$$(C) \quad \int \frac{1}{2} \frac{\wp' u + \wp' \beta}{\wp u - \wp \beta} du$$

Gli integrali ellittici (A), (B), (C) sono quelli che Weierstrass indica come integrali (elementari) di prima, seconda e terza specie, rispettivamente.*

Come si vede: « Un' integrale generale ellittico si compone di una parte razionale e di integrali elementari di 1ª, 2ª, e 3ª specie. »

Capitolo XI°

Le tre funzioni σ pari di Weierstrass e le funzioni ellittiche di Jacobi sn u, cn u, dn u. Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare. Formule d'addizione per sn u, cn u, dn u.

---

* Queste denominazioni corrispondono appunto a quelle in uso nella teoria generale degli integrali Abeliani. Sulla superficie Riemanniana a due fogli, su l'equazione algebrica

$$y^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

l'integrale (A) è sempre finito; i suoi periodi sono 2ω, $2\omega'$. L'integrale (B) ha un solo polo del 1° ordine in $s = \infty$ (che è altresì punto di diramazione).

L'integrale (C) ha due infiniti logaritmici in $s = \infty$ e $s = \wp\beta$, $y = \wp'\beta$ co' residui -1, $+1$.

§ 116 - Funzioni periodiche appartenenti a sottogruppi del gruppo modulare

Una delle proprietà fondamentali delle funzioni di Weierstrass σu, $\wp u$, considerate come dipendenti dai periodi, è espressa dalle formule

$$\sigma(u \,|\, \alpha\omega+\beta\omega', \gamma\omega+\delta\omega') = \sigma(u \,|\, \omega, \omega')$$

$$\wp(u \,|\, \alpha\omega+\beta\omega', \gamma\omega+\delta\omega') = \wp(u \,|\, \omega, \omega'),$$

essendo

$$\begin{pmatrix} \alpha\omega+\beta\omega' & \gamma\omega+\delta\omega' \\ \omega & \omega' \end{pmatrix}$$

una qualunque sostituzione del gruppo modulare omogeneo. Il seguito della teoria ci conduce a considerare delle funzioni periodiche di 1ª o 3ª specie (§ 89) che ammettono i periodi 2ω, $2\omega'$ o loro multipli * e senza rimanere invariate per tutte le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ del gruppo modulare tali rimangono per quelle di un sottogruppo di indice finito. Fra i sottogruppi del gruppo modulare si considerano specialmente i sottogruppi congruenziali (Kongruenzuntergruppen) che sono cioè definiti da congruenze cui debbono soddisfare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rispetto ad un dato

* Naturalmente se si tratta di funzioni periodiche di 3ª o di 2ª specie la periodicità si riferisce ovviamente alla loro infiniti ed infinitesimi.

modulo n. I sottogruppi di questa specie sono sempre contenuti nel sottogruppo principale Γ_n definito dalle congruenze

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}\,^{*},$$

che contiene tutte le sostituzioni congrue coll'identità (mod n) ed hanno tutti indice finito. I sottogruppi principali Γ_n sono inoltre invarianti nel gruppo modulare.

Le funzioni periodiche appartenenti al sottogruppo Γ_n si diranno della n^{ma} specie (Stufe secondo **Klein**). In questo senso le σ_n, $\wp_n$ appartengono alla prima specie. Nel caso seguente $n=2$ si entrano le funzioni classiche di Jacobi

$$\operatorname{sn} v \;,\; \operatorname{cn} v \;,\; \operatorname{dn} v \;;$$

sicchè, storicamente, lo studio delle funzioni ellittiche di seconda specie ha preceduto quello delle più semplici di prima specie (della $\wp_n$). Arriveremo alle funzioni di Jacobi cominciando prima le funzioni periodiche di 3.ª categoria e di 2.ª specie introdotte da Weierstrass, e così dette funzioni sigma pari. Perciò cominceremo innanzi tutto partire dalle considerazioni seguenti

* Che le sostituzioni di questa specie formino gruppo, risulta subito dalla legge di composizione delle sostituzioni.

ti. Rispetto al modulo 2 le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare Γ si ripartiscono nelle 6 classi seguenti:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix} \pmod 2$$

Quelle della prima classe formano appunto il sottogruppo Γ_2 e la ripartizione superiore in 6 classi corrisponde appunto alla ripartizione delle sostituzioni di Γ rispetto a quelle del sottogruppo Γ_2, il quale adunque è in Γ un sottogruppo (invariante) d'indice 6.

Per ogni sostituzione di Γ

$$(1)\quad \begin{cases}\Omega' = \alpha\omega' + \beta\omega\\ \Omega = \gamma\omega' + \delta\omega\end{cases}$$

si ha:

$$\wp(u\,|\,\omega, \omega') = \wp(u, \Omega, \Omega')$$

e perciò le radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione cubica

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0,$$

che abbiamo definite con le formule

$$e_1 = \wp\omega, \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp\omega'$$

per qualsiasi sostituzione (1) $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ di Γ non potranno che permutarsi fra loro. Per vedere come si permutano poniamo:

$$e_1' = \wp\Omega, \quad e_2' = \wp(\Omega + \Omega'), \quad e_3' = \wp\Omega'$$

e distinguendo, come sopra, le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ in 6 classi rispetto al sottogruppo Γ_2 potremo ora subito costruire la tabella seguente:

	sostituzioni sopra e_1, e_2, e_3
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_1$; $e'_2 = e_2$, $e'_3 = e_3$	1
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_3$; $e'_2 = e_2$; $e'_3 = e_1$	$(e_1\, e_3)$
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_1$; $e'_2 = e_3$; $e'_3 = e_2$	$(e_2\, e_3)$
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 1, 0\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_3$; $e'_2 = e_1$, $e'_3 = e_2$	$(e_1\, e_3\, e_2)$
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 1\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_2$; $e'_2 = e_3$; $e'_3 = e_1$	$(e_1\, e_2\, e_3)$
$\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix} \pmod 2$; $e'_1 = e_2$; $e'_2 = e_1$; $e'_3 = e_3$	$(e_1\, e_2)$

(A)

Come si vede, le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ di Γ inducono sopra e_1, e_2, e_3 le 6 sostituzioni del gruppo Γ_2 tale su 3 elementi.

§ 117. Le tre funzioni $\sigma_r u$.

Le tre funzioni $\sigma_r u$ pari si deducono dalla σu in modo semplice aumentando l'argomento u della di uno dei semiperiodi

$$\underline{\omega}, \ \underline{\omega+\omega'}, \ \underline{\omega'}$$

Per maggior simmetria poniamo

$$\omega_1 = \omega ; \quad \omega_2 = \omega + \omega' ; \quad \omega_3 = \omega'$$

analogamente

$$\eta_1 = \eta \quad ; \quad \eta_2 = \eta + \eta' ; \quad \eta_3 = \eta'$$

e in generale:

$$\eta_r = \sigma \omega_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

Dalla formula fondamentale (VI)(§85) per la σu si deduce che, per un valore qualunque dell'indice r è

$$\sigma(u+2\omega_r) = -e^{2\eta_r(u+\omega_r)}\sigma u ;$$

nella qual formula, cangiando u in $u-\omega_r$, otteniamo

$$e^{-\eta_r u}\sigma(u+\omega_r) = e^{\eta_r u}\sigma(\omega_r-u).$$

La funzione

$$C e^{-\eta_r u}\sigma(u+\omega_r)$$

è adunque una funzione pari; se diamo alla costante C un tale valore che, per $u=0$ la funzione assuma il valore 1, avremo precisamente la funzione che Weierstrass indica col simbolo $\sigma_r u$. Avremo dunque per definizione

$$(I)\quad \sigma_r u = e^{-\eta_r u}\frac{\sigma(u+\omega_r)}{\sigma\omega_r} = e^{\eta_r u}\frac{\sigma(\omega_r-u)}{\sigma\omega_r}$$

e, dando ad r i suoi tre valori sarà

$$[I^*]\quad \sigma_1 u = e^{-\eta u}\frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma\omega};\ \sigma_2 u = e^{-(\eta+\eta')u}\frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')};\ \sigma_3 u = e^{-\eta' u}\frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma\omega'}.$$

Possiamo dimostrare subito che le tre σ pari, che sono evidentemente funzioni di 3ª categoria, appartengono precisamente al sottogruppo Γ_2 nel senso del paragrafo precedente. Se invero dalla formula

$$\wp u - \wp\omega_r = \frac{\sigma(\omega_r-u)\,\sigma(\omega_r+u)}{\sigma^2\omega_r\,\sigma^2 u},$$

che, per la (I) può scriversi:

(2) $\wp u - \wp \omega_r = \dfrac{\sigma_r^2 u}{\sigma^2 u}$

risulta intanto evidente che, per qualunque sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ di Γ sui periodi, i quadrati delle σ_r

$$\sigma_1^2 u \; ; \quad \sigma_2^2 u \; ; \quad \sigma_3^2 u$$

si permutano fra loro al modo stesso di

$$e_1 \; ; \quad e_2 \; ; \quad e_3$$

nella tabella (A). Ma poichè per $u = 0$ tutte e tre le funzioni σ_r riduconsi a $+1$ è chiaro che anche

$$\sigma_1 u \; ; \quad \sigma_2 u \; ; \quad \sigma_3 u$$

si permuteranno nel medesimo modo. Ne concludiamo: «Le tre σ pari

$$\sigma_r(u \mid \omega, \omega')$$

rimangono assolutamente invariate eseguendo sui periodi una sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod 2$$

del sottogruppo Γ_2; per ogni altra sostituzione di Γ si permutano semplicemente fra loro nel modo stesso di e_1, e_2, e_3 nella tabella (A).»

Osserviamo ancora che gli infinitesimi delle quattro trascendenti intere

$$\sigma u \; , \; \sigma_1 u \; , \; \sigma_2 u \; , \; \sigma_3 u$$

sono nei punti:

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega' \qquad \text{per la } \sigma u \; ;$$

$u_0 = (2m+1)\omega + 2n\omega'$ per la $\sigma_1 u$;

$u_0 = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega'$ " " $\sigma_2 u$;

$u_0 = 2m\omega + (2n+1)\omega'$ " " $\sigma_3 u$;

dove $\underline{m}$, $\underline{n}$ indicano interi qualunque.

Infine dalla formula (VI)(§86) per la σu, tenendo conto della identità

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2},$$

deduciamo le corrispondenti per $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ che riassumiamo nel prospetto seguente:

$$(3)\begin{cases} \sigma(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} \cdot e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')} \cdot \sigma u \\ \sigma_1(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m} \cdot e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')} \cdot \sigma_1 u \\ \sigma_2(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+n} \cdot e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')} \cdot \sigma_2 u \\ \sigma_3(u+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+n} \cdot e^{(2m\eta+2n\eta')(u+m\omega+n\omega')} \cdot \sigma_3 u \end{cases}$$

§118. *Le funzioni ellittiche $\sqrt{\wp u - e_r}$ e i valori di $\sqrt{e_\alpha - e_\beta}$* - La formula (2) ci dimostra che la funzione

$$\sqrt{\wp u - e_r} = \pm \frac{\sigma_r u}{\sigma u}$$

si scinde con le sue due determinazioni in due funzioni monodrome distinte, ciò che risulta del resto anche dall'osservare che gl'infinitesimi e gli infiniti delle funzioni

$$\wp u - e_r = \wp u - \wp\omega_r$$

sono tutti di ordine pari. Con la segnatura

$$\sqrt{\wp u - e_r}$$

intenderemo sempre la funzione $+\frac{\sigma_r u}{\sigma u}$, sicché

avremo

$$(\mathrm{II})\quad \sqrt{\wp u - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\ ;\quad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\ ;\ \sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u}$$

Mediante le formule (B) si constata subito che queste tre funzioni sono doppiamente periodiche del 2° ordine coi rispettivi periodi fondamentali:

$$(2\omega, 4\omega')\ ,\ (2\omega + 2\omega', 4\omega)\ ,\ (4\omega, 2\omega').$$

Alla (II) si coordina una formula notevole che esprime $\wp' u$ per le σ; si ha infatti:

$$\wp' u = \pm 2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} = \pm 2\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}$$

e il segno si determina subito dal modo di comportarsi di $\wp' u$ nell'intorno di $u = 0$, onde risulta

$$(\mathrm{III})\quad \wp' u = -2\,\frac{\sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u}{\sigma^3 u}\ .$$

Fissato in modo preciso con le (III) il senso dei radicali $\sqrt{\wp u - e_2}$, intenderemo per $\sqrt{e_3 - e_2}$ il valore $\frac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_1}$; avremo quindi senza alcuna ambiguità:

$$(a)\quad \begin{cases} \sqrt{e_2 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_2}{\sigma \omega_2} = -e^{\eta_1 \omega_2}\,\dfrac{\sigma \omega_3}{\sigma \omega_1\, \sigma \omega_2} \\[2ex] \sqrt{e_3 - e_1} = \dfrac{\sigma_1 \omega_3}{\sigma \omega_3} = +e^{-\eta_1 \omega_3}\,\dfrac{\sigma \omega_2}{\sigma \omega_1\, \sigma \omega_3} \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} \sqrt{e_3 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_3}{\sigma \omega_3} = e^{\eta_2 \omega_3}\,\dfrac{\sigma \omega_1}{\sigma \omega_2\, \sigma \omega_3} \\[2ex] \sqrt{e_1 - e_2} = \dfrac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma \omega_1} = e^{\eta_2 \omega_1}\,\dfrac{\sigma \omega_3}{\sigma \omega_2\, \sigma \omega_1} \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases}\sqrt{e_1-e_3} = \dfrac{\sigma_3\omega_1}{\sigma\omega_1} = e^{-\eta_3\omega_1}\dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_3\,\sigma\omega_1}\\[2ex] \sqrt{e_2-e_3} = \dfrac{\sigma_3\omega_2}{\sigma\omega_2} = -e^{\eta_3\omega_2}\dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_3\,\sigma\omega_2}\end{cases}$$

Dietro queste convenzioni risulta

$$(d)\quad \sqrt{e_1-e_2} = i\sqrt{e_2-e_1}\ ;\ \sqrt{e_2-e_3} = i\sqrt{e_3-e_2}\ ;\ \sqrt{e_1-e_3} = i\sqrt{e_3-e_1}$$

Moltiplicando la 2ª delle (b) per la 1ª delle (c) risulta

$$\sqrt{e_1-e_2}\cdot\sqrt{e_1-e_3} = \frac{e^{\eta_1\omega_1}}{\sigma^2\omega_1}$$

ed estraendo nuovamente la radice quadrata, coll'adottare nel 2° membro la determinazione: $\dfrac{e^{\pm\eta_1\omega_1}}{\sigma\omega_1}$, e analogamente procedendo per gli altri prodotti

$$\sqrt{e_2-e_3}\cdot\sqrt{e_2-e_1}\ ;\ \sqrt{e_3-e_1}\cdot\sqrt{e_3-e_2}\ ,$$

avremo le formule

$$(IV)\begin{cases}\sqrt[4]{e_1-e_2}\cdot\sqrt[4]{e_1-e_3} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}\eta_1\omega_1}}{\sigma\omega_1}\\[2ex] \sqrt[4]{e_2-e_3}\ \sqrt[4]{e_2-e_1} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}\eta_2\omega_2}}{\sigma\omega_2}\\[2ex] \sqrt[4]{e_3-e_1}\ \sqrt[4]{e_3-e_2} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}\eta_3\omega_3}}{\sigma\omega_3}\end{cases}$$

Da queste ultime formule segue una notevole identità. Dalla formola:

$$\frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)} = \frac{e_3-e_2}{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_3-e_1)}$$

permutando circolarmente gli indici e sommando si ottiene l'identità:

$$\frac{1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}+\frac{1}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}+\frac{1}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}=0$$

ovvero per le (IV)

$$(V)\quad \left(e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\omega_1\right)^4+\left(e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\sigma\omega_2\right)^4+\left(e^{-\frac{\eta_3\omega_3}{2}}\sigma\omega_3\right)^4=0$$

che è la formula richiesta.

§ 119 - Aggiunta di semiperiodi all'argomento della σu

- Cerchiamo ora l'effetto prodotto sopra una qualunque delle funzioni σ per l'aggiunta all'argomento u di un semiperiodo arbitrario

$$\Omega = m\omega + n\omega'$$

essendo m, n due numeri interi di cui uno almeno impari. Se poniamo

$$H = m\eta + n\eta'$$

avremo per la proprietà fondamentale della σu

$$\sigma(u+2\Omega) = -e^{2H(u+\Omega)}\,\sigma u,$$

da cui, cangiando u in $u-\Omega$

$$e^{-Hu}\sigma(u+\Omega) = e^{Hu}\sigma(\Omega-u).$$

Ponendo

$$(3)\quad \sigma_{m,n}u = e^{-Hu}\frac{\sigma(u+\Omega)}{\sigma\Omega},$$

si avrà evidentemente

$$\sigma_{10}u=\sigma_1 u\ ,\ \sigma_{01}u=\sigma_3 u\ ,\ \sigma_{11}u=\sigma_2 u\ .$$

Ma si trova subito che aumentando m, od n di 2 la $\sigma_{mn}u$ non cangia:

$$\sigma_{m+2,n}u = \sigma_{m,n+2}u = \sigma_{m,n}u$$

e però la funzione $\sigma_{mn}u$ non dipende dai valori assoluti degl' indici m, n ma solo dalla loro parità o disparità, talchè si ha:

$$\begin{cases} \sigma_{mn}u = \sigma_1 u & \text{per } (m,n) \equiv (1,0) \pmod 2 \\ \sigma_{mn}u = \sigma_2 u & \text{"} \quad (m,n) \equiv (1,1) \\ \sigma_{mn}u = \sigma_3 u & \text{"} \quad (m,n) \equiv (0,1) \end{cases}$$

La formula (3) può dunque riguardarsi come esprimente $\sigma(u+\Omega)$ per una delle altre funzioni σ. Ora nella (3) aumentiamo u di di $r\omega + s\omega'$ con r, s interi qualunque e distinguiamo due casi secondo che i numeri $m+r$, $n+s$ sono ambedue pari, ovvero no.

Nel 1.° caso si ha:

$$\sigma_{mn}(u + r\omega + s\omega') = C e^{+(m\eta + s\eta')u} \cdot \sigma u$$

e determinando il fattore costante C col fare $u = -(r\omega + s\omega')$, otteniamo

$$(4) \quad \sigma_{mn}(u + r\omega + s\omega') = -e^{(m\eta + s\eta')(u + r\omega + s\omega')} \frac{\sigma u}{\sigma(r\omega + s\omega')},$$

formola che vale per

$$(m+r, n+s) \equiv (0,0) \pmod 2.$$

Ma nel 2.° caso risulta invece:

$$\sigma_{mn}(u + r\omega + s\omega') = C' e^{(r\eta + s\eta')u} \sigma_{m+r,n+s} u$$

e determinando C' col fare, p.e., $u = 0$ si ha la seconda formula domandata:

$$(4)\quad \sigma_{mn}(u+r\omega+s\omega') = e^{(r\eta+s\eta')u}\,\sigma_{mn}(r\omega+s\omega')\,\sigma_{m+n,\,r+s}\,u$$

per $\quad (m+n,\, r+s) \not\equiv (0,0) \pmod 2$.

