GIULIO VIVANTI

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI MILANO

ELEMENTI DELLA TEORIA DELLE FUNZIONI ANALITICHE E DELLE FUNZIONI TRASCENDENTI INTERE

Seconda edizione completamente rifusa

ULRICO HOEPLI

EDITORE LIBRAIO DELLA REAL CASA

MILANO

1928

Stab. Tip, Stucchi Ceretti (Soc. An.) - Milano, Via S. Damiano, 16.

PREFAZIONE

L'editore ULRICO HOEPLI, *tanto benemerito della coltura e della scienza italiana, mi rivolse cortese invito di provvedere alla ripubblicazione del mio Manuale* « Teoria delle funzioni analitiche » *esaurito già da qualche tempo. La proposta, per quanto gradita, mi mise di fronte a varie e non facili questioni. Di pensare ad una semplice ristampa non era il caso, dopo oltre un quarto di secolo, tanto fecondo per l'Analisi. D'altra parte io stesso, nell'edizione tedesca del Manuale pubblicata dalla casa* TEUBNER *nel 1906, avevo introdotto profondi mutamenti; non parlando di numerose aggiunte e modificazioni in tutto il corso del volume, alcuni capitoli succinti e frammentari della terza Parte avevano lasciato il luogo ad una esposizione organica e diffusa. Speciali cure io avevo dedicato a due argomenti: le funzioni trascendenti intere, e i punti singolari delle funzioni* *analitiche, cercando di inquadrare in una trattazione sistematica tutti i risultati più importanti raggiunti in questi campi all'epoca della pubblicazione.*

Ma vent'anni sono passati ancora; e voler aggiornare il volume significherebbe dare ad esso una tale estensione, da fargli perdere il carattere di Manuale, *cioè di opera destinata a servire di preparazione e di guida ad uno studio più profondo, di opera che non scoraggi il lettore colla mole eccessiva e coll'esuberanza di particolari, ma che per l'agilità e la semplicità della esposizione lo aiuti ad incamminarsi in un sentiero per lui nuovo. Ho pensato pertanto di lasciare invariate, come piano generale, le due prime parti, e di limitare la terza alla teoria delle funzioni trascendenti intere.*

E qui mi si è affacciata una nuova difficoltà. Dacchè il celebre teorema di PICARD *fu dimostrato da* E. BOREL *per via* elementare, *cioè mediante una complicata ed ingegnosissima combinazione di diseguaglianze algebriche, è venuta in luce una ricca serie di modificazioni e di generalizzazioni del teorema stesso, tutte ottenute con procedimenti analoghi. Non solo, ma i medesimi procedimenti si dimostrano utili per uno studio profondo del cosidetto* caso d'eccezione, *e delle funzioni intere* *d'ordine zero o d'ordine infinito; può dirsi che non v'è attualmente cultore della teoria delle funzioni intere che batta una via diversa. Basta aprire una memoria sull'argomento, per notare che le parole sono ben poche in confronto alle formole. Non è una critica che intendo fare: tutti i metodi sono buoni, quando conducono a risultati importanti, come quelli a cui sono legati i nomi dei maggiori analisti della giovane scuola, e può anche darsi che sia veramente questa la sola strada per giungere a quei risultati. Ma il metodo contrasta troppo vivamente con quello limpido, elegante di* WEIERSTRASS, *tendente a sostituire al calcolo — che dimostra ma non illumina — il ragionamento, per poter trovare largo posto in un libro che, sia pure modestamente, ai principii del grande matematico tedesco vuole ispirarsi. Coprire pagine e pagine di aridi calcoli significherebbe svisare il carattere fondamentale dell'opera, e forse disanimare qualcuno di coloro che volessero ad essa attingere le prime nozioni dell'Analisi. Ho pertanto, benchè a malincuore, rinunciato all'idea di un'esposizione completa della teoria delle funzioni intere, pur non mancando di accennare — più o meno diffusamente secondo i casi — a tutti i vari indirizzi nei quali questa teoria si è svolta negli ultimi anni.*

Anche le due prime parti furono completamente rifuse.

Nella prima la teoria degli aggregati è stata disposta in ordine più logico, trattando anzitutto degli aggregati in generale, poi degli aggregati di punti posti sopra una retta, e infine di quelli contenuti in uno spazio a due o più dimensioni.

Mutamenti più profondi ha subito la seconda parte. La scuola di WEIERSTRASS *sviluppava tutta la teoria delle funzioni analitiche senza ricorrere al concetto di integrale curvilineo. Ma venne un momento in cui la mancanza di questo istrumento, divenuto nelle mani di* CAUCHY *così agile e così potente, si fece sentire.* A. PRINGSHEIM *volle sostituire ad esso il suo* « valor medio », *il quale permette di raggiungere con facilità risultati notevoli, come può vedersi, p. es., nella vecchia edizione del mio Manuale. Ma la rigidità del valore medio, costretto a riferirsi sempre ad una circonferenza, non può certo competere colla — mi si permetta il termine — pieghevolezza dell'integrale complesso, che ci lascia variare in infiniti modi la curva d'integrazione senza mutare il suo valore, purchè certi punti non vengano oltrepassati; e lo stesso* PRINGSHEIM, *e con lui* A. KNESER, *riconobbero, alcuni anni or sono, l'opportunità d'introdurre nella teoria delle funzioni analitiche* *il concetto di integrale complesso, definito però in modo autonomo, come limite di una somma. Con ciò non si veniva ad alterare sostanzialmente il carattere fondamentale del metodo di* WEIERSTRASS, *il quale non ripete la sua speciale fisonomia dalla esclusione di un simbolo come l'integrale — il quale non è altro che un limite, — ma dall'indipendenza dai concetti di integrabilità e derivabilità nel campo reale, ai quali non può a meno di ricorrere la teoria di* CAUCHY-RIEMANN. *Io ho accolto in questa edizione l'opportuna riforma, la quale permette di presentare molti punti sotto aspetto più semplice, e sopra tutto di far uso del* teorema di CAUCHY, *di quel teorema che si può dire racchiuda in sè virtualmente tutta l' Analisi.*

Un'ultima questione. Alla prima edizione del Manuale è annessa una lista bibliografica, che contiene oltre 200 titoli, ed occupa pressochè trenta pagine. I 200 titoli sono divenuti quasi 700 nella edizione tedesca; oggi quanti sarebbero, e quante pagine dovrebbero assorbire? Ma non è soltanto questa considerazione, e nemmeno quella del lavoro gravoso, a cui avrei dovuto sottopormi, che mi ha lasciato in dubbio. Penso piuttosto che una lista bibliografica, non ristretta ad uno speciale argomento, ma abbracciante un'intera teoria, sia — non è un paradosso — tanto meno utile quanto *più è estesa, poichè bene spesso il titolo di un lavoro non è affatto sufficiente a dare un'idea esatta del suo contenuto, quando questo possa indifferentemente riguardare i più svariati punti di un vasto campo. Alla difficoltà si ovvierebbe, aggiungendo un cenno sull'argomento di ciascun lavoro; ma sarebbe ciò possibile entro limiti ragionevoli di spazio?*

Ho deciso pertanto di sopprimere la lista bibliografica, riportando le citazioni ai vari passi ai quali esse si riferiscono, ciò che è certo più comodo per chi voglia approfondire qualche punto della teoria.

Ed ora ho finito. Se il tempo abbia portato maturanza o vecchiezza al modesto frutto delle mie fatiche, decida il lettore.

Milano, dicembre 1927.

G. VIVANTI.

INDICE

PARTE TERZA

Teoria delle funzioni intere trascendenti

PARTE PRIMA

ELEMENTI DELLA TEORIA DEGLI AGGREGATI (*)

Potenza degli aggregati; numeri cardinali trasfiniti.

1. Dicesi *aggregato* un insieme ben definito di elementi d'una determinata classe, tale cioè che, dato un elemento, possa sempre decidersi se esso appartenga o no all'insieme. Così nella classe dei numeri reali formano un aggregato i numeri razionali, i numeri interi, i numeri

(*) La teoria degli aggregati è dovuta a GEORG CANTOR (1845-1918), il quale ne fece conoscere i primi elementi nel 1872, e la sviluppò in seguito in una serie di lavori della più grande importanza (*Math. Ann.*, T. 5, 1872, p. 123-132; T. 15, 1879, p. 1-7; T. 17, 1880, p. 355-358; T. 20, 1882, p. 113-121; T. 21, 1883, p. 51-58, 545-591; T. 23, 1884, p. 453-488; T. 46, 1895, p. 481-512; T. 49, 1897, p. 207-246; *Journ. f. Math.*, T. 77, 1874, p. 258-272; T. 84, 1877, p. 242-258; *Acta math.*, T. 2, 1883, p. 409-414; T. 4, 1884, p. 381-392; T. 7 ,1885, p. 105-124; *Bihang* pari, ecc.; nella classe formata da tutti gli uomini di un reggimento costituiscono un aggregato tutti quelli la cui statura supera una

---

Ak. Handl. Stockholm, T. 11, 1886, N. 19; *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, T. 1, 1892, p. 75-78; *Riv. di mat.*, T. 5, 1895, p. 104-108; *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1879, p. 127-135; *Zeitschr. f. Philos.*, T. 91, 92, 1887). Alcune di queste memorie furono tradotte in francese in *Acta math.* (T. 2, 1883, p. 305-328, 336-408). La teoria ha trovato ben presto numerose applicazioni in tutti i campi della Matematica, ed ha anche dato luogo ad interessanti discussioni filosofiche.

In questo volume dobbiamo limitarci ad esporre i soli punti della teoria che sono strettamente necessari al nostro scopo; chi volesse acquistarne una più ampia conoscenza potrà ricorrere a qualcuno dei trattati ad essa particolarmente dedicati. Oltre all'importante rapporto di A. SCHOENFLIES (*Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, T. 8, P. II, 1900, p. 1-251; *ivi*, II Ergänzungsband, 1908), citiamo: A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, 1ª ed. 1919, 2ª ed. 1923; F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914; G. HESSENBERG, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Göttingen, 1906; J. KÖNIG, *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, Leipzig, 1914; A. SCHOENFLIES, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin, 1913; W. H. and G. C. YOUNG, *The theory of the sets of points*, Cambridge, 1906.

Nel 1920 si è iniziata a Varsavia la pubblicazione di un periodico, col titolo di «Fundamenta mathematicae», dedicato esclusivamente alla teoria degli aggregati ed alle sue più immediate applicazioni.

Aggregato, od anche *insieme*, corrisponde al tedesco *Mannigfaltigkeit* o *Menge*; i francesi dicono *ensemble*, gli inglesi *set*, gli spagnuoli e i portoghesi *conjunto*, i polacchi *mnogosc*, i russi *mnojestvo*.

data misura, o la cui età non oltrepassa un dato limite; e così via.

Un aggregato è *finito* (*), se, imaginando di togliere da esso successivamente degli elementi e di far corrispondere a questi ordinatamente i numeri della serie naturale, si giunge infine ad un numero, oltre il quale l'operazione non può più ripetersi, non esistendo più alcun elemento dell'aggregato. Se si indica in generale con a_h l'elemento a cui corrisponde il numero h, un aggregato finito può rappresentarsi così:

$$a_1\,, a_2\,, \ldots, a_n.$$

Un aggregato non finito dicesi *infinito*. Tale è p. es. l'aggregato di tutti i numeri interi positivi.

Se A, B sono due aggregati, si suole denotare con $M(A, B)$ l'insieme degli elementi appartenenti almeno ad uno di essi, con $D(A, B)$ l'insieme degli elementi comuni ad ambidue.

Se A e B non hanno elementi comuni, $M(A, B)$ coincide con $A + B$ (v. art. 4).

2. Due aggregati sono *equivalenti*, od hanno egual *potenza*, od egual *numero cardinale* (**), se

(*) La questione della definizione di aggregato *finito* e di aggregato *infinito* è stata argomento di molte discussioni, sulle quali non possiamo soffermarci.

(**) La distinzione dei due concetti di numero cardinale e di numero ordinale, che ha scarsa importanza nel campo degli aggregati finiti, è invece essenziale quando si passa da questi agli aggregati infiniti.

fra i loro elementi può stabilirsi una corrispondenza *biunivoca* e *completa*, cioè tale, che a ciascun elemento di uno degli aggregati corrisponda uno ed un solo elemento dell'altro, e viceversa. P. es. l'aggregato dei raggi di un fascio e quello dei loro punti d'intersezione con una retta non passante per il centro del fascio e giacente nel suo piano sono equivalenti, perchè a ciascun raggio si può far corrispondere il suo punto d'intersezione con quella retta e, viceversa.

Evidentemente due aggregati finiti sono equivalenti sempre e soltanto se constano di un egual numero di elementi; questo numero può assumersi a denotare il numero cardinale comune dei due aggregati. Per indicare numeri cardinali di aggregati infiniti (*numeri cardinali trasfiniti*), useremo lettere minuscole in carattere grassetto. In particolare indicheremo con $\mathbf{n}$ (*) il numero cardinale dell'insieme dei numeri naturali. Gli aggregati aventi il numero cardinale $\mathbf{n}$ si dicono *numerabili*.

L'eguaglianza dei numeri cardinali possiede le tre proprietà fondamentali dell'eguaglianza dei numeri naturali, e in generale delle grandezze, cioè:

α) $\mathbf{a} = \mathbf{a}$;

β) se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = \mathbf{a}$;

γ) se $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.

3. Se A, B sono due aggregati *non equiva-*

(*) G. Cantor usa la lettera ebraica *alef* coll'indice zero.

lenti, **a**, **b** i loro numeri cardinali, e se una parte (*) di A è equivalente a B, si dice che **a** è *maggiore* di **b**, o che **b** è *minore* di **a**:

$$\mathbf{a} > \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{b} < \mathbf{a}.$$

Segue da ciò che, se **a**, **b** sono due numeri cardinali qualunque, è impossibile che abbiano luogo insieme due delle tre relazioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{a} > \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{a} < \mathbf{b}.$$

Non è altrettanto evidente che una di esse debba necessariamente aver luogo, come avviene per i numeri finiti; per dimostrarlo, sembra necessario introdurre un postulato (**postulato di Zermelo**) (**).

Dalla definizione stabilita segue che: *Se* B *è parte di* A, $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$. Infatti, o A e B sono equivalenti, o, se pure non lo sono, una parte di A, cioè B stesso, è equivalente a B.

I concetti di maggioranza e minoranza conservano anche per i numeri cardinali le loro proprietà fondamentali; cioè:

(*) Si dice che B è *parte* di A, se tutti gli elementi di B appartengono ad A; *parte propria*, se vi sono inoltre elementi di A non appartenenti a B.

(**) V.: E. ZERMELO, *Math. Ann.*, T. 59, 1904, p. 514-516; T. 65, 1908, p. 261-281. L'argomento è stato oggetto di lunghe ed interessanti discussioni, delle quali non è qui il caso di parlare. Ritorneremo più innanzi (art. 33) sull'argomento.

δ) se $\mathbf{a} > \mathbf{b}$, $\mathbf{b} < \mathbf{a}$;

ε) se $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{a} > \mathbf{c}$.

4. Se A, B sono due aggregati *senza elementi comuni*, l'aggregato costituito dagli elementi di A e da quelli di B presi insieme si denota con $A + B$. Se $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sono i numeri cardinali dei due aggregati, quello di $A + B$ si indica con $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

L'addizione dei numeri cardinali possiede, come è facile dimostrare, le proprietà commutativa ed associativa. Invece non è sempre vero che sia $\mathbf{a} + \mathbf{b} > \mathbf{a}$ (v. più innanzi art. 11).

5. Se A, B sono due aggregati, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ le loro potenze, l'insieme delle coppie ottenute combinando in tutti i modi possibili un elemento di A con uno di B si indica con $A\,B$, e la sua potenza si denota con $\mathbf{a}\,\mathbf{b}$.

La moltiplicazione dei numeri cardinali possiede le proprietà commutativa, associativa e distributiva. Non è sempre vero invece che per $\mathbf{b} > 1$ sia $\mathbf{a}\,\mathbf{b} > \mathbf{a}$ (v. più innanzi art. 11).

Se uno dei due fattori è finito, la moltiplicazione equivale ad un'addizione ripetuta; p. es.:

$$2\,\mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{a}.$$

6. Se A, B sono due aggregati, $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ le loro potenze, si può in più modi (in infiniti modi, se uno almeno dei due aggregati è infinito) stabilire una corrispondenza tra gli elementi di B ed elementi *distinti o no* di A. P. es., se gli elementi di A sono p, q, r e quelli di B sono α, β, si possono stabilire le seguenti corrispondenze:

$$\begin{matrix} \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta & \alpha\beta \\ pp & pq & pr & qp & qq & qr & rp & rq & rr \end{matrix}$$

L'insieme di tutte le corrispondenze possibili si denota con A^B, e il suo numero cardinale con $\mathbf{a}^\mathbf{b}$.

Nell'esempio citato si ha:

$$\mathbf{a} = 3 \ , \ \mathbf{b} = 2 \ , \ \mathbf{a}^\mathbf{b} = 3^2 = 9.$$

L'elevazione a potenza conserva le proprietà formali che possiede questa operazione nell'Aritmetica; si ha cioè:

$$\mathbf{a}^{\mathbf{b}+\mathbf{c}} = \mathbf{a}^\mathbf{b}\,\mathbf{a}^\mathbf{c} \ , \ (\mathbf{a}\,\mathbf{b})^\mathbf{c} = \mathbf{a}^\mathbf{c}\,\mathbf{b}^\mathbf{c} \ , \ (\mathbf{a}^\mathbf{b})^\mathbf{c} = \mathbf{a}^{\mathbf{bc}}.$$

Invece non è sempre vero che per $\mathbf{a} > 1$, $\mathbf{b} > 1$ sia $\mathbf{a}^\mathbf{b} > \mathbf{a}$ (v. più innanzi art. 11).

Se l'esponente è finito, l'elevazione a potenza equivale ad una moltiplicazione ripetuta; p. es.:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\,\mathbf{a}.$$

7. Le precedenti definizioni coincidono con quelle dell'Aritmetica, quando i numeri su cui si opera sono finiti.

La cosa è evidente per l'addizione.

Per la moltiplicazione si osservi che, dati due aggregati, l'uno di a, l'altro di b elementi, formare coi loro elementi tutte le coppie possibili è come ripetere b volte ciascuno degli a elementi del primo aggregato, sicchè il numero delle coppie è $a\,b$.

Per l'elevazione a potenza, dati ancora due aggregati, l'uno di a, l'altro di b elementi, far corrispondere in tutti i modi possibili ai b elementi del secondo aggregato elementi, distinti o no, del primo equivale a formare tutte le disposizioni con ripetizione di a elementi in b posti; il numero di tali disposizioni è, come si sa, a^b.

8. *Qualunque aggregato infinito contiene un aggregato numerabile.*

Dalla definizione stabilita nell'art. 1 segue che da un aggregato infinito possono togliersi successivamente elementi $a_1, a_2, \ldots$ senza che l'operazione cessi mai di essere possibile. L'insieme di tali elementi costituisce un aggregato numerabile contenuto in quello dato.

Sotto altra forma: *Il numero* $\mathbf{n}$ *è minore di ogni altro numero cardinale trasfinito.*

Segue da ciò che: *Qualunque aggregato infinito contenuto in un aggregato numerabile è numerabile.*

9. *Se due aggregati sono equivalenti, e si toglie da ciascuno di essi un elemento, gli aggregati restanti sono pure equivalenti.*

Sieno A, B due aggregati equivalenti, e sia p un elemento qualunque di A, q un elemento qualunque di B; indichiamo con C, D gli aggregati residui, sicchè:

$$A = p + C \ , \ B = q + D.$$

Se p e q sono omologhi nella corrispondenza che stabilisce l'equivalenza di A e B, la corrispondenza stessa stabilisce la equivalenza di C e D. Nel caso contrario, indicando con s l'omologo di p in B, con r l'omologo di q in A, e ponendo:

$$C = r + E \;,\; D = s + F,$$

quindi:

$$A = p + r + E \;,\; B = q + s + F,$$

dalla corrispondenza tra A e B risulta una corrispondenza biunivoca e completa tra E ed F, e da questa, considerando r ed s come omologhi, una corrispondenza biunivoca e completa tra C e D.

Di qui segue che: *Nessun aggregato finito può essere equivalente ad una sua parte propria.*

Sia A un aggregato finito, B una sua parte propria, che conterrà necessariamente un numero finito m di elementi. Supposti A e B equivalenti, ed applicando m volte il precedente teorema, resterebbe da una parte un aggregato non nullo (l'insieme degli elementi di A non appartenenti a B), dall'altra un aggregato nullo, e tra questi due dovrebbe aver luogo l'equivalenza, ciò che è assurdo.

Invece: *Un aggregato infinito contiene sempre una parte propria ad esso equivalente.*

Sia A un aggregato infinito, B un aggregato numerabile in esso contenuto (art. 8), C l'aggregato residuo (che può anche essere nullo), sicchè:

$$A = B + C.$$

Se $b_1, b_2, b_3, \ldots$ sono gli elementi di B, e si indica con B_1 l'aggregato $b_2, b_3, \ldots$, sicchè:

$$B = b_1 + B_1,$$

l'aggregato $A_1 = B_1 + C$ è equivalente ad A. Infatti tra B_1 e B può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa considerando come omologhi agli elementi $b_2, b_3, b_4, \ldots$ di B_1 rispettivamente gli elementi $b_1, b_2, b_3, \ldots$ di B; facendo inoltre corrispondere ciascun elemento di C a se stesso, risulta stabilita una corrispondenza biunivoca e completa tra A_1 ed A.

La proprietà di contenere una parte propria equivalente è dunque caratteristica degli aggregati infiniti, e viene assunta da alcuni autori come definizione dei medesimi.

Un esempio semplicissimo è l'insieme dei numeri naturali, il quale è equivalente all'insieme dei numeri pari, giacchè ad ogni numero naturale m può farsi corrispondere il numero pari $2m$, e reciprocamente.

10. *Se due aggregati infiniti hanno la proprietà che ciascuno contiene una parte equivalente all'altro, essi sono equivalenti, e reciprocamente* (**teorema di Cantor-Bernstein**) (*).

(*) Questo teorema, enunciato da G. Cantor

Sieno A, B i due aggregati, e sia A_1 una parte di A equivalente a B, B_1 una parte di B equivalente ad A. Scriviamo:

$$A = A_1 + C_1 ,$$

e sia A_2 la parte di A_1 che nella corrispondenza tra A_1 e B corrisponde alla parte B_1 di B; A_2 sarà equivalente ad A. Scriviamo:

$$A_1 = A_2 + C_2 ,$$

e sia A_3 la parte di A_2 che nella corrispondenza tra A_2 ed A corrisponde ad A_1; sarà A_3 equivalente a B. Il processo può continuare indefinitamente, giacchè gli aggregati $A_1, A_2, A_3, \ldots$, essendo equivalenti all'uno o all'altro degli aggregati infiniti A, B, sono pure infiniti. La parte comune a tutti gli aggregati $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (che può anche essere nulla) si indichi con D, sicchè:

$$A = D + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots,$$
$$A_1 = D + C_2 + C_3 + \ldots\ldots$$

(*Math. Ann.*, T. 46, pag. 484), venne dimostrato per la prima volta da E. SCHRÖDER (*Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, T. 5, 1897, P. I, p. 81-82; *Nova Acta Leop.-Carol. Ac.*, T. 71, 1898, p. 303-362), ma il suo procedimento fu riconosciuto non rigoroso da A. KORSELT (*Math. Ann.*, T. 70, 1911, p. 294-296). Una dimostrazione esatta ne diede F. BERNSTEIN; essa è esposta in: E. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1898, p. 104-106.

Dall'equivalenza di A ed A_2, e dalla definizione di A_1 ed A_3, segue che C_1 e C_3 sono equivalenti; e così lo sono in generale C_m e C_{m+2}. Dopo ciò può stabilirsi una corrispondenza tra A ed A_1, facendo corrispondere agli elementi di D, C_2, C_4, ... gli elementi stessi, agli elementi di C_1, C_3, C_5, ... in A quelli di C_3, C_5, C_7, ... in A_1. Gli aggregati A ed A_1 sono dunque equivalenti, e quindi lo sono anche A e B.

Il teorema reciproco è quasi evidente. Può trovarsi (art. 9) in A una parte A_1 equivalente ad A, in B una parte B_1 equivalente a B; ma A e B sono per ipotesi equivalenti; quindi A_1 è equivalente a B, e B_1 ad A.

11. *La somma di un aggregato numerabile e di un aggregato finito è un aggregato numerabile.*

Sieno i due aggregati:

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots \quad ; \quad B = b_1, b_2, \ldots, b_m.$$

Facendo corrispondere agli elementi:

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

di $A + B$ ordinatamente i numeri:

$$1, 2, \ldots, m, m+1, m+2, m+3, \ldots,$$

risulta che $A + B$ è numerabile.

La somma di due aggregati numerabili è un aggregato numerabile.

Sieno i due aggregati:

$$A = a_1, a_2, a_3, \ldots \;;\; B = b_1, b_2, b_3, \ldots$$

Facendo corrispondere agli elementi:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$$

di $A + B$ ordinatamente i numeri:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots,$$

risulta che $A + B$ è numerabile.

L'aggregato costituito da tutti gli elementi d'un insieme numerabile di aggregati numerabili è numerabile.

Abbiasi l'aggregato numerabile:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots$$

di aggregati numerabili, i cui elementi sieno rispettivamente:

$$\begin{array}{l} a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots; \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots; \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Facendo corrispondere agli elementi:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots$$

(dove gli elementi sono disposti secondo l'ordine crescente della somma dei due indici, e gli elementi di somma eguale secondo l'ordine crescente del primo indice) ordinatamente i numeri della serie naturale, risulta dimostrato l'asserto.

I precedenti teoremi possono esprimersi in formole come segue:

$$(1)\quad \mathsf{n}+m=\mathsf{n}\ ,\ \mathsf{n}+\mathsf{n}=2\,\mathsf{n}=\mathsf{n}\ ,\ \mathsf{n}\,\mathsf{n}=\mathsf{n}^2=\mathsf{n}.$$

Coll'applicazione ripetuta delle due ultime formole si ottiene:

$$m\,\mathsf{n}=\mathsf{n}\ ,\ \mathsf{n}^m=\mathsf{n}.$$

12. *La potenza di un aggregato infinito non cambia, se si toglie da esso un aggregato finito.*

È una conseguenza immediata della prima delle formole (1).

La potenza di un aggregato infinito non numerabile non cambia, se si toglie da esso un aggregato numerabile.

Sia A un aggregato infinito non numerabile, B un aggregato numerabile in esso contenuto (art. 8), e poniamo:

$$A=B+C;$$

C sarà infinito, giacchè nel caso contrario A sarebbe numerabile (art. 11), e perciò conterrà a sua volta un aggregato numerabile D. Poniamo:

$$C=D+E,$$

donde:

$$A = B + D + E.$$

Tra A e C può stabilirsi una corrispondenza biunivoca e completa, facendo corrispondere agli elementi di E gli elementi stessi, agli elementi dell'insieme numerabile (art. 11) $B + D$ quelli dell'insieme numerabile D.

In formole:

Se $\mathbf{a} > \mathbf{n}$, $\mathbf{a} + \mathbf{n} = \mathbf{a}$.

13. *L'insieme di tutti i numeri interi (positivi, nulli e negativi) è numerabile.*

È una conseguenza immediata delle formole dell'art. 11.

L'insieme di tutti i numeri razionali è numerabile.

Poniamo:

$$\frac{p}{q} = a_{pq} ,$$

dove p e q sono interi positivi. L'insieme degli elementi a_{pq}, che è numerabile (art. 11), contiene tutti i numeri razionali positivi, e ciascuno di essi infinite volte; p. es.:

$$\frac{2}{3} = a_{23} = a_{46} = a_{69} = \ldots\ldots$$

Quindi l'insieme dei numeri razionali positivi, che è infinito, è numerabile (art. 8). Ma lo è pure l'insieme dei numeri razionali negativi, quindi (art. 11) lo stesso può dirsi dell'insieme dei numeri razionali positivi e negativi.

Dal teorema ora dimostrato e dall'ultimo teorema dell'art. 11 segue che:

L'insieme dei punti del piano o dello spazio aventi le due o le tre coordinate razionali è numerabile.

14. *L'aggregato di tutti i numeri algebrici reali è numerabile.*

Dicesi *numero algebrico reale* ogni radice reale di un'equazione algebrica a coefficienti interi. I numeri algebrici reali comprendono come caso particolare i numeri razionali, donde segue anzitutto che il loro insieme è infinito.

Tutte le equazioni algebriche di grado m a coefficienti interi si ottengono ponendo nella equazione:

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

in luogo dei coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ in tutti i modi possibili $m+1$ numeri interi, quindi l'aggregato di tali equazioni ha la potenza $\mathsf{n}^{m+1} = \mathsf{n}$. Ogni equazione ha al più m radici reali, e queste radici non sono tutte diverse per le diverse equazioni; quindi l'insieme di tutte le radici reali differenti delle equazioni considerate ha potenza $\leq m\,\mathsf{n} = \mathsf{n}$, e perciò (art. 8) è numerabile. Ora l'insieme dei valori che può prendere m è numerabile, e le radici reali corrispondenti a valori diversi di m non sono tutte diverse; sicchè può concludersi che l'insieme dei numeri algebrici reali è numerabile.

15. *Un insieme di segmenti non sovrapponentisi e giacenti sopra una stessa retta è numerabile.*

Supponiamo dapprima l'insieme contenuto in un segmento finito di lunghezza d. Vi sarà nell'insieme tutt'al più un segmento di lunghezza $> \frac{d}{2}$; vi saranno tutt'al più 3 segmenti di lunghezza $\leq \frac{d}{2}$ e $> \frac{d}{4}$; tutt'al più 7 segmenti di lunghezza $\leq \frac{d}{4}$ e $> \frac{d}{8}$; e così di seguito. E questa ripartizione comprenderà tutti i segmenti dell'insieme; giacchè, dato uno qualunque di essi, esiste un numero m tale, che la sua lunghezza sia $\leq \frac{d}{2^m}$ e $> \frac{d}{2^{m+1}}$. Ora, se facciamo corrispondere all'unico segmento eventualmente esistente nel primo gruppo il numero 1, a quelli del secondo gruppo i numeri successivi, e così via, risulta che l'insieme considerato è numerabile.

Se l'insieme dei segmenti non è racchiudibile in alcun segmento finito, ma è contenuto in una semiretta, basterà proiettare questa sopra un segmento finito; se non è contenuto in una semiretta, basterà dividere la retta in due semirette in un modo qualunque, ed applicare il teorema sulla somma di due aggregati numerabili (art. 11).

Il teorema dimostrato si estende immediatamente a campi a più dimensioni; per il piano può enunciarsi così:

Un insieme di campi piani (di area non nulla) *non sovrapponentisi e giacenti in uno stesso piano è numerabile.*

16. *L'aggregato dei numeri reali compresi fra due numeri qualunque non è numerabile* (cioè ha potenza $> \mathbf{n}$).

Consideriamo l'insieme dei numeri compresi tra 0 e 1; ciascuno di essi può rappresentarsi, ed in un sol modo (*), mediante una frazione decimale illimitata colla parte intera nulla. Supponiamo, se è possibile, che l'insieme di tali frazioni sia numerabile; esse potranno rappresentarsi come segue:

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} 0,\, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots\ldots \\ 0,\, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots\ldots \\ 0,\, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ora è facile vedere che si può costruire una frazione decimale illimitata diversa da tutte quelle contenute nella tabella (1); basta per ciò prendere la prima cifra decimale diversa da a_{11}, la seconda diversa da a_{22}, la terza diversa da

(*) Le frazioni, il cui denominatore non contiene fattori primi diversi da 2 e 5, danno luogo a frazioni decimali limitate; ma queste possono trasformarsi in frazioni illimitate, diminuendo di un'unità l'ultima cifra ed aggiungendo infiniti 9. Per esempio:

$$\frac{13}{25} = 0{,}52 = 0{,}51999\ldots.$$

a_{33}, e così via. Ne segue che la tabella (1) non può comprendere tutti i numeri che stanno tra 0 e 1, donde risulta dimostrato l'asserto.

Per estendere il teorema all'insieme dei numeri compresi tra due numeri finiti qualunque, basta ricorrere all'ordinaria rappresentazione dei numeri reali mediante i punti di una retta, e considerare che due segmenti qualunque si possono far corrispondere tra loro punto a punto mediante una proiezione.

Dal teorema dimostrato segue immediatamente che:

L'insieme di tutti i numeri reali non è numerabile.

I risultati ottenuti possono anche enunciarsi così:

L'insieme dei punti di un segmento qualsiasi, e quindi anche l'insieme di tutti i punti d'una retta, non è numerabile.

Considerando che l'insieme dei numeri razionali compresi tra due numeri qualunque è numerabile (art. 13), e tenendo presente il teorema dell'art. 12, risulta pure che:

L'insieme dei numeri irrazionali compresi in un intervallo qualunque ha egual potenza dell'insieme dei numeri reali compresi nello stesso intervallo.

17. Indicheremo con **c**, e diremo *potenza del continuo*, la potenza dell'insieme dei numeri reali compresi tra 0 ed 1.

Poichè (cfr. art. 15) i punti di un segmento si possono far corrispondere biunivocamente a quelli di un altro segmento qualunque, di una semiretta o di una retta o di una linea qualsiasi, tutti questi aggregati di punti hanno la potenza $\mathbf{c}$. La stessa potenza ha (art. 12) l'aggregato dei punti che rappresentano numeri irrazionali.

Di qui risultano varie proprietà aritmetiche del numero $\mathbf{c}$. Se si divide un segmento comunque in m parti, l'insieme dei punti di ciascuna delle parti, come l'insieme dei punti dell'intero segmento, ha la potenza $\mathbf{c}$; quindi:

$$m\,\mathbf{c} = \mathbf{c}.$$

Se sopra una semiretta si porta successivamente uno stesso segmento, la semiretta resta divisa in un insieme numerabile di segmenti eguali, donde:

$$\mathbf{n}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}.$$

L'insieme A delle frazioni decimali limitate ed illimitate colla cifra intera nulla coincide coll'insieme dei numeri reali compresi tra 0 ed 1 (escluso lo 0); vi figurano due volte (v. nota all'art. 16) i numeri esprimibili con frazioni ordinarie irriducibili il cui denominatore non contiene fattori primi diversi da 2 e 5, numeri, il cui insieme, come parte di quello dei numeri razionali, è numerabile. Perciò la potenza dell'insieme A è $\mathbf{c} + \mathbf{n}$, ossia (art. 12) $\mathbf{c}$. D'altra parte costruire tutte le frazioni considerate significa far corrispondere in tutti i modi possibili agli elementi di un insieme numerabile — quello dei posti delle varie cifre decimali — elementi dell'insieme delle 10 cifre (*), sicchè la potenza dell'insieme A è data da $10^{\mathbf{n}}$. Si ha dunque, considerando che ciò che si dice per il sistema decimale di numerazione potrebbe ripetersi per un sistema a base m qualunque:

$$m^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}.$$

Da questa relazione fondamentale ne seguono altre non meno importanti. Elevando ambi i membri alla potenza p, dove p è un numero intero positivo qualunque, oppure alla potenza $\mathbf{n}$, si ha:

$$m^{p\mathbf{n}} = \mathbf{c}^p \ , \ m^{\mathbf{n}^2} = \mathbf{c}^{\mathbf{n}},$$

ma $p\,\mathbf{n} = \mathbf{n}$, $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}$ (art. 11), quindi:

$$\mathbf{c}^p = \mathbf{c} \ , \ \mathbf{c}^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}.$$

La prima di queste relazioni è suscettibile di una interpretazione interessante.

Abbiasi un quadrato di lato 1, e si assumano due lati contigui di esso come assi cartesiani; ogni punto del quadrato avrà per coordinate due numeri reali compresi tra 0 e 1, e recipro-

(*) Le frazioni decimali limitate corrispondono al caso in cui, al di là di una certa cifra, tutte le altre sono zeri.

camente a ciascuna coppia di tali numeri corrisponderà uno ed un sol punto del quadrato. Quindi l'insieme dei punti del quadrato avrà la potenza $\mathbf{c}^2$, ossia, per la relazione precedente, $\mathbf{c}$. Il ragionamento si estende facilmente ad un numero qualunque di dimensioni, e la conclusione vale per campi di forma qualunque, sicchè può affermarsi che:

È sempre possibile stabilire una corrispondenza biunivoca e completa tra i punti d'un campo ad un numero qualunque di dimensioni e quelli di un segmento (*). Ossia:

L'insieme dei punti d'un campo piano, e, più generalmente, d'un campo ad un numero qualunque di dimensioni, ha la potenza $\mathbf{c}$.

Considerando il piano come imagine dell'insieme dei numeri complessi, può dirsi che: *L'insieme dei numeri complessi ha la potenza* $\mathbf{c}$.

Anche la seconda relazione dà luogo ad un risultato degno di nota. Una funzione continua d'una variabile reale è perfettamente determinata, quando si conoscano i valori che essa prende per tutti i valori razionali della variabile; si ottiene perciò l'insieme di tutte le funzioni continue, facendo corrispondere, in tutti i

(*) Non si può dire quindi senz'altro, come si usa comunemente, che una coppia di equazioni $x = x\ (t)$, $y = y\ (t)$ rappresenti una curva; essa può anche rappresentare i punti di un campo a due dimensioni, e di ciò furono costruiti anche esempi. Però in questo caso a valori infinitamente vicini di t non corrispondono in generale punti infinitamente vicini.

modi possibili, valori reali agli elementi dell'insieme dei valori razionali. Pertanto l'insieme delle funzioni continue ha la potenza $\mathbf{c}^{\mathbf{n}}$, ossia $\mathbf{c}$. Cioè: *L'insieme di tutte le funzioni continue di una variabile reale ha la potenza del continuo.*

18. Un ragionamento analogo a quello ultimamente esposto conduce a concludere che l'insieme di tutte le funzioni d'una variabile reale ha la potenza $\mathbf{f} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}}$. Ora vogliamo dimostrare che $\mathbf{f} > \mathbf{c}$.

Anzitutto, poichè l'insieme I di tutte le funzioni comprende l'insieme delle funzioni continue, si ha (art. 3) $\mathbf{f} \geq \mathbf{c}$; ancora più semplice è osservare che l'insieme I comprende l'insieme di tutte le funzioni costanti, il quale coincide con quello dei numeri reali. Ora, se fosse $\mathbf{f} = \mathbf{c}$, si potrebbe stabilire una corrispondenza biunivoca e completa tra i numeri reali e le funzioni, sicchè, indicando con $f_r(x)$ la funzione corrispondente al numero r, l'insieme delle funzioni $f_r(x)$ coinciderebbe con I. Invece è facile costruire una funzione $\varphi(x)$ diversa da tutte le $f_r(x)$; basta prenderla in modo che per ogni r sia $\varphi(r) \neq f_r(r)$, ciò che dimostra assurda l'ipotesi. Dunque: *La potenza* $\mathbf{f}$ *dell'insieme di tutte le funzioni d'una variabile reale è maggiore di quella del continuo.*

È degno di nota, che anche l'insieme delle funzioni che prendono due soli valori diversi ha la potenza $\mathbf{f}$. Infatti la potenza di questo insieme è $2^{\mathbf{c}}$; ora $2^{\mathbf{n}} = \mathbf{c}$, da cui, elevando alla potenza $\mathbf{c}$, $2^{\mathbf{nc}} = \mathbf{c}^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$; ma $\mathbf{n}\,\mathbf{c} = \mathbf{c}$, quindi $2^{\mathbf{c}} = \mathbf{f}$.

Con un ragionamento del tutto simile si dimostra che: *Se* **a** *è un numero cardinale trasfinito qualunque,* $\mathbf{a}^{\mathbf{a}} > \mathbf{a}$. Quindi *i numeri cardinali non ammettono un massimo.*

Tipi ordinali; numeri ordinali trasfiniti.

19. Se in un insieme di elementi si introduce un *criterio ordinatore*, il quale, dati due elementi qualunque, permetta di decidere quale di essi precede l'altro, e sia tale che, se p precede q e q precede r, p preceda r, si dice che si è ottenuta una *serie ordinata* od una *successione*. Per es., dato un insieme di persone *di età tutte diverse*, noi possiamo disporle in ordine crescente, o decrescente, di età; dato un insieme di frazioni, possiamo disporle secondo il valore crescente della somma dei due termini, e, quando la somma sia eguale, secondo il valore crescente del numeratore.

Una *parte* d'una serie ordinata è una serie in essa contenuta, in cui gli elementi conservano il proprio ordine relativo. Un *segmento* è la parte costituita da tutti gli elementi che precedono un dato elemento.

Una *corrispondenza ordinata* fra due serie ordinate è una corrispondenza biunivoca e completa, e tale che gli elementi corrispondenti si trovino nello stesso ordine relativo nelle due serie. Si dice che due serie, tra le quali è possibile una corrispondenza ordinata, hanno lo stesso *tipo ordinale* (*). In base a questa definizione può costruirsi un'Aritmetica dei tipi ordinali, analoga all'Aritmetica dei numeri cardinali, di cui si è fatto cenno negli articoli precedenti. A noi però interessa soltanto una famiglia speciale di tipi ordinali, quella dei *numeri ordinali trasfiniti*.

Una serie ordinata finita (cioè ottenuta da un insieme finito) possiede un primo elemento, e la stessa proprietà appartiene a qualunque sua parte.

Ciò non è sempre vero per le serie ordinate infinite. Così la serie dei numeri reali disposti in ordine crescente non ha un primo elemento; lo ha la sua parte costituita dai numeri razionali non minori di 2, non lo ha invece quella costituita dai numeri razionali maggiori di 2.

Se una serie ordinata ed ogni sua parte possiede un primo elemento, si dice che essa è una *serie ben ordinata*, e il suo tipo ordinale dicesi *numero ordinale*, *trasfinito* se la serie è infinita. I numeri ordinali delle serie finite possono rappresentarsi mediante i numeri naturali; quelli delle serie infinite si denoteranno con lettere greche.

Due serie ben ordinate aventi lo stesso numero ordinale si dicono anche *simili*.

È evidente che: *Se due serie ben ordinate sono simili, gli aggregati dei loro elementi sono equi-*

(*) Anche l'eguaglianza dei tipi ordinali possiede le tre proprietà α, β, γ dell'art. 2.

valenti. La reciproca è generalmente vera soltanto per le serie finite.

20. *Ogni elemento, e più generalmente ogni parte, d'una serie ben ordinata ammette un elemento immediatamente successivo* (*).

Esso è il primo elemento della parte della serie costituita da tutti gli elementi che sono successivi a qualunque elemento della parte considerata.

Ogni parte d'una serie ben ordinata è una serie ben ordinata. Infatti essa, ed ogni sua parte, che è anche parte della serie considerata, possiede un primo elemento.

21. *Tra due serie ben ordinate simili non può aver luogo che una sola corrispondenza ordinata* (**).

(*) S'intende, escluso il caso in cui la parte considerata contiene l'ultimo elemento della serie, se questo esiste. In una serie ordinata infinita non sempre un elemento ne ammette uno consecutivo; esempio la serie dei numeri reali disposti in ordine crescente.

(**) Al contrario fra due aggregati equivalenti esistono in generale più corrispondenze diverse (infinite, se gli aggregati sono infiniti). Così, dati i due aggregati equivalenti:

$$1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,\ldots\ ;\quad a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\,\ldots,$$

si può far corrispondere:

ad m, a_m;

a $2m-1$, a_{2m} e a $2m$, a_{2m-1};

a $3m-2$, a_{3m-1}; a $3m-1$, a_{3m}; a $3m$, a_{3m-2};

e così via.

Tale corrispondenza è pienamente determinata come segue: i primi elementi delle due serie si corrispondono tra loro; inoltre, stabiliti i corrispondenti nella seconda serie agli elementi di un segmento della prima, l'elemento consecutivo a tutti questi è necessariamente il corrispondente dell'elemento consecutivo al segmento considerato.

Per altra via: Se potessero esistere due corrispondenze ordinate diverse tra due serie ben ordinate, ne deriverebbe una corrispondenza ordinata non identica tra una serie ben ordinata e se stessa. Sieno in tale corrispondenza a_1 e a_2 due elementi corrispondenti, e a_2 preceda a_1; allora il corrispondente a_3 di a_2 precederà a_2, e così di seguito, e la successione degli elementi così determinati sarà illimitata, perchè altrimenti si dovrebbe giungere al primo elemento, il quale non può avere un corrispondente che lo preceda. La successione di elementi ottenuta, presa in ordine inverso, costituirebbe una parte della serie senza un primo elemento, ciò che è contrario alla definizione di serie ben ordinata.

22. Dal precedente ragionamento risulta pure che: *Una serie ben ordinata non può essere simile ad un suo segmento* (*). Infatti, se una tale corrispondenza fosse possibile, ad ogni elemento del segmento dovrebbe corrispondere l'elemento

(*) Invece può essere simile ad una sua parte. Così la serie dei numeri naturali disposti in ordine crescente, e la serie dei numeri pari, che è una sua parte, sono simili. V. più innanzi art. 26.

stesso considerato come appartenente alla serie; ma, d'altra parte, se a è l'elemento che definisce il segmento considerato, non esiste nel segmento alcun elemento corrispondente all'elemento a della serie.

Segue da ciò che:

Due segmenti d'una stessa serie ben ordinata non possono essere simili tra loro; e che:

Una serie ben ordinata non può essere simile a due segmenti diversi di un'altra.

23. *Se due serie ben ordinate sono tali, che per ogni segmento dell'una si trova un segmento simile nell'altra, le due serie sono simili; e reciprocamente.*

La corrispondenza tra i segmenti dà luogo immediatamente ad una corrispondenza tra gli elementi che li definiscono. Resta da dimostrare che tale corrispondenza è ordinata.

Sieno A, B le due serie, A_1, B_1 due loro segmenti simili, e sia A_2 un segmento di A_1. L'elemento a_2 che definisce A_2 farà parte di A_1; detto b_2 il suo corrispondente in B_1, il segmento B_2 di B definito dall'elemento b_2 sarà simile ad A_2, e sarà (art. 22) l'unico segmento di B avente tale proprietà. Quindi, se, nella corrispondenza tra gli elementi di A e B generata dalla corrispondenza tra i loro segmenti, a_2 precede a_1, il suo corrispondente b_2 precede b_1; cioè la corrispondenza è ordinata.

Reciprocamente, se due serie ben ordinate sono simili, la corrispondenza tra i loro elementi genera una corrispondenza tra i loro segmenti, giacchè, se due elementi a, b si corrispondono, gli elementi che precedono a dovranno avere come omologhi elementi che precedono b, e viceversa.

24. *Se due serie ben ordinate non sono simili, in una delle due esiste un segmento simile all'altra.*

Sieno A, B le due serie. Poichè esse non sono simili, non tutti i segmenti di una di esse, p. es. A, avranno il loro simile nell'altra B (art. 23). La parte di A costituita da elementi che definiscono segmenti non aventi il loro simile in B avrà un primo elemento a_1; e il segmento A_1 da esso definito avrà la proprietà che ogni suo segmento ha il suo simile in B, e che ogni segmento di B ha il suo simile in A_1, donde segue (art. 22) che A_1 e B sono simili.

È chiaro poi che in B non esiste nessun segmento simile ad A.

25. Dai teoremi precedenti risulta che, date due serie ben ordinate A, B, ha luogo necessariamente uno ed uno solo dei seguenti tre casi:

α) A e B sono simili;
β) un segmento di A è simile a B;
γ) un segmento di B è simile ad A.

Nel primo caso i numeri ordinali α, β di A, B sono eguali.

Nel secondo caso si dice che α è *maggiore* di β, o che β è *minore* di α; ed analogamente nel terzo caso (*).

(*) Le proprietà α—ε dell'art. 3 sussistono anche per i numeri ordinali.

Dati pertanto due numeri ordinali α, β, ha luogo fra essi una ed una sola delle tre relazioni:

$$\alpha = \beta \ , \ \alpha > \beta \ , \ \alpha < \beta .$$

Dalle definizioni stabilite segue poi che:

Ogni numero ordinale trasfinito è maggiore di ogni numero ordinale finito.

26. *Una parte d'una serie ben ordinata è simile alla serie stessa o ad un suo segmento* (cfr. Nota all'art. 22).

Nel caso contrario dovrebbe (art. 25) la serie essere simile ad un segmento della parte. Sia, se è possibile, la serie A simile al segmento A_1 di una parte B di essa. Poichè A contiene B, A_1 conterrà una parte B_1 simile a B, e questa conterrà un segmento A_2 simile ad A. Per la stessa ragione A_2 conterrà una parte B_2 simile a B, e B_2 conterrà un segmento A_3 simile ad A; e così via. Siccome A_2 è un segmento di una parte di A_1, l'elemento (di A) consecutivo ad A_2 precederà l'elemento consecutivo ad A_1; così quello consecutivo ad A_3 precederà quello consecutivo ad A_2; ecc. E, poichè l'operazione può continuarsi indefinitamente, si cade nell'assurdo già segnalato nell'art. 21.

27. Date due serie ben ordinate A, B, può costruirsi coi loro elementi una nuova serie ben ordinata (*), che può designarsi con $A + B$,

(*) Si dimostra senza difficoltà che la nuova serie è ben ordinata.

stabilendo che gli elementi di A, e così quelli di B, conservino il loro ordine relativo, e che tutti gli elementi di B sieno successivi a qualunque elemento di A. Se α, β sono i numeri ordinali delle serie A, B, quello della nuova serie si denota con $\alpha + \beta$.

Per l'addizione dei numeri ordinali trasfiniti vale la legge associativa, ma non vale sempre la legge commutativa (v. più innanzi art. 32).

28. Date ancora le due serie ben ordinate A, B, può costruirsi una nuova serie ben ordinata (*), che può designarsi con BA, mettendo al posto di ciascun elemento di A una serie simile a B; il numero ordinale di questa serie si denota con $\beta\,\alpha$, α si dice il moltiplicatore, β il moltiplicando.

La moltiplicazione è associativa, ma in generale non è commutativa (v. più innanzi art. 32); essa è distributiva rispetto al moltiplicatore, ma non sempre rispetto al moltiplicando, cioè si ha:

$$\beta\,(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta\,\alpha_1 + \beta\,\alpha_2\,,$$

ma in generale (l. c.):

$$(\beta_1 + \beta_2)\,\alpha \neq \beta_1\,\alpha + \beta_2\,\alpha.$$

Se il moltiplicatore è finito, la moltiplicazione si riduce ad un'addizione ripetuta; p. es.:

$$\alpha\,.\,3 = \alpha + \alpha + \alpha.$$

(*) Anche in questo caso si dimostra senza difficoltà che la nuova serie è ben ordinata.

29. Il numero ordinale della serie costituita dall'unico simbolo 0 è 1; quello della serie 0, 1 è 2; quello della serie 0, 1, 2 è 3; in generale quello della serie $0, 1, \ldots, n$ è $n+1$. Ma nessun numero naturale può servire per indicare il numero ordinale dell'intera serie crescente dei numeri naturali; tale numero si denota con ω. Procedendo innanzi in modo analogo, si indicano con $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega . 2$, $\omega . 2+1$, $\omega . 3$ i numeri ordinali delle serie:

$$
\begin{array}{l}
0, 1, 2, \ldots, \omega; \\
0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1; \\
0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots; \\
0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega . 2; \\
0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega . 2, \\
\quad \omega . 2+1, \omega . 2+2, \ldots;
\end{array}
$$

e similmente possono definirsi i simboli $\omega . n$, ω^2, ω^ω, ecc.

I numeri finiti costituiscono la *prima classe* dei numeri ordinali; i numeri formati coi numeri finiti e col simbolo ω ne costituiscono la *seconda classe.*

L'insieme dei numeri che precedono un numero qualunque della prima classe è finito; l'insieme dei numeri che precedono un numero qualunque della seconda classe è numerabile. La prima parte è evidente; la seconda si dimostra agevolmente coll'applicazione ripetuta dei teoremi dell'art. 11.

30. *Se* A *è un insieme numerabile qualunque,*

α un numero ordinale qualunque della seconda classe, può sempre costruirsi una serie ben ordinata contenente tutti e soli gli elementi di A, *ed avente il numero ordinale α.*

L'insieme B dei numeri ordinali inferiori ad α è numerabile (art. 29), quindi è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca e completa tra i suoi elementi e quelli di A. Se si dispongono gli elementi di A nell'ordine corrispondente all'ordine crescente degli elementi di B, si ottiene una serie ben ordinata simile a quella dei numeri ordinali minori di α, ed avente quindi il numero ordinale α.

Reciprocamente: *Ogni serie ben ordinata, il cui numero ordinale è della seconda classe, consta di un insieme numerabile di elementi.* Infatti, se il numero ordinale è α, esiste una corrispondenza ordinata (e quindi biunivoca e completa) tra gli elementi della serie e quelli della serie dei numeri ordinali minori di α, e quest'ultima serie consta di un insieme numerabile di elementi (art. 29).

Più brevemente può dirsi, che *i numeri della seconda classe servono a* **numerare** *tutti e soli gli aggregati numerabili.* Appare pertanto la necessità di introdurre nuovi simboli per rappresentare i numeri ordinali di serie infinite non numerabili. A tal uopo si definisce anzitutto Ω come il primo numero ordinale maggiore di tutti i numeri della seconda classe, donde segue che: *L'insieme dei numeri ordinali della prima e della seconda classe non è numerabile.*

Può aggiungersi che: *Il numero cardinale dell'insieme dei numeri ordinali della prima e della seconda classe è il più piccolo numero cardinale maggiore di* **n** (*).

Indichiamo con S la serie ben ordinata dei numeri ordinali minori di Ω, con A l'insieme di questi numeri, e sia B un aggregato infinito qualunque di potenza minore di A; dimostreremo che B è numerabile.

Poichè la potenza di B è minore di quella di A, esisterà un insieme parziale A_1 di A equivalente a B. Sia S_1 la serie ben ordinata costituita dagli elementi di A_1 disposti in ordine crescente; S_1, come parte di S, sarà simile ad S o ad un suo segmento (art. 26). Ma il primo caso non è possibile, perchè, se S_1 fosse simile ad S, A_1, e quindi B, sarebbe equivalente ad A; quindi S_1 è simile ad un segmento di S. Ora gli elementi di qualunque segmento di S formano un aggregato numerabile; quindi A_1, e per conseguenza B, è numerabile.

31. I numeri ottenuti applicando le operazioni aritmetiche ai numeri finiti ed ai simboli ω, Ω formano la *terza classe*; ed analogamente può continuarsi.

Da ciò che precede risulta che la creazione della serie dei numeri ordinali ha luogo in base a due principii, e cioè:

Primo principio di formazione: Costruzione

(*) Questo numero cardinale si suol denotare mediante la lettera *alef* coll'indice 1.

di un nuovo numero mediante aggiunta di una unità ad un numero già definito. È quello che permette di creare l'intera serie dei numeri naturali, ma che, senza il sussidio del secondo principio, non lascia andare più oltre, mentre, usato promiscuamente a questo, dà luogo alla creazione di nuovi numeri (come $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega . 2 + 1$, ecc.).

SECONDO PRINCIPIO DI FORMAZIONE: Creazione di un nuovo numero, definito come il minimo numero maggiore di tutti quelli già formati (p. es. ω, $\omega . 2$, ω^2, Ω, ecc.).

A questi due principii se ne associa, per regolare l'economia dell'introduzione di nuovi simboli, un terzo, il:

PRINCIPIO DI LIMITAZIONE: Un simbolo totalmente nuovo (come ω o Ω) deve introdursi soltanto quando l'insieme di tutti i numeri già definiti ha potenza maggiore dell'insieme dei numeri precedenti ad uno qualunque di essi.

Un numero ordinale si dice *di prima* o *di seconda specie*, secondochè è generato mediante il primo o mediante il secondo principio.

32. Il numero ω ha varie proprietà aritmetiche, che meritano di essere segnalate.

Indichiamo con A la serie ben ordinata dei numeri naturali disposti in ordine crescente, con B la serie formata da un unico elemento b; le serie $A + B$ e $B + A$, di numeri ordinali $\omega + 1$ e $1 + \omega$, saranno rispettivamente:

$$0, 1, 2, \ldots, b;$$
$$b, 0, 1, 2, \ldots$$

Ora è chiaro che il numero ordinale della seconda di queste serie è ω, giacchè essa può porsi in corrispondenza ordinata colla serie:

$$0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Quindi:

$$1 + \omega = \omega,$$

mentre:

$$\omega + 1 > \omega,$$

e per conseguenza:

$$\omega + 1 > 1 + \omega.$$

Indichiamo ancora con A la serie dei numeri naturali, e sia invece B la serie, di numero ordinale 2, formata da due elementi p, q. Le serie $B\,A$, $A\,B$, di numeri ordinali $\omega \,.\, 2$, $2 \,.\, \omega$, potranno rappresentarsi rispettivamente sotto la forma:

$$0, 1, 2, \ldots, 0, 1, 2, \ldots;$$
$$0, 0, 1, 1, 2, 2, \ldots\ldots.$$

Il numero ordinale della seconda di queste serie è ancora ω, sicchè si ha:

$$2 \,.\, \omega = \omega,$$

mentre:

$$\omega \,.\, 2 > \omega,$$

e quindi:

$$\omega \,.\, 2 > 2 \,.\, \omega.$$

Denotiamo ora con A, B_1, B_2 tre serie ben ordinate aventi i numeri ordinali 2, ω, 1; la serie $(B_1 + B_2) A$, di numero ordinale $(\omega+1) 2$, potrà rappresentarsi sotto la forma:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, 0, 1, 2, \ldots, \omega.$$

Ora questa serie può porsi in corrispondenza ordinata colla serie:

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \omega . 2,$$

il cui numero ordinale è $\omega . 2 + 1$. Si ha quindi:

$$(\omega + 1) 2 = \omega . 2 + 1,$$

sicchè la legge distributiva in questo caso non sussiste.

