi relativi alle intersezioni delle varietà algebriche entro S_d o in generale tracciate sopra una varietà algebrica irriducibile ambiente, di cui diremo in seguito (concetti già da tempo noti, per sicura induzione, ai geometri algebristi), è stata fatta, in modo pienamente rigoroso, per la prima volta da VAN DER WAERDEN («Mathematische Annalen», t. 97 (1927), t. 99 (1928), t. 102 (1929) e da LEFSCHETZ (*Topology*, Amer. Math. Society, «Colloquium Publications», 1930) con i metodi algebrici, analitici e topologici; e subito dopo da SEVERI (*Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie*, «Abhandlungen Math. Seminar Hamburgischen Universität», Bd. 9, (1933), pag. 335), con i metodi classici algebrico-geometrici. I caratteri proiettivi di una varietà sono numerosi. Essi sono stati definiti in modo del tutto generale da SEVERI (*Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e le loro singolarità proiettive*, «Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino», (1902), pag. 61).

5. *Le varietà algebriche dal punto di vista invariantivo.* — Le proprietà che si considerano da questo punto di vista sono quelle che si trasmettono immutate ad ogni trasformata birazionale della varietà di cui trattasi (la trasformazione non estendendosi di necessità agli spazi ambienti). È quindi indifferente riferirsi all'una o all'altra di tali varietà *birazionalmente equivalenti*; si può cioè considerare l'astratto di questa classe di varietà e

chiamarlo un *ente algebrico di dimensione k*. Ogni varietà della classe ne costituisce quello che si dice un *modello proiettivo*, nel senso che, una volta fissatala, ne sono anche fissate le particolarità proiettive.

Per ogni ente algebrico di dimensione 1 o 2 (cioè curva o superficie), esiste un modello proiettivo *privo di punti multipli*. Ci assicurano di ciò i classici risultati di WEIERSTRASS, KRONECKER, NOETHER, VERONESE [1] per le curve, e di B. LEVI [2] per le superficie. Per gli enti algebrici di dimensione > 2 non è stato finora stabilito un analogo risultato, ma se ne *presume* la validità.

Le proprietà delle varietà algebriche considerate dal punto di vista di cui sopra, costituiscono quella che si chiama *geometria sopra l'ente algebrico*.

6. *Molteplicità d'intersezione di due varietà algebriche di dimensioni complementari entro uno spazio lineare ambiente.* — Sia V una varietà, irriducibile o no, di S_r. È chiaro che V appartiene sempre ad un sistema continuo algebrico di varietà della stessa dimensione e dello stesso ordine, il quale è, in generale, almeno $\infty^{r(r+2)}$ giacchè è appunto $\infty^{r(r+2)}$ il sistema continuo delle omografie di S_r. Si è detto « in generale », in quanto può darsi che V possieda infinite trasformazioni omografiche in sè. D'altronde il sistema continuo entro il quale può variare V, può essere più ampio di quello costituito dalle varietà omografiche.

Un sistema algebrico *completo* di varietà, cioè non contenuto in un sistema algebrico irriducibile più ampio di varietà dello stesso ordine, dicesi anche una *famiglia*; un sistema che non sia completo, *sottofamiglia*.

Lo studio dei sistemi continui di curve sghembe è stato fatto, in classiche Memorie, da HALPHEN [3] e NOETHER [4]; più ampi sviluppi (da un punto di vista che sembra più fruttuoso e che si applica anche alle curve iperspaziali) trovansi in SEVERI [5].

Dopo queste premesse, veniamo alle nostre questioni d'intersezione. Siano, in S_r, due varietà pure V_k, W_{r-k}, di dimensioni complementari k, $r-k$, e di ordini m, n. Un tempo ci si limitava ad asserire, sulla base di una dimostrazione poco precisa e non rigorosa, che le varietà suddette o hanno infiniti punti comuni, ovvero

(1) «Math. Annalen», t. 19, (1881), pag. 213.
(2) «Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», (1897).
(3) «Journal de l'Ecole Polytecnique», t. 52, (1882).
(4) «Memorie di Berlino», (1882.)
(5) *Vorlesungen...*, già cit., Anhang G.

s'intersecano in mn punti, dove ciascuno si computi con una conveniente molteplicità. Qui esporremo la precisazione rigorosa di tali questioni d'intersezione, facendo uso dei metodi algebrico-geometrici, conformemente alla trattazione citata (cfr. in fine del n. 4) di SEVERI. Ci limiteremo però ai risultati ed ai concetti fondamentali, rinviando per le dimostrazioni alla Memoria originale.

Siano $\{V\}$ e $\{W\}$ le famiglie determinate da V e W. Intanto si dimostra che, *se V e W hanno infiniti punti comuni, con un generico spostamento di una delle due varietà nella propria famiglia, si ottiene una nuova varietà che incontra quella rimasta fissa in un numero finito di punti.*

Supponiamo allora che V, W abbiano soltanto un numero finito di punti in comune, e premettiamo la definizione:

Un'intersezione P di V, W dicesi semplice, allorchè V e W passino semplicemente per P e i relativi spazi tangenti siano indipendenti, cioè V, W non abbiano in P alcuna tangente a comune. Ciò posto, se non tutte le intersezioni di V, W risultano semplici, *con un generico spostamento di una delle due varietà, p. es. W, entro $\{W\}$, la nuova varietà $\overline{W}$, che si ottiene, incontra V in punti tutti semplici.*

Se P è una intersezione di V, W *non semplice*, la *molteplicità d'intersezione i* di V, W in P, si definisce come *il numero delle intersezioni semplici di V, $\overline{W}$, che tendono a P, quando $\overline{W}$ tende a W.* Il numero i, così definito, risulta *indipendente* dal modo di far tendere $\overline{W}$ a W. Si ottiene $i = 1$, allora e solo allora che l'intersezione di cui trattasi è semplice.

Dopo ciò, può sempre dirsi che *le intersezioni di V, W sono mn, dove ciascuna intersezione si conti con la molteplicità così definita.*

Nella dimostrazione che il SEVERI (nella trattazione citata) dà di questo teorema, la molteplicità d'intersezione delle V, W in un punto comune vien prima definita in modo *simmetrico* rispetto alle due varietà, ma con l'intervento di un elemento ad esse estraneo (un fascio d'iperpiani a cui si applica il principio di corrispondenza di CHASLES completato colla regola di ZEUTHEN [1]); eppoi viene eliminato dalla definizione l'elemento estraneo, dando della molteplicità d'intersezione l'interpretazione di cui sopra. Resta pertanto acquisita anche *la simmetria di quest'interpretazione rispetto allo scambio d'ufficio delle due varietà.*

È chiaro inoltre che il concetto di molteplicità d'intersezione

(1) Ved. il citato *Trattato di G. a.* di F. SEVERI, pagg. 224, 226.

in un punto P risulta invariante per trasformazioni birazionali, o, più in generale, analitiche biregolari nell'intorno di P e del suo trasformato.

7. *Molteplicità d'intersezione di due varietà algebriche di dimensioni complementari entro una varietà algebrica ambiente.* — Sia M_r la varietà irriducibile, non lineare, ambiente, di dimensione r; e siano V_k, W_{r-k} due varietà pure immerse in M_r. Si supporrà M_r *priva di punti multipli*, chè altrimenti non avrebbero neppur senso le considerazioni seguenti, qualora fossero riferite ad intersezioni situate nell'intorno di un punto multiplo di M_r. Nel caso attuale non si può naturalmente procedere come allorchè la varietà ambiente è uno spazio lineare (n. 6), in quanto può darsi che V, W non possano variare in sistemi continui di varietà analoghe, conservandosi immerse in M_r, o che, pur potendo variare in sistemi siffatti, esse non abbiano tuttavia il grado di libertà sufficiente per dar luogo entro M_r a intersezioni semplici [1] delle varietà spostate.

Sia allora P un'intersezione *isolata* di V, W (cioè tale che in un intorno abbastanza piccolo di P non cadano altre intersezioni di V, W, pur non escludendo che le V, W abbiano anche, ulteriormente, infinite intersezioni). Ebbene, *è possibile costruire, in infiniti modi, una varietà pura* V'_k, *della stessa dimensione di* V_k, *non passante per* P, *in guisa che la varietà* $H = V_k + V'_k$ *individui sopra* M_r *un sistema algebrico infinito,* $\{H\}$, *siffatto che la varietà generica* $\overline{H}$, *in esso prossima ad* H, *incontri* W *in un numero finito di intersezioni semplici, nell'intorno di* P.

Ciò posto, si definirà al solito come *molteplicità d'intersezione*, i, in P di V, W, *il numero delle intersezioni semplici di* $\overline{H}$, W, *che tendono a* P, *al tendere di* $\overline{H}$ *ad* H, *entro* $\{H\}$.

Il numero i risulta indipendente dalla scelta della V'_k sotto le condizioni poste, nonchè dal modo con cui $\overline{H}$ tende ad H. Risulta inoltre invariante per trasformazioni birazionali, o, più in generale, analitiche, trasformanti la varietà M in una varietà M^* e P in P^*, le quali trasformazioni siano biregolari negl'intorni di P e P^*.

[1] *Semplici*, in senso analogo a quello della definizione del n. 6. Cioè: un'intersezione di due varietà di dimensioni complementari k, $r-k$, entro M_r, dicesi semplice, quando essa è un punto semplice per le due varietà, e gli spazi ivi tangenti a queste sono indipendenti entro lo S_r tangente a M_r nella stessa intersezione.

La molteplicità d'intersezione di V, W in P è $i = 1$, allora e solo allora che P sia intersezione semplice delle due varietà.

Se si fa una generica [1] proiezione di M_r sopra un S_r, alle varietà V, W e al punto P corrispondendo rispettivamente le varietà V', W' ed il punto P', la molteplicità d'intersezione di V',W' in P', calcolata secondo la definizione del n. 6, *risulta ancora uguale ad i.* Invero, V', W', S_r risultano in corrispondenza birazionale e biregolare negli intorni di P e P', con V, W, M_r.

Da ciò segue altresì che la definizione data del numero i, per quanto dissimmetrica rispetto alle varietà V, W, *non muta ove si scambi l'ufficio delle due varietà*; infatti (n. 6) ciò avviene per la definizione di molteplicità d'intersezione in P' delle varietà V', W', proiezioni in S_r.

Si dimostra ancora che, quando una o ambedue le varietà V, W possono variare in modo continuo sopra M_r, e due varietà $\overline{V}$, $\overline{W}$, prossime ad esse, s'incontrano, nelle vicinanze di P, nei punti P_1, P_2,... colle rispettive molteplicità i_1, i_2, . . , allora risulta $i_1 + i_2 + \ldots = i$.

Osserviamo infine che, da quanto precede, segue altresì che se V e W hanno in comune un numero finito di punti, *tale numero resta fisso al variare di V, W, ove ogni intersezione si conti con la sua molteplicità, e purchè il numero stesso non divenga infinito.* Quest'ultima possibilità resta esclusa se le variazioni di V, W sono abbastanza piccole; cioè in un intorno sufficientemente piccolo di V, W , non esistono varietà $\overline{V}$, $\overline{W}$ aventi in comune infiniti punti.

8. *Le varietà virtuali e il concetto di equivalenza fra varietà.* — Le varietà virtuali adempiono nella Geometria algebrica ad una funzione analoga a quella cui adempiono i numeri negativi nell'Algebra.

Consideriamo in quel che segue soltanto varietà algebriche pure e della medesima dimensione. Assegnate due tali varietà, A, B, per *varietà somma*,

$$C = A + B \ , \tag{3}$$

s'intende la varietà algebrica spezzata nelle due varietà A, B. La relazione (3) equivale per convenzione all'altra:

$$A = C - B \ , \tag{4}$$

[1] Cioè tale che il punto P', proiezione di P, non appartenga alla varietà di diramazione della proiezione di M_r sopra S_r.

della quale è pure ben chiaro il significato. L'operazione indicata a secondo membro della (4), non è però sempre lecita per due varietà C, B qualunque. Si rimuove ogni eccezione con le considerazioni seguenti.

Indicata con V una qualunque varietà algebrica, in relazione ad essa introduciamo la *varietà virtuale negativa* $-V$, e la *varietà virtuale zero* (*assoluto*), che, per definizione, si assumerà uguale ad ogni varietà $V + (-V)$, insieme o *somma* di due varietà *opposte* [1].

Dopo ciò si può dare un significato alla differenza $A - B$ di due qualunque varietà A, B della stessa dimensione, ponendo

$$A - B = A + (-B) .$$

La varietà $A - B$ è anch'essa una *varietà virtuale*; se B è una parte di A, si ricade nell'ordinario concetto di differenza di due varietà, in quanto si trascuri la varietà zero: $B + (-B)$.

Allo stesso modo si può parlare di somma e di differenza di varietà virtuali, come quelle ora definite. Le varietà così ottenute, iterando quante volte si vuole tali operazioni, diconsi ancora *varietà virtuali*. In particolare, può darsi che al termine di una successione di operazioni si giunga ad una *varietà effettiva* (o *positiva*); pertanto la classe della varietà virtuali comprende altresì le varietà effettive. D'altra parte è evidente che *ogni varietà effettiva o virtuale può sempre considerarsi come differenza di due varietà effettive.*

Osserviamo infine che l'analogia coi numeri negativi (cui si è accennato da principio) non è perfetta, in quanto può ben darsi che, essendo A, B varietà effettive, nessuna delle due varietà $A - B$, $B - A$ risulti effettiva.

Ciò premesso, si consideri la classe delle varietà virtuali (o, in particolare, effettive), di una data dimensione. Entro la classe può scegliersi una sottoclasse di varietà virtuali (comprendente la varietà zero assoluto), da considerarsi come varietà *zero* (*relativo*). Si dice allora che *si fa una scelta della varietà zero.*

Ebbene, in corrispondenza a tale scelta, si viene a definire una *equivalenza* tra le varietà della classe, allorchè appunto si considerino come *equivalenti* due varietà la cui differenza sia la varietà zero.

Le varietà virtuali, in relazione ad una determinata scelta della varietà zero, o, ciò che è lo stesso, in relazione ad un'asse-

[1] La varietà zero è cioè l'astratto di tutte le somme del tipo $V + (-V)$.

gnata equivalenza, possono altresì considerarsi dal punto di vista seguente. Se $A, B, C, \ldots$ sono varietà virtuali, $+A, +B, +C, \ldots$ possono pensarsi come simboli di operazioni di somma. Tali operazioni agiscono entro la classe delle varietà virtuali, e costituiscono un *gruppo abeliano* (in quanto la somma è commutativa). Dunque, scelta la varietà zero, si ha un gruppo di operazioni caratterizzanti l'equivalenza. L'*identità* di questo gruppo di operazioni è data dalla varietà zero. L'*inversa* dell'operazione $+A$ è l'operazione $-A$.

Qualche esempio. — Sopra una varietà algebrica M_r, di dimensione r, possono considerarsi le varietà di livello costante di una funzione razionale (dipendente magari linearmente da alcuni parametri) del punto di M_r. Siffatte varietà costituiscono un *sistema lineare* di varietà V_{r-1}, ad $r-1$ dimensioni. In particolare si hanno serie lineari di gruppi di punti sopra una curva, sistemi lineari di curve sopra una superficie, ecc. Allora, se si sceglie come varietà zero la varietà differenza di due qualunque V_{r-1} appartenenti ad uno stesso sistema lineare, si viene ad introdurre l'ordinario concetto di *equivalenza lineare.*

Considerato invece, sopra M_r, un sistema algebrico *completo* di varietà ad $r-1$ dimensioni V_{r-1}, e scelta per varietà zero la varietà differenza di due qualunque V_{r-1} del sistema, si ottiene quella che si chiama un'*equivalenza algebrica.* Quest'ultimo concetto è naturalmente più ampio del precedente.

Il LEFSCHETZ ha dimostrato che il concetto di equivalenza algebrica coincide con quello di equivalenza *topologica*, nel caso $r = 2$, cioè quando M_r è una superficie, e V_{r-1} sono curve algebriche su di essa. In altri termini, se si considera la riemanniana della superficie, le curve algebricamente equivalenti sopra la superficie dànno luogo a cicli bidimensionali fra loro *omologhi* entro la riemanniana; e viceversa due cicli algebrici bidimensionali della detta riemanniana che siano riducibili l'uno all'altro mediante una deformazione continua, sono omologhi a due curve algebriche di un medesimo sistema continuo.

Le relazioni di equivalenza dei vari tipi, lineare, algebrica, topologica, a cui si è accennato, si sogliono indicare rispettivamente con i segni $\equiv$, $\equiv$, $\sim$. Nel seguito faremo spesso uso del segno $=$, ove non vi sia luogo a precisare di quale tipo di equivalenza si tratti.

9. *Concetto di varietà virtuale dal punto di vista topologico.* — Il concetto di varietà virtuale, che può sembrare, a primo colpo,

un po' artificioso, diventa naturale quando si guardino le cose dal punto di vista topologico. Invero, ci si riferisca alle varietà V_k a k dimensioni, di M_r. La riemanniana di M_r è una varietà (reale) topologica di dimensione $2r$, entro la quale le V_k sono rappresentate da cicli a $2k$ dimensioni. Si dimostra che ogni tal ciclo è *bilatero*, e che non è possibile scambiare tra loro le due faccie mediante una variazione continua del ciclo entro la riemanniana che lo riporti alla posizione iniziale (1). Allora, fissata una faccia positiva per tutte le varietà, ogni varietà può pensarsi associata alla sua faccia positiva o alla negativa. Quindi, insieme alla varietà A, può considerarsi la varietà $-A$, e in generale la varietà $A - B$, come somma della varietà positiva A con la varietà negativa $-B$.

Per fissare una faccia positiva su ogni varietà irriducibile V_k della M_r (che appartenga ad S_d), si sceglie anzitutto un'orientazione positiva su M_r, mediante un angolo r - edro orientato di tangenti in un punto (semplice) di M_r, con che resta fissata per continuità l'orientazione di ogni altro angolo r - edro tangente, qualunque sia il suo vertice su M_r. Si considera inoltre la sezione W_{r-k} di M_r con un generico S_{d-k} e un'orientazione positiva su W_{r-k}, definita mediante un angolo $(r - k)$ - edro orientato, tangente a W_{r-k}. Resta per continuità definita un'orientazione positiva su ogni W_{r-k} sezione di M_r con un S_{d-k} variabile. Sia infine V_k una qualunque varietà irriducibile di M_r, e W_{r-k} sia una generica sezione spaziale di M_r, che abbia con V_k soltanto intersezioni semplici (in numero finito) : una delle quali sia P. Resta allora definita l'orientazione positiva di un angolo k - edro, tangente a V_k in P, dalla condizione che tale k - edro, a cui si faccia *seguire* un $(r - k)$ - edro positivo tangente a W_{r-k} in P, dia un angolo r - edro positivo tangente a M_r in P. Così s'individua la faccia positiva su ogni V_k irriducibile di M_r. È necessario però tener presente (LEFSCHETZ) che *tutte* le intersezioni semplici di V_k, W_{r-k} hanno lo stesso segno entro M_r, perchè questo appunto ci assicura che la faccia definita su V_k è la medesima qualunque sia il punto P comune a V_k, W_{r-k}, dal quale si parte.

Le varietà virtuali sono state considerate la prima volta da SEVERI (« Rend. Istituto Lombardo », vol. 38, (1905), p. 859). Dal punto di vista gruppale sono state studiate in modo sistematico da TODD (« Annals of Mathematics », july

(1) Cfr. p. es. F. SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica*, raccolte da B. SEGRE, Bologna, Zanichelli, (1930), pag. 338.

1934, p. 702), ma già da prima SEVERI aveva considerato questo punto di vista, introducendo in relazione alle varietà virtuali quello che chiamò *gruppo abeliano della divisione* (« Rend. Circolo Matem. di Palermo », (1910), p. 265). LEFSCHETZ ha dimostrato che tale gruppo coincide col *gruppo della torsione di* POINCARÉ (cfr. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géometrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1924).

10. *Intersezioni virtuali di due varietà* V_k, W_h, *immerse in una varietà ambiente* M_r. *Caso* $k + h = r$. — Ritorniamo a due varietà (pure) V_k, $W_h = W_{r-k}$ immerse in una varietà ambiente M_r.

Dal ragionamento con cui il SEVERI consegue i risultati esposti nel n. 7 si deduce che è possibile scegliere, in infiniti modi, sopra M_r una varietà V'_k, in guisa che essa e la varietà generica $\bar{H}$ variabile nel sistema algebrico completo $\{H\}$, dove $H = V + V'$, abbiano con W_{r-k} intersezioni tutte semplici. Allora, indicati rispettivamente con (V', W) e $(\bar{H}, W)$, i gruppi d'intersezione di V', W e $\bar{H}, W$, possiamo definire come *gruppo virtuale d'intersezione* di V, W, la differenza virtuale:

$$(V, W) = (\bar{H}, W) - (V', W). \tag{5}$$

Se nella precedente relazione si sostituiscono le parentesi tonde con le quadre, vuol dire che s'intende riferirsi al numero delle intersezioni, anzichè al gruppo. Resta così definito anche il *numero virtuale d'intersezioni*, $[V, W]$, di V_k e W_{r-k}.

Fermiamoci un po' sulla definizione data. Affinchè essa sia corretta, occorre intanto che, come il primo membro, così il secondo membro della (5) risulti in qualche modo indipendente dalla scelta di V' e dal variare di $\bar{H}$ entro $\{H\}$. A tal proposito sussiste il teorema:

Assegnata una qualsiasi equivalenza fra varietà di dimensione k in M_r, *il gruppo virtuale* (V_k, W_{r-k}), *dato dalla* (5), *risulta definito a meno della equivalenza traccia della precedente sopra* W_{r-k}, *purchè la varietà* V'_k *sia fissata a meno dell'equivalenza assegnata, e* $\bar{H}$ *sia variabile genericamente nel conseguente più ampio sistema algebrico,* $\{H\}$, *costituito da varietà equivalenti.*

Assegnare un'equivalenza fra varietà a k dimensioni, significa (n. 8) scegliere come varietà zero una certa varietà $Z_k^{(0)}$, a k dimensioni. L'equivalenza *traccia* sopra W_{r-k}, cui allude l'enunciato, sarà quella corrispondente alla varietà zero, a 0 dimensioni, $(Z_k^{(0)}, W_{r-k})$, intersezione di $Z_k^{(0)}$ e W_{r-k} [1].

[1] Se la varietà $Z_k^{(0)}$ in M_r è equivalente alla varietà $A_k - B_k$, ove A_k, B_k siano varietà effettive, la intersezione di $Z_k^{(0)}$ con W_{r-k} è ivi la varietà virtuale $(A, W) - (B, W)$.

Ciò posto, si consideri un'altra varietà V''_k, possedente analoghi requisiti della V'_k e ad essa equivalente, indi la varietà generica $\overline{H}'$ del sistema algebrico $\{H'\}$, dove $H' = V + V''$.

Poichè si suppone che i sistemi algebrici $\{H\}$, $\{H'\}$ siano costituiti ciascuno da varietà equivalenti, si possono scrivere le seguenti relazioni di equivalenza:

$$\overline{H} = V + V' \quad , \quad \overline{H}' = V + V'' ,$$

quindi:

$$\overline{H} + V'' = V + V' + V'' \quad , \quad \overline{H}' + V' = V + V'' + V' ,$$

da cui si deduce:

$$\overline{H} + V'' = \overline{H}' + V' .$$

Intersecando con la varietà W_{r-k}, la precedente dà luogo ad una relazione di equivalenza rispetto all'equivalenza traccia; precisamente:

$$(\overline{H} + V'' , W) = (\overline{H}' + V' , W) .$$

Ora, in base alle ipotesi poste, i due gruppi d'intersezione si scindono, e si ha:

$$(\overline{H} , W) + (V'', W) = (\overline{H}', W) + (V', W) ,$$

cioè

$$(\overline{H} , W) - (V', W) = (\overline{H}', W) - (V'', W) ,$$

per cui risulta provato quanto volevasi.

L'equivalenza assegnata di cui trattasi, è, come si è detto, un'equivalenza qualunque. Nel caso però che sia l'equivalenza algebrica (n. 8), la relazione (5) perde ogni significato funzionale, conservando soltanto significato *numerativo*, cioè quello che si avrebbe sostituendo le parentesi quadre alle tonde. Infatti due gruppi dello stesso numero di punti risultano sempre, come è ovvio, algebricamente equivalenti sopra una varietà (nel caso attuale sopra W_{r-k}).

Mostriamo ora (ciò che anche è necessario per la plausibilità della data definizione di gruppo virtuale d'intersezione) che, *quando V_k e W_{r-k} hanno in comune un numero finito di punti, il gruppo virtuale d'intersezione coincide con il gruppo delle effettive intersezioni.* Invero, se si fa tendere $\overline{H}$ ad H entro $\{H\}$, il gruppo d'intersezione $(\overline{H}, W)$ tende al gruppo (H, W), e quest'ultimo, nelle ipotesi poste, si scinde nei due gruppi *effettivi* (V, W) e (V', W);

pertanto può scriversi l'equivalenza:

$$(\bar{H},W)-(V',W)=(V,W)+(V',W)-(V',W)=(V,W).$$

Con lo stesso ragionamento risulta anche che, *se* V_k, W_{r-k} *non s'incontrano, il gruppo virtuale d'intersezione* (V, W) *è un gruppo zero di punti, cioè è la varietà zero a zero dimensioni, che definisce l'equivalenza traccia sopra* W_{r-k}.

Si osservi però che non è detto che ogni qual volta V_k, W_{r-k} possiedono intersezioni effettive, il gruppo virtuale debba coincidere con il gruppo effettivo. E infatti questo può essere costituito da infiniti punti (distribuiti su una o più varietà algebriche), mentre — come risulta senz'altro dalla (5), dove si sostituiscano le parentesi quadre alle tonde — *il gruppo virtuale d'intersezione è sempre costituito da un numero finito di punti* (*tale numero potendo anche essere negativo o nullo*).

Si consideri, per esempio, sulla superficie cubica M, dello spazio ordinario, una delle rette, V, corrispondenti ad un punto base nella consueta rappresentazione della superficie cubica mediante cubiche piane per 6 punti. Sia W una cubica sghemba di M, non incontrante V, e rappresentata sul piano da una retta. Allora il gruppo (V, W) è virtuale, non effettivo; e tale si conserva variando la cubica W, anche allorchè W viene, spezzandosi, a contenere V: e quindi ad avere infinite intersezioni con V (ciò accade quando la retta immagine di W sul piano rappresentativo viene a passare per il punto base immagine di V).

Sopra una quadrica il gruppo d'intersezione di due generatrici della stessa schiera, è zero; pertanto è ancora zero il gruppo virtuale d'intersezione di una generatrice con se stessa.

Un'ultima osservazione in merito alla definizione di gruppo virtuale d'intersezione delle varietà V_k, W_{r-k}. Tale definizione, come si è esposta, è evidentemente dissimmetrica rispetto alle due varietà; ma può rendersi simmetrica, mediante il concetto di *relazioni duali di equivalenza*, cui accenniamo rapidamente.

Supponiamo sia fissata, in M_r, una varietà zero a zero dimensioni, $Z_0^{(0)}$, cioè una equivalenza fra gruppi di punti di M_r. Allora due varietà zero $Z_k^{(0)}$, $Z_{r-k}^{(0)}$, rispettivamente a k, $r-k$ dimensioni, si diranno *duali rispetto alla varietà* $Z_0^{(0)}$ *prescelta*, allorchè, assegnate comunque due varietà W_{r-k}, V_k e considerati i gruppi virtuali $(Z_k^{(0)}, W_{r-k})$, $(Z_{r-k}^{(0)}, V_k)$, essi risultino tra loro equivalenti nell'ambiente M_r, rispetto all'equivalenza definita dalla $Z_0^{(0)}$. Le relazioni di equivalenza che nascono in corrispon-

denza a siffatte varietà zero duali, diconsi appunto relazioni duali di equivalenza.

Ciò posto, tutto quanto dicemmo rispetto alla varietà V_k, dopo aver fissato un'equivalenza in relazione ad una conveniente $Z_k^{(0)}$, può ripetersi simmetricamente rispetto alla varietà W_{r-k}, fissando l'equivalenza relativa alla varietà $Z_{r-k}^{(0)}$, duale della precedente rispetto ad una $Z_0^{(0)}$. È chiaro che l'equivalenza traccia su W_{r-k}, o su V_k, della equivalenza definita dalla $Z_k^{(0)}$, o rispettivamente $Z_{r-k}^{(0)}$, non è altro che l'equivalenza definita dalla $Z_0^{(0)}$.

11. *Caso* $k + h > r$. — Siano ora due varietà algebriche pure V_k e W_h, di dimensioni k e h, immerse in una varietà algebrica ambiente priva di punti multipli M_r, e sia inoltre $k + h > r$. Le stesse considerazioni fatte al n. precedente, per dare in ogni caso significato al simbolo (V_k, W_{r-k}), possono qui ripetersi in modo analogo; e si perviene così a definire l'*intersezione virtuale* (V_k, W_h). Si stabilisce intanto che è possibile scegliere, in infiniti modi, sopra M_r, una varietà V'_k, in guisa che essa e la varietà generica $\overline{H}$, variabile nel sistema algebrico completo $\{H\}$, dove $H = V + V'$, incontrino W_h in varietà pure, di dimensione $l = k + h - r$, *prive di parti multiple* (n. 2). Realizzate queste condizioni, si pone per definizione:

$$(V_k, W_h) = (\overline{H}, W_h) - (V'_k, W_h).$$

Vale anche qui un teorema analogo a quello del n. 10. E cioè, se si suppone fissata un'equivalenza fra varietà di dimensione k in M_r, ed alle varietà V', $\overline{H}$ si impone di variare soltanto entro sistemi di varietà equivalenti, allora l'intersezione virtuale (V_k, W_h) *risulta definita a meno della equivalenza che è traccia sopra* W_h *della equivalenza fissata.*

Inoltre, l'intersezione virtuale (V_k, W_h) *ha sempre dimensione* l, anche se tale non è la dimensione dell'intersezione effettiva. Quando l'intersezione effettiva è costituita da una varietà pura di dimensione l, *allora l'intersezione virtuale coincide con essa.* E se l'intersezione effettiva manca, *l'intersezione virtuale è la varietà zero di dimensione* l, *che definisce l'equivalenza traccia sopra* W_h.

Osservazione. — Considerazioni analoghe a quelle svolte in questo n. e nel precedente, possono estendersi, in modo affatto

naturale, al caso di intersezioni di un numero qualunque di varietà (ved. il n. 41) [1]. Di tali estensioni faremo libero uso nel seguito.

ENRIQUES, già nel 1896 (« Memorie dei XL », n. 15), al fine di introdurre nel modo più generale la nozione di grado per la somma di due sistemi lineari di curve sopra una superficie, riconobbe l'opportunità di parlare di *grado virtuale* per sistemi lineari riducibili, e quindi, in particolare, di parlare di *numero* delle intersezioni virtuali di una curva con se stessa. Più tardi SEVERI (« Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino » (1904), p. 376), definì il *gruppo* virtuale d'intersezione di una curva C con se stessa, sopra una superficie. Questo gruppo riesce determinato su C a meno di un'equivalenza razionale, e la totalità dei gruppi virtuali, che così s'ottengono, costituisce quella che il SEVERI ha chiamato *serie caratteristica* su C. Quando C è irriducibile ed appartiene ad un sistema lineare infinito o ad un sistema continuo infinito, questa serie è sempre effettiva ed è lineare. Se C è riducibile, in generale la serie caratteristica è una serie di equivalenza (ved. più innanzi pel concetto di serie di equivalenza).

Tali concetti sono stati in seguito dal SEVERI successivamente ampliati ed estesi alle varietà. L'esposizione precedente non si discosta molto da quella che trovasi nella citata Memoria degli « Abhandlungen Math. Seminar Hamburgischen Univ. », (1933) pag. 335 ; tuttavia il concetto di relazioni duali di equivalenza viene qui accennato per la prima volta. Tale concetto sarà sviluppato prossimamente in un « Mémorial des Sciences Mathématiques » (Gauthier-Villars, Paris), dedicato alla Geometria algebrica, che il SEVERI sta ora preparando.

12. *Equivalenza funzionale di una componente dell'intersezione di due varietà.* — Riferiamoci in generale a due varietà V_k, W_h di M_r, con $k + h \geq r$. *Se esiste un punto comune a* V, W (in un punto semplice di M_r !), in base ai teoremi di esistenza delle funzioni analitiche (o, in particolare, algebriche) di più variabili, si dimostra facilmente che V, W *si intersecano di conseguenza* (*nell'intorno del punto comune*) *in una o più varietà algebriche di dimensioni maggiori o uguali ad* $l = k + h - r$.

Consideriamo una parte *completa* Z_t di tale intersezione, avente la dimensione $t \geq l$; cioè una parte irriducibile non contenuta in una varietà irriducibile di dimensione maggiore, che sia ancora parte dell'intersezione. Indicando sempre con V'_k, H le varietà definite ai nn. 10 o 11 (per $k + h = r$ o per $k + h > r$), la varietà effettiva $(\overline{H}, W)$ è una varietà pura di dimensione l, e tale si conserva se $\overline{H}$ tende ad H. Al limite, essa viene a contenere la varietà (V', W), anch'essa pura e di dimensione l. Pertanto *la*

(1) Cfr. F. SEVERI, *Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol VIII, (1937), n. 8.

differenza:

$$\lim_{\overline{H}\to H} (\overline{H}, W) - (V', W) \tag{6}$$

risulta una varietà effettiva e pura, di dimensione l, della quale una parte almeno E_l (di dimensione l), sta sopra Z_t, in quanto Z_t è luogo di possibili posizioni limiti di punti della varietà $(\overline{H}, W)$.

La varietà (6), ben s'intende, non è generalmente determinata, quando non sia fissato il modo con cui $\overline{H}$ tende ad H entro $\{H\}$ [1]; tuttavia — come risulta senz'altro dalle ipotesi — tale varietà può solo variare in un sistema di varietà equivalenti (rispetto all'equivalenza traccia della assegnata, sopra W). Del pari può quindi dirsi per E_l, luogo dei punti di (6) situati su Z_t. Ebbene, il sistema delle varietà equivalenti E_l, che si ottengono cangiando la legge con cui $\overline{H}$ tende ad H, dicesi l'*equivalenza funzionale di* Z_t, come varietà di dimensione l, entro l'intersezione virtuale (V, W).

Quando è $k + h = r$, l'equivalenza funzionale di Z_t non è che una serie di gruppi di punti, fra loro equivalenti. Il numero dei punti di un gruppo dicesi l'*equivalenza numerativa* di Z_t, entro il numero virtuale delle intersezioni di V_k, W_h.

Esempi. — Nello S_3, l'equivalenza funzionale dell'intersezione di una retta V con un piano W che la contenga, è un punto P variabile sopra V. Se p. es. l'equivalenza assegnata in S_3, tra varietà di dimensione 1, è l'equivalenza algebrica, P è qualunque sopra V (cioè variabile in una serie lineare), in quanto V può considerarsi come limite di rette incontranti il piano W in un qualunque punto di V.

Sempre in S_3, l'equivalenza funzionale dell'intersezione di una retta V con una quadrica W che la contenga, è una coppia di punti variabile sopra V in una serie lineare.

La determinazione dell'equivalenza numerativa di una varietà comune a più altre come varietà avente la dimensione d'intersezione *normale*, costituisce spesso l'essenza della risoluzione di un problema numerativo. Così per es. il celebre problema di STEINER di determinare quante sono le coniche di un piano che toccano 5 coniche date genericamente in esso, mediante la rappresentazione delle coniche coi punti di S_5 si riconduce alla ricerca del numero delle intersezioni di 5 forme di 6° ordine, le quali pas-

[1] La varietà (6) vien determinata, se si assegna per es. un sistema semplicemente infinito di varietà $\overline{H}$ (contenuto in $\{H\}$), in cui $\overline{H}$ varii tendendo ad H.

sano tutte doppiamente per la superficie di VERONESE, Φ, che rappresenta le coniche spezzate in due rette coincidenti. Tale numero risulta perciò uguale al numero virtuale d'intersezioni delle 5 forme, cioè $6^5 = 7776$, da cui sia detratta l'equivalenza numerativa di Φ. Si ottiene $7776 - 4512 = 3264$ (2).

Il concetto di equivalenza funzionale trovasi per la prima volta in SEVERI, *Significato funzionale del gruppo virtuale di punti uniti nelle corrispondenze a valenza sopra una superficie*, « Rend. della R. Acc. dei Lincei », (1933) t. 17, pag. 876 ; cfr. altresì SEVERI, *Equivalenza d'una curva come gruppo virtuale parziale di una serie di equivalenza sopra una superficie*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari » (1936), p. 77.

(2) STEINER aveva dato erroneamente il numero 7776 ; il computo giusto è di DE JONQUIÉRES. Pel metodo cui si accenna nel testo, cfr. la nota a pie' di pag. 118, in fine della Memoria di F. SEVERI, *Sulle intersezioni delle varietà algebriche...*, (citata a pag. 5), ove è data un'ampia estensione del teorema di BEZOUT pel caso che si tratti di determinare le soluzioni isolate di un sistema di equazioni algebriche ad r incognite, conoscendosi già una varietà continua di soluzioni.

CAPITOLO II.

Digressione sugli ordini invariantivi delle varietà.

13. *Ordini invariantivi assoluti e relativi.* — Si consideri una varietà algebrica irriducibile V_k, di dimensione k, e con essa tutte le sue trasformate birazionali. L'ordine minimo di tali varietà risulta manifestamente un carattere dell'ente algebrico ∞^k, di cui quelle varietà sono i modelli proiettivi (n. 5). Esso dicesi *ordine invariantivo assoluto* dell'ente (o di V_k), in quanto è appunto invariante rispetto a tutte le trasformazioni birazionali di V_k.

Le varietà razionali (n. 1) sono caratterizzate dall'avere l'ordine invariantivo assoluto uguale ad 1.

Se invece, assegnata proiettivamente una V_k (priva o no di punti multipli), ci si limita a considerare la classe delle varietà con essa in corrispondenza birazionale *senza eccezioni* (1) (classe che, per $k > 1$, *non* abbraccia tutti i modelli proiettivi dell'ente algebrico di cui V_k è un modello), può ancora considerarsi l'ordine minimo delle varietà della classe ; che dicesi *ordine invariantivo relativo* di V_k. È chiaro che tale carattere, in generale, risulta invariante soltanto rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione di V_k. Ognuno dei suddetti modelli che sia in corrispondenza birazionale senza eccezioni con V_k ed abbia per suo ordine l'ordine invariantivo relativo, si chiama brevemente un *modello proiettivo minimo* di V_k.

Assegnato dunque un ente algebrico ∞^k, avente un certo ordine invariantivo assoluto, i suoi modelli proiettivi si distribuiscono in più classi di ordini invariantivi relativi diversi ; tra questi il minimo coincide con l'ordine invariantivo assoluto.

(1) Una corrispondenza birazionale T tra due varietà V_k e V'_k si dice *senza eccezioni* se non vi è alcun punto di V_k che si muti per la T in una varietà di dimensione $d \geq 1$ di V'_k, e viceversa. Se invece vi sono eccezioni, qualche punto di V_k (o di V'_k) può mutarsi per la T (o per la T^{-1}) in una varietà di V'_k (o di V_k), che è *fondamentale* per la trasformazione. Nella geometria sulle varietà, allorchè ci si riferisce a modelli privi di punti multipli, le varietà eccezionali, quando vi sono, provengono da punti semplici della varietà che si trasforma.

In particolare, le varietà razionali dànno luogo a più classi di varietà d'ordini invariantivi relativi ≥ 1. Tra queste, tutte e sole le varietà della classe cui compete l'ordine invariantivo relativo uguale ad 1, si dicono propriamente *varietà lineari.*

Per esempio, una quadrica (che è una varietà razionale, in quanto mediante una proiezione stereografica può porsi in corrispondenza birazionale con un piano), non è però una varietà lineare: il suo ordine invariantivo relativo è 2. Infatti, a prescinder dalla circostanza che la proiezione stereografica non è senza eccezioni, si vede che non è comunque possibile riferire birazionalmente e senza eccezione la quadrica ad un piano, giacchè ad es. sulla quadrica esistono coppie di rette che non s'incontrano (quelle di una medesima schiera), alle quali, in una corrispondenza birazionale senza eccezioni, dovrebbero corrispondere curve algebriche piane prive di punti in comune, ciò che contraddice al teorema di BEZOUT.

La superficie di VERONESE, è invece una superficie lineare. Infatti la rappresentazione piana di tale superficie è offerta dal sistema lineare ∞^5 di tutte le coniche, che è privo di punti base.

Fino dal 1915, il SEVERI (in una Memoria degli « Annali di Matematica », t. 24, pag. 89, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare*) ebbe occasione di avvertire che tra le varietà razionali occorre distinguere quelle che sono lineari da quelle che non lo sono. L'introduzione e lo sviluppo dei concetti generali di ordini invariantivi assoluto e relativo trovasi pure in SEVERI, *Conferenze di Geometria algebrica,* già cit., pag. 63.

14. *Condizione perchè una corrispondenza birazionale tra due varietà a k dimensioni sia un'omografia.* — Raccogliamo in questo numero alcune semplici osservazioni, che risultano tuttavia importanti per il seguito.

a) Una corrispondenza birazionale tra due spazi ad r dimensioni, Σ_r e Σ'_r, la quale risulti biunivoca senza eccezioni, è necessariamente un'omografia.

La corrispondenza di cui trattasi, può rappresentarsi mediante relazioni del tipo [1]:

$$\rho\, y_h = \varphi_h(x_0, x_1, \ldots, x_r) \qquad (h = 0, 1, \ldots, r); \tag{1}$$

[1] Si ottengono siffatte relazioni, passando a coordinate omogenee nelle (1), scritte al n. 1.

dove x_h, y_h siano coordinate proiettive omogenee rispettivamente in Σ_r, Σ'_r; φ_h polinomi omogenei dello stesso ordine nelle x; ρ un comune fattore di proporzionalità. Al sistema lineare degli iperpiani di Σ'_r, che è privo di punti base, corrisponde in Σ_r un sistema ∞^r di forme, che, per l'assenza di eccezioni nella corrispondenza, non ha punti base ed è omaloidico (1); tale sistema è dato dall'equazione:

$$\sum_1^r{}_h \lambda_h \varphi_h (x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 \ .$$

D'altronde, se l è l'ordine delle forme, il grado del sistema risulta l^r: per cui si deduce che $l = 1$. Dunque le φ_h sono lineari, e le relazioni (1) rappresentano di conseguenza un'omografia.

b) Se fra due varietà a k dimensioni V_k e V'_k, appartenenti (2) *rispettivamente a due spazi lineari Σ_r e Σ'_r, esiste una corrispondenza birazionale, che muti senza eccezione sezioni iperpiane dell'una in sezioni iperpiane dell'altra, la corrispondenza può subordinarsi ad un'omografia fra gli spazi ambienti.*

Ciò trovasi dimostrato per le curve ($k = 1$), nel «Trattato di Geometria algebrica» di F. SEVERI, già cit., a pag. 67, n. 19; e la dimostrazione si estenderebbe facilmente alle varietà. Ma qui preferiamo mostrare come il risultato discenda immediatamente dalla proposizione *a*).

Infatti gli iperpiani di Σ_r e Σ'_r segano, rispettivamente su V_k e V'_k, sistemi lineari ∞^r di varietà a k—1 dimensioni. Ora l'ipotesi è che tra i due sistemi passi una corrispondenza biunivoca senza eccezioni; quindi nasce una corrispondenza birazionale senza eccezioni tra gli iperpiani di Σ_r e Σ'_r, cioè — in virtù della proposizione *a*), applicata sotto forma duale — un'omografia. Agli iperpiani di Σ_r passanti per un punto P corrispondono perciò gli iperpiani di Σ'_r passanti per il punto P' corrispondente a P nell'omografia; e viceversa. E poichè ogni punto di V_k (o V'_k) può considerarsi come centro di una stella d'iperpiani, così V_k e V'_k si corrispondono nella suddetta omografia.

(1) Un sistema lineare ∞^r di forme dicesi *omaloidico*, quando il suo *grado effettivo* è 1; cioè allorchè r forme generiche del sistema si tagliano, fuori della base eventuale, in 1 punto con esse variabile.

(2) *Appartenenti*, nel senso che non son contenute in spazi lineari di dimensione inferiore ad r.

Osservazione. — La proposizione *b*), già ben nota in generale per varietà algebriche, è stata dimostrata da FUBINI (1) anche per superficie non algebriche. Per queste e per la corrispondenza biunivoca assegnata si suppongono le consuete condizioni dell'analisi infinitesimale elementare. Il ragionamento del FUBINI è estensibile alle varietà.

15. *Sistemi lineari di varietà a k—1 dimensioni, sopra una varietà V_k a k dimensioni.* — I classici concetti di serie lineari di punti sopra una curva e delle relative imagini proiettive, nonchè le varie proprietà di quelle e di queste (2), si estendono senza difficoltà ai sistemi lineari di varietà M_{k-1} di dimensione k—1, sopra una varietà V_k di dimensione k (3).

Ci limiteremo perciò ad accennare rapidamente a tale estensione, insistendo solo maggiormente ove la teoria un po' si discosti dal caso delle curve.

Assegnata una varietà irriducibile V_k di S_r, un sistema lineare di forme di S_r sega su V_k quello che dicesi un *sistema lineare di varietà a k—1 dimensioni sopra* V_k, e che s'indica col simbolo $|M_{k-1}|$, essendo M_{k-1} la varietà variabile nel sistema.

Le M_{k-1} possono avere tutte a comune dei punti fissi, eventualmente in numero infinito e distribuiti quindi sopra un numero finito di varietà algebriche: tali punti o varietà diconsi *punti* o *varietà base* del sistema $|M_{k-1}|$. Se vi sono varietà base di dimensione $k-1$, da queste, se si vuole, si può astrarre nel definire il sistema.

Detta s la dimensione di $|M_{k-1}|$, si considerino le ∞^{s-1} varietà M_{k-1} passanti per un punto generico P, variabile su V_k. Due casi possono darsi: che tali M_{k-1} abbiano a comune (fuori dei punti base) il solo punto P, e allora il sistema $|M_{k-1}|$ dicesi *semplice*; oppure che abbiano a comune altri punti, anche infiniti, variabili con P, e allora il sistema dicesi *composto*.

Il primo caso è quello che va considerato come generale. Nel secondo caso si osservi intanto che i punti detti, variabili

(1) G. FUBINI, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », t. 49 (1913-14), pag. 542, § 1.

(2) Cfr. ad es. il *Trattato di Geometria algebrica* di F. SEVERI, citato, pagg. 50-74, Cap. II, § 1.

(3) Cfr. C. SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, « Annali di Matematica », t. 22, (1894), pag. 41; e BERTINI, *Introduzione alla Geom. pr. degli iperspazi*, cit., pag. 280.

con P, risultano tutti in condizione *reciproca* fra loro; e ciò nel senso che, se una M_{k-1} passa per uno qualunque di essi, passa di conseguenza per gli altri.

Se i punti comuni alle M_{k-1} per P (fuori dei punti base) sono in numero finito, essi formano una *involuzione*, ∞^k, di gruppi di punti sopra V_k, siffatta che ogni M_{k-1} di $|M_{k-1}|$ che passi per un punto qualunque di essi, contiene di necessità il gruppo a cui questo appartiene. Si dice allora che il sistema lineare è *composto con tale involuzione.*

Allorchè, invece, i punti comuni alle M_{k-1} per P (fuori dei punti base) sono infiniti, per es. ∞^1, essi formano al variare di P una *congruenza*, ∞^{k-1}, di curve su V_k, di *indice* 1 (in quanto per un punto generico di V_k passa una sola curva della congruenza). Il sistema lineare $|M_{k-1}|$ risulta *composto con tale congruenza.*

Più in generale, può accadere che i punti comuni alle M_{k-1} per P (fuori dei punti base) siano ∞^q ($q \leq k-1$). E allora essi formano su V_k una congruenza ∞^{k-q} di varietà L_q, a q dimensioni, mediante la quale risulta composto il sistema lineare $|M_{k-1}|$. Si osservi che le varietà L_q possono bensì essere spezzate in parti, ma tutte della stessa dimensione q; e ciò a causa della condizione di reciprocità in cui si trovano fra loro i punti di ognuna di siffatte varietà.

Allorchè q assume il massimo valore $k-1$, le M_{k-1} di $|M_{k-1}|$ risultano tutte spezzate. Un risultato di SEVERI [1] (che estende i teoremi di BERTINI e di ENRIQUES relativi ai sistemi lineari riducibili di curve piane o tracciate sopra una superficie) ci assicura che in tal caso il sistema $|M_{k-1}|$ è composto con un *fascio* (algebrico) di varietà della stessa dimensione.

16. *Imagini proiettive dei sistemi lineari di* $|M_{k-1}|$ *su* V_k. — Definiamo ora quella che si chiama imagine proiettiva di un sistema lineare, ∞^s, $|M_{k-1}|$, su V_k. Si supponga $|M_{k-1}|$ segato su V (fuori eventualmente di varietà base) dal sistema lineare ∞^s di forme:

$$\sum_0^s \lambda_i \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) = 0 , \tag{2}$$

[1] Cfr. F. SEVERI, *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche*, «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. XLI, 1905, pag. 167 In questa nota veramente si trova l'estensione dell'altro teorema classico di BERTINI sui punti multipli delle curve di un sistema lineare; ma da questa estensione deducesi subito il teorema cui si allude nel testo con un ragionamento analogo a quello esposto a pag. 45 del *Trattato di Geometria algebrica* di F. SEVERI.

dove $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$ sono coordinate omogenee nello S_r ambiente, e le φ_i forme linearmente *indipendenti* (1).

In uno spazio S_s, dove $(y_0, y_1, \ldots, y_s)$ denotano coordinate omogenee di punto, consideriamo le relazioni:

$$\rho\, y_i = \varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_r) \qquad (i = 0, 1, \ldots, s), \tag{3}$$

in cui ρ è al solito un fattore qualunque di proporzionalità. Mentre il punto x descrive V_k, il punto y descrive una varietà V', trasformata razionale di V_k (n. 1). Tale varietà dicesi *imagine proiettiva del sistema* $|M_{k-1}|$, in quanto su di essa il sistema lineare corrispondente vien segato dagli iperpiani dell'ambiente S_s.

Tale imagine proiettiva può pensarsi costruita geometricamente così: Pongasi una qualunque proiettività (non degenere) tra le varietà di $|M_{k-1}|$, cioè a dire tra le forme del sistema lineare (2), e gl'iperpiani di uno spazio S_s. Allora alle M_{k-1}, che passano per un generico punto x di V_k, corrispondono gl'iperpiani di S_s, che passano per un certo punto y; variando x su V_k, il punto y varia in S_s descrivendo V'.

Osserviamo subito che, nel caso generale in cui il sistema $|M_{k-1}|$ è semplice, V' risulta di dimensione k ed in corrispondenza birazionale con V_k. E infatti ciò val quanto dire che il punto generico y di V' proviene, mercè le (3), da un sol punto x di V_k. Ora, l'eventualità che due punti distinti x, x', variabili su V_k, portino allo stesso punto y di V', può accadere allora e solo allora che le forme del sistema (2), e quindi le M_{k-1} di $|M_{k-1}|$, passanti per uno dei due punti x, x', passino di conseguenza per l'altro: cioè allorchè il sistema $|M_{k-1}|$ non è semplice.

Nell'ipotesi in cui $|M_{k-1}|$ sia composto, occorre naturalmente distinguere più casi. Se $|M_{k-1}|$ è composto con un'involuzione ∞^k, I^k_μ, di gruppi di μ punti, V' risulta ancora di dimensione k, ma in corrispondenza algebrica $[1, \mu]$ con V_k: cioè rappresenta birazionalmente non più i singoli punti, ma i gruppi di μ punti di V_k, variabili nella I^k_μ. Se invece M_{k-1} è composto con una congruenza, ∞^{k-q}, di varietà L_q di dimensione q, V' risulta di dimensione $k-q$, e rappresenta coi suoi punti le varietà L_q della congruenza.

(1) Si dimostra, come per le serie lineari sopra una curva, che ci si può sempre ridurre al caso in cui il sistema segante ha la stessa dimensione s di $|M_{k-1}|$, cambiando eventualmente il sistema lineare di forme seganti. Cfr. BERTINI, *loc. cit.*, pag. 280.

Si osservino infine le seguenti proprietà, che valgono tanto se il sistema $|M_{k-1}|$ è semplice, quanto se è composto.

Mutando l'omografia tra le forme del sistema (2) e gl'iperpiani di S_s, od anche mutando il sistema lineare di forme segante $|M_{k-1}|$, si ha un'altra imagine proiettiva di V_k in S_s. Ebbene, sussiste il fatto che, *assegnato il sistema lineare* $|M_{k-1}|$ *su* V_k, *la sua imagine proiettiva* V' *risulta definita a meno di un'omografia dello spazio* S_s. Invero, due imagini proiettive di $|M_{k-1}|$ risultano, in ogni caso, due varietà della stessa dimensione, e fra loro riferite in una corrispondenza birazionale soddisfacente alle condizioni del teorema *b*) del n. 14.

Si dimostra inoltre, collo stesso ragionamento valevole per $k = 1$, che V' *è sempre una varietà irriducibile, la quale appartiene all'ambiente* S_s.

17. *Relazioni tra le imagini proiettive di due sistemi lineari, l'uno contenuto nell'altro, di varietà a* k—1 *dimensioni, su di una* V_k. — Se una varietà V'' appartenente ad un S''_t è proiezione (biunivoca) di una varietà V' appartenente ad un S'_s $(t < s)$ da uno spazio S_{s-t-1}, le sezioni iperpiane di V'' sono proiezioni di quelle di V', ottenute cogli iperpiani passanti per lo spazio di proiezione, liberate eventualmente da una varietà fissa giacente in questo spazio. Quindi, allorchè V' e V'' siano imagini proiettive di sistemi lineari $|M_{k-1}|$ ed $|N_{k-1}|$ su di una varietà V_k, vuol dire che il sistema lineare $|N_{k-1}|$ risulta *contenuto totalmente*, ovvero *parzialmente* nel sistema lineare $|M_{k-1}|$. Cioè ogni varietà N_{k-1} risulta una varietà del sistema $|M_{k-1}|$, ovvero una parte di una tal varietà.

Viceversa, supponiamo di avere su V_k due sistemi lineari semplici, $|M_{k-1}|$ ed $|N_{k-1}|$, rispettivamente ∞^s ed ∞^t, con $s > t$, dei quali il secondo sia contenuto totalmente entro il primo. Indicate ancora con V' e V'' le rispettive imagini proiettive in S'_s ed S'', sussiste la seguente proprietà fondamentale (che si dimostra come nel caso delle curve [1]) : *Se* S''_t *si pensa immerso in* S'_s, V'', *o una sua trasformata omografica, può considerarsi come proiezione di* V' *sopra* S''_t, *da un conveniente* S_{s-t-1} *di* S'_s, *non appoggiato a* V'.

Ci si può porre in condizioni più ampie : che il sistema $|N_{k-1}|$ sia soltanto contenuto parzialmente nel sistema $|M_{k-1}|$ e che i sistemi $|M_{k-1}|$ ed $|N_{k-1}|$ siano eventualmente composti mediante

[1] Cfr. il citato *Trattato di Geometria algebrica* di F. Severi, pag. 70.

congruenze di varietà (non di necessità della stessa dimensione). Allora, se si aggiunge l'ipotesi suppletiva che il sistema $|M_{k-1}|$ sia *completo*, cioè che V' sia *normale* (ved. il successivo n. 18), sussiste il risultato sopra enunciato, con la sola variante che l'S_{s-t-1} può risultare appoggiato a V', e che la proiezione di cui trattasi può risultare anche non biunivoca o addirittura infinitivoca.

18. *Varietà normali.* — Dicesi che una varietà di S_r è una varietà *normale*, quando non può ottenersi come proiezione di una varietà dello stesso ordine, *appartenente* ad uno spazio di dimensione maggiore.

Dal teorema del n. prec. segue che le varietà normali sono caratterizzate dal fatto che *il sistema delle loro sezioni iperpiane non è contenuto totalmente in un sistema lineare più ampio* ; in altre parole : *condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà sia normale è che il sistema delle sezioni iperpiane sia un sistema lineare completo.*

Dimostriamo ora che *una varietà lineare, se è normale, è priva di punti multipli.*

Invero, sia V_k di S_r una varietà lineare normale. In quanto è lineare (n. 13), V_k può porsi in corrispondenza birazionale senza eccezioni con un S'_k ; pertanto al sistema lineare completo $|M_{k-1}|$ delle sezioni iperpiane di V_k corrisponderà, in S'_k, un sistema lineare completo di forme $|M'_{k-1}|$, privo di punti base, come il sistema $|M_{k-1}|$. Dunque $|M'_{k-1}|$ non è altro che il sistema di *tutte* le forme di S'_k, aventi un certo ordine l ; e la varietà V_k ne è l'imagine proiettiva in S_r.

Da ciò segue facilmente la conclusione. Si osservi intanto che r (dimensione dello spazio S_r cui appartiene V_k) è uguale alla dimensione del sistema $|M'_{k-1}|$ di tutte le forme di ordine l di S'_k, cioè si ha $r = \binom{l+k}{k} - 1$; e l'ordine di V_k risulta uguale al grado del detto sistema, l^k. Detto P un punto qualunque di V_k, e P' il corrispondente in S'_k, si considerino k *generiche* forme M'_{k-1} per P' : esse s'incontrano in altri $l^k - 1$ punti *distinti* (1), che son comuni a tutte le forme del sistema lineare ∞^{k-1} individuato da quelle k forme. Dunque, poichè la corrispondenza fra V_k ed S'_k è senza eccezione, si avrà in S_r un sistema lineare ∞^{k-1} d'iper-

(1) Invero k forme generiche di ordine l dello S'_k si segano in l^k punti distinti (ved. il I vol. delle *Lezioni di Analisi* di F. Severi, Bologna, Zanichelli, 1933, pag. 408) e, poichè uno di questi con un'omografia può portarsi in un punto qualunque di S_k, ne deriva la conclusione.

piani per un S_{r-k} passante per P ed incontrante ulteriormente V_k in $l^k - 1$ punti distinti. Ne segue che il punto P è semplice per V_k.

Si può giungere alla conclusione anche mercè il seguente ragionamento. In S'_k esiste un gruppo continuo transitivo $\infty^{k(k+2)}$ di omografie, che mutano in sè il sistema lineare $|M'_{k-1}|$. Ad esso corrisponde, su V_k, un gruppo continuo transitivo di trasformazioni birazionali di V_k in sè, le quali mutano sezioni iperpiane in sezioni iperpiane, e sono perciò (n. 14) omografiche. Pertanto, se un punto di V_k fosse multiplo, lo sarebbe ogni punto di V_k, mentre ciò non può accadere perchè il sistema lineare $|M'_{k-1}|$, di cui V_k è imagine proiettiva, è certamente semplice.

19. *Esempi di modelli minimi. Varietà di* SEGRE *e varietà grassmanniane.* — Dati n spazi S_p, S_q, ..., i gruppi di n punti estratti uno da S_p, uno da S_q, ecc., formano una varietà di dimensione $t = p + q + \ldots$ Un modello di tale varietà può ottenersi nel modo seguente, e costituisce appunto quella che chiamasi una *varietà di* SEGRE. Siano x_l $(l = 0, 1, \ldots, p)$ coordinate proiettive omogenee in S_p; y_m $(m = 0, 1, \ldots, q)$ coordinate proiettive omogenee in S_q, ecc. In uno spazio di dimensione $(p+1)(q+1)\ldots - 1$, assunte come coordinate proiettive omogenee $x_{lm\ldots}$, la varietà in questione è quella di equazioni parametriche:

$$(4) \qquad \rho\, x_{lm\ldots} = x_l\, y_m \ldots \qquad (l = 0, 1, \ldots, p\,;\ m = 0, 1, \ldots, q\,;\ \ldots.),$$

ρ essendo un comune fattore arbitrario di propozionalità. L'ordine di siffatta varietà risulta $\frac{t!}{p!\,q!\ldots}$. Essa possiede un gruppo continuo transitivo di trasformazioni proiettive in sè, corrispondenti alle omografie degli spazi S_p, S_q, ..., come subito si verifica in base alle (4). In conseguenza di ciò, applicando lo stesso ragionamento fatto in fine del n. 18, si conclude che la varietà risulta *priva di punti multipli*.

Può inoltre dimostrarsi che *la varietà di* SEGRE *è, tra le varietà che rappresentano i gruppi di n punti tratti da n spazi* S_p, S_q, ..., *quella d'ordine invariantivo relativo minimo* [1]. Così una quadrica

[1] Questo risultato fu enunciato dal SEVERI (« Annali di Matematica », (1915), pag. 89) e dimostrato successivamente dal BORDIGA (« Annali di Matematica », (1918), pag. 1). Per più ampie notizie intorno alle varietà di SEGRE possono vedersi, oltre ai lavori originali di C. SEGRE (« Rendiconti del Circolo

di S_3 è la varietà di SEGRE relativa a due rette, e costituisce quindi il modello minimo della varietà delle coppie di punti estratti da due rette.

L'ordine invariantivo assoluto d'ogni varietà di SEGRE è 1; cioè *ogni varietà di* SEGRE *è razionale*. Infatti la varietà di SEGRE relativa agli spazi S_p, S_q, ..., può porsi in corrispondenza birazionale (*non* priva di eccezioni) coi punti dello spazio lineare di dimensione $p + q + \dots$, ove $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_p}{x_0}, \frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \dots, \frac{y_q}{y_0}, \dots$ siano coordinate non omogenee di punto.

Un'altra importante classe di varietà è costituita dalle *varietà grassmanniane*. Si considerino gli S_k di S_r $(k < r)$. Essi sono ∞^t, con $t = (k+1)(r-k)$; costituiscono cioè una varietà algebrica di enti, di dimensione t. Un modello di tale varietà si ha rappresentando ogni S_k mediante $\rho + 1 = \binom{r+1}{k+1}$ coordinate grassmanniane omogenee, tra le quali intercede un certo numero di relazioni quadratiche [1]. Nello S_ρ, ove quelle coordinate si assumano come coordinate proiettive omogenee di punto, le dette relazioni rappresentano forme quadriche, aventi a comune una varietà V_t, che coi suoi punti rappresenta biunivocamente senza eccezione gli S_k di S_r, e dicesi *grassmanniana di indici* (r, k) [2].

Ogni omografia dello S_r muta gli S_k in S_k, pertanto induce una trasformazione birazionale in sè della grassmanniana, che (come facilmente si vede) soddisfa alle condizioni del teor. *b*) del n. 14, e perciò è un'omografia. Anche sulla varietà grassmanniana esiste dunque un gruppo transitivo di omografie in sè. Ne consegue, al solito, che la varietà è *priva di punti multipli*.

La grassmanniana d'indici (r, k) ha l'ordine:

$$\frac{1!\,2!\,\dots\,k!\,t!}{(r-k)!\,(r-k+1)!\,\dots\,r!};$$

e SEVERI, nella Memoria citata a pie' di pagina, dimostra ch'essa costituisce *il modello minimo delle varietà che rappresentano senza eccezione gli* S_k *di* S_r. Così, per es., l'ordine minimo della varietà delle rette di S_3 è 2, quello della varietà delle rette di S_4 è 5, ecc.

Mat. di Palermo », (1891), pag. 192; « Mathematische Annalen », (1892), pag. 413), il trattato citato di E. BERTINI, *Introd. alla Geom. proiett. degli iperspazi*, pag. 380, e le citate *Conferenze di G. a.* di F. SEVERI, pag. 68.

[1] Cfr. il trattato ora cit. di BERTINI, pag. 45.

[2] Le varietà grassmanniane sono state considerate e studiate sistematicamente da F. SEVERI (« Annali di Matematica », (1915), pag. 89).

Osservazione. — Si osservi che può benissimo accadere che il modello minimo di una varietà, anche razionale, debba avere di necessità punti multipli. Per esempio, la varietà delle coppie *non ordinate* dei punti di un piano ha infiniti punti doppi (che corrispondono alle coppie di punti coincidenti). La varietà possiede tuttavia un gruppo di trasformazioni omografiche in sè, provenienti dalle omografie del piano, ma si tratta di un gruppo *non transitivo*, in quanto ammette, sul piano, come sistema di intransitività la varietà delle coppie di punti coincidenti. Il modello minimo della varietà in questione, è la *varietà M delle corde* della superficie di VERONESE, Φ, che è doppia per la suddetta varietà [1].

La rappresentazione della varietà delle coppie non ordinate dei punti del piano sulla varietà M si ottiene così [2]:

Alla varietà M appartengono evidentemente i piani tangenti a Φ (ognuno dei quali contiene un fascio di tangenti, cioè di corde). Due piani tangenti in punti distinti di Φ si tagliano in un sol punto P; e viceversa per un generico punto P di M passa una coppia di piani tangenti di Φ. I due piani coincidono allora e solo allora che P cade su Φ. Ciò ricordato, si ponga una corrispondenza birazionale senza eccezioni fra il piano e Φ. Ad una coppia di punti del piano corrisponde una coppia di punti di Φ e quindi l'intersezione P dei piani tangenti a Φ in quei due punti. Viceversa, dato P, resta determinata una coppia di punti del piano. Le coppie di punti coincidenti vengono così rappresentate dai punti di Φ.

---

[1] Cfr. per tutto ciò F. SEVERI e B. SEGRE, *Un paradosso topologico*, 2 Note, « Rendiconti della R. Acc. Naz. dei Lincei », (1929), pagg. 3 e 117.

[2] Vedi, per alcune delle proprietà di Φ di cui qui si fa uso, BERTINI, *loc. cit.*, pag. 394 e segg.

CAPITOLO III.

Primi concetti fondamentali sulle serie e sui sistemi di equivalenza.

§ 1. — Serie di equivalenza sopra una superficie.

20. *Relazioni di equivalenza razionale.* — Si è già più volte parlato di relazioni di *equivalenza* tra varietà (nn. 8, 10, 11). D'ora innanzi considereremo speciali relazioni di equivalenza, che si diranno propriamente di *equivalenza razionale.*

La ragione dell'attributo « razionale » apparirà dal seguito; si avverta però che spesso l'attributo sarà omesso, dato che ci riferiremo sempre alla detta equivalenza, salvo esplicito avviso in contrario.

Le relazioni di equivalenza razionale non sono, in generale, relazioni di equivalenza lineare: esse estendono, nell'unico modo possibile, alle varietà di dimensione k immerse in una varietà ambiente di dimensione r, le relazioni di *equivalenza lineare* per varietà ad $r-1$ dimensioni immerse in una varietà ad r dimensioni (n. 15). E sta appunto nella non linearità di tali relazioni di equivalenza, una delle principali ragioni per le quali il concetto di serie e di sistemi di equivalenza ha tardato tanto a rivelarsi nello studio della geometria sopra una varietà.

21. *Serie elementari sopra una superficie.* — Per esporre nel modo più semplice i fondamenti della teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza, comincieremo dalle serie di gruppi di punti sopra una superficie algebrica irriducibile F, cioè dalle serie di equivalenza di varietà a 0 dimensioni sopra una varietà a 2 dimensioni. (Si osservi che su di una varietà a 2 dimensioni, non c'è luogo a considerare che tali serie di gruppi di punti, in quanto i sistemi di equivalenza di varietà ad 1 dimensione si riducono ai sistemi lineari).

Dapprima conviene limitarsi a quelle che chiamiamo *serie elementari d'equivalenza superficiale.* Assegnate sopra la superficie F due funzioni razionali φ, ψ funzionalmente indipendenti

(contenenti, se si vuole, alcuni parametri lineari), la serie dei gruppi di un numero finito di punti che sono di livelli costanti simultanei per le due funzioni razionali, unitamente ai *gruppi d'accumulazione* di questi, costituisce una serie elementare.

È ovvio che il concetto così introdotto, di serie elementari d'equivalenza superficiale, è *invariante* per trasformazioni birazionali della superficie F.

Dal punto di vista geometrico la definizione data riducesi a considerare due sistemi lineari $|C|$, $|D|$ di curve, segati su F rispettivamente dai sistemi lineari di forme

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \ldots = 0 \quad , \quad \psi_0 + \mu\psi_1 + \ldots = 0 \, ,$$

e non composti colle curve di un medesimo fascio. La serie dei gruppi di punti d'intersezione delle curve di $|C|$ e di $|D|$ è una serie elementare; con l'avvertenza che, ove due particolari curve C_0, D_0 dei sistemi abbiano a comune una componente E, in luogo del gruppo d'intersezioni (C_0, D_0), vanno considerati tutti i possibili gruppi limiti che si ottengono dal generico gruppo (C, D) facendo tendere comunque C a C_0 e D a D_0, entro $|C|$ e $|D|$. Val quanto dire, insomma, che nel gruppo d'intersezioni (C_0, D_0) alla componente comune E si sostituisce la sua equivalenza funzionale secondo il n. 12.

In base a questa considerazione relativa ai gruppi d'accumulazione, può dirsi che una serie elementare è costituita da gruppi possedenti tutti un *ugual numero finito* di punti, che dicesi *ordine* della serie.

È necessario aggiungere ai gruppi generici (C, D) tutti i gruppi d'accumulazione, compresi quelli che non appariscono subito gruppi effettivi di un numero finito di punti, perchè altrimenti la serie definita *non sarebbe algebrica*. Invero, un ente algebrico è sempre un insieme perfetto di elementi. Insomma, il gruppo d'intersezione (C, D) va considerato virtualmente, secondo l'accezione del n. 10. Così restano automaticamente compresi tutti i gruppi d'accumulazione. Inoltre in questo modo ha senso di considerare la serie dei gruppi (C, D) anche quando i due sistemi $|C|$, $|D|$ non soddisfacciano all'ipotesi fatta (di non esser cioè composti colle curve di un fascio). Sicchè una serie elementare resta in tal guisa definita anche a partire da due funzioni φ, ψ funzionalmente dipendenti.

Quando tutti i gruppi di una serie elementare contengono alcuni punti fissi (per cui bisogna che i sistemi lineari $|C|$, $|D|$ abbiano dei punti base a comune), ci lascieremo liberi di includerli

o di escluderli dai gruppi della serie. Così pure ci lascieremo liberi di aggiungere gruppi fissi comunque situati su F. Ciò è perfettamente analogo a quanto si fa per le serie lineari sopra una curva. Per le serie elementari sopra una superficie, è opportuna però un'ulteriore considerazione, di cui diremo fra breve (n. 23).

I gruppi di una serie elementare invadono, in generale, tutta la superficie F. Tuttavia, una serie elementare può in particolare ridursi ad *un sol gruppo fisso di punti*, p. es. allorchè i due sistemi lineari $|C|$, $|D|$ siano di dimensione zero, cioè si tratti di una coppia di curve ; oppure ridursi ad una serie di gruppi di punti sopra una curva (riducibile o no), p. es. allorchè uno solo dei due sistemi lineari, $|D|$, si riduce ad una curva fissa. Una siffatta serie elementare dicesi una *serie elementare curvilinea.*

È opportuno uno studio sistematico a parte delle serie elementari curvilinee, da un punto di vista analogo a quello da cui si studiano le serie lineari sopra una curva, e sarà fatto in seguito ; tuttavia, occorrendoci fin d'ora talune nozioni in proposito, ne daremo qualcuna anticipatamente nel prossimo numero.

22. *Serie d'equivalenza curvilinea.* — Sopra la superficie F, sia assegnata una linea D, ed un sistema lineare $|C|$, che seghi D (esclusi, se si vuole, dei punti fissi) in una serie di gruppi di punti, sempre virtualmente (n. 21) in numero finito. È chiaro che *tale serie può concepirsi segata su D anche da un sistema lineare di forme dell'ambiente S_r* a cui appartiene F, precisamente dal sistema delle forme seganti $|C|$ su F.

Sopra una curva (riducibile o no) una serie di gruppi di punti che soddisfaccia a quest'ultima proprietà si dirà una *serie d'equivalenza curvilinea.* Ognuna delle serie elementari curvilinee considerate nel n. prec. è una serie di tipo siffatto, e viceversa. Dunque possiamo riferirci su D alle serie così definite, rispetto allo spazio ambiente.

Quando la curva D è irriducibile, la serie non è che una ordinaria serie lineare, ed è ben noto [1] che, cambiando eventualmente il sistema lineare di forme seganti, si può ottenere una corrispondenza biunivoca (senza eccezione) tra i gruppi della serie ed il sistema lineare. Da ciò la conclusione che la serie è *lineare* nel senso della definizione data nel n. 13.

Ciò non accade più, in generale, quando D è spezzata in s parti irriducibili $D_1, D_2, \ldots, D_s$. Si consideri p. es. sopra la curva D

[1] Cfr. p. es. F. Severi, *Trattato di G. a.*, citato, pag. 57.

spezzata in due rette sghembe di S_3, la serie segata dai piani: essa non è altro che la serie delle coppie di punti delle due rette. Dunque la varietà che rappresenta senza eccezione la serie è la varietà di SEGRE relativa a due rette (n. 19), cioè una quadrica, che — come si vide — è razionale, ma non lineare.

Enunciamo ora il seguente teorema fondamentale della teoria delle serie d'equivalenza curvilinea, la cui dimostrazione sarà data in seguito.

Sopra una curva riducibile $D = D_1 + D_2 + \ldots + D_s$, *virtualmente priva di punti di connessione* (1), *è unica la serie d'equivalenza più ampia* (*serie completa*), *che contiene un gruppo* G *di punti comunque assegnato su* D. *Tale serie si ottiene associando in tutti i modi possibili i gruppi di punti delle serie lineari complete individuate su ciascuna delle componenti di* D, *su cui esistano gruppi parziali di* G, *da questi medesimi gruppi parziali.*

Se le dimensioni delle serie lineari complete su $D_1, D_2, \ldots, D_s$, sono $r_1, r_2, \ldots, r_s$ (ove si ponga uguale a zero la dimensione relativa ad una componente su cui non esistano punti di G), la dimensione della serie di equivalenza più ampia, di cui nell'enunciato, risulta $r_1 + r_2 + \ldots + r_s$. La varietà rappresentativa senza eccezione dei gruppi di una tal serie è la varietà di SEGRE relativa ad s spazi $S_{r_1}, S_{r_2}, \ldots, S_{r_s}$; il suo ordine invariantivo è quindi l'ordine di tale varietà (n. 19), e cioè:

$$\frac{(r_1 + r_2 + \ldots + r_s)!}{r_1!\, r_2! \ldots r_s!}.$$

Se ne deduce che, sopra una curva D riducibile, una serie d'equivalenza completa, non può mai esser lineare, salvo il caso che essa esista come serie infinita sopra una sola componente di D, mentre sulle altre componenti non esiste o si riduce ad un gruppo fisso di punti.

Si osservi infine che il teorema fondamentale enunciato, equivale in sostanza all'affermazione che *la serie somma di più serie lineari sopra le varie componenti* $D_1, D_2, \ldots, D_s$ *di* D, *può sempre segarsi su* D *con un sistema lineare di forme.*

23. *Serie elementari intersezioni complete e parziali.* — Conviene allargare un poco la definizione di serie elementare data

(1) Si considera D come totalmente sconnessa, senza cioè fissare come punti di connessione alcuni o tutti i punti comuni alle sue parti a due a due (cfr. F. SEVERI, *Vorlesungen...*, cit., Anhang F). Il teorema si estende però — come si vedrà in seguito — anche alle curve riducibili *connesse*.

al n. 21. Si è già detto che possono includersi o no *gruppi fissi* di punti che facciano eventualmente parte di tutti i gruppi della serie.

Ora, può anche accadere che da ogni gruppo della serie si stacchi un gruppo parziale il quale, variando, non riempia tutta la superficie F, ma solo una curva di questa, descrivendo ivi una serie d'equivalenza curvilinea. Un gruppo siffatto dicesi un *gruppo semifisso*, e anch'esso lo includeremo o escluderemo a nostro arbitrio dai gruppi della serie. Così pure potremo aggiungere liberamente ai gruppi della serie un gruppo semifisso qualsiasi su F. Se si osserva che i gruppi fissi possono considerarsi come particolari serie elementari di dimensione zero su F, e i gruppi semifissi come serie elementari di dimensione 1, si può anche dire che nella considerazione delle serie elementari su F è lecito — se si vuole — astrarre da eventuali serie parziali, i cui gruppi abbiano un grado di libertà < 2 (che è il grado di libertà massimo che offre la superficie).

Serie elementari, che si siano ottenute escludendo al più gruppi fissi, si diranno anche *serie intersezioni complete* (di sistemi lineari su F); mentre si diranno *serie intersezioni parziali* le serie elementari ottenute escludendo altresì gruppi semifissi.

Più generalmente si dirà *serie d'intersezione parziale* una serie di gruppi di punti della superficie, tale che aggiungendo ad ogni suo gruppo un conveniente gruppo di una data serie di equivalenza curvilinea, si ottenga un gruppo mobile in una serie d'intersezione completa.

È facile dare esempi di serie intersezioni parziali. Se su F uno dei due sistemi lineari $|C|$, $|D|$, p. es. $|C|$, è costituito da curve spezzate con una componente fissa E, ogni gruppo della serie elementare intersezione completa di $|C|$, $|D|$ ha una sua parte che varia su E nella serie d'equivalenza ivi segata da $|D|$. La serie ottenuta escludendo i gruppi di punti variabili su E, è una serie elementare intersezione parziale di $|C|$, $|D|$. Però questo esempio è banale, perchè la serie stessa (eventualmente a meno di punti fissi) riconducesi alla serie intersezione completa di $|C - E|$, $|D|$.

Ecco un altro esempio. Sia F una superficie d'ordine m dello spazio ordinario, sulla quale sia tracciata una curva razionale Γ. Consideriamo nello spazio la famiglia ∞^{24} delle sestiche canoniche E (di genere 4). Ognuna di queste è intersezione completa di una quadrica e di una superficie del terzo ordine e sega dunque su F una serie intersezione completa del sistema lineare $|C|$ staccato su F dalle quadriche e del sistema lineare $|D|$ staccato su F dalle superficie cubiche. Le curve E passanti p. es. per 5 punti varia-

bili su Γ dipendono (almeno) da $24 - 5 = 19$ parametri. Esse staccano su F, fuori del gruppo d'appoggio su Γ una serie intersezione parziale, perchè la serie dei punti d'appoggio che si sono trascurati è, su Γ, una serie d'equivalenza (anzi lineare). Onde quei gruppi sono semifissi, a norma della nostra definizione.

Un esempio ancor più espressivo di serie intersezione parziale (che è quello presentatosi pel primo a SEVERI) è fornito dalla cosidetta *serie di* SEVERI sopra una superficie irregolare, della quale ci occuperemo in seguito.

24. *Non linearità, in generale, delle serie elementari.* — Si sono già dati esempi di serie curvilinee d'equivalenza (che son poi particolari serie elementari), non risultanti lineari. Si hanno anche subito esempi di serie elementari, invadenti tutta F, che non sono lineari. Così, la serie intersezione dei due fasci di generatrici di una quadrica F (cioè, in sostanza, la serie di tutti i punti di F), è una serie quadratica e non lineare, in quanto i suoi gruppi (costituiti da un sol punto) risultano automaticamente in corrispondenza biunivoca senza eccezione coi punti della quadrica stessa. Si può giungere alla conclusione anche osservando che i gruppi della serie possono riferirsi alle coppie di rette delle due schiere, quindi ai punti della varietà di SEGRE relativa, cioè ancora ad una quadrica.

La serie dei punti di un piano che, per definizione, è lineare (n. 13), può pure considerarsi come serie elementare intersezione di due fasci di rette. Pertanto in casi particolari una serie elementare può anche esser lineare. E si osservi che qui non potrebbesi argomentare come sopra, riferendo i gruppi della serie alle rette dei due fasci, giacchè farebbero eccezione alla corrispondenza i punti della retta congiungente i centri dei due fasci.

25. *Indeterminazione della coppia di funzioni razionali associate ad una serie elementare.* — Assegnate sopra F due funzioni razionali φ, ψ (che, per fissare le idee, posson supporsi non dipendenti da parametri), resta definita una ben determinata serie elementare d'equivalenza; ma viceversa *questa non individua la coppia di funzioni razionali* φ, ψ *atte a definirla.* Nel caso delle serie lineari sopra una curva irriducibile Γ, assegnata una g_n^1, la corrispondente funzione razionale θ su Γ non viene individuata se non quando si siano fissati tre gruppi distinti della g_n^1 in cui la funzione razionale θ assuma tre distinti livelli (p. es. $0, 1, \infty$).

Precisamente, la funzione razionale θ viene determinata dalla g_n^1 solo *a meno di un'omografia* (1).

Per una serie elementare σ su F, l'indeterminazione delle funzioni razionali φ, ψ corrispondenti è ben maggiore. Vediamo in che cosa consiste. Sieno dunque φ', ψ' altre due funzioni razionali atte a definire su F la stessa serie elementare σ. Si può allora porre una corrispondenza birazionale tra le coppie di valori (costanti) attribuiti a φ , ψ e le coppie di valori (costanti) attribuiti a φ', ψ', chiamando omologa di una coppia di valori di φ, ψ la coppia di valori di φ', ψ' che dà luogo allo stesso gruppo di σ. Pertanto φ', ψ' risultano in tal modo funzioni razionali invertibili (razionalmente) di φ, ψ. Viceversa, prese due arbitrarie funzioni razionali invertibili φ' , ψ' di φ , ψ, esse definiscono lo stesso insieme di gruppi di livello simultanei, che vien definito dalle φ, ψ. Pertanto *l'indeterminazione delle funzioni razionali* φ, ψ *dipende dalla più generale corrispondenza birazionale tra due enti razionali* ∞^2 (se si vuole, tra due piani); *cioè da infiniti parametri.*

Nel caso delle serie lineari su di una curva irriducibile, la più generale corrispondenza birazionale tra due enti razionali ∞^1 si riduce ad un'omografia (2); ed è perciò che — come si è detto — soltanto da un'omografia dipende l'indeterminazione della funzione razionale θ.

26. *La somma di due serie intersezioni complete è ancora una serie intersezione completa?* — Un concetto fondamentale nella teoria delle serie lineari sopra una curva Γ irriducibile, è quello delle operazioni di somma e sottrazione su serie lineari. Per giungere al concetto di somma di due serie lineari, definite rispettivamente dalle due funzioni razionali θ , θ_1 sopra Γ (ove θ , θ_1 possono eventualmente esser combinazioni lineari, con parametri arbitrari, di altre funzioni razionali), si considerano i gruppi di punti di Γ ottenuti associando un qualunque gruppo A della prima serie con un qualunque gruppo B della seconda, e si stabilisce che tutti questi gruppi $A + B$ fanno parte dei gruppi di una nuova funzione razionale su Γ. La funzione razionale contenente il minor numero di parametri lineari, i cui gruppi di livello comprendono tutti i gruppi del tipo $A + B$, (somma minima delle

(1) Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, citato, pag. 98.

(2) È questa una notissima ed elementare proprietà; cfr., p. es., il *Trattato* di F. Severi, ora cit., pag. 9.

due serie), è data dalla formula:

$$\zeta = a\,\theta\,\theta_1 + b\,\theta + c\,\theta_1 + d\,,$$

con a, b, c, d parametri lineari [1].

È possibile stabilire qualcosa di analogo per le serie intersezioni complete sopra una superficie F?

Siano assegnate due serie intersezioni complete, mediante le due coppie di funzioni razionali φ, ψ e φ_1, ψ_1 (dipendenti eventualmente da parametri lineari). Come nel caso delle curve, possono qui considerarsi i gruppi di punti su F ottenuti associando in tutti i modi possibili i gruppi della prima serie coi gruppi della seconda. L'insieme di gruppi di punti che così si ottiene è contenuto totalmente in una serie intersezione completa su F?

Se, analogamente a quanto sopra, si considera la serie intersezione completa definita dalla coppia di funzioni razionali

$$a\,\varphi\,\varphi_1 + b\,\varphi + c\,\varphi_1 + d \quad , \quad a'\,\psi\,\psi_1 + b'\,\psi + c'\,\psi_1 + d'\,,$$

si vede che questa serie contiene bensì tutte le somme dei gruppi delle serie date, ma queste somme son soltanto gruppi *parziali* della serie costruita. Nè si vede a quali più complesse combinazioni delle φ, φ_1, ψ, ψ_1 possa ricorrersi per conseguire lo scopo.

D'altronde vi è una circostanza che fa apparire estremamente improbabile che la somma di due serie intersezioni complete sia sempre totalmente contenuta in una serie intersezione completa; ed è questa. Una serie intersezione completa sopra una superficie F di S_3 è sempre segabile su F mediante un sistema intersezione completa di curve sghembe, cioè (n. 41) mediante un sistema intersezione completa (fuori di linee fisse) di due sistemi lineari di superficie di S_3. Ora, come vedremo nel n. 44, esistono coppie di sistemi intersezioni complete di curve sghembe, che non sono totalmente contenuti in sistemi intersezioni complete.

Ove dunque non si voglia rinunciare ad introdurre il concetto capitale di somma di due serie d'equivalenza sopra una superficie, è giuocoforza ampliare il campo delle serie d'equivalenza considerate. È quanto faremo fra non molto (n. 29).

[1] Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., n. 29, pag. 103 e segg. La formula del testo si ottiene subito dalla (5) di pag. 106 del citato Trattato o, direttamente, osservando che la somma minima delle serie date deve contenere ogni gruppo in cui sia simultaneamente $\lambda\,0 + \mu = 0$ e $\lambda_1\,\theta_1 + \mu_1 = 0$, e la totalità di questi gruppi appartiene alla totalità $\lambda\lambda_1\,\theta\theta_1 + \lambda\mu_1\,\theta + \lambda_1\,\mu\,\theta_1 + \mu\mu_1 = 0$, la quale alla sua volta è contenuta nella *minima* totalità lineare $a\,\theta\theta_1 + b\,\theta + c\,\theta_1 + d = 0$.

Osservazione. — Un'osservazione che forse non è mai stata fatta esplicitamente neppure nel caso delle serie lineari sopra una curva è che (per cominciare appunto da questo caso) *il teorema di unicità della serie lineare completa determinata da un gruppo di punti sopra una curva* Γ *ed il teorema d'esistenza della serie lineare somma di due date serie lineari* (*col Restsatz invariantivo, che ne consegue*) *sono equivalenti fra loro.*

Che dal suddetto teorema d'unicità segua l'accennato teorema di esistenza, è cosa ovvia e ben nota (ved. p. es. il Trattato di Geometria algebrica di SEVERI). Nuova è forse la conclusione inversa, che si stabilisce così.

Se due serie g_n^r , g_n^s su Γ hanno un gruppo comune G e si è già acquisito (in modo autonomo come a pag. 103 del citato Trattato) il teorema di esistenza della somma, se ne deduce il teorema di unicità della serie completa individuata da G, considerando la somma minima g_{2n}^t di g_n^r , g_n^s ed osservando che i gruppi di g_{2n}^t passanti per G formano una g_n^c più ampia di g_n^r , g_n^s e contenente queste due serie ; sicchè non possono esistere due serie lineari complete distinte determinate da G.

Il ragionamento stesso può trasportarsi alle serie intersezioni complete sopra una superficie F, in quanto anche per queste vale il fatto fondamentale che *i gruppi di una serie intersezione completa contenenti un dato gruppo di punti formano una serie intersezione completa.* Pertanto si conclude che *il teorema di unicità della serie intersezione completa determinata su una superficie* F *da un dato gruppo* G *di punti e il teorema di esistenza di una serie intersezione completa somma di due date serie intersezioni complete, sono veri o sono falsi insieme* : l'uno equivalendo all'altro.

E siccome (secondo risulterà dal seguito) una serie di equivalenza (anzi di pseudoequivalenza) epperò anche una serie intersezione completa, non pare possa esser determinata sopra una superficie qualunque da un sol gruppo di punti (ma sibbene da ∞^1 gruppi formanti una serie, che soddisfa a una certa condizione topologica), così resta anche da questo punto di vista confermato che *non è probabile che sopra una superficie qualunque la somma di due serie intersezioni complete sia contenuta totalmente in una serie intersezione completa.*

Esistono però superficie (come le superficie razionali, n. 28) per le quali valgono gli accennati teoremi di unicità e di esistenza. Se non son tutte le superficie per cui questo accade, come si caratterizzano le superficie sulle quali valgono i predetti teoremi ? Ecco un'importante questione da risolvere. Rispondere ad essa

significa anche sciogliere il dubbio precedente e mutare la probabilità in certezza.

27. *Le serie caratteristiche dei sistemi lineari sopra una superficie come particolari serie elementari.* — Assegnato sopra una superficie F un sistema lineare di curve $|C|$, può considerarsi su ogni curva C di $|C|$ la *serie caratteristica*, cioè la serie segata (effettivamente o virtualmente) dalle curve del sistema stesso. Al variare di C entro $|C|$, queste serie caratteristiche descrivono dunque una serie elementare (a norma della definizione data nel n. 21), che può considerarsi come serie intersezione completa del sistema lineare $|C|$ con se stesso.

Ci si può chiedere se non accada che tutte le serie intersezioni complete possano considerarsi come serie caratteristiche, o almeno come contenute *totalmente* in serie caratteristiche. Ove ciò avvenisse, non avrebbe più un grande interesse lo studio delle serie intersezioni complete risultando già virtualmente compreso in quello dei sistemi lineari. Ma, già *a priori*, si capisce come vada risposto negativamente alla domanda , poichè le serie caratteristiche vengono in sostanza a dipendere da una sola funzione razionale su F, mentre le serie intersezioni complete dipendono da una coppia di tali funzioni.

D'altronde possiam dar subito *un esempio di serie intersezione completa la quale non può ottenersi dalla serie caratteristica di alcun sistema lineare.* Si consideri una superficie del quart'ordine F dello spazio ordinario, priva di punti multipli, e la serie di gruppi di punti, γ_8^8, segata su di essa dalle coniche dello spazio. La serie γ_8^8 può essere concepita come la serie elementare, intersezione dei sistemi lineari segati su F dai piani e dalle quadriche dello spazio. La γ_8^8 risulta di ordine 8, e di dimensione 8, uguale alla dimensione del sistema delle coniche dello spazio, giacchè per un gruppo generico di γ_8^8 passa una sola conica.

Se, sopra F, esistesse un sistema lineare ∞^r, generante γ_8^8 come insieme delle sue serie caratteristiche, esso possiederebbe ∞^{2r-2} gruppi caratteristici [1] e quindi sarebbe $2r-2=8$, cioè $r=5$. Allora per 4 punti generici di F passerebbe *un* gruppo caratteristico, mentre per quei punti, se non son complanari, non passa alcun gruppo di γ_8^8.

[1] Per contare i gruppi caratteristici di un sistema lineare ∞^r basta riferire le curve di questo agli S_{r-1} di un S : i detti gruppi son tanti quanti gli S_{r-2} di $_r$.

Ma mostriamo altresì che non esistono serie caratteristiche più ampie, che contengano totalmente γ_8^8. Occorre provare che non può esistere su F un sistema lineare $|C|$ di grado effettivo 8 e dimensione $r > 5$, la cui serie caratteristica contenga γ_8^8. Supponga si che un sistema siffatto esista. Esso sarà semplice (perchè γ_8^8 non è composta con un'involuzione) e la sua dimensione sarà $r \leq 9$, giacchè per i gruppi caratteristici di $|C|$ possono al massimo darsi ad arbitrio tutti gli 8 punti, cioè per 8 punti generici, al più, devono passare ∞^1 curve di $|C|$. Son dunque possibili i valori $r = 6, 7, 8, 9$. Per $r = 9$, la superficie sarebbe razionale, perchè contenente un sistema lineare di dimensione 9 e di grado 8(1); mentre si è supposta F una superficie del 4° ordine, irriducibile e priva di punti multipli, quindi di genere geometrico 1, e non certamente razionale (2). D'altronde si possono escludere anche gli altri valori di r, ove si consideri l'imagine proiettiva di $|C|$, che risulta una superficie Φ di ordine 8, dello spazio S_r, la quale è in corrispondenza birazionale con F (n. 16).

Il genere p della sezione iperpiana generica di Φ non può superare il massimo dato da una nota formula di CASTELNUOVO (3), e che, per $r = 6, 7, 8, 9$, è rispettivamente $p = 3, 2, 1, 0$. In ogni caso l'ordine di Φ risulta maggiore di $2p - 2$, epperò il genere geometrico di Φ sarebbe zero in base ad un teorema di CASTELNUOVO-ENRIQUES (4), contrariamente al fatto che F ha il genere geometrico 1. L'ipotesi ammessa è dunque assurda.

28. *La serie dei gruppi di m punti del piano.* — Prima di procedere oltre nello studio delle serie di gruppi di punti sopra una superficie, diamo qualche altro importante esempio di serie elementari. Dimostriamo che *la totalità dei gruppi di m punti del piano costituisce una serie elementare*, che può altresì considerarsi come serie caratteristica di un sistema lineare. Si osservi che una volta stabilita questa proprietà per il piano, essa sussiste tal quale per ogni *superficie razionale*, giacchè il concetto di serie elementare (ed anche quello di serie caratteristica) è invariante per trasformazioni birazionali della superficie ove esiste la serie (n. 21).

(1) Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla Geom. pr. degli iperspazi*, cit., pag. 398.

(2) Cfr. F. ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, raccolte da L. CAMPEDELLI, Cap. III, Cedam, Padova, 1932.

(3) « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino » (1899), t. 24, pag. 196; « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », (1893), pag. 89.

(4) In base al citato teorema, Φ risulterebbe anzi razionale o riferibile a rigata. Cfr. « Annali di Matematica », (1900), pag. 212, n. 16.

Per stabilire la proprietà enunciata, si fissi sul piano un punto O, e si consideri il sistema lineare $|C|$ delle curve d'ordine m, C, che hanno O come punto $(m-1)$-plo. La curva generica di $|C|$ risulta irriducibile. Ciò posto, si osservi che le condizioni imposte dal punto $(m-1)$-plo O alle C sono $\frac{1}{2}m(m-1)$ condizioni *indipendenti*; pertanto la dimensione del sistema lineare $|C|$ risulta:

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = 2m .$$

Allora il sistema lineare subordinato $|D|$, che si ottiene da $|C|$ imponendo alle sue curve il passaggio per altri $m-1$ punti generici del piano, in modo che forniscano condizioni indipendenti [1], è un sistema di curve irriducibili di dimensione

$$2m - (m-1) = m + 1 ,$$

e di grado

$$m^2 - (m-1)^2 - (m-1) = m .$$

Dunque per m punti generici del piano passa un fascio di curve del sistema $|D|$; cioè la serie caratteristica di $|D|$ non è altro che la serie di tutti i gruppi di m punti del piano.

Se si vuole, può ottenersi tale serie anche come serie elementare intersezione di due sistemi lineari distinti: precisamente del sistema lineare $|D|$ e del sistema lineare costituito dalle curve spezzate in m rette per O.

Nel caso $m = 1$, la serie dei singoli punti del piano si ottiene come serie caratteristica della rete delle rette, o come serie elementare intersezione di due fasci di rette.

La proprietà che i gruppi di m punti del piano costituiscono una serie elementare, si può dimostrare anche in altro modo. Si consideri la rigata razionale Φ d'ordine m dello spazio S_{m+1} ad $m+1$ dimensioni. Una m-pla di punti generici di Φ determina un S_{m-1} di S_{m+1}, il quale interseca la Φ precisamente secondo la nominata m-pla. La serie dei gruppi di m punti di Φ si ottiene dunque intersecando la Φ con gli S_{m-1} di S_{m+1}; e si tratta di una serie elementare, giacchè un S_{m-1} di S_{m+1} è intersezione di due S_m di S_{m+1}. Ma la Φ è riferibile al piano essendo razionale: ne viene che la serie dei gruppi di m punti del piano è una serie elementare.

[1] A tal fine basta assegnare gli $m-1$ punti successivamente l'uno dopo l'altro in modo generico.

Giova però osservare che questa dimostrazione non è che apparentemente diversa da quella data precedentemente: invero la rigata Φ si rappresenta sul piano mediante il sistema $|D|$ dianzi considerato; e gli m punti d'intersezione di due D (fuori dei punti base) rappresentano appunto le intersezioni di un S_{m-1} di S_{m+1} con la Φ stessa.

29. *Definizione generale di serie di equivalenza sopra una superficie.* — Siano sopra una superficie F più serie elementari d'equivalenza $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$. Ricordando le considerazioni del n. 8, possiamo attribuire ai gruppi di talune di queste serie il segno $+$, agli altri il segno $-$. Allora ogni sistema algebrico di gruppi virtuali di punti che si ottengano associando gruppi di ciascuna delle serie $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, coi rispettivi segni, dicesi una *serie (generale) d'equivalenza* sopra F. In altri termini: *Una serie d'equivalenza è una serie di gruppi virtuali di punti della superficie F, ottenibili per somma e sottrazione dai gruppi di un numero finito di serie elementari.*

Ci si renderà subito conto delle ragioni che consigliano *a priori* questa definizione di serie d'equivalenza, quando si ricordino le considerazioni del n. 26.

Si è parlato, in generale, di gruppi *virtuali*, ma naturalmente può ben darsi che mediante le operazioni di somma e sottrazione sui vari gruppi delle serie $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$, si ottengano dei gruppi *effettivi*. Si osservi altresì che fra le serie elementari generatrici della serie d'equivalenza vi possono essere serie ∞^0 (gruppi fissi) e serie curvilinee (gruppi semifissi). Sopprimendo od aggiungendo serie elementari siffatte, la serie rimane naturalmente una serie d'equivalenza.

È chiaro che il concetto di serie d'equivalenza risulta invariante per trasformazioni birazionali di F, così come il concetto di serie elementare (n. 21); ed è chiaro altresì che, siccome una serie d'equivalenza curvilinea è una serie intersezione completa (nn. 21, 22) e quindi una serie intersezione parziale è differenza di due intersezioni complete, così *una serie d'equivalenza può anche definirsi come una somma algebrica di serie d'intersezione completa.*

La definizione di serie d'equivalenza ora indicata, trovasi la prima volta in SEVERI, «Comptes Rendus», janvier 1934, t. 198, pag. 422; e poco dopo anche in TODD, «Annals of mathematics», july 1934, pag. 702. Tale definizione non è però la prima adottata dal SEVERI nei successivi sviluppi, che è andato facendo dal 1932 ad oggi, della teoria delle serie e dei sistemi d'equivalenza. Le altre definizioni, che del resto sono tutte equivalenti a quella, saranno ritrovate come teoremi nell'esposizione attuale della teoria.

Diamo qui, per comodità del lettore, l'elenco completo dei successivi lavori dell'Autore intorno alla teoria medesima sino a tutto il 1937:

[1] *Sulle curve di livello costante degl'integrali di Picard*, «Rendiconti della R. Acc. dei Lincei», (1925), t. II_6, pag. 521. (Vi si trova appena un cenno relativo alla necessità della teoria).

[2] *La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*, « Commentari mathematici Helvetici », vol. IV, (1932), pag. 268.

[3] *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. III, (1932), pag. 5.

[4] *Quelques théories nouvelles en géometrie algébrique*, « Comptes rendus de l'Académie des Sciences », (1933), t. 196, pag. 229.

[5] *Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. IV, (1933), pag. 71.

[6] *La teoria delle serie di equivalenza e delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica*, 7 Note, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1933), vol. XVII, pagg. 419, 491, 597, 681, 759, 869, 876.

[7] *Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie*, « Abhandlungen Math· Seminar Hamburgischen Universität », (1933), B. 9, pag. 335.

[8] *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. V, (1934), pag. 239.

[9] *La théorie générale des correspondances entre deux surfaces algébriques*, « Comptes rendus de l'Ac. des Sciences », (1934), t. 198, pag. 422.

[10] *Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza*, 2 Note, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1934), vol. XIX, pagg. 751 e 831.

[11] *Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1934) vol. XX, pag. 287.

[12] *Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1935), vol. XX, pag. 395.

[13] *Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1935), vol. XXI, pag. 3.

[14] *The series of sets of points on an algebraic surface*, « Proceedings of the Imperial Academy of Tokyo », (1936), supplement to vol. XII.

[15] *La teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*, 2 Note, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1936), vol. XXIII, pag. 818, vol. XXIV, pag. 1.

[16] *Il rango di una corrispondenza a valenza sopra una superficie*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », (1936), Anno XV, n. 4.

[17] *Equivalenza d'una curva come gruppo virtuale parziale d'una serie d'equivalenza sopra una superficie*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari », Rossetti, Pavia, (1936), pag. 77.

[18] *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*, 2 Note, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1936), vol. XXIV, pag. 493, (1937), vol. XXV, pag. 3.

[19] *Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. VIII, marzo 1937.

[20] *I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali*, 2 Note, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », (1937), vol. XXV, pagg. 529 e 679.

[21] *I sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche e le loro applicazioni*, « Atti del 1° Congresso dell'Unione Matematica Italiana », (1937), pag. 58.

Tutti questi lavori verranno in seguito citati mediante la semplice indicazione del numero, con il quale sono qui rispettivamente contrassegnati.

§ 2. — Rappresentazione monoidale delle varietà.

30. *Rappresentazione monoidale delle curve sghembe di S_3.* — Per l'ulteriore esposizione dei primi concetti fondamentali relativi alle serie e ai sistemi d'equivalenza, occorrono talune nozioni proiettive sulla rappresentazione delle varietà. Pertanto dedichiamo l'attuale paragrafo allo sviluppo di queste nozioni.

Sia C una curva sghemba di S_3, di ordine m, irriducibile e priva di punti multipli. Fissato un riferimento cartesiano in S_3, si proietti C dal punto all'infinito dell'asse z, sopra il piano xy (1). È lecito supporre che il centro di proiezione, Z, non cada sulla curva e che sia situato in posizione generica rispetto alla varietà delle corde di essa, in tal modo che C si proietti biunivocamente in una curva C' del piano xy, anch'essa d'ordine m, e dotata di soli nodi. Nasce così una corrispondenza birazionale tra C, C'. Se

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

è l'equazione di C' sul piano xy, la corrispondenza birazionale tra C, C' sarà espressa da una relazione del tipo :

$$z = \frac{\theta(x, y)}{\psi(x, y)}, \tag{2}$$

per modo che, assegnato su C' un punto di coordinate (x, y), soddisfacenti la (1), il punto corrispondente su C avrà la coordinata z fornita dalla funzione razionale a secondo membro della (2), essendo $\theta(x, y), \psi(x, y)$ polinomi (che possiamo supporre primi tra loro). L'insieme delle relazioni (1), (2) dà una rappresentazione della curva sghemba assegnata sopra la curva piana C' : dicesi una *rappresentazione monoidale*.

(1) Si sceglie un riferimento cartesiano, anzichè un riferimento proiettivo, per rendere più perspicua la rappresentazione. Ma risulterà chiaro che le proprietà di cui trattasi hanno carattere proiettivo, e che il centro di proiezione suddetto può fissarsi in un punto generico dello spazio.

Siffatta rappresentazione può considerarsi altresì dal seguente punto di vista. La curva C si ottiene come intersezione del cono (cilindro), F, proiettante C da Z e la cui equazione nello $S_3(x, y, z)$ è la (1) stessa, con la superficie

$$z\,\psi(x, y) - \theta(x, y) = 0 . \tag{3}$$

Tale superficie, che indicheremo con Φ, ha in Z un punto $(q-1)$-plo, se q è il suo ordine [1]: è cioè un *monoide* di vertice Z.

Il cono (cilindro), d'ordine $q-1$, tangente a Φ nel vertice, ha l'equazione:

$$\psi(x, y) = 0 ,$$

come subito si vede, p. es. passando a coordinate omogenee nella (3) [2]. Lo indicheremo con Ψ. Si osservi inoltre che il monoide Φ è *irriducibile*, giacchè non potrebbe che spezzarsi in un monoide d'ordine inferiore e in un cono, ambedue aventi il vertice in Z [3]; mentre, siccome si son supposti θ, ψ primi fra loro, dal primo membro della (3) non può staccarsi una parte indipendente da z.

[1] Invero, intersecando la superficie con una retta per Z, cioè ponendo nella (3) costanti le x, y, la (3), essendo di primo grado in z, fornisce una sola intersezione al finito con la retta data, per cui le altre $q-1$ intersezioni si riuniscono nel punto Z, all'infinito.

[2] Se s'indicano con x', y', z', t' coordinate omogenee nello S_3, ove $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$, $z = \frac{z'}{t'}$, la (3) mutasi nella:

$$z'\,\psi^*(x', y', t') - \theta^*(x', y', t') = 0 , \tag{3a}$$

dove ψ^*, θ^* sono polinomi omogenei degli argomenti, di gradi rispettivi $q-1$, q, ottenibili da ψ, θ mediante le relazioni:

$$\psi^* = t'^{q-1}\,\psi\left(\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}\right), \quad \theta^* = t'^{q}\,\theta\left(\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}\right).$$

Dalla (3a) si deduce senz'altro l'affermazione di cui sopra e contemporaneamente anche il fatto che Φ ha in Z un punto $(q-1)$-plo.

Si osservi altresì che la (2), introdotte coordinate omogenee, può scriversi:

$$z = \frac{z'}{t'} = \frac{\theta^*(x', y', t')}{t'\,\psi^*(x', y', t')} . \tag{2a}$$

Di questa ci gioveremo fra poco.

[3] Se si suppone che il monoide Φ si spezzi in due superficie degli ordini r, s, passanti per Z con le rispettive molteplicità r_1, s_1, devono esser soddisfatte le condizioni:

$$r + s = q , \quad r_1 + s_1 = q - 1 ,$$

La curva C non risulta però l'intersezione completa del cono F e del monoide Φ [1]: invero l'intersezione completa è d'ordine $m\,q$, mentre la C è d'ordine m. Ora, se un punto Q appartiene all'intersezione residua, la retta $Z\,Q$, come retta di F, incontra ulteriormente Φ in un punto P di C (distinto da Q e da Z), e venendo così ad avere almeno $q+1$ punti su Φ (dei quali $q-1$ riuniti nel vertice Z), giace per intero su Φ. Quindi l'intersezione residua si spezza in rette per Z, in numero di $mq - m = m\,(q-1)$. E poichè ogni retta per Z, giacente su Φ, appartiene al cono Ψ tangente in Z a Φ, l'intersezione residua di F e Φ, fuori di C, si riduce al gruppo delle $m\,(q-1)$ rette per Z, intersezioni di F e Ψ. Si può dunque in definitiva scrivere *la relazione*:

$$C = (F, \Phi) - (F, \Psi), \tag{4}$$

che esprime la curva sghemba assegnata come differenza di due intersezioni complete.

È questa relazione, compendiante la rappresentazione monoidale, che a noi sostanzialmente interessa. Per il seguito intenderemo sempre di riferirci ad essa, quando si parli di rappresentazione monoidale di una curva C.

31. *Rappresentazione monoidale minima per una curva sghemba variabile in una famiglia.* — Essendo q l'ordine del monoide considerato, diremo che la rappresentazione monoidale della curva C *è di ordine* q. Siccome si è giunti a tale rappresentazione partendo dalla funzione razionale (2) dei punti di C', che dà i valori della coordinata z pei punti corrispondenti di C, può chiedersi se tale funzione razionale definisca le funzioni $\theta\,(x, y)$, $\psi\,(x, y)$, e di conseguenza l'ordine q del monoide Φ, oppure se resti qualche arbitrarietà nella scelta delle funzioni θ, ψ, quando è data la funzione razionale z. Alla questione va risposto così.

Si osservi intanto che, in corrispondenza ad un nodo di C', la funzione razionale (2) non può definire un sol punto di C (giacchè C è priva di punti multipli), quindi deve risultare indeterminata;

essendo inoltre $0 \leq r_1 \leq r$, $0 \leq s_1 \leq s$. Si deduce:

$$(r - r_1) + (s - s_1) = 1\,.$$

Quindi una delle due differenze a primo membro deve valer 0, l'altra 1. Allora delle due superficie, una è un cono, l'altra un monoide, e ambedue hanno il vertice in Z. (Va eventualmente considerato come monoide di vertice Z anche ogni *piano* non passante per Z).

[1] È ovvio che esistono curve sghembe, che non possono in alcun modo ottenersi come intersezione completa di due superficie. Basti pensare alle curve non piane il cui ordine è un numero primo.

cioè ivi si devono annullare i polinomi $\theta(x, y)$, $\psi(x, y)$. Ne segue che le equazioni:

$$\theta(x, y) = 0 \ , \ \psi(x, y) = 0 \ ,$$

interpretate sul piano xy, rappresentano due curve *aggiunte* a C'. Inoltre, poichè la curva C non passa per il punto Z, il valore di z dato dalla (2) non può mai diventare infinito per valori finiti di x, y; quindi l'aggiunta $\theta = 0$ deve passare, oltre che per i nodi di C', per l'ulteriore gruppo K dei punti nei quali C' è eventualmente segata dall'aggiunta $\psi = 0$.

Dunque la serie lineare, definita su C' dalla funzione razionale (2), ha come gruppo di punti fissi il gruppo K e i nodi di C'. Fatta astrazione da questo, la serie residua è una g^1_m, a cui corrisponde su C la serie segata dai piani paralleli al piano xy.

Si osservi che il gruppo degli zeri, G_0, della nostra g^1_m è segnato su C', fuori di K e dei nodi di C', dall'aggiunta $\theta = 0$, e coincide col gruppo delle intersezioni di C col piano xy. Il gruppo dei poli, G_∞, è segnato su C' dalla retta impropria del piano xy; ciò che subito si vede ricorrendo a coordinate omogenee (cfr. la formula (2a) della nota ([2]) a pie' di pag. 46). Ciò premesso, ogni coppia di polinomi $\theta_1(x, y)$, $\psi_1(x, y)$, atti a definire, come $\theta(x, y)$, $\psi(x, y)$, la stessa funzione razionale z su C', quindi la stessa g^1_m fuori di un gruppo di punti fissi, si ottiene al modo seguente.

Assegnata un'aggiunta a C', di ordine $q_1 - 1$ arbitrario, e di equazione

$$\psi_1(x, y) = 0 \ ,$$

sia K_1 il gruppo dei punti intersezione con C', fuori dei nodi. In base al teorema del resto, la serie lineare completa $|K_1 + G_\infty|$ individuata dal gruppo $K_1 + G_\infty$, verrà segata su C' dalle aggiunte d'ordine q_1, giacchè il gruppo G_∞ è rettilineo. Ora, tra i gruppi equivalenti a $K_1 + G_\infty$, c'è il gruppo $K_1 + G_0$; pertanto esiste qualche aggiunta d'ordine q_1 che lo contiene: sia

$$\theta_1(x, y) = 0$$

l'equazione di una di queste. La funzione razionale

$$z_1 = \frac{\theta_1(x, y)}{\psi_1(x, y)} \ , \tag{5}$$

ha su C' gli stessi zeri e gli stessi poli della (2), e quindi il quoziente $z : z_1$ risulta costante ([1]). Supposta inglobata tale costante

([1]) Una funzione razionale sopra una curva, che non ammetta zeri (o poli), è una costante. (Cfr. p. es., F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 5).

nei coefficienti dei polinomi θ_1, ψ_1, la relazione (5), unitamente alla (1), fornisce la medesima rappresentazione della curva C su C' dianzi ottenuta.

Se si aggiunge ora l'ipotesi che la curva $\psi_1 = 0$ sia irriducibile, ne segue che l'ordine della rappresentazione monoidale data dalla (5) risulta uguale a q_1; giacchè i polinomi θ_1, ψ_1, son primi tra loro, non potendo θ_1 contenere a fattore ψ_1, chè altrimenti il gruppo G_0 risulterebbe rettilineo, mentre esso è intersezione della curva *sghemba* C col piano $x\,y$.

Denotiamo con $\mu - 1$ il minimo ordine in corrispondenza al quale esistono aggiunte *irriducibili* a C'. Allora esistono altresì aggiunte irriducibili d'ogni ordine $\geq \mu - 1$. Invero, se $\psi_1 = 0$ è un'aggiunta irriducibile d'ordine $\mu - 1$, che seghi C', fuori dei nodi, in K_1, per K_1 passa qualche aggiunta $\theta_1 = 0$ di ordine μ, che sega ulteriormente su C' un gruppo non rettilineo e quindi non contiene $\psi_1 = 0$ come parte. La curva generica del fascio $\theta_1 + \lambda\,\psi_1\,\alpha = 0$, ove $\alpha = 0$ sia l'equazione d'una retta qualunque, è irriducibile (per un noto teorema di BERTINI) e aggiunta a C'. Esistono pertanto aggiunte irriducibili di ordine μ e analogamente di ordine $\mu + 1$, $\mu + 2, \ldots$.

Si conclude dunque che: *Assegnata una curva sghemba* C, *se ne possono dare rappresentazioni monoidali di ogni ordine, purchè maggiore o uguale a* μ, *essendo* $\mu - 1$ *il minimo ordine delle aggiunte irriducibili alla proiezione piana* C' *su cui si rappresenta* C.

È facile stabilire un limite inferiore, oltre il quale non può discendere il *minimo ordine* μ della rappresentazione monoidale.

Invero, se q è l'ordine di una rappresentazione monoidale (2) di C, le $m\,(q-1)$ rette comuni al cono F proiettante C ed al cono Ψ tangente al monoide Φ (cfr. n. prec.), son le rette che proiettano da Z il gruppo dei punti comuni a C' ed all'aggiunta $\psi = 0$. Tra questi vi son gli h nodi di C', i quali dànno luogo a rette da contarsi due volte (perchè doppie per F), ed altri eventuali h' punti. Si ha così:

$$m\,(q-1) = 2h + h'\,.$$

D'altronde, poichè per i punti comuni a C' ed all'aggiunta $\psi = 0$ passa anche l'aggiunta $\theta = 0$, quelle rette appartengono altresì all'intersezione del monoide Φ (che ha l'equazione $z\psi - \theta = 0$) col suo cono tangente Ψ; pertanto risulta:

$$q\,(q-1) \geq h + h'\,.$$

Dal confronto con la precedente relazione, si deduce:

$$2q\,(q-1) \geq m\,(q-1)\,,$$

e giacchè $q > 1$, ne segue:

$$q \geq \frac{m}{2} .$$

Dunque, *l'ordine minimo* μ *della rappresentazione monoidale di una curva sghemba* C, *d'ordine* m, *non può scendere al di sotto del valore* $\frac{m}{2}$ [1].

Supponiamo, infine, che la curva C di cui trattasi sia variabile in una famiglia $\{C\}$ di curve dello stesso ordine m. Allora, per la curva generica, $\overline{C}$, della famiglia si avranno rappresentazioni monoidali di un certo ordine minimo μ, e quindi di ogni ordine $q \geq \mu$. Si considerino, in generale, le rappresentazioni monoidali d'ordine q. Può darsi che, quando la curva generica $\overline{C}$, variando entro $\{C\}$, tende con continuità verso una particolare curva C della famiglia, il monoide per $\overline{C}$ tenda ad un monoide spezzato. Allora l'ordine della rappresentazione monoidale s'abbassa, giacchè il monoide si spezza necessariamente in un cono ed in un monoide d'ordine $< q$, aventi lo stesso vertice (cfr. la nota [3] a pie' di pag. 46).

Tuttavia la relazione (4) potrà considerarsi anche al limite, come se si trattasse ancora di una rappresentazione monoidale d'ordine q.

Con quest'avvertenza, si può asserire che, per ogni curva sghemba C, variabile in una famiglia $\{C\}$, sussistono rappresentazioni monoidali di uno stesso ordine (da un certo minimo in su); in altre parole, *per ogni tal curva sussiste la relazione* (4), *essendo* F, Φ, Ψ *superficie dello* S_3 *ambiente, variabili entro le rispettive famiglie di superficie degli ordini* m, q, $q-1$.

Questo fatto, che sarà convenientemente esteso alle varietà, è di importanza fondamentale per il seguito.

Osservazione 1ª. — Per ottenere la rappresentazione monoidale di una curva C, si è supposto che C non passi per il punto Z, vertice di F e Φ. Ora, se si considera C variabile entro la famiglia $\{C\}$, può accadere che, per particolari posizioni, C venga a passare per Z. In tal caso, il cono F si spezza, ed eventualmente anche il monoide Φ.

[1] Si avverta, però, che questo limite inferiore non è sempre raggiungibile, anche quando sia m pari. P. es. è facile vedere che la rappresentazione monoidale minima per una sestica sghemba di genere 4, risulta in generale d'ordine 4.

Tuttavia la rappresentazione ha ancora luogo, ove si consideri definita per continuità, come si è già detto.

Osservazione 2ª. — Nelle considerazioni svolte ci siamo riferiti a curve sghembe prive di punti multipli. Non sarebbe difficile mostrare come questa ipotesi sia superflua; ma a noi basti, come al solito, osservare che se una curva C variabile in una famiglia $\{C\}$, per particolari posizioni viene ad acquistare punti multipli, la rappresentazione monoidale di C, espressa dalla (4), si conserva.

Osservazione 3ª. — Se la curva C è spezzata, e variabile in una famiglia $\{C\}$ di curve tutte spezzate, non è possibile ripetere tal quali i ragionamenti dei nn. 30, 31, nè le più volte dette considerazioni di continuità (1). Ciononostante, anche in questo caso, sussiste la (4).

Accenniamo alle modificazioni che occorre portare nei ragionamenti. Limitiamoci a supporre la curva C, riducibile, dotata al più di punti doppi. La proiezione piana C' è una curva riducibile, che possiede, quindi, anch'essa soltanto punti doppi; dei quali un gruppo, N', proveniente dai punti doppi effettivi di C, un altro gruppo, N'', dai punti doppi apparenti di C.

Allora, sopra C', i punti doppi del gruppo N' si considereranno come *inesistenti*, mentre quelli del gruppo N'' come *assegnati*; in altri termini, si considereranno come aggiunte a C' le curve passanti per il gruppo N''. Ciò posto, giovandosi della teoria della serie d'equivalenza sopra una curva riducibile (2), e tenendo conto che su una tal curva la serie d'equivalenza completa è ancora segata dalle aggiunte e che sussiste altresì il teorema del resto, si possono sviluppare gli stessi ragionamenti del n. 30, indi quelli del n. 31; si perviene così ad analoghe conclusioni.

La rappresentazione monoidale delle curve sghembe è dovuta a CAYLEY. L'esposizione qui datane si avvicina, in parte, a quella del *Traité d'analyse* di E. PICARD, t. II, p. 615 (Gauthier-Villars, Paris, 1926). Altra esposizione trovasi in BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, cit., p. 250, ove è data anche l'estensione alle varietà (dovuta ad HALPHEN). Di tale estensione sarà fatto un cenno nel n. seguente.

(1) Si potrebbero però applicare i risultati ottenuti ad ogni singola componente irriducibile di C, ottenendo così C come somma algebrica di più intersezioni complete.

(2) Cfr. il n. 22. Qui occorrono, però, sviluppi della teoria che saranno dati più innanzi. Cfr. altresì la memoria [3] di F. SEVERI, cit. a pag. 44.

32. *Monoidi irriducibili passanti per una V_k irriducibile di S_r. Cenno della rappresentazione monoidale di* CAYLEY-HALPHEN. — Dopo aver esaminato il caso particolare delle curve sghembe di S_3, irriducibili o spezzate, consideriamo, in generale, le varietà algebriche di S_r, con lo scopo di stabilire una relazione del tipo della (4) per ogni varietà V_k, di dimensione $k \leq r-2$ (1), sia essa irriducibile, riducibile o virtuale. Si tratta, in sostanza, di ottenere V_k come somma algebrica di un numero finito di varietà di dimensione k, che siano intersezioni complete di forme di S_r.

Cominciamo col considerare una V_k irriducibile, che supponiamo *appartenente* allo S_r, e vediamo intanto di determinare dei monoidi irriducibili passanti per essa. Si assuma, nello S_r, la piramide fondamentale di riferimento, di vertici $A_0, A_1, \ldots, A_r$, in posizione generica rispetto a V_k; e siano $x_0, x_1, \ldots, x_r$ le relative coordinate proiettive omogenee di punto. Allora, proiettando V_k da A_0, o da A_0A_1, o da $A_0A_1A_2, \ldots$, o, infine, da $A_0A_1A_2 \ldots A_{r-k-2}$, sopra lo spazio fondamentale opposto, nasce una corrispondenza tra V_k e la varietà proiezione, che risulta, in ogni caso, birazionale (2).

Pertanto, se si proietta V_k da A_0 sull'iperpiano $x_0 = 0$, indicati con $P(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, $P'(0, x_1, \ldots, x_r)$ punti corrispondenti variabili rispettivamente su V_k e sulla varietà proiezione V'_k, la coordinata non omogenea $\frac{x_0}{x_r}$ di P risulta funzione razionale delle coordinate non omogenee $\frac{x_1}{x_r}, \frac{x_2}{x_r}, \ldots, \frac{x_{r-1}}{x_r}$ di P'. Ridotti il numeratore ed il denominatore della predetta funzione razionale ad esser primi fra loro; scritta dipoi la relazione fra $\frac{x_0}{x_r}$ e $\frac{x_1}{x_r}, \frac{x_2}{x_r}, \ldots, \frac{x_{r-1}}{x_r}$ sotto forma intera, ed introdotta infine nuovamente l'omogeneità nelle coordinate, si ricava una relazione del tipo:

$$x_0 \psi(x_1, \ldots, x_r) = \theta(x_1, \ldots, x_r), \tag{6}$$

dove ψ e θ sono polinomi dei gradi rispettivi $q-1$, q. La (6) rappresenta dunque un *monoide* di vertice A_0 (cioè una forma di S_r, di ordine q ed avente in A_0 un punto di molteplicità $q-1$ (3));

(1) Se $k = r-1$, V_k è una forma di S_r; e la questione cui si allude è già risolta!

(2) Cfr., p. es., BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, cit., pag. 228.

(3) Ciò risulta immediatamente, allo stesso modo indicato per il caso dello spazio ordinario, nelle note (1) e (2) di pag. 46.

il quale passa per V_k e risulta *irriducibile*, perchè, se si spezzasse, dovrebbe contenere un cono di vertice A_0 (1), mentre ψ, θ son polinomi primi tra loro. Si osservi, inoltre, che il cono tangente al monoide nel punto A_0 ha l'equazione:

$$\psi(x_1, \ldots, x_r) = 0 .$$

Analogamente, se si proietta V_k da $A_0 A_1$ sullo S_{r-2} $x_0 = x_1 = 0$, le coordinate non omogenee $\frac{x_0}{x_r}, \frac{x_1}{x_r}$, di P risultano funzioni razionali delle coordinate non omogenee $\frac{x_2}{x_r}, \frac{x_3}{x_r}, \ldots, \frac{x_{r-1}}{x_r}$ del punto proiezione di P. E siccome le funzioni razionali $\frac{x_0}{x_r}, \frac{x_1}{x_r}$ hanno su V_k la stessa varietà ($x_r = 0$) di poli, così le funzioni corrispondenti sopra V'_k avranno la stessa varietà di poli. Ciò significa che, dopo ridotto il numeratore e il denominatore di ciascuna delle frazioni che esprimono $\frac{x_0}{x_r}, \frac{x_1}{x_r}$ come funzioni razionali di $\frac{x_2}{x_r}, \frac{x_3}{x_r}, \ldots, \frac{x_{r-1}}{x_r}$, ad esser primi fra loro, le due frazioni hanno lo stesso denominatore e tali rimangono dopo esser ritornati alle coordinate omogenee. In definitiva si ottengono due relazioni del tipo:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_0 \psi(x_2, \ldots, x_r) = \theta_1(x_2, \ldots, x_r) \\ x_1 \psi(x_2, \ldots, x_r) = \theta_2(x_2, \ldots, x_r) , \end{cases}$$

dove ψ, θ_1, θ_2 sono polinomi dei gradi rispettivi $q-1, q, q$. Inoltre ψ è primo con θ_1, θ_2. La prima delle relazioni scritte non contiene la coordinata x_1, ed interpretata nell'iperpiano $x_1 = 0$ rappresenta un monoide irriducibile di vertice A_0; la seconda non contiene x_0, e rappresenta, nell'iperpiano $x_0 = 0$, un monoide irriducibile di vertice A_1. Quindi le (7) sono, in S_r, le equazioni di due *coni monoidali*, di ordine q, passanti per V_k, *irriducibili*, e aventi come vertice monoidale comune lo spigolo $A_0 A_1$, e come vertici conici rispettivamente i punti A_1, A_0. Essi hanno infine lo stesso cono tangente $\psi = 0$ nel comune vertice monoidale.

Così pure, proiettando V_k da $A_0 A_1 A_2$ sullo S_{r-3} $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, si ottengono tre coni monoidali irriducibili, passanti per V_k, aventi il vertice monoidale $A_0 A_1 A_2$ ed i tre vertici conici nei tre lati $A_1 A_2$, $A_2 A_0$, $A_0 A_1$ del triangolo $A_0 A_1 A_2$. Le equazioni dei tre monoidi saranno rispettivamente del tipo:

$$\begin{cases} x_0 \psi(x_3, \ldots, xr) = \theta_1(x_3, \ldots, x_r) \\ x_1 \psi(x_3, \ldots, x_r) = \theta_2(x_3, \ldots, x_r) \\ x_2 \psi(x_3, \ldots, x_r) = \theta_3(x_3, \ldots, x_r) . \end{cases}$$

(1) Può ripetersi tal quale il ragionamento della nota (3) di pag. 46.

Ed analogamente si può proseguire. Infine, proiettando V_k da $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$ sullo S_{k+1} $x_0 = x_1 = \dots = x_{r-k-2} = 0$, si ottengono $r - k - 1$ cono-monoidi dello stesso ordine q, col vertice monoidale $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$, collo stesso cono tangente $\psi = 0$ ivi, ed i vertici conici nelle $r-k-1$ faccie dello $(r-k-1)$-edro $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$, aventi equazioni del tipo:

$$(8) \quad \begin{cases} x_0 \psi (x_{r-k-1}, \dots, x_r) = \theta_1 (x_{r-k-1}, \dots, x_r) \\ x_1 \psi (x_{r-k-1}, \dots, x_r) = \theta_2 (x_{r-k-1} \cdot \dots, x_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{r-k-2} \psi (x_{r-k-1}, \dots, x_r) = \theta_{r-k-1} (x_{r-k-1}, \dots, x_r) . \end{cases}$$

La costruzione dei monoidi indicati, qualunque sia lo spazio fondamentale da cui si proietta V_k, *non individua* i monoidi stessi (analogamente a quanto avviene per $r = 3$; cfr. nn. 30, 31). Esamineremo nel n. seguente quale arbitrarietà ci sia nella costruzione di siffatti monoidi.

Aggiungendo alle (8) l'equazione:

$$(9) \quad f (x_{r-k-1}, \dots, x_r) = 0$$

del cono, F, che proietta V_k da $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$, si ottiene la nota *rappresentazione monoidale di* CAYLEY-HALPHEN *per la* V_k.

La varietà V_k risulta intersezione del cono (9) e dei monoidi (8), ma intersezione *parziale*. Invero, nella corrispondenza birazionale tra V^k e la sua proiezione V'_k da $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$, posta dalle (8), ad un punto P' di V'_k corrisponde un punto determinato P di V_k, a meno che le coordinate di P' non annullino la forma ψ. E se le coordinate di P' annullano detta forma, devono annullare anche tutte le forme θ_j; chè altrimenti a P' corrisponderebbe un punto P di V_k giacente nello S_{r-k-2} $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$ (ciò che è in contrasto col fatto che la piramide $A_0 A_1 \dots A_r$ si è scelta in posizione generica rispetto a V_k). Ne segue che l'intersezione della (9) e delle (8), fuori di V_k, è costituita dagli S_{r-k-1} generatori che appartengono ad un tempo al cono (9) e all'unico cono tangente comune in $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$ agli $r - k - 1$ monoidi considerati. Si conclude che *l'intersezione residua del cono* F *e dei monoidi è una varietà* W_{r-2}, *ad* $r - 2$ *dimensioni, luogo di* ∞^{k-1} S_{r-k-1}, *la quale è altresì intersezione del cono* F *e dell'unico cono tangente ai monoidi.*

Quando $k < r - 2$ la rappresentazione accennata non dà,

perciò, V_k come somma algebrica di intersezioni complete della stessa dimensione, k ; e pertanto non serve ai nostri scopi (1).

Si potrebbe invero cercar di determinare l'equivalenza funzionale di W_{r-2} come varietà virtuale a k dimensioni, indi considerare la rappresentazione ottenuta come un caso limite di una rappresentazione del tipo che ci occorre ; ma la strada non sarebbe agevole.

Inoltre, la rappresentazione suddetta si basa essenzialmente sull'ipotesi dell'irriducibilità della varietà V_k, mentre a noi occorre considerare varietà anche riducibili e virtuali (2).

In definitiva, è d'uopo dunque abbandonare questo tipo di rappresentazione d'una V_k, per cercarne uno più conveniente ai nostri fini. È quanto ha fatto SEVERI, introducendo quella che ha chiamato *rappresentazione monoidale graduale* (3).

33. *Monoidi irriducibili passanti per una varietà riducibile o virtuale.* — Per arrivare al nuovo tipo di rappresentazione d'una V_k, occorre essenzialmente considerare monoidi aventi il vertice in un punto (il punto A_0) e non già di necessità in una retta o in un piano o spazio di maggior dimensione. Dimostriamo che :

Per una V_k, anche riducibile o virtuale, passan sempre monoidi irriducibili di dato vertice, e ve ne sono di un ordine qualunque, da un certo limite in poi.

(1) Nè sarebbe possibile ottenere lo scopo, modificando un po' l'ordinaria rappresentazione monoidale di CAYLEY-HALPHEN col considerare monoidi (8) *non aventi lo stesso cono tangente in* $A_0 \ldots A_{r-k-2}$ (p. es. monoidi irriducibili di ordini diversi). Infatti, in tal caso, con ragionamento analogo a quello sopra svolto, si vede che l'intersezione residua, fuori di V_k, del cono F coi monoidi è, in generale, costituita da varietà di varie dimensioni, tra le quali è sempre però la varietà intersezione dello stesso cono F con i coni tangenti ai monoidi. Quest'ultima varietà è luogo degli S_{r-k-1} per $A_0 \ldots A_{r-k-2}$, proiettanti la varietà Δ dei punti comuni a V'_k e alle sezioni dei coni tangenti nominati con lo S_{k+1} $A_{r-k-1} \ldots A_r$. Tali sezioni sono varietà subaggiunte a V'_k, a partire dalle quali vengono costruiti i monoidi (cfr. il successivo n. 33). Ora, pur essendo distinte le dette subaggiunte, la varietà Δ esiste tuttavia, giacchè di essa fa parte almeno la varietà di subaggiunzione, che è la varietà a $k-1$ dimensioni doppia per la V'_k. Dunque la varietà residua di cui si discorre comprende un luogo di ∞^{k-1} S_{r-k-1}, cioè, anche in questo caso, una varietà ad $r-2$ dimensioni.

(2) Tale difficoltà si potrebbe eliminare colla teoria dei sistemi d'equivalenza di V_{k-1} sopra una varietà riducibile V_k, estendendo le considerazioni svolte per le curve nell'Osservazione 3ª del n. 31.

(3) F. SEVERI, Memoria [19], cit. a pag. 44.

È già acquisito (n. 32) il passaggio di monoidi irriducibili di vertice A_0 per una V_k irriducibile. Facciam vedere che, da un valor minimo in poi, esistono monoidi siffatti di tutti gli ordini.

Riferiamoci ai cono-monoidi, considerati al n. precedente, di vertice $A_0 \ldots A_{r-k-2}$ (e quindi anche di vertice A_0). La costruzione di uno di questi monoidi, per esempio di quello che ha come vertice conico $A_1 \ldots A_{r-k-2}$, e la cui equazione è del tipo:

$$x_0 \psi(x_{r-k-1}, \ldots, x_r) = \theta(x_{r-k-1}, \ldots, x_r), \tag{10}$$

si riduce alla costruzione, entro lo S_{k+2} $A_0 A_{r-k-1} \ldots A_r$, di un monoide di vertice A_0, che ha ivi per equazione la (10) stessa, e che passa per la proiezione, $V_k'^{(0)}$, di V_k da $A_1 \ldots A_{r-k-2}$ sopra lo S_{k+2}. Ora, nei riguardi della determinazione di quest'ultimo monoide, possono svilupparsi considerazioni analoghe a quelle svolte per $k = 1$ in S_3 (nn. 30,31).

Intanto è chiaro che la proiezione di $V_k'^{(0)}$ da A_0 sullo S_{k+1} $A_{r-k-1} \ldots A_r$ coincide con la varietà V_k', proiezione di V_k da $A_0 \ldots A_{r-k-2}$ su tale S_{k+1}; e che la coordinata non omogenea $\frac{x_0}{x_r}$ del punto di $V_k'^{(0)}$ è data dalla funzione razionale

$$\frac{x_0}{x_r} = \frac{\theta(x_{r-k-1}, \ldots, x_r)}{x_r \psi(x_{r-k-1}, \ldots, x_r)} \tag{11}$$

del punto corrispondente di V_k'. Si vede in primo luogo che le forme $\psi = 0$, $\theta = 0$ dello S_{k+1} nominato son subaggiunte [1] alla forma V_k'. Basta infatti provare che sopra un piano generico ω di S_{k+1} esse segano curve aggiunte alla sezione di V_k' con quel piano. Così è di fatto (n. 31), in quanto sopra lo S_3 $A_0\omega$ la varietà $V_k'^{(0)}$ dello S_{k+2} $A_0 A_{r-k-1} \ldots A_r$ stacca una curva sghemba, che viene rappresentata monoidalmente dalla sezione di $A_0\omega$ col monoide $x_0 \psi = \theta$ del detto S_{k+2}. Inoltre la funzione razionale (11) ha come varietà degli zeri l'intersezione W_{k-1}' di V_k' coll'iperpiano $x_0 = 0$, cioè di $V_k'^{(0)}$ collo S_{k+1} $A_{r-k-1} \ldots A_r$ (la cui equazione

[1] Le *subaggiunte* a una forma V_k' di S_{k+1} posson definirsi come forme caratterizzate dalla proprietà di segare curve aggiunte sopra ogni sezione piana di V_k'. Si può allora dimostrar facilmente, estendendo un noto procedimento (cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier-Villars, 1906, tomo II, pagg. 17, 19) che le subaggiunte di un dato ordine segano su V_k', fuori del loro naturale gruppo base, un sistema lineare completo (cfr. altresì F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, «Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo», tomo XXVIII, 1909, n. 1). Da ciò il teorema del resto per le subaggiunte di una V_k'.

entro lo S_{k+2} $A_0 A^r{}_{k-1} \ldots A_r$ è appunto $x_0 = 0$) e come varietà dei poli l'intersezione W''_{k-1} di V'_k coll'iperpiano $x_r = 0$, che è sullo S_{k+1}, la proiezione, dallo spazio opposto, del gruppo delle intersezioni di V_k con $x_r = 0$. Pertanto, la varietà Z'_{k-1} segata su V'_k da $\psi = 0$, fuori della varietà di subaggiunzione, deve appartenere a $\theta = 0$ e l'intersezione ulteriore di $\theta = 0$ con V'_k, fuori delle due varietà ora nominate, deve essere W'_{k-1}. È poi chiaro che $\theta = 0$ non contiene come parte ψ, sia a cagione dell'irriducibilità del monoide considerato, sia pel fatto più comprensivo (perchè abbraccia il precedente) che W'_{k-1} non sta in un iperpiano dello S_{k+1}, in quanto, in caso contrario, V_k non apparterrebbe ad S_r, ma ad uno spazio di dimensione inferiore.

Ne deriva che *tutte* le possibili forme della funzione razionale (11) nel cui denominatore si trovi un polinomio *irriducibile* ψ, si costruiscono nel modo seguente:

Dicasi $\mu - 1$ l'ordine minimo in corrispondenza al quale esistono subaggiunte irriducibili a V'_k. Si vede allora facilmente (estendendo il ragionamento fatto per $k = 1$ nel n. 31) che esistono subaggiunte a V'_k di *ogni* ordine $\geq \mu - 1$, senza alcuna lacuna. Assumasi ad arbitrio una subaggiunta irriducibile $\psi = 0$ di ordine $q - 1$ $(q \geq \mu)$: indicata con Z'_{k-1} la sua intersezione con V'_k, fuori della varietà di subaggiunzione, il sistema lineare completo $|W''_{k-1}|$ è segato su V'_k dalle subaggiunte d'ordine q passanti per Z'_{k-1}. Pertanto, fra queste subaggiunte ve n'è qualcuna $\theta = 0$, che stacca su V'_k, fuori di Z'_{k-1}, la varietà W'_{k-1}, e che non contiene come parte $\psi = 0$; se no V_k non apparterrebbe ad S_r. La (10), dove per forme ψ, θ s'assuman quelle ora costruite (dopo aver moltiplicato eventualmente una di esse per una conveniente costante non nulla), rappresenta, entro lo S_{k+2}, un monoide irriducibile d'ordine q $(\geq \mu)$, di vertice A_0, passante per $V'^{(0)}_k$; e quindi, in S_r, un cono-monoide irriducibile del medesimo ordine, di vertice $A_0 \ldots A_{r-k-2}$, passante per V_k.

Volendo evitar l'uso di nozioni di geometria sopra una varietà, ci possiamo contentar di provare — ciò che basta ai nostri scopi — che da un certo ordine in poi non vi sono ordini lacunari.

Si consideri invero il monoide irriducibile (6), d'ordine q e vertice A_0 passante per V_k, costruito al n. precedente. Essendo m l'ordine di V_k, indichiamo inoltre con

$$f(x_1, \ldots, x_r) = 0$$

un qualunque cono di vertice A_0 contenente V_k, e d'ordine m (cioè il cono proiettante da A_0 una forma dello S_{r-1} $x_0 = 0$, pas-

sante per la proiezione ivi di V_k ed avente quell'ordine). Sia infine l un intero qualsiasi maggiore dei numeri q, $m+1$. Allora il monoide di vertice A_0:

$$x_0(\alpha\psi+\beta f)=\alpha\theta+\gamma f, \tag{12}$$

ove α, β, γ son forme in $x_1,\ldots,x_r$, a coefficienti generici, degli ordini rispettivi $l-q$, $l-m-1$, $l-m$, passa per V_k, è d'ordine l ed è *irriducibile*. Invero, ciascuno dei sistemi lineari

$$\alpha\psi+\beta f=0\ ,\ \alpha\theta+\gamma f=0,$$

consta di coni, che ove fossero tutti spezzati, in base ad un classico teorema di BERTINI (1), avrebbero una parte comune, non potendo di certo esser composti con le forme di un fascio, dato il modo come son costituite le forme $\alpha\psi=0$, $\beta f=0$; $\alpha\theta=0$, $\gamma f=0$. D'altronde tal parte comune non potrebbe essere la stessa pei due sistemi, chè altrimenti sarebbe una parte comune a $\psi=0$, $\theta=0$, ciò che contrasta coll'irriducibilità del monoide (6). Ne segue che dal generico monoide (12) non può staccarsi un cono di vertice A_0: si tratta quindi di un monoide irriducibile.