§120 - Sviluppo della trascendente intera $\sigma_r u$ in serie di potenze

Le trascendenti intere $\sigma_r u$ $(r=1,2,3)$ sono sviluppabili in serie di potenze di u convergenti in tutto il piano ed importa ora che precisiamo la natura dei coefficienti di queste serie - Dimostreremo:

« I coefficienti a_n dello sviluppo in serie di

$$\sigma_r u = \sum_0^\infty a_n u^{2n}$$

sono formati razionalmente con gli invarianti g_2, g_3 e colla radice e_r corrispondente dell'equazione cubica

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0 \text{ .»}$$

Risulta di qui nuovamente che, per ogni sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha,\beta\\ \gamma,\delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare sui periodi le tre funzioni

$$\sigma_1 u \quad , \quad \sigma_2 u \quad , \quad \sigma_3 u$$

si permutano fra loro al modo stesso di

$$e_1 \quad , \quad e_2 \quad , \quad e_3 \, .$$

Per stabilire la proprietà enunciata consideriamo la funzione più generale periodica di 3ª categoria:

$$(5)\quad \varphi(u) = e^{-u\zeta v}\,\frac{\sigma(u+v)}{\sigma v}\,,$$

dove v è un parametro; per $v=\omega_r$ otterremo precisamente la $\sigma_r(u)$. La $\varphi(u)$ è funzione

anche del parametro e derivando rispetto ad u o a v otteniamo

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial u} = \zeta(u+v) - \zeta v$$

$$\frac{\partial \log \varphi}{\partial v} = \zeta(u+v) - \zeta v + u \wp v ,$$

onde risulta che φ soddisfa l'equazione a derivate parziali del 1° ordine

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} + u \varphi \wp v = 0 .$$

Ora supponiamo che sia

$$\varphi(u) = 1 + A_1 u + A_2 \frac{u^2}{1.2} + A_3 \frac{u^3}{1.2.3} + \dots + A_n \frac{u^n}{1.2.3 \dots n} + \dots$$

lo sviluppo di $\varphi(u)$ in serie ascendenti di u; i coefficienti A_n saranno funzioni analitiche uniformi di v e potremo applicare la derivazione per serie, sia rispetto ad u, sia rispetto a v. Dalla (6) risulta quindi pei coefficienti della A_n la formula ricorrente

$$A_n = \frac{d A_{n-1}}{dv} - (n-1) A_{n-2} \wp v .$$

Partendo dai primi valori

$$A_1 = 0 \; ; \; A_2 = -\wp v \; ; \; A_3 = -\wp' v \; ; \; A_4 = -\wp'' v + 3 \wp^2 v =$$
$$= -3 \wp^2 v + \tfrac{1}{2} g_2 ,$$

vediamo adunque che i coefficienti A_n sono funzioni razionali intere di $\wp v$ per n pari con coefficienti razionali interi in g_2, g_3 mentre per n dispari sono eguali al prodotto di $\wp' v$ per una tale funzione. Se facciamo $v = \omega_2$ la $\varphi(u)$ si mu-

ta in $\sigma_2 u$, e poichè

$$\wp\omega_2 = e_2 \quad ; \quad \wp'\omega_2 = 0,$$

ne risulta la verità del teorema enunciato.
È chiaro poi che nei coefficienti dello sviluppo di $\sigma_2 u$ si potrà far figurare e_2 a potenze non superiori alla seconda.
Così si ha:

$$\sigma_2 u = 1 - e_2 \frac{u^2}{1.2} + \left(\frac{1}{2} g_2 - e_2^2\right) \frac{u^4}{1.2.3.4} + \cdots\cdots$$

§ 121. **Le funzioni ellittiche di Jacobi** $sn\, v$, $cn\, v$, $dn\, v$. – I risultati dei paragrafi precedenti conducono direttamente alle tre funzioni ellittiche di Jacobi, di cui ora tratteremo; esse sono funzioni doppiamente periodiche appartenenti, secondo i concetti generali del § 116 al sottogruppo Γ_2: $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}$.
Consideriamo per ciò le tre funzioni:

$$(7) \quad \varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\, \frac{\sigma u}{\sigma_3 u} \quad ; \quad \varphi_1(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \quad ; \quad \varphi_2(u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \quad ;$$

le quali, secondo le formule (B) (§ 117), hanno i rispettivi periodi elementari

$$(4\omega, 2\omega') \quad ; \quad (4\omega, 2\omega + 2\omega') \quad ; \quad (2\omega, 4\omega')$$

ed hanno infiniti di 1.° ordine nei punti

$$u_\infty = 2m\omega + (2n+1)\omega'$$

ed infinitesimi pure di 1.° ordine rispettivamente nei punti

$$u_0 = 2m\omega + 2n\omega' \; ; \; u_0 = (2m+1)\omega + 2n\omega' \; ; \; u_0 = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega'$$

percorrendo m, n tutti i valori interi. Inoltre queste funzioni soddisfano alle condizioni iniziali:

$$(8)\quad \lim_{u=0} \frac{\varphi(u)}{u} = \sqrt{e_1-e_3}\ ;\quad \varphi(\omega)=1\ ;\ \varphi_1(0)=1\ ;\ \varphi_2(0)=1$$

Calcoliamo inoltre i residui di queste tre funzioni per $u=\omega'$, osservando che si ha

$$\lim_{u=\omega'} \frac{u-\omega'}{\sigma_3 u} = -e^{-\eta_3\omega_3}\,\sigma\omega_3\,.\ *$$

Tenendo conto delle formole (a) (b) (c) del § 118, troviamo:

$$(9)\begin{cases} \lim\limits_{u=\omega'}\left[(u-\omega')\,\varphi(u)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{e_2-e_3}}\ ;\ \lim\limits_{u=\omega'}\left[(u-\omega')\,\varphi_1(u)\right] = -\dfrac{i}{\sqrt{e_2-e_3}} \\ \lim\limits_{u=\omega'}\left[(u-\omega')\,\varphi_2(u)\right] = -\dfrac{i}{\sqrt{e_1-e_3}} \end{cases}$$

Osserviamo ancora che, per le proprietà di omogeneità della σu (§ 83) della ζu e della $\wp u$, se si moltiplicano argomento e periodi per un medesimo fattore λ le

$$\sigma u\ ;\ \zeta u\ ;\ \wp u$$

acquistano rispettivamente i fattori

$$\lambda\ ;\ \frac{1}{\lambda}\ ;\ \frac{1}{\lambda^2}\,,$$

e per ciò le costanti

$$\eta_\alpha\ ;\ \sqrt{e_2-e_1}$$

---

* Ciò risulta subito dalla formula

$$\sigma_3(u+\omega_3) = -e^{\eta_3(u+\omega_3)}\,\frac{\sigma u}{\sigma\omega_3}$$

onde:

$$\lim_{u=\omega_3}\left(\frac{\sigma_3\omega_3}{\sigma_3 u}\right) = \lim_{u=0}\frac{u}{\sigma_3(u+\omega_3)} = -e^{-\eta_3\omega_3}\,\sigma\omega_3\,.$$

il fattore $\frac{1}{\lambda}$ mentre dunque $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ restano invariate. Le nostre tre funzioni (7) godono dunque della comune proprietà espressa dalla formula

$$\Phi(\lambda u \mid \lambda\omega, \lambda\omega') = \Phi(u \mid \omega, \omega').$$

Con una semplice mutazione dell'argomento è facile quindi cangiare $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$ in tre funzioni dipendenti solo dall'argomento e dal rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi. Pongasi perciò

$$u\sqrt{e_1 - e_3} = v$$

e si riguardino

$$\varphi(u) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}\,; \quad \varphi_1(u) = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}\,; \quad \varphi_2(u) = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u}$$

come funzioni del nuovo argomento v. Esse dipenderanno, oltre che dall'argomento, soltanto dal rapporto τ dei periodi; sono queste precisamente le tre funzioni ellittiche di Jacobi *

$$\operatorname{sen}\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{sn} v\,; \quad \cos\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{cn} v\,; \quad \Delta\operatorname{am} v \text{ o } \operatorname{dn} v.$$

Abbiamo dunque per definizione:

$$(C)\left\{\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u}\,; \\ \operatorname{cn} v &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u}\,; \\ \operatorname{dn} v &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \end{aligned}\right\} v = u\sqrt{e_1 - e_3}\,.$$

Le poniamo inoltre per usare delle notazioni di Jacobi:

* Posto [illegible] $\frac{1}{\lambda}$ [illegible] Φ' [illegible]

$\Phi\left(\frac{v}{\lambda} \mid \omega\,\omega'\right) = \Phi'(v \mid \omega\,\omega') = \Phi(u \mid \omega\,\omega')$ [illegible]

(cap XI - § 121)

$$K = \omega\sqrt{e_1 - e_3}\ ;\ iK' = \omega'\sqrt{e_1 - e_3}\ ,$$

vediamo che sussistono le proprietà fondamentali seguenti:

« Le tre funzioni ellittiche di Jacobi hanno rispettivamente i periodi elementari

$$4K\ ,\ 2iK' \quad \text{per } sn\,v$$
$$4K\ ,\ 2K + 2iK' \quad \text{"} \quad cn\,v$$
$$2K\ ,\ 4iK' \quad \text{"} \quad dn\,v\ ;$$

i loro infiniti di 1° ordine sono nei punti

$$v_\infty = 2mK + (2n+1)iK'\ ,$$

e gli infinitesimi rispettivamente in

$$\begin{cases} v_0 = 2mK + 2niK' & \text{per } sn\,v \\ v_0 = (2m+1)K + 2niK' & \text{"} \quad cn\,v \\ v_0 = (2m+1)K + (2n+1)iK' & \text{"} \quad dn\,v\ . \end{cases}$$

Tutte e tre sono funzioni ellittiche di 2° ordine nel rispettivo parallelogrammo dei periodi. »

Le formule (8) (9) si cangiano poi nelle seguenti che importa notare

$$(8^*)\quad \lim_{v=0}\left(\frac{sn\,v}{v}\right) = 1\ ;\quad cn\,0 = 1\ ;\quad dn\,0 = 1\ ;\ sn\,K = 1$$

$$(9)\begin{cases} \lim\left[(v - iK')\,sn\,v\right] = \dfrac{1}{k}\ ;\ \lim\left[(v - iK')\,cn\,v\right] = -\dfrac{i}{k}\ ; \\ \lim\left[(v - iK')\,dn\,v\right] = -i\ ; \end{cases}$$

avendo posto:

$$(VI)\qquad k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}$$

Questa costante k, che dipende soltanto dal rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K}$ dei periodi, dicesi il **modulo** delle funzioni ellittiche $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ ed è storicamente la prima funzione studiata della classe delle funzioni **modulari**, alla quale ha dato appunto il nome. Insieme al modulo k conviene considerare anche il così detto **modulo complementare** k' definito dalla formola

$$(VI^*) \qquad k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}},$$

i radicali avendo i sensi precisi loro attribuiti nelle formule (a), (b), (c) del §118. Fra il modulo k e il complementare k' ha luogo evidentemente la relazione

$$(10) \qquad k^2 + k'^2 = 1.$$

È inoltre da notarsi che si ha:

$$(11) \qquad \operatorname{dn} K = \frac{\sigma_2 \omega_1}{\sigma_3 \omega_1} = k'.$$

Osserviamo poi che delle tre funzioni ellittiche di Jacobi la prima, $\operatorname{sn} v$, è impari le altre due $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ pari ed aumentando di $2K$ o $2iK'$ si comportano nel modo seguente

$$\operatorname{sn}(2K+v) = -\operatorname{sn} v; \quad \operatorname{sn}(2iK'+v) = \operatorname{sn} v$$

$$\operatorname{cn}(2K+v) = -\operatorname{cn} v; \quad \operatorname{cn}(2iK'+v) = -\operatorname{cn} v$$

$$\operatorname{dn}(2K+v) = \operatorname{dn} v; \quad \operatorname{dn}(2iK'+v) = -\operatorname{dn} v.$$

Notiamo infine le formole

$$\operatorname{sn}(2K-v) = \operatorname{sn} v .$$

§ 122. Relazioni fra sn v, cn v, dn v e loro derivate - Fra i quadrati di sn v, cn v, dn v hanno luogo due semplici relazioni che si deducono immediatamente dalle loro espressioni per la $\wp$ di Weierstrass:

$$\text{(VII)} \quad \operatorname{sn} v = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \; ; \quad \operatorname{cn} v = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \; ; \quad \operatorname{dn} v = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \; ; \quad \left(v = u\sqrt{e_1 - e_3}\right);$$

si hanno quindi le relazioni cercate

$$(12) \quad \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1 \; ; \quad k^2 \operatorname{sn}^2 v + \operatorname{dn}^2 v = 1 .$$

Stabiliamo ora le formole che esprimono le derivate di sn v, cn v, dn v per le funzioni stesse di Jacobi. Derivando perciò le (VII), col ricordare che

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)} ,$$

si otterranno subito le formule importanti:

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{d \operatorname{sn} v}{dv} = \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\[2ex] \dfrac{d \operatorname{cn} v}{dv} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \\[2ex] \dfrac{d \operatorname{dn} v}{dv} = -k^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \end{cases}$$

che potrebbero facilmente stabilirsi per via diretta dalle proprietà caratteristiche di sn v, cn v, dn v.*

* Del resto basta stabilire la prima delle (VIII) e le altre ne seguono derivando le (12).

Da queste formule si trae subito una conseguenza importante nel teorema: « Le funzioni ellittiche di Jacobi $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$ dipendono razionalmente dal quadrato k^2 del modulo come la funzione di Weierstrass $\wp(u; g_2, g_3)$ dagli invarianti. »

Queste tre funzioni sono infatti sviluppabili in serie di potenze di v convergenti entro il cerchio che ha per raggio la minima distanza dell'origine dai vertici della rete parallelogrammica: $2mK + 2nK'$; ma le formule (VIII) e quelle che se ne ottengono per successive derivazioni dimostrano che i coefficienti di queste serie sono polinomi razionali interi in k^2. Pei primi termini di questi sviluppi abbiamo

$$\begin{cases} sn\,v = v - (k^2+1)\dfrac{v^3}{1.2.3} + (k^4+14k^2+1)\dfrac{v^5}{\Gamma(5)} + \dots \\[2ex] cn\,v = 1 - \dfrac{v^2}{1.2} + (4k^2+1)\dfrac{v^4}{1.2.3.4} + \dots \\[2ex] dn\,v = 1 - \dfrac{k^2 v^2}{1.2} + k^2(k^2+4)\dfrac{v^4}{1.2.3.4} + \dots \end{cases}$$

Quando si vuol porre in evidenza, per le funzioni ellittiche di Jacobi, il valore del rapporto τ di periodi, ovvero quello del modulo k si scrive rispettivamente

$$sn(v, \tau)\ ;\quad cn(v, \tau)\ ;\ dn(v, \tau)$$

ovvero

$$sn(v, k)\ ;\ cn(v, k)\ ;\ dn(v, k).$$

Ambedue i sistemi di segnatura sono a determinazione univoca.

§ 123. Il quadrato k^2 del modulo come funzione modulare. Studiamo ora quale specie di funzione è il quadrato k^2 del modulo considerato come funzione del rapporto τ dei periodi. Dimostriamo in primo luogo che $J(\tau)$ è una funzione razionale del 6° grado in k^2; e infatti si ha

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad ; \quad k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \, ,$$

onde:

$$1 - k^2 k'^2 = \frac{(e_1 - e_3)^2 - (e_2 - e_3)(e_1 - e_2)}{(e_1 - e_3)^2} = \frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - e_1 e_2 - e_2 e_3 - e_3 e_1}{(e_1 - e_3)^2}$$

cioè

$$1 - k^2 k'^2 = \frac{3}{4} \frac{g_2}{(e_1 - e_3)^2}$$

Ne segue

$$J(\tau) = \frac{g_2^3}{16 (e_1 - e_2)^2 (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2} = \frac{\dfrac{g_2^3}{(e_1 - e_3)^6}}{16 \left(\dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \right)^2 \left(\dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \right)^2}$$

e infine

$$(IX) \quad J(\tau) = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 k'^2)^3}{k^4 k'^4} = \frac{4}{27} \frac{(1 - k^2 + k^4)^3}{k^4 (1 - k^2)^2}$$

formula che dimostra la proprietà enunciata. Si vede dunque che k^2 è una funzione della variabile complessa τ; di più essa è monodroma e ne dimostra la sua espressione

matitica

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$$

ed inoltre in tutto il semipiano positivo τ, l'asse reale escluso è finita e diversa da 0 e da 1 come lo dimostra la (IX) o la precedente. Ricerchiamo ora per quali valori τ' dell'argomento la funzione $k^2(\tau)$ riprenderà il medesimo valore. Intanto se

$$k^2(\tau') = k^2(\tau)$$

sarà a più forte ragione

$$\mathcal{J}(\tau') = \mathcal{J}(\tau)$$

e quindi

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

essendo $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione del gruppo modulare. D'altra parte la tabella (A) del §116 ci mostra immediatamente che l'effetto prodotto sopra $k^2(\tau)$ dalla sostituzione $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ è diversa a seconda del carattere di $\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}$ (mod 2) e precisamente si ha:

$$\left.\begin{aligned}
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) &= k^2(\tau) \quad \text{per} \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 0, 1\end{pmatrix}\\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) &= 1 - k^2(\tau) \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, 1\\ 1, 0\end{pmatrix}\\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) &= \frac{k^2(\tau)}{k^2(\tau)-1} \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 1\\ 0, 1\end{pmatrix}\\
k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) &= \frac{k^2(\tau)-1}{k^2(\tau)} \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, 0\\ 1, 1\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \pmod 2$$

$$k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{1}{1-k^2(\tau)} \quad \text{per} \quad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 1, & 1\end{pmatrix}$$

$$k^2\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \frac{1}{k^2(\tau)} \quad \text{"} \quad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}0, & 1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \pmod 2$$

Come si vede:

« La funzione $k^2(\tau)$ rimane invariata per tutte le quelle sostituzioni del gruppo modulare che appartengono al sottogruppo $\Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod 2$; per le altre sostituzioni lineari del gruppo essa assume i valori

$$\left(k^2,\ 1-k^2,\ \frac{k^2}{k^2-1},\ \frac{k^2-1}{k^2},\ \frac{1}{1-k^2},\ \frac{1}{k^2}\right).$$

Di qui, per quanto si è visto alla fine del § 123, si deduce altresì il teorema:

« Le funzioni ellittiche di Jacobi

$$sn(v,\tau),\quad cn(v,\tau),\quad dn(v,\tau),$$

considerate come funzioni del rapporto τ dei periodi, restano invariate per tutte le sostituzioni del sottogruppo $\Gamma_2 \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \pmod 2$. »

Come si trasformino per le altre sostituzioni del gruppo modulare sarà esaminato fra breve (v. § 125).