33. Sieno A, B due aggregati qualunque di numeri cardinali $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, e supponiamo che sia possibile formare cogli elementi di A una serie ben ordinata, che diremo S, e con quelli di B una serie ben ordinata T. O le serie S, T sono simili, o T è simile ad un segmento di S, o S è simile ad un segmento di T (art. 25). Nel primo caso si ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (art. 19); nel secondo B è equivalente ad un insieme contenuto in A, e perciò $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ (art. 3); nel terzo $\mathbf{b} \geq \mathbf{a}$. Tra i due numeri $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ha dunque luogo necessariamente (cfr. art. 3) una delle tre relazioni:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \; , \; \mathbf{a} > \mathbf{b} \; , \; \mathbf{a} < \mathbf{b}.$$

Pertanto, se qualunque aggregato potesse essere disposto in serie ben ordinata, resterebbe senz'altro esclusa la possibilità di due numeri cardinali *non comparabili*, cioè non legati da nessuna delle tre relazioni testè scritte. E. ZERMELO (v. art. 3) ha dimostrato la possibilità astratta di una tale operazione, fondandosi su un postulato che porta il suo nome, e che può enunciarsi così: *Se un aggregato si scompone in aggregati parziali, è sempre possibile formare con elementi di quell'aggregato un aggregato avente comune con ciascuno di questi uno ed un solo elemento.*

Aggregati lineari di punti.

34. Dicesi *aggregato lineare di punti* un aggregato di punti posti sopra una retta.

Noi avremo a considerare generalmente la retta come imagine dell'insieme dei numeri reali, imagine perfettamente determinata, quando sieno fissati l'origine, il verso positivo, e l'unità di lunghezza. Il punto all'infinito della retta rappresenterà il numero (improprio) $\pm\infty$.

Intorno d'un punto è un segmento di lunghezza arbitraria contenente nel suo interno il punto. I due segmenti in cui il punto divide l'intorno diconsi *intorno a sinistra* e *intorno a destra*. Intorno del punto all'infinito è ciò che resta di una retta togliendo un segmento finito arbitrario (*). Un intorno di un punto proprio si dice *simmetrico*, se è bisecato in quel punto.

(*) L'opportunità di questa definizione risulta dal-

Dato un insieme lineare di punti, un punto (della retta che lo contiene) avente la proprietà, che in ogni suo intorno si trovano punti dell'insieme diversi da esso, si dice *punto limite* dell'insieme. Un punto limite d'un insieme può appartenere o non appartenere ad esso. P. es. l'insieme dei numeri interi e positivi (*) ha per unico punto limite il punto all'infinito; l'insieme dei numeri razionali ha per punti limiti tutti i numeri reali, sicchè alcuni dei punti limiti appartengono, altri non appartengono, all'insieme.

35. *In ogni intorno d'un punto limite d'un aggregato cadono infiniti punti dell'aggregato stesso.*

Sia c un punto limite di un aggregato lineare A. Preso un intorno qualunque ε_1 di c, in esso cade almeno un punto a_1 di A diverso da c; se ε_2 è un intorno contenuto in ε_1 e non contenente a_1, in esso, e quindi in ε_1, cade almeno un punto a_2 di A diverso da a_1 e da c; e così può continuarsi indefinitamente.

---

l'osservazione che, se si proietta una retta sopra un'altra in modo che la proiezione di un punto c della prima sia il punto all'infinito della seconda, un intorno del punto c ha per proiezione i due tratti della seconda retta che restano togliendo da essa un segmento finito. Analiticamente, se x varia da $c-\varepsilon$ a $c+\varepsilon$, la variabile y legata alla x dalla relazione $y=\dfrac{1}{x-c}$ varia da $-\dfrac{1}{\varepsilon}$ a $-\infty$ e da $+\infty$ a $+\dfrac{1}{\varepsilon}$.

(*) Intendi: dei punti che sono imagine dei numeri interi e positivi; e così in tutti gli altri casi.

Da ciò segue che: *Un aggregato finito non ha punti limiti.* Invece: *Un aggregato infinito ha almeno un punto limite.*

Se l'aggregato non è *limitato*, cioè se non esiste nessun segmento finito che lo racchiuda completamente, dalla definizione stessa di intorno del punto all'infinito (art. 34) risulta che il punto all'infinito è punto limite dell'aggregato.

Se l'aggregato, che diremo A, può racchiudersi in un segmento finito $p\,q$, detto r il punto di mezzo di questo segmento, almeno in uno dei due tratti $p\,r$, $r\,q$, per esempio in $p\,r$, cadono infiniti punti di A. Dividiamo di nuovo $p\,r$ per metà in s; in uno almeno dei due tratti $p\,s$, $s\,r$, per esempio in $s\,r$, cadono infiniti punti di A. E così può continuarsi indefinitamente, formando una successione di intervalli $p\,q$, $p\,r$, $s\,r$, . . ., di cui ciascuno è contenuto nel precedente ed è metà di esso, e che tutti contengono infiniti punti di A. I numeri aventi per imagine rispettivamente gli estremi di sinistra e gli estremi di destra di tali intervalli costituiscono, come è facile vedere, una coppia di classi contigue; il punto l, imagine dell'elemento di separazione di tale coppia, è interno a tutti gli intervalli della successione considerata, e quindi qualunque suo intorno racchiude infiniti punti di A, sicchè l è un punto limite.

36. L'insieme dei punti limiti di un aggregato A si dice il *derivato* o il *derivato primo* di A, e si denota con $A^{(1)}$. Il derivato di $A^{(1)}$, se esiste, si dice *derivato secondo* di A, e si denota con $A^{(2)}$. E così di seguito.

Un aggregato si dice *di primo* o *di secondo genere*, secondochè ammette un numero finito o un numero infinito di derivati successivi. P. es. l'insieme dei punti imagine dei numeri interi è di primo genere, perchè il suo primo derivato è costituito dal punto all'infinito, e il secondo derivato è nullo; invece l'insieme dei punti imagine dei numeri razionali è di secondo genere, perchè il suo derivato primo e tutti i successivi sono costituiti dai punti imagine di tutti i numeri reali.

Un aggregato si dice *isolato*, se non ha punti comuni col suo derivato; *chiuso*, se contiene il suo derivato; *concentrato*, se è contenuto in esso; *perfetto*, se coincide con esso. Le quattro definizioni possono esprimersi in simboli come segue:

$$D\,(A, A^{(1)}) = 0;$$
$$D\,(A, A^{(1)}) = A^{(1)}, \text{ oppure } M\,(A, A^{(1)}) = A;$$
$$D\,(A, A^{(1)}) = A, \text{ oppure } M\,(A, A^{(1)}) = A^{(1)};$$
$$A = A^{(1)}.$$

Un aggregato si dice *denso* in un intervallo, se in qualunque intervallo in questo contenuto cadono punti dell'aggregato; o, ciò che è lo stesso, se tutti i punti dell'intervallo sono punti limiti dell'aggregato.

Un aggregato si dice *connesso*, se, presi due punti qualunque p, q di esso, e scelta ad arbitrio una lunghezza σ, possono trovarsi nell'aggregato punti $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali, che tutti i segmenti $p\,a_1$, $a_1\,a_2$, . . ., $a_{n-1}\,a_n$, $a_n\,q$ sieno minori di σ.

Un aggregato connesso e chiuso si dice *continuo*.

37. *Ogni aggregato chiuso comprende il proprio limite superiore e il proprio limite inferiore* (*), *ossia ammette un massimo ed un minimo.*

Sia l il limite superiore di un aggregato chiuso A. O l appartiene ad A, oppure devono esistere tra l ed $l - \sigma$, qualunque sia il numero positivo σ, elementi di A, donde segue che l è punto limite di A; ma, poichè A è chiuso, l deve anche in questo caso appartenere ad A.

Analogamente per il limite inferiore.

38. *Ogni aggregato derivato è chiuso.*

Sia A un aggregato qualunque, e sia a un punto di $A^{(2)}$. Un suo intorno qualunque ε conterrà punti di $A^{(1)}$ diversi da a; sia uno di questi b. Preso un intorno di b contenuto in ε e non contenente a, esso conterrà punti di A. Quindi l'intorno ε di a contiene punti di A

(*) *Limite superiore* di un insieme A di numeri reali è un numero l avente la proprietà che nessun elemento di A supera l, ma che esistono elementi di A compresi tra l e $l - \sigma$, qualunque sia il numero positivo σ. Se l'insieme è *limitato superiormente* (cioè se esiste qualche numero maggiore di tutti i numeri dell'insieme), il limite superiore esiste ed è unico; nel caso contrario si dice che l'insieme ha il limite superiore $+\infty$.

Se il limite superiore è un elemento dell'insieme, si dice che è il suo *massimo*.

Analogamente per il limite inferiore.

diversi da a, e però a è punto limite di A, ossia appartiene ad $A^{(1)}$. Dunque tutti i punti di $A^{(2)}$ appartengono ad $A^{(1)}$, e quindi $A^{(1)}$ è chiuso.

L'insieme $A^{(1)}$, essendo chiuso, ammette (articolo 37) un elemento massimo l; esso è l'elemento di separazione tra i punti, a destra dei quali stanno infiniti punti di A, e quelli, a destra dei quali ne sta soltanto un numero finito. Sia infatti p un punto a sinistra di l: poichè l è punto limite di A, nell'intorno $p\,q$ di l, dove q è un punto qualunque a destra di l, cadono infiniti punti di A. Sia invece p a destra di l; se a destra di p vi fossero infiniti punti di A, dovrebbe esservi anche un punto limite di A, cioè un elemento di $A^{(1)}$, il che è impossibile.

39. Dal teorema ora dimostrato segue che, se A è un aggregato qualunque, ciascuno degli aggregati della successione:

$$(1) \qquad A^{(1)},\ A^{(2)},\ A^{(3)}, \ldots\ldots$$

contiene il successivo. Se A è di primo genere (art. 36), uno degli aggregati della successione, p. es. $A^{(n)}$, è finito, e tutti i successivi sono nulli; n si dice la *specie* di A. Nel caso contrario la successione è illimitata. Poichè nel passaggio da $A^{(n)}$ ad $A^{(n+1)}$ non si acquistano, ma eventualmente si perdono punti, potrebbe pensarsi che tutti i punti di $A^{(1)}$ avessero man mano ad esaurirsi. Invece si dimostra che esiste sempre un residuo comune a tutti gli aggregati (1).

Supponiamo A racchiudibile in un intervallo finito (*). Diviso questo per metà, resta diviso anche l'aggregato A in due parti, di cui una almeno sarà di secondo genere. Continuando allo stesso modo (cfr. art. 35), si viene alla conclusione che esiste almeno un punto p avente la proprietà che la parte B di A contenuta in un suo intorno qualunque ε è di secondo genere. Quindi, qualunque sia n, $B^{(n)}$ non è nullo, e, poichè $B^{(n)}$ è parte di $A^{(n)}$, l'intorno ε contiene punti di $A^{(n)}$, sicchè p appartiene ad $A^{(n+1)}$. Il punto p è dunque comune a tutti gli aggregati (1).

L'insieme dei punti comuni a tutti i derivati di A si dice *derivato d'ordine* ω, e si denota con $A^{(\omega)}$. Può dunque concludersi che:

Secondochè A *è di primo o di secondo genere,* $\mathrm{A}^{(\omega)}$ *è o non è nullo.*

Il derivato di $A^{(\omega)}$ si indica con $A^{(\omega+1)}$, il derivato di questo con $A^{(\omega+2)}, \ldots$; l'insieme dei punti comuni ad:

$$A^{(\omega)},\ A^{(\omega+1)},\ A^{(\omega+2)}, \ldots$$

si indica con $A^{(\omega . 2)}$; e così via.

Possiamo ora estendere ai derivati d'ordine trasfinito il teorema dell'art. 38, dimostrando che: *Un aggregato derivato di qualunque ordine è chiuso.*

Se l'ordine è un numero di prima specie (articolo 31), può applicarsi senz'altro il teorema citato.

(*) Si può sempre ridursi facilmente a questo caso; cfr. articoli 15 e 16.

Dimostreremo che esso sussiste anche per $A^{(\omega)}$; e la dimostrazione può estendersi facilmente a qualunque aggregato, il cui ordine sia un numero di seconda specie.

Poichè $A^{(\omega)}$ è contenuto in $A^{(n)}$ qualunque sia n, $A^{(\omega+1)}$ sarà contenuto in $A^{(n+1)}$. Cioè i punti di $A^{(\omega+1)}$ sono comuni a tutti gli aggregati (1), e quindi $A^{(\omega+1)}$ è contenuto in $A^{(\omega)}$.

40. *Tutti i punti compresi tra due punti qualunque di un aggregato continuo appartengono all'aggregato stesso* (*).

Sieno p, q due punti qualunque dell'aggregato continuo, cioè connesso e chiuso, A. Poichè A è connesso, scelta comunque la lunghezza σ, possono trovarsi punti $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ di A tali, che le distanze $p\,a_1, a_1\,a_2, a_2\,a_3, \ldots, a_n\,q$ sieno tutte minori di σ. Preso quindi un punto qualunque b dell'intervallo $p\,q$, in un suo intorno ε di lunghezza $2\,\sigma$ cadranno almeno due dei punti $p, a_1, a_2, \ldots, a_n, q$, e quindi ε conterrà almeno un punto di A diverso da b. Dunque b è punto limite di A. Ma A è chiuso, cioè contiene i suoi punti limiti; quindi qualunque punto b dell'intervallo $p\,q$ appartiene ad A.

41. *Ogni aggregato isolato infinito è numerabile.*

Se A è un aggregato isolato, ciascuno dei suoi punti si potrà racchiudere in un intorno sim-

(*) Ciò mostra come la definizione di aggregato continuo data da G. CANTOR traduca in forma precisa il nostro concetto intuitivo di continuità.

metrico non contenente alcun altro punto di A. Se poi tutti questi intorni si riducono a metà lunghezza, i nuovi intorni saranno tutti esterni l'uno all'altro; infatti, se gli intorni simmetrici di lunghezza $2\,\varepsilon_1$, $2\,\varepsilon_2$ dei punti a_1, a_2 si ricoprissero in parte, supposto $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$, il punto a_2 cadrebbe entro l'intorno simmetrico di a_1 di lunghezza $4\,\varepsilon_1$ (*). Ora l'insieme degli intorni esterni l'uno all'altro è numerabile (art. 15), e, poichè ciascun intorno contiene un solo punto dell'insieme A, è numerabile anche questo insieme.

42. *Se* A *è un insieme chiuso, esiste un insieme avente* A *per derivato.*

Poichè A è chiuso, può scriversi:

$$(1) \qquad A = B + A^{(1)},$$

dove B è l'insieme dei punti di A che non sono suoi punti limiti. Se B è nullo, A è perfetto, e perciò è il derivato di se stesso. Se B non è nullo, è isolato (giacchè non contiene nessun punto limite di A, e quindi nessun punto limite di B stesso), e perciò (art. 41) numerabile. Racchiudiamo ciascun suo punto in un intorno non contenente altri punti dell'insieme stesso

---

(*) I due intorni si ricoprono in parte, se:

$$\overline{a_1\,a_2} \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2;$$

supposto $\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, ne segue:

$$\overline{a_1\,a_2} \leq 2\,\varepsilon_1 .$$

(cfr. art. 41), ed entro ciascun intorno costruiamo, ciò che può farsi in infiniti modi, un aggregato avente come solo punto limite l'unico punto di B contenuto nell'intorno medesimo. Detto C l'aggregato formato dai punti di tutti gli aggregati così costruiti, i punti limiti di C saranno evidentemente i punti di B e quelli di $B^{(1)}$; e, ricordando che B e $B^{(1)}$ non hanno elementi comuni, potrà scriversi:

$$C^{(1)} = B + B^{(1)}.$$

Vogliamo dimostrare che l'insieme:

$$E = C + A^{(1)}$$

ha per derivato A. Dalla definizione di E segue (*):

$$E^{(1)} = M\,(C^{(1)}, A^{(2)}) = M\,(B + B^{(1)}, A^{(2)});$$

ora B non ha elementi comuni con $A^{(1)}$, e quindi (art. 38) con $A^{(2)}$, sicchè può scriversi:

$$E^{(1)} = B + M\,(B^{(1)}, A^{(2)}).$$

(*) Dalla relazione:

$$P = Q + R,$$

la quale presume (art. 4) che Q ed R non abbiano elementi comuni, non può dedursi $P^{(1)} = Q^{(1)} + R^{(1)}$, ma soltanto $P^{(1)} = M\,(Q^{(1)}, R^{(1)})$, giacchè non può escludersi che $Q^{(1)}$ ed $R^{(1)}$ abbiano elementi comuni.

D'altra parte segue dalla (1):

$$A^{(1)} = M\,(B^{(1)}, A^{(2)}),$$

quindi:

$$E^{(1)} = B + A^{(1)},$$

ossia $E^{(1)} = A$.

43. *Se* A *è un insieme perfetto contenuto in un intervallo* p q, *può determinarsi in* p q *un insieme di intervalli separati* (cioè non sovrapponentisi e non aventi estremi comuni) *tali, che* A *risulti costituito dagli estremi di questi intervalli e dai punti ad essi esterni.*

Poichè A è perfetto, se a_1 è un punto di $p\,q$ non appartenente ad A, può trovarsi un intorno di a_1 non contenente alcun punto di A. Se $b_1\,c_1$ è il limite superiore di tali intorni, è chiaro che b_1 e c_1 apparterranno ad A. Preso ora in $p\,b_1$ un punto a_2 non appartenente ad A, si potrà trovare analogamente un intorno $b_2\,c_2$ di esso, il quale non potrà nè sovrapporsi a $b_1\,c_1$ nè avere estremi comuni con esso, giacchè, se c_2 coincidesse con b_1, questo punto, pur appartenendo ad A, non sarebbe suo punto limite, ciò che è impossibile. Un'operazione analoga può farsi per il tratto $c_1\,q$, e il procedimento può arrestarsi dopo un numero finito di operazioni, od anche continuare indefinitamente; sicchè il teorema resta dimostrato.

Ora possono darsi due casi. O rimangono tratti di $p\,q$, in numero finito od infinito, formati completamente da punti di A; oppure in qualunque parte, per quanto piccola, di $p\,q$ cadono punti non appartenenti ad A. In questo secondo caso in qualunque parte di $p\,q$ cade qualcuno degli intervalli risultanti dalla costruzione sopra descritta, cioè ogni parte di $p\,q$ contiene tratti non racchiudenti nel loro interno nessun punto di A, ossia A *non è denso in nessuna parte di* p q.

Reciprocamente: *Se sopra un intervallo* p q *si ha un insieme di intervalli separati denso in ogni parte di* p q (cioè di cui ne cada qualcuno in ogni parte di $p\,q$), *l'insieme degli estremi degli intervalli e dei punti ad essi esterni è perfetto e non è denso in nessuna parte di* p q.

Come esempio, dividiamo in tre parti eguali l'intervallo $p\,q$, e prendiamo come primo intervallo la parte di mezzo; poi trisechiamo le due parti laterali, e prendiamo le loro parti di mezzo; e così indefinitamente. L'insieme degli estremi degli intervalli e dei punti esterni ad essi è perfetto e non è denso in nessuna parte di $p\,q$. Se $p\,q$ rappresenta l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1, i punti dell'insieme perfetto costruito sono le imagini dei numeri della forma $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{c_h}{3^h}$, dove c_h può prendere i soli valori 0 e 2.

44. *Un insieme perfetto ha la potenza del continuo.*

Se l'insieme comprende tutti i punti di qualche intervallo, la sua potenza è evidentemente $\mathbf{c}$; infatti, perchè comprende tutti i punti d'un intervallo, la sua potenza è (artt. 16, 17) $\geq \mathbf{c}$, e perchè è contenuto in una retta, la sua potenza è $\leq \mathbf{c}$.

Resta da considerarsi il caso in cui l'insieme non è denso in nessuna parte dell'intervallo in cui giace.

Sia I l'insieme degli intervalli che definiscono (art. 43) l'aggregato perfetto A, supposto contenuto in un intervallo finito, e non denso in nessuna parte di esso. Denotando gli intervalli dell'insieme I, disposti in ordine di lunghezza decrescente, con $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, cerchiamo di stabilire una corrispondenza ordinata (art. 19) tra la serie degli intervalli stessi presi andando da sinistra a destra e quella dei punti razionali interni all'intervallo 0 1 presi pure da sinistra a destra. Poichè questi punti formano un insieme numerabile (art. 13), potremo designarli, in un ordine opportuno, con $p_1, p_2, p_3, \ldots$. Prendiamo anzitutto come corrispondente dell'intervallo δ_1 il punto p_1; poi come corrispondente di δ_2 il punto p d'indice minimo, sia p_{r_2}, che sta rispetto a p_1 nella stessa posizione relativa in cui sta δ_2 rispetto a δ_1 (*); e, in generale, come corrispondente a δ_n il punto p d'indice minimo, sia p_{r_n}, che sta rispetto a $p_1, p_{r_2}, \ldots$ $\ldots, p_{r_{n-1}}$ nella stessa posizione relativa in cui sta δ_n rispetto a $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$: un tal punto esiste sempre, perchè l'insieme dei punti p è

(*) Intendiamo con questo che, a seconda che δ_2 sta a sinistra o a destra di δ_1, si deve prendere come p_{r_2} il punto p d'indice minimo che sta a sinistra o a destra di p_1.

denso in tutto l'intervallo 0 1 e non ha massimo nè minimo. Otterremo così una successione $p_1, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots$, che scriveremo anche $q_1, q_2, q_3, \ldots$ Si può dimostrare che essa comprende tutti i punti p. Infatti sieno stati già determinati i punti $p_1, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots, p_{r_n}$, e sia p_s il punto p d'indice minimo non entrato ancora nella successione; poichè esistono certamente intervalli che si trovano rispetto a $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$ nella stessa posizione in cui è p_s rispetto a $p_1, p_{r_2}, p_{r_3}, \ldots, p_{r_n}$, quello di tali intervalli che ha indice minimo avrà per corrispondente p_s. La corrispondenza stabilita è dunque (biunivoca, completa ed) ordinata.

Dopo ciò sia t un punto irrazionale del segmento 0 1. In un suo intorno a sinistra ε_1 cadono infiniti punti q; sia q_{k_1} quello di indice minimo. In un intorno di sinistra ε_2 di t di lunghezza $\leq \frac{1}{2} \varepsilon_1$ e non contenente q_{k_1} cadono pure infiniti punti q; sia q_{k_2} quello di indice minimo, dove necessariamente $k_2 > k_1$. Così continuando, si ottiene una successione ad indici crescenti di punti q procedenti da sinistra a destra, che ha per limite t. La successione corrispondente di segmenti δ procederà pure da sinistra a destra, e avrà per limite un punto v dell'intervallo contenente A. Esso non può essere interno a nessun intervallo δ. Se esso fosse un estremo — necessariamente di sinistra — di un intervallo δ_h, il punto q_h corrispondente a questo intervallo, essendo razionale, non potrebbe coincidere con t, e perciò dovrebbe trovarsi a destra di t. In tal caso tra t e q_h cadrebbero punti q; detto q_m uno di questi, l'intervallo corrispondente δ_m dovrebbe stare a destra di tutti gli intervalli δ_{k_i} e a sinistra del punto v, mentre in qualunque intorno a sinistra di v cadono intervalli δ_{k_i}. Quindi v è esterno a tutti gli intervalli δ. Inoltre, se si muta la successione dei punti q_{k_i}, muta anche quella degli intervalli δ_{k_i}, ma il punto v non cambia, giacchè ogni intervallo δ che sta a destra di tutti gli intervalli di una delle successioni δ_{k_i} deve stare a destra di tutti quelli dell'altra.

Si possono invertire le considerazioni precedenti, passando dagli intervalli ai punti.

Risulta così una corrispondenza biunivoca e completa fra l'insieme B dei punti esterni agli intervalli δ e l'insieme dei punti irrazionali del segmento $0\,1$; e poichè quest'ultimo ha (art. 16) la potenza $\mathbf{c}$, la stessa potenza avrà l'insieme B. Ora l'insieme A è composto dell'insieme B, e dell'insieme degli estremi degli intervalli δ, e quest'ultimo insieme è (artt. 11, 15) numerabile; quindi (art. 12) l'insieme A ha pure la potenza $\mathbf{c}$.

45. *Se* A$^{(1)}$ *è numerabile, lo è anche* A.

Infatti, se B è l'insieme dei punti di A non appartenenti ad $A^{(1)}$, può scriversi:

$$A = D\,(A, A^{(1)}) + B;$$

ora B, non contenendo punti di $A^{(1)}$, e perciò neppure di $B^{(1)}$, è isolato, quindi (art. 41) numerabile, e $D(A, A^{(1)})$, come parte dell'aggregato numerabile $A^{(1)}$, è pure (art. 8) numerabile (*), quindi (art. 11) è numerabile anche A.

Mediante ripetuta applicazione di questo teorema si conclude che: *Ogni aggregato di primo genere è numerabile.*

I teoremi reciproci dei precedenti non sono generalmente veri. Così l'insieme dei numeri razionali, che è numerabile, è di secondo genere.

46. *Se esiste un numero α della prima o della seconda classe tale, che* $A^{(\alpha)}$ *è numerabile,* $A^{(1)}$, *e quindi* (art. 45) A, *è numerabile.*

Per l'ultimo teorema dell'art. 39 possiamo scrivere (**):

$$A^{(1)} = (A^{(1)} - A^{(2)}) + A^{(2)} ,$$
$$A^{(1)} = (A^{(1)} - A^{(2)}) + (A^{(2)} - A^{(3)}) + A^{(3)} ,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

ed anche:

$$A^{(1)} = (A^{(1)} - A^{(2)}) + (A^{(2)} - A^{(3)}) + \ldots + A^{(\alpha)} = \\ = \sum_{\beta<\alpha} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}) + A^{(\alpha)},$$

dove s'intende che β debba percorrere tutta la

(*) Qui, come più volte altrove, diciamo per brevità « numerabile » in luogo di « numerabile o finito ».

(**) Il simbolo $A - B$, che ha significato soltanto se l'aggregato A contiene l'aggregato B, rappresenta l'insieme degli elementi di A non appartenenti a B.

serie dei numeri ordinali minori di α. Ora gli aggregati $A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}$ sono isolati, e quindi (art. 41) numerabili, e il loro insieme lo è pure (art. 29), perciò lo è anche $\sum_{\beta<\alpha} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)})$ (art. 11), e conseguentemente anche $A^{(1)}$.

Un caso particolare del teorema dimostrato è il seguente:

Se esiste un numero α *della prima o della seconda classe tale, che* $A^{(\alpha)} = 0$, $A^{(1)}$, *e quindi* A, *è numerabile.*

Reciprocamente: *Se* $A^{(1)}$ *è numerabile, esiste un numero* α *della prima o della seconda classe, per cui* $A^{(\alpha)} = 0$.

Supponiamo ciò non sia; potremo scrivere:

$$A^{(1)} = \sum_{\beta<\Omega} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}) + A^{(\Omega)}, \tag{1}$$

non essendo nullo nessuno degli aggregati $A^{(\beta)}$. D'altra parte tali aggregati, essendo (art. 39) contenuti in $A^{(1)}$, sono (art. 8) numerabili, e quindi non sono perfetti (art. 44), sicchè nessuno degli aggregati $A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}$ è nullo, cioè ciascuno di essi contiene almeno un punto. E poichè l'insieme dei valori che prende β non è numerabile (art. 30), non lo è l'insieme:

$$\sum_{\beta<\Omega} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}),$$

e perciò neppure $A^{(1)}$, contro l'ipotesi.

47. *Secondochè* $A^{(1)}$ *è o non è numerabile,* $A^{(\Omega)}$ *è o non è nullo.*

Se $A^{(1)}$ è numerabile, esiste (art. 46) un numero α della prima o della seconda classe, per cui $A^{(\alpha)} = 0$, donde segue immediatamente $A^{(\Omega)} = 0$.

Se $A^{(1)}$ non è numerabile, nessun $A^{(\alpha)}$ è nullo (art. 46), e, con un ragionamento già usato nell'art. 39, se ne deduce che neppure $A^{(\Omega)}$ è nullo.

48. *Qualunque sia l'insieme* A, $\mathrm{A}^{(\Omega)}$ *è perfetto* (*), *e* $\mathrm{R} = \mathrm{A}^{(1)} - \mathrm{A}^{(\Omega)}$ *è numerabile.*

Poichè $A^{(\Omega)}$ è chiuso (art. 39), basterà dimostrare che ogni punto di $A^{(\Omega)}$ è un suo punto limite.

Sia, se è possibile, p un punto di $A^{(\Omega)}$, che non sia suo punto limite; potrà determinarsi un intorno $r\,s$ di p non contenente, oltre p, altri punti di $A^{(\Omega)}$, e, se B è la parte di A contenuta in $r\,s$, sarà $B^{(\Omega)} = p$. Ne segue che, se si divide per metà $r\,p$ in r_1, poi $r_1\,p$ in r_2, e così via, e parimenti $p\,s$ in s_1, $p\,s_1$ in s_2, e così via, le parti di B contenute in $r\,r_1, r_1\,r_2, \ldots$, $s_1\,s, s_2\,s_1, \ldots$, avendo il derivato d'ordine Ω nullo, sono (art. 47) numerabili. E poichè è numerabile l'insieme di queste parti, lo è pure B (art. 11), donde segue $B^{(\Omega)} = 0$ (art. 47), contrariamente a quanto si è trovato.

L'insieme R, per definizione, non ha punti comuni con $A^{(\Omega)}$, e quindi, poichè $A^{(\Omega)}$ è perfetto, nessun punto di R può essere punto limite di

(*) Se $A^{(1)}$ è numerabile, $A^{(\Omega)}$ è nullo (art. 47); ma un insieme nullo può considerarsi come perfetto, perchè è identico al suo derivato.

$A^{(\Omega)}$, sicchè per ciascun punto di R può determinarsi un intorno non contenente punti di $A^{(\Omega)}$. Questi intorni avranno eventualmente parti comuni, ma potranno ridursi ad un insieme numerabile (art. 15) di intervalli separati non contenenti punti di $A^{(\Omega)}$. Sia δ uno di questi intervalli, S la parte di R in esso contenuta. Poichè R è parte di $A^{(1)}$, $R^{(\Omega)}$, e quindi $S^{(\Omega)}$, sarà parte di $A^{(1+\Omega)}$, ossia di $A^{(\Omega)}$; ma, d'altra parte, nessun punto di $A^{(\Omega)}$ cade in δ, quindi $S^{(\Omega)} = 0$, e S è numerabile (art. 47), donde segue immediatamente (art. 11) che è numerabile anche R.

49. *Se* $\mathrm{A}^{(1)}$ *non è numerabile, esiste un numero* α *della prima o della seconda classe, per cui* $\mathrm{A}^{(\alpha)}$ *è perfetto* (*).

Dal confronto della definizione di R colla (1) dell'art. 46 risulta:

$$R = \sum_{\beta<\Omega} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}).$$

Nessuno degli aggregati $A^{(\beta)}$ può essere nullo, poichè non lo è $A^{(\Omega)}$ (art. 47). Se nessuno di essi fosse perfetto, ciascun aggregato $A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}$ conterrebbe almeno un punto, e (cfr. art. 46) R non sarebbe numerabile, contrariamente a quanto si è dimostrato nell'articolo precedente.

50. Pertanto, qualunque sia A, esiste sempre un numero α della prima o della seconda classe,

(*) Il teorema è vero anche se $A^{(1)}$ è numerabile, giacchè in questo caso $A^{(\alpha)} = 0$ (cfr. la nota precedente).

per cui:

$$A^{(1)} = R + A^{(\alpha)},$$

dove R è numerabile e $A^{(\alpha)}$ è perfetto o nullo.

E poichè un insieme chiuso può sempre considerarsi come il derivato di un altro insieme (art. 42), può concludersi che:

Se A *è un insieme* **chiuso** *qualsiasi, esiste un numero α della prima o della seconda classe, per cui* $\mathrm{A}^{(\alpha)}$ *è nullo o perfetto, secondochè* A *è o non è numerabile; nel secondo caso l'insieme* $\mathrm{R} = \mathrm{A} - \mathrm{A}^{(\alpha)}$ *è numerabile.*

Più semplicemente: *Ogni aggregato* **chiuso** *non numerabile può ridursi ad un aggregato perfetto mediante sottrazione di un aggregato numerabile.*

E come conseguenza (artt. 8, 44): *Un aggregato* **chiuso** *ha la potenza* **n** *o la potenza* **c** (*).

Aggregati di punti posti in uno spazio a più dimensioni.

51. I risultati ottenuti per gli aggregati lineari di punti possono facilmente estendersi agli aggregati di punti posti in uno spazio a più dimensioni. Noi ne parleremo molto brevemente, riferendoci, per semplicità, agli aggregati di punti posti in un piano.

Diremo *intorno* d'un punto in un piano un

(*) G. Cantor ha affermato ripetutamente che questo teorema sussiste per qualunque aggregato lineare, ma ciò non è stato ancora dimostrato.

campo piano (*) di forma e dimensioni qualunque contenente nel suo interno quel punto. Al piano attribuiremo un unico punto all'infinito, considerando il piano in qualche modo come la forma limite d'una sfera di raggio indefinitamente crescente; e intenderemo per intorno del punto all'infinito la parte del piano che resta togliendo un campo finito qualunque (cfr. articolo 34).

Ciò posto, e mantenuta la definizione di punto limite data per gli aggregati lineari, si dimostra facilmente (cfr. art. 35) che: *Ogni aggregato piano infinito ammette punti limiti.*

Quasi tutte le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni degli articoli precedenti si applicano agli aggregati a due dimensioni. Fanno eccezione il teorema dell'art. 40, che non ha il suo corrispondente nel piano, e quello dell'art. 44, che deve dimostrarsi per via alquanto diversa.

52. A tale scopo dobbiamo premettere due lemmi, che presentano anche per se stessi un certo interesse.

a) *La proiezione su una retta di un aggregato piano chiuso è un aggregato chiuso.*

Sia A un aggregato piano chiuso, che possiamo supporre contenuto in un campo finito;

(*) Senza entrare in discussioni sul concetto generale di *campo*, intenderemo con questa parola una delle figure piane che si presentano ordinariamente nella Geometria: quadrato, rettangolo, cerchio, ellisse, ecc.

come tale prendiamo un rettangolo $p\,q\,r\,s$. Sia B la proiezione dell'aggregato A sul lato $p\,q$ del rettangolo. Se l è un punto limite di B, preso comunque su $p\,q$ un intorno $m\,n$ di l, e condotte per m, n le parallele a $q\,r$, nella striscia tra esse compresa cadranno punti di A; in altre parole, comunque si scelga una lunghezza σ, vi saranno punti di A distanti meno di σ dalla $l\,t$ condotta per l parallelamente a $q\,r$. Vogliamo dimostrare che su $l\,t$ cade almeno un punto limite di A. Prendiamo una successione di numeri positivi decrescenti e tendenti a zero:

$$\sigma_1\,, \sigma_2\,, \sigma_3\,, \ldots;$$

potremo trovare in A un punto a_1 che disti da $l\,t$ meno di σ_1, un punto a_2 che disti da $l\,t$ meno di σ_2, ecc. Diciamo c_h la proiezione di a_h su $l\,t$. Se l'insieme dei punti *distinti* c_h è finito, uno almeno di essi è proiezione di infiniti punti a_h, e quindi, per la definizione di questi punti, è punto limite di A. Se l'insieme è infinito, ha almeno un punto limite d; qualunque sia τ, vi sono infiniti punti c_h che distano da d meno di $\frac{\tau}{\sqrt{2}}$, e fra questi ve ne sono che distano dai punti corrispondenti a_h meno di $\frac{\tau}{\sqrt{2}}$; tali punti a_h disteranno da d meno di τ, sicchè d è punto limite di A. Ora, poichè A è chiuso, il punto limite di A, di cui si è dimostrata l'esistenza su $l\,t$, appartiene ad A, e quindi la sua proiezione l su $p\,q$ è un punto di B, sicchè B è chiuso.

b) *La sezione di un aggregato piano chiuso con una retta è un aggregato chiuso.*

Abbiasi ancora l'aggregato chiuso A, e sia C l'insieme dei punti di A che giacciono su una qualunque parallela $l\,t$ al lato $q\,r$ del rettangolo $p\,q\,r\,s$. Se v è un punto limite di C, esso lo è anche di A, e perciò appartiene ad A, e quindi a C, il quale pertanto è chiuso.

Ciò premesso, supponiamo in particolare A perfetto. Anzitutto può osservarsi che la potenza di A è $\leq$ **c**, giacchè (art. 3) la potenza dell'insieme di tutti i punti del piano è **c** (art. 17). Ora, essendo B, proiezione di A su $p\,q$, chiuso, la sua potenza è **n** o **c** (art. 50). Nel secondo caso, poichè a ciascun punto di B corrisponde almeno un punto di A, e a punti diversi di B corrispondono punti diversi di A, la potenza di A sarà $\geq$ **c**. Nel primo caso B non può essere perfetto (articolo 44), e quindi almeno un suo punto u non sarà suo punto limite. La sezione C di A colla $u\,z$ condotta per u parallelamente a $q\,r$ sarà chiusa, e inoltre, siccome ogni punto di C è punto limite di A, e non possono cadere punti di A non appartenenti a C in una certa striscia comprendente $u\,z$, tutti i punti di C saranno anche punti limiti di C, e questo insieme sarà perfetto, e avrà la potenza **c**. Ne segue che anche in questo caso la potenza di A è $\geq$ **c**. E poichè essa è anche $\leq$ **c**, sarà $=$ **c**.

53. *Un insieme numerabile* A *di punti conte-*

nuto in un campo piano connesso (*) C *non ne toglie la connessione.* Cioè: si possono congiungere due punti qualunque del campo con una linea non passante per alcuno dei punti dell'insieme A.

Sieno p, q due punti qualunque del campo C; potremo congiungerli con una linea l non uscente dal campo. Se su questa linea stanno punti di A, dividiamola in un numero finito di archi $p\,r_1, r_1\,r_2, \ldots, r_n\,q$ mediante punti non appartenenti ad A, ciò che è sempre possibile, perchè A è numerabile, e non lo è invece (articolo 17) l'insieme dei punti della linea. Se i punti p, r_1 sono abbastanza vicini, potranno farsi passare per essi due archi di cerchio l_1, l_2 tali, che il campo da essi racchiuso sia tutto interno a C. L'insieme degli archi di cerchio passanti per p ed r_1 e compresi tra l_1 ed l_2 non è numerabile, e, poichè due di essi non possono avere, oltre p ed r_1, altri punti comuni, uno al più di essi potrà passare per ciascun punto di A, sicchè ne ve saranno infiniti non contenenti punti di A; uno qualunque di questi potrà sostituirsi al tratto $p\,r_1$ della linea l, se qualche punto di A cadesse su questo tratto. Il ragionamento può ripetersi per le altre parti di l, e il teorema resta così completamente dimostrato.

(*) Un campo a due o più dimensioni si dice *connesso*, se due suoi punti qualunque si possono congiungere mediante una linea continua tutta interna al campo.

54. Se A è un insieme piano isolato, quindi (art. 41) numerabile, può accadere che l'insieme $A + A^{(1)}$ non divida il piano in parti separate, e può invece accadere che lo divida in più, od anche in infinite parti. Il primo caso si verifica p. es. quando $A^{(1)}$ consta d'un numero finito di punti; del secondo caso vogliamo dare un esempio.

Prendiamo una successione crescente di numeri positivi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ avente un limite finito ϱ, e disponiamo, in uno degli infiniti modi in cui ciò è possibile (art. 13), l'insieme dei numeri razionali compresi tra 0 e 2π (il primo estremo incluso) in una serie semplice $\theta_1, \theta_2, \ldots$ Se indichiamo con A l'insieme dei punti:

$$(1) \qquad c_h = \gamma_h (\cos \theta_h + i \operatorname{sen} \theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

è facile vedere che l'insieme $A^{(1)}$ è costituito da tutti i punti della circonferenza di raggio ϱ col centro nell'origine. L'insieme $A + A^{(1)}$ divide il piano in due parti, l'una P costituita dall'esterno del cerchio ϱ, l'altra Q dal suo interno tolti i punti c_h. Può osservarsi che $A + A^{(1)}$ costituisce il contorno (*) del campo Q; infatti in qualunque intorno di ogni punto di $A + A^{(1)}$

(*) Un punto di un campo si dice *interno* ad esso, se può assegnarsi un intorno del punto, tutti i punti del quale appartengano a quel campo.

Un punto non interno ad un campo si dice appartenente al suo *contorno*, se in qualunque intorno di esso cadono punti interni del campo.

cadono punti di Q, e nessun altro punto del piano non appartenente a Q gode di tale proprietà.

Ma non sempre accade che $A + A^{(1)}$ costituisca il contorno di una delle parti in cui divide il piano.

Prendasi p. es. una successione decrescente di numeri positivi $\delta_1, \delta_2, \ldots$ avente il limite ϱ, e sia l'insieme A costituito dai punti (1) e dai punti:

$$(2) \quad d_h = \delta_h (\cos \theta_h + i \operatorname{sen} \theta_h) \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

L'insieme $A^{(1)}$ sarà ancora costituito da tutti i punti della circonferenza ϱ, e l'insieme $A+A^{(1)}$ dividerà il piano in due parti: l'interno del cerchio ϱ tolti i punti (1), e l'esterno del cerchio stesso tolti i punti (2). Ma in questo caso $A+A^{(1)}$ non costituisce il contorno nè dell'una nè dell'altra delle due parti.

PARTE SECONDA

TEORIA GENERALE DELLE FUNZIONI ANALITICHE

Funzioni di una variabile complessa.

55. Se consideriamo il piano come imagine dei valori di una variabile complessa x, e a ciascun punto d'un campo piano facciamo corrispondere un valore in generale complesso, l'insieme di tali valori costituisce una *funzione* della variabile x definita in quel campo.

Molte delle considerazioni relative alle funzioni di una variabile reale (*) possono estendersi alle funzioni di una variabile complessa. Noi ci limiteremo a ciò che è strettamente necessario per il nostro assunto.

Se x_1, x_2 sono due punti qualunque del campo in cui $f(x)$ è definita, il limite superiore dell'insieme di numeri positivi o nulli $|f(x_1) - f(x_2)|$ si dice *oscillazione* di $f(x)$ in quel campo.

(*) Per ciò che riguarda la teoria delle funzioni di variabili reali può vedersi: G. VIVANTI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Torino, 1920.

Una funzione $f(x)$ si dice *continua* in un punto c, se, comunque si prenda il numero reale e positivo σ, può trovarsi un intorno del punto c, per tutti i punti x del quale sia:

$$| f(x) - f(c) | < \sigma,$$

o, ciò che è equivalente, un intorno del punto c, in cui l'oscillazione di $f(x)$ sia minore di σ.

La somma, il prodotto e il quoziente di due funzioni continue in un punto sono funzioni continue in quel punto, purchè, nell'ultimo caso, la funzione divisore non sia nulla nel punto stesso.

Se una serie di funzioni continue in un punto è equiconvergente (*) *in un intorno di questo punto, la somma della serie è una funzione continua nel punto stesso* (**).

(*) Una serie di funzioni $\sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ si dice *equiconvergente* o *uniformemente convergente* in un campo, se, comunque si prenda il numero reale e positivo σ, può trovarsi un indice n tale, che per ogni $m > n$ e *per ogni punto* x *del campo* sia:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{m} f_h(x) \right| < \sigma;$$

o, ciò che è equivalente, se può trovarsi un indice n tale, che per ogni $p \geq n$ e *per ogni punto* x *del campo* sia:

$$\left| \sum_{h=p+1}^{\infty} f_h(x) \right| < \sigma.$$

(**) Un teorema alquanto più generale di quello del testo è il seguente: *Se* $\lim_{x=c} f_h(x) = l_h$, *e se la*

Se una funzione è continua in tutti i punti d'un campo, preso comunque un numero reale e positivo σ, può trovarsi un altro numero positivo ε tale, che l'oscillazione della funzione in qualunque cerchio di raggio ε contenuto nel campo considerato sia minore di σ (**teorema della continuità uniforme**).

Serie di potenze.

56. Un tipo particolare di funzioni d'una variabile complessa è costituito dalle serie di potenze.

Dicesi *serie di potenze* una serie, di cui ciascun termine è il prodotto di una costante, in generale complessa, per una potenza intera e positiva di una variabile complessa. La forma generale delle serie di potenze è:

$$(1) \qquad \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h;$$

esse comprendono come caso particolare i polinomi, e ne sono la più ovvia generalizzazione.

Un polinomio costituisce una funzione defi-

---

serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} f_h(x)$ *è equiconvergente in un intorno del punto* c, *la serie* $\sum\limits_{h=1}^{\infty} l_h$ *è convergente, e si ha:*

$$\lim_{x=c} \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x) = \sum_{h=1}^{\infty} l_h.$$

nita in tutto il piano, escluso il punto all'infinito; una serie di potenze convergente in un campo definisce in quel campo una funzione. Si presenta pertanto come problema fondamentale quello della ricerca del campo in cui una serie di potenze è convergente.

Poniamo:

$$| a_h | = \alpha_h \ , \ | x | = \xi .$$

L'insieme dei numeri reali e positivi potrà dividersi in due classi A, B, ponendo nella classe A tutti i numeri che, messi al posto di ξ, rendono convergente la serie a termini reali e positivi:

$$(2) \qquad \sum_{h=0}^{\infty}{}' \alpha_h \, \xi^h ,$$

nella classe B tutti quelli che la rendono divergente. Se si considerano come appartenenti all'insieme anche i numeri 0 e ∞, nessuna delle due classi è nulla, giacchè alla prima appartiene certamente il numero 0, alla seconda il numero ∞; è chiaro inoltre che ogni numero di A è minore di ogni numero di B. Ne segue che esiste un *elemento di separazione* delle due classi, cioè un numero ϱ (≥ 0 e $\leq \infty$) tale, che ogni numero minore di ϱ appartiene ad A, ogni numero maggiore di ϱ a B, mentre non può decidersi in generale a quale delle due classi appartenga ϱ. Se pertanto nel piano della variabile complessa x si descrive un cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine, per ogni punto interno sarà $|x| = \xi < \varrho$, sicchè la serie (2) sarà convergente, e quindi la (1) assolutamente convergente, mentre per ogni punto esterno sarà $|x| = \xi > \varrho$, sicchè la serie (2) sarà divergente, e quindi la (1) non sarà assolutamente convergente (vedremo fra poco che non lo è neppure semplicemente). Per i punti della circonferenza nulla può dirsi in generale (*). Il cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine dicesi *cerchio di convergenza*, e ϱ *raggio di convergenza*, della serie (1).

Ecco qualche esempio di serie di potenze:

$$a)\ 1 + 1\,!\,x + 2\,!\,x^2 + \dots\ ; \quad \varrho = 0;$$

$$b)\ 1 + x + x^2 + \dots\dots\dots\ ; \quad \varrho = 1;$$

$$c)\ 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \dots\ ; \quad \varrho = \infty.$$

57. *Nei punti esterni al cerchio di convergenza la serie di potenze non è neppure semplicemente convergente*; sicchè il suo *campo di convergenza* (cioè l'insieme dei punti in cui essa converge) è costituito dai punti interni del cerchio di con-

(*) Per es. la serie:

$$x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \dots\dots,$$

dove s è un numero reale e positivo qualunque, è assolutamente convergente per $|x| < 1$, non lo è per $|x| > 1$; nel punto $x = 1$ essa è convergente se $s > 1$, divergente se $s \leq 1$.

vergenza, ed eventualmente da punti del contorno.

Supponiamo la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ convergente in un punto esterno al suo cerchio di convergenza, cioè tale che $|x| = \xi > \varrho$. Il suo termine generale tenderà a zero, cioè sarà:

$$\lim_{h=\infty} a_h x^h = 0,$$

donde:

$$\lim_{h=\infty} \alpha_h \xi^h = 0;$$

il che significa che, comunque si prenda σ, potrà trovarsi un n tale, che per ogni $h > n$ sia:

$$a_h \xi^h < \sigma.$$

Prendiamo un numero η compreso fra ϱ e ξ; sarà per ogni $h > n$:

$$\alpha_h \eta^h < \sigma \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h,$$

e quindi:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \eta^h < \sigma \sum_{h=n+1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{\xi}\right)^h = \sigma \frac{\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\eta}{\xi}},$$

sicchè la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_h \eta^h$ sarà convergente, ciò che è impossibile per essere $\eta > \varrho$. L'ipotesi fatta è dunque assurda.

Dai risultati ottenuti segue immediatamente che: *Se una serie di potenze è* (anche semplicemente) *convergente per un certo valore di* x, *essa è assolutamente convergente per ogni* x *di modulo minore.*

58. *Una serie di potenze è equiconvergente in qualunque cerchio col centro nell'origine di raggio minore del raggio di convergenza.*

Sia $\varrho' < \varrho$ il raggio del cerchio considerato. Poichè per $\xi = \varrho'$ la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h \xi^h$ è convergente, preso σ ad arbitrio, potrà trovarsi un indice n tale, che per ogni $m > n$ sia:

$$\sum_{h=n+1}^{m} a_h \varrho'^h < \sigma.$$

Ne segue a maggior ragione per ogni $\xi \leq \varrho'$:

$$\sum_{h=n+1}^{m} a_h \xi^h < \sigma,$$

e quindi per ogni x tale che $|x| \leq \varrho'$, cioè per ogni punto del cerchio considerato (il contorno incluso):

$$\left| \sum_{h=n+1}^{m} a_h x^h \right| < \sigma,$$

relazione che esprime l'equiconvergenza della serie nel cerchio stesso.

Dalla dimostrazione risulta pure che la serie non cessa di essere equiconvergente anche se ai suoi termini si sostituiscono i loro moduli, o, in altre parole, che anche la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ è equiconvergente per $0 \leq \xi \leq \varrho' < \varrho$.

Se C è un campo *interno* al cerchio di convergenza (cioè tutti i punti del quale, compresi quelli del contorno, sono interni al cerchio di convergenza), può sempre tracciarsi un cerchio col centro nell'origine, di raggio $\varrho' < \varrho$, contenente C nel suo interno; e, poichè la serie è equiconvergente nel cerchio, lo sarà a maggior ragione in C. Cioè: *Una serie di potenze è equiconvergente in ogni campo* **interno** *al suo cerchio di convergenza* (*).

(*) Non è invece equiconvergente in generale in tutto l'interno del cerchio di convergenza. Consideriamo per es. la serie di potenze:

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots = \sum_{h=0}^{\infty} x^h,$$

avente raggio di convergenza 1; vi sono valori σ tali che, qualunque sia n, esistono punti x interni al cerchio di convergenza per i quali:

$$\left| \sum_{h=n+1}^{\infty} x^h \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| > \sigma .$$

Basta prendere $\sigma < 1$ e x reale, positivo e compreso tra $\sqrt[n+1]{\sigma}$ e 1; si ha allora infatti:

$$\frac{x^{n+1}}{1-x} > x^{n+1} > \sigma .$$

Ora, preso un punto qualunque interno al cerchio di convergenza, può sempre trovarsi un intorno di esso tutto interno al cerchio medesimo; considerando pertanto che, qualunque sia h, $a_h x^h$ è funzione continua di x (*), può concludersi (art. 55) che: *Una serie di potenze è una funzione continua in tutti i punti interni del suo cerchio di convergenza.*

59. *Se una serie di potenze* $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *ha raggio di convergenza* ϱ *ed è convergente nel punto* $x = \varrho$, *essa è equiconvergente nell'intervallo reale* $0\,\varrho$.

Poichè colla sostituzione $x = \varrho\, y$ la serie si trasforma in un'altra avente raggio di convergenza 1, e al punto $x = \varrho$ corrisponde il punto $y = 1$, basterà dimostrare il teorema seguente solo apparentemente meno generale:

Se una serie di potenze $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *ha raggio di convergenza* 1, *ed è convergente per* $x = 1$, *essa è equiconvergente nell'intervallo reale* $0\,1$.

Poniamo, per $|x| < 1$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = S(x) \ , \ \sum_{h=0}^{n} a_h x^h = S_n(x),$$

inoltre:

$$S(1) = S \ , \ S_n(1) = S_n.$$

(*) Poichè la costante a_h può considerarsi come una funzione continua, e x è evidentemente funzione continua di se stessa, sicchè $a_h x^h$ è il prodotto di $h + 1$ funzioni continue.

Preso σ ad arbitrio, potrà trovarsi un n tale, che per ogni $h \geq n$ sia:

$$(1) \qquad | S - S_h | < \frac{\sigma}{2},$$

ciò che può scriversi:

$$S - S_h = \varepsilon_h \frac{\sigma}{2}, \quad | \varepsilon_h | < 1.$$

Ora si ha identicamente, come è facile verificare:

$$S_p(x) = (1 - x) \sum_{h=0}^{p-1} S_h x^h + S_p x^p,$$

e passando al limite per $p = \infty$, supposto $|x| < 1$:

$$S(x) = (1 - x) \sum_{h=0}^{\infty} S_h x^h,$$

quindi, supposto $p \geq n$:

$$S(x) - S_p(x) = (1 - x) \sum_{h=p}^{\infty} S_h x^h - S_p x^p =$$

$$= (1 - x) \sum_{h=p}^{\infty} \left[S - \varepsilon_h \frac{\sigma}{2} \right] x^h - S_p x^p,$$

donde, tenendo conto che per $| x | < 1$:

$$\sum_{h=p}^{\infty} x^h = \frac{x^p}{1 - x},$$

segue:

$$S(x) - S_p(x) = (S - S_p)\, x^p - \frac{\sigma}{2}(1 - x) \sum_{h=p}^{\infty} \varepsilon_h\, x^h.$$

Poichè $|\varepsilon_h| < 1$ per $h \geq p$, si ha, supposto x reale, positivo e minore di 1:

$$\left| \sum_{h=p}^{\infty} \varepsilon_h\, x^h \right| < \sum_{h=p}^{\infty} x^h = \frac{x^p}{1 - x},$$

ciò che può scriversi:

$$(1 - x) \sum_{h=p}^{\infty} \varepsilon_h\, x^h = \alpha\, x^p \quad , \quad |\alpha| < 1.$$

Ne segue, osservando che la (1) sussiste per $h = p$:

$$S(x) - S_p(x) = \frac{\sigma}{2}(\varepsilon_p - \alpha)\, x^p,$$

quindi per $0 \leq x < 1$:

$$|S(x) - S_p(x)| < \sigma,$$

mentre dalla (1) risulta, essendo $p \geq n$:

$$|S(1) - S_p(1)| < \frac{\sigma}{2} < \sigma.$$

Le due ultime relazioni dimostrano il teorema.

60. La questione della determinazione del raggio di convergenza d'una serie di potenze è risolta, almeno teoricamente, dal:

Teorema di Cauchy-Hadamard (*). *Il raggio di convergenza della serie di potenze* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è il reciproco dell'elemento massimo* (art. 37) λ *dell'insieme derivato dell'insieme di numeri reali e non negativi:*

$$(1) \qquad \alpha_1, \sqrt{\alpha_2}, \sqrt[3]{\alpha_3}, \ldots,$$

dove $\alpha_h = | a_h |$.

Il numero λ può anche definirsi come *l'elemento di separazione tra i numeri tali, che nell'insieme* (1) *esistono infiniti elementi maggiori di essi, e quelli non aventi questa proprietà* (articolo 38).

Sia $0 < \xi < \frac{1}{\lambda}$, da cui $\frac{1}{\xi} > \lambda$; se μ è un numero qualunque compreso tra λ e $\frac{1}{\xi}$, potrà scriversi:

$$\lambda < \mu = \frac{\theta}{\xi}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Per la definizione di λ, esiste solo un numero finito di elementi dell'insieme (1) maggiori di μ;

(*) J. Hadamard, *C. R. Ac. Paris*, T. 106, 1888, p. 259-262. A. Pringsheim (*Encyklop. d. math. Wiss.*, T. 1, Leipzig, 1898, p. 81) ha osservato, che il teorema era stato già dimostrato da A. L. Cauchy (1789-1857), e che poi era caduto in dimenticanza.

detto n il più grande fra gli indici di tali elementi, sarà per ogni $h > n$:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} \leq \mu = \frac{\theta}{\xi},$$

da cui:

$$\alpha_h \, \xi^h \leq \theta^h,$$

e sommando da $n+1$ a ∞:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \alpha_h \, \xi^h \leq \sum_{h=n+1}^{\infty} \theta^h = \frac{\theta^{n+1}}{1-\theta},$$

sicchè per $\xi < \frac{1}{\lambda}$ la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \, \xi^h$ è convergente.

Sia invece $\xi > \frac{1}{\lambda}$, da cui $\frac{1}{\xi} < \lambda$. Vi saranno nell'insieme (1) infiniti elementi maggiori di $\frac{1}{\xi}$, cioè sarà, per infiniti valori di h:

$$\sqrt[h]{\alpha_h} > \frac{1}{\xi},$$

da cui:

$$\alpha_h \, \xi^h > 1.$$

Ne segue che per $\xi > \frac{1}{\lambda}$ la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \, \xi^h$ è divergente.

Dunque $\frac{1}{\lambda}$ è il raggio di convergenza della serie proposta.

Se, in particolare, la successione formata dagli elementi dell'insieme (1) disposti in ordine crescente di indice tende ad un limite, questo costituisce da se solo il derivato dell'insieme (1) (*); quindi:

Se la successione (1) *tende ad un limite* λ, *il raggio di convergenza è* $\frac{1}{\lambda}$.

61. *Se* λ_1 *è il massimo e* λ_2 *il minimo elemento dell'insieme derivato dell'insieme:*

$$(1) \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1{}^{1-p}}, \frac{\alpha_3}{\alpha_2{}^{1-\frac{p}{2}}}, \frac{\alpha_4}{\alpha_3{}^{1-\frac{p}{3}}}, \dots,$$

dove p *è un numero* > -1, *si ha:*

$$(2) \qquad \lambda_1^{-\frac{1}{p+1}} \leq \varrho \leq \lambda_2^{-\frac{1}{p+1}} \; (**).$$

(*) *Se una successione numerabile di numeri reali ammette un limite, questo è l'unico elemento limite dell'aggregato costituito dagli elementi della successione.*
Sia l il limite della successione $a_1, a_2, \dots$; preso σ ad arbitrio, può trovarsi un indice n tale, che a_{n+1}, $a_{n+2}, \dots$ differiscano da l in valore assoluto per meno di σ, sicchè l è elemento limite dell'insieme dei numeri a. Inoltre, per quanto piccolo sia un intorno di l, sempre cadono in esso infiniti elementi a, mentre fuori ne rimane soltanto un numero finito; sicchè non vi possono essere altri elementi limiti.