Estendiamo il teorema ad una V_k riducibile, ragionando per induzione da una varietà costituita da $t-1$ (≥ 1) parti ad una varietà con t componenti. Decomposta V_k in una varietà V_k' a $t-1$ componenti ed in una irriducibile V_k'', sicchè $V_k=V_k'+V_k''$, pel teorema ammesso, quando q è abbastanza grande, esistono monoidi irriducibili d'ordine q e vertice A_0, che contengono ciascuna delle V_k', V_k''. Se per ogni q maggiore o uguale a un certo limite esistono monoidi irriducibili d'ordine q e vertice A_0, contenenti V_k' e V_k'', il teorema è dimostrato; altrimenti esisterà un monoide irriducibile Φ' d'ordine q e di vertice A_0 contenente V_k e non V_k'', ed un altro monoide irriducibile Φ'' d'ordine q e di vertice A_0 contenente V_k'' e non (per lo meno interamente) V_k'.

Siano F', F'' forme coniche irriducibili (2), di uguale ordine ν abbastanza grande e di vertice A_0, passanti rispettivamente per le componenti di V_k' non contenute in Φ'' e per V_k''. Allora le forme $F'+\Phi''$, $F''+\Phi'$ sono ancora monoidi di vertice A_0 che han l'ordine $\nu+q$ e contengono completamente V_k; e individuano un fascio di monoidi siffatti. Il monoide generico del fascio è irriducibile, pel citato teorema di BERTINI (perchè i due

(1) Cfr. BERTINI, *Introd. alla Geom. pr. degli iperspazi*, cit., pag. 274.

(2) Basta supporre che F', F'' non abbiano parti comuni; d'altronde l'esistenza di siffatte forme coniche irriducibili segue senz'altro dal fatto che, date nello S_{r-1} $x_0=0$ più varietà a $k-1$ dimensioni ($k-1<r-2$), per la varietà da esse formata passano sempre forme irriducibili di S_{r-1}.

monoidi che lo determinano non hanno parti comuni, nè son composti colle forme di un fascio); e il suo ordine, $\nu + q$, non è sottoposto ad altra condizione che di essere abbastanza alto: dunque il monoide soddisfa alle condizioni richieste.

Se infine V_k è una varietà virtuale uguale alla differenza $V'_k - V''_k$ di due varietà effettive (cfr. n. 8), per q abbastanza grande, esiston monoidi irriducibili d'ordine q e di vertice A_0, passanti per la varietà $V'_k + V''_k$. Ciascuno di questi monoidi contiene la varietà V''_k, quindi anche la varietà negativa $-V''_k$; ed allora contiene altresì la $V'_k - V''_k = V_k$.

Osservazione. — Se la varietà V_k anche riducibile o virtuale, cui riferiscesi il teorema enunciato, è generica nella propria famiglia, *il limite dal quale in su è vero il teorema, vale certamente per ogni varietà anche particolare della famiglia*, potendo al più accadere, per una tal posizione particolare, che il detto limite si abbassi.

34. *Alcune proprietà della corrispondenza birazionale fra un monoide ed uno spazio lineare. Iperpiani virtuali.* — Sia ora in S_r il monoide irriducibile Φ di equazione (6) e di ordine q. Nella corrispondenza birazionale tra Φ e lo S_{r-1} $x_0 = 0$, che si ottiene mediante proiezione da A_0, son elementi fondamentali:

a) Il punto A_0 cui corrispondono in S_{r-1} le traccie delle rette che proiettano da A_0 i punti infinitamente vicini di Φ, le quali traccie riempiono la forma $\psi = 0$ sezione con lo S_{r-1} del cono Ψ tangente a Φ in A_0.

b) In particolare ad ognuna delle rette di Φ uscenti da A_0, che son tutte e sole le generatrici del cono Γ_{r-2} di equazioni $\psi = \theta = 0$, corrisponde in S_{r-1} un sol punto. Il luogo di questi punti fondamentali in S_{r-1} è una varietà ad $r-3$ dimensioni, Δ, completa intersezione delle forme $\psi = 0$, $\theta = 0$. Tale varietà ha proprio la dimensione $r-3$ e non maggiore, in quanto il monoide non si spezza, nè si riduce ad un cono di vertice A_0.

Ad una V'_k (irriducibile o riducibile) di S_{r-1} corrisponde sopra Φ l'intersezione completa del monoide col cono Λ_{k+1}, che proietta V'_k da A_0. Pertanto, se V'_k è d'ordine m, la varietà corrispondente è d'ordine mq e passa per A_0 colla molteplicità $m(q-1)$. Il cono tangente in A_0 alla varietà omologa di V'_k è l'intersezione di Λ_{k+1} e del cono Ψ, tangente al monoide in A_0.

Quando V'_k ha una posizione generica rispetto a Δ, dalla varietà omologa non si distacca alcun cono a k dimensioni di vertice A_0, tracciato sul cono Γ_{r-2}, luogo delle rette di Φ per A_0. Inol-

tre la varietà omologa risulta irriducibile o spezzata allo stesso modo di V'_k, e le sue componenti irriducibili risultano in corrispondenza birazionale con le componenti irriducibili di V'_k.

Per posizioni particolari di V'_k rispetto a Δ, può darsi invece che dalla varietà omologa di V'_k si distacchi un cono Γ_k del tipo detto ; invero ciò avviene allorchè V'_k incontri Δ in una varietà a $k-1$ dimensioni (mentre in generale la incontra in una varietà a $k-2$ dimensioni). In tal caso, detto i l'ordine del cono Γ_k, l'ordine della parte residua della varietà omologa di V'_k si abbassa ad $mq-i$, e la molteplicità con cui essa passa per A_0 riducesi ad $m(q-1)-i$. La *intera* o *completa* varietà omologa di V'_k è cioè formata da questa parte residua, che indicheremo con V_k e le cui parti risultano in corrispondenza birazionale colle parti di V'_k, e da Γ_k, luogo delle rette omologhe dei punti fondamentali del tipo b), situati su V'_k. In particolare, *se V_k non passa per A_0*, per ottenere la completa varietà omologa di V'_k occorre aggiungere a V_k l'intero cono, d'ordine $m(q-1)$, comune al cono Λ_{k+1} e al cono Ψ. Tutto questo cono d'ordine $m(q-1)$ consta allora di rette di Φ per A_0 (cioè appartiene a $\bar{\Gamma}_{r-2}$), perchè ogni retta tangente in A_0 al monoide, la quale proietti da A_0 un punto di V_k (diverso necessariamente da A_0) ha col monoide $q+1$ intersezioni e quindi vi giace per intero.

In simboli si ha dunque, quando V_k non passa per A_0:

$$V_k + \Gamma_k = (\Lambda_{k+1}, \Phi)\,, \qquad \Gamma_k = (\Lambda_{k+1}, \Psi)\,, \tag{13}$$

da cui :

$$V_k = (\Lambda_{k+1}, \Phi - \Psi)\,. \tag{14}$$

Le considerazioni precedenti cadono in difetto se V_k, pur non passando per A_0, è contenuta nel cono $\bar{\Gamma}_{r-2}$. Nel caso nostro questa eventualità non può mai presentarsi, perchè A_0 (ved. n. successivo) deve essere scelto genericamente rispetto a V_k ed il modo come si costruisce il monoide (6) di vertice A_0 è tale che la funzione razionale $\frac{\theta}{\psi}$ non può essere indeterminata su V_k.

Comunque sia, anche se si vuol partire, invece che da V_k, dal monoide Φ e si vuol considerare V_k come una qualsiasi varietà tracciata su Φ e non passante per A_0, la relazione (14) continua a sussistere. Per convincersene basta riferirsi al gruppo continuo di trasformazioni birazionali di Φ in sè, lascianti fisso A_0, che corrisponde al gruppo continuo delle omografie dell'iperpiano $x_0 = 0$. Una generica trasformazione birazionale ω di quel gruppo, muta una V_k contenuta nel cono $\bar{\Gamma}_{r-2}$ in una $\bar{V}_k$ non

passante per A_0 ed esterna a questo cono, per la quale dunque vale la (14), che continua a sussistere al limite quando ω tende all'identità, cioè $\bar{V}_k$ tende a V_k.

La varietà $\Phi - \Psi$ è una forma virtuale d'ordine 1 dello S_r, in quanto si ottiene come differenza di due ipersuperficie effettive degli ordini q, $q-1$. Mediante proiezione da A_0, essa risulta inoltre trasformata birazionale, senza eccezioni, dell'iperpiano $x_0 = 0$, da cui si escluda la *varietà contorno* $\psi = 0$, di ordine $q-1$ e di dimensione $r-2$. Chiameremo una siffatta forma virtuale *iperpiano virtuale di indice q*. Gli iperpiani effettivi rientrano, in particolare, nella classe degli iperpiani virtuali; ma per essi (e soltanto per essi), l'indice può abbassarsi fino ad 1.

In base alla definizione espressa, può allora dirsi che *ogni varietà V_k, tracciata su Φ e non passante per A_0, si ottiene come intersezione del cono Λ_{k+1}, di dimensione $k+1$, che la proietta da A_0, e di un conveniente iperpiano virtuale.*

Osservazione. — Si noti infine la seguente proprietà che sussiste nei riguardi della corrispondenza birazionale che intercede tra il monoide Φ e lo S_{r-1} $x_0 = 0$.

Se due varietà virtuali $V'_k - W'_k$, $T'_k - U'_k$ di S_{r-1} sono uguali, risultano altresì uguali le varietà virtuali che ad esse corrispondono sul monoide come trasformate birazionali.

Siano infatti $V_k + \Gamma_k$, $W_k + N_k$, $T_k + M_k$, $U_k + H_k$ le varietà complete, omologhe su Φ delle varietà effettive V'_k, W'_k, T'_k, U'_k; ove Γ_k, N_k, M_k, H_k sono i coni di rette eccezionali, che bisogna aggiungere alle trasformate birazionali V_k, W_k, T_k, U_k di V'_k, W'_k, T'_k, U'_k, per ottenere le suddette varietà complete. Siccome $V'_k + U'_k$ si può anche, associando in modo diverso le sue parti, ridurre alla varietà $W'_k + T'_k$ (1), il cono eccezionale $\Gamma_k + H_k$, associato a $V_k + U_k$, potrà pure ridursi, aggruppando diversamente le sue parti, al cono $N_k + M_k$, associato a $W_k + T_k$.

Inoltre le varietà complete, corrispondenti alle varietà uguali $V'_k + U'_k$, $W'_k + T'_k$, risultano uguali, giacchè si ottengono intersecando il monoide con il cono che proietta $V'_k + U'_k = W'_k + T'_k$ da A_0. Quindi si ha

$$V_k + \Gamma_k + U_k + H_k = W_k + N_k + T_k + M_k ,$$

(1) Due varietà virtuali $A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$ (ove A_1, A_2, B_1, B_2 denotano varietà effettive), si dicono *uguali*, quando la loro differenza è la varietà *zero assoluto* (n. 8); cioè allorchè la varietà effettiva $A_1 + B_2$ risulta *identica* alla varietà $A_2 + B_1$.

e

$$\Gamma_k + H_k = N_k + M_k \,.$$

Se ne deduce, come volevasi,

$$V_k - W_k = T_k - U_k \,.$$

35. *Il teorema fondamentale.* — Passiamo a dimostrare il seguente teorema fondamentale:

Ogni varietà effettiva (irriducibile o riducibile) o virtuale V_k, a k dimensioni, di S_r, è intersezione completa del cono ad $r-1$ dimensioni che la proietta da un S_{r-k-2} generico dell'ambiente e di certi $r-k-1$ iperpiani virtuali, i cui indici restano immutati al variar continuo di V_k. La varietà V_k apparisce così quale somma algebrica di varietà effettive di dimensione k, ciascuna delle quali risulta intersezione completa di $r-k$ forme effettive.

Occupiamoci prima delle varietà effettive, e del caso in cui $k = r-2$. Allora il teorema è già implicitamente contenuto nel risultato del n. precedente. Invero, scelto A_0 in posizione generica rispetto a V_{r-2}, sia (6) un monoide irriducibile Φ, di ordine q e di vertice A_0, passante per V_{r-2}; Ψ il cono tangente a Φ in A_0; $F_{r-1} = \Lambda_{k+1}$ il cono che proietta V_{r-2} da A_0. Se l'ordine del monoide è scelto abbastanza alto, in modo che possa valere per tutte le varietà della famiglia di V_{r-2} (n. 33, Oss.), le relazioni (13) e (14), che qui si scrivono:

$$V_{r-2} + \Gamma_{r-2} = (F, \Phi) \,,\ \Gamma_{r-2} = (F, \Psi) \,,\ V_{r-2} = (F, \Phi - \Psi) \,,$$

provano senz'altro l'asserto.

Poichè il teorema è vero per le V_k di un S_{k+2}, possiamo supporre dato k, dimostrando il teorema per induzione col risalire da $r = k+2$ a valori via via crescenti di r, e ammettendo che ognuno degli iperpiani virtuali, che concorre a determinare la V_k data, sia la differenza di un monoide e del proprio cono tangente nel vertice.

Sia dunque V_k una varietà effettiva (irriducibile o riducibile) di S_r. Pel teorema ammesso, la varietà V'_k proiezione, dal punto A_0 (generico rispetto a V_k), della data varietà, sullo S_{r-1} $x_0 = 0$, avrà una rappresentazione del tipo:

$$(15) \qquad V'_k = (F' \,, \Phi'_1 - \Psi'_1 \,, \ldots \,, \Phi'_{r-k-2} - \Psi'_{r-k-2}) \,,$$

ove F' è il cono proiettante V'_k da un generico S_{r-k-3} di S_{r-1} e $\Phi'_1 - \Psi'_1 \,, \ldots \,, \Phi'_{r-k-2} - \Psi'_{r-k-2}$ sono $r-k-2$ iperpiani virtuali di S_{r-1} aventi gli indici $q_1 \,, \ldots \,, q_{r-k-2}$ indipendenti dalla varia-

zione continua di V'_k, in S_{r-1}. Inoltre la (15) equivale a:

$$V'_k = \sum (-1)^s W'_k (i_1, i_2, \ldots, i_s) , \tag{16}$$

dove W'_k sono varietà effettive a k dimensioni, definite dalle

$$W'_k (i_1, i_2, \ldots, i_s) = (F', \Psi'_{i_1}, \ldots, \Psi'_{i_s}, \Phi'_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi'_{i_{r-k-2}}) , \tag{17}$$

e il sommatorio è esteso a tutti i gruppi di s indici ($s = 1, 2, \ldots,$ $r-k-2$) $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ scelti fra g'indici 1, 2, ..., $r-k-2$, denotando con $i_{s+1} < \ldots < i_{r-k-2}$ gl'indici complementari.

Trasformiamo l'uguaglianza (16) mediante la trasformazione birazionale che intercede fra lo S_{r-1} di V'_k ed un monoide irriducibile Φ_{r-k-1} di ordine q_{r-k-1} passante per V_k e avente il vertice in A_0. L'ordine del monoide sia — al solito — abbastanza alto, in modo che possa valere per tutte le varietà della famiglia di V_k. Denoteremo con:

Ψ_{r-k-1} il cono tangente al monoide in A_0; $W_k (i_1, i_2, \ldots, i_s) + \Gamma_k (i_1, i_2, \ldots, i_s)$ la trasformata completa della varietà $W'_k (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, ove $\Gamma_k (i_1, i_2, \ldots, i_s)$ è il cono a k dimensioni di vertice A_0, costituito da rette del monoide, che bisogna aggiungere alla varietà $W_k (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, a k dimensioni, per ottenere la completa trasformata di $W'_k (i_1, i_2, \ldots, i_s)$.

Poichè (n. 34, Oss.) le trasformate birazionali di varietà uguali sono uguali, dalla (16) si trae:

$$V_k = \sum (-1)^s W_k (i_1, i_2, \ldots, i_s) . \tag{18}$$

Ora, applicando le (13) e (14) del n. 34, scritte per il caso attuale, e tenendo conto della (17), si ha:

$$W_k + \Gamma_k = (\Phi_{r-k-1}, (F, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_s}, \Phi_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi_{i_{r-k-2}})) , \tag{19}$$

$$\Gamma_k = (\Psi_{r-k-1}, (F, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_s}, \Phi_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi_{i_{r-k-2}})) , \tag{20}$$

$$W_k = ((\Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}), (F, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_s}, \Phi_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi_{i_{r-k-2}})) ; \tag{21}$$

in cui le lettere senz'apice dei secondi membri indicano le proiezioni da A_0 delle forme di S_{r-1} denotate dalle stesse lettere con apice.

Quindi sostituendo la (21) nella (18), si ottiene:

$$V_k = ((\Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}), \sum (-1)^s (F, \Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_s}, \Phi_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi_{i_{r-k-2}})),$$

ossia:

$$V_k = ((\Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}), (F, \Phi_1 - \Psi_1, \ldots, \Phi_{r-k-2} - \Psi_{r-k-2})) ;$$

e finalmente si giunge alla relazione:

$$(22)\quad V_k = (F\,,\ \Phi_1 - \Psi_1\,,\ \ldots\,,\ \Phi_{r-k-2} - \Psi_{r-k-2}\,,\ \Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1})\,.$$

La (22) è la relazione che volevamo dimostrare, perchè F è il cono che proietta V_k dallo S_{r-k-2} congiungente il punto A_0 con lo S_{r-k-3} dal quale veniva fatta la proiezione di V_k' entro l'ambiente S_{r-1} $x_o = 0$; e le proiezioni Φ_i , Ψ_i da A_0 del monoide Φ_i' e del rispettivo cono Ψ_i' tangente nel vertice, forniscono un cono monoidale Φ_i, avente il vertice monoidale nello spazio che proietta da A_0 il vertice di Φ_i' e per cono tangente lungo il vertice monoidale il cono Ψ_i proiezione di Ψ_i': per modo che le differenze a secondo membro della (22) rappresentano tutte iperpiani virtuali. Inoltre la (22) fornisce appunto V_k come somma algebrica delle varietà effettive (19), (20), che sono varietà di dimensione k, intersezioni complete di $r - k$ forme.

36. *Estensione alle varietà virtuali.* — Ci rimane da estender la (22) alle varietà virtuali.

Sia anzitutto $k = r - 2$ e la data varietà virtuale V_k sia espressa come differenza $T_k - U_k$ di due varietà effettive. Costruiamo un monoide irriducibile Φ, di vertice A_0 e di ordine q, passante per la varietà $T_k + U_k$ e diciamo Ψ il cono tangente al monoide in A_0. Verrà:

$$T_k = (F\,,\ \Phi - \Psi)\,,\ U_k = (G\,,\ \Phi - \Psi),$$

ove F, G sono i coni proiettanti da A_0 le varietà T_{r-2}, U_{r-2}. Si ha dunque:

$$V_k = T_k - U_k = (F - G\,,\ \Phi - \Psi)\,,$$

in cui $H = F - G$ è il cono proiettante V_k da A_0. Quando r è qualunque rispetto a V_k, supposto dimostrato il teorema nello spazio S_{r-1}, si deduce, con procedimento analogo a quello del n. 35, nello spazio S_r, conducendo per la varietà $T_k + U_k$ un monoide irriducibile di vertice A_0.

37. *Rappresentazione monoidale graduale di una V_k.* — Sia $A_0 \ldots A_r$ la solita piramide di S_r, generica rispetto a V_k. Applichiamo successivamente il processo dimostrativo del n. 35, partendo dalla proiezione V_k' di V_k da $A_0\,A_1 \ldots A_{r-k-2}$ nello spazio opposto ed ottenendo così la rappresentazione della proiezione V_k'' di V_k da $A_0\ A_1\ \ldots\ A_{r-k-3}$ nello spazio opposto; poi deducendo dalla rappresentazione ottenuta di V_k'', la rappresen-

tazione della proiezione V_k''' di V_k da $A_0 A_1 \dots A_{r-k-4}$ nello spazio opposto, ecc.; finchè si risalga alla V_k di partenza. Si giunge in tal guisa al teorema:

Data in S_r una V_k (irriducibile o riducibile, effettiva o virtuale) essa può considerarsi come intersezione completa di $r-k$ forme virtuali (un cono ed $r-k-1$ iperpiani virtuali), così costruite:

Si scelga una $(r+1)$-piramide $A_0 A_1 \dots A_r$ in posizione generica rispetto a V_k e si chiami $V_k^{(j)}$ la proiezione di V_k da $A_0 A_1 \dots A_{r-k-j-1}$ $(j = 1, 2, \dots, r-k-1)$ sullo spigolo opposto a $k+j$ dimensioni; F il cono che proietta V_k in $V_k^{(1)}$ da $A_0 \dots A_{r-k-2}$; $\Phi^{(j)}$ un monoide irriducibile d'ordine q_j $(j = 1, \dots, r-k-2)$, dello spazio $A_{r-k-j-1} \dots A_r$, avente il vertice in $A_{r-k-j-1}$ e passante per $V_k^{(j+1)}$; $\Psi^{(j)}$ il cono tangente a $\Phi^{(j)}$ in $A_{r-k-j-1}$; Φ_j, Ψ_j le proiezioni di $\Phi^{(j)}, \Psi^{(j)}$ dallo spazio $A_0 A_1 \dots A_{r-k-j-2}$; Φ_{r-k-1} un monoide irriducibile d'ordine q_{r-k-1} e vertice A_0 passante per V_k; Ψ_{r-k-1} il cono tangente a Φ_{r-k-1} nel vertice. Allora

$$V_k = (F, \Phi_1 - \Psi_1, \dots, \Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}).$$

È questa la *rappresentazione monoidale graduale* di una V_k. A differenza della rappresentazione monoidale di CAYLEY-HALPHEN, dove intervengono $r-k-1$ coni monoidali aventi ciascuno come vertice monoidale un S_{r-k-2} e come vertice conico un S_{r-k-3} (n. 32), nella rappresentazione monoidale graduale si ha un monoide col vertice in A_0, un cono monoidale col vertice conico in A_0 e col vertice monoidale $A_0 A_1$; un cono monoidale col vertice conico $A_0 A_1$, e col vertice monoidale $A_0 A_1 A_2, \dots$, finchè si arriva ad un cono monoidale col vertice conico in $A_0 A_1 \dots A_{r-k-3}$ e col vertice monoidale in $A_0 A_1 \dots A_{r-k-2}$.

Sono manifesti i vantaggi che la rappresentazione graduale presenta sull'ordinaria rappresentazione monoidale e sulle figurazioni (completa e principale) di KRONECKER (1).

Aggiungeremo che, in virtù di quanto è stato dimostrato al n. 33, *gl'indici $q_1, q_2, \dots, q_{r-k-1}$ degl'iperpiani virtuali $\Phi_1 - \Psi_1$,*

(1) La *figurazione principale* di KRONECKER si ottiene dalla rappresentazione monoidale di CAYLEY-HALPHEN, isolando la varietà V_k mediante l'aggiunta di una disuguaglianza algebrica; in altri termini, aggiungendo all'intersezione completa dei monoidi la varietà virtuale negativa $-W_{r-2}$, ad $r-2$ dimensioni, completa intersezione del cono tangente comune ai monoidi e del cono proiettante V_k (n. 32). La *figurazione completa* dà invece V_k come intersezione completa di forme di S_r in numero sovrabbondante, precisamente di $r+1$ forme coniche proiettanti V_k da altrettanti S_{r-k-2} presi in posizione generica. (Cfr. E. BERTINI, *Introd. alla Geom. pr. degli iperspazi*, cit., pagine 232 e 253).

$\ldots$, $\Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}$, *da certi limiti minimi in poi, sono arbitrari.* Quando si prendano per ogni famiglia di V_k effettive o virtuali (*date* come differenza di coppie di varietà effettive mobili in assegnate famiglie) i valori minimi, si ottiene la *rappresentanzazione graduale minima* relativa a quella famiglia; e, prendendo i minimi compatibili con tutte le famiglie di varietà di un determinato ordine (se trattasi di varietà effettive) o di varietà componenti di determinato ordine (se trattasi di varietà virtuali), si ottiene la *rappresentazione minima per la totalità delle V_k definite dalle suddette condizioni*, come si è già detto nell'introduzione.

Esempio. — Vediamo sopra un esempio la struttura di questa rappresentazione monoidale graduale. Il caso più semplice in cui detta rappresentazione si differenzia dalla rappresentazione monoidale ordinaria è quello di una curva, V_1, di S_4 ($k = 1$, $r = 4$).

Si considera allora la proiezione $V_1^{(2)}$ di V_1 da A_0 sullo S_3 $A_1 A_2 A_3 A_4$, indi la proiezione $V_1^{(1)}$ di $V_1^{(2)}$ da A_1 sopra il piano $A_2 A_3 A_4$ (che coincide colla proiezione di V_1 da $A_0 A_1$ sullo stesso piano). Nello S_3 $A_1 A_2 A_3 A_4$ si ottiene (n. 30):

$$V_1^{(2)} = (F' , \Phi^{(1)} - \Psi^{(1)}) , \tag{23}$$

dove F' è il cono che proietta $V_1^{(2)}$ e $V_1^{(1)}$ da A_1, $\Phi^{(1)}$ è un monoide di vertice A_1 passante per $V_1^{(2)}$, e $\Psi^{(1)}$ è il cono tangente al monoide nel vertice.

A sua volta nello S_4 si ha (cfr. la (14) del n. 34):

$$V_1 = (\Lambda , \Phi_2 - \Psi_2) , \tag{24}$$

dove Λ è il cono che proietta V_1 e $V_1^{(2)}$ da A_0, Φ_2 è un monoide di vertice A_0 passante per V_1, e Ψ_2 è il cono tangente al monoide nel vertice.

Ora il cono Λ si ottiene proiettando la (23) da A_0, e risulta:

$$\Lambda = (F , \Phi_1 - \Psi_1) ,$$

dove F è la forma conica di S_4 di vertice $A_0 A_1$, proiezione di F' da A_0, cioè la forma conica che si ottiene proiettando V_1 da $A_0 A_1$; Φ_1 è il cono monoidale di vertice conico A_0 e di vertice monoidale $A_0 A_1$, proiezione di $\Phi^{(1)}$ da A_0; e Ψ_1 è il cono tangente a Φ_1 lungo $A_0 A_1$, proiezione del cono $\Psi^{(1)}$ tangente a $\Phi^{(1)}$.

Sostituendo l'ultima relazione nella (24), viene in definitiva:

$$V = (F , \Phi_1 - \Psi_1 , \Phi_2 - \Psi_2) .$$

38. *Rappresentazione monoidale graduale d'un gruppo di punti.* — La rappresentazione ottenuta nei nn. precedenti per una V_k di S_r, sussiste anche allorchè, in luogo di V_k, si abbia un *gruppo H di* ν *punti di* S_r; che si può considerare come una varietà di dimensione $k = 0$, riducibile se $\nu > 1$, o virtuale se si attribuisce un segno ai singoli punti del gruppo H.

Innanzi tutto, nel caso attuale, è evidente che per q maggiore di un certo limite, esistono sempre monoidi irriducibili d'ordine q e vertice generico A_0, passanti per H. Possono poi ripetersi le considerazioni del n. 34, osservando inoltre che se è assegnato nello S_{r-1} un gruppo H' di ν punti (1), vi corrisponde sul monoide Φ un gruppo di νq punti, intersezioni del monoide col gruppo Λ di ν rette proiettanti H' da A_0. Di questi νq punti, $\nu(q-1)$ sono riuniti in A_0, e i rimanenti ν formano un gruppo che s'indicherà con H. Assegnato viceversa sul monoide un gruppo H di punti non contenente A_0, può dirsi (allo stesso modo che per una V_k) che esso si ottiene come differenza delle intersezioni, $(\Lambda, \Phi) - (\Lambda, \Psi)$, del gruppo Λ di rette, che proietta H da A_0, con il monoide Φ e con il cono Ψ tangente al monoide nel vertice A_0; oppure può dirsi, più semplicemente, che H si ottiene come intersezione di Λ, Φ, *fuori del punto fisso* A_0, contato con la molteplicità $\nu(q-1)$.

Ciò posto, sussistono tal quali gli sviluppi dei nn. 35, 36; e si perviene infine al teorema stesso del n. 37, ove si ponga $k = 0$.

Anzi, in questo caso, il teorema può ottenersi sotto la forma più opportuna seguente:

Sia assegnato in S un gruppo H di ν *punti, variabile in una famiglia. Scelta una* $(r+1)$*-piramide* $A_0A_1 \ldots A_r$, *in posizione generica rispetto al gruppo generico della famiglia, H risulta dall'intersezione*:

$$(F, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-1}),$$

fuori di un gruppo fisso di punti, che si riuniscono, con certe molteplicità, in A_0, $A_1, \ldots, A_{r-2}$; F *essendo il gruppo degli iperpiani che proiettano H da* $A_0 \ldots A_{r-2}$ *e* $\Phi_1, \ldots, \Phi_{r-1}$ *essendo convenienti monoidi.*

Inoltre gli ordini ν, q_1, $q_2, \ldots, q_{r-1}$ *delle forme possono assumersi fissi al variare del gruppo H nella famiglia.*

(1) Se H' cade sulla varietà Δ lo si trasformerà preventivamente con un'omografia di S_{r-1}, per poi ritornare al gruppo H' primitivo, facendo tender l'omografia all'identità, secondo quanto abbiamo già detto nel n. 34.

In particolare, per $r = 2$, si ha la rappresentazione di un gruppo H di punti in un piano α. Fissati tre punti generici A_0, A_1, A_2 in α, H risulta intersezione, fuori di A_0, di una *curva monoidale* di α con vertice A_0, cioè di una curva d'ordine q avente A_0 come punto $(q-1)$-plo, e del gruppo di rette che proietta H da A_0 (1).

Poichè il teorema è vero per i gruppi di punti di un piano, dimostriamolo per induzione dai gruppi di punti di un S_{r-1} ai gruppi di punti di un S_r, analogamente a quanto facemmo per una V_k (n. 35).

Chiamata H' la proiezione di H sopra lo S_{r-1} $A_1 A_2 \ldots A_r$ da A_0, si ha con significato trasparente delle notazioni:

$$H' = (F', \Phi'_1, \ldots, \Phi'_{r-2}),$$

fuori di intersezioni fisse assorbite da A_1, $A_2, \ldots, A_{r-2}$. Proiettando da A_0 e indicando con K il gruppo delle rette proiezioni di H, viene:

$$K = (F, \Phi_1, \ldots, \Phi_{r-2}),$$

fuori delle rette fisse proiettanti da A_0 il gruppo $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2}$.

Sia Φ_{r-1} un generico monoide irriducibile di vertice A_0 e di ordine abbastanza alto, che passi per H e per $A_1, A_2, \ldots, A_{r-2}$. Allora tutte le sue intersezioni colle suddette rette proiettanti cadono in $A_0, A_1, \ldots, A_{r-2}$ e le sue intersezioni con K cadono in A_0 e in H. L'intersezione con Φ_{r-1} dei due membri della precedente relazione dà perciò, come volevasi:

$$H = (F, \Phi_1, \ldots, \Phi_{r-2}, \Phi_{r-1}),$$

fuori di intersezioni fisse che cadono in $A_0, \ldots, A_{r-2}$.

39. *Individuazione razionale della rappresentazione monoidale d'una varietà, a partire da questa.* — Sia assegnata in S_r una V_k o in particolare, per $k = 0$, un gruppo di punti (n. 38), variabile entro un sistema continuo ∞^t *unirazionale* Σ, di varietà della stessa dimensione e dello stesso ordine. Val quanto dire che i coefficienti delle equazioni (eventualmente in numero sovrabbondante), che determinano V_k, siano funzioni razionali di t parametri.

Vogliamo dimostrare che *la rappresentazione monoidale graduale di V_k può individuarsi razionalmente in funzione dei t parametri*; cioè che possono individuarsi razionalmente le forme F, Φ_j, Ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, r-k-1)$, mediante cui si definisce V_k.

(1) Si tratta, come vedesi, di una rappresentazione del tipo già usato nel n. 28.

Riferendosi all'enunciato generale del n. 37, si fissi intanto la $(r+1)$-piramide $A_0A_1 \ldots A_r$ in posizione generica rispetto alla V_k generica variabile in Σ.

Il cono F risulta senz'altro individuato razionalmente, perchè si ottiene proiettando V_k da $A_0 \ldots A_{r-k-2}$. Così pure restano individuate razionalmente le proiezioni $V_k^{(j)}$ di V_k.

Ora, ciascun cono-monoide Φ_j $(j = 1, 2, \ldots, r-k-2)$ si ottiene per proiezione dal monoide $\Phi^{(j)}$, dello spazio $A_{r-k-j-1} \ldots A_r$, avente il vertice in $A_{r-k-j-1}$ e passante per $V_k^{(j+1)}$; quindi tutti i monoidi $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{r-k-1}$ risultano individuati razionalmente, una volta che lo siano i monoidi $\Phi^{(j)}$, Φ_{r-k-1}; dopo ciò restano individuati razionalmente altresì i coni $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{r-k-1}$ tangenti ai monoidi nei rispettivi vertici.

Dunque, tutto si riduce a stabilire la possibilità di individuare razionalmente un monoide irriducibile, che ha il vertice in un punto, e che passa per una varietà a k dimensioni, individuata razionalmente in funzione di t parametri entro un sistema unirazionale di varietà analoghe. Ora, i monoidi irriducibili Φ d'ordine q, che passano per la varietà generica del sistema ed hanno il vertice nel punto assegnato, costituiscono un sistema lineare d'ipersuperficie $|\Phi|$ [1], avente una certa dimensione s. Imponendo ai monoidi di $|\Phi|$ il passaggio per s punti genericamente fissati in modo che forniscano condizioni indipendenti, si individua *un* monoide irriducibile entro il sistema lineare $|\Phi|$; e questo monoide risulta *razionalmente* determinato in funzione dei t parametri che competono alla varietà a k dimensioni per cui esso passa.

Il ragionamento svolto sussiste anche se trattasi della rappresentazione monoidale di un gruppo di punti nella forma più circostanziata del n. precedente.

Osservazione. — Il fatto che per valori particolari dei t parametri, cioè per posizioni particolari della varietà considerata, per gli s punti fissati genericamente in relazione alla generica varietà, passino infiniti monoidi Φ, non altera in nulla la conclusione precedente.

§ 3. — Serie e sistemi d'equivalenza sopra una varietà.

40. *Definizione generale dei sistemi d'equivalenza sopra una varietà M_r.* — Possiamo ormai passare allo studio dei *sistemi di*

(1) Invero, se due monoidi soddisfanno alle condizioni richieste, vi soddisfa anche ogni monoide combinazione lineare di quelli.

equivalenza di varietà a k dimensioni sopra una varietà ad r dimensioni, generalizzando la nozione già posta (§ 1), di serie d'equivalenza sopra una superficie. Tale nozione, di cui si è trattato indipendentemente, per avviare al concetto più generale, resterà assorbita dalle considerazioni che seguono.

Siano $|A^{(1)}|, \ldots, |A^{(r-k)}|$, $r-k$ sistemi lineari (distinti o coincidenti) di varietà ad $r-1$ dimensioni sopra una M_r di S_d, che supporremo, fino a indicazione contraria, irriducibile.

Sia inoltre V_k la varietà effettiva (irriducibile o riducibile) o virtuale (n. 11) (definitiva rispetto all'equivalenza lineare delle A; n. 41) lungo la quale s'incontrano $r-k$ varietà generiche dei suddetti sistemi, eventualmente fuori di componenti mobili su varietà base comuni di dimensione $> k$, ed anche fuori (se si vuole) di varietà base di dimensione k, che figurino nella detta intersezione come *componenti fisse* (ved. il successivo n. 41). Il sistema descritto da V_k, mentre le A descrivono i rispettivi sistemi lineari, dicesi un *sistema di intersezione* o *sistema elementare di specie k*. Esso (almeno nel caso in cui le dimensioni dei dati sistemi lineari siano > 0) appare anche come il sistema delle varietà di livello costante simultaneo per una $(r-k)$-pla di funzioni razionali (dipendenti da eventuali parametri lineari) assegnate su M_r.

Ciò premesso, daremo la seguente definizione generale:

Un sistema di equivalenza di specie k sopra una varietà irriducibile M_r, è un sistema algebrico di varietà, effettive o virtuali, di dimensione k, ottenibili per somma e sottrazione dalle varietà di un numero finito di sistemi elementari. Un siffatto sistema dicesi di equivalenza r-dimensionale.

Per $k = 0$ si hanno su M_r le *serie di equivalenza*; in particolare per $k = 0$, $r = 2$, si hanno le serie di equivalenza superficiale (n. 29).

Un sistema di equivalenza è individuato da una qualunque V_k delle sue varietà, quando è dato il modo come V_k si compone con varietà di certi sistemi elementari. Indicheremo con $|V_k|$ il sistema di equivalenza individuato da V_k. È opportuno di avvertire esplicitamente che un sistema d'equivalenza, quale l'abbiamo definito, non comprende di necessità *tutte* le varietà combinazioni lineari dei sistemi elementari dati; ma quando parliamo del sistema $|V_k|$ intendiamo alludere alla totalità di queste combinazioni lineari, le quali sono definite da una qualunque di esse, in quanto son così assegnati i sistemi elementari donde si traggono le combinazioni lineari da considerarsi.

Ma non è neppur detto che il sistema $|V_k|$ così definito sia

il più ampio sistema di equivalenza al quale appartengono totalmente tutte quelle combinazioni lineari. È chiaro tuttavia che ogni data V_k effettiva sta in un sistema d'equivalenza almeno, di *varietà effettive*, che la contiene come varietà totale e che non è ulteriormente ampliabile: si dice un *sistema d'equivalenza completo di varietà effettive*. È chiaro altresì che, se pure questo sistema non è individuato da V_k, è individuato da una sua generica varietà $\bar{V}_k$. Anche in questo caso il sistema si designa col simbolo $|\bar{V}_k|$. *Niente di simile vale quando si passi dal campo delle varietà effettive a quello delle varietà virtuali*, perchè può benissimo accadere che un sistema d'equivalenza di varietà virtuali sia contenuto totalmente in sistemi d'equivalenza di dimensione tanto grande quanto si vuole (ved. il n. 43).

Proviamo che:

Un sistema di equivalenza ρ-dimensionale, di specie k ($\rho < r$), cioè un sistema di specie k, che sia di equivalenza sopra una M_ρ irriducibile tracciata su M_r, è un sistema di equivalenza di specie k anche rispetto alla varietà ambiente.

Sia, anzitutto, $\rho = r - 1$ e Σ sia un sistema elementare di specie k su M_ρ. Esso può ivi imaginarsi staccato da $r - k - 1$ sistemi lineari tracciati su M_r, fuori di varietà base di dimensione $> k$ (ed eventualmente fuori di varietà fisse di dimensione k), che siano comuni ai detti sistemi e giacciano su M_ρ. Aggiungendo a tali $r - k - 1$ sistemi lineari il sistema lineare $\infty^0 M_\rho$, il sistema Σ vien definito nell'ambiente M_r come intersezione di $r - k$ sistemi lineari, fuori di eventuali varietà base di dimensione $\geqslant k$, comuni ai detti sistemi: onde è un sistema elementare sopra M_r. La conclusione vale se Σ è un sistema d'equivalenza più generale, perchè ogni combinazione lineare di sistemi elementari di specie k su M_ρ, può riguardarsi, per quanto precede, come una combinazione lineare di sistemi elementari di specie k di M_r, ed è perciò ivi un sistema d'equivalenza.

Il caso di una M_ρ con $\rho < r - 1$ si riconduce al precedente, salendo da M_ρ ad una $M_{\rho+1}$ irriducibile passante per M_ρ e contenuta in M_r (che si ottiene, per esempio, considerando l'intersezione di M_r con $r - \rho - 1$ forme generiche dello S_d, condotte per M_ρ e di ordine abbastanza alto in modo che $M_{\rho+1}$ possa risultare irriducibile); salendo poi da $M_{\rho+1}$ a $M_{\rho+2}$, ecc.; fino a giungere ad una M_{r-1} di M_r contenente M_ρ, $M_{\rho+1}, \ldots, M_{r-2}$.

Una varietà V_k, che sia mobile in un sistema di equivalenza ρ-dimensionale ($\rho < r$) sopra una M_ρ subordinata ad M_r, dicesi una *varietà semifissa*.

Si avverta che può benissimo accadere che *le varietà V_k di un sistema di equivalenza r-dimensionale riempiano una M_ρ subordinata ad M_r, senza ch'esse formino un sistema d'equivalenza sopra M_ρ*. In tal caso la V_k mobile in un siffatto sistema *non si chiamerà semifissa*. Diamo un semplicissimo esempio in proposito.

La serie dei singoli punti di un piano è una serie superficiale (2-dimensionale) di equivalenza, anzi una serie elementare (n. 28). Tuttavia, i punti della serie che stanno sopra una curva irriducibile C di genere > 0 tracciata sul piano, non costituiscono su C una serie curvilinea (1-dimensionale) d'equivalenza, giacchè altrimenti, data l'irriducibilità di C, una siffatta serie null'altro sarebbe che una serie lineare, mentre la serie dei punti di C non è lineare. Un altro esempio più generale potremo darlo in seguito (n. 45).

Fra le componenti di una varietà V_k mobile in un sistema d'equivalenza di specie k su M_r, vi posson essere *componenti fisse* e *componenti semifisse*: le prime (lo dice la parola stessa) non variano con V_k, mentre le componenti semifisse descrivono sistemi d'equivalenza su varietà subordinate ad M_r.

Quando una componente semifissa di dimensione k descrive una M_ρ, diremo ch'essa possiede $\rho - k$ *gradi di libertà*. Nel caso d'una varietà fissa vi sono zero gradi di libertà; nel caso d'un sistema d'equivalenza di specie k, che invada M_r, vi sono $r - k$ gradi di libertà.

A norma della definizione generale e del teorema poco sopra dimostrato, un sistema d'equivalenza resta tale aggiungendo e togliendo dalle sue varietà componenti fisse o semifisse.

La somma o la differenza di due sistemi di equivalenza di specie k, è un sistema di equivalenza della stessa specie, cioè *i sistemi di equivalenza formano un corpo chiuso rispetto alle operazioni di somma e di sottrazione*; *il che non accade pei sistemi elementari* (cfr. il successivo n. 44). *Da ciò la importanza del passaggio dai sistemi elementari ai più generali sistemi di equivalenza.*

Osserviamo inoltre che, *sopra una varietà M_ρ di M_r ($\rho \geqslant r - k$), un sistema d'equivalenza di specie k di M_r sega un sistema di equivalenza di specie $\rho + k - r$*. Invero, ciò segue subito per i sistemi elementari, indi per i sistemi generali d'equivalenza, dall'osservare che un sistema lineare di varietà ad $r - 1$ dimensioni in M_r, sega su M_ρ un sistema lineare di varietà a $\rho - 1$ dimensioni.

Infine è appena necessario avvertire che *sistemi elementari e sistemi d'equivalenza di specie k sopra una M_r sono invarianti per trasformazioni birazionali.*

41. *Sistemi di intersezione completa e parziale.* — Riprendiamo la definizione di sistema elementare, per precisare come vada considerata l'intersezione delle varietà variabili nei sistemi lineari $|A|$, di cui sopra. Occorrerà, naturalmente, mettersi dal punto di vista delle intersezioni virtuali, conforme alle considerazioni dei nn. 10, 11, 12.

Si è supposto che le $r-k$ varietà generiche dei sistemi $|A|$ (n. 40) abbiano eventualmente varietà base comuni di dimensione $> k$ (1). Sia M_ρ una, irriducibile, di queste varietà e supponiamo dapprima $\rho < r-1$; si tratta di determinare l'equivalenza funzionale di M_ρ come varietà a k dimensioni, entro l'intersezione virtuale $(A^{(1)}, \ldots, A^{(r-k)})$. Consideriamo M_ρ come intersezione (parziale) di $r-\rho$ prescelte varietà A: siano $A^{(1)}, \ldots, A^{(r-\rho)}$. Possiamo aggiungere alla generica varietà $A^{(r-\rho+1)}$ una conveniente varietà ad $r-1$ dimensioni $B^{(r-\rho+1)}$, per guisa che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1° $B^{(r-\rho+1)}$ taglia M_ρ in una varietà a $\rho-1$ dimensioni;

2° la generica varietà $C^{(r-\rho+1)}$ del sistema lineare $|C^{(r-\rho+1)}| = |A^{(r-\rho+1)} + B^{(r-\rho+1)}|$, taglia M_ρ in una varietà a $\rho-1$ dimensioni. Basta all'uopo condurre per $A^{(r-\rho+1)}$ una forma generica di ordine abbastanza alto, di S_d, e prender come varietà $B^{(r-\rho+1)}$ l'ulteriore intersezione di M_r con quella forma.

Ciò posto si assumerà come varietà virtuale a $\rho-1$ dimensioni, intersezione di M_ρ, $A^{(r-\rho+1)}$, la varietà

$$(M_\rho\ ,\ C^{(r-\rho+1)}) - (M_\rho\ ,\ B^{(r-\rho+1)})\ . \tag{25}$$

Quando le varietà $B^{(r-\rho+1)}$ e $C^{(r-\rho+1)}$ si suppongano variabili entro i sistemi lineari $|B^{(r-\rho+1)}|$, $|C^{(r-\rho+1)}|$, cioè si suppongano fissate a meno dell'equivalenza lineare per varietà ad $r-1$ dimensioni in M_r (2), la varietà (25) risulta a sua volta determinata a meno dell'equivalenza lineare per varietà a $\rho-1$ dimensioni su M, che è traccia della precedente (n. 11). Pertanto le varietà del tipo (25) costituiscono *un sistema lineare virtuale, che corrisponde all'intersezione di* M_ρ *colla varietà* $A^{(r-\rho+1)}$ *pas-*

(1) Le eventuali varietà base di dimensione k, si distaccano come parti fisse da ogni V_k; quelle di dimensione $< k$ risultano varietà base anche pel sistema elementare descritto da V_k: dunque nè le une nè le altre dàn luogo a difficoltà nella considerazione dell'intersezione $(A^{(1)}, \ldots, A^{(r-k)})$.

(2) Si suppongono fissate le varietà B, C a meno dell'equivalenza lineare e non di un'altra qualunque equivalenza su M_r (n. 11), perchè solo così le componenti semifisse di V_k risulteranno (come subito si vedrà) variabili entro sistemi elementari d'equivalenza razionale, a norma della nostra definizione.

sante per M_ρ. Una varietà di questo sistema s'indicherà col simbolo d'intersezione $(M_\rho, A^{(r-\rho+1)})$.

Similmente avremo su M_ρ i sistemi lineari $|(M_\rho, A^{(r-\rho+2)})|, \ldots,$ $|(M_\rho, A^{(r-k)})|$. Questi $\rho - k$ sistemi lineari generano per intersezione su M_ρ un sistema elementare di varietà virtuali a k dimensioni, che risponde al simbolo $|(M_\rho, A^{(r-\rho+1)}, \ldots, A^{(r-k)})|$.

Potrebbe dubitarsi, in verità, che la eventuale base comune ai predetti $\rho - k$ sistemi lineari, contenesse una varietà irriducibile (positiva o negativa) di dimensione $< \rho$, ma maggiore di k. Tale possibilità si esclude facilmente, tenuto conto dell'arbitrarietà nella scelta delle varietà B, C, di cui sopra; e d'altronde, anche ove ciò accadesse, si potrebbero ripetere nuovamente le considerazioni ora svolte. Dunque *esiste in ogni caso una varietà virtuale di dimensione* k (*e non maggiore*) *rispondente al simbolo* $(M_\rho, A^{(r-\rho+1)}, \ldots, A^{(r-k)})$, *e questa varietà è mobile entro* M_ρ *in un sistema elementare.*

Similmente si avranno su M_ρ altri sistemi elementari virtuali di specie k, considerando la varietà come intersezione parziale di altre $r - \rho$ delle varietà A. In tutto si avranno su M_ρ $\binom{r-k}{\rho-k}$ sistemi siffatti.

Ciò vale per ogni varietà base irriducibile di dimensione maggiore di k e minore di $r - 1$, comune ai sistemi $|A|$.

Se la varietà base comune ha dimensione $\rho = r - 1$, sicchè essa distaccasi come parte fissa da tutte le A, poniamo $C^{(i)} = A^{(i)} - M_\rho$ $(i = 1, \ldots, r - k)$. Occorre dunque considerare l'intersezione virtuale

$$(26) \qquad (M_{r-1} + C^{(1)}, M_{r-1} + C^{(2)}, \ldots, M_{r-1} + C^{(r-k)}),$$

che si spezza nella somma di intersezioni del tipo

$$(27) \qquad (M_{r-1}, M_{r-1}, \ldots, M_{r-1}, C^{(i_1)}, C^{(i_2)}, \ldots, C^{(r-k-s)}),$$

dove le M_{r-1} sono in numero di s $(s = 1, \ldots, r - k)$, e gl'indici $i_1, i_2, \ldots i_{r-k-s}$ sono estratti in tutti i modi possibili da $1, 2, \ldots, r - k$.

Per dar significato al simbolo (26), basta darlo ai simboli (27). A tal fine, su M_{r-1}, si definisce come sopra *il sistema lineare caratteristico virtuale* $|(M_{r-1}, M_{r-1})|$, e, intersecando a due a due, a tre a tre, ..., a $s - 1$ a $s - 1$, le varietà di questo sistema, si ottengono su M_{r-1} i *sistemi elementari caratteristici* (virtuali) $(M_{r-1}, M_{r-1}, M_{r-1})|$, $|(M_{r-1}, M_{r-1}, M_{r-1}, M_{r-1})|$, $\ldots$, $|(M_{r-1}, M_{r-1}, \ldots, M_{r-1})|$, l'ultimo dei quali consta di varietà (vir-

tuali o effettive) ad $r - s$ dimensioni e si chiamerà il *sistema elementare caratteristico di specie* $r - s$ su M_{r-1}.

L'intersezione di una varietà di questo sistema con $r - k - s$ varietà generiche dei sistemi lineari $|C^{(i_1)}|$, $|C^{(i_2)}|$, . . . , $|C^{(i_{r-k-s})}|$, fornisce una varietà (virtuale o effettiva) a k dimensioni, rispondente al simbolo (27), e mobile su M_{r-1} in un sistema elementare di specie k. Per ciascun valore di s vi sono su M_{r-1} $\binom{r-k}{s}$ di questi sistemi elementari.

In conclusione *il simbolo* $(A^{(1)}, \ldots, A^{(r-k)})$ *rappresenta in ogni caso una varietà (virtuale o effettiva) di dimensione* k, *che può chiamarsi l'intersezione completa delle varietà* $A^{(1)}, \ldots, A^{(r-k)}$ *e che è costituita dalla varietà effettiva* V_k, *di dimensione* k, *intersezione delle* A, *fuori delle eventuali varietà base comuni di dimensione* $\geq k$; *dalle varietà base di dimensione* k *e da varietà virtuali a* k *dimensioni mobili in sistemi elementari appartenenti alle varietà base di dimensione* $> k$.

Pertanto, quando esistano varietà base di dimensione $> k$ comuni ai sistemi $|A|$ sulle quali si muovano varietà virtuali a k dimensioni, che non si voglian comprendere in V_k come componenti semifisse, la varietà V_k, descrivente il sistema elementare definito nel numero precedente, è (dal punto di vista più largo da cui ci siamo posti) una intersezione parziale della completa intersezione di dimensione k. Epperò il sistema elementare definito si chiamerà un *sistema d'intersezione parziale.*

Se invece o non esistono varietà base di dimensione $> k$ su cui si muovano varietà di dimensione k escluse da V_k o infine se la V_k si completa aggiungendo ad essa le componenti semifisse, si ottiene un sistema elementare, che si chiamerà *sistema d'intersezione completa.* È chiaro che *un sistema d'intersezione completa è razionale*, essendo birazionalmente equivalente ad una varietà di SEGRE (n. 19).

Più generalmente, *se in un sistema d'intersezione completa vi è un sistema, anche subordinato, di varietà, ciascuna delle quali ha talune componenti semifisse (cioè variabili in un sistema d'equivalenza sopra una varietà subordinata) quel sistema subordinato, astrazion fatta dalle componenti semifisse, si chiamerà d'intersezione parziale.*

Osservazione. — Poichè, come si è sopra dimostrato, le varietà semifisse descrivono, sulle varietà base comuni di dimensione $> k$, sistemi d'intersezione completa, così *un sistema d'equivalenza di specie* k *risulta, in ultima analisi, una somma algebrica di sistemi d'intersezione completa della stessa specie.*

42. *Sistemi d'equivalenza sulle varietà riducibilili.* — Si possono considerare sistemi d'equivalenza anche su varietà riducibili (pure) nel modo che segue:

Un sistema d'equivalenza di specie k sopra una M_r costituita da più componenti della stessa dimensione r, è il sistema ottenuto sommando i gruppi di dati sistemi d'equivalenza di specie k su talune o tutte delle componenti di M_r.

Se $r = 1$, $k = 0$, si hanno le serie di equivalenza sopra una curva riducibile (n. 22), la cui teoria si può costruire (come vedremo in seguito) in modo analogo a quello con cui si svolge la teoria delle serie lineari. Più in generale, per $k = r - 1$, la teoria dei sistemi d'equivalenza di specie $r - 1$ sopra una M_r riducibile si può svolgere analogamente a quella dei sistemi lineari di varietà ad $r - 1$ dimensioni sopra una varietà irriducibile ad r dimensioni; e cioè considerando il sistema d'equivalenza come sistema d'intersezione sopra M_r di un sistema lineare di forme dell'ambiente S_d. Per tale via, si perviene al teorema fondamentale (già indicato al n. 22, nel caso delle curve), che *il sistema di equivalenza più ampio, contenente una data V_{r-1} di M_r, è la somma dei sistemi lineari completi individuati sulle componenti irriducibili di M_r dalle parti di V_{r-1}, rispettivamente giacenti su ciascuna di esse* [1].

D'ora in poi, salvo avviso contrario, la M_r ambiente si supporrà irriducibile.

43. *Le famiglie di varietà di un S_r come sistemi d'equivalenza.* — Diamo un esempio notevolissimo di sistema d'equivalenza. Si consideri una famiglia $\{V_k\}$ di varietà di S_r. Il teorema fondamentale del n. 35, ci dice che la V_k variabile nella famiglia può ottenersi come somma algebrica di 2^{r-k-1} varietà di dimensione k, intersezioni complete di forme di S_r, e che queste forme conservano il medesimo ordine al variare continuo di V_k. Pertanto, facendo muovere le forme entro i sistemi lineari rispettivi, si ottengono 2^{r-k-1} sistemi elementari (d'intersezione completa), i quali dàn luogo, per somma e sottrazione, ad un sistema di equivalenza di specie k in S_r, che contiene $\{V_k\}$.

Se ci si pone dal punto di vista delle varietà virtuali, il teorema citato dà anzi V_k come intersezione completa di forme (virtuali), un cono ed $r - k - 1$ iperpiani virtuali; ne segue che $\{V_k\}$ appartiene ad un sistema elementare (virtuale) di specie k.

(1) Cfr. il n. 22 della memoria [3] di F. Severi, cit. a pag. 44.

Riassumendo :

Ogni famiglia di varietà V_k (effettive o virtuali) di un S_r (però di una varietà razionale ∞^r) è un sistema d'equivalenza ottenibile per somma e sottrazione da 2^{r-k-1} sistemi elementari. Nel campo delle varietà virtuali ogni famiglia di V_k di S_r (o di una varietà razionale) è addirittura un sistema elementare.

Consideriamo ora la totalità delle varietà effettive V_k, di dato ordine m, di S_r. Essa ripartiscesi in un numero finito di famiglie (sistemi continui completi) di V_k [1]. Per ciascuna di queste si hanno certi valori minimi degli indici degli iperpiani virtuali generatori. Al disopra di tali minimi gl'indici sono arbitrari. Perciò si possono assumere per essi valori siffatti, che restino valevoli per tutte le famiglie $\{V_k\}$ di dato ordine. E potranno altresì assumersi i valori minimi compatibili con la condizione posta, pervenendosi così alla *rappresentazione minima* della totalità delle V_k di dato ordine.

Riferendoci a questa rappresentazione, si può dunque dire che *la totalità delle varietà effettive di ordine e dimensione dati, di un S_r, è contenuta totalmente in un unico sistema elementare di varietà virtuali dello stesso ordine e della stessa dimensione.*

Si ha cioè, per quei minimi valori degl'indici, un solo sistema di V_k virtuali di dato ordine, come si ha in S_r un unico sistema (lineare) di forme di dato ordine ($k = r - 1$). Nel caso delle forme la rappresentazione minima dà soltanto varietà effettive : ecco la ragione del divario, che, senza questa spiegazione, apparisce così radicale.

Le famiglie di V_k effettive son da considerarsi come le *traccie* lasciate da quell'unico sistema di varietà virtuali nel dominio delle varietà effettive.

Facciamo un esempio concreto. Si consideri la famiglia delle m-ple di rette dello spazio ordinario. L'esistenza di monoidi irriducibili col vertice in un punto O prefissato, passanti per m rette generiche $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dello spazio, risulta dai teoremi generali (n. 31, Osservazione 3ª). Del resto, nel caso attuale, si stabilisce subito che esistono monoidi irriducibili d'ordine m, contenenti $C = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. La cosa è vera per $m = 1$, giacchè un piano passante per a_1 costituisce uno dei monoidi desiderati, onde basta dimostrarla per induzione da $m - 1$ ad m. Sia Φ_1 un monoide irriducibile d'ordine $m - 1$ contenente $a_2 + \ldots + a_m$ e α_1 il piano proiettante da O la retta a_1. Allora $\Phi_1 + \alpha_1$ è un monoide

[1] Cfr. la pag. 242 della Memoria [8] di F. Severi, cit. a pag. 44.

(riducibile) d'ordine m per C e col vertice O. Similmente può costruirsi un altro analogo monoide $\Phi_2 + \alpha_2$, spezzato in un monoide irriducibile Φ_2 di vertice O e d'ordine $m-1$ passante per $a_1 + a_3 + \ldots + a_m$ e nel piano α_2 proiettante a_2 da O. Il fascio di monoidi individuato da $\Phi_1 + \alpha_1$, $\Phi_2 + \alpha_2$ è irriducibile, per un citato teorema di BERTINI (giacchè i monoidi che lo determinano non hanno parti comuni nè son composti con le superficie di un fascio).

Il monoide generico del fascio soddisfa dunque alle condizioni richieste, e risulta altresì un monoide d'*ordine minimo* contenente C. Infatti, ogni monoide irriducibile Φ di ordine μ e vertice O passante per C, deve contenere le $\frac{m(m-1)}{2}$ corde di C per O (n. 31, Osservazione 3ª). Perciò il cono Ψ tangente a Φ in O, contiene quelle corde e quindi il suo ordine $\mu - 1$ non è minore di $m-1$, perchè la proiezione piana di C da O non può ammettere alcuna aggiunta di ordine $\leq m-2$; dal momento che, se esistesse un'aggiunta d'ordine $m-2$, avendo con C almeno $m(m-1)$ intersezioni (assorbite dai punti doppi), farebbe parte di C [1], cioè sarebbe costituita da $m-2$ rette a_i, quindi non risulterebbe aggiunta a C, non contenendo, in generale [2], il punto d'incontro delle rimanenti due rette di C.

Designando con Φ il monoide per C dianzi costruito, e con Ψ il suo cono tangente in O, risulta

$$C = (F, \Phi - \Psi) , \tag{28}$$

dove F è il cono (spezzato in m piani) che proietta C da O. La (28) costituisce la rappresentazione monoidale *minima* per la curva C della famiglia considerata; e, al variare di F e $(\Phi - \Psi)$ entro loro sistemi lineari, dà luogo ad un sistema elementare di curve virtuali. Dunque la famiglia delle m-ple di rette dello spazio risulta qui come appartenente ad un sistema elementare virtuale, che si ottiene dalla intersezione del sistema dei coni d'ordine m con vertice O e del sistema degli iperpiani virtuali del tipo $\Phi - \Psi$, dove Φ è un monoide d'ordine m con vertice in O e Ψ è il suo cono tangente in O.

[1] Invero, se dall'aggiunta si staccasse una sola retta di C, si avrebbe un'aggiunta d'ordine $m-3$ ad una curva costituita da $m-1$ rette; quindi, ripetendo per questa curva analogo ragionamento, si conclude come si è detto.

[2] S'intende che il fatto sussiste in generale; mentre per particolari gruppi di m rette possono aversi rappresentazioni monoidali d'ordine $< m$. (Basti pensare ad m rette appartenenti ad una quadrica).

Si osservi però che il sistema elementare (28) è ben più ampio del sistema formato dalle m-ple di rette. Dimostriamo che *tale sistema contiene addirittura la totalità delle curve effettive di ordine m.*

Infatti, per una curva qualunque C d'ordine m passa sempre qualche monoide irriducibile d'ordine m avente il vertice in un punto O dello spazio (generico rispetto alla curva); giacchè la proiezione piana C' di C da O, sia essa irriducibile o spezzata, possiede $d \leq \frac{m(m-1)}{2}$ punti doppi, quindi ammette qualche aggiunta d'ordine $m-1$ (perchè tra le $\infty^{\frac{1}{2}(m+2)(m-1)}$ curve d'ordine $m-1$ ve n'è certo qualcuna che passa per $d \leq \frac{m(m-1)}{2}$ punti). Anzi, se si volessero comprendere le sole curve irriducibili, l'ordine del monoide potrebbe abbassarsi ad $m-1$; ed anche ad $m-2$, qualora si volessero le sole curve di genere > 0 (1); ed eventualmente ad ordini minori per famiglie più particolari. Ma volendo comprendere *tutte* le curve sghembe d'ordine m non si può scendere al disotto di m.

La (28) risulta dunque la rappresentazione minima di tutte le curve d'ordine m di S_3; e il sistema elementare, che la (28) stessa definisce, contiene quindi la totalità delle curve effettive di ordine m. Però tale sistema elementare — a cui si è pervenuti originariamente considerando la famiglia delle m-ple di rette — risulta più ampio altresì della totalità delle curve d'ordine m. Esso dà come traccia, nel dominio delle curve effettive, le singole famiglie di curve di quell'ordine.

Mentre infatti le curve effettive d'ordine m dipendono da $4m$ parametri (2), la dimensione del sistema elementare (28) è, per $m > 1$, maggiore di $4m$.

Per far vedere ciò, valutiamo questa dimensione. Essa sarà data da $c + i - \delta$, dove c è la dimensione del sistema lineare dei coni di ordine m, che hanno il vertice in O; i è la dimensione del sistema lineare d'iperpiani virtuali del tipo $\Phi - \Psi$, essendo Φ

(1) Se C è irriducibile, tale è anche C' che non ammette quindi più di $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punti doppi; e siccome le curve d'ordine $m-2$ sono $\infty^{\frac{1}{2}(m-2)(m+1)}$, C' possiede qualche aggiunta di quest'ordine. Se poi C e quindi C' è di genere > 0, i punti doppi di C' sono al più $\frac{1}{2}m(m-3)$, e tra le $\infty^{\frac{1}{2}m(m-3)}$ curve d'ordine $m-3$ ve n'è qualcuna che è aggiunta a C'.

(2) In realtà può solo stabilirsi rigorosamente che le curve sghembe di genere p dipendono da $4m$ parametri, quando sia $m > 3 + \frac{3}{4}p$. (Cfr. F. Severi, *Vorlesungen...*, cit, pagg. 368 e 394).

un monoide d'ordine m con vertice in O e Ψ il suo cono tangente in O; e δ è la dimensione del sistema di coppie di superficie F e $\Phi - \Psi$, che si intersecano nella *generica* curva del sistema $(F, \Phi - \Psi)$.

La dimensione c vale $\frac{m(m+3)}{2}$, come quella delle curve piane d'ordine m. Quanto alla dimensione i essa è la stessa di quella del sistema dei monoidi d'ordine m con O $(m-1)$-plo: invero, scelto il monoide Φ è determinato il cono Ψ e quindi l'iperpiano virtuale $\Phi - \Psi$, e viceversa. La dimensione i vale dunque $m(m+2)$. Infine è facile convincersi che la dimensione δ vale 1. Consideriamo infatti un cono F ed intersechiamolo con un generico iperpiano virtuale $\Phi - \Psi$. Otterremo una curva virtuale differenza delle due intersezioni complete (F,Φ) e (F,Ψ). La curva (F, Φ) è una curva K d'ordine m^2 con O $m(m-1)$-plo, mentre la curva (F, Ψ) consta di $m(m-1)$ rette, uscenti da O e tangenti ivi agli $m(m-1)$ rami della K. Ora la curva K *determina* il cono F; ma sta sopra gli ∞^1 (e non più) monoidi del tipo di Φ, che si ottengono dalla combinazione lineare di F e Φ; e ciascuno di questi monoidi ha un cono tangente in O, che contiene le $m(m-1)$ rette, costituenti la curva (F, Ψ). Il numero δ vale dunque 1. Riepilogando, possiamo enunciare:

Il sistema elementare virtuale (28) *contiene tutte le curve sghembe effettive d'ordine m. Esso risulta definito dalla rappresentazione minima valevole per tutte le curve effettive d'ordine m, qualora sia fissato O; e la sua dimensione è:*

$$\frac{m(m+3)}{2} + m(m+2) - 1 = \frac{m(3m+7)}{2} - 1 .$$

E, per $m > 1$, è $\frac{m(3m+7)}{2} - 1 > 4m$.

Se, invece di partire dalla rappresentazione minima di C, si fosse partiti da una rappresentazione di ordine maggiore, si sarebbe ottenuto un sistema d'equivalenza di curve (effettive e virtuali) di dimensione ancor maggiore e contenente quello sopra considerato.

44. *Esempio di una somma di sistemi elementari intersezioni complete, che non è un sistema elementare intersezione completa.* — Ci si offre qui la possibilità di fornire l'esempio detto, il che giustifica pienamente la definizione assunta di sistemi d'equivalenza: in quanto, ove ci si limitasse a considerare sistemi d'intersezione

completa, non sarebbero possibili in generale le operazioni di somma e sottrazione (cfr. anche il n. 26).

Ecco il semplicissimo esempio. Nello spazio ordinario la famiglia delle rette è un sistema elementare (intersezione di due stelle di piani); ma il sistema delle coppie, terne, ..., m-ple di rette non è mai d'intersezione completa, pur essendo ottenuto da più sistemi intersezioni complete (coincidenti) con la sola operazione di somma. Si prova subito per assurdo che la famiglia di tutte le m-ple ($m \geq 2$) di rette dello spazio non è un sistema intersezione completa. Invero, se esistessero due sistemi lineari di superficie $|F_1|$, $|F_2|$ tali che una generica m-pla C di rette potesse ottenersi come intersezione di due superficie F_1 , F_2, fuori eventualmente di una linea base comune Γ (irriducibile o riducibile), la linea $\Gamma + C$ completa intersezione di F_1, F_2, come limite di una curva connessa [1], dovrebbe esser connessa. E siccome C non lo è, così la linea Γ non dovrebbe mancare ed ogni retta di C si appoggerebbe a Γ, contrariamente al fatto che si tratta di una retta generica dello spazio.

45. *Esempio di una serie d'equivalenza 2-dimensionale che non è d'equivalenza 1-dimensionale.* — Diamo ora anche questo esempio, già preannunciato (n. 40).

Si consideri sopra una superficie irriducibile F di S_3, *regolare* (sia p. es. la superficie generale del proprio ordine), una curva C irriducibile intersezione completa di F con una superficie G *irregolare*. Sia Σ un sistema continuo di curve D non equivalenti [2], tracciato su G. Allora le curve D staccan su C gruppi di punti, che appartengono totalmente alla serie di equivalenza segata su F (cfr. in fine del n. 40) dal sistema di equivalenza costituito dalle curve dello spazio aventi lo stesso ordine delle D (n. 43). I gruppi (C, D) son dunque equivalenti *superficialmente* su F; ma non possono essere equivalenti *linearmente* sopra la curva C, se no, in forza di un teorema di SEVERI [3], le curve D sarebbero tra loro equivalenti sopra G.

Questo esempio potrebbe estendersi alle varietà.

(1) Invero F_1, F_2 possono supporsi ottenute per deformazione continua da due superficie generiche degli stessi ordini, le quali s'incontrano lungo una curva irriducibile, e quindi connessa.

(2) Sopra una superficie irregolare esistono sempre (per un teorema di ENRIQUES-CASTELNUOVO-SEVERI) sistemi continui di curve non equivalenti fra loro.

(3) Cfr. F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (« Annali di Mat. », t. XII_3, 1905), n. 9.

46. *Costruzione proiettiva dei sistemi di equivalenza sopra una M_r.* — Nel caso dei sistemi lineari $|M_{r-1}|$ di varietà ad $r-1$ dimensioni sopra una M_r, la loro costruzione proiettiva, come intersezione di M_r con sistemi lineari di forme dell'ambiente, coincide implicitamente od esplicitamente con la definizione stessa dei sistemi $|M_{r-1}|$.

Invece, per i sistemi d'equivalenza un'analoga costruzione proiettiva non scende senz'altro dalla definizione, da cui siamo partiti.

Stabiliremo in proposito il teorema fondamentale:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema algebrico di varietà V_k, effettive o virtuali, dato sopra una varietà algebrica M_r di S_d, sia un sistema di equivalenza di specie k, è che la sua generica varietà sia segabile con una varietà effettiva o virtuale, a $d+k-r$ dimensioni, mobile con continuità nell'ambiente S_d, fuori, eventualmente, di varietà a k dimensioni, fisse o semifisse.

La sufficienza della condizione è subito acquisita. Invero, pel n. 43, una famiglia di varietà W_{d+k-r} dell'ambiente S_d costituisce un sistema d'equivalenza, e quindi sega sulla M_r di S_d un sistema d'equivalenza di varietà V_k (cfr. in fine del n. 40). Se poi, dall'intersezione di W_{d+k-r} con M_r si staccano componenti fisse o semifisse (cioè varietà a k dimensioni variabili in sistemi elementari entro varietà M_ρ subordinate ad M_r), da siffatte componenti si può naturalmente prescindere ottenendosi ancora un sistema d'equivalenza, a norma della definizione generale.

Dimostriamo ora la necessità della condizione. Cominciamo da un sistema elementare Σ. Siano $|F^{(1)}|, \ldots, |F^{(r-k)}|$ i sistemi lineari di forme di S_d, che staccano su M_r i sistemi generatori di Σ, fuori di quelle, fra le varietà fisse o semifisse, dalle quali si voglia fare astrazione.

La completa intersezione delle forme $F^{(1)}, \ldots, F^{(r-k)}$ con M, cioè la varietà $(M_r, F^{(1)}, \ldots, F^{(r-k)})$, è formata dalla V_k mobile in Σ, dalle eventuali componenti fisse — varietà base isolate, di dimensione k, comuni a tutti i sistemi generatori — e dalle componenti semifisse — mobili sopra varietà base di dimensione $> k$, comuni a tutti i sistemi generatori — dalle quali si voglia far astrazione, nel definire Σ. D'altronde tutte queste varietà, di dimensione (effettiva o virtuale) k, e cioè sia quelle che si vogliono includere in V_k, come quelle che si vogliono escludere, costituendo la varietà $(M_r, F^{(1)}, \ldots, F^{(r-k)})$, formano altresì la completa intersezione di M_r colla varietà $W = (F^{(1)}, \ldots, F^{(r-k)})$ dell'ambiente S_d; varietà che ha la dimensione (effettiva o

virtuale) $d + k - r$ e che si muove in una famiglia (anzi in tal caso in un sistema elementare), mentre $F^{(1)}, \ldots, F^{(r-k)}$ descrivono i propri sistemi lineari. Pertanto Σ è staccato su M_r, fuori delle componenti fisse e semifisse, da varietà della famiglia $|W|$; e il teorema è così dimostrato pei sistemi elementari.

Se ora Σ è un qualunque sistema di equivalenza di specie k, i suoi gruppi risulteranno dal prendere col segno $+$ i gruppi di taluni sistemi elementari $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$, e col segno $-$ i gruppi di taluni altri sistemi elementari $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Scriveremo:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots - \Delta_1 - \Delta_2 - \ldots .$$

Siano

$$|W^{(1)}_{d+k-r}|, |W^{(2)}_{d+k-r}|, \ldots, |Z^{(1)}_{d+k-r}|, |Z^{(2)}_{d+k-r}|, \ldots$$

le famiglie di varietà a $d + k - r$ dimensioni di S_d, che segano su M_r i sistemi elementari $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$, fuori rispettivamente degli insiemi $N_1, N_2, \ldots, P_1, P_2, \ldots$, costituiti dalle varietà fisse e semifisse inerenti ai sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Allora la varietà virtuale $W^{(1)}_{d+k-r} + W^{(2)}_{d+k-r} + \ldots - Z^{(1)}_{d+k-r} - Z^{(2)}_{d+k-r} - \ldots$, sega su M_r il sistema Σ, fuori dell'insieme $N_1 + N_2 + \ldots - P_1 - P_2 - \ldots$. Il teorema è perciò dimostrato anche per un qualunque sistema d'equivalenza.

Osservazione. — Nel caso $r = 2$ $(k = 0)$ dimostreremo in seguito di più, e cioè che una serie di equivalenza di gruppi effettivi, sopra una superficie di S_3, è segabile con un sistema continuo di curve sghembe *effettive*, fuori dei gruppi fissi e semifissi [1].

47. *I sistemi d'equivalenza come sistemi elementari virtuali.* — Sia $|V_k|$ un sistema di equivalenza sulla M_r di S_d; e sia W_{d+k-r} una varietà mobile con continuità in S_d, che stacchi su M_r, il dato sistema, fuori di eventuali varietà fisse e semifisse a k dimensioni.

Ricordiamo (n. 43) che W_{d+k-r} è intersezione completa di $r - k$ forme virtuali, ciascuna delle quali è variabile in un determinato sistema lineare (il che significa che son dati i sistemi lineari cui appartengono le componenti effettive di ognuna delle predette forme virtuali). Questi $r - k$ sistemi lineari virtuali di forme segano su M_r altrettanti sistemi lineari virtuali di varietà ad $r - 1$ dimensioni, i quali generano per intersezione un sistema elementare, che coincide col sistema d'equivalenza segato su M_r

[1] Cfr. la Memoria [13] di F. Severi, cit. a pag. 44.

dalla varietà mobile W_{d+k-r}. Astraendo da quelle fra le componenti fisse e semifisse di tale sistema, che non fanno parte della generica V_k, si ottiene ancora, a norma della definizione del n. 40, un sistema elementare. Concludendo:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di varietà V_k (effettive o virtuali), sopra una varietà M_r, sia un sistema d'equivalenza, è che sia contenuto totalmente in un sistema elementare virtuale di specie k, cioè in un sistema intersezione di $r - k$ sistemi lineari di varietà virtuali ad $r - 1$ dimensioni di M_r, fuori di varietà fisse e semifisse a k dimensioni.

Insomma, *la identificazione generale dei sistemi di equivalenza coi sistemi elementari, che è impossibile nel campo delle varietà effettive* (n. 44), *sussiste invece, anche pei sistemi di varietà effettive, nel campo più ampio delle varietà virtuali.*

Ciò prova una volta di più quanto sia naturale e indispensabile il concetto di varietà virtuali, che SEVERI ha introdotto sistematicamente nella geometria algebrica da oltre un trentennio.

48. *Imposizione di punti fissi ad un sistema d'equivalenza.* — È ben noto che imponendo ad un sistema lineare di varietà ad $r - 1$ dimensioni sopra una M_r, di contenere una varietà algebrica di punti fissi, si ottiene ancora un sistema lineare. Cosa può dirsi per la questione analoga, relativa ai sistemi d'equivalenza di specie k sopra M_r?

Se alle varietà W_{d+k-r} di un sistema continuo in S_d, s'impone il passaggio per una varietà algebrica di punti fissi, è chiaro che si ottengono *uno* o *più* sistemi continui di varietà W_{d+k-r}, subordinati al sistema continuo di partenza. Perciò, applicando il teorema del n. 46, che dà la costruzione proiettiva di un sistema d'equivalenza, se ne deduce che:

Le varietà di un sistema d'equivalenza che contengono una varietà algebrica di punti fissi, costituiscono ancora un sistema di equivalenza, eventualmente riducibile.

Per esempio, si consideri la serie d'equivalenza segata, sopra una quadrica non degenere, dalla famiglia ∞^{12} costituita dalle linee del terzo ordine spezzate in una retta e in una conica generiche di S_3. È una serie ∞^{11} [1], di ordine 6. I gruppi della serie che contengono un punto fisso, si ottengono segando la quadrica col sistema delle rette per quel punto e delle coniche, e col sistema delle coniche per quel punto e delle rette. Dunque questi gruppi costituiscono due serie d'equivalenza irriducibili distinte.

[1] La serie risulta ∞^{11}, perchè per un suo gruppo generico passano ∞^1 linee della famiglia.

CAPITOLO IV.

Le serie e i sistemi razionali sopra una varietà. Primi fondamenti sulle corrispondenze algebriche tra varietà.

§ 1. — Le serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie come serie d'equivalenza.

49. *Serie unirazionali (in particolare razionali) di gruppi di punti sopra una curva irriducibile o spezzata.* — In questo Capitolo vogliamo giungere ad un risultato fondamentale che caratterizza le serie e i sistemi d'equivalenza come serie e sistemi razionali di gruppi di punti e di varietà. Nel § 1 tratteremo però, nel modo più esauriente, il caso particolare delle serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie.

Occorre premettere qualche considerazione sulle serie razionali di gruppi di punti sopra una curva irriducibile o spezzata.

È noto [1] che ogni serie razionale di gruppi di punti sopra una curva irriducibile, consta di gruppi equivalenti linearmente. Ma si può mostrare di più, cioè che:

Ogni serie unirazionale di gruppi di punti sopra una curva irriducibile C, consta di gruppi equivalenti.

Si osservi, innanzi tutto, che l'elemento generico descrivente una varietà ∞^r unirazionale (n. 1), può sempre supporsi funzione razionale di r parametri *essenziali* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, per modo che la varietà risulti birazionalmente equivalente ad un'involuzione di ordine $\mu \geq 1$ dello spazio lineare $S_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Invero, se si dà il caso che l'elemento generico della varietà si ottenga in funzione razionale di $s\,(>r)$ parametri $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_s$ *non essenziali*, ad esso risponde nello $S'_s(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ una varietà algebrica W di dimensione $s - r$, descrivente in S'_s un sistema ∞^r, tale che per un punto generico di S'_s passa una sola W. Allora, segando con un S_r di S'_s, ci si riduce al caso precedente, giacchè le

(1) Come segue dal teorema d'Abel e come ha posto in esplicito rilievo Enriques, dando del fatto la prima dimostrazione algebrico-geometrica. Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pagg. 205, 241.

sezioni delle W costituiscono appunto i gruppi di un'involuzione in S_r, la quale risulta in corrispondenza birazionale con la varietà unirazionale assegnata.

Ciò premesso, sia γ la data serie unirazionale di gruppi di punti su C. Se γ è ∞^r, possiamo supporre che il suo gruppo generico dipenda razionalmente da r parametri essenziali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Siccome per un generico punto P di C passano ∞^{r-1} gruppi di γ, nello S_r $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ a P corrisponde una varietà algebrica di dimensione $r-1$, cioè una ipersuperficie di S_r, che è dunque rappresentabile con una *sola* equazione algebrica, d'ordine m, nelle λ:

$$f(P; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = 0,$$

ove i coefficienti son funzioni algebriche ad un valore, cioè razionali, delle coordinate $(x_1, x_2, \ldots)$ di P. Riducendo i coefficienti a polinomi, l'equazione precedente può scriversi sotto la forma:

$$\sum \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \ldots \lambda_r^{i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x) = 0 \quad (i_1 + i_2 + \ldots + i_r \leq m),$$

ed apparisce da ciò evidente che i gruppi di γ (nei quali si può astrarre dai punti fissi) appartengono totalmente alla serie lineare staccata su C, fuori dei punti fissi, dal sistema lineare di forme:

$$\sum \mu_{i_1 i_2 \ldots i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x) = 0.$$

Il ragionamento stesso serve più in generale per dimostrare che:

Ogni sistema unirazionale di varietà ad $r-1$ dimensioni sopra una varietà irriducibile di dimensione r, consta di varietà equivalenti.

Dal teorema dimostrato segue subito altresì che:

I gruppi di una serie unirazionale (o in particolare razionale) sopra una curva riducibile, sono tra loro equivalenti.

Qui, «equivalenti» intendesi nel senso che i gruppi della serie appartengono ad una stessa serie d'equivalenza curvilinea, secondo la definizione del n. 22.

Sia invero γ una serie unirazionale, ∞^r, di gruppi di n punti della curva riducibile $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$; e γ esista, come serie infinita (dai punti fissi possiamo astrarre), sulle componenti C_1, $C_2, \ldots, C_t$ $(t \leq s)$. La serie infinita γ_1, subordinata da γ su C_1, ha il suo gruppo funzione razionale degli r parametri (essenziali per γ, ma non necessariamente per γ_1) mediante cui si può razionalmente determinare un gruppo di γ; sicchè, in virtù del teorema ultimamente stabilito, γ_1 consta di gruppi equivalenti su C_1. Analoga cosa deve dirsi delle serie $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_t$ subordinate da γ su $C_2, C_3, \ldots, C_t$. Ma allora i gruppi di γ son contenuti totalmente

nella serie di equivalenza completa, che, a norma del teorema fondamentale enunciato al n. 22, contiene i gruppi composti da t gruppi tolti dalle serie lineari complete cui appartengono γ_1, $\gamma_2, \cdots, \gamma_t$.

50. *Serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie.* — Sopra una superficie irriducibile F sia data una serie σ, ∞^2, unirazionale, e quindi *razionale* (n. 1), di gruppi di punti. Ci proponiamo di dimostrare che *la serie σ è una serie d'equivalenza sopra la superficie F.* Nella dimostrazione si potrà evidentemente astrarre dagli eventuali punti fissi dei gruppi di σ.

Incominciamo col discutere due casi particolari. Se la serie σ è curvilinea, allora essa è (n. 49) una serie d'equivalenza curvilinea sopra una curva di F, e quindi è altresì (n. 40) una serie d'equivalenza superficiale su F.

Se la serie σ è involutoria, cioè d'indice 1, essa risulta addirittura una serie elementare d'intersezione completa. Invero, data la razionalità di σ, i suoi gruppi si possono far corrispondere biunivocamente ai punti di un piano α, il quale risulta così in corrispondenza $(1, n)$ con la superficie F, se n è l'ordine di σ. Ora, ad un sistema lineare di curve del piano α risponde un sistema lineare di curve su F; e poichè la serie dei punti del piano α può ottenersi come intersezione di due fasci di rette, su F la serie σ potrà ottenersi come intersezione dei due fasci lineari di curve corrispondenti.

Veniamo ora al caso generale in cui la serie sia superficiale e non involutoria, cioè d'indice ν (≥ 2). Posta, come sopra, una corrispondenza birazionale tra i gruppi di σ e i punti di un piano α, ne nasce tra α ed F una corrispondenza algebrica (ν, n). Un punto P di F ed un punto A di α risultano omologhi, quando P è uno degli n punti del gruppo G di σ rappresentato da A; ossia quando A rappresenta uno dei ν gruppi di σ passanti per P. I gruppi di ν punti di α corrispondenti ai punti di F, formano una serie ∞^2, τ, che è contenuta totalmente nella serie $\infty^{2\nu}$ di tutti i gruppi di ν punti del piano.

Fissato in α un punto A, le curve d'ordine $\nu - 1$ col punto $(\nu - 2)$-plo A, formano un sistema lineare Σ di dimensione $2\nu - 2$ e di grado effettivo $2\nu - 3$, la cui curva generica è irriducibile e razionale. Ne viene che per ogni gruppo H di ν punti del piano passano almeno $\infty^{\nu-2}$ curve di Σ, costituenti un sistema lineare Σ'. Supponiamo che i punti di H siano distinti e che A sia scelto fuori delle rette che li congiungono a due a due. Può darsi, ciò

nonostante, che tutte le curve di Σ' siano spezzate; ma si vede che questo può accadere soltanto quando il gruppo H sia costituito da ν punti allineati. Invero, si ricordi anzitutto che una curva d'ordine $\nu-1$ con A $(\nu-2)$-plo può spezzarsi solamente in μ rette uscenti da A ed in una curva irriducibile d'ordine $\nu-\mu-1$ con A $(\nu-\mu-2)$-plo [1]. Allora, se il sistema Σ' ha una componente fissa, questa deve essere comune alle $\binom{\nu}{2}$ curve di Σ', costituite ognuna dalle $\nu-2$ rette che proiettano, da A, $\nu-2$ punti comunque scelti in H, e dalla retta (non passante per A) che congiunge i rimanenti due punti di H. Tale componente è quindi di necessità una retta che contiene tutto il gruppo H. E il sistema Σ', se è costituito da curve spezzate, possiede certamente una componente fissa; perchè in caso contrario esso sarebbe composto colle curve di un fascio, e, non potendo esservi in una medesima curva di Σ' due componenti distinte non costituite da rette del fascio A (chè altrimenti le rette per A avrebbero almeno due intersezioni variabili colla nominata curva di Σ'), ogni curva di Σ' sarebbe formata da un gruppo di $\nu-1$ rette per A, mentre un tal gruppo di rette non può contenere tutti i ν punti di H, non essendo A allineato con alcuna coppia di punti di H. In conclusione è vero che la curva generica di Σ' può essere spezzata soltanto se i punti di H sono allineati.

Ora, nell'ipotesi che il gruppo generico della serie τ risulti allineato, si può eseguire una trasformazione di De Jonquières, a quale muti il piano α in un piano α' e la rete Δ delle rette di α n una rete Δ', di grado 1, di curve di α', *irriducibili*, d'ordine $\nu-1$, con un punto $(\nu-2)$-plo. Così al gruppo H allineato, genericamente variabile in τ, corrisponde un gruppo H' situato su una curva irriducibile della rete Δ'.

Dunque, in ogni caso, possiamo supporre di aver riferito i gruppi della data serie σ su F ai punti di un piano α, in guisa tale che per il gruppo generico H di ν punti di α, che risponde al punto generico di F, passino curve irriducibili d'ordine $\nu-1$ con un punto fisso A $(\nu-2)$-plo; e che quindi *irriducibile* risulti altresì la curva generica del sistema Σ' relativo al gruppo H.

Ciò posto, si osservi che sopra una curva irriducibile di Σ le altre curve del sistema segano una $g^{2\nu-3}_{2\nu-3}$, la quale (avendo dimensione uguale all'ordine) non ha gruppi neutri. Pertanto i

[1] Cfr. la nota [3] a pie' di pag. 46, dove è stabilita la proprietà analoga per i monoidi di S_3.

punti di H presentano ν condizioni indipendenti ai gruppi di questa serie, e le curve di Σ, che passan per H, formano un sistema Σ', di dimensione proprio uguale a $\nu - 2$. Fissati, su α, $\nu-1$ punti generici $B_1,.., B_{\nu-1}$, non vi è dunque nessuna delle $\infty^{\nu-2}$ curve di quel sistema passante per i punti B.

Chiamiamo ora $|E|$ il sistema lineare $\infty^{\nu+1}$, di grado effettivo ν, delle curve razionali d'ordine ν, col punto base $(\nu-1)$-plo A ed i $\nu-1$ punti base semplici B. Il sistema $|E|$ ha come serie caratteristica la serie di tutti i gruppi di ν punti del piano α (n. 28); e quindi, in particolare, per un gruppo H passa almeno un fascio di curve di $|E|$. Vediamo quante di tali curve possono essere spezzate. Le curve E riducibili contengono come parte almeno una retta per A, e, se passan per H, debbon contenere una retta congiungente A con un punto Q di H o con un punto B, perchè altrimenti H starebbe in una curva d'ordine $\nu-1$ col punto $(\nu-2)$-plo A e passante per tutti i punti B. Ora $\nu-1$ punti estratti dal gruppo H insieme ai punti B *individuano* una curva d'ordine $\nu-1$ con A $(\nu-2)$-plo, passante per essi; giacchè una tal curva esiste certamente e non può esistere un fascio di curve analoghe, se no vi sarebbe nel fascio una curva contenente tutti i $2\nu-1$ punti costituiti dal gruppo H e dai punti B: il che contrasta con la conclusione precedente. Analogamente si conclude quando la E spezzata contiene una retta per un B.

Riassumendo: le curve E spezzate, che passan per H, son soltanto le $2\nu-1$ curve ottenute associando ad una retta congiungente A con un punto di H o con un punto B, *la* curva d'ordine $\nu-1$ col punto $(\nu-2)$-plo A, la quale passa per i rimanenti punti del gruppo H e dei B.

Assunto un punto C_1 fuori delle dette $2\nu-1$ curve spezzate, si può dunque affermare che nel sistema lineare $|E_1|$, ∞^ν, di grado $\nu-1$, delle curve E che passan per C_1, *non ve n'è alcuna riducibile, che contenga* H. E siccome per H passa almeno una E_1, del sistema ∞^ν $|E_1|$, questa è irriducibile ed è unica, in quanto il grado del sistema è $\nu-1$. Preso infine un punto C_2 fuori delle suddette $2\nu-1$ curve spezzate e fuori della E_1 che contiene H, nel sistema lineare $|E_2|$, ∞^ν, di grado $\nu-1$, delle E, che passan per C_2, vi è una sola curva irriducibile passante per H e distinta dalla E_1, che contiene lo stesso gruppo.

Ora le coppie di curve E_1, E_2 si taglian, fuori del gruppo base β di $|E|$, in tutti i possibili gruppi di ν punti del piano; cosicchè, *per un generico gruppo* H *della serie* τ *passa una sola curva irriducibile* E_1 *ed una sola curva irriducibile* E_2 *distinta dalla precedente,*

per guisa tale che H risulta l'intersezione completa della coppia E_1, E_2, fuori del gruppo base β di $|E|$.

51. — I coefficienti delle equazioni delle curve E_1, E_2 relative al generico H di τ, ossia al generico punto di F, son funzioni algebriche ad un valore, cioè funzioni razionali del punto stesso. Perciò, se con (ξ, η) s'indicano le coordinate di un punto di α e con (x, y, z) quelle di un punto dello S_3 ove può immaginarsi immersa la superficie F [1], le equazioni di E_1, E_2 saranno del tipo:

$$E_1(\xi, \eta; x, y, z) = 0\ ,\quad E_2(\xi, \eta; x, y, z) = 0\ , \tag{1}$$

dove E_1, E_2 son polinomi nelle 5 variabili, di grado ν in ξ , η [2].

Assegnato un punto generico (x, y, z) di F, le equazioni (1) rappresentano curve effettive che si segano, fuori di β, nel gruppo H di ν punti di α, corrispondenti ad (x, y, z). Perciò la corrispondenza (ν, n) fra α ed F è rappresentata dalle (1) stesse, giacchè una coppia generica di punti variabili di α e di F soddisfacenti alle (1) è una coppia di punti omologhi nella corrispondenza. Ma vediamo di precisare esattamente fino a qual punto la corrispondenza può considerarsi rappresentata dalle (1).

A tal uopo esaminiamo quando possa accadere che per un punto (x, y, z) di F le equazioni (1) abbiano infinite soluzioni. Le (1) si scrivono più precisamente:

$$E_k \equiv \sum a_{ijk}\, \xi^i \eta^j = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{2}$$

dove le a sono polinomi in x, y, z. Perchè esistano infinite soluzioni comuni occorre dunque e basta che si annulli identicamente il risultante, p. es. rispetto a ξ, dell'eliminazione di η fra le (2); ciò ac-

[1] Si può sempre ridursi a questo mediante una generica proiezione della superficie priva di punti multipli (in un conveniente iperspazio), alla quale supponiamo riferito il ragionamento, dato che le nostre considerazioni hanno carattere invariantivo. Si osservi inoltre che i punti di F, sui quali porteremo l'attenzione, posson supporsi semplici per la superficie, chè altrimenti basterebbe cambiare il centro di proiezione, in modo che la linea doppia della superficie non contenga più quei punti. D'altronde i ragionamenti seguenti potrebbero svilupparsi analogamente anche supponendo la superficie immersa in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

[2] Ed anche, se vuolsi (nonostante non occorra), dello stesso grado μ in x, y, z, come si vede tenendo fisso uno dei punti C_1, C_2 e facendo variare con continuità l'altro, con che varia uno dei polinomi E_1, E_2 e non l'altro; e, siccome durante la variazione continua il grado non può crescere, si conclude come s'è affermato.

cadendo o quando le due curve abbiano una componente comune, ovvero quando svanisca identicamente una almeno delle (2), e cioè siano soddisfatte le equazioni $a_{ijk} = 0$ ($k = 1$ o 2). Questo risultante non è identicamente nullo su F, perchè le (1) corrispondenti al generico punto di F son curve effettive ed hanno un numero finito di punti comuni. E siccome il risultante medesimo è un polinomio nelle a_{ijk}, ξ, esso non potrà annullarsi identicamente, rispetto a ξ, se non quando (x, y, z) cada in certi punti isolati o su una certa linea di F. Questo insieme β' di punti eccezionali, è rappresentato su F uguagliando a zero i coefficienti di ξ nel predetto polinomio, e comprende i due insiemi β_1, β_2 di punti di F, per i quali svaniscono rispettivamente le equazioni di E_1, E_2. L'insieme β_k ($k = 1, 2$) è la parte situata su F del gruppo base del sistema (razionale) ∞^2 di superficie $E_k = 0$, dello spazio (x, y, z), che si ottengono dalle (2) al variare di (ξ, η) in α.

Siano ora $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un punto di α ed un punto di F soddisfacenti alle (1) ed esterni rispettivamente al gruppo base β ed al luogo β'. Valgono le identità:

$$E_1(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0\,, \quad E_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0\,.$$

Le curve

$$E_1(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0\,, \quad E_2(\xi, \eta; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \tag{3}$$

di α son effettive e si segano in un numero finito di punti, per l'ipotesi che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia fuori del luogo β'. Esse staccano pertanto, fuori di β, il gruppo H dei ν punti di α corrispondenti ad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Poichè $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ sta sulle curve (3) ed è distinto dai punti di β, fa parte del gruppo H. Dunque *la corrispondenza* (ν, n) *fra* α *ed* F *è rappresentata dalle* (1) *nel senso che due punti di* α *e di* F *soddisfacenti alle* (1) *ed esterni ai luoghi* β, β' *sono omologhi.*

Le superficie $E_k = 0$, date dalle (2), segano su F, fuori dell'eventuale parte curvilinea del luogo β_k, un sistema (razionale) ∞^2 di curve D_k, il quale appartiene totalmente al sistema lineare segato su F da tutte le superficie dell'ordine delle E_k, che passan per lo stesso gruppo base. Ebbene, le curve D_1, D_2 di F, associate al generico punto (ξ, η) di α, si tagliano, fuori del luogo β', negli n punti del gruppo G di σ, corrispondente a (ξ, η). Le ulteriori intersezioni di D_1, D_2 o son punti fissi dei sistemi lineari $|D_1|$, $|D_2|$ e son dunque comuni a β_1, β_2 e stanno perciò in β', o son variabili sopra una curva Γ (irriducibile o riducibile), facente parte del luogo β'.

Il gruppo di questi punti variabili su Γ è funzione razionale

del punto (ξ , η) di α, epperò quel gruppo varia in una serie unirazionale [1], cioè (n. 49) in una serie d'equivalenza su Γ.

In definitiva, attesa la definizione del n. 23, si conclude che *ogni serie σ superficiale, ∞^2, razionale, di gruppi di n punti di F, è sempre contenuta in una serie elementare dello stesso ordine, intersezione parziale (o in particolare completa) di due sistemi lineari $|D_1|$, $|D_2|$ di curve tracciati su F. Le curve D_1 , D_2, che staccano un gruppo generico variabile in σ, si tagliano nei punti del gruppo, e fuori di questo (e di eventuali punti fissi) si tagliano in un gruppo di m punti, mobile in una serie (razionale) di gruppi equivalenti sopra una curva Γ, irriducibile o riducibile.*

Osservazione 1ª. — Per rendere del tutto rigorosa la dimostrazione precedente, occorre aggiungere che due curve D_1, D_2 associate ad un generico punto di α, si segan *semplicemente* (cioè con molteplicità d'intersezione 1) in ciascuno dei punti del gruppo G associato. Ove ciò non accadesse, potrebbe solo concludersi che un certo multiplo di σ sarebbe contenuto in una serie elementare su F, e da questo non ne seguirebbe che anche σ è contenuta in una serie elementare; giacchè, contrariamente a quello che avviene per le serie lineari su una curva, sopra una superficie un sottomultiplo di una serie d'equivalenza non è di necessità una serie d'equivalenza (lo si vedrà in seguito).

Proviamo dunque che le dette intersezioni sono semplici. Suppongasi che al generico punto $\overline{Q}$ di α siano associate due curve $\overline{D}_1$, $\overline{D}_2$, che abbiano in un punto $\overline{P}$ di $\overline{G}$ (semplice per F) molteplicità d'intersezione ≥ 1. Siccome a $\overline{Q}$ risponde un gruppo di n punti distinti di F, uno solo, P, dei punti omologhi al punto Q variabile su α nell'intorno di $\overline{Q}$, varia nell'intorno di $\overline{P}$, ed è pertanto funzione analitica olomorfa di Q, definita nel detto intorno . Cioè le coordinate x, y, z di P son funzioni olomorfe delle coordinate (ξ , η) di Q, attorno a $(\overline{\xi} , \overline{\eta})$.

Nulla vieta di supporre che z sia, nell'intorno di $\overline{P}$, funzione olomorfa di x, y ; e siccome ad un P variabile nell'intorno di $\overline{P}$ risponde un sol punto Q variabile nell'intorno di $\overline{Q}$ (chè a $\overline{P}$, essendo generico su F, risponde un gruppo di ν punti distinti, della serie τ), le ξ , η risultano, attorno a $\overline{P}$, funzioni olomorfe di x, y. Sostituita nelle (1), al posto di z, la funzione olomorfa di x, y a cui z è uguale, si hanno le equazioni analitiche in x, y e

[1] Ed anzi, in una serie razionale, dato che si tratta di una serie al più di dimensione 2.

algebriche in ξ , η :

$$K_1(\xi, \eta ; x, y) = 0 \ , \ K_2(\xi, \eta ; x, y) = 0 \ , \tag{4}$$

che rappresentano la corrispondenza biunivoca regolare subordinata fra gli intorni di $\overline{P}$, $\overline{Q}$ dalla corrispondenza (ν , n) posta tra α , F. Le (4) divengono identità in (ξ , η), quando al posto di x , y si sostituiscono le funzioni olomorfe di ξ , η a cui son uguali le coordinate x, y di P. E da queste identità, con facili calcoli, tenuto conto dell'annullarsi delle derivate *totali* di K_1, K_2 rispetto a ξ , η, si trae :

$$\frac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (\xi , \eta)} = \frac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (x , y)} \frac{\partial (x , y)}{\partial (\xi , \eta)} ,$$

la quale prova che, se è zero $\dfrac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (x , y)}$, è pure zero $\dfrac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (\xi , \eta)}$,

e viceversa, giacchè vale altresì la :

$$\frac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (x , y)} = \frac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (\xi , \eta)} \frac{\partial (\xi , \eta)}{\partial (x , y)} ,$$

il determinante funzionale di x, y rispetto a ξ , η o di ξ , η rispetto ad x , y, essendo, nell'intorno considerato delle rispettive variabili indipendenti, finito e non nullo.

Dunque, se le curve $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ di F, per ogni dato Q attorno a $\overline{Q}$, hanno molteplicità d'intersezione > 1 in P, anche le curve $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ di α, per ogni dato P attorno a $\overline{P}$, hanno molteplicità d'intersezione > 1 in Q [1]. Siccome le $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ di α, cioè le $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ corrispondenti al generico P di F, si segano semplicemente in ciascuno dei ν punti del gruppo H di τ omologo di P, ne deriva che le D_1 , D_2 corrispondenti al generico Q di α, si segano semplicemente in ciascuno dei punti del gruppo G omologo di Q.

Osservazione 2ª. — Una prima parte della dimostrazione svolta consiste nel costruire due curve mediante le quali pos-

[1] Dire che le curve $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ di F hanno in P molteplicità d'intersezione > 1, equivale a dire o che una almeno K_1 di esse ha in P un punto multiplo, e risulta allora $\dfrac{\partial K_1}{\partial x} = \dfrac{\partial K_1}{\partial y} = 0$; oppure che le due curve si toccano. In ogni caso è dunque $\dfrac{\partial (K_1 , K_2)}{\partial (x , y)} = 0$. Analoga cosa dicasi delle curve $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ di α.

sa individuarsi per intersezione il gruppo H di ν punti del piano α , e che siano a loro volta individuate razionalmente da H.

Si sono infatti costruite due tali curve E_1 , E_2, irriducibili, d'ordine ν ; ma per lo scopo detto non è indispensabile che le due curve siano irriducibili, bastando che non abbiano componenti comuni. Due curve siffatte, di ordini diversi (il che non nuoce), si ottengono subito altrimenti. Basta costruire, entro α, la rappresentazione monoidale graduale del gruppo H, individuata razionalmente da H (nn. 38, 39). Se si prende la rappresentazione d'ordine μ (qualunque, purchè maggiore di un certo minimo), si ottiene H come intersezione di una curva irriducibile d'ordine μ con un punto A $(\mu - 1)$-plo, e della curva spezzata nelle ν rette che proiettano i punti di H da A.

Il teorema dimostrato trovasi per la prima volta a pag. 320 della Memoria [2] di F. Severi (cit. a pag. 44). Una dimostrazione completamente esauriente (qui riprodotta con qualche lieve semplificazione) è a pag. 82 della Memoria [5] dell'A. Cfr. altresì la Memoria [6], pag. 495.

Nei lavori citati è data l'estensione del teorema al caso di serie razionali $\infty^\rho (\rho > 2)$ di gruppi di punti sopra una superficie, e anche di sistemi razionali ∞^l di varietà ad $r - l$ dimensioni sopra una M_r. Ma tutti questi teoremi rientrano come casi particolari nel *teorema fondamentale* del successivo § 3.

§ 2. — Nozioni preliminari sulle corrispondenze algebriche tra varietà.

52. *Proprietà generali delle corrispondenze algebriche tra varietà* (1). — Prima di passare all'estensione del teorema dimostrato per le serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie, ai sistemi, di dimensione qualunque, razionali o unirazionali di V_k sopra una M_r, occorre premettere talune proprietà fondamentali delle corrispondenze tra varietà algebriche, che saranno più tardi necessarie anche per una più ampia teoria delle corrispondenze. Perciò ci intratterremo su queste proprietà con maggior diffusione di quel che non serva per gli immediati scopi.

Siano M_r ed N_s due varietà algebriche di dimensioni r, s, appartenenti agli spazi S_d , $S'_{d'}$. Consideriamo la varietà algebrica W_{r+s}, di dimensione $r + s$, *prodotto* delle due varietà, cioè

(1) Cfr., per alcune delle successive proprietà, le pag. 193 e segg. del citato *Trattato di Geometria algebrica* di F. Severi.

la varietà delle coppie x, x' di punti di M_r , N_s (x punto variabile su M_r , x' punto variabile su N_s). Un'imagine proiettiva di W_{r+s} viene automaticamente tracciata sulla varietà di SEGRE prodotto degli spazi lineari S_d , $S'_{d'}$ (n. 19). Quando le varietà M_r , N_s son irriducibili anche la W_{r+s} è irriducibile (1).

In particolare potrà essere $s = r$ e $N_s = M_r$. Allora N_s è una *copia* (birazionale) di M_r e il fatto che sia sovrapposta ad M_r è da considerarsi puramente accidentale.

La W_{r+s} rimane il medesimo ente (definito a meno di trasformazioni birazionali) se si sostituiscono ad M_r , N_s due loro trasformate birazionali. Però quando le M_r , N_s son sovrapposte ($s = r$) , oltre alla W_{2r}, che è la varietà delle coppie *ordinate* x, x', si può considerare la varietà delle coppie *non ordinate* x, x'. In questo ultimo caso le due varietà M_r , N_s non si distinguono nel fatto l'una dall'altra e bisogna perciò riguardarle sempre sovrapposte, assoggettandole dunque, allorchè si vogliano trasformare, ad una medesima trasformazione birazionale.

Se $M_r = N_s$ ($r = s$), la varietà delle coppie x, x' non ordinate è birazionalmente equivalente ad un'involuzione di 2° ordine sulla W_{2r}, poichè da ogni coppia x, x' non ordinata ne derivano due ordinate. La detta involuzione possiede su W_{2r} una varietà ad r dimensioni di coincidenze, rappresentante le coppie x, x' costituite da punti coincidenti di M_r, N_s. Per le considerazioni successive la varietà delle coppie non ordinate (che del resto, ripetiamo, interviene soltanto quando le due varietà sono coincidenti) non ha importanza. Essa si presenterebbe invece naturalmente nello studio delle corrispondenze *simmetriche* di una varietà in sè.

Chiamasi *corrispondenza algebrica* (pura) tra le varietà M_r , N_s una varietà algebrica (pura) di coppie di punti x, x', cioè una varietà algebrica tracciata sopra W_{r+s}. La dimensione di questa varietà è la *dimensione della corrispondenza.*

Somma di due date corrispondenze algebriche è la somma delle due varietà algebriche rappresentanti, su W_{r+s}, le due date corrispondenze.

Si possono manifestamente considerare *corrispondenze algebriche virtuali*, aventi per imagini su W_{r+s} varietà algebriche virtuali. Date più corrispondenze tra M_r , N_s, ha perciò senso la considerazione di una loro qualsiasi combinazione lineare a coef ficienti interi arbitrari, positivi o negativi o nulli.

Corrispondenti od *omologhi di un punto* x di M_r sono i punti

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 194.

x' di N_s, che fanno parte delle coppie della data corrispondenza contenenti quel punto x. Analogamente, collo scambio di x, x' e di M_r , N_s.

Nella somma di due corrispondenze, ad x, dato sulla M_r, risponde la somma delle varietà riempite dagli x' omologhi di x nelle due date corrispondenze (e, similmente, collo scambio di x, x').

Viceversa, se son date due corrispondenze fra M_r , N_s e ad ogni x di M_r si associano gli (eventuali) x' omologhi nell'una e nell'altra, la varietà delle coppie x, x' così costruita, per tutte le posizioni di x in M_r, comprende tutte le coppie x, x' della corrispondenza somma delle due date, cioè coincide con questa.

Una corrispondenza tra M_r , N_s può esser considerata da tre differenti punti di vista :

1) Come *varietà* di coppie x, x'.

2) Come *operazione* associante ad ogni x di M_r certi punti x' di N_s .

3) Come *operazione* (*inversa* della precedente), associante ad ogni x' di N_s certi punti x di M_r .

Bisogna dunque adoperare per essa tre simboli diversi: p. es. V, T, T^{-1}. Quando però non vi sia ambiguità, lo stesso simbolo T serve per indicare la varietà e la corrispondenza diretta.

53. *Corrispondenze tra varietà irriducibili.* — Hanno particolare importanza le corrispondenze tra varietà M_r , N_s irriducibili, perchè *una corrispondenza tra varietà riducibili si scinde sempre nella somma di più corrispondenze tra varietà irriducibili.*

Una corrispondenza algebrica, essendo una varietà algebrica, può essere *irriducibile* o *riducibile.*

Non è detto che una corrispondenza tra varietà irriducibili sia irriducibile : basta p. es. pensare alla somma di due corrispondenze fra varietà siffatte.

Per contro una corrispondenza irriducibile non può agire effettivamente che fra i punti di due varietà irriducibili, anche se è data fra due varietà riducibili. Essa, insomma, in questo caso, non agisce che fra i punti di due parti (irriducibili) convenienti delle due varietà.

Una corrispondenza fra M_r , N_s non agisce necessariamente su tutti i punti delle due varietà. È chiaro che affinchè una corrispondenza fra M_r , N_s agisca su tutti i punti di una delle due varietà, occorre (ma non basta) che la sua dimensione non sia inferiore alla dimensione di quella varietà ; e se si vuole che agisca

su tutti i punti delle due varietà, bisogna (ma non basta) che abbia dimensione non minore della più grande dimensione delle due varietà.

Una corrispondenza (*anche irriducibile*) fra due varietà dicesi *degenere* quando non agisce su tutti i punti delle due varietà. Se $s \leqslant r$, ogni corrispondenza di dimensione $< r$ fra M_r ed N_s è degenere. Per esempio una corrispondenza che associ un punto fisso x di una curva M con tutti i punti x' di un'altra curva (irriducibile) N, è una *corrispondenza irriducibile degenere*; se invece si associano ai punti x di un gruppo di un numero finito > 1 di punti di M tutti i punti x' di N, si ottiene una *corrispondenza riducibile degenere*, somma di un numero finito di corrispondenze del tipo precedente.

Queste corrispondenze degeneri fra le curve M, N hanno dimensione 1, come una corrispondenza qualunque irriducibile e non degenere fra M, N, la quale associa ad ogni x (o x') di M (o N) un gruppo di un numero finito di punti di N (o rispettivamente di M).

Fra due superficie irriducibili M, N si hanno anzitutto le corrispondenze che son degeneri pel fatto di avere dimensione < 2: cioè le corrispondenze fra le coppie di curve algebriche tracciate su M, N (tralasciando il caso ovvio delle corrispondenze di dimensione 0 che son formate da un numero finito di coppie di M, N).

Il SEVERI (nella sua teoria generale delle corrispondenze tra superficie e varietà, che esporremo in seguito) ha considerato i tre tipi seguenti di corrispondenze degeneri irriducibili ∞^2 tra due superficie (irriducibili) M, N:

1) *Corrispondenze degeneri (elementari) di 1ª specie*, ognuna delle quali fa corrispondere a un punto x variabile sopra una curva irriducibile di M tutti i punti x' d'una curva C', variabile in N e descrivente ivi un sistema irriducibile ∞^1. (Analogamente, scambiando M, N).

2) *Corrispondenze degeneri (elementari) di 2ª specie*, ognuna delle quali consta delle ∞^2 coppie x, x' situate su due curve fisse irriducibili C, C' di M, N.

3) *Corrispondenze degeneri (elementari) di 3ª specie*, ognuna delle quali associa a un punto x fisso in M tutti i punti x' di N. (Analogamente, scambiando M, N).

54. — *Relazioni fra le dimensioni delle due varietà e la dimensione di una loro corrispondenza non degenere.* — Fra le M_r, N_s (irriducibili) sia data una corrispondenza non degenere (irriducibile) T, di dimensione ρ. Ad un punto generico x di M_r ri-

sponde su N_s mediante T una varietà effettiva V'_l, che è irriducibile o per lo meno pura (1). Infatti, se V' contenesse parti di differenti dimensioni, queste non si potrebbero scambiare fra di loro per tutte le possibili circolazioni di x sopra M_r; e allora, associando ad x una parte di V'_l e tutte le altre parti della varietà con quella permutabili mediante le circolazioni di x, distaccheremmo da T una corrispondenza algebrica parziale; epperò T non sarebbe irriducibile.

Il fatto che V'_l sia pura e di dimensione costante per x variabile a partire da una posizione generica, non impedisce però che per posizioni particolari di x sulla M_r (priva di punti multipli!) venga a cessare la univocità della posizione limite di V'_l, che vale invece quando x tende ad una generica posizione limite. Le posizioni limiti particolari di x, per le quali cessa la detta univocità, si chiamano *punti fondamentali della corrispondenza* e ogni varietà riempita dalle posizioni limiti della V'_l, funzione di x, per x tendente ad un punto fondamentale, dicesi una *varietà fondamentale della corrispondenza.*

Le stesse cose possono ripetersi mutando le veci delle due varietà. Ad un x' generico di N_s risponde in M_r *una* varietà irriducibile o pura V_k, riempita dagli x omologhi di x'.

Ebbene, è facile provare che:

$$\rho = r + l = s + k .$$

Determinare la dimensione ρ di T equivale invero a provare che ρ sono i parametri *essenziali* atti a determinare la posizione di una coppia x, x' di T (entro W_{r+s}); cioè che, nell'intorno di un gruppo generico di valori di questi parametri, havvi una corrispondenza biunivoca continua tra i gruppi di valori dei parametri stessi e le coppie x, x' situate attorno alla coppia corrispondente a quel gruppo generico (fisso) di valori dei parametri.

Ora per *individuare* una coppia x, x' di T attorno ad una generica coppia prefissata x_0, x'_0 di T, si posson assegnare gli r parametri uniformizzanti analiticamente l'intorno di x_0 in M_r. Con ciò riesce analiticamente individuata la varietà V'_l di N_s corrispondente ad un x di M_r variabile attorno ad x_0; e questa varietà appartiene, su N_s, all'intorno della varietà $V'^{(0)}_l$ corrispondente ad x_0. Vi sarà pertanto una componente (se V' è riducibile), di dimensione l, di V'_l, che si muove attorno a quella,

(1) È facile costruire esempi di corrispondenze T irriducibili per cui V' è riducibile.

fra le componenti di $V_l'^{(0)}$, che contiene x_0'. Una volta fissato x attorno ad x_0, il punto x', attorno ad x_0', si individuerà analiticamente sulla predetta componente mediante l parametri.

Viceversa, data la coppia x, x' attorno ad x_0, x_0', gli $r + l$ parametri sopra considerati riescono analiticamente individuati. Onde $\rho = r + l$. E similmente $\rho = s + k$.

Il risultato ottenuto si può anche enunciare così:

Se sopra una M_r irriducibile è tracciato un sistema irriducibile ∞^s di varietà (pure) V_k, ed è $k + s \geqslant r$, per un punto generico di M_r passano $\infty^l (l = k + s - r)$ varietà V_k (formanti un sistema irriducibile o puro).

O con altre parole:

Se per un punto generico x di una M_r irriducibile una data condizione algebrica (variabile) c è pura e di dimensione $r - k$, per la varietà V_k dei punti di M_r, che soddisfanno a c, il contenere un dato generico x costituisce una condizione algebrica pura della stessa dimensione $r - k$ [1].

Così p. es. per un punto di S_3 giacere sopra una curva algebrica di una data famiglia completa irriducibile è condizione doppia e per una curva di questa famiglia passare per un punto è condizione doppia; per un punto di S_4 giacere in un piano è condizione doppia e per un piano di S_4 passare per un punto è condizione doppia; ecc.

In ciò consiste il *principio del computo delle costanti* enunciato esplicitamente da SCHUBERT [2], benchè senza le debite precisazioni, come quelle da noi esposte, che ne assicurano la incondizionata validità.

55. *Corrispondenze semplici e composte.* — Nell'enunciare il penultimo teorema del n. precedente, come equivalente alla relazione $r + l = s + k$, ivi stabilita, si è implicitamente escluso che la medesima V_k potesse provenire da infiniti punti x' di N_s. Nel fatto può qualche volta accadere che per ogni generico x' di N_s vi sia un numero finito (> 0) di altri punti x' di N_s, cui corrisponde su M_r la V_k omologa di quel dato x', oppure una varietà algebrica ∞^σ di punti siffatti. Allora il sistema delle V_k non è più

[1] Si dice che una condizione algebrica imposta ai punti di una varietà irriducibile M_r è *pura* e di *dimensione* $r - k$ quando i punti che ad essa soddisfanno formano una varietà pura di dimensione k. Ved. i lavori di F. SEVERI sui fondamenti della geometria numerativa, citati alla fine di questo §.

[2] *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig, (1879).

in corrispondenza birazionale con N_s, ma lo è invece con un'involuzione di N_s o con un sistema di varietà Z'_σ tracciate sopra N_s e tali che per un generico x' ne passi una sola, così che il sistema delle Z'_σ è $\infty^{s-\sigma}$ e di indice 1. Le Z'_σ son certamente varietà pure, perchè, attesa la irriducibilità di T, è irriducibile il sistema delle V_k; mentre, se le Z'_σ non fossero pure, il loro sistema risulterebbe riducibile.

Quando il sistema delle V_k è birazionalmente equivalente ad un'involuzione su N_s, la sua dimensione rimane s; epperò non c'è nulla da modificare nel teorema enunciato. Se invece è $\sigma > 0$, il sistema delle V_k ha la dimensione $s - \sigma$ ed è birazionalmente equivalente ad una varietà (irriducibile) $N'_{s-\sigma}$, imagine birazionale del sistema delle Z'_σ.

Indichiamo con T' la corrispondenza, irriducibile e non degenere, che associa ad ogni punto y' di $N'_{s-\sigma}$ una V_k. Allora ad ogni coppia (x, y') di T' corrispondono ∞^σ coppie (x, x') di T; e ad ogni coppia di T *una* coppia di T'. Siccome le V_k invadono M_r (per l'ipotesi che T e *quindi* T' non siano degeneri), sarà necessariamente $(s - \sigma) + k \geqslant r$. La T' trovasi così nelle condizioni contemplate per T nel n. prec., epperò *per un punto generico* x *di* M_r *passano* ∞^λ $(\lambda = l - \sigma)$ *varietà* V_k.

La T' risulta inoltre di dimensione $\rho - \sigma$ $(\rho = r + l = s + k)$; mentre T continua ad avere la dimensione ρ, perchè il ragionamento con cui si provò che $\rho = r + l = s + k$ è indipendente dal fatto che il sistema delle V_k sia o meno in corrispondenza birazionale con N_s. D'altronde attesa la corrispondenza algebrica $(1, \infty^\sigma)$ tra T' e T [1], la dimensione di T non può che eccedere di σ unità quella di T'.

Nel caso in esame diremo che *sopra* N_s *la corrispondenza* T *è composta con un sistema* $\infty^{s-\sigma}$, *d'indice* 1, *di varietà pure* Z'_σ $(\sigma \geqslant 0)$ *(con un'involuzione, se* $\sigma = 0$*). Può anche darsi che* T *sia similmente composta sopra* M_r, *o che sia composta tanto su* M_r *che su* N_s.

Quando T non è composta sopra una delle varietà (M_r o N_s) su cui agisce, si dirà *semplice su quella varietà.* Se poi non è composta nè su M_r nè su N_s, si dirà *semplice,* senz'altro.

Ad una corrispondenza T, *composta su* N_s *con un sistema di varietà* ∞^σ, *si può sostituire una corrispondenza* T' *semplice su* $N'_{s-\sigma}$

[1] Diciamo che una corrispondenza algebrica fra due varietà $T'_{\rho-\sigma}$, T_ρ è $(1, \infty^\sigma)$, quando ad ogni punto di T_ρ risponde un punto di $T'_{\rho-\sigma}$ e ad ogni punto di $T'_{\rho-\sigma}$ rispondono ∞^σ punti di T_ρ.

e trasformata razionale di T, in guisa che fra T', T c'è una corrispondenza algebrica $(1, \infty^{\sigma})$.

Quest'osservazione permette di trasportare ovviamente alle corrispondenze composte le proprietà delle corrispondenze semplici. Perciò nel seguito noi supporremo sempre (salvo contrario avviso) di aver da fare con corrispondenze semplici.

56. *Le varietà rappresentanti le coppie con un punto fisso nel prodotto di due varietà.* — Fra le corrispondenze degeneri irriducibili presentano importanza fondamentale quelle costituite dalle coppie x, x', che hanno x dato su M_r (e x' non dato su N_s) o x' dato su N_s (e x non dato su M_r). Sono i prodotti del tipo $x \times N_s$ o $x' \times M_r$. Porremo:

$$\Phi(x) = x \times N_s \quad , \quad \Phi'(x') = x' \times M_r .$$

Le corrispondenze degeneri $\Phi(x)$ o Φ (così scriveremo quando non occorra tener presente il punto x di cui Φ è funzione razionale) hanno la dimensione s; e le corrispondenze degeneri $\Phi'(x')$ o Φ' hanno la dimensione r. Sul prodotto $W_{r+s} = M_r \times N_s$ le Φ formano un sistema irriducibile Σ, ∞^r, in corrispondenza birazionale con M_r; e le Φ' un sistema irriducibile Σ', ∞^s, in corrispondenza birazionale con N_s. Due Φ non s'incontrano mai tra di loro; e così due Φ'; mentre una Φ ed una Φ' si tagliano sempre in un (solo) punto, che è loro intersezione semplice.

Per un punto qualunque di W_{r+s} passa sempre una sola Φ ed una sola Φ' (cioè Σ, Σ' son sistemi d'*indice* 1).

È chiaro che la proprietà di contenere due sistemi dei tipi Σ, Σ', *caratterizza* una W_{r+s} come prodotto di due varietà imagini birazionali degli enti Σ, Σ'.

Data una corrispondenza T fra M_r, N_s, le coppie x, x' di T, che hanno x assegnato su M_r, costituiscono l'intersezione *effettiva* o *virtuale* di T (come varietà di W_{r+s}) colla varietà $\Phi(x)$, cioè la varietà (Φ, T). Naturalmente, perchè il simbolo (Φ, T) abbia senso, noi supporremo (d'accordo con l'ipotesi fatta nei nn. 10,11) che la dimensione ρ di T soddisfaccia alla limitazione $\rho \geqslant r$. Allora la dimensione di (Φ, T) sarà sempre uguale a $\rho - r$. E se vogliamo poter considerare la varietà delle (eventuali) coppie x, x' aventi x' dato, come varietà (Φ', T), dovremo similmente supporre $\rho \geqslant s$. Le due condizioni son soddisfatte quando ρ non è inferiore alla più grande delle dimensioni r, s.

Allorchè ρ non soddisfa a questa duplice limitazione, siccome il luogo degli x o degli x' è certamente in tal caso una varietà



subordinata al rispettivo ambiente (M_r o N_s), ci potremo ridurre a quanto precede, considerando la corrispondenza fra le varietà su cui essa agisce effettivamente.

57. *Una proprietà fondamentale delle corrispondenze degeneri.* — Sia T una corrispondenza irriducibile degenere di dimensione $\rho \geqslant r$; e supponiamo che T *non agisca su tutti gli* x (potendo o no agire su tutti gli x'). Allora la varietà T non ha intersezioni effettive colla generica $\Phi(x)$, epperò *le particolari* Φ *che incontrano* T *la intersecano secondo varietà algebriche aventi ognuna la dimensione* $\geqslant \rho - r + 1$ [1].

I punti x che dànno luogo alle $\Phi(x)$, incontranti T, costituiscono su M_r una varietà algebrica V, che è certamente irriducibile, per la irriducibilità di T. Sia l la dimensione di V. A un punto x generico di V risponde una varietà algebrica V', che è pura, per la ragione addotta al principio del n. 54. Designata con $l' (\geqslant \rho - r + 1)$ la dimensione di V', risulterà $\rho = l + l'$. Inoltre il luogo di $V'(x)$, quando x descrive V, o sarà tutta la N_s oppure una varietà a questa subordinata, ma irriducibile a causa dell'irriducibilità di T. Dunque:

[1] La proprietà che qui si usa, nella sua forma meno espressiva è caso particolare del principio della conservazione del numero, di cui, com'è noto, Severi ha dato fin dal 1912 una completa e rigorosa dimostrazione (ved. i lavori citati alla fine del §). Precisamente: *Se due varietà algebriche pure* V_k, W_h *tracciate sopra una* M_r *irriducibile (e priva di punti multipli), di dimensione* $r = k + h$ *non hanno intersezioni effettive e* W_h *è variabile in un sistema algebrico* Σ, *le* W_h *di questo sistema, che incontrano* V_k, *non hanno con questa intersezioni isolate.*

Invero, se una W_h di Σ avesse con V_k un'intersezione isolata P, a norma di una proprietà enunciata al n. 7, tutte le W_h dell'intorno di quella W_h in Σ incontrerebbero V_k nell'intorno di P, onde esisterebbero in Σ, che sia di dimensione l, ∞^l varietà intersecanti V_k; mentre le W_h di Σ che incontrano la V_k data formano entro Σ un sistema algebrico Σ', subordinato a Σ, cioè di dimensione $< l$.

Il teorema ottenuto è più espressivo di quello cui si perverrebbe applicando il principio della conservazione del numero, perchè questo permetterebbe soltanto di affermare che le V_k, W_h di cui sopra non possono avere qualche intersezione senza averne infinite; ma non che debbano mancare intersezioni isolate.

Se invece di essere $r = k + h$, è $r < k + h$, si considereranno le sezioni di M_r, V_k, W_h con uno spazio lineare $S_{d-(k+h-r)}$ dello spazio S_d cui appartiene M_r. Ci si riporta così al caso sopra considerato e si può pertanto enunciare:

Quando $k + h > r$, *restando pel resto immutate le ipotesi precedenti, ogni punto comune a* V_k *e ad una particolare* W_h *che la incontri, appartiene ad una varietà comune a* V_k, W_h *di dimensione almeno uguale ad* $k + h - r + 1$.

Una corrispondenza degenere irriducibile T, fra M_r, N_s, avente la dimensione $\rho \geq r$, che non agisca su tutti i punti di M_r, è una corrispondenza fra una varietà irriducibile V_l subordinata ad M_r ed una varietà irriducibile coincidente con N_s o subordinata a questa.

In ogni caso la varietà delle coppie x, x' di T corrispondenti ad un generico x di M_r, è una varietà virtuale zero di dimensione $\rho - r$ (1), *la quale diviene una varietà effettiva pura di una certa dimensione $l' \geq \rho - r + 1$, ma funzionalmente equivalente a zero, quando x cada nel generico punto di V_l.*

Perchè sia determinata la varietà virtuale zero, a $\rho - r$ dimensioni, corrispondente al simbolo (Φ, T) occorre (secondo il concetto consueto) che sia scelta un'equivalenza fra le varietà ad s dimensioni di W_{r+s}. Allora (Φ, T) riesce definita su T a meno dell'equivalenza, fra le varietà a $\rho - r$ dimensioni di T, sezione di quella considerata fra le varietà ad s dimensioni di M.

P. es. se M_1, N_1 son due curve irriducibili, e T è la corrispondenza che associa ad un punto x_0 di M_1 tutti gli x' di N_1, ad un generico x di M_1 corrisponde mediante T un gruppo virtuale zero, che varia in una serie lineare d'ordine zero, se l'equivalenza prescelta fra le curve della superficie $W_2 = M_1 \times N_1$ è l'equivalenza lineare.

58. *Le corrispondenze algebriche fra due spazi lineari.* — Consideriamo in modo particolare il caso di due varietà M_r, N_s, che siano addirittura due spazi lineari.

Denotiamo con $x_1, \ldots, x_r$ le coordinate (proiettive non omogenee) di un punto x mobile su M_r e con $x'_1, \ldots, x'_s$ le coordinate (proiettive non omogenee) di un punto x' mobile in N_s. Sia T una corrispondenza irriducibile fra M_r, N_s e $N'_\sigma (\sigma \leq s)$ la varietà irriducibile di N_s (coincidente con N_s o subordinata ad N_s) luogo dei punti x' su cui agisce T. Ad un generico x' di N'_σ corrisponde in M_r, mediante T, *una* varietà pura V_k, che è dunque funzione razionale di x'. Pertanto V_k sarà rappresentabile in M_r con un sistema di equazioni nelle $x_1, \ldots, x_r$ a coefficienti funzioni razionali delle x' ; e potremo addirittura supporre che si tratti di un sistema di equazioni del tipo :

$$f_i(x_1, \ldots, x_r; x'_1, \ldots, x'_s) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

(1) Invero si ricordi (nn. 10,11) che, se due varietà V_k, W_h entro una M_r ($k + h \geq r$) non s'incontrano, l'intersezione virtuale (V, W) è la varietà zero a $k + h - r$ dimensioni che definisce l'equivalenza traccia sopra W dell'equivalenza fissata in M_r tra varietà di dimensione k.

in cui le f_i son polinomi nelle x, x'. Se N'_σ coincide con N_s, le x' non son ulteriormente legate; se invece N_σ è subordinata ad N_s, per rappresentare compiutamente T occorrerà aggiungere le equazioni:

$$\varphi_j(x'_1, \ldots, x'_s) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

che rappresentano N'_σ in N_s. In tal caso, preso x' fuori di N'_σ, siccome T non agisce su quel punto, le (5) potranno non avere alcuna soluzione comune (nello spazio proiettivo M_r), come equazioni nelle x; mentre diverranno di certo compatibili quando x' cade su N'_σ.

Per particolari posizioni di x' su N_σ talune delle (5) o tutte potranno svanire identicamente o intersecarsi in una varietà di dimensione $> k$. Gli omologhi di x' in T dovranno esser allora determinati cercando le possibili posizioni limiti di $V_k(x')$ per x' tendente ad una, x'_0, di quelle particolari posizioni.

Può darsi così che la varietà comune alle (5) per $x' = x'_0$ non sia tutta ricoperta dalle posizioni limiti di $V_k(x')$ per $x' \to x'_0$ (questo accade certamente, se T non contiene il prodotto $x_0 \times M_r$, allorchè le (5) svaniscono per $x' = x'_0$) cioè che le (5) non rappresentino soltanto la data corrispondenza T, ma la somma di T e di un'altra corrispondenza U, operante sopra varietà subordinate a N'_σ (riempite da punti eccezionali come x'_0).

Se il luogo dei punti x appartenenti alle coppie x, x' di T è in M_r una varietà Z_t (irriducibile per la irriducibilità di T), eventualmente coincidente con tutto M_r, la corrispondenza inversa T^{-1} è rappresentata, fuori delle coppie eccezionali di U, dalle (5), cui si aggiunga il sistema di equazioni di Z_t in M_r (sistema che manca quando $Z_t = M_r$).

59. — Anzichè rappresentare V_k con un sol sistema di equazioni, ci converrà per gli scopi ulteriori di ricorrere ad una rappresentazione monoidale graduale di V_k, razionalmente individuata da questa varietà (n. 39), cioè dal punto x':

$$V = (F, \Phi_1 - \Psi_1, \ldots, \Phi_{r-k-1} - \Psi_{r-k-1}). \tag{7}$$

La (7) porge:

$$V = \sum (-1)^s W_k(i_1, i_2, \ldots, i_s),$$

ove le singole W_k sono varietà *pure* definite da:

$$W_k(i_1, i_2, \ldots, i_s) = (F, \Psi \ , \ldots, \Psi_{i_s}, \Phi_{i_{s+1}}, \ldots, \Phi_{i_{r-k-1}}), \tag{8}$$

e il sommatorio è esteso a tutti i gruppi di s indici ($s = 1, 2, \ldots, r-k-1$) $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ scelti fra gl'indici $1, 2, \ldots, r-k-1$, denotando con $i_{s+1}, \ldots, i_{r-k-1}$ gl'indici complementari.

Poichè le forme F, Φ, Ψ, mediante cui si costruisce la rappresentazione (7), entro M_r, sono individuate da x', così la varietà $W_k(i_1, \ldots, i_s)$ è funzione razionale di x'; e si può pertanto considerare la corrispondenza algebrica $T(i_1, \ldots, i_s)$ ottenuta associando al punto x', mobile su N'_σ, i punti x di $W_k(i_1, \ldots, i_s)$. Verrà (n. 52):

$$T = \sum (-1)^s T(i_1, \ldots, i_s).$$

Le singole corrispondenze $T(i_1, \ldots, i_s)$ si studiano più facilmente della corrispondenza T, perchè ognuna di esse associa al punto x' di N'_σ una varietà a k dimensioni *intersezione completa di* $r-k$ *forme*.

Per semplicità di notazione indicheremo ora con S una qualunque delle corrispondenze $T(i_1, \ldots, i_s)$ e con W_k la varietà degli x omologhi di x' in S. Questa corrispondenza non è necessariamente irriducibile, ma è pura. Invero, la S può esser riducibile soltanto quando, per le circolazioni di x', vi sono talune parti (di dimensione k, perchè W_k è pura) della W_k, che si permutano tra loro, ma non colle altre parti della stessa varietà. Per ogni gruppo di componenti di W_k permutantisi fra loro, si ha una componente irriducibile di S, la quale ha la dimensione $\sigma + k$. Pertanto S, entro il prodotto $M_r \times N_s$, risulta una varietà pura di dimensione $\sigma + k$.

Dato che nella (8) le forme F, Φ, Ψ, che porgono per intersezione completa W_k, son individuate razionalmente da x', potremo rappresentare $W_k(x')$ in M_r con un sistema di $r-k$ equazioni del tipo:

$$\alpha_i(x_1, \ldots, x_r; x'_1, \ldots, x'_s) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r-k) \tag{9}$$

(α_i polinomi nelle x, x') da aggiungersi alle equazioni (6) di N'_σ. Allora le (9), per x' generico su N'_σ, avranno in comune *soltanto* la $W_k(x')$.

Nel caso in esame le (9) considerate da sole, all'infuori cioè dei legami (6) fra le x', son sempre compatibili anche quando x' è generico nello spazio *proiettivo* [1] N_s, perchè $r-k$ forme di uno

(1) Insistiamo (per quanto la cosa sia elementare!) nel richiamare l'attenzione sul fatto che gli spazi M_r, N_s devono esser considerati proiettivamente, perchè le intersezioni delle varietà in oggetto potrebbero cadere all'infinito. Si deve insomma considerare le cose come se si fosse introdotta l'omogeneità sia nelle coordinate x come nelle x'.

spazio lineare M_r si tagliano sempre in una varietà ad almeno k dimensioni. Nel nostro caso le (9) rappresentano una varietà pura W_k anche per x' generico in N_s, perchè la loro varietà intersezione non potrebbe contenere parti di dimensioni $> k$ per x' generico in N_s, senza che al limite lo stesso avvenisse quando x' cade in N'_σ. La conclusione è questa:

Se una corrispondenza pura S fra due spazi lineari M_r, N_s associa al punto x', mobile in una varietà irriducibile N'_σ di N_s, una varietà (pura) W_k intersezione completa di $r - k$ forme di M_r, sicchè S ha la dimensione $\sigma + k$, esiste sempre una corrispondenza pura $\bar{S}$, di dimensione $\rho = s + k$, contenente S, che agisce su tutti i punti di N_s e fa corrispondere al generico x' di N_s una varietà (pura) W_k intersezione completa. La S può definirsi come la totalità delle coppie x, x' di $\bar{S}$ aventi x' su N'_σ.

Abbiamo affermato che $\bar{S}$ è una corrispondenza pura (come S). Invero, essa è perfettamente *definita* dalla condizione di associare al generico x' di N_s la W_k di M_r, intersezione completa delle (9). Con ciò restano definite le W_k, intersezioni complete, da associarsi a particolari posizioni, anche fondamentali, di x' (n. 54). Tali W_k sono limiti della $W_k(x')$ generica, per ogni possibile modo di far tendere x' a particolari posizioni. Pertanto, se $\bar{S}$ contenesse una componente di dimensione $< \rho$, ad un generico x' questa componente farebbe corrispondere una varietà di dimensione $< k$, parte completa di W_k, che non sarebbe dunque pura.

Occorre però avvertire che le (9) possono essere soddisfatte oltre che dalle coppie di $\bar{S}$, anche da coppie non ottenibili come limiti di coppie generiche delle singole componenti (di dimensione ρ) di $\bar{S}$. I punti x' di queste coppie eccezionali non riempiono N_s; e quindi si distribuiscono in un numero finito di varietà subordinate ad N_s. Cioè:

Le (9) rappresentano la corrispondenza $\bar{S}$ (ed in quanto x' varia su N'_σ, la corrispondenza S) del precedente enunciato, fuori eventualmente di talune varietà di coppie eccezionali, i cui punti x' riempiono su N_s (o rispettivamente su N'_σ) un numero finito di varietà subordinate.

Le (9) rappresentano insomma la somma di S e di eventuali corrispondenze, degeneri su N_s e forse anche su M_r.

Osservazione. — Sul prodotto $M_r \times N_s$ la intersezione completa delle (9) consta di $\bar{S}$ e di eventuali altre varietà, di coppie eccezionali, che non incontran la generica varietà $x' \times M_r$: p. es. che giaccion sopra qualche $x' \times M_r$. Viceversa, partendo da

una tal varietà eccezionale e costruendo una varietà (9) per essa, la (9) possiede di fatto, oltre $\bar{S}$, talune varietà di coppie eccezionali.

60. — La corrispondenza $\bar{S}$ ha la dimensione $\rho \geqslant s$ (perchè $k \geqslant 0$) e non è degenere su N_s; ma può esserlo su M_r. Per esempio, se $\rho < r$, la $\bar{S}$ è sempre degenere su M_r.

Pel seguito c'interessano i casi seguenti:

a) La $\bar{S}$ non è degenere neppure su M_r, e quindi la sua dimensione soddisfa alla limitazione $\rho \geqslant r$.

b) La dimensione ρ soddisfa alla $\rho \geqslant r$ e tuttavia $\bar{S}$ è degenere su M_r.

Nel caso *a*), ad un x generico di M_r corrisponde su N_s, mediante $\bar{S}$, una varietà (necessariamente pura) V'_h, di dimensione $h = s + k - r = \rho - r$ (n. 54). Ciò implica che ognuna delle (9) contenga effettivamente le x'; chè altrimenti ogni punto x di una coppia x, x' soddisfacente alle (9), e quindi anche ogni punto x di una coppia x, x' di $\bar{S}$, starebbe in una varietà subordinata a M_r. Per x generico in M_r, le (9) rappresentano (in N_s) $r - k = s - h$ forme algebriche che si tagliano in una varietà ad almeno h dimensioni, contenente la V'_h, sopra definita. Ma anche se V'_h è soltanto una parte della intersezione delle dette forme, è certo che, al variare di x in M_r, la V'_h resta definita come la sola parte di quest'intersezione, che descrive tutto N_s. Le altre eventuali componenti, abbiano la dimensione h o maggiore, si muovono in varietà subordinate ad N_s; e ciò perchè i punti x' delle coppie x, x' soddisfacenti alle (9) ed eccezionali rispetto ad $\bar{S}$, non invadono tutto N_s

Possiamo pertanto enunciare che:

Se $\bar{S}$ non è degenere su M_r (sicchè è certo $\rho \geqslant r$), ad un generico x di M_r essa associa in N_s una varietà pura V'_h di dimensione $h = s + k - r$, che è definita come intersezione delle (9), *fuori di eventuali varietà, le quali, al variare di x, si muovono su varietà subordinate ad N_s.*

Passiamo ad esaminare il caso *b*). Questo caso si presenta sempre che, essendo $\rho \geqslant r$, qualcuna delle (9) non dipenda effettivamente dalle x'.

A norma del n. 57, ad un x generico di M_r, in conseguenza della $\rho \geqslant r$, corrisponde in N_s, mediante $\bar{S}$, una varietà virtuale zero $V'_{\rho-r}$, di dimensione $\rho - r = h$, che diviene effettiva e di dimensione $\geqslant h + 1$ quando x cade nel luogo suddetto. La V'_h è definita come varietà virtuale zero rispetto ai sistemi algebrici di varietà di dimensione h di N_s. E siccome ogni tal sistema

è di equivalenza (razionale) (n. 43), così V'_h è lo zero rispetto alla relazione di equivalenza fra le varietà di dimensione h di N_s. In conclusione:

Se la dimensione ρ *di* $\overline{S}$ *soddisfa alla* $\rho \geqslant r$ *e tuttavia* $\overline{S}$ *è degenere in* M_r, *ad un generico* x *di* M_r *risponde in* N_s, *mediante* $\overline{S}$, *una varietà virtuale di dimensione* h, *che è, in* N_s, *lo zero dell'equivalenza (razionale) tra le varietà della stessa dimensione e che resta equivalente a zero (pur diventando effettiva e di dimensione* $> h$) *quando* x *cade nel luogo di* M_r *su cui agisce* $\overline{S}$.