§ 124. Formole d'addizione per sn v, cn v, dn v. —

Diamo ora le formule d'addizione degli argomenti per le funzioni ellittiche di Jacobi sn v, cn v, dn v, mediante le quali si esprimono

$$sn(v_1+v_2),\quad cn(v_1+v_2),\quad dn(v_1+v_2)$$

rispettivamente per

$$\operatorname{sn} v_1,\ \operatorname{cn} v_1,\ \operatorname{dn} v_1;\ \operatorname{sn} v_2,\ \operatorname{cn} v_2,\ \operatorname{dn} v_2.$$

Prescindendo dal caso particolare in cui uno degli argomenti è non contenuto

$$K,\ iK',\ K+iK'$$

Dicendo le (VII) che esprimono $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per sn e le formule d'addizione dei seni di nella pag. (§94) troviamo subito

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(v+K) = a\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}\ ;\ \operatorname{cn}(v+K) = b\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}\ ;\ \operatorname{dn}(v+K) = \dfrac{c}{\operatorname{dn} v} \\ \operatorname{sn}(v+iK') = \dfrac{a'}{\operatorname{sn} v}\ ;\ \operatorname{cn}(v+iK') = b'\dfrac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\ ;\ \operatorname{dn}(v+iK') = c'\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v} \end{cases}$$

dove $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$; $\underline{a'}, \underline{b'}, \underline{c'}$ sono fattori costanti.*
Per determinare questi fattori si faccia nella prima e nella terza $v=0$, nella seconda invece $v=-K$ e nelle ultime tre si moltiplichi per $\underline{v}$ e si passi al limite per $v=0$. Avendo riguardo alle formule (8) (9*) (§121) si trova così per le formule domandate:

$$(13)\begin{cases} \operatorname{sn}(v+K) = \dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}\ ;\ \operatorname{cn}(v+K) = -k'\dfrac{\operatorname{sn} v}{\operatorname{dn} v}\ ;\ \operatorname{dn}(v+K) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} v} \\ \operatorname{sn}(v+iK') = \dfrac{1}{k\operatorname{sn} v}\ ;\ \operatorname{cn}(v+iK') = -\dfrac{i}{k}\dfrac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v}\ ;\ \operatorname{dn}(v+iK') = -i\dfrac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} v} \end{cases}$$

Ne seguono altresì le formole:

* Queste formule si possono anche stabilire subito direttamente considerando che in ciascuna di esse le funzioni a destra e sinistra hanno a comune periodi, infiniti ed infinitesimi.

(44) $sn(v+K+iK') = \frac{dn\,v}{k\,cn\,v}$; $cn(v+K+iK') = -\frac{ik'}{k\,cn\,v}$; $dn(v+K+iK') =$

$$= -ik'\frac{sn\,v}{cn\,v}$$

e facendo $v=0$ si hanno le formole furenstevoli

$$sn(K+iK') = \frac{1}{k}\,;\; cn(K+iK') = -\frac{ik'}{k}.$$

Per stabilire ora le formule generali d'addizione consideriamo le tre funzioni ellittiche:

$$sn\,v\,sn(v+\alpha)\;;\; cn\,v\,cn(v+\alpha)\;;\; dn\,v\,dn(v+\alpha),$$

(dove α è una costante qualunque) che hanno evidentemente i periodi $2K$, $2iK'$ e nel parallelogrammo fondamentale $(2K, 2iK')$ hanno due infiniti del 1° ordine nei punti

$$v_\infty \equiv iK'\,;\; -\alpha+iK'$$

con residui naturalmente eguali e di segno contrario. Ora i residui in $v=iK'$ delle tre funzioni sono rispettivamente

$$\frac{1}{k}\,sn(\alpha+iK')\,;\; -\frac{i}{k}\,cn(\alpha+iK')\,;\; -i\,dn(\alpha+iK),$$

ossia per le (13)

$$\frac{1}{k^2\,sn\,\alpha}\,;\quad -\frac{1}{k^2}\,\frac{dn\,\alpha}{sn\,\alpha}\,;\quad -\frac{cn\,\alpha}{sn\,\alpha}$$

Per conseguenza le due funzioni

$$dn\,v\,dn(v+\alpha) + k^2\,cn\,\alpha\,sn\,v\,sn(v+\alpha)$$

$$cn\,v\,cn(v+\alpha) + dn\,\alpha\,sn\,v\,sn(v+\alpha)$$

sono doppiamente periodiche e prive di poli, quindi costanti, e siccome per $v=0$ si riducono

no rispettivamente a $dn\alpha$, $cn\alpha$, avremo

$$(a)\begin{cases} cnv\, cn(v+\alpha) + dn\alpha\, snv\, sn(v+\alpha) = cn\alpha \\ dnv\, dn(v+\alpha) + k^2 cn\alpha\, cnv\, sn(v+\alpha) = dn\alpha \end{cases}$$

Permutiamo nella prima α con v e risolviamo le due equazioni così ottenute

$$\begin{cases} cnv\, cn(v+\alpha) + dn\alpha\, snv\, sn(v+\alpha) = cn\alpha \\ cn\alpha\, cn(v+\alpha) + dnv\, sn\alpha\, sn(v+\alpha) = cnv, \end{cases}$$

rispetto a $sn(v+\alpha)$. Otteniamo la prima formula d'addizione:

$$sn(v+\alpha) = \frac{sn^2 v - sn^2\alpha}{snv\, cn\alpha\, dn\alpha - sn\alpha\, cnv\, dnv},$$

alla quale si suol dare comunemente un'altra forma moltiplicando nel 2° membro numeratore e denominatore per

$$snv\, cn\alpha\, dn\alpha + sn\alpha\, cnv\, dnv.$$

Così il denominatore diventa

$$sn^2 v\, cn^2\alpha\, dn^2\alpha - sn^2\alpha\, cn^2 v\, dn^2 v = (sn^2 v - sn^2\alpha)(1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v)$$

e per ciò

$$sn(v+\alpha) = \frac{snv\, cn\alpha\, dn\alpha + sn\alpha\, dnv\, cnv}{1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v}.$$

Sostituendo nelle (a) si trovano le formule per $cn(v+\alpha)$ $dn(v+\alpha)$ che riepiloghiamo nel quadro:

$$(15)\begin{cases} sn(v+\alpha) = \dfrac{snv\, cn\alpha\, dn\alpha + sn\alpha\, cnv\, dnv}{1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\ cn(v+\alpha) = \dfrac{cnv\, cn\alpha - snv\, dnv\, sn\alpha\, dn\alpha}{1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\ dn(v+\alpha) = \dfrac{dnv\, dn\alpha - k^2 snv\, cnv\, sn\alpha\, cn\alpha}{1 - k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \end{cases}$$

L'osserverà che ciascuna di queste formole si può scrivere in guisa da far figurare soltanto la funzione ellittica a cui è relativa e la sua derivata. Così p. e.

$$sn(v+\alpha) = \frac{sn\,v\,\frac{dsn\,\alpha}{d\alpha} + sn\,\alpha\,\frac{dsn\,v}{dv}}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \quad \text{ecc.}$$

Dalle (15) cangiando α in $-\alpha$ e sommando risultano le altre

$$(15^*)\begin{cases} sn(v+\alpha)+sn(v-\alpha) = \dfrac{2\,sn\,v\,cn\,\alpha\,dn\,\alpha}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\[2ex] cn(v+\alpha)+cn(v-\alpha) = \dfrac{2\,cn\,v\,cn\,\alpha}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\[2ex] dn(v+\alpha)+dn(v-\alpha) = \dfrac{2\,dn\,v\,dn\,\alpha}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \end{cases}$$

A queste formule fondamentali d'addizione per le funzioni di Jacobi se ne collegano svariatissime altre delle quali citeremo qui soltanto quelle che danno i prodotti

$sn(v+\alpha)\,sn(v-\alpha)$; $cn(v+\alpha)\,cn(v-\alpha)$; $dn(v+\alpha)\,dn(v-\alpha)$.

Queste si deducono nel modo più semplice dalle (15*) cangiando rispettivamente nella prima, seconda e terza di esse v in

$$v+K \;;\; v+K+iK' \;;\; v+iK'$$

ed applicando le formule (13) (14) d'addizione dei semiperiodi. Si ottengono in tal guisa le formule domandate:

$$(16)\begin{cases} sn(v+\alpha)sn(v-\alpha) = \dfrac{sn^2 v - sn^2\alpha}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\[2ex] cn(v+\alpha)cn(v-\alpha) = \dfrac{cn^2 v\, cn^2\alpha - sn^2 v\, dn^2\alpha}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \\[2ex] dn(v+\alpha)dn(v-\alpha) = \dfrac{dn^2 v\, dn^2\alpha - k^2 sn^2\alpha\, cn^2 v}{1-k^2 sn^2\alpha\, sn^2 v} \end{cases}$$

§ 125. Trasformazioni [illegible] per snv, cnv, dnv - abbiamo veduto che le funzioni ellittiche di Jacobi

$$sn(v,\tau)\ ,\quad cn(v,\tau)\ ,\quad dn(v,\tau)$$

restano invariate quando si riporta τ dai periodi si eseguisce una sostituzione

$$\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

del sottogruppo $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ (mod 2). Ci proponiamo ora di esaminare come cangiano per le sostituzioni del gruppo modulare. Ma ripetutamente avremo qui 6 casi diversi a seconda del carattere della sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ (mod 2), ma basterà che ricerchiamo l'effetto prodotto dall'una e dall'altra delle due sostituzioni elementari del gruppo modulare

$$\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}.$$

Per ciò esprimeremo snv, cnv, dnv per le θ con le formole (C) del § 121 ed esamineremo il corrispondente effetto prodotto sulle θ.

Indicando con 2ϖ, $2\varpi'$ i nuovi periodi, por-

remo per ciò una volta

$$(\alpha) \quad \bar{\omega}' = \omega \qquad \bar{\omega} = -\omega'$$

ed una seconda volta

$$(\beta) \quad \bar{\omega}' = \omega' + \omega \qquad \bar{\omega} = \omega .$$

Poniamo

$$\bar{\sigma}_r u = \sigma_r(u \,|\, \bar{\omega}, \bar{\omega}')$$

e dalla tabella (A)(§ 116) avremo immediatamente:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\sigma} u = \sigma u \;,\; \bar{\sigma}_1 u = \sigma_3 u \;,\; \bar{\sigma}_2 u = \sigma_2 u \;,\; \bar{\sigma}_3 u = \sigma_1 u \\ \qquad e_1' = e_3 \;,\; e_2' = e_2 \;,\; e_3' = e_1 \end{array}\right\} \text{nel caso}(\alpha);$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\sigma} u = \sigma u \;,\; \bar{\sigma}_1 u = \sigma_1 u \;,\; \bar{\sigma}_2 u = \sigma_3 u \;,\; \bar{\sigma}_3 u = \sigma_2 u \\ \qquad e_1' = e_1 \;,\; e_2' = e_3 \;,\; e_3' = e_2 \end{array}\right\} \text{nel caso}(\beta)$$

Ora si hanno le formole

$$\left.\begin{array}{l} sn(v,\tau) = \sqrt{e_1 - e_3}\,\dfrac{\sigma u}{\sigma_3 u} \\ cn(v,\tau) = \dfrac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} \\ dn(v,\tau) = \dfrac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tau = \dfrac{\omega'}{\omega} \\ v = \sqrt{e_1 - e_3}\,.\,u \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} sn(\bar{v},\bar{\tau}) = \sqrt{e_1' - e_3'}\,\dfrac{\bar{\sigma} u}{\bar{\sigma}_3 u} \\ cn(\bar{v},\bar{\tau}) = \dfrac{\bar{\sigma}_1 u}{\bar{\sigma}_3 u} \\ dn(\bar{v},\bar{\tau}) = \dfrac{\bar{\sigma}_2 u}{\bar{\sigma}_3 u} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \bar{\tau} = \dfrac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} \\ \bar{v} = \sqrt{e_1' - e_3'}\,u \end{array}$$

e però avremo

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{e_3 - e_1}}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,v = -iv \quad \text{nel caso } (\alpha)$$

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}\,v = k'v \quad \text{nel caso } (\beta).$$

Le formule cercate sono dunque le seguenti

$$(X) \quad sn\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = i\,\frac{sn(v,\tau)}{cn(v,\tau)} \;;\; cn\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{cn(v,\tau)} \;,\; dn\left(iv, -\frac{1}{\tau}\right) = \frac{dn(v,\tau)}{cn(v,\tau)}$$

(XI) $\operatorname{sn}(k'v, \tau+1) = k'\frac{\operatorname{sn}(v,\tau)}{\operatorname{dn}(v,\tau)}$, $\operatorname{cn}(k'v, \tau+1) = \frac{\operatorname{cn}(v,\tau)}{\operatorname{dn}(v,\tau)}$, $\operatorname{dn}(k'v, \tau+1) = \frac{1}{\operatorname{dn}(v,\tau)}$

Se si osserva poi che nel primo caso il modulo trasformato è

$$k\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\sqrt{e_2 - e_1}}{\sqrt{e_3 - e_1}} = k'$$

e nel secondo

$$k(\tau+1) = \frac{\sqrt{e_3 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_2}} = -\frac{ik}{k'},$$

ponendo in evidenza i moduli anzichè il rapporto dei periodi potremo scrivere:

$$(X^*)\begin{cases} \operatorname{sn}(iv, k') = i\,\frac{\operatorname{sn}(v,k)}{\operatorname{cn}(v,k)}\,; \quad \operatorname{cn}(iv, k') = \frac{1}{\operatorname{cn}(v,k)}\,; \\ \operatorname{dn}(iv, k') = \frac{\operatorname{dn}(v,k)}{\operatorname{cn}(v,k)} \end{cases}$$

$$(XI^*)\begin{cases} \operatorname{sn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = k'\,\frac{\operatorname{sn}(v,k)}{\operatorname{dn}(v,k)}\,; \quad \operatorname{cn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{\operatorname{cn}(v,k)}{\operatorname{dn}(v,k)}\,; \\ \operatorname{dn}\left(k'v, \frac{ik}{k'}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn}(v,k)}. \end{cases}$$

Le (X*) dicansi le formule della **trasformazione complementare** come quelle che dànno il passaggio dalle funzioni ellittiche di modulo k a quelle col modulo complementare k'.

Capitolo XII

Le funzioni $\wp u$, σu e $\sigma_2 u$ per valori reali degli invarianti e le funzioni di Jacobi $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$

per valori reali del modulo k fra 0 e 1 - Integrali ellittici di Legendre e Jacobi

§ 126 - Osservazioni fondamentali sulla funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali.

Fino ad ora ci siamo occupati della teoria generale delle funzioni ellittiche e in particolare delle funzioni di Weierstrass e di Jacobi senza distinzione fra i valori reali od immaginari degli argomenti o delle funzioni. Ma nelle applicazioni pratiche è il reale soltanto che entra in considerazione ed è per ciò necessario che studiamo meglio l'andamento delle nostre funzioni, con speciale riguardo ai valori reali, per quei casi che si presentano nelle effettive applicazioni.

Le funzioni ellittiche si introducono sempre in pratica in problemi d'inversione, cioè nella integrazione delle funzioni razionali

$$F(w, \sqrt{P(w)}),$$

essendo $P(w)$ un polinomio di 3° o 4° grado (§ 114). E siccome i polinomi $P(w)$, che si presentano effettivamente, sono sempre a coefficienti reali e quindi anche ad invarianti reali g_2, g_3, così il problema fondamentale da porsi è il seguente: « Studiare l'andamento

della funzione

$$\wp(u; g_2, g_3)$$

per valori reali degli invarianti g_2, g_3.»

Cominciamo fin questo dall'osservare che dalla sostituzione della trascendente intera (V. § 92)

$$\sigma(u; g_2, g_3) = u - \frac{g_2}{60} u^5 + \dots\dots,$$

i coefficienti (essendo nel caso attuale) reali (perchè funzioni razionali intere a coefficienti razionali di g_2, g_3) dimostra:

«La funzione σ con invarianti reali è reale per valori reali e puramente immaginaria per valori puramente immaginari dell'argomento u.»

Lo stesso vale evidentemente per la funzione ζu mentre invece: «La funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali è reale sull'asse delle quantità reali e su quello delle immaginarie.»

Ma, in generale, quando una funzione φ uniforme è reale lungo un tratto rettilineo del piano complesso, si sa che in punti simmetrici rispetto a questo tratto assume valori coniugati*, onde si vede che: «La $\wp(u; g_2, g_3)$ in punti

* Tutto si riduce a dimostrare questa proposizione nel caso di un tratto dell'asse reale; il caso generale rifacendosi a questo con una sostituzione lineare intera non ci spaventa. Ora se a è un punto dell'asse reale, nel cui intorno

simmetrici rispetto all'asse delle quantità reali, delle immaginarie assume valori coniugati."

Dopo ciò è facile vedere che nel caso attuale ad ogni periodo 2Ω della $\wp u$ corrisponderà un periodo coniugato $2\Omega_0$.

Sia infatti 2Ω un periodo qualunque di $\wp u$; se u è reale $= x$ pei valori coniugati

$$x + 2\Omega \; ; \; x + 2\Omega_0$$

dell'argomento la $\wp$ assumerà valori coniugati e, poichè $\wp(x + 2\Omega) = \wp(x)$ è reale, sarà $\wp(x + 2\Omega_0) = \wp x$. Dunque la funzione

$$\wp(u + 2\Omega_0) - \wp u,$$

essendo nulla sull'asse reale, sarà costantemente nulla, cioè $2\Omega_0$ è anche un periodo.

La funzione $f(z)$ sia regolare, si avrà

$$(1) \quad f(z) = \sum a_n (z-\alpha)^n$$

e i coefficienti a_n saranno per ipotesi reali onde a valori coniugati di z entro il cerchio di convergenza di (1) corrispondono certamente valori coniugati per tutte le derivate. Ma allora se un prolungamento analitico di (1) è

$$f(z) = \sum b_n (z-\gamma)^n$$

si vede subito che un secondo prolungamento analitico sarà $f(z) = \sum \bar{b}_n (z-\bar{\gamma})^n$, essendo $\bar{\gamma}$, $\bar{b}_n$ le coniugate di γ, b_n. Così ad ogni ulteriore prolungamento analitico di $f(z)$ corrisponderà un prolungamento coniugato, ciò che dimostra il teorema.

do di $\wp u$ c.d.d.

Ora osserviamo che, fissati i valori (reali) degli invarianti g_2, g_3, i periodi fondamentali $2\omega, 2\omega'$ della $\wp u$ sono determinati soltanto a meno di una sostituzione lineare $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ del gruppo modulare.

Poiché il valore

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2}$$

dell'invariante assoluto è reale un corrispondente valore di $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ sarà certamente sul contorno del triangolo fondamentale (cfr. §119) e noi intenderemo con la notazione:

$$2\omega, \ 2\omega'$$

quei periodi fondamentali che rispondono ad un rapporto τ sul detto contorno. A questa coppia di periodi ne sostituiremo poi ognivolta una seconda <u>equivalente</u>, che indicheremo con

$$2\omega_1, \ 2\omega_3$$

più adatta, nei singoli casi, alla ricerca.

§ 127. **Caso del discriminante positivo $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ - Rappresentazione conforme di un rettangolo sul semipiano.** Dobbiamo distinguere, nel

nostro studio, due casi secondo che il valore del discriminante

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2$$

è positivo o negativo. Consideriamo qui il primo caso; allora si ha evidentemente

$$g_2 > 0 \qquad J(\tau) > 1$$

e però l'indice di τ nel triangolo fondamentale è sull'asse immaginario. Inoltre le tre radici e_1, e_2, e_3 dell'equazione cubica

$$4e^3 - g_2 e - g_3 = 0$$

sono, nel caso attuale, tutte tre reali. Dalle formule

$$g_2 = \frac{60}{\omega^4} \sum{}' \frac{1}{(2m+2n\tau)^4}; \quad g_3 = \frac{140}{\omega^6} \sum{}' \frac{1}{(2m+2n\tau)^6}$$

essendo reali le serie dei secondi membri, segue che ω^2 è reale e quindi ω reale o puramente immaginario e corrispondentemente ω' puramente immaginario o reale. Porremo nel 1.° caso:

$$\omega_1 = \omega \; ; \quad \omega_3 = \omega'$$

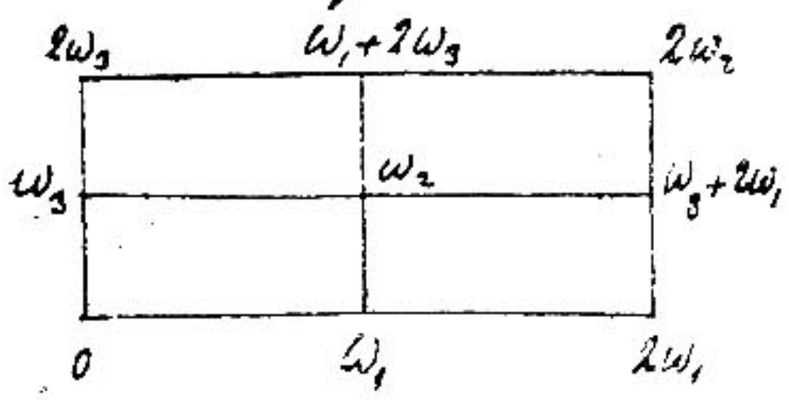
e nel secondo

$$\omega_1 = -\omega' \; ; \quad \omega_3 = \omega,$$

ciò che equivale a cangiare τ in $-\frac{1}{\tau}$. Ed avremo quindi che: «i due periodi fonda-

mentali 2ω, $2\omega_3$, saranno reale il primo, e puramente immaginario il 2°.»