(**) J. MERCER, *Proc. Lond. math. Soc.*, S. II, T. 5, 1907, p. 206-224. È ovvio che la prima parte della relazione (2) perde ogni significato se $\lambda_1 = \infty$, e la seconda se $\lambda_2 = 0$.
Come caso particolare si ha il teorema (S. PINCHERLE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche,*

Supposto λ_1 finito, prendiamo $\xi < \lambda_1^{-\frac{1}{p+1}}$, da cui $\xi^{-(p+1)} > \lambda_1$; se μ è un numero compreso tra λ_1 e $\xi^{-(p+1)}$, sarà $\mu^{\frac{1}{p+1}}\,\xi < 1$. Indicheremo poi con θ un numero compreso tra $\mu^{\frac{1}{p+1}}\,\xi$ e 1.

Nell'insieme (1) vi è soltanto un numero finito di elementi $> \mu$ (cfr. art. 60), quindi potrà determinarsi un indice n tale, che per ogni $h \geq n$:

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h^{1-\frac{p}{h}}} \leq \mu .$$

Poniamo:

$$\frac{1}{1-\frac{p}{h}} = s_h \ , \ s_n\, s_{n+1} \ldots s_{n+p-1} = t_p \ ,$$

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_p = u_p .$$

Sarà:

$$\alpha_{n+1}^{\ s_n} \leq \alpha_n\, \mu^{\,s_n} \ , \ \alpha_{n+2}^{\ s_{n+1}} \leq \alpha_{n+1}\, \mu^{\,s_{n+1}} , \ldots ,$$

$$\alpha_{n+r}^{\ s_{n+r-1}} \leq \alpha_{n+r-1}\, \mu^{\,s_{n+r-1}} ,$$

da cui:

$$\alpha_{n+r}^{\ t_r} \leq \alpha_n\, \mu^{\,u_r} .$$

Bologna, 1899-900, p. 68): *Se λ_1 è il massimo e λ_2 il minimo elemento dell'insieme derivato dell'insieme:*

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} , \frac{\alpha_3}{\alpha_2} , \frac{\alpha_4}{\alpha_3} , \ldots\ldots ,$$

si ha:

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \rho \leq \frac{1}{\lambda_2} .$$

Ora:

$$(3). \qquad u_r = \frac{1}{p+1}\left[(n+r)\,t_r - n\right] \, (*),$$

quindi:

$$\alpha_{n+r}^{\frac{1}{n+r}} \leq \alpha_n^{\frac{1}{(n+r)t_r}} \, \mu^{\frac{1}{p+1} - \frac{n}{(p+1)(n+r)t_r}}.$$

(*) La relazione sussiste per $r = 1$, giacchè:

$$u_1 = t_1 = \frac{1}{1 - \frac{p}{n}},$$

$$(n+1)\,t_1 - n = \frac{n+1}{1-\frac{p}{n}} - n = \frac{p+1}{1-\frac{p}{n}}.$$

Supposto che sia:

$$u_{r-1} = \frac{1}{p+1}\left[(n+r-1)\,t_{r-1} - n\right],$$

ne segue:

$$u_r = u_{r-1} + t_r = \frac{1}{p+1}\left[(n+r-1)\,t_{r-1} - n\right] + t_r.$$

Ora:

$$t_{r-1} = t_r\left(1 - \frac{p}{n+r-1}\right),$$

quindi:

$$\frac{1}{p+1}\left[(n+r-1)\,t_{r-1} - n\right] =$$
$$= \frac{1}{p+1}\left[(n+r)\,t_r - (p+1)\,t_r - n\right] =$$
$$= \frac{1}{p+1}\left[(n+r)\,t_r - n\right] - t_r,$$

donde risulta la (3).

Poichè:

(4) $$\lim_{r=\infty} (n + r)\, t_r = \infty \ (*),$$

segue:

(5) $$\lim_{r=\infty} \left[\alpha_n . \mu^{-\frac{n}{p+1}} \right]^{\frac{1}{(n+r)t_r}} = 1,$$

(*) Si ha:

$$(n+r)t_r = \frac{n+r}{\left(1-\frac{p}{n}\right)\left(1-\frac{p}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{p}{n+r-1}\right)}.$$

Siccome la serie:

$$\frac{p}{n} + \frac{p}{n+1} + \ldots + \frac{p}{n+r-1} + \ldots$$

è divergente, il prodotto che figura al denominatore tende a zero per $p > 0$, mentre $n + r$ tende a ∞, sicchè la (4) resta in questo caso dimostrata. Per $p = 0$ la (4) è evidente. Per $0 > p > -1$, posto $p = -1 + v$, dove $0 < v < 1$, si ha:

$$(n+r)t_r = \frac{n+r}{\left(1+\frac{1-v}{n}\right)\left(1+\frac{1-v}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{1-v}{n+r-1}\right)} =$$

$$= n \frac{(n+1)\ldots(n+r-1)(n+r)}{(n+1-v)\ldots(n+r-1-v)(n+r-v)} =$$

$$= \frac{n}{\left(1-\frac{v}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{v}{n+r-1}\right)\left(1-\frac{v}{n+r}\right)};$$

il prodotto che figura nel denominatore dell'ultima espressione tende a zero, quindi la (4) risulta dimostrata anche per $0 > p > -1$.

sicchè, ricordando che, per la definizione di θ, si ha:

$$\theta\, \mu^{-\frac{1}{p+1}}\, \xi^{-1} > 1,$$

da un certo r in avanti sarà:

$$\left[\alpha_n\, \mu^{-\frac{n}{p+1}}\right]^{\frac{1}{(n+r)t_r}} < \theta\, \mu^{-\frac{1}{p+1}}\, \xi^{-1},$$

quindi:

$$\alpha_{n+r}^{\frac{1}{n+r}} \leq \theta\, \xi^{-1},$$

e infine:

$$\alpha_{n+r}\, \xi^{n+r} \leq \theta^{n+r},$$

donde risulta la convergenza della serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \xi^h$ per $\xi < \lambda_1^{-\frac{1}{p+1}}$.

Sia ora, supposto λ_2 non nullo, $\xi > \lambda_2^{-\frac{1}{p+1}}$; se μ è un numero compreso tra $\xi^{-(p+1)}$ e λ_2, sarà $\mu^{\frac{1}{p+1}}\, \xi > 1$, quindi $\mu^{-\frac{1}{p+1}}\, \xi^{-1} < 1$.

Nell'insieme (1) vi è soltanto un numero finito di elementi minori di μ, quindi potrà determinarsi un indice n tale, che per ogni $h \geq n$ sia:

$$\frac{\alpha_{h+1}}{\alpha_h^{1-\frac{p}{h}}} \geq \mu.$$

Procedendo come prima, si ottiene di qui:

$$\alpha_{n+r}^{\frac{1}{n+r}} \geq \alpha_n^{\frac{1}{(n+r)t_r}} \mu^{\frac{1}{p+1} - \frac{n}{(p+1)(n+r)t_r}}.$$

Ora, per la (5), ricordando che $\mu^{-\frac{1}{p+1}} \xi^{-1} < 1$, sarà da un certo r in avanti:

$$\left[\alpha_n \mu^{-\frac{n}{p+1}}\right]^{\frac{1}{(n+r)t_r}} > \mu^{-\frac{1}{p+1}} \xi^{-1},$$

quindi:

$$\alpha_{n+r}^{\frac{1}{n+r}} \geq \xi^{-1},$$

e infine:

$$\alpha_{n+r}\, \xi^{n+r} \geq 1,$$

donde risulta la divergenza della serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h$ per $\xi > \lambda_2^{-\frac{1}{p+1}}$.

In particolare: *Se la successione* (1) *ammette un limite λ, si ha:*

$$\varrho = \lambda^{-\frac{1}{p+1}}.$$

62. Il teorema enunciato nella prima nota dell'articolo precedente può anche considerarsi come un caso particolare del seguente (*):

Se l'insieme derivato dell'insieme di numeri reali e positivi:

(*) E. Bortolotti, *Mem. Acc. Modena*, S. III, T. 4, 1901, p. 16-20.

$$\frac{\alpha_{hm+s}}{\alpha_{(h-1)m+s}},$$

dove h *varia da* 1 *a* ∞, m *è un numero intero* > 1, *e* s *prende i valori* 0, 1, ..., $m-1$, *ha l'elemento massimo* λ, *e se per uno* r *di questi valori si ha:*

$$\lim_{h=\infty} \frac{\alpha_{hm+r}}{\alpha_{(h-1)m+r}} = \lambda,$$

il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ è $\lambda^{-\frac{1}{m}}$.

Posto $\eta = \xi^m$, può scriversi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi^h = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+s} \xi^{hm+s} = \sum_{s=0}^{m-1} \xi^s \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+s} \eta^h.$$

La serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+s} \eta^h$ ha raggio di convergenza $\frac{1}{\lambda}$ per $s = r$ (art. 60), raggio di convergenza $\geq \frac{1}{\lambda}$ per gli altri valori di s (art. 61), perciò la serie $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hm+s} \xi^{hm}$, e quindi la serie $\sum_{=0}^{\infty} \alpha_{hm+s} \xi^{hm+s}$, ha, nei due casi, raggio di convergenza $= \lambda^{-\frac{1}{m}}$ e $\geq \lambda^{-\frac{1}{m}}$. Ora, poichè due qualunque di queste ultime serie non contengono termini fra loro simili, per la convergenza di $\sum_{h=0}^{\infty} a_h \xi^h$ è non solo sufficiente, ma anche necessario, che esse convergano tutte. Con ciò il teorema risulta dimostrato.

63. *Se il raggio di convergenza della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è* ϱ, *e quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ è $\varrho' \geq \varrho$, *quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} (a_h + b_h) x^h$ *è* $= \varrho$ *oppure* $\geq \varrho$, *secondochè* $\varrho' > \varrho$ o $\varrho' = \varrho$.

Se $\varrho' > \varrho$, le due serie sono convergenti per $|x| < \varrho$, mentre una sola lo è per $\varrho < |x| < \varrho'$, e quindi nel primo caso la terza serie è convergente, e non lo è nel secondo. Se invece $\varrho' = \varrho$, le due serie sono ancora convergenti per $|x| < \varrho$, mentre nè l'una nè l'altra lo è per $|x| > \varrho$, sicchè la terza serie è convergente nel primo caso, ma nulla può dirsi di essa nel secondo.

64. *Se il raggio di convergenza della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ *è* ϱ, *e quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ *è* ϱ', *quello della serie* $\sum_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$ *è* $\geq \varrho\varrho'$ (*).

Prendiamo un numero qualunque $\tau'' > \frac{1}{\varrho\varrho'}$; po-

(*) J. Hadamard, *Séances Soc. sc. phys. nat. Bordeaux*, 1896-97, p. 110-112; *C. R. Ac. Paris*, T. 124, 1897, p. 492; *Acta math.*, T. 22 ,1898, p. 55-63. Ved. anche: J. L. W. V. Jensen, *Tidsskr. Mat. Fys.*, S. V, T. 1, 1884, p. 31-32; A. Meyer, *ivi*, p. 73-78.

tremo in infiniti modi scomporlo in due fattori τ, τ' tali che sia $\tau > \frac{1}{\varrho}$, $\tau' > \frac{1}{\varrho'}$. Essendo $\tau > \frac{1}{\varrho}$, può trovarsi (art. 60) un n tale, che per ogni $h > n$ sia $\sqrt[h]{|a_h|} < \tau$; e così, essendo $\tau' > \frac{1}{\varrho'}$, può trovarsi un n' tale, che per ogni $h > n'$ sia $\sqrt[h]{|b_h|} < \tau'$. Ne segue che per ogni h maggiore di n e di n' sarà $\sqrt[h]{|a_h b_h|} < \tau\tau' = \tau''$; quindi, se ϱ'' è il raggio di convergenza della serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h b_h x^h$, dovrà essere $\tau'' \geq \frac{1}{\varrho''}$. Siamo giunti così alla conclusione, che ogni numero $> \frac{1}{\varrho\varrho'}$ è $\geq \frac{1}{\varrho''}$, donde segue $\varrho'' \geq \varrho\varrho'$.

65. La questione della dipendenza del raggio di convergenza dai coefficienti può anche considerarsi da un altro punto di vista; supposti cioè i coefficienti funzioni di una nuova variabile y, si può studiare il raggio di convergenza come funzione di y (*).

È facile vedere che, anche nel caso più semplice in cui i coefficienti sono polinomi in y, ϱ è in generale una funzione discontinua di y. Sieno p. es. $f(y)$, $g(y)$ i raggi di convergenza

(*) G. Vivanti, *Annali di mat.*, S. II, T. 21, 1893, p. 25-32, 193-194; S. Pincherle, *ivi*, p. 138-140.

delle due serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y)\, x^h$, $\sum_{h=0}^{\infty} b_h(y)\, x^h$, e sia:

$$\varphi(y) = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_n),$$

essendo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n valori dati di y; la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left[a_h(y)\, \varphi(y) + b_h(y) \right] x^h$$

ha raggio di convergenza $f(y)$ per tutti i valori di y diversi da $y_1, y_2, \ldots, y_n$, per i quali $f(y) < g(y)$; raggio di convergenza $g(y)$ per tutti gli altri.

Può invece dimostrarsi il teorema seguente:

Se i coefficienti d'una serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{a_h(y)\, x^h}$ *sono polinomi di grado* $\leq \mathrm{m}$, *e se per* $\mathrm{m} + 1$ *valori* $\mathrm{y_0, y_1 \ldots, y_m}$ *di* y *la serie ha raggio di convergenza* $\geq \varrho$, *lo stesso ha luogo per tutti gli altri valori di* y.

Poniamo:

$$a_h(y) = c_{h0} + c_{h1}\, y + c_{h2}\, y^2 + \ldots + c_{hm}\, y^m,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_0 & y_1 & \ldots & y_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0^m & y_1^m & \ldots & y_m^m \end{vmatrix} = D,$$

e denotiamo con D_{ik} i complementi algebrici degli elementi del determinante D. Poichè per ipotesi il raggio di convergenza di ciascuna delle serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h(y_i)\, x^h \qquad (i = 0, 1, \ldots, m)$$

è $\geq \rho$, la stessa cosa avrà luogo (art. 63) per la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \Big[D_{k1}\, a_h(y_0) + D_{k2}\, a_h(y_1) + \ldots + \\ + D_{k;m+1}\, a_h(y_m) \Big] x^h = D \sum_{h=0}^{\infty} c_{h,\,k-1}\, x^h$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m+1),$$

quindi (art. cit.) anche per la serie proposta:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(c_{h0} + c_{h1}\, y + \ldots + c_{hm}\, y^m \right) x^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h(y)\, x^h,$$

qualunque sia il valore di y.

66. *Data una serie di potenze avente raggio di convergenza non nullo, può trovarsi un intorno dell'origine, in nessun punto del quale, tranne eventualmente l'origine stessa, la serie ha valore zero.*

Sia $\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h = P(x)$ la serie considerata, e supponiamo dapprima $a_0 \neq 0$. Poichè $P(x)$ è funzione continua in ogni punto interno del cerchio di convergenza (art. 58), e quindi in particolare nell'origine, può determinarsi un intorno ε di questo punto, in tutti i punti del quale sia:

$$|P(x) - P(0)| < |a_0|;$$

ma $P(0) = a_0$, quindi $P(x) \neq 0$ in tutti i punti di ε.

Sia invece $a_0 = 0$, e si supponga per generalità:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0 \quad , \quad a_n \neq 0;$$

sarà:

$$P(x) = x^n \sum_{h=0}^{\infty} a_{n+h}\, x^h.$$

La serie che figura nel secondo membro ha il suo primo termine a_n non nullo, quindi può trovarsi un intorno ε dell'origine in cui essa non si annulla; ne segue che il solo punto di ε in cui $P(x)$ si annulla è l'origine stessa.

Sotto altra forma: *Se una serie di potenze si annulla in un insieme di punti avente per punto limite l'origine, essa è identicamente nulla* (cioè sono nulli tutti i suoi coefficienti).

Se in una serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$ è:

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0 \quad , \quad a_n \neq 0,$$

si dice che essa ha nell'origine uno *zero d'ordine* n.

67. Dal teorema dimostrato segue immediatamente che:

Se due serie di potenze prendono valori tra loro eguali in punti costituenti un aggregato che ha per punto limite l'origine, esse sono identicamente eguali (cioè i loro coefficienti omologhi sono rispettivamente eguali).

Basta per ciò osservare, che i punti, nei quali le due serie di potenze $P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, $P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$ prendono valori eguali, sono quelli in cui la serie di potenze:

$$P_1(x) - P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (a_h - b_h) x^h$$

si annulla.

In particolare, se $P_2(x)$ si riduce ad una costante, si ha il teorema:

Se una serie di potenze prende uno stesso valore in un insieme di punti avente per punto limite l'origine, la serie si riduce ad una costante (cioè tutti i suoi coefficienti, meno il primo, sono nulli.)

68. *Una serie di potenze non può avere valore reale (o imaginario puro) in tutto un intorno dell'origine* (senza ridursi ad una costante).

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ abbia valor reale in tutti i punti di un cerchio di raggio ε col centro nell'origine.

Posto $a_h = \beta_h + i\,\gamma_h$, la serie $\sum_{h=0}^{\infty} (\beta_h + i\,\gamma_h) x^h$

dovrà avere valore reale in particolare per ogni x reale di valor assoluto $< \varepsilon$; ne segue:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \gamma_h \, x^h = 0$$

su tutto il tratto dell'asse reale contenuto nel cerchio di raggio ε, e quindi (art. 66) $\gamma_h = 0$, $a_h = \beta_h$.

Poniamo ora $x = i\,\eta$, essendo η reale e di valor assoluto $< \varepsilon$; dovrà aver valore reale la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \beta_h \,(i\,\eta)^h = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \,\beta_{2h}\, \eta^{2h} + \\ + i \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \,\beta_{2h+1}\, \eta^{2h+1},$$

donde segue:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \,\beta_{2h+1}\, \eta^{2h+1} = 0,$$

e quindi (art. cit.) $\beta_{2h+1} = 0$. La serie si riduce pertanto a:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \beta_{2h}\, x^{2h} = \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{2h}\, y^h,$$

posto $x^2 = y$. La nuova serie ha la stessa proprietà della primitiva, quindi si conclude analogamente $\beta_{2(2h+1)} = 0$. Così continuando, si vede che devono essere nulli tutti i coefficienti d'indice $2\,h + 1,\ 2\,(2\,h + 1),\ 2^2\,(2\,h + 1), \ldots$ E poichè ogni indice pari (diverso da zero) è il prodotto di un numero dispari pèr una determinata potenza di 2, segue che tutti i coefficienti, tranne il primo, sono nulli, sicchè la serie di potenze si riduce ad una costante.

69. Le proprietà delle serie di potenze di x si estendono alle serie di potenze di $x - c$, dove c è un numero (finito) qualunque, sostituendo nei vari teoremi all'origine il punto c. Così una serie di potenze di $x - c$ è convergente nell'interno (ed eventualmente in punti della circonferenza) di un cerchio col centro in c; non può annullarsi in un insieme di punti avente per punto limite c senza essere identicamente nulla; e così via.

Vediamo ora che cosa avviene quando si passa, invece che ad un punto c al finito, al punto all'infinito (*). Alla serie $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, avente il raggio di convergenza ϱ, applichiamo il cambiamento di variabile $x = \frac{1}{x'}$; essa diviene $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{x'^h}$, e questa serie converge per $|x'| > \varrho'$, posto $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$. Una serie di potenze relativa,

(*) Ricordiamo che si è convenuto (art. 51) di attribuire al piano un unico punto all'infinito. Ciò equivale a considerare non distinti tra loro tutti i numeri complessi $p + i q$, in cui p e q non sono entrambi finiti.

invece che all'origine, al punto all'infinito, è dunque una serie di potenze intere *negative* di x, ed il suo campo di convergenza è l'*esterno* (ed eventualmente punti della circonferenza) di un certo cerchio avente il centro nell'origine. Essa ha uno zero d'ordine n nell'origine, se i suoi primi n coefficienti sono nulli mentre non lo è l'n-esimo.

70. Abbiansi due serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h, \quad Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{b_h}{x^h},$$

convergenti, la prima entro il cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine, la seconda fuori del cerchio di raggio ϱ' collo stesso centro, e sia $\varrho > \varrho'$. Nella corona compresa tra i due cerchi ambedue le serie saranno assolutamente convergenti, e ciascuna di esse, e perciò anche la loro somma, sarà una funzione continua in ogni punto interno della corona. Posto:

$$a_0 + b_0 = c_0,$$
$$a_h = c_h, \quad b_h = c_{-h} \text{ per } h > 0,$$

può scriversi:

$$P(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_h x^h.$$

71. *Sia* $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{a_h x^h}$ *una serie di potenze avente il raggio di convergenza* ϱ. *Se* $\mathrm{M}(\varrho')$

è il massimo modulo di P (x) *sulla circonferenza di raggio* $\varrho' < \varrho$ *col centro nell'origine* (*), *si ha per tutti i valori di* h *la relazione:*

$$(1) \qquad | a_h | \leq \frac{M(\varrho')}{\varrho'^h} .$$

Sia n un numero intero positivo qualunque, ε una radice n-esima primitiva dell'unità; sarà, come è noto:

$$(2) \quad 1 + \varepsilon^h + \varepsilon^{2h} + \ldots + \varepsilon^{(n-1)h} = n \text{ oppure } = 0,$$

secondochè il numero intero positivo o negativo h è o non è divisibile per n. Ora:

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varrho'^h \right| \leq M(\varrho') \quad ,$$

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varepsilon^h \varrho'^h \right| \leq M(\varrho') \quad ,$$

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varepsilon^{2h} \varrho'^h \right| \leq M(\varrho') \quad ,$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad ,$$

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} a_h \varepsilon^{(n-1)h} \varrho'^h \right| \leq M(\varrho') ,$$

da cui:

(*) $P(x)$ è funzione continua di x in tutto l'interno del cerchio di convergenza, quindi in particolare sulla circonferenza di raggio ρ', perciò lo è pure $| P(x) |$, che per conseguenza ammette su questa circonferenza un massimo (finito).

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{h=0}^{\infty} a_h (1+\varepsilon^h+\varepsilon^{2h}+\ldots+\varepsilon^{(n-1)h})\varrho'^h\right| \leq M(\varrho'),$$

e quindi, per la (2):

$$(3) \qquad \left|\sum_{h=0}^{\infty} a_{nh}\,\varrho'^{nh}\right| \leq M(\varrho').$$

Ora, se ϱ'' è compreso tra ϱ' e ϱ, si ha $\frac{1}{\varrho''} > \frac{1}{\varrho}$, e quindi può trovarsi (art. 60) un indice n tale, che per ogni $k \geq n$ sia:

$$|a_k| < \frac{1}{\varrho''^k}.$$

Ne segue, per ogni h:

$$|a_{nh}| < \frac{1}{\varrho''^{nh}},$$

e quindi:

$$\left|\sum_{h=1}^{\infty} a_{nh}\,\varrho'^{nh}\right| < \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^{nh} = \frac{\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^n}{1-\left(\frac{\varrho'}{\varrho''}\right)^n},$$

frazione che può rendersi piccola a piacere prendendo n abbastanza grande.

Dopo ciò risulta dalla (3):

$$(4) \qquad |a_0| \leq M(\varrho') \quad (*).$$

(*) Se in un punto della circonferenza di raggio ρ'

Sia ora r un numero intero positivo qualunque; il massimo modulo di $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{h-r}$ sulla circonferenza di raggio ϱ' col centro nell'origine sarà $\frac{M(\varrho')}{\varrho'^r}$. Procedendo come prima, si avrà:

$$\left| a_0 \varepsilon^{-kr} \varrho'^{-r} + a_1 \varepsilon^{-k(r-1)} \varrho'^{-(r-1)} + \ldots + \right.$$
$$\left. + a_{r-1} \varepsilon^{-k} \varrho'^{-1} + \sum_{h=0}^{\infty} a_{r+h} \varepsilon^{kh} \varrho'^h \right| \leq \frac{M(\varrho')}{\varrho'^r}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1);$$

sommando, e tenendo conto della (2), supposto $n > r$:

$$\left| a_r + \sum_{h=1}^{\infty} a_{n(r+h)} \varrho'^{nh} \right| \leq \frac{M(\varrho')}{\varrho'^r},$$

e di qui, col procedimento già usato:

$$\left| a_r \right| \leq \frac{M(\varrho')}{\varrho'^r}.$$

Una conseguenza immediata di questa formola è, che: *Una serie di potenze non può essere*

è $|P(x)| < M(\rho')$, supposto, ciò che può farsi senza pregiudizio della generalità, che questo sia il punto $x = \rho'$, si arriva, collo stesso ragionamento del testo, alla conclusione che $|a_0| < M(\rho')$. Cioè *il segno di eguaglianza nella* (4) *può aver luogo soltanto quando il modulo di* P (x) *è costante sulla circonferenza* ρ'.

nulla in tutti i punti di una circonferenza interna e concentrica al cerchio di convergenza, senza essere identicamente nulla; e quindi, che *non può essere costante sopra una circonferenza col centro nell'origine senza ridursi ad una costante.*

Si ha poi, mutando x in $\frac{1}{x}$:

Se $Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{b_h}{x^h}$ *è una serie di potenze negative di* x *convergente fuori del cerchio di raggio* ϱ *col centro nell'origine, e se* $M(\varrho')$ *è il suo massimo modulo sulla circonferenza col centro nell'origine di raggio* $\varrho' > \varrho$, *si ha per tutti i valori di* h *la relazione:*

$$|b_h| \leq M(\varrho')\,\varrho'^h.$$

72. *Se le infinite serie di potenze:*

$$P_k(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{kh}\, x^h \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

hanno raggi di convergenza tutti maggiori di ϱ, *e se la serie di serie di potenze:*

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)$$

è equiconvergente su ogni circonferenza di raggio $\leq \varrho$ *col centro nell'origine, allora:*

a) *Le somme* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kh}$ *dei coefficienti omologhi delle serie* $P_k(x)$ *sono convergenti;*

b) *Posto* $\sum_{k=1}^{\infty}{}' a_{kh} = A_h$, *la serie di potenze* $G(x) = \sum_{h=0}^{\infty}{}' A_h x^h$ *è convergente in tutti i punti interni al cerchio di raggio* ϱ *col centro nell'origine, ed ha in tutti questi punti lo stesso valore di* $F(x)$ (**lemma di Weierstrass**) (*).

Prendiamo comunque $\varrho' < \varrho$. Per la equiconvergenza di $F(x)$ tanto per $|x| = \varrho$ che per $|x| = \varrho'$, scelto ad arbitrio σ, potrà trovarsi un indice n tale, che per ogni $m > n$ sia, tanto per $|x| = \varrho$ che per $|x| = \varrho'$:

$$(1) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{m} P_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \sum_{h=0}^{\infty}{}' a_{kh} x^h \right| < \sigma,$$

da cui:

$$(2) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty}{}' P_k(x) \right| \leq \sigma.$$

(*) K. Weierstrass, *Monatsb. Ak. Berlin*, 1880, p. 719-743; *Math. Werke*, T. 2, p. 224-233; trad. franč. in *Bull. des sc. math.*, S. II, T. 5, 1881, p. 157-183; C. Runge ha mostrato con un esempio (*Acta math.*, T. 6, 1885, p. 245-248), che il lemma dà condizioni *sufficienti ma non necessarie* perchè si possa trasformare una somma di infinite serie di potenze in una unica serie di potenze sommando tra loro i coefficienti omologhi. Le condizioni *necessarie e sufficienti* furono stabilite da C. Arzelà (*Rend. Acc. Bologna*, 1887-88, p. 25-37). V. anche: W. F. Osgood, *Annals of math.*, S. II, T. 3, 1901-02, p. 25-34; F. von Dalwigk, *Math. Ann.*, T. 55, 1902, p. 516-520; C. Severini, *Rend. Acc. Lincei*, S. V, T. 12, 2º sem. 1903, p. 97-105, 257-267; C. Arzelà, *Rend. Acc. Bologna*, 1902-03.

La somma di $m - n$ serie che figura nella (1) può porsi sotto forma di un'unica serie, sicchè la (1) diviene:

$$\left| \sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{k=n+1}^{m} a_{kh} \right] x^h \right| < \sigma;$$

il raggio di convergenza di questa serie, come quelli delle serie di cui essa è la somma, è (articolo 63) maggiore di ϱ, sicchè si ha (art. 71):

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_{kh} \right| < \frac{\sigma}{\varrho^h},$$

e quindi:

$$(3) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh} \right| \leq \frac{\sigma}{\varrho^h}.$$

Le serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{kh}$ sono dunque convergenti. Si ha poi, per $|x| = \varrho' < \varrho$:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh} \right| |x^h| \leq \sigma \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^h = \frac{\sigma \varrho}{\varrho - \varrho'},$$

sicchè la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh} \right] x^h$$

è assolutamente convergente. Lo è pure, per l'ipotesi fatta sulle $P_k(x)$:

$$\sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{kh}\right] x^h = \sum_{k=1}^{n} P_k(x).$$

Può pertanto scriversi:

$$G(x) = \sum_{h=0}^{\infty} A_h\, x^h = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} a_{kh}\right] x^h + \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_{kh}\right] x^h$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_k(x) + \theta\,\frac{\sigma\varrho}{\varrho-\varrho'},$$

dove $|\theta| \leq 1$. Ne segue:

$$G(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} P_k(x) = F(x).$$

Derivata d'una serie di potenze.

73. Si dice *derivata* d'una serie di potenze $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$ la serie di potenze $\sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1}$ che se ne deduce moltiplicando ciascun termine per l'esponente di x che in esso figura e diminuendo l'esponente stesso di un'unità.

La derivata di $P(x)$ si denota con $P'(x)$.

La derivata di $P'(x)$ si dice *derivata seconda* di $P(x)$, e si denota con $P''(x)$; e così di seguito.

La derivata r-esima di $P(x)$ è:

$$P^{(r)}(x) = \sum_{h=r}^{\infty} h\,(h-1)\ldots(h-r+1)\, a_h\, x^{h-r} =$$

$$= r\,!\sum_{h=r}^{\infty}\binom{h}{r} a_h\, x^{h-r} = r\,!\sum_{h=0}^{\infty}\binom{r+h}{r} a_{r+h}\, x^h.$$

La definizione di derivata si può estendere anche alle serie di potenze intere negative.

Le serie P (x) *e* P′ (x) *hanno lo stesso raggio di convergenza* (e quindi lo hanno pure le serie P″ (x), P‴ (x), . . .).

Diciamo ϱ il raggio di convergenza di $P(x)$, ϱ' quello di $P'(x)$. Sarà ancora ϱ' il raggio di convergenza della serie:

$$x P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^h;$$

ora i coefficienti di questa serie hanno modulo $\geq$ dei corrispondenti della serie $P(x)$, sicchè $\varrho' \leq \varrho$. D'altra parte, applicando il teorema dell'art. 64 alle serie:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h \ , \ Q(x) = \sum_{h=0}^{\infty} h\, x^h,$$

la seconda delle quali ha raggio di convergenza 1 (*), risulta $\varrho' \geq \varrho \times 1$. Quindi $\varrho' = \varrho$.

74. In questo articolo e nei successivi mostreremo che i teoremi del Calcolo infinitesimale relativi alla derivazione sussistono anche per le derivate quali furono da noi definite (**).

(*) Applicando il *criterio del rapporto*, si trova che la serie $Q(x)$ è convergente per $|x| < 1$, mentre non lo è per $|x| > 1$.

(**) G. Vivanti, *Rend. Circ. mat. Palermo*, T. 13, 1899, p. 263-273; trad. polacca in *Wiadomosci mat.*, T. 3, 1899, p. 138-147.

La derivata di una serie di potenze ridotta al solo termine costante è nulla. Ciò risulta immediatamente dalla definizione.

La derivata della somma di due serie di potenze è la somma delle loro derivate.

Abbiansi le due serie di potenze:

$$P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h \ , \ P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}\, x^h ,$$

e pongasi:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (a_{1h} + a_{2h})\, x^h = P_1(x) + P_2(x).$$

Sarà:

$$P_1'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{1h}\, x^{h-1} \ , \ P_2'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{2h}\, x^{h-1},$$

$$P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, (a_{1h} + a_{2h})\, x^{h-1},$$

da cui:

$$P'(x) = P_1'(x) + P_2'(x).$$

75. *Se* $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{x})\, \mathrm{P}_2(\mathrm{x})$, *ne segue:*

$$\mathrm{P}'(\mathrm{x}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{x})\, \mathrm{P}_2'(\mathrm{x}) + \mathrm{P}_2(\mathrm{x})\, \mathrm{P}_1'(\mathrm{x}).$$

Sia come prima:

$$P_1(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h \ , \ P_2(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}\, x^h;$$

per la definizione nota del prodotto di due serie sarà:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h\, x^h,$$

dove:

$$c_h = \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k}.$$

Ne segue:

$$P'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, c_h\, x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty}\left[h\, x^{h-1} \sum_{k=0}^{h} a_{1k}\, a_{2,h-k}\right] =$$
$$= \sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1} \sum_{k=0}^{h-1} (h-k)\, a_{1k}\, a_{2,h-k}\right] +$$
$$+ \sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_{1k}\, a_{2,h-k}\right].$$

Ora:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1} \sum_{k=0}^{h-1} (h-k)\, a_{1k}\, a_{2,h-k}\right] =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty} a_{1h}\, x^h \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{2h}\, x^{h-1} = P_1(x)\, P_2'(x),$$

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_{1k}\, a_{2,h-k}\right] = \sum_{h=0}^{\infty} a_{2h}\, x^h \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_{1h}\, x^{h-1} =$$
$$= P_2(x)\, P_1'(x),$$

sicchè il teorema risulta dimostrato.

76. *La derivata del prodotto di più serie di potenze si ottiene moltiplicando la derivata di ciascuna serie per tutte le altre e sommando i risultati.*

Poichè il teorema sussiste per il prodotto di due serie (v. art. prec.), possiamo dimostrarlo per induzione completa.

Sia:

$$R(x) = \prod_{h=1}^{n} P_h(x) = Q(x)\, P_n(x),$$

posto:

$$Q(x) = \prod_{h=1}^{n-1} P_h(x).$$

Ammesso che sia:

$$\begin{aligned} Q'(x) = P_1'(x)\, P_2(x) \ldots P_{n-1}(x) &+ \\ + P_1(x)\, P_2'(x)\, P_3(x) \ldots P_{n-1}(x) &+ \\ + \ldots + P_1(x)\, P_2(x) \ldots P_{n-2}(x)\, P'_{n-1}(x)&, \end{aligned}$$

ed essendo (art. 75):

$$R'(x) = Q(x)\, P'_n(x) + P_n(x)\, Q'(x),$$

segue:

$$\begin{aligned} P'(x) = P_1'(x)\, P_2(x) \ldots P_n(x) &+ \\ + P_1(x)\, P_2'(x)\, P_3(x) \ldots P_n(x) &+ \\ + \ldots + P_1(x)\, P_2(x) \ldots P_{n-1}(x)\, P'_n(x)&. \end{aligned}$$

Come caso particolare: *Se* $\mathrm{R}(\mathrm{x}) = [\mathrm{P}(\mathrm{x})]^{\mathrm{n}}$, *si ha:*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{R}'(\mathrm{x}) = \mathrm{n}\,[\mathrm{P}(\mathrm{x})]^{\mathrm{n}-1}\, \mathrm{P}'(\mathrm{x}).$$

Di qui segue una formola ricorrente per i coefficienti della serie $[P(x)]^n$. Posto infatti:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h \;,\; [P(x)]^r = \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(r)} x^h,$$

si ha dalla (1):

$$\sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h^{(n)}\, x^{h-1} = n \sum_{h=0}^{\infty} a_h^{(n-1)}\, x^h \,.\, \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1}$$

$$= n \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)},$$

da cui, per $h > 0$:

$$a_h^{(n)} = \frac{n}{h} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)}.$$

77. Abbiansi le due serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h \ , \ Q(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^n;$$

la seconda abbia il raggio di convergenza σ, e sia:

$$|\, P(x) \,| \leq \sigma' < \sigma$$

per ogni $|\, x \,| < \varrho$. Allora la serie di serie di potenze:

$$Q\,[P(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, [P(x)]^n$$

sarà equiconvergente in ogni campo interno al cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine, e potrà quindi (art. 72) trasformarsi in una serie di potenze convergente per $|\, x \,| < \varrho$:

$$R(x) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h\, x^h,$$

dove:

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_h^{(n)}.$$

Vogliamo dimostrare ora che: *La derivata di* R (x) *è il prodotto della derivata di* Q (z) *per quella di* P (x).

Si ha:

$$Q'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, z^{n-1},$$

quindi:

$$Q'[P(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, [P(x)]^{n-1},$$

da cui (art. 72):

$$Q'[P(x)] = \sum_{h=0}^{\infty} d_h\, x^h,$$

dove:

$$d_h = \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, a_h^{(n-1)}.$$

D'altra parte (v. art. prec.):

$$c_h = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, a_h^{(n)} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{h} n\, k\, b_n\, a_k\, a_{h-k}^{(n-1)}$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} \left[k\, a_k \sum_{n=1}^{\infty} n\, b_n\, a_{h-k}^{(n-1)} \right] = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, d_{h-k},$$

quindi:

$$R'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} h\, c_h\, x^{h-1} = \sum_{h=1}^{\infty} \left[x^{h-1} \sum_{k=1}^{h} k\, a_k\, d_{h-k} \right] =$$
$$= Q'[P(x)]\, P'(x).$$

78. Cerchiamo se esiste una serie di potenze eguale alla propria derivata. Se $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ è la serie cercata, deve essere:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1},$$

ossia:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = \sum_{h=0}^{\infty}{}' (h+1)\, a_{h+1}\, x^h,$$

da cui, per tutti i valori di h:

$$a_h = (h+1)\, a_{h+1},$$

e quindi:

$$a_0 = 1\,!\, a_1 = 2\,!\, a_2 = \ldots,$$

ossia:

$$a_h = \frac{a_0}{h\,!}.$$

La serie cercata è dunque, a meno del fattore costante a_0:

$$P(x) = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h\,!};$$

essa dicesi *serie esponenziale*, ed è convergente per tutti i valori di x, cioè ha raggio di convergenza infinito (*). Il numero reale e positivo:

(*) Come si verifica immediatamente applicando il criterio di convergenza detto *del rapporto*.

$$P(1) = 1 + \frac{1}{1\,!} + \frac{1}{2\,!} + \ldots = 2{,}718\ldots$$

si suole indicare con e; esso è la base dei logaritmi neperiani (*).

Si ha poi:

$$P(x)\,P(y) = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{x^h}{h\,!} + \frac{x^{h-1}\,y}{(h-1)\,!\,1\,!} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^{h-2}\,y^2}{(h-2)\,!\,2\,!} + \ldots + \frac{y^h}{h\,!}\right] = \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{h}\frac{x^{h-r}\,y^r}{(h-r)\,!\,r\,!};$$

ora:

$$\binom{h}{r} = \frac{h\,!}{(h-r)\,!\,r\,!},$$

quindi:

$$P(x)\,P(y) = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\frac{1}{h\,!}\sum_{r=0}^{h}\binom{h}{r}x^{h-r}\,y^r\right] =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(x+y)^h}{h\,!} = P(x+y)\,.$$

In particolare, per m intero e positivo:

$$(1) \qquad [P(x)]^m = P(m\,x);$$

inoltre:

$$P(x)\,P(-x) = P(0) = 1,$$

da cui:

$$P(-x) = \frac{1}{P(x)} = [P(x)]^{-1},$$

(*) C. Hermite (1822-1901) ha dimostrato (*Sur la fonction exponentielle*, Paris, 1874) che e è un numero *trascendente*, cioè non algebrico (art. 14).

donde segue che la (1) sussiste anche per m intero e negativo.

Si ha poi, ponendo nella (1) $x = \frac{1}{m}$:

$$\left[P\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m = \mathrm{P}(1) = e,$$

cioè:

$$P\left(\frac{1}{m}\right) = e^{\frac{1}{m}},$$

dove, essendo $P\left(\frac{1}{m}\right)$ reale e positivo, per $e^{\frac{1}{m}}$ deve intendersi la radice m-esima *aritmetica* di e; di qui, per p e q interi qualunque:

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}}.$$

Le funzioni reali (e positive) $P(x)$, e^x della variabile reale x coincidono dunque per tutti i valori razionali della variabile; poichè tali valori costituiscono un insieme denso sull'asse reale, e le due funzioni sono continue, esse coincideranno per tutti i valori reali di x. Si ha dunque, per ogni x reale:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{h\,!}.$$

Si conviene di rappresentare la somma di questa serie con e^x anche per x complesso. La funzione e^x soddisfa, come si è veduto, alla relazione:

$$(2) \qquad e^x e^y = e^{x+y}.$$

Di qui segue immediatamente che e^x *non si annulla per nessun valore di* x. Infatti, se fosse $e^y = 0$, ponendo nella (2) $x = 1 - y$ risulterebbe $e = 0$.

Può ancora osservarsi che e^x non prende il valore 1 per nessun valore reale di x diverso da zero. Infatti per $x > 0$ si ha evidentemente $e^x > 1$, e per $x < 0$, essendo $e^x = \dfrac{1}{e^{-x}}$, si ha $e^x < 1$.

Se $P(x)$ è una serie di potenze con raggio di convergenza ϱ, $e^{P(x)}$ si può trasformare entro il cerchio ϱ in una serie di potenze $Q(x)$ (art. 72), e si ha, per la formola stabilita nell'articolo precedente:

$$Q'(x) = [e^{P(x)}]' = e^{P(x)} P'(x).$$

79. Poniamo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2\,i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{x}{1\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \\ &+ \frac{x^5}{5\,!} - \ldots = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \frac{x^{2h+1}}{(2\,h+1)\,!}, \\ C(x) &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \\ &+ \frac{x^4}{4\,!} - \ldots = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \frac{x^{2h}}{(2\,h)\,!}; \end{aligned} \right.$$

le due serie di potenze hanno raggio di convergenza infinito, ed è inoltre:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &S'(x) = C(x)\ ,\ C'(x) = -S(x);\\ &[S(x)]^2 + [C(x)]^2 = 1,\\ &S(-x) = -S(x)\ ,\ C(-x) = C(x). \end{aligned}$$

La funzione $S(x)$ è reale per x reale e imaginaria pura per x imaginario puro; la funzione $C(x)$ è reale in ambi i casi. Si ha ancora:

$$(3)\quad e^{ix} = C(x) + i\,S(x)\ ,\ e^{-ix} = C(x) - i\,S(x).$$

Ne segue:

$$e^{\pm i(x+y)} = C(x+y) \pm i\,S(x+y);$$

ora:

$$e^{\pm i(x+y)} = e^{\pm ix}\,e^{\pm iy} = [C(x) \pm i\,S(x)]\,[C(y) \pm i\,S(y)],$$

quindi:

$$\begin{aligned} C(x+y) \pm i\,S(x+y) &= C(x)\,C(y) -\\ &- S(x)\,S(y) \pm i\,[S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y)], \end{aligned}$$

da cui, sommando e sottraendo:

$$\begin{aligned} C(x+y) &= C(x)\,C(y) - S(x)\,S(y),\\ S(x+y) &= S(x)\,C(y) + C(x)\,S(y). \end{aligned}$$

Poniamo $x = \xi + i\,\eta$, dove ξ ed η sono reali; sarà:

$$e^x = e^\xi [C(\eta) + i\, S(\eta)].$$

Vogliamo vedere se esistano valori (complessi) di x per cui $e^x = 1$. Dovrà essere:

$$(4) \qquad e^\xi\, C(\eta) = 1 \ , \ e^\xi\, S(\eta) = 0,$$

donde, essendo $e^\xi \neq 0$, $S(\eta) = 0$, e quindi, per la (2), $C(\eta) = \pm 1$; ne segue, per la prima delle (4), considerando che $e^\xi > 0$, $C(\eta) = 1$, e perciò $e^\xi = 1$, $\xi = 0$. I valori cercati di x sono dunque imaginari puri; $x = i\,\eta$. Ora le serie (1) coincidono, per argomenti reali, con quelle che servono a definire le funzioni trigonometriche $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, quindi l'equazione $C(\eta) = 1$, ossia $\cos \eta = 1$, è verificata per tutti e soli i valori $\eta = 2\,k\,\pi$, dove k è un intero qualunque. Ne segue che le sole soluzioni della equazione $e^x = 1$ sono $x = 2\,k\,\pi\,i$.

Le funzioni $S(x)$, $C(x)$ si sogliono denotare con $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ anche per x complesso.

I soli valori reali di x per cui la funzione $\operatorname{sen} x$ si annulla sono, come è noto, $x = k\,\pi$, dove k è un intero qualunque. Può dimostrarsi che essa non si annulla per nessun altro valore (complesso) di x.

Anzitutto non può essere $\operatorname{sen} x = 0$ per x imaginario puro, giacchè per un tal valore $\operatorname{sen} x$ è il prodotto di $\pm i$ per una serie a termini positivi. Ma neppure può essere:

$$\operatorname{sen}(\xi + i\,\eta) = 0 \ , \ \eta \neq 0.$$

Infatti:

$$\operatorname{sen}(\xi + i\,\eta) = \operatorname{sen}\xi \cos i\,\eta + \cos\xi \operatorname{sen} i\,\eta,$$

dove il primo termine è reale e il secondo è imaginario puro; dovrebbe quindi essere:

$$\operatorname{sen}\xi \cos i\,\eta = \cos\xi \operatorname{sen} i\,\eta = 0,$$

da cui, essendo $\operatorname{sen} i\,\eta \neq 0$, $\cos i\,\eta \neq 0$:

$$\operatorname{sen}\xi = \cos\xi = 0,$$

che è in contraddizione colla (2).

Dalle (3) segue che il numero complesso di modulo ϱ e di argomento φ è espresso da $\varrho\, e^{i\varphi}$.

80. Si dicono *seno iperbolico* e *coseno iperbolico*, e si denotano con $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, le funzioni:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{x}{1\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^{2h+1}}{(2\,h+1)\,!},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^{2h}}{(2\,h)\,!};$$

esse sono legate dalla relazione:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 0.$$

Si ha anche:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \operatorname{sen} i\, x \ , \ \operatorname{ch} x = \cos i\, x.$$

Per valori reali e positivi di x sono pure reali e positivi $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$, e inoltre $\operatorname{ch} x > 1$.

Inoltre la derivata di $\operatorname{sh} x$ è $\operatorname{ch} x$, e la derivata di $\operatorname{ch} x$ è $\operatorname{sh} x$.

81. Abbiasi la serie di potenze $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$, il cui raggio di convergenza sia ϱ. Sia c un punto interno del suo cerchio di convergenza, e poniamo:

$$x = c + x_1;$$

la $P(x)$ si muterà in una serie di polinomi in x_1:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, (c + x_1)^h, \tag{1}$$

equiconvergente per tutti i valori di x_1 corrispondenti ai punti di qualunque campo interno al cerchio di convergenza della serie considerata, e quindi in particolare su qualunque circonferenza di centro c interna al cerchio stesso. Ne segue (art. 72) che la serie (1) potrà trasformarsi in una serie di potenze di x_1, $\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, x_1{}^r$, convergente entro il cerchio di centro c tangente internamente al cerchio ϱ. Il coefficiente A_r è la somma dei coefficienti di x_1^r che figurano nei vari termini della (2). Ora il termine generale di questa serie è:

$$a_h (c + x_1)^h = a_h \sum_{r=0}^{h} \binom{h}{r} c^{h-r} x_1^r ,$$

sicchè si ha, osservando che x_1^r compare solo nei termini per cui $h \geq r$:

$$A_r = \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h c^{h-r} ,$$

ossia (art. 73):

$$A_r = \frac{1}{r\,!} P^{(r)} (c).$$

Dunque:

$$(2) \qquad P (x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r\,!} P^{(r)}(c)\, x_1^r,$$

dove $P^{(0)} (c) = P (c)$, od anche:

$$(3) \qquad P (x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x - c)^r}{r\,!} P^{(r)} (c),$$

che è la **serie di Taylor**. Il raggio di convergenza della serie di potenze di x_1 che figura nella (2) è, per ciò che si è detto, $\geq \varrho - |\, c\,|$.

Dalla formola trovata segue:

$$\frac{P (x) - P (c)}{x - c} = P' (c) + \frac{x - c}{2\,!} P'' (c) +$$

$$+ \frac{(x - c)^2}{3\,!} P'' (c) + \ldots$$

Facendo tendere x a c, e ricordando che (articolo 55) il limite della somma d'una serie equiconvergente (in un intorno del punto a cui tende la variabile) è la somma della serie formata dai limiti dei suoi termini, si ha:

$$\lim_{x=c} \frac{P(x) - P(c)}{x - c} = P'(c).$$

Cioè *la derivata da noi definita coincide con quella del Calcolo infinitesimale.*

Integrale d'una serie di potenze.

82. Dicesi *integrale* (o, più precisamente, *integrale indefinito*) d'una serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$$

la serie di potenze $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h+1} x^{h+1}$ che si ottiene da essa aumentando l'esponente di ciascuna potenza di x di un'unità e dividendo il relativo coefficiente per l'esponente così aumentato.

L'integrale indefinito di $P(x)$ si denota con $\int P(x)\, dx$.

La definizione si estende anche alle serie di potenze intere negative *in cui non figuri la potenza — 1* (*).

(*) Giacchè per questa potenza l'operazione descritta non sarebbe eseguibile.

È evidente che *la derivata dell'integrale d'una serie di potenze è la serie stessa* (*). Ne segue (art. 73) che: *Una serie di potenze e la sua serie integrale hanno lo stesso raggio di convergenza.*

Posto:

$$\int P(x)\,dx = Q(x),$$

ed essendo a, b due punti qualunque interni al cerchio di convergenza comune di $P(x)$, $Q(x)$, si dice *integrale definito di* P (x) *esteso da* a *a* b, e si denota con $\int_a^b P(x)\,dx$, la differenza $Q(b) - Q(a)$. Si ha cioè:

$$\int_a^b \left[\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h\right] dx = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{h+1}\,(b^{h+1} - a^{h+1}).$$

In particolare:

$$\int_a^b x^m\,dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

dove il numero intero m può essere anche negativo, purchè diverso da -1.

(*) Importa però notare che una serie di potenze è la derivata di infinite serie di potenze diverse, le quali differiscono tra loro soltanto per il valore del termine costante; infatti nella derivazione questo termine sparisce. La serie che abbiamo definita come integrale è quella che ha il termine costante nullo.

83. Congiungiamo i punti a e b con una linea di lunghezza finita (*); prendiamo sulla linea, andando da a a b, $n-1$ punti intermedi x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$, e formiamo la somma:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, x_{k-1}{}^h,$$

dove h è un intero diverso da -1, e dove, per simmetria, si è supposto $x_0 = a$, $x_n = b$; poi si aggiungano altri punti intermedi, e si formi la somma analoga; e si imagini di continuare allo stesso modo indefinitamente, colla condizione che, qualunque sia σ, si debba poter sempre spingere abbastanza innanzi la suddivisione perchè due punti di divisione consecutivi qualunque distino tra loro meno di σ. Vogliamo dimostrare che la somma (1) tende ad un limite, e precisamente che è (**):

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, x_{k-1}{}^h = \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1},$$

ossia:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, x_{k-1}{}^h = \int_a^b x^h\, dx,$$

(*) Senza ricorrere alla definizione di lunghezza d'una curva, possiamo intendere per curva di lunghezza finita una curva tale, che le lunghezze delle spezzate semplici in essa iscritte abbiano un limite superiore finito.

(**) A. Kneser, *Sitzungsber. Ak. München*, 1920, p. 65-81; A. Pringsheim, *ivi*, p. 145-182.

qualunque sia la linea scelta. Per h negativo bisogna anche supporre che le distanze dei punti della linea dall'origine abbiano un minimo positivo, che indicheremo con l.

Se $h = 0$, si ha identicamente:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Supponiamo ora h positivo. Poichè la curva è di lunghezza finita, e per conseguenza è contenuta in un campo finito, sarà:

$$|\, x_k \,| \leq L \;,\; \sum_{k=1}^{n} |\, x_k - x_{k-1} \,| \leq M,$$

essendo L, M due numeri positivi finiti; inoltre potremo supporre di avere spinto tanto innanzi la suddivisione, che sia per tutti i valori di k da 1 ad n:

$$|\, x_k - x_{k-1} \,| < \sigma.$$

Ora si ha identicamente, come è facile verificare:

$$(h+1)\, q^h = p^h + p^{h-1} q + \ldots + p\, q^{h-1} + \\ + q^h - \sum_{r=0}^{h-1} q^r (p^{h-r} - q^{h-r}),$$

quindi:

$$(h+1)(p-q)\, q^h = p^{h+1} - q^{h+1} \\ - (p-q) \sum_{r=0}^{h-1} q^r (p^{h-r} - q^{h-r});$$

inoltre:

$$q^r (p^{h-r} - q^{h-r}) = q^r (p - q) (p^{h-r-1} + p^{h-r-2} q + \\ + \ldots + p\, q^{h-r-2} + q^{h-r-1}).$$

Ponendo $p = x_k$, $q = x_{k-1}$, risulta:

$$| x_{k-1}{}^r (x_k{}^{h-r} - x_{k-1}{}^{h-r}) | < (h - r)\, \sigma\, L^{h-1},$$

e:

$$\left| (x_k - x_{k-1})\, x_{k-1}{}^h - \frac{x_k{}^{h+1} - x_{k-1}{}^{h+1}}{h+1} \right| < \\ \frac{| x_k - x_{k-1} |}{h+1} \sum_{r=0}^{h-1} (h - r)\, \sigma\, L^{h-1} \\ = \frac{1}{2}\, h\, \sigma\, L^{h-1}\, | x_k - x_{k-1} | \ (*).$$

Sommando per k da 1 ad n, e sostituendo nel primo membro il modulo della somma alla somma dei moduli:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, x_{k-1}{}^h - \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1} \right| < \\ \frac{1}{2}\, h\, \sigma\, L^{h-1}\, M,$$

da cui segue immediatamente la (2).

(*) Giacchè:

$$\sum_{r=0}^{h-1} (h - r) = \sum_{s=1}^{h} s = \frac{h\,(h+1)}{2}.$$

Supponiamo invece h negativo e diverso da -1, e:

$$|x_k| \geq l.$$

Si ha identicamente:

$$(s+1)\frac{q^{s+1}}{p} = p^s + p^{s-1}q + \ldots + p\,q^{s-1} + q^s -$$

$$-\sum_{r=0}^{s}\frac{q^r}{p}(p^{s-r+1} - q^{s-r+1}),$$

quindi:

$$(s+1)(p-q)\frac{q^{s+1}}{p} = p^{s+1} - q^{s+1}$$

$$-(p-q)\sum_{r=0}^{s}\frac{q^r}{p}(p^{s-r+1} - q^{s-r+1});$$

inoltre:

$$\text{(3)} \qquad \frac{q^r}{p}(p^{s-r+1} - q^{s-r+1}) =$$

$$= (p-q)\frac{q^r}{p}(p^{s-r} + p^{s-r-1}q + \ldots + p\,q^{s-r-1} + q^{s-r}).$$

Poniamo $h = -s-2$, dove $s \geq 0$, inoltre:

$$\frac{1}{x_k} = X_k \ , \ \frac{1}{a} = A \ , \ \frac{1}{b} = B,$$

donde:

$$\frac{1}{L} \leq |X_k| \leq \frac{1}{l},$$

$$|X_k - X_{k-1}| = \left|\frac{x_{k-1} - x_k}{x_k\,x_{k-1}}\right| < \frac{\sigma}{l^2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} | X_k - X_{k-1} | < \frac{M}{l^2}.$$

Facendo $p = X_k$, $q = X_{k-1}$, risulta dalla (3):

$$\left| \frac{X_{k-1}^r}{X_k} (X_k^{s-r+1} - X_{k-1}^{s-r+1}) \right| < (s - r + 1) \frac{\sigma L}{l^{s+2}},$$

e:

$$\left| (X_k - X_{k-1}) \frac{X_{k-1}^{s+1}}{X_k} - \frac{X_k^{s+1} - X_{k-1}^{s+1}}{s+1} \right| <$$
$$< \frac{| X_k - X_{k-1} |}{s+1} \sum_{r=0}^{s} (s - r + 1) \frac{\sigma L}{l^{s+2}}$$
$$= \frac{1}{2} (s + 2) \frac{\sigma L}{l^{s+2}} | X_k - X_{k-1} | \text{ (*)}.$$

Sommiamo per k da 1 ad n, e sostituiamo nel primo membro il modulo della somma alla somma dei moduli; risulta:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1}) \frac{X_{k-1}^{s+1}}{X_k} - \frac{B^{s+1} - A^{s+1}}{s+1} \right| <$$
$$< \frac{1}{2} (s + 2) \frac{\sigma L M}{l^{s+4}},$$

ossia, rimettendo i simboli primitivi:

(*) Giacchè:

$$\sum_{r=0}^{s} (s - r + 1) = \sum_{t=1}^{s+1} t = \frac{(s+1)(s+2)}{2}.$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, x_{k-1}{}^h - \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1} \right| <$$
$$< -\frac{1}{2} \, h \, \sigma \, l^{h-2} \, L \, M \, ,$$

donde segue ancora la (2).

84. Dai risultati ottenuti segue immediatamente, che il limite (2) dell'art. prec., per una linea *chiusa* che soddisfaccia alle condizioni dell'articolo stesso, è nullo, se h è un numero intero diverso da -1. Lo stesso non può dirsi senz'altro se $h = -1$; e noi vogliamo calcolare il limite considerato in questa ipotesi, per una circonferenza col centro nell'origine.