61. — Un'ultima importante proprietà ci resta da stabilire prima di passare all'applicazione che abbiamo in vista ai sistemi d'equivalenza sulle varietà algebriche. Essa è espressa dal seguente teorema:

Se $\overline{S}$ *non è degenere (tanto su* N_s *che su* M_r) *e ad un* x' *generico associa in* M_r *una* W_k [*pura, intersezione completa delle* (9)], *priva di parti multiple, ad* x *generico in* M_r *essa fa corrispondere in* N_s *una varietà pura di dimensione normale* $h = s + k - r$ *e priva di parti multiple, comune alle* (9). *La eventuale ulteriore intersezione delle* (9) *consta di componenti mobili su varietà subordinate ad* N_s.

Per la dimostrazione, si fissino su M_r, N_s due spazi lineari generici S_t, S'_t $(t = r - k = s - h)$. La generica $W_k(x')$ sega S_t in un certo numero finito α d'intersezioni *semplici* x, che corrispondono ad x' mediante $\overline{S}$. Viceversa, dato x generico in S_t, la varietà (9) interseca S'_t in una varietà effettiva di dimensione effettiva $\geqslant 0$ e di dimensione virtuale zero, funzionalmente equivalente ad un gruppo di un numero finito di punti di S'_t, tra cui vi sono α' punti omologhi di x in $\overline{S}$. Si tratta di provare che questo gruppo virtuale di α' punti, è effettivamente un gruppo di α' punti distinti (cioè di α' intersezioni *semplici*).

Mediante le rappresentazioni parametriche degli spazi S_t, S'_t la corrispondenza (9), limitata ai punti x, x' di questi spazi, si riduce ad una corrispondenza rappresentata da un sistema di equazioni del tipo:

$$\psi_i(\lambda_1, \dots \lambda_t; \lambda'_1, \dots, \lambda'_t) = 0 \qquad (i = 1, \dots, t), \tag{10}$$

ove $\lambda_1, \dots, \lambda_t$; $\lambda'_1, \dots, \lambda'_t$ sono i parametri rispettivi di x, x' su S_t, S'_t e le ψ_i son polinomi in λ, λ', trasformati dei polinomi (9) mediante le suddette rappresentazioni parametriche. Eventuali coppie λ, λ' soddisfacenti alle (10) e che non son limiti di coppie λ, λ' generiche soddisfacenti alle equazioni stesse, posson presentarsi soltanto quando λ o λ' si muovono su varietà su-

bordinate a S_t, S'_t, intersezioni di questi spazi colle eventuali varietà di punti eccezionali x, x' appartenenti a M_r, N_s.

Le (10) rappresentano altresì la corrispondenza subordinata fra S_t, S'_t dalla $\overline{S}$, nel senso che a λ' generico in S'_t, corrispondono in S_t, mediante le (10), gli α punti λ, omologhi di λ' mediante $\overline{S}$.

In conseguenza dell'ipotesi del teorema, per x' generico in N_s, cioè λ' generico in S'_t, le intersezioni delle (10) sono semplici.

Sia $\lambda_0\,(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_t^0)$, $\lambda'_0\,(\lambda_1'^0, \ldots, \lambda_t'^0)$ una coppia generica di $\overline{S}$ sopra S_t, S'_t. Essa può ottenersi scegliendo genericamente λ'_0 in S'_t e prendendo per λ_0 una qualunque delle intersezioni semplici di S_t colla W_k corrispondente a λ'_0.

Poichè, variando λ' attorno a λ'_0, vi è *uno solo* degli α punti omologhi di λ', che muovesi attorno a λ_0, così, mercè le (10), le λ risultano, attorno a λ'_0, funzioni olomorfe dei parametri λ', assumenti i valori $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_t^0$ per $\lambda' = \lambda'_0$. Sostituite queste funzioni nelle (10), esse divengono identità nelle λ', e si ha pertanto identicamente:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda'_\varepsilon} + \sum_{j=1}^{t} \frac{\partial \psi_i}{\partial \lambda_j} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda'_\varepsilon} = 0 \qquad (i, \varepsilon = 1, \ldots, t)\,.$$

Da queste relazioni deducesi subito:

$$(11) \qquad \frac{\partial (\psi_1, \ldots, \psi_t)}{\partial (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)} = (-1)^t \frac{\partial (\psi_1, \ldots, \psi_t)}{\partial (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)} \frac{\partial (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)}{\partial (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)}\,.$$

Ora, nell'intorno di λ'_0 il determinante funzionale $\dfrac{\partial (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)}{\partial (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)}$ è una funzione olomorfa, non identicamente nulla, perchè altrimenti le $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ sarebbero funzionalmente dipendenti e λ descriverebbe una varietà subordinata a S_t. Attesa la genericità della coppia λ_0, λ'_0 (cioè di λ'_0 in un intorno t-dimensionale genericamente fissato in S'_t) fra le coppie che soddisfanno alle (10), si può addirittura supporre che il determinante funzionale suddetto sia diverso da zero in $\lambda' = \lambda'_0$ (e quindi $\lambda = \lambda_0$).

Inoltre il determinante $\dfrac{\partial (\psi_1, \ldots, \psi_t)}{\partial (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)}$, per λ' genericamente dato attorno a λ'_0, è funzione olomorfa di λ attorno a λ_0, diversa da zero, perchè tale è per $\lambda' = \lambda'_0$, $\lambda = \lambda_0$ (1). Dunque, in forza

(1) Se, invero, in $\lambda = \lambda_0$, $\lambda' = \lambda_0'$ fosse $\dfrac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_t)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)} = 0$, o qualcuna delle forme $\psi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_t; \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_t'^0) = 0$ avrebbe in λ^0 un punto multiplo oppure gl'iperpiani ad esse tangenti in λ^0 sarebbero linearmente dipendenti; e, in ogni caso, si tratterebbe di un'intersezione non semplice.

della (11), nell'intorno (λ, λ') della coppia (λ_0, λ'_0), è:

$$\frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_t)}{\partial(\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)} \neq 0 .$$

Questo significa che le forme

$$\psi_i(\lambda^0_1, \ldots \lambda^0_t ; \lambda'_1, \ldots, \lambda'_t) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, t),$$

hanno in λ'^0 un'intersezione semplice, la quale, appunto perchè semplice, è necessariamente isolata [1]. Il teorema è così dimostrato.

Osservazione. — Il teorema permane immutato se lo si riferisce ad una corrispondenza algebrica non degenere indotta da $\overline{S}$ fra due varietà algebriche irriducibili $\overline{M}_{r'}$, $\overline{N}_{s'}$, appartenenti rispettivamente agli spazi M_r, N_s ed aventi le dimensioni r', s' non minori di $r - k = s - h$. L'ipotesi che assicura anche in tal caso la validità del teorema, è che $\overline{S}$ faccia corrispondere ad un generico x' di $\overline{N}_{s'}$, una varietà effettiva a $r' + k - r$ dimensioni, priva di parti multiple, intersezione di $W_k(x')$ con $\overline{M}_{r'}$. Si deduce allora che ad un generico x di $\overline{M}_{r'}$, risponde, su $\overline{N}_{s'}$, mediante $\overline{S}$, una varietà effettiva a $s' + h - s$ dimensioni, priva di parti multiple, intersezione di $V'_h(x)$ con $\overline{N}_{s'}$. Questa varietà di $\overline{N}_{s'}$, è comune alle (9), e, se tali equazioni si segano, su $\overline{N}_{s'}$, fuori di $V'_h(x)$, le ulteriori componenti dell'intersezione si muovono su varietà subordinate ad $\overline{N}_{s'}$.

Infatti la uniformizzazione degl'intorni di due punti (semplici!) costituenti una coppia generica della corrispondenza subordinata da $\overline{S}$ fra $M^{r'}$, $N_{s'}$,, riduce tali intorni a quelli di due punti in due spazi lineari $S_{r'}$, $S_{s'}$; onde vale la conclusione precedente, in quanto essa poggia soltanto su argomentazioni in piccolo.

Più generalmente, poichè l'uniformizzazione con funzioni olomorfe riduce sempre gl'intorni di due punti (semplici) x, x' di due varietà algebriche qualunque M_r, N_s agl'intorni di due punti di due spazi lineari di dimensioni r, s e d'altronde l'intorno di x sopra una varietà algebrica W_k, tracciata su M_r e passante per x,

[1] In uno spazio S'_t un'intersezione semplice di t forme è necessariamente isolata, perchè se appartenesse ad una varietà di dimensione ≥ 1 comune a queste forme, nel punto considerato esse avrebbero qualche tangente comune.

è compiutamente rappresentabile con $r - k$ equazioni analitiche olomorfe, che erano algebriche, nel caso speciale prima considerato (e analogamente dicasi per l'intorno di un punto d'una varietà V'_h tracciata in N_s), si conclude che:

Se fra due varietà irriducibili qualunque M_r, N_s intercede una corrispondenza T non degenere nè su M_r nè su N_s, la quale faccia corrispondere su M_r ad un generico x' di N_s una varietà pura W_k PRIVA DI PARTI MULTIPLE, *essa fa corrispondere su N_s ad un generico x di M_r una varietà pura V'_h ($h = s + k - r$)* PRIVA DI PARTI MULTIPLE.

Notizie bibliografiche sui primi concetti fondamentali relativi alle corrispondenze algebriche tra varietà algebriche (con speciale riguardo però alle corrispondenze algebriche tra curve) trovansi nel citato *Trattato di Geometria algebrica* di F. SEVERI, pag. 240 e seguenti. Qui basterà ricordare che la semplice definizione di corrispondenza tra due varietà, come varietà contenuta nel loro prodotto, risale a C. SEGRE; ma il grande geometra si limitò a porre tale definizione in via quasi incidentale senza iniziare alcuna teoria generale delle corrispondenze. Per le corrispondenze tra curve si posson trovare ampie notizie bibliografiche nel citato Trattato (oltrechè nell'articolo di L. BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen*, della « Encyclopädie der Math. Wissenschaften », Band III, 2 Teil, 2 Hälfte B.). Le corrispondenze tra superficie, studiate in taluni dei loro aspetti in lavori di SEVERI e di ZEUTHEN risalenti a oltre trent'anni fa, sono state considerate in generale da SEVERI nelle Memorie [5], [6], [8], [9], [16], citate a pag. 44. Infine la teoria algebrica generale delle corrispondenze tra varietà è stata sviluppata dallo stesso SEVERI nell Memorie [15], [18], [20], citate a pag. 44 e 45. In queste Lezioni i concetti accennati per sommi capi nella [20], sono sviluppati con la necessaria ampiezza e compiutezza.

I lavori di F. SEVERI sui fondamenti della geometria numerativa, a cui si allude nelle pagine precedenti, trovansi nei « Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo », (1913), pag. 313 (*Sul principio della conservazione del numero*), e negli « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », (1916), pag. 1121 (*Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche*).

§ 3. — IL TEOREMA FONDAMENTALE. (1)

62. *Sistemi razionali e unirazionali di V_k entro una M^r irriducibile.* — Sia Σ un sistema ∞^s di varietà pure V_k sopra una M_r irriducibile, priva di punti multipli in un certo spazio S, del quale diremo x il punto variabile. Supponiamo che Σ sia unirazionale (in particolare razionale).

Se la generica V_k è riducibile, un gruppo $V_k^{(1)}$ di componenti

(1) Con questo § termina la parte delle presenti Lezioni esposta dall'Autore, dal gennaio al maggio 1937-XV, all'Università di Roma.

irriducibili di V_k, che siano permutabili tra loro per le circolazioni di V_k entro Σ, dà luogo ad un *medesimo* sistema irriducibile Σ_1. La varietà (riducibile, se il gruppo consta di più di una varietà) $V_k^{(1)}$ è parte di V_k o coincide con V_k; ma in ogni caso è razionalmente individuata da V_k, cioè dagli s parametri (essenziali) con cui V_k può esser individuata entro Σ, che, si ricordi, è unirazionale. Pertanto il sistema $\Sigma_1^{(1)}$, descritto da $V_k^{(1)}$ sarà unirazionale e di dimensione $\leqslant s$ (n. 1). Questo non vuol dire che sia unirazionale Σ_1: di questo sistema non sono invero elementi le $V_k^{(1)}$, ma le *singole* componenti della $V_k^{(1)}$. Su Σ_1 è unirazionale la varietà dei gruppi $V_k^{(1)}$ dei suoi elementi, che costituisce appunto il sistema $\Sigma_1^{(1)}$.

Così p. es. su di una superficie irrazionale F la somma di una serie lineare ∞^1 sopra una curva irrazionale Σ_1 di F e di un'involuzione razionale ∞^2, Σ_2, che invada F, è una serie razionale ∞^3, i cui gruppi si scindono in una parte razionale $V_0^{(1)}$ descrivente la curva irrazionale Σ_1, ed in una parte residua descrivente la superficie irrazionale F. Riassumendo:

Le singole componenti irriducibili di una V_k mobile in un sistema unirazionale ∞^s, entro M_r, posson descrivere diversi sistemi irriducibili, anche non unirazionali. Però la varietà formata da più componenti permutabili di V_k, si muove sempre in un sistema unirazionale di dimensione $\leqslant s$.

Per dimostrare il teorema che abbiamo in vista circa l'equivalenza entro M_r delle V_k di un sistema unirazionale, basta dunque dimostrare il teorema per una varietà $V_k^{(1)}$, le cui parti (permutabili tra loro) descrivono un *solo* sistema irriducibile; e ciò perchè la somma di più sistemi d'equivalenza è un sistema d'equivalenza. È vantaggioso di considerare un sistema siffatto di varietà $V_k^{(1)}$, perchè ad esso è applicabile il principio del computo delle costanti (n. 54).

63. *Dimostrazione del teorema fondamentale.* — Il teorema di cui trattasi si enuncia così:

Sopra una varietà irriducibile M_r ogni sistema unirazionale (in particolare razionale) di varietà (pure) V_k è un sistema d'equivalenza.

Il teorema è vero per $r = k + 1$ (n. 49). Potremo pertanto ammetterlo per un dato k sulle varietà di dimensione $< r$ e dimostrarlo sopra una M_r. E in forza del teorema del n. prec. potremo inoltre supporre, se V_k è riducibile, che sia costituita da componenti permutabili, descriventi uno stesso sistema irriducibile.

Sbarazziamo il terreno dal caso in cui le V_k del dato sistema unirazionale Σ, ∞^s, non riempiano M_r (il che accade sempre che sia $k + s < r$, ma non soltanto allora). Siccome le parti di V_k son permutabili tra loro, la varietà subordinata ad M_r, riempita dai loro punti, è irriducibile. In virtù del teorema ammesso, si conclude che Σ è un sistema di equivalenza su tale varietà, e quindi anche su M_r (n. 40).

Il caso essenziale è quello in cui Σ riempie M_r, sicchè è necessariamente $k + s \geqslant r$. Allora (n. 54) per un punto generico di M_r passano ∞^h $(h = k + s - r)$ varietà V_k di Σ, formanti un sistema irriducibile o per lo meno puro.

Le varietà V_k possono determinarsi *razionalmente* entro Σ con s parametri essenziali x' (n. 49), che assumeremo a coordinate di punto in uno spazio lineare N_s. Per $s > 2$ non si potrà esigere che vi sia corrispondenza birazionale tra le V_k e i punti x' di N_s (n. 1); ma soltanto che vi sia corrispondenza birazionale tra le V_k e i gruppi di una certa involuzione I_μ $(\mu \geqslant 1)$ esistente sopra N_s.

Nasce così una corrispondenza T fra M_r ed N_s. Una coppia x, x' appartiene a questa corrispondenza quando x' sta in un gruppo di I_μ, che rappresenta una V_k uscente da x. Sicchè, se $\mu > 1$, la corrispondenza T è composta mediante I_μ sopra N_s (n. 55); ma ciò non dà luogo ad inconveniente alcuno pel seguito.

Il sistema irriducibile o puro delle V_k passanti pel generico x di M_r è rappresentato su N_s da una varietà irriducibile o pura V'_h, funzione razionale di x e appartenente ad I_μ (cioè tale che se x' è un punto di V'_h gli altri $\mu - 1$ punti appartenenti al gruppo di I_μ individuato da x' giacciono pure su V'_h). Le componenti di $V'_h(x)$, per x generico in M_r, risultano semplici, se le V_k di Σ sono semplici, come noi supponiamo (n. 61, Oss.). È vero che le componenti della generica V_k potrebbero esser multiple (tutte della stessa molteplicità, perchè son permutabili e tale molteplicità sarebbe da attribuirsi all'intera V_k); ma in tal caso, astraendo dal fattore intero che moltiplicherebbe V_k, si otterrebbe una $\overline{V}_k$ semplice, a parti permutabili, funzione razionale di x', come lo è V_k. Dimostrato il teorema per $\overline{V}_k$, risulterebbe dimostrato per V_k, perchè il multiplo secondo un dato intero di un sistema d'equivalenza è un sistema d'equivalenza.

Possiam dunque ammettere senza restrizione la semplicità delle parti della generica V_k e quindi della generica V'_h.

La corrispondenza T sopra definita è una corrispondenza fra la varietà M_r dello spazio lineare S_d e lo spazio lineare N_s, la quale associa al generico x di M_r una varietà pura $V'_h(x)$ di N_s.

Ci troviamo dunque nel caso considerato nel n. 58 e seguenti (1). Invero, la corrispondenza T gode anche della proprietà di esser irriducibile, perchè, se non lo fosse, ad un generico x' di N_s risponderebbe una $V_k(x')$, in cui vi sarebbe una parte delle componenti permutabili tra loro, ma non colle restanti, contrariamente all'ipotesi.

Mediante una rappresentazione monoidale graduale di $V'_h(x)$, razionalmente determinata da V'_h, cioè da x, verremo a sostituire a T una somma algebrica di più corrispondenze pure del tipo S considerato (salvo i debiti cangiamenti di notazione) nel n. 59. E, come in quel n., la S potrà estendersi in una $\bar{S}$, fra S_d ed N_s, rappresentata da un sistema di equazioni del tipo:

$$\alpha_i(x_1, \dots, x_d; x'_1, \dots, x'_s) = 0 \qquad (i = 1, \dots, s-h), \tag{12}$$

(α_i polinomi nelle x, x'), fuori di eventuali coppie eccezionali, che non son limiti di coppie generiche soddisfacenti a queste equazioni ed i cui x od i cui x' stanno in varietà subordinate a S_d, N_s.

Si è detto che la varietà V'_h è priva di parti multiple; tuttavia può darsi che tale non sia ognuna delle varietà intersezioni complete, delle quali V'_h risulta somma algebrica mediante la rappresentazione graduale scelta (2). Cioè può darsi che la varietà $\bar{V}'_h$, intersezione delle (12), corrispondente al punto x generico di S_d in una delle $\bar{S}$, possieda parti multiple. Ora, per il seguito, supporremo invece che ogni tal $\bar{V}'_h$ sia *priva di parti multiple*. Con ciò non si viene ad introdurre restrizione. Invero, ci si riduce sempre a questo caso, sostituendo alle $s-h$ forme di N_s che definiscono $\bar{V}'_h$, $s-h$ forme generiche degli stessi ordini, razionalmente determinate da V'_h (3). Così facendo, si sostituisce a $\bar{V}'_h$ (le cui eventuali componenti multiple si contino con le debite molteplicità) una varietà equivalente in N_s, e ad $\bar{S}$ una corrispondenza appartenente con $\bar{S}$ allo stesso sistema continuo, cioè una corrispondenza equivalente a $\bar{S}$ in $N^s \times S_d$, perchè sopra

(1) Pel raffronto occorre tener presente che gli spazi M_r, N_s della ricerca precedente, son qui sostituiti rispettivamente da N_s, S_d e la N_σ del n. 58 è qui sostituita da M_r.

(2) Ciò invero accade già nei casi più semplici, p. es. in quello della rappresentazione monoidale di una curva sghemba.

(3) Questa determinazione razionale si ottiene, p. es., ponendo un'omografia entro il sistema lineare delle forme, a cui appartiene una data forma di quelle che s' intersecano in $\bar{V}'_h$, in modo che ad essa risponda una forma generica di quell'ordine.

una varietà razionale come $N_s \times S_d$ (che è la varietà di SEGRE relativa a due spazi; cfr. n. 19), ogni sistema continuo di varietà appartiene totalmente ad un sistema d'equivalenza (n. 43). D'altra parte, ponendo in luogo delle corrispondenze $\bar{S}$ altre equivalenti, anche ogni varietà che si ottenga in relazione alle $\bar{S}$, mutasi in una varietà equivalente (1). E siccome le varietà V_k del sistema unirazionale Σ possono ricostruirsi a partire dalle $\bar{S}$ (come subito mostreremo), così si viene in definitiva a sostituire al sistema Σ un altro sistema unirazionale costituito da varietà equivalenti alle V_k. Una volta dimostrato che il nuovo sistema è un sistema d'equivalenza, la stessa proprietà sussiste, perciò, nei riguardi del sistema primitivo.

La $\bar{S}$ ha la dimensione $\rho = d + h$ (n. 59), e, siccome $h = k + s - r$, così la dimensione di S risulta pure espressa da $\rho = d + k + s - r \geqslant s$. Cioè non è soltanto $\rho \geqslant d$, ma anche $\rho \geqslant s$, e così la $\bar{S}$ può presentare solamente uno dei casi *a*), *b*) considerati nel n. 60.

Qualora $\bar{S}$ sia del tipo *a*), cioè non degenere in N_s (come è di sua natura non degenere in S_d), siccome ad un x generico di M_r — e quindi di S_d — essa fa corrispondere una $\bar{V}'_h$, intersezione completa delle (12) e priva di parti multiple, così ad un x' generico di N_s essa fa corrispondere in S_d una varietà effettiva W di dimensione $\rho - s = d + k - r$, priva di parti multiple (n. 61). Tale varietà è comune alle (12), e se queste s'intersecano altrove, le componenti dell'ulteriore intersezione, di dimensione $\geqslant d + k - r$, si muovono sopra varietà subordinate a S_d. La W *interseca* M_r in una varietà $\bar{V}_k$, e la interseca semplicemente lungo ciascuna componente di questa varietà (n. 61, Oss.). Le eventuali ulteriori intersezioni della varietà (12) con M_r si muovono su varietà subordinate a M_r (2). Il gruppo di queste componenti mobili è fun-

(1) Così la varietà W_{d+k-r} di S_d che corrisponde in $\bar{S}$ ad un x' di N_s mutasi in una varietà equivalente entro S_d. Infatti, l'intersezione $(\Phi(x'), \bar{S})$, dove $\Phi(x') = x' \times S_d$, al variare continuo di $\bar{S}$, descrive un sistema d'equivalenza entro $\Phi(x')$. E la varietà W_{d+k-r} si ottiene dalla intersezione scritta, semplicemente proiettando sullo spazio S_d; ove si scelga per modello della varietà di SEGRE, $N_s \times S_d$, quello (non privo di eccezioni) costituito da uno spazio di dimensione $s + d$, nel quale siano $(x'_1, \ldots, x'_s, x_1, \ldots, x)$ coordinate non omogenee di punto (cfr. n. 19).

Così pure, l'intersezione di W_{d+k-r} con M_r, al variare di $\bar{S}$, descrive un sistema d'equivalenza in M_r (n. 40).

(2) Non potrebbe accadere che M_r fosse contenuta nella varietà di S_d descritta dall'ulteriore intersezione delle (12) fuori di W, al variare di x' in N_s, perchè

zione razionale di x', epperò è funzione razionale di x' ogni sottogruppo di tali componenti, che si permutino esclusivamente fra loro per le circolazioni di x'. Da ciò, in virtù del teorema ammesso per le varietà di dimensione $< r$, si deduce che ciascuno dei suddetti sottogruppi descrive sulla varietà irriducibile su cui si muove un sistema d'equivalenza. Ora, la varietà completa intersezione delle (12) descrive, entro S_d, un sistema di equivalenza di specie $d + k - r$; e la sua intersezione con M_r descrive a sua volta, su M_r, un sistema d'equivalenza di specie k (n. 40). Trascurando varietà semifisse (n. 40), si conclude dunque che altresì la varietà $\overline{V}_k(x')$, che la S fa corrispondere in M_r ad un punto x' mobile in N_s, varia descrivendo un sistema d'equivalenza di specie k su M_r.

Se la corrispondenza $\overline{S}$ è del tipo b), essa fa corrispondere in S_d, ad un x' generico di N_s, una varietà virtuale zero W a $\rho - s = d + k - r$ dimensioni, mobile in un sistema di equivalenza (n. 60) e che interseca pertanto M_r secondo una varietà virtuale zero di dimensione k, mobile in un sistema d'equivalenza.

Ciascuna delle corrispondenze di cui T è somma algebrica, associa dunque ad x' una varietà a k dimensioni di M_r, descrivente ivi un sistema d'equivalenza. Pertanto la varietà V_k che T associa ad x' e che descrive il dato sistema unirazionale Σ, è somma algebrica di più varietà mobili in sistemi d'equivalenza. Si conclude che Σ è esso medesimo un sistema d'equivalenza.

64. *I sistemi d'equivalenza come sistemi razionali di varietà virtuali sopra una varietà irriducibile.* — Dalla proprietà di un sistema d'equivalenza di potersi considerare come somma algebrica di più sistemi d'intersezione completa, ciascuno dei quali è razionale (n. 41), segue che ogni sistema d'equivalenza di varietà V_k sopra una M_r è un sistema razionale di varietà virtuali, perchè i suoi elementi sono in corrispondenza birazionale coi gruppi di elementi tratti da più varietà razionali, cioè coi punti di una varietà di SEGRE, che è razionale (n. 19). Se invece ci si limita a considerare le eventuali varietà effettive del dato sistema, può darsi benissimo che la loro totalità (che è contenuta nella precedente) non formi un sistema razionale (1).

se no un punto generico x di M_r farebbe parte di qualche coppia eccezionale della corrispondenza (12), mentre per x generico le (12) dànno soltanto coppie di $\overline{S}$, in quanto $\overline{V}'_k(x)$ è intersezione *completa* delle (12) per x generico.

(1) Ciò riconferma la grande utilità e opportunità di estendere il campo elle varietà dalle effettive alle virtuali.

Viceversa, se Σ è un sistema unirazionale di varietà virtuali

$$V_k = V_k^{(1)} + V_k^{(2)} + \ldots - W_k^{(1)} - W_k^{(2)} \ldots , \tag{13}$$

ove $V_k^{(1)}, V_k^{(2)}, \ldots, W_k^{(1)}, W_k^{(2)}, \ldots$ son varietà irriducibili (effettive), il sistema irriducibile $\overline{\Sigma}$ descritto dalla varietà (positiva o negativa) costituita da più componenti (necessariamente dello stesso segno) di V_k, permutabili esclusivamente fra loro per le circolazioni di V_k entro Σ, è unirazionale, perchè la varietà che lo descrive è funzione razionale di V_k. Pertanto, considerando la varietà generica di $\overline{\Sigma}$ a prescindere dal segno (cioè come varietà effettiva, anche se è negativa), si può affermare, in base al n. prec. ch'essa descrive un sistema d'equivalenza. Onde Σ, che risulta dalla somma algebrica di più sistemi di equivalenza, è un sistema di equivalenza; e come tale, se non è razionale, è contenuto totalmente in un sistema razionale più ampio di equivalenza, le cui varietà sono ottenibili per somma e sottrazione da un numero finito di sistemi d'intersezione completa.

Si conclude col notevole teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema algebrico di varietà virtuali (pure) V_k, entro una M_r irriducibile, sia un sistema di equivalenza, è che sia razionale o contenuto totalmente in un sistema razionale. La condizione è soddisfatta se il sistema è unirazionale.

Questo teorema dà la ragione della denominazione di EQUIVALENZA RAZIONALE, che abbiamo data dal principio alla relazione di equivalenza da noi definita e studiata (n. 20).

Osservazione. — Atteso il risultato precedente, parrebbe superfluo di dimostrare il teorema fondamentale nell'ipotesi di un sistema Σ unirazionale di varietà V_k. Sembrerebbe cioè che bastasse considerare l'ipotesi della razionalità di Σ. Non è così. Invero, quando si parta da un sistema di varietà virtuali come le (13), può benissimo accadere, anche se Σ è razionale, che il sistema irriducibile $\overline{\Sigma}$, sopra considerato, sia soltanto unirazionale. Nel fatto si sa soltanto che gli elementi di $\overline{\Sigma}$ son razionalmente determinabili con un certo numero di parametri arbitrari; ma da ciò consegue la unirazionalità e non necessariamente la razionalità.

D'altronde, nel corso della dimostrazione del teorema fondamentale, se si fosse ammesso il teorema sulle varietà di dimensione $< r$ limitatamente ai sistemi razionali, non si sarebbe potuto concludere che le componenti mobili dell'intersezione della

varietà (12) con M_r variano in sistemi d'equivalenza sulle varietà subordinate da esse descritte, perchè si sa soltanto che il gruppo di queste componenti mobili è funzione razionale di x' ; epperò si può soltanto affermare che i sistemi descritti son unirazionali.

65. *I sistemi d'equivalenza come sistemi razionali di varietà virtuali sopra una varietà riducibile.* — Conformemente alla definizione del n. 42 un sistema di equivalenza di specie k sopra una M_r riducibile, ma pura, è la somma di sistemi d'equivalenza di questa specie sopra alcune (o tutte) delle componenti irriducibili di M_r. Un tal sistema è necessariamente razionale, o contenuto totalmente in un sistema razionale, perchè son razionali, o contenuti totalmente in sistemi razionali, i singoli addendi (n. prec.).

Viceversa, se Σ è un sistema unirazionale di varietà (pure) virtuali V_k, sopra una varietà riducibile M_r, ciascuna delle varietà componenti di V_k e mobile sopra una parte irriducibile di M_r, è funzione razionale di V_k e descrive perciò un sistema unirazionale, cioè di equivalenza (n. 63). Onde è di equivalenza anche Σ. Si conclude che :

Il teorema del n. precedente vale immutato sopra una varietà riducibile pura M_r.

Il teorema fondamentale affermante che ogni sistema unirazionale d specie k (formato da varietà virtuali o effettive) in una M_r, è un sistema d'equivalenza, e l'altra importante proposizione che ne deriva, caratterizzante i sistemi d'equivalenza come sistemi razionali di varietà virtuali, trovansi nella forma più generale nelle due Note [**20**] di F. Severi, citate a pag. 45; ma casi particolari pur notevoli di tali teoremi (per es. il teorema fondamentale per le serie razionali sulle superficie [ved. il n. 50 e i seguenti] ed altri teoremi relativi a sistemi razionali la cui specie k ha valori particolari su una varietà) erano già stati dati da Severi nei lavori citati alla fine del § 1, Cap. IV.

CAPITOLO V.

Serie di equivalenza sulle curve riducibili.

§ 1. — Generalità. Serie d'equivalenza complete. Teorema fondamentale.

66. *Definizione.* — Nel n. 42 si è data la definizione generale di serie e di sistemi d'equivalenza sopra una varietà riducibile pura. Tenuto conto che una serie d'equivalenza sopra una curva irriducibile non è che una serie lineare (o meglio, una serie algebrica contenuta totalmente in una serie lineare), una *serie d'equivalenza curvilinea*, sopra una curva C spezzata di S_d, risulta definita come una serie algebrica ottenuta associando gruppi di date serie lineari su talune o tutte delle componenti irriducibili di C.

D'altra parte stabiliremo (n. 72) un teorema fondamentale (già enunciato al n. 22), secondo il quale una serie d'equivalenza *completa* [1], che ottiensi evidentemente sommando *tutti* i gruppi di serie lineari *complete* su date componenti di C, è segabile su C con un sistema lineare di forme dell'ambiente S_d. Viceversa, una serie segata su C dalle forme di un sistema lineare, è contenuta in una serie d'equivalenza completa, a norma della definizione espressa. Dunque si giunge al medesimo concetto di equivalenza sopra una curva riducibile, se, invece che dalla definizione ricordata, si muove dalla seguente:

Una serie d'equivalenza curvilinea sopra una curva riducibile C di S_d è la serie dei gruppi di punti segati su C dalle forme di un sistema lineare dell'ambiente S_d [2]. Si suppone naturalmente che l'*intera* curva C non sia linea base pel sistema lineare di forme.

[1] Cioè non contenuta totalmente in una serie d'equivalenza di dimensione maggiore.

[2] È a questa definizione, del resto, che ci siamo riferiti nelle anticipazioni del n. 22, relative alla teoria delle serie d'equivalenza sopra una curva riducibile.

Quest'ultima definizione risulta però più restrittiva della precedente, perchè circoscrive il nome di serie d'equivalenza curvilinea alla *totalità* di gruppi di punti segabili su C con le forme di un sistema lineare ; mentre la definizione primitiva si riferisce più in generale a qualunque serie algebrica di gruppi di punti contenuta in una siffatta totalità.

Poichè, in questo capitolo, vogliamo esporre in modo autonomo la teoria delle serie d'equivalenza sopra una curva spezzata, da un punto di vista analogo a quello da cui si studiano le serie lineari sopra una curva irriducibile, conviene prender come punto di partenza la nuova definizione di serie d'equivalenza, che è più vicina alla definizione di serie lineare, e che fornisce *a priori* la costruzione proiettiva delle serie in discorso. A tale definizione ci atterremo dunque nel seguito.

67. *Proprietà elementari.* — Le serie d'equivalenza sopra una curva riducibile non sono in generale *lineari* (si è già citato al n. 22 l'esempio fornito dalla serie delle coppie di punti di due rette sghembe di S_3, la quale ha l'ordine invariantivo relativo 2). Esistono tuttavia serie d'equivalenza sopra una curva spezzata, che son lineari. Per esempio è lineare la serie segata su due rette di un piano da un fascio di rette, in quanto ogni gruppo della serie corrisponde biunivocamente ad una retta del fascio.

In un primo tempo considereremo la curva C spezzata (sulla quale vien segata una serie d'equivalenza) come *totalmente sconnessa*, senza cioè fissare come punti di connessione alcuni o tutti gli eventuali punti comuni alle parti a due a due.

Osserviamo subito che la definizione di serie d'equivalenza è tale che, senza contraddirla, si possono aggiungere o togliere punti fissi. È poi chiaro che *i gruppi di una serie d'equivalenza passanti per punti dati di C formano una serie d'equivalenza* ; perchè, imponendo alle forme di un sistema lineare di contenere dei punti fissi, si ottiene ancora un sistema lineare di forme.

Può darsi però che i gruppi d'una serie d'equivalenza passanti per dati punti di C vengano in conseguenza a contenere come parte qualche componente della curva, nel senso che le forme del sistema lineare, segante la serie donde siamo partiti, e passanti pei detti punti, contengano come linea base quella componente, senza che *tutte* contengano l'intera curva C. In tal caso i gruppi d'intersezione di C colle forme del sistema lineare segante, che contengono quella componente, vanno valutati virtualmente (n. 12) sia dal punto di vista numerativo che dal punto

di vista funzionale. Sulla componente considerata si avrà cioè una serie di gruppi di punti, che ne rappresenta l'equivalenza funzionale, rispetto a quelle intersezioni.

Dimostriamo ora che:

Una serie d'equivalenza sopra una curva riducibile è sempre un ente algebrico irriducibile.

Sia Σ un sistema lineare di forme seganti su C la serie g. Per lo scopo che ci proponiamo possiamo supporre esclusi da g gli eventuali punti fissi. La serie g è intanto un ente algebrico. Ciò, beninteso, se si considerano le intersezioni delle forme di Σ con C dal punto di vista virtuale. Allora ai gruppi di g, costituiti da un numero finito di punti, vanno aggiunti gli eventuali gruppi di accumulazione, non definibili (senza l'opportuna considerazione di limite) come gruppi d'intersezione di C con forme di Σ.

Ciò posto, è anzitutto chiaro che g risulta un ente algebrico *irriducibile* allorchè non contenga più di ∞^1 gruppi [1]. Invero, considerate due forme F', F'' di Σ, le quali *stacchino* due gruppi distinti di g, il fascio individuato da F', F'' appartiene a Σ, e stacca su C *tutti* i gruppi della serie g; poichè, essendo g ∞^1, non può contenere un ulteriore gruppo segato da una forma F''' non appartenente al fascio di F', F'', chè altrimenti conterrebbe tutti gli ∞^2 gruppi segati dalla rete di forme di Σ, individuata da F', F'', F'''. D'altra parte il fascio detto stacca sopra ogni componente di C dove esistono punti (variabili) di gruppi di g, una serie lineare ∞^1, perchè i due gruppi considerati di g non hanno punti comuni (dal momento che, se ne avessero, tali punti risulterebbero punti fissi di g, mentre questi sono stati preventivamente esclusi). Onde g risulta dall'associare gruppi omologhi in proiettività (non degeneri) fra un certo numero di serie lineari ∞^1, proiettive ad una medesima di esse. *Pertanto quando g non contenga che ∞^1 gruppi, essa è addirittura una serie lineare e quindi è irriducibile.*

Supponiamo ora che g sia almeno ∞^2 e, se è possibile, che si spezzi in due parti distinte g', g''. Presi in g', g'' due elementi G', G'', fuori della totalità degli eventuali gruppi comuni a g', g'', esisterà qualche forma F' di Σ staccante G' e qualche forma F'' di Σ staccante G'', e il fascio individuato da F', F'' determinerà su C una serie d'equivalenza (lineare) formata da gruppi di g, epperò situata, come ente algebrico irriducibile, o su g' o su g''; mentre

[1] La serie g è costituita da almeno ∞^1 gruppi, chè altrimenti non avrebbe gruppi variabili.

in g' la detta serie non può stare, perchè non vi sta G'' ed in g'' non può stare, perchè non vi sta G'. È dunque assurdo ammettere che g sia riducibile.

D'ora in poi, stante la irriducibilità di una serie d'equivalenza g , si potrà senza ambiguità parlare della sua *dimensione* e di *gruppo generico* della serie, il quale sarà segato su C da una forma generica del sistema Σ sopra considerato.

Siccome inoltre le forme di Σ contenenti una o più delle componenti di C, dove g ha punti variabili, formano entro Σ sistemi lineari subordinati, ne consegue che:

Un gruppo generico di una serie di equivalenza g (privata di punti fissi), consta di un numero finito di punti distinti.

I punti *variabili* del gruppo generico G di g risultan *distinti*, poichè in ciascun d'essi la molteplicità d'intersezione di C con una forma di Σ, che stacchi G, è esattamente uguale ad 1, godendo di tale proprietà il gruppo generico di ciascuna delle serie lineari infinite, che g subordina sopra quelle componenti di C, dove ha punti variabili [1].

Il numero n dei punti del gruppo G resta costante, almeno finchè la forma mobile in Σ non venga a contenere qualcuna delle dette componenti: rimane costante, a patto, beninteso, che, secondo la consueta convenzione del campo algebrico, ogni punto P_0 di un particolare gruppo G_0 di g, si conti tante volte quant'è il numero dei punti del gruppo generico G, che vanno a cadere in P_0. Anzi, siccome vogliamo preparare concetti invarianti per trasformazioni birazionali, tenuto conto del fatto che C è totalmente sconnessa, si considererà P_0 come sovrapposizione *accidentale* di un punto ν-plo, di un punto μ-plo, ecc., per la serie g, se ν punti del gruppo variabile G vanno a coincidere con P_0 sopra *uno* dei rami di C aventi l'origine in P_0, ; se altri μ punti vanno a coincidere con P_0, sopra un altro dei rami di origine P_0, ; ecc. In corrispondenza poi alle forme di Σ contenenti qualcuna delle componenti di C, il relativo gruppo d'intersezione G va determinato per continuità, in base alle solite considerazioni sull'equivalenza funzionale delle intersezioni di dimensione sovrabbondante (n. 12), e consta anch'esso di n punti di C.

Il numero n, in tal guisa definito per *ogni* gruppo della serie g, dicesi *ordine della serie*. Una serie di equivalenza d'ordine n e di dimensione r, s'indicherà con g^r_n.

[1] Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 55.

68. — I gruppi parziali che g^r_n possiede sopra una componente irriducibile o riducibile (cioè formata da più componenti irriducibili) di C, formano una serie di equivalenza (segata dal sistema lineare stesso di forme Σ, che sega g^r_n). Si chiama *serie componente* di g^r_n su quella tale curva. In particolare, se la curva componente considerata è irriducibile, si può parlare di una *componente lineare*, in quanto la serie componente relativa, essendo segata da un sistema lineare di forme, è appunto lineare.

Abbiam supposto che non tutte le forme del sistema lineare Σ, ∞^ρ, segante su C la serie di equivalenza g^r_n ($\rho \geq r$), passino per l'intera curva C; ma non è escluso che vi sia in Σ qualche forma contenente C. In tal caso le forme di Σ contenenti C costituiscono un sistema lineare Σ_0, ∞^{ρ_0}. Scelto in Σ un sistema lineare Σ_1, $\infty^{\rho - \rho_0 - 1}$, che non contenga alcuna forma di Σ_0, Σ_1 sega su C la stessa serie g^r_n. Infatti, se G è un gruppo di g^r_n segato dalla forma F di Σ, il sistema lineare, $\infty^{\rho_0 + 1}$, individuato da F e Σ_0, è tutto costituito da forme seganti G, ed ha con Σ_1 in comune una forma.

Non è dunque restrittivo il supporre — analogamente a quanto si fa per le curve irriducibili — che il sistema lineare segante Σ, ∞^ρ, non contenga alcuna forma passante per l'intera C. Nel caso di una curva irriducibile non c'è altro da esigere dal sistema lineare segante, che ha la stessa dimensione della serie lineare segata. Quando invece C sia riducibile, in generale questo non avviene (come vedremo al n. seguente).

Osserviamo ancora che *le serie di equivalenza sono involutorie*; ma intendendo l'involutorietà in un senso più esteso del consueto relativo alle curve irriducibili. Definiamo cioè come *involutoria* una serie su C *quando più punti di C appartenenti a due gruppi distinti, appartengono in conseguenza ad infiniti gruppi della serie.* La proprietà segue immediatamente dal fatto che la serie d'equivalenza g^r_n è segata da un sistema lineare di forme. Si può anzi precisare dicendo che *per r punti di C o non passa alcun gruppo di g^r_n o ne passa uno solo o ne passano infiniti.*

È facile vedere come possan scegliersi r punti su C, affinchè per essi passi un gruppo di g^r_n. Sia $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$ e C_1, $C_2, \ldots, C_t$ ($t \leq s$) siano quelle, fra le componenti di C, ove g^r_n esiste come serie infinita, subordinando rispettivamente le serie lineari $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, $\ldots$, $g^{r_t}_{n_t}$.

Allora r_1 punti generici di C_1 presentano condizioni indipendenti ai gruppi di $g^{r_1}_{n_1}$ che debbano contenerli, quindi anche alle forme di Σ o ai gruppi di g^r_n. Scelti r_1 punti generici di C_1, esistono $\infty^{r - r_1}$ gruppi di g^r_n che passano per essi, anzi per tutti gli n_1 punti

del gruppo G_1 di $g^{r_1}_{n_1}$, individuato dagli r_1 punti scelti. La totalità di questi ∞^{r-r_1} gruppi di g^r_n è ancora una serie di equivalenza $g^{r-r_1}_n$ su C, la quale, facendo astrazione dai punti fissi di G_1, si riduce ad una $g^{r-r_1}_{n-n_1}$, *residua* di G_1 rispetto a g^r_n. Supposto che $g^{r-r_1}_{n-n_1}$ esista come serie infinita su C_2, con dimensione r'_2 (ove r'_2 è non superiore ad r_2 e ad $r - r_1$), cioè abbia ivi come componente lineare una $g^{r'_2}_{n_2}$, vuol dire che r'_2 punti generici di C_2 presentan condizioni indipendenti ai gruppi della $g^{r'_2}_{n_2}$ che debbano contenerli, quindi anche ai gruppi della $g^{r-r_1}_{n-n_1}$. Scelti r'_2 punti generici di C_2, esistono $\infty^{r-r_1-r'_2}$ gruppi di $g^{r-r_1}_{n-n_1}$ che passano per essi, anzi per tutti gli n_2 punti del gruppo G_2 di $g^{r'_2}_{n_2}$, individuato dagli r'_2 punti scelti. Esistono cioè $\infty^{r-r_1-r'_2}$ gruppi di g^r_n, che hanno come fissi i punti di $G_1 + G_2$; e la totalità di questi gruppi è ancora una serie d'equivalenza $g^{r-r_1-r'_2}_n$ su C, la quale, facendo astrazione dai punti fissi di $G_1 + G_2$, si riduce ad una $g^{r-r_1-r'_2}_{n-n_1-n_2}$, residua di $G_1 + G_2$ rispetto a g^r_n. Così proseguendo, si vengono in definitiva a scegliere $r = r_1 + r'_2 + r'_3 + \ldots + r'_{t'}$ $(t' \leq t)$ punti, presi successivamente in modo generico sulle varie componenti di C, e in corrispondenza ad essi risulta determinata una serie d'equivalenza $g^{r-r_1-r'_2-\ldots-r'_{t'}}_n = g^0_n$ subordinata a g^r_n, cioè *un* gruppo di punti di g^r_n, che contiene gli r prescelti.

69. *Sistemi lineari associati a una g^r_n. Gruppi eccezionali.* — D'ora innanzi considereremo una g^r_n, data sopra una curva riducibile, limitatamente alle componenti $C_1, \ldots, C_t$ di questa, ov'essa esiste come serie infinita; cioè dove essa ha punti variabili. È evidente che così non si restringe la portata delle deduzioni.

Come abbiam detto, la dimensione r della g^r_n non è necessariamente uguale alla dimensione ρ del sistema Σ, anche quando Σ non contenga alcuna forma passante per $C = C_1 + \ldots + C_t$. Cioè per un gruppo generico di g^r_n può passare tuttavia più di una forma (e quindi infinite) di Σ. Per esempio gli ∞^3 piani dello spazio segano sopra una curva C composta di due rette sghembe una serie g^2_2, perchè, nonostante non vi sia alcun piano contenente C, per un generico gruppo della serie passano ∞^1 piani.

In generale, se per un generico gruppo G di g^r_n passano ∞^σ $(\sigma \geq 0)$ forme di Σ, costituenti un sistema lineare Σ_0, sarà $r = \rho - \sigma$.

Un espressivo significato di σ è dato dal teorema seguente:

Alle forme del sistema lineare Σ_0 costituito dalle ∞^σ forme di Σ passanti pel generico G di g^r_n, si può imporre di contenere σ delle curve $C_1, \ldots, C_t$, presentanti altrettante condizioni indipendenti, senza che

le dette forme contengano tutte in conseguenza l'intera curva $C = C_1 + \ldots + C_t$. *Onde* $\sigma \leq t - 1$.

Invero, siccome le forme di Σ_0 non hanno intersezioni variabili con alcuna delle $C_1, \ldots, C_t$, ciascuna di queste curve presenta alle forme di Σ_0, che debbano contenerla, una condizione lineare semplice. Perciò le forme di Σ_0 contenenti C_1 costituiscono un sistema $\Sigma_1\, \infty^{\sigma-1}$. Le forme di Σ_1 possono contenere oltre C_1 qualche altra delle $C_2, \ldots, C_t$; ma non tutte, perchè in caso contrario esisterebbe in Σ qualche forma contenente $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_t$. Vi sarà dunque una almeno delle $t - 1$ componenti $C_2, \ldots, C_t$, e sia C_2, non base per Σ_1. Alle forme di Σ_1 la C_2 presenta una condizione lineare semplice, epperò vi sono $\infty^{\sigma-2}$ forme di Σ_1 contenenti C_2, oltre alle componenti che già erano base per Σ_1 ed eventualmente alcune altre, ma non tutte, delle $C_3, \ldots, C_t$. Così proseguendo, si giunge ad un sistema lineare Σ_σ, ∞^0, cioè ad una sola forma che contiene il massimo numero possibile di componenti di C, senza contenerle tutte.

Dimostriamo ora che:

Una serie di equivalenza g^r_n *sopra una curva riducibile* C, *può sempre immaginarsi segata da un sistema lineare di forme avente la stessa dimensione della serie, in guisa cioè che per un gruppo generico di questa passi una sola forma del sistema.*

Fissiamo genericamente un gruppo G di g^r_n, e sia Σ_0 il sistema lineare ∞^σ delle forme di Σ per G.

Detta F una forma di Σ_0 passante per G e non contenente alcuna delle curve $C_1, \ldots, C_t$, un sistema lineare Σ', ∞^r, scelto genericamente in Σ, fra quelli che contengono F, non avrà alcun'altra forma, diversa da F, comune con Σ_0, perchè la somma delle dimensioni di Σ_0 e di Σ' uguaglia la dimensione dell'ambiente. Il sistema Σ' sega su C una serie di equivalenza g, contenuta totalmente nella g^r_n; e siccome esiste un gruppo G di g per cui non passa che una forma (la F) di Σ', la stessa cosa accadrà pel gruppo generico di g. Sicchè g avrà la dimensione r e coinciderà con g^r_n, stante la irriducibilità delle due serie.

Un sistema lineare di forme, che seghi su C la g^r_n ed abbia la stessa dimensione della serie, si dirà un *sistema associato alla data serie di equivalenza.*

Esaminiamo più a fondo la corrispondenza birazionale ω che intercede tra i gruppi della g^r_n e le forme di un suo sistema associato, che indicheremo con Σ. Nella ω sono omologhi un gruppo generico di g^r_n ed una forma di Σ, quando si appartengono. Se la componente lineare di g^r_n su C_1 è una $g^{r_1}_{n_1}$, e si suppone $r_1 < r$, la C_1

presenta $r_1 + 1 \leq r$ condizioni alle forme di Σ, che debban contenerla, epperò vi è un sistema ∞^{r-r_1-1} di forme di Σ contenenti C_1. Queste forme dàn luogo, per intersezione con C, a gruppi d'infiniti punti, contenenti tutta la C_1. I rispettivi gruppi di g^r_n si ottengono, come si è già più volte detto, sostituendo a C_1 la relativa equivalenza funzionale nell'intersezione delle forme di Σ con C. Vediamo come si debbano precisare le cose.

Sia H_1 un gruppo generico della serie $g^{r_1}_{n_1}$ su C_1. Esso farà parte di qualche gruppo (generico) G di g^r_n ed esisterà in Σ una forma F segante G su C ed H_1 su C_1 (fuori dei punti fissi). Formiamo un fascio con F e con una forma F' passante per C_1. Quando una forma $\overline{F}$, variabile nel fascio, tende a F', il gruppo H_1 resta fisso ; e i rimanenti punti del gruppo $\overline{G}$ staccato da $\overline{F}$ su C, tendono a taluni dei punti comuni ad F' e alle $C_2, \ldots C_t$, i quali sono in numero finito. Perciò le posizioni limiti dei punti variabili sono ben determinate. Il gruppo H_1, insieme al gruppo limite così definito, dà un gruppo di un numero finito n di punti, che appartiene alla g^r_n.

Tale gruppo limite di n punti lo chiamaremo un *gruppo eccezionale di prima specie*, in quanto non esiste nel sistema associato a g^r_n alcuna forma che *stacchi* il gruppo stesso e sia dunque distinta dalla forma F' passante per la componente C_1. Il gruppo stesso è invece staccato da una forma infinitamente vicina ad F'.

Abbiamo implicitamente supposto che F' non contenesse in conseguenza qualcuna delle altre componenti $C_2, \ldots, C_t$. Se avvenisse il contrario, ed F' contenesse per esempio C_2, si considererebbe, non più la componente lineare $g^{r_1}_{n_1}$ di g^r_n su C_1, ma la componente di g^r_n su $C_1 + C_2$; e, preso un generico gruppo K di questa serie componente, si ragionerebbe nei riguardi di K come prima nei riguardi di H_1, arrivando similmente alla conclusione che K fa parte di gruppi eccezionali ben determinati, ciascuno di n punti.

Così s'ottengon, manifestamente, *tutti* i possibili gruppi di g^r_n, perchè *ogni* gruppo di g^r_n è sempre congiungibile mediante una g^1_n (segabile con un fascio di Σ) ad un gruppo generico.

Nella corrispondenza birazionale ω, una forma di Σ, contenente qualcuna delle componenti $C_1, \ldots, C_t$, è fondamentale per ω, nel senso che ad essa corrispondono infiniti gruppi eccezionali di 1ª specie. Per togliere l'eccezione all'univocità della corrispondenza, bisogna passare all'intorno, entro Σ, della forma considerata.

Ma in generale esisterà altresì qualche gruppo di g^r_n segato

su C da infinite forme di Σ, cioè qualche elemento fondamentale di g_n^r, cui corrispondono in ω infinite forme di Σ. Un gruppo siffatto di g_n^r si chiamerà un *gruppo eccezionale di seconda specie.* Se G è un tal gruppo, per esso passa un sistema lineare Σ', almeno ∞^1, di forme di Σ, le quali non hanno intersezioni variabili con C e quindi, in particolare, con $C_1, C_2, \ldots, C_t$. Onde per ognuna di tali componenti passa almeno una forma di Σ'. Pertanto G appartiene alla varietà dei gruppi eccezionali di prima specie: è un particolare gruppo di prima specie. Concludendo:

Nella corrispondenza birazionale fra i gruppi di una g_n^r sopra una curva riducibile C e le forme di un sistema lineare associato Σ, i gruppi eccezionali di 1ª specie corrispondono alle forme di Σ, che son fondamentali per la corrispondenza; ed i gruppi eccezionali di 2ª specie (i quali son particolari gruppi di 1ª specie) son, essi medesimi, fondamentali per la corrispondenza.

Si osservi infine che la distinzione dei gruppi eccezionali dai gruppi non eccezionali, di una g_n^r, è, almeno per ora, *relativa* al sistema associato.

Più precisamente, *se si tratta di una g_n^r completa, i gruppi eccezionali non son gruppi di natura essenzialmente diversa dai gruppi generici della g_n^r, considerata in se stessa. Un gruppo eccezionale può mutar di specie o diventare non eccezionale, cangiando il sistema lineare associato.*

Invero una serie di equivalenza completa (come vedremo al n. 72) è perfettamente omogenea. Essa risulta di fatto birazionalmente equivalente, senza eccezioni, ad una varietà di SEGRE, ed è priva quindi (n. 19) di punti multipli e dotata di un gruppo continuo transitivo di omografie in sè, che ne assicura l'omogeneità.

Se invece si tratta di una serie d'equivalenza g_n^r *incompleta*, i gruppi eccezionali possono, come vedremo (n. 82), esser collegati in modo intrinseco alla serie e riescire pertanto indipendenti dai cangiamenti del sistema lineare associato; oppure dipendere da questo.

Un esempio semplicissimo della relatività del concetto di gruppi eccezionali per una serie completa, è fornito dalla g_2^2 segata sopra una curva C spezzata in due rette sghembe C_1, C_2, dai piani dello spazio. Ogni stella di piani avente il centro in un punto O esterno a $C_1 + C_2$, è un sistema Σ associato alla g_2^2. I gruppi eccezionali di 1ª specie son dati dalle coppie ottenute associando ad un punto qualunque di C_1, il punto A_2 d'incontro con C_2 della retta a uscente da O, e appoggiata alle due rette sghembe, e dalle

coppie formate da un punto qualunque di C_2 e dal punto A_1 di appoggio di a su C_1. Di gruppi eccezionali di 2ª specie ve n'ha uno solo: il gruppo A_1, A_2. Mutando O, si può ottenere che ogni prefissato gruppo della g_2^2 diventi eccezionale di 1ª o di 2ª specie.

70. *Le serie d'equivalenza dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.* — Si tratta ora di riconoscere se il concetto di serie di equivalenza, sopra una curva riducibile $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$, sia o no invariante per trasformazioni birazionali; e quindi se si possa mediante esso costruire una *geometria sopra una curva riducibile*, analoga alla geometria sopra una curva irriducibile.

Anzitutto: quand'è che una curva riducibile C' si deve considerare come *trasformata birazionale* di C? La nozione si presenta sotto la forma più generale, come segue: $C' = C_1' + \ldots + C_s'$ si dice trasformata birazionale di C, quando le componenti di C, C' si possono associare a due a due, in modo che le componenti associate sieno birazionalmente equivalenti. Fissata una corrispondenza birazionale fra due curve di ciascuna coppia, si dice che *è fissata una corrispondenza birazionale fra* C, C'. Allorchè invece, essendo la curva C_i' associata alla C_i $(i = 1, \ldots, s)$, il punto di C_i è funzione razionale del punto di C_i' (senza che necessariamente questo sia funzione razionale di quello), si dice che fra C e C' è data una *corrispondenza razionale*.

Ma in una prima fase non conviene considerare il concetto con questa generalità, perchè non sarebbe agevole dimostrare *a priori*, su tal fondamento, la invarianza della nozione di serie d'equivalenza. Adotteremo perciò da principio il seguente *punto di vista più ristretto*.

Consideriamo una trasformazione *razionale* che muti una varietà M_k irriducibile, di dimensione k, contenente $C = C_1 + \ldots + C_s$, in una varietà M_k' irriducibile della stessa dimensione: una trasformazione *razionale*, *non necessariamente birazionale*, in cui il punto di M_k sia funzione razionale del punto di M_k', sicchè ai punti di M_k corrispondano su M_k' i gruppi di un'involuzione I_μ. Può darsi che la curva omologa di C_i $(i = 1, \ldots, s)$ si spezzi: fissiamo l'attenzione sopra una delle parti irriducibili della curva omologa: sia C_i' (comprenderà tutta la curva omologa se questa è irriducibile). Variando x su C_i vi saranno μ_i punti x', dei μ che corrispondono ad x su M_k', i quali variano su C_i' $(1 \leq \mu_i \leq \leq \mu)$ e descrivono su C_i' un'involuzione. Assumendo come curva omologa di C la curva $C' = C_1' + \ldots + C_s'$, diremo che fra

C e C' *intercede una corrispondenza razionale in senso ristretto* [1]. Quando risulti $\mu_i = 1$ $(i = 1, \ldots, s)$, la C' sarà in corrispondenza birazionale con C, e diremo che fra C e C' *intercede una corrispondenza birazionale in senso ristretto.*

Più in generale, diremo *trasformazione razionale o birazionale in senso ristretto anche il prodotto di un numero finito di trasformazioni del tipo di quelle sopra definite.*

Ebbene, si vede subito che:

Il concetto di serie d'equivalenza è invariante per trasformazioni razionali (*e, in particolare, birazionali*) *in senso ristretto.*

Invero, un sistema lineare Σ di forme, associato a una g^r_n di C, sega su M_k un sistema lineare $|M_{k-1}|$, il quale, alla sua volta, stacca su C la data g^r_n. Al sistema $|M_{k-1}|$ risponde su M'_k, mediante la corrispondenza razionale $(1, \mu)$ assegnata fra M'_k ed M_k, un sistema lineare $|M'_{k-1}|$, il quale sega su C' l'insieme dei gruppi omologhi dei gruppi di g^r_n. E siccome $|M'_{k-1}|$ può sempre immaginarsi staccato su M'_k da un sistema lineare di forme dell'ambiente di M'_k, cioè di C', ne segue che alla g^r_n su C, corrisponde una $g^r_{n'}$ su C' $(n' \geq n)$.

È evidente che, ove C, C' siano, più in particolare, legate da una corrispondenza birazionale, risultano uguali, non soltanto le dimensioni, ma anche gli ordini delle due serie corrispondenti su C, C', cioè risulta $n' = n$; perchè ad ogni punto variabile di un gruppo generico di g^r_n, risponde un punto variabile dell'omologo gruppo della serie trasformata; e viceversa.

Se, nel caso generale delle μ_i qualsiansi, è n_i l'ordine della componente di g^r_n su C_i, risulterà $n' = \sum \mu_i n_i$ l'ordine della serie di equivalenza trasformata di g^r_n.

Osserviamo che *una proiezione biunivoca di una curva riducibile C può considerarsi come una trasformazione birazionale in senso ristretto.* Siccome qualunque proiezione si riduce a successive proiezioni da punti, basta dimostrare la proprietà per la proiezione di C da un punto O sopra un iperpiano ω dell'ambiente S_d di C. Sia Φ un monoide irriducibile di vertice O e contenente la curva spezzata C (n. 31). Allora la proiezione detta può pensarsi subordinata alla corrispondenza birazionale che nasce, per proiezione da O, tra Φ e ω.

[1] È quasi superfluo di avvertire che la curva C' non comprende di necessità *tutta* la trasformata di C mediante la trasformazione razionale fra gli ambienti M_k, M'_k. La comprenderebbe di necessità *tutta* se le singole trasformate delle parti di C fossero irriducibili. Ciò si verifica p. es. quando $\mu = 1$.

Da questa semplice osservazione consegue che lo studio delle proprietà invariantive delle serie d'equivalenza sulle curve riducibili può venir limitato, senza introdurre restrizione, alle *curve piane*; perchè a queste ci si può sempre ridurre mediante proiezioni. Ci riferiremo dunque, per il seguito, a una curva piana C spezzata e (come supponiamo in un primo tempo) totalmente sconnessa.

Vediamo intanto di precisare che cosa debba intendersi per *curva aggiunta* a C. La definizione è la stessa che nel caso delle curve irriducibili, e cioè: curva aggiunta a C è una curva passante per ogni punto s-plo di C con molteplicità virtuale [1] $s-1$, *con l'avvertenza che devon considerarsi come punti multipli di C altresì i punti comuni a due o più componenti irriducibili di C, e in ciascuno di questi punti, siano distinti o infinitamente vicini, la relativa molteplicità dev'esser definita come se i vari rami delle componenti di C che vi passano, fossero tutti rami di una medesima curva irriducibile.*

D'altra parte, se si vuole, si può riferirsi ad un modello piano della curva riducibile C, il quale sia dotato di soli nodi; tale cioè che ciascuna delle sue componenti irriducibili abbia soltanto nodi e che queste a due a due si seghino in punti ognun dei quali sia semplice per due sole componenti, non tangenti in esso. Invero, questo può sempre ottenersi dalla curva data mediante una trasformazione birazionale in senso ristretto.

All'uopo si incominci a trasformare la curva data, C, in una curva *priva di punti multipli*. Interpetrando opportunamente uno dei possibili procedimenti per trasformare una curva *irriducibile* in una curva priva di punti multipli, si vede che ciò si può fare con una trasformazione birazionale in senso ristretto. Sia infatti O un punto multiplo di C, cioè un punto multiplo di una delle sue componenti, ovvero un punto d'intersezione di due componenti, e si considerino le quadriche dello spazio S_d di C, che passano per O: le quadriche nominate costituiscono un sistema lineare completo, *privo di gruppi neutri* [2], e quindi rappresentativo di una varietà W_d a d dimensioni dello spazio a $\frac{d(d+3)}{2}-1$ di

[1] Pel concetto di *molteplicità virtuale* di una curva nei punti di un gruppo base G, costituito da punti distinti e infinitamente vicini, vedasi il *Trattato di G. a.* di F. Severi, cit., pag. 328, n. 109.

[2] Cioè di gruppi di più d'un punto che presentano una sola condizione lineare semplice alle forme (quadriche) che debbano contenerli.

mensioni, *priva di punti multipli*. Sulla W_d rimane automaticamente tracciata una curva, C', trasformata birazionale della C in una trasformazione in senso ristretto. D'altra parte sulla W_d l'intorno di 1° ordine di O viene sciolto e quindi i punti multipli immediati di C' provengono soltanto dai punti multipli della C distinti da O e dai punti multipli giacenti nell'intorno di 1° ordine di O (e non possono nascere altri punti multipli). Ripetendo ora sulla C', in relazione ad uno dei suoi punti multipli, il procedimento seguito per la C, in relazione al punto O, si perverrà ad una curva C'', d'uno spazio ad un numero superiore di dimensioni, birazionalmente equivalente a C', e quindi a C, in senso ristretto. Così proseguendo, siccome i punti multipli di C compresi quelli che sono negl'intorni dei varii ordini de' suoi punti multipli immediati, sono in numero finito, dopo un numero finito di volte, si perverrà ad una curva, K, di uno spazio di dimensione conveniente, *priva di singolarità*, e birazionalmente equivalente a C in senso ristretto.

Ciò posto, si proietti K sopra un iperpiano, da un punto che non giaccia sulla varietà delle corde di K. Si otterrà una curva, che — per un'osservazione precedente — è birazionalmente equivalente in senso ristretto alla K ed è ancora priva di singolarità. Ripetendo il detto procedimento si perverrà infine ad una curva dello spazio a tre dimensioni, e quindi — per proiezione da un punto generico (scelto cioè fuori di certe tre superficie) — ad una *curva piana dotata di soli nodi*, che dà il modello desiderato [1].

Riferendosi ad un tal modello, la definizione di curva aggiunta è più semplice. Sia C la curva piana modello, di ordine m. Curva aggiunta a C è allora ogni curva passante pei d_1, d_2, ..., d_s nodi delle componenti C_1, C_2, ..., C_s di C, le quali abbiano gli ordini m_1, m_2, ..., m_s ($\Sigma m_i = m$), e pei $\Sigma m_i m_k$ punti comuni alle parti a due a due.

71. *Il teorema del resto per le serie di equivalenza.* — Una volta precisato il concetto di aggiunta ad una curva piana riducibile C, che supponiamo dotata di soli nodi (non essendo per altro ciò strettamente necessario, come si è visto), il procedimento algebrico col quale si dimostra, per una curva piana irriducibile, che un'aggiunta d'ordine λ, condotta per un gruppo di una data serie lineare, fa parte di un sistema lineare di aggiunte dello stesso ordine, che stacca sulla curva la serie data, ossia che il resto di un gruppo di una serie, rispetto alle aggiunte di un dato ordine, è

[1] Cfr. il *Trattato* ora cit., pag. 77.

resto di ogni altro gruppo della serie rispetto alle aggiunte dello stesso ordine, vale immutato per una curva riducibile. Invero, codesto procedimento [1] si fonda essenzialmente sul teorema $Af + B\varphi$, il quale sussiste anche in relazione a curve f, φ riducibili, purchè prive di parti comuni.

Assegnata una serie d'equivalenza, completa o no, g, sulla curva riducibile C, di equazione $f = 0$, si può intanto supporre che la serie sia segata da un sistema lineare associato Σ di curve aggiunte a C, poichè a questo caso ci si riduce sempre con l'eventuale aggiunta di una curva fissa al sistema lineare segante. Siano G, G' due gruppi di g, staccati su C, fuori dei nodi e di altri eventuali punti fissi, da due curve aggiunte $\varphi = 0$, $\varphi' = 0$, di Σ. Condotta per G un'aggiunta ψ d'ordine λ, che seghi ulteriormente C in un gruppo Γ (oltre che nei nodi di C), il predetto teorema assicura l'esistenza di qualche curva $\psi' = 0$, d'ordine λ, soddisfacente alla relazione :

$$\varphi' \psi \equiv \psi' \varphi + \theta f \,. \tag{1}$$

Si trae che $\psi' = 0$ è una curva aggiunta a C, passante per $G' + \Gamma$.

Applicando ora la (1) per $r + 1$ posizioni linearmente indipendenti della curva $\varphi' = 0$, precisamente per

$$\varphi_0 = 0 \;,\; \varphi_1 = 0 \,, \ldots \,, \varphi_r = 0 \,,$$

e indicate con

$$\psi_0 = 0 \;,\quad \psi_1 = 0 \,, \ldots \,, \psi_r = 0$$

le corrispondenti posizioni della curva $\psi' = 0$, si ricava

$$\Big(\sum_0^r{}_i \lambda_i \varphi_i\Big) \psi \equiv \Big(\sum_0^r{}_i \lambda_i \psi_i\Big) \varphi + \Big(\sum_0^r{}_i \lambda_i \theta_i\Big) f \,;$$

donde segue che le curve variabili $\lambda_0 \varphi_0 + \ldots + \lambda_r \varphi_r = 0$, $\lambda_0 \psi_0 + \ldots + \lambda_r \psi_r = 0$ passano pel medesimo gruppo variabile della serie g_n^r. La serie, completa o no, g_n^r risulta dunque segata su C dal sistema lineare associato $\lambda_0 \psi_0 + \ldots + \lambda_r \psi_r = 0$, di curve aggiunte d'ordine λ, passanti pel gruppo fisso Γ. L'intero λ

[1] Cfr. il *Trattato* cit., pag. 341, nonchè le *Vorlesungen...*, cit., di F. Severi, pag. 120.

è assoggettato alla sola condizione che esista effettivamente una curva aggiunta $\psi = 0$, d'ordine λ, passante per un gruppo G di g_n^r.

Pertanto :

Tutte le aggiunte di un ordine dato arbitrario, ad una curva riducibile, segano sulla curva stessa, fuori dei punti fissi, una serie di equivalenza completa. Ogni serie di equivalenza, incompleta o completa, si può segare con un sistema lineare di aggiunte di ordine λ, *che passino pel resto di un'aggiunta d'ordine* λ (*conveniente*) *condotta per un gruppo fissato ad arbitrio nella serie.*

Ne deriva, come nel caso delle curve irriducibili, che *è unica la serie di equivalenza* (*di dimensione* ≥ 0) *individuata sopra una curva riducibile da un dato gruppo di punti.* Perciò, chiamati *equivalenti* due gruppi di n punti di C, quando son gruppi (totali) di una medesima serie di equivalenza, vale la proprietà transitiva :

Due gruppi equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro.

Del resto questa proprietà diviene quasi evidente, anche per una curva riducibile, ponendosi dal punto di vista delle funzioni razionali sopra la curva (1).

Siano invero A_2, A_3 due gruppi di n punti della curva riducibile C, equivalenti al medesimo gruppo A_1. Esista cioè una serie di equivalenza g_n^r contenente totalmente A_1, A_2 ed un'altra serie di equivalenza g_n^s contenente A_1 , A_3. Si potranno allora considerare i gruppi della prima come intersezioni (variabili) con C delle forme di livello costante di una certa funzione razionale φ di un punto dell'ambiente di C, la quale contenga linearmente $r-1$ parametri essenziali, il gruppo A_1 essendo staccato dalla forma polare di φ. E similmente i gruppi di g_n^s saranno dati da un'altra funzione razionale ψ, dipendente da $s-1$ parametri e la cui forma polare stacchi A_1. La funzione razionale $\varphi + \lambda\psi$ (λ parametro) contiene allora $r+s-1$ parametri essenziali e stacca su C, colle sue forme di livello costante, una serie di equivalenza, che contiene totalmente A_1, come gruppo staccato dalla forma di livello infinito, e contiene inoltre totalmente A_2 , A_3.

La serie di equivalenza completa individuata su C dal gruppo A, s'indicherà con $|A|$; e la relazione di equivalenza fra gruppi col segno $\equiv$.

Da quanto precede consegue il concetto di *somma* di due o più serie d'equivalenza ; indi il *teorema invariantivo del resto.* Le consi-

(1) Cfr. il *Trattato* cit., pag. 100.

derazioni da farsi sono assolutamente identiche a quelle che si fanno nel caso delle curve irriducibili [1].

Assegnate due serie d'equivalenza complete $|A|$, $|B|$, tutti i gruppi della forma $A + B$ risultano (in base alla transitività della relazione di equivalenza) fra loro equivalenti; quindi si definisce come *serie somma* la serie d'equivalenza completa che contiene tutti questi gruppi, cioè la serie $|A + B|$ individuata dal generico gruppo $A + B$.

Dal concetto di somma segue poi subito quello di *differenza* di due serie d'equivalenza $|C|$, $|A|$. Supposto che un gruppo fissato A della serie $|A|$ sia contenuto parzialmente in $|C|$, la serie $|B|$ residua di A rispetto a $|C|$ si definisce come differenza $|C - A|$ delle due serie. Siffatta serie risulta indipendente dal gruppo A prescelto, cioè:

I resti di un dato gruppo di punti rispetto ad una serie d'equivalenza completa, in cui esso sia contenuto parzialmente, son resti, rispetto alla stessa serie, di ogni altro gruppo equivalente a quello.

È questa la forma invariantiva del teorema del resto.

72. *Il teorema fondamentale.* — Per individuare una serie di equivalenza su C possiamo dare, in particolare, un gruppo G_{n_1} di punti sopra una, C_1, delle s componenti di C; e null'altro. Allora la serie di equivalenza $|G_{n_1}|$ non esiste fuori di C_1, cioè essa riducesi alla serie lineare individuata da G_{n_1} su C_1. Così possiamo dare altre serie di equivalenza (lineari) $|G_{n_2}|$, ... , $|G_{n_t}|$, che esistan soltanto sulle componenti C_2, ... , C_t $(t \leq s)$. La somma $|G_n|$ di queste t serie di equivalenza particolari, date su C, ove $G_n = G_{n_1} + G_{n_2} + \ldots + G_{n_t}$ è una serie di equivalenza su C, la quale non esiste fuori delle C_1 , C_2 , ... , C_t. Essa contiene *tutti* i gruppi di n punti composti prendendo un gruppo da ciascuna delle t serie precedenti. Ma quel che c'è di più notevole si è che i gruppi della $|G_n|$ si ottengon tutti così: cioè $|G_n|$ è esaurita dai gruppi costruiti nel modo predetto. Invero, la $|G_n|$ subordina su ciascuna delle C_1, C_2 , ... , C_t serie lineari (eventualmente ∞^0) segate sulle dette componenti da un sistema lineare associato a $|G_n|$; e queste serie dovranno esser complete, se la $|G_n|$ è completa, giacchè appunto tutti i gruppi composti da t gruppi delle serie complete, che contengon quelle subordinate da $|G_n|$, devon appartenere ad una

[1] Cfr. p. es. il *Trattato* cit., pagg. 104, 105.

stessa serie di equivalenza, che coincide con $|G_n|$, per la completezza di questa serie. Si conclude così col *teorema fondamentale*:

Ogni serie di equivalenza completa, sopra una curva riducibile, è costituita da tutti i gruppi ottenuti associando gruppi di serie lineari complete assegnate sopra talune componenti irriducibili della curva; e soltanto da questi.

Osservazione. — Il teorema fondamentale stabilisce una differenza profonda nella struttura della somma di due (o più) serie lineari che sieno date su curve irriducibili distinte, rispetto alla struttura della somma di serie date sopra una medesima curva irriducibile. Quando son date due serie $|G_{n_1}|$, $|G_{n_2}|$ sopra due curve irriducibili C_1 , C_2 coincidenti (cioè sopra una medesima curva), la loro somma non è costituita soltanto dalla varietà (non lineare) dei gruppi ottenuti associando un gruppo dell'una e dell'altra; mentre, allorchè le due curve C_1 , C_2 son distinte, la somma delle due serie non contiene altro che i gruppi suddetti, perchè la separazione delle due curve induce senz'altrò una separazione nei punti di ciascun gruppo della serie somma. Ciò è del resto d'accordo col fatto che la serie somma non è, in tal caso, lineare.

73. *Invarianza birazionale delle serie di equivalenza complete.* — Suppongasi che la curva $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$ si trasformi nella curva $C' = C'_1 + C'_2 + \ldots + C'_s$ in guisa che C'_i sia trasformata birazionale della curva C_i. Allora [1] ad ogni serie lineare completa della curva C_i corrisponde una serie lineare completa della curva C'_i , e quindi alla totalità delle somme dei gruppi di serie lineari complete date sulle componenti di C corrisponde la totalità delle somme dei gruppi delle serie lineari trasformate, la quale, pel teorema fondamentale (n. 72), è una serie d'equivalenza completa. Si conclude che *una serie di equivalenza completa sopra una curva riducibile è invariante per trasformazioni birazionali anche in senso lato.*

Nel n. 76 vedremo che l'invarianza vale più in generale anche per le serie incomplete, di fronte alle trasformazioni semplicemente razionali.

[1] Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 58.

§ 2. — Sistema lineare aggiunto ad una serie d'equivalenza. Serie d'equivalenza parziali.

74. — *Determinazione dell'unico caso, in cui una serie di equivalenza non ha gruppi eccezionali.* — Per stabilire l'invarianza di ogni serie di equivalenza, anche parziale, di fronte alle trasformazioni birazionali o unirazionali in senso lato, cominciamo a dimostrare un *primo lemma*:

Se si riferiscono proiettivamente i gruppi di t serie lineari $g^r_{n_1}, \dots, g^r_{n_t}$ della stessa dimensione $r \geq 1$, date sulle curve irriducibili distinte $C_1, \dots, C_t$, ai punti di un medesimo S_r, mediante altrettante omografie non singolari, le somme dei gruppi omologhi ai singoli punti di S_r, costituiscono sulla curva $C = C_1 + \dots + C_t$ una serie d'equivalenza g^r_n $(n = n_1 + \dots + n_t)$, che è lineare.

Nello spazio S_d, in cui è immersa la curva C, si può immaginare che le $g^r_{n_i}$, sulle C_i, sieno segate, fuori di punti fissi, da sistemi lineari ∞^r di forme dello stesso ordine

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda_j \varphi_{ji} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, t) \,, \tag{2}$$

tali che quello che corrisponde a un dato i abbia come linea base le altre componenti $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_t$ di C.

Se, invero, il sistema (2) non ha, per dato i, $C_1 + \dots + C_{i-1} + C_{i+1} + \dots + C_t$ come linea base, basta aggregare alle sue forme una forma fissa passante per tale linea, ma non per C_i. E se poi, dopo aver trasformato così i sistemi (2), essi non hanno lo stesso ordine, basta aggregare a ciascuno di essi una forma generica fissa di conveniente ordine, perchè sia soddisfatta anche l'altra condizione che abbiamo supposto pei sistemi (2).

Inoltre, cangiando eventualmente *entro* ciascun sistema le forme con cui esso s'individua, si può supporre che gruppi omologhi ad un punto di S_r nelle omografie tra questo e le date $g^r_{n_i}$, sieno segati da forme dei sistemi (2), corrispondenti agli stessi valori delle λ.

Ciò posto, si consideri il sistema lineare:

$$\sum_{j=0}^{r} \lambda_j \varphi_{j1} + \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \varphi_{j2} + \dots + \sum_{j=0}^{r} \lambda_j \varphi_{jt} = 0 \,, \tag{3}$$

e sia $G = G_1 + G_2 + \dots + G_t$ un gruppo della data γ^r_n, che si vuol provare essere una g^r_n. Se G corrisponde a certi valori delle λ, le (3), per quei tali valori delle λ, dànno luogo ad una forma pas-

sante per G ; e i punti variabili di G sono le sole intersezioni della (3) con C, mobili al variare delle λ. Invero, *sopra* C_i la (3) riducesi a (2) e le intersezioni di (2) con C_i, mobili colle λ, son soltanto i punti variabili del gruppo G_i .

Il sistema (3) sega dunque su C la data γ_n^r, che risulta perciò una g_n^r .

Il sistema (3) è un sistema lineare di dimensione r e non minore, e inoltre esso non contiene forme passanti per C_i ($i = 1$, ... , t). Perciò la g_n^r è priva di elementi eccezionali : ciò che è ben d'accordo col fatto che g_n^r è un ente lineare, essendo in corrispondenza birazionale senza eccezioni con un S_r .

Osservazione. — Il caso considerato è il solo in cui una g_n^r su C sia priva di elementi eccezionali rispetto ad un suo sistema associato. Infatti, quando nel sistema associato a g_n^r non vi sono forme che contengano qualcuna delle C_i , esso sega su ogni C_i una serie lineare ∞^r e i gruppi di questa g^r corrispondono proiettivamente alle forme che li segano.

Si può di più dimostrare che :

Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie di equivalenza (avente almeno due distinte componenti lineari) sia lineare, è che abbia la stessa dimensione delle sue componenti lineari (e quindi ponga fra due qualunque di queste un'omografia).

La sufficienza della condizione è ovvia, in quanto un sistema lineare associato alla data g_n^r, esistente sulla curva $C = C_1 + C_2 + \dots + C_t$, non può contenere alcuna forma passante per C_i ($i = 1,2, \dots , t$) ; epperò g_n^r è lineare, essendo in corrispondenza birazionale senza eccezioni colle forme del sistema associato (e quindi anche coi gruppi di una qualunque delle sue componenti lineari).

Viceversa, sia g_n^r lineare e $g_{n_i}^{r_i}$ sia la componente lineare di g_n^r su C_i ($i = 1, \dots , t$). Si può supporre, senza restrizione, che g_n^r (e quindi $g_{n_i}^{r_i}$) sia priva di punti fissi ; sicchè è certo $r_i > 0$. Bisogna provare assurda l'ipotesi $r > r_i$. Supponiamo p. es. $r > r_1$. I gruppi di g_n^r passanti per un gruppo G_1 di $g_{n_1}^{r_1}$ (che impone r_1 condizioni distinte ai gruppi di $g_{n_1}^{r_1}$, epperò anche ai gruppi di g_n^r), formano una varietà V, ∞^{r-r_1} . Scelte entro $g_{n_1}^{r_1}$ due serie lineari subordinate $g_{n_1}^{s_1}$, $g_{n_1}^{r_1-s_1-1}$, prive di gruppi comuni, consideriamo le due varietà luoghi della V quando G_1 varia in $g_{n_1}^{s_1}$ e in $g_{n_1}^{r_1-s_1-1}$. Son due varietà W', W'' di dimensioni $s_1 + r - r_1$, $r - s_1 - 1$, le quali, *essendo* g_n^r *lineare*, hanno certamente almeno un gruppo comune, perchè

$$(s_1 + r - r_1) + (r - s_1 - 1) - r \geqslant 0 ,$$

in quanto $r_1 \leqslant r - 1$. Ora questo è assurdo, perchè i gruppi di W', W'' si riducon su C_1, ai gruppi delle serie $g^{s_1}_{n_1}$, $g^{r_1 - s_1 - 1}_{n_1}$ e queste non hanno gruppi comuni. È dunque assurda l'ipotesi $r > r_1$; epperò $r = r_1 = \ldots = r_t$.

75. *Trasformazioni razionali in senso ristretto e largo fra due curve piane.* — Continuando a preparare la dimostrazione dell'invarianza delle serie di equivalenza incomplete, stabiliremo ora il *secondo lemma* :

Se una curva piana C' è trasformata razionale di una curva piana C in senso largo, lo è pure in senso ristretto.

Sia $C = C_1 + \ldots + C_t$ e $C' = C'_1 + \ldots + C'_t$. L'ipotesi è che fra C_i e C'_i vi sia una corrispondenza T_i $[1, \mu_i]$ associante ai punti di C_i gruppi di un'involuzione d'ordine μ_i su C'_i. La trasformazione è birazionale se $\mu_i = 1$. Si vuol provare che la corrispondenza $T_1 + T_2 + \ldots + T_t$ fra C , C' si può considerare subordinata da una trasformazione T $[1, \mu]$ $(\mu \geqslant 1)$ fra il piano α di C e il piano α' di C'.

All'uopo si prepari anzitutto C, con una trasformazione quadratica generica del piano α in sè, in guisa che se la C primitiva aveva qualche componente rettilinea, la C trasformata non ne abbia più. Basterà provare che la C trasformata può porsi in corrispondenza unirazionale in senso stretto con C'. Le rette di α segano sulla C trasformata una $g_{n_1 + n_2 + \ldots + n_t}$ (n_i ordine di C_i), i cui gruppi sono somme di gruppi omologhi nelle proiettività che vengono poste fra il piano rigato α e le $g^2_{n_i}$ staccate sulle C_i, essendo omologhi una retta e un gruppo, quando questo è segato da quella.

Poichè T_i pone una proiettività tra la $g^2_{n_i}$ e la serie $g^2_{n_i \mu_i}$ trasformata della precedente mediante T_i , così i gruppi della serie $\gamma^2_{n_1 \mu_1 + \ldots + n_t \mu_t}$ trasformata di $g^2_{n_1 + \ldots + n_t}$ mediante $T_1 + \ldots + T_t$, sono somme di gruppi omologhi delle $g^2_{n_i \mu_i}$ in proiettività tra tali serie e il piano rigato α. Pertanto $\gamma^2_{n_1 \mu_1 + \ldots + n_t \mu_t}$ è una $g^2_{n_1 \mu_1 + \ldots + n_t \mu_t}$ segabile su C' con una rete Σ di curve non contenente parzialmente nessuna delle C'_i (n. 74). E ne risulta altresì una proiettività tra le rette di α e le curve D di Σ . Questa proiettività genera fra i punti x di α ed i punti x' di α' una trasformazione razionale $[1, \mu]$ il cui secondo indice è il grado effettivo di Σ. Ai gruppi di $g^2_{n_i}$ passanti per un punto x generico di C_i corrispondono, mediante T_i , gruppi di $g_{n_i \mu_i}$ che passano pei μ_i punti x' corrispondenti su C'_i ad x;

e quindi alle rette di α per x corrisponde in Σ un fascio del quale μ_i e soltanto μ_i punti base, variabili con x, giacciono su C_i'. Cioè la trasformazione $[1, \mu]$ costruita tra α, α' subordina fra C , C' la corrispondenza $T_1 + \ldots + T_t$.

Osservazione. — Poiché, come è ben noto (1), ogni curva algebrica irriducibile può mutarsi in una curva piana dotata di soli nodi, ogni curva algebrica piana, anche riducibile, è birazionalmente equivalente in senso largo ad una curva piana con soli nodi, epperò è birazionalemente equivalente a questa in senso stretto. Si conclude che :

Una curva piana anche spezzata può ridursi con una trasformazione piana multipla (birazionale tra la curva e la trasformata) ad una curva piana con soli nodi.

Pel caso di una curva irriducibile il teorema è di BERTINI (2). In tal caso BERTINI precisa che la trasformazione adatta allo scopo è una trasformazione piana doppia.

76. *Invarianza delle serie di equivalenza anche parziali.* — Possiamo finalmente dimostrare che :

Una serie di equivalenza, anche parziale, sopra una curva riducibile, è invariante per trasformazioni razionali qualsiansi.

Se $C = C_1 + \ldots + C_t$ è la curva data e $C' = C_1' + \ldots + C_t'$ la sua trasformata in una corrispondenza razionale $T_1 + \ldots + T_t$, risultante da trasformazioni T_i $[1, \mu_i]$ fra le C_i e le curve omologhe C_i', trasformiamo anzitutto C , C' in due curve piane, $\overline{C}$, $\overline{C}'$, mediante proiezioni generiche, le quali, essendo trasformazioni birazionali in senso stretto, mutan serie d'equivalenza anche parziali, in serie d'equivalenza. Le curve piane $\overline{C}$, $\overline{C}'$ in corrispondenza razionale in senso largo, lo sono pure in senso stretto ; epperò ogni serie di equivalenza di $\overline{C}$ (cioè di C) si muta in una serie di equivalenza di $\overline{C}'$ (cioè di C').

77. *Imagine proiettiva di una g_n^r di equivalenza, data sopra una curva riducibile.* — Il teorema precedente ci pone in grado di estendere alle g_n^r di equivalenza sopra una curva riducibile $C = C_1 + \ldots + C_t$ il concetto d'imagine proiettiva (cfr. col n. 16). Assunto nello spazio S_d di C un sistema lineare Σ di forme, associato a g_n^r, si riferiscano proiettivamente le forme di Σ agli

(1) Cfr. p. es. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 77.
(2) « Rivista di Matematica », (1891).

iperpiani di un S_r e si prenda come omologo di un punto x generico sopra una componente irriducibile C_i di C, il punto x', centro della stella d'iperpiani di S_r corrispondente al sistema ∞^{r-1} delle forme di Σ passanti per x. Così ogni C_i si muta in una C_i' di S_r, che è in corrispondenza birazionale con C_i, se la componente lineare $g_{n_i}^{r_i}$ $(r_i \geq 1)$ di g_n^r su C_i è semplice. Se invece $g_{n_i}^{r_i}$ è composta con un'involuzione d'ordine μ_i, fra C_i, C_i' passa una corrispondenza T_i^{-1} $[\mu_i, 1]$: cioè, secondo il concetto familiare, C_i' deve contarsi come μ_i-pla. Ma ad ogni modo alla serie g_n^r segata su $C' = C_1' + \ldots + C_t'$ (ove ciascuna curva si conti colla propria molteplicità) dagl'iperpiani di S_r, corrisponde la serie g_n^r considerata su C, e ad ogni serie di equivalenza subordinata alla prima (sia essa o no segabile con un sistema *lineare* di iperpiani di S_r), corrisponde su C una serie d'equivalenza subordinata alla data g_n^r (n. 76).

Sicchè *per studiare le serie d'equivalenza subordinate alla data g_n^r di C basta riferirsi ad un'imagine proiettiva di questa serie.*

Si osserverà che la componente C_i' della C' di S_r appartiene ad uno spazio lineare S_{r_i}, perchè gl'iperpiani di S_r segano su C_i' una g^{r_i}.

78. *Sistema lineare aggiunto ad una serie d'equivalenza sopra una curva C riducibile.* — Un sistema lineare Σ associato ad una g_n^r data sopra una curva riducibile $C = C_1 + \ldots + C_t$ (di cui $C_1, \ldots, C_t$ sieno le componenti irriducibili) offre il vantaggio di avere la stessa dimensione della serie, in modo che per un gruppo generico di questa passa una sola forma del sistema. Ma presenta però un grave inconveniente, che occorre cercar di eliminare, sostituendo, per segar la serie, al sistema associato un sistema lineare più ampio.

L'inconveniente cui alludiamo è che, in generale, non tutte le serie di equivalenza di ordine n, subordinate a g_n^r, possono staccarsi su C mediante sistemi lineari subordinati a Σ. Ciò non accade per una serie lineare sopra una curva irriducibile o per una serie di equivalenza *lineare* sopra una curva riducibile, perchè in tal caso la serie è del tipo considerato al n. 74 (Oss.) e il sistema associato Σ è in corrispondenza proiettiva con i gruppi della serie; allora ogni serie d'equivalenza subordinata alla data è anch'essa lineare, e corrisponde necessariamente ad un sistema lineare subordinato a Σ. Ma se la corrispondenza birazionale tra la serie e il sistema associato non è una proiettività (e non lo è certo quando la serie non è lineare), può accadere, ed accade in

generale, che ad una serie d'equivalenza subordinata a g_n^r corrisponda in Σ un sistema non lineare.

Ecco un esempio semplicissimo. Sopra la curva $C = C_1 + C_2$, composta di due rette sghembe C_1 , C_2, consideriamo la g_2^2 segata dai piani dello spazio. Una stella di piani avente il centro O fuori di C, fornirà (come abbiamo già notato) un sistema lineare Σ associato a g_2^2. Le ∞^3 g_2^1 di g_2^2 son date dalle coppie di punti omologhi nelle ∞^3 proiettività fra C_1 , C_2. I piani di Σ, che passano per le coppie di una generica g_2^1 non formano un fascio, ma inviluppano un cono quadrico. Le sole g_2^1 segabili con fasci di Σ sono le ∞^2 staccate dai fasci di piani della stella O.

Se dal sistema Σ si passa al sistema lineare più ampio Σ' di tutti i piani dello spazio, l'inconveniente si elimina: ogni g_2^1 di g_2^2 è invero segabile con un fascio di piani di Σ'.

Diremo che un sistema lineare Σ (di forme dello spazio ambiente a cui appartiene C) è un *sistema lineare aggiunto* ad una data serie di equivalenza g_n^r, quando ogni g_n^s $(s = 1, \dots, r-1)$ subordinata a g_n^r è segabile con un sistema lineare subordinato a Σ.

Nell'esempio precedente il sistema dei piani dello spazio è aggiunto alla g_2^2 considerata su $C_1 + C_2$.

Per ogni data g_n^r esiste sempre un sistema lineare aggiunto? Come si costruisce?

Per rispondere a queste domande dimostriamo un *primo lemma*:

La somma minima di più serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$ *date sulle curve irriducibili distinte* $C_1, \dots, C_t$ *è una serie d'equivalenza* g_n^r $(n = n_1 + \dots + n_t, r = r_1 + \dots + r_t)$ [1].

Consideriamo invero i sistemi lineari di forme dello stesso ordine (nell'ambiente S_d di $C = C_1 + \dots + C_t$):

$$(4) \qquad \sum_{j_1=0}^{r_1} \lambda_{j_1}^{(1)} \varphi_{j_1}^{(1)} = 0 \,, \sum_{j_2=0}^{r_2} \lambda_{j_2}^{(2)} \varphi_{j_2}^{(2)} = 0 \,, \dots, \sum_{j_t=0}^{r_t} \lambda_{j_t}^{(t)} \varphi_{j_t}^{(t)} = 0 \,;$$

(preparati come i sistemi considerati nel n. 74), i quali staccano rispettivamente su $C_1, \dots, C_t$ le serie $g_{n_1}^{r_1}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$, avendo le $C_2 + \dots + C_t$, $C_1 + C_3 + \dots + C_t$, $\dots$, $C_1 + \dots + C_{t-1}$ per linee base.

[1] Nel caso di serie date su una medesima curva irriducibile il teorema non vale: cioè l'insieme di tutte le somme dei gruppi delle date serie non è segabile con un sistema lineare di forme. La serie lineare somma minima delle date serie sopra la curva irriducibile, trovasi considerata a pag. 105 del *Trattato di G. a.* di Severi.

Ragionando come nel n. 74 si riconosce subito che il sistema lineare

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j_i=0}^{r_i} \lambda_{j_i}^{(i)} \varphi_{j_i}^{(i)} = 0 \tag{5}$$

sega su C una serie di equivalenza, i cui gruppi son tutte le $\infty^{r_1+\cdots+r_t}$ possibili somme dei gruppi delle date serie lineari, cioè la *somma minima* di queste.

Osservazione. — La somma massima è invece la serie di equivalenza completa individuata dalla predetta somma minima. Il lemma suddetto porge anzi, in particolare, una nuova dimostrazione del *teorema fondamentale*. Invero, se le $g_{n_i}^{r_i}$ son complete, intanto la loro somma minima è di equivalenza, nè una serie d'equivalenza più ampia di questa può esistere, perchè le sue componenti non possono che essere le $g_{n_i}^{r_i}$. In tal caso la somma massima coincide con la minima.

Passiamo ad un *secondo lemma*:

Alla somma minima predetta appartiene ogni g_n^1 che abbia con essa due gruppi distinti in comune.

Questa proprietà non è affatto evidente, come a prima vista potrebbe sembrare. E ciò per due motivi: l'uno è che la somma minima delle date serie lineari non è mai lineare appena sia $t > 1$, perchè è in corrispondenza birazionale senza eccezioni colla varietà di SEGRE relativa agli spazi lineari $S_{r_1}, \ldots, S_{r_t}$; l'altro motivo è che due gruppi di punti, entro una serie d'equivalenza, non bastano a individuare una g_n^1 (mentre bastano entro una serie lineare).

Così nella g_2^2 dell'esempio considerato al principio del n., ci vogliono *tre* coppie generiche per individuare una generica g_2^1 (ved. in proposito anche il successivo n. 86).

Ecco ora la dimostrazione del lemma. Sieno $G' = G_1' + G_2' + \cdots + G_t'$, $G'' = G_1'' + G_2'' + \cdots + G_t''$ due gruppi distinti somme di gruppi delle date serie lineari. *Ogni* g_n^1 contenente G', G'' ha come punti fissi i punti comuni a G', G''. Fatta astrazione da questi punti fissi eventuali, le componenti lineari definite dalla serie g_m^1 residua, esistono soltanto su quelle C_i ove i gruppi G_i', G_i'' non coincidono. Se p. es., astrazion fatta dai punti fissi eventuali, si hanno su C_i, C_j le componenti $g_{m_i}^1$, $g_{m_j}^1$ di g_m^1 ($m_i \leq n_i$, $m_j \leq n_j$), la g_m^1 pone fra i gruppi di queste componenti una proiettività, sicchè i gruppi di g_m^1 risultano dalle somme di gruppi omologhi in certe proiettività fra le componenti ∞^1 della stessa serie. Riaggiungendo i punti fissi prima tolti, si

ottengono dalle predette somme gruppi della somma minima g_n^r, perchè le $g_{n_i}^1$ componenti di g_n^1 sulle C_i, ove la g_n^1 esiste come serie infinita, hanno ciascuna due gruppi distinti comuni colla $g_{n_i}^{r_i}$ data su C_i, epperò (e questo è il punto essenziale dell'argomentazione) appartengono interamente alla rispettiva $g_{n_i}^{r_i}$.

79. *Esistenza di un sistema lineare aggiunto ad una somma minima di serie lineari.* — Passiamo a dimostrare l'esistenza del sistema lineare aggiunto ad una somma minima di serie lineari.

Riferiamoci ad una curva piana $C = C_1 + \ldots + C_t$, alla quale potremo in ogni caso ridurci per proiezione generica della data curva sghemba o iperspaziale. Una g_n^r somma minima di componenti lineari sulla curva primitiva, si muta in una g_n^r analoga sulla curva piana proiezione. Una volta dimostrata l'esistenza su questa di una sistema lineare Σ di curve, aggiunto a g_n^r, per proiezione delle curve di Σ si otterrà un sistema lineare di forme coniche, aggiunto alla g_n^r primitiva.

Basta dunque dimostrare il teorema per le curve piane.

Se la g_n^r fosse completa, il teorema in questione sarebbe corollario immediato del teorema proiettivo del resto. Invero, la g_n^r è segabile su C mediante il sistema lineare della aggiunte a C, di un certo ordine λ, passanti pel resto Γ, rispetto alle aggiunte dello stesso ordine, di un qualche gruppo *particolare* della serie. E siccome, pel teorema del resto, Γ è resto anche dei gruppi di ogni prescelta serie g_n^s contenuta in g_n^r, così (come ci dice il teorema del n. 71), la g_n^s è segabile con un qualche sistema lineare di aggiunte d'ordine λ, passanti per Γ; cioè con un sistema lineare subordinato a Σ; il quale ultimo dunque è aggiunto a g_n^r.

Consideriamo più in generale una g_n^r incompleta, somma minima delle componenti lineari $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ $(r_i \geq 1)$; e sia Σ il sistema lineare di aggiunte d'ordine l (passanti per un resto Γ di un gruppo di g_n^r rispetto a queste aggiunte) che sega su C la serie d'equivalenza completa individuata da g_n^r. Sia inoltre Σ_1 un sistema lineare subordinato a Σ, staccante g_n^r, e di equazione:

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i = 0 \ .$$

Se Σ_1 non è aggiunto a g_n^r, esisterà in g_n^r qualche serie subordinata g_n^s $(1 \leq s \leq r-1)$ non staccabile con un sistema lineare subordinato a Σ_1; ma tuttavia staccabile con un sistema lineare Σ_1', subordinato a Σ:

$$\Sigma \mu_i \psi_i = 0 \ .$$

Il sistema lineare Σ_2, subordinato a Σ,

$$\Sigma \lambda_i \varphi_i + \Sigma \mu_i \psi_i = 0 \ ,$$

è luogo di tutti i fasci individuati da una curva di Σ_1 e da una curva di Σ_1', epperò sega su C una serie d'equivalenza luogo di serie g_n^1, ognuna delle quali ha un gruppo su g_n^r ed un gruppo su g_n^s, cioè due gruppi su g_n^r. Pel secondo lemma la serie d'equivalenza staccata su C da Σ_2 è la stessa g_n^r segata da Σ_1. Il sistema Σ_2 ha dimensione *maggiore* di quella di Σ_1; epperò, ripetendo il procedimento, la dimensione del sistema lineare subordinato a Σ, con cui si sega la serie g_n^r, viene successivamente ad ampliarsi a mano a mano che si trovano in g_n^r serie di equivalenza subordinate non ancora segabili con sistemi lineari subordinati al sistema lineare a cui si è pervenuti. Ma siccome la dimensione del sistema stesso non può superare la dimensione di Σ (la raggiunge se g_n^r è completa), a un certo momento si perviene ad un sistema lineare aggiunto a g_n^r.

Si conclude:

Esiste sempre qualche sistema lineare aggiunto ad una serie d'equivalenza somma minima di più componenti lineari.

Lasciamo per ora insoluta la questione dell'esistenza di un sistema lineare aggiunto ad *ogni* serie d'equivalenza. Essa sarà trattata nel n. 83.

Dimostriamo piuttosto che:

Se Σ è un sistema lineare aggiunto ad una data serie d'equivalenza g_n^r sopra una curva riducibile C, e se esistono in Σ forme che contengano tutta la C, si può trovare un conveniente sistema lineare Σ' subordinato a Σ, che sia ancora aggiunto a g_n^r ed al quale non appartengano forme contenenti l'intera curva riducibile.

Sia Σ_0 il sistema lineare delle forme di Σ contenenti C e ρ, ρ_0 sieno le dimensioni di Σ, Σ_0. Scelgasi in Σ un sistema Σ', di dimensione $\rho - \rho_0 - 1$, non avente forme comuni con Σ_0. Sappiamo già (n. 68) che Σ' sega su C la stessa g_n^r segata da Σ. Ma qui vogliamo dimostrare di più; che cioè ogni g_n^s subordinata a g_n^r, segata da un qualunque sistema lineare H subordinato a Σ, è pure segabile con un sistema lineare subordinato a Σ'. E quindi che se Σ è aggiunto rispetto a g_n^r, anche Σ' è aggiunto rispetto a questa serie.

Invero, sia H_0 l'eventuale sistema lineare comune ad H, Σ_0, e sieno α, α_0 le dimensioni di H, H_0 ($\alpha_0 = -1$, se H_0 non esiste); sia inoltre H' il sistema lineare congiungente di H, Σ_0, sistema che avrà la dimensione $\rho' = \rho_0 + \alpha - \alpha_0$. I sistemi H', Σ' appartengono a Σ e non ad un sistema lineare subordinato, perchè

se no i sistemi Σ_0, Σ' avrebbero qualche forma comune. Perciò il sistema H'', d'intersezione di H', Σ', ha la dimensione $(\rho - \rho_0 - 1) + (\rho_0 + \alpha - \alpha_0) - \rho = \alpha - \alpha_0 - 1$: onde H'' esiste sempre. Ora H' sega su C la stessa serie g_n^s ivi segata da H e il sistema delle forme di H' contenenti tutta la C, è di nuovo Σ_0. Siccome H'' non ha alcuna forma comune con Σ_0 e la somma $(\alpha - \alpha_0 - 1) + \rho_0$ delle dimensioni di H'', Σ_0 è uguale a $\rho' - 1$, ove ρ' è la dimensione del sistema H', questo sistema è pure congiungente di H'', Σ_0, e così H'' sega su C la stessa serie g_n^s ivi segata da H', cioè da H. Si conclude, come volevasi, che ogni g_n^s contenuta in g_n^r è segabile con un sistema lineare subordinato a Σ'. Perciò Σ' è aggiunto a g_n^r e non contiene forme passanti per tutta la C.

80. *Sistema lineare di dimensione minima aggiunto ad una serie d'equivalenza somma minima di serie lineari.* — Fra i sistemi lineari aggiunti a una data g_n^r somma minima delle serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ $(r_i \geq 1)$ date sulle curve irriducibili $C_1, \ldots, C_t$, hanno particolare importanza i sistemi lineari aggiunti della più piccola dimensione. Vale in proposito il teorema :

La minima dimensione di un sistema lineare aggiunto alla g_n^r $(r = r_1 + \ldots + r_t,\ n = n_1 + \ldots + n_t\ ;\ r_i \geq 1)$ *somma minima delle serie lineari* $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ *date sulle curve irriducibili* $C_1, \ldots, C_t$, *è* $r + t - 1$. *Fra i sistemi lineari che segano su* $C = C_1 + \ldots + C_t$ *la* g_n^r, *ogni tal sistema è caratterizzato da questo valore della dimensione e dal fatto che nessuna delle sue forme contiene tutta la* C.

Volendo ricercare un sistema lineare Σ aggiunto minimo a g_n^r, dovremo anzitutto supporre che in Σ non vi sieno forme contenenti C ; perchè, se vi fossero, a norma dell'ultimo teorema del n. prec., a Σ si potrebbe sostituire un sistema aggiunto di dimensione minore. Ciò posto, la dimensione ρ di Σ uguaglia la somma $r + \sigma$, ove σ denota la dimensione del sistema $\overline{\Sigma}$ delle forme di Σ, che passano per un generico gruppo di g_n^r. Ma (n. 69) σ denota altresì il numero delle condizioni che si impongono alle forme di $\overline{\Sigma}$ volendo che contengano il massimo numero possibile di componenti di C ; sicchè $\sigma \leqslant t - 1$. Pertanto :

$$\rho \leqslant r + t - 1 \ . \tag{6}$$

Ciò premesso, siccome il teorema da dimostrarsi è vero per $t = 1$ (caso di una serie lineare sopra una curva irriducibile), lo ammetteremo stabilito per una curva con $t - 1$ componenti.

Sia ora G_1 un gruppo *qualunque* (cioè anche particolare) della $g^{r_1}_{n_1}$ su C_1. Poichè gli n_1 punti di G_1 appartengono a questo solo gruppo di $g^{r_1}_{n_1}$, essi presentano r_1 condizioni indipendenti ai gruppi di $g^{r_1}_{n_1}$, cioè alle forme di Σ. Sia Σ' il sistema $\infty^{\rho-r_1}$ delle forme di Σ per G_1. Tenuto conto che ogni serie d'equivalenza d'ordine n, subordinata a g^r_n, ed avente il gruppo fisso G_1, è segata da un sistema lineare di forme di Σ, necessariamente contenuto in Σ', ne segue che Σ' è aggiunto alla somma minima delle serie $g^{r_2}_{n_2}, \ldots, g^{r_t}_{n_t}$. Pel teorema ammesso viene qunque:

$$\rho - r_1 \geqslant r_2 + \ldots + r_t + t - 2 \ , \tag{7}$$

valendo certo il segno $>$ se Σ' contiene forme passanti per $C_2 + \ldots + C_t$. Siccome poi $r_1 \geqslant 1$, risulta pure:

$$\rho \geqslant r_2 + \ldots + r_t + t - 1 \ .$$

È perciò possibile d'imporre alle forme di Σ di contenere la curva $C_2 + \ldots + C_t$, poichè questo equivale ad imporre il passaggio per $r_2 + 1$ punti generici di $C_2, \ldots,$ per $r_t + 1$ punti generici di C_t, e le condizioni semplici indipendenti complessivamente imposte sono al più $r_2 + \ldots + r_t + t - 1$, cioè non più di ρ.

Tra le forme di Σ passanti per $C_2 + \ldots + C_t$ non ve n'è alcuna contenente C_1; onde esse segan su questa curva una serie lineare di dimensione $\geqslant \rho - (r_2 + \ldots + r_t + t - 1) \geqslant r_1 - 1 \geqslant 0$, che è contenuta totalmente in $g^{r_1}_{n_1}$ o coincide con $g^{r_1}_{n_1}$. Comunque alla serie segata appartiene almeno un gruppo G_1. Le forme di Σ per G_1 costituiscono un sistema Σ', $\infty^{\rho-r_1}$, che, come si è detto, è aggiunto alla somma minima $g^{r_2}_{n_2} + \ldots + g^{r_t}_{n_t}$, e, per quanto precede, in Σ' c'è qualche forma contenente $C_2 + \ldots + C_t$. Ne deriva che nella (7) vale il segno $>$, cioè $\rho > r + t - 2$. Poichè $\rho \leqslant r + t - 1$, si conclude, come volevasi, che $\rho = r + t - 1$.

Viceversa, proviamo che un sistema lineare Σ, avente la dimensione $\rho = r + t - 1$, non contenente forme passanti per C e segante ivi (fuori di punti fissi eventuali) la g^r_n , è aggiunto a questa serie.

Intanto, per un generico gruppo G di g^r_n passano $\infty^{\rho-r}$ cioè ∞^{t-1} forme di Σ. Ne deriva che a queste forme, costituenti un sistema lineare $\overline{\Sigma}$, $t-1$ qualunque delle $C_1, \ldots, C_t$ presentano $t-1$ condizioni indipendenti (corrispondenti ai passaggi per altrettanti punti scelti genericamente sulle $t-1$ componenti

considerate). Invero, in caso contrario, vi sarebbero almeno ∞^1 forme di $\overline{\Sigma}$ contenenti un conveniente gruppo di $t-1$ delle curve $C_1, \ldots, C_t$ e quindi una forma almeno di $\overline{\Sigma}$, cioè di Σ, contenente tutta la C.

Ciò posto, poichè non si sa ancora che Σ è aggiunto a g_n^r, si comincierà a costruire come segue un sistema Σ' di dimensione $\rho' = \rho + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ aggiunto a g_n^r e contenente totalmente Σ. Sia Σ_0 un sistema lineare aggiunto a g_n^r. Anzitutto le forme di Σ posson ridursi ad avere lo stesso ordine delle forme di Σ_0, aggregando ad esse o alle forme di Σ_0 una parte fissa. Dopo ciò è chiaro che il sistema lineare Σ', congiungente di Σ, Σ_0, contiene totalmente Σ e sega su C la g_n^r, essendo a questa aggiunto.

Per il gruppo generico G di g_n^r passano ora $\infty^{\rho'-r}$ forme di Σ', costituenti un sistema lineare $\overline{\Sigma}'$, di dimensione $\rho' - r = \varepsilon + t - 1$. E siccome $\overline{\Sigma}'$ contiene $\overline{\Sigma}$, così alle forme di $\overline{\Sigma}'$ (come a quelle del sistema subordinato $\overline{\Sigma}$) $t-1$ qualunque delle $C_1, \ldots, C_t$ presentano $t-1$ condizioni indipendenti; e una forma generica di $\overline{\Sigma}'$, contenente p. es. $C_1, \ldots, C_{t-1}$, non contiene di necessità, in conseguenza, la C_t, perchè fra le forme di $\overline{\Sigma}'$ ve ne sono delle particolari (quelle di $\overline{\Sigma}$), che passano per $C_1 + \ldots + C_{t-1}$, ma non per C_t. Da tutto ciò segue che le forme di $\overline{\Sigma}'$ contenenti $C = C_1 + \ldots + C_t$ sono $\infty^{\varepsilon-1}$ $(\varepsilon - 1 \geq 0)$, perchè le $C_1, \ldots, C_t$ presentano alle forme di $\overline{\Sigma}'$ t condizioni indipendenti. Ma allora (n. 79) ogni sistema di dimensione $\rho' - (\varepsilon - 1) - 1 = \rho$ contenuto in Σ' e non avente alcuna forma comune col sistema lineare $\infty^{\varepsilon-1}$ delle forme di Σ' per C, è aggiunto a g_n^r, come lo è Σ'. E siccome Σ si trova in questa condizione, si conclude che esso è aggiunto a g_n^r.

È ora facile di scrivere *l'equazione di un sistema lineare aggiunto minimo alla somma minima delle* $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$. Invero, il sistema lineare (5) del n. 78 ha la dimensione $r_1 + \ldots + r_t + t - 1$, perchè le forme $\varphi_{j_i}^{(i)}$ relative ad un medesimo i son linearmente indipendenti; e quelle di uno dei sistemi (4) relativo ad un valore i' di i, son indipendenti da quelle di un altro qualunque sistema (4) relativo ad $i = i''$ $(i' \neq i'')$, perchè tra le prime non ce n'è alcuna che contenga $C_{i'}$, mentre le seconde passano tutte per $C_{i'}$.

Ne deriva altresì che non può esistere alcuna forma del sistema (5) passante per C. Invero, se una tal forma esistesse, siccome i $t-1$ sistemi (4) corrispondenti ad $i = 2, \ldots, t$ hanno la linea base C_1, dovrebbe esistere nel sistema (4) corrispondente ad $i = 1$, una forma passante per C_1; mentre un tal sistema (4) ha la dimensione r_1 della serie lineare da esso segata su C_1.

Il sistema (5) soddisfa pertanto alle due condizioni che caratterizzano un sistema lineare aggiunto minimo alla g_n^r. Si conclude che :

Costruiti t sistemi lineari di forme dello stesso ordine, delle dimensioni rispettive $r_1, \dots, r_t$, passanti ognuno per un gruppo di $t-1$ delle curve $C_1, \dots, C_t$, coll'esclusione ordinata delle singole $C_1, \dots, C_t$ e seganti su tali componenti irriducibili le serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \dots, g_{n_t}^{r_t}$, il sistema lineare congiungente dei t predetti è un sistema aggiunto minimo alla somma minima di queste serie lineari. Viceversa, ogni sistema aggiunto minimo ha questa struttura.

L'ultima affermazione si giustifica così. Se Σ è un sistema aggiunto minimo alla g_n^r, un gruppo di r_1+1 punti generici scelti su C_1, di r_2+1 punti generici scelti su $C_2, \dots,$ di $r_{t-1}+1$ punti generici scelti su C_{t-1}, impone alle forme di Σ, che debbon contenerlo, non più di $r_1+\dots+r_{t-1}+t-1$ condizioni ; onde le forme di Σ per $C_1+\dots+C_{t-1}$ sono almeno ∞^{r_t} ; e più di ∞^{r_t} non posson essere perchè se no esisterebbe in Σ qualche forma contenente tutta la C. Pertanto Σ contiene t sistemi del tipo (4) e, attesa la sua dimensione, coincide con (5).

Osservazione. — In sostanza tutto il procedimento esposto dà un senso preciso alla seguente argomentazione di carattere euristico, che è molto probabile possa esser completata rigorosamente in modo diretto.

Ogni sistema lineare aggiunto a g_n^r deve contenere t sistemi lineari subordinati, capaci di segare su C le serie d'equivalenza che hanno i gruppi formati da $t-1$ delle $C_1, \dots, C_t$ (considerate virtualmente come gruppi delle serie lineari su esse date) e da un gruppo qualunque della serie lineare data sulla rimanente curva. Pertanto ogni sistema lineare aggiunto deve congiungere t sistemi lineari del tipo (4), ed ha dunque la dimensione ρ non minore di quella del sistema (5), che congiunge i sistemi (4), cioè

$$\rho \geqslant r_1+\dots+r_t+t-1 .$$

Siccome deve valere pure la (6), si conclude che

$$\rho = r_1+\dots+r_t+t-1 ,$$

e che perciò (5) è un sistema lineare aggiunto, di dimensione minima, alla serie g_n^r.

81. *Serie di equivalenza subordinate ad una data somma minima.* — La conoscenza del sistema lineare aggiunto ad una somma

minima di serie lineari, permette di costruire tutte le serie di equivalenza subordinate, ricorrendo all'imagine proiettiva della serie g_n^r (per la quale si conservano le notazioni del precedente n.), fatta mediante un sistema lineare Σ, aggiunto minimo a g_n^r.

Si ha così in S_ρ $(\rho = r_1 + \ldots + r_t + t - 1)$ una curva $C = C_1 + \ldots + C_t$ costituita da t curve irriducibili (semplici o multiple) C_i, appartenenti a t spazi S_{r_i}, congiunti da S_ρ. Un gruppo generico G di g_n^r somma dei gruppi $G_1, \ldots, G_t$ delle serie $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ costituite dalle sezioni iperpiane di $C_1, \ldots, C_t$, appartiene ad uno spazio $S_{\rho-t}$. Gl'iperpiani passanti per un generico S_{t-2} di S_ρ formano un sistema associato a g_n^r. Le g_n^s subordinate a g_n^r $(s < r)$ son *tutte* segate su C dai sistemi d'iperpiani passanti per gli $S_{\rho-s-1}$ di S_ρ.

Le g_n^s relative a spazi $S_{\rho-s-1}$, che non incontrano nessuno degli spazi $S_{r_1}, \ldots, S_{r_t}$, hanno come componenti lineari le intere serie $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$; mentre, se un $S_{\rho-s-1}$ incontra qualcuno dei suddetti spazi, le corrispondenti componenti lineari risultano subordinate alle precedenti.

82. *I gruppi eccezionali d'una serie d'equivalenza intrinsecamente determinati.* — Studiamo ora più a fondo i gruppi eccezionali. Colle solite notazioni, sia data sulla curva C una g_n^r, avente le componenti $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$, relative alle componenti irriducibili $C_1, C_2, \ldots, C_t$ di C.

Diremo che H è un *gruppo satellite* di una serie d'equivalenza g_ν^ρ, componente di g_n^r sopra una curva Γ formata da una o più delle C_i, quando la somma di H e di un gruppo *qualunque* di g_ν^ρ è un gruppo parziale o totale di g_n^r.

Ogni gruppo di ciascuna delle componenti di g_n^r è satellite rispetto ad ogni serie subordinata sopra una o più delle curve residue, allora e soltanto allora che g_n^r sia somma minima di $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$. I gruppi satelliti, essendo definiti indipendentemente dal sistema lineare segante la data g_n^r, sono legati invariantivamente a g_n^r.

Fra i gruppi satelliti vi sono quelli contenuti nei gruppi eccezionali. Precisamente, se il gruppo G di g_n^r è eccezionale sulla componente Γ di C, rispetto ad un sistema lineare Σ associato a g_n^r, ossia se G è contenuto in una forma di Σ passante per Γ, il gruppo H dei punti di G, situati fuori di Γ, è satellite rispetto alla componente g_ν^ρ di g_n^r su Γ. Ciò risulta senz'altro da un'argomentazione di pag. 126.

La proposizione reciproca non è vera. Basta pensare al gruppo

generico di una g_n^r somma minima, che contiene gruppi satelliti senza essere eccezionale. Ma si costruiscono facilmente anche esempi di altro tipo. Così, se $C = C_1 + C_2 + C_3$, ove C_1, C_2 son rette di S_3 incidenti in O e C_3 una conica generica, entro la g_4^3 segata su C dai piani dello spazio la coppia O, O (O su C_1 e su C_2) è satellite della g_2^2 componente su C_3. Ma la somma di O, O e d'una coppia generica della g_2^2 non è eccezionale. I soli gruppi eccezionali di g_4^3 contenenti una coppia di punti di C_1, C_2 satellite della predetta g_2^2, son invero le somme delle singole coppie di punti di C_3 e dei punti O_1, O_2 staccati su C_1, C_2 dal piano di C_3.

La circostanza che i gruppi eccezionali di una g_n^r non sieno sempre caratterizzabili come gruppi (totali) contenti gruppi satelliti, rende meno agevole una risposta completa alla domanda se e quando vi sieno gruppi eccezionali invarianti. Tuttavia la risposta è facile nel caso di due componenti ($t = 2$). Si dimostra invero che:

Data su $C = C_1 + C_2$ *una* g_n^r *di componenti* $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}$ *e di dimensione* $r < r_1 + r_2$, *condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo* $G = G_1 + G_2$ *di* g_n^r *sia eccezionale, è che uno almeno dei gruppi* G_1, G_2 *sia satellite. Epperò ogni gruppo eccezionale di* g_n^r *è invariante.*

La necessità della condizione essendo stata già osservata (anche per t qualunque), basta dimostrare la sufficienza. Supponiamo dunque che G_2 sia satellite di $g_{n_1}^{r_1}$. Alle forme di Σ un *qualunque* gruppo di $g_{n_2}^{r_2}$ presenta (come si sa e come è ovvio) *esattamente* r_2 condizioni. Ora, se nessuna delle ∞^{r-r_2} forme di Σ per G_2 contiene C_1, cioè se G non è eccezionale rispetto a Σ su C_1, la serie segata da quelle forme su C_1 è una $g_{n_1}^{r-r_2}$. D'altronde questa serie deve coincidere con $g_{n_1}^{r_1}$, appunto perchè G_2 è satellite di $g_{n_1}^{r_1}$. Pertanto $r - r_2 = r_1$, contro l'ipotesi. Il gruppo G deve dunque essere eccezionale su C_1, *qualunque sia* Σ.

Segue senz'altro dal teorema dimostrato che i gruppi eccezionali di g_n^r sono tutti invarianti. Quelli tra essi che son eccezionali su C_2 riempiono la somma minima di $g_{n_2}^{r_2}$ e della $g_{n_1}^{r-r_2-1}$ segata su C_1 dalle forme di Σ (o di *ogni* altro sistema associato) per C_2. Si ha dunque *una* g_n^{r-1} *riempita dai gruppi eccezionali su* C_2 *e, similmente, una* g_n^{r-1} *riempita dai gruppi eccezionali su* C_1. Un gruppo eccezionale di 2ª specie appartiene (per definizione) ad infinite forme di Σ ed esattamente ad ∞^1, perchè se no vi sarebbe in Σ una forma almeno contenente C. Pertanto per un gruppo siffatto passa una forma di Σ contenente C_1 ed una forma di Σ contenente C_2 (distinta dalla precedente). Dunque

i gruppi eccezionali di 2ª specie di g_n^r *son i gruppi comuni alle due predette* g_n^{r-1} *e son pertanto, essi pure, invarianti.*

L'estensione di questi ragionamenti a t qualunque diviene complicata pel fatto che (a differenza di quanto accade per le serie lineari sulle curve irriducibili) particolari gruppi *totali* G di una g_n^r di equivalenza sopra una C riducibile, possono esser *neutri* rispetto ad un sistema Σ (anche non associato) segante su C la g_n^r. Cioè può darsi che il gruppo G presenti alle forme di Σ che debbon contenerlo *meno* di r condizioni distinte semplici (quante ne presenta il gruppo generico). Il concetto di gruppo neutro è *relativo* al sistema Σ segante. Si constata però subito che il gruppo G, neutro per Σ, è neutro per ogni sistema Σ' associato a g_n^r, che si costruisca (n. 69) *entro* Σ. *Un gruppo* G *neutro per* Σ' *risulta eccezionale di 2ª specie rispetto a* Σ', appunto perchè per esso passano infinite forme di Σ'. Viceversa *ogni gruppo eccezionale di 2ª specie rispetto a* Σ', *è neutro.*

Nonostante la difficoltà determinata dalla presenza eventuale di gruppi neutri, l'argomentazione addotta per $t = 2$ può, in una certa misura, estendersi. E si ottiene la seguente conclusione, che, se pure non precisa per t qualunque la struttura di tutti i gruppi eccezionali, ha tuttavia espressivo carattere generale:

Se una g_n^r, *data su* $C = C_1 + \ldots + C_t$, *non è lineare e non contiene alcuna componente che sia somma minima di due altre componenti, ad essa appartengon sempre gruppi eccezionali invarianti.*

Infatti, se g_n^r non è lineare e Σ è un suo sistema associato, esistono in Σ forme contenenti qualche parte C_2 di C, sicchè g_n^r possiede gruppi eccezionali (ved. a pag. 137). Sia F una *generica* fra le forme di Σ per C_2. Vi è allora qualche altra componente di C, non contenuta in F: sia C_1. Il gruppo $\overline{G}_1$ staccato su C_1 da F risulta pertanto satellite di $g_{n_2}^{r_2}$. Designato con G_2 un gruppo *qualunque* di $g_{n_2}^{r_2}$, proviamo che il gruppo $\overline{G}_1 + G_2$, il quale è eccezionale rispetto a Σ, lo è pure rispetto ad ogni altro sistema Σ' associato a g_n^r. Invero, in caso contrario, nessuna delle ∞^{r-r_1} forme di Σ' per $\overline{G}_1$ conterrebbe C_2, e le forme stesse staccherebbero su C_2 una $g_{n_2}^{r-r_1}$, che dovrebbe coincidere con $g_{n_2}^{r_2}$, perchè $\overline{G}_1$ è satellite di $g_{n_2}^{r_2}$. Pertanto risulterebbe $r - r_1 = r_2$. Inoltre, nessuna delle ∞^{r-r_1} forme di Σ' per un gruppo generico G_1 di $g_{n_1}^{r_1}$ potrebbe contenere C_2 (perchè in caso opposto lo stesso accadrebbe delle forme di Σ' pel gruppo particolare $\overline{G}_1$); sicchè esse staccherebbero sempre su C_2 la serie $g_{n_2}^{r_2}$. Cioè ogni G_1 sarebbe satellite di $g_{n_2}^{r_2}$ e la g_n^r subordinerebbe su $C_1 + C_2$ la somma minima di $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}$: contrariamente al supposto.

Il teorema è così dimostrato, perchè il ragionamento, una volta acquisita l'esistenza del gruppo $\overline{G}_1$ satellite di $g^{r_2}_{n_2}$, è applicabile ad ogni trasformata birazionale di C. Osservazione questa necessaria, in quanto il fatto che $\overline{G}_1 + G_2$ sia eccezionale rispetto ad ogni sistema Σ' associato a g^r_n sul particolare modello C, permette soltanto, a priori, di affermare l'invarianza della proprietà di fronte alle trasformazioni birazionali di C in senso ristretto e non di fronte a tutte le trasformazioni birazionali.

83. *Caratterizzazione delle serie di equivalenza che ammettono sistemi aggiunti.* — Occupiamoci ora della questione lasciata insoluta a pag. 144, circa le serie che posseggon sistemi aggiunti. Stabiliamo perciò un primo lemma:

Se una g^r_n, *data su* $C = C_1 + \ldots + C_t$, *possiede un sistema aggiunto* Σ, OGNI *gruppo* G *di* g^r_n *è segabile con qualche forma di* Σ [1].

Osserviamo anzitutto che due gruppi G, G' di una qualunque g^r_n (priva di punti fissi) data su C, i quali non abbiano punti comuni, appartengon sempre a qualche g^1_n (una almeno; cfr. col successivo n. 86) subordinata a g^r_n. Infatti, preso un qualsiasi sistema lineare segante g^r_n, due gruppi generici $\overline{G}$, $\overline{G}'$ di g^r_n son *segabili* con (almeno) due forme F, F' di quel sistema. Il fascio (F, F') *stacca* allora su C una g^1_n, cui appartengono $\overline{G}$ e $\overline{G}'$. Resta nello stesso tempo definita una corrispondenza plurilineare ω fra le g^1 subordinate da quella g^1_n su $C_1, \ldots, C_t$, essendo omologhi t gruppi delle g^1 quando son segati dalla stessa forma del fascio (F, F') (n. 74). Se $\overline{G}$, $\overline{G}'$ variano con continuità in g^r_n, la ω non diviene mai singolare (e definisce sempre una g^1_n congiungente entro g^r_n i due gruppi mobili), almeno fino a quando $\overline{G}$, $\overline{G}'$ non acquistino punti comuni [2]. Ciò posto, se *ogni* forma di Σ (aggiunto a g^r_n), la quale passi per il particolar gruppo G di g^r_n, contenesse infiniti punti di C, esisterebbe almeno una componente C_1 di C contenuta in tutte le forme di Σ per G. Sia G' un gruppo generico di g^r_n (non avente punti comuni con G [3]) e g^1_n una delle serie lineari, prive di punti fissi, subordinate a g^r_n

[1] Nella definizione di sistema aggiunto Σ a g^r_n (pag. 141) si richiede soltanto che *ogni* serie d'equivalenza, almeno ∞^1, contenuta in g^r_n sia segabile con un sistema *lineare* subordinato a Σ. Qui si prova che la proprietà vale in conseguenza per le serie ∞^0. Se tale condizione s'aggiunge alla definizione, il lemma è inutile, ma la definizione divien meno significativa.

[2] Se ω diventa singolare, la g^1_n degenera (ved. il successivo n. 86).

[3] Ai nostri fini si può benissimo astrarre fin dal principio dagli eventuali punti fissi di g^r_n.

e congiungenti G e G'. Questa g_n^1 non può essere segata da un fascio di forme di Σ, poichè in questo fascio vi sarebbe una forma passante per G e quindi per C_1 ed i punti di G' situati su C_1, essendo comuni a due forme del fascio (quella per G e quella per G'), sarebbero punti fissi di g_n^1. Si contraddice dunque all'ipotesi che Σ sia aggiunto a g_n^r.

Dimostriamo ora un secondo lemma:

Se una g_n^r, *data su* $C = C_1 + \ldots + C_t$, *possiede un sistema aggiunto* Σ *di dimensione* r, OGNI *forma di* Σ *incontra* C *in un numero finito di punti e la* g_n^r *è lineare.*

Poichè il lemma è vero per $t = 1$, ammettiamolo per una curva con $t - 1$ componenti. Dato che un gruppo *qualunque* G_1 di $g_{n_1}^{r_1}$ presenta ai gruppi di g_n^r tante condizioni quante ne presenta alle forme di Σ, i gruppi di g_n^r per G_1 forman su $\Gamma = C_2 + \ldots + C_t$ una $g_{n-n_1}^{r-r_1}$, che ammette come sistema (associato e) aggiunto il sistema Σ_1, ∞^{r-r_1}, delle forme di Σ per G_1. Pertanto $g_{n-n_1}^{r-r_1}$ è lineare e ogni forma di Σ_1 sega Γ in un numero finito di punti. Variando G_1 il sistema Σ_1 descrive Σ: perciò ogni forma di Σ incontra Γ in un numero finito di punti (e quindi l'intera componente g^r di g_n^r su Γ è lineare). Se ora esistesse in Σ una forma F passante per C_1 e segante Γ in H, questo gruppo sarebbe satellite di $g_{n_1}^{r_1}$, epperò esisterebbe in Σ qualche forma F' (distinta da F) *staccante* su C il gruppo $G_1 + H$. Nel fascio (F, F') vi sarebbe allora una forma contenente una parte prefissata di Γ, contrariamente alla precedente conclusione. Dunque *ogni* forma di Σ sega non soltanto Γ, ma anche C_1 e quindi C, in un numero finito di punti e per ogni gruppo di g_n^r passa una sola forma di Σ; sicchè g_n^r è lineare.

Stabiliti i due lemmi, dicasi $\rho \geqslant r$ la dimensione di un sistema lineare Σ aggiunto a g_n^r e cerchiamo di determinare la natura di questa serie. Se $\rho = r$ il secondo lemma ci dice senz'altro che g_n^r è lineare. Supporremo dunque $\rho > r$. Allora per un gruppo generico di g_n^r passano $\infty^{\rho-r}$ forme di Σ, sicchè in Σ esiste sempre qualche forma contenente una prefissata, e sia C_1, delle componenti di C. Può darsi che ogni forma di Σ per C_1 contenga C_2. È facile allora vedere che ogni forma di Σ per C_2 contiene C_1. Invero, qualora esistesse una forma F di Σ per C_2, *segante* C_1 in un gruppo G_1, considerata una forma F_1 di Σ per G_1, non contenente alcuna parte di C (una forma siffatta esiste perchè Σ è aggiunto a g_n^r), nel fascio (F, F_1) vi sarebbe una forma, diversa da F, F_1, passante per C_1. Ma allora questa forma dovrebbe passare per C_2 e ogni forma del fascio, compresa F_1, passerebbe per C_2.

Ne segue che, rispetto alle forme di Σ, le t componenti di C si distribuiscono in $\theta \leqslant t$ gruppi formanti altrettante curve (riducibili o no) $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\theta$ e godenti della proprietà che ogni forma di Σ contenente una C_i contiene tutta la curva Γ_k individuata da C_i (1). Cioè le θ curve Γ_k si comportan rispetto a Σ come se fossero irriducibili (ogni forma di Σ che contenga infiniti punti d'una Γ la contiene tutta). Consegue da ciò che Σ stacca su ogni Γ una serie *lineare*, perchè in un sistema subordinato a Σ, associato alla serie d'equivalenza segata da Σ su Γ, non vi è alcuna forma che contenga qualche parte di Γ.

Il sistema $\infty^{\rho-r}$, $\sigma(G)$, delle forme di Σ passanti per il generico gruppo G di g_n^r, contiene qualche forma che *stacca* G; epperò ogni Γ presenta una condizione (semplice) effettiva alle forme di $\sigma(G)$. E siccome mentre G descrive g_n^r, $\sigma(G)$ descrive Σ, ed esistono inoltre forme di Σ contenenti *soltanto* una prefissata Γ, così non ogni forma di $\sigma(G)$ (con G generico) può contenere una prefissata delle restanti Γ. Esiston cioè in $\sigma(G)$ θ forme $F_1, \ldots, F_\theta$ passanti rispettivamente per $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\theta$ e tali che F_k contiene soltanto Γ_k. Ne deriva che la parte di G situata in una curva composta di $\theta - 1$ curve Γ è satellite di ogni gruppo della componente di g_n^r sulla Γ esclusa. Epperò g_n^r è somma minima delle sue componenti. Concludendo:

Sopra una curva riducibile una serie d'equivalenza possedente sistema aggiunto è lineare o somma minima di serie lineari su componenti (irriducibili o no) della curva.

Osservazione. — Il ragionamento del n. 80 prova di più che il sistema aggiunto minimo ad una somma minima g^r di serie lineari date sulle Γ ha la dimensione $r + \theta - 1$.

84. *Struttura delle serie di equivalenza incomplete.* — Limitiamoci, per semplicità, a serie d'equivalenza sopra una curva $C = C_1 + C_2$ costituita da due componenti irriducibili. La data g_n^r abbia ivi le componenti $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}$. Nello S_r, imagine proiettiva di un sistema associato a g_n^r (n. 77), continueremo a chiamare C_1, C_2 le curve (semplici o eventualmente multiple) imagini delle curve omonime e C la curva $C_1 + C_2$. Le C_1, C_2 appartengono rispettivamente a due spazi S_{r_1}, S_r, i quali hanno in comune un S_ρ ($\rho = r_1 + r_2 - r$). Per $\rho = 0$ la g_n^r, essendo

(1) Se $\theta = t$, sostituito a Σ un sistema subordinato $\infty^{\rho'}$ aggiunto a g_n^r e in cui non esistan forme contenenti tutta la C, risulta $\rho' = r$ e si ricade nel caso già esaminato. Onde il caso veramente nuovo è quello in cui $0 < t$.

somma minima di $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, ha una struttura nota. Supponiamo perciò $\rho > 0$.

Fra gli iperpiani di S_{r_1} e gl'iperpiani di S_{r_2} intercede una proiettività (singolare) tale che due iperpiani omologhi si tagliano in un medesimo $S_{\rho-1}$ di S_ρ. I gruppi di g^r_n son dati dalle coppie di sezioni iperpiane omologhe in questa proiettività.

Vediamo come tale proprietà s'inverta. Sieno $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ ($r_i \geqslant 1$) due serie d'equivalenza date comunque su C_1 , C_2; e sia r un intero soddisfacente alle condizioni:

$$\max(r_1, r_2) < r < r_1 + r_2 . \tag{8}$$

Posto $\rho = r_1 + r_2 - r$, sarà $\rho < \min(r_1, r_2)$ e quindi $r_1 - \rho - 1 \geqslant 0$ e $r_2 - \rho - 1 \geqslant 0$. Seghiamo $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ rispettivamente su C_1 , C_2 con due sistemi Σ_1 , Σ_2 associati a quelle due serie. Scelti inoltre comunque entro Σ_1 , Σ_2 due sistemi lineari subordinati H_1 , H_2 delle dimensioni rispettive $r_1 - \rho - 1$, $r_2 - \rho - 1$, consideriamo le serie $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$, $g^{r_2-\rho-1}_{n_2}$ da essi segate su C_1 , C_2. Fatte le imagini proiettive di Σ_1 , Σ_2 cogli iperpiani di due spazi S_{r_1} , S_{r_2}, ci ridurremo a due curve C_1 , C_2 su cui le $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ saran segate dagl'iperpiani dei rispettivi spazi; e le serie $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$, $g^{r_2-\rho-1}_{n_2}$ saranno segate da due sistemi lineari H_1 , H_2 d'iperpiani, passanti rispettivamente per due spazi S'_ρ , S''_ρ di S_{r_1} , S_{r_2}.

Pongasi fra S'_ρ , S''_ρ un'omografia non singolare Ω e fra gl'iperpiani di S_{r_1} , S_{r_2} una proiettività singolare ω, chiamando omologhi due iperpiani che seghino su S'_ρ , S''_ρ due spazi $S'_{\rho-1}$, $S''_{\rho-1}$ omologhi in Ω. Le somme dei gruppi staccati su C_1 , C_2 da iperpiani omologhi in ω formano una serie γ^r_n : dico ch'essa è una g^r_n, che avrà per componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$.

All'uopo scegliamo un S_r e entro questo due spazi $\bar{S}_{r_1}$, $\bar{S}_{r_2}$, che si seghino secondo un $\bar{S}_\rho$. Poniamo inoltre un'omografia non singolare Ω_1 tra S'_ρ e $\bar{S}_\rho$ e l'omografia $\Omega_2 = \Omega^{-1}\Omega_1$ fra S''_ρ ed $\bar{S}_\rho$. Riferiamo inoltre omograficamente, con omografie non singolari, S_{r_1} ed $\bar{S}_{r_1}$, S_{r_2} ed $\bar{S}_{r_2}$, in guisa che le omografie poste subordinino le Ω_1 , Ω_2 fra S'_ρ , $\bar{S}_\rho$ ed S''_ρ , $\bar{S}_\rho$. Le C_1 , C_2 vengono mutate in due curve $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$ di $\bar{S}_{r_1}$, $\bar{S}_{r_2}$ e la serie γ^r_n viene mutata nella serie segata su $\bar{C}_1 + \bar{C}_2$ dagl'iperpiani di S_r, cioè in una g^r_n. Dunque anche γ^r_n è una g^r_n (n. 76).

Poichè partendo da una data g^r_n si ha fra le sue $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ un legame del tipo di quello da noi posto fra le $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, che avevamo scelto ad arbitrio su C_1 , C_2, concludiamo che nel modo indicato si costruiscono *tutte* le g^r_n, aventi le componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ e la dimensione r, che soddisfa alle (8). Le serie $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$,

$g^{r_2-\rho-1}_{n_2}$, relative ad una g^r_n fissata, non sono altro che le $g^{r-r_2-1}_{n_1}$, $g^{r-r_1-1}_{n_2}$ considerate nel n. 82, e risultano perciò invarianti per $\rho > 0$.

La conclusione vale anche per $r = r_1 + r_2$, cioè $\rho = 0$. Le $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$, $g^{r_2-\rho-1}_{n_2}$ però non son allora invarianti; e poichè S'_ρ, S''_ρ son ridotti a due punti, l'omografia Ω si riduce alla coppia S'_0, S''_0 di punti omologhi.

Se $r = r_2 > r_1$, sicchè $\rho = r_1$, S''_ρ sta in $S_r = S_{r_2}$ ed S'_ρ coincide con S_{r_1}. Scelta l'omografia Ω fra S'_ρ, S''_ρ, per ogni iperpiano di S'_ρ si assumeranno come omologhi gl'iperpiani di S_r, che passano per lo $S''_{\rho-1}$ di S''_ρ corrispondente in Ω di quel dato $S'_{\rho-1}$ di S'_ρ.

Se $r = r_1 = r_2$ non si avrà che da porre l'omografia Ω fra lo S_{r_1} di C_1 e lo S_{r_2} di C_2, e associare i gruppi segati dagl'iperpiani corrispondenti. Concludendo:

Date sulle componenti irriducibili C_1, C_2, di una curva C, le serie d'equivalenza $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ $(r_1, r_2 \geqslant 1)$ e scelto un qualsiasi intero r soddisfacente alle:

$$\max(r_1, r_2) \leqslant r \leqslant r_1 + r_2,$$

ogni g^r_n avente come componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ si costruisce così:

Si assumano due sistemi lineari Σ_1, Σ_2 di forme associati a $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ e, se $r > \max(r_1, r_2)$, si scelgano in essi due sistemi lineari subordinati H_1, H_2, di dimensioni $r_1 - \rho - 1$, $r_2 - \rho - 1$. Vi sono allora ∞^ρ sistemi lineari $\infty^{r_1-\rho}$ (o $\infty^{r_2-\rho}$) contenenti totalmente H_1 (o rispettivamente H_2); ed essi formano due varietà ∞^ρ lineari. Posta un'omografia non singolare Ω fra queste due varietà, due sistemi lineari omologhi staccano su C_1, C_2 due serie $g^{r_1-\rho}_{n_1}$, $g^{r_2-\rho}_{n_2}$, la cui somma minima $g^{r-\rho}_n$, al variare della coppia considerata, descrive g^r_n.