Il parallelogrammo fondamentale dei periodi diventerà quindi, nel caso attuale, il rettangolo



$(0, 2\omega_1, 2\omega_1+2\omega_3, 2\omega_3)$.

Dividiamolo per mezzo delle linee mediane

$(\omega_1, \omega_1+2\omega_3)$ $(\omega_3, 2\omega_1+\omega_3)$

in quattro rettangoli parziali congruenti (v. fig.) ed osserviamo che, a causa della formula:

$$\wp(2\omega_1+2\omega_3-u) = \wp u,$$

nel terzo di questi rettangoli

$$(\omega_1+\omega_3,\ 2\omega_1+\omega_3,\ 2\omega_1+2\omega_3,\ \omega_1+2\omega_3)$$

la $\wp u$ riprende i valori del primo rettangolo

$$(0,\ \omega_1,\ \omega_1+\omega_3,\ \omega_3),$$

nel quale adunque prenderà ogni suo valore una sola volta. In punti simmetrici rispetto all'asse reale, o immaginario, la $\wp u$ assume valori coniugati e lo stesso accade quindi in punti simmetrici rispetto alle due linee mediane sulle quali adunque $\wp u$ è reale*. Ne segue che nel secondo e quarto dei detti rettangoli minori $\wp u$ prende i valori coniugati a quelli del primo e terzo rettangolo.

* Ciò risulta anche immediatamente dalle formule di addizione dei iperperiodi (§94) e radici e_1, e_2, e_3 essendo qui reali.

Su tutto il contorno del primo rettangolo

$$(0\,,\ \omega_1\,,\ \omega_1+\omega_3\,,\ \omega_3)$$

la funzione $\wp u$ è reale e poichè, in prossimità di $u=0$ sull'asse reale è grandissima e positiva e invece sull'asse immaginario grandissima negativa, come risulta dallo sviluppo

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{28}u^2 + \cdots\cdots$$

nell'intorno di $u=0$, vediamo che, percorrendo il detto contorno nel senso positivo a partire dall'origine la $\wp u$ andrà continuamente decrescendo da $+\infty$ a $-\infty$. Ora nei vertici:

$$\omega_1\,,\ \omega_1+\omega_3 = \omega_2\,,\ \omega_3$$

la $\wp u$ assume i valori

$$\wp\omega_1 = e_1\ ;\ \wp\omega_2 = e_2\ ;\ \wp\omega_3 = e_3\,.$$

Si vede dunque che e_1, e_2, e_3 risultano così ordinate per grandezza decrescente:

$$e_1 > e_2 > e_3\ ;$$

e, poichè

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0\,,$$

sarà e_1 positiva, e_3 negativa. Quanto al segno di e_2, a causa di

$$g_3 = 4e_1e_2e_3\,,$$

sarà evidentemente opposto a quello di g_3.
Ogni valore reale è già preso dalla $\wp u$ due volte in punti non equivalenti dei lati e delle mediane

del rettangolo dei periodi, onde segue che nell'interno di ciascuno dei quattro rettangoli minori la $\wp u$ è sempre complessa e perciò il coefficiente dell'immaginario in $\wp u$ serba ivi sempre lo stesso segno. Così, p.e., nell'interno del primo rettangolo $(0, \omega_1, \omega_1+\omega_2, \omega_3)$, a causa dell'andamento da $+\infty$ a $-\infty$ sul contorno percorso in verso positivo, il coefficiente dell'immaginario in $\wp u$ è sempre negativo. È chiaro poi che ogni valore

$$s = \alpha + i\beta,$$

con $\beta \neq 0$, sarà preso da $\wp u$ una ed una sola volta nell'interno del detto rettangolo. D'altronde $\frac{ds}{du} = \wp' u$ non vi si annulla mai nè diventa infinita salvo ai quattro vertici $0, \omega, \omega_1, \omega_3$; perciò se poniamo

$$s = \wp u$$

ed interpretiamo s nel suo piano complesso vediamo che:

«La funzione $s = \wp u$ dà la rappresentazione conforme biunivoca del rettangolo $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sul semipiano negativo s; gli unici punti eccezionali della rappresentazione sono i vertici del rettangolo.»

Si osservi infine che, dando a g_2, g_3 convenienti valori reali, con $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, si può far coincidere il nostro rettangolo con un rettangolo qualunque dato a priori, or

da risulta:

« Il problema della rappresentazione conforme di un rettangolo sopra un semipiano conduce direttamente alla funzione di Weierstrass $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali e discriminante positivo. »

§ 128 _ **Andamento della $\wp'u$ - La cubica** $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$. Osserviamo anche l'andamento di $\wp'u$ sul contorno del rettangolo $(0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Mentre $\wp u$ lungo i quattro tratti del contorno varia rispettivamente negli intervalli

u da $0 \ldots\ldots \omega_1$; $\omega_1 \ldots\ldots \omega_2$; $\omega_2 \ldots\ldots \omega_3$; $\omega_3 \ldots\ldots 0$.

$\wp u$ " $+\infty \ldots\ldots e_1$; $e_1 \ldots\ldots e_2$; $e_2 \ldots\ldots e_3$; $e_3 \ldots\ldots -\infty$,

vediamo che l'andamento di

$$\wp' u = -4\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}$$

è il seguente:

u da $0 \ldots\ldots \omega_1$	u da $\omega_1 \ldots\ldots \omega_2$	u da $\omega_2 \ldots\ldots \omega_3$	u da $\omega_3 \ldots\ldots 0$
$\wp' u$ reale negativa da $-\infty \ldots\ldots 0$	$\wp' u$ immaginaria positiva	$\wp' u$ reale positiva da 0 a 0	$\wp' u$ immaginaria negativa

In particolare si osservi: i valori dell'argomento u che rendono simultaneamente reali $\wp u$, $\wp' u$ sono della forma

$$u = \zeta \; ; \quad u = \zeta + \omega_3 \quad (\zeta \text{ reale}).$$

Si ottiene una chiara interpretazione geometrica di $\wp u$ reale delle funzioni $\wp u$, $\wp' u$ nel modo seguente. Essendo x, y coordinate cartesiane di un punto mobile in un piano, si consideri la curva de

finita dalle equazioni

$$x = \wp u \quad ; \quad y = \wp' u ,$$

che è evidentemente la cubica

$$(1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 .$$

Ora importa osservare che: « questa equazione rappresenta la più generale curva del 3° ordine, a meno di trasformazioni proiettive. » Per vederlo nel modo più semplice passiamo alle coordinate omogenee ponendo

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad ; \quad y = \frac{x_2}{x_3} ,$$

sicchè l'equazione diventa:

$$(2) \quad x_2^2 x_3 - 4x_1^3 + g_2 x_1 x_3^2 + g_3 x_3^3 = 0 .$$

Se esaminiamo quale particolare relazione ha l'attuale triangolo di riferimento con la curva, vediamo che hanno luogo le seguenti proprietà:

1ª Il vertice $(0,1,0)$ è un flesso della curva e il lato $x_3=0$ è la corrispondente tangente di flesso.

2ª Il lato $x_2=0$ è la polare armonica del flesso (cioè insieme colla tangente $x_3=0$, di flesso, costituisce la conica polare del flesso);

3ª il lato $x_1=0$ è la polare lineare del vertice $(1,0,0)$ punto d'incontro delle due rette ora dette.

Viceversa si vedrà subito che, preso il triangolo di riferimento nel modo descritto, si può dare all'equazione della curva del 3° ordine la forma norma-

le (2) di Weierstrass. Abbiamo dunque il risultato: « Le coordinate di un punto mobile sopra una curva generale del 3° ordine possono esprimersi per funzioni ellittiche di un parametro. »

L'asserzione di più che, se l'equazione data dalla cubica è a coefficienti reali, la trasformazione indicata si può ottenere per via reale e perciò gl'invarianti g_2, g_3 saranno reali*. Ritornando ora al caso particolare che trattiamo attualmente del discriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, e riassumiamo il corso reale della nostra curva (1).

Per quanto si è visto sopra, otteniamo effettivamente la nostra curva, prendendo

$$u = \zeta \quad (\zeta \text{ reale}),$$

ovvero

$$u = \zeta + \omega_3 .$$

Basterà naturalmente far variare ζ fra $-\omega_1$ e $+\omega_1$, perchè quando ζ aumenta di multipli di $2\omega_1$, il punto della curva riprende la medesima posizione. Anzi a causa delle formule

$$\wp(-u) = \wp u$$

$$\wp'(-u) = -\wp' u$$

---

* Prescindendo da coefficienti numerici, g_2, g_3 coincidono precisamente con gli invarianti S, T di quarto e di 6° grado rispettivamente della forma cubica ternaria.
(V. Salmon - Algèbre supérieure)

basterà far crescere ζ da 0 a ω_1 e si otterrà una prima metà della curva che, ribattuta attorno all'asse delle x darà la seconda metà.

Ora quando u cresce da 0 ad ω_1 la $x = \wp u$ decresce da $+\infty$ ad $e_1 > 0$; mentre $y' = \wp' u$ cresce da $-\infty$ a 0, sicchè si ha una prima metà di un ramo infinito della curva al di sotto dell'asse delle x, che esce dal punto $(e_1, 0)$ dell'asse delle x ortogonalmente a quest'asse.

Ribaltando questa prima metà del ramo attorno all'asse x si ottiene il ramo completo infinito che contiene tutti e soli i punti reali della curva corrispondenti a valori reali di u.

Veniamo a considerare gli altri valori. Di metà dànno ancora punti reali della curva ... imaginari della forma $u = \zeta + \omega_3$, dove facciamo crescere ζ da 0 a ω_1; allora $x = \wp u$ crescerà da e_3 a e_2 ed $y = \wp' u$ passerà per una serie di valori positivi annullandosi agli estremi. Conseguentemente avremo un tratto finito della nostra curva che parte dal punto $(e_3, 0)$ dell'asse delle x per arrivare al punto $(e_2, 0)$ e che sarà ortogonale negli estremi all'asse stesso.

Per ribaltamento attorno all'asse Ox otteniamo la seconda parte reale della cubica costituita da-

una parte chiusa (ovale). Dunque:

„La cubica

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

nel caso di

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$$

consta di due rami diversi; l'uno infinito, l'altro è un ovale.„

§ 129. **Alcune applicazioni geometriche.** La rappresentazione parametrica dei punti di una cubica generale per mezzo delle funzioni ellittiche dà luogo ad una serie di interessanti applicazioni geometriche di cui qui accenneremo solo le fondamentali, avvertendo che nel presente paragrafo non facciamo più alcuna ipotesi speciale riguardo agli invarianti g_2, g_3 che possono essere reali o complessi.

Un punto mobile (x, y) della cubica è dato dalle formule

$$x = \wp u, \quad y = \wp' u;$$

ad ogni valore di u corrisponde un unico punto della curva ed il punto resta il medesimo per valori congrui dell'argomento.

Viceversa, se due punti u_1, u_2 della curva coincidono si ha $u_1 \equiv u_2$, cioè

$$u_1 = u_2 + 2m\omega_1 + 2n\omega_3 .$$

Cerchiamo ora la condizione perchè tre punti u_1, u_2, u_3 della cubica siano in linea retta. Se $y = ax+b$ è l'equazione della retta che li contiene*, la funzione ellittica del 3.° ordine

$$\wp' u - a\wp u - b$$

con un polo di 3.° ordine nell'origine ha gli infinitesimi incongrui u_1, u_2, u_3 e perciò si ha

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0$$

È questa, come subito si vede, la condizione necessaria e sufficiente perchè i tre punti u_1, u_2, u_3 siano allineati. (Teorema d'Abel).

Di qui si può dedurre di nuovo il teorema di addizione per la $\wp u$ sotto la forma del §96

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp(u_1+u_2) & -\wp'(u_1+u_2) \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 \\ 1 & \wp u_2 & \wp' u_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Più in generale, consideriamo una curva d'ordine n

$$f(x, y) = 0$$

e i suoi punti d'incontro con la cubica. La

* Il caso in cui l'equazione della retta sia $x = k$ rientra in questo, uno dei tre punti d'incontro essendo allora l'infinito in $u = 0$

funzione $f(\wp u, \wp' u)$ è una funzione ellittica d'ordine $3n$ che ha dunque $3n$ punti d'infinitesimo $u_1, u_2, \ldots u_{3n}$ ed un solo infinito d'ordine $3n$ in $u=0$*, sicchè, pel teorema d'Abel si ha:

$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{3n} \equiv 0$$

Questa esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè $3n$ punti $u_1, u_2, \ldots u_{3n}$ della cubica costituiscano l'intersezione della cubica con una curva d'ordine n.

Applichiamo questi teoremi generali alla soluzione di due problemi.

1°. Tangenti che da un punto della cubica passano ad la cubica stessa. Sia u il parametro del punto e v il punto di contatto di una delle tangenti che passano, dovremo avere, pel teorema d'Abel

$$u + 2v \equiv 0;$$

ciò che dà per v i quattro valori distinti

$$-\frac{u}{2};\ -\frac{u}{2}+\omega_1;\ -\frac{u}{2}+\omega_2;\ -\frac{u}{2}+\omega_3,$$

onde si conclude che da ogni punto della cubica si possono condurre quattro tangenti alla cubica.

Se la cubica è reale e a discriminante positivo

* Può anche darsi che, mancando alcuni termini in $f(x,y)$, la funzione ellittica $f(\wp u, \wp' u)$ sia d'ordine minore di $3n$, p.e. $3n-2$; allora 2 delle intersezioni sono raccolte nel flesso all'infinito.

vediamo che da ogni punto del ramo infinito partono quattro tangenti tutte reali alla curva, laddove da un punto dell'ovale partono tangenti tutte immaginarie.

2: „Punti d'inflessione„ Un flesso della curva è un punto dove la tangente ha tre punti coincidenti a comune con la curva.

Il parametro u di un flesso deve soddisfare alla condizione (necessaria e sufficiente)

$$\wp u \equiv 0 \;;$$

si hanno quindi <u>nove</u> flessi con argomento

$$u = \frac{2m\omega_1 + 2n\omega_2}{3} \;; \quad \left.\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2$$

Se u_1, u_2 sono due flessi ed u_3 il punto ove la loro congiungente incontra la cubica, si ha

$$u_1 + u_2 + u_3 \equiv 0 \;; \quad \wp u_1 \equiv 0 \;; \quad \wp u_2 \equiv 0$$

onde anche $\wp u_3 \equiv 0$; ne segue il noto teorema:

„La congiungente due flessi di una cubica incontra la curva in un terzo flesso.„

Ritornando al caso di una cubica reale a discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ vediamo allora che, dei 9 flessi, 3 soltanto sono reali, e cioè i flessi

$$0, \quad \frac{2\omega_1}{3}, \quad \frac{2\omega_3}{3}$$

situati sul ramo infinito della curva.

§ 130. **La $\wp(u; g_2, g_3)$ con invarianti reali e discriminante negativo.** Veniamo al

caso del discriminante negativo riprendendo le considerazioni dei paragrafi 126, 127. Essendo

$$g_2^3 - 27 g_3^2 \lessgtr 0$$

potrà essere $g_2 > 0$ o $g_2 < 0$; nel 1.° caso sarà:

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} < 0 \quad ;$$

e nel secondo:

$$0 < J < 1 \, ,$$

cioè $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ sarà nel 1.° caso sul lato rettilineo $\mathcal{R}(\tau) = -\frac{1}{2}$ del triangolo fondamentale; nel secondo, invece, sull'arco circolare $|\tau| = 1$. Insieme ai periodi 2ω, $2\omega'$ la $\wp u$ ammetterà i periodi coniugati $2\omega_0$, $-2\omega_0'$ * e riscriveremo quindi le formule:

$$\begin{cases} -\omega_0' = \alpha \omega' + \beta \omega \\ \omega_0 = \gamma \omega' + \delta \omega \end{cases}$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi, e, poichè queste formole debbono anche valere cambiando i in $-i$, si vede che anche $2\omega_0$, $-2\omega_0'$ saranno periodi fondamentali cioè sarà $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ora essendo

$$-\tau_0 = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

il punto τ è equivalente rispetto al gruppo modulare al simmetrico rispetto all'asse immaginario

---

* Prendiamo $-2\omega_0'$ in luogo di $2\omega_0'$ perchè il rapporto $-\frac{\omega_0'}{\omega_0}$ si confonda col coefficiente dell'immaginario positivo.

rio e sarà perciò

a) $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \mp 1 \\ \pm 1, & 0 \end{pmatrix}$ se τ è sull'arco circolare

b) $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1, & \pm 1 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}$ se τ è sul lato rettilineo $\mathcal{R}(\tau) = -\frac{1}{2}$.

In ambedue i casi diciamo che « Si possono sostituire a $2\omega, 2\omega'$ due nuovi periodi fondamentali $2\omega_1$, $2\omega_3$ tali che l'uno sia coniugato dell'altro. »

Pongasi invero

$$\omega_1 = r\omega + s\omega'$$

indi ω_3 alla quantità coniugata

$$\omega_3 = r\omega_0 + s\omega_0' = (r\delta - s\beta)\omega + (r\gamma \mp s\alpha)\omega';$$

basterà che determiniamo gli interi r, s in guisa che sia

$$r(r\gamma - s\alpha) - s(r\delta - s\beta) = 1$$

cioè

$$\gamma r^2 - (\alpha + \delta) rs + \beta s^2 = 1,$$

il che è possibile tanto nel caso a), come nel caso b).