Sia R il raggio del cerchio, e prendiamo sulla circonferenza $n-1$ punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ di argomenti $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, tali che sia:

$$0 < \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{n-1} < 2\pi;$$

sarà (art. 79, in fine):

$$a = x_0 = R \; , \; x_1 = R \, e^{i\omega_1} \; , \; x_2 = R \, e^{i\omega_2} \; , \ldots ,$$
$$x_{n-1} = R \, e^{i\omega_{n-1}} \; , \; b = x_n = a = R,$$

quindi:

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} = \frac{x_k}{x_{k-1}} - 1 = e^{i(\omega_k - \omega_{k-1})} - 1 \, .$$

Poniamo:

$$\omega_k - \omega_{k-1} = \tau_k \, ,$$

supposto $\omega_0 = 0$, $\omega_n = 2\pi$; sarà (art. 78):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left[e^{i\tau_k} - 1 \right]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left[i\,\tau_k + \frac{1}{2\,!}(i\,\tau_k)^2 + \frac{1}{3\,!}(i\,\tau_k)^3 + \dots \right]$$
$$= i \sum_{k=1}^{n} \tau_k - \frac{1}{2\,!} \sum_{k=1}^{n} {\tau_k}^2 - \frac{i}{3\,!} \sum_{k=1}^{n} {\tau_k}^3 + \dots$$

Ora $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau_k = 2\pi$; inoltre, supposto $\tau_k < \sigma < 1$ per ogni valore di k, segue:

$$\sum_{k=1}^{n} {\tau_k}^2 < \sigma \sum_{k=1}^{n} \tau_k = 2\pi\sigma \ , \ \sum_{k=1}^{n} {\tau_k}^3 < 2\pi\sigma^2, \dots,$$

e quindi:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} - 2\pi i \right| < 2\pi \left[\frac{\sigma}{2\,!} + \frac{\sigma^2}{3\,!} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma^3}{4\,!} + \dots \right] < 2\pi\sigma \left[\frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} + \dots \right] < 2\pi\sigma,$$

giacchè:

$$\frac{1}{2\,!} + \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1.$$

Dunque:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} = 2\pi i,$$

quando la curva a cui ci riferiamo sia un cerchio col centro nell'origine; ed è importante notare che il risultato è indipendente dal raggio del cerchio. Per uniformità si suole scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}} = \int_{(l)} \frac{d\,x}{x} = 2\,\pi\,i\,,$$

dove l denota la circonferenza considerata. E si scrive, talvolta, anche per le altre potenze di x, $\int_{(l)}$ invece di $\int_a^b$, sebbene il valore dell'integrale in questo caso non dipenda dalla linea $l = a\,b$, ma soltanto dai suoi estremi.

85. Abbiasi ora una serie di potenze positive $P\,(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$, e si prenda una linea $l = a\,b$ tutta interna al suo cerchio di convergenza, la quale soddisfaccia alle condizioni dell'art. 83. Poichè la serie dei moduli dei termini di $P\,(x)$ è equiconvergente sulla linea l (art. 58), preso ε ad arbitrio, possiamo trovare un indice q tale, che per tutti i punti di l e per ogni $m \geq q$ sia:

$$\sum_{h=m+1}^{\infty} |\, a_h\, x^h \,| < \frac{\varepsilon}{2\,M}\,,$$

dove M ha il significato stabilito nell'art. 83. Ne segue, qualunque sieno i punti x della linea l:

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left\{ |\, x_k - x_{k-1} \,| \sum_{h=m+1}^{\infty} |\, a_h\, x_{k-1}^{\,h} \,| \right\} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

quindi, a maggior ragione:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sum_{h=m+1}^{\infty} a_h \, x_{k-1}^{\,h} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dopo ciò può prendersi σ in modo che per $| x_k - x_{k-1} | < \sigma$ sia:

$$(2) \quad \left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sum_{h=0}^{m} a_h \, x_{k-1}^{\,h} - \sum_{h=0}^{m} a_h \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \ (*);$$

dalle (1), (2) segue che, se $| x_k - x_{k-1} | < \sigma$, può prendersi q in modo che sia per ogni $m \geq q$:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, P(x_{k-1}) - \sum_{h=0}^{m} a_h \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1} \right| < \varepsilon,$$

donde risulta:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, P(x_{k-1}) = Q(b) - Q(a),$$

essendo:

$$Q(x) = \int P(x) \, dx,$$

(*) Infatti, se A è il massimo dei numeri $| a_0 |$, $| a_1 |, \ldots, | a_m |$, basta prendere σ in modo che per tutti i valori di h da 0 ad m sia:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \, x_{k-1}^{\,h} - \frac{b^{h+1} - a^{h+1}}{h+1} \right| < \frac{\varepsilon}{2(m+1)A}.$$

ossia:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, P\,(x_{k-1}) = \int_a^b P\,(x)\, d\,x\,.$$

Se la linea d'integrazione l è chiusa, l'integrale è nullo.

86. Il ragionamento esposto si estende immediatamente alle serie di potenze ad esponenti negativi mancanti dell'esponente -1.

Se quindi si ha una serie di potenze positive e negative convergente entro una certa corona circolare col centro nell'origine (art. 70) e mancante dell'esponente -1, il suo integrale esteso ad una linea chiusa di lunghezza finita (art. 83) sarà nullo. Se invece figura in essa anche l'esponente -1, il suo integrale esteso ad una circonferenza interna e concentrica alla corona circolare sarà eguale al prodotto di $2\,\pi\,i$ per il coefficiente di x^{-1}. Cioè, se:

$$R\,(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h\, x^h\,,$$

e se l è una circonferenza interna e concentrica alla corona entro cui $R\,(x)$ è convergente, si ha:

$$\int_{(l)} R\,(x)\, d\,x = 2\,\pi\,i\,a_{-1}\,.$$

Analogamente si trova, per qualunque valore intero di p:

$$\int_{(l)} \frac{R(x)}{x^p}\, d\, x = 2\, \pi\, i\, a_{p-1}.$$

Serie dedotta.

87. La relazione (3) dell'art. 81 trasforma una serie di potenze di x in una serie di potenze di $x - c$, essendo c un punto interno al cerchio di convergenza della prima serie. Il raggio di convergenza ϱ_c della seconda serie è $\geq \varrho - |c|$, e quindi il suo cerchio di convergenza (il cui centro è c) è tangente internamente a quello della prima serie, od esce in parte da esso.

La serie in $x - c$ si dice *dedotta* dalla $P(x)$ rispetto al punto c, e si denota con $P(x \mid c)$. Per ogni punto interno ad ambi i cerchi di convergenza si ha:

$$P(x) = P(x \mid c).$$

Se d è un punto interno tanto al cerchio ϱ che al cerchio ϱ_c, potremo formare la serie $P(x \mid d)$ dedotta da $P(x)$ rispetto al punto d, e la serie, che indicheremo con $P(x \mid c, d)$, dedotta da $P(x \mid c)$ rispetto allo stesso punto d; la prima sarà una serie di potenze di $x - d$, la seconda sarà analogamente una serie di potenze di $[(x - c) - (d - c)]$, ossia ancora di $x - d$. Dimostreremo che le serie $P(x \mid d)$, $P(x \mid c, d)$ coincidono, cioè che: *Le serie dedotte mediatamente ed immediatamente da una stessa* *serie rispetto ad uno stesso punto interno del suo cerchio di convergenza sono identicamente eguali*; risultato che può estendersi senz'altro ad un numero qualunque di punti intermedi, *purchè tutti interni al cerchio di convergenza della serie primitiva.*

Sia $\bar{\varrho}$ il minore dei raggi dei due cerchi di centro d tangenti internamente ai cerchi ϱ, ϱ_c. Per tutti i punti interni al cerchio $\bar{\varrho}$ sarà (v. sopra):

$$P(x) = P(x \mid c) \ , \ P(x) = P(x \mid d) \ ,$$
$$P(x \mid c) = P(x \mid c, d) \ ,$$

quindi:

$$P(x \mid d) = P(x \mid c, d).$$

Ne segue (art. 67) che le due serie sono identicamente eguali.

88. Se l'origine è interna al cerchio ϱ_c, si può far coincidere con essa il punto d; $P(x \mid d)$ si riduce alla serie primitiva $P(x)$, e si ha allora (v. art. prec.):

$$P(x) = P(x \mid c, 0).$$

Cioè: *La serie primitiva può considerarsi come dedotta dalla sua serie dedotta.*

Dimostreremo che, anche se l'origine non è interna al cerchio ϱ_c, $P(x)$ può considerarsi come dedotta — però mediatamente — da $P(x \mid c)$; cioè, che *non v'è differenza essenziale tra la serie primitiva e le sue dedotte, potendo ciascuna di queste considerarsi come primitiva.*

Sia $|c| \geq \frac{\varrho}{2}$, e supponiamo per semplicità c posto sulla parte positiva dell'asse reale. Se δ è un numero qualunque compreso tra c e ϱ, posto:

$$c_1 = 2c - \delta \ , \ c_2 = 2c_1 - \delta, \ldots,$$

si giungerà certamente ad un primo numero negativo c_n; infatti, poichè, come si trova facilmente:

$$c_n = 2^n c - (2^n - 1)\,\delta,$$

basterà prendere n in modo che sia:

$$2^n > \frac{\delta}{\delta - c} \geq 2^{n-1}.$$

Dopo ciò indichiamo con $l_0, l_1, l_2, \ldots$ i cerchi aventi i centri nei punti $c, c_1, c_2, \ldots$, e tangenti internamente al cerchio ϱ. Il cerchio l_0 taglia l'asse reale nel punto $2c - \varrho$, quindi il punto c_1 è interno ad esso; analogamente c_2 è interno ad l_1, e così di seguito; infine c_n è interno ad l_{n-1}. Ma $c_{n-1} \geq 0$, mentre $c_n < 0$, quindi al cerchio l_{n-1} sarà pure interna l'origine. Potremo dunque con successive deduzioni passare dalla serie $P(x \mid c)$ alla serie $P(x)$.

89. Indicando ancora con ϱ_c il raggio di convergenza della serie dedotta rispetto al punto c, si ha(art. 81):

$$\varrho_c \geq \varrho - |c|.$$

Se l'origine è interna al cerchio di convergenza della serie dedotta rispetto al punto c, la serie primitiva può considerarsi come dedotta da questa (v. art. prec.), e perciò si ha pure:

$$\varrho \geq \varrho_c - |c|; \tag{1}$$

se non è interna, si ha $\varrho_c \leq |c|$, quindi la (1) sussiste ancora.

Riunendo le due relazioni, segue:

$$\varrho - |c| \leq \varrho_c \leq \varrho + |c|. \tag{2}$$

Cioè: *Il cerchio di convergenza di* P (x | c) *è compreso tra i cerchi di centro* c *tangenti internamente ed esternamente al cerchio di convergenza di* P (x) (gli estremi inclusi).

La (2) esprime pure che ϱ_c *è funzione continua di* c.

90. *La derivata di* P (x | c) *è la dedotta rispetto al punto* c *della derivata di* P (x).

Posto:

$$Q(x-c) = P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c),$$

ne segue:

$$Q'(x-c) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{r-1}}{(r-1)!} P^{(r)}(c) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r+1)}(c).$$

D'altra parte, posto $P'(x) = R(x)$:

$$R(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} R^{(r)}(c) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r+1)}(c),$$

quindi:

$$Q'(x-c) = R(x \mid c).$$

91. *Il limite inferiore dei raggi di convergenza delle serie* P (x | c) *relative a tutti i punti* c *interni al cerchio di convergenza di* P (x) *è nullo* (*).

Sia λ il limite inferiore dei raggi di convergenza, e supponiamo, se è possibile, $\lambda > 0$. Prendiamo due numeri positivi λ', ϱ' tali che:

$$\lambda' < \lambda, \; \lambda' < \varrho' < \varrho < \varrho' + \lambda'.$$

Qualunque sia il punto c interno al cerchio di convergenza di $P(x)$, il raggio di convergenza di $P(x \mid c)$ sarà $\geq \lambda$, e quindi $> \lambda'$, sicchè nel cerchio di centro c e di raggio λ', il contorno incluso, $P(x \mid c)$ sarà una funzione continua di x (art. 58). Consideriamo in particolare i punti c

---

(*) Poichè ρ_c è funzione continua di c, ed è $\rho_c > 0$, il teorema enunciato potrebbe sembrare in contraddizione con quello affermante che una funzione reale continua ammette sempre un massimo ed un minimo. Conviene però osservare, che quest'ultimo teorema sussiste soltanto quando il campo di esistenza della funzione è *chiuso* (cioè contiene i propri punti limiti), mentre la funzione ρ_c esiste soltanto nel campo *non chiuso* costituito dai punti *interni* del cerchio di convergenza di $P(x)$.

di modulo ϱ'; l'insieme dei cerchi di raggio λ' aventi i centri in questi punti ricoprirà la corona circolare compresa tra le circonferenze di raggi $\varrho' - \lambda'$ e $\varrho' + \lambda'$ col centro nell'origine. I valori di $P(x)$ nel cerchio di raggio $\varrho' - \lambda'$ col centro nell'origine, quelli comuni a $P(x)$ ed alle varie $P(x \mid c)$ nella corona compresa tra i cerchi $\varrho' - \lambda'$ e ϱ', e quelli delle varie $P(x \mid c)$ nella corona compresa tra i cerchi ϱ' e $\varrho' + \lambda'$, costituiranno una funzione continua in tutto il cerchio $\varrho' + \lambda'$, il contorno incluso; il modulo di questa funzione sarà pure una funzione continua, e quindi ammetterà un massimo finito M. Se M_c è il massimo modulo di $P(x \mid c)$ sulla circonferenza di centro c e di raggio λ', sarà evidentemente $M_c \leq M$ per tutti i punti c considerati; e quindi, essendo:

$$P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x - c)^r}{r\,!} P^{(r)}(c)\,,$$

sarà (art. 71):

$$\frac{1}{r\,!} \left| P^{(r)}(c) \right| \leq \frac{M_c}{\lambda'^r} \leq \frac{M}{\lambda'^r}\,,$$

ossia (art. 73):

$$\left| \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h\, c^{h-r} \right| \leq \frac{M}{\lambda'^r}\,.$$

Posto cioè:

$$Q(x) = \sum_{h=r}^{\infty} \binom{h}{r} a_h\, x^{h-r}\,,$$

si ha in tutti i punti x della circonferenza di raggio ϱ' col centro nell'origine:

$$| Q(x) | \leq \frac{M}{\lambda'^r}.$$

Ne segue (art. 71):

$$\binom{h}{r} | a_h | \leq \frac{M}{\lambda'^r \varrho'^{h-r}},$$

da cui:

$$\binom{h}{r} \lambda'^r \varrho'^{h-r} | a_h | \leq M,$$

e sommando per tutti i valori di r da 0 ad h:

$$(\varrho' + \lambda')^h | a_h | \leq (h+1) M,$$

quindi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} | a_h | \xi^h \leq M \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) \left(\frac{\xi}{\varrho' + \lambda'}\right)^h.$$

Ora, come si è già osservato (art. 73), la serie $\sum_{h=1}^{\infty} h x^h$, e quindi anche la serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} (h+1) x^h = \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} h x^h,$$

ha raggio di convergenza 1; ne segue che $\sum_{h=0}^{\infty} | a_h | \xi^h$ è convergente per ogni $\xi < \varrho' + \lambda'$. Ma $\varrho' + \lambda' > \varrho$, quindi vi sono valori di ξ maggiori di ϱ per i quali questa serie è convergente, il che è contrario alla definizione di raggio di convergenza. Dunque dev'essere $\lambda = 0$.

92. Stabilito che la funzione reale e positiva ϱ_c, definita in tutti i punti interni del cerchio ϱ, ha il limite inferiore zero, ne segue, per un noto teorema di Analisi, che esiste almeno un punto, in ogni intorno del quale il limite inferiore è ancora zero. Prendiamo un punto d interno al cerchio ϱ, sicchè $|d| = \delta < \varrho$, e, facendo centro in esso, descriviamo un cerchio di raggio $\frac{\varrho - \delta}{2}$; i cerchi di convergenza di tutte le serie dedotte rispetto ai punti interni di questo cerchio avranno raggi $\geq \frac{\varrho - \delta}{2}$, dovendo essere almeno tangenti internamente al cerchio ϱ, sicchè il limite inferiore di questi raggi non potrà essere zero. Pertanto il punto, la cui esistenza risulta dall'accennato teorema, non potrà essere interno al cerchio ϱ, ma dovrà stare sulla sua circonferenza (*). Concludendo:

La circonferenza del cerchio di convergenza contiene almeno un punto, in ogni intorno del quale il limite inferiore dei raggi di convergenza delle serie dedotte è zero.

(*) Ciò non è in contraddizione colla circostanza che la funzione ρ_c è definita solo per i punti interni del cerchio ρ; giacchè noi possiamo completarne la definizione, senza alterarne il limite inferiore, assegnandole valori positivi arbitrari nei punti della circonferenza.

I punti di questa natura diconsi *singolari*.

Un punto singolare non può essere interno al cerchio di convergenza di nessuna serie dedotta.

Per dimostrarlo, basta ripetere il ragionamento fatto poc'anzi riguardo al punto d, considerando che le serie dedotte mediatamente e immediatamente coincidono.

93. *Se una serie di potenze a coefficienti reali e non negativi ha il raggio di convergenza finito* ϱ, *il punto* $\mathrm{x} = \varrho$ *è un punto singolare* (*).

Sia $\sum\limits_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h$ la serie considerata, e sia c un numero positivo minore di ϱ. La serie:

$$(1) \quad \sum_{h=0}^{\infty} a_h\,(c + x_1)^h = \sum_{h=0}^{\infty} a_h \left[c^h + \binom{h}{1} c^{h-1} x_1 + \dots \right.$$
$$\left. + \binom{h}{h-1} c\, x_1^{h-1} + x_1^h \right],$$

dove x_1 si suppone reale e positivo, non perde il suo carattere di convergenza o di divergenza se si tolgono le parentesi quadre (racchiudenti termini tutti reali e positivi) e si spostano poi comunque i termini; in particolare, se si ordinano questi secondo le potenze crescenti di x_1, formando così la serie dedotta rispetto al punto c. Ora la (1) è convergente per $x_1 < \varrho - c$, divergente per $x_1 > \varrho - c$, quindi lo stesso avrà luogo per la serie dedotta rispetto al punto c, sicchè il raggio di convergenza di questa sarà $\varrho_c = \varrho - c$.

(*) G. Vivanti, *Riv. di mat.*, T. 3, 1893, p. 111-114.

All'avvicinarsi del punto c al punto ϱ, ϱ_c tende a zero; quindi il limite inferiore dei valori di ϱ_c in qualunque intorno di ϱ è zero, e ϱ è un punto singolare.

94. Le considerazioni degli art. 81, 87 e segg. si possono ripetere, con opportune modificazioni, per una serie di potenze negative:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{-h} \tag{1}$$

convergente (art. 69) esternamente ad un cerchio di raggio finito (o in particolare anche nullo) ϱ col centro nell'origine.

Preso un punto c esterno a questo cerchio, e posto:

$$x = c + x_1,$$

la serie:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (c + x_1)^{-h} = \sum_{h=0}^{\infty} a_h c^{-h} \left(1 + \frac{x_1}{c}\right)^{-h}$$

potrà scriversi per $|x_1| < |c|$, per una formola che dimostreremo più innanzi (art. 97):

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h c^{-h} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{h-1+r}{h-1} \left(\frac{x_1}{c}\right)^r.$$

Ora per $|x_1| < |c| - \varrho$ è applicabile il lemma di WEIERSTRASS (art. 72), sicchè:

$$P(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x_1^r \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h-1+r}{h-1} a_h c^{-h-r}.$$

Dalla (1) segue:

$$P^{(r)}(x) = (-1)^r\, r!\, \sum_{h=0}^{\infty} \binom{h-1+r}{h-1} a_h\, x^{-h-r},$$

quindi:

$$P(x) = P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c), \tag{2}$$

che è la stessa formola trovata nell'art. 81. La (2) si dice ancora dedotta dalla (1) rispetto al punto c; e, per mantenere la reciprocità già riscontrata (art. 87) tra serie primitiva e serie dedotta, può anche dirsi che la (1) è la dedotta dalla (2) rispetto al punto all'infinito.

Continuazione analitica; funzioni analitiche.

95. Abbiasi una serie di potenze $P(x)$, il cui raggio di convergenza, supposto finito, sia ϱ; sia c un punto interno al cerchio di convergenza, e il raggio di convergenza ϱ_c di $P(x \mid c)$ sia maggiore di $\varrho - |c|$, sicchè il cerchio ϱ_c esca in parte dal cerchio ϱ. I valori di $P(x)$ nei punti di ϱ non comuni a ϱ_c, quelli di $P(x \mid c)$ nei punti di ϱ_c non comuni a ϱ, e i valori comuni ad ambe le serie nei punti interni tanto a ϱ che a ϱ_c, definiscono una funzione continua nella parte del piano ricoperta dall'uno almeno dei due cerchi, i contorni esclusi. Si dice che $P(x \mid c)$ è la *continuazione analitica* di $P(x)$ nella parte di ϱ_c esterna a ϱ.

Ripetendo le stesse considerazioni per tutte le serie deducibili mediatamente od immediatamente da $P(x)$, si verrà a definire una funzione continua $f(x)$ in tutta la parte del piano ricoperta dai cerchi di convergenza delle serie considerate (i contorni sempre esclusi). Questa parte di piano sarà di necessità d'un sol pezzo, o, come suol dirsi, *connessa*, giacchè ciascun cerchio si sovrappone in parte al precedente; essa costituisce il *campo d'esistenza* della *funzione analitica* (*) $f(x)$, e la serie $P(x)$ e quelle

(*) La teoria delle funzioni analitiche è dovuta a K. WEIERSTRASS (1815-1897), il quale ne espose i fondamenti nelle sue lezioni all'Università di Berlino e in una classica memoria pubblicata nel 1876 (*Abh. Ak. Berlin*, 1876, p. 11-60; *Math. Werke*, T. 2, pagine 77-124; trad. francese in *Ann. Éc. norm.*, S. II, T. 8, 1879, p. 111-150). La denominazione di *funzioni analitiche* fu introdotta da J. L. LAGRANGE (1736-1813), il quale, per evitare i dubbi a cui davano luogo ai suoi tempi i principii del Calcolo infinitesimale, volle fondare la teoria delle funzioni sullo sviluppo di TAYLOR. Ma anche il metodo di LAGRANGE non è esente da obiezioni. Dopochè però le ricerche fondamentali di A. L. CAUCHY (1789-1857) ebbero posto in luce che le sole funzioni di una variabile complessa, il cui studio presenti vero interesse, sono quelle sviluppabili in serie di TAYLOR, WEIERSTRASS riprese, in forma più rigorosa, l'idea di LAGRANGE, assumendo questo sviluppo in serie come punto di partenza della teoria delle funzioni.

Devesi ancora notare, che WEIERSTRASS escludeva completamente dalla sua teoria il concetto di integrale, facendo di essa quasi una continuazione dell'Analisi finita. Alla mancanza di questo prezioso ausiliare cercò di sopperire A. PRINGSHEIM coll'in-da essa dedotte sono gli *elementi* della funzione analitica. Il cerchio di convergenza dell'elemento relativo ad un punto c è il massimo cerchio di centro c contenuto nel campo di convergenza.

Gli *zeri* d'una funzione analitica sono quelli dei suoi elementi (art. 66).

Poichè qualunque delle serie dedotte può considerarsi come primitiva (art. 88), può dirsi che: *Una funzione analitica è completamente determinata da uno qualsiasi dei suoi elementi.*

Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono punti del campo d'esistenza della funzione analitica $f(x)$ generata dalla serie di potenze $P(x)$, può accadere che sia:

$$P(x \mid c_1, c_2, \ldots, c_n, 0) = P(x).$$

Questa relazione ha sempre luogo (art. 87), se i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono tutti interni al cerchio di convergenza di $P(x)$. Se essa sussiste

---

troduzione del concetto di *valor medio* (*Sitzungsber. Ak. München*, T. 25, 1895, p. 75-92; T. 26, 1896, p. 167-182; *Math. Ann.*, T. 47, 1896, p. 121-154; v. anche: G. VIVANTI, *Math. Ann.*, T. 58, 1904, p. 457-468); più tardi però egli stesso ritenne più opportuno far entrare l'integrale complesso nell'ambito della teoria delle funzioni analitiche (*Sitzungsber. Ak. München*, 1920, p. 145-182).

Un metodo, che ha molta analogia con quello di WEIERSTRASS, è dovuto a C. MÉRAY (1835-1911); vedi le sue opere: *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Paris, 1872; *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, Paris, 1894-1898.

qualunque siano i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e se una analoga proprietà appartiene a tutti gli elementi di $f(x)$, si dice che $f(x)$ è *uniforme* o *monodroma*; nel caso contrario si dice che è *non uniforme* o *polidroma*. Una funzione uniforme prende dunque un unico valore in ciascun punto del suo campo di esistenza.

Nel seguito, a meno di avvertenza in contrario, limiteremo il nostro studio alle funzioni analitiche uniformi.

96. I punti del piano non appartenenti al campo d'esistenza d'una funzione analitica diconsi *punti singolari* della funzione (*). In particolare sono punti singolari d'una funzione analitica quelli di tutti i suoi elementi, giacchè essi, non essendo interni a nessun cerchio di convergenza (art. 92), non possono appartenere al campo di esistenza della funzione. Essi stanno sul contorno di questo campo.

L'insieme dei punti singolari d'una funzione analitica è chiuso. Infatti, se un punto limite c di tale insieme non fosse singolare, esisterebbe un elemento $P(x \mid c)$ della funzione, il quale avrebbe un cerchio di convergenza di raggio non nullo; i punti interni a questo cerchio apparterrebbero al campo d'esistenza della funzione, e quindi non potrebbero essere singolari.

(*) Per contrapposto, i punti del campo d'esistenza si dicono talvolta *punti regolari*; e si dice anche che in tali punti *la funzione si comporta regolarmente* o *è regolare.*

97. In questo articolo svilupperemo alcuni esempi di funzioni analitiche.

1. — Abbiasi la serie di potenze:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^4 + x^8 + \ldots = 1 + \sum_{h=0}^{\infty} x^{2^h},$$

il cui raggio di convergenza è 1. Il punto $x = 1$ è un suo punto singolare (art. 93). Inoltre si ha:

$$P(x) = x + P(x^2);$$

$P(x^2)$ ha i punti singolari $x^2 = 1$, ossia $x = \pm 1$, e questi saranno singolari anche per $P(x)$, giacchè il sommando x è regolare in tutti i punti del piano a distanza finita. Analogamente si ha:

$$P(x) = x + x^2 + P(x^4),$$

donde risulta che i punti $x = \sqrt[4]{1}$ sono singolari per $P(x)$; e così di seguito. Ora i punti $1, \sqrt{1}, \sqrt[4]{1}, \sqrt[8]{1}, \ldots$ formano un aggregato denso su tutta la circonferenza del cerchio unitario (cioè del cerchio di raggio 1 col centro nell'origine), quindi (art. 96) tutti i punti di questa circonferenza sono singolari, e i cerchi di convergenza delle serie dedotte non possono uscire dal cerchio unitario. Pertanto la $P(x)$ rappresenta da sè sola una funzione analitica uniforme esistente soltanto nell'interno del cerchio unitario.

2. — Abbiasi la serie di potenze:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} x^h;$$

il suo raggio di convergenza è 1, e il punto $x=1$ è un punto singolare. Ora si ha per $|x| < 1$:

$$P(x) = \frac{1}{1-x};$$

inoltre (art. 73):

$$P^{(r)}(x) = r!\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} x^h,$$

e (*):

(*) La formola è vera per $r=2$; infatti, applicando la nota definizione di prodotto di due serie, si ha:

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{1+h}{1} x^h.$$

Supponiamo:

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^r = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r-1+h}{r-1} x^h;$$

ne segue:

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^{r+1} = \left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^r \sum_{h=0}^{\infty} x^h = \sum_{h=0}^{\infty} \left[\binom{r-1+h}{r-1} + \right.$$

$$\left. + \binom{r-2+h}{r-1} + \ldots + \binom{r+1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + 1\right] x^h.$$

Ora:

$$\binom{r+h}{r} = \binom{r-1+h}{r} + \binom{r-1+h}{r-1},$$

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^{r+1} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} x^h,$$

donde segue:

$$P^{(r)}(x) = \frac{r\,!}{(1-x)^{r+1}}.$$

Se $|c| < 1$, si ha pertanto:

$$(1) \qquad P(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r\,!} P^{(r)}(c) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{(1-c)^{r+1}} = \frac{1}{1-c} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x-c}{1-c}\right)^r.$$

Risulta dalla teoria generale che $P(x \mid c)$ è

$$\binom{r-1+h}{r} = \binom{r-2+h}{r} + \binom{r-2+h}{r-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{r+1}{r} = \binom{r}{r} + \binom{r}{r-1},$$
$$\binom{r}{r} = 1,$$

da cui sommando:

$$\binom{r+h}{r} = \binom{r-1+h}{r-1} + \binom{r-2+h}{r-1} + \cdots + $$
$$+ \binom{r+1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + 1,$$

e quindi:

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right]^{r+1} = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} x^h.$$

convergente certamente nel cerchio (di raggio $1 - |c|$) tangente internamente al cerchio unitario; ma, come si vede dalla sua forma, essa lo è in tutti i punti x per cui:

$$\left|\frac{x-c}{1-c}\right| < 1,$$

cioè entro il cerchio, di centro c e di raggio $|1-c|$, passante per il punto 1, che è il suo cerchio di convergenza. E poichè, tranne il caso di c reale e positivo, $|1-c| > 1 - |c|$, abbiamo così la continuazione analitica della funzione fuori del cerchio unitario.

La (1) può scriversi:

$$(2) \quad P(x \mid c) = \frac{1}{1-c} P\left(\frac{x-c}{1-c}\right) = \frac{1}{1-c} P(x_1),$$

posto $x_1 = \dfrac{x-c}{1-c}$. Se d è un punto interno al cerchio di convergenza di $P(x \mid c)$, posto:

$$c_1 = \frac{d-c}{1-c},$$

sarà:

$$x_1 - c_1 = \frac{x-d}{1-c};$$

e poichè, per essere $|d-c| < |1-c|$, si ha $|c_1| < 1$, sarà, analogamente alla (2):

$$P(x_1 \mid c_1) = \frac{1}{1-c_1} P\left(\frac{x_1-c_1}{1-c_1}\right) =$$
$$= \frac{1-c}{1-d} P\left(\frac{x-d}{1-d}\right),$$

quindi, per la (1):

$$P(x \mid c, d) = \frac{1}{1-d} P\left(\frac{x-d}{1-d}\right).$$

Anche il cerchio di convergenza di questa serie passa per il punto 1.

Così continuando, si vede che, fissato un punto qualunque del piano (a distanza finita), è sempre possibile, con passaggi successivi, giungere ad una serie dedotta, il cui cerchio di convergenza contenga quel punto. Pertanto il campo di esistenza della funzione analitica generata dalla serie di potenze $P(x)$ comprende tutti i punti del piano a distanza finita, escluso il punto $x = 1$. Nell'interno del cerchio di convergenza di $P(x)$ il valore della funzione è $\frac{1}{1-x}$; nell'interno del cerchio di convergenza di $P(x \mid c)$ è $\frac{1}{1-c}\,\frac{1}{1-x_1}$, cioè ancora $\frac{1}{1-x}$; e così per tutti i punti.

Per vedere se il punto all'infinito appartiene al campo di esistenza della funzione costruita, partiamo dalla serie di potenze negative (articolo 94) convergente per $|x| > 1$:

$$Q(x) = -\sum_{h=1}^{\infty} x^{-h} = -\frac{1}{x} \sum_{h=0}^{\infty} x^{-h}.$$

Per $|x| > 1$ si ha:

$$Q(x) = \frac{1}{1-x};$$

inoltre:

$$Q^{(r)}(x) = (-1)^{r+1}\, r!\, x^{-r} \sum_{h=1}^{\infty} \binom{r+h-1}{r} x^{-h}.$$

Ora (v. sopra):

$$\left[-\sum_{h=1}^{\infty} x^{-h}\right]^{r+1} = (-1)^{r+1} x^{-r-1} \left[\sum_{h=0}^{\infty} x^{-h}\right]^{r+1} =$$

$$= (-1)^{r+1} x^{-r-1} \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} x^{-h}$$

$$= (-1)^{r+1} x^{-r} \sum_{h=1}^{\infty} \binom{r+h-1}{r} x^{-h} = Q^{(r)}(x),$$

quindi, per $|x| > 1$:

$$Q^{(r)}(x) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}},$$

e per conseguenza, per $|c| > 1$:

$$Q(x \mid c) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} Q^{(r)}(c) = \frac{1}{1-c} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x-c}{1-c}\right)^r,$$

che coincide colla (1). E poichè si è trovato che questa stessa espressione hanno tutti gli elementi (anche relativi a punti esterni al cerchio unitario) della funzione analitica generata dalla serie $P(x)$, si può concludere che le serie dedotte da $P(x)$ e da $Q(x)$ per uno stesso punto coincidono, e quindi che $Q(x)$ può considerarsi come l'elemento della funzione analitica $\dfrac{1}{1-x}$ relativo al punto all'infinito.

Il campo di esistenza della funzione consta dunque dell'intero piano, escluso il punto $x=1$, che è il solo punto singolare.

Vogliamo verificare che la funzione costruita è uniforme.

Prendiamo un numero finito di punti qualunque $c, d, e, \ldots, l$, e formiamo la serie dedotta $P(x \mid c, d, e, \ldots, l, 0)$. Si è trovato:

$$P(x \mid c) = \frac{1}{1-c} P\left(\frac{x-c}{1-c}\right),$$

$$P(x \mid c, d) = \frac{1}{1-d} P\left(\frac{x-d}{1-d}\right);$$

analogamente:

$$P(x \mid c, d, e) = \frac{1}{1-e} P\left(\frac{x-e}{1-e}\right),$$

. . . .

$$P(x \mid c, d, e, \ldots, l) = \frac{1}{1-l} P\left(\frac{x-l}{1-l}\right),$$

ed infine:

$$P(x \mid c, d, e, \ldots, l, 0) = P(x).$$

3. — Abbiasi la serie di potenze:

$$P(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}.$$

Questa serie ha per derivata quella dell'esempio precedente, quindi il suo raggio di convergenza è ancora 1, ed inoltre la sua derivata r-esima è la derivata $(r-1)$-esima della serie dell'esempio precedente, sicchè si ha per $|x| < 1$:

$$P^{(r)}(x) = \frac{(r-1)!}{(1-x)^r},$$

e quindi, per $|c| < 1$:

$$(3) \quad P(x \mid c) = P(c) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(x-c)^r}{r!} P^{(r)}(c) =$$

$$= P(c) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \left(\frac{x-c}{1-c}\right)^r = P(c) + P\left(\frac{x-c}{1-c}\right).$$

Operando come precedentemente, si trova:

$$P(x \mid c, d) = P(c) + P\left(\frac{d-c}{1-c}\right) + P\left(\frac{x-d}{1-d}\right).$$

I cerchi di convergenza delle serie dedotte passano tutti pel punto $x = 1$; quindi la funzione analitica generata da $P(x)$ ha *al finito* (*)

(*) Per il punto all'infinito nulla per ora può dirsi, come avremo occasione di osservare più innanzi (art. 101).

il solo punto singolare $x = 1$. Possiamo però dimostrare che essa non è uniforme.

Sul cerchio di raggio 1 col centro nel punto $x = 1$, il quale passa per l'origine, prendiamo, a partire dall'origine stessa, n punti $c_0 = 0$, c_1, $c_2, \ldots, c_{n-1}$, che dividano il cerchio stesso in altrettanti archi eguali, essendo n un numero qualunque maggiore di 6. Poichè i cerchi di convergenza di tutte le serie dedotte passano per il punto 1, i raggi di convergenza delle serie dedotte rispetto ai punti $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ saranno tutti eguali ad 1, e perciò (per la condizione $n > 6$) ciascuno dei punti considerati sarà interno al cerchio di convergenza della serie dedotta rispetto al precedente. Si avrà allora:

$$P(x \mid c_1) = P(c_1) + P\left(\frac{x - c_1}{1 - c_1}\right),$$

$$P(x \mid c_1, c_2) = P(c_1) + P\left(\frac{c_2 - c_1}{1 - c_1}\right) + P\left(\frac{x - c_2}{1 - c_2}\right),$$

. . . .

$$P(x \mid c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) = P(c_1) + P\left(\frac{c_2 - c_1}{1 - c_1}\right) + \\ + \ldots + P\left(\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{1 - c_{n-2}}\right) + P\left(\frac{x - c_{n-1}}{1 - c_{n-1}}\right),$$

ed infine:

$$P(x \mid c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, 0) = P(c_1) + P\left(\frac{c_2 - c_1}{1 - c_1}\right) + \\ + \ldots + P\left(\frac{c_{n-1} - c_{n-2}}{1 - c_{n-2}}\right) + P\left(\frac{- c_{n-1}}{1 - c_{n-1}}\right) + P(x) = \\ = C + P(x).$$

Calcoliamo la costante C, che evidentemente è indipendente da n (*). Si ha:

$$c_h = 1 - e^{\frac{2h\pi i}{n}},$$

quindi:

$$c_1 = \frac{c_{h+1} - c_h}{1 - c_h} = \frac{-c_{n-1}}{1 - c_{n-1}} = 1 - e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

e:

$$C = n\,P\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right). \tag{4}$$

Ora:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = \lim_{n=\infty} n\left[-\frac{2\,\pi\,i}{n} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\,!}\left(\frac{2\,\pi\,i}{n}\right)^2 - \dots\right] = -2\,\pi i\,,$$

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^h = \lim_{n=\infty} n\left[-\frac{2\,\pi\,i}{n} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\,!}\left(\frac{2\,\pi\,i}{n}\right)^2 - \dots\right]^h = 0 \text{ per } h > 1\,,$$

quindi, per l'equiconvergenza della serie $P\,(x)$:

$$\lim_{n=\infty} n\,P\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = -2\,\pi\,i\,,$$

(*) Giacchè, interpolando nuovi punti, non si farebbe che sostituire deduzioni mediate a deduzioni immediate nelle condizioni in cui ciò è lècito (articolo 87).

ed infine:

$$C = -2\pi i.$$

Pertanto la funzione considerata non è uniforme.

Dall'identità (v. form. (4)):

$$P\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) = -\frac{2\pi i}{n}$$

risulta che la funzione:

$$P(1 - e^x) + x$$

si annulla nei punti $\frac{2\pi i}{n}$, dove n è qualunque intero positivo. E poichè l'insieme di tali punti ha per punti limiti tutti i punti della circonferenza del cerchio unitario, e d'altra parte tali punti, tranne al più il punto $x = 1$, non sono singolari per la funzione considerata, ne segue che essa è identicamente nulla. Si ha cioè:

$$P(1 - e^x) = -x.$$

Se, posto $e^x = y$, si scrive $x = \lg y$, si ha:

$$P(1 - y) = -\lg y,$$

od anche, ponendo $1 - x$ in luogo di y:

$$P(x) = -\lg(1 - x).$$

Siccome $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ (art. 78), ne segue:

$$\lg y_1 + \lg y_2 = \lg (y_1 y_2),$$

quindi dalla (3):

$$P(x \mid c) = -\lg(1-c) - \lg\left(1 - \frac{x-c}{1-c}\right) =$$
$$= -\lg(1-x);$$

e lo stesso si trova per qualunque altro punto al finito diverso dal punto 1, sicchè può rappresentarsi con $-\lg(1-x)$ la funzione $f(x)$ generata dalla serie $P(x)$, e si ha:

$$e^{-f(x)} = 1 - x.$$

Al tendere di x a ∞, anche $e^{-f(x)}$ deve tendere ad ∞, e $f(x)$ non può restare finita; quindi il punto all'infinito è un punto singolare per la funzione $f(x)$, e il campo d'esistenza di questa funzione consta dell'intero piano esclusi i punti $x = 1$ e $x = \infty$. Essa prende in ciascun punto infiniti valori differenti tra loro per multipli interi di $2\pi i$.

98. Dai teoremi degli articoli 66, 67, 68 segue:

I punti limiti dell'insieme I *dei punti, in cui una funzione analitica prende lo stesso valore, sono punti singolari, e quindi l'insieme* I *è isolato.*

In ogni campo interno al campo d'esistenza d'una funzione analitica essa non può prendere lo stesso valore che un numero finito di volte.

Una funzione analitica non può avere valore reale (o imaginario puro) in tutti i punti d'un campo interno al suo campo d'esistenza (senza ridursi ad una costante).

99. *Se i campi d'esistenza di più funzioni analitiche* $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *hanno una parte comune* C **connessa**, *e se fra i loro elementi* $P_1(x-c), P_2(x-c), \ldots, P_n(x-c)$ *relativi ad un punto* c *di* C *ha luogo una relazione razionale intera:*

$$F[P_1(x-c), P_2(x-c), \ldots, P_n(x-c)]=0,$$

la stessa relazione sussiste fra gli elementi relativi a qualunque altro punto del campo C (**legge della permanenza delle relazioni analitiche**).

Sia ϱ_c il raggio del massimo cerchio di centro c contenuto in C, e sia d un punto interno al cerchio ϱ_c. Per tutti i punti interni ad ambi i cerchi ϱ_c, ϱ_d sarà:

$$P_h(x-c \mid d-c) = P_h(x-c) \quad (h=1,2,\ldots,n),$$

quindi:

$$F[P_1(x-c \mid d-c), P_2(x-c \mid d-c), \ldots,$$
$$\ldots, P_n(x-c \mid d-c)] = 0.$$

La dimostrazione si estende a tutti i punti di C, giacchè si può giungere da c ad uno qualunque di essi con un numero finito di deduzioni; quindi può scriversi, per tutti i punti di C:

$$F[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = 0.$$

Il teorema stabilito permette di definire immediatamente la *somma* e il *prodotto* di due funzioni analitiche come la funzione analitica generata dalla somma o dal prodotto degli elementi corrispondenti delle due funzioni date.

100. Sia $P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ l'elemento relativo all'origine di una funzione analitica $f(x)$, e supponiamo $a_0 \neq 0$. Posto $R(x) = \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h$, potrà trovarsi (cfr. art. 66) un intorno ε dell'origine, in tutti i punti del quale sia:

$$|R(x)| \leq \theta \, |a_0| ,$$

essendo θ una costante positiva minore di 1; ne segue, per tutti i punti di ε (art. 97):

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{P(x)} = \frac{1}{a_0 + R(x)} =$$
$$= \frac{1}{a_0} - \frac{R(x)}{a_0^{\,2}} + \frac{R^2(x)}{a_0^{\,3}} + \dots$$

A quest'ultima serie può applicarsi il lemma di Weierstrass; indicando con $Q(x)$ la serie di potenze a cui essa dà luogo, si ha nel campo ε:

$$P(x)\, Q(x) = 1 ,$$

e quindi, se $g(x)$ è la funzione analitica generata da $Q(x)$, nella parte comune ai campi di esistenza delle funzioni $f(x)$, $g(x)$:

$$f(x)\,g(x) = 1 .$$

La $g(x)$ è la *reciproca* della $f(x)$; e il *quoziente* di due funzioni si definisce come il prodotto dell'una per la reciproca dell'altra.

101. Sia $P(x)$ una serie di potenze, $f(x)$ la funzione analitica da essa generata. La serie $P'(x)$ ha lo stesso raggio di convergenza della $P(x)$ (art. 73), e la serie dedotta dalla $P'(x)$ rispetto ad un punto interno del loro comune cerchio di convergenza è la derivata di quella dedotta dalla $P(x)$ rispetto allo stesso punto (art. 90). Ripetendo questo ragionamento, può concludersi che la funzione analitica $g(x)$ generata dalla $P'(x)$ possiede le due seguenti proprietà:

a) ha lo stesso campo d'esistenza della $f(x)$ (*);

(*) Fa eccezione eventualmente il punto all'infinito, il quale può appartenere al campo di esistenza di $g(x)$ e non a quello di $f(x)$. Così (art. 97) la funzione generata dalla serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^h}{h}$ non è regolare per $x = \infty$, mentre lo è quella generata dalla sua derivata $\sum_{h=0}^{\infty} x^h$. Ciò dipende dal fatto, che una serie di potenze negative, se contiene la potenza -1, non può considerarsi come la derivata di un'altra serie di potenze.

b) il suo elemento corrispondente ad un punto qualunque di questo campo è la derivata dell'elemento di $f(x)$ corrispondente allo stesso punto.

Diremo $g(x)$ la *derivata* di $f(x)$, e la indicheremo con $f'(x)$.

I risultati ottenuti ci permettono di concludere che: *Una funzione analitica è una funzione continua e indefinitamente derivabile in ogni punto del suo campo d'esistenza, e sviluppabile in serie di* TAYLOR *nell'intorno di ognuno di tali punti.*

102. Le regole stabilite per la derivazione della somma e del prodotto di più serie di potenze (artt. 74, 75, 76) si estendono immediatamente, coll'uso del teorema dell'art. 99, alle funzioni analitiche.

Dalla regola per la derivazione di un prodotto segue che, se:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{n} f_h(x),$$

si ha:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{f'_h(x)}{f_h(x)}.$$

Se:

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

ne segue:

$$f_1(x) = f(x)\, f_2(x),$$

e quindi:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f(x)\, f_2'(x) + f_2(x)\, f'(x) \\ &= \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, f_2'(x) + f_2(x)\, f'(x), \end{aligned}$$

donde:

$$f'(x) = \frac{f_2(x)\, f_1'(x) - f_1(x)\, f_2'(x)}{f_2^2(x)},$$

che esprime la regola nota per la derivazione del quoziente di due funzioni.

Risulta pure facilmente dall'art. 77 che, se le serie di potenze $P(x)$, $Q(z)$ generano rispettivamente le funzioni analitiche $f(x)$, $\varphi(z)$, la $Q[P(x)] = R(x)$ genera la funzione analitica $\varphi[f(x)] = \psi(x)$, e che ha luogo la relazione:

$$\psi'(x) = \varphi'[f(x)] \,.\, f'(x).$$

In particolare, se:

$$\psi(x) = e^{f(x)},$$

ne segue (art. 78):

$$\psi'(x) = e^{f(x)} f'(x).$$

103. Sia $P(x)$ una serie di potenze, e sia (art. 82):

$$\int P(x)\, dx = Q(x).$$

Ne segue:

$$Q'(x) = P(x),$$

e le funzioni analitiche $f(x)$, $g(x)$ generate rispettivamente dalle serie $P(x)$, $Q(x)$ hanno lo stesso campo d'esistenza (*); inoltre (art. 101) $g'(x) = f(x)$.

Si pone, per definizione:

$$\int f(x)\,dx = g(x)\,, \quad \int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)\,,$$

essendo a, b due punti interni qualunque del cerchio di convergenza di $P(x)$ e $Q(x)$. Se si congiungono i punti a, b con una linea tutta interna al cerchio stesso, la quale soddisfaccia alle condizioni dell'art. 83, si ha, colle notazioni già usate:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, P(x_{k-1}) = Q(b) - Q(a);$$

ora:

$$P(x_{k-1}) = f(x_{k-1})\,, \; Q(a) = f(a)\,, \; Q(b) = f(b)\,,$$

quindi, colla notazione or ora stabilita:

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, f(x_{k-1}) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Se la linea è chiusa, l'integrale è nullo (articolo 85) (**).

(*) V. però la nota all'art. 101.

(**) Dalla (1) segue facilmente il **teorema della media:**

$$\left| \int_a^b f(x)\,d\,x \right| \leq |\, b - a \,|\, L,$$

dove L denota il massimo modulo di $f(x)$ sulla linea d'integrazione.

La (1) può assumersi come definizione dell'integrale di una funzione analitica esteso ad una linea qualunque (soddisfacente alle solite condizioni) interna al campo d'esistenza della funzione. Sulla linea si può prendere sempre un numero finito di punti $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ tali che, posto $a = p_0$, $b = p_n$, due punti consecutivi p_{k-1}, p_k sieno interni al cerchio di convergenza di uno stesso elemento $P_k(x - c_k)$. Sarà allora:

$$\int_{p_{k-1}}^{p_k} f(x)\,dx = \int_{p_{k-1}}^{p_k} P_k(x - c_k)\,dx =$$
$$= Q_k(p_k - c_k) - Q_k(p_{k-1} - c_k),$$

posto:

$$\int P_k(x - c_k)\,dx = Q_k(x - c_k),$$

quindi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} Q_k(p_k - c_k) - \sum_{k=1}^{n} Q_k(p_{k-1} - c_k).$$

Ora, poichè il punto p_{k-1} è interno tanto al cerchio di convergenza di $P_{k-1}(x - c_{k-1})$ che a quello di $P_k(x - c_k)$, e poichè i cerchi di convergenza delle P sono anche quelli delle Q, sarà:

$$Q_{k-1}(p_{k-1} - c_{k-1}) = Q_k(p_{k-1} - c_k),$$

quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k(p_{k-1} - c_k) = \sum_{k=1}^{n} Q_{k-1}(p_{k-1} - c_{k-1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} Q_k(p_k - c_k),$$

ed infine:

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q_n(b - c_n) - Q_0(a - c_0) =$$
$$= g(b) - g(a).$$

Se la linea d'integrazione è chiusa, e se la funzione $g(x)$ è uniforme, l'integrale è nullo; lo è in particolare, se la linea chiusa sta tutta entro il cerchio di convergenza di un elemento della funzione $f(x)$.

Se $g(x)$ non è uniforme, nulla può dirsi in generale; però un teorema fondamentale, che ora dimostreremo, stabilisce che, sotto certe condizioni, l'integrale è ancora nullo.

104. *Se* f (x) *è una funzione analitica uniforme, e la linea chiusa* l *è il contorno di un campo interno al suo campo di esistenza, l'integrale di* f (x) *esteso alla linea* l *è nullo* (**teorema di Cauchy**).

Per convenzione, una linea chiusa si intende sempre percorsa in senso tale, da lasciare a sinistra il campo finito di cui essa costituisce il contorno, o del cui contorno essa fa parte.

Sia C (fig. 1) il campo considerato, l il suo contorno, che supponiamo per ora formato di un sol pezzo. Sia ϱ la minima distanza dei punti di C dal contorno del campo di esistenza della funzione; il raggio di convergenza dell'elemento relativo a qualunque punto di C sarà $\geq \varrho$, e quindi, se si divide il piano in quadrati tutti eguali di lato $< \frac{\varrho}{\sqrt{2}}$, ciascuno dei quadrati contenuti in tutto o in parte entro C sarà completamente interno al cerchio di convergenza relativo ad uno qualunque dei suoi vertici interni a C (*), e l'integrale della funzione esteso al contorno di ciascuno dei campi parziali in cui C risulta diviso sarà nullo. Sarà cioè, indicando per semplicità con I_{ab} l'integrale esteso da a a b:

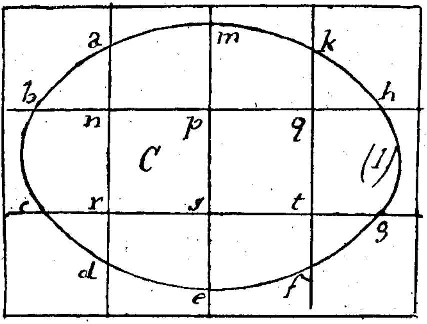

Fig. 1.

$$
\begin{aligned}
&I_{ab} + I_{bn} + I_{na} = 0,\\
&I_{bc} + I_{cr} + I_{rn} + I_{nb} = 0,\\
&I_{cd} + I_{dr} + I_{rc} = 0,\\
&I_{de} + I_{es} + I_{sr} + I_{rd} = 0,\\
&I_{ef} + I_{ft} + I_{ts} + I_{se} = 0,\\
&I_{fg} + I_{gt} + I_{tf} = 0,\\
&I_{gh} + I_{hq} + I_{qt} + I_{tg} = 0,
\end{aligned}
$$

(*) Si possono sempre prendere i quadrati abbastanza piccoli, perchè ogni quadrato contenuto anche solo in parte in C abbia almeno un vertice entro C.

$$
\begin{aligned}
&I_{hk} + I_{kq} + I_{qh} = 0, \\
&I_{km} + I_{mp} + I_{pq} + I_{qk} = 0, \\
&I_{ma} + I_{an} + I_{np} + I_{pm} = 0, \\
&I_{pn} + I_{nr} + I_{rs} + I_{sp} = 0, \\
&I_{qp} + I_{ps} + I_{st} + I_{tq} = 0,
\end{aligned}
$$

e di qui, considerando che $I_{ab} + I_{ba} = 0$:

$$
I_{ab} + I_{bc} + I_{cd} + I_{de} + I_{ef} + I_{fg} + I_{gh} + I_{hk} + \\
+ I_{km} + I_{ma} = \int_{(l)} f(x)\, dx = 0\,.
$$

La dimostrazione si estenderebbe senza difficoltà ad un campo avente il contorno formato di più pezzi, p. es. ad un campo di forma anulare.

Per un campo C di questa forma, denotando con l_1, l_2 le linee che lo racchiudono, la linea esterna l_1 dovrà essere percorsa nel senso già indicato, mentre la linea interna l_2 dovrà percorrersi lasciando a sinistra il campo C, sicchè, se in generale $\int_{(l)}$ denota l'integrale esteso alla linea chiusa l percorsa in senso positivo rispetto al campo finito racchiuso dalla linea stessa, si avrà, per il teorema di Cauchy:

$$
\int_{(l_1)} f(x)\, dx - \int_{(l_2)} f(x)\, dx = 0\,,
$$

donde:

$$
\int_{(l_1)} f(x)\, dx = \int_{(l_2)} f(x)\, dx\,.
$$

P. es. la funzione analitica rappresentata in tutto il piano, esclusa l'origine, da $\frac{1}{x}$ (che può considerarsi come una serie di potenze negative ridotta ad un unico termine), integrata lungo una circonferenza di raggio qualunque col centro nell'origine, dà (art. 84) $2\pi i$. Ne segue, per qualunque linea chiusa semplice l contenente nel suo interno l'origine:

$$\int_{(l)} \frac{dx}{x} = 2\pi i\,.$$

105. Sia $f(x)$ una funzione analitica regolare in tutto un campo C, compreso il suo contorno l, e sia c un punto interno del campo. Se, facendo centro in c, si descrive un cerchio l' tutto contenuto entro C, nel campo anulare racchiuso dalle linee l, l' la funzione $\frac{f(x)}{x-c}$ sarà regolare, giacchè la funzione $\frac{1}{x-c}$ (v. sopra) non ha altri punti singolari che il punto c. Ne segue:

$$(1) \qquad \int_{(l)} \frac{f(x)}{x-c}\,dx = \int_{(l')} \frac{f(x)}{x-c}\,dx\,.$$

Ora, poichè $f(x)$ è continua, può prendersi il cerchio l' abbastanza piccolo perchè per tutti i punti di esso sia:

$$|\,f(x) - f(c)\,| < \frac{\sigma}{2\pi},$$

essendo σ un numero positivo arbitrario. La relazione può scriversi:

$$f(x) = f(c) + \frac{\sigma}{2\pi}\varphi(x),$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione analitica che nel cerchio l' soddisfa alla condizione $|\varphi(x)| < 1$; ne segue (*):

$$\int_{(l')} \frac{f(x)}{x-c}\,dx = f(c)\int_{(l')} \frac{dx}{x-c} + \frac{\sigma}{2\pi}\int_{(l')} \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx.$$

Ora (art. 84):

$$\int_{(l')} \frac{dx}{x-c} = 2\pi i,$$

quindi:

$$\left|\int_{(l')} \frac{dx}{x-c}\right| = 2\pi,$$

$$\left|\int_{(l)} \frac{\varphi(x)}{x-c}\,dx\right| < 2\pi,$$

$$\left|\int_{(l')} \frac{f(x)}{x-c}\,dx - 2\pi i\,f(c)\right| < \sigma,$$

donde, per la (1), risulta immediatamente (**formola di Cauchy**):

(*) Si dimostra senza alcuna difficoltà, che i noti teoremi del Calcolo integrale sussistono anche per gli integrali delle funzioni analitiche. Ci dispenseremo dal ripetere questa osservazione ogni volta che l'occasione se ne presenterebbe,

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{f(x)}{x - c} dx.$$

Dalla formola di CAUCHY si deduce una conseguenza importante. Se L è il massimo modulo di $f(x)$ sulla linea l, si ha, ripetendo il ragionamento fatto poc'anzi:

$$|f(c)| \leq L.$$

Cioè: *Se una funzione analitica è regolare in un campo, il contorno compreso, il suo modulo non può superare in nessun punto interno il valore massimo del modulo sul contorno.*

In particolare, se $P(x)$ è una serie di potenze avente il raggio di convergenza ϱ, e se, essendo $\varrho' < \varrho$, si indica come precedentemente (art. 71) con $M(\varrho')$ il massimo modulo di $P(x)$ sulla circonferenza di raggio ϱ' col centro nell'origine, si ha per ogni punto c tale che $|c| < \varrho'$:

$$|P(c)| \leq M(\varrho').$$

Ciò può esprimersi dicendo che M (ϱ') *è una funzione generalmente crescente* (cioè non decrescente) *di* ϱ'.

Dalla formola di CAUCHY risulta pure che, *dati i valori di una funzione analitica sul contorno di un campo in cui essa è regolare, resta determinato il suo valore in ogni punto interno del campo* (*).

(*) Ciò mostra come le funzioni analitiche costi-

106. Applichiamo la formola di CAUCHY ad una funzione analitica regolare in una corona circolare col centro nell'origine, compreso il contorno. Indicando con l_1, l_2 le circonferenze estreme percorse in senso positivo rispetto all'interno dei rispettivi cerchi, sarà (art. 105):

$$(1)\quad f(c) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{(l_1)} \frac{f(x)}{x-c}\,dx - \int_{(l_2)} \frac{f(x)}{x-c}\,dx\right].$$

Ora per i punti della circonferenza l_1 può scriversi (art. 97):

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{1-\dfrac{c}{x}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c^h}{x^{h+1}},$$

per quelli della circonferenza l_2:

$$\frac{1}{x-c} = -\frac{1}{c}\,\frac{1}{1-\dfrac{x}{c}} = -\sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^h}{c^{h+1}},$$

quindi, considerando che le serie scritte sono equiconvergenti sulle rispettive circonferenze, e che $|f(x)|$ ha un massimo (finito) nel campo considerato:

tuiscano una classe molto ristretta rispetto alla generalità delle funzioni, giacchè una funzione, sia pure continua, non resta affatto determinata nell'interno di un campo dai suoi valori sul contorno.

$$\int_{(l_1)} \frac{f(x)}{x-c}\,dx = \sum_{h=0}^{\infty} c^h \int_{(l_1)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx,$$

$$\int_{(l_2)} \frac{f(x)}{x-c}\,dx = -\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{c^{h+1}} \int_{(l_2)} f(x)\, x^h\,dx$$

$$= -\sum_{h=-1}^{-\infty} c^h \int_{(l_2)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx.$$

Se l è una linea chiusa semplice qualunque contenuta in l_1 e contenente l_2, poichè la funzione $f(x)\, x^{-h-1}$ per qualsiasi valore intero di h è regolare nella corona, si potrà applicare a questa funzione il teorema di CAUCHY (art. 104) per i due campi in cui la corona è divisa dalla linea l; sarà cioè:

$$\int_{(l_1)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx = \int_{(l)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx =$$

$$= \int_{(l_2)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx.$$

Risulta pertanto dalla (1):

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h=-\infty}^{\infty} c^h \int_{(l)} f(x)\, x^{-h-1}\,dx.$$

Riferendoci, invece che all'origine, ad un punto qualunque (a distanza finita) c, e denotando con x, anzichè con c, un punto interno alla corona, con z, anzichè con x, i punti della linea d'integrazione, possiamo scrivere:

$$(2)\quad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=-\infty}^{\infty}(x-c)^h\int_{(l)} f(z)(z-c)^{-h-1}dz = \\ = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h\,(x-c)^h ,$$

dove:

$$a_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} f(z)\,(z-c)^{-h-1}\,dz .$$

La (2), che dicesi **formola di Laurent**, esprime che: *Una funzione analitica regolare in una corona circolare di centro* c *è rappresentabile in tutti i punti della corona mediante una serie di potenze intere positive, nulle e negative di* x — c.