Se $r = r_2 > r_1$, manca H_1 e l'omografia Ω deve esser addirittura posta fra Σ_1 e i sistemi lineari $\infty^{r_2-r_1}$ contenenti H_2.

Se $r = r_1 = r_2$, mancano H_1, H_2 e l'omografia Ω va posta fra Σ_1, Σ_2.

85. *Parametri da cui dipendono le serie d'equivalenza di date componenti.* — Ci limiteremo anche in tal caso, a $t = 2$, tanto più che nel n. 90 verrà esposta una costruzione del tutto generale delle serie d'equivalenza incomplete. Sia dunque C una curva costituita dalle curve irriducibili C_1, C_2 sulle quali sieno date le serie lineari $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ $(r_1, r_2 \geqslant 1)$. Contiamo da quanti parametri dipendono le g^r_n $(r \leqslant r_1 + r_2)$ aventi le dette componenti lineari. Poichè, *nel caso di una serie lineare $g^{r_1}_{n_1}$*, la scelta di un sistema lineare $\infty^{r_1-\rho-1}$ entro un sistema lineare associato, *equivale* alla scelta di una $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$

subordinata a $g^{r_1}_{n_1}$, così, nella costruzione delle cercate g^r_n, troviamo anzitutto $(\rho+1)(r_1-\rho)+(\rho+1)(r_2-\rho)$ parametri razionali, per determinare i sistemi lineari sopra indicati con H_1, H_2, ed altri $\rho(\rho+2)$ parametri razionali, per determinare un'omografia Ω fra le totalità lineari ∞^ρ, di cui si parla nella costruzione generale. In tutto dunque:

$$(\rho+1)(r_1-\rho)+(\rho+1)(r_2-\rho)+\rho(\rho+2)=(\rho+1)(r+1)-1$$

parametri. Se $\rho>0$, questi parametri son tutti essenziali, perchè mutando una almeno delle $g^{r_1-\rho-1}_{n_1}$, $g^{r_2-\rho-1}_{n_2}$ prescelte e l'omografia Ω, si muta l'omografia singolare fra i gruppi delle $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ e si ottiene pertanto un'altra g^r_n. Se invece $\rho=0$, comunque si scelgano le $g^{r_1-1}_{n_1}$, $g^{r_2-1}_{n_2}$, si ottiene la stessa g^r_n, che dunque dipende da $(\rho+1)(r+1)-1-r=0$ parametri. Si conclude che:

Sopra una curva $C=C_1+C_2$, costituita da due componenti irriducibili, le g^r_n che hanno su C_1, C_2 due date componenti lineari $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, ove

$$r=r_1+r_2-\rho,\quad 0<\rho\leqslant\min(r_1,r_2),$$

costituiscono una varietà razionale di dimensione $(\rho+1)(r+1)-1$.

Lo stesso risultato può ottenersi per altra via. Si consideri un'imagine birazionale di C nello spazio $S_{r_1+r_2+1}$ ove imaginiamo immersi gli spazi S_{r_1}, S_{r_2} di C_1, C_2, essendo $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ le serie delle sezioni iperpiane di C_1, C_2. Allora la serie delle sezioni iperpiane di C è la somma minima di $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ ed il sistema degl'iperpiani di $S_{r_1+r_2+1}$ è il sistema aggiunto minimo a detta serie. Sicchè una g^r_n $(r=r_1+r_2-\rho,\ \rho>0)$, avente le componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, può segarsi su C mediante il sistema Σ degl'iperpiani, che passano per un S_ρ. Un tal sistema Σ è associato a g^r_n.

Ora gli S_ρ di $S_{r_1+r_2+1}$ dipendon razionalmente da $(\rho+1)(r+1)$ parametri; sicchè parrebbe che tante fossero le g^r_n. Ma è facile vedere che una medesima g^r_n è segata da ∞^1 diversi S_ρ (costituenti alla lor volta una varietà razionale).

Invero, proiettando S_{r_1}, S_{r_2} dallo S_ρ prescelto sopra uno spazio duale S_r, si riconosce che per lo S_ρ passa uno ed un solo $S_{2\rho+1}$, che appoggiasi ad S_{r_1}, S_{r_2} secondo un S'_ρ e un S''_ρ. Due gruppi di $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, la cui somma sia un gruppo di g^r_n, son segati su C_1, C_2 da due iperpiani dei rispettivi spazi, i quali tagliano S'_ρ, S''_ρ secondo due spazi $S'_{\rho-1}$, $S''_{\rho-1}$ omologhi in una prospettività Ω, di cui S_ρ è l'asse e che è segata entro $S_{2\rho+1}$ dagli ∞^ρ $S_{2\rho}$ passanti per S_ρ.

Che ogni g^r_n si ottenga nel modo indicato, consegue dal fatto che il sistema degl'iperpiani di $S_{r_1+r_2+1}$ è aggiunto alla somma minima $g^{r_1}_{n_1} + g^{r_2}_{n_2}$; ma, ove ciò s'ignorasse, seguirebbe pure dal fatto che una g^r_n avente per componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$ si ottiene (n. prec.) scegliendo in S_{r_1}, S_{r_2} due spazi S'_ρ, S''_ρ e ponendo fra questi un'omografia non singolare Ω. Infatti, com'è noto (1), una tal omografia è necessariamente una prospettività avente per asse un S_ρ sghembo con S'_ρ, S''_ρ e situato nello $S_{2\rho+1}$, che congiunge S'_ρ, S''_ρ. Anzi S_ρ appartiene ad un sistema ∞^1 di S_ρ di $S_{2\rho+1}$, sghembi fra loro a due a due, e fra i quali sono gli spazi S'_ρ, S''_ρ, in guisa che due qualunque S_ρ del sistema son prospettivi in una prospettività ben individuata, di cui può assumersi come asse uno qualsiasi degli altri S_ρ del sistema.

In conclusione: per ogni coppia di S'_ρ, S''_ρ scelti in S_{r_1}, S_{r_2} e per ogni omografia Ω posta fra S'_ρ, S''_ρ, cioè per ogni g^r_n, avente le componenti $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}$, vi sono ∞^1 S_ρ, che possono esser presi come assi di sistemi ∞^r di iperpiani, ciascuno dei quali sega la g^r_n. Onde le g^r_n distinte dipendono da $(\rho+1)(r+1)-1$ parametri.

86. *Determinazione di una serie di equivalenza mediante alcuni suoi gruppi. Serie d'equivalenza degeneri come limiti di serie non degeneri.* — Quando è data una serie d'equivalenza g^r_n, sopra una curva riducibile C, se la g^r_n non è lineare non ha senso di parlare entro la serie di gruppi *linearmente indipendenti*. Questa frase acquista senso soltanto in relazione ad un sistema Σ associato a g^r_n: allora sono indipendenti più gruppi staccati da forme linearmente indipendenti del sistema; ma cangiando il sistema la relazione d'indipendenza generalmente non si conserva. Rispetto a Σ, $\rho+1$ gruppi generici di g^r_n ($\rho \leqslant r$) son linearmente indipendenti e *individuano* una g^ρ_n segata da un sistema lineare subordinato a Σ, che congiunge le $\rho+1$ forme di , seganti quei gruppi; ma in generale i $\rho+1$ gruppi appartengono ad altre g^ρ_n di g^r_n. Rendiamoci conto di questo fatto.

Riferiamoci p. es. alle g^1_n subordinate alla somma minima ($n = n_1 + n_2$) di due serie lineari $g^1_{n_1}$, $g^1_{n_2}$ date sulle curve irriducibili C_1, C_2. L'imagine di questa somma minima è la varietà

(1) Cfr. BERTINI, *Introduzione alla G. pr. degli iperspazi*, cit., pag. 59. Il risultato ivi dimostrato si può anche stabilire più rapidamente così. Per un S_ρ di $S_{2\rho+1}$ appoggiarsi a un dato $S_{2\rho-1}$ di $S_{2\rho+1}$ secondo un $S_{\rho-1}$ è condizione ρ-pla. Pertanto vi sono sullo $S_{2\rho+1}$ congiungente S'_ρ, S''_ρ, ∞^1 S_ρ appoggiati a $\rho+2$ $S_{2\rho-1}$, i quali congiungono altrettante coppie di spazi $S'_{\rho-1}$, $S''_{\rho-1}$ di S'_ρ, S''_ρ, omologhi in un'omografia Ω individuata da quelle $\rho+2$ coppie. La prospettività, che ha per asse uno di quegli ∞^1 S_ρ, coincide con Ω, perchè ha con Ω $\rho+2$ coppie comuni.

di SEGRE di due rette, cioè una quadrica (non specializzata) Q. Le g_n^1 della somma $g_n^2 = g_{n_1}^1 + g_{n_2}^1$, provengono dalle ∞^3 proiettività fra $g_{n_1}^1$, $g_{n_2}^1$ (n. 74), e son perciò rappresentate dalle ∞^3 coniche di Q. Ne deriva che due gruppi generici di g_n^2 appartengono ad $\infty^1 g_n^1$ subordinate, e tre gruppi generici individuano una g_n^1. Due g_n^1 hanno generalmente due gruppi distinti comuni. Queste circostanze, completamente difformi da quelle che si presentano nel caso di una g_n^2 lineare, che contiene soltanto ∞^2, e non ∞^3, g_n^1, in modo che due gruppi distinti individuano una g_n^1, dipendono essenzialmente dalla natura *non lineare* della g_n^2 considerata.

Ma c'è di più. Se le g_n^1 di g_n^2 s'intendon definite mediante sistemi lineari di forme che le seghino su $C = C_1 + C_2$ (secondo la definizione da noi data, in generale, di serie d'equivalenza) allora esse sono enti ∞^1 *irriducibili* (n. 67), epperò son rappresensentate soltanto dalle *coniche irriducibili* di Q o dalle *generatrici* di Q, quest'ultimo caso presentandosi quando la g_n^1 considerata consta della somma di un gruppo fisso di n_1 punti (o di n_2 punti) dato su C_1 (o rispettivamente su C_2) e della $g_{n_2}^1$ (o $g_{n_1}^1$) data su C_2 (o su C_1). In altri termini *la varietà* ∞^3 *delle* g_n^1 *di* g_n^2 *si scinde così in tre distinte varietà.* Una è costituita dalle g_n^1 corrispondenti alle ∞^3 coniche irriducibili di Q. Questa varietà è in corrispondenza biunivoca senza eccezioni colla varietà dei piani non tangenti ad una quadrica, cioè (dualmente) coll'insieme dei punti di un S_3 da cui si escludano i punti di una quadrica, che diviene così una varietà contorno del detto insieme. Una siffatta varietà essendo rappresentata da una disuguaglianza algebrica, non è una varietà algebrica, nel senso ordinario della parola. Le altre due varietà sono ∞^1 e lineari.

Volendo ristabilire l'algebricità e l'irriducibilità della varietà razionale ∞^3 *delle* g_n^1 *di* g_n^2 , *occorre considerare come serie d'equivalenza* g_n^1, *anche i limiti, eventualmente riducibili, delle serie* g_n^1 *irriducibili.* Siffatti limiti si chiamano *serie d'equivalenza degeneri.* Ognuno di essi si scinde nella somma $G_1 + g_{n_2}^1$ di un gruppo fisso G_1 di $g_{n_1}^1$ con $g_{n_2}^1$ e nella somma $G_2 + g_{n_1}^1$ di un gruppo fisso G_2 di $g_{n_2}^1$ con $g_{n_1}^1$.

Quando si assumano come imagini (multiple) di $g_{n_1}^1$, $g_{n_2}^1$ due rette sghembe a_1 , a_2, per guisa che le g_n^1 son segate sulle rette a_1 , a_2 (rispettivamente contate n_1 ed n_2 volte) dai fasci di piani dello spazio, se l'asse a di un tal fascio tende come limite ad una retta $\bar{a}$ appoggiata ad a_1 , la g_n^1 relativa ad a tende alla g_n^1 decomposta nella somma del punto n_1-plo $(a_1 , \bar{a})$ e della serie n_2-pla dei punti di a_2, e nella somma del punto n_2-plo comune ad a_2 e al piano $a_1\bar{a}$ e della serie n_1-pla dei punti di a_1.

Alla stessa conclusione si perviene se le g^1_n si pensan generate dalle proiettività fra $g^1_{n_1}$, $g^1_{n_2}$; chè tra queste proiettività ve ne sono ∞^2 singolari, le quali dànno g^1_n degeneri. Questa considerazione ci mostra anzi che la estensione della classe delle g^1_n coll'introduzione delle g^1_n degeneri, allo scopo di ottenere una varietà irriducibile razionale di g^1_n, è in sostanza la stessa di quella che si fa nel campo delle omografie, quando la varietà di queste si completa (così da avere una varietà razionale) coll'introduzione delle omografie singolari.

Riassumendo :

La g^2_n somma minima di due $g^1_{n_1}$, $g^1_{n_2}$ lineari date sulle curve irriducibili distinte C_1 , C_2 contiene ∞^3 g^1_n. Tre gruppi generici di g^2_n appartengono ad una sola g^1_n ; ma terne particolari di gruppi posson appartenere a ∞^1 g^1_n degeneri.

Facciamo un altro esempio. Consideriamo la somma minima di una $g^2_{n_1}$ e di una $g^1_{n_2}$ date sulle curve irriducibili C_1 , C_2. La g^3_n somma minima è rappresentata in tal caso da una varietà di SEGRE V_3 del terzo ordine, nello spazio S_5. Le g^1_n di g^3_n, secondo la formula generale (n. prec.) son ∞^5 [$\rho = 3 - 1 = 2$, $r = 1$, $(\rho + 1)(r + 1) = 6$] e le g^2_n di g^3_n sono pure ∞^5 [$\rho = 3 - 2 = 1$, $r = 2$, $(\rho + 1)(r + 1) = 6$).

Nel fatto, le g^1_n di g^3_n si ottengon dalle proiettività fra una $g^1_{n_1}$ variabile in $g^2_{n_1}$ e la $g^1_{n_2}$, e le g^2_n di g^3_n dalle omografie singolari fra i gruppi di $g^2_{n_1}$ e di $g^1_{n_2}$. Precisamente, se si assume come imagine proiettiva di $C_1 + C_2$ una curva C di S_4, costituita da una curva piana C_1 (su cui la $g^2_{n_1}$ sia segata dalle rette) e da una retta n_2-pla C_2, indipendente dal piano α di C_1, le g^1_n son segate dai fasci d'iperpiani e le g^2_n dalle reti d'iperpiani.

Data una retta generica a di S_4, lo S_3 aC_2 taglia α in una retta b e gli S_3 per a punteggiano proiettivamente le rette C_2, b, per guisa che un gruppo della $g^2_{n_1}$ e un punto n_2-plo P di C_2 sommati dànno un gruppo della g^2_n segata dalla rete degli S_3 per a, quando quel gruppo è staccato da una retta di α, che taglia b in un punto, cui, nella proiettività fra b, C_2, corrisponda P.

Una siffatta g^2_n ammette sempre una g^1_n eccezionale relativa a C_2, ottenuta facendo la somma del gruppo (b , C_1) e della $g^1_{n_2}$ dei punti n_2-pli di C_2. Per individuare g^2_n basta conoscere la g^1_n eccezionale e la proiettività fra b e C_2, il che importa la conoscenza di tre gruppi generici di g^2_n.

Per individuare una g^1_n basta invece conoscere una $g^1_{n_1}$ di $g^2_{n_1}$ e una proiettività tra questa e C_2 ; cioè in complesso tre gruppi di g^3_n , colla condizione che i loro residui su C_1, appartengano a una medesima $g^1_{n_1}$.

Le g_n^2 degeneri provengono dalle rette a appoggiate ad α o a C_2 e le g_n^1 degeneri dai piani (assi dei fasci d'iperpiani seganti le g_n^1) appoggiati a C_2 o ad α secondo una retta.

Riassumendo:

La g_n^3 somma minima di due serie lineari $g_{n_1}^2$, $g_{n_2}^1$ date sulle curve irriducibili distinte C_1, C_2 contiene $\infty^5 g_n^2$ e $\infty^5 g_n^1$. Ogni g_n^2 contiene una g_n^1 eccezionale relativa a C_2, che lascia come residuo in C_1 un determinato gruppo G_1 di $g_{n_1}^2$. Una generica g_n^2 è individuata dall'arbitraria scelta di G_1 e di tre gruppi generici di g_n^3 in essa contenuti. Una generica g_n^1 è individuata da tre suoi gruppi generici, sotto la condizione che i loro residui su C_1, appartengano a una medesima $g_{n_1}^1$. Per posizioni speciali dei gruppi considerati le g_n^2, g_n^1 posson risultare degeneri.

Le considerazioni svolte in questo numero mostrano la complessità dei fatti che si presentano nella individuazione di serie d'equivalenza subordinate a una data.

Inoltre esse provano che, affinchè abbia pieno valore il teorema del n. 85 concernente la varietà delle g_n^r contenute nella somma minima di due serie lineari, occorre che si considerino, anche in generale, *serie di equivalenza degeneri*. Senza di ciò non si potrebbe affermare che la varietà di quelle g_n^r è irriducibile (razionale).

87. *Le serie razionali e unirazionali involutorie.* — Una serie unirazionale di gruppi di punti sopra una curva riducibile C, consta, come si è già dimostrato (n. 49), di gruppi equivalenti; ma non è perciò detto che essa costituisca una serie d'equivalenza, nel senso che (in questa trattazione delle serie d'equivalenza sulle curve riducibili) abbiamo finora dato alla frase (cioè di serie segabile con un sistema lineare di forme). Intanto, poichè ogni serie d'equivalenza, in questo senso considerata, è involutoria (n. 67), è *necessario*, affinchè una serie unirazionale sia una serie d'equivalenza, ch'essa sia involutoria. La condizione è *sufficiente*? Per le serie sulle curve irriducibili si deve rispondere, com'è ben noto, in modo affermativo (1). Non è così per le serie sulle curve riducibili (2). Su ciò ha richiamato l'attenzione il GHERARDELLI (3), il quale ha manifestato il dubbio che l'esempio seguente

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 69.

(2) Nella Memoria [3] di SEVERI, cit. a pag. 44, vien affermata la sufficienza dell'accennata condizione; ma il ragionamento introduce implicitamente, in un punto, ulteriori ipotesi, indipendenti dalla condizione stessa, che da sola dunque non basta a legittimare la deduzione.

(3) *Un'osservazione sulle serie di equivalenza sopra una curva algebrica riducibile*, «Atti della R. Accad. Nazionale dei Lincei», 6 febbr. 1938. Veggasi pure

conduca ad una serie razionale involutoria, non di equivalenza.

Consideriamo una curva C composta da due coniche C_1 , C_2 (sui piani α_1 , α_2) e la g_4^4 somma delle g_2^2 delle coppie di punti di C_1 , C_2. Poniamo una reciprocità Ω non singolare fra i piani α_1 , α_2 e associamo due coppie di punti di C_1 , C_2 quando son segate da rette reciproche in Ω. Si ha così una serie γ_4^3 involutoria razionale, contenuta nella g_4^4. La γ_4^3 subordina su ciascuna delle C_1 , C_2 la relativa g_2^2 ed è involutoria, perchè per 3 punti di $C_1 + C_2$ o non passa alcun gruppo di γ_4^3 (se i 3 punti son presi su C_1 o su C_2) o vi passa un solo gruppo di γ_4^3 (se 2 dei punti son generici su C_1 o C_2 e l'altro generico su C_2 o C_1) o vi passano infiniti gruppi di γ_4^3 (se un punto è preso su C_1 o C_2, e gli altri due punti sull'intersezione di C_2 o C_1 colla retta omologa di quel punto nella reciprocità).

Noi possediamo ormai gli elementi per asserire che la γ_4^3 non è di equivalenza, dando così piena ragione al dubbio del GHERARDELLI.

Un primo modo di provare che la γ_4^3 non è di equivalenza, è di osservare che una g_4^3 avente su C_1 , C_2 le componenti g_2^2 , g_2^2 e per la quale dunque, colle notazioni del n. 84, è $r_1 = r_2 = 2$, $r = 3$, $\rho = r_1 + r_2 - r = 1$, $r_1 - \rho - 1 = r_2 - \rho - 1 = 0$, si costruisce fissando una retta a_1 in α_1 ed una retta a_2 in α_2; ponendo una proiettività non singolare ω fra a_1 , a_2 e associando due rette di α_1 , α_2 quando segano su a_1 , a_2 punti omologhi in ω. In altri termini le rette di α_1, α_2 che dànno gruppi aggregabili nella costruzione di g_4^3, son reciproche in una reciprocità *singolare*, di cui a_1 , a_2 son rette singolari. Siccome i gruppi aggregabili nella costruzione di γ_4^3 son reciproci in una reciprocità *non singolare*, si conclude che γ_4^3 non può essere una g_4^3.

Ma ancor più nitidamente la conclusione si stabilisce ricorrendo alla nozione di sistema lineare aggiunto (n. 79). Un'immagine proiettiva del sistema lineare aggiunto minimo alla g_4^4 considerata su $C_1 + C_2$, si ottiene trasportando le due coniche (con due proiettività) nello spazio S_5, in modo che i loro piani α_1 , α_2 sieno ivi indipendenti. Il sistema degl'iperpiani di S_5 è allora l'aggiunto minimo alla nostra g_4^4. Pertanto le singole g_4^3 subordinate son segabili su $C_1 + C_2$ cogli S_4 che passano per le singole rette di S_5.

Si presenta qui un elegante paradosso, che a priori sembrebbe

la Nota di SEVERI, *Intorno alla teoria delle serie di equivalenza sulle curve riducibili*, « ibidem », 6 febbr. 1938.

dar torto al dubbio del GHERARDELLI e la cui soluzione getta viva luce sulla questione.

Le rette di S_5 sono ∞^8 e ∞^8 sono le reciprocità fra α_1 , α_2. Onde parrebbe che, segando α_1 , α_2 coi sistemi lineari di S_4 aventi per assi le ∞^8 rette di S_5, si ottenessero tutte le ∞^8 reciprocità fra α_1 , α_2, e quindi che le γ_4^3, costruite alla maniera di GHERARDELLI, fossero tutte g_4^3. In realtà con quei sistemi lineari di S_4 non si ottengono che le ∞^7 reciprocità singolari. Invero, per una retta generica a di S_5 passa *un* S_3 appoggiato ad α_1 , α_2 secondo due rette a_1 , a_2, che son singolari nella reciprocità relativa all'asse a; e dalla reciprocità resta determinata una proiettività non singolare fra a_1 , a_2. Viceversa, questa proiettività individua la reciprocità. Tutte le ∞^1 rette della schiera determinata nel detto S_3 dalle rette a, a_1 , a_2, prese come assi di sistemi ∞^3 di S_4, dànno luogo alla *stessa* proiettività non singolare fra a_1, a_2 e quindi alla *stessa* reciprocità singolare fra i due piani α_1 , α_2. Ed è perciò che si ottengono ∞^7, invece che ∞^8 reciprocità.

La circostanza paradossale segnalata si può anche presentare sotto quest'altro aspetto. Una reciprocità generica fra α_1, α_2 è individuata da 8 coppie generiche di rette reciproche; queste coppie son congiunte da 8 S_3; in S_4 vi è un numero finito (14, come risulta da una formula di SCHUBERT) di rette appoggiate a 8 generici S_3: dunque una reciprocità generica è staccata dagli S_4 per una di quelle rette.

Ma nel caso attuale rette esterne ai due piani α_1, α_2 appoggiate agli 8 S_3 vengono a mancare, perchè le ∞^2 rette dei due piani α_1 , α_2 son appoggiate agli 8 S_3 ed assorbono virtualmente tutte le 14 soluzioni del caso generale!

88. *Digressione: fondamenti d'una teoria generale delle plurilinearità.* — Per determinare la struttura delle γ_n^r unirazionali, involutorie, sopra una curva riducibile, occorre dare al concetto di proiettività fra spazi lineari un'estensione molto maggiore della consueta [1]. Trattandosi d'una questione non essenziale pei nostri scopi, ci limiteremo a delinerare i tratti fondamentali della nuova teoria, la quale però merita di esser meglio approfondita.

[1] La teoria delle proiettività, non singolari e singolari, secondo la comune accezione, trovasi esposta p. es. nell'*Introduzione alla Geometria pr. degli iperspazi* di BERTINI, cit. Tipi più generali di proiettività singolari (sempre fra spazi di ugual dimensione) furono studiati da DEL PRETE (« Rend. Ist. Lombardo », 1897); ma neppure questi tipi esauriscono le corrispondenze di cui vogliamo occuparci nel testo.

Una corrispondenza algebrica T (irriducibile e non degenere, n. 53) fra due spazi lineari S_r , $S'_{r'}$ di dimensioni uguali o diverse, considerata come varietà di coppie x, x' di punti dei due spazi, si chiamerà una *proiettività* o *bilinearità* quando conserva i caratteri essenziali delle ordinarie proiettività ; cioè :

1) Ad un generico x di S_r corrisponde in $S'_{r'}$ uno spazio *lineare* $S'_{k'}(x)$ e ad un x' generico di $S'_{r'}$ corrisponde in S_r uno spazio *lineare* $S_k(x')$ (cosicchè $s = r + k' = r' + k$ è la dimensione di T ; n. 54). Naturalmente non si esclude che T possegga punti e varietà fondamentali (n. 54) ; ma in ogni caso la varietà fondamentale corrispondente ad un punto fondamentale è sempre uno spazio lineare.

2) Ad una retta generica di S_r (o di $S'_{r'}$) corrisponde nell'altro spazio un fascio di $S'_{k'}$ (o rispettivamente di S_k) (1).

Deriva da 1), 2) che :

3) Ad uno spazio lineare qualunque, di uno dei due spazi dati, corrisponde nell'altro uno spazio lineare.

Invero, sia p. es. un piano α di S_r e a, b sieno due rette di α ; P il loro punto comune. Ad a, b corrispondono in $S'_{r'}$ due spazi $S'_{k'+1}(a)$, $S'_{k'+1}(b)$, che si tagliano nello $S'_{k'}(P)$ e giaccion perciò in un $S'_{k'+2}$. Sia c una retta di α non passante per P. Essa taglia a, b nei punti distinti A, B e lo $S'_{k'+1}(c)$ appoggiasi al suddetto $S'_{k'+2}$ secondo i due spazi $S'_{k'}(A)$, $S'_{k'}(B)$, epperò giace nello $S'_{k'+2}$. Ne deriva che lo $S'_{k'}(Q)$ omologo di un punto Q qualunque di α giace nello $S'_{k'+2}$.

Da 3) segue che :

4) Se esiste qualche coppia x, x' di T avente x in uno spazio lineare dato in S_r e x' in uno spazio lineare dato in $S'_{r'}$, o essa è unica o vi sono infinite coppie siffatte (e in tal caso i loro punti x, x' riempiono due spazi lineari).

Infatti i punti x' delle coppie x, x' di T , aventi x in un dato S_k di S_r , riempiono un $S'_{k'+h}$; sicchè o non v'è alcun punto x', delle dette coppie, giacente in un dato $S'_{k'}$ di $S'_{r'}$, oppure i punti x' delle coppie suddette riempiono lo spazio $S'_{l'}$ $(l' \geqslant 0)$ comune ad $S'_{k'+h}$ e ad $S'_{k'}$, ed i relativi punti x riempiono lo spazio lineare omologo di $S'_{l'}$.

Vale inoltre la proprietà :

5) Posto $\sigma = r - k = r' - k'$, le coppie di T aventi i

(1) Un fascio di S_k in S_r è l'insieme degli S_k giacenti in un S_{k+1} e passanti per un S_{k-1} .

punti x, x' situati rispettivamente su generici spazi S_σ , S'_σ di S_r , $S'_{r'}$, dànno luogo ad un'omografia fra S_σ , S'_σ.

Invero, al punto x (o x') di S_σ (o S'_σ) risponde il punto $x' \equiv (S'_{k'}(x), S'_\sigma)$ [o rispettivamente $x \equiv (S_k(x'), S_\sigma)$]; ed in questa corrispondenza birazionale fra i punti di S_σ , S'_σ, ai punti d'una retta di uno dei due spazi, corrispondono, per la 3), punti di una retta dell'altro. Onde trattasi di un'omografia.

Dimostriamo inoltre che:

Le coppie x , x' di una bilinearità di dimensione $s = r' + k = r + k'$, fra gli spazi S_r , $S'_{r'}$, soddisfanno ad un sistema di $r - k = r' - k'$ equazioni bilineari nelle coordinate di x , x'.

Rappresentiamo all'uopo il prodotto $S_r \times S'_{r'}$ sul suo modello proiettivo minimo, che è la varietà di SEGRE $V_{r+r'}$ relativa ad S_r , $S'_{r'}$ (n. 19) (1).

Sia anzitutto $s = r + r' - 1$ la dimensione della data bilinearità T, così che, in tal caso, $k' = r' - 1$, $k = r - 1$.

Se x , x' denotan punti di S_r , $S'_{r'}$, poichè T (che, si ricordi, è non degenere e irriducibile) associa ad un x generico di S_r i punti x' d'un iperpiano di $S'_{r'}$, razionalmente determinato da x, le coppie x, x', di cui fa parte x, soddisfanno ad una equazione $\varphi(x, x') = 0$, lineare nelle x' e a coefficienti razionali in x. Essendo x generico, i denominatori di questi coefficienti son diversi da zero e la $\varphi = 0$ può ridursi ad esser intera anche nelle x. La $\varphi(x, x') = 0$ così ottenuta è soddisfatta da tutte e sole le coppie x , x' di T, in quanto la corrispondenza è irriducibile. Proviamo che φ è lineare nelle x. Invero, siccome $\varphi(x, x') = 0$ fa corrispondere al generico x un $S'_{r'-1}$ da contarsi semplicemente, così (n. 61) essa fa corrispondere al generico x' un S_{r-1} da contarsi semplicemente: il che implica che φ sia di 1° ordine nelle x (2). È poi chiaro che $\varphi = 0$ equivale ad un'equazione lineare nelle $X_{lm} = x_l x'_m$, coordinate omogenee del punto mobile in V, x_l, x'_m ($l = 0, \ldots, r$; $m = 0, \ldots, r'$) essendo le coordinate omogenee di x, x' (n. 19).

(1) Avvertiamo che la dimostrazione di questa proprietà data da BORDIGA, e citata a pie' della pag. 28, non è giusta. Una dimostrazione ineccepibile verrà esposta in seguito, come applicazione della teoria generale delle corrispondenze (a valenza) tra varietà.

(2) Deriva da quest'argomentazione che una bilinearità di dimensione $r + r' - 1$ è caratterizzata dalla sola proprietà 1) e che *ogni* equazione bilineare nelle x, x' rappresenta una bilinearità la quale consta, se $r = r'$, delle ∞^{2r-1} coppie di punti coniugati in una reciprocità.

Sia ora T una bilinearità di dimensione $s = r' + k = r + k'$ ($s < r + r' - 1$) ed O' un punto generico di $S'_{r'}$. Consideriamo la corrispondenza T' che associa ad un generico x di S_r i punti x' appartenenti allo $S'_{k'+1}$ proiettante da O' lo spazio $S'_{k'}(x)$. La T' è una corrispondenza di dimensione $s + 1$. Dico che è una bilinearità. È chiaro infatti che le 1), 2) son soddisfatte da T', in quanto T' si consideri operante sui punti x. Proviamo che lo stesso accade quanto T' opera sugli x'. In $S'_{r'}$ esiste un sistema Σ' [1] di spazi $S'_{k'}(x)$. I punti x omologhi in T' di un generico x' di $S'_{r'}$ son quelli i cui $S'_{k'}(x)$ s'appoggiano alla retta $O'x'$; e siccome gli ∞^k $S'_{k'}$ di Σ' uscenti da un generico x' di $S'_{r'}$ provengono dai punti x situati nello $S_k(x')$ corrispondente ad x', così il luogo dei cercati x è lo S_{k+1} corrispondente in T alla retta $O'x'$.

Se infine x' descrive in $S'_{r'}$ una retta a', lo $S_{k+1}(x')$ omologo di x' in T' descrive un fascio nello S_{k+2}, che corrisponde in T al piano $O'a'$. Pertanto T' è una bilinearità.

Analoga conclusione vale per la corrispondenza T'', di dimensione $s + 2$, ottenuta da T' prendendo come omologhi di un generico x i punti x' dello $S'_{k'+2}$ proiettante lo spazio $S'_{k'+1}(x) \equiv O' S'_{k'}(x)$ da un punto O'' genericamente fissato in $S'_{r'}$. E così proseguendo.

Si ottiene insomma una bilinearità U', di dimensione $r + r' - 1$, proiettando lo spazio $S'_{k'}(x)$, omologo in T del generico x di S_r, da un generico spazio $S'_{r'-k'-2}$, fissato in $S'_{r'}$, e assumendo x' nello spazio proiettante $S'_{r'-1}(x) \equiv S'_{r'-k'-2} \cdot S'_{k'}(x)$. Similmente possono considerarsi altre $r' - k' - 1$ bilinearità di dimensione $r + r' - 1$, U'', ..., $U^{(r'-k')}$, ottenute proiettando $S'_{k'}(x)$ da altri $r' - k' - 1$ $S'_{r'-k'-2}$ generici di $S'_{r'}$. Allora $S'_{k'}(x)$ risulta intersezione degli $r' - k'$ iperpiani di $S'_{r'}$ omologhi del generico x nelle $r' - k'$ bilinearità U', U'', ..., $U^{(r'-k')}$, e le coppie x, x' di T soddisfanno al sistema di equazioni bilineari

$$f_i(x, x') = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r' - k'),$$

ciascuna delle quali rappresenta una delle U. Il teorema è così dimostrato.

La conclusione può anche, evidentemente, enunciarsi sotto la forma:

Sul modello V una bilinearità è rappresentata da una varietà CONTENUTA *nella sezione di V con un conveniente spazio lineare.*

(1) Questo sistema ha dimensione non superiore ad r (ved. l'Oss. in fondo al presente n.); ma in ogni caso riempie $S'_{r'}$ per l'ipotesi che T non sia degenere.

Abbiamo calcato sulla parola « contenuta », perchè non deve credersi che una bilinearità comprenda sempre tutta la sezione di V con uno spazio lineare ; e tanto meno poi con uno spazio lineare generico.

Soltanto per le bilinearità di dimensione $r + r' - 1$ si può asserire che le imagini su V comprendono *tutte* le sezioni iperpiane di V, e ciascuna di queste *integralmente. Bilinearità le cui varietà rappresentative sono parziali intersezioni di V con uno spazio lineare, costituiscono il caso generale, quando la dimensione della bilinearità è* $< r + r' - 1$.

Così, se $r = r' = 2$ e consideriamo fra i due piani la corrispondenza

$$(9) \qquad f(x, x') = 0 \ , \ \varphi(x, x') = 0 \ ,$$

ove f , φ sono generiche forme lineari in x , x', si ottiene una corrispondenza che non è lineare, ma *quadratica.* Essa invero associa ad una generica retta di uno dei due piani la conica generata dai fasci proiettivi omologhi a quella retta nelle due reciprocità $f = 0$, $\varphi = 0$.

Pertanto le ∞^2 coppie di ciascuna delle omografie fra i due piani soddisfanno a particolari sistemi (9) ; cioè le omografie son rappresentate, sulla V_4 di S_8, da sezioni con particolari S_6. Precisamente si tratta di sezioni spezzate in due superficie, una delle quali soltanto rappresenta l'omografia, mentre l'altra è la quadrica imagine della varietà delle coppie di punti di due convenienti rette dei due piani.

Infatti, se $r = r'$ (anche > 2), un'omografia fra S_r , S'_r può rappresentarsi colle r equazioni bilineari :

$$x'_i \sum_{k=0}^{r} a_{0k} x_k = x'_0 \sum_{k=0}^{r} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) .$$

Però queste equazioni son soddisfatte non soltanto dalle coppie dell'omografia

$$\varepsilon x'_i = \sum_{k=0}^{r} a_{ik} x_k \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) ,$$

ma anche delle coppie x , x' aventi x sull'iperpiano $\Sigma a_{0k} x_k = 0$ ed x' sull'iperpiano $x'_0 = 0$.

Le precedenti considerazioni si estendono agevolmente ad una *plurilinearità* T fra gli spazi $S^{(1)}_{r_1}$, $S^{(2)}_{r_2}$, ... , $S^{(t)}_{r_t}$. Una tal corrispondenza (irriducibile e non degenere) è definita dalle condizioni analoghe alle 1), 2) ; cioè :

1′) Ad un punto generico di uno qualunque degli spazi dati sono associati punti i cui luoghi costituiscono, entro i rispettivi ambienti, altrettanti spazi lineari.

2′) Ai punti d'una retta generica d'uno qualunque degli spazi dati sono associati punti i cui luoghi sono ancora spazi lineari (riempiti dagli spazi lineari omologhi dei punti della data retta, i quali spazi formano necessariamente un fascio (1)).

Ne consegue la proprietà 3′) analoga alla 3), e la:

4′) Se esiste qualche t-pla $x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}$ di punti di T aventi $x^{(1)}, \ldots, x^{(t)}$ rispettivamente su altrettanti spazi lineari dati in $S^{(1)}_{r_1}, \ldots, S^{(t)}_{r_t}$, questa t-pla è unica o ve ne sono infinite, i cui punti hanno come luoghi, nei rispettivi ambienti, altrettanti spazi lineari.

Valgono inoltre i teoremi seguenti:

Ogni plurilinearità di dimensione $r_1 + r_2 + \ldots + r_t - 1$, *fra gli spazi lineari* $S^{(1)}_{r_1}, \ldots, S^{(t)}_{r_t}$, *è compiutamente rappresentata da una sola equazione plurilineare fra le coordinate dei punti mobili negli spazi dati.*

Le t-ple di una plurilinearità di dimensione $s < r_1 + \ldots + r_t - 1$ *soddisfanno a* $r_1 + \ldots + r_t - s$ *equazioni plurilineari, che in generale non la rappresentano compiutamente. Per ottenere una rappresentazione completa occorre considerare un sistema di più che* $r_1 + \ldots + r_t - s$ *equazioni plurilineari.*

Osservazione 1ª. — Un'osservazione interessante, che riferiamo, per brevità, alle corrispondenze bilineari, è la seguente:

In una bilinearità fra S_r, $S'_{r'}$ può darsi che lo $S'_{k'}(x)$ omologo in $S'_{r'}$ di un generico x di S_r (e similmente scambiando fra loro S_r, $S'_{r'}$) provenga da altri punti $(y, z, \ldots)$ di S_r, distinti da x; che cioè sia:

$$S'_{k'}(x) \equiv S'_{k'}(y) \equiv S'_{k'}(z) \equiv \ldots .$$

Questo accade certamente se $r > (k'+1)(r'-k')$, perchè allora gli $S'_{k'}(x)$ son meno di ∞^r; ma può accadere anche non essendo soddisfatta questa disuguaglianza.

Così per es. per $r = 3$, $r' = 2$ la bilinearità rappresentata da un'equazione bilineare $f(x, x') = 0$, associa proiettivamente ai punti x' di S'_2 i piani di una stella O di S_3, sicchè ad ognuno degli ∞^1 x di un raggio della stella corrisponde in S'_2 la medesima retta $S'_1(x)$. In tal caso $r > (k'+1)(r'-k')$ $(k' = 1)$.

(1) Vedi la nota (1) a pie' della pag. 171.

Se invece consideriamo una generica reciprocità singolare fra due piani S_2, S'_2, nella quale sieno omologhi i punti x, x' quando son proiettati da due punti O, O' di S_2, S'_2 secondo raggi omologhi in una data proiettività, tutti gli x di un raggio del fascio O di S_2 hanno la medesima retta omologa nella bilinearità, nonostante sia $r = (k' + 1)(r' - k')$.

Comunque, vale il teorema:

In una bilinearità fra S_r, $S'_{r'}$ lo spazio $S'_{k'}(x)$ corrispondente al generico x di S_r o proviene da questo solo punto oppure da infiniti altri, che riempiono uno spazio lineare di S_r, passante per x.

Infatti, se per un x generico in S_r esiste (almeno) un punto y, distinto da x, tale che $S'_{k'}(x) \equiv S'_{k'}(y)$, la retta $a \equiv xy$ è generica in S_r e ai suoi punti corrispondono perciò birazionalmente (ossia proiettivamente) gli $S'_{k'}$ di un fascio. La proiettività tra gli elementi di questo fascio e i punti di a è necessariamente singolare (perchè ad x, y di a corrisponde un medesimo $S'_{k'}$ del fascio); cioè a tutti i punti di a corrisponde il medesimo spazio $S'_{k'}$.

Il luogo dei punti di S_r *associati* al generico x, nel senso che a tutti i punti di quel luogo risponde il medesimo spazio $S'_{k'}$, è dunque tale che la retta congiungente due punti qualunque del luogo appartiene a questo. Pertanto trattasi d'uno spazio lineare [1].

Osservazione 2ª. — Per caratterizzare le bilinearità occorre indagare di che tipo sono i sistemi di spazi $S'_{k'}(x)$, $S_k(x')$ che corrispondono ai punti x, x' di S_r, $S'_{r'}$. Si capisce *a priori*, in conseguenza del fatto che le bilinearità conservano il massimo di proprietà *lineari* conciliabili colla generalità del concetto, che questi sistemi debbano esser tali:

1) Che i loro punti fondamentali cioè i punti siffatti che per ciascuno di essi passa un'infinità di spazi del sistema maggiore dell'infinità relativa ad un punto generico, son distribuiti in spazi lineari. Vi sarà uno spazio lineare in cui son contenuti i punti

[1] La proprietà di cui si profitta è elementare. Se il luogo L di S_r è tale che per ogni coppia x, y di punti di L la retta xy appartiene ad L, o la retta stessa esaurisce L, oppure il piano xyz, che congiunge questa retta ad un punto z di L ad essa esterno, appartiene ad L. Di nuovo: o questo piano esaurisce L oppure lo S_3 congiungente il piano stesso ad un punto esterno, appartenente però ad L, sta in L; ecc. Poichè L giace in S_r, dopo un numero finito di ampliamenti, L si esaurisce in uno spazio lineare.

fondamentali generici, cioè quelli per cui la detta infinità si discosta il meno possibile dal valore normale; poi uno spazio lineare, contenuto nel precedente, di punti fondamentali più particolari; ecc.

2) Che imponendo agli spazi di uno di quei sistemi di appoggiarsi a spazi lineari generici, ma di convenienti dimensioni, dell'ambiente, così da avere un numero finito di soluzioni, si ottiene un solo spazio.

3) Da ciò devé dedursi che i sistemi in questione son certe *forme fondamentali di* SCHUBERT [1], ma non in generale forme lineari.

Queste, che sono mere presunzioni, hanno bisogno di esser dimostrate. Ci limiteremo a verificarle in un caso semplice.

Consideriamo p. es. fra S_3 ed S'_4 una bilinearità in cui ad x risponde $S'_2(x)$ e ad x' $S_1(x')$ $(r=3,\ k=1,\ \sigma=2;\ r'=4;\ s=r+k'=r'+k=5)$. Ai punti di S'_4 corrisponde il sistema *quadratico* ∞^4 delle rette di S_3; ai punti di S_3 un sistema $\Sigma'\infty^3$ di piani. Proviamo che i piani di Σ', per un x' generico, formano un fascio.

Infatti i detti piani per x' provengono dai punti x della retta $S_1(x')$ e per la definizione di bilinearità formano un fascio.

Fra due piani generici α, α' di S_3, S'_4 resta subordinata una omografia ω. Occorre distinguere il caso in cui ω non è singolare, da quello in cui ω è singolare; ecc. ecc.

89. *Caratterizzazione delle serie unirazionali involutorie.* — Torniamo alla questione donde è mossa la digressione. Sia γ^r_n una serie unirazionale involutoria sulla curva $C = C_1 + \ldots + C_t$.

Intanto (n. 49) essa consta di gruppi equivalenti. Osserviamo inoltre che sopra una componente C_i di C la γ^r_n subordina una serie *lineare*. Invero, la totalità dei gruppi di n_i punti che γ^r_n subordina su C_i è tale che il suo gruppo variabile è individuato dal gruppo variabile di γ^r_n, ossia è determinato razionalmente da r parametri (eventualmente non tutti essenziali pel gruppo di n_i punti); epperò essa è una serie di gruppi equivalenti. Siccome inoltre la serie stessa è involutoria, in conseguenza dell'involutorietà di γ^r_n, essa è una serie lineare $g^{r_i}_{n_i}$ [2]. Se $r_i = 0$, cioè se γ^r_n non ha su C_i che punti fissi, si può astrarre da questi e dalla curva

[1] Ved. BERTINI, *Introduzione alla Geom. pr. degli iperspazi*, cit., pag. 48.
[2] Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 69.

che li contiene. Non è pertanto restrittivo supporre che γ_n^r subordini sopra ogni C_i una $g_{n_i}^{r_i}$ infinita ($r_i > 0$, $r \geqslant r_i$).

Consideriamo la corrispondenza T posta da γ_n^r fra i gruppi di $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$, ove si chiamino omologhi t gruppi di queste serie quando la loro somma è un gruppo di γ_n^r. È chiaro che T non è degenere, perchè agisce su tutti i gruppi delle $g_{n_i}^{r_i}$; ed è irriducibile, perchè altrimenti γ_n^r si spezzerebbe in parti costituite ciascuna dai gruppi di γ_n^r somme di gruppi omologhi in una delle parti di T. Onde γ_n^r risulterebbe riducibile epperò non unirazionale.

Proviamo inoltre che T è una plurilinearità fra gli enti lineari $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$. Basta all'uopo provare, secondo il n. prec., che: 1) ad un generico gruppo G_1 di $g_{n_1}^{r_1}$ corrispondono in $C_2, \ldots, C_t$ gruppi descriventi serie lineari; 2) ai gruppi di una generica $g_{n_1}^1$ di $g_{n_1}^{r_1}$ corrispondono in $C_2, \ldots, C_t$ gruppi descriventi serie lineari.

Dimostriamo la 1). I gruppi di γ_n^r contenenti G_1 formano una $\gamma_n^{r-r_1}$, perchè ai gruppi di γ_n^r il gruppo G_1 presenta lo stesso numero di condizioni che ai gruppi di $g_{n_1}^{r_1}$. La $\gamma_n^{r-r_1}$ è ancora involutoria e subordina pertanto su ogni C_i ($i = 2, \ldots, t$) una serie lineare $g_{n_i}^{k_i}$, ove $k_i \leqslant r - r_1$.

Dimostriamo la 2). Ad ogni G_1 di $g_{n_1}^1$ corrisponde in $g_{n_i}^{r_i}$ una serie lineare $g_{n_i}^{k_i}$, la quale, variando G_1, descrive su C_i una $\gamma_{n_i}^{k_i+1}$. Ora questa serie è lineare. Invero, i gruppi di γ_n^r contenenti gli ∞^1 G_1 di $g_{n_1}^1$ formano una $\gamma_n^{r-r_1+1}$, che è ancora involutoria, perchè i gruppi di $\gamma_n^{r-r_1+1}$ passanti per un punto generico di C_1 son tutti e soli i gruppi di γ_n^r contenenti il G_1 di $g_{n_1}^1$ individuato da quel punto; e formano perciò una serie $\gamma_n^{r-r_1}$, che è involutoria su $C_2, \ldots, C_t$. Ne deriva che la $\gamma_{n_i}^{k_i+1}$ subordinata su C_i da $\gamma_n^{r-r_1+1}$ è involutoria; e, siccome consta di gruppi equivalenti, è una $g_{n_i}^{k_i+1}$ [1].

Dimostriamo infine la reciproca della proposizione stabilita. Proviamo cioè che ogni plurilinearità T fra le serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ date comunque sulle componenti $C_1, C_2, \ldots, C_t$ di C, ge-

[1] Si osserverà che, com'è naturale, le ∞^1 $g_{n_i}^{k_i}$ omologhe su C_i dei gruppi di $g_{n_1}^1$ formano un fascio. Sia infatti G_i un gruppo comune a due delle $g_{n_i}^{k_i}$. I gruppi di γ_n^r contenenti G_i formano una $\gamma_n^{r-r_i}$, involutoria su C_1 e subordinante perciò ivi una $g_{n_1}^{k_1}$, la quale contiene due distinti gruppi di $g_{n_1}^1$, epperò contiene tutta la $g_{n_1}^1$. Questo significa che G_i appartiene a ciascuna delle ∞^1 $g_{n_i}^{k_i}$. Pertanto la $g_{n_i}^{k_i-1}$ comune a due di queste $g_{n_i}^{k_i}$ entro $g_{n_i}^{k_i+1}$ è comune a tutte le $g_{n_i}^{k_i}$.

nera, colle somme dei gruppi omologhi, una serie unirazionale involutoria.

Sia infatti γ_n^r la totalità delle somme di gruppi omologhi in T (che dunque ha la dimensione r). I gruppi di γ_n^r per un gruppo K di punti di C, costituiscono su ciascuna, C_i , delle componenti di C ove esistono punti di K, una serie lineare subordinata a $g_{n_i}^{r_i}$. Pertanto, chiedere i gruppi di γ_n^r passanti per K equivale a chiedere i gruppi di T i cui rispettivi gruppi parziali G_1 , $G_2, \ldots, G_t$ appartengono a serie lineari date entro $g_{n_1}^{r_1}, g_{n_2}^{r_2}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$. Questi gruppi, se esistono, o si riducono ad un solo o sono infiniti, a cagione della proprietà 4') delle plurilinearità. Dunque γ_n^r è involutoria.

Proviamo che γ_n^r è unirazionale. Invero, T essendo non degenere, γ_n^r subordina su C_1 , $C_2, \ldots, C_t$ le serie date $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$. Un gruppo di γ_n^r può in conseguenza individuarsi razionalmente cogli r_1 parametri, che determinano linearmente un gruppo G_1 entro $g_{n_1}^{r_1}$; cogli r_2' parametri $(r_2' \leqslant r_2)$, che determinano linearmente un gruppo G_2 nella $g_{n_2}^{r_2'}$ subordinata su C_2 dalla $\gamma_n^{r-r_1}$ dei gruppi di γ_n^r per G_1 ; cogli r_3' parametri che determinano linearmente un gruppo G_3 nella $g_{n_3}^{r_3'}$ subordinata su C_3 dalla $\gamma_n^{r-r_1-r_2'}$ dei gruppi di γ_n^r passanti per $G_1 + G_2$; ecc. Così continuando, si vede che un gruppo di γ_n^r può individuarsi razionalmente con r parametri ; epperò γ_n^r è unirazionale.

Si può, concludendo, enunciare il teorema :

Condizione necessaria e sufficiente perchè una γ_n^r di gruppi di punti, sopra una curva riducibile C, sia unirazionale e involutoria, è che i suoi gruppi sieno somme di gruppi di serie lineari date sulle componenti di C, omologhi in una plurilinearità assegnata fra queste serie.

90. *Caratterizzazione delle plurilinearità che conducono a serie di equivalenza.* — A norma del n. prec. una plurilinearità fra le serie lineari $g_{n_1}^{r_1}, \ldots, g_{n_t}^{r_t}$ date sulle componenti irriducibili C_1 , $C_2, \ldots, C_t$ della curva $C = C_1 + \ldots + C_t$, dà luogo ivi ad una serie unirazionale involutoria. Di quali proprietà particolari deve goder la plurilinearità perchè la serie unirazionale involutoria risulti addirittura una serie di equivalenza ?

La risposta a questa domanda è implicitamente contenuta nella costruzione delle serie di equivalenza subordinate ad una data somma minima, quale abbiamo esposto nel n. 81. Facciamo, come là, l'imagine proiettiva di C in S_ρ mediante un sistema aggiunto minimo a g_n^r , ove $\rho = r + t - 1$ e g_n^r è la somma minima

di $g^{r_1}_{n_1}$, $g^{r_2}_{n_2}, \ldots, g^{r_t}_{n_t}$ $(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_t, \quad r = r_1 + r_2 + \ldots + r_t)$. Continueremo a indicare con C_1, $C_2, \ldots, C_t$ le trasformate (semplici o multiple) delle curve omonime.

Una g^s_n $(s \leq r)$ subordinata a g^r_n è staccata su C da un sistema lineare ∞^s di iperpiani, ad essa associato. Indichiamo con x_i $(i = 0, 1, \ldots, r_1)$, y_h $(h = 0, 1, \ldots, r_2), \ldots, z_k$ $(k = 0, 1, \ldots, r_t)$ le coordinate proiettive omogenee degl'iperpiani di S_{r_1}, S_{r_2}, $\ldots$, S_{r_t} (spazi d'appartenenza di C_1, $C_2, \ldots, C_t$). Posson allora assumersi gli $r + t$ numeri x_i, $y_h, \ldots, z_k$ come coordinate proiettive omogenee degli iperpiani di S_ρ: con che S_{r_1}, S_{r_2}, $\ldots$, S_{r_t} (che sono indipendenti entro S_ρ) divengono in S_ρ spazi fondamentali delle coordinate d'iperpiano. Gl'iperpiani di S_ρ aventi nulle tutte le coordinate $y_h, \ldots, z_k$ passano per lo spazio fondamentale $S_{\rho-r_1-1}$ congiungente $S_{r_2}, \ldots, S_{r_t}$ e staccano su S_{r_1} gl'iperpiani di coordinate x_i; e similmente per gli iperpiani aventi nulle le $x_i, \ldots, z_k$, ma non tutte le y_h; ecc.

Considerati i t spazi $S_{\rho-r_1-1}$, $S_{\rho-r_2-1}, \ldots, S_{\rho-r_t-1}$ congiungenti $t-1$ spazi S_{r_1}, $S_{r_2}, \ldots, S_{r_t}$, coll'esclusione ordinata di S_{r_1}, S_{r_2}, $\ldots$, S_{r_t}, sieno x_i; y_h; $\ldots$; z_k le rispettive coordinate di t iperpiani fissati entro i sistemi lineari ∞^{r_1}, ∞^{r_2}, ..., ∞^{r_t} aventi per base quegli spazi. Questi t iperpiani son sempre indipendenti (non potendo le coordinate di uno di essi esser combinazioni lineari delle coordinate omonime degli altri) e individuano pertanto un sistema lineare Σ ∞^{t-1}. Un iperpiano mobile in questo sistema ha le coordinate esprimibili per combinazioni lineari, con certi coefficienti non tutti nulli $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$, delle coordinate dei t iperpiani fissati. Pertanto le coordinate di un iperpiano mobile in Σ hanno la forma αx_i, $\beta y_h, \ldots, \gamma z_k$. Inoltre lo spazio lineare base di Σ non è altro che lo S_{r-1} congiungente le traccie rispettive su $S_{r_1}, S_{r_2}, \ldots, S_{r_t}$ degl'iperpiani fissati.

Ciò premesso, consideriamo in S_ρ un sistema lineare H, ∞^s, di iperpiani, ossia un sistema d'iperpiani passanti per un $S_{\rho-s-1}$. Gl'iperpiani di questo sistema segano su C una serie d'equivalenza, che ha generalmente la dimensione s (cioè il sistema è associato alla serie). La dimensione della serie segata può esser minore di s soltanto se lo spazio S_{r-1} congiungente le traccie su $S_{r_1}, \ldots, S_{r_t}$ dell'iperpiano generico di H [1], incontra $S_{\rho-s-1}$ in

[1] Si osservi che le traccie suddette son *sempre* congiunte da un S_{r-1} e non da uno spazio di dimensione minore, anche se l'iperpiano di S_ρ, che le segna su S_{r_1}, $S_{r_2}, \ldots, S_{r_t}$ è qualunque (e non soltanto generico), purchè non contenente alcuno di questi spazi. In caso contrario, invero, gli spazi S_{r_1}, $S_{r_2}, \ldots,$ S_{r_t} giacerebbero in un iperpiano (almeno) di S_ρ.

uno spazio di dimensione $\geqslant r - s$: chè allora un gruppo generico della serie segata è staccato da infiniti iperpiani di H, formanti un sistema lineare ∞^{σ} $(\sigma \geqslant 1)$, sicchè la serie risulta di dimensione $s - \sigma$ (n. 69).

Ma in tal caso basterà considerare il sistema lineare K, $\infty^{s-\sigma}$, degl'iperpiani di H passanti per σ punti generici di S_ρ , per ottenere un sistema segante su C una serie di equivalenza di dimensione uguale a quella del sistema lineare segante. Non è dunque restrittivo supporre che H sia associato alla serie di equivalenza g_n^s, che esso stacca su C. In quest'ipotesi gli spazi S_{r-1} congiungenti le traccie, su S_{r_1} , S_{r_2} , . . . , S_{r_t} , degl'iperpiani di H, sono ∞^s e formano una varietà (razionale) in corrispondenza birazionale senza eccezioni con g_n^s ed in corrispondenza birazionale, eventualmente con eccezioni, col sistema H. Le eccezioni provengono dai gruppi eccezionali di g_n^s, ossia dagli eventuali S_{r-1} appoggiati ad $S_{\rho-s-1}$, secondo spazi di dimensione $\geqslant r - s$.

In ultima analisi dunque, un gruppo generico di g_n^s è staccato da un iperpiano che giace sia in H, sia nel sistema Σ avente per base lo S_{r-1} congiungente quel gruppo. Da ciò si trae la conclusione alla quale miriamo. Scriviamo, invero, le equazioni di $S_{\rho-s-1}$ in coordinate di iperpiani. Saranno $\mu = \rho - s$ equazioni lineari:

$$\begin{aligned} &f_1(x) + \varphi_1(y) + \ldots + \psi_1(z) = 0 , \\ &f_2(x) + \varphi_2(y) + \ldots + \psi_2(z) = 0 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_\mu(x) + \varphi_\mu(y) + \ldots + \psi_\mu(z) = 0 , \end{aligned}$$

ove le f, φ , . . . , ψ son forme lineari dei loro argomenti. Un iperpiano di S_ρ , che stacchi su S_{r_1} , S_{r_2} , . . . , S_{r_t} gl'iperpiani x_i ; y_h ; ... ; z_k e che appartenga ad H, è caratterizzato dalle μ equazioni lineari omogenee :

$$\alpha f_i(x) + \beta \varphi_i(y) + \ldots + \mu \psi_i(z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu) ,$$

cui devon soddisfare le coordinate αx_i , βy_h , . . . , γz_k dell'iperpiano stesso, in quanto appartiene ad H. E perchè sieno soddisfatte le predette equazioni per valori non tutti nulli delle α , β , . . . , γ, occorre e basta che sia:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & \varphi_1(y) & \ldots & \psi_1(z) \\ f_2(x) & \varphi_2(y) & \ldots & \psi_2(z) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_\mu(x) & \varphi_\mu(y) & \ldots & \psi_\mu(z) \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa relazione dà luogo ad un sistema di equazioni pluri-lineari nelle x , y , ... , z, che definisce una plurilinearità fra gl'iperpiani di S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} . È una plurilinearità particolare, che si chiamerà, col GHERARDELLI, *plurilinearità nucleata di dimensione s* fra gl'iperpiani dei detti spazi.

Possiamo pertanto enunciare :

Sopra una curva riducibile $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_t$ *una serie d'equivalenza* g_n^s, *avente come componenti su* C_1 , C_2 , ... , C_t *le serie lineari* $g_{n_1}^{r_1}$, $g_{n_2}^{r_2}$, ... , $g_{n_t}^{r_t}$, *si ottiene ponendo fra i gruppi di queste serie una plurilinearità nucleata di dimensione s.*

Osservazione 1ª. — Il GHERARDELLI (nella Nota lincea più innanzi citata) dà una definizione geometrica delle plurilinearità nucleate, che può, in certa guisa, considerarsi come duale di quella sopra indicata.

La genesi geometrica di una plurilinearità nucleata di dimensione s fra gl'iperpiani di S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} *(quale noi abbiamo esposta) è, riassumendo, la seguente* :

S'immaginino i dati spazi immersi in un S_ρ ($\rho = r_1 + \ldots + r_t + t - 1$) ; sì che risultino fra loro indipendenti. Fissato un $S_{\rho-s-1}$ di S_ρ , si chiamino omologhi t iperpiani degli spazi dati quando son traccie di un iperpiano di S_ρ passante per $S_{\rho-s-1}$. Si genera così fra gl'iperpiani di S_{r_1} , ... , S_{r_t} una plurilinearità nucleata, che ha la dimensione s o $s - \sigma$ ($\sigma \geqslant 1$), secondo che lo S_{r-1}, che congiunge le traccie segate da un iperpiano *generico* per lo $S_{\rho-s-1}$, si appoggia a questo lungo un S_{r-s-1} o lungo un $S_{r-s+\sigma-1}$. Nel caso $\sigma \geqslant 1$, la plurilinearità di dimensione $s - \sigma$ può essere staccata dagl'iperpiani di S_ρ , che passano per un conveniente $S_{\rho-s+\sigma-1}$.

Se invece di interpretare x_i , y_h , ... , z_k come coordinate di iperpiani, si assumono a coordinate omogenee di t punti variabili negli spazi, fondamentali per le coordinate, S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} , indipendenti entro S_ρ , si stabilisce una specie di dualità fra le proprietà geometriche precedentemente considerate e quelle che nascono colla nuova interpretazione. Alla proprietà che ad un iperpiano qualunque di S_ρ , non contenente alcuno degli spazi S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} , appartiene uno ed uno solo S_{r-1} ($= S_{\rho-t}$) incontrante questi spazi secondo iperpiani, corrisponde il fatto che per un punto qualunque di S_ρ, non giacente su alcuno degli spazi S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} , passa uno ed un solo S_{t-1} appoggiato

ad S_{r_1} , S_{r_2} , . . . , S_{r_t} [1]. Alla totalità ∞^s (razionale) degli S_{r-1} appoggiati ad S_{r_1} , ... , S_{r_t} secondo iperpiani di questi spazi e incontranti $S_{\rho-s-1}$ secondo spazi S_{r-s-1}, corrisponde la totalità ∞^s (razionale) degli S_{t-1} appoggiati ad S_{r_1} , ... , S_{r_t} e passanti pei singoli punti di un S_s ; e al fatto che quegli S_{r-1} possano incontrare $S_{\rho-s-1}$ secondo uno spazio $S_{r-s+\sigma-1}$ ($\sigma \geqslant 1$), corrisponde il fatto che un S_{t-1} appoggiato ad S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} e passante per un punto di S_s abbia in conseguenza a comune con S_s uno spazio S_σ . Pertanto si ha la seguente *genesi geometrica di una plurilinearità nucleata di dimensione s fra i punti di* S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} (*che è poi quella considerata dal* GHERARDELLI) :

Immaginati sempre gli spazi S_{r_1} , ... , S_{r_t} indipendenti e immersi dunque in un S_ρ , si fissi ivi un S_s ($s \leqslant r$) e si chiamino omologhi t punti di quegli spazi quando sono d'appoggio per un S_{t-1} passante per un punto variabile in S_s. La corrispondenza così ottenuta fra i punti di S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} è una plurilinearità nucleata di dimensione s o di dimensione $s - \sigma$ ($\sigma \geqslant 1$). Essa è di dimensione s , se lo S_{t-1} appoggiato agli spazi dati e passante per un punto generico di S_s non incontra altrove S_s ; è di dimensione $s - \sigma$, se il predetto S_{t-1} incontra S_s lungo un S_σ. In tal caso la medesima plurilinearità può generarsi cogli S_{t-1} appoggiati ad un $S_{s-\sigma}$ generico di S_s.

Osservazione 2ª. — È facile verificare che *una plurilinearità nucleata di dimensione s fra* (*gl'iperpiani o i punti di*) S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} *può parametricamente rappresentarsi con una sostituzione lineare del tipo* :

[1] Questa proprietà può verificarsi direttamente. Anzitutto è chiaro che t punti presi comunque su S_{r_1} , S_{r_2} , . . . , S_{r_t} sono *sempre* indipendenti e individuano dunque un S_{t-1} appoggiato a questi spazi in un punto e non in uno spazio superiore, perchè se no gli spazi dati sarebbero dipendenti. (La varietà degli S_{t-1} è dunque equivalente senza eccezioni alla varietà di SEGRE relativa agli spazi dati). Per provare che per un punto O di S_ρ passa uno ed un solo S_{t-1} appoggiato a S_{r_1} , . . . , S_{r_t} , basta osservare, per $t = 2$, che ciò consegue senz'altro dal fatto che S_{r_1} , S_{r_2} si proiettano, da O sopra un iperpiano, in due spazi incontrantisi in un punto. Per $t > 2$ la proprietà può dimostrarsi per induzione. Invero, da O gli spazi dati si proiettano in S'_{r_1} , S'_{r_2} , ... , S'_{r_t} di un $S_{\rho-1}$. Gli spazi S'_{r_1} , ... , S'_{t-1} son congiunti da un $S_{\rho-1-r_t}$ appoggiato ad S'_{r_t} in un punto O', da cui, pel teorema ammesso, esce un solo S_{t-2} appoggiato a S'_{r_1} , . . . , $S'_{r_{t-1}}$. Onde ; ecc.

$$
\begin{aligned}
&\alpha x_i = \sum_0^s{}_j\, a_{ij}\lambda_j \qquad (i = 0, 1, \dots, r_1)\\
(10)\qquad &\beta y_h = \sum_0^s{}_j\, b_{hj}\lambda_j \qquad (h = 0, 1, \dots, r_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\gamma z_k = \sum_0^s{}_j\, c_{kj}\lambda_j \qquad (k = 0, 1, \dots, r_t)\,,
\end{aligned}
$$

ove le a , b , ... , c son costanti date, a matrice non nulla, e le α , β , ... , γ son pure costanti date non nulle ; e le λ son parametri. Riferiamoci agl'iperpiani di S_{r_1} , S_{r_2} , ... , S_{r_t} . Allora un iperpiano qualunque di S_ρ ha le coordinate x_i , y_h , ... , z_k e gli ∞^{t-1} iperpiani di S_ρ passanti per lo S_{r-1} congiungente le traccie sugli spazi dati del dato iperpiano, hanno le coordinate αx_i , βy_h , ... , γz_h , al variare di $\alpha, \beta, \dots, \gamma$. Per dati valori non nulli di α , β , ... , γ le (10), al variare delle λ , rappresentano un sistema lineare H ∞^s di iperpiani di S_ρ , perchè le forme dei secondi membri son linearmente indipendenti.

Proviamo che gli S_{r-1} congiungenti le traccie su S_{r_1} , ... , S_{r_t} degl'iperpiani di questo sistema sono ∞^s. Basta provare che le traccie sui detti spazi di un iperpiano generico αx_i , βy_h , ... , γz_k di H non sono traccie di un altro simile iperpiano $\alpha' x_i$, $\beta' y_h$, ... , $\gamma' z_k$ (dove α' , β' , ... , γ' non son proporzionali ad α, β , ... , γ). In caso contrario varrebbero, accanto alle (10), le relazioni :

$$(11)\qquad \alpha' x_i = \Sigma\, a_{ij}\lambda'_j\,,\ \beta' y_h = \Sigma\, b_{hj}\lambda'_j\,,\ \dots\dots,\ \gamma' z_k = \Sigma\, c_{kj}\lambda'_j\,,$$

colle λ' non proporzionali alle λ. Dal confronto delle (10), (11), seguirebbe :

$$
\begin{aligned}
\Sigma\, a_{ij}\,(\alpha'\lambda_j - \alpha\lambda'_j) &= 0\\
\Sigma\, b_{hj}\,(\beta'\lambda_j - \beta\lambda'_j) &= 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots

Lezioni più ampio sviluppo, per ciò che concerne la natura e la costruzione delle serie d'equivalenza parziali, subordinate ad una data serie completa, anzi ad una data somma minima di serie lineari, anche incomplete. SEVERI aveva osservato, nella Memoria [3], che i gruppi eccezionali non hanno significato intrinseco rispetto ad una serie di equivalenza completa (o rispetto ad una somma minima, anche se incompleta). Il problema dei gruppi eccezionali invarianti d'una g_n^r fu trattato dal MARONI (« Rend. del Seminario mat. di Padova », 1934); ma il procedimento di questo Autore fa intervenire l'imagine proiettiva di g_n^r in S_r e suppone che ogni componente della trasformata di C, sulla quale gl'iperpiani di S_r seghino una g^{r1}, appartenga necessariamente ad un S_{r_1}; mentre ciò non è sempre vero, se quella componente è riducibile. (Esempio: Se C_1, C_2, C_3 son 3 rette sghembe di S_3 e $\Gamma_1 = C_1 + C_2$, sulla $\Gamma_1 + C_3$ la g_3^3 segata dai piani dello spazio ha per componente, su Γ_1, una g_2^2; eppure Γ_1 non appartiene ad un piano). Sicchè il ragionamento del MARONI non è in realtà applicabile che per $t = 2$ (ma allora può esser sostituito dal procedimento diretto del n. 82). La precisazione del n. 82 appare qui per la prima volta. La struttura delle g_n^r parziali (n. 84) è invece desunta dal MARONI (limitatamente a $t = 2$). Le nozioni di *sistema associato* e di *sistema aggiunto* sono dovute a SEVERI (Memoria [3], per ciò che concerne il primo, e Nota lincea citata a pag. 162, per ciò che concerne il secondo). Tuttavia la *dimostrazione* dell'esistenza del sistema aggiunto ad una somma minima vien qui esposta per la prima volta, come per la prima volta è qui dimostrata la caratterizzazione delle serie unirazionali involutorie (enunciata nella Nota lincea citata) e son esposti i fondamenti di una teoria generale delle plurilinearità. Al GHERARDELLI (« Atti della R. Acc. Nazionale dei Lincei », 15 maggio 1938) è dovuta la caratterizzazione delle plurilinearità (nucleate) fra più serie lineari (date su altrettante componenti irriducibili di una curva riducibile) che conducono a serie di equivalenza. Il procedimento del GHERARDELLI è però un po' diverso dal nostro. Allo stesso Autore (« Rend. Lincei », 7 gennaio 1939), è inoltre dovuta la determinazione delle serie d'equivalenza possedenti sistema aggiunto (n. 83); nonchè la dimostrazione del fatto che, sopra una curva composta di due parti irriducibili, una serie γ^ρ unirazionale involutoria, di componenti g^{r1}, g^{r2}, è certamente di equivalenza, tolto il caso in cui $\rho = r_1 + r_2 - 1$. (« Rend. Lincei », 4 marzo 1939).

§ 3. — LA GEOMETRIA DELLE SERIE D'EQUIVALENZA SULLE CURVE RIDUCIBILI SCONNESSE O CONNESSE. [1]

91. *Serie non speciali e speciali. Teorema di* RIEMANN-ROCH. — Sia g_n^r una serie di equivalenza completa, le cui componenti lineari sopra le componenti irriducibili $C_1, C_2, \ldots, C_s$ della data curva C, abbian le dimensioni (≥ 0) $r_1, r_2, \ldots, r_s$ e gli ordini (≥ 0) $n_1, n_2, \ldots, n_s$ ($r = r_1 + r_2 + \ldots + r_s$, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s$). Se qualcuna delle n è nulla, vuol dire che viene a mancare la corrispondente serie lineare componente e la corrispondente r si porrà pure uguale a zero. Se è nulla una r, ma non è nulla la corrispondente n, vuol dire che la serie non ha, sulla relativa curva componente, che un gruppo di punti fissi.

[1] Con questo § termina la parte delle presenti Lezioni esposta dall'Autore durante l'anno accademico 1937-38, all'Università di Roma. L'esposizione tiene però conto di alcuni miglioramenti apportati nel 1939.

Definiremo il genere p della curva C, totalmente sconnessa, mediante la formula (di NOETHER):

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p - s + 1 \,. \tag{12}$$

La formula è suggerita dalla opportunità di conservare, pel genere di una curva piana anche riducibile, la stessa espressione formale, mediante l'ordine della curva e le sue molteplicità (ivi compresi i punti comuni alle parti a due a due), che vale per le curve irriducibili. Invero, supposto, per semplicità, che la curva piana C, d'ordine m, sia dotata di soli nodi, e indicato con d il numero di questi, e con d_1 , d_2 , ... , d_s il numero dei nodi delle componenti C_1 , C_2 ,..., C_s , degli ordini rispettivi m_1 , m_2 , ... , m_s ($m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s$), risulta:

$$d = d_1 + d_2 + \ldots + d_s + \sum_{i,j} m_i m_j \,.$$

E poichè

$$p_i = \frac{(m_i - 1)(m_i - 2)}{2} - d_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \,,$$

dalla (12) si deduce

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d \,. \tag{13}$$

La formula (12) viene altresì giustificata da ragioni di connessione che saranno in seguito indicate.

Ciò posto, assumeremo come dimensione «normale o virtuale» di una serie lineare completa g^r_n sulla C, l'espressione $n - p - s + 1$. Il seguito giustificherà questa assunzione. In conseguenza diremo *non speciale* una g^r_n completa su C, tutte le volte che la sua dimensione è espressa dalla formula

$$r = n - p - s + 1 \,, \tag{14}$$

e *speciale* in caso contrario.

Se una g^r_n completa esiste, come serie d'ordine > 0 e dimensione ≥ 0, su ciascuna delle s componenti, e ogni serie lineare componente è non speciale, la g^r_n è non speciale.

Invero, in virtù del teorema fondamentale, è

$$r = r_1 + \ldots + r_s = (n_1 - p_1) + \ldots + (n_s - p_s) = n - p - s + 1 \,.$$

Se invece qualcuna delle serie componenti è speciale (ivi compreso il caso in cui manchi), la g_n^r è speciale e la sua dimensione vale

$$r > n - p - s + 1 .$$

Nel precedente enunciato abbiamo, per brevità, incluso fra le serie speciali, sopra una curva irriducibile, le g_0^0, perchè effettivamente una serie d'ordine zero, sopra una curva irriducibile di genere p, può considerarsi come avente l'indice di specialità p, in quanto un suo gruppo non presenta nessuna condizione ai gruppi canonici.

La dimostrazione del precedente teorema è immediata. Invero, se la g_n^r esiste effettivamente soltanto sulle componenti $C_1, C_2, \ldots, C_t$ $(t \leqslant s)$, pel teorema fondamentale è

$$r = r_1 + r_2 + \ldots + r_t ;$$

e, se le serie lineari componenti hanno gl'indici di specialità rispettivi $i_1, i_2, \ldots, i_t$, sarà:

$$r = (n_1 - p_1 + i_1) + \ldots + (n_t - p_t + i_t) = n - p - s + 1 + \sum_1^s{}_h \, i_h ,$$

ove si è posto $i_{t+1} = p_{t+1}, \ldots, i_s = p_s$ in corrispondenza alle serie componenti di ordine zero.

La relazione

$$r = n - p - s + 1 + \sum_1^s{}_h \, i_h \tag{15}$$

costituisce quel che potremo chiamare il *teorema di* RIEMANN-ROCH *per le serie di equivalenza complete sopra una curva riducibile.*

La somma $\sum_1^s{}_h \, i_h$ si potrà chiamare l'*indice di specialità* i della data serie di equivalenza completa, in quanto essa esprime l'eccesso della dimensione di una serie speciale sulla dimensione « normale ». Per una serie non speciale $i = 0$.

L'indice di specialità i di una g_n^r di equivalenza, sopra una curva con s componenti, non può superare $p + s - 1$, giacchè r non può superare n.

Però, a differenza di quanto accade sopra una curva irriducibile, *la dimensione e l'ordine di una serie speciale sopra una curva riducibile possono assumere valori comunque grandi,* appunto perchè risulta $i > 0$ non appena sia speciale una delle serie lineari componenti, pur potendo le altre essere non speciali, di ordini e dimensioni comunque grandi.

92. *Serie totalmente speciali.* — V'ha un caso importante, in cui si può stabilire una limitazione per l'ordine e per la dimensione di una serie speciale sopra la C riducibile, ed è quello in cui *tutte* le serie lineari componenti sono speciali. La serie si dirà allora *totalmente speciale*. È evidente che:

L'ordine e la dimensione di una serie totalmente speciale non superano rispettivamente $2p-2$ *e* $p-1$.

La serie di equivalenza completa g_{2p-2}^{p-1}, risultante dalla somma delle serie canoniche delle s componenti di C, si chiamerà la *serie canonica della curva riducibile* C. Se talune delle componenti di C sono razionali, la serie canonica diviene *virtuale*, risultando dalla somma di serie canoniche effettive o nulle (di ordine ≥ 0), sulle componenti irrazionali di C, con talune *serie negative*, che son le serie canoniche delle componenti razionali [1].

Nel caso di una serie totalmente speciale, è agevole attribuire un significato all'indice di specialità i della serie, in relazione alla serie canonica di C. Sia infatti G un gruppo della serie data, costituito dai gruppi $G_1, G_2, \ldots, G_s$ delle serie componenti. I gruppi della g_{2p-2}^{p-1} canonica di C, che passano per G, formano una serie di equivalenza completa, la quale non è che la somma delle serie residue di $G_1, G_2, \ldots, G_s$ rispetto alle corrispondenti serie canoniche. Onde essa ha la dimensione $i-s$. Pertanto, designata con $j-1$ l'infinità dei gruppi canonici di C, che passano per un gruppo della g_n^r, verrà

$$i = j + s - 1 . \tag{16}$$

Dunque:

L'indice di specialità di una serie di equivalenza totalmente speciale sopra una curva C, *costituita da* s *componenti, è espresso dall'infinità* $j-1$ *dei gruppi canonici di* C, *che passano per un gruppo della serie, aumentata di* s *unità.*

[1] Sopra una curva razionale, la serie canonica, differenza fra la jacobiana di una serie e il doppio della serie, è la serie g_2^2 delle coppie di punti della curva, considerata negativamente. Una serie speciale sopra una curva razionale è una serie negativa, *contenuta* nella serie canonica. Si badi che, sopra una curva razionale, una serie virtuale, definita dal gruppo virtuale $G = A - B$, è sempre positiva, negativa o nulla, secondo che l'ordine del gruppo è positivo, negativo o nullo. Cioè, se G non è nè effettivo nè nullo, il gruppo $\overline{G} = B - A$ è effettivo. Invece, sopra una curva di genere > 0, può darsi che un gruppo non effettivo (non positivo) $G = A - B$, non sia nè negativo nè nullo, in quanto nè $|A|$ contiene $|B|$, nè $|B|$ contiene $|A|$. (Cfr. n. 8, pag. 10).

Dalle (15), (16) segue :

$$r = n - p + j , \tag{17}$$

onde *la dimensione della serie di equivalenza totalmente speciale g_n^r è espressa dalla medesima formula che la esprime nel caso di una curva irriducibile.*

93. *Corollari proiettivi.* — Possiamo, in particolare, considerare l'aspetto proiettivo dell'ultimo teorema del n. prec. quando la curva C sia piana, d'ordine m, e (per semplicità) dotata di soli nodi.

Siano, al solito, $C_1, C_2, \ldots, C_s$ le sue componenti, degli ordini $m_1, m_2, \ldots, m_s$; e sia Σ il sistema delle aggiunte d'ordine $m-3$ a C. Σ sega su C una serie d'equivalenza completa (n. 71), la quale, in base alla (13), deve coincidere con la serie canonica g_{2p-2}^{p-1}. Determiniamo la dimensione di Σ. Essa è espressa da $p-1+\sigma$, essendo σ la dimensione del sistema lineare Σ' delle aggiunte d'ordine $m-3$, che contengono un gruppo canonico generico G. Mostriamo che, se $s>1$, è certo $\sigma>0$. Sia infatti D un'aggiunta d'ordine $m-3$ a C, che *stacchi* il gruppo G, e non contenga dunque alcuna parte di C. Sia inoltre G_1 il gruppo canonico subordinato da G su C_1 e D_1 l'aggiunta d'ordine m_1-3 a C_1, che passa per G_1. Allora $D' = D_1 + C_2 + \ldots + C_s$ è un'aggiunta d'ordine $m-3$ a C, distinta da D e passante per G. Onde le aggiunte d'ordine $m-3$ a C, passanti per G, formano almeno il fascio D , D'.

Poichè le curve di Σ' non hanno intersezioni variabili con C, quelle che passano per un punto generico di C_1, si spezzano in C_1 e in una curva residua, di ordine $m_2 + \ldots + m_s - 3$, aggiunta a $C_2 + \ldots + C_s$, variabile in un sistema lineare Σ'' di dimensione $\sigma-1$. Se $s-1>1$, cioè $s>2$, sarà, per quanto precede, $\sigma-1>0$.

Le curve di Σ'' per un punto generico di C_2 si spezzano in C_2 e in un'aggiunta d'ordine $m_3 + \ldots + m_s - 3$ alla curva $C_3 + \ldots + C_s$ e variabile in un sistema lineare Σ''', di dimensione $\sigma-2$. Così procedesi fino al sistema $\Sigma^{(\sigma+1)}$, di dimensione zero, costituito da una sola curva d'ordine m_s-3 aggiunta a C_s e passante pel gruppo canonico di C_s , che fa parte del dato gruppo canonico di C. Risulta pertanto $\sigma = s-1$ (cfr. col. n. 69). Dunque :

Le curve d'ordine $m-3$ aggiunte ad una curva piana di ordine m e genere p, spezzata in s parti, dipendono da $p-2+s$ parametri.

Ciò posto, dato su C un gruppo totalmente speciale G_n e indicato con $K_{n'}$ $(n + n' = 2p - 2)$ un gruppo residuo di G_n rispetto alla serie canonica di C, determiniamo l'infinità $j' - 1$ delle aggiunte d'ordine $m - 3$, che passano per G_n. Il sistema lineare H di queste aggiunte sega su C, fuori dei punti fissi, la serie completa $|K_{n'}|$, epperò risulta $j' - 1 = (j - 1) + (s - 1)$, perchè per un gruppo $K_{n'}$ passano ∞^{s-1} curve di H. Similmente si conclude che pel gruppo $K_{n'}$ passano $\infty^{r'}$ curve aggiunte d'ordine $m - 3$, ove $r' = r + s - 1$. La (17) può dunque scriversi:

$$r' = n - p + j', \tag{18}$$

e dà luogo all'enunciato:

Se per un gruppo G_n, dato sopra una curva riducibile piana, d'ordine m e genere p, passano j' curve aggiunte d'ordine $m - 3$, linearmente indipendenti, per un resto di G_n, rispetto a tali aggiunte, ne passano $\infty^{r'}$, ove r' è dato dalla (18).

Anche per una g_n^r completa non speciale su C vale una relazione analoga alla (18), in quanto la serie stessa s'immagini segata su C da un sistema di aggiunte d'ordine l conveniente, *nel quale non vi sieno curve contenenti tutta la C*, e che passi per un resto $K_{n'}$ di g_n^r rispetto a tali aggiunte. Invero per la g_n^r vale la (14) e siccome, con un ragionamento simile a quello esposto nel caso $l = m - 3$, si prova che per un gruppo di g_n^r passano ∞^{s-1} curve del sistema segante, questo risulta di dimensione $r' = r + s - 1$ e la (14) si presenta sotto la forma

$$r' = n - p.$$

Considerando in particolare la serie $g_{n_l}^{r_l}$ segata su C, fuori dei punti doppi, dalle aggiunte d'ordine $l \geq m - 2$, se ne deduce che la dimensione del sistema lineare di queste aggiunte è espressa da

$$n_l - p + \binom{l - m + 2}{2},$$

cioè dallo stesso numero che la esprime nel caso di una curva irriducibile di genere p e di ordine m, perchè p conserva nei due casi la medesima espressione formale (13). E siccome nel caso di una curva tanto irriducibile che riducibile l'espressione precedente uguaglia $\binom{l+2}{2} - 1 - d$, ove d sia il numero dei punti doppi della curva, si conclude che:

Alle aggiunte d'ordine $l \geq m - 2$ i punti doppi di una curva

piana riducibile d'ordine m, presentano condizioni indipendenti, come se la curva fosse irriducibile.

Ma, mentre nel caso di una curva irriducibile, tale conclusione vale anche per $l = m - 3$, questo non si verifica quando la curva si spezza in $s \geq 2$ parti. Invero, allora le aggiunte d'ordine $m - 3$ sono ∞^{p-2+s} e ciò significa che:

Alle aggiunte d'ordine $m - 3$ i punti doppi di una curva piana d'ordine m, spezzata in $s \geq 2$ parti, presentano condizioni dipendenti. Precisamente, fra queste condizioni ve ne sono $s - 1$, che son conseguenza delle rimanenti.

Questo teorema *permette di riconoscere, con procedimento razionale, se una curva è o no spezzata ed in quante parti eventualmente si spezza.* Il caso di una curva con componenti multiple si riconduce al caso di una curva con componenti semplici, mediante operazioni di massimo comun divisore.

94. *Curve con punti doppi virtualmente inesistenti. Geometria delle serie lineari neutre.* — Sia anzitutto C una curva irriducibile di uno spazio qualunque, dotata (per semplicità) di soli nodi, dei quali alcuni, in numero ≥ 0, si considerano come *assegnati*, ed altri, in numero di $\delta > 0$, come *virtualmente inesistenti* [1]. Ciò significa che si pensa a C come ad una superficie reale (p. es. situata sulla riemanniana dello spazio lineare dove C è immersa) e che s'intende che non sia lecito il passaggio attraverso ad uno dei nodi assegnati, dall'una all'altra delle due falde lineari della superficie, che hanno per origine quel punto; e che invece s'intende che tal passaggio sia lecito, attraverso ad uno dei nodi virtualmente inesistenti.

Sotto l'aspetto invariantivo, i due punti di C che cadono in un nodo assegnato vanno considerati come distinti; mentre vanno considerati come un sol punto quelli che cadono in un nodo virtualmente inesistente.

Cosicchè gli enti invariantivi, da considerarsi sopra C, saranno soltanto quelli rispetto a cui i due punti sovrapposti in un nodo virtualmente inesistente, si comportano come un sol punto.

La C può considerarsi (almeno quando trattasi di una curva piana) come limite di una curva irriducibile C', dello stesso ordine, dotata di tanti nodi quanti sono i nodi assegnati di C, sì che nel passaggio da C' a C i nodi virtualmente inesistenti si

[1] Ved. SEVERI, *Vorlesungen* (citate), pag. 307.

presentano *ex novo*, ciascun d'essi come limite di due punti di diramazione della riemanniana di C' (1).

Genere (virtuale) p di C è il genere *effettivo* di C aumentato di δ unità. Esso uguaglia il genere della curva C' irriducibile, di cui C è limite.

Orbene, la ordinaria teoria delle serie lineari si trasporta tal quale alla curva C irriducibile, dotata di $\delta > 0$ nodi virtualmente inesistenti, purchè si riferisca non a tutte le serie lineari di C, ma soltanto a quelle rispetto a cui le coppie di punti sovrapposte nei nodi inesistenti, sono neutre, cioè presentano una condizione al più. Si tratta insomma della *teoria delle serie lineari sopra una curva irriducibile, rispetto alle quali son neutre certe date coppie di punti della curva stessa* (2).

Dovendo spesso nominare queste particolari serie lineari della curva, le chiameremo le *serie lineari neutre* (3). Basta ripercorrere lo sviluppo della teoria classica, per constatare che tutto resta inalterato, quando si riferisca alle serie lineari neutre e al genere virtuale di C.

Poichè il concetto di serie lineare neutra è manifestamente invariante per trasformazioni birazionali della curva C, si può studiare la teoria sopra un modello piano, che sia d'ordine m e dotato di soli nodi. Lo chiameremo ancora C.

Aggiunte neutre (4) alla C si diranno le curve che passan pei soli nodi assegnati di C e non necessariamente pei δ nodi virtualmente inesistenti. Ebbene, data una g^r_n neutra su C, un'aggiunta (neutra) di ordine l, che passi per un gruppo di g^r_n e stac-

(1) Cfr. SEVERI, *Vorlesungen* (citate), pagg. 322, 334.

(2) L'estensione cui si allude risale in sostanza a LINDEMANN (*Programmschrift*, Leipzig, 1879), che stabilì la forma proiettiva del relativo teorema di RIEMANN-ROCH, con una lacuna che fu osservata e corretta da NOETHER, al quale si debbon in proposito più ampii sviluppi (« Math. Annalen », XV, 1879, pag. 507). La teoria trovasi altresì, da un punto di vista più strettamente invariantivo, nelle citate *Vorlesungen* di SEVERI (pag. 349 e seg.). Ved. pure: GAMBIER (« Annales de l'École normale supérieure », XLI_3, 1924; pag. 220).

(3) Nelle *Vorlesungen* citate, son chiamate (in quanto là trattasi soltanto di serie complete), *serie lineari virtualmente complete*. Avendo da trattare anche di serie incomplete, dovrebbero ora chiamarsi « serie lineari virtuali »; ma ciò produrrebbe confusione di linguaggio, perchè è ormai generale l'uso della locuzione di serie e di sistemi « virtuali » nel senso ordinario, ove si considerino gruppi di punti o varietà virtuali. La locuzione « serie lineari neutre », è un'abbreviazione della frase « serie lineari con coppie neutre ».

(4) Nelle *Vorlesungen* cit., son chiamate curve *virtualmente aggiunte*. NOETHER le chiamava curve *non aggiunte*.

chi ulteriormente su C, fuori dei nodi assegnati, un resto K, fa parte di un sistema di aggiunte (neutre) dello stesso ordine, che segna la serie. Vale il consueto ragionamento algebrico, poggiato sul teorema $Af + B\varphi$ di NOETHER [1].

Chiamata serie lineare neutra *completa* di ordine n, una g_n^r, che non sia contenuta in una serie lineare neutra più ampia dello stesso ordine, ne segue che *le aggiunte neutre di un ordine arbitrario segano sulla curva, fuori dei nodi assegnati, una serie lineare neutra completa.* E da ciò si trae, come nella trattazione classica, *la unicità della serie lineare neutra completa, individuata da un dato gruppo di punti*, e quindi la transività della relazione di *equivalenza neutra* [2] fra i gruppi di punti di C; il teorema invariantivo del resto per le serie neutre; il concetto di somma di due o più serie neutre [3], ecc.

Inoltre le aggiunte neutre, d'ordine $l \geq m-3$, a C, formano un sistema lineare regolare, cioè i nodi assegnati presentano alle curve d'ordine $l \geq m-3$ condizioni indipendenti (ciò deriva pure dal fatto che *tutti* i nodi presentano condizioni indipendenti), sicchè *il genere virtuale di C uguaglia il numero delle curve aggiunte neutre d'ordine* $m-3$, *linearmente indipendenti.* Esse segan su C, fuori dei nodi assegnati, la *serie canonica neutra* g_{2p-2}^{p-1}.

Chiamate infine *speciali* le serie neutre di C, che son contenute nella serie canonica, e *non speciali* le altre; *indice di specialità i* d'una serie completa neutra g_n^r il numero dei gruppi canonici neutri indipendenti che passan per un gruppo della serie, vale il *teorema di* RIEMANN-ROCH *esteso*: $r = n - p + i$ ($i = 0$, per le serie non speciali).

Anche *la teoria degl'integrali abeliani si trasporta alle curve su cui sieno assegnate coppie neutre*, nel modo accennato da SEVERI [4].

95. *Geometria delle serie d'equivalenza neutre.* — Sia ora, in uno spazio qualunque, una curva riducibile $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_s$, dotata di soli nodi, dei quali $\delta > 0$ si considerino virtual-

(1) Cfr. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 341. *Vorlesungen*, cit., pag. 120. Ved. pure il n. 71.

(2) GAMBIER la chiama *pseudoequivalenza.*

(3) La somma di due serie neutre è la serie lineare più ampia, che contiene i gruppi risultanti dall'unire a due a due i gruppi delle serie date, e per la quale son neutre le solite coppie di punti di C.

(4) « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », XXX_5, 1° sem., 1921, pag. 277.

mente inesistenti: siano essi fra i punti comuni alle parti a due a due o fra i punti doppi delle singole parti.

Genere virtuale p di C è il suo *genere effettivo*, definito dalla formula (12), aumentato di δ unità, cioè:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_s + \delta - s + 1,$$

ove $p_1, p_2, \dots, p_s$ sieno i generi effettivi delle parti.

Se dei δ nodi v. i. (virtualmente inesistenti), δ' cadono nei punti comuni alle parti di C a due a due, sì che queste parti, attraverso ai detti punti, costituiscono una curva connessa (onde è necessariamente $\delta' \geqslant s-1$) e $\delta_1 \geqslant 0, \delta_2 \geqslant 0, \dots, \delta_s \geqslant 0$ cadono nei nodi di ciascuna delle componenti, viene:

$$p = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \dots + \bar{p}_s + \delta' - s + 1,$$

ove:

$$\bar{p}_1 = p_1 + \delta_1, \dots, \bar{p}_s = p_s + \delta_s$$

sono i generi virtuali di $C_1, \dots, C_s$.

Nel caso in esame, la curva C, almeno se è piana, può considerarsi come limite di una curva irriducibile C', di genere effettivo p, la quale, nel passaggio da C' a C ha certuni dei suoi nodi (zero incluso), che tendono ai nodi assegnati di C, mentre gli altri δ nodi compaiono *ex-novo* (1).

La teoria delle serie di equivalenza sopra una curva riducibile totalmente sconnessa, si trasporta tal quale, senza difficoltà, alle serie di equivalenza sopra una curva C riducibile, che possegga punti doppi virtualmente inesistenti, purchè s'intenda di considerare le sole *serie di equivalenza neutre*, cioè le serie di equivalenza della C, considerata totalmente sconnessa, rispetto alle quali le coppie che cadono nei nodi v. i. sieno neutre.

Si ottengono in tal modo concetti invarianti di fronte alla più generale trasformazione birazionale di C (nn. 70, 76), purchè beninteso nella trasformazione le coppie trasformate di quelle che cadono nei nodi v. i. si considerino come neutre.

Non ci dilunghiamo a enumerare i concetti e le proprietà cui si allude, le quali culminano nel teorema fondamentale (n. 72), che vale immutato per le serie di equivalenza neutre, tenuto conto dell'opportuna modificazione del concetto di somma delle serie.

Anche il teorema che una serie unirazionale di gruppi di punti,

(1) Cfr. SEVERI, *Vorlesungen* (citate), pag. 332.

sopra una curva riducibile, consta di gruppi equivalenti, vale per le curve (riducibili o irriducibili) con nodi v. i. Però per la serie unirazionale da cui si parte, le coppie che cadono nei nodi v. i. devono essere neutre, e, naturalmente, si deve far riferimento all'*equivalenza neutra.*

96. *Condizione razionale necessaria e sufficiente per la connessione di una curva piana riducibile, con punti doppi virtualmente inesistenti.* — Se la curva C d'ordine m è piana e dotata di soli nodi e consta di due parti irriducibili C_1, C_2 (dotate eventualmente di nodi v. i.), degli ordini m_1, m_2; e se uno, P, dei punti comuni a C_1, C_2, si considera come v. i., mentre i punti doppi assegnati di C, comprendono tutti i punti doppi assegnati della curva totalmente sconnessa $C_1 + C_2$, meno uno (il punto P), per la estensione a questo caso del teorema del n. 93, quei punti assegnati presentano alle curve d'ordine $m - 3$ altrettante condizioni indipendenti. Il teorema del n. 93 ci dice infatti che gli $m_1 m_2$ punti del gruppo (C_1, C_2) presentano $m_1 m_2 - 1$ condizioni indipendenti alle curve d'ordine $m - 3$ aggiunte a C_1, C_2; onde, per una conveniente scelta di P, i punti del gruppo $(C_1, C_2) - P$ impongono condizioni indipendenti alle dette aggiunte. Ma qui si afferma che la conclusione vale comunque si scelga P entro (C_1, C_2). Invero, se per una certa scelta di P, i punti di $(C_1, C_2) - P$ imponessero $m_1 m_2 - 2$ condizioni, P non potrebbe esser base pel sistema Σ delle curve d'ordine $m-3$ aggiunte a C_1, C_2 e passanti pel gruppo $(C_1, C_2) - P$; onde la serie lineare segata da Σ su C_1 non avrebbe il punto fisso P. Questo è assurdo, perchè la detta serie essendo somma della serie canonica di C_1, e del punto P, ha invece, com'è noto [1], il punto fisso P. La analoga conclusione vale se due o più dei punti comuni a C_1, C_2 si considerano v. i. (Soltanto, in questo caso, le aggiunte neutre d'ordine $m - 3$, non contengono in conseguenza i detti punti comuni).

Viceversa, se i nodi assegnati di $C = C_1 + C_2$ presentano alle curve d'ordine $m - 3$ condizioni indipendenti, la curva C non potrà essere totalmente sconnessa, a causa ell' estensione, cui si è sopra alluso, del teorema del n. 93.

Dal caso di due componenti si passa agevolmente a tre o più componenti e si conclude che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una curva piana di

[1] Pel teorema di riduzione contenuto a pag. 155 del *Trattato di G. a.* di SEVERI.

ordine m e di genere virtuale p, con punti doppi virtualmente inesistenti, sia connessa (e quindi si possa considerare come limite di una curva irriducibile dello stesso ordine e di genere effettivo p), è che i suoi punti doppi assegnati presentino alle curve d'ordine $m-3$ condizioni indipendenti.

Se invece la curva si scinde in s parti, ciascuna delle quali è connessa, ma che sono a due a due sconnesse, fra le condizioni imposte alle curve di ordine $m-3$ dai punti doppi assegnati, ve ne sono esattamente $s-1$, che son conseguenza delle rimanenti.

Il teorema precedente dà modo di riconoscere razionalmente in quante parti connesse, fra di loro disgiunte, si scinde una curva con dati punti doppi assegnati.

La geometria delle serie d'equivalenza sopra una curva riducibile, sconnessa o connessa, come è stata esposta in questo §, trovasi nella Memoria [3] di F. SEVERI, citata a pag. 44. Precedentemente il NOETHER, in una Memoria del 1886 (*Ueber die reductiblen algebraischen Curven*, « Acta mathematica », t. 8, pag. 161), aveva considerato, limitandosi al punto di vista proiettivo, le serie di gruppi di punti staccate sopra una curva piana d'ordine m, dalle aggiunte d'ordine $m-3$. Il teorema del n. 93, espresso dalla formula (18), dimostrato da SEVERI come particolare corollario del teorema generale di RIEMANN-ROCH per le curve riducibili, è ottenuto dal NOETHER per altra via. L'ultimo teorema del n. 93 è dovuto invece a CHRISTOFFEL (*Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linearunabhängigen Integrale erster Gattung*, « Annali di matematica », X_2, (1880), pag. 95), e venne anche ritrovato dal NOETHER nella Memoria citata; a questo Autore spetta di aver osservato come il teorema stesso permetta di riconoscere razionalmente la riducibilità di una curva. L'osservazione del n. 96 è di SEVERI [3]. Essa vien resa più significativa dal teorema da questi dato nelle *Vorlesungen* (pag. 332), secondo cui ogni curva piana connessa con certi punti assegnati è limite d'una curva irriducibile, che, nello spezzarsi, acquista *ex novo* i punti doppi virtualmente inesistenti della curva limite.

CAPITOLO VI.

Le serie d'equivalenza invarianti sopra una superficie.

§ 1. — Proprietà fondamentali di geometria sopra una superficie e serie d'equivalenza superficiale collegate.

97. *Criteri di equivalenza.* — È noto che lo studio delle serie lineari sopra una curva, o dei sistemi lineari sopra una superficie, è legato alla considerazione delle serie e dei sistemi lineari invarianti e covarianti (serie e sistemi canonici, pluricanonici, sistemi aggiunti, ecc.). Del pari, nello studio delle serie d'equivalenza sopra una superficie, hanno importanza fondamentale le serie d'equivalenza invarianti. Per la considerazione di queste serie invarianti, giova prima richiamare alcune proprietà fondamentali di geometria sopra una superficie, che raccogliamo in questo §.

Cominciamo dai cosidetti *criteri di equivalenza*, che permettono di decidere sull'equivalenza (lineare) di curve tracciate sopra una superficie F (nn. 8,15), in base all'esame dei gruppi di punti, ch'esse staccano sopra altre curve di F. Vi sono due tipi di criteri di equivalenza; i criteri del primo tipo sono compendiati dal teorema seguente:

I. *Sopra una superficie F, due curve A, B, le quali seghino gruppi linearmente equivalenti sopra le curve C di un sistema algebrico $\Sigma\,\infty^1$, d'indice ν, sono linearmente equivalenti su F o differiscono per curve fondamentali del sistema.*

Ricordiamo che una curva effettiva si dice *fondamentale* per un sistema Σ di curve di una superficie, quando non ha intersezioni variabili con le curve di Σ. Una tal curva può esser costituita da una o più curve totali del sistema, soltanto se Σ è un fascio razionale o irrazionale; altrimenti essa è formata da una *parte* di una curva riducibile di Σ; e ciò perchè le curve del sistema che passano per un punto generico d'una curva fondamentale irriducibile, la debbono contenere per intero. Una curva

virtuale dicesi fondamentale per Σ, quando le sue parti son fondamentali.

L'enunciato precedente asserisce che, nelle poste ipotesi, le curve A, B sono linearmente equivalenti, ossia la differenza $A - B$ è lo zero dell'equivalenza lineare su F (n. 8); ovvero la differenza $A - B$ è una curva fondamentale (virtuale) pel sistema Σ, cioè esistono due curve fondamentali effettive H, K (anche riducibili), tali che vale l'equivalenza lineare:

$$A + H \equiv B + K .$$

Si tratta dunque di provare l'esistenza di una funzione razionale $\Phi(x)$ del punto x di F, che abbia, p. es., come curva totale di poli la $A + H$ e come curva totale di zeri la $B + K$; in particolare potendo risultare $H \equiv K$ (per cui si dedurrebbe che è $A \equiv B$), o anche potendo mancare le curve H e K. Inoltre occorre provare che, in ogni parte irriducibile di A o di B, la $\Phi(x)$ è infinita o nulla di ordine uguale alla molteplicità di quella parte per A o per B rispettivamente.

Fissata una curva C generica entro Σ, e indicato con x il punto variabile su C, possiamo costruire la funzione razionale $y(x)$, che ha come gruppo dei poli il gruppo delle intersezioni (A, C), e come gruppo degli zeri il gruppo (B, C), ove ciascun polo o ciascuno zero si assuma di ordine uguale alla molteplicità d'intersezione con cui esso figura nel gruppo (A, C) o in (B, C) [1]. Ma la y risulta solo determinata a meno di un fattore, costante lungo C [2]; per il nostro scopo occorre trovare il mezzo di determinare *razionalmente* questo fattore sopra ogni curva di Σ.

A tal fine, si fissi su F una curva generica D (non fondamentale per Σ), e, indicati con $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i punti (distinti) del gruppo d'intersezione effettivo (C, D), si consideri la funzione

$$(1) \qquad Y(x) = \frac{y(x)}{y(x_1) + y(x_2) + \ldots + y(x_m)} ,$$

che ha gli stessi poli e gli stessi zeri di $y(x)$. Nella Y non si ha più l'ambiguità della costante moltiplicativa, perchè Y non s'al-

[1] Se P è un punto comune ad una parte A_0 di A che entri come k-pla in A, il punto stesso entra in (A, C) colla molteplicità d'intersezione di A_0 con C, moltiplicata per k.

[2] Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 98.

tera, comunque si scelga y tra le funzioni che hanno quei dati poli e quei dati zeri.

Designando con Γ una curva i cui punti rappresentino birazionalmente gli elementi (curve) di Σ, la Y risulterà dunque funzione razionale del punto x variabile su C e del punto ξ variabile su Γ. Ora, poichè il sistema Σ è d'indice ν, cioè per un punto generico di F passano ν curve C, il punto ξ risulta alla sua volta funzione algebrica a ν valori del punto x variabile sulla F; e la Y darà luogo in definitiva ad una funzione algebrica a ν valori, $Z(x)$, del punto scorrente su F.

S'osserverà che Z subordina sopra C una funzione algebrica a ν rami, spezzata nella funzione razionale Y e in una funzione a $\nu - 1$ valori. Pel modo come la Z è stata costruita, risulta evidente che le curve A, B vengono ad essere rispettivamente luogo di poli e di zeri della Z. Ma non è detto che la Z non possa ammettere altri poli e altri zeri fuori di A, B. Di fatto si sa soltanto che, sopra la generica C, i poli e gli zeri di Z formano i gruppi (A, C) e (B, C): può darsi quindi, che esistano altre curve [1] luogo di poli e di zeri, oltre le A, B e che queste non incontrino la C generica; ovvero può darsi che tali curve incontrino la C generica nei medesimi punti, per modo che i punti stessi risultino d'indeterminazione per la funzione algebrica subordinata da Z su quella C (e non appaiono pertanto fra i gruppi di poli e di zeri (A, C) e (B, C)). In tale ipotesi questi punti son necessariamente punti base per le curve C del sistema Σ [2]. Dunque, in ogni caso, le eventuali curve polari o di livello zero, oltre le A, B, sono curve *fondamentali* di Σ.

La funzione algebrica $Z(x)$ così costruita, non è ancora quella che fa al nostro scopo, perchè essa non è una funzione razionale, ma una funzione a più valori (se $\nu > 1$).

Consideriamo perciò la funzione

$$\Phi(x) = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_\nu ,$$

dove Z_1, $Z_2, \ldots, Z_\nu$ denotano i valori di Z nel punto x variabile su F. La $\Phi(x)$ è razionale e non può divenire infinita se non nei punti in cui diventa infinita Z; e cioè o sulle eventuali curve fondamentali, polari per Z, o su A. La prima possibilità non dà

(1) Poli o zeri isolati della funzione $Z(x)$ su F non possono esistere!

(2) In quanto, se la Z possedesse una curva d'indeterminazione, da questa si potrebbe prescindere; e quindi gli eventuali punti d'indeterminazione di Z sono punti isolati.

luogo ad alcuna ulteriore discussione ; la seconda invece richiede un più attento esame. Invero, la A potrebbe sparire o tutta o in parte come curva polare di $\Phi(x)$, pel fatto che in ogni punto di A divengono infinite tutte le $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\nu$ e la loro somma può dunque, a priori, sopra una componente di A, restare finita. Se ciò avvenisse, la $\Phi(x)$ subordinerebbe sulla generica C una funzione razionale i cui poli costituirebbero soltanto una parte del gruppo (A, C). Ora questo è assurdo, perchè $\Phi(x)$ si annulla in ogni punto di (B, C) con un ordine almeno uguale a quello con cui si annulla $Y(x)$, epperò il gruppo completo degli zeri di $\Phi(x)$ su C o coincide con (B, C) o contiene (B, C) come parte.

Resta da provare che ogni parte di A è per Φ una curva polare di ordine uguale alla molteplicità con cui quella parte figura in A. Costruiscasi perciò, in uno degli infiniti modi possibili, una funzione razionale $\Psi(x)$, che abbia una curva polare, contenente come parte A, in guisa che ogni componente irriducibile di A entri nella curva polare di $\Psi(x)$ colla molteplicità con cui entra in A. S'indichi con ψ la funzione subordinata da Ψ sopra una C. Poichè Y e ψ divengono infinite dello stesso ordine in ogni punto di (A, C), la $Y:\psi$ resterà ivi finita, epperò in ogni punto x di A resterà pure finita (e non nulla) la funzione $\Phi:\Psi$, dal momento che il suo valore in x è la somma dei valori ivi assunti dalle funzioni $Y:\psi$ relative alle curve C uscenti da x. Le Φ e Ψ hanno dunque in ogni parte di A una curva polare dello stesso ordine.

In conclusione la curva totale dei poli di Φ è costituita da A (contando ogni parte di A colla propria molteplicità), e da una eventuale curva ulteriore H, fondamentale per Σ.

Vediamo ora come sia costituita la curva totale degli zeri di Φ. Intanto, come abbiamo già notato, B è luogo di zeri per Φ. Inoltre in ogni punto del gruppo (B, C) relativo alla generica C, l'ordine dello zero che ivi presenta la funzione subordinata da Φ su C, è *almeno* uguale all'ordine della $Y(x)$ nel punto stesso : e non può esserne più grande, perchè se no sopra C la Φ subordinerebbe una funzione i cui zeri costituirebbero un gruppo contenente come *parte* (B, C) ; mentre i poli formano il gruppo (A, C) e soltanto questo. Dunque su C la funzione Φ si annulla solamente in (B, C), epperò gli eventuali ulteriori zeri di Φ son distribuiti lungo una curva K, non incontrante la generica C in punti variabili, cioè fondamentale per Σ.

In conclusione, la funzione razionale $\Phi(x)$ costruita, soddisfa a tutte le condizioni desiderate, e il teorema I risulta dimostrato.

98. — Vediamo ora quando resti esclusa la seconda alternativa del teorema I. Osserviamo intanto che *se alle ipotesi del teor.* I, *si aggiunge l'ipotesi che il sistema* Σ *non possieda curve spezzate e sia d'indice* $\nu > 1$, *si ha* $A \equiv B$, perchè una curva fondamentale di Σ, dovendo essere parte di qualche curva del sistema, coinciderebbe addirittura con questa: il che è assurdo, dato che due curve variabili di Σ si tagliano almeno in un punto variabile.

Sia invece $\nu = 1$, cioè Σ si riduca ad un fascio. Supponiamo, come sopra, che Σ non possieda curve spezzate, ed inoltre che non sia irrazionale. Se allora, le curve A, B sono dello stesso ordine, ed $A + H \equiv B + K$, H e K saranno costituite da un ugual numero di curve del fascio lineare Σ, e poichè le curve del fascio sono tutte equivalenti tra loro, si trae $A \equiv B$.

Se invece non si sappia che A e B sono dello stesso ordine, si può ancora pervenire all'esclusione della seconda alternativa del teorema I, quando esiste un punto base O semplice ed ordinario per il fascio. In questo caso sussiste tal quale (salvo le conseguenti semplificazioni) la dimostrazione svolta al n. 97, senonchè per individuare la funzione razionale $y(x)$ sulla C generica del fascio, basta qui imporre che il punto semplice O appartenga al gruppo di livello 1 della funzione, senza ricorrere alla considerazione della curva D. Così facendo, la funzione razionale che si ottiene su F, ha come curva di poli A e come curva di zeri B, nè può possedere altra curva H luogo di poli (o K luogo di zeri) fondamentale per Σ, e quindi costituita da una o più curve irriducibili C. Infatti, una tal curva H passerebbe necessariamente per O, e il punto risulterebbe in conseguenza punto d'indeterminazione per la funzione razionale su F, e non punto di livello 1. In conclusione si ha ancora che:

Se alle ipotesi del teor. I, *si aggiunge l'ipotesi che* Σ *sia un un fascio lineare, privo di curve spezzate, e l'altra che* A *e* B *abbiano lo stesso ordine, oppure che* Σ *possegga un punto base semplice ordinario, risulta* $A \equiv B$.

99. — Enunciamo ora il criterio d'equivalenza del secondo tipo, a cui si è sopra alluso.

II. *Sopra una superficie* F, *sia un sistema continuo di curve* A, *e sia* C UNA CURVA IRRIDUCIBILE FISSATA *di* F, *sopra la quale le curve* kA (k *intero positivo dato* $\geqslant 1$) *seghino gruppi linearmente equivalenti. Allora se la curva* C *è atta a definire un sistema continuo infinito, diverso da un fascio irrazionale, che la contenga*

totalmente, con le eventuali molteplicità di C (1), *le A sono tra loro equivalenti.*

La dimostrazione di questo criterio è stata data da SEVERI (nei lavori più innanzi indicati) per via trascendente, in un primo tempo, e per via algebrico-geometrica, in un secondo tempo. Per quanto il criterio II non ci occorra, almeno per ora, ne esporremo la dimostrazione geometrica, osservando in primo luogo che è lecito senz'altro supporre $k = 1$, perchè sussiste il teorema (2):

Se sopra una curva irriducibile C si ha una serie irriducibile di gruppi G di n punti, tale che i gruppi kG siano linearmente equivalenti, anche i gruppi G lo sono.

È chiaro che si può supporre che la serie dei G sia ∞^1, perchè due gruppi qualunque di una serie irriducibile di maggior dimensione son sempre congiungibili in infiniti modi con serie subordinate irriducibili ∞^1. Si consideri la corrispondenza T che nasce su C assumendo come omologhi due punti di un medesimo gruppo G. Dall'ipotesi del teorema consegue che la corrispondenza kT è a valenza $k\nu$ (3), ove ν denota l'indice della serie dei G; epperò il numero dei suoi punti uniti è espresso da:

$$2\,k\nu\,(n-1) + 2\,k\nu\,p\,,$$

(p genere effettivo di C), perchè gl'indici di kT sono ambedue uguali a $k\nu(n-1)$. E siccome il gruppo dei punti uniti di kT è il k-plo dei punti uniti di T, così questi ultimi risultano in numero di $2\nu(n+p-1)$. Pertanto la serie dei G possiede altrettanti punti doppi. In forza di una ben nota proposizione (4) ne segue che i gruppi G sono equivalenti.

Ciò posto, passiamo a dimostrare il criterio II. Per un'argomentazione analoga ad altra or ora addotta, potremo supporre che le A formino un sistema irriducibile Σ, ∞^1. Supporremo inoltre,

(1) S'intende con ciò che la generica curva del sistema continuo cui appartiene C, presenta punti multipli, distinti e infinitamente vicini, delle stesse molteplicità dei punti multipli di C; cioè i punti multipli di C son tutti limiti di punti di ugual molteplicità della curva generica del sistema.

(2) Che può considerarsi come un'immediata conseguenza della sufficienza della condizione trascendente espressa dal teorema d'ABEL. (Ved. le *Vorlesungen über algebraische Geometrie* di F. SEVERI, cit., pag. 271). La dimostrazione geometrica sviluppata nel testo è di SEVERI (« Atti del R. Istituto Veneto », t. 65, 1906, pag. 634; ved. pure il *Trattato di G. a.*, cit., pag. 257).

(3) Ved. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 233.

(4) Cfr. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 254.

in un primo tempo, che Σ sia « generico » rispetto a C, nel senso che le intersezioni con C della generica A, variabile in Σ, sieno tutte variabili e semplici (cioè distinte). Dall'ipotesi del criterio segue che la corrispondenza involutoria T, che nasce su C prendendo come omologhi due punti staccati da una medesima A, è a valenza ν, ove ν è l'indice di A. Posto $n = [A, C]$, gl'indici di T risultan uguali a $\nu(n-1)$; epperò il numero dei punti uniti di T, cioè dei punti doppi della serie degli (A, C) è uguale a $2\nu(n+p-1)$ (p genere effettivo di C). Ora, se C varia nel sistema irriducibile ∞^1, S, a cui per ipotesi appartiene, si può considerare la curva D dei contatti (o meglio dei punti di molteplicità d'intersezione 2) delle A colle C. Questa curva sega una generica C nel gruppo degli eventuali punti base del sistema S e nel gruppo dei punti doppi della relativa serie degli (A, C), il quale consta ancora di $2\nu(n+p-1)$ punti, perchè quella particolare C ha soltanto punti di ugual molteplicità di quelli che appartengono (come punti fissi o variabili) alla C generica di S [1]. Perciò i gruppi (A, C) son equivalenti su ogni C. In forza del I criterio si conclude che le A son equivalenti su F o differiscono per curve fondamentali di S.

Ora, se le curve fondamentali di S sono in numero finito, prese due posizioni A_1, A_2 di A, tali che $A_1 + H \equiv A_2 + K$, ove H, K son curve fondamentali di S, variando con continuità A_2 in Σ, le H, K non posson che restare fisse. Quando A_2 viene a coincidere con A_1 si ha dunque $H \equiv K$; epperò $A_1 \equiv A_2$. Se S possiede infinite curve fondamentali, ogni curva di S ne contiene almeno una, anzi una sola, e coincide con questa, attesa la irriducibilità della generica C. Pertanto due C non hanno intersezioni variabili e formano dunque un fascio L, che, per ipotesi non è irrazionale. Si conclude, in forza del complemento apportato nel n. 98 al criterio I, che le A (le quali come curve di un sistema continuo, hanno lo stesso ordine) son equivalenti o differiscono per curve contenute parzialmente in L. E siccome queste curve parziali sono in numero finito, l'argomentazione poco sopra addotta ci abilita a concludere che le A son equivalenti.

Ci resta da esaminare il caso in cui Σ non sia « generico » rispetto a C. In questo caso, supposta F in S_r, priva di singolarità, le forme di ordine l abbastanza alto segano su F un sistema lineare $|E|$, che contiene parzialmente ogni A in guisa che il resi-

(1) Queste circostanze sono più ampiamente illustrate in un caso analogo nel n. successivo.

duo di una A rispetto ad $|E|$ è un sistema lineare $|B|$ privo di punti base e segante su C una serie lineare infinita, il cui gruppo generico consta dunque di punti distinti (1). Consideriamo il sistema algebrico luogo delle B, al variare di A. Poichè, essendo $E \equiv A + B$,

$$(E, C) \equiv (A, C) + (B, C),$$

i gruppi di (B, C) sono equivalenti fra loro. Il sistema delle B soddisfa dunque all'ipotesi del II criterio e la sua curva generica sega C in punti distinti. In virtù della dimostrazione precedente si conclude che le B sono equivalenti tra loro ; e siccome, per ogni A, $A \equiv E - B$, così anche le A sono linearmente equivalenti.

Osservazione. — I criteri d'equivalenza I *e* II *son valevoli anche per le curve virtuali.* Si supponga invero (per ciò che concerne il criterio I), che le A, B siano virtuali. Pongasi $A = A_1 - A_2$, $B = B_1 - B_2$, ove A_1 , A_2 , B_1 , B_2 son convenienti curve effettive. Allora l'equivalenza $(A, C) \equiv (B, C)$, valida su C, può scriversi :

$$(A_1 + B_2 , C) \equiv (A_2 + B_1 , C),$$

donde si trae che $A_1 + B_2 + H \equiv A_2 + B_1 + K$, ove H, K siano eventuali curve fondamentali di Σ. Ne segue $A + H \equiv B + K$. Questo medesimo modo di ragionare estende alle curve virtuali A, B il n. 98 e il criterio II (n. 99), in quanto s'intenda che la curva virtuale A varia in un sistema continuo, perchè variano in sistemi continui le A_1 , A_2.

I criteri di equivalenza esposti, sono dovuti a SEVERI, il quale li ha stabiliti, ampliandone progressivamente la portata, in successivi lavori. Le prime dimostrazioni (di carattere trascendente, soltanto per i criteri del II tipo) sono nei lavori seguenti : *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, « Annali di Matematica », (3), t. XII, (1905) (al n. 6 criterio del I tipo, al n. 9 del II tipo) ; *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degli integrali di Picard*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », t. XXI, (1905) (n. 13, criterio del II tipo). Le dimostrazioni algebriche dei criteri del II e I tipo, dati sotto la forma più generale, si trovano rispettivamente in : *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà*, « Atti del R. Istituto Veneto », t. LXV, (1906) ; e *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie*, « Ibidem », t. LXX, (1911). Ivi son date anche estensioni alle varietà di dimensione superiore. Le dimostrazioni di SEVERI pei criteri del I tipo sono esposte anche al n. 41 delle *Lezioni* già cit. a pag. 41, nota (2).

(1) Cfr. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 55.

100. *Sistema canonico impuro.* — Consideriamo sopra una superficie F, priva di punti multipli (1), di S_d, un sistema lineare $|C|$ di curve, irriducibile, ∞^r, privo di ∞^{r-1} curve spezzate, il quale possieda punti base semplici ordinari (cioè senza tangenti fisse), potendo non averne affatto, se $r > 1$. Un sistema lineare siffatto lo chiameremo, brevemente, un sistema lineare *generale* (2).

Entro il sistema $|C|$, si fissi un fascio lineare generico H. Se $r > 1$, il fascio H sarà dotato *soltanto* di punti base semplici ordinari (3), e sarà privo di curve spezzate (perchè se nel generico fascio H di $|C|$ vi fosse qualche curva spezzata, l'intero sistema $|C|$ ∞^r, ne possiederebbe ∞^{r-1}, contro il supposto). Se invece $r = 1$, il fascio coincide con $|C|$, e allora l'ipotesi fatta ci dice che $|C|$ possiede *soltanto* punti base semplici ordinari. Consideriamo inoltre su F un altro fascio lineare generale L, di curve D in posizione generica rispetto ad H. Sia T la curva luogo dei punti di contatto delle curve di H e di L.

Le intersezioni della T con la curva generica del fascio H, che non cadono in punti base di questo, costituiscono il gruppo jacobiano della serie lineare segata dal fascio L su C. Inoltre la T passa per i punti base del fascio H. Invero, sia P un punto base di H e sia D la curva di L che passa per P e che ha ivi un punto

(1) A questa ipotesi ci si può sempre ridurre con una conveniente trasformazione birazionale della superficie (pag. 6).

(2) Si potrebbe credere che un tal sistema lineare $|C|$, sia invece molto particolare. Al contrario, se il sistema $\infty^r |C|$ (che ci limitiamo a supporre semplice e almeno ∞^3) possiede ∞^{r-1} curve spezzate ed è privo di curve fondamentali, si dimostra che la superficie F è essa, in conseguenza, di natura particolare. Infatti, basta fare l'imagine proiettiva (n. 16) di $|C|$, e tener conto che la superficie F' trasformata di F, che ne risulta, possiede ∞^{r-1} sezioni iperpiane spezzate. Con una proiezione di F' in S_3, si perviene ad una superficie con ∞^2 sezioni piane spezzate, che, per il teorema di KRONECKER-CASTELNUOVO, è una rigata ovvero è la superficie di STEINER. Alle considerazioni accennate fa eccezione il caso, in cui il sistema $|C|$ possieda una curva fondamentale, la quale si muti in un punto quando si eseguisce l'imagine proiettiva F' di C. Ma, se la superficie F non è razionale o riferibile a rigata, si dimostra che sopra un modello conveniente di F, non esistono sistemi siffatti. Ad ogni modo, vedremo fra breve come per la definizione del sistema canonico impuro si possa far riferimento ad un sistema lineare qualunque (n. 107).

(3) Infatti, se $r > 1$, due curve generiche di $|C|$ s'incontrano *semplicemente*, fuori dei punti base di $|C|$, in altri punti i quali divengono così punti base semplici ordinari del fascio individuato dalle due curve. Gli altri punti base, comuni al fascio e al sistema $|C|$, son ordinari per ipotesi.

semplice, per la genericità di L rispetto ad H. Essendo P un punto base semplice ordinario per H, nel fascio H vi è *una* curva C tangente a D in P; dunque P sta su T. Anzi, la T passa semplicemente per P. Infatti, il punto fisso P conta due (e due sole) volte nel gruppo jacobiano della serie staccata su D da H (1), onde D ha con T in P molteplicità d'intersezione 2. Sicchè, o T passa per P semplicemente, toccando D, oppure P è doppio per T e D non tocca T ivi. Quest'ultima alternativa si esclude perchè esisterebbe allora una C, almeno, di H, diversa da quella che tocca D, tangente a T in P e quindi avente con T in P molteplicità d'intersezione maggiore di quella che ha ivi con T la C generica di H; mentre *tutte* le curve di H (esclusa la C tangente a D) tagliano T, *fuori di* P, nello stesso numero di punti.

Alla stessa guisa si conclude che T passa semplicemente per ogni punto base di L, toccando ivi D.

Ne segue che la totalità delle intersezioni della T con una C generica del fascio è costituita dal gruppo dei punti base di H, contati semplicemente, aumentato del gruppo jacobiano della serie lineare g^1 segata dal fascio L su C. Ricordando che il gruppo jacobiano è equivalente (linearmente) su C, ad un gruppo canonico di C più il doppio di un gruppo di g^1, si ha su C la seguente relazione di equivalenza:

$$(2) \qquad (T, C) \equiv (C, C) + M(C) + 2(C, D) \; ;$$

dove (C, C) rappresenta il gruppo virtuale d'intersezione di C con se stessa (n. 10), cioè un gruppo equivalente al gruppo dei punti base del fascio H, e con $M(C)$ si denota un gruppo canonico su C.

Si consideri ora un'altro fascio generale L_1 di curve D_1 di F, soddisfacente alle stesse condizioni di genericità del fascio L. Se T_1 è la curva dei contatti dei fasci H ed L_1, si ha analogamente su C la relazione d'equivalenza:

$$(3) \qquad (T_1, C) \equiv (C, C) + M(C) + 2(C, D_1) .$$

D'altronde dalla (2) si deduce, sommando con l'equivalenza $(2D_1, C) \equiv 2(D_1, C)$,

$$(T + 2D_1, C) \equiv (C, C) + M(C) + 2(C, D) + 2(C, D_1) .$$

(1) Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 120.

Del pari dalla (3) si può dedurre:

$$(T_1 + 2\,D,\, C) \equiv (C,\, C) + M\,(C) + 2\,(C,\, D) + 2\,(C,\, D_1)\,.$$

Pertanto, sulla curva C generica del fascio H, si ha l'equivalenza:

$$(T + 2\,D_1\,,\, C) \equiv (T_1 + 2\,D,\, C)\,.$$

Tenute presenti le ipotesi fatte sul fascio H, risulta applicabile il I criterio d'equivalenza in una delle forme più circostanziate del n. 98, e pertanto si conclude con l'equivalenza su F:

$$T + 2\,D_1 \equiv T_1 + 2\,D\,. \tag{4}$$

Dalla (4) si deduce

$$T + 2\,(C + D_1) \equiv T_1 + 2\,(C + D)\,,$$

cioè la relazione d'equivalenza (eventualmente virtuale) su F:

$$T - 2\,(C + D) \equiv T_1 - 2\,(C + D_1)\,. \tag{5}$$

Questa relazione s'interpreta, dicendo che la curva (virtuale) $T - 2\,(C + D)$ si muta in una curva equivalente mutando il fascio L (in L_1) e lasciando inalterato il fascio H.

Dato che, nella costruzione della curva $T - 2\,(C + D)$, i due fasci H ed L intervengono simmetricamente, ne viene senz'altro che il sistema lineare individuato su F dalla curva $T - 2\,(C + D)$, è indipendente dai due fasci H ed L. Il sistema

$$|\,K\,| = |\,T - 2\,(C + D)\,|\,, \tag{6}$$

lineare dipende dunque soltanto dalla superficie F, e si dice il *sistema canonico impuro* (virtuale od effettivo) di F.

Il numero delle curve effettive e linearmente indipendenti di $|\,K\,|$ è un carattere [1] della superficie, che si dice *genere geometrico* di F, e si denota con p_g. Quando il sistema canonico $|\,K\,|$ sia privo di curve effettive, si dirà che la superficie ha genere geometrico $p_g = 0$.

101. *Sistema aggiunto virtuale (in particolare effettivo).* — Denotiamo con $|\,C\,|$ un sistema lineare di F, *privo di punti base*

[1] Che per ora può solo dirsi invariante di fronte alle trasformazioni birazionali senza eccezione di F.

assegnati [1]. Si dice *sistema aggiunto* a $|C|$ il sistema lineare (effettivo o virtuale), covariante di $|C|$:

$$|C'| = |C + K| . \tag{7}$$

Se $|C|$, $|D|$ son due sistemi lineari su F, privi di punti base assegnati, per la definitizione posta, si ha l'equivalenza su F:

$$(C + D)' \equiv C + D + K .$$

Ma, analogamente,

$$C' \equiv C + K \quad , \quad D' \equiv D + K ;$$

donde

$$(C + D)' \equiv C + D' \equiv C' + D .$$

La relazione d'equivalenza su F

$$C + D' \equiv C' + D \tag{8}$$

costituisce il teorema fondamentale dell'aggiunzione.

Passiamo ora a caratterizzare il sistema aggiunto $|C'|$ di un sistema lineare $|C|$, privo di punti base assegnati, mettendoci nell'ipotesi che $|C|$ sia un sistema *generale* (n. 100). Dimostriamo precisamente che:

Il sistema aggiunto $|C'|$ (virtuale o effettivo) di un sistema lineare $|C|$ è caratterizzato dalla proprietà di segare gruppi (virtuali o effettivi) equivalenti a gruppi canonici, sopra la generica curva C.

Infatti, sia C^* una curva virtuale (in particolare effettiva) che seghi sulla C generica un gruppo equivalente ai gruppi canonici. Facciamo vedere che C^* è una curva C'. Riprendiamo perciò la relazione (2) del n. 100:

$$(T , C) \equiv (C , C) + M (C) + 2 (C , D) .$$

Per la nostra ipotesi è $(C, C^*) \equiv M (C)$, e quindi

$$(T , C) \equiv (C , C) + (C , C^*) + 2 (C , D) ,$$

ossia

$$(T - 2 D - C , C) \equiv (C^* , C) .$$

[1] Con ciò s'intende dire che nessun punto di F è stato volontariamente *assegnato* come punto base di $|C|$. Ciò nonostante, non si esclude che $|C|$ possa avere qualche punto base, che noi dunque consideriamo *virtualmente inesistente*, il quale non sia eliminabile ampliando il sistema lineare $|C|$.

Ora, in base alle (7) e (6), si ha

$$| T - 2D - C | = | C' | ,$$

cioè:

$$(C', C) \equiv (C^*, C) .$$

Applicando il I criterio d'equivalenza (n. 98 e n. 99, Oss. 2ª), alle curve virtuali C' e C^*, si ha dunque:

$$C^* \equiv C' .$$

Viceversa, risalendo le deduzioni, si vede che una curva C' sega la C generica in un gruppo equivalente ai gruppi canonici.

102. *Relazione tra il sistema aggiunto e il sistema jacobiano.* — Sia $| C |$ una rete (sistema lineare ∞^2) di curve irriducibili su F, che supponiamo generale, nel senso indicato (n. 100); anzi effettivamente priva di punti base. I punti doppi delle C riempiono una curva, che si dice *jacobiana*, C_j, della rete.

La jacobiana C_j può venir definita anche come curva dei punti di contatto delle curve della rete. Invero, se P è un punto generico di C_j (definita al primo modo), vi sarà una curva di $| C |$ che ha in P un punto doppio. Di conseguenza le curve del fascio di $| C |$ individuato dal punto base P, passano per P con una tangente fissa (1). Il punto P è quindi punto di contatto di curve della rete $| C |$. Se, inversamente, P è punto di contatto di due curve C_1, C_2 della rete, il fascio individuato da C_1, C_2, ha in P una tangente fissa, e quindi possiede una curva con punto doppio in P (2).

Ciò premesso siano H, L due fasci generici di $| C |$, i quali avranno in comune una curva C. La curva T dei contatti di H ed L, si spezza nella curva C e nella jacobiana C_j. Che C sia parte di T è evidente; d'altronde il punto generico P di C_j sta su T, giacchè le due curve di H, L che passan per P si toccano ivi. Inoltre, ciascuno dei punti comuni alla curva $C + C_j$ e ad una curva generica $\bar{C}$ di H, continua ad esser intersezione semplice di T con $\bar{C}$, in quanto le argomentazioni del n. 100 serbano, nel caso

(1) Si pensi p. es. il fascio ottenuto combinando linearmente la curva che ha in P il punto doppio con una curva generica per P: ogni curva del fascio ha la stessa tangente di quest'ultima curva. Inversamente, un fascio di curve tangenti in un punto base P, possiede sempre una curva con un punto doppio P, la quale si ottiene imponendo alle curve del fascio una tangente in P diversa dalla tangente fissa.

(2) Cfr. nota precedente.

in esame, il loro pieno valore. Perciò le C, C_j compaiono in T come parti semplici.

In conclusione sussiste su F l'equivalenza:

(9) $$C_j \equiv T - C .$$

Ora, dalle (7) e (6), si ha

$$C' \equiv C + K \equiv T - C - 2D , \qquad T - C \equiv C' + 2D$$

quindi risulta

$$C_j \equiv C' + 2D ,$$

od anche, essendo $C \equiv D$,

$$C_j \equiv C' + 2C ;$$

donde la relazione:

(10) $$C' \equiv C_j - 2C .$$

Sottraendo dai due membri della (10) la curva C, si ha l'altra relazione:

(11) $$K \equiv C_j - 3C .$$

Le due relazioni notevoli (10) e (11) forniscono un'altra definizione rispettivamente del sistema aggiunto $|C'|$ ad un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^2, e del sistema canonico impuro $|K|$. Esse sono suscettibili di una importante interpretazione proiettiva, che sarà indicata nel prossimo numero.

Si noti che le (10) e (11) si possono anche stabilire in base alla sola definizione di C_j, senza far ricorso alla relazione (9). Di fatto il gruppo d'intersezione (C_j, C) non è che il gruppo jacobiano su C della serie caratteristica del sistema lineare $|C|$ e come tale è equivalente su C ad un gruppo canonico aumentato del doppio di un gruppo caratteristico; si ha cioè:

$$(C_j, C) \equiv 2(C, C) + M(C) .$$

Vuol dire che il sistema lineare, effettivo o virtuale, $|C_j - 2C|$ sega sulla curva generica C gruppi canonici $M(C)$. Pertanto, in base alla proprietà caratteristica (n. 101) del sistema $|C'|$, effettivo o virtuale, si deduce senz'altro l'identità dei due sistemi $|C'|$ e $|C_j - 2C|$.

Osservazione 1ª. — Se invece che da una rete di curve su F, si parte da un sistema lineare generale $|C|\infty^r$, effettivamente privo di punti base, la relazione (11), o l'altra equivalente

$$C_j \equiv 3C + K ,$$

vale per la jacobiana di ogni rete estratta dal sistema $|C|$. Ne segue che tutte queste jacobiane sono fra loro equivalenti su F. Il sistema lineare completo $|C_j|$, che contiene le jacobiane predette, dicesi *sistema jacobiano* del sistema lineare $|C|$. Si badi tuttavia che, per $r > 3$, la totalità delle curve jacobiane non esaurisce il sistema jacobiano $|C_j|$, costituendo soltanto una varietà non lineare contenuta entro $|C_j|$. Di fatto le jacobiane di $|C|$ corrispondono biunivocamente alle reti estratte da $|C|$, cioè ai punti della varietà grassmanniana dei piani di un S_r (n. 19), che, per $r > 3$, è una varietà razionale, ma non lineare. Anzi, dal fatto che le jacobiane costituiscono una varietà razionale di elementi, si può trarre senz'altro che appartengono ad un sistema lineare su F, quando si tenga conto del teorema generale del n. 49 (pag. 86).

Osservazione 2ª. — Quando $|C|$ abbia punti base effettivi vedremo che la relazione $C' \equiv C_j - 2\,C$ vale ancora, ma trascurando il comportamento nei punti base, che, del resto, non mancheremo di fissare. Il fatto però che le C_j delle reti estratte da $|C|$ siano equivalenti, si può affermare anche in tal caso, fin da ora, attesa l'ultima argomentazione dell'osservazione precedente.

103. *Interpretazione proiettiva del sistema canonico impuro e del sistema aggiunto.* — Si è già ricordato (n. 100) che una superficie dotata di singolarità qualunque, si può trasformare birazionalmente in una superficie Φ priva di punti multipli, appartenente ad uno spazio S_r di dimensione abbastanza alta. Ricordiamo ancora che, proiettando Φ da un S_{r-4} generico di S_r, sopra uno spazio ordinario S_3, si ottiene una superficie F, in corrispondenza birazionale con Φ, e che possiede le seguenti singolarità, che diconsi *singolarità ordinarie*: una linea doppia nodale irriducibile, dotata di un certo numero di punti tripli, tripli anche per la superficie e triplanari, nonchè di un certo numero di punti cuspidali per F. Un punto generico della linea doppia nodale proviene da una corda di Φ che si appoggi all'S_{r-4} proiettante; i punti tripli provengono dai piani trisecanti la Φ e appoggiati secondo rette all'S_{r-4}; e i punti cuspidali provengono da rette tangenti alla Φ ed incidenti all'S_{r-4}.

Riferiamo dunque le considerazioni proiettive seguenti, ad una superficie F dello spazio ordinario, dotata di singolarità ordinarie.

Si chiamano superficie *aggiunte* alla F le superficie passanti semplicemente per la linea doppia D di F. Queste superficie hanno, di conseguenza, un punto doppio nei punti tripli di D, perchè i punti tripli di D sono a tangenti non complanari (1).

Sia $|C|$ il sistema lineare ∞^3 delle sezioni piane di F. Il sistema $|C|$ non ha punti base, e non contiene ∞^2 curve spezzate, a meno che la F (come abbiamo già detto) non sia una rigata o la superficie di STEINER, *casi che escludiamo*. Cioè $|C|$ è un sistema generale senza punti base , e ad esso possono applicarsi le considerazioni del n. 102.

Una rete estratta da $|C|$, è costituita dalle sezioni piane di F con i piani di una stella di centro O. Pertanto la jacobiana di tale rete, risulta il luogo dei punti di contatto dei piani della stella tangenti ad F, ed è quindi segata su F, fuori della linea doppia D, dalla prima polare di F rispetto al punto O. Se dunque m è l'ordine di F, il sistema lineare delle superficie d'ordine $m-1$ aggiunte ad F, tra le quali è la prima polare considerata, segano, sopra F, curve del sistema jacobiano $|C_j|$.

D'altro canto la (10) del n. precedente, ci dice che il sistema $|C'|$ è lo stesso del sistema che si ottiene sottraendo dal sistema jacobiano $|C_j|$ il doppio del sistema delle sezioni piane di F, onde si deduce che *le superficie, d'ordine* $m-3$, *aggiunte ad* F, *segano su* F *curve del sistema lineare* $|C'|$ *aggiunto al sistema lineare* $|C|$ *delle sezioni piane della superficie.*

Se si tiene conto invece della relazione (11), si conclude analogamente che *le superficie aggiunte d'ordine* $m-4$, *segano su* F *curve del sistema canonico impuro* $|K|$.

Anzi, quando si sia dimostrato (vedi il successivo n. 105) che le superficie aggiunte d'un ordine qualsivoglia, segano sempre sistemi lineari completi, *si può affermare che le predette aggiunte segano su* F *rispettivamente i sistemi lineari completi* $|C'|$ *e* $|K|$.

104. *Digressione sulla completezza della serie segata sopra una curva iperspaziale dalle sue forme aggiunte.* — Sia C una curva

(1) Le superficie aggiunte si definiscono anche per una F con singolarità qualsiansi, come le superficie alle quali si imponga la molteplicità $s-1$ in ogni punto s-plo di F (immediato o infinitamente vicino).

Si dicono invece superficie *subaggiunte* ad una F con singolarità qualsiansi, le superficie alle quali si imponga di passare $s-1$ volte per ogni linea s-pla di F, immediata o infinitamente vicina (ma non infinitesima). In altri termini le subaggiunte son superficie che segano sui piani *generici* dello spazio curve aggiunte alle sezioni piane di F.

di S_r, con singolarità qualunque. Dicesi *forma aggiunta* a C una ipersuperficie di S_r che abbia, in ogni punto multiplo immediato di C, molteplicità d'intersezione, con i singoli rami della curva uscenti dal punto, uguale a quella che una curva piana aggiunta alla generica proiezione piana C_0 di C, ha con i singoli rami corrispondenti di C_0.