Scelti così i due periodi fondamentali $2\omega_1$, $2\omega_3$ in guisa che l'uno sia coniugato dell'altro e posto

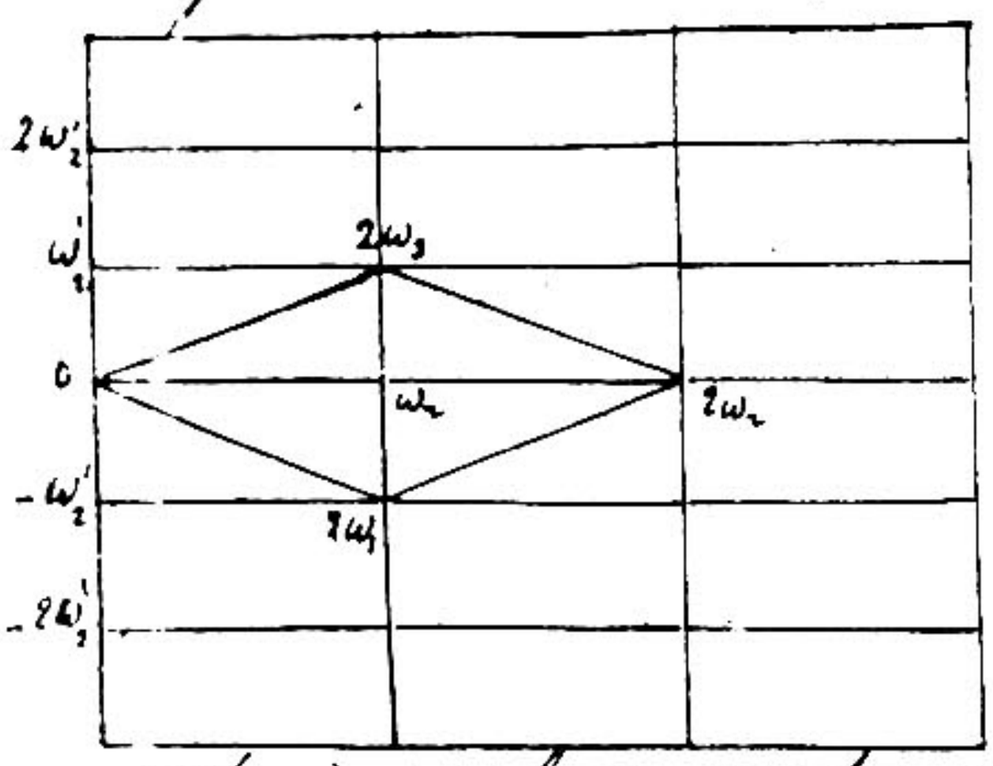
$$\omega_3 = a + ib \; ; \; \omega_1 = a - ib,$$

e supposto, come è lecito, $a > 0$, sarà altresì $b > 0$.

La funzione $\wp u$ ammetterà altresì i due periodi

$$2\omega_2 = 2\omega_3 + 2\omega_1 = 4a$$
$$2\omega_2' = 2\omega_3 - 2\omega_1 = 4ib \;;$$

reale il primo e puramente immaginario il secondo, come nel caso del discriminante positivo. Per altro è da osservarsi che, nel caso attuale, questi due periodi $2\omega_2$, $2\omega_2'$, non sono più fondamentali come prima poichè il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ della sostituzione che li lega ai fondamentali non è uguale all'unità, ma a 2.



Nel rettangolo (v. fig.ª)

$$(0,\ \omega_2,\ 2\omega_3,\ \omega_2')$$

la funzione $\wp u$, a causa della formula

$$\wp(2\omega_3 - u) = \wp u$$

riprende due volte ogni valore, nel suo contorno essa è reale coll'andamento seguente:

u da $0 \ldots \omega_2$; $\omega_2 \ldots \omega_2 + \omega_2' = 2\omega_3$; $2\omega_3 \ldots \omega_2'$; $\omega_2' \ldots 0$;
u da $+\infty \ldots e_2$; $e_2 \ldots -\infty$; $+\infty \ldots e_2$; $e_2 \ldots -\infty$;

e corrispondentemente la $\wp u$ offre l'andamento seguente:

$$\underbrace{(0,\ \omega_2)}_{\wp u \text{ reale negativa}} \;;\; \underbrace{(\omega_2,\ 2\omega_3)}_{\wp u \text{ immag. posit.}} \;;\; \underbrace{(2\omega_3,\ \omega_2')}_{\wp u \text{ reale posit.}} \;;\; \underbrace{(\omega_2',\ 0)}_{\wp u \text{ immag. negat.}}$$

Nell'interno del detto rettangolo la $\wp u$ non è mai reale e perciò il coefficiente dell'immaginario in

$\wp u$ conserva sempre lo stesso segno che si vede essere il negativo. Vi ha un solo punto nell'interno ove $\wp u$ si annulla ed è il centro del rettangolo $u = \omega_3$ ove $\wp u = e_3$. L'immagine di questo rettangolo nel piano $s = \wp u$ ricubre due volte il semipiano negativo avendo in $s = e_3$ un punto di diramazione del 1° ordine.

Si osserva che, per l'osservazione sulla ubicazione dei periodi si ha: «La radice media e_2 è reale mentre e_1, e_3 sono immaginarie coniugate, la e_1 avendo positivo il coefficiente dell'immaginario; inoltre e_2 è positiva o negativa con g_3».
Dallo studio precedente risulta che, se un argomento u rende simultaneamente

$$\wp u \quad , \wp' u$$

reali, sarà u reale a meno di multipli del periodo immaginario $2\omega_3$. In questo caso adunque, per avere tutti i punti reali della cubica

$$x = \wp u \quad ; \quad y = \wp' u,$$

basterà far variare u per valori reali da $u = -\omega_2$ ad $u = \omega_2$ e quindi:
«La cubica $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, nel caso di $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$, consta di un solo ramo infinito.»
Anche in questo caso avremo tre soli flessi reali in linea retta, corrispondenti agli argomenti

$$u = 0 \quad ; \quad \frac{2\omega_1 + 2\omega_2}{3} \quad ; \quad \frac{4\omega_1 + 4\omega_2}{3} .$$

§ 131. - Degenerazione della funzione $\wp(u; g_2, g_3)$ nel caso $g_2^3 - 27 g_3^2 = 0$. -

Esaminiamo ora quello che accade della funzione $\wp(u \mid \omega, \omega')$, quando il rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi si fa tendere per valori puramente immaginarî a ∞ ovvero a 0, allora $J(\tau)$ diventa infinito e il discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2$, supposto che g_2 non vada a zero, tende a zero.

a) - Le diamo ad ω un valore reale fisso e facciamo tendere $\omega' = i\rho\omega$, per valori puramente immaginarî, all'infinito, la serie doppia (§84) che ci definisce la $\wp u$ si cangia nella serie semplice:

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega)^2} + \frac{1}{(u + 2m\omega)^2} \right\} - \frac{2}{(2\omega)^2} \sum \frac{1}{m^2}.$$

Ora, a causa delle formole del §62, si ha

$$\frac{1}{u^2} + \sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{(u - 2m\omega)^2} + \frac{1}{(u + 2m\omega)^2} \right\} = \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

e possiamo quindi enunciare il risultato:

« Se, avendo ω un valore fisso reale si fa crescere ω' all'infinito per valori puramente immaginarî la $\wp(u \mid \omega\, \omega')$ genera nella funzione circolare

$$(A) \qquad \wp u = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}.$$

Conseguentemente la ζu e la σu degenerano anch'esse secondo le formole

$$\zeta u = \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2 u$$

$$\sigma u = e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right).$$

b) Teniamo ora fisso $\omega' = i\beta$ puramente immaginario e facciamo crescere ω reale all'infinito, con che τ convergerà sull'asse immaginario a 0; si vedrà che la $\wp u$ degenera allora nella funzione iperbolica

$$(B) \qquad \wp u = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\beta}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi u}{2\beta}\right)}.$$

Nei modi (A) (B) di degenerazione della $\wp u$ è chiaro che due delle radici e_1, e_2, e_3 vengono a coincidere e, precisamente, in (A) e_2 viene a coincidere con e_3, e nel caso (B) e_2 con e_1.

c) Possiamo infine considerare un terzo modo di degenerazione corrispondente al caso che si abbia insieme $g_2 = g_3 = 0$. Basta per ciò far crescere ω, ω' simultaneamente all'infinito conservando fisso il loro rapporto; allora si ha

$$\wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta u = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0.$$

§ 132 - **Le funzioni** $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ **per valori reali e < 1 di k^2.** Le funzioni ellittiche

di Jacobi

$$\operatorname{sn} v, \ \operatorname{cn} v, \ \operatorname{dn} v$$

che si presentano nelle applicazioni, quando nella trattazione di un problema che porta alle funzioni ellittiche si vogliano introdurre quelle di Jacobi in luogo della $\wp$ di Weierstrass, corrispondono sempre al caso in cui gli invarianti g_2, g_3 sono reali e il discriminante $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$. Allora e_1, e_2, e_3 sono reali e disposti per ordine decrescente e le formole a), b), c), (§ 131) danno per

$$\sqrt{e_1 - e_2}, \quad \sqrt{e_1 - e_3}, \quad \sqrt{e_2 - e_3}$$

valori reali e positivi; quindi

$$k = \frac{\sqrt{e_2 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad k' = \frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3}}$$

sono reali, positivi e < 1; e le quantità di Jacobi

$$K = \omega \sqrt{e_1 - e_3}, \quad K' = \frac{\omega}{i} \sqrt{e_1 - e_3}$$

sono pure reali e positive.

Le tre funzioni di Jacobi

$$\operatorname{sn} v, \ \operatorname{cn} v, \ \operatorname{dn} v$$

sono reali sull'asse reale, mentre sull'asse immaginario la prima è puramente immaginaria e le due ultime sono ancora reali. Osserviamo ora specialmente l'andamento di $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$ per valori reali dell'argomen

to. Le formole

$$sn^2 v + cn^2 v = 1$$

$$dn^2 v + k^2 cn^2 v = 1$$

dimostrano che $sn\,v$, $cn\,v$ sono sempre compresi fra -1 e $+1$ mentre $dn\,v$, che non si annulla mai sull'asse reale, è sempre positivo e compreso fra 1 e k'.

Più in particolare, crescendo v da 0 a K, $sn\,v$ cresce da 0 ad 1, poi da K a $2K$ decresce da 1 a 0. Secondo la formola:

$$sn(2K+v) = -sn\,v,$$

$sn\,v$ cangia di segno fra $2K$ e $4K$, e al di là di $4K$ riprende periodicamente i medesimi valori. Analogamente succede per $cn\,v$ e le curve:

$$y = sn\,x\,; \quad y = cn\,x\,,$$

hanno quindi una forma sinusoidale.

La curva

$$y = dn\,x$$

ha il periodo $2K$ parallelo all'asse delle x e rimane tutto al di sopra di quest'asse avendo per ordinata massima

$$y = 1 \quad \text{per } x = 0\,;\ \pm 2K\,;\ \pm 4K \ldots\ldots$$

e per ordinata minima

$$k' \quad \text{per } x = \pm K\,;\ \pm 3K\,;\ \pm 5K\,;\ldots$$

Ogni tratto, da y a $y = k'$, volge prima la concavità, indi la convessità all'asse delle x flettendosi nel punto ove

$$sn^2 x = cn^2 x = \frac{1}{2}.$$

Mediante le formole di trasformazione complementare [(X*) §125] si può ridurre il calcolo delle funzioni di Jacobi, nel caso che ci occupa, e per valori complessi qualunque dell'argomento al caso di argomento reale, cioè si possono separare in

$$sn(\alpha + i\beta) \quad cn(\alpha + i\beta) \quad dn(\alpha + i\beta)$$

la parte reale dall'immaginaria. Si ha invero, per le formole citate:

$$sn(i\beta, k) = i\,\frac{sn(\beta, k')}{cn(\beta, k')}$$

$$cn(i\beta, k) = \frac{1}{cn(\beta, k')}$$

$$dn(i\beta, k) = \frac{dn(\beta, k')}{cn(\beta, k')}\ ;$$

e, servendosi delle formule d'addizione si ottengono subito le formule richieste.

Così, p. e., si ha:

$$sn(\alpha + i\beta, k) = -\frac{sn(\alpha, k)\,cn(i\beta, k)\,dn(i\beta, k) + sn(i\beta, k)\,cn(\alpha, k)\,dn(\alpha, k)}{1 - k^2 sn^2(\alpha, k)\,sn^2(i\beta, k)}$$

e, per ciò:

$$sn(\alpha + i\beta, k) = \frac{sn(\alpha, k)\,dn(\beta, k') + i\,sn(\beta, k')\,cn(\beta, k')\,cn(\alpha, k)\,dn(\alpha, k)}{cn^2(\beta, k') + k^2 sn^2(\alpha, k)\,sn^2(\beta, k')}$$

e analogamente per $dn(\alpha+i\beta)$, $cn(\alpha+i\beta)$.

§133. Integrale ellittico di 1ª specie di Legendre - Integrali completi K, K' - Degenerazione di $sn\,v$, $cn\,v$, $dn\,v$. - Dalla formola

$$\frac{dsn\,v}{dv} = cn\,v\,dn\,v = \sqrt{(1-sn^2 v)(1-k^2 sn^2 v)},$$

ponendo

$$sn\,v = x$$

ed osservando che per $v=0$ si ha $x=0$, risulta:

$$(3) \qquad v = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

L'integrale del secondo membro è l'integrale ellittico di prima specie di Legendre. Limitandoci al caso delle applicazioni in cui k è reale, positivo <1, e la x varia da -1 a $+1$, si può ~~ponere~~

$$x = sen\,\varphi$$

dove φ è un angolo reale e ne risulta

$$(4) \quad v = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 sen^2\varphi}}.$$

Legendre indicava col simbolo $F(\varphi, k)$ l'integrale del secondo membro e indicava col nome di **amplitudine** l'intervallo φ d'integrazione, onde appunto è derivato il nome di **seno amplitudine** alla funzione inversa

$$x = sn\,v = sen\,\varphi.$$

Osservando che si ha:

$$\operatorname{sn} K = 1,$$

si ha subito per K l'espressione per integrale definito

$$(5) \qquad K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Si può ottenere un'espressione analoga per K' osservando che, a causa delle formole

$$\operatorname{sn}(v+K) = \frac{\operatorname{cn} v}{\operatorname{dn} v}; \quad \operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k},$$

facendo crescere v pel cammino rettilineo da K a $K+iK'$ la $x = \operatorname{sn} v$ cresce, per valori reali, da 1 a $\frac{1}{k}$ e si ha perciò:

$$K+iK' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

onde

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Cangiando in questo integrale la variabile x con la x', col porre:

$$k^2x^2 + k'^2x'^2 = 1,$$

si ottiene subito

$$(6) \qquad K' = \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{(1-x'^2)(1-k'^2x'^2)}} = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right),$$

formola che, messa a confronto con la (5) dimostra che K' si esprime per k' come K per k; la qual cosa si poteva anche dedurre dalle formole di trasformazione complementare.

Per mezzo di queste formole vediamo subito come degenerano le funzioni ellittiche di Jacobi nei casi limite

$$k = 0 \ , \quad k = 1 \ .$$

Si ha infatti, per $k=0$

$$K = \frac{\pi}{2} \ ; \quad K' = \infty$$

$$sn\, v = sen\, v \ ;$$

cioè

(7) $sn(v,0) = sen\, v \ ; \quad cn(v,0) = \cos v \ ; \quad dn(v,0) = 1 \ .$

Similmente dalle formole stesse, o da quelle della trasformazione complementare, deduciamo:

(8) $sn(v,1) = tang\, v \ ; \quad cn(v,1) = dn(v,1) = \frac{1}{\cos v} \ .$

§ 134. Gli integrali di II.ª specie $E(v)$, $Z(v)$ di Legendre e Jacobi.

Nella teoria di Legendre, oltre all'integrale ellittico di 1.ª specie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \ ,$$

si presentavano gli altri due integrali elementari

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \ ; \quad \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \ ,$$

che Legendre chiamava rispettivamente integrali di 2.ª e 3.ª specie. L'integrazione di ogni funzione razionale

$$F\left(x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right)$$

si riportava a funzioni ordinarie e ad un aggregato di integrali elementari delle tre specie (cf. § 115). Per il confronto delle formole della teoria di Legendre, le quali si trovano adoperate in trattati e memorie classiche, con quelle di Weierstrass diamo le formole di passaggio alle funzioni ζ e σ di Weierstrass.

Ponendo $x = sn(v; k)$ l'integrale di 2.ª specie di Legendre diventa

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^v dn^2 v\, dv.$$

Siccome la funzione $dn^2 v$ ha residui tutti nulli (perchè nel parallelogrammo dei periodi $2K$, $2iK'$, $dn^2 v$ ha un solo infinito), l'integrale stesso è una funzione monodroma di v che s'indica, secondo Legendre e Jacobi con

$$E(v) = \int_0^v dn^2 v\, dv.$$

Per esprimere $E(v)$ coi simboli di Weierstrass osserviamo che si ha:

$$dn^2 v = \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} = 1 + \frac{e_3 - e_2}{\wp u - e_3} \quad (v = u\sqrt{e_1 - e_3})$$

e per le formule d'addizione dei semiperiodi

$$dn^2 v = \frac{e_1}{e_1 - e_3} - \frac{1}{e_1 - e_3}\,\wp(u + \omega').$$

Risulta quindi

$$E(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1 - e_3}}\left\{\frac{\sigma'(u+\omega')}{\sigma(u+\omega')} + e_1 u - \eta'\right\} \qquad (I)$$

ovvero

$$(I)\quad E(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left\{\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} + e_1 u\right\}, \quad v = u\sqrt{e_1-e_3},$$

che è la formola richiesta.

Indicando poi, come faceva Legendre, con E' l'integrale completo:

$$E' = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \int_0^K dn^2 v\,dv,$$

avremo dalla (I)

$$(I^*)\quad E' = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\,(e_1\omega + \eta).$$

Ponendo $x = \operatorname{sen}\varphi$, Legendre usava per l'integrale di 2ª specie la notazione

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\varphi, k)$$

talchè l'integrale completo E' è dato da $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$.

L'integrale $E(\varphi, k)$ si presenta appunto nel calcolo dell'arco dell'ellisse. Se si esprimono le coordinate di un punto mobile sull'ellisse di semiassi a, b per l'angolo eccentrico φ con le formule

$$x = a\operatorname{sen}\varphi \;;\; y = b\cos\varphi$$

e si pone

$$k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \text{ (eccentricità)},$$

per l'arco s di ellisse contato a partire dall'estremità dell'asse minore si ha:

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi = a\,E(\varphi,k).$$

L'integrale completo $E(\frac{\pi}{2},k) = E$, misura adunque la lunghezza di un quadrante dell'ellisse di semiasse maggiore $=1$ e di eccentricità k.