Ponendo:

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_h\,(x-c)^h = P_1\,(x-c) ,$$

$$\sum_{h=-1}^{-\infty} a_h\,(x-c)^h = P_2\left(\frac{1}{x-c}\right) ,$$

dove, come si vede, $P_1(x)$, $P_2(x)$ denotano due serie di potenze intere *positive*, la seconda delle quali ha il termine costante nullo, la formola trovata può scriversi:

$$f(x) = P_1\,(x-c) + P_2\left(\frac{1}{x-c}\right) .$$

Lo sviluppo di Laurent *è unico*; cioè, se per una funzione regolare in una corona circolare si sono ottenuti, in un modo qualunque, due sviluppi:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x - c)^h \ , \ \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h (x - c)^h,$$

questi debbono necessariamente coincidere.

Per tutti i punti della corona si ha, per ipotesi:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x - c)^h = \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_h (x - c)^h,$$

e quindi, qualunque sia il numero intero r:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} (a_h - b_h) (x - c)^{h-r-1} = 0.$$

Integrando lungo una linea l come quella sopra considerata, e tenendo conto dell'equiconvergenza della serie, si ha:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} (a_h - b_h) \int_{(l)} (x - c)^{h-r-1}\, dx = 0.$$

Ora (art. 84) tutti gli integrali che figurano in questa formola sono nulli, eccetto quello corrispondente all'esponente -1, cioè in cui $h = r$, il quale ha il valore $2\pi i$; ne segue, per tutti i valori interi di r:

$$2\pi i\, (a_r - b_r) = 0,$$

e quindi $a_r = b_r$.

Da questa osservazione segue che lo sviluppo di Laurent può considerarsi come una generalizzazione di quello di TAYLOR. Infatti, se la funzione è regolare, non solo nella corona, ma in tutto il cerchio l_1, essa è sviluppabile in una serie di potenze intere e *positive* $\sum_{h=0}^{\infty} b_h (x - c)^h$; ora, poichè questa può considerarsi come un caso particolare di uno sviluppo in serie di potenze positive e negative, dovrà coincidere collo sviluppo di LAURENT, il quale pertanto nel caso considerato avrà nulli tutti i coefficienti di indice negativo.

107. Sia $f(x)$ una funzione analitica uniforme, e scriviamo:

$$X = f(x).$$

Se si rappresenta la variabile complessa X sopra un piano, ad ogni punto del piano x interno al campo di esistenza di $f(x)$ corrisponderà uno ed un solo punto del piano X (non potendosi però escludere che a punti diversi x corrisponda uno stesso punto X); ciò si esprime dicendo che si ha una *rappresentazione* del piano x, o di una sua parte, sul piano X.

Sia x_0 un punto del campo d'esistenza di $f(x)$, e:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (x - x_0)^h$$

l'elemento corrispondente, e sieno x_1, x_2 due punti interni al cerchio di convergenza di $P(x)$. Sarà:

$$X_0 = f(x_0) = a_0,$$
$$X_1 = f(x_1) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (x_1 - x_0)^h,$$
$$X_2 = f(x_2) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h (x_2 - x_0)^h,$$

quindi:

$$\frac{X_1 - X_0}{X_2 - X_0} = \frac{\sum_{h=1}^{\infty} a_h (x_1 - x_0)^h}{\sum_{h=1}^{\infty} a_h (x_2 - x_0)^h},$$

e, supposto $a_1 = f'(x_0) \neq 0$:

$$\frac{X_1 - X_0}{X_2 - X_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} \frac{1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{a_h}{a_1} (x_1 - x_0)^{h-1}}{1 + \sum_{h=2}^{\infty} \frac{a_h}{a_1} (x_2 - x_0)^{h-1}},$$

da cui, facendo tendere x_1 e x_2 a x_0, e quindi X_1 e X_2 a X_0:

$$\lim \frac{X_1 - X_0}{X_2 - X_0} = \lim \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}.$$

Di qui segue, denotando con $\arg x$ l'argomento del numero complesso x:

$$\lim \frac{|X_1 - X_0|}{|X_2 - X_0|} = \lim \frac{|x_1 - x_0|}{|x_2 - x_0|},$$
$$\lim [\arg (X_1 - X_0) - \arg (X_2 - X_0)] =$$
$$= \lim [\arg (x_1 - x_0) - \arg (x_2 - x_0)],$$

ossia:

$$\lim \frac{\overline{X_0 X_1}}{\overline{X_0 X_2}} = \lim \frac{\overline{x_0 x_1}}{\overline{x_0 x_2}},$$

$$\lim \widehat{X_2 X_0 X_1} = = \lim \widehat{x_2 x_0 x_1}.$$

Cioè i triangoli $X_0 X_1 X_2$, $x_0 x_1 x_2$ tendono a divenire simili. Si dice che le figure corrispondenti dei piani x, X sono *simili nelle loro parti infinitesime*, o, più brevemente, che la rappresentazione è *conforme*. Dunque:

Se f (x) *è una funzione analitica uniforme, la relazione* X = f (x) *determina una rappresentazione conforme sul piano* X *di qualunque campo contenuto nel campo d'esistenza di* f (x) *in cui* f′ (x) *non si annulla.*

108. Consideriamo in particolare la funzione lineare:

$$f(x) = \frac{a x + b}{c x + d},$$

dove $a d - b c \neq 0$; essa ha il solo punto singolare $x = -\frac{d}{c}$, e la sua derivata:

$$f'(x) = \frac{a d - b c}{(c x + d)^2}$$

è diversa da zero in tutti i punti al finito del piano. Posto:

$$X = \frac{a x + b}{c x + d}, \tag{1}$$

ne segue:

$$x = \frac{d X - b}{-c X + a}, \tag{2}$$

sicchè ad ogni punto del piano X corrisponde reciprocamente un unico punto del piano x.

Facciamo:

$$x = u + i v \ , \ \bar{x} = u - i v;$$
$$X = U + i V \ , \ \bar{X} = U - i V,$$

dove u, v, U, V sono le coordinate cartesiane dei punti x, X, e p, $\bar{p}$ denotano in generale due numeri complessi coniugati. L'equazione a coefficienti reali:

$$\alpha (u^2 + v^2) + \beta u + \gamma v + \delta = 0$$

rappresenta tutti i cerchi e, per $\alpha = 0$, tutte le rette del piano x; essa può scriversi:

$$\alpha x \bar{x} + \beta \frac{x + \bar{x}}{2} + \gamma \frac{x - \bar{x}}{2 i} + \delta = 0,$$

od anche:

$$\alpha x \bar{x} + \mu x + \bar{\mu} \bar{x} + \delta = 0, \tag{3}$$

dove:

$$\mu = \frac{\beta - i \gamma}{2} \ , \ \bar{\mu} = \frac{\beta + i \gamma}{2}$$

sono due numeri complessi coniugati. Mediante la sostituzione (2) la (3) diviene:

$$\begin{aligned}(\alpha\, d\, \bar d - \mu\, d\, \bar c - \bar\mu\, c\, \bar d + \delta\, c\, \bar c)\, X\, \bar X \\ + (-\alpha\, d\, \bar b + \mu\, d\, \bar a + \bar\mu\, c\, \bar b - \delta\, c\, \bar a)\, X \\ + (-\alpha\, b\, \bar d + \mu\, b\, \bar c + \bar\mu\, a\, \bar d - \delta\, a\, \bar c)\, \bar X \\ + (\alpha\, b\, \bar b - \mu\, b\, \bar a - \bar\mu\, a\, \bar b + \delta\, a\, \bar a) = 0\,,\end{aligned}$$

che ha la stessa forma della (3), giacchè il primo e l'ultimo coefficiente sono reali, e gli altri due sono tra loro coniugati. Dunque:

Una sostituzione lineare (1) *trasforma l'insieme dei cerchi e delle rette del piano* x *nell'insieme dei cerchi e delle rette del piano* X.

109. *Dati due cerchi nei due piani* x, X, *esistono sostituzioni lineari che trasformano il primo cerchio nel secondo e i punti interni al primo nei punti interni al secondo.*

Se g, r sono il centro e il raggio del primo cerchio, G, R quelli del secondo, la sostituzione:

$$X = \frac{R}{r}\, x + \left(G - \frac{R\, g}{r}\right)$$

ha le proprietà volute dal teorema. Si ha infatti:

$$\frac{X - G}{R} = \frac{x - g}{r}\,,$$

quindi, secondochè $|\, X - G\, | \gtreqless R$, anche $|\, x - g\, | \gtreqless r$.

110. Supponiamo il piano X coincidente col piano x. L'equazione:

$$x = \frac{a\,x + b}{c\,x + d},$$

ossia:

$$c\,x^2 + (d - a)\,x - b = 0,$$

determinerà i punti del piano che si trasformano in se stessi; tali punti si dicono *poli* della sostituzione lineare. Risolvendo l'equazione, risulta:

$$x = \frac{a - d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4\,b\,c}}{2\,c};$$

se, come è sempre lecito, supponiamo:

$$a\,d - b\,c = 1, \tag{1}$$

può scriversi:

$$x = \frac{a - d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2\,c}. \tag{2}$$

Consideriamo separatamente il caso in cui le radici sono distinte e quello in cui esse coincidono.

a). Le due radici sono distinte; indichiamole con p, q. Dalle:

$$c\,p^2 + (d - a)\,p - b = 0\ ,\ c\,q^2 + (d - a)\,q - b = 0$$

segue:

$$p = -\frac{b - d\,p}{a - c\,p}, \quad q = -\frac{b - d\,q}{a - c\,q},$$

quindi:

$$X - p = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} - p = \frac{(a - c\,p)\,x + (b - d\,p)}{c\,x + d}$$

$$= \frac{(a - c\,p)\,(x - p)}{c\,x + d},$$

$$X - q = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} - q = \frac{(a - c\,q)\,x + (b - d\,q)}{c\,x + d}$$

$$= \frac{(a - c\,q)\,(x - q)}{c\,x + d},$$

e:

$$\frac{X - p}{X - q} = \theta\,\frac{x - p}{x - q},$$

posto:

$$\theta = \frac{a - c\,p}{a - c\,q} = (a - c\,p)^2 \text{ (*)}.$$

Se $|\,\theta\,| = 1$, la sostituzione lineare si dice *ellittica*, se θ è reale, *iperbolica*, in tutti gli altri casi *lossodromica*.

(*) Si ha:

$$p + q = \frac{a - d}{c}, \quad p\,q = -\frac{b}{c},$$

quindi:

$$(a - c\,p)\,(a - c\,q) = a^2 - a\,c\,(p + q) + c^2\,p\,q =$$
$$= a\,d - b\,c = 1.$$

Se $b = c = 0$, i poli sono l'origine e il punto all'infinito, e la sostituzione prende la forma semplice:

$$X = \theta\, x;$$

se è ellittica, si riduce ad una rotazione intorno all'origine, se iperbolica, ad una omotetia rispetto all'origine, se lossodromica, si compone d'una rotazione e d'una omotetia.

b) Le due radici coincidono; la sostituzione si dice allora *parabolica*. Supposta verificata la (1), dev'essere in questo caso, per la (2):

$$a + d = \pm\, 2;$$

può porsi:

$$a + d = 2,$$

giacchè si può cambiare il segno di tutti i quattro coefficienti della sostituzione, senza che cessi di sussistere la (1). L'unico polo è:

$$r = \frac{a - d}{2\, c} = \frac{1 - d}{c} = \frac{a - 1}{c};$$

si ha di qui:

$$a - c\, r = c\, r + d = 1\,,$$

$$b - d\, r = \frac{b\, c - a\, d + d}{c} = \frac{d - 1}{c} = -\, r,$$

quindi:

$$X - r = \frac{a\, x + b}{c\, x + d} - r = \frac{(a - c\, r)\, x + (b - d\, r)}{c\, (x - r) + (c\, r + d)}$$

$$= \frac{x - r}{c\, (x - r) + 1},$$

e:

$$\frac{1}{X-r} = c + \frac{1}{x-r}.$$

Se r è all'infinito, la sostituzione prende la forma semplice:

$$X = c + x;$$

essa rappresenta una traslazione.

Punti singolari.

111. *Una funzione analitica uniforme non può essere regolare in tutto il piano, compreso il punto all'infinito, senza ridursi ad una costante* (*).

Siccome la circonferenza del cerchio di convergenza passa almeno per un punto singolare (art. 92), una funzione regolare in tutti i punti a distanza finita del piano sarà rappresentata da una serie di potenze positive $P(x)$ avente raggio di convergenza infinito; se essa poi è regolare all'infinito, sarà pure rappresentata in tutto il piano, esclusa l'origine, da una serie di potenze negative $Q(x)$. Ma poichè le due serie debbono coincidere (art. 106), nè la prima potrà contenere potenze positive, nè la seconda potenze negative, sicchè ambedue si ridurranno ad una costante.

(*) Il teorema non sussiste sempre per le funzioni non uniformi; per es. gli *integrali abeliani di prima specie* non hanno punti singolari.

112. Si è definita (art. 100) la funzione analitica $g(x)$ reciproca d'una funzione $f(x)$. Poichè i campi d'esistenza delle due funzioni non sono necessariamente identici (*), un punto p potrà essere singolare per $f(x)$ senza esserlo per $g(x)$.

I punti singolari di una funzione, che non sono tali per la sua reciproca, si dicono *poli* o *punti singolari non essenziali*; gli altri si dicono *punti singolari essenziali.*

Da questa definizione segue che: *I punti singolari essenziali di una funzione sono tali anche per la sua reciproca.* Infatti in un polo della $\dfrac{1}{f(x)}$ la $f(x)$ è regolare.

Se p è un polo della $f(x)$, la funzione reciproca è regolare in p, quindi si ha in un intorno di questo punto:

$$(1) \qquad \frac{1}{f(x)} = Q(x-p) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h (x-p)^h .$$

Se fosse $b_0 \neq 0$, si potrebbe trovare (art. 100) una serie di potenze $P(x-p)$ tale, che:

$$P(x-p)\, Q(x-p) = 1,$$

e la funzione generata da questa serie sarebbe

(*) Per es. x esiste in tutti i punti al finito del piano, mentre $\dfrac{1}{x}$ esiste in tutti questi punti esclusa l'origine, e nel punto all'infinito.

la reciproca di $\frac{1}{f(x)}$, cioè $f(x)$, la quale avrebbe $P(x-p)$ come elemento relativo al punto p, e perciò sarebbe regolare in p, contro l'ipotesi.

Dev'essere dunque $b_0 = 0$. Cioè: *In un polo d'una funzione la sua reciproca ha uno zero* (art. 95). L'ordine (art. 66) dello zero di $\frac{1}{f(x)}$ si dice *ordine* del polo di $f(x)$.

Supposto che il punto p sia uno zero d'ordine n di $\frac{1}{f(x)}$, si ha:

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0 \quad , \quad b_n \neq 0,$$

quindi:

$$Q(x-p) = (x-p)^n \, Q_1(x-p), \tag{2}$$

dove:

$$Q_1(x-p) = b_n + b_{n+1}(x-p) + \ldots$$

è una serie di potenze di $x-p$ col termine costante diverso da zero. Esiste pertanto (articolo 100) un'altra serie $P_1(x-p)$, pure col termine costante diverso da zero, tale che:

$$Q_1(x-p)\, P_1(x-p) = 1;$$

dopo ciò risulta dalle (1), (2):

$$\frac{1}{(x-p)^n f(x)} P_1(x-p) = 1,$$

ossia:

$$(x - p)^n f(x) = P_1(x - p). \tag{3}$$

Dunque: *Se* p *è un polo d'ordine* n *della funzione* f (x), *il prodotto* (x — p)ⁿ f (x) *è regolare e non nullo nel punto* p. In altre parole, una singolarità polare in p può farsi sparire moltiplicando la funzione per un'opportuna potenza di $x - p$; e l'esponente della minima potenza che dà luogo a tale risultato è l'ordine del polo.

Posto:

$$P_1(x - p) = c_0 + c_1(x - p) + c_2(x - p)^2 + \ldots,$$

segue dalla (3) per ogni punto del cerchio di convergenza di questa serie, escluso il punto p:

$$f(x) = \frac{c_0}{(x - p)^n} + \frac{c_1}{(x - p)^{n-1}} + \ldots$$

$$+ \frac{c_{n-1}}{x - p} + c_n + c_{n+1}(x - p) + \ldots$$

Cioè: *Una funzione analitica è rappresentabile in un certo intorno di un suo polo* p, *escluso il polo stesso, mediante una serie di potenze positive e negative di* x — p, *dove le potenze negative sono in numero finito*. È questo un caso speciale del teorema di LAURENT (art. 106); e la corona circolare col centro in p è compresa tra il massimo cerchio non contenente nell'interno altri punti singolari (*) e un cerchio di raggio arbitrariamente piccolo.

La somma dei termini contenenti potenze negative di $x - p$ si dice *caratteristica* del polo; essa è un polinomio in $\frac{1}{x - p}$ di grado n, se n è l'ordine del polo. Il coefficiente della prima potenza di $\frac{1}{x - p}$ si dice *residuo* della funzione relativo al polo p; il suo prodotto per $2\pi i$ è eguale all'integrale della funzione esteso ad una curva semplice chiusa non contenente altri punti singolari che p, come si dimostra molto facilmente. Risulta pure dalle cose dette, che si può sempre assegnare un intorno di un polo, in tutti i punti del quale, tranne il polo stesso, la funzione è regolare; ossia che un polo non può essere punto limite dell'insieme dei punti singolari. E poichè tale insieme è chiuso (art. 96), può concludersi che: *I punti limiti dell'insieme dei punti singolari sono punti singolari essenziali*; e che *i poli formano un insieme isolato.*

113. Siccome i poli d'una funzione analitica sono gli zeri della sua reciproca, dalle proprietà dei poli possono dedursi altrettante proprietà degli zeri. Così:

Uno zero non può essere punto limite dell'insieme degli zeri; cioè: *Gli zeri formano un insieme isolato.* Inoltre:

(*) È il cerchio di convergenza della serie $P_1(x - p)$.

I punti limiti dell'insieme degli zeri sono punti singolari essenziali. Infatti essi, come punti limiti dell'insieme dei poli della funzione reciproca, sono punti singolari essenziali per questa, e quindi anche per la funzione primitiva.

114. *Se* p *è un polo d'una funzione analitica, preso un numero positivo arbitrariamente grande* C, *può trovarsi un intorno del punto* p, *in tutti i punti del quale* $|f(x)| > C$.

È per questa ragione che i poli vengono anche chiamati *infiniti* o *punti d'infinito*.

In un certo intorno di p si ha (art. 112):

$$(x-p)^n f(x) = P_1(x-p) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (x-p)^h,$$

dove $c_0 \neq 0$. Per la continuità della funzione $P_1(x-p)$, può trovarsi un cerchio col centro in p di raggio ϱ', in tutti i punti interni del quale sia:

$$|P_1(x-p) - c_0| < \frac{|c_0|}{2},$$

da cui:

$$|(x-p)^n f(x)| = |P_1(x-p)| > \frac{|c_0|}{2};$$

d'altra parte, preso ϱ'' tale, che sia:

$$\varrho''^n < \frac{|c_0|}{2\,C},$$

si ha, in tutto il cerchio di raggio ϱ'' col centro in p:

$$|x - p|^n < \frac{|c_0|}{2\,C}.$$

Ne segue, in tutti i punti interni al minore dei due cerchi ϱ', ϱ'':

$$|f(x)| > C.$$

115. *Se* p *è un polo d'ordine* n *per la funzione* f (x), *esso è un polo d'ordine* n + 1 *per la funzione* f′ (x).

Derivando (artt. 75, 102) l'eguaglianza:

$$(x - p)^n f(x) = P_1(x - p),$$

risulta:

$$(x - p)^n f'(x) + n(x - p)^{n-1} f(x) = P_1'(x - p),$$

e moltiplicando per $x - p$:

$$(x - p)^{n+1} f'(x) + n(x - p)^n f(x) =$$
$$= (x - p)\,P_1'(x - p).$$

Il secondo membro tende a zero al tendere di x a p, mentre il secondo termine del primo membro tende ad un limite finito e diverso da zero, quindi il prodotto $(x - p)^{n+1} f'(x)$ sarà regolare e diverso da zero in p, ciò che mostra che $f'(x)$ ha in p un polo d'ordine $n + 1$.

116. Per analogia dimostriamo qui il seguente teorema:

Se la funzione f (x) *ha uno zero d'ordine* n *nel punto* p, f′ (x) *ha nel punto stesso uno zero d'ordine* n — 1.

Per l'ipotesi del teorema si ha:

$$f(x) = (x - p)^n \, Q(x - p),$$

dove $Q(x - p)$ è una serie di potenze che non si annulla in p. Derivando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - p)^n \, Q'(x - p) + n\,(x - p)^{n-1} \, Q(x - p) \\ &= (x - p)^{n-1} \left[(x - p)\, Q'(x - p) + n\, Q(x - p)\right], \end{aligned}$$

dove la funzione tra parentesi quadre è regolare e diversa da zero in p.

Segue di qui che: *Se una funzione ha uno zero d'ordine* n *nel punto* p, *nel punto stesso si annullano le sue derivate prima, seconda,...,* (n — 1)-*esima, mentre non s'annulla la derivata* n-*esima.*

Il reciproco di questo teorema risulta immediatamente dallo sviluppo in serie di Taylor.

117. Importa esaminare come si modifichino le definizioni e i teoremi precedenti per il punto all'infinito.

Anche in questo caso la funzione reciproca deve annullarsi, cioè posto, per un certo intorno del punto all'infinito:

$$\frac{1}{f(x)} = Q\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{b_h}{x^h},$$

dev'essere $b_0 = 0$. Supposto:

$$b_0 = b_1 = \ldots = b_{n-1} = 0 \;, \; b_n \neq 0,$$

risulta:

$$\frac{1}{x^n} f(x) = P_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

dove $P_1\left(\frac{1}{x}\right)$ è una serie di potenze positive di $\frac{1}{x}$ col termine costante diverso da zero. Dunque: *Se* f (x) *ha nel punto all'infinito un polo d'ordine* n, *il prodotto* $\frac{1}{\mathrm{x}^{\mathrm{n}}}$ f (x) *è regolare e non nullo in questo punto*; cioè la singolarità si distrugge dividendo per x^n. Ed anche: *Se* f (x) *ha un polo nel punto all'infinito, essa può rappresentarsi in un intorno di questo punto mediante una serie di potenze positive e negative di x, dove le potenze positive sono in numero finito.* La somma dei termini contenenti potenze positive di x costituisce la *caratteristica* del polo; essa è un polinomio di grado n in x col termine costante nullo, se n è l'ordine.

Anche qui si dice *residuo* il coefficiente della prima potenza negativa di x, preso però con segno contrario; il suo prodotto per $2\pi i$ è eguale all'integrale della funzione esteso ad una curva semplice chiusa che non lascia all'esterno altri punti singolari oltre il punto all'infinito, percorsa in senso positivo rispetto al campo esterno, cioè in senso negativo rispetto all'interno.

Se f (x) *ha un polo d'ordine* n *nel punto all'infinito,* f' (x) *ha nel punto stesso un polo d'ordine* n — 1 (*).

(*) In particolare, se $f(x)$ ha nel punto all'infinito

Derivando l'eguaglianza:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{n-h},$$

dove $a_0 \neq 0$, risulta:

$$f'(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (n-h)\, a_h x^{n-h-1} =$$

$$= x^{n-1} \sum_{h=0}^{\infty} (n-h)\, a_h x^{-h},$$

che dimostra l'asserto.

Se f (x) *ha uno zero d'ordine* n *nel punto all'infinito,* f′ (x) *ha uno zero d'ordine* n + 1 *nel punto stesso.*

Derivando l'eguaglianza:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^{-n-h},$$

dove $a_0 \neq 0$, risulta:

$$f'(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (-n-h)\, a_h x^{-n-h-1} =$$

$$= x^{-(n+1)} \sum_{h=0}^{\infty} (-n-h) a_h x^{-h},$$

che dimostra l'asserto.

---

un polo del primo ordine, $f'(x)$ è regolare in questo punto; il punto all'infinito appartiene al càmpo di esistenza di $f'(x)$, e non a quello di $f(x)$. V. la nota all'art. 101.

Si riconosce pure facilmente che: *Se una funzione è regolare e diversa da zero nel punto all'infinito, la sua derivata ha in quel punto uno zero d'ordine* ≥ 2.

118. Sia ora p un punto singolare (essenziale o no) *isolato*, cioè che non sia punto limite dell'insieme dei punti singolari della funzione. Applicando il teorema di LAURENT alla corona circolare col centro in p racchiusa da un cerchio arbitrariamente piccolo e dal massimo cerchio non contenente altri punti singolari oltre p, si ha uno sviluppo della forma:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x-p)^h.$$

Cioè: *In un intorno d'un punto singolare isolato* p, *escluso il punto stesso, la funzione è sviluppabile in serie di potenze positive e negative di* x — p.

Se p è un polo, esso è sempre isolato, e il numero dei termini contenenti potenze negative è finito, come si è trovato; e reciprocamente, se il numero delle potenze negative è finito, la singolarità si può far scomparire mediante moltiplicazione per un'opportuna potenza di $x - p$, e perciò è una singolarità polare. Quindi:

Se p *è un punto singolare* **essenziale** *isolato, la funzione può svilupparsi in un certo intorno di* p, *escluso questo punto, in una serie di potenze positive e negative di* x — p, *dove le po-*

tenze negative sono in numero infinito. Ed analogamente: *Se una funzione ha nel punto all'infinito una singolarità* **essenziale** *isolata, essa può svilupparsi esternamente ad un certo cerchio col centro nell'origine in una serie di potenze positive e negative di* x, *dove le potenze positive sono in numero infinito.*

La parte dello sviluppo contenente potenze negative nel primo caso, positive nel secondo, si dice ancora *caratteristica*, e il coefficiente di $\frac{1}{x-p}$, o quello di $\frac{1}{x}$ col segno cambiato, si dice *residuo*. La caratteristica è una serie convergente in tutto il piano escluso il punto singolare.

119. *Se una funzione analitica uniforme* (*) *ha nel punto* p, *al finito o all'infinito, una singolarità essenziale, lo stesso ha luogo per la sua derivata.*

Poichè i punti singolari, salvo al più il punto all'infinito, sono comuni ad una funzione ed alla sua derivata, se p è punto limite dell'insieme dei punti singolari di $f(x)$, esso ha la stessa proprietà rispetto a $f'(x)$, e quindi (art 112) è un punto singolare essenziale per quest'ultima funzione.

(*) Il teorema non è sempre vero per le funzioni non uniformi. Così $\lg x$ ha in $x = 0$ una singolarità essenziale, mentre la sua derivata $\frac{1}{x}$ ha in questo punto un polo.

Nel caso contrario, $f(x)$ è rappresentabile mediante uno sviluppo in serie di potenze positive e negative di $x - p$ (o di x, se $p = \infty$), dove le potenze negative (positive, se $p = \infty$) sono in numero infinito (v. art. prec.). Derivando, si ottiene uno sviluppo della stessa forma, donde segue che p è punto singolare essenziale anche per $f'(x)$.

120. *Se* p *è un punto singolare essenziale, il quale non sia punto limite dell'insieme dei punti singolari* **essenziali**, *una funzione uniforme* (*) *si avvicina indefinitamente a qualunque valore prefisso in qualunque intorno di* p (**teorema di Casorati**) (**).

Cioè: Presi due numeri reali e positivi qualunque C, σ, un numero reale o complesso qualunque b, ed un cerchio di raggio arbitrariamente piccolo ϱ col centro in p, possono sempre trovarsi entro il cerchio ϱ due punti x_1, x_2 tali, che sia:

$$|f(x_1)| > C \quad , \quad |f(x_2) - b| < \sigma.$$

(*) Il teorema non è sempre vero per funzioni non uniformi. Così, al tendere di x a zero, la parte reale di $\lg x$ tende a $-\infty$, sicchè il numero b, di cui si parla più innanzi, non può essere scelto in modo affatto arbitrario.

(**) F. Casorati, *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, Pavia, 1868, paragr. 88; *Rend. Ist. Lomb.*, S. II, T. I, 1868, p. 123-125. V. anche: E. Bertini, *Commemorazione del Comm. Prof.* Felice Casorati, in *Rend. Ist. Lomb.*, S. II, T. 25, 1892, p. 1206-1236. Il teorema viene da qualche autore inesattamente chiamato *teorema di* Weierstrass.

•Più semplicemente, ma meno esattamente: Nell'intorno d'un punto singolare essenziale la funzione è completamente indeterminata.

Se p è punto limite dell'insieme dei poli della funzione, detto c uno dei poli contenuti entro il cerchio ϱ, esisterà un intorno di c, che potrà supporsi tutto interno a ϱ, per tutti i punti del quale:

$$| f(x) | > C.$$

Se p è isolato, si ha in un intorno di p:

$$f(x) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} a_h (x - p)^h.$$

Preso comunque un numero positivo τ, può trovarsi un cerchio di raggio ϱ col centro in p, per tutti i punti del quale sia:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} a_h (x - p)^h \right| < \tau;$$

quindi, se in tutti i punti di un cerchio di raggio ϱ', che può sempre supporsi minore di ϱ, fosse:

$$| f(x) | \leq C,$$

sarebbe pure:

$$\left| \sum_{h=0}^{-\infty} a_h (x - p)^h \right| < C + \tau.$$

Ora la serie testè scritta converge in tutto il piano, eccettuato il punto p (art. 118); quindi, per l'ultima formola dell'art. 71, si avrebbe per ogni $\varrho'' < \varrho'$ e per $h \leq 0$:

$$| a_h | \leq \frac{C + \tau}{\varrho''^h},$$

da cui $a_h = 0$ per ogni $h < 0$. La funzione sarebbe dunque regolare in p, contro l'ipotesi. Resta così dimostrata la prima parte del teorema; e, con ovvie modificazioni, la dimostrazione si estenderebbe al caso di $p = \infty$.

Osserviamo ora che, se p è un punto singolare essenziale per $f(x)$, lo è pure per $f(x) - b$, e quindi, per la definizione stessa di singolarità essenziale, per $\frac{1}{f(x) - b}$, sicchè, preso $C = \frac{1}{\sigma}$, in ogni intorno di p esistono punti in cui:

$$\left| \frac{1}{f(x) - b} \right| > C,$$

ossia in cui:

$$| f(x) - b | < \sigma.$$

Così il teorema è completamente dimostrato.

121. Il teorema di Casorati mette in luce la differenza tra il modo di comportarsi di una funzione nell'intorno di un polo e nell'intorno di un punto singolare essenziale.

Se p è un polo, scelto un numero positivo C qualunque, può trovarsi (art. 114) un intorno di p, in tutti i punti del quale $| f(x) | > C$. Invece, se p è un punto singolare essenziale (colla restrizione stabilita nel teorema), in ogni intorno di p vi sono punti x in cui $| f(x) | > C$, ma vi sono anche altri punti, in cui $f(x)$ si avvicina indefinitamente a qualunque altro valore.

Dal teorema di CASORATI e da quelli degli artt. 111 e 114 risulta che: *Una funzione uniforme, il cui modulo ammette in tutto il piano un massimo finito, si riduce ad una costante.*

Le funzioni razionali e le espressioni aritmetiche.

122. È interessante esaminare qual posto prendano nella teoria delle funzioni analitiche le più semplici funzioni uniformi che figurano nell'Algebra.

Consideriamo anzitutto una funzione razionale intera:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Essa può considerarsi come una serie di potenze con raggio di convergenza infinito, quindi rappresenta completamente una funzione analitica uniforme non avente alcuna singolarità a distanza finita. Il punto all'infinito dovrà (art. 111) essere singolare per questa funzione. Considerando poi che:

$$\frac{1}{x^n} f(x) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \ldots + a_n$$

non contiene potenze positive di x, si conclude che il punto all'infinito è un polo d'ordine n.

Dunque:

Un polinomio di grado n *è una funzione analitica uniforme non avente altra singolarità che un polo d'ordine* n *all'infinito.*

Reciprocamente sia $f(x)$ una funzione analitica uniforme non avente altra singolarità che un polo di ordine n all'infinito. Se:

$$a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

è la caratteristica del polo (art. 117), la differenza:

$$f(x) - (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n),$$

non avendo alcuna singolarità, sarà (art. 111) una costante a_0, donde:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Cioè: *Una funzione non avente altra singolarità che un polo d'ordine* n *all'infinito è un polinomio di grado* n.

123. Dalle cose dette risulta una dimostrazione semplicissima del teorema fondamentale dell'Algebra.

Abbiasi l'equazione algebrica:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0.$$

Poichè la funzione $f(x)$ ha un polo nel punto ∞, $\frac{1}{f(x)}$ avrà uno zero in questo punto, e quindi (art. 111) avrà almeno un punto singolare c a distanza finita; ma questo non può essere che un polo, giacchè in esso $f(x)$ è regolare, quindi (art. 112) $f(c) = 0$. Dunque l'equazione $f(x)=0$ ha almeno una radice.

Di qui si deduce in modo noto la decomponibilità di un polinomio in fattori lineari.

124. Abbiasi ora una funzione razionale fratta:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n},$$

che possiamo supporre ridotta ai minimi termini, e dove $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$. Se $c_1, c_2, \ldots, c_r$ sono le radici del polinomio $\psi(x)$, multiple rispettivamente secondo $k_1, k_2, \ldots, k_r$, sicchè:

$$\psi(x) = b_n (x - c_1)^{k_1} (x - c_2)^{k_2} \ldots (x - c_r)^{k_r},$$
$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n,$$

$\psi(x)$ sarà regolare in tutti i punti al finito del piano e avrà un polo d'ordine n all'infinito, e $\frac{1}{\psi(x)}$ sarà regolare dappertutto, tranne nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_r$, che saranno per questa funzione poli degli ordini $k_1, k_2, \ldots, k_r$. Poichè inoltre $\varphi(x)$ è regolare in tutti i punti del piano a distanza finita, e non s'annulla in $c_1, c_2, \ldots, c_r$, il prodotto $\varphi(x)\dfrac{1}{\psi(x)}$, ossia $f(x)$, sarà regolare in tutti i punti a distanza finita tranne i punti $c_1, c_2, \ldots, c_r$, e il prodotto $(x - c_h)^{k_h} f(x)$ sarà regolare nel punto c_h. Pertanto la funzione analitica $f(x)$ non ha al finito altre singolarità che i poli $c_1, c_2, \ldots, c_r$, degli ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Per esaminare il comportamento della funzione nel punto all'infinito, poniamo $x = \dfrac{1}{x_1}$. Sarà:

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_1^{\,2}} + \ldots + \dfrac{a_m}{x_1^{\,m}}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x_1} + \dfrac{b_2}{x_1^{\,2}} + \ldots + \dfrac{b_n}{x_1^{\,n}}} =$$

$$= x_1^{\,n-m}\,\frac{a_m + a_{m-1}x_1 + \ldots + a_0 x_1^{\,m}}{b_n + b_{n-1}x_1 + \ldots + b_0 x_1^{\,n}}.$$

I due termini di quest'ultima frazione sono funzioni regolari e non nulle per $x_1 = 0$, quindi lo stesso può dirsi della frazione stessa; l'altro fattore $x_1^{\,n-m}$ è regolare e nullo in questo punto per $n > m$, si riduce ad 1 per $n = m$, ha un polo d'ordine $m - n$ per $n < m$. Quindi la funzione considerata per $x = \infty$ è regolare od ha un polo; e può concludersi che essa non ha altre singolarità che dei poli.

Reciprocamente, una funzione analitica uniforme $f(x)$ non abbia altre singolarità che dei poli; questi dovranno essere in numero finito, giacchè nel caso contrario il loro insieme ammetterebbe almeno un punto limite (art. 35), il quale sarebbe un punto singolare essenziale (art. 112). Sieno i suoi poli al finito $c_1, c_2, \ldots, c_r$, degli ordini rispettivi $k_1, k_2, \ldots, k_r$. La funzione $f(x)(x-c_1)^{k_1}$ sarà regolare nel punto c_1, e avrà in $c_2, \ldots, c_r$ le stesse singolarità di $f(x)$; la funzione $f(x)(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}$ sarà regolare in c_1 e in c_2, e avrà negli altri punti c le stesse singolarità di $f(x)$; e così via. Infine la funzione:

$$f(x)(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r}=\varphi(x)$$

non avrà alcuna singolarità al finito; e, siccome $f(x)$ è regolare od ha una singolarità polare all'infinito, ed hanno pure una singolarità polare all'infinito i polinomi $(x-c_1)^{k_1}, (x-c_2)^{k_2}, \ldots, (x-c_r)^{k_r}$, la $\varphi(x)$ all'infinito sarà regolare od avrà un polo (*). La $\varphi(x)$ è dunque un polinomio, e la:

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r}}$$

è una funzione razionale fratta.

(*) Posto $k_1+k_2+\ldots+k_r=j$, se $f(x)$ ha per $x=\infty$ un polo d'ordine s, $\varphi(x)$ ha un polo d'ordine $s+j$; se $f(x)$ è regolare e non nulla, $\varphi(x)$ ha un polo d'ordine j; se $f(x)$ ha uno zero d'ordine t, secondochè $t \lesseqgtr j$, $f(x)$ ha un polo d'ordine $j-t$, è regolare e non nulla, od ha uno zero d'ordine $t-j$.

Concludendo: *Le funzioni analitiche uniformi aventi soltanto singolarità polari sono tutte e sole le funzioni razionali* (*).

125. Sia $f(x)$ una funzione razionale avente i poli $c_1, c_2, \ldots, c_r$ degli ordini $k_1, k_2, \ldots, k_r$, e il polo ∞ dell'ordine s; se il punto all'infinito è regolare, si porrà $s = 0$. Sieno:

$$P_1\left(\frac{1}{x - c_1}\right), \quad P_2\left(\frac{1}{x - c_2}\right), \ldots, P_r\left(\frac{1}{x - c_r}\right)$$

le caratteristiche dei poli $c_1, c_2, \ldots, c_r$; $P_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ sarà un polinomio di grado k_h in $\frac{1}{x - c_h}$, cioè una funzione di x non avente altra singolarità che un polo d'ordine k_h nel punto c_h. La differenza:

$$f(x) - \sum_{h=1}^{r} P_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$$

non avrà alcuna singolarità al finito, e potrà al più avere un polo all'infinito, cioè sarà un polinomio $\omega(x)$, che potrà anche ridursi ad una costante. Ne segue:

$$f(x) = \omega(x) + \sum_{h=1}^{r} P_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right),$$

(*) Nel campo delle funzioni non uniformi vi sono altre funzioni aventi soltanto singolarità polari; tali le *funzioni algebriche*, e gli *integrali abeliani di seconda specie*.

che dà la decomposizione di una funzione razionale in *frazioni semplici.*

126. Diciamo *espressione aritmetica* il risultato di infinite operazioni razionali. Il tipo più comune di espressioni aritmetiche è una serie di infinite funzioni razionali; e non è inutile osservare che il campo di convergenza di una tal serie può non essere connesso. Così p. es. il campo di convergenza della serie:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{x^h + x^{-h}}$$

è composto dell'interno e dell'esterno del cerchio unitario (esclusa la circonferenza).

Sia dapprima x un punto della circonferenza; potrà scriversi:

$$x = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi,$$

donde:

$$\frac{1}{x^h + x^{-h}} = \frac{1}{2 \cos h \varphi},$$

sicchè i moduli dei termini della serie sono tutti $\geq \frac{1}{2}$, e quindi la serie non converge.

Sia ora x esterno al cerchio unitario, cioè:

$$\xi = | x | > 1;$$

potrà prendersi n abbastanza grande perchè sia, per ogni $h \geq n$:

$$\xi^{2h-1} > \frac{1}{\xi - 1},$$

donde:

$$\xi^{2h} - \xi^{2h-1} - 1 > 0,$$

e quindi:

$$\xi^h - \xi^{-h} > \xi^{h-1}.$$

Ora:

$$|x^h + x^{-h}| \geq \xi^h - \xi^{-h},$$

quindi:

$$\frac{1}{|x^h + x^{-h}|} \leq \frac{1}{\xi^h - \xi^{-h}} < \frac{1}{\xi^{h-1}},$$

e:

$$\sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{|x^h + x^{-h}|} < \sum_{h=n}^{\infty} \frac{1}{\xi^{h-1}},$$

sicchè la serie è convergente.

Per il caso di un punto x interno al cerchio unitario, basta osservare che la serie resta invariata se si cambia x in $\frac{1}{x}$.

Risulta anche facilmente dalla precedente dimostrazione, che la serie è equiconvergente in qualunque cerchio col centro nell'origine di raggio minore di 1, e fuori di qualunque cerchio col centro nell'origine di raggio maggiore di 1.

127. Sia:

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x)$$

un'espressione aritmetica, la quale sia equiconvergente in un certo campo C. Se c è un punto interno del campo, e ϱ è il raggio del massimo cerchio di centro c contenuto in C, entro il cerchio ϱ le funzioni razionali $f_h(x)$, le quali non possono avere poli nel campo C, saranno sviluppabili in serie di potenze $P_h(x-c)$; e, applicando alla somma:

$$\sum_{h=1}^{\infty} P_h(x-c)$$

il lemma di WEIERSTRASS (art. 72), si avrà nel cerchio ϱ:

$$\varphi(x) = P(x-c).$$

Se d è un punto interno al cerchio ϱ, si otterrà analogamente:

$$\varphi(x) = Q(x-d)$$

per i punti di un certo intorno di d. D'altra parte in un certo intorno di d si ha:

$$\varphi(x) = P(x-c \mid d-c),$$

sicchè:

$$Q(x-d) = P(x-c \mid d-c),$$

donde segue (art. 67) che le due serie sono identiche, cioè che $Q(x-d)$ è la serie dedotta da $P(x-c)$ rispetto al punto d.

Proseguendo il ragionamento allo stesso modo, può concludersi che: *Se* φ (x) *è un'espressione aritmetica equiconvergente in un campo* C, *e* *questo campo è connesso, esiste una funzione analitica* f (x), *i cui elementi hanno lo stesso valore di* φ (x) *in tutti i punti del campo* C; o, come può dirsi, l'espressione aritmetica $\varphi(x)$ *rappresenta* la funzione analitica $f(x)$ in tutto il campo C.

128. Se un'espressione aritmetica è equiconvergente in due campi connessi ma tra loro separati C, D (cfr. art. 126), esisterà una funzione analitica $f(x)$ che essa rappresenta in C ed una $g(x)$ che essa rappresenta in D. Supposto che, oltre C, anche D sia contenuto nel campo d'esistenza di $f(x)$, si domanda se $g(x)$ coinciderà necessariamente con $f(x)$. E, più generalmente, si può domandarsi se tra $f(x)$ e $g(x)$ esista qualche relazione necessaria.

Alla discussione di queste domande sono dedicati gli articoli che seguono.

129. Premettiamo un teorema relativo alle serie (*):

Sia $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ *una serie a termini reali o complessi, convergente o divergente, ma non indeterminata, o, se indeterminata, tale che sia* $\lim_{n=\infty} \left| \sum_{h=1}^{n} u_h \right| = \infty$. *Presa una successione di numeri interi positivi crescenti* $m_1, m_2, \ldots$, *la serie:*

$$(1) \quad \sum_{h=1}^{\infty} v_h = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{u_{m_h+1} + u_{m_h+2} + \ldots + u_{m_{h+1}}}{S_{m_h} S_{m_{h+1}}},$$

(*) F. D'Arcais, *Riv. di mat.*, T. 5, 1895, p. 186-189.

dove $S_n = \sum_{h=1}^{n} u_h$, *è sempre convergente, ed ha per somma* $\frac{1}{S_{m_1}}$, *se la serie data è divergente, o se* $\lim_{n=\infty} |S_n| = \infty$, $\frac{1}{S_{m_1}} - \frac{1}{S}$, *se la serie data è convergente ed ha per somma* S (*).

Abbiasi ora un'espressione aritmetica:

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} f_h(x),$$

la quale sia equiconvergente in un campo *C*, e in un campo *D* sia invece divergente, oppure indeterminata ma in modo che sia:

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_{h=1}^{n} f_h(x) \right| = \infty.$$

L'espressione aritmetica:

$$\psi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} g_h(x),$$

(*) La (1) può scriversi:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{S_{m_{h+1}} - S_{m_h}}{S_{m_h} S_{m_{h+1}}} = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{S_{m_h}} - \frac{1}{S_{m_{h+1}}}\right],$$

sicchè:

$$\sum_{h=1}^{n} v_h = \frac{1}{S_{m_1}} - \frac{1}{S_{m_{n+1}}},$$

donde segue immediatamente il teorema.

dove:

$$g_h(x) = \frac{1}{S_{m_h}(x)} - \frac{1}{S_{m_{h+1}}(x)},$$

e:

$$S_n(x) = \sum_{h=1}^{n} f_h(x),$$

sarà convergente tanto in C che in D, e avrà per somma nei due campi rispettivamente:

$$\frac{1}{S_{m_1}(x)} - \frac{1}{f(x)}, \quad \frac{1}{S_{m_1}(x)},$$

essendo $f(x)$ la funzione analitica rappresentata da $\varphi(x)$ in C. Ora $\dfrac{1}{S_{m_1}(x)}$, essendo una funzione razionale, è (art. 124) una funzione analitica avente per campo d'esistenza l'intero piano eccettuato un numero finito di punti, sicchè la espressione aritmetica $\psi(x)$ rappresenta in D la funzione analitica $\dfrac{1}{S_{m_1}(x)}$, in C la funzione analitica essenzialmente diversa $\dfrac{1}{S_{m_1}(x)} - \dfrac{1}{f(x)}$, sebbene il campo d'esistenza di $\dfrac{1}{S_{m_1}(x)}$ contenga il campo C, ad eccezione tutt'al più di un numero finito di punti.

Con ciò è risolta, in senso negativo, la prima delle questioni poste nell'articolo precedente.

Sia p. es.:

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} x^{h-1}.$$

In questo caso:

$$S_n(x) = \sum_{h=1}^{n} x^{h-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x},$$

quindi:

$\lim\limits_{n=\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ entro il cerchio unitario (campo C),

$\lim\limits_{n=\infty} |S_n(x)| = \infty$ fuori del cerchio unitario (campo D).

Ne segue, che l'espressione aritmetica:

$$\psi(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1 - x}{1 - x^{m_h}} - \frac{1 - x}{1 - x^{m_{h+1}}}\right] =$$

$$= (1 - x) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{m_h}(1 - x^{m_{h+1} - m_h})}{(1 - x^{m_h})(1 - x^{m_{h+1}})}$$

è convergente tanto in C che in D, ed ha per somma:

$$\frac{1 - x}{1 - x^{m_1}} - (1 - x) = \frac{x^{m_1}(1 - x)}{1 - x^{m_1}} \text{ in } C,$$

$$\frac{1 - x}{1 - x^{m_1}} \text{ in } D.$$

Prendiamo in particolare $m_h = 2^{h-1}$; l'espressione aritmetica (dove si è soppresso il fattore $1-x$):

$$\psi(x)=\sum_{h=1}^{\infty}\frac{x^{2^{h-1}}}{1-x^{2^h}}$$

avrà per somma $\dfrac{x}{1-x}$ in C e $\dfrac{1}{1-x}$ in D, e l'espressione aritmetica:

$$\omega(x)=\frac{1+x}{1-x}-2\,\psi(x)$$

avrà per somma $+1$ in C e -1 in D (*).

130. Sieno $C_1, C_2, \ldots, C_n$ n cerchi separati, e denotiamo con C_0 la parte del piano ad essi esterna. Prese ad arbitrio $n+1$ espressioni arit-

---

(*) Ciò si verifica direttamente, osservando che può scriversi:

$$\omega(x)=\frac{1+x}{1-x}+\sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1+x^{2^h}}{1-x^{2^h}}-\frac{1+x^{2^{h-1}}}{1-x^{2^{h-1}}}\right].$$

La serie $\omega(x)$ fu indicata nel 1881 da J. Tannery a Weierstrass, che aveva costruito un esempio meno semplice (v.: K. Weierstrass, *Monatsber. Ak. Berlin*, 1880, p. 719-743; 1881, p. 228-230; *Math. Werke*, T. 2, p. 224-233; trad. franc. in *Bull. des sc. math.*, S. II, T. 5 ,1881, p. 157-183).

La serie $\psi(x)$ era stata già considerata nel 1876 da E. Schröder (K. Weierstrass, *l. c.*). V. anche: A. Pringsheim, *Math. Ann.*, T. 22, 1883, p. 109-116; Ph. L. v. Seidel, *Journ. f. Math.*, T. 73, 1871, p. 297; O. Schlömilch, *Arch. der Math.*, T. 10, 1847, p. 45.

metiche $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ equiconvergenti rispettivamente nei campi $C_0, C_1, \ldots, C_n$, esse rappresenteranno in questi campi $n+1$ funzioni analitiche $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$, che possiamo considerare pure come arbitrarie. Ora vogliamo mostrare che si può costruire una espressione aritmetica unica, la quale coincide con $\varphi_r(x)$ nel campo C_r, e quindi rappresenta nei campi $C_0, C_1, \ldots, C_n$ rispettivamente le $n+1$ funzioni analitiche $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$.

Con una sostituzione (art. 109) della forma:

$$X = p_h x + q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

possiamo trasformare il campo C_h nell'interno del cerchio unitario del piano X. Ne segue che l'espressione aritmetica $\omega(p_h x + q_h)$ vale $+1$ entro il campo C_h e -1 fuori di esso; quindi l'espressione aritmetica:

$$\varphi_0(x) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{n} \Big\{ [\omega(p_h x + q_h) + 1]\, [\varphi_h(x) - \varphi_0(x)] \Big\}$$

coincide con $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ rispettivamente nei campi $C_0, C_1, \ldots, C_n$, e perciò rappresenta in questi campi le funzioni analitiche $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$.

Dunque tra le funzioni analitiche rappresentate da una stessa espressione aritmetica in parti separate del campo di convergenza di questa non esiste alcuna relazione necessaria.

131. A risultati analoghi si giunge ricorrendo, invece che alle serie, alle frazioni continue (*).

Abbiasi la frazione continua:

$$\alpha = p + q - \cfrac{p\,q}{p + q - \cfrac{p\,q}{p + q - \dots}},$$

dove p e q sono due numeri di modulo diverso. Se α_n è la frazione approssimata n-esima, sarà:

$$\alpha_n = p + q - \frac{p\,q}{\alpha_{n-1}},$$

donde:

$$\alpha_n - p = \frac{q}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - p),$$

$$\alpha_n - q = \frac{p}{\alpha_{n-1}}(\alpha_{n-1} - q),$$

e quindi;

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \frac{q}{p}\,\frac{\alpha_{n-1} - p}{\alpha_{n-1} - q}.$$

Di qui, osservando che $\alpha_1 = p + q$, segue:

$$\frac{\alpha_n - p}{\alpha_n - q} = \left(\frac{q}{p}\right)^n,$$

e quindi:

$$\alpha = \lim_{n=\infty} \alpha_n = \begin{cases} p \\ q \end{cases} \text{secondochè } |\,p\,| \gtrless |\,q\,|.$$

(*) M. Lerch; *Bull. des sc. math.*, S. II, T. 10, 1886, p. 45-49.

Del resto è facile dimostrare che:

$$a_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p^n - q^n},$$

donde segue immediatamente il risultato ottenuto.

Sieno ora $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due funzioni razionali. L'espressione aritmetica:

$$\lambda(x) = \varphi(x) + \psi(x) - \\ - \frac{\varphi(x)\,\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) - \frac{\varphi(x)\,\psi(x)}{\varphi(x) + \psi(x) - \ldots}}$$

rappresenterà la funzione analitica $\varphi(x)$ nelle parti del piano in cui:

$$|\varphi(x)| > |\psi(x)|,$$

la funzione analitica $\psi(x)$ in quelle in cui:

$$|\varphi(x)| < |\psi(x)| \text{ (*)}.$$

(*) Posto $x = u + iv$, la linea:

$$|\varphi(u + iv)| = |\psi(u + iv)|$$

separa le parti del piano in cui $|\varphi(x)| > |\psi(x)|$ da quelle in cui $|\varphi(x)| < |\psi(x)|$. Se:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}, \quad \psi(x) = \frac{\psi_1(x)}{\psi_2(x)},$$

dove $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ sono polinomi, e se si pone:

$$\varphi_1(x) = \mu_1(u, v) + i\nu_1(u, v), \varphi_2(x) = \mu_2(u, v) + i\nu_2(u, v),$$

Facciamo p. es.:

$$\varphi(x) = x - 1 \ , \ \psi(x) = x + 1.$$

La linea $|\varphi(x)| = |\psi(x)|$ è il luogo dei punti equidistanti dai punti ± 1, cioè l'asse imaginario; e l'espressione aritmetica:

$$\lambda(x) = 2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \cfrac{x^2 - 1}{2x - \ldots}}$$

rappresenta la funzione $x - 1$ a sinistra dell'asse imaginario, la funzione $x + 1$ a destra di esso.

Facciamo invece:

$$\varphi(x) = x^2 - 1 \ , \ \psi(x) = a^2,$$

dove a è un numero reale e positivo; la linea $|\varphi(x)| = |\psi(x)|$ è una ellisse cassiniana avente i fuochi nei punti ± 1, e si ha $|x^2 - 1| < a^2$ nei punti interni, $|x^2 - 1| > a^2$ nei punti esterni. Quindi l'espressione aritmetica:

$$\lambda(x) = x^2 - 1 + a^2 -$$
$$- \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \cfrac{a^2(x^2 - 1)}{x^2 - 1 + a^2 - \ldots}}$$

$\psi_1(x) = \rho_1(u, v) + i\sigma_1(u, v), \psi_2(x) = \rho_2(u, v) + i\sigma_2(u, v)$, l'equazione della linea (o dell'insieme di linee) considerata è:

$$(\mu_1^2 + \nu_1^2)(\rho_2^2 + \sigma_2^2) - (\mu_2^2 + \nu_2^2)(\rho_1^2 + \sigma_1^2) = 0.$$

rappresenta a^2 nei punti interni, x^2-1 nei punti esterni alla curva.

Classificazione delle funzioni analitiche uniformi. Le funzioni intere.

132. Il risultato a cui siamo giunti, che le funzioni razionali sono tutte e sole le funzioni analitiche uniformi senza singolarità essenziali, mostra quale fondamentale influenza abbia la natura delle singolarità sulla forma analitica di una funzione, e suggerisce di prendere come base di una classificazione delle funzioni analitiche uniformi la natura ed il numero delle loro singolarità. Una tale classificazione si riassumerebbe nel quadro seguente:

A) Funzioni senza singolarità.
B) Funzioni con soli poli:
   1. Funzioni con un solo polo:
      a) all'infinito;
      b) a distanza finita.
   2. Funzioni con un numero finito di poli.
   3. Funzioni con infiniti poli.
C) Funzioni con singolarità qualunque:
   1. Funzioni con un solo punto singolare:
      a) all'infinito;
      b) a distanza finita.
   2. Funzioni con un numero finito di punti singolari.

3. Funzioni con infiniti punti singolari:
   a) funzioni con infiniti poli ed un punto singolare essenziale;
   b) funzioni con infiniti poli ed un numero finito di punti singolari essenziali;
   c) funzioni con infiniti punti singolari qualunque.

Le funzioni A si riducono alle costanti (articolo 111). Le B 1 a sono i polinomi (art. 122); le B 1 b sono le funzioni della forma $f\left(\frac{1}{x-c}\right)$, dove f è un polinomio in $\frac{1}{x-c}$, e c è il polo; le B 2 sono le funzioni razionali (art. 124); le B 3 non possono esistere (v. l'art. testè citato). Pertanto uno studio sistematico delle funzioni analitiche uniformi è stato già iniziato, per dir così, inconsciamente, nelle precedenti pagine; e non abbiamo che a riprenderlo al punto in cui esso è rimasto interrotto, cominciando a considerare le funzioni C 1 a, cioè le funzioni non aventi altra singolarità che un punto singolare essenziale all'infinito. Tali funzioni si dicono *intere trascendenti*, comprendendosi sotto la denominazione di *intere* (od *olomorfe*) tanto queste funzioni che i polinomi.

133. Se $f(x)$ è una funzione intera trascendente, il suo elemento $P(x)$ relativo all'origine avrà raggio di convergenza infinito (art. 92), e quindi rappresenterà la funzione in tutto il piano. Cioè: *Una funzione intera è rappresentata in tutto il piano da una serie di potenze intere e positive di* x *avente raggio di convergenza infinito.*

Nel caso speciale in cui la serie di potenze si riduce ad avere un numero finito di termini, la funzione è un polinomio, e il punto all'infinito è un polo.

La somma e il prodotto di più funzioni intere, la derivata e l'integrale d'una funzione intera, sono funzioni intere (artt. 63, 73, 82) (*).

134. La grande analogia che esiste tra i polinomi e le funzioni intere trascendenti suggerisce naturalmente l'idea di esaminare se sussistano anche per queste funzioni le proprietà fondamentali dei polinomi (art. 123): esistenza di una radice; decomponibilità in fattori lineari; possibilità di costruire un polinomio date le sue radici.