Poggiando su questa definizione, si dimostra (con CASTELNUOVO) che: *se m è l'ordine di C, le forme aggiunte a C, d'ordine $l \geqslant m-2$, segano su C una serie completa non speciale.*

Ove, invece, si consideri C come intersezione di $r-1$ ipersuperficie di S_r, delle quali sia D l'intersezione residua (se esiste), e si definiscano come forme aggiunte a C le ipersuperficie di S_r che soddisfanno all'ulteriore condizione di contenere la curva D, si ha (con SEVERI) che: *le forme d'un ordine qualsivoglia, aggiunte a C* (nella seconda accezione), *segano sulla C una serie completa* (*speciale o no*).

Nel seguito avremo occasione di giovarci di ambedue i risultati ricordati: diamo però qui, soltanto la dimostrazione del primo di essi, rimandando per la dimostrazione del secondo ai lavori originali di SEVERI [1].

Cominciamo con l'osservare che la curva piana C_0, proiezione generica della C di S_r, presenta nei punti multipli corrispondenti ai punti multipli di C la stessa composizione di quest'ultima. Inoltre C_0 avrà alcuni punti nodali $A_1', A_2', \ldots, A_\delta'$, che provengono dalle corde (generiche) di C, $A_1\bar{A}_1$, $A_2\bar{A}_2, \ldots, A_\delta\bar{A}_\delta$, incidenti allo spazio S_{r-3} da cui si proietta. Si tenga poi presente che le curve, d'ordine $l \geqslant m-2$, aggiunte a C_0, segano sulla curva una serie completa non speciale, e che le condizioni di aggiunzione offerte dai punti multipli di C_0 alle curve aggiunte d'ordine $l \geqslant m-3$ sono indipendenti.

Ora, proiettando dall'S_{r-3} le curve d'ordine $l \geqslant m-2$, aggiunte a C_0, si ottengono forme coniche, aggiunte a C (nella prima accezione), passanti per i 2δ punti $A_1, \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_2, \ldots, A_\delta, \bar{A}_\delta$.

Questi coni segano sulla curva C (che sia di genere p), e fuori dei punti fissi, una serie $g^{\mu}_{\mu l - p}$ completa, e non speciale, corrispondente alla serie segnata su C_0 dalle aggiunte d'ordine l. La stessa $g^{\mu}_{\mu l-p}$ vien quindi segata su C da *tutte* le forme d'ordine l aggiunte a C, passanti per i 2δ punti predetti.

[1] Per le citazioni relative, veggansi le notizie bibliografiche alla fine del §.

Se si abbandona la condizione che le forme aggiunte, d'ordine $l \geqslant m-2$, passino per i punti A_1, $\bar{A}_1$, ... , A_δ, $\bar{A}_\delta$, la serie segata sarà una $g_{\mu_l+2\delta}$, non speciale, la quale risulterà altresì completa se i 2δ punti offrono condizioni indipendenti alle forme aggiunte d'ordine l. Di fatto questo è, perchè si costruisce subito una forma aggiunta d'ordine l che contenga $2\delta-1$ qualunque di quei punti A_1, $\bar{A}_1$, ..., $A_{\delta-1}$, $\bar{A}_{\delta-1}$, A_δ, e non il rimanente, $\bar{A}_\delta$. Si consideri all'uopo sul piano di C_0, una curva Γ_0, d'ordine $l-1 \geqslant m-3$, soddisfacente a tutte le condizioni di aggiunzione a C_0, tranne il passaggio per il punto doppio A'_δ: una tal curva esiste certamente (anche se $p=0$) giacchè, come si è ricordato, i punti $A'_1, \ldots, A'_\delta$ forniscono alle curve d'ordine $\geqslant m-3$, aggiunte a C_0, condizioni indipendenti. Allora il cono proiettante Γ_0 dall'S_{r-3}, completato con un iperpiano generico per A_δ, costituisce una forma d'ordine l aggiunta a C, passante per A_1, $\bar{A}_1$, ..., $A_{\delta-1}$, $\bar{A}_{\delta-1}$, A_δ, e non per $\bar{A}_\delta$.

105. *Completezza del sistema lineare segato su una superficie dalle aggiunte.* — Dimostriamo ora che le superficie d'ordine l aggiunte ad una superficie F d'ordine m dello S_3, dotata di singolarità ordinarie, segano su F, fuori della linea doppia D, un sistema lineare completo (1).

Ci serviamo all'uopo del teorema di SEVERI ricordato al n. precedente, e seguiamo un concetto che questo Autore ha introdotto nella geometria sopra una superficie e che apporta notevoli semplificazioni in vari punti essenziali.

Sia Φ una superficie generica d'ordine $\lambda > l$, e ne sia E la curva irriducibile intersezione completa con la superficie F. La E, d'ordine λm, ha λd punti doppi nelle intersezioni della Φ con la linea doppia D, supposta di ordine d. Poichè la E è intersezione completa di F e Φ, le superficie d'ordine l (qualunque) aggiunte ad essa, cioè passanti per i suoi λd punti doppi, segano, pel teorema di SEVERI, una serie completa su E. Ma tali aggiunte, d'ordine l, avendo $\lambda d > l d$ intersezioni con la linea doppia D d'ordine d, la contengono per intero. Sono pertanto aggiunte alla superficie F.

(1) La dimostrazione che segue, può facilmente venire estesa al caso delle aggiunte ad una superficie dotata di singolarità qualunque, ed anche al caso delle subaggiunte (Cfr. nota a pie' di pagina, del n. 103). Si ha pertanto, più in generale, che *è completo il sistema segato su una superficie dalle sue aggiunte o dalle sue subaggiunte.*

Allora il sistema lineare $|C|$ segato da tali aggiunte su F, segna sulla curva E una serie completa; e quindi è anch'esso *completo*, poichè non vi è alcuna curva C che contenga E come parte. Invero la E è d'ordine λm, mentre le C sono d'ordine $lm - 2d < \lambda m$.

106. *Genere geometrico e genere aritmetico di una superficie.* — Al n. 100 abbiamo definito il *genere geometrico* p_g di una superficie, come il numero delle curve canoniche (impure) indipendenti. Ove ci si riferisca ad una superficie F dello spazio ordinario e dotata di singolarità ordinarie, il numero p_g può altresì venire definito come il numero delle superficie d'ordine $m-4$ aggiunte ad F, linearmente indipendenti; perchè, come si è dimostrato, queste aggiunte segano il sistema lineare *completo* $|K|$ (1).

Nasce ora la questione di vedere se sia possibile di calcolare il numero p_g, una volta che sia dato, oltre l'ordine m della superficie F, anche il genere ρ e l'ordine d della curva doppia D di F, nonchè il numero t dei punti doppi triplanari di D. All'uopo occorre determinare il numero delle condizioni lineari indipendenti che la curva D impone alle superficie d'ordine $m-4$ che debbano contenerla.

In generale il numero delle condizioni indipendenti che una curva impone alle superficie d'ordine l che debbano contenerla, si chiama *postulazione* (CAYLEY) della curva rispetto alle superficie d'ordine l. È facile calcolare il valore $\chi(l)$ della postulazione di D, quando l sia abbastanza alto.

A questo scopo, osserviamo che le superficie d'ordine l passanti per la linea D, passano doppiamente per i t punti tripli di D. Ora, la totalità delle superficie d'ordine l che passano doppiamente per i t punti detti, costituisce il sistema lineare completo delle superficie d'ordine l aggiunte a D (nella prima accezione); le quali di fatto, essendo caratterizzate dall'avere molteplicità d'intersezione 2 con ciascuno dei tre rami, a tangenti non complanari, uscenti da ogni punto triplo di D, passan per questo doppiamente. Secondo il risultato del n. 104, se $l \geqslant d-2$, le nominate superficie aggiunte segano su D una serie completa

(1) Tale conclusione vale anche se F ha singolarità qualunque: anche allora cioè p_g uguaglia il numero delle superficie *aggiunte* d'ordine $m-4$; ma in queste Lezioni non possiamo fermarci a dimostrare la conclusione più generale, che, del resto, non useremo.

non speciale, che sarà pertanto una $g^{ld-6t-\rho}_{ld-6t}$. Ne segue che occorrono $ld - 6t - \rho + 1$ condizioni lineari indipendenti affinchè le superficie d'ordine l, passanti per i t punti tripli di D, contengano la D. Ora, il numero delle condizioni indipendenti che occorre imporre ad una superficie d'ordine l, affinchè passi doppiamente pei t punti tripli è $\leqslant 4t$; e certamente uguale a $4t$ per l abbastanza alto (1). In definitiva, da un certo valore λ di l in poi, la postulazione $\chi(l)$ della curva D rispetto alle superficie d'ordine l, vale:

$$\chi(l) = 4t + ld - 6t - \rho + 1 = ld - 2t - \rho + 1 . \tag{12}$$

In conseguenza il numero delle superficie aggiunte ad F, d'ordine $l \geqslant \lambda$, e linearmente indipendenti, vale:

$$\binom{l+2}{3} - \chi(l) = \binom{l+3}{3} - ld + 2t + \rho - 1 .$$

Ciò posto se la formula di postulazione vale per $l = m - 4$, si ottiene pel genere geometrico di F, il valore:

$$\binom{m-1}{3} - (m-4)\,d + 2t + \rho - 1 .$$

Ma nulla assicura a priori che la formula di postulazione valga per $l = m - 4$. Invero, per l qualunque ($< \lambda$), si può dire soltanto che la postulazione effettiva $\overline{\chi}(l)$ della D vale:

$$\overline{\chi}(l) = 4t - \varepsilon_l + ld - 6t - \rho + i_l - \delta_l + 1 ,$$

ritenendosi che l'imposizione dei punti tripli di D come doppi, per le superficie d'ordine l, equivalga soltanto a $4t - \varepsilon_l$ ($\varepsilon_l \geqslant 0$) condizioni indipendenti, e che la serie segata su D dalle superficie aggiunte a D d'ordine l possieda un indice di specialità i_l ($\geqslant 0$), ed una deficienza δ_l ($\geqslant 0$) . Si ha cioè

$$\overline{\chi}(l) = \chi(l) - \varepsilon_l + i_l - \delta_l ,$$

e finchè nulla si sappia sul segno dell'espressione $-\varepsilon_l + i_l - \delta_l$, non si può asserire che $\overline{\chi}(l)$ sia $\gtrless$ di $\chi(l)$.

(1) Non appena sia, p. es, $l \geq 2t$, queste $4t$ condizioni sono certamente indipendenti Infatti, basta considerare una superficie spezzata in t coni del secondo ordine coi vertici nei t punti tripli di D, e in una residua parte di ordine $l - 2t$, per persuadersi che l'imposizione come doppi di $t - 1$ qualunque dei t punti tripli, non può portare alcuna influenza sul passaggio della superficie pel rimanente punto.

Il valore di p_g è dunque

$$(13) \qquad p_g = \binom{m-1}{3} - \bar{\chi}\,(m-4),$$

mentre l'espressione già scritta

$$(14) \quad p_a = \binom{m-1}{3} - \chi\,(m-4) = \binom{m-1}{3} - (m-4)\,d + 2t + \rho - 1,$$

dicesi *genere aritmetico* p_a della superficie.

Dimostriamo che *sussiste sempre la disuguaglianza* $p_g \geqslant p_a$.

Bisogna provare che $\bar{\chi}\,(m-4) \leq \chi\,(m-4)$. A questo scopo cominciamo col ricordare che, per l abbastanza grande, $\geqslant \lambda$, vale l'uguaglianza $\bar{\chi}\,(l) = \chi\,(l)$, e che pertanto la dimensione R_l del sistema lineare delle superficie d'ordine l aggiunte ad F, è

$$(15) \qquad R_l = \binom{l+3}{3} - 1 - \chi\,(l).$$

Quale sarà la dimensione R_{l-1}, relativa alle superficie aggiunte d'ordine $l-1$? Se r_l è la dimensione del sistema lineare segato su un piano generico π dello spazio dalle aggiunte d'ordine l, le condizioni (semplici) perchè tali aggiunte si spezzino nel piano π e in una residua superficie aggiunta d'ordine $l-1$, sono in numero di $r_l + 1$; si deduce che la dimensione desiderata è

$$(16) \qquad R_{l-1} = R_l - r_l - 1.$$

D'altra parte la dimensione r_l si calcola facilmente osservando che si tratta di un sistema lineare (eventualmente incompleto) di curve d'ordine l aggiunte alla sezione piana di F con π. Pertanto, se s'indica con δ_l la deficienza del sistema, e si tien conto del fatto che i d punti doppi della sezione piana presentano condizioni indipendenti alle curve aggiunte d'ordine l, quando sia, come supponiamo, $l \geqslant m-3$, si ottiene

$$(17) \qquad r_l = \binom{l+2}{2} - 1 - d - \delta_l.$$

Viene quindi dalle (15), (16), (17),

$$R_{l-1} = \binom{l+2}{3} - 1 - \chi\,(l) + d + \delta_l,$$

e poichè dalla (12) si ha

$$\chi\,(l) - d = \chi\,(l-1),$$

risulta

$$R_{l-1} = \binom{l+2}{3} - 1 - \chi(l-1) + \delta_l .$$

Con analogo ragionamento, si ha

$$R_{l-2} = R_{l-1} - r_{l-1} - 1 ,$$

e quindi, se anche $l - 1 \geqslant m - 3$,

$$R_{l-2} = \binom{l+1}{3} - 1 - \chi(l-2) + \delta_l + \delta_{l-1} .$$

Così continuando si può scendere fino a considerare le superficie aggiunte d'ordine $m - 4$, e si ottiene:

$$R_{m-4} = \binom{m-1}{3} - 1 - \chi(m-4) + \delta_l + \delta_{l-1} + \ldots + \delta_{m-3} .$$

Ora, ricordando la definizione di p_g e di p_a, risulta

$$p_g = p_p + \sum_{j=m-3}^{l} \delta_j ,$$

cioè

$$p_g - p_a = \sum_{j=m-3}^{l} \delta_j \geqslant 0 . \tag{18}$$

La differenza $p_g - p_a$ dicesi *irregolarità* della superficie F. Le superficie per le quali è $p_g - p_a = 0$, sono le *superficie regolari*.

È facile riconoscere che δ_l, deficienza del sistema lineare segato su π, dalle aggiunte d'ordine l ad F, uguaglia la deficienza della serie lineare segata sulla sezione C di F con quel piano dalle suddette aggiunte, fuori dei punti doppi; cioè della serie lineare segata su C dal sistema lineare completo $|C' + (l - m + 3)C|$.

Invero, siccome la superficie F insieme ad una superficie *arbitraria* d'ordine $l - m$ dello spazio, dà un'aggiunta d'ordine l ad F, così le superficie d'ordine l aggiunte ad F e passanti per C, segano altrove su π il sistema completo di tutte le curve piane d'ordine $l - m$. Pertanto la dimensione della serie segata da $|C' + (l - m + 3)C|$ su C, è data da

$$r_l - \binom{l-m+2}{2} ,$$

e la dimensione della serie *completa*, segata su C dalle aggiunte d'ordine l, è espressa da

$$r_l + \delta_l - \binom{l-m+2}{2};$$

il che significa che la prima di tali serie ha la deficienza δ_l.

Vale dunque il teorema:

Se a modello d'una classe di superficie birazionalmente equivalenti si assume una superficie F, d'ordine m, dello S_3, dotata di singolarità ordinarie, l'irregolarità di F uguaglia la somma delle deficienze delle serie segate sopra una generica sezione piana C dai sistemi lineari completi $|C'|$, $|C + C'|$, $|2C + C'|$, ...

Ciò prova anche, naturalmente, che, per k abbastanza grande, $|kC + C'|$ sega su C una serie completa (non speciale).

Il genere aritmetico e l'irregolarità di F vengono così introdotti dal punto di vista proiettivo: non apparisce dunque finora che essi siano invarianti per trasformazioni birazionali, come in seguito dimostreremo.

Vedremo altresì come il teorema ultimamente enunciato si trasporti nel campo invariantivo e come possa anzi, con PICARD-SEVERI, dimostrarsi un teorema ben più preciso. Infine, vedremo a suo tempo altri significati altrettanto importanti di $p_g - p_a$.

107. *Serie canonica d'equivalenza di un sistema lineare.* — Abbiamo dimostrato nel n. 101, che su una superficie F di S_r, priva di singolarità, *il sistema aggiunto ad una curva di F variabile in un sistema lineare generale, sega sulla curva gruppi canonici.* Qui vogliamo stabilire che *la proprietà val sempre per una curva E irriducibile priva di punti multipli, senza che occorra che la curva sia variabile in un sistema generale.*

Premettiamo all'uopo il seguente *lemma*:

Se E è una curva (anche riducibile e dotata di singolarità qualunque) tracciata sopra la superficie F, di S_r, considerato un ordine l tale che esistano in S_r forme passanti per E, ma non per F, e designato con $|C|$ il sistema lineare staccato su F dalle forme d'ordine l e con $|N|$ il sistema $|C - E|$, per l abbassanza alto $|C|$, $|N|$ son sistemi lineari generali.

Invero, il sistema $|C|$ è senz'altro privo di punti base, privo di curve fondamentali e semplice. Sia ρ la sua dimensione. Proviamo ch'esso non contiene $\infty^{\rho-1}$ curve spezzate. Invero, fatta l'imagine di $|C|$, proiettiamo la superficie F', birazionalmente equivalente ad F (sulla quale $|C|$ è segato dagli iperpiani del proprio

spazio S_ρ) da un $S_{\rho-4}$ generico sopra un S_3. Se F' possedesse $\infty^{\rho-1}$ sezioni iperpiane spezzate, la superficie proiezione possiederebbe ∞^2 sezioni piane riducibili e quindi sarebbe una rigata o la superficie di STEINER. Ma allora F' sarebbe essa stessa rigata oppure una superficie di VERONESE od una proiezione di questa; ed in tale eventualità il suo ordine varrebbe 4. Quest'ultima eventualità resta dunque senz'altro esclusa appena sia $l > 2$, perchè l'ordine di F' è $l^2 m$ (m essendo l'ordine di F). Anche la prima eventualità si esclude per $l \geqslant 2$. Infatti, qualora F' fosse rigata, al fascio delle sue generatrici corrisponderebbe su F un fascio di curve razionali L unisecanti le curve C. Ma ciò è assurdo, perchè, se λ è l'ordine delle curve L, le C segano le L in λl punti e questo numero è certo > 1 non appena $l > 1$.

Passiamo al sistema $|N|$ e supponiamo $l \geqslant \mu$ (μ ordine di E). Il sistema $|N|$ è allora certamente privo di punti base, perchè il sistema (non lineare, ma razionale) delle curve ulteriori sezioni di F coi coni che proiettano E dagli S_{r-3} di S_r non ha punti base (neanche su E [1]).

Se $l \geqslant \mu + 1$, il sistema $|N|$ non può neppure essere composto, in quanto somma di un sistema senza punti base e di un sistema semplice (segato su F da tutte le forme d'ordine $l - \mu$) [2].

Proviamo di più che, se σ è la dimensione di $|N|$, il sistema, quando $l \geqslant \mu + 2$, non può contenere $\infty^{\sigma-1}$ curve spezzate. Fatta l'imagine proiettiva di $|N|$ se ne trae (come sopra) che perchè $|N|$ contenesse $\infty^{\sigma-1}$ curve spezzate occorrerebbe che il suo grado fosse 4 (cosa da escludersi, perchè per $l \geqslant \mu + 2$, il grado di $|N|$ è > 4) o ch'esso possedesse un fascio di curve L razionali,

(1) Lo si riconosce subito osservando che la molteplicità d'intersezione in un punto P qualunque di E colla sezione iperpiana D praticata su F con un iperpiano generico per P, è uguale alla molteplicità d'intersezione in P della curva D col cono che proietta E da un generico S_{r-3}.

(2) Aggiungiamo, pel lettore meno esperto, la dimostrazione di quest'asserzione. Sia $|N_0|$ il sistema $|N|$ per $l = \mu$ ed $|N_l| = |N_0 + (l-\mu) D|$ (D sezione iperpiana di F) il sistema $|N|$ per l qualsiasi ($> \mu$). Presi due punti qualunque P, Q di F, si assuma una N_0 non passante nè per P nè per Q (cosa possibile, perchè N_0 non ha punti base) e una $(l-\mu) D$ passante per P e non per Q (cosa possibile, perchè $|(l-\mu) D|$ è semplice). La somma delle due curve scelte dà una N passante per P e non per Q. Dunque $|N_l|$ è semplice.

Si osservi inoltre che, sempre nell'ipotesi $l \geqslant \mu + 1$, il sistema $|N|$ è privo di curve fondamentali. Invero, come multiplo del sistema delle sezioni iperpiane di F, il sistema $|(l-\mu) D|$ incontra in punti variabili *ogni* curva di F: di questa stessa proprietà gode dunque il sistema $|N_l| = |N_0 + (l-\mu) D|$.

unisecanti. Anche questo è assurdo, perchè, detto λ l'ordine delle L, le N segano le L per lo meno in tanti punti quanti sono quelli in cui le L sono segate da una forma d'ordine $l - \mu \geqslant 2$, cioè almeno in 2λ punti.

Stabilito il lemma, ritorniamo alla ipotesi che E sia irriducibile e senza punti multipli. Fissiamo un fascio H estratto dal sistema lineare $|C|$, ed individuato da una curva $E + N$ e da una curva irriducibile generica C di $|C|$. Il fascio H possiede soltanto punti base semplici ordinari che cadono nel gruppo $(C, N) + + (C, E)$; e, si osservi, la curva $E + N$ ha i punti del gruppo (E, N) come nodi.

Sia inoltre L un fascio generale di curve D della superficie, situato in posizione generica rispetto al fascio H; T sia la curva dei contatti dei due fasci H, L.

Determiniamo le intersezioni della curva T con la curva E. Tenuto conto di proprietà precedentemente osservate per la curva dei contatti di due fasci (n. 100), si ha su F l'equivalenza:

$$(19) \qquad (T, E) \equiv (C, E) + (N, E) + 2(D, E) + M(E);$$

giacchè (C, E) è il gruppo dei punti base del fascio H che cadono sopra E; (N, E) è il gruppo dei punti doppi della curva spezzata $E + N$ (E non possiede punti doppi, per ipotesi); infine $2(D, E) + M(E)$ è equivalente al gruppo jacobiano della serie segata dal fascio L sulla curva E.

D'altronde si ha anche su D l'equivalenza:

$$(T, D) \equiv (D, D) + 2(C, D) + M(D),$$

ovvero, essendo $M(D) \equiv (D, D')$,

$$(T, D) \equiv (D, D) + 2(C, D) + (D, D').$$

Quindi, dato che il fascio L è generale, dal I criterio d'equivalenza (n. 98), si deduce la relazione d'equivalenza fra curve:

$$T \equiv D + D' + 2C.$$

E poichè, pel teorema fondamentale dell'aggiunzione (n. 101), è $D + C' \equiv D' + C$, si ha anche:

$$T \equiv C + C' + 2D. \text{ (1)}$$

(1) Questa relazione, benchè analoga a quella precedentemente scritta ($T \equiv D + D' + 2C$), non poteva similmente dedursi, giacchè non sarebbe

Finalmente, essendo $C \equiv E + N$, si ha altresì $C' \equiv E' + N$; e quindi

$$T \equiv C + E' + N + 2D .$$

Allora, segando con la curva E, si ottiene l'equivalenza fra gruppi di punti di E:

$$(T , E) \equiv (C , E) + (N , E) + 2 (D , E) + (E' , E) ,$$

che, confrontata con la (19), fornisce

$$M (E) \equiv (E' , E) ,$$

come volevamo dimostrare.

Ciò premesso sia $|C|$ un sistema lineare completo di curve (irriducibili o riducibili) della superficie F, privo di punti multipli assegnati. Definito (come al n. 101) il sistema aggiunto a $|C|$, mediante la relazione $|C'| = |C + K|$, si consideri la serie d'equivalenza elementare intersezione dei sistemi lineari $|C|$ e $|C'|$. Tale serie si chiama *serie canonica d'equivalenza del sistema* $|C|$. Nel caso che il sistema completo $|C|$ sia ∞^0, cioè si riduca ad una sola curva C, la serie canonica d'equivalenza si riduce ad una serie d'equivalenza curvilinea sopra la curva irriducibile o riducibile C.

Questa definizione è giustificata dal fatto che, in base al teorema precedente, il sistema $|C'|$ sega sopra la curva generica del sistema $|C|$ gruppi canonici, se $|C|$ è irriducibile e la sua curva generica è effettivamente priva di punti multipli.

Giova tuttavia osservare che la serie segata dal sistema $|C'|$ sulla curva generica C, può non essere la serie canonica *completa*. Questa circostanza può di fatto accadere sopra una superficie irregolare. Ma dimostreremo più avanti che, considerando sopra ogni C la serie canonica completa, si ottiene una totalità di gruppi di punti, la quale costituisce ancora una serie d'equivalenza.

Consideriamo ora un sistema lineare $|C|$ individuato da una curva C spezzata in due componenti (irriducibili o riducibili),

stato possibile usufruire del criterio d'equivalenza in relazione alle curve del fascio H, che contiene la curva spezzata $E + N$, almeno se il criterio si vuol applicare nel suo aspetto letterale, non tenendo conto che in sostanza (come risulta dalla sua stessa dimostrazione) quel che occorre per la sua validità è che non esistano nel fascio parti di curve che non abbiano intersezioni colla generica sua curva.

$C_1 + C_2$, e vediamo che relazione passi tra la serie canonica d'equivalenza del sistema $|C_1 + C_2|$ e le serie canoniche d'equivalenza dei sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$.

Si ha, nell'ambito delle serie d'equivalenza superficiali, tenuto conto del n. 101,

$$\begin{aligned} ((C_1 + C_2)', (C_1 + C_2)) &\equiv ((C_1 + C_2)', C_1) + ((C_1 + C_2)', C_2) \\ &\equiv (C_1' + C_2, C_1) + (C_1 + C_2', C_2) \\ &\equiv (C_1', C_1) + (C_2', C_2) + 2(C_1, C_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Donde il teorema:

La serie canonica d'equivalenza del sistema lineare somma di due sistemi lineari, è la somma delle serie canoniche d'equivalenza relative ai sistemi lineari componenti, e del doppio della serie d'intersezione dei due sistemi.

Una prima conseguenza notevole della relazione (20) è che *la serie canonica d'equivalenza di un qualunque sistema lineare* $|C_1|$ (*irriducibile o riducibile*) *è di ordine pari.*

Scelgasi invero $|C_2|$, irriducibile e senza punti base (e quindi colla curva generica priva di punti multipli), in guisa che $|C_1 + C_2|$ sia pure irriducibile e senza punti base. Allora, in virtù di quanto precede, sono pari i numeri $[(C_1 + C_2)', (C_1 + C_2)]$, $[C_2', C_2]$, $2[C_1, C_2]$ e quindi anche il numero $[C_1', C_1]$. Posto $[C_1', C_1] = 2p_1 - 2$, l'intero p_1 che ne risulta si chiama *genere virtuale di ogni curva* C_1 *su* F.

Supposto che C_1, C_2 sieno curve irriducibili senza punti multipli di generi (virtuali = effettivi) p_1, p_2, denotiamo con i il numero dei punti d'intersezione di C_1 e C_2 (valutato colle rispettive molteplicità d'intersezione) e con p il genere virtuale di $C_1 + C_2$. La relazione d'equivalenza (20) ci porge l'uguaglianza numerativa:

$$2p - 2 = 2p_1 - 2 + 2p_2 - 2 + 2i.$$

Se la curva $C_1 + C_2$ individua un sistema lineare irriducibile senza punti base, il numero p sarà anche il genere effettivo della curva generica del sistema (la quale non ha punti multipli). Dopo ciò, l'uguaglianza precedente dà luogo alla formula di NOETHER (cfr. n. 95):

$$p = p_1 + p_2 + i - 1, \tag{21}$$

di cui la (20) può considerarsi come l'interpretazione funzionale.

Osservazione 1ª. — Il teorema sopra dimostrato, circa il modo di comporre la serie canonica d'equivalenza della somma $|C_1 + C_2|$, mediante le serie canoniche d'equivalenza di $|C_1|, |C_2|$, lumeggia un aspetto delicato della definizione generale di serie d'equivalenza superficiale (n. 29). La relazione d'equivalenza non si deve cioè intendere nel senso che la serie intersezione dei sistemi $|(C_1 + C_2)'|$ e $|C_1 + C_2|$ coincida colla serie somma delle serie intersezione $|(C_1', C_1)|$, $|(C_2', C_2)|$, $|2(C_1, C_2)|$, ma nel senso che la prima serie e la seconda fanno parte di un'unica totalità algebrica (riducibile, ma connessa) di gruppi di punti, ottenibili per somma e sottrazione da un numero finito di serie di intersezione.

Osservazione 2ª. — Il procedimento seguito ci mostra che la formula (21) vale anche se C, C_1, C_2 son curve riducibili o comunque dotate di punti multipli. Allora p, p_1, p_2 son i generi *virtuali* di queste curve ed i è il numero virtuale $[C_1, C_2]$ (n. 10).

Gli sviluppi relativi alla serie canonica d'equivalenza compariscono qui per la prima volta. Alla formula (21) relativa a C, C_1, C_2 irriducibili e prive di punti multipli, si perviene anche facilmente con considerazioni topologiche. Precisamente, quando una curva di genere p tende con continuità a spezzarsi in due componenti di genere p_1 e p_2, sorge al limite un certo numero i di punti di connessione ; e si ha appunto la relazione $p = p_1 + p_2 + i - 1$. Da questo punto di vista la formula (21), che già si incontra in NOETHER, « Acta Mathematica », t. VIII, (1886), si trova al n. 17 dell'*Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche*, « Memorie della Società dei XL », (1896), di ENRIQUES. Essa venne ridimostrata da E. PICARD (cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. II, pag. 106). SEVERI ne dà una rapida dimostrazione a pie' della pag. 831 della Nota : *Uno sguardo d'insieme alla geometria sopra una superficie algebrica*, « Atti del R. Istituto Veneto », (1909). Cfr. anche ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni ecc.*, vol. III, pag. 399, ed ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*, pag. 60.

108. *Serie caratteristica d'equivalenza.* — Se $|C|$ è un sistema lineare, dicesi *serie caratteristica d'equivalenza* la serie d'intersezione del sistema $|C|$ con se stesso.

Analogamente a quanto si è detto per la serie canonica d'equivalenza (n. 107), anche qui può accadere (sopra una superficie irregolare) che la serie caratteristica d'equivalenza non abbracci la totalità delle serie caratteristiche completate su ciascuna curva C, ancorchè il sistema $|C|$ sia completo. Questa totalità è però sempre una serie d'equivalenza, come si mostrerà più tardi.

Vediamo ora, anche in questo caso, quale relazione passi

tra le serie caratteristiche d'equivalenza di due sistemi lineari $|C_1|$ e $|C_2|$, e la serie caratteristica d'equivalenza del sistema somma $|C_1 + C_2|$. Si ha immediatamente la relazione di equivalenza superficiale:

$$(22) \quad (C_1 + C_2, C_1 + C_2) \equiv (C_1, C_1) + (C_2, C_2) + 2(C_1, C_2).$$

Donde il teorema (che va interpretato come già si è detto nell'Oss. 1ª del n. prec.):

La serie caratteristica d'equivalenza di un sistema lineare somma di due altri, è la somma delle serie caratteristiche d'equivalenza dei due sistemi, aumentata del doppio della serie di intersezione.

La relazione (22), dal punto di vista numerativo, fornisce la nota uguaglianza:

$$n = n_1 + n_2 + 2i,$$

dove n, n_1, n_2 sono rispettivamente gli ordini delle serie caratteristiche dei sistemi $|C_1 + C_2|, |C_1|, |C_2|$, ed i è il numero dei punti comuni alle curve di $|C_1|$ e $|C_2|$.

Osservazione. — Con l'introduzione della serie canonica di equivalenza e della serie caratteristica d'equivalenza, si può esprimere come una relazione funzionale tra serie d'equivalenza la proprietà che le curve canoniche segano sulle curve di un sistema $|C|$ una serie, d'ordine $2p - 2 - n$, residua della serie caratteristica rispetto alla serie canonica.

Invero, essendo $|C'| = |C + K|$, si ha

$$(C', C) \equiv (C, C) + (K, C),$$

ossia

$$(23) \qquad (K, C) \equiv (C', C) - (C, C),$$

per guisa che la serie d'intersezione di $|C|$ e $|K|$ appare come differenza delle serie d'equivalenza canonica e caratteristica. La (23), interpretata sopra una curva C, si riduce alla proprietà nota.

Gli sviluppi sulla serie caratteristica d'equivalenza compariscono qui per la prima volta.

109. *Richiami sulle curve eccezionali di una superficie. Sistemi lineari con punti basi assegnati o virtualmente inesistenti.* — Nella corrispondenza birazionale tra due curve, non si presentano ec-

cezioni alla biunivocità della corrispondenza all'infuori che nei punti multipli delle due curve. Ed anzi, anche in tali punti, la corrispondenza può concepirsi biunivoca, pur di pensare un punto multiplo come sovrapposizione di tanti punti semplici quanti sono i rami che escono dal punto multiplo.

Invece, nella corrispondenza birazionale tra due superficie (come si è già più volte fugacemente accennato), si possono presentare eccezioni per il fatto che un punto multiplo di una superficie si trasformi in un numero finito di punti dell'altra superficie, ovvero per il fatto che un punto semplice o multiplo si muti in una linea. Poichè nel seguito ci riferiremo sempre (come è lecito, n. 5) a superficie prive di punti multipli, la prima eventualità resta esclusa, e possiamo limitarci a considerare le eccezioni alla corrispondenza birazionale tra due superficie F, F_1, che si hanno allorché un punto semplice P di F si muti in una curva P_1 di F_1, i cui punti provengano dai punti dell'intorno di P. Il punto P di F si dice *fondamentale* per la corrispondenza, e la curva P_1 di F_1 *curva eccezionale.*

Quando il punto P di F si muta nella curva eccezionale P_1 di F_1, di regola non vi è alcuna curva di F passante per P, la quale si muti in un punto di P_1 su F_1. In questo caso la curva P_1 dicesi eccezionale di *1ª specie.* Nell'altra eventualità, P_1 si dice eccezionale di *2ª specie.*

Facciamo qualche esempio. Quando si proietta una superficie F di S_r ($r \geqslant 4$), da un suo punto P sopra un iperpiano, in una superficie F_1, il punto P si trasforma in una retta P_1 di F_1, traccia sull'iperpiano del piano tangente ad F in P. Se la superficie F non è rigata, la retta P_1 è eccezionale di 1ª specie. Se invece la F è rigata, la generatrice di F passante per P si muta in un punto di P_1, e pertanto P_1 è eccezionale di 2ª specie.

Può anche avvenire che un punto P si trasformi in una curva eccezionale riducibile. Per esempio, si parta da una superficie F di S_r, e si consideri su di essa il sistema lineare segato dalle quadriche di S_r che passano per un punto fisso P di F. L'imagine proiettiva F_1 del sistema lineare (n. 16) è in corrispondenza birazionale con F, ed al punto P corrisponde una retta eccezionale P_1 di F_1. Si passi similmente dalla F_1 ad una superficie F_2 birazionalmente equivalente ad F_1, imagine proiettiva del sistema lineare segato su F_1 dalle quadriche del suo ambiente che passano per un punto Q_1 della retta P_1. Sulla F_2 la retta P_1 si muta in una retta P_2, ed il punto Q_1 si muta in una retta Q_2 incidente alla P_2. In definitiva, nella corrispondenza birazionale che intercede tra

F ed F_2, il punto P si muta nella curva eccezionale spezzata ma connessa $P_2 + Q_2$. Questa circostanza può apparire paradossale qualora si pensi che l'intorno del punto P su F è irriducibile. Di fatto però, la curva $P_2 + Q_2$ proviene dall'intorno di 1° ordine di P, quanto alla componente P_2, mentre la componente Q_2 proviene dall'intorno di 2° ordine di P relativo ad una determinata direzione dell'intorno di 1° ordine (precisamente a quella che si trasforma nel punto Q_1 sulla P_1 di F_1).

Più in generale, si può avere su una superficie F una curva eccezionale spezzata in più componenti irriducibili fra loro connesse, che provengono da successivi intorni di un medesimo punto di F.

Quando si considera una trasformazione birazionale τ tra due superficie F, F_1, la quale presenti una curva eccezionale P_1 di F_1 proveniente dal punto fondamentale P di F, la trasformata di una curva irriducibile C di F, passante per P, si può considerare in due modi, in relazione alla trasformazione τ. In primo luogo si può pensare alla trasformata della C *considerata in sè*, cioè alla curva irriducibile C_1^* di F_1 che si ottiene applicando la trasformazione τ limitatamente ai punti di C. In secondo luogo si può pensare alla trasformata della C *considerata come appartenente alla superficie*, riguardando cioè la τ come agente sui punti di F. È chiaro che la trasformata C_1, che così s'ottiene, consta allora della curva C_1^* cui si aggiunge la curva eccezionale P_1 trasformata dell'intorno del punto P di C.

Consideriamo ora su F un sistema lineare $|C|$, completo e privo di punti base ; e sia $|C_1|$ il sistema lineare trasformato sulla superficie F_1.

La curva eccezionale P_1 risulta fondamentale (n. 97) per il il sistema $|C_1|$, giacchè la curva generica di $|C|$ non passa per P. Se allora indichiamo con $|\overline{C}|$ il sistema subordinato a $|C|$, che si ottiene imponendo alle sue curve il passaggio per il punto P, vediamo che a $|\overline{C}|$ corrisponde su F_1 il sistema lineare $|\overline{C}_1|$ costituito dalle curve di $|C_1|$ che contengono un punto di P_1, e che quindi sono spezzate nella componente fissa P_1 e in una componente residua. In sostanza la componente fissa P_1 comune alle curve del sistema $|\overline{C}_1|$, ha origine pel fatto che, quando una curva C si avvicina al punto fondamentale P variando entro il sistema $|C|$, vi sono punti di C che tendono alla posizione limite P secondo tutte le direzioni uscenti da P : a questi punti corrispondono pertanto su F_1 i punti della curva eccezionale P_1.

Le considerazioni che precedono conducono a chiarire le nozioni di *punti base assegnati* e di *punti base virtualmente inesi-*

stenti per un sistema lineare, cui abbiamo già accennato precedentemente (n. 101).

Il sistema $|\overline{C}|$ può essere considerato in due modi diversi, a seconda che il punto base P si consideri assegnato o virtualmente inesistente. Nel primo caso si prenderà come trasformato di $|\overline{C}|$ il sistema $|\overline{C}_1^*|$ che si ottiene dal sistema $|\overline{C}_1|$ prescindendo dalla componente fissa P_1. Nel secondo caso si prenderà invece come trasformato il sistema $|\overline{C}_1|$.

Questa convenzione si giustifica osservando che, quando sia rispettata, si può dare un senso invariante al concetto di sistema lineare completo. Difatti, nel primo caso il sistema lineare $|\overline{C}|$ deve considerarsi completo rispetto al punto base assegnato P: ed esso si muta sulla F_1 in un sistema non ulteriormente ampliabile, soltanto quando si consideri come corrispondente il sistema $|\overline{C}_1^*|$ e non il sistema $|\overline{C}_1|$.

Se invece il sistema $|\overline{C}|$ si considera col punto base P virtualmente inesistente, ciò significa che il sistema $|\overline{C}|$ non è da riguardarsi completo, ma immerso nel sistema completo più ampio $|C|$. È evidente allora che sulla F_1 si deve considerare come corrispondente di $|\overline{C}|$ il sistema $|\overline{C}_1|$, le cui curve sono contenute *totalmente* nel sistema completo $|C_1|$.

Giova osservare che si può parlare di punto base P virtualmente inesistente di un sistema lineare, completo rispetto a certi punti base assegnati, anche quando non esistano curve del sistema che non passano per P; quando cioè il passaggio per il punto P sia già *conseguenza* delle condizioni *assegnate* al sistema. Anche in questo caso si riterrà come trasformato del sistema su F_1, il sistema riducibile, che ha come parte fissa la curva eccezionale P_1. Per guisa che un sistema lineare completo con un punto base virtualmente inesistente, che risulti un punto base effettivo, deve considerarsi come un sistema *riducibile*.

In quanto precede ci siamo riferiti al caso di un solo punto base semplice, ma è ormai facile l'estensione al caso di più punti base semplici o multipli.

Sia dato un sistema lineare, il cui gruppo base sia costituito dai punti $P^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, con le molteplicità effettive s_i. Se i punti base $P^{(i)}$ si considerano come *assegnati* con le molteplicità s_i' $(0 \leqslant s_i' \leqslant s_i)$, e per la rimanente molteplicità $s_i - s_i'$ come *virtualmente inesistenti*, il sistema lineare trasformato, qualora i punti $P^{(i)}$ siano fondamentali per la trasformazione, possiederà come parti fisse le corrispondenti curve eccezionali contate $s_i - s_i'$ volte.

Passiamo ora a determinare il *grado virtuale* di una curva

eccezionale P_1, cioè il numero virtuale delle intersezioni della curva P_1 con se stessa (n. 10). A tal fine, si consideri su F_1 il sistema lineare $|\bar{C}_1^*|$, di cui sopra; ed il sistema lineare $|C_1|$, che è somma della curva P_1 col sistema $|\bar{C}_1^*|$. Il numero desiderato è, in base alle note definizioni (n. 10),

$$[P_1, P_1] = [C_1, P_1] - [\bar{C}_1^*, P_1].$$

Ora, $[C_1, P_1] = 0$, perché, sulla superficie F, la curva generica di $|C|$ non passa per P; e $[\bar{C}_1^*, P_1] = 1$, perchè, sempre su F, la curva generica di $|\bar{C}|$ passa semplicemente per P. Segue che $[P_1, P_1] = -1$; cioè che *il grado virtuale di una curva eccezionale vale* -1.

Determiniamo quale è il genere di una curva eccezionale P_1. Se si riflette che P_1 (limitandosi per semplicità al caso in cui sia irriducibile) può considerarsi come trasformata birazionale dell'intorno di 1° ordine del punto semplice P di F, si ha senz'altro che il genere (effettivo = virtuale) di P_1 è zero. D'altronde si può ritrovare il risultato anche così. Osserviamo in primo luogo che il sistema lineare individuato da P_1 sulla superficie F_1, si riduce alla curva stessa, per il fatto che, come si è visto, il grado virtuale di P_1 è negativo. Allora, si indichi con p il genere della curva generica del sistema lineare $|\bar{C}_1^*|$, e con x quello della curva P_1. Applicando la formula (21) del n. 107, e tenendo conto che le curve del sistema $|\bar{C}_1^*|$ incontrano in un sol punto la curva eccezionale P_1, si ha pel genere della curva generica del sistema lineare $|C_1|$, somma di P_1 e di $|\bar{C}_1^*|$, il valore:

$$p + x + 1 - 1.$$

Ma il genere della curva generica di $|C_1|$ vale anch'esso p, perchè, sopra la superficie F, le curve del sistema $|\bar{C}|$, che si ottiene dal sistema $|C|$ con l'imposizione del punto *semplice* P, hanno lo stesso genere delle curve di $|C|$. Pertanto risulta $x = 0$. Dunque *il genere (virtuale) di una curva eccezionale vale zero.*

Come si vede, non possono fungere da curve eccezionali curve qualunque di una superficie; anzi, diciamo come notizia, che le due proprietà dimostrate riguardanti il grado e il genere delle curve eccezionali di 1ª specie, bastano a caratterizzarle.

Diciamo ancora che, per le curve eccezionali di 1ª e di 2ª specie sussistono i due seguenti teoremi fondamentali:

a) Le curve eccezionali di 2ª specie si presentano soltanto sulle superficie razionali o riferibili a rigata.

b) Sopra una superficie priva di curve eccezionali di 2ª specie, vi può essere al più un numero finito di curve eccezionali di 1ª specie, che possono tutte contemporaneamente mutarsi in punti mediante una conveniente trasformazione birazionale, senza che si generino nuove curve eccezionali.

Dai teoremi *a*), *b*) risulta che, nello studio di una superficie che non sia razionale o riferibile a rigata, è sempre lecito riferirsi ad un *modello privo di curve eccezionali.*

Le curve eccezionali sono state incontrate la prima volta da NOETHER (1875), e studiate successivamente da ENRIQUES, il quale ha anche stabilito, in casi abbastanza generali, la possibilità di eliminarle (1893, 1896). Ma i teoremi generali *a*), *b*) sopra ricordati, si trovano in CASTELNUOVO-ENRIQUES (*Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, « Annali di Matematica », serie 3ª, t. VI, 1901). Il concetto di *molteplicità virtuali* di un sistema lineare di curve è stato introdotto per le curve piane da JUNG (1887) e CASTELNUOVO (1891) e per le curve d'una superficie da ENRIQUES (1896). Qui il concetto viene più completamente e chiaramente analizzato (ved. anche il n. 112).

110. *Comportamento del sistema canonico e del sistema aggiunto di fronte alle trasformazioni birazionali.* — Al n. 100 abbiamo definito il sistema canonico impuro $|K| = |T - 2(C + D)|$ a partire da due fasci $|C|, |D|$, dati sopra una superficie F priva di punti multipli. Risulta senz'altro che il sistema canonico impuro è invariante quando si passa dalla superficie F ad una superficie F_1 (priva di punti multipli) in corrispondenza birazionale *senza eccezioni.* Ci proponiamo ora di esaminare il comportamento del sistema canonico impuro quando si presentino eccezioni nella corrispondenza tra F ed F_1.

A tal uopo supponiamo che un punto P di F si muti in una curva eccezionale (di 1ª specie) P_1 di F_1. Su F prendiamo come fasci per definire il sistema canonico impuro, un fascio generale $|C|$, che abbia un punto base semplice ordinario in P, ed un fascio generale $|D|$, in posizione generica rispetto al fascio $|C|$. Poichè nella costruzione del sistema canonico impuro $|T - 2(C + D)|$, i sistemi lineari che si considerano sono da ritenersi virtualmente privi di punti base, dovremo assumere come trasformato del fascio $|C|$ sulla superficie F_1, il fascio $|C_1| = |C_1^*| + P_1$, costituito dal fascio $|C_1^*|$ delle trasformate delle curve di $|C|$ considerate in sè, coll'aggiunta della curva eccezionale P_1 (n. 109).

Il fascio $|C_1^*|$ è ancora generale. Quanto al fascio $|D|$, esso si muta in un fascio $|D_1|$, che non è più generale, contenendo una curva spezzata $D_1^* + P_1$, proveniente dalla curva di $|D|$ pas-

sante per P. Infine la curva T dei contatti di $|C|$ e $|D|$ passa per P (punto base del fascio $|C|$, n. 100), e si muta nella curva $T_1^* + P_1$, ove T_1^* è la trasformata della T considerata in sè. Inoltre la curva T_1^* esaurisce la curva dei contatti dei fasci $|C_1^*|$ e $|D_1|$ (1).

Ciò premesso, indicando con $|K_1^*|$ il sistema trasformato del sistema canonico impuro $|K|$ di F, si avrà:

$$|K_1^*| = |T_1^* + P_1 - 2\,(C_1^* + P_1 + D_1)| = |T_1^* - 2\,(C_1^* + D_1) - P_1|\,.$$

D'altronde T_1^* sega sulla generica C_1^* il gruppo base ed il gruppo jacobiano della serie ivi staccata dal fascio $|D_1|$, onde, essendo $|C_1^*|$ generale, il I criterio d'equivalenza (n. 98) dà:

$$T_1^* \equiv (C_1^*)' + C_1^* + 2\,D_1\,.$$

Posto

$$|K_1| = |T_1^* - 2\,(C_1^* + D_1)|\,,$$

risulta

$$|K_1| \equiv (C_1^*)' - C_1^*\,,$$

ossia $|K_1|$ non è altro che il sistema canonico impuro di F_1.

Segue che

$$|K_1^*| = |K_1 - P_1|\,,$$

ovvero

$$|K_1| = |K_1^* + P_1|\,;$$

cioè: *quando in una trasformazione birazionale di F in F_1, si introduce una curva eccezionale P_1, il sistema canonico impuro di F_1 si ottiene aggiungendo la curva eccezionale P_1, al trasformato del sistema canonico impuro di F.*

È facile vedere che il sistema completo $|K_1|$ contiene come parte fissa ogni curva eccezionale P_1; e cioè che il sistema che si ottiene aggiungendo a $|K_1^*|$ la curva P_1, non risulta ampliabile. Infatti (n. 108, Oss.) il sistema canonico impuro sega la curva P_1 in $2p - 2 - n = -1$ punti, essendo $p = 0$ ed $n = -1$ rispettivamente il genere e il grado virtuali della curva P_1. Ne viene che ogni curva (effettiva) K_1 deve contenere come parte la P_1, chè altrimenti il numero virtuale d'intersezione $[K_1, P_1]$ sarebbe positivo o nullo (cfr. n. 10, pag. 15).

Dunque *il sistema canonico impuro contiene come parti fisse tutte le curve eccezionali della superficie.*

(1) La curva eccezionale P_1 non fa parte della curva dei contatti di $|C_1^*|$ e $|D_1|$, perchè C passa semplicemente per P.

Da quanto precede risulta che il sistema lineare completo ottenuto dal sistema canonico impuro privandolo della totalità delle curve eccezionali, è un sistema invariante assoluto di fronte alle trasformazioni birazionali (senza o con eccezioni). Si chiama il *sistema canonico (puro)* della superficie : lo indicheremo con $|K^*|$.

Poichè il sistema canonico impuro e il sistema canonico puro hanno la stessa dimensione, il genere geometrico p_g di una superficie resta definito anche come il numero delle curve canoniche pure indipendenti. Ne segue che *il genere geometrico p_g è un invariante assoluto.*

Una volta conosciuto il modo di trasformarsi del sistema canonico impuro, se ne trae immediatamente il modo di trasformarsi del sistema aggiunto ad un sistema lineare $|C|$, *virtualmente privo di punti base.*

Invero, per la definizione del sistema aggiunto $|C'|$, si ha $|C'| = |C + K|$, da cui si deduce che, sulla superficie trasformata F_1, risulta $|(C')_1| = |C_1 + K_1^*|$, essendo $|(C')_1|$ il trasformato di $|C'|$, $|C_1|$ il trasformato di $|C|$, e $|K_1^*|$ il trasformato di $|K|$. Ora, $|K_1^*| = |K_1 - P_1|$, dove $|K_1|$ è il sistema canonico impuro su F_1, quindi si ha

$$|(C')_1| = |C_1 + K_1 - P_1| .$$

D'altronde $|C_1 + K_1|$ non è che il sistema aggiunto $|(C_1)'|$ a $|C_1|$ su F_1 , per cui risulta :

$$|(C_1)'| = |(C')_1 + P_1| .$$

Dunque : *il sistema aggiunto del trasformato di un sistema lineare, virtualmente privo di punti base, è il trasformato dell'aggiunto più la curva eccezionale che si origina nella trasformazione.*

Anche in questo caso si ha che *la curva eccezionale P_1 resta come componente fissa del sistema aggiunto* $|(C_1)'|$. Invero basta dimostrare, come sopra, che la curva generica $(C_1)' \equiv C_1 + K_1$ ha -1 intersezioni virtuali con la P_1. Si è visto or ora che $[K_1, P_1] = -1$, inoltre $[C_1, P_1] = 0$, giacchè la curva generica di $|C|$ non passa per P (o almeno il punto P è virtualmente inesistente nel gruppo base di $|C|$). Segue che $[(C_1)', P_1] = -1$.

Osservazione. — Il ragionamento precedente, a differenza di quanto accadeva nel caso del sistema canonico, è poggiato essenzialmente sull'ipotesi che P_1 sia *la* curva eccezionale trasformata del punto P nella trasformazione considerata. Se Q_1 è un'altra curva eccezionale di F_1, la quale non sia generata dalla

trasformazione, ed è Q la curva di F da cui essa proviene, si ha: $[(C')_1, Q_1] = [C', Q]$ e $[(C_1)', Q_1] = [(C')_1, Q_1] + [P_1, Q_1] = = [(C')_1, Q_1]$.

Cioè: *mentre il sistema canonico impuro contiene come parti fisse tutte le curve eccezionali (di 1ª specie) situate sulla superficie, il sistema aggiunto al trasformato di un sistema lineare, contiene come parti fisse soltanto le curve eccezionali (di 1ª specie) generate dalla trasformazione.*

111. — Possiamo stabilire le proprietà della trasformazione dei sistemi canonico e aggiunto in relazione alle curve eccezionali che si originano nella trasformazione, anche con un altro procedimento. Vediamo prima, questa volta, che cosa avviene pel sistema aggiunto.

Partiamo all'uopo da un sistema lineare $|C|$ di F, ∞^r $(r \geqslant 2)$, che supponiamo generale, e tale che le curve di $|C|$ pel punto fondamentale P di F, formino ancora un sistema generale ∞^{r-1}, che indichiamo con $|\overline{C}|$.

Le curve del sistema $|C'|$ aggiunto a $|C|$ segano gruppi canonici sulle curve del sistema $|\overline{C}|$ (n. 101). Passando alla superficie trasformata F_1, ne viene che le curve $(C')_1$, trasformate delle C', segano gruppi canonici sulle curve $\overline{C}_1^*$, trasformate delle curve $\overline{C}$ *considerate in sè*. Ora, il sistema $|\overline{C}_1^*|$ è generale, come il sistema $|\overline{C}|$; e, poichè sopra un sistema generale curve che segano gruppi canonici appartengono necessariamente all'aggiunto (n. 101), si ha l'equivalenza su F_1:

$$(C')_1 \equiv (\overline{C}_1^*)',$$

dove $(\overline{C}_1^*)'$ è la curva generica del sistema aggiunto a $|\overline{C}_1^*|$.

D'altronde, poichè $|C_1| = |\overline{C}_1^* + P_1|$, applicando il teorema fondamentale dell'aggiunzione (n. 101), si ha che l'aggiunto a $|C_1|$ è il sistema $|(C_1)'| = |(\overline{C}_1^*)' + P_1|$. Onde, in base all'equivalenza sopra scritta, si ha

$$|(C_1)'| = |(C')_1 + P_1| .$$

Ritroviamo dunque la formula già stabilita, che esprime il modo di trasformarsi dell'aggiunto.

Basandosi su questo risultato, si può ora ritrovare immediatamente il modo di trasformarsi del sistema canonico impuro. Infatti si ha:

$$|K| = |C' - C|, |K_1| = |(C_1)' - C_1| ,$$

e quindi

$$|K_1| = |(C')_1 + P_1 - C_1| .$$

Ma, $|(C')_1 - C_1|$ è il trasformato $|K_1^*|$ del sistema canonico $|K| = |C' - C|$; onde risulta:

$$|K_1| = |K_1^* + P_1| .$$

Osservazione. — L'invarianza assoluta del sistema canonico puro e del genere geometrico p_g, che risulta dai due nn. precedenti, porta anche di conseguenza l'invarianza assoluta dei multipli del detto sistema canonico puro. Il numero delle curve linearmente indipendenti del multiplo secondo i del sistema canonico puro, è perciò un carattere invariante assoluto della superficie. Si chiama il *plurigenere* P_i.

L'importanza dell'introduzione dei plurigeneri risiede nella circostanza (che non ha l'analoga nella teoria delle curve), per la quale può darsi che qualche plurigenere sia maggior di zero, pur essendo $p_g = 0$. Un esempio di ciò è fornito dalla superficie del 6° ordine F passante doppiamente per gli spigoli di un tetraedro. Questa superficie, dotata di singolarità ordinarie, non ammette superficie aggiunte d'ordine $6 - 4 = 2$ (perchè non v'è alcuna quadrica che passi per gli spigoli del tetraedro), e pertanto $p_g = 0$. Tuttavia il tetraedro stesso costituisce una superficie d'ordine $2(6 - 4) = 4$ biaggiunta ad F, cioè passante doppiamente per la linea doppia di F; e sega pertanto F nel sistema bicanonico. Si noti però che, in questo caso, poichè v'è solo questa superficie d'ordine 4 biaggiunta ad F, il sistema bicanonico risulta costituito da una sola curva d'ordine zero: onde $P_2 = 1$.

112. *Sistema aggiunto ad un sistema lineare con punti base assegnati.* — Finora si è sempre parlato dell'aggiunto ad un sistema lineare virtualmente privo di punti base. Vediamo come debba definirsi il sistema aggiunto ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ di F i cui punti base siano tutti assegnati con molteplicità virtuali uguali alle effettive.

Poniamoci, in un primo tempo, nella ipotesi che il sistema $|C|$ sia dotato di soli punti base *ordinari*: P sia un tal punto, di molteplicità s ($\geqslant 1$).

Consideriamo un fascio generico H estratto dal sistema $|C|$. Le s tangenti in P alle curve del fascio formano un'involuzione g_s^1,

che avrà $2s - 2$ raggi doppi *distinti*; in corrispondenza si avranno $2s - 2$ particolari curve di H con due tangenti in P coincidenti. Queste $2s - 2$ curve passano per P con $s - 1$ rami distinti e con un ramo del 2° ordine (cuspide) (1).

Ciò premesso, sia L un altro fascio di curve D di F, generale ed in posizione generica rispetto ad H. Facciamo vedere che la curva T dei contatti dei fasci H, L passa per P $2s - 1$ volte con altrettanti rami lineari distinti.

All'uopo trasformiamo la superficie F in una F_1, sulla quale P si muti in una curva eccezionale di 1ª specie P_1. Le trasformate C_1^* delle curve C del fascio H, considerate in sè, segano sulla P_1 una g_s^1 dotata di $2s - 2$ punti doppi; in corrispondenza ai quali vi sono $2s - 2$ particolari curve C_1^* tangenti ivi a P_1. D'altra parte le curve D del fascio L si trasformano nelle curve D_1 di un fascio di F_1, tra le quali vi è una curva spezzata $D_1^* + P_1$, proveniente dalla curva del fascio L che passa per P; ed importa notare che D_1 e P_1 sono connesse in un punto, doppio quindi per la curva spezzata $D_1^* + P_1$.

Ne segue che la curva dei contatti dei due fasci su F_1, interseca $2s - 1$ volte la curva P_1; precisamente: una volta nel punto comune alla D_1^* e alla P_1, e $2s - 2$ volte nei punti doppi della g_s^1 su P_1 (queste ultime intersezioni mancando naturalmente nel caso in sui $s = 1$). Ora, la curva dei contatti dei due fasci su F_1, coincide con la trasformata della T, considerata in sè; onde si deduce che *la T passa con $2s - 1$ rami lineari distinti per il punto P.*

Ciò posto, essendo il fascio L generale, si ha l'equivalenza su F (cfr. n. 100):

$$T \equiv 2\,(C + D) + K\,.$$

D'altronde, indicato con $|C'|$ l'aggiunto al sistema $|C|$, *considerato virtualmente privo di punti base,* si ha anche $C' \equiv C + K$, e quindi:

$$T \equiv C + C' + 2\,D\,.$$

Intersecando con la curva generica C del fascio H, si ha, su questa curva, l'equivalenza fra gruppi di punti:

$$(T\,,\,C) \equiv (C\,,\,C) + (C'\,,\,C) + 2\,(D\,,\,C)\,.$$

(1) Il dubbio che, in luogo di un ramo del 2° ordine, si presentino due rami lineari tangenti (tacnodo), può escludersi facilmente per via analitica, proiet-

Ora si ha:

$$(C, C) \equiv \sum s\,(P^{(1)} + P^{(2)} + \ldots + P^{(s)}) + G,$$

dove si indichino con $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, ..., $P^{(s)}$ gli s punti di C sovrapposti in P sugli s rami distinti che escono dal punto, la sommatoria essendo estesa a tutti i punti base (analoghi al punto P) del sistema $|C|$; e dove con G si indichi il gruppo residuo di punti base semplici del fascio H estratto da $|C|$. Risulta quindi:

$$(T, C) \equiv \sum s\,(P^{(1)} + \ldots + P^{(s)}) + G + (C', C) + 2\,(D, C).$$

Ma, tenuto conto della definizione e delle proprietà sopra dimostrate per la T, si può valutare il gruppo (T, C) anche così:

$$(T, C) \equiv \sum (2s - 1)\,(P^{(1)} + \ldots + P^{(s)}) + G + M\,(C) + 2\,(D, C).$$

Dal confronto si ottiene:

$$(C', C) \equiv M\,(C) + \sum (s - 1)\,(P^{(1)} + \ldots + P^{(s)}).$$

Questa relazione d'equivalenza, che vale sopra la curva generica C del sistema $|C|$ [1], ci dice che il sistema $|C'|$ sega su C la serie somma della serie canonica e del gruppo dei punti base s-pli assegnati di $|C|$, ciascuno contato $s - 1$ volte. Pertanto si rende giustificata la seguente definizione: *il sistema aggiunto ad un sistema lineare $|C|$ i cui punti base sieno ordinari e si assegnino con molteplicità virtuale uguale all'effettiva, si ottiene, se esiste, imponendo ogni punto base s-plo di $|C|$ come punto base $(s-1)$-plo all'aggiunto del sistema $|C|$ stesso, considerato virtualmente privo di punti base.*

In virtù di questa definizione risulta che il sistema aggiunto a $|C|$ dotato di punti base assegnati, sega sulla curva generica di $|C|$ gruppi della serie canonica. Nel caso di un sistema lineare di curve piane, si ricade nella nota proprietà del sistema aggiunto definito nel modo consueto.

Osservazione. — Quando si passa dalla superficie F ad una superficie F_1 con una trasformazione birazionale che abbia come fondamentale un punto P di F, il quale faccia parte del gruppo

tando l'intorno del punto P sopra un piano. D'altronde la cosa riuscirà chiara fra un momento, quando avremo trasformato l'intorno del punto P in una curva eccezionale.

[1] Dato che vale sopra la curva generica del fascio H, genericamente estratto da $|C|$.

dei punti base assegnati pel sistema lineare $|C|$, e si considera il modo di trasformarsi dell'aggiunto a $|C|$, non vale la regola stabilita ai nn. 110, 111, per il caso in cui il sistema $|C|$ si riguardava virtualmente privo di punti base. Nel caso attuale invece si ha semplicemente che *il trasformato dell'aggiunto coincide con l'aggiunto del trasformato.*

Indichiamo, per comodità, con $|\bar{C}|$ il sistema lineare col punto base s-plo P $(s \geqslant 1)$ assegnato, e con $|C|$ il sistema stesso virtualmente privo di ogni suo punto base. Usando le solite notazioni, si ha:

$$(24) \qquad C_1 \equiv \bar{C}_1 + s\,P_1 \quad , \quad (C')_1 \equiv (\bar{C}')_1 + (s-1)\,P_1 .$$

Ora, tenuto conto che il sistema $|C_1|$ è virtualmente privo di punti base, pel teorema fondamentale dell'aggiunzione (n. 101), risulta dalla prima delle (24):

$$(C_1)' \equiv (\bar{C}_1)' + s\,P_1 .$$

D'altronde la regola ricordata, che vale per gli aggiunti a sistemi virtualmente privi di punti base, porge

$$(C_1)' \equiv (C')_1 + P_1 ,$$

onde si deduce che

$$(C')_1 \equiv (\bar{C}_1)' + (s-1)\,P_1 .$$

Dal confronto con la seconda delle (24), si ha quindi, come volevasi,

$$(\bar{C}')_1 \equiv (\bar{C}_1)' .$$

113. — Passiamo ora ad esaminare il caso in cui il sistema lineare $|C|$ possieda punti base assegnati immediati o infinitamente vicini, e supponiamo anche qui che le molteplicità assegnate coincidano con le effettive.

Il sistema aggiunto a $|C|$, nel caso attuale, si definirà in modo del tutto analogo a quello del caso particolare già trattato (n.112). Cioè si dirà *aggiunto a* $|C|$ il sistema lineare, se esiste, ottenuto dall'aggiunto al sistema $|C|$ considerato virtualmente privo di punti base, con l'imposizione della molteplicità $s-1$ in ogni punto base s-plo assegnato, *immediato o infinitamente vicino*, del sistema $|C|$.

Giustificheremo questa definizione dimostrando che l'aggiunto a $|C|$, così definito, sega sulla curva generica di $|C|$ gruppi canonici, fuori dei punti base.

Sviluppiamo il ragionamento nell'ipotesi semplice che il sistema $|C|$ abbia assegnato un punto base immediato P di molteplicità s, al quale sia infinitamente vicino un sol punto base assegnato Q di molteplicità s' $(\leqslant s)$; ed abbia assegnati eventualmente altri punti base ordinari. Indichiamo con $|D|$ il sistema che si ottiene da $|C|$ considerando il punto Q come virtualmente inesistente. Ciò premesso, trasformiamo la superficie F in modo che il punto P si muti in una curva eccezionale (di 1ª specie) P_1; e siano $|C_1|$ e $|D_1|$ i sistemi trasformati di $|C|$ e $|D|$.

Per le ipotesi fatte il sistema $|C_1|$ possiede soltanto punti base assegnati ordinari, avendo, in corrispondenza al punto base Q di $|C|$, un punto base assegnato di ugual molteplicità s', in un punto Q_1 di P_1. Il sistema $|D_1|$ è quello che si ottiene da $|C_1|$ considerando il punto base Q_1 come virtualmente inesistente.

Ora, il sistema aggiunto a $|C_1|$ si ottiene imponento al sistema aggiunto a $|D_1|$ la molteplicità $s' - 1$ nel punto Q_1 (n. 112). E poichè l'aggiunto a $|D_1|$ si muta su F nell'aggiunto a $|D|$ (n. 112, Oss.), ne segue che l'aggiunto a $|C_1|$ si muta a sua volta su F nell'aggiunto a $|C|$, a norma della definizione data.

D'altronde si sa (n. 112) che l'aggiunto a $|C_1|$ sega sulle curve di $|C_1|$ gruppi canonici, quindi anche l'aggiunto a $|C|$ segherà sulle curve di $|C|$ gruppi canonici.

Il ragionamento da farsi non è dissimile nel caso in cui il sistema $|C|$ su F possieda più punti base multipli $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(i)}, \ldots$ assegnati, ciascuno dei quali abbia nel suo intorno di 1° ordine uno o più punti multipli infinitamente vicini $Q^{(i,1)}, Q^{(i,2)}, \ldots$. Soltanto deve usarsi una trasformazione birazionale di F che sciolga contemporaneamente gli intorni dei vari punti $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots$. (1).

Se poi il sistema $|C|$ possiede punti base multipli assegnati $P^{(i)}$,

(1) Qualche attenzione va fatta nel caso in cui i punti $Q^{(i,1)}, Q^{(i,2)}, \ldots$ si susseguano su uno (o più) rami cuspidali, e quindi, a trasformazione eseguita, si mutino in punti $Q_1^{(i,1)}, Q_1^{(i,2)}, \ldots$ infinitamente vicini su $P_1^{(i)}$. Allora il sistema trasformato $|C_1|$ non è più dotato soltanto di punti base ordinari; e per arrivare lo stesso alla conclusione desiderata, occorre operare ancora con una o più successive trasformazioni birazionali di F_1, in modo da sciogliere gli intorni dei punti base non immediati di $|C_1|$, fino ad arrivare ad un sistema trasformato il quale possieda soltanto punti base ordinari.

aventi nel loro intorno di 1° ordine punti base multipli $Q^{(i,1)}$, $Q^{(i,2)}$, ..., $Q^{(i,j)}$, ..., ciascuno dei quali, a sua volta, abbia infinitamente vicini altri punti base multipli, $R^{(i,j,1)}$, $R^{(i,j,2)}$, ..., e così via, si perviene lo stesso a stabilire la proprietà che ci interessa, iterando il ragionamento per induzione.

Aggiungiamo altre notizie storico-bibliografiche sugli argomenti di questo §, oltre a quelle già date alla fine dei nn. 99, 107, 109.

Il *genere geometrico* p_g di una superficie F fu introdotto da prima da CLEBSCH (1868) e da NOETHER (1869, 1874) dal punto di vista trascendente, come numero degli integrali doppi di prima specie linearmente indipendenti sulla superficie. Questi stessi Autori osservarono che il p_g risulta uguale al numero delle superficie aggiunte d'ordine $m-4$ alla F, supposta d'ordine m, linearmente indipendenti. Per guisa che il genere geometrico fu sin dall'inizio associato al sistema lineare delle curve su F che più tardi furon dette curve canoniche. La definizione trascendente pone immediatamente in evidenza l'invarianza del p_g; tuttavia NOETHER diede altresì una dimostrazione algebrica diretta dell'invarianza del sistema canonico rispetto a trasformazioni birazionali della superficie. Gli ulteriori essenziali progressi della geometria sopra una superficie sono stati conseguiti in Italia a partire dal 1890. ENRIQUES, in due lavori fondamentali del 1893 (« Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino », serie 2ª, t. 44) e del 1896 (« Memorie della Società italiana delle Scienze », serie 3ª, t. 10), e in una successiva Nota del 1901 (« Atti della R. Acc. di Torino », vol. 37), costruì con operazioni di carattere invariantivo una teoria organica degli invarianti di una superficie. In questi lavori si introduce tra l'altro il sistema aggiunto ad un sistema lineare su F (che era già stato considerato nel piano da BRILL-NOETHER (1873), da NOETHER (1883) e da CASTELNUOVO (1891)), e si stabilisce il teorema fondamentale dell'aggiunzione e l'invarianza del sistema canonico. È data inoltre la costruzione del sistema aggiunto e del sistema canonico a partire dalla jacobiana di una rete, nonchè l'interpretazione proiettiva di tale costruzione, come abbiamo sviluppato nei nn. 102, 103. Si deve anche ad ENRIQUES la considerazione dei plurigeneri P_i ($i = 1, 2, \ldots$), e l'esempio, da noi riportato al n. 111 Oss., di una superficie con $p_g = 0$, $P_2 = 1$.

Nella nostra trattazione questi medesimi risultati vengono ottenuti basandosi sui criteri di equivalenza di SEVERI (nn. 97-99); ed appare così che la costante applicazione di questi criteri rende possibile una rapida costruzione di questa parte della geometria sopra una superficie. Ciò era stato accennato da SEVERI fino dal 1906 (« Atti del R. Istituto Veneto », t. 65, nota a pie' di pag. 629), e viene esposto diffusamente qui per la prima volta. E per la prima volta la trattazione si riferisce sempre anche a sistemi virtuali, riferendo dunque le proposizioni ad un campo più vasto del solito (ved. anche a tal proposito il n. 107).

Passando alle notizie storiche relative agli altri argomenti dal n. 104 in poi, ricorderemo che i risultati di CASTELNUOVO e di SEVERI sulla completezza delle serie lineari segate sopra una curva iperspaziale dalle forme aggiunte convenientemente definite (n. 104), si trovano, per ciò che concerne il primo, in « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », (1893), e pel secondo in in « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », (1903), nel caso di una curva priva

di singolarità, e in « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », (1908), nel caso generale. In particolare la definizione data da SEVERI di una superficie aggiunta ad una curva dello spazio ordinario definita come intersezione parziale di due superficie, ci ha permesso, nella nostra esposizione (n. 105), di dare una dimostrazione semplicissima del teorema fondamentale (di NOETHER) secondo cui le superficie aggiunte ad una data superficie F segano su F sistemi lineari completi.

Le ricerche sulla *postulazione* di una curva (semplice o multipla per una superficie) si iniziano con CAYLEY (1870), al quale devesi anche il nome di postulazione. Successivamente (1871) NOETHER dimostrò la formula di postulazione mediante il teorema dell'$AF + B\Phi$. Infine la dimostrazione da noi esposta della formula (12) è dovuta a CASTELNUOVO (« Rend. del Circolo Mat. di Palermo », 1893). La considerazione del *genere aritmetico* p_a di una superficie risale a CAYLEY (1871), ZEUTHEN (1871) e NOETHER (1875). In un primo stadio della geometria algebrica si riteneva (in analogia a quanto succede nel caso delle curve irriducibili) che il genere aritmetico, risultante dal computo delle superficie aggiunte linearmente indipendenti d'ordine $m - 4$, nell'ipotesi che per questo ordine valga la formula di postulazione, coincidesse con il genere geometrico. Ma già CAYLEY osservò che nel caso delle superficie rigate il genere aritmetico risultava negativo, mentre il genere geometrico era nullo. Successivamente CASTELNUOVO (« Rend. del R. Istituto Lombardo », 1891) costruì un esempio di superficie irregolare con $p_g > 0$. Ed altri esempi furono incontrati da PICARD e HUMBERT colle superficie iperellittiche, per cui $p_g = 1$ e $p_a = -1$. Questi esempi mostrano la necessità di distinguere le superficie regolari, per cui $p_g = p_a$, dalle superficie irregolari per cui risulta $p_g \neq p_a$. Che sia poi sempre $p_g \geq p_a$ risultò dalle citate Memorie di ENRIQUES (1893, 1896), al quale spetta d'aver assegnato il significato geometrico della *irregolarità* $p_g - p_a$, da noi riferito al n. 106 restando nell'ambito proiettivo. La invarianza assoluta di p_a nelle trasformazioni birazionali, sarà, come abbiamo detto, stabilita in seguito.

§ 2. — LA SERIE INVARIANTE DI SEVERI SOPRA UNA SUPERFICIE.

114. *Un lemma fondamentale.* — Negli sviluppi successivi ci sarà utile il seguente lemma:

Sopra una superficie F, priva di punti multipli, sia dato un sistema lineare $|C|$, irriducibile o riducibile, di curve effettive, e sia fissata una curva A di F, tale che sulla generica C sia determinato ed effettivo il gruppo (A, C). Allora, il luogo delle serie d'equivalenza curvilinee complete, individuate su ciascuna curva C dal gruppo (A, C), è una serie di equivalenza superficiale sopra F.

Dimostriamo che la totalità dei gruppi di punti che si ottengono sulla superficie nel modo indicato, è una totalità *unirazionale*; onde, dal teorema fondamentale del n. 63, si dedurrà senz'altro l'asserto.

Supponiamo in un primo tempo che la curva generica di $|C|$

sia priva di punti multipli. Si potrà allora determinare un intero l così alto, che le forme d'ordine l dello S_r ambiente, seghino sulla superficie F un sistema lineare di curve E, il quale goda delle due proprietà seguenti: *a*) seghi su una curva $\bar{C}$, genericamente fissata in $|C|$, una serie lineare completa (n. 104); *b*) contenga parzialmente la curva A, avendo $|D|$ come sistema lineare residuo.

Fissiamo genericamente una curva $\bar{D}$ di $|D|$. Per la proprietà *b*) si avrà l'equivalenza lineare su $\bar{C}$:

$$(E\,,\,\bar{C}) \equiv (A\,,\,\bar{C}) + (\bar{D}\,,\,\bar{C})\,.$$

Si trae, tenuto conto della proprietà *a*), che il sistema lineare $|E^*|$ delle curve di $|E|$ passanti per il gruppo fisso $(\bar{D}, \bar{C})$, sega fuori di questo, su $\bar{C}$, la serie completa $|(A\,,\,\bar{C})|$, individuata dal gruppo $(A\,,\,\bar{C})$.

Se è ρ la dimensione del sistema $|E^*|$, la dimensione σ della serie $|(A\,,\,\bar{C})|$ risulterà $\leq \rho$. Si fissino allora $\sigma + 2$ gruppi $G_1\,,\,G_2\,,\ldots,\,G_{\sigma+2}$ della serie $|(A\,,\,\bar{C})|$, tali che siano a $\sigma + 1$ a $\sigma + 1$ linearmente indipendenti; e consideriamo $\sigma + 2$ curve $E_1^*\,,\,E_2^*\,,\ldots,\,E_{\sigma+2}^*$ passanti rispettivamente per quei gruppi. Su E_i^* $(i = 1,\,2,\ldots,\sigma + 2)$ scegliamo un gruppo H_i di ρ punti generici, per modo che la curva E_i^* sia *individuata* entro il sistema $|E^*|$ dal gruppo H_i.

Ora, se facciamo variare genericamente la curva $\bar{C}$, tenendo invece *fissi* gli altri elementi della costruzione eseguita, e cioè la curva $\bar{D}$ ed i gruppi $H_1\,,\,H_2\,,\ldots,\,H_{\sigma+2}$, per ogni posizione della C rimangono razionalmente individuate (in funzione dei parametri dai quali dipende $\bar{C}$) certe $\sigma + 2$ curve del sistema lineare $|E|$, che passano pel gruppo $(\bar{D},\,\bar{C})$, e rispettivamente per i gruppi $H_1\,,\,H_2,\ldots,\,H_{\sigma+2}$. In conseguenza restano individuati razionalmente sulla $\bar{C}$ variabile i gruppi $G_1\,,\,G_2\,,\ldots,\,G_{\sigma+2}$ d'intersezione con tali curve, che son gruppi, a $\sigma + 1$ a $\sigma + 1$ indipendenti, della serie completa $|(A\,,\,\bar{C})|$.

Ciò posto, un gruppo variabile nella serie $|(A\,,\,\bar{C})|$, ∞^σ, si potrà a sua volta individuare razionalmente a partire da $G_1\,,\ldots,\,G_{\sigma+2}$, nel modo seguente.

Si pensino i gruppi della serie $|(A\,,\,\bar{C})|$ come punti di uno spazio proiettivo S_σ, nel quale si assumano come vertici di una piramide fondamentale e come punto unità i punti corrispondenti a $G_1,\ldots,\,G_{\sigma+2}$. Allora ogni punto di S_σ, e quindi ogni gruppo

di $|(A, \bar{C})|$, viene individuato razionalmente dalle sue $\sigma + 1$ coordinate omogenee rispetto al riferimento scelto.

In definitiva un gruppo generico $(A, \bar{C})$ su una $\bar{C}$ generica di $|C|$, resta individuato dai parametri che individuano $\bar{C}$ entro il sistema lineare $|C|$, e dalle $\sigma + 1$ coordinate omogenee di uno spazio S_σ.

Nel caso in cui il sistema $|C|$ possieda punti base, semplici o multipli, la dimostrazione del lemma, dato il carattere invariante del concetto di serie d'equivalenza, si ottiene ugualmente previa una trasformazione birazionale della superficie F, atta a liberare il sistema $|C|$ dai punti base. Si costruisce una tale trasformazione, p. es. facendo l'imagine proiettiva del sistema segato su F dalle forme di ordine abbastanza elevato, che passano per i punti base di $|C|$.

Se poi il sistema $|C|$ è riducibile, il lemma sussiste ancora, perchè si può applicare la dimostrazione esposta ad ogni sistema componente, e tener poi conto che la serie somma di più serie di equivalenza è ancora una serie d'equivalenza.

Osservazione. — Vediamo che cosa si può dire della validità del lemma nel caso in cui la curva fissata su F sia una curva virtuale.

Occorre anzitutto osservare che un gruppo virtuale di punti (A, C) non *individua* una serie completa su C. Difatti la curva virtuale A può pensarsi come differenza di infinite coppie di curve effettive $A_1 - A_2$, e in conseguenza il gruppo virtuale (A, C) risulta come differenza di infinite coppie di gruppi effettivi $(A_1, C) - (A_2, C)$.

Ogni volta sia fissata la coppia $(A_1, C), (A_2, C)$, si ha una serie completa $|(A, C)| = |(A_1, C)| - |(A_2, C)|$, che può dirsi *relativa allo spezzamento fissato pel gruppo virtuale* (A, C). Ma tutte queste serie complete non coincidono fra loro (pur essendo sempre l'una contenuta nell'altra), e al variare dello spezzamento possono avere dimensione comunque grande. Per esempio, sopra una retta C, la serie virtuale (che contiene una parte effettiva) individuata da un punto di C, può concepirsi come differenza di una g_n^n e di una g_{n-1}^{n-1}, con $n \geqslant 1$ qualunque.

Dunque, se si vuole estendere il lemma anche al caso in cui la curva A sia virtuale, bisogna specificare quali sono le componenti di A. Allora si capisce che il lemma sussiste tal quale, se si tien conto che la differenza di due serie d'equivalenza superficiale è ancora una serie d'equivalenza.

Osservazioni analoghe valgono quando il sistema $|C|$ sia virtuale. Anche in questo caso il lemma si estende senz'altro purchè siano fissati i sistemi lineari effettivi generatori del sistema virtuale $|C|$.

Il lemma dimostrato è dovuto a SEVERI e trovasi in *Ulteriori sviluppi della teoria delle serie d'equivalenza sopra una superficie algebrica*, « Memorie della R. Accademia d'Italia », (1940).

115. *La serie canonica e la serie caratteristica d'equivalenza completate.* — Passiamo ora a giustificare che, secondo quanto si è affermato al n. 107 ed al n. 108, la serie canonica d'equivalenza e la serie caratteristica d'equivalenza di un sistema lineare $|C|$, privo di punti base, completate su ogni curva C rispettivamente nella serie canonica completa e nella serie caratteristica completa di C, costituiscono ancora serie d'equivalenza.

All'uopo basta applicare il lemma del n. 114, prendendo nel primo caso come curva A una generica C' (supposta effettiva), e nel secondo caso una generica C.

Nell'ipotesi che il sistema aggiunto $|C'|$ non sia effettivo, pur essendo effettiva la serie canonica sulla C generica, si può pervenire ugualmente alla conclusione, per quel che concerne la serie canonica d'equivalenza nel modo seguente.

Si osservi che esiste certamente un intero k, tale che $|kC + C'|$ sia un sistema lineare effettivo. Anzi, essendo $C' \equiv C_j - 2C$ (n. 102), basta prendere $k = 2$. Prendiamo ora come curva effettiva A la curva generica del sistema $|kC + C'|$. Valendo l'equivalenza su C:

$$(A\ ,\ C) \equiv k\ (C\ ,\ C) + (C',\ C)\ ,$$

si trae che *ogni* gruppo canonico su una C generica fa parte della serie d'equivalenza differenza di $|(A\ ,\ C)|$ e $|k(C\ ,\ C)|$, dove con questi simboli si indichino le serie d'equivalenza costituite dalla totalità dei gruppi equivalenti sulle C di $|C|$, rispettivamente al gruppo $(A,\ C)$ e al gruppo $k\ (C\ ,\ C)$.

116. *La serie di* SEVERI. — In questo n. ci proponiamo di definire, sopra una superficie F, una prima serie d'equivalenza invariante.

Siano $|C|$, $|D|$ due fasci generali sulla F, priva di punti multipli. Si è già detto (n. 100) che la curva dei contatti T dei due fasci contiene il gruppo dei punti base di $|C|$ e $|D|$, ed il gruppo jacobiano (cioè il gruppo dei punti doppi delle curve) di $|C|$ e $|D|$.

Consideriamo la serie lineare ∞^1 segata sulla T dalle curve del fascio $|C|$, fuori dei punti base di $|C|$. Il gruppo jacobiano di questa serie sarà equivalente su T a

$$2(C, T) - 2(C, C) + M(T),$$

essendo, al solito, $M(T)$ un gruppo canonico su T.

D'altra parte, il nominato gruppo jacobiano consta: *a*) del gruppo di punti, Ω, di osculazione delle curve di $|C|$ con le curve di $|D|$; *b*) del gruppo jacobiano, J_C, del fascio $|C|$; *c*) del gruppo, (D, D), dei punti base del fascio $|D|$. Onde si deduce l'equivalenza lineare su T:

$$2(C, T) - 2(C, C) + M(T) \equiv \Omega + J_C + (D, D).$$

Se con T' indichiamo una curva generica del sistema aggiunto a T, che supponiamo effettivo, si ha anche:

$$2(C, T) - 2(C, C) + (T', T) \equiv \Omega + J_C + (D, D),$$

ovvero:

$$(25) \qquad (2C + T', T) \equiv \Omega + J_C + 2(C, C) + (D, D).$$

Orbene, osserviamo in primo luogo, che quando i due fasci $|C|$, $|D|$ variano nei più ampi sistemi lineari da essi determinati, la curva T varia in un sistema di curve equivalenti (n. 102); altrettanto accade per T' che varierà conservandosi entro il sistema lineare aggiunto al sistema lineare completo $|T|$. Se allora consideriamo la serie di gruppi di punti $|(2C + T', T)|$ che si ottiene costruendo sulla curva generica di $|T|$ la serie lineare completa individuata dal gruppo $(2C + T', T)$, tal serie risulta, in base al lemma del n. 114 (ove si prenda come curva A una curva generica di $|2C + T'|$), una serie d'equivalenza su F. Inoltre il gruppo Ω ed il gruppo J_C variano anch'essi in serie d'equivalenza, al variare dei fasci $|C|$, $|D|$ nei sistemi lineari completi omonimi, perchè son gruppi che risultano individuati razionalmente, l'uno dalla coppia di fasci, e l'altro dal fascio $|C|$ (n. 63). Del pari (C,C) e (D,D) variano entro le serie caratteristiche d'equivalenza dei sistemi lineari completi $|C|$, $|D|$. Onde si deduce che il gruppo $\Omega + J_C + 2(C,C) + (D,D)$, come somma di gruppi variabili entro serie d'equivalenza, varia anch'esso entro una serie d'equivalenza $|\Omega + J_C + 2(C,C) + (D,D)|$.

Ma, la serie d'equivalenza $|(2C + T', T)|$, sopra considerata, ha gruppi in comune con la serie d'equivalenza

$|\Omega + J_C + 2(C,C) + (D,D)|$, dato che la relazione (25) d'equivalenza lineare su T, ci dice che esistono gruppi della serie $|\Omega + J_C + 2(C,C) + (D,D)|$ che sono equivalenti su T a gruppi del tipo $(2C + T' , T)$, e che sono pertanto gruppi della serie $|(2C + T', T)|$, in quanto questa contiene, per costruzione, su ogni T, tutti i gruppi equivalenti linearmente a $(2C + T',T)$ (1).

In conclusione possiamo dire che la relazione (25) sussiste anche se si interpretino i due membri di essa come gruppi delle serie d'equivalenza definite come si è detto, facendo variare i fasci $|C|$, $|D|$, nei più ampi sistemi lineari completi corrispondenti, e ove il segno $\equiv$ si interpreti come il segno d'equivalenza razionale su F.

Scambiando tra loro le veci dei due fasci $|C|$, $|D|$, si avrà analogamente la relazione d'equivalenza superficiale:

$$(26) \qquad (2D + T' , T) \equiv \Omega + J_D + 2(D , D) + (C , C) ,$$

dove con J_D si indichi il gruppo jacobiano di un fascio $|D|$.

Eliminando Ω tra le due relazioni d'equivalenza superficiale (25), (26), si ha:

$$2 (C , T) - (C , C) - J_C \equiv 2 (D , T) - (D , D) - J_D .$$

E, se si tien conto che $T \equiv C + C' + 2D \equiv D + D' + 2C$ (n. 102), si ottiene infine la relazione di equivalenza su F:

$$(27) \qquad J_C - 2 (C , C') - (C , C) \equiv J_D - 2 (D , D') - (D , D) .$$

La (27) ci dice che la serie di equivalenza $|S| = |J_C - 2(C , C') - (C , C)|$, è indipendente dal sistema $|C|$, che serve a costruirla, onde essa dipende soltanto dalla superficie F. Possiamo quindi enunciare:

Considerato sopra una superficie F un sistema lineare generale $|C|$, designato con $|C'|$ il sistema aggiunto, e con J_C il gruppo jacobiano di un fascio generico estratto da $|C|$, la serie di gruppi di punti

$$(28) \qquad S \equiv J_C - 2 (C , C') - (C , C)$$

non dipende dal sistema lineare $|C|$, ed è pertanto una serie invariante di F. Dicesi la serie $|S|$, di SEVERI.

La serie $|S|$ consta di gruppi virtuali di $I + 4$ punti, essendo I l'*invariante di* ZEUTHEN-SEGRE (2). Invero, se $|C|$ è un fascio di

(1) Ved., pel concetto che qui si applica, l'Oss. 1ª alla fine del n. 107.
(2) «Atti della R. Acc. di Torino», (1895), vol. 31.

curve irriducibili di genere p, dotato di n punti base, nel quale esistano δ curve dotate di punto doppio, si ha che il gruppo J_C è costituito da δ punti, e che $[C, C'] = 2p - 2$, $[C, C] = n$. In conseguenza il gruppo S consta di $\delta - 4p - n + 4$ punti; e poichè $I = \delta - 4p - n$, si ha la conclusione.

La serie di SEVERI costituisce l'*interpretazione funzionale dell'invariante di* ZEUTHEN-SEGRE, come il procedimento sopra esposto trasporta nel campo funzionale il ragionamento numerativo con cui il secondo di questi autori giunge a costruire l'invariante numerico predetto.

Il legame tra la serie $|S|$ e l'invariante I ci indica, a priori, che la serie $|S|$ è una serie invariante soltanto rispetto a trasformazioni birazionali della superficie *senza eccezione*, come l'invariante I (ved. in seguito).

Sul piano, l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE vale -1 (come si vede, p. es., riferendosi ad un fascio di rette, per cui $\delta = 0$, $n = 1$, $p = 0$, onde $I = -1$). La totalità dei gruppi effettivi della serie $|S|$, sul piano, consta dunque di tutti i gruppi di 3 punti.

Il primo esempio di serie d'equivalenza invariante sopra una superficie, fu indicato da SEVERI nel 1932, Mem. [2] cit. a pag. 44; ed è la *serie di irregolarità*, la quale viene definita (come vedremo in seguito) per via trascendente sopra una superficie irregolare. Ma, nello stesso anno, Mem. [3], SEVERI definì sopra una superficie qualunque la serie $|S|$. Sopra una superficie irregolare, la serie d'irregolarità è contenuta totalmente nella serie $|S|$.

La dimostrazione dell'invarianza della serie $|S|$, data nella Mem. [3], apparisce più semplice di quella da noi esposta. Ciò perchè la definizione di equivalenza adottata nella [3], era tale che due gruppi si consideravano equivalenti, quando esisteva qualche curva della superficie su cui i gruppi erano linearmente equivalenti. Ma, di fronte alla definizione di equivalenza sulla quale noi ci basiamo, era necessaria l'applicazione del lemma del n. 114 (1).

117. *Invarianza relativa della serie di* SEVERI. — La (27) mostra che la serie $|S|$ è invariante per le trasformazioni che non introducono curve eccezionali. Esaminiamo ora una trasformazione birazionale tra F, F_1, che presenti in F il solo punto fondamentale P, il quale si muti nella curva eccezionale P_1.

Preso in F un fascio generale $|C|$, che non abbia in P un punto base, il gruppo jacobiano J_{C_1} del fascio trasformato $|C_1|$, consta

(1) Qui termina la parte delle presenti Lezioni esposta, durante l'anno accademico 1938-39, all'Università di Roma, e s'inizia quella sviluppata dall'Autore nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma, durante il 1940-41.

del trasformato $(Jc)_1$ di Jc e del punto Q_1 comune a P_1 e alla curva C_1^*, corrispondente alla C passante per P e che insieme a P_1 dà una C_1. Quanto a $|C'|$ esso trasformasi (n. 110) in $|(C')_1| = |(C_1)' - P_1|$, e, siccome P_1 non incontra la generica C_1, risulta:

$$((C')_1 , C_1) \equiv ((C_1)' , C_1) .$$

Poiché inoltre (C , C) trasformasi in (C_1, C_1), un gruppo S_1 della serie di SEVERI relativa ad F_1, è dato da

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv Jc_1 - 2\,(C_1, (C_1)') - (C_1, C_1)\ (1) \\ &\equiv (Jc)_1 + Q_1 - 2\,(C_1, (C')_1) - (C_1, C_1) \\ &\equiv S_1^* + Q_1 , \end{aligned} \tag{29}$$

ove S_1^* è il trasformato di un gruppo S.

Si osserverà che, variando $|C|$, Q_1 può occupare una posizione qualunque in P_1. Tale indeterminazione di Q_1, è nella natura delle cose, perché tutti i punti di P_1 (che è una curva razionale) sono equivalenti tra loro su P_1 e quindi su F. In conclusione:

Per ogni curva eccezionale (di 1ª specie) nascente da una trasformazione birazionale di F, la serie di SEVERI *aumenta della serie lineare dei punti di quella curva.*

Ne deriva che l'invariante I di ZEUTHEN-SEGRE aumenta d'una unità per ogni curva eccezionale (di 1ª specie) che nasca dalla trasformazione (e diminuisce di una unità per ogni curva eccezionale che sparisca).

Osservazione. — Se la trasformazione τ tra le superficie F, F_1 (prive di punti multipli) introduce o fa sparire più curve eccezionali di 1ª o di 2ª specie (contandosi come una sola curva ecce-

(1) Si avverta che il ragionamento del n. 116 vale immutato se si riferisce a due fasci lineari che abbiano punti base semplici ordinari e che contengano curve con soli punti nodali, anche se questi provengano da intersezioni di parti (semplici) in cui eventualmente si spezzino particolari curve dei due fasci. Da ciò deriva che, rispetto ad un fascio siffatto, il gruppo jacobiano che comparisce nella serie di SEVERI, è sempre il gruppo dei nodi, così come si presenta. Quando il fascio abbia punti base qualsiansi, anche infinitamente vicini, senza che esistano componenti multiple di curve del fascio, il gruppo jacobiano è sempre costituito da un gruppo effettivo di un numero finito di punti, che si può determinare con una considerazione di limite o ripetendo opportunamente adattato il ragionamento del n. 116. Allorché ci siano componenti multiple ognuna di queste ha una certa equivalenza funzionale nel gruppo jacobiano, e si può imitare il ragionamento generale per arrivare a determinarla. È questo un interessante soggetto di ricerca. (Ved. a tal proposito le notizie bibliografiche alla fine del Cap.).

zionale una curva riducibile che provenga da un sol punto semplice; n. 109), e i punti e le linee che si trasformano eccezionalmente appartengono comunque gli uni alle altre, si può ridurre τ al prodotto di trasformazioni birazionali tra coppie successive di superficie, in guisa che in ogni trasformazione parziale si introduca e si perda una sola curva eccezionale (necessariamente di 1ª specie).

Basta all'uopo introdurre una superficie Ψ, priva di punti multipli, che rappresenti le ∞^2 coppie x,x' omologhe in τ. Una tal superficie può immaginarsi senz'altro sulla varietà W prodotto di F,F_1 (n. 52), perchè, essendo Ψ unisecante delle superficie $\Phi(x)$ e $\Phi'(x')$, considerate nel n. 56, nessuno dei suoi punti può esser multiplo. (1) Così la corrispondenza birazionale τ fra gli x di F e gli x' di F_1 è il prodotto della corrispondenza birazionale τ_1 fra gli x di F e gli (x,x') di Ψ e della corrispondenza birazionale τ_2 fra questi elementi e gli x' di F_1. Pertanto, se i punti $x_1, x_2,\ldots, x_e$ di F mutansi in curve (di 1ª o di 2ª specie) di F_1 e i punti $x'_1,\ldots, x'_{e_1}$ di F_1 in curve di 1ª o di 2ª specie) di F, nella τ_1 a $x_1,\ldots, x_e$ rispondono e curve eccezionali di Ψ; ma nella τ_1^{-1} ad *ogni* punto di Ψ risponde *un* sol punto di F; e similmente nei riguardi delle τ_2, τ_2^{-1}. Ne segue che τ è il prodotto di due corrispondenze, che introducon curve eccezionali soltanto in un senso.

Ora, avendosi tra due superficie F, Ψ una corrispondenza τ_1, che introduca soltanto curve eccezionali nel passaggio dai punti $x_1,\ldots, x_e$ di F a curve di Ψ, si trasformerà F col sistema di tutte le quadriche del suo spazio (pag. 219) passanti per x_1; la superficie F' ottenuta col sistema di tutte le quadriche passanti per uno dei trasformati degli e—1 punti x_1 restanti; e così proseguendo. Si ottiene in tal guisa una successione di coppie di superficie da F a Ψ, attraverso F', F'',..., tali che la corrispondenza birazionale tra due consecutive introduce una sola curva eccezionale e siamo quindi ridotti al caso analizzato.

La conclusione è che $|S|$ aumenta delle serie lineari (o di equivalenza, se trattasi di curve eccezionali riducibili) dei punti situati sulle curve eccezionali che nascono nel passaggio da F a F_1, e diminuisce delle serie lineari (o di equivalenza relative alla curve eccezionali che si trasformano in punti.

(1) Ciò è evidente se la $\Phi(x)$ e la $\Phi'(x')$ passanti per un punto P di Ψ non incontrano Ψ lungo curve (eccezionali); ma se anche p. es. la $\Phi(x)$ per P incontrasse Ψ lungo una curva, il punto P non potrebbe esser multiplo, perchè una generica Φ vicinissima incontrerebbe Ψ in un sol punto vicino al P.

Sicchè, se passando da F ad F_1, vi sono e punti di F che si mutano in e curve eccezionali (di 1ª o di 2ª specie) di F_1, ed e_1 curve eccezionali (di 1ª o di 2ª specie) di F che si mutano in punti di F_1, l'invariante I_1 di ZEUTHEN-SEGRE, relativo ad F_1, è espresso da $I_1 = I + e - e_1$, ove I è l'invariante relativo ad F.

§ 3. — ALTRE SERIE E RELAZIONI INVARIANTI E COVARIANTI. IL GENERE LINEARE E IL GENERE ARITMETICO DI UNA SUPERFICIE.

118. *Serie caratteristica e serie canonica del multiplo di un dato sistema lineare.* — Sia $|C|$, su F, il dato sistema lineare (effettivo o virtuale) e $|C'|$ il sistema aggiunto (effettivo o virtuale) di C. Risulta senz'altro, per l intero positivo:

$$(30)\quad (lC, lC) \equiv l^2 (C, C)\,,\ (lC, (l-1)C + C') \equiv l(l-1)(C, C) + l(C, C'),$$

le quali relazioni dànno la serie caratteristica (virtuale) e la serie canonica (virtuale) del sistema $|lC|$, perché l'aggiunto di $|lC$ è $|(l-1)C + C'|$ (n. 101).

Per $-l$ intero negativo si ha inoltre:

$$(31)\quad \begin{aligned} (-lC, -lC) &\equiv l^2 (C, C)\,, \\ (-lC, -(l+1)C + C') &\equiv l(l+1)(C, C) - (C, C')\,, \end{aligned}$$

le quali relazioni dànno la serie caratteristica e la serie canonica del sistema $|-lC|$, perché, essendo $-lC = -(l+1)C + C$, il sistema aggiunto a $|-lC|$ è $|-(l+1)C + C'|$.

Le (30), (31) numerativamente interpretate forniscono i valori del grado n_l o n_{-l} e del genere virtualle p_l o p_{-l} del multiplo $|lC|$ o $|-lC|$:

$$(32)\quad \begin{cases} n_l = l^2 n \quad , \quad p_l = \binom{l}{2} n + l(p-1) + 1\,, \\ n_{-l} = l^2 n \quad , \quad p_{-l} = \binom{-l}{2} n - l(p-1) + 1\,. \end{cases}$$

Giova anche indicare *la serie caratteristica e la serie canonica virtuali sulla curva virtuale zero* (della equivalenza lineare fra curve). La serie caratteristica risulta:

$$(C - C,\ C - C) \equiv (C, C) + (C, C) - 2\,(C, C) \equiv 0\,;$$

cioè non è altro che *la serie virtuale zero* (dell'equivalenza razionale fra gruppi di punti di F).

La serie canonica, essendo espressa (n. 108, Oss.) dalla somma della serie caratteristica e della serie segata sulla curva dal sistema canonico impuro $|K|$, risulta somma della serie zero e della serie $|(C - C, K)|$, che è pure la serie zero; epperò è anch'essa la serie zero.

Ne segue che *il grado n ed il genere virtuale p della curva virtuale zero sono* $n = 0$, $p = 1$ (perchè deve essere $2p - 2 = 0$).

119. *La serie canonica impura d'una superficie. Il genere lineare d'una superficie con un numero finito di curve eccezionali.* — La serie caratteristica virtuale del sistema canonico impuro $|K|$ d'una superficie F, cioè la serie $|(K, K)|$, si dirà *la serie canonica impura* $|\Omega|$ di F.

Tale serie è manifestamente invariante nelle trasformazioni birazionali di F che non introducono curve eccezionali. Vediamo che cosa accade quando F mutasi in F_1 come nel 117. Intanto si ha la relazione (n. 110):

$$|K_1| = |K_1^* + P_1|,$$

ove $|K_1^*|$ è il trasformato di $|K|$, e $|K_1|$ il sistema canonico impuro di F_1. Pertanto, indicando con Ω_1 e Ω_1^* rispettivamente un gruppo della serie canonica impura su F_1 e un gruppo trasformato di un gruppo Ω, si ha:

$$\Omega_1 \equiv (K_1, K_1) \equiv (K_1^*, K_1^*) + (P_1, P_1) + 2(K_1 - P_1, P_1) \equiv$$
$$\equiv \Omega_1^* - (P_1, P_1) + 2(K_1, P_1).$$

Ora (pagg. 222, 224): $(K_1, P_1) \equiv -Q_1$, $(P_1, P_1) \equiv -Q_1$, epperò [1]:

$$\Omega_1 \equiv \Omega_1^* - Q_1; \tag{33}$$

cioè: *Per ogni curva eccezionale di 1ª specie che s'introduce, la serie canonica impura* $|\Omega|$ *d'una superficie diminuisce della serie lineare (o d'equivalenza) dei punti di quella curva.*

Vale l'osservazione analoga a quella della fine del n. 117; soltanto attualmente l'aumento o la diminuzione della serie canonica impura avviene in senso contrario rispetto a quanto accade nel caso della serie $|S|$.

Le (29) e (33) sommate porgono

$$S_1 + \Omega_1 \equiv S_1^* + \Omega_1^*,$$

[1] Nella definizione stessa di equivalenza è contenuta la *transitività* (n. 107, Oss. 1ª; vedi pure Appendice).

ossia *la somma della serie di* SEVERI *e della serie canonica impura di una superficie F è assolutamente invariante nelle trasformazioni birazionali di F.*

Vedremo nel n. 126 un notevole significato geometrico di questa serie, in relazione al genere aritmetico.

Poiché $|K|$ ha per aggiunto $|K+K| = |2K|$, la serie $|2(K, K)|$ è la serie canonica del sistema $|K|$. Pertanto: *la serie canonica impura $|\Omega|$ d'una superficie F eguaglia la metà della serie canonica del sistema canonico impuro di F.*

Designati con ω, ω' il genere ed il grado virtuali di K, l'ordine $2\omega - 2$ della serie canonica $|2(K, K)|$ del sistema $|K|$ sarà uguale a $2\omega'$, onde:

$$\omega' = \omega - 1 . \tag{34}$$

E siccome ω', che è l'ordine della serie $|\Omega|$, in base alla (33) diminuisce di un'unità per ogni curva eccezionale che si introduce, si può dire che:

Il carattere ω diminuisce d'una unità per ogni curva eccezionale di 1ª specie che s'introduce in una trasformazione. Se da F si passa ad F_1 con l'introduzione di e curve eccezionali di 1ª o di 2ª specie e perdendone e_1, fra gli invarianti ω, ω_1 di F, F_1, sussiste la relazione:

$$\omega_1 = \omega + e_1 - e .$$

Supponiamo ora che F contenga un numero finito di curve eccezionali (necessariamente di 1ª specie), sicché possa, se vuolsi, trasformarsi in un modello Φ assolutamente privo di curve eccezionali (e sempre, beninteso, di punti multipli) [1]. Designati allora con $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ il genere e il grado virtuali del sistema canonico puro di F, $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$ coincideranno rispettivamente con il genere e il grado virtuali del sistema canonico su Φ. Onde, considerando la trasformazione che muta Φ in F, si ha

$$p^{(1)} = \omega + e \quad , \quad p^{(2)} = \omega' + e ,$$

essendo ω, ω' i caratteri sopra introdotti per la superficie F, ed e il numero delle curve eccezionali di F. Dalla (34) segue quindi

$$p^{2)} = p^{(1)} - 1 . \tag{35}$$

[1] Sopra un piano o sopra una superficie rigata esistono infinite curve eccezionali di 2ª specie (per il piano p. es. ogni retta, e per la rigata ogni generatrice). Quindi F, che per ipotesi possiede un numero finito di curve eccezionali, non può essere né razionale né riferibile a rigata; onde (pag. 222, teor. *a*) le curve eccezionali di F sono tutte di 1ª specie, e possono farsi sparire contemporaneamente con una trasformazione birazionale (pag. 223, teor. *b*).

Il numero $p^{(1)}$ che è il massimo valore assunto dal carattere ω sopra i modelli birazionalmente equivalenti della superficie F, è un *invariante assoluto*, che dicesi *genere lineare* di F. Esso non è altro che il genere virtuale del sistema canonico puro. L'altro invariante assoluto $p^{(2)}$ (*secondo genere lineare*) di solito non si considera, perché è espresso per $p^{(1)}$ mediante la (35).

Il carattere ω dicesi *genere lineare relativo* di F.

120. — *Digressione sulla base delle curve tracciate sopra una superficie con un fascio di curve razionali.* — Sia F una superficie, priva di punti multipli, e possedente un fascio $|L|$, razionale o irrazionale, di curve razionali (generalmente irriducibili).

Si fissi una curva di A di F (che non contenga curve L o parti di esse) incontrante in $m > 0$ punti le curve L. Sia C una curva qualunque di F. Se C incontra in $n > 0$ punti le curve L, le due curve nA, mC incontrano le curve L in due gruppi di nm punti, che sono linearmente equivalenti, data la razionalità delle curve L. In base al I criterio di equivalenza (n. 97) risulta pertanto:

$$mC \equiv nA + H + H' , \tag{36}$$

essendo H un gruppo virtuale di curve L, ed H' una curva virtuale costituita con parti di curve L riducibili. Ove il fascio $|L|$ sia privo di curve spezzate (come accade nel caso delle superficie rigate) la curva H' manca qualunque sia C.

Se si considerano relazioni di equivalenza algebrica, dalla (36) si può passare alla

$$mC \equiv nA + rL + \Sigma_i r_i L_i , \tag{37}$$

dove r, r_i sono interi (positivi, negativi o nulli), L_i sono le eventuali componenti delle curve L spezzate. Nel caso in cui la curva C non incontra le L (cioè $n = 0$), è evidente che la curva C consta di curve L o di parti di esse, onde vale ancora la (37).

La relazione (37) mostra che ogni curva di F è tale che un suo multiplo conveniente è algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle curve A, L ed L_i; ciò si esprime dicendo che A, L, L_i *costituiscono una base per le curve tracciate su* F.

Se il fascio $|L|$ è privo di punti base (il che si verifica sempre quando il fascio è irrazionale e la superficie F, beninteso, è priva di punti multipli) le curve A ed L sono fra loro algebricamente indipendenti, perché altrimenti la curva A non potrebbe segare

in un numero di punti diverso da zero le curve di $|L|$. Tra le curve A, L, L_i ve ne sarà perciò *un certo numero* $\rho \geqslant 2$ *di algebricamente indipendenti che chiamasi il numero-base della superficie* F. Varrà certamente il segno uguale, se le L sono tutte irriducibili, come nelle rigate.

Se la curva A è unisecante le L, $m = 1$, e la (37) si riduce a

$$C \equiv nA + rL + \Sigma_i r_i L_i ,$$

cioè la curva C stessa (e non soltanto un multiplo conveniente) è algebricamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti interi delle A, L, L_i. Una curva A unisecante esiste certamente se la F è rigata (basta considerare una sezione iperpiana di F); ed anzi, per un teorema di ENRIQUES [1], una tal curva unisecante esiste in ogni caso.

In particolare sopra una quadrica la base è costituita da due generatrici di schiere diverse. Questo risultato si può del resto dedurre anche elementarmente. Si eseguisca la proiezione stereografica della quadrica da un suo punto O sul piano π. Le due generatrici uscenti da O si mutano in due punti fondamentali P, Q di π, e l'intorno di 1° ordine di O nella retta PQ. Una curva C della quadrica, che sia r-secante le generatrici di una schiera ed s-secante le generatrici dell'altra schiera, e quindi abbia l'ordine $n = r + s$, si proietta in una curva D di π che ha in P, Q rispettivamente un punto r-plo e un punto s-plo, ed appartiene quindi al sistema lineare somma dei sistemi lineari delle curve di ordini rispettivi r, s, con un punto r-plo in P ed s-plo in Q (spezzate rispettivamente in r, s rette). Pertanto sussiste l'equivalenza lineare

$$D \equiv rA + sB ,$$

dove A, B rappresentano risp. una retta per P ed una retta per Q. Epperò sulla quadrica avremo l'equivalenza

$$C \equiv rL + sM , \tag{38}$$

dove L è la generatrice della quadrica corrispondente a B, ed M quella che corrisponde ad A. Le curve eccezionali corrispondenti ai punti P, Q non hanno influenza sulla relazione definitiva, perché esse sono equivalenti ad L, M.

[1] Cfr. F. ENRIQUES, « Math. Annalen », Bd. 52, (1899).

Osservazione 1ª. — La relazione (36) risolve il problema della base rispetto all'equivalenza lineare sopra la superficie F considerata, e la (37) risolve il problema medesimo nei confronti dell'equivalenza algebrica. C'è da osservare che nella (36) la curva H che concorre a formare la base, non rimane la medesima al variare della curva C. Si potrebbe tuttavia verificare che la indeterminazione della curva H è soltanto in un sistema continuo di serie lineari di gruppi di curve L. Questo è un fatto particolare che rientra in una proprietà generale su cui c'intratterremo quando svilupperemo la teoria della base, e che dipende essenzialmente dalla circostanza che, sopra una superficie, le curve di un determinato ordine si distribuiscono in un numero finito di sistemi continui e in *infiniti* sistemi lineari, beninteso se la superficie contiene sistemi continui completi non lineari. Quando i sistemi algebrici di curve sopra la superficie sono tutti lineari, l'equivalenza algebrica si riduce all'equivalenza lineare ed allora vale più precisamente la relazione analoga alla (37), dove il segno $\equiv$ si riduce a $\equiv$, come è appunto il caso della quadrica.

Osservazione 2ª. — Dall'equivalenza (38) si trae $[C, C] = 2rs$, epperò $[C, C] \neq -1$. Donde segue che sulla quadrica non può esistere nessuna curva eccezionale di 1ª specie (n. 109).

121. *Il genere lineare sulle superficie con infinite curve eccezionali: modelli privi di curve eccezionali di 1ª specie.* — Consideriamo ora le superficie con infinite curve eccezionali: cioè razionali o riferibili a rigate (pag. 243). Cominciamo a dimostrare che tanto nell'uno che nell'altro caso esistono modelli privi di punti multipli e di curve eccezionali di 1ª specie.

Per le superficie razionali, il piano (od ogni superficie d'ordine invariantivo relativo 1) è un modello siffatto. Invero sul piano Φ ogni curva ha il grado virtuale positivo (m^2, se m è il suo ordine positivo o negativo), epperò non possono esistere su Φ curve eccezionali di 1ª specie (n. 109).

Nel caso di una superficie F riferibile a rigata di genere $p > 0$, occorre costruire anzitutto un modello di F, che sia una *rigata* Φ senza punti multipli. Basta all'uopo considerare in due spazi S_r , S'_r sghembi tra loro (cioè congiunti da un S_{2r+1}), due curve Γ, Γ' prive di punti multipli, birazionalmente equivalenti al fascio irrazionale, di genere $p > 0$, esistente su F, e congiungere le coppie di punti omologhi in una corrispondenza birazionale tra Γ e Γ'. Si riconosce subito che il luogo delle congiun-

genti è una rigata Φ priva di punti multipli. Essa è inoltre birazionalmente equivalente alla superficie F. Basta invero considerare, sulla F e sulla Φ, due gruppi di tre curve unisecanti le curve dei due fasci razionali, perché dalla identità birazionale delle unisecanti segua la possibilità di porre una corrispondenza birazionale tra le curve dei due fasci considerate come elementi, e dalla determinazione razionale di terne di punti sopra due curve corrispondenti segua la possibilità di stabilire una corrispondenza proiettiva tra due curve (razionali) siffatte. Donde infine si deduce l'esistenza di una corrispondenza birazionale tra F e Φ.

Proviamo infine che sopra Φ non esistono curve eccezionali di 1ª specie, pur esistendovi infinite curve eccezionali di 2ª specie (le sue generatrici). Infatti, qualora vi fosse una curva eccezionale di 1ª specie E, questa, non potendo essere né una generatrice, né parte di una generatrice, sarebbe incontrata da ogni generatrice in $\mu \geqslant 1$ punti. Ma questo è assurdo perché, essendo E razionale, non potrebbe essere $\mu = 1$, né $\mu > 1$ a causa del teorema di Lüroth (pag. 2) (1).

Giova sottolineare la conclusione che:

Qualunque sia la superficie F considerata esiste sempre un suo modello proiettivo Φ privo di punti multipli e di curve eccezionali di 1ª specie.

122. *Seguito: il genere lineare relativo sul piano e sopra una rigata.* — In base a quanto precede apparirebbe naturale di definire il genere lineare assoluto $p^{(1)}$ di F, come il genere lineare relativo di un modello Φ privo di punti multipli e di curve eccezionali di 1ª specie. Ma questa definizione (valevole per superficie con un numero finito di curve eccezionali) non s'adatta alle superficie con curve eccezionali di 2ª specie, perché due tali superficie possono essere in corrispondenza birazionale con elementi eccezionali, pur essendo prive di curve eccezionali di 1ª specie. Tale è il caso del piano e della quadrica, non possono porsi in corrispondenza birazionale senza eccezioni (pag. 21) e sono tuttavia ambedue prive di curve eccezionali di 1ª specie (n. 121 e n. 120, Oss. 2ª).

(1) La deduzione cadrebbe se fosse $p = 0$. Per es. sulla rigata cubica normale di S_4, priva di punti multipli e razionale, esiste una retta direttrice semplice che è eccezionale di 1ª specie, in quanto corrisponde al punto comune alle coniche del piano passanti per un punto, quando la rigata si assuma come imagine proiettiva di questo sistema.

L'invariante ω pel piano (o per una superficie lineare) si calcola considerando il sistema $|C'|$ aggiunto al sistema lineare $|C|$ delle curve irriducibili d'ordine m. Il sistema $|C'|$ è costituito dalle curve d'ordine $m-3$, epperò il sistema canonico virtuale è dato da $|K| = |C' - C| = |-3A|$, ove A è una retta del piano. La formula (32) che dà p_{-l} fornisce allora nel nostro caso (per $l = 3$) $\omega = 10$.

Invece l'invariante ω sopra una quadrica ha il valore 9. Infatti nella proiezione stereografica della quadrica sul piano, passando da questo alla quadrica s'introducono due curve eccezionali e se ne perde una, cosicché ω diminuisce di $2-1=1$ unità (n. 119). D'altronde ω si può anche calcolare direttamente sulla quadrica, osservando che le superficie cubiche segano sulla quadrica il sistema $|C|$ di sestiche canoniche del genere 4, il cui sistema aggiunto $|C'|$ è il sistema delle sezioni piane $|A|$ della quadrica. Sicché risulta $|K| = |C' - C| = |-2A|$. La formula (32) che dà p_{-l}, tenuto conto che per $|A|$ è $n = 2$, $p = 0$, porge appunto $\omega = 9$.

Procuriamoci ora il valore di ω sopra una rigata Φ di genere $p > 0$. Dimostriamo all'uopo che:

Il sistema canonico impuro (virtuale) sopra una rigata Φ è dato da

$$|G_A + H - 2A|,$$

ove A è una sezione piana o iperpiana di Φ, G_A è il gruppo delle generatrici che passano per un gruppo (A, A), e H è un gruppo canonico del fascio delle generatrici.

Ricordiamo che per costruire il sistema canonico $|K| = |C' - C|$ su Φ, è necessario partire da un sistema $|C|$ generale (n. 100), onde non si può adoperare a questo scopo il sistema delle sezioni iperpiane, che non soddisfa a questa condizione. Potremo invece assumere il sistema $|C| = |2A|$, doppio del sistema $|A|$ delle sezioni iperpiane [1].

Osserviamo preliminarmente che le curve del sistema aggiunto $|C'|$ sono composte con le generatrici L della rigata. Invero, il sistema $|K|$ sega le generatrici in -2 punti (n. 108, Oss.), e quindi, essendo $|C'| = |C + K|$, si ricava $[C', L] = 2-2 = 0$. Le curve C' non incontrano dunque le generatrici L,

[1] Il sistema $|C|$ è semplice e generale e la sua imagine proiettiva è un modello privo di punti multipli nel quale alle generatrici di Φ corrispondono coniche.

e pertanto ogni C' consta di generatrici od equivale linearmente ad un gruppo di generatrici, se è virtuale (n. 120). Ciò posto facciamo tendere per continuità una curva C ad una spezzata in due sezioni iperpiane della rigata, A_1, A_2. Sulla curva variabile C, il sistema aggiunto $|C'|$ sega la serie canonica, onde sulla curva spezzata $A_1 + A_2$, il sistema stesso sega la serie canonica d'equivalenza, i cui gruppi sono costituiti (nn. 95, 96) dalla somma di un gruppo canonico su A_1, di un gruppo canonico su A_2, e del doppio del gruppo (A_1, A_2) (che sopra $A_1 + A_2$ va considerato come gruppo di punti doppi virtualmente inesistenti).

Indichiamo allora con G_A il gruppo delle L passanti per (A_1, A_2) e sia inoltre H un gruppo canonico di generatrici entro al fascio delle generatrici della rigata. La curva $H + G_A$ sega un gruppo canonico sopra $A_1 + A_2$.

Ora una curva C' e la curva $H + G_A$ sono linearmente equivalenti su Φ. Infatti esse segano su $A_1 + A_2$ gruppi razionalmente equivalenti (perché segano gruppi della serie d'equivalenza canonica di $A_1 + A_2$); e da ciò segue che C' , $H + G_A$ appartengono alla stessa serie lineare di gruppi di generatrici L, chè altrimenti segherebbero su ciascuna componente A_1 o A_2 gruppi disequivalenti linearmente, e, pel teorema fondamentale sulle serie d'equivalenza sulle curve riducibili (n. 72), non sarebbero razionalmente equivalenti i gruppi segati su $A_1 + A_2$. Dunque $H + G_A$ è equivalente linearmente ad una curva C', cioè può scriversi

$$|C'| = |H + G_A| .$$

Poiché $|K| = |C' - C|$, segue la relazione da dimostrarsi

$$|K| = |G_A + H - 2A| .$$

Osservazione 1ª. — Per costruire il sistema canonico impuro sopra la rigata Φ si può anche tentare la via che segue.

Si consideri su Φ un fascio lineare $|C|$ individuato dalla $C = A_1 + A_2$ e da un'altra generica C. Questo fascio ha soltanto punti base semplici ordinari e curve C nodate. Tra queste curve vi è in particolare la $A_1 + A_2$; ma ognuna delle parti A_1 , A_2 interseca in un numero > 0 di punti (base) le C del fascio. Cosicché $|C|$ può essere benissimo usato per decidere l'equivalenza di due curve che stacchino sulle sue C gruppi equivalenti, in quanto la differenza di quelle due curve avendo zero intersezioni con le C non può equivalere ad una curva composta con le A_1 , A_2, cioè colle A. Ciò posto, sia T la curva dei contatti di $|C|$ col fascio

delle generatrici; curva che passa semplicemente pei punti base di $|C|$ e pei punti del gruppo jacobiano del fascio, tra i quali trovansi i punti del gruppo (A_1, A_2). Designato con H un gruppo canonico nel fascio delle generatrici, pel significato funzionale della formula di ZEUTHEN (1), segue che $T + H$ sega su ogni C un gruppo equivalente ad un gruppo canonico di C più il gruppo base. Epperò $T + H \equiv C + C'$, donde

$$K \equiv C' - C \equiv T + H - 2C \equiv T + H - 4A \ . \tag{39}$$

Dobbiamo cercare di esprimere T mediante A e le generatrici. Poiché T è una curva bisecante delle generatrici, segue (pel I criterio di equivalenza):

$$T \equiv 2A + B \ ,$$

dove B è un gruppo conveniente, effettivo o virtuale, di generatrici. Si riconosce subito che B equivale algebricamente (non linearmente) ad un gruppo di m generatrici, o ad una generatrice contata m volte, poiché da (39) segue

$$[K, A] = [T, A] + [H, A] - 4[A, A] \ ,$$

ed essendo $[K, A] = 2p - 2 - m$, $[H, A] = 2p - 2$, $[A, A] = m$, e quindi $[T, A] = 3m$ (2); si conclude che $[B, A] = m$.

Ai fini di valutazioni aritmetiche la curva $T + H - 4A$ può sostituirsi con una curva $(m + 2p - 2)L - 2A$, e da ciò discende il valore di ω.

Ma si può anche approfondire ulteriormente la natura geometrica del gruppo B. All'uopo si osservi che i gruppi D di generatrici che toccano le singole C, al variare di C, descrivono nel fascio di generatrici una serie razionale e quindi sono equivalenti fra loro. In particolare tra questi gruppi vi è il gruppo $2G_A$, ove G_A sia il gruppo delle generatrici che escono dai punti (A_1, A_2), cioè dai nodi della curva $A_1 + A_2$, ciascuno dei quali assorbe due contatti, perché $A_1 + A_2$ ha molteplicità di intersezione 2 con T in ciascuno dei predetti punti. Dunque $D \equiv 2G_A$. Ora, siccome D stacca su ogni C il gruppo 2Ξ, Ξ essendo il gruppo dei punti di

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 208.

(2) Lo stesso si conclude così. Denotiamo con ξ il numero dei punti di contatto di generatrici con una C e con π il genere di una C. Allora dalla formula di ZEUTHEN si ha $2\pi - 2 = \xi + 4(p - 1)$, e da $C \equiv A_1 + A_2$, $\pi = 2p + m - 1$, onde $\xi = 2m$. Epperò, tenuto conto che T passa pel gruppo base di $|C|$ costituito da $4m$ punti, $[T, C] = 2m + 4m = 6m$, $[T, A] = 3m$.

contatto, così $2G_A$ stacca un gruppo equivalente a 2Ξ, epperò $2G_A + 2H$ stacca su ogni C un gruppo $2\,(C', C)$, onde

$$2G_A + 2H \equiv 2C' \ , \ 2K \equiv 2\,(C' - C) \equiv 2\,(G_A + H - 2A) \ ,$$

$$2\,(T + H - 4A) \equiv 2\,(G_A + H - 2A) \ , \ 2T \equiv 2G_A + 2A \ ,$$

ossia $2B \equiv 2G_A$. Ma non si può da ciò dedurre che $B \equiv G_A$, come è realmente, e si determina così soltanto il sistema bicanonico.

Osservazione 2ª. — Il sistema canonico d'una rigata di genere p può altresì costruirsi riguardando la rigata come superficie F rappresentatrice del prodotto (pag. 94) di due curve C, Γ, di cui C razionale e Γ di genere p [1].

Occorre all'uopo trasportar nel campo virtuale la costruzione del sistema canonico effettivo, sul prodotto di due curve di generi > 0. Com'è noto [2] (e come si ritroverà in seguito), il sistema canonico d'un tal prodotto è la somma delle serie canoniche effettive dei due fasci unisecantisi, che la superficie contiene. Il risultato si trasporta subito nel campo virtuale (ved. il n. 142).

Nel caso della F sopra definita il sistema canonico virtuale è dunque somma della serie canonica H del fascio di genere p, tracciato su F, e di quella del fascio lineare $|A|$, *privo di punti base*, che rappresenta i prodotti dei punti di C per Γ. E siccome la serie canonica di $|A|$ è $|-2A|$, ne deriva che il sistema canonico virtuale tuale su F è $|H-2A|$. Se si passa ad un modello Φ in cui il fascio lineare $|A|$ abbia m punti base (semplici), vi sono nel passaggio da F a Φ certe curve del fascio di genere p, che si mutano nei punti base del nuovo fascio $|A|$ ed m punti di F che si mutano nelle generatrici di Φ passanti pel gruppo base di $|A|$. Applicando le nozioni generali relative al modo di trasformarsi del sistema canonico, si verifica facilmente che su Φ, per ottenere il sistema canonico, occorre aggiungere ulteriormente il gruppo delle predette m generatrici.

[1] Un modello proiettivo privo di punti multipli rappresentante *senza eccezioni* il prodotto di due curve si costruisce agevolmente; ved. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 194. Su tal modello i prodotti dei punti di ciascuna delle due curve per l'altra son rappresentati da due fasci unisecantisi, *privi di punti base*; ved. queste Lezioni a pag. 101 o il citato *Tratato* a pag. 194.

[2] PICARD-SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris, Gauthier-Villars, t. I, 1897), pag. 196; MARONI, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », (1903); DE FRANCHIS, « Rend. del Circolo mat. di Palermo », (1903).

Osservazione 3ª. — Il sistema aggiunto $|A'|$ al sistema $|A|$ delle sezioni iperpiane della rigata Φ considerata al principio del n., è, a norma della definizione generale di sistema aggiunto (n. 101), il sistema $A + K \equiv G_A + H - A$. Questo sistema è necessariamente virtuale, perchè una sua curva sega le generatrici L in -1 punti. Si presenta qui *la circostanza paradossale che il sistema virtuale* $|A'|$ *sega su* A *una serie effettiva* (*la serie canonica*).

Invero, su A è:

$$(A\ ,\ A') \equiv (A\ ,\ G_A) + (A,\ H) - (A,\ A)\ ,$$

e d'altronde il gruppo (A, A), essendo « proiettato » mediante le L secondo un gruppo della serie lineare completa individuata dalle proiezioni colle L dei gruppi della serie caratteristica segata su una A da $|A|$ [1], è equivalente ad (A, G_A). Pertanto, a meno di un'equivalenza lineare su A, il gruppo (A, A') riducesi ad un gruppo (A, H) cioè ad un gruppo canonico effettivo.

La cosa non deve sorprendere, perchè un ente virtuale, in quanto è definito a meno di un'equivalenza (lineare, nel caso attuale), può benissimo equivalere ad un ente effettivo (e si dice effettivo, quando ciò avviene). E viceversa, di ogni ente effettivo esiston sempre enti virtuali equivalenti.

E' anche interessante porre in rilievo che la serie canonica completa su A è effettivamente segata dal sistema lineare $|H|$ composto col fascio delle L; ma $|H|$ non è aggiunto ad A. L'aggiunto $|A'|$ sega la stessa serie, ma non è effettivo; e le curve A', H non son equivalenti, appunto perchè $|A|$ non è un sistema generale.

123. *Seguito e fine: esistenza del massimo di* ω *per ogni superficie.* — Si osserverà che, se si parte da un altro sistema $|B|$ di unisecanti delle generatrici (anzichè dal sistema delle sezioni iperpiane $|A|$), e si chiama $|G_B|$ la serie lineare di gruppi di generatrici analoga a $|G_A|$, risulta $G_A - 2A \equiv G_B - 2B$, cioè $2(A - B) \equiv \equiv G_A - G_B$; il che è ben d'accordo col fatto che due unisecanti delle generatrici differiscon su Φ per gruppi di generatrici (n. 120).

L'espressione $G_A + H - 2A$, di una curva canonica impura K, permette il calcolo di ω, genere virtuale di K. Per ottenere più rapidamente il risultato calcoliamo ω', grado virtuale di K. Si ha

[1] Questa serie del fascio delle generatrici, non muta al variare di A in $|A|$, perchè le serie relative a due curve distinte A_1, A_2 hanno in comune il gruppo di generatrici proiettante (A_1, A_2).

$$\omega' = [K , K] = [G_A + H - 2A , G_A + H - 2A] = [G_A , G_A] +$$
$$+ [H , H] + 4 [A , A] + 2 [G_A , H] - 4 [G_A , A] - 4 [A , H] ,$$

e siccome:

$$[G_A , G_A] = [H , H] = [G_A , H] = 0 , [A , H] = 2p - 2 ,$$
$$[A , A] = [G_A , A] = m \ (m = \text{ordine di } \Phi) ,$$

risulta:

$$\omega' = -8 (p - 1) , \ \omega = \omega' + 1 = -8 (p - 1) + 1.$$

Dimostriamo infine che:

I valori $\omega = 10, \omega = -8 (p - 1) + 1$ *del genere lineare relativo* ω *sul piano e sopra una rigata di genere* $p > 0$, *sono rispettivamente i massimi raggiunti da* ω *su tutte le trasformate birazionali di queste superficie.*

Cominciamo da una superficie razionale. La base sul piano Φ è data da una retta, nel senso che una curva d'ordine m è equivalente (linearmente) al multiplo secondo m di una retta. Qual'è la base sopra una superficie razionale qualunque F?

Supponiamo che in una corrispondenza birazionale tra Φ ed F vi siano e punti di Φ che si mutano in altrettante curve eccezionali (di 1ª o di 2ª specie) $P_1, \ldots, P_e$ su F, mentre e_1 curve (di 2ª specie) di Φ si mutano in e_1 punti di F [1]. Allora ogni curva di F si esprime come combinazione lineare della curva R di F, corrispondente ad una retta generica del piano, e delle curve $P_1, \ldots, P_e$. Così per es., se una curva generica C d'ordine m del piano, variando passa per il punto omologo di P_1 colla molteplicità $s \geqslant 1$, la curva C_1 corrispondente si esprime con la combinazione $mA - sP_1$. Ma se $e_1 > 0$, le curve $P_1, \ldots, P_e$ non sono tra loro indipendenti. Sia infatti D_1 una curva (eccezionale di 2ª specie), d'ordine μ_1, del piano Φ, che si muti nel punto Q_1 di F. Vi saranno allora taluni (uno almeno) degli e punti di Φ che si mutano in curve, situati su D_1, per guisa che le curve, eccezionali P ad essi omologhe passeranno per Q_1 e costituiranno insieme (contando ciascuna colla molteplicità con cui D_1 passa pel corrispondente punto di Φ) una curva equivalente a $\mu_1 R$. Si avrà quindi un'equivalenza lineare a coefficienti interi fra le P ed R. Sia

$$s_1' P_1 + s_2' P_2 + \ldots + s_e' P_e \equiv \mu_1 R$$

[1] Il numero delle curve eccezionali che spariscono in una trasformazione birazionale tra due superficie qualunque Φ, F, non supera il numero (finito) dei punti base del sistema lineare corrispondente su F alle sezioni piane o iperpiane di Φ. E similmente con lo scambio delle veci di Φ, F.

la relazione trovata, ove le s son numeri interi positivi o nulli, ma non tutti nulli. Una s è nulla, quando il punto di Φ che corrisponde alla P di cui quella s è coefficiente, non giace su D_1.

Similmente si avranno le relazioni analoghe:

$$s_1'' P_1 + s_2'' P_2 + \ldots + s_e'' P_e \equiv \mu_2 R,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_1^{(e_1)} P_1 + s_2^{(e_1)} P_2 + \ldots + s_e^{(e_1)} P_e \equiv \mu_{e_1} R,$$

in corrispondenza alle altre curve eccezionali (di 2ª specie) D_2,..., D_{e_1} del piano Φ.

Ora affermiamo che le e_1 equivalenze lineari trovate sono indipendenti: ossia che non esistono interi positivi o negativi o nulli, ma non tutti nulli, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{e_1}$, tali che sommando a membro a membro le predette equivalenze, dopo averle moltiplicate per questi interi, ciascuno dei due membri dell'equivalenza risultante svanisca (si riduca allo zero dell'equivalenza lineare).

Invero, in caso contrario, valgono le

$$\lambda_1 s_1' + \lambda_2 s_1'' + \ldots + \lambda_{e_1} s_1^{(e_1)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 s_e' + \lambda_2 s_e'' + \ldots + \lambda_{e_1} s_e^{(e_1)} = 0,$$

$$\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_{e_1} \mu_{e_1} = 0,$$

e tenendo conto che le s son le molteplicità delle D nei punti omologhi di P_1, ..., P_e, passando al piano Φ si conclude che fra P_1, ..., P_{e_1} sussiste l'equivalenza:

$$\lambda_1 D_1 + \ldots + \lambda_{e_1} D_{e_1} \equiv 0,$$

intendendosi che i simboli D_1, ..., D_{e_1} denotano le curve stesse colle molteplicità *assegnate* s nei punti omologhi delle P. Ebbene questo è assurdo.

Invero, ogni D è fondamentale pel sistema lineare di curve di Φ imagine del sistema delle sezioni iperpiane di F, in quanto i punti omologhi delle P si considerano assegnati colle loro molteplicità effettive; cioè tutte le intersezioni di una D colle curve di quel sistema sono assorbite dai punti base. Perciò è fondamentale ogni curva multipla di una D colle molteplicità assegnate che le risultano; ed ogni combinazione lineare di curve D a coefficienti interi e positivi. Ma (e questo è il punto essenziale) una siffatta combinazione lineare non può mai variare in un sistema lineare

infinito con quelle molteplicità assegnate, perchè sarebbe sempre fondamentale pel suddetto sistema lineare e d'altronde un sistema lineare irriducibile non può ammettere che un numero finito di curve fondamentali. Se nell'ultima equivalenza scritta non tutte le λ fossero nulle, ne trarremmo un'equivalenza lineare fra due curve fondamentali distinte: il che implicherebbe la variazione di ciascuna di queste in un sistema lineare infinito. È in tal modo dimostrata l'assurdità dell'ammessa ipotesi.

Così si vede che le curve di F si esprimon tutte come combinazioni lineari di certe $e+1-e_1$ fra esse. E siccome questo numero deve essere $\geqslant 1$, si conclude che $e \geqslant e_1$. Ora il carattere ω di F è espresso (n. 199) da $10+e_1-e$; epperò è $\leqslant 10$.

In modo simile si dimostra che se una rigata Φ di genere $p>0$ si trasforma birazionalmente in una superficie F, in guisa che e punti di Φ si mutino in curve di F, mentre e_1 curve di Φ si mutano in punti di F, le curve di F si esprimono per $2+e-e_1$ di esse, e siccome $2+e-e_1 \geqslant 2$, così $e \geqslant e_1$, e quindi l'ω di F è $\leqslant$ all'ω di Φ.

Si può pertanto assumere come definizione generale del genere lineare assoluto $p^{(1)}$ *per una superficie qualunque, il massimo valore di* ω *sulle superficie birazionalmente equivalenti.* E si ha così un invariante assoluto definito per tutte le superficie.

Osservazione. — Il ragionamento precedente può applicarsi ad una superficie qualunque F, tenuto conto della base delle sue curve, la quale esiste sempre come vedremo in un successivo capitolo [1].

Il numero ρ delle curve della base ha invero un minimo su qualche superficie Φ della classe. Se quindi in una corrispondenza birazionale tra Φ ed F vi sono e, e_1 punti rispettivi di Φ, F che si mutano in curve di F, Φ, il numero base di F risulterà $\rho+e-e_1$ [2], e siccome questo numero è $\geqslant \rho$, così sarà sempre $e \geqslant e_1$. *Resta dunque dimostrata l'esistenza di un massimo* $p^{(1)}$ *del genere lineare relativo di una superficie qualunque; e ciò indipendentemente dalla determinazione delle superficie con infinite curve eccezionali.*

[1] Per le indicazioni bibliografiche in proposito ved. alla fine di questo capitolo.

[2] La relazione $\rho_1+e_1=\rho+e$ fra i numeri base di Φ, F segue del resto collo stesso procedimento del n. 117, Oss., tenuto conto del modo di trasformarsi della base con una trasformazione che introduca una sola curva eccezionale (di 1ª specie).

124. *Relazione tra le serie d'equivalenza invarianti d'un sistema lineare* $|C|$ *e del suo aggiunto* $|C'|$. — Consideriamo il sistema $|C + C'|$. Esso ha per aggiunto $|2C'|$ (n. 101), sicché $(C + C', 2C')$ è un gruppo canonico $M(C + C')$ di $C + C'$. D'altronde (n. 107):

$$M(C + C') \equiv M(C) + M(C') + 2(C, C');$$

dunque

$$M(C) + M(C') \equiv 2(C', C'), \tag{40}$$

cioè:

La somma della serie canonica d'un sistema lineare e della serie canonica dell'aggiunto uguaglia il doppio della serie caratteristica di questo.

Designati con p, p' i generi virtuali di C, C' e con n' il grado virtuale di C', l'interpretazione numerativa della (40) porge:

$$p + p' - 2 = n'. \tag{41}$$

Osserviamo inoltre che da $C' \equiv C + K$, ove K è al solito una curva canonica virtuale della superficie, deducesi:

$$(C', C') \equiv (C, C) + (K, K) + 2(C, K) \equiv (C, C) + (K, K) + \\ + 2(C, C' - C) \equiv (K, K) + 2(C, C') - (C, C),$$

epperò:

$$n' = \omega + 4(p - 1) - n + 1. \tag{42}$$

Applicando poi a $C' = |C + K|$ la formula che fornisce il genere della somma di due curve, si ha:

$$p' = \omega + 3(p - 1) - n. \tag{43}$$

Le (42), (43) esprimono grado e genere virtuali del sistema aggiunto a un dato sistema lineare, mediante gli analoghi caratteri di questo e il genere lineare relativo della superficie.

125. *La serie canonica del sistema jacobiano d'un sistema lineare* $|C|$. — Designato con $|C_j|$ il sistema jacobiano di $|C|$, cioè (n. 102) il sistema $|3C + K|$, risulta altresì (n. 101):

$$|C_j'| = |2C + C' + K|,$$

epperò:

$$(44)\quad (C_j, C_j') \equiv (3C + K, 2C + C' + K) \equiv 6\,(C, C) + 3\,(C, C') + \\ + 5\,(C, K) + (K, C') + (K, K) \equiv 6\,(C, C) + 3\,(C, C') + \\ + 5\,(C, K) + (K, C + K) + (K, K) \equiv 6\,(C, C) + 3\,(C, C') + \\ + 6\,(C, C' - C) + 2\,(K, K) \equiv 9\,(C, C') + 2\,(K, K) \equiv \\ \equiv 9\,(C, C') + 2\,\Omega.$$

La conclusione è che:

La serie canonica del sistema jacobiano d'un sistema lineare $|C|$ *è la somma del doppio della serie canonica impura della superficie e del 9-plo della serie canonica di* $|C|$.

Numerativamente dalla (44) segue la relazione:

$$(45)\qquad \omega = \pi - 9\,p + 9,$$

che esprime ω mediante i generi virtuali π, p di C_j, C.

126. *Gruppo cuspidale d'una rete: sua relazione colla somma della serie di* SEVERI *e della serie canonica impura della superficie.* — Sulla superficie F, sia $|C|$ una rete generale, anzi priva di punti base (come p. es. la rete segata sopra un modello di F, con singolarità ordinarie in S_3, da una stella generica di piani). In queste condizioni il grado n ed il genere virtuali p di $|C|$ coincidono col grado e col genere effettivi della generica C.

La rete $|C|$ possiede un numero finito ($\geqslant 0$) di curve dotate ciascuna di una cuspide (ordinaria). Diremo Q il gruppo di queste χ cuspidi. Si tratta di trovare una relazione d'equivalenza tra Q, le serie covarianti di $|C|$ (serie caratteristica e canonica) e le serie invarianti di F (serie di SEVERI e serie canonica).

Poiché $|C|$ è generale, la jacobiana C_j della rete non ha punti multipli. Su essa le C segan gruppi (n. 102)

$$(46)\qquad (C, C_j) \equiv 2\,(C, C) + (C, C'),$$

e il numero dei punti di uno di questi gruppi è dato da:

$$N = [C, C_j] = 2n + 2p - 2.$$

Per avere l'espressione di Q, rappresentiamo F sopra un piano n-plo α, mediante la rete $|C|$. Facciamo cioè l'imagine proiettiva della rete (n. 16), ottenendosi così una corrispondenza $(1, n)$ fra il piano α e la superficie F: ad un generico punto di α, come centro di un fascio di rette, corrispondon gli n punti base del fascio di $|C|$ omologo di quel fascio di rette, nell'omografia tra la

rete delle rette del piano e la rete $|C|$. La curva C_j apparisce come luogo dei punti doppi dell'involuzione razionale generata dalla rete. La curva omologa C_j^* di α, cioè il luogo dei punti del piano a ciascuno dei quali ne corrispondono su F due coincidenti, dicesi la *curva di diramazione* del piano n-plo (1).