All'integrale di 2.ª specie di Legendre, Jacobi sostituiva l'altro

$$\int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{k^2}\left[\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\right]$$

e indicava col simbolo $Z(v)$ la funzione

$$Z(v) = E(v) - \frac{E}{K}v.$$

La $Z(v)$ di Jacobi si esprime, per le (I) (I*), per le funzioni di Weierstrass nel modo seguente:

$$\text{(II)}\quad Z(v) = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}\left[\frac{\sigma_3' u}{\sigma_3 u} - \frac{\eta}{\omega}u\right],\quad v = u\sqrt{e_1-e_3}.$$

§ 135. **L'integrale di 3.ª specie $\Pi(v,a)$ di Jacobi.** – Jacobi considerava come integrale di 3.ª specie il seguente:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

che si compone evidentemente con integrali di 1.ª e 3.ª specie di Legendre. Ponendo $x = \operatorname{sn} v$, e indicando con $\underline{a}$ una conveniente costante Jacobi indicava col simbolo

$$\Pi(v,a)$$

l'integrale di 3.ª specie:

$$\Pi(v,a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \int_0^v \frac{\operatorname{sn} v\,dv}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 v},$$

che vogliamo qui esprimere per funzioni di Weierstrass. A tale scopo rammentiamo le formole

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn} v &= \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \\ \operatorname{cn} v &= \frac{\sigma_1 u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \\ \operatorname{dn} v &= \frac{\sigma_2 u}{\sigma_3 u} = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v &= \sqrt{e_1-e_3}\,u \\ k^2 &= \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} \end{aligned}$$

e ponendo per brevità

$$b = \frac{a}{\sqrt{e_1-e_3}},$$

troveremo:

$$\Pi(v,a) = (e_1-e_3)(e_2-e_3)\frac{\sigma b\,\sigma_1 b\,\sigma_3 b}{\sigma_3^3 b}\int_0^u \frac{du}{\wp u - \dfrac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp b - e_3}}.$$

Ora, ricordando le formule

$$\wp' u = -\frac{2\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^3 u}; \quad \wp(u+\omega') - e_3 = \frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\wp u - e_3}$$

$$\wp'(u+\omega') = -\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)\,\wp' u}{(\wp u - e_3)^2},$$

avremo subito

$$\Pi(v,a) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u - \wp(b+\omega')}\,du.$$

Ma per le formole d'addizione della ζu si ha

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u - \wp(b+\omega')} = \frac{1}{2}\zeta(u-b-\omega') - \frac{1}{2}\zeta(u+b+\omega') + \zeta(b+\omega');$$

ed essendo

$$\zeta(u-b-\omega') = \frac{\sigma_3'(u-b)}{\sigma_3(u-b)} - \eta'; \quad \zeta(u+b+\omega') = \frac{\sigma_3'(u+b)}{\sigma_3(u+b)} + \eta',$$

potremo scrivere:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(b+\omega')}{\wp u-\wp(b+\omega')}=\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_3'(u-b)}{\sigma_3(u-b)}-\frac{1}{2}\,\frac{\sigma_3'(u+b)}{\sigma_3(u+b)}+\frac{\sigma_3' b}{\sigma_3 b}\,,$$

onde infine avremo per la formola cercata:

$$\Pi(v,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\sigma_3(u-b)}{\sigma_3(u+b)}+\frac{\sigma_3' b}{\sigma_3 b}\,u\,\Big\}\;\begin{matrix}v=u\sqrt{e_1-e_3}\\ b=a\sqrt{e_1-e_3}\,.\end{matrix}$$

§ 136. Riduzione dell'integrale ellittico di I.ª specie alla forma normale di Legendre. — Per completare queste notizie sull'antica teoria degli integrali ellittici daremo ancora il processo che serve a ridurre il differenziale ellittico di I.ª specie

$$(9)\qquad \frac{dw}{\sqrt{P(w)}}\,,$$

ove $P(w)$ è un polinomio di 3.° o 4.° grado in w, alla forma normale di Legendre

$$(10)\qquad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,$$

e, avendo riguardo ai casi che effettivamente si presentano nelle applicazioni ove $P(w)$ è a coefficienti reali, dimostreremo come la riduzione possa sempre farsi in guisa che ne risulti k^2 reale, positivo e <1.

Basterà che riduciamo con una sostituzione razionale il differenziale (9) alla forma

$$(11)\qquad \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2y)}}\,,$$

poichè la sostituzione quadratica

$$y = x^2$$

fa passare dalla forma (11) alla (10). Ora il passaggio dalla (9) alla (11) si può sempre conseguire con una sostituzione lineare

$$(12) \quad w = \frac{a+by}{c+dy}.$$

E, invero, se $P(w)$ è del 3° grado, si prenda semplicemente

$$w = a + by$$

e si determinino a, b, in guisa che una radice α di $P(w) = 0$ venga portata in $y = 0$, ed una seconda β in $y = 1$; si ponga cioè

$$w = \alpha + (\beta - \alpha) y.$$

Allora, posto

$$P(w) = A(w-\alpha)(w-\beta)(w-\gamma),$$

risulta

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = C \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-k^2 y)}}$$

ove si è posto

$$C = \frac{1}{\sqrt{A(\gamma-\alpha)}} \; ; \quad k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha} \; *$$

Sia ora $P(w)$ del 4° grado ed ometendo un fattore costante scriviamo

$$P(w) = (w-\alpha)(w-\beta)(w-\gamma)(w-\delta);$$

---

* Si osservi che k^2 è il rapporto anarmonico dei quattro valori α, β, γ

La sostituzione (12) dà:

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{(bc-ad)\,dy}{(c+dy)^2\sqrt{\left(\frac{a+by}{c+dy}-\alpha\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\beta\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\gamma\right)\left(\frac{a+by}{c+dy}-\delta\right)}}$$

Perchè questo differenziale abbia la forma voluta (11) basta che uno dei binomî sotto il segno, p.e. $w-\beta$ si riduca a $\frac{c'}{c+dy}$; cioè che la radice β di $P(w)=0$ sia portata in $y=\infty$, e gli altri binomî si annullino rispettivamente per $y=0, 1, \frac{1}{k^2}$. La (12) dovrà dunque portare rispettivamente α, β, γ in $0, \infty, 1$ e sarà per ciò:

$$y = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{w-\alpha}{w-\beta}.$$

La quarta radice δ viene portata in $\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\cdot\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}$, onde si ha:

$$k^2 = (\alpha\beta\gamma\delta) = \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\delta}\cdot\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}.$$

Dipendentemente dall'ordine delle quattro radici si potrà effettuare la riduzione richiesta in 24 modi diversi, ai quali corrispondono però soltanto 6 valori del rapporto anarmonico:

$$k^2\ ;\ \frac{1}{k^2}\ ;\ 1-k^2\ ;\ \frac{1}{1-k^2}\ ;\ \frac{k^2}{k^2-1}\ ;\ \frac{k^2-1}{k^2}.$$

Se $P(w)$ è a coefficienti reali e le sue radici sono tutte reali o tutte complesse, i 6 valori del rapporto anarmonico sono reali ed uno di essi è positivo e <1. Quando si avessero m

vece due radici reali α, β, e due immaginarie (coniugate) γ, δ, con la trasformazione

$$t^2 = \frac{w-\alpha}{w-\beta}$$

risulterebbe

$$\frac{dw}{\sqrt{P(w)}} = \frac{2(\alpha-\beta)}{\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}} \frac{dt}{\sqrt{\left(t^2-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\right)\left(t^2-\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}\right)}}$$

e il polinomio di 4° grado in t avrebbe radici tutte complesse talchè si ricade nel caso precedente.

Nel caso di un polinomio $P(w)$ di 3° grado a radici reali si avrà ancora immediatamente il medesimo risultato. Se una delle radici è reale, le altre due immaginarie, con una sostituzione lineare ci ricondurremo al caso di un polinomio di 4° grado con due radici reali e due immaginarie.

Per ridurre il differenziale ellittico di 1ª specie alla forma normale di Legendre occorre, come si vede, conoscere le radici di $P(w)=0$. Uno dei principali vantaggi del metodo di Weierstrass (cap X - §§ 112-115) è appunto questo che la riduzione alla forma normale si effettua razionalmente per gli invarianti ossia pei coefficienti del polinomio $P(w)$.

Capitolo XIII

Sviluppi in prodotti infiniti ed in serie trigonometriche delle funzioni σ - ζ e $\wp$ di Jacobi e le loro proprietà.

§ 137. Sviluppo in prodotto infinito semplice per σ_{3u}. Ci proponiamo ora di farconoscere le principali espressioni analitiche per prodotti infiniti e per serie trigonometriche delle funzioni ellittiche e loro affini. Questi sviluppi presentano un grande interesse teorico e pratico insieme, per la loro legge di costruzione e per la loro rapida convergenza nei casi delle applicazioni, che li rende molto adatti al calcolo numerico.

Cominceremo dal dare gli sviluppi in prodotti infiniti semplici delle funzioni σ, σ_1, σ_2, σ_3 di Weierstrass. Potremo perciò ricorrere allo sviluppo della σ_u in prodotto infinito doppio (§ 82) e convertirlo in prodotto infinito semplice e dedurne poi i prodotti infiniti per le altre σ_2. Noi preferiamo dedurre queste espressioni analitiche direttamente dalle proprietà ca-

ratteristiche delle $\sigma_2 u$.

Prendiamo, p.e, la $\sigma_3 u$; essa gode delle seguenti proprietà:

1.° è una trascendente intera cogli infinitesimi del 1.° ordine nei punti

$$u_0 = 2m\omega + (2n+1)\omega' \, -$$

2.° aumentando l'argomento u di 2ω o $2\omega'$, essa si comporta nel modo seguente (§ 117)

$$(a) \begin{cases} \sigma_3(u+2\omega) = e^{2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma_3 u \\ \sigma_3(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \cdot \sigma_3 u \end{cases}$$

3.° per $u=0$ è $\sigma_3 u = 1$.

Queste sono, come subito si vede, proprietà caratteristiche della $\sigma_3 u$, cioè se una trascendente intera $G(u)$ vi soddisfa essa coincide con $\sigma_3 u$.

Sostituiamo alla $\sigma_3 u$ un'altra trascendente intera periodica di 3.ª categoria, (§ 89) $\psi(u)$ che abbia il periodo assoluto 2ω. Pongasi per ciò

$$\psi(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \cdot \sigma_3 u$$

e la $\psi(u)$ avrà le proprietà 1.ª e 3.ª della $\sigma_3 u$ mentre la 2.ª, a causa di $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$ si tradurrà nelle altre

$$(a') \begin{cases} \psi(u+2\omega) = \psi(u) \\ \psi(u+2\omega') = -e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\omega')} \cdot \psi(u) \end{cases}$$

Pongasi ora:

$$e^{\frac{\pi i u}{\omega}} = z, \quad e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}} = q,$$

onde sarà q una costante complessa di modulo <1, e si consideri $\psi(u)$ come funzione di z:

$$\psi(u) = \varphi(z).$$

La $\varphi(z)$ sarà una funzione monodroma di z sempre finita e continua tranne che nei due punti singolari (essenziali) $z=0$, $z=\infty$ e godrà delle seguenti proprietà:

1ª) $\varphi(z)$ ha infinitesimi del 1° ordine nei punti

$$z_0 = \begin{cases} q, q^3, q^5 \ldots\ldots q^{2n+1} \ldots \\ q^{-1}, q^{-3}, q^{-5} \ldots\ldots q^{-(2n+1)} \ldots\ldots; \end{cases}$$

2ª) $\varphi(z)$ soddisfa all'equazione funzionale

$$\varphi(q^2 z) = -\frac{1}{qz}\varphi(z);$$

3ª) per $z=1$ è $\varphi(z)=1$.

Ora, poichè la serie

$$q + q^3 + q^5 + \ldots\ldots$$

converge assolutamente, a causa di $|q|<1$, è facile (§ 64) costruire una prima funzione che abbia gli infinitesimi nei punti

$$z_0 = q^{-1}, q^{-3}, q^{-5}, \ldots\ldots$$

come pure una seconda che li abbia invece in

$$z_0 = q, q^3, q^5 \ldots\ldots$$

Esse saranno date rispettivamente dai due prodotti infiniti:

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z)\ ;\ \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right),$$

dei quali il primo converge assolutamente ed in egual grado e in qualunque campo finito, ed il secondo in tutto il piano escluso $z=0$. Rimandando i due prodotti si ha la funzione

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n-1}z)\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right)$$

che ha le proprietà 1.ª e 2.ª della $\varphi(z)$ e non differisce quindi da $\varphi(z)$ che per un fattore costante, e si trova subito

$$\varphi(z)=\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{(1-q^{2n-1}z)\left(1-\frac{q^{2n-1}}{z}\right)}{(1-q^{2n-1})^2};$$

e, ponendo per z il suo valore, abbiamo così la prima espressione analitica cercata per la $\sigma_3 u$ sotto la forma:

$$\alpha)\qquad e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\sigma_3 u=\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1-q^{2n-1}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n-1}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

§ 138. - **Sviluppi in prodotti infiniti per le σ, σ_2 e per le costanti $\sqrt{e_1-e_2}$, $\sqrt{e_1-e_3}$, $\sqrt{e_2-e_3}$, $\sqrt[4]{\Delta}$.** - Dallo sviluppo ora trovato per $\sigma_3 u$, ricorrendo alle formole del § 119, facilmente ritroviamo gli sviluppi analoghi per le rimanenti σ. Si ha infatti:

$$\sigma u = A e^{\eta' u}\sigma_3(u-\omega'),$$

dove A è una costante, e per ciò

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u = A' e^{(\eta' - \frac{\eta\omega'}{\omega})u} \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-q^{2n-2}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)$$

ossia:

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u = A' e^{\frac{\pi i u}{2\omega}}\left(1-e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right) =$$

$$= A'' \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right).$$

Per determinare A'' si divida dall'una e dall'altra parte per u e si passi al limite per $u=0$, osservando che

$$\lim_{u=0}\left(\frac{\sigma u}{u}\right) = 1, \quad \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)}{u} = \frac{\pi}{2\omega},$$

e si troverà quindi

$$\beta)\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2}$$

Dalle α), β) mediante le formole

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 u &= B e^{-\eta u}\sigma_3(u+\omega) \\ \sigma_1 u &= C e^{-\eta u}\sigma(u+\omega) \end{aligned}\right\} B, C \text{ costanti}$$

si deducono subito gli sviluppi analoghi per $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$. Riunisco le quattro formole nella tabella seguente:

$$(I)\left\{\begin{aligned} e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u &= \frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1-q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1-q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n})^2} = \\ &= \frac{2\omega}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2} \\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u &= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\left(1+q^{2n}e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1+q^{2n}e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n})^2} = \end{aligned}\right.$$

$$= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) \prod_1^\infty \frac{1 + 2q^{2n} \cos\frac{\pi u}{\omega} + q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}$$

$$(I) \begin{cases} e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_2 u = \prod_1^\infty \dfrac{\left(1 + q^{2n-1} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 + q^{2n-1} e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1+q^{2n-1})^2} = \\ \qquad = \prod_1^\infty \dfrac{1 + q^{2n-1} \cos\frac{\pi u}{\omega} + q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2} \\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u = \prod_1^\infty \dfrac{\left(1 - q^{2n-1} e^{\frac{\pi i u}{\omega}}\right)\left(1 - q^{2n-1} e^{-\frac{\pi i u}{\omega}}\right)}{(1-q^{2n-1})^2} = \\ \qquad = \prod_1^\infty \dfrac{1 - 2q^{2n-1} \cos\frac{\pi u}{\omega} + q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2} \end{cases}$$

Dalle formole precedenti e dalle (a), (b), (c) del §118, che dànno la precisa definizione dei valori delle costanti

$$\sqrt{e_1 - e_2} \; ; \quad \sqrt{e_1 - e_3} \; ; \quad \sqrt{e_2 - e_3} \; ;$$

possiamo dedurre gli sviluppi in prodotti infiniti per queste ultime quantità.

Osserviamo a tale scopo che ponendo

(1) $\mathfrak{U}_1 = e^{-\frac{\eta_1 \omega_1}{2}} \sigma\omega_1 \; ; \; \mathfrak{U}_2 = e^{-\frac{\eta_2 \omega_2}{2}} \sigma\omega_2 \; ; \; \mathfrak{U}_3 = e^{-\frac{\eta_3 \omega_3}{2}} \sigma\omega_3 \, ,$

le citate formole ci dànno

$$(2) \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = e^{\eta_3 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1 \, \sigma\omega_2} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathfrak{U}_3}{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2} \\ \sqrt{e_2 - e_3} = -e^{\eta_3 \omega_2} \dfrac{\sigma\omega_1}{\sigma\omega_2 \, \sigma\omega_3} = -e^{-\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_2 \mathfrak{U}_3} \\ \sqrt{e_1 - e_3} = e^{-\eta_3 \omega_1} \dfrac{\sigma\omega_2}{\sigma\omega_1 \, \sigma\omega_3} = e^{\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_3} \, , \end{cases}$$

e tutto si riduce quindi a calcolare $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$.

Nelle formole (I) figurano i seguenti quattro prodotti infiniti

$$(3)\quad Q_0 = \prod_1^\infty (1-q^{2n})\,;\quad Q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n})\,;\quad Q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1})\,;\quad Q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})$$

che, moltiplicati fra loro, dànno

$$Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{4n})(1-q^{4n-2}) = Q_0$$

e fra gli ultimi tre sussiste perciò l'identità

$$(4)\qquad Q_1 Q_2 Q_3 = 1.$$

Ora, per calcolare $\mathfrak{U}_1$, facciamo nella 1ª delle (I) $u=\omega$ ed avremo subito

$$(a)\qquad \mathfrak{U}_1 = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{Q_1^2}{Q_0^2}$$

Se nella medesima formola (I) facciamo poi $u=\omega'$ risulterà

$$e^{-\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}}\sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{e^{\frac{\pi i\omega'}{2\omega}} - e^{-\frac{\pi i\omega'}{2\omega}}}{2i}\prod_1^\infty \frac{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2},$$

cioè:

$$e^{-\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}}\cdot\sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi}\,e^{-\frac{\pi i\omega'}{2\omega}}\,\frac{q-1}{2i}\,\frac{1}{1-q}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2} =$$

$$= \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{2}}}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2}$$

ed osservando che si ha

$$\frac{\eta\omega'^2}{2\omega} = \frac{\omega'}{2\omega}\left(\eta^*\omega + \frac{\pi i}{2}\right)$$

ne dedurremo:

$$(b)\qquad \mathfrak{U}_3 = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{i}{2q^{\frac{1}{2}}}\,\frac{Q_3^2}{Q_0^2}.$$

Da fine per calcolare

$$\mathfrak{U}_2 = e^{-\frac{\eta_1\omega_2}{2}}\sigma\omega_2$$

ricorriamo alla formola

$$\sigma\omega_2 = e^{\eta'\omega} \cdot \sigma\omega' \cdot \sigma_3\omega$$

e facendo $u=\omega$ nella 4ª delle (I), coll'osservare la (3), avremo:

$$\sigma\omega_2 = e^{\eta'\omega + \frac{\eta'\omega'}{2}} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \frac{i}{2q^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{Q_3^2}{Q_0^2} e^{\frac{\eta\omega}{2}} \cdot \frac{Q_2^2}{Q_3^2} =$$

$$= e^{\frac{(\eta+\eta')(\omega+\omega')}{2} - \frac{\pi i}{4}} \cdot \frac{2\omega}{\pi} \frac{i}{2q^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{Q_2^2}{Q_0^2},$$

onde, infine:

$$(c) \qquad \mathcal{U}_2 = \frac{2\omega}{\pi} \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2q^{\frac{1}{4}}} \frac{Q_2^2}{Q_0^2}.$$

Dopo di ciò, le (2), tenendo conto della identità (4), ci daranno:

$$(5) \quad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega} Q_3^4 Q_0^2; \quad \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega} 4q^{\frac{1}{2}} Q_4^4 Q_0^2; \quad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega} Q_2^4 Q_0^2$$

Estraggniamo ancora la radice quadrata col l'adottare una delle due determinazioni di segno ed avremo:

$$(5^*) \begin{cases} \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} Q_3^2 Q_0; \quad \sqrt[4]{e_2-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \cdot 2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2 Q_0; \\ \sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}} \cdot Q_2^2 Q_0 \end{cases}$$

Di qui risulta una notevole espressione per

$$\sqrt[24]{\Delta};$$

e cioè:

$$\sqrt[24]{\Delta} = \sqrt[24]{g_2^3 - 27g_3^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\omega}} \cdot q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1-q^{2n}).$$

§139. Sviluppi per $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$; $\sqrt[4]{k}$; $\sqrt[4]{k'}$;

$\sqrt{kk'}$ e per le funzioni: $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} v$, $\operatorname{dn} v$. –

La quantità K di Jacobi è data (§ 121) da

$$K = \omega\sqrt{e_1 - e_3}$$

e per la 3ª delle (5) si ha quindi la formola

$$(III) \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_2^2\,\Theta_0 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n}),$$

formola che fa conoscere il periodo $4K$ delle funzioni ellittiche di Jacobi appena noto

$$q = e^{\pi i \tau}.$$

Dalle (5) seguono ancora le formole

$$k = 4q^{\frac{1}{2}}\frac{\Theta_1^4}{\Theta_2^4}\ ;\quad k' = \frac{\Theta_3^4}{\Theta_2^4}$$

ed estraendo le radici quarte abbiamo le formole notevoli

$$(IV)\begin{cases} \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\,\dfrac{\Theta_1}{\Theta_2} = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi i \tau}{8}}\prod_1^\infty \dfrac{1+e^{2n\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}} \\ \sqrt[4]{k'} = \dfrac{\Theta_3}{\Theta_2} = \prod_1^\infty \dfrac{1-e^{(2n-1)\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}} \end{cases}$$

I prodotti infiniti dei secondi membri convergono assolutamente ed in egual grado in ogni campo finito del semipiano positivo τ, l'asse reale escluso, e definiscono $\sqrt[4]{k}$, $\sqrt[4]{k'}$ come funzioni uniformi in questo semipiano (funzioni modulari). È degna ancora di nota la formola che risulta moltiplicando le (IV) che dà:

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\Theta_1\Theta_3}{\Theta_2}.$$

Per l'identità (4) possiamo scrivere

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \frac{1}{\Theta_2^3}$$

ed estraendo ancora la radice terza abbiamo

$$(\mathrm{v}) \quad \sqrt[12]{kk'} = \sqrt[6]{2} \cdot q^{\frac{1}{24}} \cdot \frac{1}{\Theta_2} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\frac{\pi i \tau}{24}} \frac{1}{\prod_1^\infty (1+e^{(2n-1)\pi i \tau})}.$$

Tenendo conto delle formole precedenti e delle fondamentali (1) possiamo ora esprimere le funzioni ellittiche di Jacobi per prodotti infiniti ed otteniamo le formole seguenti:

$$(\mathrm{vi}) \begin{cases} \operatorname{sn} v = \dfrac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi v}{2K}\right) \prod_1^\infty \dfrac{1-2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n-2}} \\[2ex] \operatorname{cn} v = 2q^{\frac{1}{4}} \sqrt{\dfrac{k'}{k}} \cos\left(\dfrac{\pi v}{2K}\right) \prod_1^\infty \dfrac{1+2q^{2n}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n-2}} \\[2ex] \operatorname{dn} v = \sqrt{k'} \cdot \prod_1^\infty \dfrac{1+2q^{2n-1}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos\left(\frac{\pi v}{K}\right)+q^{4n-2}}. \end{cases}$$

§140 - Sviluppo di una funzione periodica in serie di Fourier -

Si ottengono sviluppi importantissimi per le funzioni ellittiche applicando il seguente teorema generale che permette di sviluppare ogni funzione uniforme periodica in serie trigonometriche (serie di Fourier):

« Se $f(u)$ è una funzione uniforme della variabile complessa u col periodo Ω e nell'interno della striscia del piano complesso u, compresa fra due rit-

te parallele alla direzione del periodo Ω, non ha nessun punto singolare, essa è sviluppabile in serie di Fourier, della forma

$$(b) \quad f(u) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) \right\}$$

convergente in egual grado in ogni spazio interno alla detta striscia ».