Che il teorema fondamentale dell'Algebra non valga sempre per le funzioni intere trascendenti, lo dimostra l'esempio della funzione e^x, che non s'annulla per nessun valore di x (art. 78).

Di qui nasce spontanea la domanda, quale sia la forma più generale delle funzioni intere prive di radici.

Sia $f(x)$ una funzione intera priva di radici;

(*) Riguardo al prodotto, si deve ricordare che, per un noto teorema d'Algebra, il prodotto di due serie assolutamente convergenti è una serie assolutamente convergente.

la sua reciproca $\frac{1}{f(x)}$ non avrà al finito nè poli nè punti singolari essenziali (art. 112), e quindi sarà pure una funzione intera. Essendolo anche $f'(x)$ (art. 133), lo sarà parimenti (ivi) $\frac{f'(x)}{f(x)}$; sarà pure intera la funzione integrale di questa funzione (ivi), che diremo $g(x)$, sicchè:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x),$$

e così (art. 78) $e^{g(x)}$. Posto:

$$h(x) = e^{g(x)},$$

si ha (ivi):

$$h'(x) = e^{g(x)}\, g'(x) = h(x)\, \frac{f'(x)}{f(x)};$$

ossia:

$$f(x)\, h'(x) - h(x)\, f'(x) = 0,$$

e moltiplicando per la funzione intera $\frac{1}{f^2(x)}$:

$$\frac{f(x)\, h'(x) - h(x)\, f'(x)}{f^2(x)} = 0.$$

Ora il primo membro è la derivata di $\frac{h(x)}{f(x)}$ (art. 102), donde segue che questo rapporto deve ridursi ad una costante:

$$\frac{h(x)}{f(x)} = c.$$

Si ha dunque:

$$f(x) = \frac{1}{c} e^{g(x)};$$

ponendo $\frac{1}{c}$ sotto la forma e^d, e scrivendo $g(x)$ invece di $d + g(x)$:

$$f(x) = e^{g(x)}.$$

Cioè: *Ogni funzione intera priva di radici è un'esponenziale in cui l'esponente è una funzione intera* (razionale o trascendente).

Dal risultato ottenuto segue immediatamente che, mentre un polinomio è determinato dalle sue radici a meno d'un fattore costante, una funzione intera trascendente potrà, *al più*, essere determinata dalle sue radici a meno di un fattore della forma $e^{g(x)}$, dove $g(x)$ è intera. Vedremo tra poco che essa è determinata *soltanto* a meno di un tal fattore.

Il ragionamento esposto in quest'articolo può ripetersi, senza mutamenti essenziali, per una serie di potenze $P(x)$ convergente entro un cerchio di raggio finito ϱ e non annullantesi in alcun punto interno ad esso. Il rapporto $\frac{P'(x)}{P(x)}$ può rappresentarsi mediante una serie di potenze convergente entro ϱ, e, indicando con $Q(x)$ l'integrale di questa serie, che è pure convergente entro ϱ, si ha, a meno d'un fattore costante;

$$P(x) = e^{Q(x)}.$$

135. Supponiamo ora che le radici di una funzione intera $f(x)$ debbano essere in numero finito; sieno esse $c_1, c_2, \ldots, c_n$, dove una radice r-pla si intende ripetuta r volte. Se $f(x)$ è la funzione da costruirsi, e si pone:

$$\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n),$$

$\dfrac{1}{\varphi(x)}$ è regolare e diversa da zero in tutti i punti a distanza finita, esclusi i punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, e perciò lo stesso potrà dirsi di $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$. Inoltre, se $c_1 = c_2 = \ldots = c_r$, e le altre c sono tutte diverse da c_1, si ha:

$$\varphi(x) = (x - c_1)^r \psi(x), \; f(x) = (x - c_1)^r P(x - c_1),$$

dove $\psi(x)$ è un polinomio che non s'annulla in c_1, $P(x - c_1)$ una serie di potenze convergente in tutto il piano e non nulla in c_1; ne segue:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = P(x - c_1) \frac{1}{\psi(x)},$$

donde risulta che $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ è regolare e diversa da zero anche in c_1. Così per gli altri punti c. Pertanto $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ è una funzione intera priva di radici, e si ha (art. 134):

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = e^{g(x)},$$

ossia:

$$f(x) = e^{g(x)} (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n),$$

che ci dà la forma più generale d'una funzione intera avente le radici $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Se le c sono tutte diverse dall'origine, può anche scriversi, variando $g(x)$ di una costante additiva:

$$f(x) = e^{g(x)} \left(1 - \frac{x}{c_1}\right)\left(1 - \frac{x}{c_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{c_n}\right) =$$
$$= e^{g(x)} \prod_{h=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Se, oltre alle c, vi è una radice m-pla nell'origine, si ha:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{n} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

136. Sieno ora le radici in numero infinito. Esse formeranno un insieme isolato (art. 113), quindi numerabile (art. 41), avente per solo punto limite il punto all'infinito (art. 113); quindi in ogni campo finito ne cadrà soltanto un numero finito (art. 35). Presa pertanto una successione di numeri positivi indefinitamente crescenti $\varrho_1, \varrho_2, \dots$, vi sarà un numero finito di radici di modulo $\leq \varrho_1$, che disporremo in ordine di modulo crescente, scegliendo ad arbitrio l'ordine relativo di quelle aventi egual modulo;

faremo seguire a queste le radici di modulo $>\varrho_1$ e $\leq \varrho_2$, disposte collo stesso criterio; e così di seguito. Otterremo così una successione numerabile $c_1, c_2, c_3, \ldots$, comprendente tutte le radici, disposte in ordine crescente, od almeno non decrescente, di modulo; sarà cioè:

$$|c_1| \leq |c_2| \leq |c_3| \leq \ldots, \quad \lim_{h=\infty} c_h = \infty.$$

Anche qui supporremo le c tutte diverse da 0, e ciascuna ripetuta un numero di volte corrispondente al suo ordine; aggiungeremo una radice nulla d'ordine m, dove $m = 0$ se la funzione non deve annullarsi nell'origine.

Ciò posto, si presenterebbe naturale l'idea di scrivere anche in questo caso:

$$(1) \qquad f(x) = e^{g(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Ma si affaccia subito una grave difficoltà: il prodotto infinito in generale non è sempre convergente.

Il mezzo per vincere tale difficoltà fu suggerito a WEIERSTRASS (*) dalla formola stabilita da GAUSS (1777-1855) (**) per una speciale funzione intera, la reciproca dell'*integrale euleriano di seconda specie*:

(*) *Journ. f. Math.*, T. 51, 1856, p. 1-60; *Werke*, T. 1, p. 153-221.
(**) C. F. GAUSS, *Werke*, T. 3, p. 146.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x \prod_{h=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{h}\right) \left(\frac{h}{h+1}\right)^x \right] =$$
$$= x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right) e^{-x \lg \frac{h+1}{h}} .$$

Considerando questa formola, egli osservò che il prodotto infinito:

$$x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right),$$

il quale parrebbe poter rappresentare la funzione, perchè ogni suo fattore s'annulla per una radice di essa, non è d'alcun uso, perchè divergente per tutti i valori di x; ma che esso può rendersi convergente per tutti i valori di x moltiplicando ciascun fattore per un'esponenziale avente per esponente una funzione lineare di x. Di qui egli fu condotto a chiedersi, se il prodotto (1) non potesse in tutti i casi rendersi convergente moltiplicandone i fattori per esponenziali opportunamente scelte; e riuscì a dimostrare (*) che effettivamente ciò è sempre possibile.

È da notarsi però che, sino dal 1860, Betti (1823-1892) (**) era giunto a questo risultato in

(*) V. la Memoria citata nella nota all'art. 95.
(**) *Annali di mat.*, T. 3, 1860, p. 65-159, 298-310; T. 4, 1861, p. 26-45, 57-70, 297-336.
I due casi considerati da Betti sono:
a) quello in cui le radici stanno tutte sopra una

due casi particolari importantissimi, che svilupperemo più innanzi (artt. 140, 141); e che, come ha mostrato DINI (1845-1918) (*), il metodo da lui usato avrebbe potuto estendersi senza alcuna difficoltà al caso generale.

137. Il risultato fondamentale testè accennato può enunciarsi come segue (**teorema di Weierstrass**):

Dato un aggregato numerabile di punti $c_1, c_2, c_3, \ldots$, *diversi dall'origine, distinti o no tra loro, e tali che:*

$$|c_1| \leq |c_2| \leq |c_3| \leq \ldots, \quad \lim_{h=\infty} c_h = \infty,$$

può trovarsi in infiniti modi una successione non decrescente di numeri interi non negativi $p_1, p_2, p_3, \ldots$, *tali che la serie:*

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{\infty}{}' \left| \frac{x}{c_h} \right|^{p_h+1}$$

sia convergente per ogni valore finito di x; *e la più generale funzione intera che s'annulla nei*

---

retta, e le loro reciproche distanze ammettono un limite inferiore positivo (vi è compresa la funzione sen x); il *rango* (v. più innanzi) è ≤ 1;

b) quello in cui le radici sono disposte comunque nel piano, ma le loro distanze reciproche ammettono ancora un limite inferiore positivo (vi è compresa la funzione σx); il rango è ≤ 2.

(*) *Collectanea math. in memoriam* DOM. CHELINI, Milano, 1881, p. 258-276.

punti $c_1, c_2, c_3, \ldots$ (*) *ed ha inoltre uno zero d'ordine* m *nell'origine è data da:*

$$(2) \qquad f(x) = e^{g(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove g (x) *è una funzione intera qualunque, e il prodotto infinito è assolutamente convergente per ogni valore finito di* x.

Anzitutto può osservarsi, che basta prendere $p_h = h - 1$ per ottenere la convergenza della (1); infatti, qualunque sia x, la radice h-esima del termine h-esimo della serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^h$$

tende a zero per $\lim h = \infty$. La successione dei numeri p_h (*esponenti di convergenza*) può poi variarsi in infiniti modi, sia mutando comunque il valore d'un numero finito dei suoi elementi, sia aumentando il valore d'un numero finito od infinito di essi.

Se $p_1, p_2, p_3, \ldots$ e $r_1, r_2, r_3, \ldots$ sono due successioni diverse di esponenti di convergenza, e poniamo:

(*) Deve intendersi: che ha uno zero semplice in ciascuno dei punti $c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots, o$, se per es. $c_1 = c_2 = \ldots\ldots = c_r$, ha uno zero r-plo in c_1.

$$\varphi_h(x) = \sum_{k=p_h+1}^{r_h} \frac{x^k}{k\, c_h^k} \quad \text{per} \quad p_h < r_h,$$

$$\varphi_h(x) = -\sum_{k=r_h+1}^{p_h} \frac{x^k}{k\, c_h^k} \quad \text{per} \quad p_h > r_h,$$

$$\varphi_h(x) = 0 \quad \text{per} \quad p_h = r_h,$$

costruite le funzioni:

$$f(x) = e^{g(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}$$

$$f_1(x) = e^{g_1(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{r_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

si ha, tenendo presente l'assoluta convergenza dei due prodotti infiniti:

$$\frac{f_1(x)}{f(x)} = e^{g_1(x) - g(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(x)},$$

sicchè (cfr. art. 135) l'indeterminazione si riduce anche in questo caso ad un fattore esponenziale avente per esponente una funzione intera.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema.

La funzione:

$$P(x) = 1 - x$$

può considerarsi come una serie di potenze convergente e priva di radici entro il cerchio unitario; si ha entro il cerchio stesso:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{-1}{1-x} = -\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1},$$

e quindi (art. 134, in fine), a meno di un fattore costante, che si riconosce subito essere l'unità:

$$(3) \qquad 1 - x = P(x) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}} \text{ (*)}.$$

Poniamo ora:

$$E_h(x) = \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

$E_h(x)$ è una funzione intera, che s'annulla soltanto nel punto $x = c_h$, e segue dalla (3), per $|x| < |c_h|$:

$$E_h(x) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}} e^{\sum\limits_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

ossia:

$$E_h(x) = e^{-\sum\limits_{k=p_h+1}^{\infty} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

(*) Si è già trovato per altra via questo risultato nell'art. 97.

Per $\left|\frac{x}{c_h}\right| < \lambda < 1$ si ha:

$$\sum_{k=p_h+1}^{\infty}\left|\frac{x}{c_h}\right|^k = \frac{\left|\frac{x}{c_h}\right|^{p_h+1}}{1-\left|\frac{x}{c_h}\right|} < \frac{1}{1-\lambda}\left|\frac{x}{c_h}\right|^{p_h+1},$$

quindi, a maggior ragione:

$$\sum_{k=p_h+1}^{\infty}\left|\frac{x^k}{k\ c_h{}^k}\right| < \frac{1}{1-\lambda}\left|\frac{x}{c_h}\right|^{p_h+1},$$

e per $\left|\frac{x}{c_{n+1}}\right| < \lambda$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty}\sum_{k=p_h+1}^{\infty}\left|\frac{x^k}{k\ c_h{}^k}\right| < \frac{1}{1-\lambda}\sum_{h=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{c_h}\right|^{p_h+1},$$

da cui, a maggior ragione:

$$(4)\qquad \left|\sum_{h=n+1}^{\infty}\sum_{k=p_h+1}^{\infty}\frac{x^k}{k\ c_h{}^k}\right| < \frac{1}{1-\lambda}\sum_{h=n+1}^{\infty}\left|\frac{x}{c_h}\right|^{p_h+1}.$$

La serie del secondo membro converge per ogni valore finito di x, quindi è equiconvergente in qualunque campo finito (cfr. art. 58); lo stesso avrà luogo per la serie di serie di potenze del primo membro entro qualunque cerchio di raggio $< \lambda \mid c_{n+1} \mid$ col centro nell'origine. Applicando quindi il lemma di WEIERSTRASS (articolo 72), la serie doppia si trasformerà in una serie di potenze $P_{n+1}(x)$, che, per l'arbitrarietà di λ (sotto la condizione $\lambda < 1$), sarà convergente entro il cerchio di raggio $|c_{n+1}|$ col centro nell'origine. Potrà scriversi pertanto:

$$\prod_{h=n+1}^{\infty} E_h(x) = e^{-P_{n+1}(x)},$$

e quindi:

$$\prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) = e^{-P_{n+1}(x)} \prod_{h=1}^{n} E_h(x).$$

Ora $\prod_{h=1}^{n} E_h(x)$ è una funzione intera, e $e^{-P_{n+1}(x)}$ è regolare entro il cerchio di raggio $|c_{n+1}|$ col centro nell'origine; quindi entro lo stesso cerchio sarà regolare la funzione del primo membro, e questa avrà entro il cerchio i soli zeri $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Ma poichè tale funzione è indipendente dal numero n, il quale d'altronde può essere arbitrariamente grande (giacchè, qualunque sia x, può sempre trovarsi un s tale, che per ogni $n \geq s$ sia $|x| \leq |c_{n+1}|$), essa è regolare in tutto il piano, cioè è una funzione intera, ed ha per zeri tutti e soltanto i punti $c_1, c_2, \ldots$ Se si vuole che la funzione abbia inoltre una radice m-pla nell'origine, basta moltiplicare per x^m; e, per avere la più generale funzione intera che soddisfa alle condizioni volute, deve aggiungersi (cfr. artt. 134, 136) un fattore $e^{g(x)}$.

Con ciò la formola (2) risulta completamente dimostrata. Le funzioni intere $E_h(x)$ aventi un unico zero si dicono *fattori primi*.

138. Le radici $c_1, c_2, \ldots$ possono essere tali, che non occorra prendere gli esponenti di convergenza indefinitamente crescenti, cioè che esista un numero intero non negativo p, il quale renda convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{x}{c_h} \right|^{p+1}$, o, ciò che è lo stesso, la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|c_h|^{p+1}}$. In tal caso il più piccolo numero p che soddisfa a questa condizione si dice *rango* della funzione, e questa si dice *di prima classe*; mentre si dice *di seconda classe*, se non vi è alcun numero avente la proprietà accennata. Una funzione di prima classe e di rango p ha dunque la forma:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}}.$$

Il fattore $e^{g(x)}$ si chiama *fattore esponenziale esterno*. Se $g(x)$ si riduce ad una costante, la funzione si dice *semplice*; se $g(x)$ è un polinomio di grado q, il più grande dei due numeri p, q (o il loro valore comune, se sono eguali) è il *genere* della funzione. La funzione è *normale*, se $q \leq p$ (*).

(*) Importa osservare che in questo campo non è stata ancora adottata una nomenclatura uniforme. Per es. alcuni autori dicono *altezza* (in tedesco: *Höhe*)

Ad una funzione normale di genere p può sempre darsi l'*apparenza* d'una funzione normale di genere maggiore di p. Infatti, se r è un numero intero positivo qualunque, può scriversi:

$$f(x) = e^{g_1(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p+r} \frac{x^k}{k c_h{}^k}},$$

dove:

$$g_1(x) = g(x) - \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{p+r} \frac{x^k}{k\, c_h{}^k} =$$

$$= g(x) - \sum_{k=p+1}^{p+r} \left[\frac{x^k}{k} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^k} \right]$$

è un polinomio di grado $\leq p + r$, se $g(x)$ è un polinomio di grado $\leq p$.

139. La serie doppia (4) dell'art. 137 può anche scriversi:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{hk} \frac{x^k}{k\, c_h{}^k},$$

essendo:

$$\varepsilon_{hk} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{per } k \begin{matrix} \leq p_h \\ > p_h \end{matrix}.$$

Ne segue:

$$P_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} \frac{x^k}{k},$$

---

per genere; altri chiamano le funzioni semplici *primitive* o *canoniche*. V. anche più innanzi.

posto:

$$A_{nk} = \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{hk}}{c_h{}^k}.$$

Ora:

$$(1) \qquad -\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} = \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{hk} \frac{x^{k-1}}{c_h{}^k}$$

è una funzione regolare entro ogni cerchio col centro nell'origine di raggio $< |c_{n+1}|$ (giacchè le $E_{n+1}(x)$, $E_{n+2}(x), \ldots$ non si annullano entro un tal cerchio); ripetendo per la serie doppia che figura nella (1) il ragionamento dell'art. 137, si trova:

$$-\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)} = \sum_{h=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{hk} \frac{x^{k-1}}{c_h{}^k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}\, x^{k-1} = P'_{n+1}(x).$$

Dopo ciò, posto:

$$\varphi(x) = \prod_{h=1}^{\infty} E_h(x) = e^{-P_{n+1}(x)} \prod_{h=1}^{n} E_h(x),$$

si ha (art. 102):

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = -P'_{n+1}(x) + \sum_{h=1}^{n} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)},$$

quindi:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{E'_h(x)}{E_h(x)},$$

sicchè la formola di derivazione che vale per un numero finito di fattori può estendersi al nostro prodotto infinito.

Dalla espressione di $E_h(x)$ segue:

$$\frac{E'_h(x)}{E_h(x)} = \frac{1}{x - c_h} + \frac{x^{p_h} - c_h^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)} = \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)};$$

si ha quindi, per $|x| < |c_1|$:

$$(2) \quad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)} = -\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=p_h+1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{c_h^k};$$

e si dimostra, colla ripetuta applicazione del lemma di WEIERSTRASS, che questa espressione si può derivare termine a termine un numero qualunque di volte.

Si può aggiungere che: *La serie:*

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)}$$

è equiconvergente in ogni campo finito non contenente nessun punto c_h.

Sia C il campo considerato. Descriviamo un cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine contenente nel suo interno il campo C e non passante per alcuno dei punti c_h, e sieno $c_1, c_2, \ldots, c_n$ i punti c_h in esso contenuti; potremo trovare una lunghezza δ tale, che i cerchi di raggio δ aventi i centri nei punti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sieno tutti interni al cerchio ϱ ed esterni tra loro ed a C; detto pertanto D il campo compreso tra il cerchio ϱ e i cerchi δ, il quale contiene C, basterà dimostrare che la serie (3) è equiconvergente nel campo D.

Per $|x| < \varrho$ e $h > n$ si ha:

$$|x - c_h| \geq |c_h| \left(1 - \left|\frac{x}{c_h}\right|\right) \geq |c_h| \left(1 - \frac{\varrho}{|c_{n+1}|}\right),$$

quindi per ogni $s > n$ e per ogni $t > s$:

$$\left|\sum_{h=s}^{t} \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)}\right| \leq \frac{1}{1 - \dfrac{\varrho}{|c_{n+1}|}} \sum_{h=s}^{t} \frac{\varrho^{p_h}}{|c_h|^{p_h+1}};$$

ora la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varrho^{p_h}}{|c_h|^{p_h+1}}$$

è convergente, quindi, preso ad arbitrio un numero positivo σ, potremo determinare un indice m tale, che per ogni $s > m$ e per ogni $t > s$ sia:

$$\sum_{h=s}^{t} \frac{\varrho^{p_h}}{|c_h|^{p_h+1}} < \sigma \left(1 - \frac{\varrho}{|c_{n+1}|}\right).$$

Ne segue che, preso ad arbitrio σ, sarà per ogni s maggiore di n e di m, per ogni $t > s$, e per tutti i punti x interni al cerchio ϱ:

$$\left|\sum_{h=s}^{t} \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)}\right| < \sigma .$$

Resta così dimostrata l'equiconvergenza della serie (3) nel campo D, e quindi nel campo C.

140. Come prima applicazione del teorema di WEIERSTRASS, vogliamo trovare lo sviluppo in prodotto infinito della funzione sen x (art. 79), già ottenuto, benchè con metodo non del tutto rigoroso, da EULERO (1707-1783) per argomenti reali (*).

La funzione intera:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2\,i}\,(e^{ix} - e^{-ix})$$

ha le seguenti proprietà:

a) ha per radici lo zero e tutti i multipli interi di π;

b) è dispari, cioè:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x;$$

c) è periodica col periodo $2\,\pi$, cioè:

$$\operatorname{sen}(x + 2\,\pi) = \operatorname{sen} x;$$

d) ha per derivata la funzione intera pari:

$$\cos x = \frac{1}{2}\,(e^{ix} + e^{-ix}),$$

la quale è pure periodica col periodo $2\,\pi$.

(*) L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna e Ginevra, 1748, T. 1, paragr. 158.

Le radici non nulle, disposte in ordine non decrescente di modulo, sono pertanto:

$$\pi, \ -\pi, \ 2\pi, \ -2\pi, \ 3\pi, \ -3\pi, \ldots$$

Cerchiamo se la funzione studiata è di prima classe, cioè se esiste un numero p che renda convergente la serie:

$$\frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{\pi^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \frac{1}{(2\pi)^{p+1}} + \ldots,$$

ossia la serie:

$$\frac{2}{\pi^{p+1}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}.$$

Ora è noto che la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}$ è divergente per $p \leq 0$, convergente per $p > 0$; il minimo valore intero di p che la rende convergente è dunque $p = 1$, e quindi sen x è una funzione intera di *prima* classe e di rango *uno*. La sua espressione è:

$$\operatorname{sen} x = e^{g(x)} \, x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}},$$

dove $g(x)$ è una funzione intera da determinarsi, e l'apice apposto al segno Π indica che nel prodotto manca il fattore corrispondente ad $h = 0$.

Dalla formola scritta segue, per la (2) dell'articolo precedente:

$$(1)\quad \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + \frac{1}{x} + \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{x}{\pi h (x - \pi h)} =$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + \frac{x}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x - \pi h)} - \frac{1}{h(x + \pi h)} \right] =$$

$$= g'(x) + \frac{1}{x} + 2x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2} \ (*),$$

che può anche scriversi:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + \frac{1}{x} + x \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2},$$

oppure, comprendendo nella somma anche il termine $\frac{1}{x}$, e togliendo quindi l'apice:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = g'(x) + x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2},$$

da cui:

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - x \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2}.$$

Ricordando che sen x è funzione dispari e

(*) Le serie che figurano in questa formola e nelle successive sono assolutamente ed uniformemente convergenti in qualunque campo finito da cui sieno stati esclusi mediante cerchi arbitrariamente piccoli i punti πh in esso contenuti.

$\cos x$ è funzione pari, segue di qui immediatamente:

$$g'(-x) = -g'(x),$$

quindi $g'(0) = 0$, sicchè $g'(x)$ è il prodotto di x per una funzione intera $k(x)$:

$$g'(x) = x\, k(x),$$

e si ha:

$$k(x) = \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \pi^2 h^2} =$$

$$= \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x-\pi h)} - \frac{1}{h(x+\pi h)} \right].$$

Può anche dimostrarsi che $g'(x)$ ha il periodo 2π. Si può scrivere:

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \frac{x}{\pi h (x - \pi h)} =$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x - \pi h} + \theta_h \right],$$

essendo:

$$\theta_h = \begin{cases} \frac{1}{\pi h} \\ 0 \end{cases} \text{per } h \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases}.$$

Ne segue, per la periodicità di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$:

$$g'(x + 2\pi) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x + 2\pi - \pi h} + \theta_h \right] =$$

$$= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{x - \pi h} + \theta_{h+2} \right].$$

Ora la serie:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} [\theta_h - \theta_{h+2}]$$

è assolutamente convergente, giacchè i suoi termini, esclusi soltanto i due corrispondenti ad $h = -2$ e ad $h = 0$, hanno la forma $\frac{2}{\pi h (h+2)}$ (*), e la sua somma è nulla; aggiungendo questa serie a quella della formola precedente, si ottiene:

$$g'(x + 2\pi) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \sum_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{x - \pi h} + \theta_h\right] = g'(x).$$

Esaminiamo l'andamento della funzione $k(x)$ nel piano della variabile $x = u + iv$.

Consideriamo dapprima la mezza striscia di

(*) La serie $\Sigma \frac{1}{h(h+2)}$, estesa a tutti i valori positivi e negativi di h escluso $h = -2$, è convergente. Infatti:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+2)} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)},$$

$$\sum_{h=-3}^{-\infty} \frac{1}{h(h+2)} = \sum_{h=3}^{\infty} \frac{1}{h(h-2)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+2)} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)},$$

e la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h(h+1)}$ è convergente.

piano limitata dall'asse u, dalla parte positiva dell'asse v, e dalla retta $u = 2\pi$ (fig. 2).

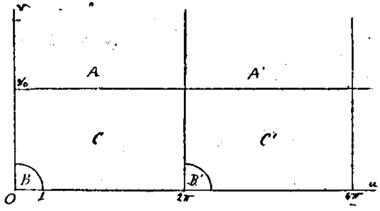

Fig. 2.

Prendiamo un numero positivo arbitrario σ, e decomponiamolo in tre sommandi positivi:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Si ha:

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos (u + i v)}{\operatorname{sen} (u + i v)} = i \frac{e^{iu-v} + e^{-iu+v}}{e^{iu-v} - e^{-iu+v}} =$$

$$= i \frac{e^{2iu-2v} + 1}{e^{2iu-2v} - 1},$$

inoltre:

$$e^{2iu-2v} = e^{-2v} (\cos 2 u + i \operatorname{sen} 2 u);$$

quindi:

$$\left| \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \right|^2 = \frac{e^{-4v} + 2 e^{-2v} \cos 2 u + 1}{e^{-4v} - 2 e^{-2v} \cos 2 u + 1} =$$

$$= \frac{\operatorname{ch} 2 v + \cos 2 u}{\operatorname{ch} 2 v - \cos 2 u}.$$

Ora per $v > 0$ si ha, qualunque sia u:

$$0 < \frac{\operatorname{ch} 2v + \cos 2u}{\operatorname{ch} 2v - \cos 2u} \leq \frac{\operatorname{ch} 2v + 1}{\operatorname{ch} 2v - 1},$$

quindi:

$$\left| \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} \right| \leq \frac{1}{v} \left[\frac{\operatorname{ch} 2v + 1}{\operatorname{ch} 2v - 1} \right]^{\frac{1}{2}};$$

ma la funzione che figura al secondo membro tende a 0 per $\lim v = \infty$, quindi può prendersi un v_1 tale, che per $v > v_1$ e per u qualunque sia:

$$\left| \frac{\cos x}{x \operatorname{sen} x} \right| < \sigma_1 .$$

Così pure per $v > \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_2}}$ si ha, qualunque sia u:

$$\frac{1}{|x^2|} < \sigma_2 .$$

Resta ancora da considerare la somma:

$$S = \frac{1}{\pi} \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{h(x - \pi h)} - \frac{1}{h(x + \pi h)} \right].$$

Si ha, per $0 \leq u \leq 2\pi$:

$$|x - \pi h|^2 = (u - \pi h)^2 + v^2 \geq \pi^2 (h - 2)^2 + v^2;$$

ora per $h \geq 3$ è $\pi(h-2) > h$, quindi:

$$|x - \pi h|^2 \geq h^2 + v^2 \geq 2hv.$$

Inoltre, per tutti i valori di h:

$$|x + \pi h|^2 = (u + \pi h)^2 + v^2 \geq \pi^2 h^2 + v^2 > 2hv.$$

Quindi si ha, mettendo a parte anche per il secondo sommando i termini corrispondenti ad $h = 1$ e ad $h = 2$:

$$|S| < \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{(\pi - u)^2 + v^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\pi + u)^2 + v^2}} + \right.$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{(2\pi - u)^2 + v^2}} + \frac{1}{2\sqrt{(2\pi + u)^2 + v^2}} +$$
$$\left. + 2\sum_{h=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2v}\, h^{\frac{3}{2}}}\right\} < \frac{1}{\pi}\left\{\frac{3}{v} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{v}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}\right\}.$$

Considerando che, come sopra si ricordò, la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{p+1}}$ è convergente per ogni $p > 0$, risulta che S tende a zero al tendere ad infinito di v; si potrà quindi trovare un v_2 tale che per ogni $v > v_2$ e per $0 \leq u \leq 2\pi$ sia $|S| < \sigma_3$.

Pertanto, se v_0 è il maggiore dei tre numeri v_1, v_2, $\frac{1}{\sqrt{\sigma_2}}$, si ha per $v > v_0$ e per $0 \leq u \leq 2\pi$:

$$|k(x)| < \sigma.$$

Dividiamo ora la mezza striscia considerata in tre parti: la parte A superiore alla retta $v=v_0$; il quadrante B di cerchio unitario; e la parte restante, che diremo C; e sieno A', B', C' le parti omologhe della mezza striscia adiacente compresa tra l'asse u e le rette $u = 2\pi$, $u = 4\pi$. Nel campo finito formato dalle parti B e C il modulo di $g'(x)$ avrà un massimo finito M; e lo stesso potrà dirsi per il campo formato dalle parti B' e C', giacchè i valori di $g'(x)$ si ripetono nei punti omologhi delle due strisce. Ora fuori del cerchio unitario si ha:

$$|k(x)| = \left|\frac{g'(x)}{x}\right| < |g'(x)|,$$

quindi tanto in C che in B' e C' sarà $|k(x)| < M$. Inoltre, siccome per due punti omologhi x, $x' = x + 2\pi$ di A e di A' si ha:

$$|x'| > |x|, \; |g'(x')| = |g'(x)|,$$

ne segue:

$$|k(x')| < |k(x)| < \sigma.$$

Il ragionamento può ripetersi per tutte le altre strisce; e si conclude, che in tutti i punti compresi tra gli assi positivi u, v ed esterni al cerchio unitario si ha $|k(x)| < N$, essendo N il maggiore tra i due numeri M, σ. Ragionando analogamente per gli altri tre quadranti del piano, risulta che si ha $|k(x)| < N$ in tutti i punti esterni al cerchio unitario, e quindi (art. 121) che $k(x)$ è una costante, la quale, per l'arbitrarietà di σ, è necessariamente zero.

È dunque nulla anche $g'(x)$, e $g(x)$ si riduce ad una costante, e così $e^{g(x)}$. Infine, osservando che dallo sviluppo in serie di $\operatorname{sen} x$ segue:

$$\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

si ottiene $e^{g(x)} = 1$. L'espressione cercata è dunque:

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{h=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\pi\, h}\right) e^{\frac{x}{\pi h}}.$$

Poichè il prodotto è assolutamente convergente, si può variare comunque l'ordine dei suoi fattori; riunendo a due a due quelli corrispondenti a valori eguali e contrari di h, si ottiene la formola di EULERO:

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2\, h^2}\right).$$

141. Come secondo esempio, costruiremo la funzione intera σx, di cui WEIERSTRASS fece la base della teoria delle funzioni ellittiche. Essa è caratterizzata dalle proprietà seguenti:

a) ha le radici semplici $2\, m\, \omega_1 + 2\, n\, \omega_3$, dove m ed n possono prendere tutti i valori interi positivi nulli o negativi, ed ω_1, ω_3 (*) sono due costanti il cui rapporto non è reale;

b) è dispari;

c) soddisfa alle condizioni (**):

$$\sigma' 0 = 1 \ , \ \sigma''' 0 = 0 ;$$

d) soddisfa alle seguenti relazioni, dove η_1, η_3 sono due costanti dipendenti da ω_1, ω_3:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma(x + 2\omega_1) = - e^{2\eta_1(x+\omega_1)} \sigma x , \\ \sigma(x + 2\omega_3) = - e^{2\eta_3(x+\omega_3)} \sigma x . \end{cases}$$

Cerchiamo anzitutto se σx è della prima classe. Se si descrivono (fig. 3) i parallelogrammi aventi rispettivamente i vertici $\pm 2\omega_1 \pm 2\omega_3$, $\pm 4\omega_1 \pm 4\omega_3$, $\pm 6\omega_1 \pm 6\omega_3$, ..., tutti gli zeri di σx diversi dall'origine si troveranno sui perimetri di questi parallelogrammi, e precisamente 8 sul perimetro del primo — sieno $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{18}$; 16 su quello del secondo — sieno $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2,16}$; 24 su quello del terzo — sieno $a_{31}, a_{32}, \ldots, a_{3,24}$; e così via. Se λ_1 è la massima, λ_2 la minima distanza dell'origine dal perimetro del primo parallelogrammo, sarà, per tutti i valori che può prendere r nelle singole formole:

(*) Adottiamo qui le notazioni usate oggidì comunemente nella teoria delle funzioni ellittiche.

(**) È quasi inutile osservare che tutte le derivate d'ordine pari di σx, essendo funzioni dispari, s'annullano nell'origine.

$$\lambda_1 \geq | a_{1r} | \geq \lambda_2 , \quad 2 \lambda_1 \geq | a_{2r} | \geq 2 \lambda_2 ,$$
$$3 \lambda_1 \geq | a_{3r} | \geq 3 \lambda_2 , \ldots ,$$

quindi in generale, indicando con α un numero

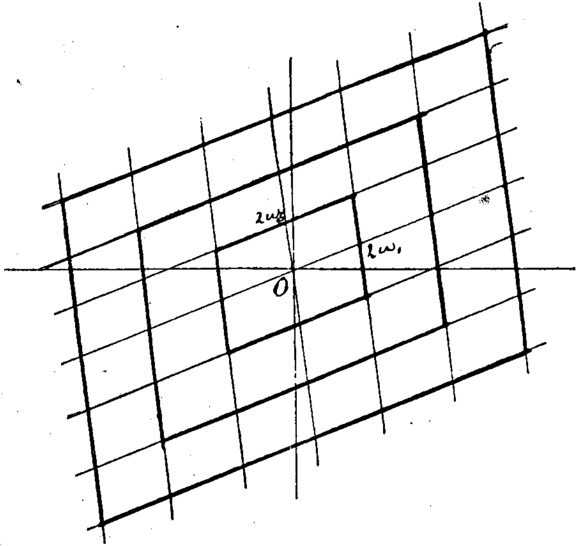

Fig. 3.

positivo qualunque e con h un numero intero positivo:

$$\frac{1}{h^\alpha \lambda_1{}^\alpha} \leq \frac{1}{| a_{hr} |^\alpha} \leq \frac{1}{h^\alpha \lambda_2{}^\alpha} ,$$

e sommando da $r = 1$ ad $r = 8 h$:

$$\frac{8\,h}{h^\alpha\,\lambda_1{}^\alpha} \leq \sum_{r=1}^{8h} \frac{1}{|\,a_{hr}\,|^\alpha} \leq \frac{8\,h}{h^\alpha\,\lambda_2{}^\alpha},$$

ossia:

$$\frac{8}{\lambda_1{}^\alpha}\frac{1}{h^{\alpha-1}} \leq \sum_{r=1}^{8h} \frac{1}{|\,a_{hr}\,|^\alpha} \leq \frac{8}{\lambda_2{}^\alpha}\frac{1}{h^{\alpha-1}}.$$

Se facciamo variare h da 1 ad ∞ e sommiamo le relazioni corrispondenti, avremo come termine di mezzo la somma, denotata negli articoli precedenti con $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|\,c_h\,|^\alpha}$, delle potenze $-\alpha$ dei moduli delle radici non nulle; otterremo cioè:

$$\frac{8}{\lambda_1{}^\alpha}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{\alpha-1}} \leq \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|\,c_h\,|^\alpha} \leq \frac{8}{\lambda_2{}^\alpha}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h^{\alpha-1}}.$$

La serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|\,c_h\,|^\alpha}$ sarà quindi convergente *sempre e soltanto* quando lo è la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\alpha-1}}$, cioè (v. art. prec.) per $\alpha > 2$. Pertanto il più piccolo numero intero p che rende convergente la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|\,c_h\,|^{p+1}}$ è 2; cioè $\sigma\,x$ è di *prima* classe e di rango *due*.

Applicando la formola dell'art. 137, si ha:

$$(2)\quad \sigma\,x = e^{g(x)}\,x \prod_{m,n=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2\,c_{mn}{}^2}},$$

dove:

$$c_{mn} = 2\, m\, \omega_1 + 2\, n\, \omega_3\,,$$

$g\,(x)$ è una funzione intera da determinarsi, e l'apice apposto al segno Π vale ad indicare che deve escludersi la combinazione $m = 0$, $n = 0$.

Colle notazioni di WEIERSTRASS si ha:

$$\frac{\sigma' x}{\sigma\, x} = \zeta\, x\ , \ -\zeta' x = p\, x;$$

le $\zeta\, x$, $p\, x$ sono funzioni meromorfe (art. 143), la prima è dispari e la seconda pari. Segue poi dalle (1):

$$(3)\quad \zeta\,(x+2\,\omega_1) = \zeta\, x + 2\,\eta_1\,,\ \zeta\,(x+2\,\omega_3) = \zeta x + 2\eta_3,$$

$$(4)\quad p\,(x+2\,\omega_1) = p\, x\,,\ p\,(x+2\,\omega_3) = p\, x,$$

$$(5)\quad p'(x+2\,\omega_1) = p' x\,,\ p'(x+2\,\omega_3) = p' x.$$

Dalla (2) si ottiene (art. 139):

$$(6)\quad \frac{\sigma' x}{\sigma\, x} = \zeta\, x = g'\,(x) + \frac{1}{x} + \Sigma' \left[\frac{1}{x - c_{mn}} + \frac{1}{c_{mn}} + \frac{x}{c_{mn}^{\ 2}}\right],$$

$$(7)\quad \zeta' x = -p\, x = g''\,(x) - \frac{1}{x^2} + \Sigma' \left[-\frac{1}{(x - c_{mn})^2} + \frac{1}{c_{mn}^{\ 2}}\right],$$

$$(8) \qquad -p'x = g'''(x) + \frac{2}{x^3} +$$

$$+ 2\,\Sigma' \frac{1}{(x - c_{mn})^3} = g'''(x) + 2\,\Sigma \frac{1}{(x - c_{mn})^3},$$

essendosi nell'ultima somma compreso anche il termine $\frac{2}{x^3}$ corrispondente ad $m = n = 0$, e quindi tolto l'apice. Indicando quest'ultima somma con $S(x)$, si ha:

$$S(x + 2\,\omega_1) = \Sigma \frac{1}{(x + 2\,\omega_1 - c_{mn})^3} =$$

$$= \Sigma \frac{1}{\{x - [2\,(m-1)\,\omega_1 + 2\,n\,\omega_3]\}^3};$$

ma, variando m da $-\infty$ a $+\infty$, anche $m - 1$ varia tra gli stessi limiti, sicchè può anche scriversi:

$$S(x + 2\,\omega_1) = \Sigma \frac{1}{[x - (2\,m\,\omega_1 + 2\,n\,\omega_3)]^3} = S(x).$$

Analogamente si dimostra che:

$$S(x + 2\,\omega_3) = S(x).$$

Tenendo quindi conto delle (5), si ha dalla (8):

$$g'''(x + 2\,\omega_1) = g'''(x)\,, \quad g'''(x + 2\,\omega_3) = g'''(x).$$

Pertanto, se si imagina il piano ricoperto dal reticolo di parallelogrammi congruenti aventi per vertici tutti i punti c_{mn}, la $g'''(x)$ riprenderà lo stesso valore nei punti omologhi dei vari parallelogrammi. Ora, poichè $g'''(x)$ è funzione continua in tutto il piano, i moduli dei valori che essa prende in un parallelogramma ammettono un massimo finito M; ne segue che in tutti i punti del piano è $|g'''(x)| \leq M$, e quindi (art. 121) che $g'''(x)$ è una costante.

Si ha poi:

$$S(-x) = \Sigma \frac{1}{(-x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^3} =$$

$$= - \Sigma \frac{1}{(x + 2m\omega_1 + 2n\omega_3)^3};$$

ora, poichè variando di m ed n tra $-\infty$ e $+\infty$ anche $-m$ e $-n$ variano tra gli stessi limiti, si può porre $-m$, $-n$ in luogo di m, n, e si ha così:

$$S(-x) = - \Sigma \frac{1}{(x - 2m\omega_1 - 2n\omega_3)^3} = - S(x),$$

sicchè $S(x)$ è funzione dispari. Osservando che è pure dispari $p'x$, risulta dalla (8) che lo è anche $g'''(x)$, donde segue $g'''(x) = 0$. La $g(x)$ è dunque un polinomio di secondo grado:

$$g(x) = A x^2 + B x + C.$$

La (6) diviene allora:

$$(9) \qquad \zeta x = 2Ax + B + \frac{1}{x} + \\ + \Sigma' \left[\frac{1}{x - c_{mn}} + \frac{1}{c_{mn}} + \frac{x}{c_{mn}^2} \right] \\ = 2Ax + B + \frac{1}{x} + x^2 \Sigma' \frac{1}{c_{mn}^2 (x - c_{mn})}.$$

Di qui si ha, considerando che, come si è già osservato in una circostanza analoga, si può porre $-c_{mn}$ in luogo di c_{mn} senza che l'ultima somma cambi di valore:

$$\zeta(-x) = -2Ax + B - \frac{1}{x} - x^2 \Sigma' \frac{1}{c_{mn}^2 (x - c_{mn})};$$

dal confronto colla (9), per la disparità di ζx, risulta $B = 0$, sicchè dalla (9) segue:

$$(10) \quad \frac{1}{x}\left(\zeta x - \frac{1}{x}\right) = 2A + x \Sigma' \frac{1}{c_{mn}^2 (x - c_{mn})}.$$

Ora (art. 81):

$$\zeta x - \frac{1}{x} = \frac{\sigma' x}{\sigma x} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{\sigma' 0 + \frac{x}{1!}\sigma'' 0 + \frac{x^2}{2!}\sigma''' 0 + \frac{x^3}{3!}\sigma^{\text{IV}} 0 + \frac{x^4}{4!}\sigma^{\text{V}} 0 + \dots}{\sigma 0 + \frac{x}{1!}\sigma' 0 + \frac{x^2}{2!}\sigma'' 0 + \frac{x^3}{3!}\sigma''' 0 + \frac{x^4}{4!}\sigma^{\text{IV}} 0 + \dots} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1 + \frac{x^4}{24}\sigma^{\text{V}} 0 + \dots}{x + \frac{x^5}{120}\sigma^{\text{V}} 0 + \dots} - \frac{1}{x} = \frac{\frac{x^3}{30}\sigma^{\text{V}} 0 + \dots}{1 + \frac{x^4}{120}\sigma^{\text{V}} 0 + \dots},$$

quindi:

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x}\left(\zeta x - \frac{1}{x}\right) = 0 ,$$

sicchè dalla (10) segue $A = 0$, e la funzione $g(x)$, quindi anche $e^{g(x)}$, si riduce ad una costante. Indicando con D il valore di $e^{g(x)}$, la (2), divisa per x, diviene:

$$\frac{\sigma x}{x} = D\, \Pi' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2\, c_{mn}^2}} ,$$

donde risulta:

$$D = \lim_{x=0} \frac{\sigma x}{x} .$$

D'altra parte:

$$\frac{\sigma x}{x} = \frac{1}{x}\left(\sigma 0 + \frac{x}{1\,!}\sigma' 0 + \frac{x^2}{2\,!}\sigma'' 0 + \frac{x^3}{3\,!}\sigma''' 0 + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^5}{5\,!}\sigma^{\mathrm{v}} 0 + \ldots\right) = 1 + \frac{x^4}{5\,!}\sigma^{\mathrm{v}} 0 + \ldots ,$$

quindi $D = 1$, ed infine:

$$\sigma x = x\, \Pi' \left(1 - \frac{x}{c_{mn}}\right) e^{\frac{x}{c_{mn}} + \frac{x^2}{2\, c_{mn}^2}} .$$

Funzioni aventi un numero finito di singolarità essenziali.

142. Se $g(x)$ è una funzione intera, $g\left(\frac{1}{x-c}\right)$ è una funzione (C 1 b) avente un'unica singolarità nel punto c; la singolarità è polare od essenziale, secondochè $g(x)$ è razionale o trascendente.

Se $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ denotano funzioni intere, la forma più generale di una funzione (C 2) avente n punti singolari $c_1, c_2, \ldots, c_n$ è:

$$f(x)=g_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)+g_2\left(\frac{1}{x-c_2}\right)+\ldots+g_n\left(\frac{1}{x-c_n}\right)+C,$$

dove C è una costante qualunque.

Se uno dei punti singolari, p. es. c_1, è all'infinito, invece di $g_1\left(\frac{1}{x-c_1}\right)$ deve porsi $g_1(x)$ (*).

143. Per costruire la più generale funzione (C 3 a) avente infiniti poli ed un solo punto singolare essenziale, il quale sarà (art. 112)

(*) E. Maillet (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, S. II, T. 4, 1903, p. 447-469; *Bull. Soc. math. France*, T. 30, 1902, p. 134-155; *C. R. Ac. Paris*, T. 134, 1902, p. 405-407, 1131-1133; T. 135, 1902, p. 391-392; *Journ. de math.*, S. V, T. 8, 1902, p. 329-386) chiama le funzioni C 2 *quasi intere* e i loro quozienti funzioni *quasi meromorfe*.

l'unico punto limite dell'insieme dei poli, supponiamo dapprima il punto singolare essenziale all'infinito; costruiamo una funzione intera $g(x)$ avente per zeri i dati poli, ed un'altra funzione intera $g_1(x)$ soggetta alla sola condizione di non avere alcuna radice comune con $g(x)$; la funzione cercata sarà:

$$f(x) = \frac{g_1(x)}{g(x)}.$$

Le funzioni aventi un solo punto singolare essenziale all'infinito e singolarità polari al finito si dicono *meromorfe* o *trascendenti fratte*.

Se il punto singolare essenziale è un punto c a distanza finita, colla sostituzione:

$$x' = \frac{1}{x - c}$$

ci ridurremo al caso precedente.

144. Vogliamo ora costruire una funzione (C 3 b) avente un insieme infinito A di poli ed un numero finito n di punti singolari essenziali $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Presi n intorni, esterni l'uno all'altro, di questi punti, in essi cadranno parti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (di cui alcune eventualmente nulle) dell'insieme A, e nella parte del piano esterna a tutti questi intorni potrà cadere soltanto un numero finito (eventualmente nullo) di poli $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Costruiamo ora (art. 143) la più generale funzione $f_1(x)$ avente i poli A_1

e il punto singolare essenziale c_1; la più generale funzione $f_2(x)$ avente i poli A_2 e il punto singolare essenziale c_2; e così via. La funzione cercata sarà:

$$f(x) = \sum_{h=1}^{n} f_h(x) + \frac{C}{\prod_{h=1}^{m} (x - d_h)}.$$

Funzioni con infinite singolarità qualunque. Teorema di Mittag-Leffler.

145. Il primo che trattò il problema della costruzione d'una funzione avente date singolarità (C 3 c) fu G. MITTAG-LEFFLER (*), il quale, partito nel 1876 dal caso più semplice (quello dell'art. 143), andò via via estendendo il suo metodo a casi sempre più generali.

(*) *Acta math.*, T. 4, 1884, p. 1-79; *Bull. des sc. math.*, S. II, T. 3, 1879, p. 269-278; *C. R. Ac. Paris*, T. 94, 1882, p. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; T. 95, 1882, p. 335-336; *Oefv. Förh. Ak. Stockholm*, T. 33, 1876, n. 6, p. 3-16; T. 34, 1877, n. 1, p. 17-32, 33-43, n. 2, p. 31-41; T. 39, 1882, n. 2, p. 11-45, n. 4, p. 21-25. V. anche: K. WEIERSTRASS, *Monatsb. Ak. Berlin*, 1880, p. 707-717; *Math. Werke*, T. 2, p. 189-199; trad. franc. in *Bull. des sc. math.*, S. II, T. 5, 1881, p. 113-124; F. CASORATI, *Annali di mat.*, S. II, T. 10, 1882, p. 261-278; U. DINI, *Collectanea math. in memoriam* DOM. CHELINI, Milano, 1881, p. 258-276; E. SCHERING, *Abh. Ges. Wiss. Göttingen*, T. 27, 1880, Cominceremo coll'enunciare e dimostrare il teorema in un caso alquanto meno semplice di quello dell'articolo citato:

Dati infiniti punti $c_1, c_2, \ldots$ *soggetti alle condizioni:*

$$0 < |c_1| \leq |c_2| \leq \ldots, \lim_{h=\infty} c_h = \infty,$$

e date infinite funzioni intere $g_1(x), g_2(x), \ldots$, *si può costruire in infiniti modi una funzione analitica uniforme avente a distanza finita le sole singolarità* $c_1, c_2, \ldots$, *e avente nel punto* c_h *la caratteristica* $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ (**teorema di Mittag-Leffler**).

L'idea che si presenta naturale sarebbe quella di formare la somma:

$$\sum_{h=1}^{\infty} g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right);$$

ma in generale questa serie non è convergente. L'artificio di Mittag-Leffler consiste nell'aggiungere a ciascun termine della serie un opportuno polinomio, in modo da renderla convergente.

Prendiamo una serie numerica convergente qualunque a termini positivi $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$. La funzione $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$, non avendo altri punti singolari che c_h, potrà rappresentarsi nell'intorno dell'origine con una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_{hk}\, x^k$ avente raggio di convergenza $|c_h|$, e quindi equiconvergente in ogni cerchio col centro nell'origine di raggio $< |c_h|$; potrà pertanto trovarsi un indice p_h tale, che entro un tal cerchio sia:

$$\left| \sum_{k=p_h}^{\infty} a_{hk}\, x^k \right| < \varepsilon_h ,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\left| g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} a_{hk}\, x^k \right| < \varepsilon_h .$$

Dopo ciò sia ϱ il raggio di un cerchio col centro nell'origine non passante per alcuno dei punti c_h, e sia c_q il punto c_h di indice massimo contenuto entro di esso; nel cerchio ϱ potranno svilupparsi in serie equiconvergenti tutte le $g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right)$ per cui $h > q$, e sarà entro il cerchio stesso:

$$\left| \sum_{h=q+1}^{\infty} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} a_{hk}\, x^k \right] \right| < \sum_{h=q+1}^{\infty} \varepsilon_h ,$$

donde segue che la serie del primo membro è equiconvergente nel cerchio ϱ. Mediante il lemma di Weierstrass (art. 72) essa può trasformarsi in una serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} A_{qk}\, x^k$ convergente entro il cerchio ϱ. D'altra parte l'espressione:

$$\sum_{h=1}^{q} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} a_{hk}\, x^k \right],$$

che è la somma di un numero *finito* di funzioni regolari in ogni punto tranne uno dei punti $c_1, c_2, \ldots, c_q$, costituisce una funzione non avente altri punti singolari che questi, e quindi l'espressione:

$$(1) \qquad F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} a_{hk}\, x^k \right]$$

rappresenta una funzione regolare in tutto il cerchio ϱ, eccettuati i punti $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Ma ϱ è arbitrario, e $F(x)$ non dipende da ϱ; quindi può concludersi che la (1) rappresenta una funzione analitica uniforme, regolare in tutti i punti del piano a distanza finita, eccettuati al più gli infiniti punti c_h.

Per vedere come si comporta la funzione in un punto c_m, basta osservare che la funzione al secondo membro della:

$$F(x) - g_m \left(\frac{1}{x - c_m} \right) = - \sum_{k=1}^{p_m - 1} a_{mk}\, x^k + \\ + \sum_{h=1}^{\infty}{}^{(m)} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} a_{hk}\, x^k \right],$$

dove l'indice superiore m denota l'esclusione del termine m-esimo, è regolare in tutti i punti del piano a distanza finita eccettuati al più i punti c di indice diverso da m; ne segue immediatamente che $F(x)$ ha una singolarità in c_m, e che la caratteristica relativa è $g_m\left(\frac{1}{x-c_m}\right)$.

La (1) possiede dunque tutte le proprietà richieste dal teorema.

Se $F_1(x)$ è un'altra funzione avente le stesse proprietà della $F(x)$, la differenza $F_1(x)-F(x)$ sarà una funzione regolare in ogni punto a distanza finita, cioè una funzione intera; e, reciprocamente, l'aggiunta d'una funzione intera non altera il comportamento della funzione costruita nei punti a distanza finita del piano.

Dunque la più generale funzione che soddisfa alle condizioni del teorema è:

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left[g_h\left(\frac{1}{x-c_h}\right)-\sum_{k=0}^{p_h-1} a_{hk}\, x^k\right]+g(x),$$

dove $g(x)$ è una funzione intera arbitraria (che può anche ridursi ad una costante (*).

146. Sieno in particolare i punti c_h poli semplici colla caratteristica $\frac{1}{x-c_h}$. Poichè per $|x|<|c_h|$ si ha:

(*) La grande arbitrarietà che vi è nella scelta dei numeri p_h non porta che l'aggiunta di termini della forma $b\,x^r$ nella funzione intera arbitraria $g(x)$.

$$\frac{1}{x - c_h} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{c_h^{k+1}},$$

la funzione cercata è:

$$(1)\quad F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x - c_h} + \sum_{k=0}^{p_h - 1} \frac{x^k}{c_h^{k+1}} \right] + g(x) =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h^{p_h}(x - c_h)} + g(x).$$

D'altra parte, per il teorema di WEIERSTRASS, la più generale funzione intera avente gli zeri $c_1, c_2, \ldots$ è:

$$(2)\qquad f(x) = e^{l(x)} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k\, c_h^k}},$$

dove $l(x)$ è una funzione intera qualunque. Supponendo che i numeri p_h delle formole (1), (2) coincidano, e che sia $g(x) = l'(x)$, si ha (articolo 139):

$$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Questa formola mostra la stretta connessione esistente fra il teorema di WEIERSTRASS e quello di MITTAG-LEFFLER (*).

(*) Le formole (1) dell'art. 140, (6), (7), (8) dell'art. 141, in cui deve supporsi $g(x) = 1$, sono esempi di deduzione dello sviluppo di MITTAG-LEFFLER da quello di WEIERSTRASS.

147. Vogliamo ora accennare alle successive estensioni date da Mittag-Leffler al suo teorema.

Sia dato un insieme A isolato, e quindi numerabile, di punti $c_1, c_2, \ldots$, ed un insieme numerabile di funzioni intere $g_1(x)$, $g_2(x), \ldots$ Si vuol costruire una funzione analitica uniforme, la quale sia regolare dappertutto eccetto che nei punti di $A + A^{(1)}$, e nel punto c_h abbia la caratteristica $g_h\left(\dfrac{1}{x - c_h}\right)$ (*).

Supponiamo dapprima che $A + A^{(1)}$ non divida il piano in più parti (cfr. art. 54).

L'insieme delle distanze d'un punto c_h dai punti di $A^{(1)}$ ha un limite inferiore non nullo ϱ_h; infatti, se fosse $\varrho_h = 0$, c_h sarebbe punto limite di $A^{(1)}$, cioè apparterrebbe ad $A^{(2)}$, e quindi (art. 38) ad $A^{(1)}$, mentre A ed $A^{(1)}$ non hanno elementi comuni. Però la successione $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ ha per limite zero, cioè, comunque si prenda un numero positivo τ, può trovarsi un indice n tale, che per ogni $h > n$ sia $\varrho_h < \tau$. Se ciò non fosse, si potrebbe scegliere τ in modo, che al di là di qualunque indice n esistessero elementi ϱ_h maggiori di τ; cioè esisterebbero infiniti ϱ_h maggiori di un τ così scelto. L'insieme dei punti corrispondenti c_h non potrebbe avere per punto limite nessuno dei punti di $A^{(1)}$; ma d'altra

(*) Se c_h fosse all'infinito, invece di $g_h\left(\dfrac{1}{x - c_h}\right)$ dovrebbe prendersi $g_h(x)$.

parte, contenendo infiniti elementi, dovrebbe (art. 35) avere dei punti limiti, i quali necessariamente apparterrebbero ad $A^{(1)}$; donde la contraddizione.