La C_j^* è in corrispondenza birazionale con C_j; epperò ha lo stesso genere effettivo π di C_j. Il suo ordine è N, in quanto alle C corrispondono le rette C^* di α. Le sue tangenti sono le imagini delle C aventi un punto doppio nei singoli punti di C_j, perché ognuna di tali C ha nel relativo punto doppio molteplicità d'intersezione 2 con C_j.

Esaminiamo quale particolarità presentano le tangenti di C_j^*, che rappresentano le C cuspidate. Sia $\bar{C}$ una C cuspidata in P. Il gruppo jacobiano effettivo della g_n^1 segata su $\bar{C}$ dalla rete consta del punto P (ove coincidon *sopra lo stesso ramo* due intersezioni di $\bar{C}$ con un'altra C passante per P) e degli ulteriori contatti di curve C con $\bar{C}$. Ma in verità P assorbe già due punti del gruppo jacobiano virtuale di $\bar{C}$ (limite del gruppo jacobiano della g_n^1 caratteristica d'una generica C, che tenda a $\bar{C}$) pel fatto che P è doppio per $\bar{C}$; epperò complessivamente P assorbe tre intersezioni di $\bar{C}$ con C_j. Ciò significa che C_j tocca in P la tangente cuspidale.

Passando al piano α si ha dunque, in corrispondenza a $\bar{C}$, una retta $\bar{C}^*$ avente con C_j^*, nel punto P^* omologo di P, molteplicità d'intersezione 3; mentre una retta generica per P^* incontra ivi semplicemente C_j^*, in quanto una C generica per P incontra ivi semplicemente C_j. Si conclude che P^* è un flesso (ordinario) di C_j^*.

Viceversa, ad una tangente d'inflessione (ordinaria) $\bar{C}^*$ di C_j^*, corrisponde una $\bar{C}$, che ha con C_j nel punto P omologo del flesso P^*, molteplicità d'intersezione 3, mentre ogni altra C per P incontra ivi semplicemente C_j. Ne segue che il punto P su $\bar{C}$ deve assorbire 2 punti del gruppo jacobiano virtuale della g_n^1 caratteristica ed 1 punto del gruppo jacobiano effettivo: la prima circostanza dovendosi verificare, perché P è doppio per $\bar{C}$ (in quanto $\bar{C}^*$ è tangente a C_j^*) e la seconda, perché fuori

(1) Considerata sul piano n-plo α una curva irriducibile Γ^*, essa è l'imagine n-pla d'una curva Γ di F. I punti di *effettiva* diramazione della rappresentazione di Γ su Γ^*, son quelli cui corrispondon due (o più) punti di F coindenti *sullo stesso ramo* di Γ (ved. a tal proposito, F. Severi, *Trattato di G. a.*, pag. 207).

di P il predetto gruppo jacobiano effettivo possiede soltant $N-3$ punti. Dunque P è una cuspide di $\bar{C}$.

La conclusione è che le sole tangenti a rami di C_j^*, le qua abbiano col ramo nel rispettivo punto di contatto molteplici d'intersezione > 2, sono le tangenti d'inflessione rappresentan le C cuspidate.

Consideriamo ora su C_j^* la serie lineare ∞^1 il cui grupp generico J_C^* è costituito dai punti di contatto delle tangenti ma date a C_j^* da un punto variabile sopra una retta a, genericamen fissata nel piano [1]. Il gruppo J_C^* non è che l'omologo del grupp jacobiano J_C d'un fascio della rete $|C|$.

Il gruppo jacobiano della predetta serie consta del gruppo dei flessi di C_j^* e del gruppo (C^*, C_j^*) segato su C_j^* da a. può dunque scrivere l'equivalenza:

$$Q^* + (C^*, C_j^*) \equiv 2\, J_C^* + M\,(C_j^*)\,,$$

ove $M\,(C_j^*)$ è un gruppo canonico *effettivo* di C_j^*.

Ritornando alla curva C_j, si ha ivi l'equivalenza fondame tale

$$Q + (C, C_j) \equiv 2\, J_C + M\,(C_j)\,. \tag{47}$$

Tenuto conto della (46) e del fatto che (n. 125):

$$M\,(C_j) \equiv 2\,\Omega + 9\,(C, C')\,, \tag{48}$$

se ne trae:

$$Q \equiv 2\,\Omega + 2\,\{J_C - (C, C) - 2\,(C, C')\} + 12\,(C, C')\,,$$

donde finalmente si deduce:

$$Q \equiv 2\,(\Omega + S) + 12\,(C, C')\,. \tag{49}$$

perché un gruppo S, della serie di SEVERI, è dato da (n. 116

$$S \equiv J_C - (C, C) - 2\,(C, C')\,.$$

Ricordato che $|\Omega + S|$ è una serie d'equivalenza invariante ass luta nelle trasformazioni birazionali di F, si può enunciare teorema:

Presa comunque sopra una superficie F una rete generale $|C$ di cui sia $|C'|$ l'aggiunto virtuale, e indicato con Q il gruppo del cuspidi di curve della rete, la serie d'equivalenza

$$|Q - 12\,(C, C')|$$

[1] È la serie lineare duale di quella segata sulla curva duale di C^* da rette d'un fascio.

è invariante assoluta nelle trasformazioni birazionali di F ed uguaglia il doppio della somma della serie di SEVERI *e della serie canonica impura di F.*

La (49), numerativamente interpretata, porge:

$$\chi = 2(\omega - 1 + I + 4) + 24p - 24,$$

il che prova che χ è sempre un numero pari e si può scrivere:

$$\omega + I = \frac{1}{2}\chi - 12p + 9. \tag{50}$$

L'espressione $\frac{1}{2}\chi - 12p$ *è un invariante assoluto di F.* Nel n. 129 vedremo che tale invariante coincide con $12p_a$ (cosicché in definitiva χ risulta addirittura divisibile sempre per 24).

Osservazione 1ª. — È interessante esaminare quale singolarità plückeriane possiede C_j^*, oltre ai flessi già trovati.

Vi sono intanto nella rete $|C|$ taluni fasci le cui curve si osculano. Essi provengono dalle C ognuna delle quali tocca C_j in un punto P, senza aver ivi un punto doppio. Invero, il gruppo jacobiano della serie caratteristica g_n^1 su una tale C, ha in P un punto doppio, epperò [1] il punto stesso è triplo per la g_n^1, cioè punto d'osculazione delle C che passano per quel punto.

Ne deriva che il gruppo X dei punti in ciascuno dei quali si osculano le C passanti pel punto stesso, fa parte del gruppo jacobiano della serie g_N^1 staccata su C_j dalle curve di un fascio generico H della rete. I punti rimanenti di questo gruppo, sono i punti del gruppo jacobiano J_C del fascio, perché ogni curva di H, avente un punto doppio nel punto P di C_j, ha ivi con la C molteplicità d'intersezione 2. Sussiste pertanto l'equivalenza:

$$X + J_C \equiv 2(C, C_j) + M(C_j), \tag{51}$$

da cui, tenuto conto delle (46), (48), si trae *sulla superficie* l'equivalenza:

$$X \equiv 2\Omega - S + 3(C, C) + 9(C, C'). \tag{52}$$

Alle C tangenti a C_j in un punto d'osculazione P d'un fascio di curve C, rispondon su α le rette uscenti dal punto P^* (omologo di P) che risulta origine di un sol ramo di C_j^*. E poiché tutte

[1] Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 113.

queste rette hanno con C_j^* in P molteplicità d'intersezione 2, così P^* è una cuspide di C_j^* (ordinaria per la genericità di $|C|$). Viceversa, al fascio delle rette passanti per una cuspide di C_j^*, risponde su F un fascio di curve che si osculano.

Così il gruppo jacobiano della g_N^1 staccata su C_j^* da un fascio generico di rette, è costituito dal gruppo X^* delle cuspidi di C_j^* e dal gruppo J_C^* delle tangenti mandate a C_j^* dal centro del fascio. La (51) si muta pertanto sopra C_j^* nella:

$$X^* + J_C^* \equiv 2\,(C^*, C_j^*) + M\,(C_j^*)\,,$$

$M\,(C_j^*)$ essendo un gruppo canonico *effettivo* di C_j^*.

Oltre alle cuspidi, C_j^* possiede dei nodi: sia P^* uno di questi e P', P'' siano i due punti (semplici, distinti) di C_j ad esso corrispondenti. Ad una retta generica per P^* risponde una C la cui serie caratteristica g_n^1 ha due punti doppi in P', P'', perché sulla retta corrispondente due punti di diramazione coincidono con P^* (su rami distinti di C_j^*) . Al fascio delle rette di centro P^* risponde dunque un fascio di curve C, aventi fra loro un doppio contatto in P' , P''.

Designamo con Z^* il gruppo delle coppie di punti di C_j^* che cadono nei nodi e quindi con Z il gruppo corrispondente costituito dalle coppie analoghe a P' , P''. Un'aggiunta d'ordine $N-3$ (effettiva o virtuale) a C_j^* stacca sulla curva il gruppo $2X^* + Z^*$ e ulteriormente un gruppo $M\,(C_j^*)$. Pertanto:

$$Z^* \equiv (N-3)\,(C^*, C_j^*) - M\,(C_j^*) - 2\,X^*,$$

donde:

$$Z \equiv (N-3)\,(C, C_j) - M\,(C_j) - 2\,X\,,$$

da cui, tenuto conto delle (46), (48), (52) e che $N = 2n + 2p - 2$, si trae:

$$(53) \quad Z \equiv 2S - 6\,\Omega + 4\,(n+p-4)\,(C, C) + (n+p-16)\,(C, C')\,.$$

Infine, la curva C_j^* possiede, oltre ai flessi, delle tangenti doppie, che provengon dalle C aventi ciascuna due nodi. Per dualità, a C_j^* risponde una curva $\overline{C}_j^*$ d'ordine δ uguale al numero dei punti di un gruppo J_C e dotata di cuspidi in corrispondenza ai flessi di C_j^* e di nodi in corrispondenza alle tangenti doppie di C_j^*. E siccome su $\overline{C}_j^*$ il gruppo delle coppie che cadono nei nodi aumentato del doppio del gruppo delle cuspidi e d'un gruppo canonico effettivo, dà un gruppo equivalente al multiplo secondo $\delta - 3$ d'una sezione rettilinea, così avremo ritornando su C_j^*:

$$U^* + 2\,Q^* + M\,(C_j^*) \equiv (\delta - 3)\,J_C^*\,,$$

ove U^* denota il gruppo delle coppie di punti di contatto delle tangenti doppie di C_j^*. Risulta pertanto su C_j:

$$U \equiv (\delta - 3)\, J_C - 2\, Q - M\ (C_j),$$

ossia, tenuto conto che $\delta = n + 4\,p + I$:

$$(54)\quad U \equiv (n + 4 + I - 7)\, S - 6\,\Omega + (n + 4\,p + I - 3)\,(C,C) + \\ + (2\,n + 8\,p + 2\,I - 39)\,(C,C').$$

In conclusione:

Avendosi sopra una superficie F una rete $|C|$ priva di punti base e di curve fondamentali, i gruppi: a) dei punti cuspidali di curve C; b) dei punti dove si osculano fasci della rete; c) delle coppie di doppi contatti di fasci della rete; d) dei nodi di curve C aventi ognuna due punti doppi, sono rispettivamente espressi dalle equivalenze (49), (52), (53), (54). Per le varianti da introdursi in queste equivalenze quando la rete possiede punti base e curve fondamentali, ved. le notizie bibliografiche a pag. 277.

Passando dalle equivalenze ai numeri e supposta per un momento già acquisita la relazione $\omega + I = 12\,p_a + 9$, si trovano pei numeri $[Q]$, $[X]$, $[Z,]$ $[U]$ le espressioni (contenute nella Nota di Severi degli «Atti di Torino», (1902), già cit. innanzi):

$$[Q] = 24\,(p + p_a)\,;\ [X] = 3\,(n + 6\,p - I + 8\,p_a - 2),$$
$$[Z] = 4\,[(n + p)^2 - 5\,n - 17\,p + 2\,I - 18\,p_a + 6],$$
$$[U] = (n + 4\,p + I)^2 - 3\,n - 78\,p - I - 72\,p_a + 2\,.$$

Osservazione 2ª. — Gran parte delle considerazioni svolte in questo numero si presentano sotto un aspetto più elementare quando si riferiscano alla rete $|C|$ delle sezioni di una superficie F, dotata di singolarità ordinarie in S_3, coi piani di una stella generica O. La jacobiana C_j della rete è, come si è già ricordato (n. 103), la sezione di F colla prima polare di O, fuori della linea doppia, ovvero la curva di contatto del cono Γ circoscritto da O ad F. Il cono Γ ha l'ordine N e la classe δ. Esso dà come sezione con un piano generico, la curva di diramazione C_j^* della proiezione n-pla di F, sopra quel piano, da O.

Le tangenti asintotiche (cioè a contatto tripunto) di F, passanti per O, sono generatrici cuspidali di Γ (e dànno le cuspidi di C_j^*); i piani tangenti stazionari (cioè i piani tangenti ad F in punti semplici, che segan ciascuno la superficie secondo una curva con cuspide nel punto di contatto) passanti per O, sono piani tangenti d'inflessione di Γ (e le generatrici di contatto dànno i flessi di C_j^*);

le bitangenti di F per O son generatrici doppie di Γ (e dànno i nodi di C_j^*); infine i piani bitangenti di F per O son piani bitangenti di Γ (e dànno le bitangenti di C_j^*).

Le relazioni (49), (52), (53), (54) non sono in fondo che le equivalenze esprimenti nel campo funzionale, coll'intervento delle serie $|S|$, $|\Omega|$, le formule di PLÜCKER relative al cono Γ.

127. *Digressione sul significato invariantivo della linea doppia d'una superficie F dotata di singolarità ordinarie in S_3. Curve ideali.* — Prima di ricercare altre relazioni invarianti e covarianti (mediante le quali accerteremo che $\frac{1}{24}\chi - p$ coincide con p_a), è opportuno di considerare il significato invariantivo della linea nodale D di F.

Anzitutto c'è da osservare che D non esiste generalmente sull'ente invariantivo di cui F è un modello, nel senso che la curva omologa di D sull'ente invariantivo stesso, non contiene in generale una parte birazionalmente equivalente a D. Perchè vi esista, occorre e basta che la sviluppabile dei piani tangenti ad F nei punti di D sia riducibile (si spezzi in due sviluppabili birazionalmente equivalenti a D): il che generalmente non accade. In generale, invero, a D risponde, sopra un modello Φ privo di punti multipli, una linea irriducibile Δ, tale che ad un punto P di D corrispondon due punti P_1, P_2 di Δ, i quali vengono a coincidere *sullo stesso ramo* di Δ, quando P va in un punto cuspidale di F. Si ha cioè su Δ un'involuzione γ di 2^o ordine, di cui son punti doppi le imagini dei punti cuspidali [1]. L'imagine di Δ sull'ente ∞^2 formato anziché dai punti, dai piani tangenti di F, è precisamente la detta sviluppabile. Tutto questo è ovvio quando F si pensa (come sempre si può) quale proiezione di una Φ priva di punti multipli in S_5. La linea Δ è allora il luogo dei punti d'appoggio delle corde di Φ incontranti il centro di proiezione a ed i punti doppi di γ son i punti di contatto delle tangenti di Φ appoggiate ad a.

Si suol dire talvolta che la linea doppia D, considerata sull'ente ∞^2, di cui F è un modello, diviene la curva $2D$; ma questo simbolismo è impreciso, perché suppone che sia possibile considerare separatamente sull'ente ∞^2 la curva D; mentre la realtà è che sull'ente medesimo esiste una curva Δ rappresentabile

[1] I punti tripli di F non influiscono per nulla in γ. Essi, come vedremo (n. 128), dànno luogo a nodi di Δ.

doppiamente su D, col gruppo di diramazione Y costituito dagli y punti cuspidali di F.

Qualora su F, considerata come ente invariantivo, ∞^2, esista una curva D tale che $2D \equiv \Delta$, si potrà dire che $D \equiv \frac{1}{2}\Delta$. Più generalmente, data su F una curva C e considerato un intero λ tale che $\lambda D \equiv C$, si dice che C è *divisibile* per λ (nel campo delle equivalenze razionali; mentre si parla di divisibilità per λ nel campo delle equivalenze algebriche, se $\lambda D \equiv C$).

L'operazione di divisione d'una curva C per un intero (considerata da SEVERI nella teoria della base, come vedremo in seguito), quando è possibile, si riflette algebricamente nell'operazione di estrazione di radice. Supposto invero che C sia curva di livello zero d'una funzione razionale $\varphi(x, y, z)$ del punto variabile su F, se esiste una funzione razionale $\psi(x, y, z)$ tale che ψ^λ appartenga con φ ad un medesimo sistema lineare (o algebrico, se si vuole considerare la divisibilità rispetto alle equivalenze algebriche) la curva di livello zero di ψ è equivalente (linearmente o algebricamente) a $\frac{1}{\lambda}C$.

Come nel campo numerico l'estrazione di radice conduce ad ampliare il campo dai numeri reali ai complessi, così sopra una superficie la divisione delle curve per gl'interi, ove si voglia considerare sempre possibile, conduce ad ampliare il campo delle curve virtuali (in particolare effettive) colla introduzione di nuovi enti, che possiamo chiamare *curve ideali*.

Una curva ideale è un simbolo costituito preponendo una unità frazionaria $\frac{1}{\lambda}$ al simbolo di una curva virtuale. Perché questo simbolo possa utilmente usarsi, occorre definire l'uguaglianza e talune operazioni (essenzialmente la somma e la sottrazione) tra curve ideali.

Dire che $\frac{1}{\lambda}C \equiv \frac{1}{\mu}E$ (segno $\equiv$, se ci si vuol riferire all'equivalenza algebrica) significa che $\mu C \equiv \lambda E$. La somma $\frac{1}{\lambda}C + \frac{1}{\mu}E$ di due curve ideali è la curva ideale $\frac{1}{\lambda\mu}(\mu C + \lambda E)$. Similmente si definisce la differenza.

Introdotte le curve virtuali, SEVERI si pose subito la questione di determinare quand'è che una curva virtuale è effettiva; e la risolvette (come vedremo) in modo esauriente. Analogamente qui si pone la questione di sapere quand'è che una curva ideale è un'ordinaria curva virtuale o effettiva.

Intanto è chiaro che, se esiste $D \equiv \frac{1}{\lambda} C$, è $\lambda^2 [D, D] = [C, C]$ e quindi $[C, C]$ deve essere divisibile per λ^2; e inoltre, essendo $[D, E] = \frac{1}{\lambda} [C, E]$, la curva C deve incontrare ogni curva E di F in un numero di punti multiplo di λ. È da escludersi che queste condizioni aritmetiche possan esser sufficienti a caratterizzare le curve virtuali C divisibili per λ. Tuttavia esse bastano a verificare che *non sempre la curva* $\frac{1}{2}\Delta$ *esiste nel campo delle curve virtuali.*

Basta invero mostrare sopra un esempio che Δ non sega in un numero pari di punti ogni curva della superficie. Si può all'uopo assumere come superficie F la proiezione generica in S_3 della rigata razionale normale del 4° ordine, Φ, di S_4. I punti d'appoggio delle corde di Φ per un punto O di S_4 costituiscono una conica Δ irriducibile, che è segata in un sol punto dalle generatrici: perciò $\frac{1}{2}\Delta$ non può esistere come curva virtuale.

Volendo restare nel campo delle curve virtuali, senza introdurre le curve ideali, sarà dunque opportuno che, ogni qual volta nella ricerca di una relazione d'equivalenza interviene la linea doppia di F, si usi il simbolo Δ, piuttosto che il simbolo impreciso $2D$.

128. *Le relazioni tra i caratteri proiettivi d'una superficie F con singolarità ordinarie in* S_3 *ed i loro significati funzionali.* — Sia $|C|$ il sistema delle sezioni piane di F. I più importanti caratteri proiettivi di F sono i seguenti:

1) *Ordine*, cioè il grado $m = [C, C]$ di $|C|$.

2) *Rango*, cioè la classe a di una sezione piana C. Il rango è il numero dei punti d'un gruppo $2(C, C) + (C, C')$, e risulta $a = 2(m + p - 1)$, p essendo il *genere* di C. Il rango è anche l'ordine del cono Γ circoscritto ad F da un generico punto O.

3) *Classe*, cioè numero δ dei piani tangenti appartenenti ad un fascio generico, ovvero classe del cono Γ. La classe è altresì il numero dei punti del gruppo jacobiano J_C d'un fascio generico di $|C|$.

4) *Ordine d della linea nodale D.* Sussistono le relazioni:

$$d = \frac{(m-1)(m-1)}{2} - p; \quad a = m(m-1) - 2d \ .$$

5) *Genere effettivo* p *di* D.

6) *Rango* q *di* D, cioè numero delle tangenti della linea doppia, appoggiate a una retta generica. Risulta evidentemente

$$q = 2(d + p - 1), \tag{54 bis}$$

perchè D non possiede rami superlineari. Il gruppo dei punti di contatto delle tangenti di D appoggiate ad una retta generica s'indicherà con B. Esso varia in una serie lineare, mentre la retta varia nello spazio. E' un gruppo jacobiano della serie lineare segata su D dai piani dello spazio. Onde si ha su D l'equivalenza:

$$B \equiv M(D) + 2(C, D), \tag{54 ter}$$

che interpreta funzionalmente la (54 bis).

7) *Numero* t *dei punti tripli*, triplanari per F e per D. Il gruppo di questi punti *sopra* F si designerà con V, T indicando il gruppo dei punti medesimi in S_3. Il numero $[V]$ uguaglia $3t$, perchè ad ogni punto triplo, considerato in S_3, corrispondon sopra un modello di F privo di punti multipli, cioè sopra l'ente ∞^2 F, tre punti distinti.

8) Il numero y dei *punti cuspidali* (ordinari), il cui gruppo denoteremo con Y.

9) *La classe* σ *della sviluppabile dei piani tangenti ad* F *nei punti di* D; la quale sviluppabile è birazionalmente equivalente a Δ (n. prec.).

Il gruppo dei punti di contatto dei piani di questa sviluppabile passanti per un punto generico O, si designerà con Σ. Sono i punti comuni a D e all'ulteriore intersezione di F, fuori di D, colla prima polare di O, all'infuori dei punti cuspidali, che son già comuni a D e all'intersezione ulteriore con F di ogni prima polare (1).

(1) Qui si suppongon note le proprietà elementari della polarità rispetto ad una superficie di S_3 (o più generalmente ad una forma di S_r). Se $f(x_0, x_1, \ldots, x_r) \equiv f(x)$ è una forma d'ordine m nelle $x_0, \ldots, x_r$, tutte le proprietà cui si allude si condensan nella identità:

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda^n f(x) + \lambda^{n-1}\mu \Delta_y f(x) + \frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{2!}\Delta_y^2 f(x) + \ldots + \mu^n f(y),$$

derivante dalla formula di TAYLOR. Nel precedente sviluppo si è posto simbolicamente

$$\Delta_y^s = \sum y_{i_1} \ldots y_{i_s} \frac{\partial^s}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}},$$

ove $i_1 \ldots i_s$ è una qualsiasi disposizione di classe s degl'indici $0, 1, \ldots, r$. La forma $\Delta_y^s f(x) = 0$ si chiama la *polare s-esima* del punto y rispetto ad $f = 0$

10) Il numero x delle *tangenti asintotiche* (o tripunte) di F passanti per un generico punto O, ossia il numero delle generatrici stazionarie (o cuspidali) del cono Γ.

Il gruppo X dei punti di contatto di queste tangenti, costituisce, rispetto alla rete di $|C|$ segata dalla stella O, il gruppo di punti in ciascuno dei quali si osculano le curve della rete per esse passanti.

Si potrebbero poi aggiungere i caratteri $\chi = [Q]$, $z = [Z]$, $u = [U]$, relativi al cono Γ (e, se vuolsi, anche il numero delle bitangenti di F e delle tangenti asintotiche giacenti in un piano); ma questi caratteri si esprimono ovviamente pei precedenti, non appena si siano assegnate le espressioni proiettive di I e di ω: il che si vedrà tosto.

Cerchiamo ora quali relazioni numerative e funzionali passan fra i caratteri ed i gruppi definiti.

Anzitutto, siccome la prima polare di O rispetto ad F sega la superficie lungo la curva $\Delta + C_j$ (C_j jacobiana della rete staccata dalla stella O), viene:

$$(55) \qquad \Delta \equiv (m-1)\,C - C_j\,, \text{ donde } \Delta \equiv (m-4)\,C - K\,,$$
$$\Delta' \equiv (m-4)\,C\,,\ \Delta \equiv (m-3)\,C - C',$$

relazioni che si posson anche ottener direttamente quando esistono effettivi C', K.

Dalla prima delle (55) scende:

$$(56) \qquad (C, C_j) \equiv (m-1)\,(C, C) - (\Delta, C)\,,$$

la quale traduce funzionalmente la relazione numerativa

$$(56') \qquad a = m\,(m-1) - 2\,d.$$

Consideriamo ora l'intersezione di C_j colla seconda polare di O rispetto ad F. In un punto P, comune ad F e a questa seconda polare, la quadrica polare Φ di P, rispetto ad F, passa per O. Se P è semplice per F, il piano tangente ivi passa per O (perché P giace

od anche *polare d'ordine* $m-s$ (in x). Si verifica subito che se il punto x sta sulla polare d'ordine $m-s$ di y, allora y sta sulla polare s-esima di x; che la prima polare di un generico punto y passa semplicemente per ogni punto doppio della superficie F; doppiamente per i punti tripli e che nei punti cuspidali ha lo stesso piano tangente di F; che la seconda polare passa semplicemente pei punti tripli; che la polare di 1° ordine di un punto di F è il piano tangente ivi; che la polare di 2° ordine di un punto di D è la coppia dei due piani tangenti ivi; ecc.

su C_j) ed è anche piano polare di P rispetto a Φ, cioè piano tangente a Φ in P. Ne deriva che una delle due generatrici della quadrica Φ in P, passa per O. Ma siccome le generatrici di Φ in P forman la conica polare della sezione di F col proprio piano tangente, che è costituita dalle due tangenti asintotiche di F in P, si conclude che P è uno dei punti del gruppo X. Se poi P è doppio per F, uno dei due piani ivi tangenti ad F, passa per O, perché la quadrica polare di P consta di questi due piani epperò essa passa per O, in quanto P giace sulla seconda polare di O. Si ha dunque *sopra* F:

$$(57) \qquad (m-2)\,(C, C_j) \equiv X + \Sigma\ ,$$

che porge la relazione numerativa:

$$(58) \qquad a\,(m-2) = x + \sigma\ .$$

L'intersezione di D colla predetta seconda polare, la quale passa semplicemente pei punti tripli, senz'altra particolarità, dà poi luogo *sopra* D all'equivalenza:

$$(59) \qquad (m-2)\,(D, C) \equiv V + \Sigma\ ,$$

in quanto ogni punto triplo, essendo per D origine di tre rami lineari, rappresenta, sopra l'ente ∞^1 D, tre punti semplici. Dalla (59) si trae la relazione numerativa

$$(60) \qquad d\,(m-2) = \sigma + 3t\ .$$

Da quanto si è osservato in 9) risulta:

$$(61) \qquad \Sigma + Y \equiv (C_j\ ,\ \Delta)\ ,$$

donde, tenuto conto della seconda delle (55), segue:

$$\Sigma + Y \equiv (m-4)\,(C, C_j) - (K, C_j)\ ,$$

e siccome $C_j \equiv 3C + K$, si deduce in definitiva:

$$(62) \qquad \Sigma + Y \equiv (2m-5)\,(C, C) + (m-7)\,(C, C') - \Omega\ ,$$

ove $\Omega \equiv (K, K)$.

Trasformata anche la (57) mediante la relazione $C_j \equiv 3C + K$, ed eliminato Σ fra la (57) così trasformata e la (62), viene

$$(63) \qquad X - Y \equiv (C, C) + 5\,(C, C') + \Omega\ .$$

Poiché due sezioni di F, fuori di D, colle prime polari di due punti generici, O_1 , O_2, s'incontrano nei punti cuspidali e

nei punti di contatto dei piani tangenti passanti per la retta $O_1 O_2$, risulta:

$$Y + J_C \equiv (C_j, C_j) , \tag{64}$$

da cui:

$$Y + J_C \equiv 3\,(C, C) + 6\,(C, C') + \Omega . \tag{65}$$

Le (63), (65), sommate a membro a membro, porgono:

$$X + J_C \equiv 4\,(C, C) + 11\,(C, C') + 2\Omega , \tag{66}$$

donde, poiché $S \equiv J_C - 2\,(C, C') - (C, C)$ (S gruppo della serie di SEVERI):

$$S \equiv 3\,(C, C) + 9\,(C, C') + 2\Omega - X ,$$

e quindi:

$$S + \Omega \equiv 3\,(C, C) + 9\,(C, C') + 3\Omega - X , \tag{67}$$

che fornisce un'altra utile espressione della serie invariante assoluta $|S + \Omega|$ [1].

Sommando a membro a membro le (61), (64), ed eliminando Σ mediante la (57), viene, tenuto conto della prima delle (55):

$$2\,Y + J_C \equiv (C, C_j) + X , \tag{68}$$

la quale, numerativamente interpretata, dà

$$2y + \delta = a + x . \tag{69}$$

Altre relazioni, necessarie per lo scopo verso il quale tendiamo, s'ottengono coll'applicare alla involuzione di 2° ordine, che rappresenta su Δ la curva D, l'interpretazione funzionale della formula di ZEUTHEN [2]. Viene così:

$$Y + G \equiv M\,(\Delta) ,$$

ove G è il trasformato di un gruppo canonico effettivo di D e $M\,(\Delta)$ un gruppo canonico effettivo di Δ. Un tal gruppo non è però coincidente con un gruppo canonico virtuale (Δ, Δ') su Δ, perché la curva Δ ha, sull'ente F, $3t$ nodi, ciascun dei quali dunque contribuisce con 2 unità ad un gruppo canonico virtuale, quando si voglia esprimere questo mediante un gruppo canonico

[1] Quest'espressione trovasi dedotta in modo un po' diverso nei lavori di L. CAMPEDELLI e di B. SEGRE citati più tardi.

[2] SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 209.

effettivo (n. 112). La curva Δ ha 3 nodi in corrispondenza a ciascuno A dei punti tripli di F, perché la linea D ha due rami per ciascuna delle tre falde di F aventi l'origine in A. Sarà dunque:

$$(\Delta, \Delta') \equiv M(\Delta) + V_1 ,$$

ove V_1 è il gruppo delle coppie di punti di Δ che cadon nei suoi $3t$ nodi.

Tenuto conto della precedente e della terza delle (55), ne segue:

$$Y + G + V_1 \equiv (m - 4)(C, \Delta) . \tag{70}$$

Se si passa alla curva D, colla corrispondenza (2,1) fra Δ e D, ricordato che gruppi equivalenti si mutano in gruppi equivalenti [1], si deduce dalla (70):

$$Y + 2M(D) + 2V \equiv 2(m - 4)(D, C) ,$$

ove $M(D)$ è un gruppo canonico effettivo di D.

In virtù della (59) viene poi sopra D, tenuto conto della (54 ter):

$$Y \equiv 2\Sigma - 2B . \tag{72}$$

L'interpretazione numerativa della (72) porge infine:

$$y = 2\sigma - 2q . \tag{73}$$

Le relazioni numerative (54 *bis*), (56'), (58), (60), (69), (73), *che legano i dieci caratteri proiettivi introdotti per* F, *li riducono a quattro indipendenti* (*p. es.* m, δ, a, y). *Esse sono funzionalmente interpretate dalle equivalenze* (54 ter), (56), (57), (59), (68), (72).

Osservazione. — È opportuno d'indicare un'altra via mediante la quale può rapidamente conseguirsi la (72).

Si fissi nello spazio una retta b e si chiamino omologhi due punti P, P' di b quando son segati da due piani tangenti ad F in un medesimo punto di D. La corrispondenza algebrica fra P, P' è simmetrica ed i suoi punti uniti sono le intersezioni di b coi piani tangenti nei punti cuspidali e colle tangenti di D. Ciascuno U dei punti uniti della seconda categoria conta 2 volte nel gruppo dei punti uniti, perchè la corrispondenza è simmetrica e due dei P' omologhi di P tendono con P ad U per $P \to U$ [2].

[1] Severi, *Trattato di G. a.*, pag. 207.
[2] Ved. Bertini, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, pag. 480.

L'equivalenza esprimente il gruppo dei punti uniti d'una corrispondenza sopra una retta [1], tenuto conto che nel passaggio da b a D gruppi equivalenti mutansi in gruppi equivalenti, conduce senz'altro alla (72).

129. *L'invarianza del genere aritmetico e la relazione di* NOETHER. — Le relazioni ottenute nel n. prec. consentono di assegnare ω, I in funzione dei caratteri proiettivi m, d, ρ, t, per mezzo dei quali (pag. 210) abbiamo già espresso p_a e di dedurne una notevolissima relazione tra ω, I, p_a, donde trarremo senz'altro l'invarianza di p_a nelle trasformazioni birazionali di F.

Eliminando anzitutto y, x, σ fra le (69), (73), (58), (60), si ricava:

$$\delta = a\,(m-1) + 4\,q + 15\,t - 5\,d\,(m-2)\ ,$$

e, per la (54 bis), viene:

$$\delta = a\,(m-1) + 8\,d + 15\,t + 8\,\rho - 8 - 5\,d\,(m-2)\ .$$

Ricordata la (56′), si deduce

$$\delta = m\,(m-1)^2 - d\,(7\,m-20) + 15\,t + 8\,\rho - 8\ , \tag{74}$$

espressione di δ mediante m, d, ρ, t.

Da ciò si trae l'espressione di I in funzione degli stessi caratteri, perché:

$$I = \delta - m - 4\,p = \delta - m - 2\,(m-1)\,(m-2) + 4\,d = \tag{75}$$
$$= (m-1)\,(m^2 - 3\,m + 3) - d\,(7\,m - 24) + 15\,t + 8\,\rho - 9\ .$$

L'espressione di ω si ottiene dalla (63), che dà luogo alla relazione numerativa:

$$\omega - 1 = x - y - m - 10\,(p-1) = x - y - m - 5\,m\,(m-3) + 10\,d\ .$$

Eliminando x, y, σ fra la precedente e le (58), (60), (73), si ricava:

$$\omega = (m-1)\,(m^2 - 7\,m + 9) - d\,(5\,m - 24) + 9\,t + 4\,\rho + 6\ . \tag{76}$$

Le (75), (76), sommate a membro a membro, porgono infine:

$$\omega + I - 9 = 12\left\{\binom{m-1}{3} - d\,(m-4) + 2\,t + \rho - 1\right\}.$$

[1] SEVERI, *Trattato di G. a.*: equivalenza (15) di pag. 221.

Tenuto conto dell'espressione di p_a (pag. 210), si perviene in tal guisa alla *relazione di* NOETHER:

$$\omega + I = 12\,p_a + 9\,. \tag{77}$$

Siccome $\omega + I$ è un invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di F (n. 119), concludiamo senz'altro che:

Il genere aritmetico d'una superficie F è un invariante assoluto nelle trasformazioni birazionali di F, il quale si esprime mediante gl'invarianti relativi ω, I colla relazione di NOETHER (77).

Inoltre, ricordata la (50) del n. 126:

Il genere aritmetico si esprime mediante il numero χ delle curve cuspidate e il genere p d'una rete generale $|C|$ senza punti base, tracciata sopra la superficie, colla relazione di SEVERI:

$$p_a = \frac{1}{24}\,\chi - p\,.$$

Infine:

La serie, invariante assoluta per trasformazioni birazionali, somma della serie di SEVERI *e della serie canonica impura della superficie, ha l'ordine*:

$$(\omega - 1) + (I + 4) = 12\,(p_a + 1)\,,$$

epperò la serie doppia $|Q - 12\,(C, C')|$, ove Q è il gruppo cuspidale della rete $|C|$, avente per sistema aggiunto $|C'|$, ha l'ordine $24\,(p_a + 1)$.

Osservazione. — In quanto precede son intervenute le sole serie invarianti $|S|$, $|\Omega|$, mediante le quali abbiamo potuto esprimere tutte le serie invarianti e covarianti considerate [1]. Lo stesso è da presumersi avvenga per ogni serie d'equivalenza invariante o covariante, *che abbia una definizione valevole sopra una qualunque superficie.*

La questione non è stata risoluta neanche per le curve. Per queste ultime si tratta di provare che ogni serie invariante riducesi alla serie canonica e che ogni serie covariante d'una data serie lineare, la quale sia definibile sopra ogni curva a moduli generali, si esprime come combinazione lineare della serie lineare data e della serie canonica della curva. Per le superficie bisogna

[1] Nell'espressione di serie covarianti di date serie d'equivalenza, cioè di serie razionalmente determinate da queste, intervengono altresì, naturalmente, anche le date.

provare che una serie invariante definibile sopra ogni superficie è una combinazione lineare delle $|S|, |\Omega|$, e che una serie covariante d'un sistema lineare $|C|$, definibile sopra ogni superficie, si esprime come combinazione lineare di $|(C, C)|$, $|(C, C')|$, $|S|$, $|\Omega|$.

Una volta risposto affermativamente alle questioni accennate, ne deriverà l'ovvia conseguenza che ogni carattere proiettivo d'una curva C di S_r, a moduli generali, si esprime per mezzo di due soli caratteri proiettivi indipendenti (p. es. ordine e genere della curva o ordine e rango, cioè numero delle tangenti appoggiate ad un S_{r-2} generico) e che ogni carattere proiettivo d'una superficie F di S_r, a moduli generali, si esprime con quattro caratteri proiettivi indipendenti (p. es. ordine e genere della sezione iperpiana generica, invarianti I, ω oppure ordine di F; rango di F, cioè rango d'una sezione iperpiana; ordine della varietà dei piani tangenti; classe di F, cioè numero dei piani tangenti incontranti secondo una retta un S_{r-2}).

La proprietà sussiste soltanto per le serie d'equivalenza definibili su ogni superficie, regolare o irregolare, perché è chiaro a priori che l'intervento di peculiarità di questa o di quella classe di superficie, porta come conseguenza l'esistenza di nuove serie invarianti d'equivalenza, indipendenti dalle $|S|, |\Omega|$.

La rielaborazione della parte introduttiva della geometria sopra una superficie F, fin qui esposta, è quasi per intero nuova, in quanto sistematicamente fonde le proprietà dei sistemi lineari di curve con quelle delle serie d'equivalenza di gruppi di punti. Talune direttive della trattazione, per ciò che concerne i sistemi lineari, furono esposte da SEVERI in un corso tenuto all'Università di Padova nel 1907-08. La teoria delle serie d'equivalenza (come è stato dimostrato dal suo Autore e da coloro che l'hanno seguito), consente di attribuire valore funzionale a concetti e a relazioni collegati cogl'invarianti I, ω, p_a ed aventi per l'innanzi mero significato numerativo. È superfluo avvertire che, nello stesso campo delle serie d'equivalenza, le relazioni cui si allude non esauriscono le proprietà inerenti a invarianti di squisita natura geometrico-funzionale o aritmetico-funzionale: d'invarianti cioè che non posson in alcun modo esprimersi con caratteri numerativi proiettivi d'un modello di F, neanche se trattasi di superficie a moduli generali. Alludiamo per esempio al genere geometrico p_g, ai plurigeneri e al numero-base. E bisogna anche riconoscere che non è facile di precisar rigorosamente l'esatto significato della frase «superficie a moduli generali», appunto perché i caratteri numerativi invarianti (a differenza di quanto accade per le curve) non definiscono quasi mai una classe ben determinata di superficie. Né si sa in qual modo ed in qual misura sia possibile prefissare gli altri invarianti non numerativi in modo da determinare una varietà irriducibile di enti algebrici ∞^2 possedenti quei caratteri, sì che acquisti senso preciso, entro questa varietà, la locuzione di «ente generico», cioè «a moduli generali». Le relazioni più

profonde delle quali parliamo, sono anch'esse legate, benché in modo meno aderente a rapporti numerativi, colle serie d'equivalenza; e ne vedremo saggi concreti in seguito (p. es. quando parleremo della serie d'irregolarità di SEVERI). Venendo a indicazioni più circostanziate, in aggiunta a quelle qua e là esposte nel corso del capitolo, diremo che l'invariante I introdotto (come s'è ricordato a pag. 238) da C. SEGRE, dal punto di vista della geometria sull'ente, era già stato considerato da ZEUTHEN (« Math. Annalen », 1871) in una ricerca fondamentale d'invarianti numerativi formati con caratteri proiettivi d'una superficie [ved. pure a tal proposito il *Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie* (Leipzig, Teubner, 1914), pag. 160 e segg.] e da NOETHER (« Math. Annalen », 1874), che aveva trovato la relazione di cui al n. 129. Noi abbiamo limitato la ricerca della relazione tra il gruppo jacobiano d'un fascio $|C|$ e la serie di SEVERI al caso in cui il fascio è generale; ma il procedimento è suscettibile di larga estensione. In taluni casi, come per es. in quelli in cui $|C|$ possiede punti base multipli ordinari (cioè a tangenti tutte variabili) e curve spezzate contenenti però soltanto nodi, diversi dai punti base, e quindi prive di componenti multiple, l'estensione è ovvia. Meno facile presentasi l'interpretazione geometrica dei gruppi che compariscono nel secondo membro della relazione (28), quando il fascio abbia punti base multipli straordinari, punti multipli più complicati dei nodi fuori dei punti base, e curve con componenti multiple. Si tratta, in quest'ultimo caso, d'una valutazione d'equivalenza funzionale di certe curve rispetto alle serie d'equivalenza, che compaiono nella definizione (28) della serie $|S|$, conformemente al concetto di pag. 17. SEVERI, nei suoi lavori sulle serie d'equivalenza e sulle corrispondenze fra superficie, nonché sull'equivalenza d'una curva come gruppo virtuale di una data serie d'equivalenza (pag. 44, [17]), ha dato replicati saggi del modo di attuare questo concetto: il che vedremo in seguito. Dal punto di vista numerativo (il quale naturalmente resta compreso nella predetta valutazione funzionale) la questione può considerarsi esaurita. Si tratta di stabilire la valutazione dei numeri δ, n, p, che compaiono nella formula $I = \delta - 4p - n$, quando il fascio presenta le accennate particolarità. Il problema è stato approfondito in un caso particolare, (occorrente in una più vasta ricerca) da CASTELNUOVO-ENRIQUES (« Annali di matematica », 1901) e sistematicamente trattato dal punto di vista dei corpi algebrici e dei loro divisori da H. W. E. JUNG in Memorie varie. La trattazione è riprodotta nel libro di questo Autore *Algebraische Flächen* (Hannover, Helwing, 1925). Altri lavori, sullo stesso argomento, dello JUNG e di suoi allievi, trovansi posteriormente nel « Journal für Mathematik ». Infine il problema numerativo fu risoluto sotto ipotesi sufficientemente larghe e coi metodi della geometria italiana da GODEAUX (« Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut », 1920), il cui risultato è stato poi ritrovato, indipendentemente, da CAMPEDELLI (« Atti Lincei », 1934). Il genere lineare $p^{(1)}$ (*Curvengeschlecht*) di F, fu considerato pel primo da NOETHER (1874) come genere della curva canonica pura, generica, supposta effettiva ($p_g > 0$ e curva canonica di ordine > 0). Allo stesso Autore devesi la relazione $p^{(2)} = p^{(1)} - 1$, che però, con la definizione troppo ristretta di NOETHER, non vale incondizionatamente; mentre essa ha piena validità se $p^{(1)}$, $p^{(2)}$ denotano il genere ed il grado virtuali del sistema canonico effettivo puro, virtualmente privo di punti base, o più generalmente i massimi valori del grado e del genere virtuali del sistema canonico impuro, effettivo o virtuale, quali abbiamo considerato nel testo (nn. 119 e 123). La definizione del carattere ω (e del carattere $\omega' = \omega - 1$), chiamato *genere lineare virtuale*

(relativo), è stata data da ENRIQUES (1896; *Introduzione*, citata a pag. 217) e successivamente ripresa da CASTELNUOVO-ENRIQUES (« Annali di Matematica », 1901; n. 5). In tali lavori ω apparisce definito dall'espressione invariante $p' - 3(p-1) + n$ oppure $n' - 4(p-1) + n - 1$, che si ottiene risolvendo rispetto ad ω la (43) o la (42). Quando esiste effettivo il sistema canonico impuro $|K|$, il carattere ω definito coincide col genere virtuale di K. Ma la definizione di ω come genere virtuale del sistema canonico impuro, anche se questo è virtuale, è divenuta familiare soltanto dopo l'introduzione delle curve virtuali (fatta da SEVERI nel 1905). Da questo punto di vista non occorre per definire ω alcuna espressione del tipo di quelle considerate o di altre analoghe, le quali servono invece opportunamente pel calcolo del valore dell'invariante. L'esistenza di un massimo per ω, anche sopra una superficie razionale o riferibile a rigata, fu dimostrata da CASTELNUOVO (« Atti Lincei », 1897; ved. pure CASTELNUOVO-ENRIQUES, « Annali di matematica », 1901), il quale assegnò appunto i valori $\omega = 10$, $\omega = -8(p-1) + 1$ trovati nel testo. La definizione diretta del valore di ω sopra una rigata e la determinazione ivi del sistema canonico impuro, trovasi indicata qui per la prima volta. È poi originale il modo come in queste Lezioni è conseguita l'esistenza del massimo di ω per le superficie considerate, appoggiandosi sulla base della totalità delle curve di una superficie razionale o rigata. La teoria della base per una superficie qualunque sarà sviluppata in seguito. Per ora ci limitiamo a rinviare allo sviluppo che di alcuni dei lavori di SEVERI su questa importante teoria, trovasi nelle *Conferenze di geometria algebrica* dello stesso Autore (Roma, 1927-30) e ad avvertire che la base sopra una superficie con un fascio di curve razionali trovasi già nel n. 14 della Memoria di SEVERI, *Sulle corrispondenze tra i punti d'una curva algebrica, ecc.* (« Memorie della R. Acc. di Torino », 1903). È altresì nella teoria della base che SEVERI ha considerato la divisione d'una curva per un intero (di cui abbiamo dato un cenno nel n. 127, riservandoci anche su questo più larghi sviluppi in seguito), analoga all'estrazione di radice nel campo numerico. Ne discende il problema delle curve ideali, posto qui nel n. 127. Il gruppo cuspidale d'una rete $|C|$ di curve sopra una superficie F, in relazione al genere aritmetico p_a, interviene in ZEUTHEN (« Math. Annalen », 1871) e in NOETHER (« Math. Annalen », 1874); però attraverso ad un legame fra p_a e taluni caratteri proiettivi della superficie immersa in S_3 e dotata di certe singolarità: si tratta insomma del numero dei punti di contatto dei piani tangenti stazionari passanti per un punto, espresso con p_a e con altri caratteri proiettivi. Invece, la considerazione del gruppo medesimo dal punto di vista della geometria sopra una superficie, con riferimento ad una rete generale $|C|$ e la ricerca dei legami tra il numero dei punti di quel gruppo e gli invarianti ω, p_a, son dovuti a SEVERI (« Atti della R. Acc. di Torino », 1902), il quale ha direttamente assegnato l'espressiva formula $p_a = \frac{1}{24}\chi - p$ del n. 129 e la (45). C'è insomma fra il procedimento di ZEUTHEN e di NOETHER e quello di SEVERI, che porge a priori l'invarianza dell'espressione $\frac{1}{24}\chi - p$, lo stesso rapporto che passa nei riguardi dell'invariante I, tra il procedimento di ZEUTHEN e quello di SEGRE. Nella Nota citata di SEVERI son altresì contenute le formule che dànno i numeri corrispondenti alle equivalenze di cui all'Oss. 1ª del n. 126, e queste ultime derivano in sostanza ovviamente dalla predetta Nota, interpretando i singoli passaggi dal punto di vista funzionale. Alcune delle formule numerative

cui s'allude erano state assegnate da ZEUTHEN (« Comptes rendus », 1879), però dal punto di vista proiettivo e col metodo euristico delle degenerazioni. Il procedimento del n. 126 per stabilire la relazione (49) e quindi l'invarianza assoluta della serie $|Q - 12(C, C')|$ è anch'esso la traduzione funzionale del concetto medesimo seguito nelle Note citate di SEVERI per stabilire, con ragionamenti intrinseci sulla superficie, l'invarianza di $\chi - 24p$. Il risultato stesso fu conseguito in modo più faticoso da ENRIQUES (« Rendiconti dei Lincei », 1932), subito dopo che SEVERI, inaugurando la teoria delle serie d'equivalenza, aveva potenzialmente dato il mezzo per attribuire significato funzionale ad ogni processo numerativo. Il medesimo concetto, di trasformar cioè passo passo le deduzioni numerative in relazioni d'equivalenza, trovasi applicato in CAMPEDELLI (« Rendiconti Lincei », 1933) e più ampiamente in B. SEGRE (« Rendiconti Lincei », 3 Note, 1933) il quale ricostruisce così, in modo sistematico, i gruppi covarianti relativi a fasci e a reti di curve C (indicati dai precedenti Autori) sotto ipotesi più larghe circa la natura dei fasci e delle reti (considerando p. es. reti con punti base e curve fondamentali), ed altri infine ne assegna concernenti i sistemi lineari ∞^3. L'estensione di molti di questi risultati alle varietà a tre o più dimensioni ed in particolare della serie di SEVERI trovansi in B. SEGRE (« Mem. Acc. Italia », 1934 ; « Mém. couronné par l'Acad. Royale de Belgique », 1936), EGER (« Comptes rendus », 1937), DE FRANCHIS (« Rendiconti di Palermo », 1937 ; « Ann. di mat. », 1940), TODD (« Proceedings of London Math. Society », 1937, 1939, 1940), MACPHERSON « Proceedings of the Cambridge Philos. Society », 1939). Altre serie covarianti relative a superficie e a varietà sono state determinate da COMESSATTI (« Rendiconti Lincei », 1932), SEVERI (« Rendiconti Lincei », 1934) (ved. in proposito il successivo §), THULLEN (« Rendiconti Palermo », 1935), B. SEGRE (« Boll. Unione mat. ital. », 1936) ; EGER (« ibidem »). Su ciò avremo agio di ritornare. L'interpretazione funzionale, qui data nel n. 128, delle relazioni numerative, dovute a SALMON (« Cambridge and Dublin Math. Journal », 1847, 1849 ; « Transactions of the R. Irish Acad. », 1857 ; *Analitic Geometry of three dimensions*, 1865, 1867), a CAYLEY (« Proc. of the R. Irish Acad. », 1862 ; « Quartely Journal », 1868 ; ecc.), e a ZEUTHEN (« Math. Ann. », 1871, 1876), fra i caratteri proiettivi d'una superficie F dotata di singolarità ordinarie, era stata in parte assegnata, con processo meno snello da B. SEGRE, in una delle Note citate. Le relazioni numerative cui si allude, permettono di esprimere, come si è visto (n. 129), gl'invarianti ω, I, p_a in funzione di 4 caratteri proiettivi di F. Da ciò discende la relazione di NOETHER (n. 129), e, attraverso l'invarianza già acquisita di ω, I, ne deriva l'invarianza assoluta di p_a . La prima dimostrazione di tale invarianza è di ZEUTHEN (1871). Il geniale geometra danese dimostra direttamente che per due superficie F, F', in corrispondenza birazionale, le espressioni di I, p_a mediante i caratteri proiettivi di F, F', hanno lo stesso valore (a meno delle curve fondamentali, per ciò che concerne I) ; e NOETHER (1874) ritrova l'invarianza di p_a , in conseguenza della relazione che porta il suo nome e dell'invarianza di ω, I ; cioè per una via non molto dissimile dalla nostra e da quella di BONNESEN (« Bulletin de l'Académie de Danemark », 1906), che è un po' complicata e meno espressiva, perché prescinde dai rapporti funzionali. È da notarsi il modo come qui (n. 128, Oss.) è dedotta l'equivalenza (72) sulla linea doppia D di F, in quanto fornisce un'illustrazione del fatto che i processi numerativi diretti ad acquisire relazioni sopra una varietà, si traducono sempre in relazioni funzionali, anche quando per ottenerli si usano costruzioni geometriche esterne alla varietà.

§ 4. — Alcune proprietà generali delle corrispondenze e delle involuzioni sopra una superficie. Un'altra espressione invariante della serie di Severi.

130. *Distinzione infinitesimale delle coincidenze di una corrispondenza algebrica sopra una varietà.* — Consideriamo una corrispondenza T, ∞^r, non degenere, tra due varietà sovrapposte, $M_r = M'_r$, ad r dimensioni, prive di punti multipli. La T può concepirsi come una varietà ad r dimensioni tracciata sul prodotto $W_{2r} = M_r \times M'_r$ (n. 52). Ad un punto generico di M_r corrisponde un numero finito di punti di M'_r, e viceversa.

Sia O una *coincidenza* di T; vale a dire al punto O concepito p. es. come appartenente ad M_r, T faccia corrispondere un numero finito di punti su M'_r, dei quali un certo numero $s\ (\geqslant 1)$ cada in O. Ad un ramo δ di curva (analitica) passante per O su M_r, corrisponde su M'_r una curva che ha $\sigma\ (\leqslant s)$ rami δ'_1, $\delta'_2, \ldots, \delta'_\sigma$ passanti per O. E mentre un punto P si avvicina ad O su δ, vi sono s punti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_s$ corrispondenti che si avvicinano ad O su $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_\sigma$. Siccome il gruppo delle rette PP'_i è funzione olomorfa di P, esso ha, per $P \to O$, una determinata [1] posizione limite, che abbraccia complessivamente i limiti delle rette PP'_i, i quali dànno luogo alle cosiddette *direzioni principali* della coincidenza. Dal punto di vista infinitesimale, una direzione principale si può considerare come la congiungente due punti corrispondenti infinitamente vicini.

È ovvio che le considerazioni precedenti possono venir liberate dalla nozione proiettiva della retta congiungente P, P'_i, a cui si è ricorso per render più immediato il concetto. L'elemento lineare che determina una direzione principale, può pertanto considerarsi definito intrinsecamente rispetto alla varietà M_r (a prescinder dall'ambiente lineare in cui M_r possa pensarsi immersa).

Da un punto di coincidenza O esce un numero finito o infinito di direzioni principali. Ove tutte le ∞^{r-1} direzioni uscenti da O su M_r, siano principali, O dicesi una coincidenza *perfetta*; altrimenti *imperfetta*.

[1] Un ente algebrico che varia in una totalità algebrica o analitica ∞^1, al variare di un parametro complesso t, ammette sempre una determinata posizione limite per t tendente ad un valore t_0. Cfr. p. es. F. Severi, *I fondamenti della geometria numerativa*, « Annali di Mat. », t. XIX, (1940), pag. 170.

A titolo di esempio consideriamo il caso di un'omologia piana. I punti di coincidenza sono qui il centro S, e i punti dell'asse u. Ed S è ovviamente una coincidenza perfetta, perché ad un punto P che si avvicini ad S lungo una retta p qualunque nel fascio, corrisponde un punto P' di p, che tende ad S. Onde la retta PP', ed il suo limite, coincidono con p. Un punto Q dell'asse u è invece una coincidenza imperfetta: l'unica direzione principale per Q è quella della retta QS. Infatti, la retta che congiunge due punti P, P' corrispondenti nell'omologia passa sempre per S, e tende alla retta QS, quando P, P' tendono a Q..

Una coincidenza isolata è sempre perfetta. Vi possono essere tuttavia coincidenze perfette, se pur non isolate. Per es. basta pensare al caso dell'omologia speciale, in cui il centro S (coincidenza perfetta) cade sull'asse u.

Più in generale si dimostra che *pel punto generico O di una varietà ∞^s di coincidenze su M_r passano ∞^{r-s-1} direzioni principali.* Ne segue che le coincidenze perfette sono necessariamente *isolate, come coincidenze perfette.*

In sostanza i teoremi precedenti ci dicono che la totalità delle coppie dei punti di M_r corrispondenti in T e infinitamente vicini, ha dimensione inferiore di un'unità alla totalità ∞^r di tutte le coppie di punti corrispondenti in T. Senza fermarci qui sui dettagli, che saranno sviluppati in seguito (nello studio generale della teoria delle corrispondenze tra varietà), ci limitiamo a giustificare questo fatto (e quindi i teoremi enunciati), con la rapida considerazione seguente.

La varietà delle corde di M_r, che uniscono punti corrispondenti in T, è una varietà ∞^r immersa nella varietà ∞^{2r} di tutte le corde di M_r. Le rette contenenti le direzioni principali di M_r si ottengono intersecando la predetta varietà ∞^r con la varietà ∞^{2r-1} delle tangenti ad M_r. Si ottiene pertanto una varietà *pura* di dimensione $r + (2r - 1) - 2r = r - 1$, eventualmente spezzata.

In generale, le ∞^{r-s-1} direzioni principali uscenti da un punto O di una varietà ∞^s di coincidenze su M, costituiscono una totalità lineare. Dimostreremo questa proprietà nel n. 138, limitatamente al caso delle involuzioni sopra una superficie ($r = 2$), riservandoci di darne più avanti la giustificazione generale.

È facile controllare sopra un esempio le proprietà enunciate. Consideriamo nello S_r lineare un'omologia biassiale dotata di due spazi indipendenti, S_s, S_{r-s-1}, luoghi di punti uniti. Per un punto P generico di S_r passa una ed una sola retta che si

appoggia ad S_s e ad S_{r-s-1}. Tale retta è unita e su essa giace il punto P' corrispondente a P. Quando P si avvicina ad un punto Q qualunque dello spazio, luogo di punti uniti, S_s (o S_{r-s-1}), la retta PP' tende ad una retta per Q appoggiata ad S_{r-s-1} (o S_s). Viceversa, ogni retta uscente da un punto Q di S_s (o S_{r-s-1}) appoggiata ad S_{r-s-1} (o S_s) individua una direzione principale, perché un punto P che tenda a Q lungo tal retta, ha il corrispondente P' sulla retta stessa. Dunque le direzioni principali uscenti da ogni punto Q dello spazio S_s (o S_{r-s-1}) sono ∞^{r-s-1} (o ∞^s) e riempiono lo spazio lineare S_{r-s} (o S_{s+1}), che proietta da Q lo S_{r-s-1} (o S_s).

Il concetto di direzioni principali relative ad un punto unito di una corrispondenza tra due varietà e la nozione di coincidenze perfette e imperfette, trovansi per la prima volta in modo esplicito, sia pure embrionale e senza una precisazione rigorosa, in M. PIERI, *Formule di coincidenza per le serie algebriche ∞^n di coppie di punti dello spazio ad n dimensioni*, « Rend. del Circolo Mat. di Palermo », (1891). Dei concetti stessi, per le corrispondenze nel piano e nello spazio ordinario, avevano fatto uso implicito ZEUTHEN (« Comptes Rendus », 1874) e SCHUBERT (« Math. Annalen », 1876). SEVERI li ha precisati nel caso generale delle corrispondenze tra varietà, e ne ha posto in evidenza il notevole valore (cfr. le Note [6], pag. 682, cit. a pag. 44, e la Nota : *La teoria generale delle corrispondenze fra due varietà algebriche e i sistemi d'equivalenza*, « Abhandlungen Math. Seminar Hansischen Universität », (1939), pag. 111).

131. *Equivalenza funzionale di una varietà di coincidenze imperfette nel gruppo delle coincidenze perfette.* — Si è osservato nel n. prec. che per una corrispondenza T, ∞^r, non degenere, di una varietà M_r in sé, possono esistere coincidenze isolate perfette, e varietà di coincidenze generalmente imperfette (non escludendosi che qualche coincidenza perfetta possa cadere in una varietà di coincidenze imperfette).

Quando ci si ponga però dal punto di vista del concetto generale di intersezioni virtuali (n. 10), le coincidenze di una corrispondenza T risultano date dall'intersezione della varietà T che rappresenta la corrispondenza entro al prodotto $W_{2r} = M_r \times M_r'$ (n. 130), e della varietà U che rappresenta la corrispondenza identica. Poiché T, U sono varietà ad r dimensioni tracciate entro la varietà a $2r$ dimensioni W, l'intersezione virtuale (T, U) è *sempre* costituita da un numero finito di punti (n. 10). Da questo punto di vista si può dunque ritenere che la corrispondenza T, ∞^r, abbia sempre virtualmente un numero finito di coincidenze.

Ove accada che le coincidenze effettive di T si distribuiscano

su talune varietà di dimensione > 0, corrispondenti a varietà di dimensione > 0 dell'intersezione effettiva di T ed U, sorge la questione di determinare l'equivalenza funzionale (n. 12) di ciascuna di tali varietà di dimensione anormale entro al gruppo delle coincidenze virtuali (T,U). È una questione importante e tuttora insoluta nel suo aspetto più generale. Per il caso delle corrispondenze di una superficie in sé ($r = 2$) SEVERI ha dimostrato che *l'equivalenza funzionale di una curva D di coincidenza è espressa dal gruppo $X - K$, dove X è il gruppo dei punti di D in ciascuno dei quali la direzione principale è tangente a D, e K è un gruppo canonico virtuale di D.*

Consideriamo l'esempio dell'omologia non speciale di un piano in sé (n. 130). Il teorema enunciato ci dice che l'asse di omologia, nel gruppo virtuale delle coincidenze, è funzionalmente equivalente ad una coppia di punti. Invero, in questo caso viene a mancare il gruppo X (n. 130), ed il gruppo canonico virtuale K si riduce ad un gruppo di due punti presi negativamente.

Il risultato è d'accordo con la circostanza che l'omologia si può considerare come limite di un'omografia generale, con tre punti uniti distinti, dei quali uno cade nel centro d'omologia, e la coppia degli altri due in una coppia qualunque di punti dell'asse.

Il concetto di equivalenza funzionale di una varietà di dimensione > 0 entro il gruppo virtuale delle coincidenze di una corrispondenza ∞^r di una varietà M_r in sé, è stato posto in generale da SEVERI nella Nota delle « Abhandlungen Math. Seminar Hansischen Univ. », cit. alla fine del n. 130. Per il caso delle superficie il concetto trovasi già, insieme al teorema sopra enunciato, nelle Note [6], pag. 880, cit. a pag. 44.

132. *Ipercoincidenze per una corrispondenza sopra una superficie.* — Nella Memoria di ENRIQUES-SEVERI sulle superficie iperellittiche [1] ed in una Nota di SEVERI [2] si considerano tipi particolari di coincidenze isolate (e quindi perfette ; n. 130), che chiameremo qui *ipercoincidenze* per distinguerle dai tipi più generali.

Ecco di che cosa si tratta (limitatamente, per brevità, alle superficie, come nella citata Memoria). Sia T una corrispondenza algebrica (∞^2, non degenere) fra le superficie sovrapposte F, F'

---

[1] Premiata col premio Bordin 1907. Cfr. « Acta math. », vol. 32, 33, (1909) ; ved. in particolare ad es. pag. 330.

[2] *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo,* ecc. ; « Atti del R. Ist. Veneto », (1908) ; ved. a pag. 413.

ed O una sua coincidenza. Facciasi variare un punto P di F su un ramo (lineare) δ avente l'origine in O: fra i punti P' corrispondenti a P, nell'operazione diretta T, ve n'è qualcuno che tende ad O con P. Se i β' punti P', che tendono ad O con P, si approssimano ad O secondo $\beta \leq \beta'$ ($\beta \geq 1$) direzioni diverse (tangenti ai rami, non necessariamente lineari, da essi descritti), restano associate, nell'operazione diretta, alla direzione tangente a δ in O, queste β direzioni. Similmente, si definiscono α direzioni corrispondenti alla tangente a δ nell'operazione inversa. Si ottiene così la corrispondenza algebrica (α, β) subordinata da T (e da T^{-1}) nel fascio delle direzioni tangenti ad F nel punto (semplice) O.

Se la corrispondenza (α, β) non contiene come parte l'identità [1], cioè se fra le direzioni corrispondenti alla tangente a δ nella T (e quindi anche nella T^{-1}), non ve n'è alcuna coincidente colla tangente a δ, quando questa direzione è generica nel fascio, allora la corrispondenza (α, β) ammette $\alpha + \beta$ direzioni unite [2]. Altrimenti *ogni direzione per O è unita e O dicesi un'ipercoincidenza.* È intuitivo in tal caso che una direzione unita è una direzione principale [3]. Epperò *un'ipercoincidenza è una coincidenza perfetta*, perché ogni direzione per essa è principale.

Questa proprietà si può stabilire rigorosamente così. Si trasformi birazionalmente F $(= F')$, in guisa che il punto O si muti nella curva eccezionale Ω della superficie trasformata $\overline{F}$ $(= \overline{F}')$, senza che s'introducano altre eccezioni. Ciò si ottiene p. es. trasformando F mediante il sistema lineare delle quadriche passanti per O, nello spazio ambiente di F. Due rami δ, δ', corrispondenti nella T, si toccano in O, se uno di essi tocca in O una direzione unita m; e si mutano in due rami $\overline{\delta}$, $\overline{\delta}'$ di F, omologhi nella corrispondenza $\overline{T}$, trasformata di T e aventi per origine il punto M di Ω, che rappresenta la direzione m, cosicché M risulta unito per $\overline{T}$. Cioè *sono uniti tutti i punti dell'intorno di 1° ordine di un'ipercoincidenza.*

Ciò posto, supponiamo che la precedente direzione m sia generica fra quelle uscenti da O; e sia n un'altra direzione, tangente ad F in O e principale (ne esiste almeno una). Sia infine C una sezione iperpiana generica di F tangente in O ad n e $|C|$ una

(1) Pei concetti che qui si usano sulle corrispondenze ved., oltre al Cap. IV delle presenti Lezioni, il *Trattato di G. a.* di SEVERI, pag. 170.

(2) Da contarsi ciascuna colla molteplicità che le è propria, ved. *Trattato* cit., pag. 220.

(3) Quando O non è un'ipercoincidenza può darsi che una direzione unita non sia principale. Un esempio è indicato nel n. 138.

rete di sezioni iperpiane di F, generica fra quelle che contengono C ed hanno il solo punto base O.

A $|C|$ risponde in $\overline{F}$, astrazion fatta da Ω, una rete senza punti base $|\overline{C}|$, la cui curva generica incontra Ω in un sol punto (variabile colla curva). Consideriamo ora la o le eventuali curve di $|C|$ che passano per coppie P, P' di punti omologhi in T, con P variabile su δ e P' su δ', e le posizioni limiti di tali curve. Non può darsi che, comunque si scelga il ramo δ di origine O, tangente ad m, le dette posizioni limiti coincidano sempre coll'unica curva di $|C|$, che ha un nodo in O, perché, se ciò avvenisse in corrispondenza alla generica m, avverrebbe pure quando $m = n$; mentre per $m = n$ si ha almeno la posizione limite C, che passa semplicemente per O. Dunque per ogni ramo γ tangente ad m vi è almeno una C_0 delle predette posizioni limiti, passante semplicemente per O. Ad essa corrisponde su $\overline{F}$ una curva $\overline{C_0}$ di $|\overline{C}|$, che può considerarsi come posizione limite d'una congiungente di due punti $\overline{P}$, $\overline{P'}$, omologhi in $\overline{T}$, variabili su $\overline{\delta}$, $\overline{\delta'}$. La $\overline{C_0}$ passa dunque per M (senza toccare ivi Ω) e la C_0 da cui proviene tocca pertanto m in M. Resta così provato che m è direzione principale.

Ma per contro *non ogni coincidenza perfetta è un'ipercoincidenza.* Un esempio semplicissimo di coincidenze perfette (perché isolate), che non sono ipercoincidenze, è fornito dai 3 punti uniti di un'omografia piana, non omologica; mentre il centro di un'omologia piana è un'ipercoincidenza.

Nel caso di una coincidenza imperfetta O, che sia generica sopra una curva di coincidenza doppia (n. 130), la corrispondenza (α, β) riducesi ad una proiettività (perché c'è un solo P', che si approssima ad O con P) e le due direzioni unite sono la tangente alla curva di coincidenza in O e la direzione principale uscente da O.

Le coincidenze imperfette saranno studiate più diffusamente nel n. 138 (limitatamente però alle corrispondenze generate da involuzioni). Consideriamo ora l'ipotesi che O sia una coincidenza perfetta. Se O è un'ipercoincidenza, la trasformazione sopra definita di F in $\overline{F}$, fa senz'altro sparire la coincidenza perfetta O sostituendola con una curva Ω, luogo di coincidenze imperfette. Se O non è un'ipercoincidenza, vi sarà almeno una direzione unita uscente da O; e su Ω la $\overline{T}$ subordinerà una corrispondenza algebrica (α, β), non contenente l'identità, ed avente almeno una coincidenza O_1, omologa della predetta direzione unita. Se O_1 non è un'ipercoincidenza, vi saranno attorno ad O_1, in direzione opportuna e infinitamente vicine ad O_1, un numero finito di coin-

cidenze perfette, le quali potranno essere mutate alla lor volta in punti distinti d'una curva eccezionale corrispondente ad O_1 in una opportuna trasformazione birazionale di F; e così proseguendo.

S'intuisce che una successione di coincidenze perfette $O, O_1, O_2, \ldots$, moventi da O e situate negl'intorni dei successivi ordini di O, contribuisca per almeno tante unità quanti sono i punti della successione, nel numero virtuale $[T, U]$ delle coincidenze isolate di T (ove U rappresenta l'identità sul prodotto $W = F \times F'$). E siccome $[T, U] \geq 0$, perché T, U non hanno una parte comune (1), ne deriva che *ogni successione di coincidenze perfette infinitamente vicine, che non sieno ipercoincidenze, deve aver un termine e deve pure esser finito il numero delle successioni originate dalla coincidenza perfetta* O. La dimostrazione della proprietà intuitiva, su cui poggia questa conclusione, si ottiene nel modo che rapidamente accenniamo, tenuto conto della definizione del gruppo virtuale (T, U) entro W (n. 10). Continuiamo a chiamar O il punto di W imagine della coincidenza O ed s (≥ 1) la molteplicità di O per T (2). [Cosicché se O è una coincidenza isolata essa conta almeno s volte nel gruppo (T, U)]. Si può allora determinare in infiniti modi una superficie S di W tale che:

a) Essa abbia con U sole intersezioni semplici (e quindi in numero finito) tutte distinte da O.

b) La $T + S$ determini un sistema continuo di varietà V avente in O un punto base s-plo, in guisa che (V, U) per la generica V consti di un numero finito di punti, dei quali esattamente s assorbiti da O, essendo le altre intersezioni, distinte da O, tutte semplici.

Il gruppo virtuale (T,U) è definito dalla differenza $(V,U) - (S,U)$, e siccome S non passa per O, di questo gruppo fa parte O, contato esattamente s volte come punto positivo, ed un gruppo di altre intersezioni semplici positive e negative.

---

(1) Se entro una M_r (priva di punti multipli) due varietà pure V_k, W_{r-k} s'incontrano secondo varietà di dimensioni non superiori al min mo degli interi $k-1$, $r-k-1$, allora è certo $[V, W] \geq 0$. La proprietà è ovvia conseguenza di quella enunciata alla fine di pag. 14, se le due varietà hanno soltanto punti isolati comuni; in caso diverso bisogna profittare del concetto esposto nella Memoria [7] di SEVERI, cit. a pag. 44, aggiungendo alla varietà di dimensione massima, fra le due, una conveniente varietà della stessa dimensione, che non contenga nessun punto effettivo comune alle V, W: cosa possibile nell'ipotesi predetta.

(2) S'intende la molteplicità di O per T, concepita come superficie di W.

Ciò posto, S, V denotino su $F = F'$ le corrispondenze rappresentate su W dalle stesse lettere; e sieno $\overline{S}$, $\overline{V}$ le trasformate di S, V nel passaggio da F a $\overline{F}$ $(= \overline{F'})$; e $\overline{U}$ sia l'identità su $\overline{F}$. La $\overline{V}$ subordina su Ω una corrispondenza, la quale, non essendo O un'ipercoincidenza, non può essere identica per la generica $\overline{V}$. Invero, in caso contrario, siccome $\overline{T} + \overline{S}$ subordina su Ω la stessa corrispondenza (α, β), che vi subordina $\overline{T}$ (perché S non contiene O), passando al limite per $\overline{V} \to \overline{T} + \overline{S}$, la corrispondenza (α, β) dovrebbe contenere come parte l'identità.

D'altronde in $\overline{W} = \overline{F} \times \overline{F'}$, le intersezioni isolate di $\overline{T}$, $\overline{U}$ son tutte limiti, per $\overline{V} \to \overline{T} + \overline{S}$, di punti positivi del gruppo $(\overline{V}, \overline{U}) - (\overline{S}, \overline{U})$ che non sono spariti venendo a coincidere con punti negativi. Ma siccome $\overline{S}$ non incontra affatto la superficie $\Omega \times \Omega'$, (imagine su $\overline{W}$ del prodotto di Ω con una sua copia), così nessuna delle intersezioni isolate di $\overline{T}$, $\overline{U}$ su $\Omega \times \Omega'$ (cioè nessuna delle coincidenze isolate di $\overline{T}$ su Ω) può sparire dal gruppo $(\overline{V}, \overline{U})$, neutralizzandosi con un'intersezione negativa. Ciò significa che ciascuna delle coincidenze isolate che $\overline{T}$ ha su Ω, conta almeno per 1 unità (all'infuori delle s unità già assorbite da O) nel numero $[T, U]$. Così è dimostrata l'affermazione sopra posta in via intuitiva.

E perché una successione di coincidenze perfette abbia un termine, *occorre e basta che a un certo momento si sbocchi in un'ultima coincidenza perfetta, che sia un'ipercoincidenza.* Le coincidenze situate nell'intorno immediato di questa sono allora coincidenze imperfette nel senso che, con una successione di trasformazioni birazionali, che operi sui singoli punti della successione a partire dal capostipite O, esse distribuisconsi sopra una curva eccezionale di coincidenze imperfette. La conclusione è che:

Se una corrispondenza (n, n') fra due superficie sovrapposte F, F', è dotata di coincidenze perfette, si posson sostituire alle F, F' due loro trasformate birazionali opportune, sovrapposte, in guisa che la corrispondenza (n, n'), trasformata della data, fra le nuove superficie, abbia sì nuovi punti e curve fondamentali, ma non possegga che coincidenze imperfette.

Nella citata Nota di SEVERI («Atti Ist. Veneto», 1908) si dimostra che *ogni coincidenza isolata d'un'involuzione di 2° ordine sopra una superficie è un'ipercoincidenza* (così accade p. es. pel centro di un'omologia armonica). GODEAUX (ved. sopratutto la monografia riassuntiva del 1935, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, «Actualités scientifiques et industrielles», n. 270, Paris, Hermann) ha studiato sistematicamente le coincidenze (isolate) di una trasformazione birazionale ciclica T, con un numero

finito di coincidenze sopra una superficie F, ed ha chiamato *imperfetta* una coincidenza isolata O, quando la proiettività subordinata da T fra le direzioni per O, non è identica (cioè quando O non è, colla nostra terminologia, un'ipercoincidenza). Ma è consigliabile di abbandonar questa locuzione, che contrasta colle precedenti (da PIERI in poi) e continuare a chiamar *imperfette* le coincidenze per le quali passa soltanto una o un numero finito di direzioni principali. In un'interessante Memoria del 1938 (*Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, « Mémoires de l'Académie royale de Bélgique », t. XVII) lo stesso GODEAUX studia la struttura delle coincidenze d'una trasformazione birazionale ciclica T sopra una superficie F e dimostra, in questo caso particolare, il fatto generale sopra segnalato, che l'albero delle coincidenze isolate infinitamente vicine ad una data ha tutti i suoi rami che terminano ad ipercoincidenze.

133. *Le involuzioni razionali sopra una superficie.* — Si è già visto (n. 50) che una serie razionale di gruppi di punti sopra una superficie è sempre una serie d'equivalenza (e che, anzi, nel campo virtuale i due concetti coincidono).

Consideriamo ora, sopra una superficie F, una *involuzione razionale*, γ_n, cioè una serie razionale, ∞^2, d'indice 1, di gruppi di n punti, che supponiamo liberata da eventuali gruppi parziali del gruppo generico, che sian fissi o semifissi (n. 23). In questo caso il fatto che γ_n risulta una serie d'equivalenza, è ovvio, perché γ_n può ottenersi come serie caratteristica di una rete o come serie d'intersezione di due fasci su F. Invero, rappresentati birazionalmente i gruppi dell'involuzione razionale coi punti di un piano α, la corrispondenza $(1, n)$ che nasce tra α ed F, muta la rete delle rette (o una qualsiasi rete omaloidica) del piano, in una rete di curve di F, la cui serie caratteristica (fatta astrazione da eventuali punti fissi) è costituita dai gruppi di γ_n. La serie γ_n può altresì considerarsi come serie d'intersezione di due fasci estratti dalla rete, ovvero, più in generale, di due fasci corrispondenti su F a due fasci di α la cui serie d'intersezione sia la serie dei singoli punti del piano [1]. In tal modo i gruppi di γ_n appaiono come gruppi di livello costante di due funzioni razionali sopra F, le quali peraltro (come si è spiegato al n. 25) restano individuate dalla γ_n a meno di una trasformazione cremoniana tra due piani.

Quando si pensi (come generalmente si usa) γ_n quale serie caratteristica di una sua rete generatrice Σ, si è tratti a credere che gli elementi fondamentali della rete (punti base e curve fon-

[1] Una coppia di tali fasci, non contenuti nella stessa rete, è p. es. costituita da un fascio di coniche e da un fascio di rette con il centro in un punto base del fascio di coniche.

damentali; cfr. n. 97), siano in qualche modo legati intrinsecamente all'involuzione. Ma così non è, come subito chiariremo.

Si dirà che *un punto P è fondamentale per* γ_n quando esso non individua un *sol* gruppo di γ_n; onde gli ∞^1 gruppi cui appartiene P, si ottengono come limiti dei gruppi individuati da un punto $\overline{P}$ che si avvicini a P secondo ciascuna delle ∞^1 direzioni uscenti da P su F.

Questi ∞^1 gruppi potranno eventualmente contenere taluni punti fissi; fatta astrazione da questi, i rimanenti formano una varietà *razionale*, e descrivono perciò una serie d'equivalenza sopra una curva irriducibile o riducibile di F, che si dirà *curva fondamentale* dell'involuzione, *associata* al punto fondamentale P.

Osserviamo intanto che *i punti fondamentali sono in numero finito*. Invero, supposto che esistano infiniti punti fondamentali distribuiti sopra una curva Δ, due casi possono darsi, a seconda che gli ∞^2 gruppi di γ_n che hanno un punto su Δ esauriscano o no l'involuzione. Il primo caso è da escludersi, giacché ogni gruppo di γ_n possiederebbe un punto (almeno) variabile su Δ, contrariamente all'ipotesi fatta da principio che il gruppo generico di γ_n non contenga alcun gruppo parziale semifisso. Nel secondo caso, la totalità dei gruppi di γ_n sarebbe riducibile, mentre l'involuzione razionale γ_n è di sua natura irriducibile.

Approfondiamo ora le relazioni che possono intercedere tra gli elementi fondamentali di una rete Σ generatrice di γ_n e gli elementi fondamentali dell'involuzione.

Esaminiamo prima quel che accade quando un punto P di F non è base per una prefissata rete Σ, generatrice di γ_n. Allora è ben determinato il fascio $H(P)$ delle ∞^1 curve C di Σ, che passano per P. Denoti δ un ramo lineare di origine P, tracciato su F e non giacente su alcuna curva fondamentale di Σ; sia $\overline{P}$ un punto mobile su δ ed $H(\overline{P})$ il fascio delle C per $\overline{P}$; $\overline{G}_{n-1}$ il gruppo degli ulteriori punti base di $H(\overline{P})$ variabili con $\overline{P}$, cioè il gruppo dei coniugati di $\overline{P}$ in γ_n. Quando $\overline{P}$ tende a P, il gruppo $\overline{G}_{n-1}$ ha una determinata posizione limite G_{n-1}, generalmente indipendente da δ, che consta delle origini dei rami coniugati di δ in γ_n e che fa parte del gruppo base di $H(P)$. Se P_0 è un punto di G_{n-1}, non giacente su alcuna curva fondamentale di Σ, esso è un punto base isolato di $H(P)$ e come tale rimane fisso al variare di δ attorno a P. Se P_0 sta su una curva fondamentale di Σ, può darsi benissimo ch'esso vari su questa, variando δ attorno a P. Si hanno in tal caso ∞^1 gruppi di γ_n passanti per P, in corrispondenza agli ∞^1 punti di F infinitamente vicini a P nelle

varie direzioni; e di questi ∞^1 gruppi fanno parte i punti isolati coniugati di P. Inoltre gli ∞^1 gruppi formano una varietà razionale, perché ad una tangente in P ad F corrisponde uno solo di questi gruppi. Onde *se il punto P fondamentale per γ_n non è fondamentale per la rete Σ costruttrice di γ_n, o esso giace su qualche curva fondamentale di Σ oppure è coniugato rispetto a γ_n di un punto siffatto.*

Sia ora P un punto base di Σ. Al ramo lineare δ (non fondamentale per Σ) di origine P, corrisponde ancora, come limite del gruppo $\bar{G}_{n-1}$, un gruppo G_{n-1}; e se tutti i punti di G_{n-1} restano fissi variando δ attorno a P, essi sono base per Σ, perché al tendere di $\bar{P}$ a P nelle varie direzioni, il fascio $H(\bar{P})$ viene a contenere ogni curva di Σ. Si ha in tal caso un gruppo, $P + G_{n-1}$, base per Σ ed appartenente a γ_n. Supponiamo invece che alcuni dei punti di G_{n-1} siano mobili su una curva (irriducibile o riducibile) Δ, e sia Δ_1 una parte di questa curva, non fondamentale per Σ. Su Δ_1 si ha una serie ∞^1 di gruppi parziali (o totali) di γ_n, per ognuno dei quali passa un fascio di curve C. La serie segata dalla rete Σ su Δ_1, o coincide colla serie ∞^1 considerata, o è ∞^2 e composta con essa. Nel primo caso Δ_1 è parte di (o coincide con) una curva della rete. In conclusione *un punto base P della rete Σ, o individua un gruppo di γ_n base per Σ, oppure esso è fondamentale per γ_n, e la curva fondamentale di γ_n associata a P, o è curva fondamentale di Σ, o è contenuta (parzialmente o totalmente) in Σ, senza peraltro esser necessariamente curva fondamentale di Σ, o su di essa le curve della rete segano una serie ∞^2 composta con la serie descritta dai punti variabili degli ∞^1 gruppi di γ_n che contengono P.*

Le varie possibilità messe in luce dall'analisi svolta, si confermano tutte sugli esempi che ora indichiamo, dai quali risulta inoltre che *una curva fondamentale per Σ può non esser fondamentale per γ_n.*

In definitiva resta così pienamente giustificata l'asserzione fatta più sopra, che gli elementi fondamentali per un'involuzione non sono essenzialmente legati agli elementi fondamentali di una rete generatrice dell'involuzione.

Ecco gli esempi. Sia γ_n l'involuzione segata sopra una superficie F di S_3, d'ordine $n+1$, da una stella di rette col centro O in un punto semplice di F. Allora O è fondamentale per γ_n ed è base per la rete Σ generatrice segata dai piani per O. La curva fondamentale per γ_n associata ad O, è costituita dalla sezione di F col piano tangente in O: essa appartiene a Σ, ma non è fondamentale per Σ.

Sia la γ_n segata sopra una F di S_3 dalle rette appoggiate a due rette sghembe a, b. Si assuma come rete Σ quella staccata dalle quadriche per a, b e per una retta c congiungente due punti A, B di a, b. Le sezioni di F coi piani Ab, Ba sono fondamentali per Σ, ma non per γ_n; i punti (a, F), (b, F) son fondamentali per γ_n e per Σ; le curve associate a questi punti son fondamentali per γ_n ma non per Σ; i punti (c, F) son base per Σ, ma non fondamentali per γ_n (costituiscono *un* gruppo di γ_n).

Sia infine la γ_n così ottenuta. Partiamo da una superficie F^* di S_3, d'ordine $n+1$, contenente una conica P^* eccezionale di 1ª specie, e consideriamo su F^* l'involuzione γ_n^* segata dalle rette uscenti da un punto O^* di F^*, non appartenente al piano di P^*. Il cono proiettante P^* da O^*, intersechi ulteriormente F^* in una curva Δ^* di ordine $2n$, irriducibile, sulla quale le generatrici del cono segano una g^1_{n-1} di gruppi parziali di γ_n^*. La rete Σ^* segata su F^* dai piani per O^*, segna sulla Δ^* una $g^2_{2(n-1)}$ composta con i gruppi della g^1_{n-1} anzidetta. Si trasformi ora birazionalmente la superficie F^* in una superficie F, mutando la curva eccezionale P^* in un punto semplice P. L'involuzione γ_n^* mutasi in un'involuzione γ_n, generata da una rete Σ trasformata di Σ^*. Per la γ_n il punto P risulta fondamentale, e la sua curva associata è la curva Δ trasformata di Δ^*. La curva Δ non risulta né curva fondamentale, né curva parziale o totale di Σ; per essa ha luogo l'ultima eventualità contemplata nella discussione generale di cui sopra.

Osservazione. — La falsa presunzione contro cui abbiamo messo in guardia, che gli elementi fondamentali di un'involuzione sian legati a quelli di una sua rete generatrice, può indurre facilmente in errore. Così, sulla base di considerazioni poggiate su tale presunzione, ENRIQUES [1] ha creduto di poter dedurre un'interpretazione dell'irregolarità di una superficie nell'ambito della teoria della serie d'equivalenza: interpretazione che non sussiste, come ha mostrato SEVERI con un esempio in contrario [2].

134. *Relazione fra le coincidenze isolate di un'involuzione e una rete generatrice.* — Dimostriamo il teorema seguente:

Una coincidenza isolata di un'involuzione razionale γ_n sopra una superficie, appartiene a qualche curva fondamentale di ogni rete generatrice di γ_n.

[1] Cfr. F. ENRIQUES, *Intorno alle serie continue di involuzioni razionali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », gennaio 1933, pag. 109.

[2] Cfr. F. SEVERI, Nota [10], pag. 832, cit. a pag. 44.

Sia invero Σ una rete (irriducibile) generatrice. Sopra una generica curva C di Σ le coincidenze dell'involuzione sono soltanto i punti del gruppo jacobiano delle serie caratteristica di Σ. Lo stesso vale sopra una curva particolare, purché il predetto gruppo jacobiano s'intenda in senso virtuale, cioè come limite del generico. Pertanto ogni coincidenza appartiene alla jacobiana (n. 102) di Σ.

Si ricordi ora che ogni curva fondamentale della rete (n. 97) appartiene alla jacobiana, in quanto le curve della rete che passano per un punto P di una curva fondamentale, la contengon per intero, onde hanno in P tangente fissa. La jacobiana *pura*, che si ottiene facendo astrazione dalle curve fondamentali, è luogo di punti di coincidenza di γ_n. Una coincidenza isolata O appartiene pertanto necessariamente a qualche curva fondamentale di Σ [1].

Osservazione 1ª. — Il teorema dimostrato può trasportarsi al caso di un'involuzione *irrazionale* sopra una superficie F. Invero, se pur non è possibile considerare una rete generatrice dell'involuzione data, si può costruire una rete Σ' che generi una involuzione razionale composta con la data. Basta considerare una rete su F trasformata di una rete tracciata sopra la superficie imagine dell'involuzione irrazionale (cfr. il successivo n. 135). Di modo che il risultato di cui trattasi può enunciarsi tal quale, in riferimento però alle curve fondamentali di ogni rete del tipo di Σ'.

Osservazione 2ª. — Quando si considera un'involuzione razionale a partire da una rete generatrice, appare come eventualità generale il presentarsi di una curva di coincidenze per l'involuzione e come eventualità particolare il presentarsi di sole coincidenze isolate (in quanto la jacobiana di una rete non si riduce di norma alle sole curve fondamentali della rete).

Di fatto, in conformità a quel che si è detto per il caso di una corrispondenza qualunque anche non involutoria di una superficie in sé (n. 131), è la seconda eventualità, e non la prima, che dal nostro punto di vista deve considerarsi generale.

[1] Si badi che un punto P generico di una curva fondamentale (al contrario di quel che accade per un punto della jacobiana pura), non è necessariamente un punto di coincidenza! Invero il gruppo G di γ_n individuato da P non può ottenersi direttamente come gruppo base del fascio delle curve di Σ che passan per P, in quanto la curva fondamentale è luogo di punti base del fascio. Il gruppo G va determinato invece con una considerazione di limite, e generalmente non avviene che un coniugato di P coincida con P stesso.

Del resto si possono facilmente costruire esempi di involuzioni con sole coincidenze isolate o con curve di coincidenza. Si son già visti esempi del secondo tipo (omologia armonica); un esempio del primo tipo è offerto sul piano dall'involuzione razionale di gruppi di 3 punti, costituiti dai cicli dell'omografia ciclica del 3° ordine, di equazioni

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 \quad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

la quale, e con essa l'involuzione, ha uniti i soli vertici del triangolo fondamentale. L'esempio si generalizza ovviamente considerando un'omografia ciclica il cui ordine sia un numero primo qualunque.

Le proprietà considerate nei due nn. precedenti trovansi nella Nota [10] di F. Severi, cit. a pag. 44.

135. *Gruppo di monodromia di un'involuzione.* — Consideriamo in generale, sopra una superficie F, una involuzione γ_n anche non razionale, cioè una qualsivoglia totalità algebrica ∞^2 di gruppi di punti, d'indice 1, dai cui gruppi supponiamo sempre sian stati tolti eventuali punti fissi e semifissi (n. 23).

La totalità dei gruppi di γ_n, considerati come elementi, potrebbe a priori costituire una varietà riducibile e impura.

Si osservi tuttavia che, se, come faremo, si prescinde da parti di questa totalità corrispondenti a gruppi che non invadano tutta la F, l'involuzione risulta *irriducibile*. Invero una parte ∞^1 corrisponde a gruppi che necessariamente descrivono soltanto una curva di F; ove la totalità si spezzasse in due parti ∞^2, l'indice della serie non potrebbe risultare 1, se non nel caso in cui una delle due parti corrispondesse ad ∞^2 gruppi descriventi soltanto una curva di F.

Rappresentiamo birazionalmente i gruppi di γ_n con i punti di una superficie Φ, priva di punti multipli. Tra Φ ed F nasce una corrispondenza $(1,n)$, cioè la F vien rappresentata sulla superficie n-pla Φ, immaginando in ciascun punto di Φ depositati n punti che corrispondono ai punti di un gruppo di γ_n su F.

Per il seguito conviene considerare le varietà riemanniane, a 4 dimensioni reali, che rappresentano i punti complessi delle superficie F e Φ [1], e pensare la corrispondenza $(1,n)$ direttamente fra le riemanniane, che indicheremo con le stesse lettere F, Φ adoperate per le superficie corrispondenti.

[1] Per la costruzione effettiva delle varietà riemanniane, cfr. F. Severi, *Conferenze di Geometria algebrica*, pag. 75 (Zanichelli, Roma, 1927).

Si chiamano *punti di diramazione* su Φ, i punti cui corrispondono su F gruppi di γ_n costituiti da punti non tutti distinti.

Scelto un punto y generico di Φ (che non sia di diramazione né fondamentale per la corrispondenza tra ed Φ ed F) rimane determinato un unico gruppo $(x_1, \dots, x_n)$, costituito da punti distinti. Mentre un punto $\bar{y}$ descrive, nella riemanniana Φ, un ciclo lineare che esce e torna ad y *senza passare per alcun punto di diramazione*, il gruppo $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ corrispondente di γ_n, si muove su F, a partire dalla posizione $(x_1, \dots, x_n)$ e ritornando ad essa. In corrispondenza al ciclo considerato si ha quindi una sostituzione fra gli elementi del gruppo $(x_1, \dots, x_n)$.

Chiamiamo *equivalenti* due cicli orientati di Φ, che escono da y e vi ritornano, quando possono ridursi l'uno all'altro con una deformazione continua che non implichi il passaggio per punti di diramazione e *tenendo fisso il punto* y [1]. È ovvio che a cicli equivalenti corrisponde la stessa sostituzione sui punti $x_1, \dots, x_n$.

Ad un ciclo equivalente a zero (cioè riducibile al punto y, senza traversare punti di diramazione) corrisponde ovviamente la sostituzione identica. Se si percorre un ciclo in un senso o nel senso contrario, si hanno in corrispondenza due sostituzioni l'una inversa dell'altra. Alla somma di due cicli λ_1, λ_2, cioè ad un ciclo equivalente al ciclo ottenuto percorrendo successivamente λ_1 e λ_2, corrisponde la sostituzione prodotto delle sostituzioni relative a λ_1 e λ_2.

Si ha dunque che alla totalità dei cicli uscenti da y corrisponde un gruppo di sostituzioni sugli elementi $(x_1, \dots, x_n)$. Si capisce che, se si fa variare con continuità il punto y sopra Φ, il gruppo di sostituzioni che si ottiene in corrispondenza alle varie posizioni di y, resta sempre oloedricamente isomorfo a se stesso. Si può quindi parlare di un gruppo di sostituzioni legato

---

[1] Si badi che di solito si usa (con POINCARÉ) la denominazione di equivalenti per due cicli del tipo considerato, senza che sia prescritta la condizione relativa ai punti di diramazione. Qui la condizione è invece essenziale, perché in corrispondenza ad un ciclo passante per un punto di diramazione non resta definita la variazione continua dei singoli punti che costituiscono un gruppo corrispondente al punto $\bar{y}$ che descriva il ciclo. Invero, se $\bar{y}$ raggiunge una diramazione, due o più punti del gruppo corrispondente vengono a confondersi.

Il passaggio di un ciclo per elementi fondamentali della corrispondenza tra Φ ed F non dà invece alcun inconveniente, ove si consideri definito per continuità il gruppo corrispondente al punto che descrive il ciclo, quando questo passa per un punto fondamentale.

soltanto all'involuzione, il quale dicesi *gruppo di monodromia dell'involuzione.*

Dimostriamo che il gruppo di monodromia è *transitivo*, cioè che esiste qualche sostituzione del gruppo che scambia tra loro due elementi qualsivogliano di $(x_1, \ldots, x_n)$. Invero, è possibile tracciare sopra la riemanniana della superficie irriducibile F un cammino congiungente due punti x_i, x_j $(i \neq j)$, che non passi per alcuno dei punti doppi dell'involuzione, i quali costituiscono al più una curva sulla superficie F, cioè una varietà reale a due dimensioni della riemanniana di F, e non spezzano pertanto la connessione della riemanniana. A tale cammino corrisponde sopra Φ un ciclo uscente da y, che dà luogo appunto ad una sostituzione la quale muta x_i in x_j.

Il gruppo di monodromia può tuttavia risultare *imprimitivo*, cioè può accadere che gli n punti $x_1, \ldots, x_n$ si distribuiscano in $\frac{n}{\nu} = \mu$ *sistemi di imprimitività*, i quali si permutino tra di loro in blocco per le sostituzioni del gruppo. Può accadere che il gruppo $(x_1, \ldots, x_n)$ possa suddividersi in più modi diversi in sistemi di imprimitività per le sostituzioni del gruppo di monodromia [1]. Tuttavia, una volta fissata la suddivisione in sistemi di imprimitività in un gruppo particolare di γ_n, resta individuata una suddivisione in ogni altro gruppo dell'involuzione. Dimostriamo la cosa, per maggiore chiarezza, nel caso $n = 4$, ma il ragionamento che faremo, come si vedrà, ha carattere del tutto generale.

Partiamo da un gruppo (x_1, x_2, x_3, x_4) di γ_4, corrispondente ad un punto y di Φ, e siano (x_1, x_2) e (x_3, x_4) due coppie di imprimitività. Se y' è un punto generico di Φ, consideriamo un cammino λ su Φ che congiunga y ad y' senza passare per alcun punto di diramazione, e siano x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 i punti del gruppo corrispondente ad y' che si ottengono ordinatamente da x_1, x_2, x_3, x_4 per continuità percorrendo il cammino λ. Le coppie (x'_1, x'_2) e (x'_3, x'_4) saranno coppie di imprimitività. Si tratta di provare che andando da y ad y' con un cammino λ^* (non passante per alcun punto di diramazione di Φ) diverso da λ, si ottengono sempre le stesse coppie di imprimitività.

Se infatti, per assurda ipotesi, il cammino λ^* portasse con continuità (x_1, x_2, x_3, x_4) ordinatamente ad es. in (x'_1, x'_3, x'_2, x'_4),

[1] Cfr. p. es. L. BIANCHI, *Teoria dei gruppi di sostituzioni ecc.*, (Pisa, Spoerri, 1900), pag. 27.

in guisa da dar luogo alle nuove coppie di imprimitività (x_1', x_3'), (x_2', x_4'), il ciclo $\lambda - \lambda^*$ (somma di λ e dell'inverso di λ^*) porterebbe (x_1, x_2, x_3, x_4) ordinatamente in (x_1, x_3, x_2, x_4), in contrasto coll'ipotesi che (x_1, x_2) e (x_3, x_4) siano coppie di imprimitività.

Qual'è il significato geometrico dell'imprimitività del gruppo di monodromia ?

Un punto generico di F determina, entro il gruppo di γ_n da esso individuato, il sistema di imprimitività di ν punti che lo contiene. Si genera così sulla F una totalità algebrica ∞^2 d'indice 1 di gruppi di ν punti, cioè un'involuzione γ_ν, colla quale la γ_n è *composta*, ogni gruppo di γ_n essendo costituito da $\mu = \frac{n}{\nu}$ gruppi di γ_ν. Come γ_n, così γ_ν è priva di elementi fissi e semifissi e di componenti variabili su curve.

Se si costruisce un modello Ψ di γ_ν, tra Ψ ed F si ha una corrispondenza $(1, \nu)$, tra Φ e Ψ una corrispondenza $(1, \mu)$ (cioè si ha su Ψ un'involuzione di gruppi di μ punti rappresentativi dei gruppi di γ_ν che costituiscono un gruppo di γ_n). La corrispondenza prodotto indotta tra Φ ed F è la corrispondenza $(1, \mu\nu = n)$.

Viceversa, se si considera su F un'involuzione composta, questa dà luogo ovviamente ad un gruppo di monodromia imprimitivo. Si ha dunque che: *condizione necessaria e sufficiente affinché il gruppo di monodromia di un'involuzione sia primitivo, è che l'involuzione sia semplice.*

Nel seguito potremo riferirci ad involuzioni semplici, dato che lo studio delle involuzioni composte si riduce, come risulta dalle considerazioni precedenti, allo studio di successive involuzioni semplici.

136. *Conservazione della irriducibilità delle curve in una corrispondenza razionale tra due superficie.* — Tra due superficie Φ, F, prive di punti multipli, si abbia una corrispondenza $(1,n)$, per guisa che la Φ rappresenti un'involuzione d'ordine n, su F.

Dimostriamo che *la corrispondenza* $(1,n)$ *tra* Φ *ed* F *muta la curva generica* C *variabile su* Φ *in un sistema lineare irriducibile* $|C|\infty^r$, *con* $r \geqslant 2$, *i cui punti base non cadano in punti fondamentali per la corrispondenza, in una curva irriducibile di* F.

Al sistema lineare $|C|$ corrisponde su F un sistema lineare $|C_1|$ appartenente all'involuzione γ_n (le cui curve sono cioè riempite da gruppi totali della γ_n). Se $|C_1|$ fosse riducibile, esso (pel teorema di BERTINI più volte citato) dovrebbe avere una parte fissa o essere composto colle curve di un fascio.

Nel primo caso, la parte fissa, non potendo provenire da un punto base del sistema $|C|$, in quanto si è supposto che nessun punto base sia fondamentale per la corrispondenza, dovrebbe esser luogo di gruppi parziali dell'involuzione γ_n. Ma neppure questo è possibile a causa della transitività del gruppo di monodromia (n. 135), la quale implica che i punti di un gruppo di γ_n esistenti sulla parte fissa si permutino con i punti del gruppo stesso che stan fuori.

Nel secondo caso, in cui il sistema $|C_1|$ fosse composto con un fascio, le C_1 non avrebbero intersezioni variabili. Ma ciò è assurdo, perché le C, costituendo un sistema irriducibile ∞^2 almeno, hanno intersezioni variabili.

Il teorema risulta così completamente dimostrato.

137. *Determinazione del gruppo di monodromia di un'involuzione in un caso particolare.* — Stabiliamo l'osservazione seguente:

Un'involuzione γ_n, semplice, dotata di una curva doppia di coincidenze, ha come gruppo di monodromia il gruppo totale delle sostituzioni su n elementi.

Sia Φ una superficie rappresentativa di γ_n e D la curva di diramazione su Φ, corrispondente alla curva doppia D_1 su F. Pel n. precedente è possibile considerare su Φ una curva irriducibile C, che incontri semplicemente la curva di diramazione D in qualche punto O, e tale che ad essa corrisponda su F una curva irriducibile C_1, passante semplicemente pel punto O_1 che proviene da O. La γ_n subordina su C_1 un'involuzione γ_n^1, rappresentata dai punti di C; al punto O corrisponde la coincidenza semplice O_1 di γ_n^1.

Si pensino le curve C, C_1 sostituite dalle loro superficie riemanniane. La γ_n^1 subordina tra gl'intorni di O, O_1 sulle riemanniane, una corrispondenza $(1,2)$; cioè la riemanniana C_1 può pensarsi rappresentata doppiamente sulla riemanniana C nell'intorno di O.

Ad una circolazione su C intorno ad O, che parta e ritorni ad un punto y vicino ad O, corrispondono su C_1 due cammini aperti che permutano tra di loro i due punti x_1, x_2, dell'intorno di O_1, corrispondenti ad y. Pertanto il gruppo di monodromia dell'involuzione γ_n, possiede la trasposizione (x_1, x_2), e, non essendo imprimitivo a causa della supposta semplicità di γ_n, è, per un noto teorema [1], il gruppo totale.

[1] Cfr. L. Bianchi, op. cit. al n. 135, pag. 28.

138. *Direzione principale inerente al punto generico di una curva doppia di un'involuzione sopra una superficie.* — Sia Φ la superficie rappresentativa di un'involuzione γ_n su F. Mettiamoci nelle ipotesi semplici che la γ_n possegga una curva D_1 di coincidenze imperfette, le quali, per il punto generico di D_1, sian *soltanto doppie* (oltre ad un numero finito di coincidenze isolate o giacenti in punti particolari di D_1).

Consideriamo in Φ una rete generica $|C|$ e diciamo $|C_1|$ la sua trasformata, che appartiene all'involuzione γ_n. La C_1 generica incontra D_1 in un certo numero di punti variabili, che son semplici per C_1 e per D_1.

Vogliamo caratterizzare le direzioni principali, che escono da un punto P_1 generico su D_1.

All'uopo consideriamo sulla superficie Φ la curva di diramazione D corrispondente a D_1, ed osserviamo che fra D e D_1 vi sarà generalmente una corrispondenza birazionale (1). Il fascio di curve C per il punto P di D omologo di P_1, si muta in un fascio di curve C_1 per P_1, le quali passan semplicemente per P_1 (data la genericità di P_1) e dovendo contenere la coppia di punti di γ_n assorbita da P_1, si toccano ivi. (Si osserverà che nel fascio delle C_1 vi è una curva con punto doppio in P_1, la quale quindi ha ivi molteplicità d'intersezione 2 con D_1; ad essa è omologa una curva C che — per la corrispondenza birazionale tra D e D_1 — ha in P molteplicità d'intersezione 2 con D, e risulta pertanto tangente in P a D).

La tangente fissa alle curve C_1 per P_1, è direzione principale in P_1. Infatti, mentre un punto Q_1 si avvicina a P_1 su una C_1 passante semplicemente per P_1, il punto $\overline{Q}_1$ coniugato a Q_1, che tende a P_1 insieme a Q_1, varia anch'esso sulla C_1 (che, si ricordi, è composta coll'involuzione γ_n). Pertanto la retta $Q_1\overline{Q}_1$, che è corda di C_1, al tendere di Q_1 a P_1, tende alla tangente a C_1 nel punto *semplice* P_1, per una ben nota proprietà differenziale della tangente ad una curva in un punto semplice.

La direzione principale trovata è poi unica, perché il punto P_1, essendo generico su D_1, appartiene ad un sol gruppo dell'involuzione.

È opportuno altresì di osservare che, nelle ipotesi poste, l'in-

(1) In particolare potrà avvenire che la curva D sia da contarsi doppiamente, ogni suo punto rappresentando due punti della curva D_1. Ciò accade quando ogni gruppo dell'involuzione con una coincidenza, abbia di conseguenza un'altra coincidenza.

voluzione su F dà luogo ad una corrispondenza $(n-1, n-1)$ di F in sé, la quale, nell'intorno del punto unito doppio P_1, è *biunivoca*, onde subordina una proiettività (involutoria) tra le direzioni uscenti da P_1. I raggi uniti della proiettività non sono altro che la tangente a D_1, in P_1 e la direzione principale. Infatti, mentre un punto R_1 si avvicina a P_1 lungo la curva D_1, il punto $\overline{R}_1$ corrispondente nella corrispondenza biunivoca considerata, si avvicina a P_1 nella direzione stessa, in quanto coincide con R_1. E inoltre mentre un punto Q_1 si avvicina a P_1 lungo una curva C_1 del fascio di cui sopra, tangente alla direzione principale, il punto $\overline{Q}_1$ si avvicina a P_1 su C_1 e quindi nella direzione stessa. Ciò riconferma l'unicità della direzione principale in P_1.

Riassumiamo le considerazioni fatte nell'enunciato seguente:

In un punto generico P_1 di una curva doppia di un'involuzione γ_n su F, esiste una sola direzione principale, che è tangente ad ogni curva di F composta coll'involuzione e passante semplicemente per P_1. I raggi uniti della proiettività (involutoria) determinata dalla γ_n nel fascio delle direzioni uscenti da P_1 su F, sono la direzione principale e la direzione della tangente alla curva doppia di γ_n.

Vogliamo ora caratterizzare i punti *non fondamentali* della linea doppia D_1 ove la direzione principale risulta tangente alla D_1 stessa.

All'uopo osserviamo che la γ_n possiede un numero finito di punti tripli, giacenti su D_1, ed un numero finito di gruppi che contengono due coppie di punti coincidenti. Ai punti tripli (in quanto non siano fondamentali) corrispondono su Φ cuspidi ordinarie della curva di diramazione D, mentre ai gruppi ove esistono due coppie di punti coincidenti corrispondono nodi di D; e viceversa. Ciò segue con le stesse considerazioni svolte alle pagg. 261, 262 per il caso dell'involuzione razionale generata dalla serie caratteristica di una rete su F. Si tratta invero di fatti di natura infinitesimale dipendenti dalle proprietà della corrispondenza tra Φ ed F nelle vicinanze di elementi di diramazione, proprietà che non dipendono dunque dalla circostanza che la superficie Φ sia un piano o meno.

Per estendere le considerazioni citate basterà considerare una rete generale su Φ, e la rete corrispondente su F, la cui serie caratteristica risulterà composta con la γ_n assegnata.

Ciò premesso, è facile provare che tutti e soli i punti di D_1 ove la direzione principale è tangente a D_1, sono i punti tripli di γ_n. Invero, sia $|C|$ una rete generale su Φ e $|C_1|$ la rete corrispondente su F. Sia P_1 un punto triplo di γ_n su D_1, e P la corrispondente

cuspide di D. Al fascio delle C per P corrisponde un fascio di C_1, che passano semplicemente per P_1 e ivi si osculano.

Ma le curve C_1 devono avere molteplicità d'intersezione 2 con D_1 in P_1, come C con D nella cuspide P: quindi le C_1 risultano tangenti a D_1 in P_1. Ciò significa che la direzione principale in P_1 è tangente alla curva doppia.

Viceversa, si supponga P_1 tale che la direzione principale in esso sia tangente a D_1. Allora una C_1 del fascio individuato da P_1, che passi semplicemente per P_1, determina colla sua tangente in P_1 la direzione principale. Onde tutte le C_1 del fascio risultano tangenti in P_1 alla curva doppia. Val quanto dire che su ogni C_1 due punti doppi della γ_n si sono portati infinitamente vicini, e quindi il punto P_1 è triplo per il gruppo di γ_n individuato da P_1. Ove non vi fosse alcuna curva C_1 del fascio determinato da P_1, passante semplicemente per P_1, non si potrebbe a priori ragionare come sopra. In tale ipotesi può però osservarsi che, dovendo ogni curva C del fascio individuato da P aver molteplicità d'intersezione > 1 in P (perché ogni curva C_1 del fascio individuato da P_1 ha molteplicità d'intersezione > 1 in P_1), il punto P è un nodo o una cuspide di D. Ma il nodo è da escludersi perché si avrebbero in corrispondenza due passaggi semplici delle C_1 per punti distinti di D_1. Quanto alla cuspide, ad essa corrisponde appunto, come si è visto, un punto triplo di γ_n.

Si conclude dunque che *i punti non fondamentali della curva doppia D_1 di un'involuzione, ove la direzione principale risulta tangente a D_1, costituiscono il gruppo dei punti tripli dell'involuzione.*

Osservazione. — Per la corrispondenza simmetrica $(n-1, n-1)$ di una superficie F in sé, individuata da un'involuzione γ_n priva di punti fondamentali, assegnata su F, l'equivalenza funzionale della curva D_1 dei punti uniti della corrispondenza, entro il gruppo virtuale dei punti uniti, può caratterizzarsi in base all'ultimo teorema dimostrato, e tenuto conto del n. 131, come *differenza tra il gruppo dei punti tripli di γ_n ed un gruppo canonico di D_1.*

139. *Proprietà fondamentale dei punti di coincidenza isolati o perfetti di un'involuzione.* — Esaminiamo ora più a fondo le proprietà di una coincidenza isolata per un'involuzione γ_n, dimostrando il teorema seguente:

Una coincidenza isolata per un'involuzione γ_n sopra una superficie F priva di punti multipli, o è fondamentale per la corrispondenza $(n, 1)$ tra la F e una superficie Φ priva di punti multipli,

imagine dell'involuzione, ovvero è fondamentale il punto di diramazione che su Φ *corrisponde alla coincidenza.*

Sia O_1 la coincidenza di γ_n su F. Supponiamo, per assurdo, che ad O_1 corrisponda il punto di diramazione O su Φ, senza che alcuna curva di Φ per O corrisponda ad O_1, e senza che alcuna curva di F per O_1 corrisponda ad O.

Sia $|C|$ su Φ un sistema lineare irriducibile ∞^r $(r \geq 3)$ privo di punti base (ad esempio il sistema delle sezioni iperpiane di Φ, se Φ non è un piano). Al sistema $|C|$ corrisponde su F un sistema lineare irriducibile (n. 136) $|C_1|$, tra i cui eventuali punti base non è certo il punto O_1, perché il punto O non è punto base per $|C|$, né O_1 proviene da una curva di Φ (per O).

Sulla C_1 generica la γ_n di F subordina un'involuzione ∞^1, γ_n^1. Se p, p_1 sono i generi (effettivi) di due curve generiche corrispondenti, C, C_1, la formula di ZEUTHEN [1], applicata alla corrispondenza $(1, n)$ tra C, C_1, dà

$$2(p_1 - 1) = 2n(p - 1) + \eta,$$

dove η è il numero dei punti di diramazione su C, cioè il numero delle intersezioni di C con la curva D di diramazione per la corrispondenza tra Φ ed F.

Sia $|\overline{C}|$ il sistema delle C passanti per O, sistema che si può supporre non avere altri punti base oltre O. Poiché il punto O non è fondamentale per la corrispondenza tra Φ ed F, il sistema $|\overline{C}|$, ∞^{r-1} $(r - 1 \geq 2)$, mutasi (n. 136) in un sistema $|\overline{C}_1|$ irriducibile, che ha O_1 tra i suoi punti base.

Pur non sapendosi con quale molteplicità le curve $\overline{C}_1$ passano pel punto O_1, è certo che la $\overline{C}_1$ generica, che è una particolare curva C_1, ha il genere (effettivo) $\overline{p}_1 \leq p_1$.

D'altronde, la formula di ZEUTHEN, applicata alla corrispondenza $(1, n)$ fra una $\overline{C}$ e una $\overline{C}_1$ generiche, dà

$$2(\overline{p}_1 - 1) = 2n(p - 1) + \overline{\eta},$$

dove $\overline{\eta}$ è il numero dei punti di diramazione su $\overline{C}$. Dal confronto colla relazione determinata precedentemente, segue $\overline{\eta} \leq \eta$.

Si osservi ora che le diramazioni esistenti su una $\overline{C}$ generica provengono dalle intersezioni (C, D) ed eventualmente dal punto O. Ne segue $\overline{\eta} \geq \eta$, poiché il numero delle intersezioni (C, D) uguaglia il numero delle intersezioni $(\overline{C}, D)$, ed il punto O sta fuori della curva D, in quanto O_1 è una coincidenza isolata,

[1] Cfr. p. es. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 209.

né proviene da una parte della curva di diramazione D, non essendo punto fondamentale.

Dunque $\bar{\eta} = \eta$ e $\bar{p}_1 = p_1$; cioè le $\bar{C}_1$ passano semplicemente per O_1. Ma questo è assurdo. Invero, se un punto P tende ad O sopra una generica $\bar{C}$, il gruppo dell'involuzione γ_n omologo di P sopra la $\bar{C}_1$ corrispondente, tende ad una posizione limite, per la quale due punti almeno del gruppo coincidono con O_1. Allora sulla $\bar{C}_1$ si avrebbe una coincidenza di più che sulla C_1 generica, contrariamente alla $\bar{\eta} = \eta$.

Il teorema precedente, stabilito con una considerazione « in grande », si può anche dimostrare con un'argomentazione « in piccolo », la quale serve inoltre ad estendere il teorema ad ogni coincidenza perfetta, anche se fa parte d'una curva luogo di coincidenze imperfette. Vogliam cioè provare che:

Ogni coincidenza perfetta (doppia) d'un'involuzione, sopra una superficie F, o è fondamentale o appartiene ad una curva fondamentale per la corrispondenza fra F ed una superficie Φ, priva di punti multipli, imagine dell'involuzione.

Per lo studio delle proprietà in piccolo d'una coincidenza qualunque O_1 perfetta o imperfetta di una γ_n sopra F, possiamo proiettare biunivocamente (cioè in modo generico) l'intorno di O_1 su F nell'intorno di un punto d'un piano. Se la coincidenza O_1 è doppia e non è fondamentale né sta sopra una curva fondamentale per la corrispondenza $(1,n)$ fra Φ ed F, sicché ad essa risponde su Φ un punto ben determinato O, la corrispondenza indotta fra gl'intorni dei punti O, O_1 di Φ ed F, è una corrispondenza involutoria $(1,2)$, della quale appunto O_1 è una coincidenza. Sicché, proiettando biunivocamente sopra un piano anche l'intorno di O in Φ, veniamo ad avere fra gl'intorni di certi due punti, che continueremo a chiamare O, O_1, su due piani π, π_1, una corrispondenza analitica involutoria (1,2), di cui O_1 è una coincidenza (ed O un punto di diramazione).

Denotiamo con ξ, η le cooordinate cartesiane di un punto di π e con x, y le coordinate di un punto di π_1, e supponiamo che le origini delle coordinate cadan rispettivamente in O $(\xi = \eta = 0)$ ed O_1 $(x = y = 0)$. Il punto mobile attorno ad O è, mediante la predetta corrispondenza, funzione analitica olomorfa del punto mobile attorno ad O_1; onde la corrispondenza è rappresentata da relazioni del tipo:

$$\xi = f(x, y) \ , \ \eta = \varphi(x, y) \ ,$$

ove f, φ son funzioni olomorfe di x, y, nulle in O_1.

Queste relazioni, per (ξ, η) dato attorno ad O, son soddisfatte, nell'intorno di O_1, da due e due sole soluzioni (x,y), cioè le curve analitiche $f = \xi, \varphi = \eta$, per ξ, η comunque dati, abbastanza piccoli in modulo, hanno due intersezioni nell'intorno di O_1.

Ne deriva che in O si annulla il determinante funzionale $\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}$, perché, in caso contrario, esisterebbe un intorno di O in cui $\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} \neq 0$, e le relazioni precedenti si potrebbero risolvere attorno ad O_1 rispetto ad x, y, ricavandosi da esse x, y come funzioni olomorfe di ξ,η; cioè le curve $f = \xi, \varphi = \eta$ avrebbero attorno ad O_1 una sola intersezione.

D'altronde il predetto determinante funzionale non può essere identicamente nullo attorno ad O, giacché altrimenti le f, φ sarebbero funzionalmente dipendenti e il punto (ξ, η) non descriverebbe tutto l'intorno di O, ma una curva passante per O. L'equazione

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)} = 0$$

rappresenta pertanto una curva analitica D_1, che passa per O_1 (ed ha in O_1 e nell'intorno soltanto punti algebroidi o semplici).

Verifichiamo che D_1 è una curva di coincidenza per l'involuzione di 2° ordine che si ha attorno ad O_1, in corrispondenza ai punti dell'intorno di O. Invero, la corrispondenza (1,2) muta il fascio di rette $\xi = \text{cost.}$ che solcan l'intorno di O, nel fascio di curve $f = \text{cost.}$, che solcan l'intorno di O_1, e per un punto generico di quest'intorno passa una sola di queste curve. Ciò implica che la curva generica $f = \text{cost.}$ non possa avere punti multipli nell'intorno di O_1. Infatti un punto multiplo della curva stessa non potrebbe coincidere con O_1, perché se no O_1 sarebbe fondamentale; né potrebbe essere fisso e distinto da O_1, perché (sarebbe ancora fondamentale, e) restringendo l'intorno di O_1, in guisa che non contenga punti fondamentali, il fatto segnalato verrebbe a cessare. Né infine $f = \text{cost.}$ può avere un punto multiplo variabile attorno ad O_1, perché questo punto descriverebbe un luogo facente parte della curva D_1, e qualora tale parte non passasse per O_1, di nuovo, restringendo l'intorno, questa circostanza non si verificherebbe più. Se poi la curva descritta dal punto multiplo passasse per O_1, il fascio $f = \text{cost.}$ ammetterebbe un

inviluppo (1), contrariamente al fatto che, nell'intorno di O_1, è di indice 1.

La curva D_1 è insomma luogo dei punti di contatto delle curve dei fasci $f = \text{cost.}$, $\varphi = \text{cost.}$ e come tale è luogo di coincidenze dell'involuzione.

Si conclude intanto che, se nessuno dei due punti O, O_1 è fondamentale per la corrispondenza, la coincidenza O_1 non è isolata; e ciò porge una nuova dimostrazione del teorema acquisito « in grande ».

Ma possiamo ora verificare che O_1 è necessariamente una coincidenza imperfetta. Invero, essendo O_1 coincidenza doppia, le due curve $f = 0$, $\varphi = 0$ hanno in O_1 molteplicità d'intersezione 2, epperò una almeno di esse ha in O_1 un punto semplice (perché se no la molteplicità d'intersezione sarebbe almeno 4). Se p. es. $f = 0$ passa per O_1 semplicemente, la tangente ivi ad $f = 0$ è direzione principale per la corrispondenza (n. prec.). Ed è l'unica direzione principale, perché tutte le curve del fascio $f + \lambda\varphi = 0$, che corrispondono alle rette $\xi + \lambda\eta = 0$, passanti per O, si toccano in O_1.

Osservazione 1ª. — Si noti che *la conclusione vale anche se* O_1 *fosse coincidenza tripla* proveniente da una corrispondenza (1,2) od anche da una corrispondenza (1,3) fra gl'intorni di O, O_1, perché una almeno delle curve $f = 0$, $\varphi = 0$ avrebbe sempre un punto semplice in O_1.

Osservazione 2ª. — Segnaliamo esplicitamente la conseguenza del teorema precedente che *un'involuzione sopra una superficie* F, *rappresentata birazionalmente da una superficie* Φ, *senza punti multipli, in guisa che la corrispondenza indotta tra* Φ *ed* F *sia priva di elementi fondamentali, non possiede coincidenze perfette.*

Dall'ipotesi consegue subito che la rappresentazione dell'involuzione su Φ si fa senza alcuna eccezione. Si badi però che può benissimo avvenire che un'involuzione su F sia rappresentabile birazionalmente senza eccezioni sopra una superficie Φ priva di punti multipli, pur essendovi elementi fondamentali nella corrispondenza tra Φ ed F. Basta considerare un'involuzione γ_n che possieda un punto fondamentale Q_1. Se γ_n è rappresentata senza eccezione su Φ, accade che gli ∞^1 gruppi di γ_n che passano per Q_1 si rappresentan nei punti di una curva

(1) Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, pag. 40.

di Φ, la quale, nella corrispondenza tra Φ ed F, mutasi nell'intorno del punto Q_1 e nella curva fondamentale di γ_n associata a Q_1.

Quando invece l'involuzione possiede coincidenze perfette, e la corrispondenza tra Φ ed F è priva di elementi fondamentali, ai punti di coincidenza isolata rispondono punti di diramazione, *che sono necessariamente punti multipli di* Φ.

140. *Ulteriori considerazioni sulle coincidenze isolate di una involuzione.* — La proprietà dimostrata nel n. precedente, si può illustrare anche da altro punto di vista, se F è una superficie regolare ($p_g = p_a$).

In tale ipotesi, risulta regolare anche la superficie Φ, perché, come ha osservato SEVERI [1], ogni involuzione sopra una superficie regolare è a sua volta regolare. Inoltre, occorre tener presente che la riemanniana di una superficie regolare *ha connessione lineare nulla*, cioè ogni ciclo lineare tracciato su essa si può ridurre per continuità ad un punto.

Ciò posto, se un'involuzione γ_n su F ha soltanto un numero finito di coincidenze isolate, e se nessuna di esse si muta in una curva di Φ ovvero non giace su una curva fondamentale di F, sulla superficie Φ (priva di punti multipli) si avrebbe soltanto un numero finito di punti di diramazione isolati. Allora ogni cammino chiuso della riemanniana di Φ, in quanto si concepisca come una operazione del gruppo di monodromia, potrebbe ridursi per continuità ad un punto senza incontrare i punti di diramazione, tenuto conto che la riemanniana ha connessione lineare nulla.

Il gruppo di monodromia dell'involuzione si ridurrebbe in conseguenza all'identità, ciò che è assurdo, perché, come si è dimostrato (n. 139), il gruppo stesso è transitivo.

Si vede dunque che se un'involuzione possiede soltanto coincidenze isolate, almeno una di esse deve mutarsi in una curva di diramazione su Φ. Si ritrova pertanto il teorema del n. 133, se pur sotto forma meno precisa.

Segnaliamo però la conseguenza seguente del ragionamento sviluppato:

Una superficie che contenga un'involuzione priva di coincidenze è di necessità irregolare. Questo fatto è analogo a quello che si verifica per le curve che, ove contengano involuzioni prive di punti uniti, sono necessariamente irrazionali.

---

[1] Questa proprietà discende dal teorema d'ABEL sulle superficie nella seconda forma. Cfr. F. SEVERI, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche*, « Annali di Mat. », (1905).

L'argomentazione sviluppata per il caso delle superficie regolari, può ulteriormente semplificarsi per le superficie razionali. Invero, su una superficie razionale F, ogni involuzione γ_n è razionale, pel teorema di CASTELNUOVO (cit. a pag. 2); onde come superficie Φ può assumersi un piano.

Allora, supposta come sopra la γ_n dotata di sole coincidenze isolate, e la superficie F in corrispondenza $(1,n)$ senza eccezioni col piano Φ, non si avrebbe su Φ che un numero finito di punti di diramazione. Una retta generica di Φ rappresenterebbe, su una curva di F, un'involuzione razionale priva di coincidenze; che è assurdo.

Lo studio approfondito del gruppo di monodromia d'un'involuzione sopra una superficie (n. 135), nonché le considerazioni dei nn. 136 (conservazione della irriducibilità delle curve in una corrispondenza unirazionale), 137 (gruppo di monodromia d'un'involuzione dotata d'una curva doppia di coincidenza), 138 (direzione principale in un punto di una tal curva), e le proprietà dei punti di coincidenza isolati o perfetti d'un'involuzione (nn. 139, 140), appariscon in queste Lezioni per la prima volta. Le involuzioni dotate di un numero finito di coincidenze sopra una superficie iperellittica di PICARD, F, hanno particolare importanza nella Memoria di ENRIQUES-SEVERI (cit. a pag. 281) e in quella di BAGNERA-DE FRANCHIS (« Memorie della Soc. dei XL », 1908), perché è mediante esse che si classificano le superficie iperellittiche, le quali non degenerino in superficie razionali o riferibili a rigate. ENRIQUES-SEVERI dimostrano il fatto fondamentale [acquisito anche da BAGNERA-DE FRANCHIS sotto un'ipotesi restrittiva, dalla quale il DE FRANCHIS poté liberare soltanto recentemente (« Rend. Accad. dei Lincei », giugno 1936) la dimostrazione di BAGNERA-DE FRANCHIS] che un'involuzione con un numero finito di coincidenze sopra F è sempre generata da un gruppo finito di trasformazioni birazionali di F in sé. Vengono anche studiati, dai citati Autori, i modelli proiettivi di tali involuzioni e si riconosce in ogni caso che i punti corrispondenti alle coincidenze son punti multipli, con singolarità spesso di tipo assai elevato. Queste ricerche sono state approfondite su speciali modelli da vari altri Autori, dopo le Memorie di ENRIQUES-SEVERI e di BAGNERA-DE FRANCHIS. GODEAUX ha trasportato ad una superficie qualunque il ragionamento di ENRIQUES-SEVERI, ottenendo così il risultato che sopra ogni superficie un'involuzione con un numero finito di coincidenze è sempre generata da un gruppo finito di trasformazioni birazionali della superficie in sé (« Lincei », marzo 1914), ed ha poi studiato in più lavori successivi molti modelli proiettivi di questi tipi d'involuzioni. Per una curva un teorema del genere non sussiste neanche se l'involuzione sulla curva è priva di coincidenze.

141. *La serie caratteristica virtuale dell'identità sopra una curva data.* — Prima di esporre un altro significato funzionale della serie di SEVERI, diverso da quello che ci ha servito a definirla (n. 116), occupiamoci di un analogo significato che può attribuirsi alla serie canonica sopra una curva.

Occorre premettere un lemma. Sia T una corrispondenza

d'indici (α, β) sulla curva C. Sul prodotto topologico $W = C \times D$ (ove D è una copia di C; n. 52), la T è rappresentata da una curva, che indichiamo con la stessa lettera T. Sulla superficie W son tracciati due fasci Σ_x, Σ_y, di curve unisecantisi $\Phi(x) = x \times D$, $\Psi(y) = y \times C$, ove x, y sian punti scorrenti rispettivamente su C, D (n. 56). Proviamo che:

Una corrispondenza a valenza zero di C in sé è caratterizzata dal fatto che la curva T, che la rappresenta su W, appartiene al sistema lineare somma di due sistemi lineari composti coi fasci Σ_x e Σ_y; precisamente si ha l'equivalenza

$$T \equiv X \times D + Y \times C, \tag{78}$$

dove X, Y sono i gruppi di punti che la T fa corrispondere su C, D rispettivamente, ad un punto generico y, x di D, C.

Suppongasi la T a valenza zero; onde i gruppi X, Y variano, rispett. su C, D, entro serie lineari.

Una curva $Y \times C$ e la T segano gruppi equivalenti sulle curve Φ. Infatti, fissato un punto x_0 su C, il gruppo Y_0 corrispondente su D, è tale che le curve $Y_0 \times C$ e T segano il medesimo gruppo su $\Phi(x_0)$. Poiché $Y \times C \equiv Y_0 \times C$ su W, essendo $Y \equiv Y_0$ su D, risultano equivalenti su $\Phi(x_0)$ i gruppi intersezione $(Y \times C, \Phi(x_0))$ e $(T, \Phi(x_0))$.

Dal primo criterio d'equivalenza (n. 97) segue allora che T e $Y \times C$ sono equivalenti su W, a meno di curve fondamentali del fascio Σ_x. D'altronde, poiché il fascio non contiene curve spezzate, una curva fondamentale non è altro che una curva Φ. Se indichiamo con E un gruppo virtuale conveniente di curve Φ, possiam dunque scrivere:

$$T \equiv E + Y \times C.$$

Segando quest'equivalenza con una curva $\Psi(y_0)$, e tenuto conto che il fascio Σ_y è di grado virtuale zero, si avrà l'equivalenza su $\Psi(y_0)$:

$$(T, \Psi(y_0)) \equiv (E, \Psi(y_0)).$$

Ora, detto X_0 il gruppo corrispondente su C ad y_0, $(T, \Psi(y_0))$ coincide con $(X_0 \times D, \Psi(y_0))$: donde segue che E equivale a $X_0 \times D$. Risulta dunque per T l'equivalenza espressa dalla (78).

Viceversa, se sussiste la (78), le curve $X \times D$ o $Y \times C$ variano necessariamente entro serie lineari composte colle curve dei fasci Σ_x o Σ_y, e quindi anche i gruppi X, Y variano in serie lineari su C, D. Cioè T è a valenza zero.

Premesso questo lemma, consideriamo la corrispondenza $(n-1, n-1)$ che si ottiene sulla $C (= D)$, considerando come

omologhi due punti che appartengono allo stesso gruppo di una data g_n^1. La corrispondenza T così definita è a valenza 1. Indicata con U la corrispondenza *identica* di C in sé (e, come al solito, con la stessa lettera la curva che rappresenta su W tal corrispondenza), risulta a valenza zero la corrispondenza $T + U$.

Per la $T + U$ i gruppi X, Y dei quali trattasi nel lemma precedente, si riducono ad un gruppo generico della g_n^1, che indicheremo con G, tanto se è considerato sulla C, come sulla D. Si ha perciò

$$T + U \equiv G \times D + G \times C \ ,$$

da cui segue, pel gruppo virtuale $(T + U, U)$ dei punti uniti della corrispondenza $T + U$ (che di fatto ha infiniti punti uniti), l'equivalenza:

$$(T + U, U) \equiv (G \times D, U) + (G \times C, U) \ .$$

Si osservi che la curva U su W è unisecata dalle Φ e dalle Ψ, onde risulta riferita birazionalmente alla curva $C\,(= D)$ da tali unisecanti. Sopra U si trasporta la g_n^1 assegnata su C; indicheremo con Γ un gruppo della g_n^1 sopra U.

La precedente relazione si trasforma allora nella

$$(T, U) + (U, U) \equiv 2\,\Gamma \ .$$

Ma (T, U) non è altra cosa che il gruppo jacobiano della g_n^1 sopra U, ed è perciò equivalente a $2\,\Gamma + M\,(U)$, ove $M\,(U)$ è un gruppo canonico sulla U. Segue:

$$(U, U) \equiv -\,M\,(U) \ . \tag{79}$$

È questa la relazione cui volevamo giungere, che fornisce un notevole significato della serie canonica sopra una curva. In parole:

La serie canonica sopra una curva C può pure definirsi come la serie caratteristica virtuale, cambiata di segno, della curva che rappresenta l'identità sul prodotto di C con se stessa.

Osservazione. — Dalla (79) si deduce subito il principio di corrispondenza per le corrispondenze a valenza. Invero, se T ha valenza γ, $T + \gamma\,U$ ha valenza zero; e, indicato con a un punto di C $(= D)$ (considerato indifferentemente sull'una curva o sull'altra), risulta in base alla (78):

$$T + \gamma U \equiv (X + \gamma a) \times D + (Y + \gamma a) \times C \ ,$$

ove X, Y sono i gruppi che T fa corrispondere su C, D rispett. ad un punto y, x di D, C.

Tenuto conto della (79), si trae:

$$(T, U) \equiv X + Y + 2\gamma a + \gamma M(U) ,$$

che è appunto il principio di corrispondenza nell'aspetto funzionale che gli ha dato SEVERI [1].

Viceversa, noto quest'aspetto funzionale, se ne trae subito la (79). Basta all'uopo assumere una T a valenza $\gamma = 1$. Allora $T + U$ è a valenza zero, epperò:

$$(T + U, U) \equiv (X + a) + (Y + a) .$$

Dal confronto di questa e della precedente, ove si ponga $\gamma = 1$, segue il risultato voluto.

142. — È istruttivo di esporre un secondo modo di pervenire al risultato precedente. Premettiamo all'uopo che:

Sul prodotto $W = C \times D$ di due curve (distinte o sovrapposte) luoghi rispettivi del punto x e del punto y, il sistema virtuale (impuro) è la somma delle serie canoniche virtuali dei fasci descritti dalle curve $x \times D$ e $y \times C$ [2].

Invero, una curva canonica virtuale $\bar{K}$ di W deve segare sopra una $\Phi(x)$, e analogamente sopra una $\Psi(y)$, un gruppo canonico virtuale (ved. l'Oss. a pag. 218), perché tanto sopra una $\Phi(x)$ come sopra una $\Psi(y)$, che son variabili in sistemi continui di grado virtuale zero, la serie caratteristica è la serie zero dell'equivalenza lineare. Ora un gruppo canonico (virtuale), H_y, del fascio Σ_y, costituisce una curva (virtuale), che sega su ogni $\Phi(x)$ un gruppo canonico (virtuale). Pel primo criterio d'equivalenza sarà dunque:

$$\bar{K} \equiv H_y + E ,$$

ove E è una curva virtuale composta colle $\Phi(x)$.

Segando con una $\Psi(y)$ i due membri di quest'equivalenza viene, su $\Psi(y)$:

$$(\bar{K}, \Psi) \equiv (E, \Psi) ,$$

perché H_y sega su $\Psi(y)$ il gruppo virtuale zero.

Pertanto E sega su ogni Ψ un gruppo canonico; e siccome ogni Ψ è birazionalmente equivalente al fascio Σ_x, ne segue che E è un gruppo canonico H_x di questo fascio. Si ha dunque:

$$\bar{K} \equiv H_x + H_y ,$$

ed è così dimostrato il lemma.

---

(1) Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 233.

(2) Di questa proprietà si è già fatto uso nella Oss. 2ª del n. 122.

Da esso si trae subito il risultato del n. prec. Sia, invero, $C = D$. Poiché (pag. 218, Oss.) $\overline{K}$ sega su ogni curva di W priva di punti multipli, un gruppo residuo di un gruppo caratteristico rispetto alla serie canonica (virtuale = effettiva) della curva, designati ancora con U la curva di W che rappresenta l'identità e con $M(U)$ un gruppo canonico di U, viene:

$$(\overline{K}, U) \equiv M(U) - (U, U),$$

perché la curva U, unisecante delle Φ, Ψ, è, al pari di esse, priva di punti multipli.

D'altronde:

$$(\overline{K}, U) \equiv (H_x, U) + (H_y, U) \equiv 2M(U);$$

dunque:

$$(U, U) \equiv -M(U).$$

Osservazione 1ª. — Più generalmente, se T è una qualunque curva di $W = C \times D$ ed $M(T)$ un suo gruppo canonico virtuale, sussiste l'equivalenza:

$$(\overline{K}, T) \equiv M(T) - (T, T) \equiv (H_x, T) + (H_y, T).$$

Osservazione 2ª. — Quando le C, D non son razionali la superficie W non può contenere curve razionali e quindi neppure curve eccezionali e $\overline{K}$ è il sistema canonico puro.

143. — Facciamo un'ulteriore osservazione sopra l'interpretazione del gruppo $-M(U)$ sulla curva U, come utile illustrazione delle generalità concernenti le coincidenze di un'involuzione sopra una superficie.

Sulla superficie $W = C \times D$, prodotto delle due curve sovrapposte C, D, il *quadrato* (*simmetrico*) di C, cioè la varietà ∞^2 delle coppie non ordinate dei punti di C, è rappresentata su W da un'involuzione di 2° ordine τ, che muta ogni curva imagine di una corrispondenza fra C, D nella curva imagine della corrispondenza inversa (e quindi muta in sé ogni curva imagine d'una corrispondenza simmetrica) [1]. Essa muta inoltre ogni curva $\Phi(x) = x \times D$ in una curva $\Psi(y) = y \times C$.

Data su U, che possiamo assumere come imagine delle curve sovrapposte C, D (n. 142), una coppia di punti a, b, le coppie $x = a$, $y = b$ e $x = b$, $y = a$ son rappresentate su W dalle

(1) Cfr. F. Severi, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 196.

intersezioni delle curve $\Phi(a)$, $\Psi(b)$ e delle curve $\Phi(b)$, $\Psi(a)$; cioè dalle ulteriori intersezioni, fuori di U, delle curve dei fasci Σ_x, Σ_y, che passano per a, b.

Dicasi T la corrispondenza birazionale involutoria di W in sé cui dà origine τ. I soli punti uniti di T, cioè i soli punti doppi di T, sono evidentemente i punti di U. Fra le direzioni tangenti a W, spiccate per uno qualsiasi O di questi punti, T subordina una proiettività involutoria, di cui le direzioni delle $\Phi(O)$, $\Psi(O)$ costituiscono una coppia e la direzione di U un elemento doppio. L'altro elemento doppio è pertanto il coniugato armonico della direzione di U in O rispetto alle direzioni di $\Phi(O)$, $\Psi(O)$. E siccome le Φ, Ψ non divengono mai tangenti ad U né tangenti fra loro, la conclusione vale qualunque sia O su U.

Insomma *T non possiede che coincidenze imperfette e la direzione principale in una O di esse, è coniugata armonica della direzione della U rispetto alle direzioni delle $\Phi(O)$, $\Psi(O)$.*

Poiché la direzione principale non è mai tangente ad U [1], l'equivalenza funzionale di U nel gruppo virtuale (T, T) delle coincidenze di T (entro il prodotto $W \times W_1$, di W con una sua copia W_1) vale $-M(U)$ (n. 131). Dunque:

Su $W = C \times D$ il gruppo virtuale delle coincidenze dell'involuzione che rappresenta il quadrato di C, equivale a un gruppo canonico (virtuale, se del caso) dell'identità U, cangiato di segno.