Questo teorema è una facile conseguenza del teorema di Laurent (§ 42). Pongasi infatti

$$z = e^{\frac{2\pi i u}{\Omega}};$$

sarà

$$f(u) = \varphi(z)$$

funzione monodroma di z, perchè per ogni cammino chiuso descritto da z la u aumenta di un multiplo di Ω ed $f(u)$ si riproduce. Inoltre, mentre u, muovendo da un punto u_1 del suo piano complesso descrive una retta parallela alla direzione del periodo Ω, si ha

$$u = u_1 + \lambda \Omega,$$

essendo λ un parametro reale che varia da $-\infty$ a $+\infty$ e quindi

$$z = e^{\frac{2\pi i u_1}{\Omega}} (\cos 2\pi\lambda + i \operatorname{sen} 2\pi\lambda)$$

descrive un cerchio col centro in $z = 0$ e di raggio $= \left| e^{\frac{2\pi i u_1}{\Omega}} \right|$. All'striscia considerata corrisponde quindi nel piano z un anello cir-

colare col centro in $z=0$ e poichè $\varphi(z)$ entro questo anello è finita, continua e monodroma varrà lo sviluppo di Laurent:

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty A_n z^n + \sum_1^\infty B_n z^{-n};$$

onde avremo

$$f(u) = A_0 + \sum_1^\infty \left\{ (A_n + B_n) \cos\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) + i\,(A_n - B_n) \sin\left(\frac{2n\pi u}{\Omega}\right) \right\}$$

che, ponendo

$$a_0 = A_0 \;;\quad a_n = A_n + B_n \;;\quad b_n = i\,(A_n - B_n),$$

assumerà precisamente la forma (3) del teorema e la serie del 2.° membro sarà convergente in ugual grado in ogni spazio interno al la striscia.

Possiamo di più esprimere per integrali definiti i valori dei coefficienti a_n, b_n della serie (b) di Fourier. E invero le formole (8) del § 42 ci dànno:

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} \quad ; \quad B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \varphi(z) . z^{n-1} dz,$$

gli integrali essendo estesi ad un cerchio σ concentrico ed intermedio ai due che limitano l'anello. Ponendo per z il suo valore, gli integrali risulteranno estesi nel piano u ad un tratto rettilineo l parallelo ed interno al la striscia considerata e di lunghezza $= |\Omega|$. Ne risultano quindi pei valori dei coef-

ficienti della serie (6) le espressioni:

$$(7)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\Omega}\displaystyle\int_\ell f(u)\,du\,; \quad a_n = \dfrac{2}{\Omega}\displaystyle\int_\ell f(u)\cos\left(\dfrac{2n\pi u}{\Omega}\right)du \\ b_n = \dfrac{2}{\Omega}\displaystyle\int_\ell f(u)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{2n\pi u}{\Omega}\right)du \end{cases}$$

§141. Sviluppi in serie trigonometriche della $\sigma_3 u$.

Sviluppiamo in serie trigonometriche le funzioni σ cominciando come al §137, dalla funzione $\sigma_3 u$. Perciò sostituiamo alla $\sigma_3 u$ la funzione

$$f(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u,$$

che ha il periodo $\Omega = 2\omega$ e aumentando u di $2n\omega'$ si riproduce, a causa delle (a*) del §137, moltiplicata pel fattore

$$(-1)^n q^{-n^2} e^{-\frac{n\pi i u}{\omega}}; \left(q = e^{\frac{\pi i \omega'}{\omega}}\right);$$

si ha cioè

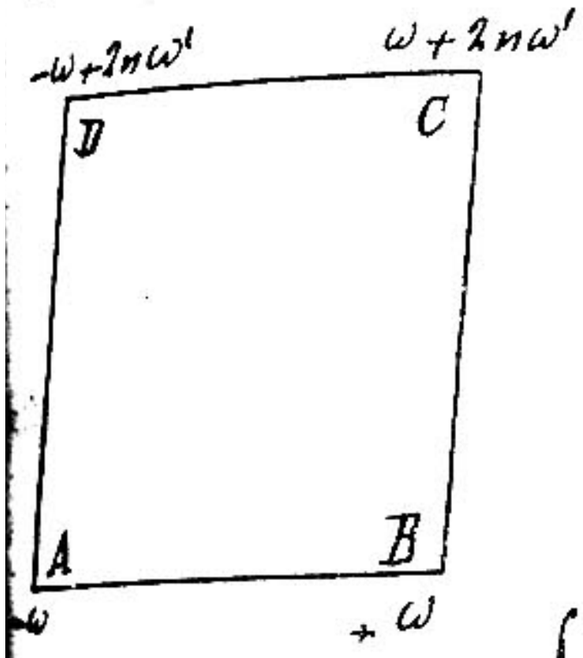
$$(8)\quad f(u+2n\omega') = (-1)^n q^{-n^2} \cdot e^{-\frac{n\pi i u}{\omega}} \cdot f(u).$$

Ciò premesso, osserviamo che, essendo $f(u)$ funzione pari, tutti i coefficienti b_n nella (6) saranno nulli e potremo calcolare i coefficienti a_n mediante le considerazioni seguenti. Tracciamo nel piano u il parallelogrammo

$$ABCD \equiv (-\omega,\ \omega,\ \omega+2n\omega',\ -\omega+2n\omega')$$

(v. fig. alla pag. seg.) e osserviamo che, essendo

$f(u)$ una trascendente intera, sarà



$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 0 .$$

Accoppiando gli integrali estesi ai lati paralleli, quelli estesi a BC, DA si distruggono perchè $f(u+2\Omega)=f(u)$ onde resta:

$$\int_{AB} f(u)\,du + \int_{CD} f(u)\,du = 0$$

ovvero:

$$\int_{AB} f(u)\,du \equiv \int_{AB} f(u+2n\omega')\,du,$$

il che ci dà, per la (8),

$$\int_{AB} f(u)\,du = (-1)^n q^{-n^2} \int_{AB} f(u)\, e^{-\frac{n\pi i u}{\omega}}\,du =$$

$$= (-1)^n q^{-n^2} \int_{AB} f(u) \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right) du \;;$$

ovvero, per le (7),

$$a_n = 2a_0 (-1)^n q^{n^2}.$$

Avremo dunque

$$\alpha) \quad f(u) = e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u = a_0 \left\{ 1 + 2 \cdot \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right) \right\}$$

e determineremo anche a_0 osservando che qui si ha

$$f(0) = 1 .$$

Si ha così per lo sviluppo cercato

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u = \frac{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}} .$$

§ 142. Sviluppo delle altre σ e ζ

rie per calcolare η — In modo simile si potrebbe procedere per le altre σ; ma è più semplice dedurre i loro sviluppi da quello ora ottenuto per la σ_3. Si ha infatti

$$\sigma u = C e^{\eta' u} \sigma_3 (u - \omega')$$

e perciò

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = C' e^{(\eta' - \frac{\eta \omega'}{\omega}) u} \cdot f(u+\omega') =$$

$$= C' e^{-\frac{\pi i u}{2\omega}} f(u+\omega'),$$

avendo $f(u)$ il valore α). Indicando con A un fattore costante sarà dunque:

$$A e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{\frac{n\pi i(u-\omega')}{\omega} - \frac{\pi i u}{2\omega}} +$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} e^{-\frac{n\pi i(u-\omega')}{\omega} - \frac{\pi i u}{2\omega}} =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2-n} \cdot e^{(2n-1)\frac{\pi i u}{2\omega}} +$$

$$+ \sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2+n} \cdot e^{-(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}}$$

Ponendo da sè il termine della prima somma corrispondente ad $n=1$, e cangiando in questa n in $n+1$, otteremo:

$$A e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = -2i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) - \sum_1^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \left[e^{(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}} - e^{-(2n+1)\frac{\pi i u}{2\omega}} \right]$$

e quindi

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = B \left\{ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right) + \sum_1^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right) \right\} =$$

$$= B \sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right).$$

Per determinare la costante B si divida dall'una e dall'altra parte per u e si passi al limite per $u=0$; ne verrà:

$$1 = B\frac{\pi}{2\omega}\sum_0^\infty (-1)^n(2n+1)\,q^{n(n+1)}$$

onde

$$(\beta)\qquad e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u = \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{\sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)}\,\mathrm{sen}\,(2n+1)\frac{\pi u}{2\omega}}{\sum_0^\infty (-1)^n(2n+1)\,q^{n(n+1)}}.$$

Come al § 138, basterà servirsi ora delle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_2 u &= B e^{-\eta u}\sigma_3(u+\omega)\\ \sigma_1 u &= C e^{-\eta u}\sigma(u+\omega)\end{aligned}\right\}\ B, C \text{ costanti}$$

per dedurne gli sviluppi di σ_1, σ_2, e potremo così assumere le formole nel quadro:

$$(\mathrm{VII})\qquad \left\{\begin{aligned} e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u &= \frac{2\omega}{\pi}\,\frac{\sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right)}{\sum_0^\infty (-1)^n(2n+1)\,q^{n(n+1)}}\\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u &= \frac{\sum_0^\infty q^{n(n+1)}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi u}{2\omega}\right)}{\sum_0^\infty q^{n(n+1)}}\\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_2 u &= \frac{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}}\\ e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u &= \frac{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\cos\left(\frac{n\pi u}{\omega}\right)}{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}}\end{aligned}\right.$$

Dallo sviluppo della σu possiamo dedurre una formola che serve al calcolo del semiperiodo di 2ª specie η, dati che siano ω, ω'. Svilup-

piamo, per ciò, l'uno e l'altro membro della (I,) in serie di potenze di u secondo le formole

$$\sigma u = u - \frac{g_2}{240} u^5 + \dots ; \quad e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} = 1 - \frac{\eta u^2}{2\omega} + \dots$$

$$\operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi u}{2\omega} = \frac{(2n+1)\pi u}{2\omega} - \frac{1}{6}\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\omega}\right)^3 u^3 + \dots,$$

e paragoniamo i coefficienti di u^3. Posto

$$C = \frac{2\omega}{\pi} \frac{1}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)}}$$

avremo

$$\frac{\eta}{2\omega} = \frac{C}{6}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3 \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)^3 q^{n(n+1)}$$

e quindi

$$(\text{VIII})\quad \eta\omega = \frac{\pi^2}{12} \frac{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)^3 q^{n(n+1)}}{\sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)}} = \frac{\pi^2}{12} \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - 7^3 q^{12} + \dots}{1 - 3 q^2 + 5 q^6 - 7 q^{12} + \dots}$$

che è la formola cercata e fa conoscere η dati ω, ω'. Dalla relazione

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$$

si potrà poi calcolare η'.

§ 143. Le serie ϑ. — Consideriamo quelle particolari funzioni σ che rispondono ai periodi

$$2\omega = 1 \qquad 2\omega' = \tau,$$

e pei secondi membri delle formole (VII), moltiplicando nelle prime due formole numeratore e denominatore per $2q^{\frac{1}{4}}$, a=

viamo le espressioni

$$a)\ \frac{2\sum_0^\infty (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi u]}{2\pi \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{(n+\frac{1}{2})^2}};\quad b)\ \frac{2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2} \cos[(2n+1)\pi u]}{2\sum_0^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2}},$$

$$c)\ \frac{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos(2n\pi u)}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}},\quad d)\ \frac{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi u)}{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}}.$$

Le serie al numeratore di queste espressioni, ~~tos~~ sono anche scriversi rispettivamente:

$$a^*)\quad -i\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+2(n+\frac{1}{2})\pi i u},$$

$$b^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau(n+\frac{1}{2})^2+2(n+\frac{1}{2})\pi i u};$$

$$c^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau n^2+2n\pi i u}$$

$$d^*)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi i\tau n^2+2n\pi i u};$$

che rientrano nel tipo generale seguente:

$$(\gamma)\quad (-i)^{gh}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{hn} e^{\pi i\tau(n+\frac{g}{2})^2+2\pi i u(n+\frac{g}{2})}$$

dove g, h, sono due numeri interi, che, nei rispettivi casi $a^*)$, $b^*)$, $c^*)$, $d^*)$ hanno i valori

$$a^*)\ (g,h)=(1,1);\quad b^*)\ (g,h)=(1,0);\quad c^*)\ (g,h)=(0,0);$$
$$d^*)\ (g,h)=(0,1).$$

Le serie (γ) prendono, secondo Jacobi, il nome di serie ϑ. Ponendo in evidenza l'argomento u, scriveremo

$$(\text{VIII}^*)\quad \vartheta_{g,h}(u)=(-i)^{gh}\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{hn} e^{\pi i\tau(n+\frac{g}{2})^2+2\pi i u(n+\frac{g}{2})}.$$

Si vede subito che sussistono le formole:

$$(9)\qquad \vartheta_{g+2,h}(u) = \vartheta_{g,h}(u)\ ;\quad \vartheta_{g,h+2}(u) = (-1)^g\,\vartheta_{g,h}(u)\ ;$$

onde risulta che le $\vartheta_{g,h}(u)$ coincidono, salvo il segno, colle quattro fondamentali

$$\vartheta_{11}(u)\ ;\ \vartheta_{10}(u)\ ;\ \vartheta_{00}(u)\ ;\ \vartheta_{01}(u).$$

La notazione ora introdotta dei doppî indici è utile in molte ricerche; ma più esatta è la seguente con un solo indice:

$$(IX)\quad \begin{cases} \vartheta_1(u) = \vartheta_{11}(u) = 2\sum_0^\infty (-1)^n q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}\,[(2n+1)\pi u] \\ \vartheta_2(u) = \vartheta_{10}(u) = 2\sum_0^\infty q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\cos[(2n+1)\pi u] \\ \vartheta_3(u) = \vartheta_{00}(u) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}\cos(2n\pi u) \\ \vartheta_0(u) = \vartheta_{01}(u) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}\cos(2n\pi u) \end{cases}$$

Dopo ciò, denotando con ϑ' le derivate delle ϑ rispetto ad u, possiamo secondo le (VII) esprimere le σ per le ϑ con le formole:

$$(X)\quad \left.\begin{aligned} & e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u = 2\omega\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}\ ;\quad e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)} \\ & e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_2 u = \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}\ ;\quad e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u = \frac{\vartheta_0(v)}{\vartheta_0(0)} \end{aligned}\right\}\ v = \frac{u}{2\omega}.$$

Come si vede, ciascuna σ si esprime per la ϑ col l'indice superiore di un'unità, l'indice 4 essendo confuntato equivalente a zero.