Poichè dunque $\lim\limits_{h=\infty} \varrho_h = 0$, scelto ad arbitrio un numero positivo ε, e preso per ciascun indice h un punto d_h di $A^{(1)}$ tale che sia:

$$| c_h - d_h | < \varrho_h + \frac{\varepsilon}{h},$$

ne segue:

$$\lim_{h=\infty} (c_h - d_h) = 0. \tag{1}$$

Dopo ciò, se, facendo centro in d_h, descriviamo una circonferenza di raggio $> | c_h - d_h |$, la funzione $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ sarà sviluppabile all'esterno di questa circonferenza in una serie di potenze di $\frac{1}{x - d_h}$:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{hk} (x - d_h)^{-k},$$

che può anche scriversi:

$$g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h}\right)^k,$$

posto:

$$a_{hk} = b_{hk} (c_h - d_h)^k.$$

La serie è equiconvergente fuori di qualunque cerchio col centro in d_h di raggio maggiore di $|c_h - d_h|$; quindi, preso comunque un numero $\lambda < 1$, e una serie convergente a termini positivi $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h$, potrà determinarsi per ciascun valore di h un indice p_h tale, che per:

$$(2) \qquad \left| \frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right| < \lambda$$

sia:

$$\left| \sum_{k=p_h}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right| < \varepsilon_h ,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$(3) \qquad \left| g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right| < \varepsilon_h .$$

Ora, se x_0 è un punto non appartenente ad $A + A^{(1)}$, il limite inferiore δ delle sue distanze dai punti di questo insieme dovrà essere maggiore di zero; giacchè nel caso contrario esso sarebbe punto limite di A o di $A^{(1)}$, cioè apparterrebbe ad $A^{(1)}$ o ad $A^{(2)}$, e quindi in ogni caso (art. 38) ad $A^{(1)}$. Descritto pertanto col centro in x_0 un cerchio di raggio $\frac{\delta}{2}$, tutti i punti interni a questo cerchio disteranno dai punti di $A + A^{(1)}$ non meno di $\frac{\delta}{2}$, cioè sarà per tali punti:

$$| x - c_h | \geq \frac{\delta}{2} \quad , \quad | x - d_h | \geq \frac{\delta}{2}.$$

D'altra parte, per la (1), può prendersi n in modo, che per ogni $h > n$ sia:

$$| c_h - d_h | < \lambda \frac{\delta}{2}.$$

Ne segue che per ogni $h > n$ e per tutti i punti x interni al cerchio descritto intorno ad x_0 sarà soddisfatta la condizione (2); e quindi la serie doppia assolutamente ed uniformemente convergente per la (3):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right] = \\ = \sum_{k=p_h}^{\infty} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k$$

potrà, coll'applicazione del lemma di WEIERSTRASS (art. 72), trasformarsi in una serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} (x - x_0)^k$$

convergente entro il cerchio sopra considerato. Inoltre la funzione analitica:

$$\sum_{h=1}^{n} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right]$$

è regolare entro il cerchio stesso; quindi la funzione:

$$(4)\quad F(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[g_h \left(\frac{1}{x - c_h} \right) - \sum_{k=1}^{p_h - 1} b_{hk} \left(\frac{c_h - d_h}{x - d_h} \right)^k \right]$$

è pure regolare entro questo cerchio. Come si vede, questa funzione è indipendente tanto dalla scelta del punto x_0 che dal valore dell'indice n; quindi si è costruita una funzione la quale è regolare nell'intorno di qualunque punto non appartenente all'insieme $A + A^{(1)}$.

Si dimostra poi come prima, che $F(x)$ ha nel punto c_m la caratteristica $g_m \left(\frac{1}{x - c_m} \right)$, e che qualunque altra funzione avente le stesse sue proprietà è della forma $F(x) + g(x)$, dove $g(x)$ è una funzione regolare dappertutto tranne tutt'al più in punti dell'insieme $A^{(1)}$.

Se $A + A^{(1)}$ divide il piano in più parti e forma il contorno completo di una di esse C (cfr. art. 54), l'espressione aritmetica (4) rappresenterà una funzione analitica non continuabile fuori del campo C.

148. Dalle cose dette possiamo trarre una conseguenza notevole. L'insieme A dei punti singolari d'una funzione $f(x)$ è chiuso; se esso non è perfetto, si ha:

$$A = A^{(1)} + B,$$

dove B è un insieme non nullo, isolato, e quindi numerabile. Denotandone gli elementi con c_1, $c_2, \ldots$, potremo (art. 118) costruire la caratteristica $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$ della funzione $f(x)$ nel punto c_h. Formiamo ora (v. art. prec.) una funzione $F(x)$, la quale abbia per punti singolari i punti di $B + B^{(1)}$, e nel punto c_h abbia la caratteristica $g_h\left(\frac{1}{x - c_h}\right)$. Osservando che $B^{(1)}$ è contenuto in $A^{(1)}$, perchè B è contenuto in A, potremo concludere che la funzione:

$$g(x) = f(x) - F(x)$$

è regolare anche nei punti di B e non può avere singolarità che in punti di $A^{(1)}$.

Cioè: *Data una funzione avente dei punti singolari isolati, possiamo costruire un'altra funzione regolare in tutti i punti in cui lo è la funzione data ed inoltre anche in questi punti.* Più brevemente: possiamo far perdere alla funzione le sue singolarità isolate.

149. L'insieme chiuso $A^{(1)}$, se non è perfetto, conterrà un insieme isolato; in questo caso si ripeterà per la $g(x)$ il procedimento svolto. E così di seguito. Vogliamo vedere sino a qual punto possa spingersi innanzi un tale processo.

Poichè l'insieme A dei punti singolari d'una funzione analitica è chiuso, si ha (artt. 49, 50):

$$A = (A - A^{(1)}) + \sum_{\beta<\alpha} (A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}) + A^{(\alpha)},$$

dove α è un certo numero ordinale della prima o della seconda classe, e $A^{(\alpha)}$ è perfetto (*); β percorre successivamente tutti i numeri ordinali minori di α. Gli aggregati $A - A^{(1)}$, $A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)}$ sono isolati, e quindi numerabili. Scriveremo:

$$A^{(\beta)} - A^{(\beta+1)} = B_\beta,$$

quindi:

$$A = \sum_{\beta<\alpha} B_\beta + A^{(\alpha)},$$

intendendo che β prenda anche il valore zero.

Sieno $c_{\beta 1}, c_{\beta 2}, \ldots$ i punti di B_β. Prendiamo ad arbitrio una serie doppia convergente a termini positivi (quindi convergente indipendentemente dall'ordine dei termini):

$$\sum_{i,h=1}^{\infty}{}' \tau_{ih};$$

stabiliamo poi una corrispondenza biunivoca e completa tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri β (v. art. 29), e, denotando con i il numero naturale corrispondente al numero ordinale β, poniamo $\tau_{ih} = \varepsilon_{\beta h}$; la serie doppia potrà scriversi:

$$\sum_{\substack{\beta<\alpha \\ h=1,2,\ldots}} \varepsilon_{\beta h}.$$

(*) O in particolare nullo (v. la nota all'art. 48).

Se $g_{0h}\left(\frac{1}{x - c_{0h}}\right)$ è la caratteristica della funzione considerata $f(x)$ nel punto singolare isolato c_{0h}, si potrà, mediante la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{0h}$, che, come parte d'una serie convergente a termini positivi, è convergente, costruire (art. 148) una funzione $F_0(x)$ avente nei punti c_{0h} egual caratteristica; la funzione:

$$f_1(x) = f(x) - F_0(x)$$

sarà regolare in questi punti. Analogamente si potrà, mediante la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{1h}$, costruire una funzione $F_1(x)$ tale, che:

$$f_1(x) = f(x) - F_0(x) - F_1(x)$$

sia regolare anche nei punti c_{1h}. Così continuando, si avrà infine una funzione:

$$f_\alpha(x) = f(x) - \sum_{\beta<\alpha} F_\beta(x),$$

la quale non avrà altri punti singolari che i punti di $A^{(\alpha)}$.

Bisogna però dimostrare che $\sum_{\beta<\alpha} F_\beta(x)$ è una funzione analitica.

Se x_0 è un punto non appartenente ad A, siccome A è chiuso, potrà descriversi col centro in x_0 un cerchio C non contenente nè nell'interno nè sul contorno punti di A. Col procedimento dell'art. 147 si può dimostrare che $F_\beta(x)$ è regolare in questo cerchio, e di più, che:

$$|F_\beta(x)| < \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_{\beta h};$$

la funzione $F_\beta(x)$ potrà rappresentarsi con una serie di potenze di $x - x_0$ equiconvergente in C. Ricordando la corrispondenza poc'anzi stabilita fra i numeri ordinali β e i numeri i della serie naturale, e scrivendo, per due elementi corrispondenti β, i:

$$F_\beta(x) = G_i(x),$$

avremo in tutto il cerchio C:

$$|G_i(x)| < \sum_{h=1}^{\infty} \tau_{ih},$$

e quindi:

$$\left|\sum_{\beta<\alpha} F_\beta(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)\right| < \sum_{i,h=1}^{\infty} \tau_{ih},$$

la quale ultima serie è convergente. Alla somma $\sum_{i=1}^{\infty} G_i(x)$, equiconvergente entro C, può pertanto applicarsi il lemma di WEIERSTRASS (articolo 72), sicchè essa rappresenta una funzione analitica regolare entro C. Si dimostra poi nel modo solito che la funzione $\sum_{\beta<\alpha} F_\beta(x)$ ha nei punti c le stesse caratteristiche della $f(x)$, sicchè la $f_\alpha(x)$ è regolare in tutti i punti non appartenenti ad $A^{(\alpha)}$.

Se $A^{(\alpha)}$ fosse nullo, $f_\alpha(x)$ si ridurrebbe ad una costante.

PARTE TERZA

TEORIA DELLE FUNZIONI INTERE TRASCENDENTI

I teoremi di Laguerre e le loro generalizzazioni.

150. Sotto questo titolo comprendiamo una serie di teoremi, che in gran parte hanno avuto origine da alcune notevoli ricerche di E. LAGUERRE (1834-1886) sulle funzioni intere (*).

(*) *C. R. Ac. Paris*, T. 94, 1882, p. 160-163, 635-638; T. 95, 1882, p. 828-831; T. 98, 1884, p. 79-91; *Journ. de math.*, S. III, T. 9, 1883, p. 99-146; *Oeuvres*, T. 1, p. 3-47, 167-180.

Per il contenuto di questo capitolo v.: A. BASSI, *Rend. Ist. Lomb.*, S. II, T. 23, 1895, p. 979-985, 1119-1123; *G. di mat.*, T. 36, 1898, p. 100-144; T. 37, 1899, p. 326-366; E. CESÀRO, *G. di mat.*, T. 22, 1884, p. 192-201; *C. R. Ac. Paris*, T. 99, 1884, p. 26-27; *Nouv. Ann. de math.*, S. III, T. 4, 1885, p. 321-327, 328-330; L. DESAINT, *C. R. Ac. Paris*, T. 120, 1895, p. 548-550; C. HERMITE, *C. R. Ac. Paris*, T. 99, 1884, p. 27; J. C. MARX, *Proefschrift*, Utrecht, 1896; S. PINCHERLE, *Rend. Ist. Lomb.*, S. II, T. 11, 1878, Osserviamo anzitutto, che una funzione semplice è determinata completamente (a meno di un fattore costante), quando ne sono date le radici. Supposto che la funzione non s'annulli nell'origine, e stabilito che in questo punto essa debba prendere il valore 1, i coefficienti si determinano come funzioni simmetriche (trascendenti) delle radici come segue.

Sia:

$$(1)\quad f(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h$$

la funzione semplice di rango p considerata, la quale soddisfa alla condizione $f(0) = 1$, e poniamo:

$$(2)\qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^k} = s_k, \qquad k > p,$$

osservando che le serie (2) sono tutte assolutamente convergenti. Dalla (1) segue (art. 139):

---

p. 391-398; D. Pizzarello, *Sulle funzioni trascendenti intere*, Messina, 1900; J. von Puzyna, *Monatsh, f. Math.*, T. 3, 1892, p. 1-15; M. G. Sittignani, *G. di mat.*, T. 46, 1908, p. 247-284; T. 47, 1909, p. 77-108; M. L. M. de Sparre, *C. R. Ac. Paris*, T. 102, 1886, p. 740-743; G. Vivanti, *G. di mat.*, T. 22, 1884, p. 243-261, 378-380; T. 23, 1885, p. 96-122; T. 26, 1888, p. 303-314; *Rend. Ist. Lomb.*, S. II, T. 32, 1899, p. 569-571; A. Witting, *Zeitschr. f. Math.*, T. 30, 1885, p. 274-278.

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{c_h{}^k},$$

e, poichè coll'applicazione del lemma di WEIERSTRASS si può invertire l'ordine delle sommazioni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{k=p+1}^{\infty} x^{k-1}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^k} = -\sum_{k=p+1}^{\infty} s_k\, x^{k-1},$$

da cui:

$$f'(x) = -f(x)\sum_{k=p+1}^{\infty} s_k\, x^{k-1},$$

ossia:

$$\sum_{h=1}^{\infty} h\, a_h\, x^{h-1} = -\left[1+\sum_{h=1}^{\infty} a_h\, x^h\right]\sum_{k=p+1}^{\infty} s_k\, x^{k-1}$$

$$= -x^p\left[1+\sum_{h=1}^{\infty} a_h\, x^h\right]\sum_{k=0}^{\infty} s_{p+1+k}\, x^k .$$

Di qui segue anzitutto:

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0,$$

inoltre:

$$(p+h)\, a_{p+h} = -s_{p+h} \quad \text{per} \quad 1 \leq h \leq p+1,$$

$$(2p+1+h)\, a_{2p+1+h} = -s_{2p+1+h} - a_{p+1}\, s_{p+h} - \\ - a_{p+2}\, s_{p+h-1} - \ldots - a_{p+h}\, s_{p+1} \text{ per } h = 1, 2, \ldots,$$

relazioni che permettono di determinare successivamente tutti i coefficienti dello sviluppo.

Queste relazioni possono considerarsi come una generalizzazione delle note *formole di* GIRARD.

151. *Una sostituzione lineare intera:*

$$x = a X + b$$

trasforma una funzione normale di genere p *in una della stessa natura.*

Sia la funzione:

$$f(x) = e^{g(x)} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove p è il minimo numero intero che rende assolutamente convergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}}$, e $g(x)$ è un polinomio di grado $\leq p$. Poichè a valori finiti di x corrispondono valori finiti di X e viceversa, la trasformata $F(X)$ della $f(x)$ sarà ancora una funzione intera; le sue radici saranno:

$$X = C_h = \frac{c_h - b}{a} \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

oltre alla radice m-pla $X = -\frac{b}{a}$.

Preso ad arbitrio un numero positivo $\sigma < 1$, può trovarsi un indice n tale, che per ogni $h > n$ sia $\left|\frac{b}{c_h}\right| < \sigma$; segue allora, per gli stessi valori di h:

$$(1-\sigma)\,|\,c_h\,|<|\,c_h-b\,|<(1+\sigma)\,|\,c_h\,|\,,$$

e quindi, per qualunque $q>n$:

$$|\,a\,|^{p+1}\sum_{h=n+1}^{q}\frac{1}{|\,c_h\,|^{p+1}}>(1-\sigma)^{p+1}\sum_{h=n+1}^{q}\frac{1}{|\,C_h\,|^{p+1}}\,,$$

$$|\,a\,|^{p}\sum_{h=n+1}^{q}\frac{1}{|\,c_h\,|^{p}}<(1+\sigma)^{p}\sum_{h=n+1}^{q}\frac{1}{|\,C_h\,|^{p}}.$$

Di qui si vede che la funzione $F(X)$ è di rango p; essa quindi avrà l'espressione (*):

$$e^{G(X)+m\sum\limits_{k=1}^{p}(-a)^k\frac{X^k}{k\,b^k}}\left(1+\frac{a\,X}{b}\right)^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{X}{C_h}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{X^k}{kC_h{}^k}}\,,$$

denotando $G(X)$ una funzione intera.

D'altra parte l'espressione di $F(X)$ dedotta direttamente da quella di $f(x)$ è:

$$e^{g(aX+b)}\,(a\,X+b)^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{a\,X+b}{c_h}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p}\frac{(aX+b)^k}{k\,c_h{}^k}}\,.$$

Ora:

$$1-\frac{X}{C_h}=1-\frac{a\,X}{c_h-b}=\left(1-\frac{a\,X+b}{c_h}\right)\frac{c_h}{c_h-b}\,,$$

(*) Una lieve modificazione di forma sarebbe necessaria, se una delle radici c_h fosse eguale a b.

quindi:

$$\frac{\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{a\,X+b}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{(aX+b)^k}{k\,c_h^k}}}{\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{X}{C_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{X^k}{kC_h^k}}}=e^{\varphi(X)},$$

dove $\varphi(X)$ è un polinomio di grado $\leq p$. Paragonando pertanto le due espressioni di $F(X)$, si ha:

$$e^{g(aX+b)+\varphi(X)}=\frac{1}{b^m}\,e^{G(X)+m\sum_{k=1}^{p}(-a)^k\frac{X^k}{k\,b^k}},$$

donde risulta che $G(X)$ è un polinomio di grado $\leq p$.

152. Il risultato si semplifica, se $b=0$. Infatti, per la sostituzione $x=a\,X$, alle formole dell'art. prec. si sostituiscono le seguenti:

$$F(X)=e^{G(X)}X^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{X}{C_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{X^k}{kC_h^k}},$$

$$F(X)=e^{g(aX)}a^m X^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{a\,X}{c_h}\right)e^{\sum_{k=1}^{p}\frac{a^kX^k}{kc_h^k}},$$

dove $C_h=\frac{c_h}{a}$; ne segue:

$$e^{G(X)} = e^{g(aX)}\, a^m ,$$

cioè, a meno di una costante additiva:

$$G(X) = g(a X).$$

In particolare: *La sostituzione* x = a X *trasforma una funzione semplice di rango* p *in una funzione della stessa natura.*

Lo stesso può dirsi per $p = 0$ della sostituzione $x = a X + b$, giacchè in questo caso il polinomio $\varphi(X)$ dell'articolo precedente si riduce ad una costante. Ma ciò non è più vero in generale per $p > 0$; però per $p = 1$ si può scegliere b in modo che la sostituzione $x = a X + b$ muti una data funzione semplice in una funzione semplice. Si ha infatti in questo caso:

$$X) = \frac{\prod\limits_{h=1}^{\infty} \frac{c_h - aX - b}{c_h}\, e^{\frac{aX+b}{c_h}}}{\prod\limits_{h=1}^{\infty} \frac{c_h - aX - b}{c_h - b}\, e^{\frac{aX}{c_h - b}}} = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b}{c_h}\right) e^{-\frac{a\,b\,X}{c_h(c_h-b)} + \frac{b}{c_h}}$$

$$= \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b}{c_h}\right) e^{\frac{b}{c_h}} \cdot e^{-abX \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h(c_h-b)}} = \frac{1}{b^m} f(b)\, e^{abX \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h(b-c_h)}},$$

sicchè, se b soddisfa all'equazione:

$$(1) \qquad \frac{m}{b} + b \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h\,(b - c_h)} = 0 ,$$

$$f(\varrho e^{i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h e^{i(\gamma_h + h\theta)},$$

$$\bar{f}(\varrho e^{-i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h e^{-i(\gamma_h + h\theta)},$$

ossia:

$$f(\varrho e^{i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \cos(\gamma_h + h\theta) +$$

$$+ i \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\theta),$$

$$\bar{f}(\varrho e^{-i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \cos(\gamma_h + h\theta) -$$

$$- i \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\theta).$$

Se $x = \varrho e^{i\theta}$ è una radice di $f(x)$, si ha:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \cos(\gamma_h + h\theta) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\theta) = 0,$$

quindi $\bar{f}(\varrho e^{-i\theta}) = 0$, cioè $x = \varrho e^{-i\theta}$ è radice di $\bar{f}(x)$.

In particolare: *Se i coefficienti di una funzione intera sono tutti reali, le sue radici sono reali o complesse coniugate due a due.*

Il teorema reciproco è vero generalmente *soltanto per le funzioni semplici.*

154. *Tra due radici reali consecutive d'una funzione intera a coefficienti reali è compreso un nu-*

$$f(\varrho\, e^{i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h\, e^{i(\gamma_h + h\theta)},$$

$$\bar{f}(\varrho\, e^{-i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h\, e^{-i(\gamma_h + h\theta)},$$

ossia:

$$f(\varrho\, e^{i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \cos(\gamma_h + h\,\theta) +$$

$$+ i \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\,\theta),$$

$$\bar{f}(\varrho\, e^{-i\theta}) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \cos(\gamma_h + h\,\theta) -$$

$$- i \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\,\theta).$$

Se $x = \varrho\, e^{i\theta}$ è una radice di $f(x)$, si ha:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \cos(\gamma_h + h\,\theta) = \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h \operatorname{sen}(\gamma_h + h\,\theta) = 0,$$

quindi $\bar{f}(\varrho\, e^{-i\theta}) = 0$, cioè $x = \varrho\, e^{-i\theta}$ è radice di $\bar{f}(x)$.

In particolare: *Se i coefficienti di una funzione intera sono tutti reali, le sue radici sono reali o complesse coniugate due a due.*

Il teorema reciproco è vero generalmente *soltanto per le funzioni semplici.*

154. *Tra due radici reali consecutive d'una funzione intera a coefficienti reali è compreso un nu-*

mero dispari di radici reali della sua derivata (**teorema di Rolle**) (*).

Sieno μ e $\nu > \mu$ due radici consecutive della funzione intera a coefficienti reali $f(x)$, e sieno m, n i loro ordini di moltiplicità. Sarà (art. 116):

$$f(\mu) = f'(\mu) = \ldots = f^{(m-1)}(\mu) = 0 \,, \; f^{(m)}(\mu) \neq 0,$$
$$f(\nu) = f'(\nu) = \ldots = f^{(n-1)}(\nu) = 0 \,, \; f^{(n)}(\nu) \neq 0,$$

quindi (art. 81) nell'intorno di μ e di ν rispettivamente:

$$f(x) = (x - \mu)^m \left[\frac{1}{m!} f^{(m)}(\mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x - \mu}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\mu) + \ldots \right],$$

$$f(x) = (x - \nu)^n \left[\frac{1}{n!} f^{(n)}(\nu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x - \nu}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\nu) + \ldots \right],$$

da cui:

$$f'(x) = (x - \mu)^{m-1} \left[\frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\mu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x - \mu}{m!} f^{(m+1)}(\mu) + \ldots \right],$$

(*) Enunciato da M. Rolle (1652-1719) per i polinomi.

$$f'(x) = (x-\nu)^{(n-1)}\left[\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\nu) + \right.$$
$$\left. + \frac{x-\nu}{n!} f^{(n+1)}(\nu) + \dots\right],$$

e:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\mu)\,\frac{\dfrac{1}{m!} f^{(m)}(\mu) + \dfrac{x-\mu}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\mu) + \dots}{\dfrac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(\mu) + \dfrac{x-\mu}{m!} f^{(m+1)}(\mu) + \dots} =$$
$$= (x-\mu)\,\varphi(x),$$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-\nu)\,\frac{\dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\nu) + \dfrac{x-\nu}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\nu) + \dots}{\dfrac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(\nu) + \dfrac{x-\nu}{n!} f^{(n+1)}(\nu) + \dots} =$$
$$= (x-\nu)\,\psi(x).$$

La funzione $\varphi(x)$ è continua per $x = \mu$, ed è $\varphi(\mu) = \dfrac{1}{m}$; così $\psi(x)$ è continua per $x = \nu$, ed è $\psi(\nu) = \dfrac{1}{n}$. Quindi può prendersi sull'asse reale un intorno a destra ε_1 di μ in cui $\varphi(x) > 0$, ed un intorno a sinistra ε_2 di ν in cui $\psi(x) > 0$; ne segue che per ogni punto x di ε_1 e per ogni punto x di ε_2 sarà rispettivamente:

$$\frac{f(x)}{f'(x)} > 0\ ,\ \frac{f(x)}{f'(x)} < 0\,.$$

D'altra parte, poichè le radici μ, ν sono consecutive, $f(x)$ nell'intervallo $\mu\nu$ non cambia segno; ne segue che deve cambiar segno $f'(x)$, e quindi che questa funzione nell'intervallo $\mu\nu$ ha un numero dispari di radici (*).

155. *Se i coefficienti d'una funzione intera sono reali e presentano un numero finito* r *di variazioni di segno, il numero delle radici reali e positive della funzione è* r, *o è minore di* r *di un numero pari* (**teorema di Cartesio**) (**).

Poichè il teorema sussiste evidentemente per $r = 0$, basterà dimostrarlo per induzione completa.

Posto al solito:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h,$$

le variazioni di segno, essendo in numero finito, saranno tutte comprese tra a_0 e un certo coefficiente a_n, mentre questo e tutti i successivi avranno un medesimo segno, che possiamo supporre positivo. Quindi, se γ è un numero qualunque maggiore di tutte le radici positive dell'equazione:

(*) Crediamo inutile enunciare le proprietà delle funzioni di una variabile reale su cui si fonda la dimostrazione, proprietà ben note, e che si trovano esposte in tutti i trattati di Analisi infinitesimale.

(**) Enunciato da CARTESIO o R. DESCARTES (1596-1650) per i polinomi.

$$\sum_{h=0}^{n} a_h x^h = 0\,,$$

sarà $f(\gamma) > 0$, e per conseguenza tutte le radici positive di $f(x)$ saranno minori di γ. Indichiamo con m il loro numero, necessariamente finito. Se μ, ν sono due di esse tra loro consecutive, e se k è un numero intero positivo qualunque, la funzione:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x^k}$$

è regolare e reale nell'intervallo $\mu\,\nu$ e s'annulla in μ e in ν; si ha inoltre:

$$\text{(1)} \qquad \varphi'(x) = \frac{x\,f'(x) - k\,f(x)}{x^{k+1}}\,,$$

quindi:

$$\frac{\varphi(x)}{x\,\varphi'(x)} = \frac{\dfrac{f(x)}{f'(x)}}{x - k\,\dfrac{f(x)}{f'(x)}}\,,$$

donde si vede che il rapporto $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$ in punti abbastanza vicini a μ e ν ha lo stesso segno del rapporto $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Ne segue che alla $\varphi(x)$ è applicabile il ragionamento fatto nell'articolo precedente per la $f(x)$, sicchè può concludersi che $\varphi'(x)$ ha un numero dispari di radici comprese tra μ e ν, e lo stesso ha luogo, in virtù della (1), per la funzione intera:

$$\psi(x) = x f'(x) - k f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} (h-k) a_h x^h .$$

Se dunque m sono le radici positive di $f(x)$, saranno almeno $m-1$ quelle di $\psi(x)$.

Dopo ciò supponiamo che i coefficienti della $f(x)$ presentino una variazione tra a_s e a_{s+1}. Fatto $k = s$, confrontiamo la successione dei coefficienti di $f(x)$:

$$a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots$$

e quella dei coefficienti di $\psi(x)$:

$$-s a_0, -(s-1) a_1, \ldots, -a_{s-1}, 0, a_{s+1}, 2 a_{s+2}, \ldots$$

Nelle parti delle due successioni che vanno dal primo termine all's-esimo e dall' $(s+2)$-esimo in avanti, le variazioni sono le stesse; invece nella parte a_{s-1}, a_s, a_{s+1} della prima successione vi sono due variazioni od una sola secondochè a_{s-1} ed a_{s+1} hanno o no lo stesso segno, mentre corrispondentemente nella parte $-a_{s-1}$, $0, a_{s+1}$ della seconda ve n'è una o nessuna. Quindi il numero delle variazioni di $\psi(x)$ è $r-1$; e poichè supponiamo il teorema vero per $r-1$, sarà $m-1 \leq r-1$, donde $m \leq r$.

Osservando poi che $f(0) = a_0$, e che, per aver supposto $a_n > 0$, è $f(\gamma) > 0$, si conclude che, a seconda che $a_0 \gtrless 0$, cioè che il numero delle variazioni è pari o dispari, è pari o dispari il numero delle radici positive; e con ciò il teorema risulta completamente dimostrato.

Dal teorema di Cartesio segue che, se tutti i coefficienti di una funzione intera a coefficienti reali, da un certo punto in avanti, sono positivi (negativi), il numero delle radici positive è finito, e quindi può assegnarsi un numero reale e positivo l tale, che per ogni $x > l$ sia:

$$f(x) > 0 \; (< 0).$$

In altre parole, se, comunque si prenda il numero positivo R, esistono valori di x maggiori di R, per cui:

$$f(x) \leq 0 \; (\geq 0),$$

la funzione ha infiniti coefficienti non positivi (non negativi).

156. Il teorema di Rolle assume per i polinomi questa forma più precisa:

Se un'equazione algebrica ha **tutte** *le radici reali, tra due radici consecutive di essa ne è compresa* **una ed una sola** *della sua derivata.*

E ne segue:

Se un'equazione algebrica ha **tutte** *le radici reali, lo stesso ha luogo per la sua derivata.*

Per le funzioni trascendenti questa seconda proprietà non è una conseguenza necessaria della prima. Ma può aggiungersi che nessuno dei due teoremi sussiste in generale per tali funzioni.

Quanto al primo, basta osservare che, se $f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$ è una funzione semplice di rango $p > 1$ avente tutte le radici reali e diverse da zero, è $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ (art. 150), sicchè tra la massima radice negativa e la minima radice positiva di $f(x)$ è compresa una radice p-pla nulla di $f'(x)$.

Per l'altra proprietà basta citare l'esempio della funzione:

$$f(x) = x\, e^{x^2},$$

che ha l'unica radice $x = 0$, mentre la sua derivata:

$$f'(x) = (1 + 2x^2)\, e^{x^2}$$

ha le due radici imaginarie $x = \pm \dfrac{i}{\sqrt{2}}$.

Si presenta pertanto l'opportunità di studiare in quali casi le proprietà dei polinomi continuino a sussistere anche per le funzioni intere trascendenti.

157. *Se la funzione semplice* f (x) *ha tutte le radici reali, tra due sue radici consecutive non aventi segno opposto* (ma una delle quali può anche essere nulla) *è compresa una ed una sola radice di* f′ (x).

Sia la funzione semplice di rango p a radici reali:

$$f(x) = x^n \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{h=1}^{p} \frac{x^k}{k\, c_h^k}},$$

da cui:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x} + x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\,(x - c_h)}.$$

Se μ, ν sono due radici reali e non nulle di $f'(x)$, si ha:

$$\frac{m}{\mu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\,(\mu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m}{\nu^{p+1}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\,(\nu - c_h)} = 0,$$

da cui:

$$\frac{m\,(\mu^{p+1} + \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\,\nu^{p+1}} + (\mu + \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\,(\mu - c_h)\,(\nu - c_h)} - 2 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}\,(\mu - c_h)\,(\nu - c_h)} = 0,$$

$$\frac{m(\mu^{p+1} - \nu^{p+1})}{\mu^{p+1}\,\nu^{p+1}} + (\mu - \nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\,(\mu - c_h)\,(\nu - c_h)} = 0,$$

e di qui:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (\mu - c_h)(\nu - c_h)} = - \frac{m (\mu^{p+1} - \nu^{p+1})}{\mu^{p+1} \nu^{p+1} (\mu - \nu)},$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1} (\mu - c_h)(\nu - c_h)} = - \frac{m (\mu^p - \nu^p)}{\mu^p \nu^p (\mu - \nu)},$$

ossia:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (\mu - c_h)(\nu - c_h)} =$$

$$= - \frac{m}{\mu^{p+1} \nu^{p+1}} (\mu^p + \mu^{p-1} \nu + \ldots + \mu \nu^{p-1} + \nu^p),$$

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1} (\mu - c_h)(\nu - c_h)} =$$

$$= - \frac{m}{\mu^p \nu^p} (\mu^{p-1} + \mu^{p-2} \nu + \ldots + \mu \nu^{p-2} + \nu^{p-1}).$$

Supponiamo ora μ e ν comprese tra due radici consecutive di $f(x)$. Allora, qualunque sia h, il prodotto $(\mu - c_h)(\nu - c_h)$ è positivo, e quindi il primo membro della (1), se p è pari, o quello della (2), se p è dispari, è essenzialmente positivo. D'altra parte, se $m = 0$, i secondi membri delle (1), (2) sono nulli; se $m \neq 0$, μ e ν sono necessariamente dello stesso segno, quindi il secondo membro della (1) o quello della (2), secondochè p è pari o dispari, è essenzialmente negativo. Dunque l'ipotesi fatta è assurda.

In particolare: *Se la funzione semplice* f (x) *ha tutte le radici reali e diverse da zero, tra due sue radici consecutive non può esser compresa più di una radice non nulla di* f′ (x), giacchè il primo membro della (1) o della (2), secondo la parità di p, è positivo, mentre i secondi membri sono nulli. E poichè $f'(x)$ ha nell'origine una radice p-pla, può concludersi che tra la massima radice negativa e la minima radice positiva di $f(x)$ è o no compresa una radice non nulla di $f'(x)$, secondochè il rango p è pari o dispari (*).

158. *Se una funzione di genere 0 o 1 ha tutte le radici reali, e se la costante che nel secondo caso figura nell'esponente esterno è reale, anche la derivata ha tutte le radici reali.*

(*) Questo modo particolare di comportarsi della funzione nell'intervallo contenente l'origine non deve far meraviglia, quando si consideri che, mentre l'origine non è caratterizzata da alcuna proprietà speciale per rispetto ad un polinomio, giacchè essa può essere trasportata ovunque mediante una sostituzione lineare senza che il polinomio venga essenzialmente alterato, lo stesso non può dirsi per una funzione trascendente intera *semplice*, la quale, in generale, per una sostituzione lineare si muta in una funzione non semplice (art. 151). L'eccezione deve cessare per $p = 0$ e per $p = 1$, giacchè allora una funzione semplice può trasformarsi mediante una sostituzione lineare, arbitraria nel primo caso, opportunamente scelta nel secondo, in una funzione semplice. Ed infatti per $p = 0$ e per $p = 1$ anche nell'intervallo tra la massima radice negativa e la minima radice positiva di $f(x)$ è compresa *una sola* radice di $f'(x)$; essa è diversa da zero per $p = 0$, nulla per $p = 1$.

Se:

$$f(x) = x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right)$$

è una funzione di genere zero, essa può porsi (art. 138) sotto forma d'una funzione di genere uno:

$$(1) \qquad f(x) = e^{\alpha x} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\frac{x}{c_h}},$$

dove:

$$\alpha = -\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h}.$$

Quindi la (1) può rappresentare indifferentemente una funzione di genere 0 o di genere 1; e, nelle ipotesi del teorema, anche nel primo caso α è reale.

Dalla (1) segue:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha + \frac{m}{x} + x \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h (x - c_h)}.$$

Sia $x = \mu + i\nu$ una radice di $f'(x)$; dovrà essere:

$$0 = \alpha + \frac{m}{\mu + i\nu} + (\mu + i\nu) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h (\mu + i\nu - c_h)}$$

$$= \left[\alpha + \frac{m\mu}{\mu^2 + \nu^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu - c_h) + \nu^2}{c_h [(\mu - c_h)^2 + \nu^2]}\right] -$$

$$- i\nu \left[\frac{m}{\mu^2 + \nu^2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu - c_h)^2 + \nu^2}\right],$$

dove il coefficiente di $-i\nu$ è essenzialmente positivo. Dunque $\nu = 0$.

159. *Se una funzione semplice ha tutte le radici reali e diverse da zero, anche la sua derivata ha tutte le radici reali.*

Sia:

$$f(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{h=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

da cui:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}.$$

Se $x = \mu + i\nu$ è una radice di $f'(x)$, si ha:

$$(1) \qquad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (\mu + i\nu - c_h)} =$$

$$= \mu \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p [(\mu - c_n)^2 + \nu^2]} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1}[(\mu - c_h)^2 + \nu^2]}$$

$$- i\nu \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p [(\mu - c_h)^2 + \nu^2]},$$

da cui, supposto $\nu \neq 0$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p [(\mu - c_h)^2 + \nu^2]} = 0, \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-1} [(\mu - c_h)^2 + \nu^2]} = 0, \end{cases}$$

relazioni incompatibili, perchè l'uno o l'altro dei primi membri, a seconda della parità di p, è essenzialmente positivo. Dunque $\nu = 0$.

Può aggiungersi che, *se tutte le radici di* f (x) *sono positive, sono pure positive tutte quelle di* f′ (x) (a parte la radice nulla p-pla). Infatti in questo caso le somme che figurano nelle (2) sono ambedue positive, e quindi, per la (1), μ non può essere negativo.

Per le funzioni semplici di rango pari ciò sussiste anche se vi è una radice nulla. Infatti dalla:

$$\frac{x f'(x)}{f(x)} = m + x^{p+1} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}$$

si vede che, se le c_h sono tutte positive e p è pari, $f'(x)$ non può annullarsi per x negativo. Invece, se p è dispari, il secondo membro è finito per tutti i valori negativi di x, ha il valore $m > 0$ per $x = 0$, e tende a $-\infty$ per $\lim x = -\infty$, quindi $f'(x)$ ha almeno una radice negativa.

160. *Se la funzione:*

$$(1)\quad \mathrm{f(x)} = e^{\alpha x^{r+1} + \beta x^r} x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k c_h^k}},$$

dove r *è quello dei due numeri* p, p + 1 *che è dispari, ha tutte le radici reali, ed inoltre* α e β *sono reali e* $\alpha \leq 0$, *la funzione* f′ (x) *ha un nu-*

$r = 2\,E\left(\frac{p}{2}\right) + 1$

mero finito di radici complesse, e gli argomenti di queste ultime sono compresi negli intervalli tra $(2\mathrm{k}-1)\frac{\pi}{\mathrm{r}}$ *e* $2\mathrm{k}\frac{\pi}{\mathrm{r}}$ *o tra* $-(2\mathrm{k}-1)\frac{\pi}{\mathrm{r}}$ *e* $-2\mathrm{k}\frac{\pi}{\mathrm{r}}$, *dove* k *prende tutti i valori interi e positivi non maggiori di* $\frac{\mathrm{r}-1}{2}$ (*). *Inoltre fra due radici consecutive di* f (x) *non aventi segno opposto è compresa una sola radice (reale) della derivata.*

Dalla (1) segue:

$$\frac{f'(x)}{x^{r-1} f(x)} = (r+1)\,\alpha\, x + r\,\beta + \frac{m}{x^r} + \\ + x^{\varepsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^p\,(x-c_h)},$$

dove:

$$\varepsilon = p + 1 - r = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{per } p \begin{matrix}\text{pari} \\ \text{dispari}\end{matrix}.$$

Ora:

$$\frac{x^{\varepsilon}}{c_h{}^p\,(x-c_h)} = \left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{c_h{}^{r-1}\,(x-c_h)},$$

$$\left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon\,\frac{x-c_h}{c_h},$$

(*) Cioè, se si divide il piano in $2\,r$ spazi angolari eguali mediante raggi uscenti dall'origine, uno dei quali sia l'asse reale positivo, e se, a partire da questo in ambi i sensi, si assegna a ciascuno degli spazi un numero progressivo, le radici complesse cadono soltanto negli spazi portanti numeri pari.

quindi:

$$(2) \qquad \frac{f'(x)}{x^{r-1} f(x)} = (r+1)\,\alpha\, x + r\,\beta + \frac{m}{x^r} + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{1}{c_h^{r-1}(x - c_h)} + \frac{\varepsilon}{c_h^r}\right].$$

Sia $x = \varrho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ una radice complessa di $f'(x)$; sarà:

$$0 = (r+1)\,\alpha\,\varrho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + r\,\beta + \\ + \frac{m}{\varrho^r}(\cos r\,\theta - i \operatorname{sen} r\,\theta) \\ + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho\cos\theta - c_h + i\,\varrho \operatorname{sen}\theta)} + \frac{\varepsilon}{c_h^r}\right],$$

ed eguagliando a zero il coefficiente di i:

$$(3) \qquad 0 = (r+1)\,\alpha\,\varrho \operatorname{sen}\theta - \frac{m}{\varrho^r}\operatorname{sen} r\,\theta - \\ - \varrho \operatorname{sen}\theta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2 + c_h^2 - 2\,c_h\,\varrho\cos\theta)},$$

da cui:

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{sen} r\,\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \\ = \left[(r+1)\,\alpha - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h^{r-1}(\varrho^2 + c_h^2 - 2\,c_h\,\varrho\cos\theta)}\right]\frac{\varrho^{r+1}}{m},$$

quindi, tenuto conto che $\alpha \leq 0$ e che r è dispari:

$$\frac{\operatorname{sen} r\,\theta}{\operatorname{sen}\,\theta} < 0\,.$$

Cioè, k essendo un numero intero qualunque (che può limitarsi tra 1 e $\frac{r-1}{2}$):

Se $0 < \theta < \pi$, $(2\,k - 1)\,\frac{\pi}{r} < \theta < 2\,k\,\frac{\pi}{r}$;

Se $0 > \theta > -\pi$, $-(2\,k - 1)\,\frac{\pi}{r} > \theta > -2\,k\,\frac{\pi}{r}$.

Indicando con $-L$ l'espressione tra parentesi quadre che figura nella (4), si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} r\,\theta}{\operatorname{sen}\,\theta} = -\,L\,\frac{\varrho^{r+1}}{m}\,,$$

da cui:

$$\varrho^{r+1} = -\,\frac{m}{L}\,\frac{\operatorname{sen} r\,\theta}{\operatorname{sen}\,\theta}. \tag{5}$$

Ora per $\varrho > 2$, $|\,c_h\,| > 2$ si ha:

$$\varrho + |\,c_h\,| < |\,c_h\,|\,\varrho,$$

quindi:

$$\varrho^2 + c_h^2 + 2\,|\,c_h\,|\,\varrho < c_h^2\,\varrho^2,$$

ed a maggior ragione:

$$\varrho^2 + c_h^2 - 2\, c_h\, \varrho \cos\theta < c_h^2\, \varrho^2,$$

sicchè, supposto che sia $|\, c_h \,| \geq 2$ per ogni $h \geq s$, si ha:

$$\sum_{h=s}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r-1}\,(\varrho^2 + c_h^2 - 2\, c_h\, \varrho \cos\theta)} > \frac{1}{\varrho^2} \sum_{h=s}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r+1}},$$

e per conseguenza:

$$L > \frac{1}{\varrho^2} \sum_{h=s}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r+1}},$$

dove la serie del secondo membro è a termini positivi e convergente. Inoltre:

$$|\operatorname{sen} r\,\theta\,| \leq 1\,,\ |\operatorname{sen}\theta\,| \geq \operatorname{sen}\frac{\pi}{r}\,,$$

quindi segue dalla (5):

$$\varrho^{r+1} < \frac{m\,\varrho^2}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{r} \displaystyle\sum_{h=s}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r+1}}},$$

e:

$$\varrho^{r-1} < \frac{m}{\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{r} \displaystyle\sum_{h=s}^{\infty} \frac{1}{c_h^{r+1}}}.$$

Pertanto, se $r > 1$, cioè se $p > 1$, i moduli delle radici complesse di $f'(x)$ sono tutti minori di un numero finito e determinato, e quindi le radici stesse sono in numero finito.

Infine può osservarsi che, variando x in senso crescente tra due radici reali consecutive di $f(x)$ non aventi segno opposto, il secondo membro della (2) varia in senso costantemente decrescente da $+\infty$ a $-\infty$, mentre $x^{r-1} f(x)$ conserva segno costante, sicchè nell'intervallo considerato cade una ed una sola radice di $f'(x)$.

Per $r=1$, cioè per una funzione di rango 0 o 1, la (3) diviene:

$$0 = \operatorname{sen}\theta \left[2\,\alpha\,\varrho - \frac{m}{\varrho} - \varrho \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho^2 + c_h{}^2 - 2\,c_h\,\varrho\cos\theta}\right],$$

che è soddisfatta soltanto da $\operatorname{sen}\theta = 0$. In questo caso la $f'(x)$ non può avere radici complesse, risultato che comprende quello trovato nell'art. 158.

Lo stesso può dirsi per r qualunque se $m=0$; infatti in questo caso la (3) si riduce a:

$$0 = \varrho\operatorname{sen}\theta \left[(r+1)\,\alpha - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^{r-1}\,(\varrho^2 + c_h{}^2 - 2c_h\varrho\cos\theta)}\right],$$

la quale, per $\varrho > 0$, non può essere soddisfatta se non è $\operatorname{sen}\theta = 0$. Osserviamo infine, che il teorema si applica in particolare alle funzioni semplici ($\alpha = \beta = 0$).

161. *Se una funzione intera* f (x) *di rango* p *ha tutte le radici reali e diverse da zero, e se il suo fattore esponenziale esterno ha la forma* $e^{\alpha x^{r+1}}$, *dove* α *è reale e negativo, e* r *è un numero*

intero non minore di $p+2-\varepsilon$, *essendo* ε *eguale a 0 oppure ad 1 secondochè* p *è pari o dispari, gli argomenti delle radici complesse di* $f'(x)$ *sono compresi negli intervalli tra* $(2k-1)\dfrac{\pi}{r-p+\varepsilon}$ *e* $2k\dfrac{\pi}{r-p+\varepsilon}$ *e tra* $-(2k-1)\dfrac{\pi}{r-p+\varepsilon}$ *e* $-2k\dfrac{\pi}{r-p+\varepsilon}$, *dove* k *prende tutti i valori interi e positivi non maggiori di* $\dfrac{r-p+\varepsilon}{2}$.
Inoltre, se r *è dispari, tra due radici consecutive della funzione è compresa una sola radice (reale) della derivata.*

Dalla:

$$f(x) = e^{\alpha x^{r+1}} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k\, c_h^k}}$$

segue:

$$\frac{f'(x)}{x^{p-\varepsilon} f(x)} = (r+1)\, \alpha\, x^{r-p+\varepsilon} + x^{\varepsilon} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}.$$

Ora (v. art. prec.):

$$\frac{x^{\varepsilon}}{c_h^p (x-c_h)} = \left(\frac{x}{c_h}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{c_h^{p-\varepsilon}(x-c_h)} =$$

$$= \left(1 + \varepsilon \frac{x-c_h}{c_h}\right) \frac{1}{c_h^{p-\varepsilon}(x-c_h)}$$

$$= \frac{1}{c_h^{p-\varepsilon}(x-c_h)} + \frac{\varepsilon}{c_h^{p-\varepsilon+1}},$$

quindi:

$$\frac{f'(x)}{x^{p-\varepsilon}\,f(x)} = (r+1)\,\alpha\,x^{r-p+\varepsilon} + \sum_{h=1}^{\infty}\left[\frac{1}{c_h^{p-\varepsilon}\,(x-c_h)} + \frac{\varepsilon}{c_h^{p-\varepsilon+1}}\right]. \tag{1}$$

Se $x = \varrho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ è una radice complessa di $f'(x)$, si ha, ponendo in luogo di x la sua espressione ed eguagliando a zero il coefficiente di i:

$$0 = (r+1)\,\alpha\,\varrho^{r-p+\varepsilon} \operatorname{sen}(r-p+\varepsilon)\,\theta - \varrho \operatorname{sen}\theta \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p-\varepsilon}\,(\varrho^2 + c_h^2 - 2\,c_h\,\varrho\cos\theta)},$$

e di qui segue:

$$\frac{\operatorname{sen}(r-p+\varepsilon)\,\theta}{\operatorname{sen}\ \theta} < 0\,.$$

Cioè, k essendo un intero qualunque (che può limitarsi ai valori positivi e $\leq \frac{r-p+\varepsilon}{2}$):

Se $$0 < \theta < \pi\,,$$

$$(2\,k-1)\frac{\pi}{r-p+\varepsilon} < \theta < 2\,k\,\frac{\pi}{r-p+\varepsilon};$$

Se $$0 > \theta > -\pi\,,$$

$$-(2\,k-1)\frac{\pi}{r-p+\varepsilon} > \theta > -2\,k\,\frac{\pi}{r-p+\varepsilon}.$$

L'ultima parte del teorema risulta immediatamente dalla relazione (1), considerando che $p - \varepsilon$ è sempre pari.

La condizione che r sia dispari è essenziale per quest'ultima parte, come lo dimostra il seguente esempio.

La funzione:

$$f(x) = e^{-x^3}\left(1 - \frac{9}{79}x^2\right),$$

dove $r = 2$, $p = 0$, $\alpha = -1$, ha le sole radici:

$$x = \pm\frac{\sqrt{79}}{3};$$

la sua derivata:

$$f'(x) = e^{-x^3}\left(-\frac{18}{79}x - 3x^2 + \frac{27}{79}x^4\right)$$

ha le quattro radici:

$$x = 3\ ,\ x = 0\ ,\ x = \frac{-9 \pm \sqrt{73}}{6},$$

di cui le tre ultime sono comprese tra le due radici di $f(x)$.

162. Un teorema analogo a quelli ora stabiliti è il seguente, che ci limitiamo ad enunciare:

Se una funzione intera di genere r *a coefficienti* *reali ha un numero finito* m *di radici complesse, la sua derivata è pure di genere* r, *ed ha al più* m + r *radici complesse.*

163. I risultati degli artt. 151 e 152 permettono di generalizzare come segue alcuni dei teoremi stabiliti nei precedenti articoli:

Se le radici d'una funzione semplice di rango zero stanno tutte sopra una retta, sulla stessa retta stanno quelle della sua derivata.

Se le radici d'una funzione semplice di rango uno stanno sopra una retta contenente una radice della derivata, tutte le altre radici della derivata stanno su questa retta.

Se le radici d'una funzione semplice di rango qualunque sono diverse da zero e stanno sopra una retta passante per l'origine, sulla stessa retta stanno le radici della derivata.

164. *Se le radici d'una funzione semplice di rango uno stanno tutte sopra una retta, le radici della sua derivata stanno tutte dalla stessa parte di questa retta in cui si trova l'origine.*

Possiamo supporre la retta perpendicolare all'asse reale, giacchè, se non lo fosse, ci ridurremmo a questo caso con un'opportuna sostituzione $x = a y$; ed è lecito anche supporre tutte le radici diverse da zero (*).

Posto $x = u + iv$, sia $u = \mu$ l'equazione della retta considerata; sarà $c_h = \mu + i v_h$. Se $x = u + i v$ è una radice della derivata, dev'essere:

(*) V. la nota all'art. 157.

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h\,(x - c_h)} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu + i\,\nu_h)\,[(u - \mu) + i\,(v - \nu_h)]} = P + i\,Q,$$

dove:

$$P = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu\,(u - \mu) - \nu_h\,(v - \nu_h)}{(\mu^2 + \nu_h^2)\,[(u - \mu)^2 + (v - \nu_h)^2]},$$

$$Q = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{2\,\mu\,\nu_h - \nu_h\,u - \mu\,v}{(\mu^2 + \nu_h^2)\,[(u - \mu)^2 + (v - \nu_h)^2]}.$$

Si ha dunque:

$$0 = P = Q\,;$$

quindi:

$$0 = u^2\,P - u\,v\,Q =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu\,(u - \mu)\,(u^2 + v^2) + (\mu\,v - \nu_h\,u)^2}{(\mu^2 + \nu_h^2)\,[(u - \mu)^2 + (v - \nu_h)^2]}$$

$$= \mu\,(u - \mu)\,(u^2 + v^2) \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu^2 + \nu_h^2)\,[(u - \mu)^2 + (v - \nu_h)^2]}$$

$$+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\mu\,v - \nu_h\,u)^2}{(\mu^2 + \nu_h^2)\,[(u - \mu)^2 + (v - \nu_h)^2]},$$

donde segue:

$$\mu\,(u - \mu) < 0,$$

relazione che dimostra l'asserto.

165. *Se le radici d'una funzione semplice di rango zero stanno sopra due rette parallele, le radici della derivata sono tutte comprese fra queste due rette.*

Con una sostituzione lineare possiamo ridurci al caso in cui le due rette sono perpendicolari all'asse reale ed equidistanti dall'origine, sicchè sarà $c_h = \varepsilon_h \mu + i \nu_h$, dove alcune delle ε_h valgono 1, altre -1.

Se $x = u + i v$ è una radice della derivata, dovrà essere:

$$0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(u - \varepsilon_h \mu) + i (v - \nu_h)};$$

eguagliando a zero la parte reale, e ponendo:

$$(u - \varepsilon_h \mu)^2 + (v - \nu_h)^2 = \delta_h^2,$$

si ha di qui:

$$u \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2} - \mu \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta_h^2} = 0.$$

Ora:

$$\left| \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_h}{\delta_h^2} \right| < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^2},$$

quindi $\left| \frac{u}{\mu} \right| < 1$, relazione che dimostra il teorema.

166. *Se le radici d'una funzione semplice di rango zero stanno tutte in un semipiano, nello stesso semipiano stanno tutte le radici della derivata.*

Possiamo supporre che il semipiano sia quello superiore all'asse reale, sicchè, posto $c_h = \mu_h + i\,\nu_h$, si ha $\nu_h > 0$ per tutti i valori di h.

Se $x = u + i\,v$ è una radice della derivata, dev'essere:

$$(1)\quad 0 = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{x - c_h} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(u - \mu_h) + i\,(v - \nu_h)},$$

ed eguagliando a zero il coefficiente di i:

$$-v \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(u - \mu_h)^2 + (v - \nu_h)^2} + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{(u - \mu_h)^2 + (v - \nu_h)^2} = 0,$$

donde risulta $v > 0$.

167. *Se le radici di una funzione semplice di rango zero stanno tutte entro un angolo acuto, entro lo stesso angolo stanno tutte le radici della derivata.*

Supposto, ciò che è sempre lecito, che il vertice dell'angolo sia l'origine, che uno dei suoi lati sia l'asse reale positivo, e l'altro cada nel primo quadrante, e indicando con λ il coefficiente angolare di questo secondo lato, sarà per tutti i valori di h:

$$(1) \qquad \mu_h > 0 \; , \; \nu_h > 0 \; , \; \frac{\nu_h}{\mu_h} < \lambda \, .$$

Posto:

$$(u - \mu_h)^2 + (v - \nu_h)^2 = \delta_h{}^2 \, ,$$

segue dalla (1) dell'art. prec.:

$$u \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h{}^2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta_h{}^2} \; , \; v \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h{}^2} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h{}^2} \, ,$$

quindi:

$$u > 0 \; , \; v > 0 \; , \; \frac{v}{u} = \frac{\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{\nu_h}{\delta_h{}^2}}{\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{\mu_h}{\delta_h{}^2}} \, ;$$

ma quest'ultimo rapporto, per le diseguaglianze (1), è compreso tra 0 e λ, quindi:

$$0 < \frac{v}{u} < \lambda \, .$$

168. *Se* $c_1 , c_2 , \ldots$ *sono le radici d'una funzione intera, e se, posto* $| c_h | = \gamma_h$, *ed essendo* p *un numero intero non negativo e* μ , ν *due numeri positivi, si ha, da un certo valore* n *di* h *in avanti:*

$$(1) \qquad \mu < \gamma_h{}^{p-1} \, (\gamma_{h+1} - \gamma_h) < \nu \, ,$$

la funzione è di rango p (**teorema di De Sparre**) (*).

Sia dapprima $p = 0$. Si ha allora:

$$\mu < \frac{\gamma_{h+1} - \gamma_h}{\gamma_h},$$

da cui:

$$\frac{\dfrac{1}{\gamma_{h+1}}}{\dfrac{1}{\gamma_h}} < \frac{1}{1+\mu} < 1,$$

che dimostra la convergenza della serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h}$.

Sia ora $p > 0$. Dalla (1) segue anzitutto:

$$\gamma_{h+1} > \gamma_h + \frac{\mu}{\gamma_h^{p-1}}.$$

Elevando ambi i membri alla potenza p, si ha di qui:

$$\gamma_{h+1}^p > \gamma_h^p + p\,\mu + \ldots > \gamma_h^p + p\,\mu,$$

quindi:

$$\gamma_{n+1}^p > \gamma_n^p + p\,\mu,\ \gamma_{n+2}^p > \gamma_{n+1}^p + p\,\mu > \gamma_n^p + 2\,p\,\mu,$$

(*) Il teorema di De Sparre (v. la citazione nella nota all'art. 150) è alquanto meno generale, giacchè l'ipotesi è che l'espressione, la quale figura nella (1), tenda ad un limite positivo per $\lim h = \infty$.

ed a maggior ragione, per ogni $h > n$:

$$\gamma_h{}^p > (h - n)\, p\, \mu\,.$$

Ne segue:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h{}^{p+1}} < \frac{1}{(p\,\mu)^{\frac{p+1}{p}}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{p+1}{p}}}\,.$$

Ma, come si è già ricordato (art. 140), la serie del secondo membro è convergente, quindi lo è anche quella del primo membro, e la funzione è, al più, di rango p.

Inoltre dalla:

$$\gamma_h{}^{p-1}\,(\gamma_{h+1} - \gamma_h) < \nu$$

segue:

$$\gamma_{h+1} < \gamma_h + \frac{\nu}{\gamma_h{}^{p-1}}\,,$$

ed elevando alla potenza p:

$$\gamma_{h+1}{}^p < \gamma_h{}^p + \nu\left[p + \binom{p}{2}\frac{\nu}{\gamma_h{}^p} + \binom{p}{3}\frac{\nu^2}{\gamma_h{}^{2p}} + \cdots\right].$$

D'altra parte, poichè $\lim\limits_{h=\infty} \gamma_h = \infty$, potremo supporre n abbastanza grande perchè per ogni $h \geq n$ sia $\gamma_h{}^p > \nu$; sarà allora:

$$\gamma_{h+1}{}^p < \gamma_h{}^p + \nu\,(2^p - 1)\,.$$

Quindi, indicando con θ il numero positivo $\nu(2^p - 1)$:

$$\gamma_{n+1}{}^p < \gamma_n{}^p + \theta\,,$$

$$\gamma_{n+2}{}^p < \gamma_{n+1}{}^p + \theta < \gamma_n{}^p + 2\,\theta < 2\,(\gamma_n{}^p + \theta)\,,$$

e in generale, per ogni $h > n$:

$$\gamma_h{}^p < (h - n)\,(\gamma_n{}^p + \theta)\,.$$

Ne segue:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h{}^p} > \frac{1}{\gamma_n{}^p + \theta} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h}\,;$$

ma la serie del secondo membro è divergente, quindi lo è a maggior ragione quella del primo membro.

Pertanto il rango della funzione è precisamente p.