La determinazione della relazione fra grado e genere virtuali d'una curva T qualunque di $W = C \times D$, i numeri dei punti in cui la curva sega Φ, Ψ, e i generi di C, D, trovansi in De Franchis (« Rend. Lincei », aprile 1903, pag. 304). Da essa segue la formula che dà il grado virtuale dell'identità U, quando $C = D$. Questa formula è dedotta indipendentemente, da soli concetti di geometria sopra una curva, nel *Trattato di G. a.* di Severi (pag. 269). E tale deduzione si traduce senza difficoltà in un procedimento per conseguire funzionalmente il gruppo caratteristico virtuale di U, come ha fatto in via incidentale Comessatti (« Rend. Lincei », dicembre 1932, pag. 556) in una Nota di cui tosto vedremo il contenuto più importante. La deduzione della relazione $(U, U) \equiv -M(U)$ è ottenuta qui in due modi (nn. 141, 142) diversi da quello ricordato. Come abbiamo osservato (n. 141, Oss.), la relazione stessa è implicitamente contenuta nell'interpretazione funzionale del principio di corrispondenza a valenza, dato da Severi. La determinazione del sistema canonico della superficie $W = C \times D$, nell'ipotesi che si tratti di due curve C, D di generi > 0, trovasi in Picard-Simart, Maroni, De Franchis (loc. sopra citato) con mezzi trascendenti nel primo e nel terzo Autore, con mezzi

---

[1] Il che segue anche dal fatto che essendo T di ordine 2 non ammette punti tripli, mentre ogni punto (non fondamentale) in cui la direzione principale fosse tangente ad U sarebbe un punto triplo (almeno) (pag. 298).

algebrico-geometrici nel secondo. Qui il risultato è quasi ovvia conseguenza del primo criterio d'equivalenza e si consegue più generalmente nel campo virtuale (e quindi anche quando una o ambedue le C, D son razionali).

144. *Gruppo virtuale delle coincidenze per un'involuzione intersezione di due fasci generali.* — Nel n. 138, Oss., abbiamo mostrato che, per la corrispondenza simmetrica T, $(n-1, n-1)$, di una superficie F in sé, individuata da una involuzione γ_n priva di punti fondamentali, l'equivalenza funzionale della curva D dei punti uniti della corrispondenza nel gruppo virtuale dei punti uniti, è data dalla differenza tra il gruppo dei punti tripli di γ_n e un gruppo canonico di D.

Vediamo ora come si modifichi questo risultato nell'ipotesi in cui la γ_n sia razionale e ottenuta come intersezione di due fasci *generali* $|A|$, $|B|$ su F (n. 100), in mutua posizione generica. In questo caso γ_n possiede come punti fondamentali i punti base dei due fasci. Invero, se P è base ad es. per il fascio $|A|$, mentre un punto Q tende a P in una determinata direzione, il gruppo degli $n-1$ coniugati di Q tende al gruppo delle $n-1$ intersezioni, fuori di P, della curva del fascio $|B|$ per P e della curva del fascio $|A|$ individuata dalla direzione prescelta. Donde risulta che la curva di $|B|$ per P è una curva fondamentale di γ_n associata al punto fondamentale P.

Se un punto O, diverso dai punti base dei due fasci, è una coincidenza di γ_n, per esso passan due curve A, B che si toccano in O (o comunque hanno in O molteplicità d'intersezione > 1). La coincidenza appartiene dunque alla curva dei contatti, D, dei due fasci. Poiché la curva dei contatti passa pei punti base dei due fasci (n. 100), si ha intanto che γ_n non possiede coincidenze isolate. Preso un punto generico O di D, le curve A, B per O, appartenenti all'involuzione, passan semplicemente per O, onde (n. 138) la direzione principale della coincidenza O è la tangente comune alle due curve. In un punto particolare O di D (non base per i fasci $|A|$, $|B|$), vi è sempre almeno una delle due curve A,B per O, che passa semplicemente per O (dato che i due fasci si son supposti in mutua posizione generica); quindi tal curva serve ancora a definire la direzione principale.

Se infine il punto O di D cade per es. in un punto base di $|A|$, la considerazione precedente sussiste tuttavia, e la direzione principale resta determinata dalla tangente alla curva del fascio $|B|$ per O.

Ciò premesso, i punti della curva D ove la direzione principale risulta tangente alla D stessa, sono (n. 138) i punti tripli

della γ_n (che risultan qui punti d'osculazione dei due fasci $|A|$, $|B|$); ed inoltre i punti base di $|A|$, $|B|$, in quanto la curva del fascio $|B|$, per es., che passa per un punto base di $|A|$, tocca ivi la curva D dei contatti (n. 100).

In base al teorema del n. 131, l'equivalenza funzionale della curva di coincidenza D per γ_n, risulta espressa dal gruppo virtuale

$$(A, A) + (B, B) + \Xi - M(D) ,$$

ove (A, A) , (B, B) sono i gruppi base dei due fasci, Ξ il gruppo dei punti tripli di γ_n , $M(D)$ un gruppo canonico di D.

Sul prodotto topologico $W = F \times F_1$, della superficie F con una sua copia F_1, si indichi con U la superficie rappresentante l'identità. La U (in perfetta analogia a quanto si è detto nel caso del prodotto di due curve ; n. 142) risulta in corrispondenza birazionale con F $(= F_1)$. Tenuto conto che γ_n non ha, nelle nostre ipotesi, coincidenze isolate, il gruppo virtuale (T, U) dei punti uniti della corrispondenza T, $(n-1 , n-1)$, generata da γ_n (e che qui pensiamo rappresentata da una superficie T tracciata su W), è esaurito dalla equivalenza funzionale di D ; onde si può scrivere la relazione di equivalenza razionale su U :

$$(80) \qquad (T , U) \equiv (A , A) + (B , B) + \Xi - M(D) ,$$

ove i gruppi a secondo membro si pensino trasportati su U mediante la corrispondenza birazionale esistente tra U ed F. Altrimenti la (80) può pensarsi come una relazione d'equivalenza su F, trasportando invece il gruppo (T, U) da U sopra F.

145. *Significato della serie di* SEVERI *come serie caratteristica virtuale dell'identità sopra una superficie.* — Per giungere a stabilire il nuovo significato della serie $|S|$, occorre anticipare alcune nozioni sulle corrispondenze a valenza sopra una superficie, che verranno sviluppate sistematicamente più avanti.

Una corrispondenza, ∞^2 , tra due superficie sovrapposte $F(= F_1)$, dicesi *a valenza* γ , *allorché ad un punto* x *variabile su* F, *corrisponde su* F_1 *un gruppo di punti* Y , *tale che* $Y + \gamma x$ *varia in una serie d'equivalenza.*

Come nel caso delle curve, si dimostra che se una corrispondenza è a valenza γ considerata in un senso, è ancora a valenza γ considerata nel senso inverso. Cioè, se X è il gruppo di F che corrisponde ad un generico punto y su F_1, risulta anche $X + \gamma y$ variabile in una serie d'equivalenza.

Il risultato per le superficie, corrispondente alla caratterizzazione delle corrispondenze a valenza zero tra due curve soprapposte (dimostrato al n. 141), è dato dal teorema seguente:

Una corrispondenza a valenza zero di una superficie F in sé, è caratterizzata dal fatto che la superficie V che la rappresenta su $W = F \times F_1$, soddisfa su W alla equivalenza:

$$V \equiv X \times F_1 + Y \times F + N , \tag{81}$$

ove X, Y sono i gruppi che la V fa corrispondere su F, F_1 rispettiv. ad un generico y, x su F_1, F; ed N è una corrispondenza ∞^2 degenere di 2^a specie (definita su W a meno di un'equivalenza razionale).

La corrispondenza N, degenere di 2^a specie, è una combinazione lineare di corrispondenze degeneri elementari della stessa specie (n. 53). Essa dicesi corrispondenza *associata* a V.

Mentre per le curve una corrispondenza a valenza zero può rappresentarsi con una sola equazione, per una superficie una corrispondenza a valenza zero non è in generale rappresentabile mediante due equazioni. Esistono tuttavia corrispondenze a valenza zero per cui invece ciò è possibile.

Questo è il caso, per esempio, della corrispondenza a valenza zero $T + U$ di una F in sé, ottenuta aggiungendo l'identità alla corrispondenza $(n-1\ ,\ n-1)$ generata da un'involuzione γ_n, intersezione di due fasci generali $|A|$, $|B|$ su F (n. 146). Invero, indicando con x un punto generico su F, si scrivano le equazioni dei due fasci sinteticamente nella forma:

$$f(x) + \lambda\, g(x) = 0 \quad , \quad f_1(x) + \mu\, g_1(x) = 0 \ .$$

Due punti x, y di F che stiano simultaneamente sopra una medesima curva del fascio $|A|$ e del fascio $|B|$, son legati dalle due equazioni:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(y)} \quad , \quad \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(y)}{g_1(y)} \ . \tag{82}$$

Le equazioni scritte definiscono quindi compiutamente il legame che intercede tra due punti x, y che si corrispondono nella $T + U$.

Sulla base delle (82) si dimostra che la corrispondenza N associata a $T + U$ è equivalente su W ad

$$A \times B_1 + A_1 \times B ,$$

ove A, B sono due curve generiche dei due fasci $|A|$, $|B|$ su F,

ed A_1 , B_1 sono due curve generiche dei fasci stessi considerati su F_1. La relazione (81) dà dunque nel nostro caso

$$(83) \qquad T + U \equiv X \times F_1 + Y \times F + A \times B_1 + A_1 \times B .$$

Una volta conosciuta la relazione precedente, ecco come si giunge a stabilire la proprietà che abbiamo di mira. Segando ambo i membri della (83) con la superficie U, si deduce intanto :

$$(T, U) + (U, U) \equiv (X \times F_1, U) + (Y \times F, U) + (A \times B_1, U) + (A_1 \times B, U).$$

È facile persuadersi che ciascuno dei quattro gruppi virtuali che appaiono nel secondo membro, equivale all'intersezione (A, B) trasportata sulla superficie U mediante la corrispondenza birazionale esistente tra U ed F. Si può dunque scrivere

$$(84) \qquad (T, U) + (U, U) \equiv 4\,(A, B) .$$

Tenuto conto della relazione (80) del n. prec., si trae

$$(85) \qquad (U, U) \equiv 4\,(A, B) - (A, A) - (B, B) - \Xi + M\,(D) ;$$

relazione d'equivalenza che può interpretarsi indifferentemente sulla superficie U o sulla F, previa le avvertenze già espresse nel caso della (80).

Ricordiamo ora la relazione (25) del n. 116, che ci è servita per definire la serie $|S|$, e trascriviamola colle notazioni attuali e in rapporto ai fasci $|A|$, $|B|$. Si ha :

$$2\,(A, D) + (D, D') \equiv \Xi + J_A + 2\,(A, A) + (B, B) ,$$

ove D' è una curva aggiunta a D, e J_A è il gruppo jacobiano del fascio $|A|$. Eliminando Ξ tra la precedente e la (85), ottiensi :

$$(86) \qquad (U, U) \equiv 4\,(A, B) + (A, A) + J_A - 2\,(A, D) ,$$

tenuto conto che $M\,(D) \equiv (D, D')$.

Finalmente, se si usufruisce della relazione stabilita nel n. 107 (fine di pag. 214), che esprime la curva dei contatti di due fasci mediante le curve dei fasci stessi e una curva aggiunta ad una d'esse, relazione che colle notazioni attuali si scrive :

$$D \equiv A + A' + 2\,B ,$$

la (86) diviene

$$(U, U) \equiv J_A - 2\,(A, A') - (A, A) ,$$

cioè, per la definizione stessa della serie $|S|$, [n. 116, formula (28)]:

$$(87) \qquad (U, U) \equiv S .$$

Possiamo dunque concludere col teorema:

La serie di SEVERI *sopra una superficie F può pure definirsi come serie caratteristica virtuale della superficie che rappresenta l'identità sul prodotto di F con se stessa.*

Giova segnalare la stretta analogia tra questo risultato e quello indicato al n. 141 per le curve; donde appare che la serie di SEVERI può considerarsi come generalizzazione della serie canonica su una curva. Si osservi però che, mentre per le curve (U, U) è equivalente ad un gruppo canonico cambiato di segno, per le superficie è equivalente ad un gruppo S col suo segno.

146. *Ulteriori considerazioni sulla serie di* SEVERI. — Indichiamo con G il gruppo generico (A, B) dell'involuzione considerata nel n. precedente. L'equivalenza (84), tenuto conto della (87), dà

$$S \equiv 4\,G - (T, U), \tag{88}$$

che offre un altro significato della serie $|S|$, come differenza tra il quadruplo di un gruppo di un'involuzione razionale su F, ed il gruppo virtuale delle coincidenze dell'involuzione.

La relazione (88) è notevole in quanto appare strettamente analoga alla relazione che su una curva dà un gruppo della serie canonica come differenza tra il gruppo delle coincidenze di una involuzione razionale sulla curva e del doppio di un gruppo dell'involuzione stessa. Si osserverà anche qui il cambiamento di segno che si ha passando dalla serie canonica di una curva alla serie di SEVERI.

Occorre tuttavia avvertire che la validità della (88) è essenzialmente legata all'ipotesi che l'involuzione γ_n, donde si parte, sia assegnata come intersezione di due fasci $|A|, |B|$ non appartenenti alla stessa rete. Ciò equivale al fatto che la γ_n abbia l'ordine invariantivo relativo 2 (n. 13); come avviene per l'involuzione considerata, in quanto i suoi gruppi corrispondono senza eccezione alle coppie di curve dei due fasci, e quindi γ_n può rappresentarsi senza eccezione sopra una quadrica.

Nell'ipotesi invece in cui γ_n abbia l'ordine invariantivo relativo 1, cioè si possa rappresentare senza eccezione su un piano, i gruppi di γ_n si otterranno su F come intersezioni delle curve di due fasci estratti dalla medesima rete, che è quella corrispondente su F alla rete delle rette del piano (n. 133). In questo caso, indicando ancora con G un gruppo dell'involuzione, la relazione (88) deve venir sostituita dalla seguente

$$S \equiv 3\,G - (T, U). \tag{89}$$

Infatti, sia C la curva comune ai due fasci della rete $|C|$ su F, come intersezione dei quali si pensa data γ_n. Indichiamo con T la corrispondenza generata da γ_n e con $\overline{T}$ la corrispondenza, che si ottiene (fatta astrazione dall'identità) chiamando omologhi due punti di F tutte le volte che per essi passi una curva dell'uno e una curva dell'altro fascio. È chiaro che la $\overline{T}$, nelle nostre ipotesi, *non* coincide con la T, ma è somma della T e della corrispondenza degenere nella quale sono omologhi due punti qualunque di C. Si ha cioè:

$$\overline{T} = T + C \times C_1 ,$$

ove C_1 è la C considerata sulla F_1 copia di F. Se, nella relazione precedente, si sostituisce alla superficie $C \times C_1$ l'altra $C \times \overline{C}_1$, essendo $\overline{C}_1$ una curva generica della rete su F_1, si può scrivere l'equivalenza razionale su W:

$$\overline{T} \equiv T + C \times \overline{C}_1 , \tag{90}$$

dato che $C \times C_1$ e $C \times \overline{C}_1$ sono equivalenti su W, perché appartengono al sistema razionale delle superficie prodotti di due curve della rete $|C|$, delle quali una si consideri su F e una su F_1 (n. 63).

Per la corrispondenza $\overline{T}$, che è rappresentata compiutamente da equazioni del tipo (82) (ove le $f = 0$, $g = 0$, $f_1 = 0$, $g_1 = 0$ siano curve della stessa rete su F), si possono ripetere i ragionamenti del n. precedente, onde si giunge alla relazione (88) per la $\overline{T}$, cioè alla

$$S \equiv 4\,G - (\overline{T}\,,\, U)\,. \tag{91}$$

Tenuto conto della (90), si deduce

$$S \equiv 4\,G - (T\,,\, U) - (C \times \overline{C}_1\,,\, U) \equiv 4\,G - (T\,,\, U) - G \equiv 3\,G - (T\,,\, U)$$

Riassumendo possiamo concludere col teorema:

Se G è un gruppo di un'involuzione razionale γ_n su una superficie F, un gruppo della serie di SEVERI *su F è equivalente alla differenza fra il triplo di G e il gruppo jacobiano dell'involuzione, ovvero alla differenza fra il quadruplo di G e il gruppo jacobiano stesso, a seconda che l'ordine invariantivo relativo di γ_n sia rispett.* 1 *o* 2.

L'interpretazione della serie di SEVERI come intersezione dell'identità con se stessa, di cui nel n. 145, è di COMESSATTI (« Rend. Lincei », dicembre 1932). Il COMESSATTI ha però tratteggiato una dimostrazione della proprietà

men semplice di quella qui esposta e di cui non ha dato il completo sviluppo. La nostra dimostrazione, che è la sola finora pubblicata, è ripresa dalla Nota [10] di SEVERI, cit. a pag. 44. In questo lavoro trovasi anche l'altra interpretazione della serie $|S|$ in relazione ad un'involuzione assegnata sopra la superficie, esposta nel n. 146. Una ulteriore dimostrazione della caratterizzazione della serie di SEVERI mediante intersezione dell'identità con se stessa trovasi nel successivo n. 154.

Per quanto concerne le nozioni sulle corrispondenze a valenza su una superficie, anticipate al n. 145 (e che, come si è detto, saranno sviluppate ampiamente in seguito), cfr. la parte seconda della Memoria [8] di SEVERI, cit. a pag. 44.

§ 5. — RELAZIONI TRA I CARATTERI FUNZIONALI E NUMERATIVI DI DUE SUPERFICIE IN CORRISPONDENZA ALGEBRICA.

147. *Trasformazione di un sistema d'equivalenza mediante una corrispondenza algebrica.* — È ben noto che se tra due curve intercede una corrispondenza algebrica (non degenere), gruppi equivalenti sull'una si mutano in gruppi equivalenti sull'altra [1]. Vediamo come questo teorema si generalizzi nel caso di una corrispondenza ∞^r (non degenere) tra due varietà M_r, M'_r, ove si pone la questione analoga, sia nei confronti dell'equivalenza lineare per le varietà subordinate di dimensione $r-1$, sia nei confronti dell'equivalenza razionale per le varietà subordinate di dimensione k $(< r-1)$.

Anzitutto, se si ha su M_r un sistema lineare $|V_{r-1}|$ di varietà ad $r-1$ dimensioni, la corrispondenza T assegnata tra M_r ed M'_r, muta $|V_{r-1}|$ in un sistema $\{V'_{r-1}\}$, che è unirazionale, in quanto ogni V_{r-1} individua razionalmente una V'_{r-1}. E siccome un sistema unirazionale di varietà ad $r-1$ dimensioni subordinate ad M'_r, consta di varietà equivalenti (n. 49), si conclude che l'equivalenza lineare si conserva nel passaggio da M_r ad M'_r.

Se in particolare la corrispondenza T tra M_r ed M'_r ha il primo indice uguale all'unità, per guisa che le coordinate di un punto variabile su M_r si esprimono razionalmente nelle coordinate di un punto variabile su M'_r, allora al sistema lineare $|V_{r-1}|$ corrisponde ovviamente un sistema lineare $|V'_{r-1}|$.

Il risultato generale stabilito pei sistemi lineari ed il ragionamento impiegato per dedurlo, restano sostanzialmente i medesimi nel caso dei sistemi d'equivalenza razionale. Invero,

[1] Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 206.

sia $|V_k|$ un sistema d'equivalenza di varietà (virtuali) a k dimensioni su M_r, ottenuto come somma algebrica delle varietà variabili in dati sistemi elementari. Come si è osservato a suo tempo (n. 64) $|V_k|$ è un sistema razionale. Il sistema trasformato $\{V'_k\}$ su M'_r, risulta pertanto unirazionale. Ma un sistema unirazionale di varietà (virtuali) di data dimensione su una M'_r, è, in base ad un teorema fondamentale (n. 63), un sistema d'equivalenza. Si ha dunque che anche l'equivalenza razionale si conserva nel passaggio da M_r ad M'_r.

È opportuno osservare tuttavia, che, se si parte su M_r da un sistema elementare $|W_k| = |(A^{(1)}_{r-1}, \ldots, A^{(r-k)}_{r-1})|$, intersezione di $r-k$ sistemi lineari di varietà ad $r-1$ dimensioni, il sistema $\{W'_k\}$ delle varietà trasformate non è necessariamente il sistema d'intersezione delle varietà A'_{r-1} trasformate delle A_{r-1}, le varietà W'_k non risultando intersezioni *complete* delle A'_{r-1}. Ciò perché un punto comune alle A'_{r-1} può non provenire da un punto comune alle A_{r-1}, ma da più punti di M_r che si mutino per la T nello stesso punto su M'_r. Questa eventualità non si presenta però certamente se il primo indice della corrispondenza vale 1, nel quale caso, anzi, sistemi d'equivalenza elementare si mutano in sistemi d'equivalenza elementare.

Riassumendo possiamo enunciare:

In una corrispondenza algebrica, ∞^r, non degenere, d'indici qualunque, tra due varietà M_r, M'_r, le relazioni di equivalenza lineare e razionale, di specie qualunque, si conservano.

Osservazione. — Nel caso di una corrispondenza T, non degenere, ∞^{r+s} $(1 \leqslant s \leqslant r-1)$ tra M_r, M'_r, il teorema sussiste ancora, pur accadendo che un sistema d'equivalenza di specie k su M_r si muta in un sistema di specie $k+s$ su M'_r.

Il teorema si estende altresì al caso in cui la corrispondenza ∞^r tra M_r ed M'_r sia *degenere*.

148. *Trasformazione del sistema canonico in una corrispondenza razionale tra due superficie.* — Sia T una corrispondenza $(1, \alpha_1)$ tra due superficie F, F_1. Qui (e nel seguito, fino a contrario avviso) supporremo la corrispondenza *priva di elementi fondamentali*, onde l'involuzione γ_{α_1} indotta dalla T su F_1 risulta priva di coincidenze isolate, e su F non esiston punti di diramazione isolati (n. 139).

Vediamo come si trasforma il sistema canonico $|K|$ (virtuale, impuro) su F, nel passaggio da F ad F_1; e, viceversa, come si

trasforma il sistema canonico $|K_1|$ (virtuale, impuro) su F_1, nel passaggio da F_1 ad F.

Se $|C|$ è una rete generale su F, e C_j la sua curva jacobiana, sappiamo (n. 102) che:

$$K \equiv C_j - 3C . \tag{92}$$

La rete $|C|$ viene mutata dalla T in una rete irriducibile $|C_1|$ (n. 136). Determiniamo la jacobiana $(C_1)_j$ di $|C_1|$.

Un punto generico di C_j, che non sta sulla curva di diramazione D di F (in quanto può supporsi la rete $|C|$ in posizione generica rispetto a D), si muta per la T in α_1 punti di F_1, con corrispondenza biunivoca tra gli intorni. Onde, alla curva C che passa doppiamente pel punto considerato, corrisponde su F_1 una curva C_1 che possiede α_1 punti doppi nei punti corrispondenti. Ne segue che la trasformata di C_j mediante la corrispondenza, che indicheremo con $T(C_j)$, fa parte di $(C_1)_j$. La curva $T(C_j)$ non esaurisce però tutta la jacobiana $(C_1)_j$. Invero, una curva C tangente alla linea di diramazione D in un suo punto qualunque, si muta in una C_1 che ha come doppio il punto corrispondente sulla linea doppia D_1 su F (n. 138); quindi la curva D_1 fa parte di $(C_1)_j$.

Poiché un punto doppio di una curva C_1, che sia fuori della linea doppia D_1, proviene da un punto fuori della linea di diramazione D, e quindi necessariamente da un punto doppio di una C, si conclude che

$$(C_1)_j = T(C_j) + D_1 .$$

Si trasformi mediante T l'equivalenza (92); risulta (n. 148):

$$T(K) \equiv T(C_j) - 3\,T(C) \equiv (C_1)_j - 3\,C_1 - D_1 .$$

Tenuto conto della

$$K_1 \equiv (C_1)_j - 3\,C_1 ,$$

si ottiene in definitiva:

$$K_1 \equiv T(K) + D_1 . \tag{93}$$

La precedente relazione si può invertire, pervenendo ad esprimere il sistema canonico su F per il trasformato del sistema canonico su F_1 mediante la corrispondenza inversa T^{-1}, di indici $(\alpha_1, 1)$. Basta applicare la T^{-1} ai due membri della (93). Occorre però tenere conto, nel considerare la trasformata

della curva canonica $T(K) + D_1$, che la prima, $T(K)$, delle sue componenti appartiene totalmente all'involuzione γ_{α_1}; mentre la seconda, contata semplicemente (come deve esser contata, quale componente d'una K_1), non appartiene all'involuzione neppur parzialmente (vi appartiene parzialmente la curva $2D_1$). Dalla (93) segue (n. 147):

$$T^{-1}(K_1) \equiv T^{-1}T(K) + T^{-1}(D_1).$$

Siccome la curva $T(K)$ appartiene all'involuzione γ_{α_1} la $T^{-1}T(K)$ non è altro che la K contata α_1 volte, in quanto ogni punto di K proviene, mediante la T^{-1}, da α_1 punti di $T(K)$ costituenti un gruppo della γ_{α_1}. Invece la curva $T^{-1}(D_1)$ coincide con D, perché la curva D_1 contata semplicemente, non appartiene neanche parzialmente a γ_{α_1}. Si trae allora:

$$T^{-1}(K) \equiv \alpha_1 K + D, \tag{94}$$

che dà il modo di trasformarsi del sistema canonico $|K|$ mediante la corrispondenza $(\alpha_1, 1)$ tra F_1 ed F.

Osservazione. — La relazione fondamentale (93) può ottenersi con facilità anche per via trascendente, quando si conosca la teoria degli integrali doppi di 1ª specie sopra una superficie. Siano infatti

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad f_1(x_1, y_1, z_1) = 0$$

le equazioni di due modelli proiettivi, nello spazio ordinario, delle superficie F, F_1, e sia

$$x = x(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad y = y(x_1, y_1, z_1) \quad , \quad z = z(x_1, y_1, z_1)$$

la sostituzione razionale che fa passare da F ad F_1. Se $\varphi(x, y, z,) = 0$ è un'aggiunta ad F d'ordine $m - 4$ (essendo m l'ordine di F), l'integrale doppio di 1ª specie $\int\int \frac{\varphi(x, y, z)}{\frac{df}{dz}}\, dx\, dy$ relativo ad F, si muterà, mediante la sostituzione razionale, in un integrale analogo relativo ad F_1, cosicché verrà:

$$\int\int \frac{\varphi(x, y, z)}{\frac{df}{dz}}\, dx\, dy = \int\int \frac{\varphi_1(x_1, y_1, z_1)}{\frac{df_1}{dz_1}}\, dx_1\, dy_1 \ ,$$

ove $\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0$ è un'aggiunta ad F_1, d'ordine $m_1 - 4$ (essendo m_1 l'ordine di F_1). Passando nell'integrale del 1° mem-

bro dalle variabili x, y, z alle x_1, y_1, z_1, eppoi confrontando col 2° membro, si ottiene la relazione:

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{\frac{df}{dz}} \frac{D(x, y)}{D(x_1 y_1)} = \frac{\varphi(x_1, y_1, z_1)}{\frac{df_1}{dz_1}},$$

nella quale $\frac{D(x, y)}{D(x_1, y_1)}$ rappresenta il determinante funzionale di x, y rispetto ad x_1, y_1, calcolato tenendo conto del fatto che z_1 è funzione algebrica di x_1, y_1. Questa relazione mostra che i punti ove si annulla $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$ (fuori della linea doppia di F_1) sono i trasformati di quelli in cui s'annulla $\varphi(x, y, z)$ (fuori della linea doppia di F) e i trasformati dei punti pei quali $\frac{D(x, y)}{D_1(x_1, y_1)} = 0$. Avendo escluso che su F ci siano punti fondamentali per la trasformazione, $\frac{D(x, y)}{D_1(x_1, y_1)} = 0$ esprime la condizione perché coincidano due degli n punti corrispondenti ad (x, y, z). Ritroviamo così il risultato espresso dalla (93).

149. *Trasformazione del sistema canonico in una corrispondenza algebrica d'indici qualunque tra due superficie.* — Passiamo a considerare il problema generale della trasformazione del sistema canonico (virtuale, impuro) in una corrispondenza (α, α_1) tra F ed F_1.

Sia Φ la superficie imagine su $W = F \times F_1$ della corrispondenza T assegnata.

Tra F e Φ si ha una corrispondenza, R, $(1, \alpha_1)$, nella quale sono omologhi un punto x di F e un punto z di Φ, quando x appartiene alla coppia di punti x, y di F, F_1 rappresentata da z. Similmente si ha una corrispondenza, R_1, $(1, \alpha)$, tra F_1 e Φ. La T può pensarsi come prodotto delle corrispondenze R ed R_1^{-1}; scriveremo (intendendo i simboli che rappresentan le corrispondenze come simboli operatori a sinistra): $T = R_1^{-1} R$.

Indichiamo con D, Δ e con Δ_1, D_1 la curva di diramazione e la curva doppia su F e rispettiv. su F_1, in relazione alla corrispondenza T tra F ed F_1. Alla curva di diramazione D di F corrisponde la curva doppia D_1 di F_1 con una corrispondenza birazionale, che indicheremo con t, indotta fra le due curve dalla T; potremo scrivere cioè: $D_1 = t(D)$. I sistemi canonici impuri su F, F_1 si indicheranno con $|K|$, $|K_1|$.

La relazione (93) del n. precedente, applicata alla corrispondenza R, $(1, \alpha_1)$, tra F e Φ, dà:

$$\overline{K} \equiv R(K) + r(D),$$

ove $\overline{K}$ è una curva del sistema canonico impuro su Φ e $r(D)$ è la curva di Φ doppia per la corrispondenza R tra F e Φ, che si ottiene appunto applicando la trasformazione birazionale r (indotta dalla R) alla curva di diramazione su F. Trasformiamo ambo i membri della relazione scritta, mediante la corrispondenza R_1^{-1}, $(\alpha, 1)$, che fa passare da Φ ad F_1; si ottiene:

$$R_1^{-1}(\overline{K}) \equiv R_1^{-1} R(K) + R_1^{-1} r(D) = T(K) + t(D).$$

Tenuto conto della (94), applicata nel caso attuale con riferimento alla corrispondenza R_1^{-1}, si ha in definitiva la relazione:

$$T(K) \equiv \alpha K_1 + \Delta_1 - D_1, \tag{95}$$

che può esprimersi in parole col teorema seguente:

In una corrispondenza algebrica (α, α_1) *tra due superficie* F, F_1, *priva di elementi fondamentali, la trasformata di una curva del sistema canonico (virtuale) di* F *è equivalente al multiplo secondo* α *di una curva canonica di* F_1, *cui si aggiunga e si tolga rispett. la curva di diramazione e la curva doppia di* F_1 *per la corrispondenza considerata.*

È ovvio che la relazione (95) comprende, come casi particolari, le relazioni (93), (94) del n. 148.

150. *Trasformazione della serie canonica d'una superficie in una corrispondenza unirazionale.* — Consideriamo due superficie F, F_1 in corrispondenza $(1, \alpha_1)$ e conserviamo per esse le notazioni del n. 148. La relazione $K_1 \equiv K_1^* + D_1$ tra una curva canonica (virtuale, impura) di F_1 e la trasformata K_1^* d'una curva canonica (virtuale, impura) di F, per intersezione di ognuno dei due membri con se stesso, dà:

$$(K_1, K_1) \equiv (K_1^*, K_1^*) + 2(K_1^*, D_1) + (D_1, D_1),$$

cioè:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) + 2(K_1^*, D_1) + (D_1, D_1), \tag{96}$$

ove Ω, Ω_1 son gruppi canonici (virtuali) di F, F_1 (n. 119) e $T(\Omega)$ denota il gruppo trasformato di Ω in T.

La (96) esprime il legame che volevamo fra le serie canoniche delle F, F_1.

Conviene tuttavia trovare altri aspetti di questo legame. Si osservi all'uopo che essendo:

$$D'_1 \equiv D_1 + K_1 \equiv 2\,D_1 + K_1^* ,$$

risulta:

$$(K_1^* , D_1) \equiv (D'_1 , D_1) - 2\,(D_1 , D_1) \tag{97}$$

e, sostituendo nella (96):

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) + 2\,(D_1 , D'_1) - 3\,(D_1 , D_1) , \tag{98}$$

la quale può anche scriversi:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) + 2\,M(D_1) - 3\,(D_1 , D_1) , \tag{99}$$

ove $M(D_1)$ è un gruppo canonico effettivo (= virtuale) della curva D_1, che è priva di punti multipli, se la corrispondenza fra F, F_1 non presenta particolarità eccezionali, come noi supponiamo [1].

Altre forme della (96) s'ottengono con la considerazione del *gruppo (virtuale) d'immersione* d'una curva sopra una superficie. Così chiamiamo, con SEVERI (ved. le notizie bibliografiche in fondo al §), il gruppo d'intersezione virtuale d'una curva (effettiva o virtuale) della superficie con una curva canonica (virtuale, impura). Questo gruppo è definito a meno d'un'equivalenza.

Indicato con Θ il gruppo d'immersione di D su F, cioè posto

$$\Theta \equiv (K , D) ,$$

viene

$$t(\Theta) \equiv (K_1^* , D_1) ,$$

ove t è al solito la trasformazione birazionale subordinata da T fra D e D_1.

La (97) allora porge:

$$2\,(D_1 , D_1) \equiv M(D_1) - t(\Theta) . \tag{100}$$

---

[1] Quando non son soddisfatte le ipotesi di generalità considerate in questo §, le relazioni di cui ci occuperemo subiscono qualche variante, che si determina facilmente caso per caso, mediante considerazioni di limite. Si posson anzi tener valide sempre le formule rispondenti alle ipotesi generali, purché i gruppi e i caratteri che in esse compaiono s'interpretino virtualmente in modo opportuno (ved. l'Oss. 1ª in fondo a questo n.).

Volendo introdurre nella (99) $t(\Theta)$ invece di (D_1, D_1), bisogna moltiplicarne ambo i membri per 2. Risulta così:

$$2\,\Omega_1 \equiv 2\,T(\Omega) + M(D_1) + 3\,t(\Theta)\,, \tag{101}$$

equivalenza che è però meno espressiva della (99), perché due gruppi di punti sopra una superficie posson avere i loro doppi (o i loro multipli secondo un intero) equivalenti, senza essere, essi medesimi, equivalenti.

Un'altra forma della nostra relazione, che invece ha la stessa capacità espressiva della (96) e della (99), si ottiene introducendo il gruppo d'immersione $\Theta_1 \equiv (K_1, D_1)$. Invero:

$$\Theta_1 \equiv (K_1, D_1) \equiv (K_1^*, D_1) + (D_1, D_1)\,,$$

cioè:

$$(D_1, D_1) \equiv \Theta_1 - t(\Theta)\,,$$

e sostituendo nella (96):

$$\Omega_1 - \Theta_1 \equiv T(\Omega) + t(\Theta)\,, \tag{102}$$

oppure:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) + 2\,\Theta_1 - (D_1, D_1)\,, \tag{103}$$

secondo che si elimina dalla (96) il gruppo (D_1, D_1) o il gruppo $t(\Theta)$.

E infine, ricordato che

$$\Theta_1 + (D_1, D_1) \equiv (D_1, D_1') \equiv M(D_1)\ (^1)\,,$$

dalla (99) segue:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) - M(D_1) + 3\,\Theta_1\,. \tag{104}$$

Le (101), (102) fanno intervenire caratteri delle curve D, D_1; mentre le (96), (99), (103), (104) fanno intervenire soltanto caratteri di D_1; e la (101), tenuto conto che $M(D_1)$ è il trasformato mediante T d'un gruppo canonico *effettivo* di D, soltanto caratteri di D.

La più elegante e semplice delle forme della nostra relazione, apparisce la (104), che si può enunciare così:

Abbiasi tra F, F_1 una corrispondenza T, $(1, \alpha_1)$, priva di elementi fondamentali. Allora il trasformato mediante T d'un

---

(1) Si osservino anche le equivalenze $\Theta_1 \equiv (D_1, D_1) + t(\Theta)$, $2\,\Theta_1 \equiv M(D_1) + t(\Theta)$, l'ultima delle quali risulta dal confronto dell'equivalenza del testo colla precedente.

gruppo canonico di F, aumentato del triplo d'un gruppo d'immersione della curva di coincidenza, equivale alla somma d'un gruppo canonico di F e d'un gruppo canonico della curva di coincidenza.

La (101) è stata considerata più che altro perché la sua interpretazione numerativa coincide colla forma primitivamente data da SEVERI (ved. le notizie in fondo al §) alla relazione fra i generi lineari relativi $\omega = [\Omega] + 1$, $\omega_1 = [\Omega_1] + 1$ delle superficie F, F_1.

La traduzione numerativa delle (96), (99), (101), (102), (103), (104) porge le:

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) + 2\theta + \nu_1 , \tag{96'}$$

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) + 4 (p - 1) - 3 \nu_1 , \tag{99'}$$

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) + p - 1 + \frac{3}{2}\theta , \tag{101'}$$

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) + \theta + \theta_1 , \tag{102'}$$

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) + 2\theta_1 - \nu_1 , \tag{103'}$$

$$\omega_1 - 1 = \alpha_1 (\omega - 1) - 2 (p - 1) + 3\theta_1 , \tag{104'}$$

ove si è posto $\theta = [\Theta]$, $\theta_1 = [\Theta_1]$, $\nu_1 = [D_1, D_1]$, e p denota il genere (virtuale = effettivo) di D_1, cioè il genere (effettivo, diverso generalmente, come tosto vedremo, dal virtuale) di D.

Consideriamo ora la relazione tra le serie canoniche di F_1, F nel passaggio inverso T^{-1}, $(\alpha_1, 1)$, da F_1 ad F. Ad ogni punto di F_1 risponde un sol punto di F e a $k \geqslant 2$ punti distinti o infinitamente vicini di F_1 corrispondono k punti coincidenti di F, cioè in definitiva un punto k-plo, soltanto quando quei punti appartengano ad un medesimo gruppo dell'involuzione corrispondente su F_1 ai punti di F. Perciò nell'operazione T^{-1} al gruppo $T(\Omega)$ di F_1 risponde il gruppo $\alpha_1 \Omega$ di F, in quanto il gruppo $T(\Omega)$ consta di $\omega - 1$ gruppi della predetta involuzione [1]; e al gruppo $t(\Theta)$ corrisponde in T^{-1}, e quindi in t^{-1}, il gruppo Θ. Applicando la T^{-1} alla (104), tenuto conto che gruppi equivalenti si mutano in gruppi equivalenti, risulta:

$$T^{-1}(\Omega_1) \equiv \alpha_1 \Omega - M(D) + 3\, T^{-1}(\Theta_1) ,$$

che si può anche, se si vuole, scrivere:

$$T^{-1}(\Omega_1 - 3\,\Theta_1) \equiv \alpha_1 \Omega - M(D) . \tag{105}$$

[1] Questo vale anche se Ω è un gruppo virtuale, esprimibile dunque come differenza di due gruppi effettivi, perché ciascuno dei trasformati mediante T è composto da gruppi dell'involuzione.

La (105) si enuncia come segue:

Nella corrispondenza $T^{-1}, (\alpha_1, 1)$, *fra* F_1, F, *il trasformato mediante* T^{-1} *del gruppo differenza d'un gruppo canonico di* F_1 *e del triplo d'un gruppo d'immersione della curva di coincidenza, equivale all'*α_1*-plo di un gruppo canonico di* F, *diminuito d'un gruppo canonico della curva di diramazione.*

Osservazione 1ª. — La relazione (102) e la sua inversa $T^{-1}(\Omega_1 - \Theta_1) \equiv \alpha_1 \Omega + \Theta$, sono forme opportune della relazione fra le serie canoniche delle F, F_1 nel passaggio dalla prima alla seconda superficie o dalla seconda alla prima, perché i caratteri funzionali Θ, Θ_1, hanno un significato indipendentemente dalla particolare struttura delle curve di diramazione e di coincidenza, non trattandosi di caratteri intrinseci, ma di caratteri delle due curve in relazione alla superficie ambiente. Epperò esse possono applicarsi anche nei casi eccezionali, purché la curva D_1 sia definita opportunamente per ciò che concerne le sue eventuali componenti multiple, in guisa da conservare validità alla relazione fondamentale di partenza $K_1 \equiv K_1^* + D_1$.

Osservazione 2ª. — Le relazioni funzionali e numerative diffusamente studiate nel § 3 di questo Cap. nel caso di un'involuzione razionale, cioè di una corrispondenza $(1, n)$ fra un piano ed una superficie, possono essere estese al caso più generale di una corrispondenza $(1, \alpha_1)$, come quella considerata fra F ed F_1. È questo un interessante argomento di ricerca su cui non ci arrestiamo, se non per esporre in proposito talune riflessioni e relazioni preliminari.

Anzitutto c'è da porre in rilievo che *mentre la curva di coincidenza* D_1 *non ha in generale punti multipli, la curva di diramazione* D *ha invece, in generale, un gruppo* X *di cuspidi e un gruppo di nodi.* Denoteremo con Z il gruppo delle coppie di punti distinti di D, che cadono nelle origini di questi nodi. Ciò risulta senz'altro, mutatis mutandis, dalle stesse argomentazioni del n. 126, Oss. 1ª, usufruendo di una rete di curve di F_1, trasformata d'una rete di curve di F, cioè appartenente all'involuzione che si ha su F_1. Il fatto che la rete assunta su F non sia di grado 1 (come quella che si può assumere nel piano, mediante per es. la rete delle rette) non ha alcuna influenza sulle deduzioni concernenti le cuspidi e i nodi della curva di diramazione, perché esse hanno carattere locale.

Tenuto conto della caratterizzazione (esposta nel n. 113) del sistema aggiunto ad un sistema (o ad una curva) sulla quale

si *assegnino* come fissi, con molteplicità virtuali uguali alle effettive, tutti i punti multipli distinti o infinitamente vicini ch'essa possiede; e del fatto che, secondo la teoria delle singolarità infinitamente vicine, una cuspide è un punto doppio a cui succede un sol punto semplice, e un nodo un punto doppio a cui succedono (nell'intorno di 1° ordine) due punti semplici, si perviene senz'altro all'equivalenza:

$$(106) \qquad (D\,,\,D') \equiv M\,(D) + 2\,X + Z\,,$$

ove $(D\,,\,D')$ è un gruppo canonico virtuale della D, virtualmente priva di punti multipli, ed $M(D)$ un gruppo canonico della D colle cuspidi e coi nodi assegnati (la chiameremo la curva D^0); gruppo che è effettivo, se D è irriducibile (come accade nelle nostre ipotesi generali) e di genere effettivo > 0.

Vicino alla (106) si può porre l'equivalenza

$$(107) \qquad (D\,,\,D) \equiv (D^0\,,\,D^0) + 3\,X + Z\,,$$

che lega un gruppo caratteristico $(D\,,\,D)$ della D, virtualmente priva di punti multipli, al gruppo caratteristico (D^0, D^0) della D coi punti doppi assegnati (gruppo che talora si chiama impropriamente effettivo, sebbene possa non esistere come gruppo effettivo).

Ecco come si dimostra la (107). Anzitutto si osservi che *quando sopra una superficie F si ha una curva D con un gruppo X di cuspidi e un gruppo di punti doppi, le cui coppie formino il gruppo Z, il gruppo $3X + Z$ è fisso per la serie caratteristica virtuale* $|(D\,,\,D)|$.

Sia infatti F priva di punti multipli in S_r. Facciamo la proiezione di F da un S_{r-3} generico sopra un piano. Si può supporre, senza restrizione, che nessuno dei punti doppi (cuspidi e nodi) di D sia di contatto per F e per un S_{r-2} passante pel centro di proiezione. Allora l'intorno su F di ciascuno dei punti doppi di D è in corrispondenza biunivoca (analitica) coll'intorno del punto proiezione sul piano. Sia D^* la proiezione di D e X^*, Z^* siano le proiezioni dei gruppi X, Z di D; sicché X^* , Z^* son gruppi di cuspidi e nodi per D^* [1]. Facciamo variare D^* sul piano (con le cuspidi e i nodi che provengono dai gruppi X, Z) in un sistema continuo. Ciò è sempre possibile, bastando p. es.

---

[1] Questa curva avrà però in generale altri nodi, che non c'interessa di considerare.

far variare D^* nel sistema delle curve omografiche. A D^* corrisponde su F (mediante la corrispondenza, multipla nel passaggio dal piano ad F) la curva $D + E$, ove E, coniugata di D nell'involuzione che su F rappresenta i punti del piano, non passa per alcuno dei punti X, Z, perché, essendo il centro di proiezione generico rispetto ai gruppi X, Z, l'intersezione di F col cono proiettante dal centro la curva D, ha in ciascuno dei punti doppi di D soltanto un punto doppio. Alla $\overline{D}^*$ vicinissima a D^*, nel sistema continuo considerato, corrisponde invece una curva, generalmente irriducibile, $H \equiv D + E$, con nodi e cuspidi corrispondenti ai gruppi X^*, Z^* di D^* e prossimi ai punti dei gruppi X, Z.

Ora, quando $\overline{D}^*$ è infinitamente vicina a D^*, è noto ch'essa passa per ciascuno dei punti doppi di D^* e che tocca tale curva in ciascuna delle cuspidi [1]. Pertanto la H infinitamente vicina a $D + E$ passa per ciascuno dei punti del gruppo X, avendo con D, in ognuno di essi, molteplicità d'intersezione 3; e per ciascuno dei nodi, avendo in ognuno di essi con D molteplicità d'intersezione 2. Ne segue che il gruppo $3X + Z$ fa parte del gruppo $(H, D) - (D, E) \equiv (D, D)$, in quanto E non passa per alcuno dei punti di tale gruppo. Si può in conclusione scrivere la (107).

Le relazioni precedenti permettono p. es. di trovare una relazione fra il trasformato, mediante T, di un gruppo (D^0, D^0) e un gruppo caratteristico (D, D).

Dalla (106) si trae infatti:

$$\Theta + (D, D) \equiv M(D) + 2X + Z,$$

e confrontando colla (107):

$$\Theta + (D^0, D^0) + X \equiv M(D).$$

Passando, mediante t, da D a D_1, viene:

$$t(\Theta) + t[(D^0, D^0)] + X_1 \equiv (D_1, D_1'),$$

ove X_1 è il gruppo di D_1 corrispondente alle cuspidi di D, cioè il *gruppo dei punti tripli dell'involuzione* imagine di F; e siccome per la (97):

$$t(\Theta) \equiv (D_1, D_1) - 2(D_1, D_1),$$

risulta:

$$2(D_1, D_1) \equiv t[(D^0, D^0)] + X_1,$$

che è la relazione alla quale alludevamo.

(1) Ved. p. es. F. Severi, *Trattato di G. a.*, pag. 42.

Un'altra notevole relazione, in cui entra, oltre ad X_1, il trasformato Z_1 del gruppo Z, cioè *il gruppo delle coppie di punti ciascuna delle quali è coppia di punti doppi di un gruppo dell'involuzione imagine di* F, si ottiene considerando la coniugata C_1 di D_1 nell'involuzione che su F_1 rappresenta i punti di F, sicché $T(D) = 2D_1 + C_1$. Risulta invero

$$(C_1, D_1) \equiv 2X_1 + Z_1, \tag{108}$$

perché se un punto è comune a C_1, D_1, o fa parte di una coppia di punti doppi di un medesimo gruppo dell'involuzione, o è un punto triplo della medesima. D'altronde la (108) si ottiene pure indirettamente così. Essendo $D' = D + K$, viene:

$$T(D') \equiv T(D) + T(K) \equiv 2D_1 + C_1 + K_1^* \equiv D_1 + C_1 + K_1 \equiv D' + C_1.$$

Onde la (106), passando da D a D_1 mediante t, diviene:

$$(D_1, D_1' + C_1) \equiv (D_1, D_1') + (C_1, D_1) \equiv (D_1, D_1') + 2X_1 + Z_1,$$

da cui appunto la (108).

Non insistiamo ulteriormente sull'argomento, avvertendo che, nei riguardi dei gruppi X, Z, si tratta di trovare le loro espressioni mediante le serie covarianti di D (serie canonica e serie caratteristica) e le serie invarianti di F e della F_1, rappresentata multiplamente su F, con quella curva di diramazione. Del resto un'espressione siffatta di X risulterà dal seguito (n. 153).

151. *Relazione fra le serie canoniche di due superficie in corrispondenza* (α, α_1) *priva di elementi fondamentali.* — Dobbiamo infine considerare il caso di una generica T, (α, α_1), fra due superficie F, F_1. Ricorreremo, come nel n. 149, alla superficie Φ, che rappresenta le coppie x, y di punti di F, F_1, omologhi in T, cioè all'imagine della corrispondenza sul prodotto $W = F \times F_1$; e continueremo a designare con R, R_1 le corrispondenze $(1, \alpha_1)$ fra F, Φ e $(1, \alpha)$ fra F_1, Φ . .

Indicheremo inoltre con:

Θ, Θ_1 gruppi d'immersione su F, F_1 delle curve D (di diramazione) e D_1 (di coincidenza);

H, H_1 gruppi d'immersione su F, F_1 delle curve Δ (di coincidenza) e Δ_1 (di diramazione);

$\overline{\Theta}$, $\overline{H}$ gruppi d'immersione su Φ delle curve $\overline{D} = r(D)$, $\overline{\Delta} = r_1(\Delta_1)$, che son le curve di coincidenza delle corrispondenze tra F, Φ ed F_1, Φ.

Ciò posto, la (104) applicata alla R da F a Φ, porge:

$$\overline{\Omega} \equiv R(\Omega) - M(\overline{D}) + 3\,\overline{\Theta},$$

e, passando da Φ ad F_1 mediante R_1^{-1}, l'equivalenza ottenuta si muta nella:

$$R_1^{-1}(\overline{\Omega}) \equiv T(\Omega) - M(D_1) + 3\,R_1^{-1}(\overline{\Theta}).$$

D'altronde la (105), applicata alla R_1^{-1} da Φ ad F_1, dà:

$$R_1^{-1}(\overline{\Omega}) \equiv \alpha\,\Omega_1 - M(\Delta_1) + 3\,R_1^{-1}(\overline{H});$$

onde risulta:

$$(109)\quad T(\Omega) - M(D_1) + 3\,R_1^{-1}(\overline{\Theta}) \equiv \alpha\,\Omega_1 - M(\Delta_1) + 3\,R_1^{-1}(\overline{H}).$$

Occorre ora esprimere $R_1^{-1}(\overline{\Theta})$ ed $R_1^{-1}(\overline{H})$, che son caratteri funzionali della corrispondenza ausiliaria R_1^{-1} fra Φ ed F_1, per mezzo di caratteri funzionali diretti della T da F ad F_1.

Osserviamo all'uopo primieramente che la trasformata della curva D_1 di F_1, nella trasformazione $(1, \alpha)$ tra F_1 e Φ, è la curva $\overline{D}$, cui deve aggiungersi la coniugata di $\overline{D}$ nell'involuzione d'ordine α, che rappresenta su Φ i punti di F_1. Gli $\alpha - 1$ punti coniugati di un generico punto mobile su $\overline{D}$ son però *tutti* esterni a $\overline{D}$, se no la corrispondenza T fra F, F_1 non soddisferebbe alle ipotesi di genericità, che per essa supponiamo. Pertanto il gruppo comune alla curva $R_1(K_1)$, trasformata di una curva canonica (virtuale, impura) di F_1, e alla curva $\overline{D}$, non contiene generalmente coppie coniugate nell'involuzione; cioè i punti del gruppo $(R_1(K_1), \overline{D})$ si trasformano colla corrispondenza R_1^{-1}, in punti da contarsi ciascuno una volta.

Tenuto conto che $\overline{K} \equiv R_1(K_1) + \overline{\Delta}$, ne deriva che al gruppo $\overline{\Theta} = (\overline{K}, \overline{D})$ corrisponde mediante R_1^{-1} il gruppo $(K_1, D_1) + (\Delta_1, D_1)$.

Inoltre, siccome è pure $R_1^{-1}(\overline{K}) \equiv T(K) + D_1$, il gruppo $\overline{H} \equiv (\overline{K}, \overline{\Delta})$ si muta mediante R_1^{-1} nel gruppo $(T(K), \Delta_1) + (D_1, \Delta_1)$, cioè nel gruppo $t(H) + (D_1, \Delta_1)$, ove si denoti, al solito, con t la corrispondenza birazionale fra Δ, Δ_1, indotta da T.

Riassumendo si hanno le equivalenze:

$$R_1^{-1}(\overline{\Theta}) \equiv \Theta_1 + (\Delta_1, D_1), \quad R_1^{-1}(\overline{H}) \equiv t(H) + (D_1, \Delta_1),$$

epperò, sostituendo nella (109), viene su F_1:

$$(110)\qquad T(\Omega) - M(D_1) + 3\,\Theta_1 \equiv \alpha\,\Omega_1 - M(\Delta_1) + 3\,t(H).$$

Se s'usufruisce delle relazioni fra Θ_1, $t(\Theta)$ e fra H_1, $t(H)$ (che possono dedursi dalla equivalenza a pié della pag. 323), la (110), moltiplicata per 2, si trasforma nella relazione:

$$(111) \qquad 2\,T(\Omega) + M(D_1) + 3\,t(\Theta) \equiv 2\,\alpha\,\Omega_1 + M(\Delta_1) + 3\,H_1.$$

La precedente si deduce anche direttamente dalla (101). Invero, la (101), applicata alla R, porge:

$$2\,\overline{\Omega} \equiv 2\,R(\Omega) + M(\overline{D}) + 3\,r(\Theta);$$

e la R_1^{-1} applicata a questa dà:

$$2\,R_1^{-1}(\overline{\Omega}) \equiv 2\,T(\Omega) + M(D_1) + 3\,t(\Theta).$$

Ora, applicando la R_1^{-1} alla inversa della (101), viene:

$$2\,R_1^{-1}(\overline{\Omega}) \equiv 2\,\alpha\,\Omega_1 + M(\Delta_1) + 3\,H_1,$$

e dal confronto di tale equivalenza e della precedente segue la (111).

Però la (111) è meno espressiva funzionalmente della (110), mentre le equivale dal punto di vista numerativo.

La (110) può enunciarsi così:

Abbiasi tra F, F_1 una generica corrispondenza T, (α, α_1), priva di elementi fondamentali. Allora su F_1 la somma del trasformato d'un gruppo canonico di F, d'un gruppo canonico della curva di diramazione (esistente su F_1) e del triplo di un gruppo d'immersione della curva di coincidenza, equivale all'α-plo di un gruppo canonico di F_1, aumentato d'un gruppo canonico (effettivo) della curva di coincidenza e del triplo del trasformato d'un gruppo d'immersione della curva di coincidenza di F.

Numerativamente, chiamati p, p_1 i generi effettivi della curva di coincidenza D_1 e della curva di diramazione Δ_1 (uguali ai generi effettivi rispettivi delle curve D, Δ), con ω, ω_1 i generi lineari relativi di F, F_1, e posto:

$$[\Theta] = \theta\,,\ [\Theta_1] = \theta_1\,,\ [H] = h\,,\ [H_1] = h_1,$$

le (110), (111) dànno le relazioni:

$$(110') \qquad \alpha_1(\omega - 1) - \alpha(\omega_1 - 1) = 2(p - p_1) + 3(h - \theta_1),$$

$$(111') \qquad \alpha_1(\omega - 1) - \alpha(\omega_1 - 1) = p_1 - p + \frac{3}{2}(h_1 - \theta).$$

Osservazione 1ª. — Nel corso delle precedenti deduzioni abbiamo supposto la T, (α, α_1), generica, in guisa che sulla Φ la

curva $\overline{D}$ non appartenesse, neanche parzialmente, all'involuzione imagine di F_1, cioè che D su F non appartenesse, neppure in parte, alla serie dei gruppi di α punti omologhi dei punti di F_1. Se quest'ipotesi non è soddisfatta e accade cioè che i predetti gruppi di α punti, passanti per un punto generico di D abbiano in conseguenza su D altri $k-1$ punti comuni (costituenti necessariamente un gruppo variabile in una involuzione), allora la curva D_1 di F_1 si deve contare k volte come curva di coincidenza e tutte le deduzioni precedenti restano inalterate, con quest'avvertenza.

Osservazione 2ª. — L'approfondimento dell'Oss. 2ª del n. 150 circa le cuspidi e i nodi della curva di diramazione là considerata, si può estendere alla corrispondenza T, (α, α_1). Anche nel caso della T, le curve di diramazione esistenti su F, F_1 hanno ciascuna un certo numero di cuspidi (provenienti dai punti tripli della corrispondenza) e di nodi (a ognuno dei quali corrisponde sull'altra superficie un gruppo di punti con due punti doppi) e si tratta di esprimere funzionalmente questi gruppi mediante le serie covarianti delle curve predette e le serie invarianti di F, F_1. Per ciò che concerne i gruppi delle cuspidi, una prima relazione è fornita dalla (117) del successivo n. 153.

Quanto alle curve di coincidenza, esistenti su F, F_1, esse non hanno generalmente punti multipli, onde i loro generi effettivi p, p_1 coincidono coi rispettivi generi virtuali.

§ 6. — Relazione tra le serie di Severi di due superficie in corrispondenza algebrica qualunque.

152. *Gruppo jacobiano del trasformato di un fascio in una corrispondenza unirazionale tra due superficie.* — Consideriamo una corrispondenza generica $(1, \alpha_1)$ tra due superficie F ed F_1, e supponiamola priva di elementi fondamentali; donde consegue che la γ_{α_1} su F_1, corrispondente ai punti di F, è dotata soltanto di una curva di coincidenze imperfette (n. 139).

Sia $|C|$ un fascio generale di curve su F, in posizione generica rispetto alla curva di diramazione D, per guisa cioè che i punti base e i punti del gruppo jacobiano di $|C|$ sian fuori di D. Cerchiamo di determinare come si trasforma il gruppo jacobiano J_C del fascio.

Osserviamo preliminarmente che la corrispondenza tra gli intorni di due punti P, P_1 corrispondenti su F, F_1, ove P sia

fuori della curva di diramazione D, è *biuniforme*, onde le proprietà infinitesimali dell'intorno di P si trasmettono immutate all'intorno di P_1.

Ciò posto, nelle ipotesi fatte, i punti base del fascio $|C_1|$, trasformato di $|C|$, cadono soltanto nei trasformati dei punti base di $|C|$, e son semplici e ordinari come questi ultimi.

Un punto doppio di una curva C del fascio $|C|$ si muta in α_1 punti doppi della curva C_1 corrispondente. Inversamente un punto doppio di una C_1, che non cada sulla curva doppia D_1, proviene da un punto del gruppo J_C.

Ulteriori punti del gruppo jacobiano J_{C_1} del fascio $|C_1|$, son relativi quindi a curve C_1 che abbiano un punto doppio su D_1. E siccome ogni tal C_1 ha molteplicità d'intersezione 2 con D_1 nel punto doppio che si considera, la curva C corrispondente ha molteplicità d'intersezione 2 con D. Ne segue che questi ulteriori punti di J_{C_1} van cercati tra i trasformati di punti di F, che cadono nelle cuspidi e nei punti doppi di D, ovvero nei punti di D ove esiste qualche C del fascio tangente a D.

In base alle considerazioni di pag. 298, le cuspidi e i nodi di D non dàn luogo ai punti cercati; sicché questi provengono invece dai contatti di curve C con D. Indicato con Y il gruppo dei contatti delle C con D, e con Y_1 il gruppo trasformato su D_1, si ha dunque la relazione:

$$J_{C_1} = J_C^* + Y_1 , \tag{112}$$

ove J_C^* denoti il trasformato di J_C.

153. *Relazione fra le serie di* SEVERI *di due superficie in corrispondenza unirazionale.* — Continuando ad usare le notazioni del n. prec. vediamo quale relazione passa tra la serie di SEVERI $|S|$, relativa ad F, e la serie di SEVERI $|S_1|$ relativa ad F_1. Ricordiamo che, mediante $|C|$, la $|S|$ si definisce coll'equivalenza:

$$S \equiv J_C - (C\,,\,C) - 2\,(C\,,\,C') . \tag{113}$$

Denotiamo al solito con T la corrispondenza $(1,\,\alpha_1)$ fra F, F_1, e con t la corrispondenza birazionale subordinata fra D, D_1. Applicando la T ai due membri della (113), viene (n. 147)

$$S_1^* \equiv J_C^* - (C_1, C_1) - 2\,(C_1, C_1'^*) , \tag{114}$$

ove si è posto:

$$S_1^* = T\,(S_1)\ ,\ C_1'^* = T\,(C') .$$

Mercé la (112), dalla (114) segue:

$$S_1^* \equiv J_{C_1} - (C_1, C_1) - 2(C_1, C_1') + 2(C_1, C_1' - C_1'^*) - Y_1,$$

cioè:

$$S_1^* \equiv S_1 + 2(C_1, C' - C_1'^*) - Y_1. \tag{115}$$

Cerchiamo di esprimere $C_1'^*$ per mezzo di elementi invarianti di F_1 e di D_1. All'uopo si osservi che dalla

$$C' \equiv C + K,$$

si ricava mediante la T:

$$C_1'^* \equiv C_1 + K_1^*,$$

donde (n. 148):

$$C_1'^* \equiv C_1 + K_1 - D_1 \equiv C_1' - D_1,$$

epperò:

$$C_1' - C_1'^* \equiv D_1.$$

La (115) porge allora:

$$S_1^* \equiv S_1 + 2(C_1, D_1) - Y_1. \tag{116}$$

Questa non è ancora la forma definitiva della più espressiva relazione alla quale volevamo giungere. Per trasformarla ulteriormente, osserviamo che il gruppo jacobiano della serie lineare ∞^1 $|(C, D)|$, staccata su D da $|C|$, consta del gruppo X delle cuspidi di D e del gruppo Y; sicché si ha su D:

$$X + Y \equiv M(D) + 2(C, D).$$

Quest'equivalenza, trasportata a D_1, mediante la trasformazione birazionale t, porge:

$$2(C_1, D_1) - Y_1 \equiv X_1 - M(D_1),$$

onde la (116) dà luogo alla:

$$S_1^* \equiv S_1 + X_1 - M(D_1). \tag{117}$$

Ricordiamo infine (n. 131) che, essendo la corrispondenza T priva di elementi fondamentali, $X_1 - M(D_1)$ fornisce l'equivalenza funzionale della curva D_1 come curva di coincidenza della corrispondenza simmetrica L_1, $(\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 1)$, in cui sono omologhi due punti coniugati in γ_{α_1}, cioè il gruppo virtuale (L_1, U_1), ove U_1 denota la corrispondenza identica su F_1.

Si perviene così in definitiva alla relazione elegante e semplice :

$$S_1^* \equiv S_1 + (L_1 , U_1) , \tag{118}$$

la quale si enuncia come segue :

Avendosi fra le superficie F, F_1 una corrispondenza $(1, \alpha_1)$, priva di elementi fondamentali, il trasformato di un gruppo di SEVERI *inerente ad F equivale ad un gruppo di* SEVERI *inerente ad F_1, aumentato del gruppo virtuale delle coincidenze dell'involuzione imagine di F sopra F_1.*

Quest'ultimo gruppo si chiamerà talvolta *gruppo jacobiano virtuale* dell'involuzione.

Denotati con I, I_1 gl'invarianti di ZEUTHEN-SEGRE relativi ad F, F_1, con τ il numero dei punti tripli dell'involuzione, con ρ il genere (effettivo = virtuale) di D_1, uguale al genere effettivo di D, dalla (117) scende la relazione numerativa :

$$\alpha_1 (I + 4) = I_1 + 4 + \tau - 2 (\rho - 1) ,$$

cioè :

$$I_1 = \alpha_1 (I + 4) + 2\rho - \tau - 6 .$$

Il modo di trasformarsi della (117) nel passaggio da F_1 ad F è immediato. Si ha invero, applicando T^{-1} ai due membri della (117) :

$$\alpha_1 S \equiv T^{-1} (S_1) + X - M (D) ,$$

ossia :

$$T^{-1} (S_1) \equiv \alpha_1 S + M (D) - X , \tag{119}$$

oppure, trasformando la (118) :

$$T^{-1} (S_1) \equiv \alpha_1 S - T^{-1} (L_1 , U_1) ,$$

e il gruppo $T^{-1}(L_1, U_1)$ si può chiamare il *gruppo virtuale di diramazione.*

Nella (119) al posto di $M(D) - X$, si può altresì porre $\Theta + (D^0, D^0)$ (pag. 327), ottenendosi così

$$T^{-1} (S_1) \equiv \alpha_1 S + \Theta + (D^0 , D^0) .$$

La (119) enunciasi :

Il trasformato di un gruppo di SEVERI, *nella trasformazione $(\alpha_1 , 1)$ tra F_1, F, è equivalente all'α_1-plo di un gruppo di* SEVERI *della F, diminuito del gruppo delle cuspidi della curva di diramazione e aumentato di un gruppo canonico (effettivo) della medesima.*

154. *Nuova deduzione dell'equivalenza che esprime un gruppo di* SEVERI *come gruppo virtuale delle coincidenze dell'identità.* — I risultati del n. prec. ci permettono di trovare per una nuova via semplice e luminosa, che domanda il meno possibile alla teoria generale delle corrispondenze, l'equivalenza $S \equiv (U, U)$ stabilita nel n. 145.

Applichiamo l'equivalenza (118) al caso di una corrispondenza $(1, \alpha_1)$ fra un piano F ed una superficie qualunque F_1, corrispondenza generata da un'involuzione d'ordine invariantivo 1, scelta su F_1.

La γ_{α_1}, che conviene al nostro caso, può essere costruita per intersezione della superficie F_1, priva di punti multipli nel proprio spazio S_r, con una stella di S_{r-2}, passanti per un generico S_{r-3}. I gruppi di quest'involuzione sono in corrispondenza birazionale senza eccezioni cogli S_{r-2} di tale stella, cioè coi punti di un piano F (che può addirittura ottenersi come sezione generica della stella, sicché F_1 si proietta su F in modo α_1-plo dallo S_{r-3} considerato).

Un'omografia piana π di F è trasformata dalla T, $(1, \alpha_1)$, fra F ed F_1, in una corrispondenza π_1, (α_1, α_1), biunivoca senza eccezioni fra i gruppi di γ_{α_1}. Pertanto due punti omologhi in π_1, non possono coincidere se non coincidono i due gruppi di γ_{α_1} cui quei punti appartengono. Siccome il gruppo virtuale dei punti uniti di π è un gruppo di 3 punti di F e tutti i gruppi di 3 punti di F sono equivalenti fra loro (n. 28), si ha:

$$(\pi\,,\, U) \equiv 3\,G\,,$$

ove G è un punto del piano e U l'identità ivi. Mediante T la precedente relazione porge:

$$(\pi_1\,,\, U_1) \equiv 3\,G_1\,, \tag{120}$$

in cui G_1 è un gruppo di γ_{α_1}.

Se ora π tende ad U, la corrispondenza π_1 tende (conservando le notazioni del n. prec.) alla corrispondenza $L_1 + U_1$, perché a ciascun punto di un gruppo di γ_{α_1} vengono a corrispondere tutti i punti del gruppo stesso. D'altronde, variando π e π_1, la (120) continua sempre a valere e al limite si ha pertanto:

$$(L_1 + U_1\,,\, U_1) \equiv 3\,G_1\,,$$

cioè:

$$(U_1\,,\, U_1) \equiv 3\,G_1 - (L_1\,,\, U_1)\,.$$

Ma siccome nel piano $S \equiv 3\,G$ (n. 116), risulta $S_1^* \equiv 3\,G_1$, onde la precedente dà:

$$(U_1\,,\,U_1) \equiv S_1^* - (L_1\,,\,U_1)\,,$$

e per la (118):

$$(U_1\,,\,U_1) \equiv S_1\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Osservazione. — Il procedimento stesso è suscettibile di larghissima estensione (come SEVERI dimostrerà in un lavoro di prossima pubblicazione). Esso porge altresì la dimostrazione più semplice del teorema del n. 141, circa la determinazione del gruppo (U, U) relativo ad una curva C. Invero, sia su C una g_n^1; Γ la retta imagine di g_n^1; P un punto di Γ; G un gruppo di g_n^1; J il gruppo jacobiano di g_n^1. Ad un'omografia π di Γ corrisponde su C una corrispondenza π_1 $(n\,,\,n)$, biunivoca fra i gruppi di g_n^1; e ragionando come sopra viene:

$$(\pi\,,\,u) \equiv 2P\,, \qquad (\pi_1\,,\,U) \equiv 2G\,,$$

ove u è l'identità su Γ. D'altronde per $\pi \to u$, la corrispondenza π_1 tende a $L + U$, ove L è la corrispondenza involutoria $(n-1,\ n-1)$ generata da g_n^1, dunque:

$$(L + U\,,\,U) \equiv 2G\,,$$

cioè:

$$(U\,,\,U) \equiv 2G - (L\,,\,U)\,.$$

Ma, siccome $(L,\ U) = J$, viene:

$$(L\,,\,U) \equiv 2G - M\,(C)\,,$$

e, confrontando colla precedente:

$$(U\,,\,U) \equiv -\,M\,(C)\,.$$

155. *Relazione fra le serie di* SEVERI *di due superficie in una corrispondenza* $(\alpha\,,\,\alpha_1)$ *priva di elementi fondamentali.* — Conserviamo, per ciò che riguarda la corrispondenza T, $(\alpha\,,\,\alpha_1)$, fra le superficie F, F_1, le notazioni e le ipotesi del n. 151.

La (117), applicata alla corrispondenza R, $(1,\ \alpha_1)$, porge:

$$R\,(S) \equiv \overline{S} + \overline{X} - M\,(\overline{D})\,,$$

ove $\overline{S}$, $\overline{X}$ denotan rispettivamente un gruppo di SEVERI della Φ e il gruppo dei punti tripli dell'involuzione, che si ha su Φ.

Applicando la R_1^{-1} alla precedente, viene, su F_1:

$$T(S) \equiv R_1^{-1}(\bar{S}) + X_1 - M(D_1), \tag{121}$$

ove X_1 è il gruppo dei punti tripli della corrispondenza, esistente sopra F_1.

D'altronde la (119), riferita alla corrispondenza R_1^{-1}, $(\alpha,1)$, fra Φ ed F_1, nella quale $\bar{\Delta} = R(\Delta)$ e Δ_1 son la curva di coincidenza e la curva di diramazione esistenti rispettivamente su Φ, F_1, dà, sopra F_1:

$$R_1^{-1}(\bar{S}) \equiv \alpha S_1 + M(\Delta_1) - \Xi_1, \tag{122}$$

ove Ξ_1 è il gruppo delle cuspidi della curva di diramazione Δ_1 della T.

Sostituendo nella (121) viene:

$$T(S) + M(D_1) - X_1 \equiv \alpha S_1 + M(\Delta_1) - \Xi_1, \tag{123}$$

cioè:

Avendosi una corrispondenza (α, α_1), *priva di elementi fondamentali, fra le superficie* F, F_1, *il trasformato sopra* F_1 *di un gruppo di* SEVERI *della* F, *aumentato di un gruppo canonico della curva di coincidenza e diminuito del gruppo dei punti tripli per la corrispondenza, equivale all'*α*-plo di un gruppo di* SEVERI *della* F_1, *aumentato d'un gruppo canonico della curva di diramazione e diminuito del gruppo delle cuspidi di questa.*

Dalla (123), colle notazioni ormai familiari, si ricava la relazione numerativa:

$$\alpha_1(I+4) - \alpha(I_1+4) = 2(p_1 - p) + \tau - \tau_1. \tag{123'}$$

156. *Modo di variare della serie* $|\Omega + S|$ *in una trasformazione* (α, α_1) *priva di punti fondamentali fra due superficie.* — Le (110), (123) sommate a membro a membro dànno:

$$T(\Omega + S) + 3\Theta_1 - X_1 \equiv \alpha(\Omega_1 + S_1) + 3\,t(H) - \Xi_1, \tag{124}$$

cioè:

La trasformata sopra F_1 *della somma d'un gruppo canonico e d'un gruppo di* SEVERI *inerenti ad* F, *aumentata del triplo d'un gruppo d'immersione della curva di coincidenza sopra* F_1 *e diminuito del gruppo dei punti tripli per la corrispondenza, equivale all'*α*-plo della somma analoga inerente ad* F_1, *aumentato del triplo del trasformato di un gruppo d'immersione della curva di coincidenza su* F *e diminuito del gruppo delle cuspidi della curva di diramazione sopra* F_1.

Conservando le notazioni abituali, tenuto conto che (n. 129) $[\Omega + S] = 12\ (p_a + 1)$, $[\Omega_1 + S_1] = 12\ (p'_a + 1)$, ove p_a, p'_a sieno i generi aritmetici di F, F_1, dalla (124) si trae la relazione numerativa:

$$(124') \qquad 12\,\alpha_1\,(p_a + 1) - 12\,\alpha\,(p'_a + 1) = 3\,(h - \theta_1) + \tau - \tau_1\,.$$

Un'altra relazione funzionale, meno espressiva della (124), si ottiene sommando a membro a membro la (111) e la (123) moltiplicata per 2. Viene così:

$$(125) \quad 2\,T(\Omega + S) + 3\,M(D_1) + 3\,t(\Theta) - 2\,X_1 \equiv 2\,\alpha\,(\Omega_1 + S_1) + \\ + 3\,M(\Delta_1) + 3\,H_1 - 2\,\Xi_1\,,$$

la quale, numerativamente tradotta, porge:

$$(125') \quad 24\,\alpha_1(p_a + 1) - 24\,\alpha(p'_a + 1) = 6\,(\rho_1 - \rho) + 3\,(h_1 - \theta) + \\ + 2\,(\tau - \tau_1)\,.$$

157. *Effetto degli elementi fondamentali d'una trasformazione algebrica di F sulle relazioni che esprimono il modo di variare delle serie* $|\Omega|, |S|, |\Omega + S|$. — Esaminiamo in ultimo quali cangiamenti devono introdursi nelle relazioni trovate nei nn. 151, 155, 156, quando la corrispondenza fra F, F_1, possiede elementi fondamentali.

In quanto precede abbiamo sempre supposto che le corrispondenze algebriche considerate fossero del tipo più generale, compatibilmente colla condizione della mancanza di elementi fondamentali. Ma abbiamo anche avvertito che, nei casi concreti particolari, il metodo esposto in generale permette di risolvere le questioni analoghe, mediante opportune considerazioni complementari. Non sarebbe in verità possibile, senza andare incontro a lunghi sviluppi, non essenziali dal punto di vista concettuale, di abbracciare tutte le molteplici particolarità, che si posson presentare nelle corrispondenze fra F, F_1.

Per analoga ragione, ci limiteremo qui a considerare taluni casi generali e tipici di elementi fondamentali, ripetendo ancora una volta che il metodo che usiamo in questi casi tipici è pure applicabile, cogli opportuni adattamenti, nei casi particolari non considerati.

Sia anzitutto A *punto fondamentale* d'una corrispondenza T, (α, α_1), fra F, F_1. Questo vuol dire che ai punti infinitamente vicini ad A su F corrispondono mediante T i punti di una o più curve irriducibili (fondamentali) ed eventualmente punti mobili attorno a determinati punti isolati, rispetto ai quali A cessa di

essere fondamentale. Ammetteremo per A le seguenti *ipotesi di generalità.*

1) Il punto A non è punto di coincidenza su F. (Ipotesi senz'altro soddisfatta se $\alpha = 1$).

2) Mentre un punto di F si muove nell'intorno (di 1° ordine) di A, degli α_1 punti omologhi, i_1, distinti e *tutti* variabili con quel punto, si muovono sopra una curva irriducibile, priva di punti multipli, A_1; e gli altri $\alpha_1 - i_1$ si muovono attorno ad altrettanti punti isolati e distinti, A_1^j $(j = 1, \ldots, \alpha_1 - i_1)$, cosicché A_1 è la sola curva fondamentale corrispondente ad A.

Dall'ipotesi 1) segue che la corrispondenza indotta da T fra l'intorno di A e i punti di A_1 ha il primo indice uguale ad 1; perché, se un punto generico di A_1 potesse provenire da più di un punto dell'intorno di A, nella serie dei gruppi di direzioni corrispondenti ai singoli punti di A_1, vi sarebbe qualche direzione doppia [1], cioè qualche coincidenza di T infinitamente vicina ad A e questo punto sarebbe dunque, esso stesso, una coincidenza. Ne deriva che ai punti dell'intorno di A corrispondono su A_1 i gruppi di una $g^1_{i_1}$. Quando $i_1 > 1$, supponiamo che:

3) I punti doppi della predetta $g^1_{i_1}$ sieno coincidenze imperfette per T e distinte tra loro. Se il loro numero è s (necessariamente > 0), il punto A sarà di diramazione; e precisamente risulterà s-plo e ordinario per la curva di diramazione D. Esso sarà dunque distinto dalle eventuali cuspidi di D.

Designato con σ il genere di A_1, verrà $s = 2\ (i_1 + \sigma - 1)$, ossia

$$i_1 = \frac{1}{2}\, s - \sigma + 1\,. \tag{126}$$

Se $i_1 = 1$, cioè se su A_1 varia un solo punto corrispondente ad un punto mobile nell'intorno di A, la curva A_1 risulta razionale e di genere virtuale zero, perché è, per ipotesi, priva di punti multipli. Allora il punto A non è di diramazione, ossia $s = 0$.

4) Supponiamo inoltre che nessun punto di A_1 sia fondamentale per T.

Ci riserviamo d'indicare più tardi (Oss.) altre caratteristiche della coppia fondamentale A, A_1, che, entro certi limiti, restano indeterminate, anche sotto le fissate ipotesi di generalità.

[1] Come si sa, in una serie ∞^1 di gruppi equivalenti di punti sopra una curva vi è sempre un numero > 0 di punti doppi. Cfr. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 254.

Per lo scopo principale del presente n., nel trattare del sistema canonico e delle serie canonica e di SEVERI, ci riferiremo preliminarmente al caso $\alpha = 1$, supponendo che nella corrispondenza $(1, \alpha_1)$ fra F, F_1 vi sia una sola coppia fondamentale A, A_1 col punto A in F. Passeremo poi al caso generale (α, α_1) mercé la solita superficie intermediaria Φ. Cominciamo dal sistema canonico.

a) Riprendiamo il procedimento del n. 148. Assumiamo all'uopo su F una rete generale $|C|$, priva di punti base. L'unico cangiamento da apportarsi alla dimostrazione là sviluppata è che la jacobiana $(C_1)_j$ della rete trasformata di $|C|$, consta non soltanto della trasformata di C_j e della curva di coincidenza D_1, ma anche della curva A_1, la quale è luogo di punti doppi per le curve $\bar{C}_1 + A_1$, trasformate complete delle $\bar{C}$ di $|C|$, passanti per A; e ciò in quanto ogni $\bar{C}_1$ sega A_1 in i_1 punti.

In conseguenza, la relazione finale (93) trasformasi nella:

$$K_1 \equiv T(K) + D_1 + A_1 . \tag{127}$$

L'applicazione di T^{-1} alla (127) porge poi:

$$T^{-1}(K_1) \equiv \alpha_1 K + D + i_1 A ,$$

essendo $T^{-1}(A_1) = i_1 A$. Del termine $i_1 A$ si può fare astrazione giacché nelle equivalenze che ci interessano per la questione che stiamo qui trattando, si prescinde dal comportamento delle curve in questo od in quel punto (cfr. colla pag. 221). Si ha dunque:

$$T^{-1}(K_1) \equiv \alpha_1 K + D . \tag{128}$$

Supponiamo ora che in una corrispondenza T, (α, α_1), fra F, F_1 vi sia la coppia di elementi fondamentali A, A_1, col punto A su F e la curva A_1 su F_1, e la coppia B, B_1, col punto B_1 su F_1 e la curva B su F; le due coppie soddisfacendo ciascuna alle specificate ipotesi di generalità, la prima rispetto a T e la seconda rispetto a T^{-1}.

Consideriamo la superficie Φ di cui al n. 149 e la corrispondenza R, $(1, \alpha_1)$, tra F, Φ ed R_1, $(1, \alpha)$, tra F_1, Φ, mediante le quali si compone $T = R_1^{-1} R$.

Per la R vi è soltanto la coppia fondamentale che proviene da A, giacché alla curva B di F corrisponde su Φ una curva e non un punto; e per la R_1 vi è soltanto la coppia fondamentale che proviene da B_1.

Il procedimento del n. 149, tenute presenti le precedenti relazioni, applicate alle R, R_1 (e alle loro inverse), che si trovano

nelle stesse condizioni della corrispondenza $(1, \alpha_1)$ prima considerata, conduce senz'altro alla:

$$T(K) + D_1 + A_1 \equiv \alpha_1 K + \Delta .$$

Naturalmente, se vi sono altre coppie di elementi fondamentali analoghe alla A, A_1 e alla B, B_1 (che non ha poi in realtà nessuna influenza sulla relazione finale), si ottiene similmente:

$$T(K) + D_1 + \Sigma A_1 \equiv \alpha_1 K + \Delta , \tag{129}$$

ove il sommatorio s'estende a tutte le curve fondamentali giacenti su F_1.

La (129) *è la relazione che cercavamo tra i sistemi canonici di due superficie in corrispondenza algebrica, quando questa possiede elementi fondamentali.*

b) Passiamo ad occuparci delle serie canoniche e cominciamo da una T, $(1, \alpha_1)$, fra F, F_1, col punto fondamentale A su F e la curva omologa A_1 su F_1. Dalla relazione (127), posto $K_1^* = T(K)$, segue:

$$(K_1 , K_1) \equiv (K_1^* , K_1^*) + (D_1 , D_1) + (A_1 , A_1) + 2(K_1^* , D_1) + 2(K_1^* , A_1) + 2(D_1 , A_1) . \tag{130}$$

Ora, dalle:

$$(D_1, D_1) \equiv (D_1, D_1') - (K_1, D_1), (K_1, D_1) \equiv (K_1^*, D_1) + (D_1, D_1) + (A_1, D_1),$$

si trae:

$$(D_1 , D_1) \equiv M(D_1) - \Theta_1 , (K_1^* , D_1) + (A_1 , D_1) \equiv 2\Theta_1 - M(D_1) , \tag{131}$$

e quindi:

$$2(K_1^* , D_1) + 2(A_1 , D_1) + (D_1 , D_1) \equiv 3\Theta_1 - M(D_1) ,$$

onde la (130) porge:

$$(K_1, K_1) \equiv (K_1^*, K_1^*) + (A_1, A_1) + 2 (K_1^*, A_1) + 3 \Theta_1 - M (D_1). \tag{132}$$

Se il sistema canonico $|K|$ di F è effettivo e A non è un punto base di $|K|$, risulta senz'altro $(K_1^* , A_1) \equiv 0$. Ebbene, questa conclusione vale in ogni caso, come ora dimostreremo.

All'uopo proviamo anzitutto che, nelle nostre ipotesi, $(A_1 , A_1) \equiv - G_{i_1}$, ove G_{i_1} è un gruppo della $g_{i_1}^1$ i cui gruppi corrispondono ai punti infinitamente vicini ad A.

Assumasi su F un sistema lineare almeno ∞^2, $|C|$, privo di punti base, di grado (effettivo = virtuale) $\nu = [C , C]$. Ad esso

risponde su F_1 un sistema lineare $|C_1|$, di grado (effettivo = virtuale) $\nu_1 = [C_1, C_1] = \alpha_1 \nu$. Se una C tende ad una $\overline{C}$ di $|C|$ passante per A, la C_1 corrispondente dà luogo ad una curva spezzata $\overline{C}_1 + A_1$ ed è $(\overline{C}_1, A_1) \equiv G_{i_1}$, perché alla direzione con cui C passa per A corrispondono gli i_1 punti comuni a $\overline{C}_1, A_1$. Si ha pertanto

$$(C_1, C_1) \equiv (\overline{C}_1 + A_1, \overline{C}_1 + A_1) \equiv (\overline{C}_1, \overline{C}_1) + 2G_{i_1} + (A_1, A_1).$$

Ora, se due C generiche tendono a due $\overline{C}$ passanti genericamente per A, le intersezioni delle due C_1 omologhe, che tendono a punti di A_1, costituiscono un gruppo G_{i_1}; le altre intersezioni tendendo agli $\alpha_1(\nu - 1)$ punti omologhi delle intersezioni, diverse da A, delle due $\overline{C}$ limiti ed ai punti A_1^j $(j = 1, \ldots, \alpha_1 - i_1)$. Dunque:

$$(C_1, C_1) \equiv (C_1, \overline{C}_1) + G_{i_1}.$$

Dal confronto di questa e della precedente si trae $(A_1, A_1) \equiv \equiv -G_{i_1}$ [1].

Ciò posto, s'intersechino i due membri della (127) con A_1. Verrà:

$$(K_1, A_1) \equiv (K_1^*, A_1) + (D_1, A_1) + (A_1, A_1).$$

Ma, essendo A_1 priva di punti multipli, è:

$$(K_1, A_1) \equiv M(A_1) - (A_1, A_1),$$

e inoltre (D_1, A_1), come gruppo jacobiano della serie $g^1_{i_1}$, è espresso da:

$$(D_1, A_1) \equiv M(A_1) + 2G_{i_1};$$

perciò

$$(K_1^*, A_1) \equiv -2(A_1, A_1) - 2G_{i_1};$$

e siccome $(A_1, A_1) \equiv -G_{i_1}$, ne segue l'asserto. Sostituendo nella (132), si perviene alla relazione:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega) - M(D_1) + 3\Theta_1 - G_{i_1}; \tag{133}$$

sicché la presenza della coppia fondamentale A, A_1 importa soltanto l'aggiunta di $-G_{i_1}$ al secondo membro dell'equivalenza valevole quando non vi son elementi fondamentali.

---

[1] Si osservi che, se $i_1 = 1$, poiché la curva A_1 di genere (virtuale = effettivo) zero risulta di grado virtuale -1, si conclude (pag. 222) che A_1 è una curva eccezionale di prima specie di F_1.

Applicando alla (133) la T^{-1} risulta:

$$T^{-1}(\Omega_1) \equiv \alpha_1 \Omega - M(D) + 3\,T^{-1}(\Theta_1) - i_1 A\,; \tag{134}$$

e col solito procedimento, che fa intervenire la superficie Φ, nell'ipotesi d'una corrispondenza T, (α, α_1), fra F, F_1, in cui vi sieno coppie fondamentali del tipo A, A_1 e coppie del tipo B, B_1, già introdotte in *a*), si perviene alla:

$$T(\Omega) - M(D_1) + 3\,\Theta_1 - \Sigma\, G_{i_1} \equiv \alpha\,\Omega_1 - M(\Delta_1) + 3\,t(H) - \Sigma\, i\, B_1\,, \tag{135}$$

ove i è l'ordine della serie di gruppi corrispondenti su B alle direzioni per B_1; serie, che, nelle nostre ipotesi, è lineare, come è lineare la serie dei gruppi G_{i_1} corrispondenti su A_1, alle direzioni per A.

La (135) *esprime la relazione fra le serie canoniche di due superficie in corrispondenza algebrica, quando questa è dotata di elementi fondamentali.*

Giova anche trovare la relazione da sostituirsi in questo caso alla (111). All'uopo occorre far intervenire i gruppi Θ ed H_1, in luogo dei gruppi Θ_1 ed H. Riferiamoci anzitutto ad una T, $(1, \alpha_1)$, colla sola coppia fondamentale A, A_1. Trasformando la relazione $\Theta \equiv (K, D)$ mediante t, viene:

$$t(\Theta) \equiv (K_1^*, D_1)\,,$$

e ricordando la seconda delle (131):

$$t(\Theta) \equiv 2\,\Theta_1 - M(D_1) - (A_1, D_1) \equiv 2\,\Theta_1 - M(D_1) - M(A_1) - 2\,G_{i_1}\,,$$

da cui si ricava:

$$2\,\Theta_1 \equiv t(\Theta) + M(D_1) + M(A_1) + 2\,G_{i_1}\,. \tag{136}$$

L'eliminazione di $2\,\Theta_1$ fra questa e la (133), della quale sieno stati preventivamente moltiplicati per 2 i due membri, porge:

$$2\,\Omega_1 \equiv 2\,T(\Omega) + M(D_1) + 3\,t(\Theta) + 3\,M(A_1) + 4\,G_{i_1}\,,$$

donde, mediante T^{-1}, si ricava:

$$2\,T^{-1}(\Omega_1) \equiv 2\,\alpha_1\,\Omega + M(D) + 3\,\Theta + 2\,(s + \sigma - 1)\,A\,, \tag{137}$$

appunto perché il gruppo $3M(A_1) + 4\,G_{i_1}$ consta su A_1 di $2\,(s + \sigma - 1)$ punti.

L'applicazione delle (136), (137) ad una corrispondenza $T\,(\alpha, \alpha_1)$, con coppie fondamentali A, A_1 e B, B_1, considerata come prodotto delle corrispondenze fra F, Φ e fra Φ, F_1, conduce infine alla:

$$(138)\qquad 2T(\Omega)+M(D_1)+3t(\Theta)+3\sum M(A_1)+4\sum G_{i_1}\equiv$$
$$\equiv 2\alpha\Omega_1+M(\Delta_1)+3H_1+2\sum(s_1+\sigma_1-1)B_1\ ,$$

ove s_1 è la molteplicità di B_1 per Δ_1 e σ_1 il genere (virtuale = effettivo) della curva B.

Le (135) , (138) s'interpretano poi numerativamente colle:

$$(135')\qquad \alpha_1(\omega-1)-\alpha(\omega_1-1)=2(\rho-\rho_1)+3(h-\theta_1)+$$
$$+\sum\left(\frac{1}{2}s-\sigma+1\right)-\sum\left(\frac{1}{2}s_1-\sigma_1+1\right),$$

$$(138')\qquad \alpha_1(\omega-1)-\alpha(\omega_1-1)=\rho_1-\rho+\frac{3}{2}(h_1-\theta)+$$
$$+\sum(s_1+\sigma_1-1)-\sum(s+\sigma-1),$$

ove si conservino pei simboli gli stessi significati loro attribuiti nel n. 151, salvo per ciò che concerne gli elementi fondamentali, il cui simbolismo numerativo è stato or ora specificato.

c) Occupiamoci della relazione fra le serie di SEVERI delle F, F_1, in corrispondenza fra loro con elementi fondamentali, e rifacciamoci dal caso della solita T, $(1,\ \alpha_1)$, colla coppia fondamentale A, A_1.

Per applicare il procedimento dei nn. 152, 153, basta soltanto appurare come si muta la relazione fra il gruppo jacobiano d'un fascio generale $|C|$ di F, non avente A come punto base, ed il gruppo jacobiano del fascio trasformato.

Ebbene, osservato che alla $\overline{C}$ di $|C|$ passante per A, risponde una curva $\overline{C}_1+A_1$, tale che $(\overline{C}_1, A_1)$ è un gruppo G_{i_1}, si conclude senz'altro che:

$$J_{C_1}=J_C^*+Y_1+G_{i_1}\ ,$$

la quale sostituisce la (112) del n. 152. Se ne trae allora (n. 153):

$$(139)\qquad S_1\equiv T(S)+M(D_1)-X_1+G_{i_1}\ .$$

Applicando a questa la T^{-1}, viene:

$$(140)\qquad T^{-1}(S_1)\equiv\alpha_1 S+M(D)-X+i_1 A\ .$$

Si passa indi, mediante le (139), (140), al caso generale di una corrispondenza T, $(\alpha\ ,\ \alpha_1)$, con coppie di elementi fondamentali del tipo A , A_1 e B, B_1, e si giunge in tal guisa alla:

$$(141)\ T(S)+M(D_1)-X_1+\sum G_{i_1}\equiv\alpha S_1+M(\Delta_1)-\Xi_1+\sum i B_1\ ,$$

che è la *relazione tra le serie di* SEVERI *di due superficie in corrispondenza algebrica, quando questa possiede elementi fondamentali.*

La interpretazione numerativa della (141) dà:

$$(141') \qquad \alpha_1 (I+4) - \alpha (I_1+4) = 2(\rho_1 - \rho) + \tau - \tau_1 + \\ + \Sigma\left(\frac{1}{2} s_1 - \sigma_1 + 1\right) - \Sigma\left(\frac{1}{2} s - \sigma + 1\right).$$

d) Infine la somma a membro a membro delle (135), (141) porge la *relazione fra le serie invarianti assolute* $|\Omega + S|$ *di due superficie* F, F_1 *in corrispondenza* (α, α_1), *con elementi fondamentali*:

$$(142) \qquad T(\Omega + S) + 3\Theta_1 - X_1 \equiv \alpha(\Omega_1 + S_1) + 3t(H) - \Xi_1 .$$

È notevole che *questa relazione è la medesima di quella valevole in assenza di elementi fondamentali.* Come nel caso di una corrispondenza birazionale fra due superficie, l'equivalenza fra la serie $|\Omega + S|$ di una superficie e la trasformata della serie $|\Omega + S|$ dell'altra può assumer dunque una forma indipendente dalla presenza di elementi fondamentali. E si può presumere, con assoluta certezza, che la conclusione resti immutata qualunque complicazione sopravvenga negli elementi fondamentali della trasformazione.

Se invece si sommano a membro a membro la relazione (138) e la (141), di cui i due membri si sieno prima moltiplicati per 2, si perviene ad un'equivalenza ove si fa sentire la presenza degli elementi fondamentali; cioè:

$$(143) \qquad 2T(\Omega + S) + 3M(D_1) + 3t(\Theta) - 2X_1 + 3\left(\Sigma\left(M(A_1) + 2G_{i_1}\right)\right) \equiv \\ \equiv 2\alpha(\Omega_1 + S_1) + 3M(\Delta_1) + 3H_1 - 2\Xi_1 + 3\Sigma s_1 B_1,$$

il che attesta ancora una volta il fatto già avvertito che questa seconda relazione è molto meno espressiva della prima.

Le (142), (143), numerativamente interpretate, dànno:

$$(142') \qquad 12\alpha_1(p_a + 1) - 12\alpha(p'_a + 1) = 3(h - \theta_1) + \tau - \tau_1 ,$$

che è identica alla (124'), e:

$$(143') \qquad 24\alpha_1(p_a + 1) - 24\alpha(p'_a + 1) = 6(\rho_1 - \rho) + 3(h_1 - \theta) + \\ + 2(\tau - \tau_1) + 3(\Sigma s - \Sigma s_1) .$$

Osservazione. — Abbiamo già alluso alla circostanza che le ipotesi di generalità supposte per le coppie fondamentali A, A_1;

B, B_1, nella corrispondenza T, (α, α_1), fra F, F_1, lasciano una certa latitudine nelle altre caratteristiche, non considerate, delle coppie stesse. È appunto questa circostanza che impedisce di dedurre a priori (senza cioè l'intervento della Φ) le relazioni, cui siamo pervenuti, sostituendo alle F, F_1, coll'introduzione di opportune curve eccezionali di 1ª specie, due loro trasformate birazionali $\overline{F}$, $\overline{F}_1$, in guisa che la T si muti in una $\overline{T}$ priva di elementi fondamentali fra queste ultime superficie. A prima vista invero tale via apparisce più semplice: si tratterebbe di applicare alla $\overline{T}$ le relazioni trovate in assenza di elementi fondamentali, e trasportare poi queste relazioni alla T mediante le equivalenze che legano i sistemi e le serie invarianti di F, $\overline{F}$ e di F_1, $\overline{F}_1$.

All'atto pratico però la via si presenta irta di difficoltà, perché è legata alle caratteristiche di A, A_1; B, B_1, che le ipotesi di generalità lasciano indeterminate. Ed è anzi dubbio se la sostituzione delle $\overline{F}$, $\overline{F}_1$ alle F, F_1 sia in tutti i casi possibile.

Tratteniamoci un momento sulla cosa.

Se — conservando le ipotesi di generalità — un punto y di F_1 si muove su A_1, i suoi α omologhi sono sempre [per l'ipotesi 4)] ben determinati ed uno solo di essi si muove attorno ad A, conservandosi distinto dagli altri $\alpha - 1$. Ma nei riguardi di questi può darsi che essi si muovano attorno ad altrettanti punti fissi: e allora la curva A_1 darebbe luogo ad α coppie analoghe alla A, A_1. Per ciascuno di questi $\alpha - 1$ punti, analoghi ad A, si avrebbe su A_1 una serie lineare di un certo ordine, non necessariamente uguale ad i_1, e possedente punti doppi non aventi a priori alcun rapporto coi punti doppi della $g^1_{i_1}$ prima considerata. Cioè quegli $\alpha - 1$ punti sarebbero punti multipli per D, con molteplicità varie. Oppure può darsi che degli $\alpha - 1$ punti, diversi da A, omologhi di y, ve ne sieno alcuni (od anche nessuno) fissi e che gli altri descrivano invece una o più curve, omologhe di A_1; ogni tale curva, nei riguardi di quegli omologhi variabili, cesserebbe di essere fondamentale. Tutte queste eventualità svaniscono quando $\alpha = 1$; ed è per questa ragione che divien preziosa la considerazione della superficie Φ, in virtù della quale, scindendosi la corrispondenza nel prodotto di due corrispondenze unirazionali, vengono ben fissate dalle ipotesi di generalità tutte le caratteristiche degli elementi fondamentali.

Le relazioni trovate potrebbero pertanto anche dedursi attuando il concetto espresso in questa Osservazione, con riferimento alle corrispondenze fra F, Φ e fra F_1, Φ; ma ciò non semplificherebbe le deduzioni, che noi abbiamo fatto direttamente

sulle F, Φ e sulle F_1 , Φ, anziché passare a superficie birazionalmente equivalenti $\bar{F}$, $\bar{\Phi}$ e $\bar{F}_1$, $\bar{\Phi}$.

Ecco ora un esempio di una curva fondamentale A_1 cui corrispondono su F α punti fissi. Sia T, (α , α_1), una corrispondenza priva di elementi fondamentali tra F, F_1 e A_1 sia un punto generico di F_1, cui corrispondano su F α punti distinti $A^1, \ldots, A^\alpha$. Si trasformi F_1 (p. es. col sistema lineare delle quadriche del suo spazio) in una superficie $\bar{F}_1$ in cui A_1 siasi mutato in una curva eccezionale di 1ª specie $\bar{A}_1$. Allora nella corrispondenza birazionale $\bar{T}$, trasformata di T, che nasce fra F, $\bar{F}_1$, a ciascuno dei punti $A^1, \ldots, A^\alpha$ di F risponde la curva $\bar{A}_1$ di $\bar{F}_1$ e ad un punto variabile su questa rispondono i punti predetti.

È opportuno aggiungere che nulla si oppone in linea di principio all'attuabilità della via accennata, perché *in una corrispondenza qualunque fra due superficie F, F_1, la quale, se è riducibile, non sia neppure in parte degenere, vi è sempre un numero finito di elementi fondamentali.*

Invero, quando sopra una delle due superficie, p. es. F, esiste una curva algebrica Γ luogo di punti fondamentali per la data corrispondenza T fra F, F_1, il sistema ∞^1 di curve fondamentali corrispondenti, ricopre F_1; epperò un punto generico di F_1 ha qualche suo corrispondente su Γ; il che significa che T, è (riducibile e) in parte degenere. Ciò posto, al sistema lineare delle sezioni iperpiane di F_1 risponde su F un sistema algebrico di curve avente come punti base i punti fondamentali di T, esistenti su F. Pertanto, se vi sono infiniti punti base, questi son distribuiti sopra un numero finito di curve (oltre ad eventuali punti base isolati), comuni a tutte le curve del predetto sistema algebrico, epperò algebriche. Onde T è degenere. Se dunque T non è degenere, su F vi è un numero finito di punti fondamentali; e similmente su F_1.

158. *Esempio di una corrispondenza che non soddisfa alle condizioni di generalità.* — Abbiamo più volte avvertito che i metodi esposti nelle ipotesi di generalità che abbiamo ammesso per la corrispondenza T, (α , α_1), fra F, F_1 e pei suoi eventuali elementi fondamentali, si applicano, coi debiti complementi, ad ogni caso che sfugga alle ipotesi medesime.

Facciamo in proposito un esempio [1].

[1] Tratto dalla Nota di SEVERI (già citata a pag. 281) degli «Atti del R. Istituto Veneto», (1908), ove l'esempio in questione è incidentalmente

Sia, sopra una superficie F, di genere aritmetico p_a', un'involuzione γ_2, dotata di un numero finito di coincidenze, le quali, essendo isolate son perfette (n. 130). Abbiamo già enunciato (pag. 285) il fatto che le coincidenze isolate di una siffatta γ_2 sono addirittura ipercoincidenze; cioè che l'involuzione subordinata da γ_2 fra le direzioni uscenti da una, O, di queste coincidenze, riducesi all'identità. Dimostriamo anzitutto questa proprietà.

Nel lavoro di SEVERI citato a pié di pagina se ne dà la seguente dimostrazione «in grande». Assumasi su F un sistema lineare, irriducibile e privo di punti base, $|C|$, e dicasi $|C_1|$ il suo trasformato mediante la trasformazione univoca involutoria determinata da γ_2. Sopra una superficie Φ, imagine della totalità delle coppie di γ_2, alle C ed alle C_1 corrispondono curve B, equivalenti fra loro, birazionalmente identiche alle C, C_1 ed aventi un certo numero δ di punti doppi, corrispondenti alle coppie di γ_2 giacenti sulle singole C (coppie comuni ad ogni C e alla sua coniugata C_1). Se ρ è il genere delle C, le B son dunque di genere virtuale $\rho + \delta$ ed appartengono totalmente ad un sistema lineare $|B|$, di genere (effettivo = virtuale) $\rho + \delta$, di curve prive di punti multipli [2]; e a $|B|$ risponde su F un sistema lineare irriducibile $|D|$ composto coll'involuzione γ_2. Una curva generica di questo sistema (al pari di una curva spezzata in due curve coniugate C, C_1), non contiene coincidenze di γ_2, cioè l'involuzione di 2° ordine e di genere $\rho + \delta$, su essa subordinata da γ_2, non ha coincidenze. La formula di ZEUTHEN fornisce allora pel genere effettivo π di una D l'espressione $\pi = 2(\rho + \delta) - 1$, ossia π è un numero dispari.

Suppongasi ora che O non sia un'ipercoincidenza. Allora una $\overline{D}$ passante genericamente per O dovrà (al pari di una curva spezzata in due curve coniugate C, C_1) toccare in O due direzioni coniugate nell'involuzione determinata attorno ad O da γ_2, cosicché O risulterà doppio per $\overline{D}$ e non sarà coincidenza per l'invo-

---

considerato per lo studio delle superficie con un gruppo continuo ∞^2 di trasformazioni birazionali in sé e in relazione soltanto al modo di trasformarsi del genere aritmetico; mentre qui si considerano le relazioni funzionali tra sistemi e serie invarianti, deducendone anche, in conseguenza, le trasformazioni numerative degl'invarianti ω, I. Ved. pure la Memoria premiata di ENRIQUES-SEVERI sulle superficie iperellittiche («Acta mathematica», (1909), t. 32, 33); pag. 342 del t. 32 e pag. 352 del t. 33.

[2] Invero, nella curva generica del sistema lineare che contiene totalmente le B i δ punti doppi debbon essere spariti, perché son tutti variabili al variare d'una B.

luzione di 2° ordine ivi esistente. Pertanto l'involuzione stessa su $\overline{D}$ non avrà alcuna coincidenza e quindi il genere effettivo di D, per la formula di ZEUTHEN, risulterà un numero dispari. Ma ciò è assurdo, perché il genere effettivo di $\overline{D}$ differisce per un'unità (dipendente dall'acquisto del punto doppio O) dal genere effettivo della generica D. Si conclude che O è un'ipercoincidenza.

Alla precedente argomentazione «in grande» possiamo sostituire la seguente rapida argomentazione «in piccolo», che assume però veste rigorosa soltanto attraverso una traduzione analitica del tipo di quella esposta a pag. 300, la quale può garantire che nell'argomentazione non intervengono infinitesimi d'ordini diseguali. Poiché la coincidenza O è perfetta, ogni direzione per O (s'intende tangente ad F) contiene una coppia A, A' di punti coniugati nell'involuzione, infinitamente vicini ad O. Ma, siccome la trasformazione biunivoca indotta da γ_2 è involutoria, alla direzione AA' corrisponde la $A'A$, cioè la direzione medesima, che dunque è unita. Pertanto ogni direzione per O è unita ed O è un'ipercoincidenza.

La considerazione del sistema $|C|$ e del sistema $|D|$, da esso originato, è tuttavia utile (1), per la costruzione di un opportuno modello dell'imagine di γ_2.

Osserviamo all'uopo preliminarmente che, essendo il sistema $|C|$ semplice, il sistema $|D|$ non è composto che coll'involuzione γ_2; cioè esso ha per imagine un sistema semplice sopra un'imagine di γ_2. Si tratta invero di provare che, se P, Q son punti non coniugati in γ_2, non può avvenire che tutte le D per P passino in conseguenza per Q. Infatti la C_1 associata ad una generica C per P non passa per Q, perché, in caso contrario, Q sarebbe coniugato di P nell'involuzione. La $C + C_1$ fornisce così una D passante per P e non per Q.

Il ragionamento prova di più che non esistono in F coppie di punti, distinti dalle coincidenze e da punti coniugati nell'involuzione, che sieno neutri per $|D|$. A fortiori, dunque, il sistema $|D|$ non possiede curve fondamentali.

È poi chiaro che $|D|$ non ha punti base, perché non ne hanno né $|C|$ né $|C_1|$. In conseguenza di tutto ciò, l'imagine proiettiva Φ del sistema lineare $|D|$ è un'imagine semplice dell'involuzione γ_2

(1) Anche a prescinder dal fatto che su essa poggia l'argomentazione «in grande», che potrebbe bensì esser sostituita dal ragionamento «in piccolo», ma che resta ugualmente degna d'attenzione pel suo sostanziale valore topologico.

e la corrispondenza (1,2) fra Φ ed F non presenta eccezione alcuna, in quanto $|D|$ non ha punti base né curve fondamentali.

Però, a norma dell'Osservazione 2ª del n. 139, ad ognuno O dei punti di coincidenza isolati di F deve necessariamente corrispondere un punto multiplo (isolato) O' di Φ. Vediamo di determinare la natura di O'.

Sia $\overline{C}$ una C passante genericamente per O e $\overline{C}_1$ la sua coniugata, che passa pure per O, colla stessa direzione; $\overline{C}^0$ un'altra C per O e $\overline{C}^0_1$ la sua coniugata. Le due curve $\overline{C} + \overline{C}_1$, $\overline{C}^0 + \overline{C}^0_1$ hanno in O, esattamente, molteplicità d'intersezione 4, cioè si segano fuori di O in $2(\nu - 2)$ punti necessariamente distribuiti in $\nu - 2$ coppie dell'involuzione γ_2, ove ν sia il numero delle coppie dell'involuzione secondo cui si segan due D, cioè l'ordine della superficie Φ. Alle $\overline{C} + \overline{C}_1$, $\overline{C}^0 + \overline{C}^0_1$ corrispondono pertanto su Φ due sezioni iperpiane passanti per O' e segantisi altrove in $\nu - 2$ punti. Ciò significa che O' è doppio per Φ.

Consideriamo ora una D generica per O. Se D passasse per O con un sol ramo, il punto O sarebbe di coincidenza, sovr'essa, per l'involuzione subordinata da γ_2 su D e, non essendo che coincidenza doppia, conterebbe soltanto una volta nel gruppo delle coincidenze dell'involuzione stessa (1). Ma questo è assurdo, perché su D si avrebbe complessivamente una sola coincidenza, mentre (come mostra la formula di ZEUTHEN) il numero delle coincidenze di un'involuzione sopra una curva (contando ciascuna colla propria molteplicità) è sempre pari.

Dunque D passa per O con due rami, necessariamente lineari, in quanto vi passa con due rami lineari la particolare D spezzata in $\overline{C} + \overline{C}_1$. Posson questi due rami toccarsi per la generica D? Se così fosse il sistema lineare $|\overline{D}|$, costituito dalle D per O, avrebbe nel punto O un punto base doppio, con (almeno) un punto doppio infinitamente vicino, variabile con $\overline{D}$ (com'è variabile per $\overline{C} + \overline{C}_1$ quando $\overline{C}$ varia).

Anche questo è assurdo, perché una trasformazione birazionale di F in una superficie $\overline{F}$, in cui il punto O siasi mutato in una curva eccezionale di 1ª specie, farebbe corrispondere a $|\overline{D}|$ un sistema lineare di curve con un punto doppio variabile sopra la curva eccezionale, contrariamente al fatto classico che le curve di un sistema lineare sopra una superficie non hanno punti multipli variabili, fuori delle linee multiple della superficie (2); e

(1) Ved. SEVERI, *Trattato di G. a.*, nn. 33 e 67.

(2) Teorema ben noto di BERTINI pei sistemi di forme di uno spazio

d'altronde la $\bar{F}$ non ha, per la consueta ipotesi, alcun punto multiplo.

Dunque la $\bar{D}$ generica ha in O un nodo colle due direzioni autoconiugate nell'involuzione; epperò la sezione iperpiana corrispondente di Φ passa per O' con un nodo.

Ai punti infinitamente vicini ad O, nelle varie direzioni, corrispondono biunivocamente su Φ i punti infinitamente vicini ad O'; e viceversa. Pertanto l'intorno di O' in Φ è irriducibile; onde trattasi di un punto doppio conico ordinario o di un punto uniplanare. La seconda alternativa resta esclusa, perché la sezione iperpiana generica di Φ per O', passa per O' con un nodo.

È facile caratterizzare O', sull'ente astratto, di cui Φ è un modello, dal punto di vista delle trasformazioni birazionali. Un modello Ψ, privo di punti multipli, di tale ente astratto, si ottiene dalla Φ, trasformandola birazionalmente col sistema lineare delle forme di ordine abbastanza alto passanti pei suoi punti doppi conici, che, ricordiamo, sono in numero finito. A ciascuno, O', di questi, corrisponde su Ψ una curva razionale O'', priva di punti multipli, perché il cono tangente in O' a Φ è privo di generatrici multiple.

Poiché il sistema lineare delle sezioni iperpiane di Φ passanti per O' è, fuori di O', di grado (virtuale = effettivo) $\nu - 2$, il sistema lineare $|A|$ corrispondente su Ψ a quello delle sezioni iperpiane di Φ, è tale che $|A - O''| = |E|$ ha il grado virtuale $\nu - 2$ e inoltre è $[E, O''] = 2$, perché la sezione iperpiana di Φ passa per O con due rami. Si ha pertanto:

$$[A , A] = [E , E] + [O'' , O''] + 2 [E , O''] ,$$

donde si trae $[O'' , O''] = -2$. *La curva O'' è dunque di genere (virtuale = effettivo) 0 e di grado virtuale* -2.

Possediamo così tutti gli elementi per poter applicare le relazioni generali fra i sistemi e le serie invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica, bastando soltanto sostituire ad F una sua trasformata birazionale $\bar{F}$, in cui le coincidenze O di F si sieno mutate in altrettante curve eccezionali $\bar{O}$ di 1ª specie, ciascuna delle quali sarà luogo di coincidenze imperfette per la $\bar{F}$ trasformata, appunto perché le coincidenze isolate di F son ipercoincidenze.

lineare («Rendiconti Istituto Lombardo», 1882), di ENRIQUES pei sistemi di curve sopra una superficie («Memorie dei XL», 1896), di SEVERI pei sistemi lineari sopra una varietà qualunque («Atti R. Acc. di Torino», 1905).

Si ha finalmente tra Ψ ed $\overline{F}$ una corrispondenza $\overline{T}$, (1,2), priva di elementi fondamentali, nella quale la curva di diramazione su Ψ è costituita dalle varie curve razionali O'' (non secantisi a due a due) e la curva di coincidenza su F dalle predette curve eccezionali, non secantisi a due a due. Denoteremo con $\overline{O}$ la curva eccezionale corrispondente ad O''.

L'applicazione delle relazioni generali, conduce allora senz'altro alle seguenti conclusioni.

Il sistema canonico (virtuale, impuro) $|\overline{K_1}|$ di $\overline{F}$, è individuato dalla curva $\overline{T}(K) + \Sigma\overline{O}$, ove K sia una curva canonica (virtuale, impura) di Ψ.

Ritornando ad F, diciamo $|K_1|$ il sistema canonico (virtuale, impuro) ivi. Sarà allora:

$$K_1 \equiv T(K), \tag{144}$$

ove T è la corrispondenza (1,2) fra Ψ ed F, e la relazione resta immutata, anche se per K s'intende il sistema canonico (virtuale, impuro) di Φ, perché le O'' non son curve eccezionali.

Designato con Ω un gruppo canonico virtuale di Ψ, la serie canonica virtuale $|\overline{\Omega}_1|$ di $\overline{F}$ è data da:

$$\overline{\Omega}_1 \equiv \overline{T}(\Omega) - \Sigma M(\overline{O}) + 3\Sigma\overline{\Theta}_1 \equiv \overline{T}(\Omega) + \Sigma(\overline{O}, \overline{O}),$$

giacché sulla curva razionale $\overline{O}$ si ha:

$$M(\overline{O}) \equiv 2(\overline{O}, \overline{O}), \overline{\Theta}_1 \equiv (\overline{O}, \overline{O}).$$

E siccome, passando da F ad $\overline{F}$ la serie canonica aumenta della serie $|(\overline{O}, \overline{O})|$ per ogni curva eccezionale $\overline{O}$, che s'introduce (pag. 243), nel tornare ad F la relazione precedente diviene:

$$\Omega_1 \equiv T(\Omega), \tag{145}$$

ove Ω_1 è un gruppo canonico su F.

La (145) può altresì ottenersi subito e direttamente dalla (144). Essa rimane tal quale anche se $|\Omega|$ s'interpreta come serie canonica (impura) su Φ, in quanto le O'' non sono curve eccezionali di Ψ.

Indichiamo ora rispettivamente con S, S_1, $\overline{S}_1$ un gruppo di SEVERI sulla superficie Ψ (o Φ) e sulle superficie F, $\overline{F}$.

Viene allora:

$$\overline{S}_1 \equiv \overline{T}(S) + \Sigma M(\overline{O}) \equiv \overline{T}(S) + 2\Sigma(\overline{O}, \overline{O}),$$

perché sulle curve di coincidenza del tipo $\bar{O}$, trattandosi di un'involuzione di 2° ordine, mancano le coincidenze triple. Siccome, poi, nel passaggio da F ad $\bar{F}$, un gruppo di SEVERI diminuisce della serie $(\bar{O}, \bar{O})$ per ogni curva eccezionale $\bar{O}$ introdotta (pag. 240), avremo su F:

$$S_1 \equiv T(S) - 3\sum O . \tag{146}$$

Le (145), (146) sommate porgono infine:

$$S_1 + \Omega_1 \equiv T(\Omega + S) - 3\sum O . \tag{147}$$

Le (144), (145), (146), (147) *esprimono il modo di trasformarsi del sistema canonico e delle serie invarianti, nella trasformazione birazionale fra* Φ *ed* F.

Le (145), (146), (147) dànno luogo alle relazioni numerative:

$$\omega_1 = 2\omega - 1 , \tag{145'}$$

$$I_1 = 2I - 3c + 4 , \tag{146'}$$

$$4p'_a = 8p_a - c + 4 , \tag{147'}$$

ove ω, I, p_a sono gl'invarianti inerenti a Φ; ω_1, I_1, p'_a quelli inerenti ad F e c il numero delle coincidenze su F. In particolare dunque:

Se sopra una superficie F *di genere aritmetico* p'_a *si ha una involuzione di secondo ordine e di genere aritmetico* p_a *con un numero finito di coincidenze, il numero* c *di queste è dato da:*

$$c = 4(2p_a - p'_a + 1) ,$$

e si può assumere come modello dell'involuzione una superficie possedente soltanto c *punti doppi conici, imagini delle coincidenze.*

159. *Applicazione alla superficie di* KUMMER. — Applichiamo quanto precede alla celebre superficie scoperta da KUMMER nel 1864 [1] in questioni di geometria della retta dello spazio ordinario ed oggetto dipoi di numerosissime ricerche di molti matematici.

È una delle più notevoli superficie iperellittiche (rappresentabili cioè parametricamente con funzioni abeliane di due argomenti). Ne accenneremo le proprietà essenziali, applicando, cogli

[1] Un caso particolare della superficie di KUMMER, la cosidetta *superficie d'onda*, è stato incontrato prima da FRESNEL (1821) nelle sue memorie sulla rifrazione doppia. Ad esso è legata la scoperta della rifrazione conica fatta nel 1830 da HAMILTON e da MAC CULLAGH prima che fosse stata sperimentalmente accertata.

opportuni complementi, le relazioni ora trovate e appoggiandoci al lavoro di SEVERI relativo alle superficie delle coppie di punti di una curva algebrica (1) e alla citata Memoria sulle superficie iperellittiche di ENRIQUES-SEVERI (2).

Consideriamo anzitutto la superficie F delle coppie di punti d'una curva Γ di genere 2 (o *quadrato simmetrico* di Γ), caso particolare della varietà di JACOBI d'una curva di genere p, della quale posson vedersi le proprietà essenziali nel più volte cit. « Trattato di Geometria algebrica » di SEVERI (pag. 281). Di F si costruisce agevolmente un modello privo di punti multipli. Se però questo si considera come modello della varietà delle coppie di punti di L, esiste sovr'esso una curva razionale, imagine della g_2^1 di Γ. Se invece si costruisce un modello privo di punti multipli della totalità delle serie lineari di 2° ordine esistenti su Γ, sopra siffatto modello, che è birazionalmente equivalente al precedente, la curva razionale suddetta vien rappresentata da un punto semplice. Ciò significa che quella curva è eccezionale di 1ª specie. Assumeremo appunto per F il modello rappresentativo della totalità delle g_2 di Γ.

La superficie F possiede un gruppo continuo abeliano assolutamente transitivo G, ∞^2, di trasformazioni birazionali in sé (*trasformazioni di 1ª specie*) oltre ad una schiera continua ∞^2 di *trasformazioni di 2ª specie*, che a due a due dànno per prodotti le trasformazioni di 1ª specie. Due punti son omologhi in una trasformazione di 1ª specie, quando le g_2 (cioè generalmente le coppie di punti) di cui essi son imagini, son mutuamente residue rispetto ad una medesima g_4^2 di Γ. Pertanto le trasformazioni di 1ª specie son involutorie (mentre esistono soltanto 15 trasformazioni involutorie di 2ª specie , diverse dall'identità). Una trasformazione di 1ª specie ha 16 coincidenze, provenienti dai 16 gruppi di una g_4^2 dotati di 2 punti doppi (3). L'esistenza del gruppo G prova che F è priva di curve eccezionali, perché su F non può esistere alcuna curva razionale, senza che sia mutata in sé dalle trasformazioni del gruppo, contrariamente all'assoluta transitività di questo (4).

---

(1) « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », (1903).

(2) Ved. sopratutto a pag. 342 della parte della Memoria pubblicata nel t. 32 degli « Acta Mathematica ».

(3) Per tutto ciò ved. il *Trattato di G. a.* di SEVERI, pag. 282.

(4) O altrimenti: Su F non può esistere alcuna curva razionale, perché ai punti di una tal curva risponderebbe su Γ un'infinità razionale di serie lineari g_2,

La F ha inoltre curva canonica d'ordine zero, sicché il suo genere lineare (relativo = assoluto) vale 1 e il genere geometrico vale pure 1. Il suo genere aritmetico vale $p_a' = -1$; ossia F ha l'irregolarità 2. Ciò risulta dal citato lavoro di SEVERI. Qui ritroveremo questi risultati come applicazione del n. prec.

Sulla superficie delle coppie di punti di Γ, alle coppie contenenti un punto dato corrisponde una curva, di genere 2, senza punti multipli, birazionalmente equivalente a Γ, che varia col punto dato descrivendo un sistema ∞^1. Per un punto della superficie passano due curve del sistema, e viceversa due curve di questo s'incontrano in un punto variabile e ciascuna di esse ha in comune un punto colla curva imagine della g_2^1. Sicché sul modello F delle g_2 di Γ, il sistema ∞^1 è rappresentato da un sistema di curve C, d'indice 2, dotato di un punto base e tale che due C s'incontrano fuori del punto base in un punto variabile.

Una C è portata dal gruppo G in ∞^2 curve, perché non può esser mutata in sé da infinite trasformazioni birazionali; perciò il sistema precedente si amplia in un sistema continuo, Σ, almeno ∞^2, di curve di genere 2, senza punti multipli, birazionalmente equivalenti fra loro ed a Γ. Due C di Σ si segano in due punti, cioè il sistema stesso è di grado (virtuale = effettivo) 2. Poiché inoltre le C di Σ passanti per un punto qualunque di F, a causa della transitività di G, e del fatto che una trasformazione di G è individuata da una coppia di punti corrispondenti, possono considerarsi come trasformate delle curve dell'originario sistema ∞^1, e questo aveva l'indice 2, si conclude che per due punti qualunque di F passano due C di Σ, ossia che Σ è esso pure d'indice 2 e quindi esattamente ∞^2.

Ne deriva altresì che il sistema Σ, come totalità delle sue curve, è birazionalmente equivalente alla superficie F. Invero, fissata una C di Σ, le altre curve del sistema segano su essa la serie delle sue coppie di punti, la g_2^1 di C, costituita dai gruppi (C, C), essendo segata su C dalle curve infinitamente vicine. Onde Σ è in corrispondenza birazionale colle coppie di punti di C, ossia di Γ, e la corrispondenza presenta soltanto un'eccezione nell'elemento C di Σ, a cui corrispondono ∞^1 coppie di punti di C.

Si osserverà di più che il sistema Σ non è ulteriormente ampliabile, perché la serie segata dalle sue curve sopra una C, avendo l'ordine 2, non può essere di dimensione > 2. Pertanto anche la

---

cioè una serie razionale od unirazionale di coppie di punti, le quali dovrebbero essere equivalenti tra loro e non potrebbero perciò provenire da ∞^1 g_2 distinte.

schiera continua delle trasformazioni di 2ª specie di F muta in sé Σ.

Le trasformazioni di G generano in Σ le trasformazioni del relativo gruppo continuo e così le trasformazioni di 2ª specie di F si rispecchiano in trasformazioni di 2ª specie di Σ.

Consideriamo in modo particolare una trasformazione di 1ª specie π e l'involuzione γ_2 da essa generata, avente, come si è detto, 16 coincidenze isolate, che son dunque ipercoincidenze.

Sieno C, C_1 due curve di Σ omologhe in π. Ricordando come son ottenute da Γ le trasformazioni di 1ª specie, ne deriva che la curva $C + C_1$ sega su una C fissata di Σ un gruppo della g_4^2 di C, donde proviene π. Le $C + C_1$ segano dunque su C gruppi equivalenti, epperò son equivalenti (pel secondo criterio di equivalenza, del n. 99) (1).

Si verifica agevolmente (in modo analogo a quanto facemmo nel n. prec.) che il sistema lineare $|D|$ composto con γ_2, cui appartengono tutte le $C + C_1$, è semplice, privo di punti di base, di curve fondamentali e di gruppi neutri, fuori delle coppie di γ_2.

Una sua D generica (priva di punti multipli, perché il sistema è irriducibile e senza punti base) ha il grado (virtuale = effettivo) 8 e il genere (virtuale = effettivo) 5, uguali al grado e al genere di una curva $2C$. E siccome D contiene un'involuzione di 2° ordine priva di coincidenze, in virtù della formula di ZEUTHEN, il genere (effettivo) di quest'involuzione vale 3. Pertanto l'imagine proiettiva di $|D|$ è una superficie Φ del 4° ordine, a sezioni iperpiane B di genere 3, dotata di 16 punti doppi conici, corrispondenti alle coincidenze di γ_2: è la *superficie di* KUMMER, ottenuta ben altrimenti dal suo scopritore. È facile inoltre vedere che lo spazio S_r di appartenenza di Φ (r dimensione di $|D|$ su F), è lo spazio ordinario (cioè $r = 3$) e che anzi Φ è ivi normale.

Infatti, sopra una B , di genere 3, una serie lineare g_4, come la serie caratteristica di $|B|$, o è non speciale e ha (se completa) la dimensione 1 (il che nel caso nostro è impossibile, perché $r - 1$, dimensione della serie caratteristica, è $\geqslant 2$) o è canonica (se completa) ed ha la dimensione 2. Nel caso nostro è dunque $r - 1 = 2$,

(1) Quest'argomentazione è dissimile da altra usata per la stessa conclusione nei lavori prima citati, dove si può fare uso liberamente della teoria dei sistemi continui di curve, in relazione alla regolarità o irregolarità di una superficie; teoria che noi non abbiamo ancora sviluppato in queste Lezioni e che sarà esposta in un volume successivo.

cioè $r = 3$, e la superficie è normale in S_3, perché le sue sezioni piane son curve normali.

Tenuto conto che (come vedremo nel n. successivo) sopra una superficie d'ordine m dello spazio ordinario priva di punti multipli o dotata di soli punti doppi conici, il sistema canonico (completo) è segato dalle superficie d'ordine $m - 4$ non sottoposte ad alcuna condizione, si conclude che Φ è a curva canonica (pura) d'ordine zero (1). Dunque il suo genere lineare ω ed il suo genere geometrico p_g valgono 1, ed anche la serie canonica di Φ è d'ordine zero.

Vediamo qual'è su Φ la serie di SEVERI. Si ha ivi:

$$S \equiv J_B - (B\,,\,B) - 2\,(B\,,\,B')\,,$$

ove J_B è il gruppo jacobiano d'un fascio generico di sezioni piane e $|B'|$ l'aggiunto al sistema $|B|$. Ora $B' \equiv B$, perché la curva canonica di Φ è lo zero dell'equivalenza lineare tra curve; e il gruppo J_B consta dei punti di contatto dei piani tangenti a Φ passanti per una retta generica e di una coppia di punti sopra ciascuna delle curve razionali infinitesime O di grado virtuale —2 (n. prec.), ridotte agli intorni dei singoli punti doppi di Φ (2).

Chiamiamo in modo generico con N una di queste coppie di punti e cerchiamo di esprimere J_B mediante la somma delle N ed un gruppo $(B\,,\,B) \equiv (B\,,\,B')$, cosicché in definitiva S venga espresso mediante $(B,\,B)$ ed eventualmente ΣN (ove il sommatorio è esteso ai 16 punti doppi).

Una superficie del terzo ordine sega Φ secondo una curva equivalente a $3B$; e quando quella superficie diviene la prima polare di un punto generico dello spazio, rispetto a Φ, la curva intersezione, fuori dei punti doppi, pei quali la polare passa semplicemente senza alcuna particolarità, è una curva A equivalente a $3B - \Sigma O$, ove il sommatorio è esteso alle 16 curve infinitesime O. La A taglia ogni O in una coppia di punti, cioè in una N (giacché tutte le coppie di punti della curva razionale O son equivalenti tra loro). Si ha dunque:

$$(3B, 3B) \equiv 9\,(B,B) \equiv (A + \Sigma O, A + \Sigma O) \equiv (A, A) + 2\Sigma\,(A, O) + \Sigma\,(O,O),$$

(1) Su Φ non possono esistere curve eccezionali, giacché queste dovrebbero essere curve base del sistema delle superficie d'ordine $m - 4$.

(2) Si pensi a un modello di Φ sul quale le predette curve razionali infinitesime divengono curve effettive.

perché due curve O non s'incontrano. E siccome:

$$\Sigma(A, O) \equiv \Sigma N \quad , \quad \Sigma(O, O) \equiv -\Sigma N \,(^1),$$

così:

$$(A, A) \equiv 9(B, B) - \Sigma N .$$

Ora (A, A) equivale al gruppo delle intersezioni di due A relative alle polari di due punti dello spazio, intersezioni che cadono nei punti di contatto dei piani tangenti a Φ passanti pei due punti; onde:

$$J_B \equiv (A, A) + \Sigma N \equiv 9(B, B),$$

epperò:

$$S \equiv 9(B, B) - (B, B) - 2(B, B) \equiv 6(B, B).$$

La conclusione vale evidentemente immutata per una superficie di 4° ordine priva di punti multipli o con un numero finito di punti doppi conici. Concludendo:

Le serie di SEVERI *sopra una superficie di quart'ordine dello spazio ordinario, dotata al più di un numero finito di punti doppi conici* (*in particolare sulla superficie di* KUMMER) *è il sestuplo della serie delle sezioni rettilinee.*

Poiché l'ordine di $|S|$ è $I + 4$, ne segue $I = 20$. Conoscendosi ω, I, la relazione di NOETHER (pag. 273) porge allora pel genere aritmetico p_a di Φ il valore $p_a = 1$, com'è del resto evidente a priori, perché la dimensione virtuale del sistema delle aggiunte d'ordine $m - 4$ attualmente non può che esser uguale alla dimensione effettiva. La Φ è insomma una superficie regolare.

Le relazioni numerative (145′), (146′), (147′) dànno allora subito i valori $\omega_1 = 1$, $I_1 = -4$, $p_a' = -1$ pel genere lineare (assoluto = relativo), per l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE e pel genere aritmetico di F, e le (144), (145) mostrano che:

Sulla superficie di JACOBI (*d'una curva di genere* 2) *una curva canonica ed un gruppo canonico sono gli zeri delle rispettive equivalenze* (*lineare e razionale*) *per le curve e pei gruppi di punti della superficie.*

Meno agevole è il decidere se la serie di SEVERI, inerente ad F, che ha l'ordine $I_1 + 4 = 0$, è la serie di equivalenza zero. Esaminiamo un po' a fondo la cosa.

---

(1) Invero, sulla curva razionale O un gruppo caratteristico virtuale (O, O) è uguale al doppio di un punto, preso col segno meno.

Dalla (146), tenuto conto che il sistema $|B|$ di Φ mutasi nel sistema $|D|$ di F e quindi che (B, B) trasformasi in (D, D), segue intanto che:

$$S_1 \equiv 6\,(D\,,\,D) - 3\,W\,, \tag{148}$$

ove W è il gruppo delle 16 coincidenze di γ_2. Per decidere se o meno $S_1 = 0$, occorre qualche altra proprietà della F, in relazione al sistema Σ. Come dicemmo, π muta Σ in sé e induce in Σ una delle trasformazioni di 1ª specie dell'ente ∞^2, del quale son elementi le curve C; cosicché esistono 16 curve di Σ mutate in sè da π. Su ciascuna di queste π subordina la relativa g_2^1, che ha 6 coincidenze, appartenenti a W. Inoltre π subordina sull'ente ∞^1 costituito dalle C di Σ, che passan per un punto di W, ente birazionalmente equivalente a una C (cioè a Γ), la relativa g_2^1. Epperò vi sono 6 curve C unite passanti per quel punto. Insomma le 16 curve C unite e i 16 punti di W formano una configurazione tale che su ogni C unita vi sono 6 punti di W e per ogni punto di W passano 6 curve unite; due C unite s'incontrano in una coppia di W; le due C di Σ, che passano per una coppia di punti di W, son unite (1).

Ciò premesso, indicate con $C^1, C^2, \ldots, C^{16}$ le 16 curve unite predette e, posto $D^i = 2C^i$, consideriamo il gruppo $\Sigma_{i,k}(D^i, D^k)$, ove i, k sia una combinazione semplice degl'indici 1, 2, ..., 16. Questo gruppo consta di $\binom{16}{2} = 120$ gruppi della serie di equivalenza $|(D, D)|$, cioè equivale a $120\,(D,D)$. D'altro canto, poiché

$$(D^i, D^k) \equiv 4\,(C^i, C^k)\,,$$

ogni punto di W, dove s'incontrano C^i, C^k, conta 4 volte nel gruppo (D^i, D^k); e siccome esso figura 15 volte diverse come punto comune a due curve siffatte (tante volte quante sono le combinazioni a due a due delle 6 curve che passan per esso) così il gruppo W, contato $15 \times 4 = 60$ volte, costituisce il gruppo $\Sigma_{i,k}(D^i, D^k)$. Si ha pertanto:

$$120\,(D\,,\,D) \equiv 60\,W\,,$$

(1) Ved. la Memoria di Enriques-Severi sulle superficie iperellittiche (n. 46), ove si ritrovan per questa via le proprietà della configurazione formata dai 16 punti doppi e delle 16 coniche di contatto di piani tangenti della superficie di Kummer. Tali coniche corrispondono alle 16 curve unite di π. Invero, queste, contate due volte, son curve D ed hanno pertanto per omologhe su Φ altrettante curve che, contate ciascuna 2 volte, dànno curve B, ossia sezioni piane di Φ.

donde si trae, confrontando colla (148):

$$20\, S_1 \equiv 0\,.$$

Ma un'equivalenza più espressiva di questa, e cioè addirittura la $S_1 \equiv 0$, si ottiene appoggiandosi al concetto di *serie d'irregolarità* d'una superficie, alla quale abbiamo accennato a pag. 239. Anticipando qualche accenno in proposito (della serie stessa si tratterà ex professo nel prossimo volume) e supposte conosciute le nozioni sugl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie, ricorderemo che la serie d'irregolarità è costituita dai gruppi jacobiani di detti integrali, cioè dai punti doppi delle curve analitiche dei fasci del tipo $u = \text{cost.}$, ove u sia uno di quegl'integrali [1], e ch'essa è contenuta totalmente nella serie di SEVERI [2].

Nel caso della superficie di JACOBI F, vi sono due integrali semplici di 1ª specie u, v, ed essi assumono in punti distinti della superficie valori incongrui rispetto ai periodi. Ciò significa che una curva $u = \text{cost.}$ non può avere un punto doppio P, perché altrimenti una curva $v = \text{cost.}$, attraversante le vicinanze di P, avrebbe nell'intorno di P più di un'intersezione colla precedente e vi sarebbero pertanto più punti distinti di F cui corrisponderebbero i medesimi valori per u, v. Ne deriva che i gruppi jacobiani di ciascuno degl'integrali u, v e di ogni loro combinazione lineare, sono i gruppi zero dell'equivalenza razionale (il che è ben d'accordo col fatto che per F è $I_1 + 4 = 0$). Ricordato che questi gruppi sono gruppi S_1, ne segue senz'altro che $S_1 \equiv 0$.

Allo stesso risultato si perviene considerando il determinante jacobiano di u, v rispetto a due delle coordinate del punto di F (supposta immersa in S_3, con singolarità ordinarie). Tale jacobiano è una funzione razionale del punto di F, che s'annulla al finito soltanto sopra una curva canonica, la quale, alla sua volta, deve contenere i gruppi jacobiani di u, v. Ma siccome la curva canonica di F è la curva zero, così anche i gruppi jacobiani sono gruppi zero. Si conclude:

Sulla superficie di JACOBI *la serie di* SEVERI *è la serie d'equivalenza zero.*

Prima di chiudere l'argomento aggiungiamo soltanto la relazione:

$$56\, O \equiv 15\, (D\,,\, D) - 4\, W\,, \tag{149}$$

[1] Ved. SEVERI, Memoria [2], pag. 280, cit. a pag. 44.
[2] Ved. SEVERI, Memoria [3], n. 39, cit. a pag. 44.

che esprime un punto O mediante (D, D) e W, e che dimostrasi così. Si considerino le 6 curve D passanti per O: sieno p. es. D^1, D^2,..., D^6. Esse si tagliano a due a due fuori di O negli altri 15 punti del gruppo W. Sicché il gruppo $\Sigma_{i,k}(D^i, D^k)$, ove ora i, k sia una combinazione semplice degl'indici 1, 2, ..., 6, consta di questi 15 punti, contati ciascuno 4 volte, e del punto O contato $\binom{6}{2} \times 4 = 60$ volte, perché esso proviene dall'intersecare $\binom{6}{2}$ coppie di curve D^i. E siccome $\Sigma_{i,k}(D^i, D^k) = 15\ (D, D)$, si ha:

$$15\ (D, D) \equiv 4\ (W - O) + 60\ O\ ,$$

cioè la (149). Il confronto poi colla (148), tenuto conto del $S_1 \equiv 0$, conduce alla singolare relazione:

$$112\ O \equiv 7\ W, \tag{150}$$

che pone addirittura un legame d'equivalenza fra W e ciascuno dei suoi punti!

Osservazione 1ª. — Al variare della trasformazione di 1ª specie π i diversi gruppi W descrivon su F un'involuzione d'ordine 16, priva di coincidenze [1], che non è né d'equivalenza né di pseudo-equivalenza (ossia tale che i gruppi kW, per k intero conveniente, sieno equivalenti tra loro). Questo risulta dalla caratterizzazione trascendente (dovuta a SEVERI e che daremo nel successivo volume) delle serie di pseudo-equivalenza [2]. Del resto, se la serie dei W fosse di pseudo-equivalenza, tal sarebbe la serie dei punti O di F, a causa della (150); onde (per le ricerche accennate di SEVERI) F risulterebbe regolare e di genere geometrico nullo.

Osservazione 2ª. — La costruzione effettiva della superficie di KUMMER Φ, a partire dalla superficie di JACOBI F, risolve la questione d'esistenza seguente. Nello spazio ordinario le superficie di 4° ordine sono ∞^{34}; la condizione perché una superficie di dato ordine abbia un punto doppio (conico) in un punto non dato di S_3, si traduce in un'equazione (omogenea, del 4° ordine)

---

(1) Ved. la Memoria di ENRIQUES-SEVERI sulle superficie iperellittiche, nn. 9 e 10.

(2) Nei punti di W gl'integrali semplici u, v di 1ª specie di F assumon coppie di valori congrui ad una di esse, aumentata di un semiperiodo; sicché le somme dei valori di u, v nei punti di un gruppo W non poss n mai ridursi a costanti, neanche se son moltiplicate per un medesimo intero. Moltiplicate per un intero k, esse però divengono congrue ai valori di u, v in un punto di W, moltiplicati per $16\,k$.

fra i suoi coefficienti. Il conto delle costanti ci dice quindi che dovrebbero esistere ∞^{34-16}, cioè ∞^{18}, superficie del 4° ordine con 16 punti doppi. Ma questo conto (com'è ben noto) non è esauriente, perché le 16 equazioni accennate potrebbero esser soddisfatte soltanto da valori tutti nulli dei coefficienti cercati (cioè essere incompatibili, dopo tolta l'omogeneità nei coefficienti) o potrebbero esser dipendenti (e questo sarebbe il male minore, perché in tal caso le superficie richieste sarebbero più che ∞^{18}) oppure potrebbero esser soddisfatte soltanto da superficie con più di 16 punti doppi o in particolare spezzate. L'esistenza delle superficie di KUMMER rigetta questi dubbi. Si può anzi affermare di più che:

Nello spazio ordinario le superficie con 16 *e soltanto* 16 *punti doppi* (*epperò irriducibili*) *costituiscono una sola famiglia* ∞^{18}, *suddivisa in* ∞^3 *famiglie* ∞^{15} *di superficie tra loro omografiche*; *e sono tutte superficie di* KUMMER.

Questa conclusione deriva dal fatto [1] che ogni superficie di 4° ordine con 16 punti doppi (conici) contiene in conseguenza 16 piani tangenti singolari, che la toccano lungo coniche ed è una superficie di KUMMER. Essa dipende da 3 moduli, tanti quanti sono i moduli da cui dipende una curva di genere 2 o una superficie di JACOBI F; e quando i moduli son generali, siccome la superficie F corrispondente contiene un sol sistema del tipo Σ [2] così Φ non contiene altri sistemi diversi da $|B|$, di grado 4 e genere 3, la cui imagine sia una superficie di KUMMER. Ciò significa che *due superficie di* KUMMER *a moduli generali son omografiche*, in quanto una corrispondenza birazionale che muti l'una nell'altra fa corrisponder tra loro i sistemi delle sezioni piane. Da questo segue senz'altro la conclusione enunciata.