Si osserva che:

« Delle quattro funzioni ϑ la $\vartheta_1(u)$ è dispari, le altre tre ϑ sono pari »

§ 144 - Relazioni fra le ϑ - Se nella for-

nota (VIII*) cangiamo u in $u + \frac{h'+g'\tau}{2}$, essendo g', h' due interi qualunque, troviamo:

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{h'+g'\tau}{2}\right) = (-i)^{gh} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{hn} e^{\pi i \tau (n+\frac{g}{2})^2 + 2\pi i u (n+\frac{g}{2}) + \pi i (h'+g'\tau)(n+\frac{g}{2})}$$

ovvero

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{h'+g'\tau}{2}\right) = (-i)^{gh} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{hn} e^{\pi i \tau (n+\frac{g+g'}{2})^2 + 2\pi i u (n+\frac{g+g'}{2}) + \pi i h'(n+\frac{g}{2}) - \pi i \tau \frac{g'^2}{4} - \pi i u g'},$$

da cui risulta subito la formola generale

$$(XI) \qquad \vartheta_{gh}\left(u + \frac{h'+g'\tau}{2}\right) = (-1)^{gh'} \cdot i^{g'(h+h')} \cdot e^{-\frac{\pi i \tau g'^2}{4} - \pi i u g'} \cdot \vartheta_{g+g',h+h'}(u)$$

Questa ci permette di esprimere le quattro ϑ per una sola di esse, p.e., per la

$$\vartheta_3(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2 + 2\pi i u . n} \; *$$

---

* Ove si ponga

$$a = \pi i \tau \; ; \; b = \pi i u$$

la serie $\vartheta_3(u)$ diventa

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{a n^2 + 2 b n}$$

serie sempre convergente per qualunque valore di b e per valori di a con la parte reale negativa. Inversamente si può partire da una tale serie per costruire le ϑ e tutta la teoria delle funzioni ellittiche. Con legge analoga di formazione si costruiscono le serie con un numero qualunque p d'indici n_1, n_2, ... n_p:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} ; \sum_{n_2=-\infty}^{n_2=+\infty} \cdots \sum_{n_p=-\infty}^{n_p=+\infty} e^{\sum_{i,k}^{1\ldots p} a_{ik} n_i n_k + 2 \sum_i b_i n_i},$$

le quali convergono quando, indicando con a'_{ik} la parte reale di a_{ik}, la forma quadratica

$$\sum_{i,k}^{1\ldots p} a'_{ik} n_i n_k$$

Dalla (XI) deduciamo in particolare l'effetto che si produce in $\vartheta_{gh}(u)$ aggiungendo all'argomento un numero intero ovvero un multiplo di τ, e cioè infatti

$$(XII)\quad \begin{cases} \vartheta_{gh}(u+1) = (-1)^{g}\,\vartheta_{gh}(u) \\ \vartheta_{gh}(u+\tau) = (-1)^{h}\, e^{-\pi i(2u+\tau)}\cdot \vartheta_{gh}(u). \end{cases}$$

Dalla semplice ispezione della serie (VIII*), considerando $\vartheta_{gh}(u)$ come funzione delle due variabili u, τ deduciamo subito l'importante risultato:

« Le funzioni $\vartheta_{gh}(u,\tau)$ soddisfano l'equazione a derivate parziali del 2° ordine:

$$(XIII)\quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \text{ ».}$$

Dalle formole (X) facilmente deduciamo i valori delle 3 quantità

$$\mathfrak{A}_1 = e^{-\frac{\eta_1\omega_1}{2}}\sigma\omega_1 \,;\; \mathfrak{A}_2 = e^{-\frac{\eta_2\omega_2}{2}}\sigma\omega_2 \,,\; \mathfrak{A}_3 = e^{-\frac{\eta_3\omega_3}{2}}\sigma\omega_3 \,,$$

già considerate al § 138, espressi pei valori che assumono

$$\vartheta_0(u) \,,\; \vartheta_2(u) \,,\; \vartheta_3(u) \,,\; \vartheta_1'(u)$$

per $u=0$, valori che, per brevità, si indicano con

$$\vartheta_0 \,,\; \vartheta_2 \,,\; \vartheta_3 \,,\; \vartheta_1'$$

è infinita negativa. Per mezzo di queste serie si costruiscono le funzioni ϑ a più variabili $u_1, u_2 \dots u_p$ mediante le quali si risolve il problema d'inversione nella teoria degli integrali Abeliani.

ometendo l'argomento. A tale scopo osserviamo che, dalla (VI) e dalla (9), si ha

$$\vartheta_1\left(\frac{\tau}{2}\right) = i\, e^{-\frac{\pi i \omega'}{4\omega}} \vartheta_0, \quad \vartheta_1\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = e^{-\frac{\pi i \omega'}{4\omega}} \vartheta_3$$

e, facendo nella prima delle (IX) successivamente

$$u = \omega, \omega', \omega + \omega';$$

indi

$$v = \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2};$$

avremo

$$\mathcal{U}_1 = 2\omega \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1'}, \quad \mathcal{U}_2 = 2\omega e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\vartheta_3}{\vartheta_1'}, \quad \mathcal{U}_3 = 2i\omega \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1'}$$

e quindi per le formole (2) del §138,

$$(10) \begin{cases} \sqrt{e_1 - e_2} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathcal{U}_3}{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2} = \dfrac{1}{2\omega} \dfrac{\vartheta_0 \vartheta_1'}{\vartheta_2 \vartheta_3} \\ \sqrt{e_2 - e_3} = -e^{-\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{U}_2 \mathcal{U}_3} = \dfrac{1}{2\omega} \dfrac{\vartheta_2 \vartheta_1'}{\vartheta_0 \vartheta_3} \\ \sqrt{e_1 - e_3} = e^{\frac{\pi i}{4}} \dfrac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_3} = \dfrac{1}{2\omega} \dfrac{\vartheta_3 \vartheta_1'}{\vartheta_0 \vartheta_2} \end{cases}$$

Queste formole possono semplificarsi facendo... della identità scoperta da Jacobi

$$(XIV) \quad \vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3,$$

che ora dimostreremo. Esse diventano così.

$$(10^*) \quad \sqrt{e_1 - e_2} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_0^2, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_2^2; \quad \sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\pi}{2\omega} \vartheta_3^2$$

§145 Dimostrazione dell'identità (XIV) di Jacobi e valori in serie di $\sqrt{k}$, $\sqrt[8]{k}$, $\sqrt[8]{\Delta}$ —

Per dimostrare l'identità jacobiana, partiamo dalla formo=

$$(r=1,2,3) \qquad \wp(u+\omega_r) = -\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\sigma(u+\omega_r) = \frac{-\partial^2 \log\sigma_r u}{\partial u^2};$$

che, per le (X), può scriversi

$$\wp(u+\omega_r) = -\frac{1}{(2\omega)^2}\left\{4\eta\omega + \frac{\partial^2 \log\vartheta_{r+1}(v)}{\partial v^2}\right\},$$

colla convenzione $\vartheta_4(v) = \vartheta_0(v)$. In questa formula pongo $v=0$ ed osservando che la formola (VIII) del § 142, che dà il valore di $\eta\omega$, può scriversi

$$4\eta\omega = -\frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'},$$

e, d'altronde, si ha

$$\frac{\partial^2 \log\vartheta(v)}{\partial v^2} = \frac{\vartheta''(v)}{\vartheta(v)} - \frac{\vartheta'^2(u)}{\vartheta^2(u)}$$

mentre $\vartheta_0' = \vartheta_2' = \vartheta_3' = 0$, ne dedurremo:

$$(11) \qquad e_r = -\frac{1}{(2\omega)^2}\left\{\frac{\vartheta_{r+1}'''}{\vartheta_{r+1}} - \frac{1}{3}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right\}.$$

Ora dalla equazione (XIII) alle derivate parziali, cui soddisfano le ϑ, segue

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta_{r+1}''}{\vartheta_{r+1}} = 4\pi i\,\dfrac{\partial \log\vartheta_{r+1}}{\partial\tau} \\[2ex] \dfrac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = 4\pi i\,\dfrac{\partial \log\vartheta_1'}{\partial\tau}, \end{cases}$$

e quindi si ha

$$3e_r = -\frac{\pi i}{\omega^2}\left\{\frac{\partial \log\vartheta_{r+1}^3}{\partial\tau} - \frac{\partial \log\vartheta_1'}{\partial\tau}\right\}.$$

Ora l'identità

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

diventa

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\log\left(\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta_1'}\right) = 0$$

e ci dimostra che il rapporto

$$\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta_1'}$$

è una costante assoluta. Per determinare il suo valore effettivo si osservi che, avendosi

$$\vartheta_0 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots$$
$$\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}\left(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots\right)$$
$$\vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots$$
$$\vartheta_1' = 2\pi q^{\frac{1}{4}}\left\{1 - 3q^2 + 5q^4 + \dots\right\},$$

se si fa crescere τ per valori puramente immaginari all'infinito, q tende a zero e quindi $\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2}$ ha per limite π mentre ϑ_0, ϑ_3 tendono a 1. Si ha dunque

$$\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta_1'} = \pi\,,$$

che è appunto l'identità (XIV).

Così sono anche dimostrate le formole (10), dalle quali risulta l'altra identità

$$\text{(XV)} \qquad \vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4\,,$$

pure dovuta a Jacobi. È molto notevole che fra i quattro valori

$$\vartheta_0\,,\ \vartheta_2\,,\ \vartheta_3\,,\ \vartheta_1'\,,$$

che sono espressioni trascendenti in τ, sussistano così due relazioni algebriche (XIV) e (XV).

Le formole (10*) conducono poi ad espressioni notevoli in serie per:

$$\sqrt{k} = \sqrt[4]{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}} \; ; \qquad \sqrt{k'} = \sqrt[4]{\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}} \; ;$$

avremo invece

$$\text{(XVI)} \begin{cases} \sqrt{k} = -\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = -2q^{\frac{1}{4}} \dfrac{\sum_1^\infty q^{n(n+1)}}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}} \\ \sqrt{k'} = \dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \dfrac{1+2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}}{1+2\sum_1^\infty q^{n^2}} \end{cases}$$

Finalmente pel valore di

$$\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{2}\,\sqrt[4]{(e_1-e_2)(e_2-e_3)(e_1-e_3)}$$

troviamo l'espressione

$$\sqrt[8]{\Delta} = \sqrt{2}\,\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3}\,\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 = \frac{1}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}\,\vartheta_1',$$

ossia

$$\text{(XVII)} \quad \sqrt[8]{\Delta} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot q^{\frac{1}{4}} \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)}.$$

§ 146. **Sviluppi in prodotti infiniti delle ϑ.** — Paragonando le formole (107), che ci danno gli sviluppi in serie di

$$\sqrt{e_1-e_2} \quad \sqrt{e_2-e_3} \quad \sqrt{e_1-e_3},$$

con le (3) del § 138 che ne danno gli sviluppi per prodotti infiniti

$$Q_0 = \prod_1^\infty (1-q^n), \quad Q_1 = \prod_1^\infty (1+q^{2n}), \quad Q_2 = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1}), \quad Q_3 = \prod_1^\infty (1-q^{2n-1}),$$

troviamo subito le formole

$$\vartheta_0 = \pm Q_1 Q_0 \quad \vartheta_2 = \pm 2q^{\frac{1}{4}} Q_1 Q_0 \; , \quad \vartheta_3 = \pm Q_2 Q_0 .$$

L'incertezza del segno si toglie esaminando il limite $q=0$: e si ha così:

[illegible]

(XVIII) $\vartheta_0 = Q_3^2 Q_0$; $\vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_1^2 Q_0$; $\vartheta_3 = Q_2^2 Q_0$,

dalle quali segue anche, per l'identità

$$Q_1 Q_2 Q_3 = 1 ,$$

(XVIII') $\vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} Q_0^3 = 2\omega \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \sqrt{\Delta}$

Queste formole ci danno le seguenti notevoli trasformazioni di serie in prodotti infiniti:

$$\begin{cases} 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} = \prod_1^\infty (1-q^{2n-1})^2 (1-q^{2n}) \\ \sum_0^\infty q^{n(n+1)} = \prod_1^\infty (1+q^{2n})^2 (1-q^{2n}) \\ 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = \prod_1^\infty (1+q^{2n-1})^2 (1-q^{2n}) \\ \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)} = \prod_1^\infty (1-q^{2n})^3 \end{cases}$$

che valgono qualunque sia q purchè $|q| < 1$

Con ciò è anche risoluto il problema di esprimere le serie ϑ per prodotti infiniti. Paragonando infatti le (X) del § 143 colle (I) del § 138, otteniamo subito intanto:

$$\begin{cases} \vartheta_1(v) = C \operatorname{sen} \pi v \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_2(v) = C_1 \cos \pi v \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n} \cos 2\pi v + q^{4n}) \\ \vartheta_3(v) = C_2 \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \\ \vartheta_0(v) = C_3 \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos 2\pi v + q^{4n-2}) \end{cases}$$

dove C, C_1, C_2, C_3 sono costanti rispetto all'argomento v. Per determinarle, facciamo nelle tre

tine $v=0$ e lo stesso facciamo nella prima dopo divisi i due membri per v, troviamo così:

$$\vartheta_1' = C\pi Q_0^2 \; ; \; \vartheta_2 = C_1 Q_1^2 , \; \vartheta_3 = C_2 Q_2^2$$

$$\vartheta_0 = C_3 Q_3^2 \; ;$$

e quindi, per le (XVIII), (XVIII*),

$$C = C_1 = 2q^{\frac{1}{4}} Q_0 \; ; \; C_2 = C_3 = Q_0 .$$

Abbiamo dunque le formole definitive:

$$(XIX) \left\{ \begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_0^\infty (-1)^n q^{n(n+1)} \operatorname{sen}[(2n+1)\pi v] = \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \operatorname{sen}(\pi v) \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n}\cos(2\pi v) + q^{4n})(1-q^{2n}) \\
\vartheta_2(v) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sum_0^\infty q^{n(n+1)} \cos[(2n+1)\pi v] = \\
&= 2q^{\frac{1}{4}} \cos(\pi v) \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n}\cos(2\pi v) + q^{4n})(1-q^{2n}) \\
\vartheta_3(v) &= 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} \cos(2n\pi v) = \\
&= \prod_1^\infty (1 + 2q^{2n-1}\cos(2\pi v) + q^{4n-2})(1-q^{2n}) \\
\vartheta_0(v) &= 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos[2n\pi v] = \\
&= \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1}\cos(2\pi v) + q^{4n-2})(1-q^{2n}) .
\end{aligned} \right.$$

Notiamo infine due sviluppi in serie per

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} \; ; \; \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} ,$$

che risultano dalle formole (III), (IV) del § 139

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = Q_2^2 Q_0 \; ; \; \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = Q_3^2 Q_0 ,$$

confrontate con quelle superiori. Otteniamo così le

formole molto notevoli di Jacobi:

$$(XX)\begin{cases} \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3 = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 \dots \\ \sqrt{\frac{2Kk'}{\pi}} = \vartheta_0 = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots \end{cases}$$

§ 147 Trasformazioni di I.° ordine per le $\vartheta(v,\tau)$ – Le funzioni ϑ sono, propriamente funzioni delle due variabili v, τ; volendo porre in evidenza non solo il valore dell'argomento v, ma anche quello del rapporto dei periodi, si scrive:

$$\vartheta_1(v,\tau)\ ;\ \vartheta_2(v,\tau)\ ;\ \vartheta_3(v,\tau)\ ;\ \vartheta_0(v,\tau).$$

È importante ricercare come cangiano le ϑ quando nel rapporto τ dei periodi si eseguisca una sostituzione del gruppo modulare

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}.$$

Basterà per ciò esaminare l'effetto delle due sostituzioni generatrici del gruppo modulare

$$\tau' = \tau + 1\ ;\quad \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Quanto all'effetto della 1.ª la risposta è immediata appena si osservino le loro espressioni analitiche (XIX); e si trovano con le formole:

$$(XXI)\begin{cases} \vartheta_1(v,\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(v,\tau)\ ;\ \vartheta_2(v,\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_2(v,\tau)\ ; \\ \vartheta_3(v,\tau+1) = \vartheta_3(v,\tau)\ ;\ \vartheta_0(v,\tau+1) = \vartheta_0(v,\tau). \end{cases}$$

Per esaminare l'effetto dell'altra sostituzione

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}$$

esprimiamo le ϑ per le σ per mezzo delle λ; ricordiamo alle (XVIII), (XVIII*), che ci danno:

$$\vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_2};\ \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_2 - e_3};\ \vartheta_3 = \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3};$$

$$\vartheta_1' = 2\omega\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}$$

e avremo con le formole

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \vartheta_1(v,\tau) &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\sqrt[8]{\Delta}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma u \\ \vartheta_2(v,\tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_1 u \\ \vartheta_3(v,\tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_3}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_2 u \\ \vartheta_0(v,\tau) &= \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\sqrt[4]{e_1 - e_2}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}}\sigma_3 u \end{aligned}\right\} \quad v = \frac{u}{2\omega},\quad \tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

Consideriamo ora le funzioni $\bar\sigma$, che mostrerem

$$\bar\omega = \omega' \qquad \bar\omega' = -\omega,$$

che indichiamo con $\bar\sigma u$; $\bar\sigma_1 u$, $\bar\sigma_2 u$; $\bar\sigma_3 u$, mentre con

$$\bar e_1,\quad \bar e_2,\quad \bar e_3,\quad \bar\Delta$$

indicheremo i nuovi valori di e_1, e_2, e_3, Δ che le formole della nota (A) del § 196 danno

$$\bar\sigma u = \sigma u;\ \bar\sigma_1 u = \sigma_3 u;\ \bar\sigma_2 u = \sigma_2 u;\ \bar\sigma_3 u = \sigma_1 u;$$

$$\bar e_1 = e_3,\quad \bar e_2 = e_2,\quad \bar e_3 = e_1;$$

e similmente sarà

$$\bar\eta = \eta',\quad \bar\eta' = -\eta.$$

Ora dalle (17), ponendo

$$\bar{v} = \frac{u}{2\bar{\omega}} = \frac{v}{\tau},$$

risulta

$$\begin{cases} \vartheta_1\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{\bar{\Delta}}\; e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}\,u = \varepsilon_1\sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\,\sqrt[8]{\Delta}\; e^{-\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma u, \\ \vartheta_2\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_2-\bar{e}_3}\; e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}_1\,u = \varepsilon_2\sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\; e^{-\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma_3 u \\ \vartheta_3\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_1-\bar{e}_3}\; e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}_2\,u = \varepsilon_3\sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\; e^{-\frac{\eta' u}{2\omega'}}\,\sigma_2 u \\ \vartheta_0\left(\bar{v}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{\bar{e}_1-\bar{e}_2}\; e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\bar{\omega}}}\,\bar{\sigma}_3\,u = \varepsilon_4\sqrt{\tau}\,\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\; e^{-\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\,\sigma_1 u, \end{cases}$$

dove $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ indicano convenienti radici di tale dell'unità. Al confronto colle (12), osservando che si ha

$$\frac{\eta u^2}{2\omega} - \frac{\eta' u^2}{2\omega'} = \frac{\eta\omega' - \eta'\omega}{2\omega\omega'}\,u^2 = \frac{\pi i}{4\omega\omega'}\,u^2 = \frac{\pi i v^2}{\tau},$$

ci dà:

$$\begin{cases} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_1\sqrt{\tau}\; e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_1(v,\tau) \\ \vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_2\sqrt{\tau}\; e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_0(v,\tau) \\ \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_3\sqrt{\tau}\; e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_3(v,\tau) \\ \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \varepsilon_4\sqrt{\tau}\; e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\,\vartheta_2(v,\tau) \end{cases}$$

Per determinare $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ che sono indipendenti da v e τ si faccia nelle ultime tre formole $v=0$, $\tau=i$ e risulterà

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \frac{1}{\sqrt{i}};$$

e quindi abbiamo per le formole cercate:

$$
(XXII)\quad \begin{cases}
\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = -i\sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \vartheta_1(v,\tau) \\
\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \vartheta_0(v,\tau) \\
\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \vartheta_3(v,\tau) \\
\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}\, \vartheta_2(v,\tau).
\end{cases}
$$

Per far sparire ogni ambiguità da queste formole finali resta solo da stabilirsi quale determinazione è da scegliersi per $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ in ciascuna di esse; dimostriamo che:

« in tutte quattro le formole (XXII) deve prendersi per $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ quel segno che dà un valore positivo alla sua parte reale. »

Ciò ha luogo in effetto per $v=0$, $\tau=i$ e quindi in tutti i casi perchè la parte reale di $\frac{\tau}{i}$, quindi anche quella di $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ non passa mai per lo zero.

Osservazione - Il caso più importante delle applicazioni è quello in cui debbansi calcolare i valori delle σ o delle ϑ per valori puramente immaginarî di τ. Ora il caso in cui $|\tau|<1$ si riconduce mediante le (XXII) al caso $|\tau|>1$. Allora $q=e^{\pi i \tau}=e^{-\pi\rho}$ è reale, positiva e minore di

$$e^{-\pi} = 0,04321\ldots\ldots$$

La serie ϑ, per valori reali dell'argomento v, hanno allora una convergenza estremamente rapida sicchè basta il calcolo di pochi termini della serie per ottenere con grande approssimazione il corrispondente valore delle ϑ. *

Capitolo XIV

Teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche - Trasformazioni di grado primo della $\mathfrak{gu}$ e della $\mathfrak{ou}$ - Trasformazione di Landen.

§148 - *Problema della trasformazione delle funzioni ellittiche - Riduzione al caso delle trasformazioni razionali* -

Nelle teorie relative alle funzioni ellittiche, che abbiamo svolte fin qui, i periodi 2ω, $2\omega'$ si riguardavano come costanti e si ricercavano le relazioni fra funzioni ellittiche di diversi argomenti coi medesimi periodi. Ma, in realtà, le funzioni ellittiche, ed in particolare la fondamentale:

---

* Veggasi per più ampie notizie il Cap VIII del "Traité des fonctions elliptiques" di Appell - T. I.