Un'altra proprietà notevole della superficie di KUMMER è di essere *la superficie di* 4° *ordine che contiene il massimo numero possibile di punti doppi, senza contenerne infiniti.*

Infatti, ogni punto doppio isolato abbassa la classe della superficie di 2 unità (almeno; ed esattamente di 2 unità, se è un punto doppio conico, e soltanto in questo caso); e siccome una superficie di 4° ordine senza punti doppi ha la classe $4 \times 3^2 = 36$, essa non può possedere 17 punti doppi isolati, perché avrebbe la classe 2 e quindi anche l'ordine 2.

---

[1] Stabilito nel n. 49 della Memoria di ENRIQUES-SEVERI sulle superficie iperellittiche.

[2] Ved. la Memoria di ENRIQUES-SEVERI ora cit., n. 26.

La superficie di KUMMER avendo la classe 4 e possedendo 16 piani tangenti singolari, che la toccano lungo coniche, è trasformata in una superficie di KUMMER da una reciprocità. Sicché la famiglia delle superficie di 4° ordine con 16 punti doppi è mutata in sé non soltanto dalle ∞^{15} omografie, ma anche dalle ∞^{15} reciprocità.

La questione di determinare il massimo numero di punti doppi isolati che può possedere una superficie d'ordine $m > 4$ dello spazio ordinario, è tuttora insoluta. È un problema di notevole interesse. Per $m = 3$, com'è ben noto, il massimo numero di punti doppi isolati è 4 (e per $m = 2$ è 1).

160. *Digressione sul sistema canonico d'una superficie dello spazio ordinario con punti multipli isolati.* — Nel n. prec. abbiamo avuto bisogno di costruire proiettivamente il sistema canonico della superficie di KUMMER, cioè sopra una superficie con punti doppi isolati; e ci siamo perciò riferiti ad una proprietà, che ora stabiliremo in generale.

Si tratta del sistema canonico sopra una superficie d'ordine m, dello S_3, che supponiamo dotata di una linea doppia ordinaria (con punti tripli e punti cuspidali) e di punti s-pli ordinari (con s eventualmente variabile da un punto all'altro), cioè a cono tangente irriducibile e privo di generatrici multiple [1]. Indichiamo con σ il numero di questi punti multipli isolati.

Premettiamo all'uopo un primo lemma. Sia C la curva irriducibile intersezione completa di F con una superficie Φ d'ordine $l \geq \sigma$ passante genericamente pei punti s-pli ordinari di F. Allora *una superficie d'ordine* $l + m - 2$ *passante semplicemente per la linea doppia di* F (*e quindi pei nodi di* C) *e avente molteplicità* $s - 1$ *in ogni punto* s*-plo di* F, *che è un punto* s*-plo ordinario per* C, *sega questa curva, fuori dei punti fissi, in un gruppo jacobiano della serie delle sezioni piane di* C.

La possibilità di realizzare le condizioni supposte nell'enunciato per Φ (e per C) si stabilisce così. Si assumano σ piani generici, passanti, uno per ciascuno, pei punti s-pli di F. La superficie d'ordine $l = \sigma$, in tal guisa composta, presenta nei punti multipli di F, ch'essa contiene (punti s-pli e punti doppi), il comportamento voluto. Essa però sega F in una curva spez-

[1] Punti siffatti son necessariamente isolati, perché (com'è ben noto) quando un punto multiplo P di una superficie sta sopra una linea multipla, la tangente o le tangenti alla linea in P son generatrici multiple del cono tangente ivi alla superficie.

zata, che ha dunque, oltre ai punti multipli indicati, altri nodi (in punti semplici di F). Ma siccome (pel classico teorema di BERTINI esteso alle superficie) un sistema lineare di curve su F non può essere riducibile se non ha parti fisse o se non è composto colle curve di un fascio; e d'altronde pel sistema lineare segato su F dalle superficie d'ordine $l = \sigma$ passanti pei punti s-pli non si verifica la prima eventualità e non può verificarsi neppure la seconda, perché se no due curve variabili nel sistema non avrebbero intersezioni variabili, si conclude nel modo desiderato.

Ciò posto, sieno

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\,, \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

le equazioni delle F, Φ, in coordinate omogenee, ed

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0$$

le equazioni di due piani generici.

Allora l'equazione

$$\psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial f}{\partial x_4} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0$$

rappresenta una superficie d'ordine $l + m - 2$, che passa per la linea doppia di F e, con molteplicità $s - 1$, per ciascuno dei punti s-pli di F. Poiché C non ha punti multipli, fuori dei punti multipli di F, in ogni punto di C diverso dai punti multipli di F, i piani tangenti ad F, Φ son distinti e s'intersecano nella tangente a C. Ne deriva che i punti ove $\psi = 0$ incontra C, fuori dei punti multipli, sono tutti e soli i punti di contatto delle tangenti a C appoggiate alla retta comune ai due piani; cioè essi formano il gruppo jacobiano della serie staccata su C dai piani per quella retta. Il lemma è così dimostrato.

Stabiliamo ora un secondo lemma. *Sopra un modello proiettivo di F, privo di punti multipli, ogni punto s-plo ordinario di F ($s \geq 2$) è rappresentato da una curva irriducibile priva di punti multipli, di genere* $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$ *e di grado virtuale* $-s$.

Basta evidentemente verificare la proprietà sulla superficie F_1, che si ottiene trasformando birazionalmente F col sistema lineare

delle quadriche per un punto s-plo ordinario O di F. Al sistema $|A|$ delle sezioni piane di F corrisponde su F_1 un certo sistema $|A_1|$, e alla stella delle sezioni piane per O un sistema lineare ∞^2 di curve A_1, contenenti come parti la curva O_1, imagine di O. Fatta astrazione da O_1, rimane un sistema lineare $\infty^2 |B_1|$; e le curve B_1 segano O_1 in s punti e si segano a due a due in $m - s$ punti. Si ha pertanto:

$$m = [A, A] = [A_1, A_1] = [B_1 + O_1, B_1 + O_1] = (m - s) + \\ + 2s + [O_1, O_1],$$

donde si trae $[O_1, O_1] = -s$. È poi chiaro che la curva O_1 non ha punti multipli, perché il cono tangente in O ad F non ha generatrici multiple; e che il suo genere (virtuale = effettivo) uguaglia il genere effettivo del cono, cioè $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$.

Tutto ciò premesso, consideriamo il sistema lineare $|D|$ staccato su F dalle superficie d'ordine l. Dal punto di vista invariantivo la sezione di F con una Φ d'ordine l, passante pei punti s-pli di F, consta della curva C, prima considerata, e delle curve (infinitesime) O, concentrate nei punti s-pli. Si ha cioè $D \equiv C + \Sigma O$, il sommatorio essendo esteso a tutti i punti s-pli.

D'altronde il sistema $|C|$, se ha la dimensione r, è privo di ∞^{r-1} curve spezzate (1), epperò il suo aggiunto $|C'|$ è caratterizzato (pag. 201) dalla proprietà che i gruppi (C, C') son gruppi canonici effettivi su C. Ma, a norma del primo lemma, le superficie d'ordine $l + m - 4$ aggiunte ad F e passanti pei punti s-pli di F con molteplicità $s - 1$ (le quali esistono certamente per l abbastanza grande) segano sopra C, fuori dei punti fissi, gruppi canonici, dunque:

$$C' \equiv D + E - \Sigma (s-1) O,$$

ove E è la sezione (effettiva o virtuale) di F con una superficie (effettiva o virtuale) di ordine $m - 4$ passante per la linea doppia (2).

(1) Infatti esso è manifestamente semplice e privo di curve fondamentali e la sua imagine proiettiva, ridotta con una proiezione allo S_3, non è né la superficie di STEINER, né una rigata (ved. pag. 198), perché $|C|$ è di grado > 4 e non possiede un fascio di unisecanti.

(2) Se una tal superficie non esiste si considererà la superficie differenza di una di ordine $\lambda + m - 4$ passante per la linea doppia e di una di ordine λ non passante per la linea doppia.

Tenuto conto che $D \equiv C + \Sigma O$, se ne trae:

$$C' - C \equiv E - \Sigma (s-2) O .$$

Quest'equivalenza dimostra che *il sistema canonico (impuro, virtuale) di F si ottiene imponendo alle superficie (eventualmente virtuali) d'ordine $m-4$ passanti per la linea doppia di F un punto base $(s-2)$-plo per ogni punto base s-plo ordinario di F.*

Osservazione. — Si avverta che il carattere d'immersione di una curva O_1 equivalente ad un punto s-plo ordinario O (cioè il numero delle intersezioni virtuali di una curva canonica impura K con O), è dato da $2\left[\frac{(s-1)(s-2)}{2} - 1\right] - (-s) = s(s-2)$. Da ciò segue, se $|K|$ è effettivo e di ordine maggiore di zero, che le K devon passare con molteplicità $s-2$ per O. Questo conferma, com'è naturale, la conclusione precedente; ma, per poco che vi si rifletta, si riconosce che non può sostituire il ragionamento precedente, neppure quando $|K|$ soddisfa alle ipotesi ora specificate.

Alle poche notizie bibliografiche date qua e là nel presente § 5, aggiungiamo le seguenti. L'invarianza della relazione di equivalenza lineare tra gruppi di punti di una curva o tra curve d'una superficie, di fronte ad ogni corrispondenza algebrica e non soltanto di fronte alle corrispondenze birazionali, è stata osservata da SEVERI (per le curve, incidentalmente, in «Atti della R. Accademia di Torino», 25 gennaio 1903, n. 4, e per le curve e superficie in «Rend. del R. Istituto Lombardo», 1903, pag. 498). L'invarianza più generale, di fronte alle trasformazioni algebriche, della relazione di equivalenza (razionale) fra varietà (pure) di ugual dimensione k, contenuta in una varietà ambiente M_r (la qual relazione riducesi all'equivalenza lineare, se $k = r-1$) è osservata per la prima volta in queste Lezioni. Il modo di trasformarsi del sistema canonico in una corrispondenza algebrica fra due superficie considerato prima incompletamente da PAINLEVÉ (come diremo tosto) e indicato da ENRIQUES nel caso di una trasformazione $(1, \varkappa)$ («Memorie della R. Acc. di Torino», 1893), è stato determinato, per una corrispondenza qualunque, da SEVERI («Rend. R. Istituto Lombardo», 1903), col ragionamento stesso esposto nei nn. 148, 149, ma limitatamente all'ipotesi (conforme del resto a quella di ENRIQUES) che i generi geometrici delle due superficie sieno maggiori di zero. Il concetto di curve virtuali permette di riferire il ragionamento anche alle superficie di genere geometrico nullo, com'è stato fatto qui. Il ragionamento trascendente dell'Oss. del n. 148 (contenuto nella Nota di SEVERI del 1903) è sostanzialmente di PAINLEVÉ (*Mémoire sur les équations différentielles*, «Annales de l'École normale supérieure de Paris», 1891), il quale tuttavia non pone in luce l'intervento della curva di diramazione della trasformazione considerata. Nello stesso lavoro del 1903 SEVERI ha risoluto la questione numerativa generale di trovare le relazioni invarianti fra i caratteri ω, I, p_a di due superficie in corrispondenza $(\varkappa, \varkappa_1)$, sia in assenza come

in presenza di elementi fondamentali, per i quali però vengon precisate soltanto qui quelle che abbiamo chiamato «ipotesi di generalità» (principio del n. 157 e Oss. alla fine). Le relazioni numerative (111'), (123'), (125'), valevoli in assenza di elementi fondamentali, e le (138'), (141'), (143'), valevoli quando vi sono elementi fondamentali, son appunto quelle contenute nel citato lavoro del 1903. Esse son riprodotte nel *Lehrbuch der Abzählenden Methoden der Geometrie* di ZEUTHEN (Leipzig, Teubner, 1914; pagg. 167 e segg.). (Ved. pure BAKER «Principles of geometry», vol. VI, Cambridge, 1933, pag. 295). Lo ZEUTHEN le presenta sotto aspetto proiettivo e le consegue con altra dimostrazione, di tipo più strettamente numerativo, estendendo il concetto della dimostrazione con cui, circa quarant'anni innanzi, aveva ottenuto la celebre formula di ZEUTHEN per le curve («Math. Annalen», 1871). I legami funzionali fra le serie canoniche e di SEVERI di due superficie in corrispondenza (α, α_1) appariscono in queste Lezioni per la prima volta in modo completo e approfondito. Circa i precedenti non ne esistevano che due; e cioè la deduzione della relazione esprimente il modo di trasformarsi della serie di SEVERI, fatta nel n. 9 della Nota [10] di SEVERI, (1934) citata a pag. 44, e la deduzione medesima compiuta contemporaneamente da MARONI («Rendiconti del Seminario matematico di Cagliari», vol. I, 1934). Per la serie di SEVERI la ricerca è relativamente più agevole, bastando trasportare passo passo nel campo funzionale, come noi abbiamo fatto nel n. 153 (e come fa lo stesso MARONI), il procedimento indicato nel n. 9 del lavoro del 1903 di SEVERI, tenendo poi conto dell'equivalenza funzionale della curva di coincidenza (n. 131), senza la quale non si arriva a conferire alla relazione la massima capacità d'espressione funzionale e la maggiore eleganza e semplicità. Più sottile e meno agevole è invece la deduzione, per ciò che concerne il modo di trasformarsi della serie canonica, nel qual caso la traduzione del ragionamento del 1903 avrebbe condotto all'equivalenza meno espressiva (111). Attraverso all'approfondimento, compiuto in queste Lezioni, della teoria generale delle corrispondenze tra superficie, acquistano valore più completo e significativo gli esempi dei nn. 158, 159, intorno ai quali abbiamo già dato le indicazioni bibliografiche. Il secondo modo di deduzione del gruppo virtuale delle coincidenze dell'identità sopra una superficie, esposto nel n. 154, apparisce qui per la prima volta. La proprietà stabilita nel n. 160 è dovuta a CLEBSCH («Comptes rendus», 1868) che la dimostrò per via trascendente coll'uso degli integrali doppi di 1ª specie appartenenti alla superficie (ved. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques*, etc.; Paris, Gauthier Villars, 1897, t. I, pag. 188, ove è sostanzialmente riprodotta, con più rigorosa precisazione e compiutezza, l'argomentazione di CLEBSCH) e a NOETHER, che la ottenne pel primo nell'ambito algebrico-geometrico («Math. Ann.», 1870). Una più completa dimostrazione nello stesso ambito trovasi in ENRIQUES («Memorie della R. Acc. di Torino», 1893). La dimostrazione qui esposta è dell'Autore.

CAPITOLO VII.

Il teorema di Riemann-Roch sopra una superficie.

161. *Posizione del problema e notizie storiche.* — Sopra una superficie F sia data una curva C. Il problema che affrontiamo in questo capitolo, ha per scopo la determinazione della dimensione del sistema lineare completo $|C|$, ovvero del numero delle costanti arbitrarie da cui dipende la più generale funzione razionale per la quale C sia una curva totale di livello. Si tratta della questione analoga a quella che, nel caso delle curve, è risoluta dal cosiddetto teorema di RIEMANN-ROCH.

Sia F priva di punti multipli in un conveniente spazio e C una curva irriducibile generica di un sistema effettivamente privo di punti base. Denotiamo con r la dimensione del sistema lineare completo $|C|$, con n, p rispett. il grado e il genere virtuali (= effettivi) di C. La dimensione della serie caratteristica (effettiva) $|(C, C)|$ risulta $r-1$; e, per il teorema di RIEMANN-ROCH sulle curve, viene

$$r-1 = n-p+j-\delta, \tag{1}$$

essendo j l'indice di specialità e δ la deficienza della serie caratteristica su C.

Per valutare j si osservi che $j-1$ è la dimensione della serie completa g_{2p-2-n} differenza tra la serie canonica e la serie caratteristica su C (da porsi $j=0$, se questa differenza non è effettiva, cioè se la serie caratteristica su C è non speciale). Un gruppo di g_{2p-2-n} è equivalente ad un gruppo $(C''-C, C) \equiv (K, C)$, ove C'' è una curva del sistema aggiunto a $|C|$, e K è una curva canonica (impura, eventualmente virtuale) della superficie F.

Introduciamo l'*indice di specialità i del sistema* $|C|$, ovvero il numero delle curve canoniche K, linearmente indipendenti, che contengono una C di $|C|$. Si dovrà porre $i=0$, se $|C|$ non è contenuto in $|K|$, cioè se è *non speciale*, il che accade sempre quando C è una curva effettiva, come quella che stiamo consi-

derando, e $|K|$ è virtuale, cioè $p_g = 0$. Tenuto conto che il sistema $|K|$ ha la dimensione $p_g - 1$ (n. 100), si ha allora:

$$(2) \qquad j - 1 = (p_g - 1) - (i - 1) - 1 + \tau \ ,$$

ove τ sia la deficienza della serie segata su C dalle curve K.

Sostituendo nella (1) si ottiene:

$$(3) \qquad r = n - p + p_g - i + 1 - \delta + \tau \ .$$

E, se introduciamo l'intero $\theta = p_g - p_a - \delta$ (di cui apparirà più avanti il significato), risulta anche:

$$(4) \qquad r = n - p + p_a - i + 1 + (\theta + \tau) \ .$$

La quantità $\sigma = \theta + \tau$ (che in seguito vedremo essere sempre non negativa) dicesi *sovrabbondanza* del sistema $|C|$. Supposto $\sigma \geqslant 0$, può scriversi

$$(5) \qquad r \geqslant n - p + p_a - i + 1 \ .$$

L'espressione $n - p + p_a - i + 1$ a secondo membro della (5), si chiama la dimensione *normale* (o *virtuale*) del sistema. Lo scopo cui tendiamo consiste appunto nello stabilire in ogni caso la disuguaglianza (5), che esprime il teorema di Riemann-Roch sopra una superficie. In parole: La dimensione effettiva di un sistema completo $|C|$ è sempre maggiore o uguale alla dimensione normale.

Indipendentemente dalla conoscenza di questo teorema, tutte le volte che la dimensione d'un sistema completo abbia il valore normale, diremo che il sistema è *non sovrabbondante*, e lo chiameremo addirittura *regolare* se, oltre ad esser non sovrabbondante, è non speciale ($i = 0$). Nella dimostrazione del teorema che abbiamo in vista, sarà incluso il fatto che $\theta \geqslant 0$ (oltre a $\tau \geqslant 0$), epperò si potrà allora affermare che *un sistema è regolare quando e soltanto quando* $\tau = \theta = i = 0$. Il solo fatto che la dimensione r di $|C|$ sia espressa da $r = n - p + p_a + 1$ non basta a caratterizzare la regolarità del sistema, se non si sa che non è speciale, perché se $i > 0$ potrebbe risultare $i = \sigma$ e la dimensione $n - p + p_a + 1$ di $|C|$ non avrebbe più il valore normale.

Abbiamo così anticipato, in relazione ai sistemi generali, il risultato espresso dal teorema di Riemann-Roch. La questione cui risponde il teorema, va però considerata anche per sistemi lineari irriducibili o riducibili, senza o con punti base assegnati o virtualmente inesistenti, e infine anche per sistemi virtuali. Ciò sarà sviluppato e precisato nei nn. seguenti.

Spetta a NOETHER (« Comptes Rendus », 1886), di aver dato una prima formulazione del teorema di RIEMANN-ROCH sulle superficie, che riducesi tuttavia ad una semplice induzione. La considerazione di NOETHER consiste in sostanza in quella da noi riportata al principio di questo n. fino alla deduzione della formola (3). Egli suppone implicitamente che sian nulli i caratteri δ, τ, vale a dire che la serie caratteristica e la serie segata dalle curve canoniche su una curva generica del sistema sian complete.

Le ipotesi di NOETHER sono state messe in evidenza da ENRIQUES (*Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « R. Acc. delle Scienze di Torino », 1893), il quale dimostra che la prima ipotesi di NOETHER ($\delta = 0$) è verificata sulle superficie regolari, ove la serie caratteristica di ogni sistema lineare completo è completa. Per quanto riguarda la seconda ipotesi di NOETHER ($\tau = 0$), ENRIQUES dimostra che essa è soddisfatta p. es. quando $|C|$ è l'aggiunto di un multiplo sufficientemente alto di un sistema lineare privo di curve fondamentali.

Un'ulteriore essenziale precisazione è stata data da CASTELNUOVO (*Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Memorie della Società dei XL », 1896, e *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, « Annali di Matematica » , 1897), il quale stabilisce che la deficienza della serie caratteristica di ogni sistema lineare completo irriducibile privo di punti base è $\leq$ all'irregolarità della superficie $q = p_g - p_a$, il massimo q essendo effettivamente raggiunto da qualche sistema. In base al risultato di CASTELNUOVO, l'intero θ introdotto nella (4), appare come la *deviazione della deficienza della serie caratteristica dal suo massimo*, e risulta in ogni caso $\theta \geq 0$; onde nella (4) la quantità $\sigma = \theta + \tau$ (essendo τ di sua natura ≥ 0) è sempre ≥ 0, e dalla (4) può passarsi alla disuguaglianza (5), che esprime il teorema di RIEMANN-ROCH. L'ordine d'idee di ENRIQUES e CASTELNUOVO porta anche a stabilire il teorema di RIEMANN-ROCH per i sistemi lineari irriducibili dotati di punti base assegnati o virtualmente inesistenti.

Nel 1903 SEVERI (*Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica*, « Rend. Lincei ») ha potuto sostituire il complesso procedimento col quale CASTELNUOVO perviene al teorema sul massimo della deficienza della serie caratteristica, con una dimostrazione notevolmente più semplice basata su nuovi concetti (ved. il successivo n. 166). In seguito questi medesimi concetti permisero a SEVERI (*Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « R. Acc. delle Scienze di Torino », 1905) di estendere il teorema di RIEMANN-ROCH ai sistemi lineari riducibili. Infine, SEVERI (*Sulle curve algebriche virtuali appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rend. Istituto Lombardo », 1905) ha esteso il teorema stesso al caso di curve virtuali, pervenendo ad una condizione numerativa sufficiente perché una curva virtuale appartenga ad un sistema lineare effettivo.

Nelle pagine seguenti esporremo la dimostrazione data da SEVERI del teorema di RIEMANN-ROCH, nella sua accezione più generale. Apparisce qui per la prima volta un complemento relativo al caso di un sistema lineare individuato da una curva C dotata di componenti multiple (cfr. SEVERI, « Bollettino dell'U.M.I. », 1941).

Anticipando una trattazione che troverà posto nel seguito, avvertiamo il lettore che recentemente SEVERI è riuscito, in molti casi significativi, a convertire in un'uguaglianza la disuguaglianza che esprime il teorema di RIEMANN-

ROCH (cfr. F. SEVERI, *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica*, «Memorie della R. Acc. d'Italia», 1941).

162. *Dimostrazione di un primo lemma.* — Stabiliamo il lemma seguente:

Se C è una curva dello spazio ordinario, priva di parti multiple, intersezione completa di due superficie, le superficie d'un ordine arbitrario passanti per C segano su un piano α generico il sistema lineare completo, rispetto al gruppo dei punti base (C, α), delle curve dello stesso ordine [1].

Siano F, Φ le due superficie intersecantisi in C, di equazioni omogenee rispettive:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \quad , \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Per l'ipotesi che C sia priva di parti multiple, un piano generico α sega F, Φ secondo due curve, le quali s'intersecano *semplicemente* nei punti comuni, vale a dire in punti semplici e con tangenti distinte. Assunto come piano α il piano $x_4 = 0$, alle due curve

$$(6) \qquad f(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 \quad , \quad \varphi(x_1, x_2, x_3, 0) = 0 ,$$

possiamo applicare il teorema dell'$Af + B\varphi$ nel caso semplice [2]. Si deduce che il primo membro dell'equazione $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$ di una curva qualunque che passi pei punti comuni alle curve (6), ossia pei punti (C, α), può esprimersi nel modo seguente:

$$(7) \qquad \psi(x_1, x_2, x_3) \equiv A(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3, 0) + B(x_1, x_2, x_3) \varphi(x_1, x_2, x_3, 0) ,$$

ove A, B sono forme ternarie opportune.

Dalla (7) discende che la forma quaternaria

$$\psi(x_1, x_2, x_3) - A(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3, x_4) - B(x_1, x_2, x_3) \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

si annulla identicamente quando sia $x_4 = 0$, onde si spezza nel prodotto

$$x_4 \eta(x_1, x_2, x_3, x_4) ,$$

---

[1] Se la C non è intersezione completa, il teorema vale soltanto per superficie di ordine abbastanza alto (cfr. E. BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, pag. 297). Ad. es. per una quartica di 2ª specie, l'unica quadrica che la contiene sega sopra un piano generico dello spazio il sistema (incompleto), ∞^0, costituito da una conica per 4 punti base.

[2] Cfr. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 335.

con η forma quaternaria conveniente, e risulta

$$(8) \qquad \psi(x_1, x_2, x_3) - x_4 \eta \equiv A f(x_1, x_2, x_3, x_4) + B \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

La (8) ci dice che la superficie $\psi - x_4 \eta = 0$ passa per la curva C intersezione di F, Φ, e stacca sul piano α, di equazione $x_4 = 0$, la curva $\psi(x_1, x_2, x_3) = 0$, arbitrariamente fissata pel gruppo (C, α). Donde segue che *tutte* le curve di α, di ordine assegnato, passanti pel gruppo (C, α), sono staccate su α da superficie (del medesimo ordine) passanti per C.

E con ciò il lemma è provato.

La dimostrazione sviluppata è nell'ordine d'idee della Nota di SEVERI sulla *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, (« Rend. Lincei », 1902); ma pel caso specifico cfr. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, (« Rend. di Palermo », 1903).

163. *Dimostrazione di un secondo lemma.* — Al n. 104 abbiamo definito le superficie aggiunte nel senso di SEVERI ad una curva D, parziale intersezione di due superficie F, Φ di S_3. Se C' è la residua intersezione, tali aggiunte sono le superficie aggiunte a D nel senso di CASTELNUOVO, che passano per C. In proposito enunciammo la proprietà seguente che ora stabiliremo, costituendo essa un lemma fondamentale per la dimostrazione del teorema di RIEMANN-ROCH.

Le aggiunte di SEVERI, *d'ordine arbitrario, ad una curva D di S_3, segano sulla D, fuori dei punti fissi, serie lineari complete* [1].

Diamo la dimostrazione del lemma ponendoci in ipotesi abbastanza ampie che subito indicheremo, e che sono sufficienti per le applicazioni che abbiamo in vista. Precisamente supponiamo che le curve C', D, intersezioni di F, Φ, soddisfacciano alle condizioni che risultano dalla costruzione seguente.

Sopra una superficie definita invariantivamente, sia C' priva di parti multiple. Partendo da un modello della superficie privo di punti multipli, in S_5, ci si riduca, mediante una proiezione generica nello S_3, ad un modello F dotato di singolarità ordinarie, sul quale la C' si appoggi alla linea doppia soltanto in punti che

[1] Del teorema abbiamo già fatto uso, al n. 105, per dimostrare la completezza del sistema lineare segato su una superficie dalle sue aggiunte. Tale risultato resta adesso svincolato dall'ammissione allora fatta. Il lemma fu dimostrato da SEVERI nella prima delle due Note del 1905 citate nel n. 161. Quando C manca, il lemma si riduce a quello dato da SEVERI nella Nota Lincea del 1903 ed è già sufficiente per stabilire il teorema di CASTELNUOVO citato nel n. 161 (ved. il successivo n. 166).

non siano né cuspidali per F né tripli per la superficie e per la linea doppia; e che siano in ogni caso semplici per C, in guisa che il ramo lineare di C che ha origine in un punto d'appoggio, appartenga ad una sola delle due falde di F per il punto, e non tocchi ivi la linea doppia. Queste condizioni son tutte automaticamente soddisfatte, quando la proiezione è generica rispetto alla superficie e alla curva su essa considerata.

Sia Φ una superficie la quale passi per C in modo generico, intersecando ulteriormente F secondo una curva D. Se l'ordine di Φ è abbastanza alto, la D passa semplicemente per i punti comuni a C e alla linea doppia di F, giacendo, nell'intorno di ogni tal punto, sulla falda opposta a quella ove giace C [1]. La D si appoggia inoltre alla linea doppia di F con un certo numero di punti doppi, distinti dai punti d'appoggio di C, avendo un ramo in ciascuna falda di F uscente da uno di quei punti doppi. La D non ha altri punti doppi, in punti semplici di F.

Ciò posto, dividiamo la dimostrazione del lemma in due parti, stabilendo in un primo tempo il fatto che le aggiunte di SEVERI alla D, di ordine abbastanza alto, segano sulla D una serie completa, e in un secondo tempo che la proprietà sussiste per le aggiunte di ordine $h-1$ qualora sia valida per le aggiunte di ordine h.

Dimostriamo la prima parte. Si consideri la totalità delle aggiunte di CASTELNUOVO alla D, d'ordine t abbastanza alto, in guisa che esse (e tutte quelle di un qualsiasi ordine $> t$), seghino una serie completa e non speciale sulla D (n. 104). Aggregando a tali aggiunte una superficie arbitrariamente fissata Λ, di ordine λ, passante per C, si ottengono aggiunte di SEVERI (spezzate) d'ordine $t+\lambda$.

Sia M il gruppo di m punti segati da Λ su D, fuori di C. Se λ è così alto che le superficie d'ordine λ passanti per C seghino su D, fuori di C, una serie lineare priva di punti fissi [2], il gruppo M impone certamente m condizioni *indipendenti* alle aggiunte di SEVERI d'ordine $t+\lambda+m$, giacché si può costruire un'aggiunta di tale ordine aggregando a un'aggiunta di CASTELNUOVO d'ordine t, una superficie $\bar{\Lambda}$, d'ordine λ, passante per C, ma non per qualche punto di M, ed m piani, dei quali $m-1$ passino per

[1] Queste condizioni sono certo già soddisfatte assumendo per superficie Φ il cono proiettante C da un punto generico di S_3.

[2] Condizione già soddisfatta assumendo λ non minore dell'ordine di C, perché i coni proiettanti C dai punti di S_3 non hanno su D punti fissi fuori di C.

$m-1$ punti qualunque di M e non per il rimanente e l'ultimo non passi per alcun punto di M.

Ora, le aggiunte di SEVERI, d'ordine $t+\lambda+m$, passanti pel gruppo M, segano su D, fuori dei punti fissi, una serie che è completa, in quanto coincide con la serie segata dalle aggiunte di CASTELNUOVO d'ordine $t+m$. Poiché il gruppo M impone alle aggiunte di SEVERI, d'ordine $t+\lambda+m$, m condizioni indipendenti, tralasciando d'imporre alle dette aggiunte il passaggio per gli m punti fissi di M, la serie segata aumenta di m il suo ordine e la sua dimensione, onde (essendo non speciale) rimane completa.

Passiamo alla seconda parte della dimostrazione. Siano Ψ^h le aggiunte di SEVERI, d'ordine h, per le quali supponiamo acquisito il lemma, e seganti pertanto su D una serie g^e completa. Se G è il gruppo segato su D da un piano generico α, si tratta di far vedere che le aggiunte di SEVERI Ψ^{h-1}, d'ordine $h-1$, segano su D la serie residua di g^e rispetto a G. Invero risulta allora che, come le Ψ^h, anche le Ψ^{h-1} segano una serie completa.

Siano x, y le dimensioni del sistema di tutte le Ψ^h, e del sistema delle Ψ^h passanti per D; x_1, y_1 abbiano gli analoghi significati per le Ψ^{h-1}. Sarà allora:

$$\rho = x - y - 1 ; \tag{9}$$

e, se g_{ρ_1} è la serie segata su D dalle Ψ^{h-1}, sarà similmente:

$$\rho_1 = x_1 - y_1 - 1 . \tag{10}$$

Indicato con z il numero delle condizioni che il **gruppo** G impone alle Ψ^h, tutto sta a dimostrare che

$$\rho_1 = \rho - z . \tag{11}$$

A ciò perveniamo applicando il lemma del n. 162. Denoti σ l'infinità delle curve d'ordine h, del piano α, segate dalle Ψ^h. Risulta allora

$$x_1 = x - \sigma - 1 . \tag{12}$$

D'altronde, per il lemma del n. 162, la totalità di tutte le curve d'ordine h del piano α, passanti per $G+(C,\alpha)$, è segata dalla totalità delle superficie d'ordine h che contengon la curva intersezione completa $C+D$, cioè delle aggiunte Ψ^h passanti per D: e quindi anche dalle Ψ^h per G. Ne segue che $\sigma - z$ è l'infinità delle curve d'ordine h passanti per $G+(C,\alpha)$ e che queste son segate dalle Ψ^h per D. Epperò risulta:

$$y_1 = y - (\sigma - z) - 1 . \tag{13}$$

Dalle (12), (13), tenuto conto delle (9), (10), si ha senz'altro la relazione (11), che si voleva stabilire.

Osservazione. — Nei riguardi del lemma dimostrato, che costituisce la chiave di volta della dimostrazione di SEVERI del teorema di RIEMANN-ROCH, è opportuno sottolineare un fatto semplice, ma sottile, che giuoca più volte nel seguito; ed è che la *completezza* della serie segata su D, fuori dei nodi, dalle aggiunte di SEVERI, risponde simultaneamente ad una *questione d'esistenza.* Essa infatti implica che quella serie e tali aggiunte esistano insieme.

È questo un fatto di ordine generale. Tutte le volte che, data una varietà algebrica irriducibile M_r d'uno spazio S_d, si riesce a definire ivi in qualche modo un gruppo base, che sia di *aggiunzione* rispetto ad M_r, ossia tale che le forme d'un ordine *arbitrario* aventi quel gruppo base seghino sempre su M_r, astrazion fatta dalla parte N del gruppo base situata su M_r, un sistema lineare *completo*, la condizione d'esistenza delle aggiunte di un dato ordine l, equivale alla condizione d'esistenza del sistema lineare $|lA - N|$, A essendo una sezione iperpiana di M_r. Il procedimento dimostrativo col quale si stabilisce la completezza non può non fornire nello stesso tempo la prova di questa equivalenza, giacché la validità del teorema per un l arbitrario richiede appunto che *ogni* varietà effettiva $lA - N$ sia segabile con un'aggiunta *effettiva* d'ordine l: senza di che cadrebbe per l'ordine l l'affermata completezza.

Per esempio, nel caso del primo lemma (n. 162) il fatto cui accenniamo è esplicitamente in evidenza nello stesso processo dimostrativo; nel caso del secondo lemma esso è implicitamente fornito dalla dimostrazione. Invero, se nulla si suppone circa l'esistenza della serie $g^\rho - G$ e si ammette invece che non esistano aggiunte d'ordine $h - 1$, se ne deduce che $g^\rho - G$ non è effettiva, perchè il ragionamento vale immutato nell'ipotesi $\rho_1 = x_1 = y_1 = -1$ e sussiste quindi la (11), cioè $z = \rho + 1$, la quale prova l'inesistenza di $g^\rho - G$ come serie effettiva.

Similmente, per una superficie d'ordine m, l'esistenza delle aggiunte d'ordine $m - 4$ equivale all'esistenza del sistema canonico impuro, appunto perché le aggiunte d'un ordine arbitrario segan sulla superficie, fuori del gruppo base d'aggiunzione, un sistema lineare completo. La dimostrazione che di questo teorema è stata data nel n. 105, in quanto appoggiasi al lemma del n. 162, ha valore esistenziale incondizionato. Così dicasi della classica

dimostrazione (di NOETHER) poggiata sul teorema $Af + B\varphi$. Se la superficie è d'ordine m, il teorema è certo applicabile, nell'ambito delle superficie aggiunte effettive, fino all'ordine $m-1$, perché esistono sempre superficie aggiunte d'ordine $m-1$ (tra cui le prime polari) e d'altronde le aggiunte d'un ordine qualunque $l \leqslant m-1$, contenenti una sezione piana della superficie, si spezzano in conseguenza nel piano di tale sezione e in superficie aggiunte d'ordine $l-1$.

Analoga cosa può dirsi del teorema concernente la completezza della serie segata sopra una curva piana delle aggiunte d'un ordine arbitrario, ecc. ecc.

164. *Il teorema di* RIEMANN-ROCH *per alcuni sistemi particolari.* — Per giungere al teorema di RIEMANN-ROCH nella sua forma più generale è opportuno esaminare dapprima taluni casi particolari.

Consideriamo sopra una superficie F dello S_3, di ordine m, dotata di singolarità ordinarie, il sistema lineare completo (n. 105) $|C_l|$, segato su F dalle superficie aggiunte d'ordine l. Supponiamo l abbastanza alto, in guisa che la postulazione $\chi(l)$ della curva doppia di F per le aggiunte d'ordine l, sia data dall'espressione normale (n. 106):

$$\chi(l) = ld - 2t - p + 1 \,, \tag{14}$$

indicandosi con d, p, t rispett. l'ordine, il genere effettivo e il numero dei punti tripli della linea doppia (tripli per la superficie).

La dimensione R_l del sistema lineare di tutte le aggiunte d'ordine l è quindi data da:

$$R_l = \binom{l+3}{3} - ld + 2t + p - 2 \,,$$

e in conseguenza la dimensione r_l del sistema completo $|C_l|$, da

$$r_l = R_l - \binom{l-m+3}{3} = \binom{l+3}{3} - \binom{l-m+3}{3} - ld + 2t + p - 2. \tag{15}$$

Posto per comodità $\lambda = l - m + 4$, e tenute presenti le relazioni combinatorie:

$$\binom{l+3}{3} = \binom{\lambda+m-1}{3} = \binom{\lambda}{3} + \binom{\lambda}{2}(m-1) + \lambda\binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3},$$

$$\binom{\lambda}{3} - \binom{\lambda-1}{3} = \binom{\lambda-1}{2};$$

la (15) si trasforma nella

$$r_l = \binom{\lambda-1}{2} + \binom{\lambda}{2}(m-1) + \lambda\binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{3} -$$

$$- \lambda d - (m-4)\,d + 2t + p - 2 \ .$$

A questo punto, nell'intento di esprimere r_l mediante caratteri invarianti della superficie e del sistema $|C_l|$, teniamo intanto conto dell'espressione del genere aritmetico p_a di F, offerta dalla (14) del n. 106. Risulta allora:

$$r_l = \binom{\lambda-1}{2} + \binom{\lambda}{2}(m-1) + \lambda\binom{m-1}{2} - \lambda d + p_a - 1 \ .$$

Inoltre, se π è il genere effettivo di una sezione piana generica di F, si ha

$$d = \binom{m-1}{2} - \pi \ ;$$

donde ancora

$$r_l = \binom{\lambda-1}{2} + \binom{\lambda}{2}(m-1) + \lambda\pi + p_a - 1 \ . \tag{16}$$

Nel secondo membro della (16) compaiono, oltre al carattere invariante p_a di F, il grado m e il genere π del sistema $|A|$ delle sezioni piane della superficie. Onde far intervenire nella (16) in luogo di m, π, il grado n_l e il genere p_l del sistema $|C_l|$ considerato, osserviamo che tal sistema non è altro che l'aggiunto del multiplo $|\lambda A|$ del sistema delle sezioni piane di F. Invero si ha (n. 101):

$$|(\lambda A)'| = |\lambda A + K| \ ,$$

e, tenuto conto che il sistema canonico $|K|$ (puro o impuro, effettivo o virtuale) è segato su F dalle aggiunte (eventualmente virtuali) d'ordine $m-4$, il sistema $|\lambda A + K|$ risulta segato dalle aggiunte d'ordine $l = \lambda + (m-4)$.

Ora, il genere π_λ del sistema $|\lambda A|$ è, per la formula (32) del n. 118,

$$\pi_\lambda = \binom{\lambda}{2} m + \lambda(\pi - 1) + 1 \ . \tag{17}$$

D'altra parte, tra il grado n_l, il genere p_l del sistema $|C_l| = |(\lambda A)'|$, ed il genere π_λ di $|\lambda A|$, corre la relazione

(18) $$\pi_\lambda + p_l - 2 = n_l \ ,$$

che si ottiene dalla (41) del n. 124 previ i cambiamenti di simboli.

Le (17), (18) ci permettono di esprimere π mediante i caratteri n_l, p_l del sistema $|C_l|$: onde, sostituendo nella (16), si deduce finalmente:

(19) $$r_l = n_l - p_l + p_a + 1 \ .$$

Si conclude che *il sistema segato su una superficie F dalle aggiunte di ordine l abbastanza alto è regolare*, nel senso indicato al n. 161, perché, non appena sia $l > m - 4$, il sistema è non speciale. Altra limitazione, cui deve soddisfare l, è quella che assicura la validità della formula di postulazione (14).

Osservazione. — In quanto precede abbiam fatto riferimento al sistema $|K|$, eventualmente virtuale, per includere anche le superficie di genere geometrico $p_g = 0$. È ovvio il significato di aggiunte virtuali di ordine $m - 4$. Se λ' è così grande che esistano aggiunte ad F d'ordine λ' ($> m - 4$), la differenza fra una tale aggiunta ed una superficie qualunque d'ordine $\lambda' - m + 4$, non aggiunta ad F, è un'aggiunta virtuale d'ordine $m - 4$. Pertanto la sezione di F con una superficie d'ordine λ, cui si addizioni un'aggiunta d'ordine λ' e se ne tolga una superficie d'ordine $\lambda' - m + 4$, è una curva $(\lambda A)' \equiv \lambda A + K$ e il sistema $|(\lambda A)'|$ vien così segato su F, anche per $p_g = 0$, dalle superficie aggiunte d'ordine $l = \lambda + m - 4$.

165. Esaminiamo un altro caso particolare notevole, e cioè quello del sistema lineare completo $|C_\lambda| = |\lambda A|$, ove λA è un multiplo abbastanza alto di una sezione piana A di F.

In base al n. 105, col ben noto ragionamento del *Restsatz*, le curve del sistema completo $|C_\lambda|$ si posson segare mediante aggiunte d'ordine $\lambda + \lambda_1$ passanti per una curva Λ_1 conveniente (sezione di F con un'aggiunta d'ordine λ_1, fuori della linea doppia). E si potrà anche supporre (prendendo λ_1 fisso, ma abbastanza grande) che la curva Λ_1 sia priva di punti multipli.

Siano: r_λ, n_λ, p_λ la dimensione, il grado e il genere di $|C_\lambda|$; R_λ la dimensione del sistema completo $|C_\lambda + \Lambda_1|$; ν, π grado e genere di Λ_1; $j_\lambda = [C_\lambda, \Lambda_1] = \lambda[A, \Lambda_1]$ il numero dei punti d'intersezione di una curva C_λ con Λ_1. Il grado e il genere del sistema $|C_\lambda + \Lambda_1| = |\lambda A + \Lambda_1|$ risultano allora, in base alle formule dei nn. 107, 108, rispettivamente:

$$n_\lambda + \nu + 2j_\lambda \ , \quad p_\lambda + \pi + j_\lambda - 1 \ .$$

Tenuto conto del risultato del n. precedente, non appena $\lambda + \lambda_1$ sia abbastanza alto, risulta

$$R_\lambda = (n_\lambda + \nu + 2j_\lambda) - (p_\lambda + \pi + j_\lambda - 1) + p_a + 1 . \tag{20}$$

Per avere r_λ, basterà valutare la dimensione σ della serie segata su Λ_1 dal sistema $|C_\lambda + \Lambda_1|$, giacché si ha ovviamente:

$$r_\lambda = R_\lambda - \sigma - 1 . \tag{21}$$

All'uopo mostriamo che la serie $|(C_\lambda + \Lambda_1, \Lambda_1)|$, per λ abbastanza alto, è completa e non speciale, onde

$$\sigma = (j_\lambda + \nu) - \pi . \tag{22}$$

Invero, la serie $|(C_\lambda + \Lambda_1, \Lambda_1)|$ contiene la somma minima delle serie $|(C_\lambda, \Lambda_1)|$ e $|(\Lambda_1, \Lambda_1)|$. E, per λ alto, risulta: *a*) $|(C_\lambda, \Lambda_1)|$ completa non speciale, poiché le superficie d'ordine λ (che segano su F curve C_λ) sono aggiunte di CASTELNUOVO (n. 104) alla Λ_1, priva di punti multipli; *b*) $|(C_\lambda, \Lambda_1)|$ contenente parzialmente la serie $|(\Lambda_1, \Lambda_1)|$, con un residuo non speciale.

In queste condizioni è applicabile un teorema di CASTELNUOVO [1], per cui si può asserire che la serie somma minima di $|(C_\lambda, \Lambda_1)|$ e $|(\Lambda_1, \Lambda_1)|$ è completa.

Dalle (20), (21), (22), si trae in definitiva la relazione:

$$r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 , \tag{23}$$

la quale ci dice che *il multiplo secondo un intero abbastanza alto del sistema delle sezioni piane di una superficie F, è un sistema regolare* (n. 161), perché, per λ abbastanza grande, il sistema è certo non speciale.

---

[1] Cfr. p. es. F. SEVERI, *Trattato di G. a.*, pag. 149. Il teorema cui s'allude è questo: Se sopra una curva C di genere p, si hanno due serie g_n^{n-p}, g_m^r, la prima delle quali, completa e non speciale, contenga parzialmente la seconda (della quale non si sa nulla) e lasci come residuo una serie non speciale, la somma minima delle due serie è completa (non speciale). La g_m^r può essere benissimo parziale; ma quel che è necessario (ed occorre segnalarlo in modo esplicito) è che la g_m^r *sia priva di punti fissi* e quindi abbia $r > 0$. Invero, soltanto allora alla somma minima g_{n+m}^ρ delle due serie un gruppo G fissato nella g_m^r presenta m condizioni distinte, potendosi costruire un gruppo della g_{n+m}^ρ che passi per $m-1$ punti di G_m e non pel rimanente, mediante un gruppo di g_n^{n-p} passante per gli $m-1$ punti scelti e non pel rimanente (esiste certo un gruppo siffatto, perché G_m impone nelle nostre ipotesi m condizioni indipendenti ai gruppi di g_n^{n-p}), cui s'aggiunga un gruppo di g_m^r non avente punti comuni con G_m. Pertanto $g_{n+m}^\rho - G_m$ ha la dimensione $\rho - m = n - p$. Onde $\rho = m + n - p$, e la somma minima considerata è completa.

166. *Il teorema della deficienza della serie caratteristica.* — Il risultato del n. precedente, necessaria premessa alla dimostrazione generale del teorema di RIEMANN-ROCH, è già sufficiente a stabilire (seguendo la via indicata da SEVERI nel 1903), il teorema di CASTELNUOVO, cui s'è accennato nelle notizie storiche del n. 161 ; e cioè :

La deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare irriducibile $|C|$, *privo di punti base, di dimensione* ≥ 1, *sopra una* QUALUNQUE C *priva di punti multipli* (1), *non supera l'irregolarità* $q = p_g - p_a$ *della superficie cui* $|C|$ *appartiene* ; *ed esistono sistemi siffatti pei quali il massimo* q *è raggiunto, sopra ogni curva priva di punti multipli.*

Veramente il procedimento di CASTELNUOVO conduce al teorema soltanto in riferimento alla curva generica C, mentre la dimostrazione di SEVERI, che stiamo per esporre, si riferisce ad una *qualunque* C, purché priva di punti multipli (2).

Per chiarezza divideremo la dimostrazione in cinque parti.

a) Occorre anzitutto un lemma semplice, ma fondamentale. *Sia* $|C| = |C_1 + C_2|$, *e i sistemi* $|C|, |C_1|, |C_2|$ *siano irriducibili e privi di punti base. Denotino* r, r_1, r_2 *le loro dimensioni* ; δ_1, δ_2 *le deficienze delle serie caratteristiche di* $|C_1|$, $|C_2|$ *sopra le curve* C_1 , C_2, *anche particolari, purché irriducibili. Ebbene, se* $|C|$ *sega su* C_1 *una serie lineare completa, è* $\delta_1 \leq \delta_2$ (3).

---

(1) Una tal C è necessariamente irriducibile, perché è chiaro, dal punto di vista topologico, che una C irriducibile, com'è la generica curva di $|C|$, non può spezzarsi senza che si presentino punti di connessione fra le parti, cioè punti multipli della curva limite. È questo un caso particolare di un principio (di NOETHER-ENRIQUES) dimostrato per via algebrica nelle *Vorlesungen* di SEVERI (pag. 319). Di tale principio ci occuperemo diffusamente nel II volume di queste Lezioni esponendo la Memoria di SEVERI sui sistemi continui, citata alla fine del n. 161. La considerazione è superflua pel nostro scopo attuale. Volendola trascurare basterebbe sempre parlare di « curve irriducibili e senza punti multipli » laddove si parla e si parlerà di « curve prive di punti multipli » appartenenti a un sistema di curve irriducibili.

(2) Un'estensione simile è già contenuta, da un punto di vista più ampio, come caso particolare di più generali proprietà, nella citata Memoria di SEVERI sui sistemi continui. Qui l'estensione è fatta coi mezzi elementari della Nota lincea di SEVERI del 1903, ov'è sostanzialmente contenuto il risultato nella sua forma più espressiva.

(3) Il lemma è di CASTELNUOVO (« Annali di Matematica », 1897). L'Autore però dichiara che gli fu suggerito da un passo delle *Ricerche di geometria* di ENRIQUES (« Acc. Torino », 1893). Qui il lemma vien reso più significativo riferendolo a particolari C_1, C_2, purché irriducibili.

Indichiamo infatti con ε il numero delle condizioni lineari indipendenti imposte alle C dal gruppo (C_1, C_2). Le C per (C_1, C_2) formano un sistema lineare di dimensione $r - \varepsilon$, il quale sega su C, fuori di (C_1, C_2), la serie lineare residua di (C_1, C_2) rispetto alla serie completa $|(C, C_1)| = |(C_1, C_2) + (C_1, C_1)|$. Questa serie residua è la serie completa $|(C_1, C_1)|$ ed ha pertanto la dimensione $r_1 - 1 + \delta_1$. E siccome le C per C_1 dànno come residuo $|C_2|$, risulta:

$$r - \varepsilon - (r_1 - 1 + \delta_1) - 1 = r_2 , \text{ cioè } \delta_1 = r - r_1 - r_2 - \varepsilon .$$

Silmilmente, le C per (C_1, C_2) segano su C_2, fuori di (C_1, C_2), una serie contenuta totalmente nella serie completa $|(C_2, C_2)|$, cioè una serie di dimensione $r_2 - 1 + \delta_2 - \zeta$ $(\zeta \geqslant 0)$; e poiché quelle che contengono C_2 dànno per residuo $|C_1|$, viene:

$$r - \varepsilon - (r_2 - 1 + \delta_2 - \zeta) - 1 = r_1 , \text{ cioè } \delta_2 - \zeta = r - r_1 - r_2 - \varepsilon .$$

Dunque $\delta_1 = \delta_2 - \zeta$, ossia $\delta_1 \leqslant \delta_2$, secondo quanto afferma il lemma.

Come vedesi, nella dimostrazione giuoca soltanto l'ipotesi che C_1, C_2 sieno irriducibili (1).

b) Consideriamo ora il multiplo secondo un intero λ, abbastanza grande, del sistema $|A|$ delle sezioni piane di F (dotata di singolarità ordinarie): $|C_\lambda| = |\lambda A|$. A norma del n. precedente $|C_\lambda|$ è regolare, cioè non speciale e di dimensione:

$$r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 .$$

D'altro canto, in forza delle considerazioni generali del n. 161, la (4), applicata al caso attuale, tenuto conto che ora è $i = 0$, porge:

$$r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 + \theta + \tau ,$$

ove $\theta = q - \delta_\lambda$, essendo δ_λ la deficienza della serie caratteristica di $|C_\lambda|$ sopra una prefissata C_λ e τ la deficienza della serie ivi segata dalle curve canoniche (impure, eventualmente virtuali) K di F. Risulta dunque:

$$\theta + \tau = 0 . \tag{24}$$

(1) Ipotesi della quale si potrebbe del resto fare a meno, passando dalle serie lineari alle serie caratteristiche di equivalenza, il che nella presente ricerca non occorre, mentre occorre nella più vasta ricerca di SEVERI della Memoria sui sistemi continui.

multipli) un sistema lineare parziale: tuttavia essa gode, come la generica C_λ, della proprietà di esser irriducibile e priva di punti multipli. Si può trasferire la conclusione $\theta = \tau = 0$ alla generica C_λ? Qui soccorre una considerazione di continuità [1], alla quale accenniamo, senza insistervi, perché il trasferimento della conclusione alla generica C_λ risulterà tra breve dal lemma *a*).

Siccome nessuna C_λ è contenuta parzialmente in $|K|$, la dimensione della serie segata su C_λ dalle K (impure, eventualmente virtuali) è sempre la stessa (uguale a $p_g - 1$). Pertanto, se questa serie fosse parziale sulla generica C_λ, la serie completa cui essa appartiene, tendendo C_λ a $\bar{C}_\lambda$ diminuirebbe di dimensione, perché su $\bar{C}_\lambda$ la serie completa avrebbe la stessa dimensione che su C_λ ha la serie parziale. Questo è assurdo, in quanto la dimensione di un ente algebrico variabile tendente ad una posizione limite può aumentare, ma non diminuire. Dunque anche sulla generica C_λ è $\tau = 0$ epperò $\theta = 0$. Questo tuttavia non esclude a priori che possa esistere qualche particolare C_λ, priva di punti multipli, per la quale sia $\tau > 0$ e quindi $\theta < 0$, ossia $\delta_\lambda > q$. Le considerazioni ulteriori, a cui accennavamo poco fa, proveranno che la conclusione $\theta = \tau = 0$ vale per *ogni* C_λ priva di punti multipli [2].

Teniamo per ora della fase *b*) la sola conclusione che esiste qualche C_λ, priva di punti multipli, su cui $\theta = \tau = 0$, cioè per la quale $\delta_\lambda = q$.

c) Sia F una superficie priva di punti multipli in un certo spazio S_d ed A sia una sua generica sezione iperpiana. Applicando *b*) alla proiezione generica di F in un S_3, si conclude che da un certo λ in poi $|C_\lambda| = |\lambda A|$ è non speciale, regolare, e contiene qualche C_λ (irriducibile) priva di punti multipli, sulla quale la serie caratteristica ha la deficienza $\delta_\lambda = q$. Si può supporre che la proprietà sia verificata anche per $|C_{\lambda-1}|$: diciamo $\bar{C}_{\lambda-1}$ una curva di $|C_{\lambda-1}|$ (irriducibile) priva di punti multipli e per la quale $\delta_{\lambda-1} = q$. Crescendo, se occorre, λ (e $\lambda - 1$) le condizioni accennate restan soddisfatte e si può esigere inoltre che le forme d'ordine λ di S_d stacchino sopra una qualunque curva $\bar{A}$ del sistema completo $|A|$, purché (irriducibile e) *priva di punti multipli*, una serie lineare completa (non speciale) - (pag. 206).

---

[1] Approfondita con ogni dettaglio nella Memoria di SEVERI citata alla fine del n. 161.

[2] La stessa conclusione discende da più generali proprietà della Memoria di SEVERI sui sistemi continui.

Allora $|C_\lambda| = |\bar{C}_{\lambda-1} + \bar{A}|$ stacca su $\bar{A}$ una serie completa: onde, pel lemma *a*), la deficienza della serie caratteristica di $|A|$ su $\bar{A}$ non supera la deficienza della serie caratteristica di $|C_{\lambda-1}|$ su $\bar{C}_{\lambda-1}$, cioè q. Si ottiene in tal guisa il risultato parziale:

« Sopra una curva *qualunque*, priva di punti multipli (epperò irriducibile), del sistema lineare completo cui appartengon totalmente le sezioni iperpiane d'una superficie F priva di punti multipli, la deficienza della serie caratteristica non supera l'irregolarità q di F ».

d) Sia infine $|C|$ un qualunque sistema irriducibile, privo di punti base, di dimensione $\geqslant 1$, tracciato sulla superficie F, della quale fissiamo un modello proiettivo come in *c*). Le forme di ordine λ abbastanza grande di S_d staccano sopra una *qualunque* $\bar{C}$ priva di punti multipli (e irriducibile) una serie lineare completa (non speciale) e quelle che passano per $\bar{C}$ segano ulteriormente su F un sistema lineare (eventualmente parziale) privo di gruppi neutri di un numero finito o infinito di punti (cioè di gruppi o di curve presentanti una sola condizione alle curve del sistema obbligate a contenerli), perché di tale proprietà gode il sistema (non lineare) delle curve ulteriormente staccate su F dai coni che proiettano $\bar{C}$ dai singoli S_{d-3} di S_d. Ne viene che il sistema segato su F, fuori di $\bar{C}$, dalle dette forme, ha per imagine proiettiva una superficie F_1, birazionalmente equivalente ad F, e priva di punti multipli. La quale superficie F_1, se non è normale, è proiezione d'una superficie dello stesso ordine, pur essa priva di punti multipli. Insomma il sistema lineare completo $|D_\lambda|$ che contiene totalmente le ulteriori intersezioni di F colle forme di ordine λ per $\bar{C}$, ha per imagine proiettiva un altro modello di F privo di punti multipli, epperò, secondo *c*), la serie caratteristica di $|D_\lambda|$, sopra una *qualunque* $\bar{D}_\lambda$, priva di punti multipli, non supera q.

D'altronde il sistema $|C_\lambda|$, staccato su F dalle forme d'ordine abbastanza alto λ, segna su $\bar{C}$ una serie completa; e poiché $|C_\lambda| = |\bar{C} + \bar{D}_\lambda|$, a norma del lemma *a*), la deficienza della serie caratteristica di $|C|$ su $\bar{C}$ non supera la deficienza della serie caratteristica di $|D_\lambda|$ su $\bar{D}_\lambda$, epperò non supera q.

Resta così dimostrata la prima parte del teorema enunciato al principio del n.

e) La seconda parte afferma che esiste qualche sistema per cui il massimo è raggiunto, sopra ogni curva priva di punti multipli (e irriducibile). In base a *b*) questo è già stato dimostrato pel sistema $|C_\lambda|$ che contiene totalmente le sezioni d'una super-

ficie F di S_3, dotata di singolarità ordinarie, colle superficie d'ordine λ; ma limitatamente a particolari $\bar{C}_\lambda$, prive di punti multipli. Ebbene, se per una qualunque C_λ priva di punti multipli potesse essere $\tau > 0$, epperò $\theta < 0$, sarebbe, come si è detto, $\delta_\lambda > q$, mentre, secondo la conclusione stabilita in *d*), sopra ogni curva priva di punti multipli di $|C_\lambda|$ la serie caratteristica ha deficienza non superiore a q. Non può essere, per nessuna C_λ, priva di punti multipli, $\delta_\lambda > q$ e neppure $\delta_\lambda < q$, perché sarebbe $\theta > 0$, epperò, secondo la (24), $\tau < 0$, mentre τ è di sua natura un intero non negativo. Dunque è sempre, per ogni C_λ priva di punti multipli, $\delta_\lambda = q$. Conçludendo :

Il sistema lineare completo cui appartengon totalmente le sezioni di una superficie F dello spazio S_3, dotata di singolarità ordinarie, colle superficie d'ordine abbastanza alto, ha la serie caratteristica di deficienza uguale all'irregolarità q di F su ogni curva del sistema che sia priva di punti multipli sull'ente di cui F è un modello.

Naturalmente se F possedesse singolarità non ordinarie il teorema non sarebbe necessariamente vero.

Osservazione 1ª. — Il teorema dimostrato in questo numero offre un notevolissimo significato della irregolarità $q = p_g - p_a$ di una superficie, come massimo, raggiunto, della deficienza della serie caratteristica dei sistemi lineari tracciati sulla superficie. Da esso segue il corollario :

Sopra una superficie regolare ogni sistema lineare completo ha la serie caratteristica completa.

Secondo quanto risulta dalla successiva Oss. questo teorema può riferirsi ad ogni sistema lineare irriducibile, infinito, con punti base assegnati con molteplicità virtuali uguali alle effettive (pag. 221).

Poiché nelle precedenti considerazioni il genere aritmetico p_a è intervenuto soltanto attraverso la formula di postulazione, cioè sotto il proprio aspetto proiettivo, e la proprietà acquisita di massimo per q attesta a priori l'invarianza assoluta dell'irregolarità, ne risulta in definitiva *una nuova dimostrazione dell'invarianza assoluta del genere aritmetico.*

Osservazione 2ª. — *Il teorema della deficienza della serie caratteristica vale tal quale pei sistemi lineari infiniti irriducibili con punti base, distinti o infinitamente vicini, quando ognuno di questi sia assegnato con molteplicità virtuale uguale all'effettiva.* Invero, con successive trasformazioni birazionali della superficie, non introducenti punti multipli sulle superficie trasformate, si

fanno gradualmente sparire tutti i punti base, sostituendoli con curve eccezionali (pag. 221). Così in definitiva il considerato sistema si muta in un sistema irriducibile, senza punti base, e l'irregolarità della superficie resta immutata. Applicando il teorema al sistema trasformato e risalendo si arriva alla conclusione enunciata. (Ved. per maggiori dettagli in proposito il successivo n. 169).

Osservazione 3ª. — Una volta acquisito il teorema della deficienza della serie caratteristica, se ne può trarre subito, secondo quanto si è detto al n. 161, *il teorema di* RIEMANN-ROCH *espresso dalla* (5), *ma limitatamente ai sistemi lineari irriducibili, almeno* ∞^1, *privi di punti base o con punti base assegnati con molteplicità virtuali uguali alle effettive.*

Nei nn. 167 e successivi seguiremo invece una via indipendente dal risultato di CASTELNUOVO, la quale ci permetterà di giungere al teorema di RIEMANN-ROCH nelle ipotesi più generali.

167. *Il teorema di* RIEMANN-ROCH *per i sistemi virtualmente privi di punti base.* — Affrontiamo ora la questione generale di determinare la dimensione del sistema lineare completo $|C|$, virtualmente privo di punti base, irriducibile o riducibile, determinato da una curva *effettiva* C qualunque, purché priva di componenti multiple.

Considerato un modello della superficie F in S_3, dotato di singolarità ordinarie e d'ordine m, possiamo limitarci a supporre, come abbiamo chiarito al n. 163, che una superficie Φ_λ, d'ordine λ sufficientemente alto, passante per C, intersechi ulteriormente la F secondo una curva D, in guisa che per le curve C, D siano soddisfatte le condizioni sotto le quali abbiamo dimostrato il lemma del n. 163. La curva $C + D$ appartiene al sistema $|C_\lambda| = |\lambda A|$, multiplo secondo λ del sistema delle sezioni piane di F.

Siano: n, p grado e genere virtuali di C; ν, π grado e genere (virtuali = effettivi) di D; $j = [C, D]$ il numero dei punti comuni a C, D che non appartengono alla linea doppia di F (questi ultimi, dal punto di vista invariantivo, non essendo da considerarsi come intersezioni di C, D, giacché C, D stanno nell'intorno di essi, su falde diverse di F); $n_\lambda = n + \nu + 2j$, $p_\lambda = p + \pi + j - 1$ il grado e il genere (virtuali = effettivi) di $|C_\lambda|$.

La dimensione del sistema completo $|C_\lambda|$ è (n. 165):

$$(25)\quad r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 = n - p + \nu - \pi + j + p_a + 2 .$$

Se d è la dimensione della serie che il sistema completo $|C_\lambda|$ sega sulla curva D, la dimensione r del sistema completo $|C| = |C_\lambda - D|$ è data dà:

$$r = r_\lambda - d - 1 . \tag{26}$$

Tutto sta dunque a calcolare la dimensione d.

A tal fine, indichiamo con i', δ' rispett. l'indice di specialità e la deficienza della serie di cui trattasi. Poiché il suo ordine è $[C_\lambda, D] = [C + D, D] = j + \nu$, il teorema di RIEMANN-ROCH sulle curve dà:

$$d = \nu + j - \pi + i' - \delta' . \tag{27}$$

Sia i ($\geqslant 0$) *l'indice di specialità del sistema* $|C|$, cioè il numero delle curve canoniche impure linearmente indipendenti, che contengono totalmente la curva C. Come avvertimmo nel n. 161, si dovrà porre $i = 0$ ogni qualvolta sia $p_g = 0$, e *ciò perché* C *è una curva effettiva*, sicché, per $p_g = 0$, è virtuale tanto il sistema $|K|$ che il sistema $|K - C|$.

Dimostriamo che, per λ sufficientemente grande, $i' = i$.

Indicata con D' una curva aggiunta a D, i' è il numero dei gruppi indipendenti della serie differenza

$$|(D', D)| - |(C_\lambda, D)| ,$$

completata (se occorre), cioè della serie completa individuata da quella segata su D dal sistema $|D' - C_\lambda|$. Poiché $D' \equiv D + K$, $C_\lambda \equiv C + D$, si ha $D' - C_\lambda \equiv K - C$; onde si tratta in definitiva di valutare la dimensione della serie completata (se occorre), che il sistema $|K - C|$ sega su D.

Quando λ sia abbastanza alto, accadono due fatti. Primo: nessuna curva di $|K - C|$ contiene come parte D: il che è ovvio, se $|K - C|$ non è effettivo (cioè se $i = 0$); ma è anche vero per $i > 0$, perché D può divenire d'ordine comunque grande al crescere di λ. Secondo: la serie segata dal sistema $|K - C|$ su D è *completa*: il che (come abbiamo avvertito nel n. 163, Oss.) risolve simultaneamente una *questione d'esistenza*, nel senso che $|K - C|$ può esistere come sistema effettivo allora e soltanto allora che esista la serie differenza sopra definita, cioè che la serie $|(C_\lambda, D)|$ sia speciale. Stabilito questo secondo fatto, che costituisce il punto essenziale di tutta la dimostrazione del teorema di RIEMANN-ROCH, risulta senz'altro $i = i'$, come volevasi provare.

Poiché nella $r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1$ i caratteri n_λ, p_λ sono il grado e il genere effettivi della generica C_λ, volendo fare coincidere la relazione precedente con quella, $r_\lambda = n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 + \theta + \tau$, che deriva dalla considerazione della serie caratteristica di $|C_\lambda|$ su C_λ, così da poterne dedurre la (24), occorre che la C_λ su cui si fissa l'attenzione sia priva di punti multipli (e irriducibile). Una tale C_λ è p. es. quella – diciamola $\bar{C}_\lambda$ – staccata su F da una generica superficie d'ordine λ, perché i nodi che $\bar{C}_\lambda$ possiede sulla linea doppia di F non son multipli dal punto di vista della geometria sull'ente, ma coppie di punti semplici, accidentalmente coincidenti sullo speciale modello proiettivo F.

Ciò posto, cerchiamo di valutare τ sopra C_λ. Qui giuoca in modo essenziale l'osservazione geniale di SEVERI che le superficie d'ordine $m-4$ aggiunte a $\bar{C}_\lambda$, nel senso di SEVERI, dovendo contenere i nodi di $\bar{C}_\lambda$, vengon, da un certo λ in poi, ad avere colla linea doppia di F (o con ciascuna parte di essa) più intersezioni di quante non ne consenta il teorema di BÉZOUT, e la contengon perciò per intero, cioè son aggiunte ad F. E siccome, in forza del lemma del n. 163 [1], le aggiunte di SEVERI a $\bar{C}_\lambda$ segan su $\bar{C}_\lambda$, fuori dei nodi, qualunque sia il loro ordine, una serie lineare *completa*, così le aggiunte d'ordine $m-4$ ad F segano su $\bar{C}_\lambda$, per λ abbastanza alto, e fuori dei nodi di $\bar{C}_\lambda$, una serie lineare completa.

Ora, la serie segata su $\bar{C}_\lambda$ da tali aggiunte non è, dal punto di vista invariantivo, che la serie segata su $\bar{C}_\lambda$ dalle curve canoniche (impure, eventualmente virtuali) K, cioè la serie residua della serie caratteristica di $\bar{C}_\lambda$ rispetto alla serie canonica della stessa curva. Tenuto conto dell'Oss. finale del n. 163, si può affermare che la serie residua della serie caratteristica rispetto alla serie canonica di $\bar{C}_\lambda$ esiste allora e soltanto allora che sia $p_g > 0$. Ossia, se $p_g = 0$, cioè se le K non sono effettive, quella serie è non speciale.

Concludendo, per la nostra $\bar{C}_\lambda$ è $\tau = 0$ e ciò vale anche per $p_g = 0$, nel senso che allora la serie caratteristica di $\bar{C}_\lambda$ è non speciale. Dalla (24) poi si trae in conseguenza, qualunque sia p_g, che $\theta = 0$, cioè $\delta_\lambda = q$.

Un'osservazione è ancora opportuna, prima di passare ad una terza fase della dimostrazione. La curva $\bar{C}_\lambda$ è una curva particolare C_λ, perché le superficie d'ordine λ segan generalmente su F (quando la superficie possiede effettivamente punti

[1] Anzi del caso particolare di questo lemma, che SEVERI aveva già dato nella Nota lincea del 1903.

All'uopo, si osservi che le superficie d'ordine $m-4$ che passan per C e per i punti doppi di D, che son aggiunte di SEVERI alla D, contengono necessariamente la curva doppia di F, quando λ sia abbastanza alto; perché il numero dei punti doppi di D appartenenti alla linea doppia di F, cresce oltre ogni limite al crescere di λ. Ne segue che, per λ alto, le aggiunte di SEVERI a D, d'ordine $m-4$, altro non sono che aggiunte ad F passanti per C. In base al lemma del n. 163, è dunque vero che le aggiunte ad F considerate segano su D una serie completa. In particolare per $i'=0$ (n. 163, Oss.) non esistono curve effettive nel sistema $|K-C|$, cioè $i=0$.

In conclusione, è lecito sostituire nella (27) l'intero i all'intero i'; onde, tenuto conto delle (25), (26) si ottiene per la dimensione r del sistema completo $|C|$, la formula:

$$r = n - p + p_a - i + \delta' + 1 \ . \tag{28}$$

Finalmente, dato che la deficienza δ' è di sua natura $\geqslant 0$, si ha

$$r \geqq n - p + p_a - i + 1 \ . \tag{29}$$

La formula stabilita esprime *il teorema di* RIEMANN-ROCH *per un sistema lineare completo* $|C|$, *virtualmente privo di punti base, individuato da una curva* C, *irriducibile o riducibile, priva di componenti multiple.*

Nella formola (28), che precede il risultato definitivo, la deficienza δ' della serie $|(C_\lambda, D)|$ dà un significato della ***sovrabbondanza*** (n. 161) del sistema $|C|$, che però non si presenta in forma intrinsecamente legata alla curva C che definisce il sistema.

Osservazione. — In virtù della (29) e del n. 166 resta altresì provata l'affermazione del n. 161 circa il fatto che un sistema lineare irriducibile $|C|$, senza punti base (o con punti base assegnati con molteplicità virtuale uguale all'effettiva) è regolare allora e soltanto allora che sia $\tau = \theta = i = 0$.

168. *Il teorema sulla deficienza della serie segata su una curva dal suo aggiunto.* — Sulla base del teorema di RIEMANN-ROCH può stabilirsi facilmente il seguente teorema di ENRIQUES, che assegna un altro significato notevole dell'irregolarità $p_g - p_a$ di una superficie.

La deficienza della serie segata su una curva C *irriducibile, priva di punti multipli, dal suo aggiunto è inferiore o uguale alla*

irregolarità $q = p_g - p_a$ *della superficie* F *cui appartiene*; *e il massimo è di fatto raggiunto per qualche curva* C *di* F (1).

Sia $|C|$ un sistema irriducibile, privo di punti base multipli, di genere p e $|C'|$ il suo aggiunto. Poiché $|C'| = |C+K|$ è non speciale, indicando con r', n', p', rispett. dimensione, grado e genere di $|C'|$, si ha:

$$r' \geq n' - p' + p_a + 1 . \tag{30}$$

D'altronde, per la formula (41) del n. 124, è $n' - p' = p - 2$, e quindi:

$$r' \geq p + p_a - 1 .$$

Ora, se δ è la deficienza della serie segata da $|C'|$ su una C, irriducibile e priva di punti multipli del sistema, la dimensione della serie stessa, che è contenuta totalmente nella serie canonica di C (n. 101), risulta $p - 1 - \delta$. In conseguenza, la dimensione $p_g - 1$ del sistema canonico $|K|$, pensato come residuo del sistema $|C'|$ rispetto a C, viene espressa dalla:

$$p_g - 1 = r' - (p - 1 - \delta) - 1 \geq (p + p_a - 1) - (p - 1 - \delta) - 1 ;$$

donde si trae:

$$\delta \leq p_g - p_a . \tag{31}$$

Nella (31) vale il segno $=$, quando vale nella (30), com'è il caso, p. es. del sistema $|C_l|$ del n. 164, che è aggiunto ad un multiplo conveniente del sistema delle sezioni piane della superficie F, dotata di singolarità ordinarie in S_3; o del sistema $|C_\lambda|$ del n. 165, che è un multiplo abbastanza alto di questo sistema di sezioni piane. Dunque:

Il sistema aggiunto ad un multiplo abbastanza alto del sistema $|C_\lambda|$ *delle sezioni piane di una superficie* F *dotata di singolarità ordinarie in* S_3 *o priva di singolarità in un iperspazio, sega sopra una* C *irriducibile, priva di punti multipli, una serie canonica di deficienza uguale all'irregolarità di* F. *Lo stesso accade del sistema* $|C_\lambda|$ *riguardato come aggiunto d'un altro sistema irriducibile (il che è sempre possibile).*

Osservazione 1^a. — Attesa l'invarianza assoluta del genere aritmetico p_a il teorema della fine del n. 106 (pag. 212) può enunciarsi così:

(1) ENRIQUES (*Introduzione*, 1897, cit. a pag. 217) dimostra direttamente tale teorema e ne deduce l'invarianza assoluta di p_a.

Sopra una superficie F abbiasi un sistema lineare $|C|$, almeno ∞^3, irriducibile, semplice, privo di punti base e di gruppi e di curve neutre (o fondamentali): allora l'irregolarità q di F è la somma delle deficienze delle serie segate sopra una generica C dai sistemi $|C'|$, $|C+C'|$, $|2C+C'|$, ecc.

Come abbiamo accennato a pag. 212 (e come si vedrà nel successivo volume di queste Lezioni) sotto ipotesi molto generali per una curva C, l'aggiunto $|C'|$ sega su C una serie canonica di deficienza uguale all'irregolarità (PICARD-SEVERI), cosicché $|C+C'|$, $|2C+C'|$, ... segano su C serie complete (non speciali).

Osservazione 2ª. — Poiché l'essere $\delta = q$ implica che nella (30) valga il segno $=$, e d'altronde l'aggiunto $|C'|$ a C è certo non speciale, ne segue che *l'aggiunto $|C'|$ a $|C|$ è regolare allora e soltanto allora che sega sulla generica C una serie canonica di deficienza massima.*

Osservazione 3ª. — Il teorema di questo n. si estende senz'altro, tenuto conto della definizione di sistema aggiunto, ad un sistema con punti base assegnati (n. 112) e dell'Oss. 2ª del n. 166, *ad un sistema lineare irriducibile $|C|$ dotato di punti base assegnati con molteplicità virtuali uguali all'effettive.*

169. *Il teorema di* RIEMANN-ROCH *per sistemi dotati di punti base.* — Sia $|C|$ un sistema lineare della superficie F, dotato di un punto base s-plo ordinario O ($s \geqslant 1$). Indichiamo con $|\overline{C}|$ il sistema stesso virtualmente privo del punto base s-plo O; e con $|C_0|$ il sistema col punto base O assegnato con la molteplicità t ($\leqslant s$) (n. 109).

Se C, $\overline{C}$, C_0 son curve generiche dei sistemi $|C|$, $|\overline{C}|$, $|C_0|$, possiamo scrivere:

$$\overline{C} \equiv C + s\,O \quad , \quad C_0 \equiv C + (s-t)\,O \; ; \tag{32}$$

il significato di tali equivalenze risultando ben chiaro quando si pensi ad una superficie F_1, trasformata di F, sulla quale il punto O si muti in una curva eccezionale di 1ª specie O_1, tenuto conto del modo di trasformarsi di $|\overline{C}|$ e $|C_0|$, illustrato al n. 109, pag. 221.

Indichiamo con n, $\overline{n}$, n_0 e con p, $\overline{p}$, p_0 rispett. i gradi e i generi virtuali di $|C|$, $|\overline{C}|$, $|C_0|$. Ci proponiamo di calcolare $\overline{n}$, $\overline{p}$ in funzione di n, p e della molteplicità t che si assegna ad O per passare da $|\overline{C}|$ a $|C_0|$.

Dalla prima delle (32) si deduce

$$[\bar{C}, \bar{C}] = [C, C] + 2s[O, C] + s^2[O, O],$$

e quindi, poiché le C passano con s rami per O, e inoltre $[O, O] = -1$ (n. 109),

$$\bar{n} = n + 2s^2 - s^2 = n + s^2. \tag{33}$$

Si osservi che la (33) appar naturale, quando le C si considerino come limite di curve effettivamente prive del punto s-plo O, che, spostandosi, tendano a passare s volte per O.

In modo analogo, dalla seconda delle (32) si deduce:

$$[C_0, C_0] = [C, C] + 2(s-t)[O, C] + (s-t)^2[O, O],$$

donde:

$$n_0 = n + 2(s-t)s - (s-t)^2 = n + s^2 - t^2; \tag{34}$$

formula che ammette una giustificazione intuitiva al pari della (33).

Dalle (33), (34) si ricava:

$$n_0 = \bar{n} - t^2, \tag{35}$$

che dà il legame tra il grado di $|\bar{C}|$ e di $|C_0|$.

Per determinare l'analogo legame tra i generi, conviene di considerare i caratteri d'immersione delle curve C, $\bar{C}$, C_0 (n. 150). Dalla prima delle (32) si ottiene:

$$[\bar{C}, K] = [C, K] + s[O, K],$$

da cui (n. 110, pag. 224):

$$2\bar{p} - 2 - \bar{n} = 2p - 2 - n - s,$$

e quindi, in base alla (33):

$$\bar{p} = p + \frac{s(s-1)}{2}. \tag{36}$$

Anche questa formula appar naturale, riflettendo che l'acquisto di un punto s-plo abbassa di $\frac{s(s-1)}{2}$ unità il genere di una curva.

Similmente dalla seconda delle (32) si deduce

$$[C_0, K] = [C, K] + (s-t)[O, K],$$

da cui

$$p_0 = p + \frac{s(s-1)}{2} - \frac{t(t-1)}{2}; \tag{37}$$

e dalle (36), (37) si ricava infine:

$$p_0 = \bar{p} - \frac{t(t-1)}{2}, \tag{38}$$

che dà il legame tra il genere di $|\bar{C}|$ e di $|C_0|$.

Le formule stabilite si generalizzano ovviamente al caso in cui il sistema $|C|$ possieda più punti base s_i-pli O_i immediati o infinitamente vicini, da assegnarsi con molteplicità virtuali t_i ($\leqslant s_i$). Si ottengono allora le formule seguenti:

$$n_0 = \bar{n} - \Sigma_i t_i^2 \quad , \quad p_0 = \bar{p} - \Sigma_i \frac{t_i(t_i-1)}{2}. \tag{39}$$

Ciò premesso, ci proponiamo di determinare la dimensione r_0 del sistema completo $|C_0|$. Poiché l'imposizione di un punto t-plo alle curve di un sistema lineare impone *al più* $\frac{t(t+1)}{2}$ condizioni, si ha:

$$r_0 \geqslant \bar{r} - \Sigma_i \frac{t_i(t+1)}{2}, \tag{40}$$

ove $\bar{r}$ indichi la dimensione di $|\bar{C}|$.

D'altronde per il sistema $|\bar{C}|$, che è virtualmente privo di punti base, abbiamo ottenuto (n. 167):

$$\bar{r} \geqslant \bar{n} - \bar{p} + p_a - \bar{i} + 1, \tag{41}$$

essendo $\bar{i}$ l'indice di specialità di $|\bar{C}|$.

Si osservi ora che l'indice di specialità i_0 del sistema $|C_0|$ coincide con $\bar{i}$, entrambi dando il numero delle curve linearmente indipendenti del sistema completo residuo del sistema canonico impuro $|K|$ rispetto ad una curva $\bar{C}$ o ad una C_0; in quanto tal residuo è lo stesso perché il sistema $|K|$ è per la sua stessa definizione virtualmente privo di punti base.

Dalle (40), (41), tenuto conto delle (39), risulta così:

$$r_0 \geqslant n_0 - p_0 + p_a - i_0 + 1.$$

Si conclude che, *anche per i sistemi con punti base assegnati (con molteplicità virtuali minori o uguali alle effettive) il teorema di* Riemann-Roch *conserva la forma ordinaria.*

Osservazione. — È opportuno di porre in esplicito rilievo che quando si considera un sistema lineare con punti base assegnati *la sovrabbondanza non è necessariamente quella che spetta al sistema*

stesso virtualmente privo dei punti base; e ciò perché, come abbiamo implicitamente avvertito scrivendo la (40), le condizioni lineari, che traducono la imposizione dei punti base, possono esser tra loro dipendenti.

È p. es. evidente che sul piano o sopra una superficie razionale non esistono sistemi sovrabbondanti virtualmente privi di punti base; mentre la sovrabbondanza può presentarsi — e si presenta di fatto — per taluni sistemi dotati di punti base. Gli esempi in proposito sono elementari.

170. *Il teorema di* Riemann-Roch *per i sistemi lineari virtuali.* — Assegnata sopra una superficie F una curva *virtuale* $C = C_1 - C_2$ (C_1, C_2 curve effettive), nel sistema lineare virtuale $|C| = |C_1 - C_2|$ possono esistere curve *effettive*. Nasce allora il problema di determinare la dimensione della totalità delle curve effettive di $|C_1 - C_2|$.

Posto $n_1 = [C_1, C_1]$, $n_2 = [C_2, C_2]$, $j = [C_1, C_2]$, ricordiamo che il grado virtuale n di $C_1 - C_2$, si calcola con la formula

$$n = n_1 + n_2 - 2j , \tag{42}$$

che si ottiene semplicemente dallo sviluppo formale del simbolo $[C_1 - C_2, C_1 - C_2]$.

Indicati inoltre con p_1, p_2 i generi virtuali di C_1, C_2, il genere virtuale p di C si ricava dalla formula:

$$p = p_1 - p_2 + n_2 - j + 1 , \tag{43}$$

la quale deducesi applicando la (21) del n. 107 alla curva C_1, pensata come somma di C_2 e di C, e trattando quest'ultima curva come se fosse effettiva.

Infine, l'*indice di specialità* i della curva $C = C_1 - C_2$, si definisce come il *numero delle curve effettive* linearmente indipendenti che appartengono al sistema $|K - C| = |K + C_2 - C_1|$. Sarà $i = 0$, quando manchino curve effettive rispondenti al simbolo $K + C_2 - C_1$.

Chiarito così il significato dei caratteri n, p, i legati alla curva virtuale C, ci proponiamo di sviluppare in relazione ad essa le considerazioni medesime già svolte al n. 167 pel caso di una curva effettiva, onde giungere a rispondere alla questione posta al principio del n.

Anzitutto occorre dar senso all'operazione di condurre una superficie d'ordine λ per la curva $C = C_1 - C_2$.

Assunta arbitrariamente una superficie Φ^h, d'ordine h, passante per C_2, che intersechi ulteriormente la F nella $\overline{C}_2$, esista una superficie $\Phi^{\lambda+h}$, d'ordine $\lambda + h$, passante per $C_1 + \overline{C}_2$, che intersechi ulteriormente la F nella curva D. Se si indica con Ψ^λ la superficie virtuale, d'ordine λ, differenza di $\Phi^{\lambda+h}$ e Φ^h, risulta allora:

$$(44)\quad (\Psi^\lambda, F) = (\Phi^{\lambda+h}, F) - (\Phi^h, F) = (C_1 + \overline{C}_2 + D) - (C_2 + \overline{C}_2) = \\ = (C_1 - C_2) + D;$$

onde è naturale di dire che «la superficie Ψ^λ passa per la curva $C = C_1 - C_2$, ed interseca ulteriormente la F nella curva D».

Si noti che, se la costruzione è fatta in modo generico, la curva D ha soltanto nodi in punti della linea doppia di F.

In particolare, una superficie d'ordine λ aggiunta ad F, che passi per $C = C_1 - C_2$, sarà una $\Psi^\lambda = \Phi^{\lambda+h} - \Phi^h$, essendo le superficie Φ definite come sopra, con la condizione ulteriore che la prima d'esse (e non la seconda) passi per la curva doppia di F.

Ciò premesso, osserviamo i seguenti tre fatti essenziali.

1) Le curve effettive del sistema $|K - C|$ (che col loro numero dànno, come si è detto, la specialità i di C) son segate su F, fuori della linea doppia, dalle aggiunte ad F d'ordine $m - 4$, $\Psi^{m-4} = \Phi^{m-4+h} - \Phi^h$, passanti per la curva virtuale C.

Invero, sia E una curva effettiva di $|K - C|$. Fissata ad arbitrio una Φ^h per C_2, la quale seghi ulteriormente F in $\overline{C}_2$, nel sistema lineare completo $|K + C_2 + \overline{C}_2|$ che è segato (n. 105) dal sistema delle aggiunte effettive Φ^{m-4+h}, è contenuta la curva $E + C_1 + \overline{C}_2$ $(\equiv K - C + C_1 + \overline{C}_2 \equiv K + C_2 + \overline{C}_2)$; quindi *esiste* un'aggiunta Φ^{m-4+h} effettiva, che passa per $E + C_1 + \overline{C}_2$. Dalla (44), scritta per $\lambda = m - 4$, si ha allora che l'aggiunta virtuale $\Psi^{m-4} = \Phi^{m-4+h} - \Phi^h$ sega su F, fuori della linea doppia, la curva $(C_1 - C_2) + E$.

Dal ragionamento stesso segue che la totalità delle curve effettive E può ottenersi come intersezione, fuori della linea doppia di F e di $C_1 + \overline{C}_2$, della totalità delle aggiunte ad F d'ordine $m - 4 + h$, che passano per $C_1 + \overline{C}_2$.

2) Sulla D, ulteriore intersezione di F con una superficie virtuale Ψ^λ passante per C, si consideri la serie segata dal sistema $|C_\lambda|$, intersezione di F col sistema delle superficie Ψ^λ. Allora, la serie residua della $|(C_\lambda, D)|$ rispetto alla serie canonica di D, è segata su D (a priori virtualmente) dalle curve del sistema $|K - C|$.

Ciò segue con l'identico ragionamento, esposto a pag. 387, pel caso in cui C è effettiva.

3) *Quando* λ *sia abbastanza alto, le aggiunte virtuali ad* F, *d'ordine* $m-4$, *passanti per* C (*o, ciò che è lo stesso, le aggiunte effettive d'ordine* $m-4+h$ *passanti per* $C_1+\overline{C_2}$), *segano su* D, *fuori dei punti fissi, una serie lineare effettiva completa.*

Le superficie d'ordine $m-4+h$, che passano per i punti doppi di D e per la curva $C_1+\overline{C_2}$ (ove $\overline{C_2}$ è l'ulteriore intersezione di F con una superficie d'ordine h condotta per C_2), sono aggiunte di Severi alla D, in quanto $C_1+\overline{C_2}$ è l'ulteriore intersezione con F di una superficie d'ordine $\lambda+h$ che passi per D; e perciò, in base al lemma del n. 163, segano su D, fuori dei punti fissi, una serie completa.

Ora, se λ è abbastanza alto, le superficie in discorso vengono a contenere la linea doppia di F, come segue da una considerazione più volte sviluppata (cfr. p. es. pag. 388); e quindi divengono aggiunte ad F. Da ciò la conclusione.

I punti 1), 2), 3) così stabiliti permettono di estendere passo per passo al caso della curva C virtuale, la dimostrazione svolta al n. 167 nel caso della C effettiva.

Si perviene in tal guisa al teorema di Riemann-Roch per una curva virtuale:

Se la curva virtuale $C=C_1-C_2$ *ha grado* n, *genere* p, *indice di specialità* i, *la dimensione* r *del sistema lineare effettivo completo* $|C|$ *soddisfa alla disuguaglianza*:

$$r \geqslant n-p+p_a-i+1 \ .$$

Il teorema dimostrato offre immediatamente *un notevole criterio numerativo sufficiente per riconoscere quando una curva virtuale* C_1-C_2 *sia effettiva* (cioè appartenga ad un sistema lineare di curve effettive). Basta invero che risulti:

$$n-p+p_a-i+1 \geqslant 0 \ . \tag{45}$$

Si può dire dunque: *La* (45) *è condizione sufficiente affinché sia possibile, nel campo delle curve effettive, la sottrazione* C_1-C_2 [1].

Tenuto conto delle (42), (43), il risultato può enunciarsi anche nella forma:

[1] A questo criterio numerativo sufficiente Severi ha aggiunto più tardi una condizione geometrica necessaria e sufficiente perché esista una curva effettiva equivalente a C_1-C_2 (« Atti Istituto Veneto », 1909). La vedremo nel successivo volume.

Se sopra una superficie F, di genere aritmetico p_a, si hanno le curve C_1, C_2, di gradi n_1, n_2 e di generi p_1, p_2, indicando con j il numero delle intersezioni (C_1, C_2), e con i $(\geqslant 0)$ il numero delle curve effettive indipendenti del sistema lineare completo $|K + C_2 - C_1|$, essendo K una curva canonica impura di F, la disuguaglianza:

$$n_1 - j \geqslant p_1 - p_2 + i - p_a ,$$

dà una condizione sufficiente per l'esistenza del sistema effettivo $|C_1 - C_2|$.

Osservazione 1ª. — È opportuno avvertire che *curve virtuali speciali* (*non equivalenti a curve effettive*) *esistono anche sopra le superficie di genere geometrico $p_g = 0$.*

Sia infatti $|D|$ un sistema generale sopra una qualunque superficie F, *anche di genere* $p_g = 0$, e $|D'|$ il suo aggiunto. Si determini su F una curva effettiva C_2 (p. es. un multiplo abbastanza alto delle sezioni iperpiane) tale che il sistema $|C_2 + D'|$ contenga parzialmente $C_1 + D$ e il sistema $|C_2|$ contenga parzialmente C_1, ove C_1 è una curva effettiva fissata a piacere su F. Allora $|C_2 + D' - D| = |C_2 + K|$ contiene parzialmente C_1, cioè il sistema $|K + C_2 - C_1| = |K - C|$, con $C = C_1 - C_2$, è effettivo. La C poi non equivale ad alcuna curva effettiva, perché C_1 è contenuta parzialmente in $|C_2|$.

Osservazione 2ª. — La parte essenziale del teorema di Riemann-Roch, relativo alle curve virtuali, è quella che concerne le curve virtuali *non speciali*. In altri termini: per le curve virtuali d'indice di specialità $i > 0$ il teorema deducesi, come ovvio corollario, dal teorema relativo alle curve effettive.

Pongasi invero $K - C \equiv D$ e si chiamino ν, π il grado e il genere virtuali di D. Da $K \equiv C + D$, designati con ω', ω il grado e il genere virtuali di K, deducesi:

$$\omega' = n + \nu + 2\{[K, C] - [C, C]\},$$
$$\omega = p + \pi + [K, C] - [C, C] - 1,$$

donde, tenuto conto che:

$$[K, C] - [C, C] = 2p - 2 - 2n$$

e che (pag. 244) $\omega' = \omega - 1$, segue: $n - p = \nu - \pi$.

Ora, la dimensione del sistema effettivo $|D|$ è $i - 1 \geqslant 0$ e, se C non equivale ad una curva effettiva, la curva D è non speciale, perché $K - D \equiv K - (K - C) \equiv C$ non è effettiva. Il

teorema di RIEMANN-ROCH per le curve effettive, applicato al sistema $|D|$, porge:

$$i - 1 \geqslant \nu - \pi + p_a + 1 ,$$

ossia, essendo $\nu - \pi = n - p$:

$$n - p + p_a - i + 1 \leqslant -1 ,$$

la quale dimostra il teorema di RIEMANN-ROCH pel sistema virtuale $|C|$ di dimensione $r = -1$.

Osservazione 3ª. — La relazione $r = n - p + p_a + 1 - i + \sigma$ ($\sigma \geqslant 0$), esprimente il teorema di RIEMANN-ROCH per una C virtuale (in particolare effettiva), risoluta rispetto ad $i - 1$, tenuto conto della relazione $n - p = \nu - \pi$ tra i caratteri di C e di $K - C$, esprime pure il teorema di RIEMANN-ROCH per la curva virtuale (o effettiva) $K - C$. Perciò *i sistemi, effettivi o virtuali, virtualmente privi di punti base,* $|C|$, $|K - C|$, *mutuamente residui rispetto al sistema canonico impuro* K *(effettivo o virtuale), hanno la stessa sovrabbondanza.*

171. *Il teorema* di RIEMANN-ROCH *per i sistemi individuati da curve con componenti multiple.* — Esporremo due metodi mediante i quali si può pervenire in tal caso al teorema. Il primo metodo è concettualmente lo stesso di quello sviluppato nell'ipotesi che la curva C, individuante sulla superficie F il sistema $|C|$, sia priva di componenti multiple; onde ci limitiamo ad indicare quali sono i complementi occorrenti perché quel procedimento si adatti al caso di una curva C dotata di componenti multiple. E poiché il procedimento stesso è basato essenzialmente sui lemmi dei nn. 162, 163, bisogna cominciare col riferirsi a questi lemmi.

Sia Γ, in modo generico, una componente s-pla (irriducibile) di C. Anzitutto si può (come al n. 163) supporre che ogni componente di C incontri semplicemente la linea doppia della superficie F in punti generici P, sopra una delle due falde di F in P; sicché ogni P sia origine di un ramo genericamente s-plo per C.

Una Φ d'ordine l abbastanza grande «passante» per C, il che, con riferimento a Γ, significa che Φ ha con F lungo Γ un contatto s-plo, sega ulteriormente F in una curva D passante per ogni P con certi rami, anche non lineari, taluni dei quali posson essere situati sulla falda di F traversata da C (cioè da Γ) e gli altri sull'altra falda. Dal punto di vista delle singolarità

infinitamente vicine la singolarità di D in P sarà costituita dal punto multiplo P, a cui potranno essere infinitamente vicini altri punti multipli — li chiameremo P' — sopra le falde attraversate da D. Denoteremo in modo generico con δ le molteplicità dei P e con δ' le molteplicità dei P' per D. È essenziale osservare che, essendo D variabile con Φ in un sistema lineare (per un classico teorema di BERTINI esteso alle curve d'una superficie e più volte citato) i punti P' saranno fissi al variare di Φ e in corrispondenza alla generica Φ le molteplicità di D in P e nei P', come le posizioni dei punti stessi, saranno indipendenti da Φ.

Si tratta di dimostrare il lemma del n. 163, ossia che il sistema delle Ψ d'ordine h, arbitrario, passanti per C, *nel senso espresso*, e pei nodi di D diversi dai P, sega sulla D (che è irriducibile), fuori dei P, P' e dei nodi, una serie lineare completa. Il ragionamento esposto nel n. 163 è senz'altro valido. Però a un certo momento della dimostrazione c'è da applicare il lemma del n. 162, che pertanto occorre adattare alle attuali più esigenti ipotesi. Bisogna dunque provare che le superficie di un dato ordine h passanti, nel senso espresso, per l'intersezione completa di F, Φ (che nel caso nostro è $C + D$), segano sopra un piano generico α un sistema lineare completo, cioè il sistema delle curve passanti per ogni punto immediato del gruppo (Γ, α) e simili, avendo colla curva (F, α), in quel punto, molteplicità d'intersezione s. Vale lo stesso ragionamento del n. 162, purché ci si appoggi, anziché al teorema $Af + B\varphi$ relativo al caso semplice, al teorema $Af + B_\varphi$ concernente due curve $f = 0$, $\varphi = 0$ con intersezioni infinitamente vicine [1].

In un altro momento della dimostrazione del lemma del n. 163 occorre tener conto delle nuove ipotesi: quando cioè si applica il teorema delle aggiunte (nel senso di CASTELNUOVO) ad una curva sghemba. Infatti allora le Ψ d'ordine h passanti per C e pei nodi di D, hanno con D, in ciascuno dei P e P', un'intersezione multipla. Una Ψ generica sega invero F, fuori di C, in una curva N, che passa per P, P' colle stesse molteplicità con cui vi passa D. Ed è chiaro (atteso il significato geometrico della molteplicità d'intersezione) che la molteplicità d'intersezione di N con ciascuno dei rami di D per P è la stessa della molteplicità d'intersezione di N con ciascuno dei rami predetti, considerati sopra F; e che quest'ultima è la medesima, cui dànno

[1] Ved. SEVERI, *Trattato di G. a.*, cit., pag. 339.

luogo, nel punto proiezione di P, le proiezioni di N, D sopra un piano, da un punto generico dello spazio; e ciò perché ogni falda di F uscente da P si proietta biunivocamente. Se la Ψ si particolarizza (p. es. si spezza in una Ψ d'ordine $h' < h$ ed in una superficie qualunque d'ordine $h - h'$) la detta molteplicità di intersezione con ciascun ramo di D può crescere, non diminuire.

Ma è ben noto che il teorema della completezza della serie staccata su una curva piana dalle aggiunte d'un determinato ordine, vale immutato anche se in ognuno dei punti δ-pli immediati, o soltanto in taluni di essi, s'impone alle aggiunte di avere con ciascuno dei rami uscenti da quel punto la stessa molteplicità d'intersezione che presenta col ramo stesso una curva avente nell'intorno del punto le medesime molteplicità della curva data; e siccome questo fatto è il fondamento della dimostrazione di CASTELNUOVO (relativa alle aggiunte ad una curva sghemba, n. 104) si conclude che, se alle aggiunte a D, nel senso di CASTELNUOVO, s'impone di passare per P, avendo con ciascuno dei rami di D molteplicità d'intersezione uguale a quella che ha con essi una superficie d'ordine abbastanza alto passante per C, il teorema della completezza della serie continua a valere. Tutto ciò garantisce la piena riferibilità della dimostrazione del lemma del n. 163 al caso attuale e quindi la maggior portata del lemma.

Rimane da esaminare sotto la nuova luce il ragionamento conclusivo del n. 167. Qui c'è un solo momento in cui la presenza dei punti multipli P, P' della D si ripercuote sull'argomentazione; ed è quando occorre di sapere che le aggiunte di ordine $m - 4$ ad F passanti per C (nel senso espresso) segano su D un gruppo residuo d'un gruppo caratteristico di D, rispetto alla serie canonica effettiva $| M(D) |$ di D. Nel caso attuale, siccome l'aggiunto $| D' |$ alla D virtualmente priva dei punti multipli P, P' (i nodi di D non contano, perché non son punti multipli della D, considerata *sopra* F), sega su D gruppi equivalenti ad $M(D) + \Sigma(\delta - 1)P + \Sigma(\delta' - 1)P'$, ove i sommatori son estesi a tutti i P, P' (n. 112), vuol dire che un'aggiunta d'ordine $m - 4$ per C sega su D un gruppo residuo della serie caratteristica della D, virtualmente priva di punti multipli, rispetto alla serie canonica della stessa curva, che è appunto una serie lineare neutra (n. 94), individuata dal gruppo $M(D) + \Sigma(\delta - 1)P + \Sigma(\delta' - 1)P'$. Ma siccome il teorema di RIEMANN-ROCH sopra una curva vale anche per le serie lineari neutre (n. 94), le argomentazioni si trasportano tutte al caso della C dotata di componenti multiple e si conclude colla desiderata estensione.

172. Indichiamo ora l'altro procedimento mediante cui può conseguirsi la stessa estensione. Esso si basa sull'acquisito teorema di RIEMANN-ROCH per una curva priva di parti multiple.

Cominciamo a stabilire che, se C è una curva irriducibile, con punti multipli qualsiansi, ma virtualmente inesistenti, tracciata su F, il sistema lineare $|C+\lambda A|$ (A sezione piana di F) è certo irriducibile per λ abbastanza grande. Designati con n, p i caratteri virtuali di C e con μ il suo ordine, il grado e il genere virtuali di $|C+\lambda A|$ risultano espressi da $n+n_\lambda+2\lambda\mu$, $p+p_\lambda+\lambda\mu-1$, ove n_λ, p_λ sieno i caratteri virtuali di $|\lambda A|$. Pertanto il teorema di RIEMANN-ROCH per le curve prive di componenti multiple porge per la dimensione R_λ di $|C+\lambda A|$ la disuguaglianza $R_\lambda \geqslant n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 + (n-p+\lambda\mu+1)$, mentre (n. 165) la dimensione di $|\lambda A|$. per λ abbastanza grande è $n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1$.

Siccome $n-p+\lambda\mu+1$, per λ abbastanza grande, è certo positivo, ne segue che $|C+\lambda A|$ non può avere la parte fissa C; e poiché le curve $C+\lambda A$, avendo a due a due intersezioni variabili, non son composte colle curve d'un fascio, si deduce l'asserto. Ma se è irriducibile $|C+\lambda A|$, risultano irriducibili (per lo stesso teorema ora applicato sui casi di riducibilità d'un sistema lineare) i successivi multipli di $|C+\lambda A|$, cioè ogni sistema del tipo $|kC+k\lambda A|$, con k intero arbitrario. E se è irriducibile $|kC+k\lambda A|$, lo è pure, sempre per la medesima ragione, il sistema $|kC+\lambda' A|$ con $\lambda' \geqslant k\lambda$.

Supponiamo ora che C sia riducibile e precisamente che sia $C = s_1\Gamma_1 + \ldots + s_t\Gamma_t$, colle Γ_i irriducibili e cogl'interi $s_i \geqslant 1$. Esisterà un intero λ_i tale che per $\lambda \geqslant \lambda_i$ sarà irriducibile il sistema $|s_i\Gamma_i+\lambda A|$, e però il sistema $|\Sigma s_i\Gamma_i+\lambda A| = |C+\lambda A|$ risulterà irriducibile per $\lambda \geqslant \Sigma\lambda_i$; che è quanto volevamo, in via preliminare, stabilire (1).

Determiniamo λ così grande che sia soddisfatta la condizione precedente dell'irriducibilità di $|C+C_\lambda|$ ($C_\lambda \equiv \lambda A$) e inoltre, detta K una curva canonica impura di F, risulti per ogni i:

(1) L'argomentazione addotta a pag. 272 delle *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* di ENRIQUES-CAMPEDELLI (Padova, Cedam, 1932), che è quella sopra usata per una C irriducibile, non vale da sola per una curva riducibile (caso a cui gli Autori si riferiscono), perché il sistema $|C+\lambda A|$, pur avendo dimensione maggiore della dimensione di $|\lambda A|$, potrebbe contenere come parte fissa qualche componente di C.

$$[\Gamma_i , C_\lambda] > [\Gamma_i , K] \ , \ [\Gamma_i , C_2] > [\Gamma_i , K] - (s_i - 1)\,[\Gamma_i , \Gamma_i]\ (^1).$$

È allora possibile di trovare un estremo superiore della dimensione d della serie segata su una generica C_λ dal sistema $|D| = |C + C_\lambda|$, il quale ha (colle solite notazioni) la dimensione $R_\lambda \geqslant n_\lambda - p_\lambda + p_a + 1 + (n - p + \lambda\mu + 1)$. Invero, se una K passa pel gruppo (C, C_λ) (2), essa incontra Γ_i in più punti di quanto non possa contenerne una K non possedente Γ_i come parte; epperò contiene Γ_i. Qualora K contenga semplicemente Γ_i, la curva $K_{i1} = K - \Gamma_i$ dovrà passare pel gruppo (Γ_i , C_λ) in guisa da avere con C_λ in quel punto, se $s_i > 1$, molteplicità d'intersezione $s_i - 1$. Ma siccome

$$[\Gamma_i , K] = [\Gamma_i , K_{i1}] + [\Gamma_i , \Gamma_i] ,$$

risulta, anche per $[\Gamma_i , \Gamma_i] < 0$, $[\Gamma_i , C_\lambda] > [\Gamma_i , K_{i1}]$ e K_{i1} contiene come parte Γ_i. La curva residua $K_{i2} = K_{i1} - \Gamma_i = K - 2\,\Gamma_i$ deve passare per ogni punto del gruppo (Γ_i , C_λ) in guisa da avere ivi con C_λ, se $s_i > 2$, molteplicità d'intersezione $s_i - 2$. E siccome $[\Gamma_i, K] = [\Gamma_i, K_{i2}] + 2\,[\Gamma_i , \Gamma_i]$, risulta $[\Gamma_i , C_\lambda] > [\Gamma_i , K_{i2}]$ e K_{i2} contiene come parte Γ_i. Così proseguendo, si conclude che una K passante pel gruppo (C, C_λ) contiene la curva $s_i \Gamma_i$ $(i = 1, ..., t)$, cioè l'intera curva C.

Ora, essendo $(D , C_\lambda) \equiv (C, C_\lambda) + (C_\lambda , C_\lambda)$, se (D, C_λ) è speciale, siccome su C_λ (pel lemma del n. 162) le curve K segano la serie lineare completa residua di (C_λ , C_λ) rispetto alla serie canonica di C_λ (non esistono, se (C , C_λ) è non speciale), così l'indice di specialità di (D, C_λ) uguaglia il numero delle curve K indipendenti, che passano pel gruppo (C, C_λ). Queste contengono alla loro volta C; pertanto l'indice di specialità di (D , C_λ) è uguale all'indice di specialità i di C. La dimensione d della serie segata da $|D|$ su C_λ soddisfa dunque alla $d \leqslant n_\lambda + \lambda\mu - p_\lambda + i$; epperò la dimensione r di C, espressa da $r = R_\lambda - d - 1$, soddisfa alla:

$$r \geqslant n - p + p_a - i + 1 .$$

Il teorema di RIEMANN-ROCH *sulle superficie è così esteso alle curve con componenti multiple.*

---

(1) Cioè $[\Gamma i , C_\lambda]$ maggiore del più grande dei numeri $[\Gamma i, K], [\Gamma i, K] - (si - 1)\,[\Gamma i, \Gamma i]$, ch'è il primo dei due se $[\Gamma i, \Gamma i] > 0$.

(2) Il che significa: se passa per ogni punto di (C, C_λ) avendo ivi con C_λ la stessa molteplicità d'intersezione che C ha con C_λ in quel punto.

173. *Caratterizzazione delle curve eccezionali di I^a specie.* — Nel n. 109 (pag. 222) abbiamo osservato che, sopra una superficie F, una curva eccezionale di 1ª specie E, nata da una trasformazione birazionale che abbia mutato in E l'intorno d'un punto semplice della superficie iniziale, ha il genere (virtuale = effettivo) zero e il grado virtuale -1. E abbiamo anche avvertito fin da allora, riservandoci di dimostrarlo più tardi, che tali valori del genere e del grado virtuali d'una curva E di F la caratterizzano come curva eccezionale di 1ª specie.

Possiamo ora dimostrare questa notevole proprietà. Ci limitiamo a considerar il caso in cui E è una curva *irriducibile* di grado virtuale -1 e di genere virtuale 0, non escludendo a priori che E possa aver punti multipli. Risulterà a posteriori, dall'ipotesi, che E è priva di punti multipli.

Assumiamo su F un sistema lineare $|C|$ irriducibile, senza punti base, regolare, almeno ∞^3, privo di gruppi neutri e di curve fondamentali e quindi semplice, le cui C seghino E in $j = [C, E] > 0$ punti. Possiamo p. es. assumere per $|C|$ un multiplo abbastanza elevato del sistema delle sezioni iperpiane di F, supposta priva di singolarità nello spazio cui appartiene.

Consideriamo il sistema $|C_1| = |C + E|$ di grado virtuale $n + 2j - 1$ e di genere virtuale $p + j - 1$, ove n, p son grado e genere (virtuali=effettivi) di $|C|$. La dimensione normale di $|C_1|$ vale:

$$(n + 2j - 1) - (p + j - 1) + p_a + 1 = (n - p + p_a + 1) + j ,$$

e ciò perché $|C_1|$ è non speciale, come $|C|$. Il sistema $|C_1|$ ha dunque la dimensione effettiva $r_1 \geqslant r + j$, ove r è la dimensione del sistema regolare $|C|$. Questo prova intanto che $|C_1|$ è irriducibile, perché, in caso contrario, la sua curva generica non potrebbe che spezzarsi in E e nella C variabile e sarebbe $r = r_1$, contrariamente all'ipotesi $j > 0$.

Una generica C_1 sega E in $[C_1, E] = [C, E] + [E, E] = j - 1$ punti, onde E è fondamentale per $|C_1|$, se $j = 1$ (epperò in tal caso $r_1 = r + 1$); e, se $j > 1$, per $j - 1$ punti generici di E passano almeno $\infty^{r_1 - j + 1}$ curve C_1, le quali non contengono tutte come parte E, perché se no il loro sistema si ridurrebbe ad $E + |C|$ ed avrebbe la dimensione r, mentre $r_1 - j + 1 > r$. Ne deriva che $|C_1|$ sega su E la g^{j-1}_{j-1} completa dei gruppi di $j - 1$ punti di E, epperò che questa curva presenta j condizioni alle C che debbon contenerla; sicché $r_1 = r + j$ e $|C_1|$ risulta nel fatto regolare come $|C|$. Da ciò si trae intanto che $|C_1|$ non ha punti

base. E invero punti base di $|C_1|$ non posson esistere fuori di E, perché $|C|$ è privo di punti base; né posson esistere su E, altrimenti per $j-1$ punti generici di E non passerebbe alcuna C_1, non contenente come parte E.

Inoltre $|C_1|$ è di dimensione $\geqslant 3+j$ ed è privo di gruppi neutri e di curve fondamentali, salvo eventualmente E (ed è quindi semplice). Difatti, se P, Q son punti di F, fuori di E, è sempre possibile costruire una C_1 per P e non per Q, mediante una C per P e non per Q, cui si aggiunga E. Se poi P giace su E e Q ne è fuori, non è possibile che tutte le C_1 per P passino per Q, perché fra le C_1 per P vi son quelle spezzate in $C+E$ e queste non passan tutte per Q; e, viceversa, non è possibile che tutte le C_1 per Q passino per P, perché si cadrebbe nel caso precedente.

Per ciò che concerne i gruppi di punti di E, bisogna distinguere il caso $j=1$ dal caso $j>1$. Nel primo caso, come si è già detto, E è fondamentale per $|C_1|$; nel secondo caso su E non esiste alcun gruppo neutro per $|C_1|$, perché la serie g_{j-1}^{j-1} segata da $|C_1|$ su E è priva di gruppi neutri. Insomma, se $j>1$, il sistema $|C_1|$ soddisfa a tutte le condizioni verificate dal sistema iniziale $|C|$.

Quando $j=1$, siccome il sistema $|C|=|C_1-E|$ ha il grado n inferiore di un'unità al grado di $|C_1|$ e d'altronde l'immagine proiettiva di $|C_1|$ è una superficie F_1, birazionalmente equivalente a F, che non ha punti multipli provenienti da punti (semplici) di F esterni ad E, così F_1 risulta priva del tutto di punti multipli, in quanto le sezioni iperpiane passanti pel punto omologo della curva fondamentale E, segano su F_1, che è di ordine $n+1$, un sistema di grado n (astrazion fatta da quel punto fisso). Pertanto E è eccezionale di 1ª specie ed è priva di punti multipli, perché una C variabile la sega in un sol punto e non può dunque aversi mai in un punto del gruppo (C, E) molteplicità d'intersezione >1.

Quando $j>1$, si considererà il sistema $|C_2|=|C_1+E|$ e a questo potrà applicarsi tutto quanto si è dimostrato per $|C_1|$, tenuto conto che le C_1 segano E in $j-1$ punti e quindi le C_2 in $j-2$ punti. Si concluderà così, se $j=2$, che l'imagine proiettiva di $|C_2|$ è una superficie F_2, priva di punti multipli in cui la curva E di F si è mutata in un punto ed E è priva di punti multipli, perché le C_1 la segano in $j-1=1$ punto. Se $j>2$ si considererà il sistema $|C_3|=|C_2+E|$, e così proseguendo finché si arrivi ad un sistema $|C_j|=|C_{j-1}+E|=|C+jE|$, rispetto a cui E è fondamentale e la cui imagine proiettiva è una superficie

senza punti multipli. Così E risulta eccezionale di 1ª specie ed è priva di punti multipli, perché le C_{j-1} la tagliano in un punto. La conclusione è che:

Sopra una superficie F una curva irriducibile E di grado virtuale -1 e di genere virtuale 0, è necessariamente priva di punti multipli ed è eccezionale di 1ª specie.

Il teorema di questo n. è dovuto a CASTELNUOVO-ENRIQUES («Ann. di Mat.», 1900); ma non se ne era forse data altrove una dimostrazione così circostanziata, come quella sopra esposta. BARBER-ZARISKI («Am. Journ. Math.», 1935), DU VAL («ibidem», 1936), FRANCHETTA («Boll. U. M. I.», 1940) hanno considerato il caso d'una curva di grado virtuale -1 e di genere virtuale 0, comunque riducibile. La trattazione di questo caso più generale può senza dubbio semplificarsi colla teoria delle serie d'equivalenza sulle curve riducibili.

COMPLEMENTI ED ERRATA

Riuniamo qui alcune brevi aggiunte o correzioni che si rendono qua e là opportune o necessarie.

1) *Pag.* 8. Al principio del n. 7 è opportuno specificare che le V_k, W_{r-k} di cui si parla son prive di parti multiple.

2) *Pag.* 10, terz'ultimo capoverso. È sottinteso che la sottoclasse per mezzo della quale s'opera una scelta delle varietà zero, è chiusa rispetto alle operazioni di somma e di sottrazione.

3) *Pag.* 12. Nel fissare una faccia positiva di ogni V_k della M_r si sottintende di trasportar tutto dal campo complesso al campo reale, riferendosi, come è detto al principio della pagina, ad una riemanniana di M_r. Così un angolo r-edro di tangenti in un punto di M_r s'intende orientato in quanto sia orientato l'angolo $2r$-edro tangente nel punto corrispondente alla riemanniana di M_r. Si ricordi pure che la proprietà (di LEFSCHETZ) invocata verso la fine della pagina, è compiutamente dimostrata nelle «Conferenze» di SEVERI citate a pie' di pagina.

4) *Pag.* 28. La dimostrazione di BORDIGA, cui si allude nella nota a pie' di pagina, come ha osservato MARTINELLI, non è esatta. Una completa dimostrazione (data da SEVERI) trovasi nei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », (Roma, Studium Urbis), serie V, vol. 2, fasc. 1, (1941), pag. 111, n. 53.

5) *Pag.* 35, rigo 10 dall'alto. Le frasi relative ai gradi di libertà si devon riferire ai punti dei gruppi delle serie considerate e non ai gruppi.

6) *Pag.* 54, rigo 16 dal basso : « V_k » invece di « V^k ».

7) *Pag.* 66, rigo 10 dall'alto : va soppressa la frase « come si è già detto nell'introduzione ».

8) *Pag.* 88, rigo 16 dal basso : « la » invece di « a ».

9) *Pag.* 118, rigo 9 dal basso : « di » invece di « d ».

10) *Pag.* 126. Il ragionamento del secondo capoverso della pagina è applicabile anche ad un gruppo generico della serie di equivalenza subordinata da g_n^r sopra una qualunque componente

riducibile di C, allorché esiste qualche forma di Σ che contenga tutta questa componente.

11) *Pag.* 179. Nel secondo membro della relazione (12) deve porsi « p_s » invece di « p ».

12) *Pag.* 186. Più ampi sviluppi e precisazioni sulle serie lineari neutre trovansi nella Memoria di SEVERI citata a pag. 371.

13) *Pag.* 190. I concetti e la dimostrazione del n. 97 hanno il loro fondamentto sopra nozioni che debbon considerarsi nello spirito di ogni ben ragionato sviluppo di geometria sopra una superficie. Ecco, comunque, le nozioni cui alludiamo. Sia F una superficie priva di punti multipli in un S_r e $\varphi = 0$, $\psi = 0$ sieno due forme algebriche di S_r non passanti per F. La molteplicità d'intersezione di F, $\varphi = 0$ in un loro punto P comune è la molteplicità d'intersezione in P delle sezioni di F, $\varphi = 0$ con una forma generica per P (in particolare con un iperpiano). Tale molteplicità è indipendente dalla forma segante e dal suo ordine [1]. Ciò posto, sieno i_1 , i_2 le molteplicità d'intersezione di $\varphi = 0$, $\psi = 0$ con F, nel punto comune P ($i_1 = 0$, se $\varphi = 0$ non passa per P e analogamente per $\psi = 0$). Chiamasi *ordine* in P della funzione razionale $\theta = \frac{\varphi}{\psi}$ del punto di F, la differenza $i_1 - i_2$. Se $i_1 > i_2$, il punto P è per θ uno *zero* d'ordine $i_1 - i_2$; se $i_1 < i_2$, P è per θ un *polo* d'ordine $i_2 - i_1$. Se $i_1 = i_2$, P è per θ un punto *ordinario* (eventualmente di indeterminazione). Una trasformazione analitica biuniforme lascia inalterato l'ordine di una funzione razionale. Epperò quest'ordine è invariante per trasformazioni birazionali, nei punti che non si mutano in curve eccezionali. Sopra un ramo lineare generico d'origine P, tracciato su F, la θ subordina una funzione analitica del punto del ramo, che ha in P lo stesso ordine di θ. Si dice poi *ordine di* θ *lungo una curva* C *di* F l'ordine di θ in un punto generico di C (ordine che può variare per punti particolari della linea). Se F è dotata di punti multipli, bisogna interpretare le cose su un modello privo di punti multipli.

14) *Pag.* 199, rigo 15 dall'alto. Invece di « D » leggere « la D che passa per quel punto ».

15) *Pag.* 206, rigo 12 dall'alto. Dopo « ipersuperficie » leggere « aggiunte nel senso precedente ».

[1] Ved. SEVERI, *I fondamenti della geometria numerativa*, « Annali di matematica », 1940, n. 4.

16) *Pag.* 209. Nella relazione che segue alla (12) bisogna leggere « $\binom{l+3}{3}$ » invece di « $\binom{l+2}{3}$ ».

17) *Pag.* 217. In relazione all'Osservazione 1ª, è opportuno sottolineare in modo esplicito la *proprietà transitiva dell'equivalenza (razionale) tra gruppi di punti d'una superficie*, in quanto essa regge implicitamente e legittima le operazioni di addizione e sottrazione fra equivalenze delle quali si fa continuo uso in vari paragrafi successivi di questo Capitolo. Stralciamo questa osservazione dalla Memoria di SEVERI, cui si fa cenno al principio di pag. 236. La Memoria stessa trovasi però nei volumi della Pontificia Accademia delle Scienze (novembre 1941) e non in quelli della R. Accademia d'Italia. Dimostriamo cioè che:

Se due serie d'equivalenza, sopra una superficie F, hanno un gruppo (totale) comune, esse son parti (eventualmente incomplete) d'una medesima serie d'equivalenza.

Sieno infatti le serie d'equivalenza, effettive o virtuali, $|G| = |\Sigma A - \Sigma B|$, $|H| = |\Sigma C - \Sigma D|$, risultanti da combinazioni lineari di serie d'intersezione completa $|A|, |B|, |C|, |D|$; ed $M = \Sigma A_0 - \Sigma B_0 = \Sigma C_0 - \Sigma D_0$ sia un loro gruppo comune, ove A_0, B_0, C_0, D_0 sono i gruppi particolari delle $|A|, |B|, |C|, |D|$, le cui combinazioni forniscono M come gruppo G e come gruppo H. Siccome M, da solo, forma una serie d'intersezione completa ∞^0, la serie

$$(1) \qquad |\Sigma A - \Sigma B + \Sigma C - \Sigma D - M|$$

è una serie d'equivalenza. Essa contiene totalmente le $|G|$, $|H|$, perché fra i gruppi della (1) vi sono i gruppi del tipo $\Sigma A - \Sigma B + \Sigma C_0 - \Sigma D_0 - M$, che son gruppi G, e i gruppi del tipo $\Sigma A_0 - \Sigma B_0 + \Sigma C - \Sigma D - M$, che son gruppi H. Il teorema è così dimostrato.

Naturalmente, se ci si limita al campo dei gruppi effettivi, la (1) può non essere ampliabile in una serie irriducibile di gruppi di punti, anche se son irriducibili le serie di partenza $|G|$, $|H|$ [1]. Comunque, se la (1) è irriducibile, la sua dimensione non può, con ampliamenti analoghi, crescere oltre ogni limite, poiché deve conservarsi non superiore a $2n$, ove n sia l'ordine della serie.

Invece nel campo dei gruppi virtuali la serie (1) come somma (cioè prodotto topologico) di più serie d'intersezione completa, prese coi debiti segni, è sempre irriducibile e la sua dimensione, con ampliamenti congeneri, può crescere oltre ogni limite.

[1] Non così accade, come si sa, nel campo delle serie o dei sistemi lineari.

18) *Pag.* 222, rigo 11 dall'alto. Dopo « *eccezionale* » leggere « *di 1ª specie* ».

18) *Pag.* 225. Il ragionamento con cui ivi si prova che il sistema canonico puro e quindi il genere p_g son invarianti assoluti per trasformazioni birazionali vale anche se la curva canonica pura è lo zero dell'equivalenza lineare (e allora è $p_g = 1$), perché in tal caso sopra ogni trasformata birazionale della superficie data, il sistema canonico impuro consta sempre soltanto dell'insieme delle curve eccezionali. Ed anche se $p_g = 0$ il genere geometrico è invariante, perché l'ipotesi che la superficie si trasformi birazionalmente in una di genere $p_g > 0$ rivelasi subito assurda.

20) *Pag.* 228, rigo 17 dall'alto. Leggere « D_1^* » invece di « D_1 ».

INDICE

PREFAZIONE . . . . . pag. V

CAPITOLO I.

Trasformazioni, varietà, intersezioni di varietà

1. Trasformazioni razionali . . . . . » 1
2. Varietà algebriche . . . . . » 2
3. Trasformazioni birazionali fra varietà algebriche . . . . . » 3
4. Caratteri proiettivi delle varietà algebriche . . . . . » 4
5. Le varietà algebriche dal punto di vista invariantivo . . . » 5
6. Molteplicità d'intersezione di due varietà algebriche di dimensioni complementari entro uno spazio lineare ambiente . . » 6
7. Molteplicità d'intersezione di due varietà algebriche di dimensioni complementari entro una varietà algebrica ambiente . » 8
8. Le varietà virtuali e il concetto di equivalenza fra varietà » 9
9. Concetto di varietà virtuale dal punto di vista topologico . » 11
10. Intersezioni virtuali di due varietà V_k, W_h, immerse in una varietà ambiente M_r. Caso $k + h = r$ . . . . . » 13
11. Caso $k + h > r$ . . . . . » 16
12. Equivalenza funzionale di una componente dell'intersezione di due varietà . . . . . » 17

CAPITOLO II.

Digressione sugli ordini invariantivi delle varietà

13. Ordini invariantivi assoluti e relativi . . . . . » 20
14. Condizione perché una corrispondenza birazionale tra due varietà a k dimensioni sia un'omografia . . . . . » 21
15. Sistemi lineari di varietà a $k-1$ dimensioni, sopra una varietà V_k a k dimensioni . . . . . » 23
16. Imagini proiettive dei sistemi lineari di $\mid M_{k-1} \mid$ su V_k . . » 24
17. Relazioni tra le imagini proiettive di due sistemi lineari, l'uno contenuto nell'altro, di varietà a $k-1$ dimensioni, su di una V_k . . . . . » 26
18. Varietà normali . . . . . » 27
19. Esempi di modelli minimi. Varietà di SEGRE e varietà grassmanniane . . . . . » 28

CAPITOLO III.

Primi concetti fondamentali sulle serie e sui sistemi di equivalenza

§ 1. *Serie di equivalenza sopra una superficie* . . . . . pag. 31
20. Relazioni di equivalenza razionale . . . . . » 31
21. Serie elementari sopra una superficie . . . . . » 31
22. Serie d'equivalenza curvilinea . . . . . » 33
23. Serie elementari intersezioni complete e parziali . . . . » 34
24. Non linearità, in generale, delle serie elementari . . . . . » 36
25. Indeterminazione della coppia di funzioni razionali associate ad una serie elementare . . . . . » 36
26. La somma di due serie intersezioni complete è ancora una serie intersezione completa ? . . . . . » 37
27. Le serie caratteristiche dei sistemi lineari sopra una superficie come particolari serie elementari . . . . . » 40
28. La serie dei gruppi di m punti del piano . . . . . » 41
29. Definizione generale di serie di equivalenza sopra una superficie . . . . . » 43

§ 2. *Rappresentazione monoidale delle varietà* . . . . . » 45
30. Rappresentazione monoidale delle curve sghembe di S_3 . . » 45
31. Rappresentazione monoidale minima per una curva sghemba variabile in una famiglia . . . . . » 47
32. Monoidi irriducibili passanti per una V_k irriducibile di S_r. Cenno della rappresentazione monoidale di CAYLEY-HALPHEN » 52
33. Monoidi irriducibili passanti per una varietà riducibile o virtuale . . . . . » 55
34. Alcune proprietà della corrispondenza birazionale fra un monoide ed uno spazio lineare. Iperpiani virtuali . . . . » 59
35. Il teorema fondamentale . . . . . » 62
36. Estensione alle varietà virtuali . . . . . » 64
37. Rappresentazione monoidale graduale di una V_k . . . . » 64
38. Rappresentazione monoidale graduale d'un gruppo di punti . » 67
39. Individuazione razionale della rappresentazione monoidale d'una varietà, a partire da questa . . . . . » 68

§ 3. *Serie e sistemi d'equivalenza sopra una varietà* . . . » 69
40. Definizione generale dei sistemi d'equivalenza sopra una varietà M_r . . . . . » 69
41. Sistemi di intersezione completa e parziale . . . . . » 73
42. Sistemi d'equivalenza sulle varietà riducibili . . . . . » 76
43. Le famiglie di varietà di un S_r come sistemi d'equivalenza . » 76
44. Esempio di una somma di sistemi elementari intersezioni complete, che non è un sistema elementare intersezione completa . . . . . » 80
45. Esempio di una serie d'equivalenza 2-dimensionale che non è d'equivalenza 1-dimensionale . . . . . » 81
46. Costruzione proiettiva dei sistemi di equivalenza sopra una M_r » 82
47. I sistemi d'equivalenza come sistemi elementari virtuali . . » 83
48. Imposizione di punti fissi ad un sistema d'equivalenza . . » 84

CAPITOLO IV.

Le serie e i sistemi razionali sopra una superficie. Primi fondamenti sulle corrispondenze algebriche tra varietà

§ 1. *Le serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie come serie d'equivalenza* . . . . . pag. 85

49. Serie unirazionali (in particolare razionali) di gruppi di punti sopra una curva irriducibile o spezzata . . . . . » 85

50. Serie razionali ∞^2 di gruppi di punti sopra una superficie . . » 87

51. . . . . » 90

§ 2. *Nozioni preliminari sulle corrispondenze algebriche tra varietà* . . . . . » 94

52. Proprietà generali delle corrispondenze algebriche tra varietà » 94

53. Corrispondenze tra varietà irriducibili . . . . . » 96

54. Relazioni fra le dimensioni delle due varietà e la dimensione di una loro corrispondenza non degenere . . . . . » 97

55. Corrispondenze semplici e composte . . . . . » 99

56. Le varietà rappresentanti le coppie con un punto fisso nel prodotto di due varietà . . . . . » 101

57. Una proprietà fondamentale delle corrispondenze degeneri » 102

58. Le corrispondenze algebriche fra due spazi lineari . . . » 103

59. . . . . » 104

60. . . . . » 107

61. . . . . » 108

§ 3. *Il teorema fondamentale* . . . . . » 111

62. Sistemi razionali e unirazionali di V_k entro una M_r irriducibile » 111

63. Dimostrazione del teorema fondamentale . . . . . » 112

64. I sistemi d'equivalenza come sistemi razionali di varietà virtuali sopra una varietà irriducibile . . . . . » 116

65. I sistemi d'equivalenza come sistemi razionali di varietà virtuali sopra una varietà riducibile . . . . . » 118

CAPITOLO V.

Serie di equivalenza sulle curve riducibili

§ 1. *Generalità. Serie d'equivalenza complete. Teorema fondamentale* . . . . . » 119

66. Definizione . . . . . » 119

67. Proprietà elementari . . . . . » 120

68. . . . . » 123

69. Sistemi lineari associati a una g_n^r. Gruppi eccezionali . . . » 124

70. Le serie d'equivalenza dal punto di vista delle trasformazioni birazionali . . . . . » 128

71. Il teorema del resto per le serie di equivalenza . . . . . » 131

72. Il teorema fondamentale . . . . . » 134

73. Invarianza birazionale delle serie di equivalenza complete . » 135

§ 2. *Sistema lineare aggiunto ad una serie d'equivalenza. Serie d'equivalenza parziali* . . . . . pag. 136
74. Determinazione dell'unico caso, in cui una serie di equivalenza non ha gruppi eccezionali . . . . . » 136
75. Trasformazioni razionali in senso ristretto e largo fra due curve piane . . . . . » 138
76. Invarianza delle serie di equivalenza anche parziali . . . » 139
77. Imagine proiettiva di una g_n^r di equivalenza, data sopra una curva riducibile . . . . . » 139
78. Sistema lineare aggiunto ad una serie d'equivalenza sopra una curva C riducibile . . . . . » 140
79. Esistenza di un sistema lineare aggiunto ad una somma minima di serie lineari . . . . . » 143
80. Sistema lineare di dimensione minima aggiunto ad una serie d'equivalenza somma minima di serie lineari . . . » 145
81. Serie di equivalenza subordinate ad una data somma minima . » 148
82. I gruppi eccezionali d'una serie d'equivalenza intrinsecamente determinati . . . . . » 149
83. Caratterizzazione delle serie di equivalenza che ammettono sistemi aggiunti . . . . . » 152
84. Struttura delle serie di equivalenza incomplete . . . . » 154
85. Parametri da cui dipendono le serie d'equivalenza di date componenti . . . . . » 156
86. Determinazione di una serie di equivalenza mediante alcuni suoi gruppi. Serie d'equivalenza degeneri come limiti di serie non degeneri . . . . . » 158
87. Le serie razionali e unirazionali involutorie . . . . . » 161
88. Digressione: fondamenti d'una teoria generale delle plurilinearità . . . . . » 163
89. Caratterizzazione delle serie unirazionali involutorie . . . » 170
90 Caratterizzazione delle plurilinearità che conducono a serie di equivalenza . . . . . » 172

§ 3. *La geometria delle serie d'equivalenza sulle curve riducibili sconnesse o connesse* . . . . . » 178
91. Serie non speciali e speciali. Teorema di RIEMANN-ROCH . . » 178
92. Serie totalmente speciali . . . . . » 181
93. Corollari proiettivi . . . . . » 182
94. Curve con punti doppi virtualmente inesistenti. Geometria delle serie lineari neutre . . . . . » 184
95. Geometria delle serie d'equivalenza neutre . . . . . » 186
96. Condizione razionale necessaria e sufficiente per la connessione di una curva piana riducibile, con punti doppi virtualmente inesistenti . . . . . » 188

CAPITOLO VI.

Le serie d'equivalenza invarianti sopra una superficie

§ 1. *Proprietà fondamentali di geometria sopra una superficie e serie d'equivalenza superficiale collegate* . . . . . » 190
97. Criteri di equivalenza . . . . . » 190

98. . . . . pag. 194
99. . . . . » 194
100. Sistema canonico impuro . . . . . » 198
101. Sistema aggiunto virtuale (in particolare effettivo) . . . . » 200
102. Relazione tra il sistema aggiunto e il sistema jacobiano . . . » 202
103. Interpretazione proiettiva del sistema canonico impuro e del sistema aggiunto . . . . . » 204
104. Digressione sulla completezza della serie segata sopra una curva iperspaziale dalle sue forme aggiunte . . . . . » 205
105. Completezza del sistema lineare segato su una superficie dalle aggiunte . . . . . » 207
106. Genere geometrico e genere aritmetico di una superficie . . » 208
107. Serie canonica d'equivalenza di un sistema lineare . . . . » 212
108. Serie caratteristica d'equivalenza . . . . . » 217
109. Richiami sulle curve eccezionali di una superficie. Sistemi lineari con punti base assegnati o virtualmente inesistenti . » 218
110. Comportamento del sistema canonico e del sistema aggiunto di fronte alle trasformazioni birazionali . . . . . » 223
111. . . . . » 226
112. Sistema aggiunto ad un sistema lineare con punti base assegnati . . . . . » 227
113. . . . . » 230

§ 2. *La serie invariante di* SEVERI *sopra una superficie* . . » 233
114. Un lemma fondamentale . . . . . » 233
115. La serie canonica e la serie caratteristica d'equivalenza completate . . . . . » 236
116. La serie di SEVERI . . . . . » 236
117. Invarianza relativa della serie di SEVERI . . . . . » 239

§ 3. *Altre serie e relazioni invarianti e covarianti. Il genere lineare e il genere aritmetico di una superficie* . . . . . » 242
118. Serie caratteristica e serie canonica del multiplo di un dato sistema lineare . . . . . » 242
119. La serie canonica impura d'una superficie. Il genere lineare d'una superficie con un numero finito di curve eccezionali . . » 243
120. Digressione sulla base delle curve tracciate sopra una superficie con un fascio di curve razionali . . . . . » 245
121. Il genere lineare sulle superficie con infinite curve eccezionali: modelli privi di curve eccezionali di 1ª specie . . . . . » 247
122. Seguito: il genere lineare relativo sul piano e sopra una rigata . . . . . » 248
123. Seguito e fine: esistenza del massimo di ω per ogni superficie » 253
124. Relazione tra le serie d'equivalenza invarianti d'un sistema lineare $|C|$ e del suo aggiunto $|C'|$ . . . . . » 257
125. La serie canonica del sistema jacobiano d'un sistema lineare $|C|$ . . . . . » 257
126. Gruppo cuspidale d'una rete: sua relazione colla somma della serie di SEVERI e della serie canonica impura della superficie » 258
127. Digressione sul significato invariantivo della linea doppia di una superficie F dotata di singolarità ordinarie in S_3. Curve ideali . . . . . » 264

128. Le relazioni tra i caratteri proiettivi d'una superficie F con singolarità ordinarie in S_3 ed i loro significati funzionali . pag. 266
129. L'invarianza del genere aritmetico e la relazione di NOETHER . » 272

§ 4. *Alcune proprietà generali delle corrispondenze e delle involuzioni sopra una superficie . Un'altra espressione invariante della serie di* SEVERI . . . . . » 278
130. Distinzione infinitesimale delle coincidenze di una corrispondenza algebrica sopra una varietà . . . . . » 278
131. Equivalenza funzionale di una varietà di coincidenze imperfette nel gruppo delle coincidenze perfette . . . . . » 280
132. Ipercoincidenze per una corrispondenza sopra una superficie » 281
133. Le involuzioni razionali sopra una superficie . . . . . » 286
134. Relazione fra le coincidenze isolate di una involuzione e una rete generatrice . . . . . » 289
135. Gruppo di monodromia di un'involuzione . . . . . » 291
136. Conservazione della irriducibilità delle curve in una corrispondenza razionale tra due superficie . . . . . » 294
137. Determinazione del gruppo di monodromia di un'involuzione in un caso particolare . . . . . » 295
138. Direzione principale inerente al punto generico di una curva doppia di un'involuzione sopra una superficie . . » 296
139. Proprietà fondamentale dei punti di coincidenza isolati o perfetti di un'involuzione . . . . . » 298
140. Ulteriori considerazioni sulle coincidenze isolate di un'involuzione . . . . . » 303
141. La serie caratteristica virtuale dell'identità soprà una curva data . . . . . » 304
142. . . . . » 307
143. . . . . » 308
144. Gruppo virtuale delle coincidenze per un'involuzione intersezione di due fasci generali . . . . . » 310
145. Significato della serie di SEVERI come serie caratteristica virtuale dell'identità sopra una superficie . . . . . » 311
146. Ulteriori considerazioni sulla serie di SEVERI . . . . . » 314

§ 5. *Relazioni tra i caratteri funzionali e numerativi di due superficie in corrispondenza algebrica* . . . . . » 316
147. Trasformazione di un sistema d'equivalenza mediante una corrispondenza algebrica . . . . . » 316
148. Trasformazione del sistema canonico in una corrispondenza razionale tra due superficie . . . . . » 317
149. Trasformazione del sistema canonico in una corrispondenza algebrica d'indici qualunque tra due superficie . . . . . » 320
150. Trasformazione della serie canonica d'una superficie in una corrispondenza unirazionale . . . . . » 321
151. Relazione fra le serie canoniche di due superficie in corrispondenza $(\varkappa, \varkappa_1)$ priva di elementi fondamentali . . . . » 328

§ 6. *Relazione tra le serie di* SEVERI *di due superficie in corrispondenza algebrica qualunque* . . . . . » 331

152. Gruppo jacobiano del trasformato di un fascio in una corrispondenza unirazionale tra due superficie . . . . . pag. 331
153. Relazione fra le serie di SEVERI di due superficie in corrispondenza unirazionale . . . . . » 332
154. Nuova deduzione dell'equivalenza che esprime un gruppo di SEVERI come gruppo virtuale delle coincidenze dell'identità » 335
155. Relazione fra le serie di SEVERI di due superficie, in una corrispondenza (γ, α_1) priva di elementi fondamentali . . . » 336
156. Modo di variare della serie $|\Omega + S|$ in una trasformazione (α, α_1) priva di punti fondamentali fra due superficie . . . » 337
157. Effetto degli elementi fondamentali d'una trasformazione algebrica di F sulle relazioni che esprimono il modo di variare delle serie $|\Omega|$, $|S|$, $|\Omega + S|$ . . . . . » 338
158. Esempio di una corrispondenza che non soddisfa alle condizioni di generalità . . . . . » 347
159. Applicazione alla superficie di KUMMER . . . . . » 353
160. Digressione sul sistema canonico d'una superficie dello spazio ordinario con punti multipli isolati . . . . . » 363

CAPITOLO VII.

Il teorema di Riemann-Roch sopra una superficie

161. Posizione del problema e notizie storiche . . . . . » 368
162. Dimostrazione di un primo lemma . . . . . » 371
163. Dimostrazione di un secondo lemma . . . . . » 372
164. Il teorema di RIEMANN-ROCH per alcuni sistemi particolari » 375
165. . . . . » 378
166. Il teorema della deficienza della serie caratteristica . . . » 379
167. Il teorema di RIEMANN-ROCH per i sistemi virtualmente privi di punti base . . . . . » 386
168. Il teorema sulla deficienza della serie segata su una curva dal suo aggiunto . . . . . » 388
169. Il teorema di RIEMANN-ROCH per i sistemi dotati di punti base » 390
170. Il teorema di RIEMANN-ROCH per i sistemi lineari virtuali . . » 393
171. Il teorema di RIEMANN-ROCH per i sistemi individuati da curve con componenti multiple . . . . . » 397
172. . . . . » 399
173. Caratterizzazione delle curve eccezionali di 1ª specie . . . » 401

COMPLEMENTI ED ERRATA . . . . . » 405

24868

R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE BIBLIOTECA

FINITO DI STAMPARE IN TIVOLI
NELLE « ARTI GRAFICHE A. CHICCA »
IL 26 GENNAIO 1942-XX