169. *Se* f (x) *è una funzione intera qualunque, l'integrale di* $\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$, *esteso ad una circonferenza col centro nell'origine non passante per alcuno degli zeri di* f (x), *è eguale al prodotto di* $2\pi\mathrm{i}$ *per il numero (tenuto conto della moltiplicità) degli zeri di* f (x) *contenuti entro la circonferenza.*

Si ha, colle solite notazioni:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + \frac{m}{x} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h{}^{p_h}\,(x - c_h)}.$$

Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono gli zeri contenuti nel cerchio considerato, il cui raggio diremo ϱ, e se denotiamo in generale con $I_\rho\,[\varphi\,(x)]$ l'integrale della funzione $\varphi\,(x)$ esteso alla circonferenza ϱ, si ha anzitutto (artt. 84, 85):

$$I_\rho\,[g'\,(x)] = 0\ ,\ I_\rho\left[\frac{m}{x}\right] = 2\,\pi\,i\,m\,.$$

Inoltre la funzione:

$$\frac{x^{p_h}}{c_h{}^{p_h}\,(x - c_h)}$$

per ogni $h > n$ è regolare entro il cerchio ϱ, quindi (art. 104):

$$I_\rho\left[\frac{x^{p_h}}{c_h{}^{p_h}\,(x - c_h)}\right] = 0 \qquad\qquad (h > n);$$

e, poichè la serie:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h{}^{p_h}\,(x - c_h)}$$

è equiconvergente entro ϱ (art. 139), si ha conseguentemente:

$$I_\rho\left[\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{x^{p_h}}{c_h{}^{p_h}\,(x - c_h)}\right] = 0\,.$$

Sia invece $h \leq n$; per $|\,x\,| = \varrho$ sarà:

$$\frac{x^{p_h}}{c_n^{p_h}(x - c_h)} = \frac{x^{p_h}}{c_n^{p_h}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_h^k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_n^{k-p_h} x^{p_h-k-1}.$$

Il solo termine di questo sviluppo che dà un integrale diverso da zero è quello in cui figura la potenza -1 di x, cioè in cui $k = p_h$; esso è semplicemente $\frac{1}{x}$, e il suo integrale è $2\pi i$.

Si ha dunque:

$$I_\rho \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] = 2\pi i (m + n),$$

relazione che dimostra il teorema.

170. *Per ogni funzione intera* f (x) *di genere* p, *e per ogni numero intero* q > p, *si ha:*

$$(1) \qquad \lim_{\rho=\infty} I_\rho \left[\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{\mathrm{x}^{\mathrm{q}}\,\mathrm{f}(\mathrm{x})}\right] = 0 \ (*).$$

Abbiasi la funzione:

(*) S'intende che ρ non può prendere i valori corrispondenti ai cerchi che passano per qualche punto c_h. Sicchè il significato preciso del teorema enunciato è questo: Preso ad arbitrio un numero positivo σ, si può trovare un numero R tale, che per ogni circonferenza di raggio $\rho > R$ non passante per alcun punto c_h sia:

$$\left| I_\rho \left[\frac{f'(x)}{x^q f(x)}\right] \right| < \sigma.$$

$$f(x) = e^{g(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k\, c_h^k}} \quad (*),$$

dove $g(x)$ è un polinomio di grado $\leq p$; ne segue:

$$\frac{f'(x)}{x^q\, f(x)} = \frac{g'(x)}{x^q} + \frac{m}{x^{q+1}} + \frac{1}{x^{q-p}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\, (x - c_h)}.$$

Prendiamo dapprima $q = p + 1$; la relazione scritta diviene:

$$(2)\quad \frac{f'(x)}{x^{p+1}\, f(x)} = \frac{g'(x)}{x^{p+1}} + \frac{m}{x^{p+2}} + \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\, (x - c_h)}$$

$$= \sum_{h=1}^{p} h\, b_h\, x^{h-p-2} + \frac{m}{x^{p+2}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}\, (x - c_h)} -$$

$$- \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^{p+1}},$$

posto:

$$g(x) = \sum_{h=0}^{p} b_h\, x^h.$$

Poichè gli esponenti h–p–2 che figurano nella relazione (2) sono tutti ≤ -2, gli integrali dei termini relativi estesi al cerchio ϱ sono nulli

(*) La funzione può porsi sotto questa forma anche se il suo rango è minore di p; v. art. 139.

(art. 84); così pure è nullo l'integrale di $\frac{m}{x^{p+2}}$, mentre:

$$I_\rho\left[\frac{1}{x}\right] = 2\pi i\,.$$

Inoltre, se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono i punti c_h contenuti nel cerchio ϱ, si ha (cfr. art. prec.):

$$I_\rho\left[\sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{p+1}(x-c_h)}\right] = 0\,,$$

mentre per $h \leq n$ e per $|x| = \varrho$ si ha:

$$\frac{1}{c_h{}^{p+1}(x-c_h)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_h{}^{k-p-1}}{x^{k+1}}\,,$$

da cui:

$$I_\rho\left[\frac{1}{c_h{}^{p+1}(x-c_h)}\right] = \frac{2\pi i}{c_h{}^{p+1}} \qquad (h \leq n)\,.$$

Concludendo:

$$I_\rho\left[\frac{f'(x)}{x^{p+1}f(x)}\right] = 2\pi i\left[\sum_{h=1}^{n}\frac{1}{c_h{}^{p+1}} - \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{p+1}}\right] =$$

$$= -2\pi i\sum_{h=n+1}^{\infty}\frac{1}{c_h{}^{p+1}}\,,$$

donde risulta la (1).

Il risultato si estende ad ogni $q > p$, considerando che una funzione di genere p può sempre mettersi sotto forma di funzione di genere maggiore di p (art. 139).

171. *Se* f (x) *è una funzione semplice avente tutte le radici reali, o, più generalmente, una funzione come quella dell'art. 160,* f′ (x) *ha lo stesso rango di* f (x).

Sieno $d_1, d_2, \ldots$ le radici positive di $f(x)$ disposte in ordine crescente, $-e_1, -e_2, \ldots$ le sue radici negative disposte in ordine di valor assoluto crescente. Tra d_h e d_{h+1}, e così tra $-e_{h+1}$ e $-e_h$, cade una sola radice di $f'(x)$ (art. 160); le diremo rispettivamente s_h e $-t_h$. Oltre a ciò la $f'(x)$ potrà avere radici in numero finito comprese tra $-e_1$ e d_1, ed altre complesse pure in numero finito; tali radici non influiscono sulla determinazione del rango. Dalle relazioni:

$$d_h < s_h < d_{h+1}\ ,\ e_h < t_h < e_{h+1}$$

segue per qualunque numero positivo q:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h{}^q} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h{}^q} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_{h+1}{}^q} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{d_h{}^q},$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h{}^q} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h{}^q} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_{h+1}{}^q} = \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{e_h{}^q},$$

sicchè tutti e soli gli esponenti q che rendono convergenti le serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{d_h{}^q}$, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{e_h{}^q}$ rendono convergenti ambe le serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{s_h{}^q}$, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{t_h{}^q}$. Ma le prime due serie sono convergenti per $q = p + 1$, mentre una almeno di esse è divergente per $q = p$, quindi lo stesso avverrà per le altre due serie. Da ciò risulta che il rango di $f'(x)$ è p.

172. La formola (1) dell'art. 103 può assumersi come definizione dell'integrale definito di una funzione qualunque, presa questa parola nel significato più generale di una variabile che ha un valore determinato in ciascun punto di un dato campo; e si potrebbe dimostrare che, se la funzione è continua sulla curva d'integrazione, il limite che figura nella formola citata è indipendente dalla scelta dei punti intermedi.

Sia $\varphi(x)$ una funzione qualunque, e prendiamo come linea d'integrazione una circonferenza di raggio ϱ col centro nell'origine, sulla quale $\varphi(x)$ sia finita e continua. Imaginando divisa la circonferenza in n parti eguali a partire dall'intersezione coll'asse reale positivo, e ponendo $\frac{2\pi}{n} = \alpha$, $x = \varrho\, e^{i\theta}$, sarà:

$$I_\varrho \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right] = \int_\varrho \frac{\varphi(x)}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \varrho\, (e^{ik\alpha} - e^{i(k-1)\alpha}) \frac{\varphi(\varrho\, e^{i(k-1)\alpha})}{\varrho\, e^{i(k-1)\alpha}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} (e^{i\alpha} - 1) \sum_{k=1}^{n} \varphi(\varrho\, e^{i(k-1)\alpha}) =$$

$$= \lim_{n=\infty} n\,(e^{i\alpha} - 1) \,.\, \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\varrho\, e^{i(k-1)\alpha}) \,.$$

Ora:

$$\lim_{n=\infty} n\,(e^{i\alpha}-1) =$$

$$= \lim_{n=\infty} n \left[\frac{2\pi i}{n} + \frac{1}{2!}\left(\frac{2\pi i}{n}\right)^2 + \dots\right] = 2\pi i\,,$$

quindi:

$$(1)\qquad I_\rho\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right] = 2\pi i \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi(\rho\, e^{i(k-1)\alpha})\,.$$

Segue di qui che, se $M_\rho[\varphi(x)]$ denota il massimo modulo di $\varphi(x)$ sulla circonferenza di raggio ρ, si ha:

$$(2)\qquad M_\rho[\varphi(x)] \geq \frac{1}{2\pi}\left| I_\rho\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]\right|.$$

Ne segue pure, indicando con $R[\varphi(x)]$ la parte reale della funzione $\varphi(x)$:

$$\frac{1}{2\pi i} I_\rho\left[\frac{R[\varphi(x)]}{x}\right] = R\left[\frac{1}{2\pi i} I_\rho\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]\right].$$

Inoltre:

$$I_\rho\left[\frac{|\varphi(x)|}{x}\right] = 2\pi i \lim_{u=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\varphi(\rho\, e^{i(k-1)\alpha})|\,,$$

da cui:

$$(3)\qquad \left| I_\rho\left[\frac{|\varphi(x)|}{x}\right]\right| \geq \left| I_\rho\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]\right|.$$

Ancora, se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due funzioni reali per tutti i valori di x, e se su tutta la linea d'integrazione è $\varphi(x) \leq \psi(x)$:

$$\frac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right] \leq \frac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\frac{\psi(x)}{x}\right]. \tag{4}$$

173. Ciò premesso, vogliamo calcolare:

$$I_\rho \left[\frac{\lg|1-x|}{x}\right],$$

supposto $\varrho \neq 1$.

Si ha, colle notazioni dell'art. prec.:

$$1 - x = 1 - \varrho e^{i\theta} = 1 - \varrho \cos\theta - \varrho i \operatorname{sen}\theta,$$

quindi:

$$|1-x|^2 = 1 - 2\varrho\cos\theta + \varrho^2 = \\ = (1-\varrho e^{i\theta})(1-\varrho e^{-i\theta}),$$

e:

$$\sum_{k=1}^{n} \lg|1-\varrho e^{i(k-1)\alpha}| = \\ = \frac{1}{2} \lg \prod_{k=1}^{n} [1-\varrho e^{i(k-1)\alpha}][1-\varrho e^{-i(k-1)\alpha}].$$

Ora:

$$\prod_{k=1}^{n} (1-\varrho e^{i(k-1)\alpha}) = \prod_{k=1}^{n} (1-\varrho e^{-i(k-1)\alpha}) = 1-\varrho^n,$$

quindi:

$$\sum_{k=1}^{n} \lg \left| 1 - \varrho\, e^{i(k-1)\alpha} \right| = \frac{1}{2} \lg (1 - \varrho^n)^2 = \lg \left| 1 - \varrho^n \right|.$$

Per $\varrho < 1$ si ha:

$$\lim_{n=\infty} \left| 1 - \varrho^n \right| = 1,$$

quindi;

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg \left| 1 - \varrho^n \right|}{n} = 0;$$

per $\varrho > 1$:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lg \left| 1 - \varrho^n \right|}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{\lg (\varrho^n - 1)}{n} =$$

$$= \lg \varrho + \lim_{n=\infty} \frac{\lg \left(1 - \dfrac{1}{\varrho^n} \right)}{n} = \lg \varrho .$$

Pertanto:

$$I_\rho \left[\frac{\lg \left| 1 - x \right|}{x} \right] = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 2\pi i \lg \varrho \end{matrix} \right. \text{ per } \varrho \lesseqgtr 1 .$$

174. Abbiasi ora la funzione intera:

$$f(x) = e^{g(x)}\, x^m \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h} \right) e^{P_h(x)},$$

dove:

$$P_h(x) = \sum_{k=1}^{p_h} \frac{x^k}{k\, c_h^k}.$$

Ne segue:

$$| f(x) | = e^{R[g(x)]} \, | x |^m \prod_{h=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{x}{c_h} \right| e^{R[P_h(x)]} ,$$

e quindi:

$$\lg | f(x) | = R\,[g(x)] + m \lg | x | + \\ + \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \lg \left| 1 - \frac{x}{c_h} \right| + R\,[P_h(x)] \right\}.$$

Ora, se $g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^h$, si ha (art. 84):

$$I_\rho \left[\frac{g(x)}{x} \right] = I_\rho \left[\frac{b_0}{x} + \sum_{h=0}^{\infty} b_h x^{h-1} \right] = 2\pi i\, b_0 ,$$

$$I_\rho \left[\frac{P_h(x)}{x} \right] = I_\rho \left[\sum_{k=1}^{p_h} \frac{x^{k-1}}{k\, c_h^k} \right] = 0 ,$$

e di qui (v. art. prec.):

$$I_\rho \left\{ \frac{R\,[g(x)]}{x} \right\} = 2\pi i\, R\,[b_0] ,$$

$$I_\rho \left\{ \frac{R\,[P_h(x)]}{x} \right\} = 0 ;$$

inoltre:

$$I_\rho \left[\frac{\lg | x |}{x} \right] = 2\pi i \lg \varrho ,$$

$$I_\rho\left[\frac{\lg\left|1-\frac{x}{c_h}\right|}{x}\right]=\left\{\begin{matrix}0\\ 2\pi i\lg\frac{\rho}{|c_h|}\end{matrix}\right.\text{ per }|c_h|\gtrless\rho.$$

Quindi, supposto che entro il cerchio ρ cadano gli zeri $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (*):

$$I_\rho\left[\frac{\lg|f(x)|}{x}\right]=$$
$$=2\pi i\left\{R[b_0]+m\lg\rho+\sum_{h=1}^{n}\lg\frac{\rho}{|c_h|}\right\}.$$

Ponendo $\frac{f(x)}{x^m}=f_1(x)$, ed osservando che $f_1(0)=e^{b_0}$, può scriversi:

$$I_\rho\left[\frac{\lg|f(x)|}{x}\right]=$$
$$=2\pi i\left\{\lg|f_1(0)|+(m+n)\lg\rho-\sum_{h=1}^{n}\lg|c_h|\right\},$$

od anche:

$$I_\rho\left[\frac{\lg|f(x)|}{x}\right]=2\pi i\lg\frac{|f_1(0)|\,\rho^{m+n}}{|c_1 c_2\ldots c_n|}.$$

(*) È ovvio che la circonferenza ρ non deve passare per alcuno degli zeri di $f(x)$.

Di qui segue:

$$M_\rho [\lg | f(x) |] \geq \lg \frac{| f_1(0) | \varrho^{m+n}}{| c_1 c_2 \ldots c_n |},$$

e quindi (**teorema di Jensen**) (*):

$$(1) \qquad M_\rho [f(x)] \geq \frac{| f_1(0) | \varrho^{m+n}}{| c_1 c_2 \ldots c_n |}.$$

La relazione sussiste a maggior ragione per ogni numero $n' < n$:

$$(2) \qquad M_\rho [f(x)] \geq \frac{| f_1(0) | \varrho^{m+n'}}{| c_1 c_2 \ldots c_{n'} |},$$

giacchè per $h \leq n$ si ha:

$$\frac{\varrho}{| c_i |} > 1.$$

Se in particolare $m = 0$ e $f(0) = 1$, le (1), (2) divengono:

$$M_\rho [f(x)] \geq \frac{\varrho^n}{| c_1 c_2 \ldots c_n |} \geq \frac{\varrho^{n'}}{| c_1 c_2 \ldots c_{n'} |}.$$

(*) J. L. W. V. Jensen, *Acta math.*, T. 22, 1899, p. 359-364. V. anche: E. Goursat, *Bull. sc. math.*, S. II, T. 26, 1902, p. 298-302; E. Lindelöf, *Acta Soc. sc. Fennicae*, T. 31, 1902, p. 1-79; J. Petersen, *Acta math.*, T. 23, 1900, p. 185-190; G. Vivanti, *Math. Ann.*, T. 58, 1904, p. 457-468.

175. Come altra applicazione dell'estensione del concetto di integrale stabilita nell'art. 172, vogliamo calcolare $I_\rho\left[\frac{\bar{x}^r}{x^p}\right]$, dove $\bar{x}$ denota il numero coniugato di x, e p, r sono interi positivi.

Colle notazioni già usate si ha:

$$I_\rho\left[\frac{\bar{x}^r}{x^p}\right] = \lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n} \varrho^{r-p+1}\left(e^{ik\alpha} - e^{i(k-1)\alpha}\right) e^{-i(k-1)(p+r)\alpha}$$

$$= \varrho^{r-p+1}\lim_{n=\infty}\left(e^{i\alpha} - 1\right)\sum_{k=1}^{n} e^{-i(k-1)(p+r-1)\alpha}.$$

Poichè $p + r - 1 \neq 0$, la somma ultimamente scritta, appena n superi $p + r - 1$, sarà nulla (cfr. art. 71), onde si ha:

$$I_\rho\left[\frac{\bar{x}^r}{x^p}\right] = 0.$$

Di qui segue, per ogni p intero e positivo:

$$I_\rho\left[\frac{\sum_{h=1}^{\infty} a_h\,\bar{x}^h}{x^p}\right] = 0,$$

che può considerarsi come un complemento delle formole trovate nell'art. 86.

Abbiasi ora una serie di potenze:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\,x^h,$$

e la si scomponga nelle sue parti reale ed imaginaria pura:

$$P(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = A(x) + i B(x) \quad (*).$$

Posto:

$$a_0 = a_0' + i a_0'',$$

sarà:

$$A(x) = a_0' + \frac{1}{2}\left[\sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h + \sum_{h=1}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h\right],$$

$$B(x) = a_0'' + \frac{1}{2i}\left[\sum_{h=1}^{\infty} a_h x^h - \sum_{h=1}^{\infty} \bar{a}_h \bar{x}^h\right],$$

quindi:

$$\frac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\frac{A(x)}{x}\right] = a_0', \quad \frac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\frac{B(x)}{x}\right] = a_0'',$$

e, per $p > 0$:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\dfrac{A(x)}{x^{p+1}}\right] = \dfrac{1}{2} a_p, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} I_\rho \left[\dfrac{B(x)}{x^{p+1}}\right] = \dfrac{1}{2i} a_p. \end{cases}$$

Se si denota con $C(\varrho)$ il massimo valor po-

(*) $A(x)$ e $B(x)$ sono funzioni di x nel senso dell'art. 172.

sitivo di $A(x)$ per $|x| = \varrho$ (o lo zero, se $A(x)$ non è mai positiva), con $D(\varrho)$ il valore assoluto del massimo valor negativo di $A(x)$ per $|x| = \varrho$ (o lo zero, se $A(x)$ non è mai negativa), si ha:

$$|A(x)| + A(x) \begin{cases} \leq 2\,C(\varrho) \\ = \quad 0 \end{cases} \text{per } A(x) \begin{matrix} > \\ \leq \end{matrix} 0\,,$$

$$|A(x)| - A(x) \begin{cases} = \quad 0 \\ \leq 2\,D(\varrho) \end{cases} \text{per } A(x) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0\,,$$

quindi in tutti i casi:

$$|A(x)| + A(x) \leq 2\,C(\varrho)\,,$$
$$|A(x)| - A(x) \leq 2\,D(\varrho)\,.$$

Ora, se nella (3) dell'art. 172 si pone:

$$\varphi(x) = \frac{A(x)}{x^p}\,,$$

si ha, per la prima delle (1), per $p > 0$:

$$\frac{1}{\varrho^p}\left| I_\rho\left[\frac{|A(x)|}{x}\right]\right| \geq \left| I_\rho\left[\frac{A(x)}{x^{p+1}}\right]\right| = \pi\,|a_p|\,,$$

quindi, per la (4) dell'articolo citato:

$$\frac{1}{2}\,|a_p|\,\varrho^p + a_0' \leq 2\,C(\varrho)\,,$$

$$\frac{1}{2}\,|a_p|\,\varrho^p - a_0' \leq 2\,D(\varrho)\,,$$

e di qui:

$$| a_p | \leq \frac{4}{\varrho^p} \left[C(\varrho) - \frac{1}{2} a_0' \right],$$

$$| a_p | \leq \frac{4}{\varrho^p} \left[D(\varrho) + \frac{1}{2} a_0' \right],$$

donde segue immediatamente:

$$| a_p | \leq \frac{4}{\varrho^p} \left[C(\varrho) + \frac{1}{2} | a_0' | \right],$$

$$| a_p | \leq \frac{4}{\varrho^p} \left[D(\varrho) + \frac{1}{2} | a_0' | \right].$$

Queste formole danno luogo ad una conseguenza importante.

Supponiamo $a_0 = 0$; allora esse si riducono a:

$$| a_p | \leq \frac{4\, C(\varrho)}{\varrho^p}, \quad | a_p | \leq \frac{4\, D(\varrho)}{\varrho^p}.$$

Preso pertanto un numero positivo arbitrario k, e scelto l'indice p in modo che a_p non sia nullo, sarà $C(\varrho) > k$, $D(\varrho) > k$ per ogni:

$$\varrho > \left[\frac{4\, k}{| a_p |} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Cioè, dato un numero positivo qualunque, può sempre assegnarsi un valore di ϱ, al di là del quale $C(\varrho)$ e $D(\varrho)$ superano costantemente quel numero.

È evidente che tale proprietà si estende senz'altro alle funzioni per cui $a_0 \neq 0$.

I tre indici d'una funzione intera e le loro relazioni reciproche.

176. Uno studio più profondo delle funzioni intere ha posto in luce la necessità di prendere in considerazione, oltre al rango ed al genere, altri caratteri atti a meglio determinare l'andamento d'una funzione intera trascendente. Tali caratteri sono rappresentati da certi numeri costanti non negativi e, in generale, non interi, che hanno ricevuto vari nomi dai diversi autori, e che noi chiameremo, come già facemmo altrove (*), *indice* λ, *indice* μ e *indice* ν. Essi misurano rispettivamente — per definirli in poche parole — la rapidità con cui cresce la successione dei moduli delle radici (o, più semplicemente, la *densità* delle radici), la rapidità con cui decresce la successione dei moduli dei coefficienti, la rapidità con cui cresce il modulo massimo della funzione per valori crescenti di $|x|$.

Se $|c_h| = \gamma_h$, l'indice λ (**) è l'elemento di

(*) G. Vivanti-A. Gutzmer, *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig, 1906.

(**) *Ordre réel* (E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1900, 2ª ed., 1921), *Konvergenzexpo-*

separazione tra gli esponenti τ che rendono divergente la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\tau}}$ e quelli che la rendono convergente; in altre parole, qualunque sia il numero positivo ε, $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda-\varepsilon}}$ è divergente e $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda+\varepsilon}}$ è convergente.

Ne segue che $p \leq \lambda \leq p+1$.

Se $| a_h | = \alpha_h$, l'indice μ (*) è un numero tale, che la relazione:

$$\alpha_h < \frac{1}{(h\,!)^{\mu-\varepsilon}},$$

qualunque sia il numero positivo ε, ha luogo da un certo h (dipendente in generale da ε) in avanti, mentre esistono infiniti valori di h, per i quali ha luogo la relazione:

$$\alpha_h > \frac{1}{(h\,!)^{\mu+\varepsilon}}.$$

Alle relazioni scritte, in virtù della nota diseguaglianza:

---

nent (H. von Schaper, *Dissertation*, Göttingen, 1898), *Grenzexponent* (A. Pringsheim, *Sitzungsb. Ak. München*, T. 33, 1903, p. 101-130).

(*) *Ordnung* (H. von Schaper, *l. c.*). E. Lindelöf (*Acta Soc. sc. Fennicae*, T. 31, 1902, p. 1-79) dice che $\alpha_h^{\frac{1}{h}}$ è d'ordine (*ordre*) $h^{-\mu}$.

$$(1) \qquad 1 > \frac{(h\,!)^{\frac{1}{h}}}{h} > \frac{1}{e} \ (*),$$

si possono sostituire le altre:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu-\varepsilon}}\ ,\ \alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu+\varepsilon}}.$$

Infatti, se per ogni $h > H_1$ si ha:

$$\alpha_h < \frac{1}{(h\,!)^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}},$$

essendo, per la (1):

$$(h\,!)^{\frac{1}{h}} > \frac{h}{e},$$

sarà, per gli stessi valori di h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{e^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}{h^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}};$$

ora può sempre determinarsi un numero H_2 tale, che per ogni $h > H_2$ sia:

(*) La (1) si dimostra facilmente come segue. Anzitutto si ha evidentemente $h^h > h\,!$. Inoltre, se h è un numero intero positivo qualunque, $\frac{h^h}{h\,!}$ è un termine dello sviluppo di e^h, sicchè $\frac{h^h}{h\,!} < e^h$.

$$e^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}} < h^{\frac{\varepsilon}{2}};$$

si ha allora per ogni h maggiore di H_1 e di H_2:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu-\varepsilon}}.$$

Inoltre, essendo, per la (1):

$$(h\,!)^{\frac{1}{h}} < h\,,$$

si ha per infiniti valori di h:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu+\varepsilon}}.$$

L'indice ν (*) è un numero tale, che la relazione:

$$M_\rho\,[f\,(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}},$$

qualunque sia il numero positivo ε, ha luogo da un certo valore di ϱ (dipendente in generale da ε) in avanti, mentre per qualunque valore di r si possono assegnare valori di ϱ maggiori di r per i quali:

(*) *Ordre apparent* (E. Borel, *l. c.*), *Ordnung* (A. Pringsheim, *l. c.*). H. von Schaper (*l. c.*) dice che $f\,(x)$ è di tipo (*Typus*) e^{ρ^ν}.

$$M_\rho [f(x)] > e^{\rho^{\nu-\varepsilon}}.$$

Gli indici possono avere anche valore nullo o infinito, e le modificazioni da farsi nelle definizioni per questi casi limiti sono ovvie.

Si dimostrano molto facilmente i seguenti teoremi:

L'indice λ del prodotto di due funzioni è il maggiore degli indici λ delle due funzioni (o il loro valore comune, se sono eguali).

L'indice ν della somma o del prodotto di due funzioni non supera quelli delle due funzioni; è eguale al maggiore di essi, se sono diversi.

177. Dell'indice λ può darsi un'altra definizione.

Se $\sum\limits_{h=1}^{\infty} a_h$ è una serie convergente a termini positivi decrescenti, od almeno non crescenti, si ha $\lim\limits_{h=\infty} h\, a_h = 0$, e reciprocamente, se $\lim\limits_{h=\infty} h\, a_h = 0$, la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} a_h^{\tau}$ è convergente per ogni $\tau > 1$.

Se $\sum\limits_{h=1}^{\infty} a$ è convergente, preso comunque il numero positivo σ, può trovarsi un indice n tale, che sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} a_h < \frac{\sigma}{2}.$$

Preso ora un altro indice m qualunque, purchè $> 2\,n$, si ha, essendo i termini non crescenti:

$$\sum_{h=n+1}^{m} a_h \geq (m-n)\, a_m > \frac{1}{2}\, m\, a_m \,,$$

sicchè risulta per ogni $m > 2\,n$:

$$m\, a_m < \sigma\,.$$

Reciprocamente, se questa condizione è soddisfatta da un certo indice in avanti, ne segue per ogni $\tau > 0$:

$$a_m{}^\tau < \frac{\sigma^\tau}{m^\tau}\,,$$

e, poichè la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^\tau}$ è convergente per ogni $\tau > 1$, lo è pure la serie $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m{}^\tau$.

Applichiamo il teorema alla serie a termini positivi non crescenti $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^\theta}$, dove $\theta > 0$. Poichè $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^{\lambda+\varepsilon}}$ converge per ogni $\varepsilon > 0$, ne segue:

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h{}^{\lambda+\varepsilon}} = 0\,.$$

Reciprocamente, se:

$$\text{(1)} \qquad \lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h{}^\theta} = 0\,,$$

la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\theta\tau}}$ converge per ogni $\tau > 1$; non può essere perciò $\theta\,\tau < \lambda$, e quindi neppure $\theta < \lambda$.

Pertanto λ può definirsi come l'elemento di separazione tra i numeri θ che rendono soddisfatta la condizione (1) e quelli che non soddisfanno ad essa.

178. *Gli indici λ, μ, ν sono invarianti rispetto a qualunque sostituzione lineare intera.*

A) Sia $x = a\,X + b$ la sostituzione lineare; le radici della funzione trasformata saranno:

$$C_h = \frac{c_h - b}{a}.$$

Preso ad arbitrio un numero positivo $\sigma < 1$, può trovarsi un indice n tale, che per ogni $h > n$ sia $\left|\frac{b}{c_h}\right| < \sigma$; segue allora, per gli stessi valori di h:

$$(1 - \sigma)\,|\,c_h\,| < |\,c_h - b\,| < (1 + \sigma)\,|\,c_h\,|,$$

e quindi, per qualunque $q > n$ e per qualunque τ positivo:

$$\left|\frac{a}{1-\sigma}\right|^{\tau} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{\gamma_h^{\tau}} > \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{|\,C_h\,|^{\tau}} > \left|\frac{a}{1+\sigma}\right|^{\tau} \sum_{h=n+1}^{q} \frac{1}{\gamma_h^{\tau}},$$

donde risulta che l'indice λ è lo stesso per la funzione primitiva e per la trasformata.

B) La funzione trasformata è (art. 81):

$$F(X) = f(aX + b) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a^r}{r!} f^{(r)}(b) X^r = \sum_{r=0}^{\infty} A_r X^r,$$

dove:

$$A_r = \frac{a^r}{r!} f^{(r)}(b) = a^r \sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} a_{r+h} b^h .$$

Ora può trovarsi, per ipotesi, un indice r_1 tale, che per ogni $r > r_1$ sia:

$$| a_{r+h} | < \frac{1}{[(r+h)!]^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}}} \leq \frac{1}{(r!)^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}}};$$

inoltre può supporsi $| b | < 1$, giacchè, nel caso contrario, la sostituzione potrebbe scomporsi in un numero finito di sostituzioni, per ciascuna delle quali tale condizione fosse verificata. In questa ipotesi si ha (art. 97):

$$\sum_{h=0}^{\infty} \binom{r+h}{r} | b |^h = \frac{1}{(1 - | b |)^{r+1}},$$

quindi:

$$| A_r | < \frac{| a |^r}{(1 - | b |)^{r+1}} \frac{1}{(r!)^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Se $| a | \leq 1$, si ha:

$$\frac{|a|^r}{(1-|b|)^{r+1}} \leq \frac{1}{(1-|b|)^{r+1}};$$

se $|a| > 1$, si ha:

$$\frac{|a|^r}{(1-|b|)^{r+1}} < \left(\frac{|a|}{1-|b|}\right)^{r+1};$$

quindi, indicando con θ l'uno o l'altro dei numeri positivi $\frac{1}{1-|b|}, \frac{|a|}{1-|b|}$, può scriversi in tutti i casi:

$$|A_r| < \frac{\theta^{r+1}}{(r!)^{\mu-\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Inoltre, siccome $\lim\limits_{r=\infty} \frac{x^r}{r!} = 0$, e quindi anche $\lim\limits_{r=\infty} \frac{x^{r+1}}{r!} = 0$, qualunque sia x, prendendo $x = \theta^{\frac{2}{\varepsilon}}$, potrà determinarsi r_2 in modo, che per ogni $r > r_2$ sia $x^{r+1} < r!$, e quindi:

$$\theta^{r+1} < (r!)^{\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Sarà allora, per ogni r maggiore di r_1 e di r_2:

$$|A_r| < \frac{1}{(r!)^{\mu-\varepsilon}}.$$

Pertanto l'indice μ della funzione trasformata non è maggiore di quello della primitiva. Ma poichè con una sostituzione lineare intera si può pure passare da quella a questa, l'indice μ della funzione primitiva non sarà maggiore di quello della trasformata. I due indici sono dunque eguali.

C) Supponiamo dapprima $b = 0$. Posto $r = \frac{\varrho}{|a|}$, dalla:

$$M_\varrho [f(x)] < e^{\varrho^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}$$

segue:

$$M_r [F(X)] < e^{(|a| r)^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Se $|a| \leq 1$, si ha a maggior ragione:

$$M_r [F(X)] < e^{r^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}} < e^{r^{\nu + \varepsilon}};$$

se $|a| > 1$, si può supporre ϱ abbastanza grande perchè sia:

$$|a|^{\nu + \varepsilon} < \varrho^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

e quindi:

$$|a|^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}} < r^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

sicchè:

$$M_r [F(X)] < e^{r^{\nu + \varepsilon}}.$$

L'indice ν di $F(X)$ non è dunque minore di quello di $f(x)$, e col ragionamento di prima si conclude che non è neppur maggiore.

Se $b \neq 0$, posto $\frac{b}{a} = -t$, descriviamo nel piano X col centro nell'origine un cerchio di raggio $r > 2\,|t|$; poi col centro in t descriviamo i due cerchi di raggi $r_1 = r + |t|$, $r_2 = r - |t|$, tangenti l'uno esternamente e l'altro internamente al cerchio r. Ad essi corrispondono nel piano x due cerchi col centro nell'origine di raggi $|a|\,r_1$, $|a|\,r_2$. Si può supporre r abbastanza grande, perchè per ogni $\rho > |a|\,r_2$ sia:

$$M_\rho\,[f(x)] < e^{\rho^\nu + \frac{\varepsilon}{2}};$$

sarà allora in tutta la corona racchiusa dai cerchi $|a|\,r_1$, $|a|\,r_2$:

$$(1) \qquad |f(x)| < e^{(|a|\,r_1)^\nu + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ora dalle relazioni:

$$r_1 = r + |t|\,,\ r > 2\,|t|$$

segue $r_1 < \frac{3}{2}\,r$, quindi dalla (1) si ha, a maggior ragione:

$$|f(x)| < e^{\left(\frac{3}{2}\,|a|\,r\right)^\nu + \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Ma si può anche supporre r abbastanza grande, perchè sia:

$$\left(\frac{3}{2} \mid a \mid\right)^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}} < r^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

sicchè:

$$\mid f(x) \mid < e^{r^{\nu + \varepsilon}}.$$

Nello spazio anulare del piano X compreso tra i cerchi di raggi r_1, r_2, e quindi su tutta la circonferenza r, che è in esso contenuta, sarà:

$$\mid F(X) \mid < e^{r^{\nu + \varepsilon}};$$

ne segue, come prima:

$$M_r [F(X)] < e^{r^{\nu + \varepsilon}}.$$

179. Determiniamo anzitutto gli indici di un polinomio:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{n} a_h x^h.$$

Evidentemente è $\lambda = 0$, $\mu = \infty$.

Per determinare l'indice ν, osserviamo anzitutto che si può prendere un numero positivo $\varrho > 2 \mid a_n \mid$ e tale che per ogni $\mid x \mid > \varrho$ sia:

(1) $\quad \mid a_n x^n \mid > \mid a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} \mid,$

donde segue:

$$(2) \qquad | f(x) | < 2 \, | a_n x^n | < | x |^{n+1}.$$

Inoltre per qualunque numero positivo ξ e per qualunque numero intero e positivo q si ha:

$$e^{\xi} > \frac{\xi^{q+1}}{(q+1)!},$$

da cui:

$$\frac{e^{\xi}}{\xi^q} > \frac{\xi}{(q+1)!},$$

e quindi:

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{e^{\xi}}{\xi^q} = \infty.$$

Preso ora un numero positivo qualunque ε, facciamo:

$$\xi = | x |^{\varepsilon},$$

e scegliamo q in modo che sia $\varepsilon q \geq n+1$; allora sarà:

$$\lim_{x=\infty} \frac{e^{| x |^{\varepsilon}}}{| x |^{n+1}} = \infty,$$

quindi:

$$(3) \qquad \lim_{x=\infty} \frac{e^{| x |^{\varepsilon}}}{| f(x) |} = \infty,$$

donde segue immediatamente che $\nu = 0$.

Si può stabilire una diseguaglianza molto più generale della (2). Preso un numero positivo qualunque ε, può sempre determinarsi ϱ in modo che sia $\varrho^{\varepsilon} > 2 \mid a_n \mid$, e che per ogni $\mid x \mid > \varrho$ abbia luogo la (1); segue allora:

$$| f(x) | < | x |^{n+\varepsilon}.$$

180. Determiniamo ora l'indice ν d'una funzione intera della forma $e^{g(x)}$, dove $g(x)$ è un polinomio.

Consideriamo prima la funzione semplicissima:

$$f(x) = e^{bx^n}.$$

Posto:

$$b = \beta\, e^{i\delta}\ ,\ x = \varrho\, e^{i\varphi},$$

si ha:

$$f(x) = e^{\beta \rho^n e^{i(\delta + n\varphi)}},$$

quindi:

$$| f(x) | = e^{\beta \rho^n \cos(\delta + n\varphi)},$$

da cui:

$$M_\rho [f(x)] = e^{\beta \rho^n},$$

sicchè $\nu = n$.

Dopo ciò dall'ultimo teorema dell'art. 176 segue che l'indice ν della funzione $e^{g(x)}$, dove $g(x)$ è un polinomio di grado n, è n.

E segue pure che l'indice ν d'un fattore primo:

$$E(x) = (1 - x)\, e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k}}$$

è p.

181. Riguardo ai fattori primi dobbiamo stabilire una formola importante.

Per $|x| = \xi < 1$ si ha (art. 137):

$$E(x) = e^{-\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^k}{k}},$$

quindi:

$$|E(x)| = e^{-R\left[\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right]} \leq e^{\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k}} < e^{\frac{\xi^{p+1}}{(p+1)(1-\xi)}}.$$

Se $\xi \leq \frac{1}{2}$, ne segue $1 - \xi \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{1-\xi} \leq 2$, quindi per $0 < \varepsilon < 1$:

$$\frac{\xi^{p+1}}{(p+1)(1-\xi)} \leq \frac{2\ \xi^{p+\varepsilon}}{p+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\varepsilon} =$$

$$= \frac{2^{\varepsilon}}{p+1}\ \xi^{p+\varepsilon} \leq 2\ \xi^{p+\varepsilon},$$

e:

$$|E(x)| < e^{2\xi^{p+\varepsilon}}.$$

Supponiamo ora $1 > \xi > \frac{1}{2}$. Si ha, qualunque sia ξ:

$$|E(x)| \leq (1 + \xi)\, e^{\sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k}},$$

e, poichè $1 + \xi < e^{\xi}$:

$$|E(x)| < e^{\xi + \sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k}}. \tag{1}$$

Ora, poichè $\xi < 1$, si ha:

$$\xi + \sum_{k=1}^{p} \frac{\xi^k}{k} < (p+1)\,\xi < p+1;$$

inoltre $1 < 2\,\xi$, sicchè risulta per $0 < \varepsilon < 1$:

$$|\,E\,(x)\,| < e^{p+1} < e^{2^{p+\varepsilon}(p+1)\,\xi^{p+1}} < e^{2^{p+1}(p+1)\,\xi^{p+\varepsilon}},$$

che può scriversi:

$$|\,E\,(x)\,| < e^{\beta\,\xi^{p+\varepsilon}},$$

posto:

$$(2) \qquad \beta = 2^{p+1}\,(p+1).$$

Sia infine $\xi \geq 1$; allora segue dalla (1):

$$|\,E\,(x)\,| < e^{(p+1)\,\xi^p} < e^{(p+1)\,\xi^{p+\varepsilon}}.$$

Si ha dunque, qualunque sia ξ, e qualunque sia il numero positivo ε:

$$(3) \qquad |\,E\,(x)\,| < e^{\beta\,\xi^{p+\varepsilon}},$$

dove β è dato dalla (2).

182. Abbiasi la funzione intera semplice di genere p:

$$f\,(x) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k\,c_h{}^k}},$$

e si ponga $|\,c_h\,| = \gamma_h$.

Se la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^\lambda}$ è convergente, $\lambda > p$, e può scriversi $\lambda = p + \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$. Dalla (3) dell'articolo precedente segue:

$$| f(x) | < e^{\beta \xi^\lambda \sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h{}^\lambda}},$$

donde si deduce nel modo solito, per ϱ abbastanza grande:

$$M_\rho [f(x)] < e^{\rho^{\lambda+\varepsilon}}. \tag{1}$$

Se invece la serie $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^\lambda}$ è divergente, allora $p \leq \lambda < p + 1$. Se $p = \lambda$, segue dalla (3) dell'articolo precedente colle solite considerazioni di nuovo la (1); e questa sussiste a maggior ragione se $p < \lambda$.

Dalla (1) risulta che *per una funzione semplice* $\nu \leq \lambda$. Il risultato si estende immediatamente ad una funzione normale, tenendo conto di quanto si è trovato nell'art. 180.

183. Se $\lambda < p + 1$, può supporsi nella (1) dell'articolo precedente:

$$\lambda + \varepsilon < p + 1 .$$

Preso allora ad arbitrio un numero positivo η, potrà determinarsi R in modo che per ogni $\varrho > R$ sia:

$$\frac{1}{\eta} < \varrho^{p+1-\lambda-\varepsilon},$$

sicchè dalla formola citata si avrà, per ϱ abbastanza grande:

$$(1) \qquad M_\rho [f(x)] < e^{\eta \rho^{p+1}}.$$

Vogliamo dimostrare che questa relazione sussiste anche se $\lambda = p+1$.

Poichè $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{p+1}}$ è convergente, può determinarsi un indice n tale, che sia:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{p+1}} < \frac{\eta}{2\beta},$$

dove η è arbitrario, e β è dato dalla (2) dell'art. 181; se quindi nella (3) dello stesso articolo si fa $\varepsilon = 1$, si ha:

$$(2) \qquad \left| \prod_{h=n+1}^{\infty} E\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{\beta \xi^{p+1} \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{p+1}}} < e^{\frac{\eta}{2} \xi^{p+1}}.$$

Inoltre dalla formola testè citata, supposto $\varepsilon < 1$, si ha:

$$\left| \prod_{h=1}^{n} E\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{\beta \xi^{p+\varepsilon} \sum\limits_{h=1}^{n} \frac{1}{\gamma_h^{p+\varepsilon}}};$$

per ξ abbastanza grande perchè sia:

$$\beta \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{\gamma_h^{p+\varepsilon}} < \frac{\eta}{2} \xi^{1-\varepsilon}$$

segue di qui:

$$(3) \qquad \left| \prod_{h=1}^{n} E\left(\frac{x}{c_h}\right) \right| < e^{\frac{\eta}{2} \xi^{p+1}} .$$

Dalle (2), (3) risulta immediatamente, per $\lambda = p + 1$, la (1).

184. *Se* $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{h}=0}^{\infty} \mathrm{a_h x^h}$ *è una funzione semplice di rango* p, *e* $|\mathrm{a_h}| = \alpha_\mathrm{h}$, *si ha:*

$$(1) \qquad \lim_{\mathrm{h}=\infty} [(\mathrm{h}!)^{\frac{1}{\mathrm{p}+1}} \alpha_\mathrm{h}] = 0$$

(**teorema di Poincaré**) (*).

Preso ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, e posto:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{(p+1)\, e}$$

(*) H. Poincaré, *C. R. Ac. Paris*, T. 95, 1882, p. 23-26; *Bull. Soc. math. France*, T. 11, 1883, pagine 136-144. Il teorema ha un interesse storico, perchè costituisce il punto di partenza per lo studio delle relazioni tra l'andamento della successione delle radici d'una funzione intera e quello della successione dei suoi coefficienti. Esso passò quasi inosservato per molti anni, e solo nel 1892 fu preso in considerazione da J. Hadamard (*Journ. de math.*, S. IV, T. 8, 1892, p. 101-186; T. 9, 1893, p. 171-215).

nella (1) dell'articolo precedente, si ha:

$$M_\rho\,[f\,(x)] < e^{\frac{\varepsilon}{(p+1)\,e}\,\rho^{p+1}},$$

e quindi (art. 71):

$$\alpha_h < \frac{e^{\frac{\varepsilon}{(p+1)\,e}\,\rho^{p+1}}}{\varrho^h}.$$

Prendiamo h abbastanza grande, perchè si possa porre:

$$\varrho = \left(\frac{h\ e}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p+1}};$$

sarà:

$$\alpha_h < \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^{\frac{h}{p+1}},$$

e, poichè $h\,! < h^h$ per $h > 1$:

$$(h\,!)^{\frac{1}{p+1}}\,\alpha_h < \varepsilon^{\frac{h}{p+1}},$$

da cui segue immediatamente la (1).

185. Abbiasi ora una funzione intera qualunque $f\,(x)$; supporremo per semplicità $f\,(0)=1$. Se $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono gli zeri della funzione contenuti nel cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine, posto:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\prod_{h=1}^{n}(x - c_h)},$$

dove $\varphi(x)$ è ancora una funzione intera, sarà:

$$\varphi(0) = \frac{(-1)^n}{\prod_{h=1}^{n} c_h},$$

e quindi, qualunque sia il raggio ϱ' (art. 86):

$$(1) \qquad I_{\rho'}\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right] = 2\pi i \frac{(-1)^n}{\prod_{h=1}^{n} c_h}.$$

D'altra parte, posto $\varrho' = \theta\varrho$, dove $\theta > 2$, si ha per ogni punto x della circonferenza ϱ':

$$|x - c_h| \geq \varrho' - |c_h| > \theta\gamma_n - \gamma_h \geq (\theta - 1)\gamma_n,$$

e quindi:

$$|\varphi(x)| \leq \frac{|f(x)|}{(\theta - 1)^n \gamma_n^n},$$

da cui:

$$M_{\rho'}[\varphi(x)] \leq \frac{M_{\rho'}[f(x)]}{(\theta - 1)^n \gamma_n^n}.$$

Ora dalla (1) segue (art. 172):

$$M_{\rho'}[\varphi(x)] \geq \left| \frac{1}{2\pi i} I_{\rho'} \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right] \right| = \frac{1}{\prod_{h=1}^{n} \gamma_h},$$

quindi:

$$M_{\rho'}[f(x)] \geq \frac{(\theta - 1)^n \gamma_n{}^n}{\prod_{h=1}^{n} \gamma_h} \geq (\theta - 1)^n,$$

da cui, per $\varrho' = \theta_\rho$:

$$n \leq \frac{\lg M_{\rho'}[f(x)]}{\lg(\theta - 1)}, \tag{2}$$

che dà un limite superiore per il numero delle radici contenute entro il cerchio ϱ.

Dopo ciò, supposto che sia per ϱ abbastanza grande:

$$M_\rho[f(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}},$$

ed osservando che $\gamma_{n+1} > \varrho$, si ha dalla (2):

$$n < \frac{\theta^{\nu+\varepsilon}\gamma_{n+1}^{\nu+\varepsilon}}{\lg(\theta - 1)},$$

che può scriversi più semplicemente:

$$n < \gamma_{n+1}{}^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}},$$

ossia:

$$\frac{1}{n} > \gamma_{n+1}^{-\left(\nu + \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Posto ora:

$$\frac{\nu+\varepsilon}{\nu+\frac{\varepsilon}{2}}=\tau>1\,,$$

si ha:

$$\frac{1}{n^\tau}>\gamma_{n+1}^{-(\nu+\varepsilon)}\,.$$

Ora la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\tau}$ è convergente, quindi lo sarà pure la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_{n+1}^{-(\nu+\varepsilon)}$, donde segue che $\lambda\leq\nu$.

Concludiamo che: *Per qualunque funzione intera si ha $\lambda\leq\nu$.*

E, combinando questo risultato con uno precedentemente ottenuto (art. 182): *Per qualunque funzione normale* (in particolare per le funzioni semplici) *è $\lambda=\nu$.*

Inoltre, per un teorema dell'art. 176:

L'indice ν è il maggiore dei due numeri λ, q, *o il loro valore comune se sono eguali.*

Di qui segue, considerando che q è intero e che, se λ non è intero, p è il massimo intero contenuto in λ: *Se ν non è intero, $\nu=\lambda>$* q, p $\geq$ q; *la funzione è normale, e il suo genere è il massimo intero contenuto in ν.*

Se ν è intero, secondochè $\lambda>q$ o $q\geq\lambda$ si ha $\nu=\lambda$ o $\nu=q$.

Nel primo caso, secondochè $\lambda=p$ o $\lambda=p+1$, si ha:

$$\nu = p > q \quad \text{o} \quad \nu = p + 1 > q;$$

il genere è in ambe le ipotesi p, quindi esso è eguale a ν o a $\nu - 1$.

Nel secondo caso si ha:

$$\nu = q \geq \lambda \geq p;$$

il genere è q, quindi è eguale a ν.

Quindi: *Se ν è intero, il genere è eguale a ν, salvo il caso di $\lambda = \mathrm{p} + 1 > \mathrm{q}$, in cui il genere è eguale a $\nu - 1$.*

Di qui segue, tenuto conto del teorema relativo all'indice ν della somma di due funzioni (art. 176):

Se due funzioni sono di genere $\leq \mathrm{r}$, la loro somma è di genere $\leq \mathrm{r} + 1$ (*).

186. *Se per ogni $\varrho > \mathrm{R}$ si ha:*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{M}_\rho\,[\mathrm{f}\,(\mathrm{x})] < \mathrm{e}^{\rho^\sigma},$$

si ha pure, per qualunque ε positivo, da un certo h *in avanti:*

$$\alpha_{\mathrm{h}}^{\frac{1}{\mathrm{h}}} < \frac{1}{\mathrm{h}^{\frac{1}{\sigma} - \varepsilon}}.$$

(*) Esempi di funzioni di genere r la cui somma è di genere $r + 1$ furono dati da vari autori. V.: P. Boutroux, *C. R. Ac. Paris*, T. 139, 1904, pagine 351-353; *Acta math.*, T. 28, 1904, p. 97-224; E. Lindelöf, *C. R. Ac. Paris*, T. 133, 1901, p. 1279-1282; A. Wiman, *C. R. Ac. Paris*, T. 138, 1904, pagine 137-139; *Ark. f. Mat.*, T. 1, 1904, p. 327-345.

Dalla (1) segue (art. 71), per ogni h:

$$\alpha_h < \frac{e^{\rho^\sigma}}{\varrho^h};$$

se $h > R^\sigma$, segue di qui, posto $\varrho = h^{\frac{1}{\sigma}}$:

$$\alpha_h < \frac{e^h}{h^{\frac{h}{\sigma}}},$$

da cui:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{e}{h^{\frac{1}{\sigma}}};$$

e quindi:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma} - \varepsilon}}.$$

187. *Se, qualunque sia* R, *vi sono valori di* $\varrho >$ R *per cui:*

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{M}_\rho\,[\mathrm{f}\,(\mathrm{x})] > \mathrm{e}^{\rho^\sigma},$$

si ha, per infiniti valori di h*:*

$$\alpha_\mathrm{h}^{\frac{1}{\mathrm{h}}} > \frac{1}{\mathrm{h}^{\frac{1}{\sigma} + \varepsilon}}.$$

Sia dapprima $\sigma = 1$. Sarà:

$$M_\rho [f(x)] > e^\rho,$$

e quindi, a maggior ragione:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \varrho^h > e^\rho,$$

ossia:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\alpha_h - \frac{1}{h!}\right) \varrho^h > 0.$$

Cioè, qualunque sia R, esistono valori di x di modulo maggiore di R, per i quali la funzione intera a coefficienti reali:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\alpha_h - \frac{1}{h!}\right) x^h$$

è positiva. Ne segue (art. 155, in fine), che essa ha infiniti coefficienti non negativi, cioè che per infiniti valori di h si ha:

$$\alpha_h \geq \frac{1}{h!},$$

e quindi, qualunque sia ε:

$$\alpha_h > \frac{1}{(h!)^{1+\varepsilon}},$$

relazione che (art. 176) equivale all'altra:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{1+\varepsilon}}.$$

Sia ora $\sigma < 1$. Posto:

$$\Sigma\, \alpha_h^\sigma\, \varrho^{h\sigma} = A\,,$$

si ha:

$$1 > \frac{\alpha_h^\sigma\, \varrho^{h\sigma}}{A}\,,$$

quindi:

$$1 > \left(\frac{\alpha_h^\sigma\, \varrho^{h\sigma}}{A}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = \frac{\alpha_h^{1-\sigma}\, \varrho^{h(1-\sigma)}}{A^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}\,,$$

ossia:

$$\frac{\alpha_h\, \varrho^h}{A^{\frac{1}{\sigma}}} < \frac{\alpha_h^\sigma\, \varrho^{h\sigma}}{A}\,,$$

e sommando per tutti i valori di h:

(2)
$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h < A^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Ora dalla (1) segue:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h\, \varrho^h > e^{\varrho^\sigma},$$

quindi, per la (2):

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h{}^\sigma \varrho^{h\sigma} > e^{\sigma \rho^\sigma},$$

ossia:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \left(\alpha_h{}^\sigma - \frac{\sigma^h}{h!}\right) \varrho^{h\sigma} > 0.$$

Se ne deduce come prima, per infiniti valori di h:

$$\alpha_h{}^\sigma \geq \frac{\sigma^h}{h!} \geq \frac{\sigma^h}{h^h},$$

e quindi:

$$\alpha_h{}^{\frac{1}{h}} \geq \left(\frac{\sigma}{h}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Ora, fissato ε, si ha, da un certo valore di h in avanti:

$$\sigma^{\frac{1}{\sigma}} > \frac{1}{h^\varepsilon}.$$

Ne segue:

$$\alpha_h > \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma} + \varepsilon}}.$$

Sia infine $\sigma > 1$. Preso un numero intero $m > \sigma$, poniamo $x^m = y$; sarà:

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_{mh}\, y^h + x \sum_{h=0}^{\infty} a_{mh+1}\, y^h +$$

$$+ x^2 \sum_{h=0}^{\infty} a_{mh+2}\, y^h + \ldots + x^{m-1} \sum_{h=0}^{\infty} a_{mh+m-1}\, y^h,$$

da cui, posto $|y| = \eta$:

$$(3) \qquad |f(x)| \leq \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh}\, \eta^h + \xi \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+1}\, \eta^h + \\ + \xi^2 \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+2}\, \eta^h + \ldots + \xi^{m-1} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+m-1}\, \eta^h .$$

Per ipotesi possono assegnarsi infiniti valori di ϱ:

$$\varrho_1 \ , \ \varrho_2 \ , \ \varrho_3 \ , \ldots ,$$

tutti maggiori di R, pei quali ha luogo la (1); per ciascuno di essi dovrà uno almeno dei termini del secondo membro della (3) essere maggiore di $\frac{1}{m} e^{\varrho^\sigma}$. E poichè questi termini sono in numero finito, uno almeno di essi, p. es.:

$$\xi^r \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+r}\, \eta^h ,$$

dovrà avere questa proprietà per una infinità di valori ϱ_k di ϱ.

Sarà dunque per i valori corrispondenti $\varrho_k{}^m$ di η:

$$\xi^r \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+r}\, \eta^h > \frac{1}{m}\, e^{\eta^{\frac{\sigma}{m}}} ,$$

da cui segue, per δ arbitrariamente piccolo e per infiniti valori di η abbastanza grandi:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{mh+r}\, \eta^h > e^{\eta^{\frac{\sigma}{m}-\delta}}.$$

Ora, poichè $\frac{\sigma}{m} - \delta < 1$, ci troviamo nel caso ultimamente considerato, e quindi, posto:

$$\frac{1}{\frac{\sigma}{m} - \delta} = \tau,$$

sarà per infiniti valori di h:

$$\alpha_{mh+r}^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\tau+\varepsilon}} = \frac{1}{h^{\frac{m}{\sigma}+\varepsilon'}},$$

da cui, posto $m\,h = l$, per infiniti valori di l:

$$\alpha_{l+r}^{\frac{m}{l}} > \left(\frac{m}{l}\right)^{\frac{m}{\sigma}+\varepsilon'},$$

e per conseguenza:

$$\alpha_{l+r}^{\frac{1}{l}} > \frac{1}{l^{\frac{1}{\sigma}+\varepsilon''}}.$$

Segue di qui a maggior ragione, tenendo conto che per l abbastanza grande $\alpha_{l+r} < 1$:

$$\alpha_{l+r}^{\frac{1}{l+r}} > \frac{1}{l^{\frac{1}{\sigma}+\varepsilon''}} > \frac{1}{(l+r)^{\frac{1}{\sigma}+\varepsilon''}},$$

che può scriversi:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\frac{1}{\sigma}+\varepsilon''}}.$$

Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

188. *Per qualunque funzione intera gli indici μ e ν hanno valori reciproci.*

Sia da un certo ϱ in avanti:

$$(1) \qquad M_\rho\,[f\,(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}};$$

ne segue, da un certo h in avanti (art. 186):

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\frac{1}{\nu+\varepsilon}-\varepsilon'}}.$$

Se $\nu = 0$, risulta:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^s}$$

per quanto sia grande s, sicchè $\mu = \infty$.

Se $\nu > 0$, si ha:

$$\frac{1}{\nu + \varepsilon} - \varepsilon' = \frac{1}{\nu} - \left[\frac{\varepsilon}{\nu(\nu + \varepsilon)} + \varepsilon'\right],$$

che può scriversi:

$$\frac{1}{\nu} - \varepsilon'',$$

sicchè:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\frac{1}{\nu} - \varepsilon''}}. \tag{2}$$

Supponiamo ora che, qualunque sia R, esistano infiniti valori di $\rho > R$ per cui:

$$M_\rho [f(x)] > e^{\rho^{\nu - \varepsilon}}; \tag{3}$$

allora si ha per infiniti valori di h (art. 187):

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\frac{1}{\nu - \varepsilon} + \varepsilon'}}.$$

Ora:

$$\frac{1}{\nu - \varepsilon} + \varepsilon' = \frac{1}{\nu} + \left[\frac{\varepsilon}{\nu(\nu - \varepsilon)} + \varepsilon'\right],$$

che può scriversi:

$$\frac{1}{\nu} + \varepsilon'',$$

sicchè:

$$(4) \qquad \alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\frac{1}{\nu} + \varepsilon''}}.$$

Le (2), (4), confrontate colle (1), (3), mostrano che anche per $\nu > 0$ si ha $\mu = \dfrac{1}{\nu}$.

Una conseguenza immediata del teorema è la seguente:

Le funzioni $\sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h$, $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h x^h$ *hanno lo stesso indice* ν.

189. Come applicazione del teorema testè dimostrato, diamo un metodo rapido per la determinazione del fattore esponenziale esterno nello sviluppo della funzione sen x (art. 140).

Posto $x^2 = y$, la funzione:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{x^{2h}}{(2h+1)!}$$

è una funzione intera di y, che denoteremo con $\varphi(y)$; e il coefficiente di y^h nel suo sviluppo è:

$$a_h = (-1)^h \frac{1}{(2h+1)!}.$$

Si ha quindi:

$$\alpha_h = \frac{1}{(2h+1)!} < \frac{1}{(h!)^2},$$

sicchè $\mu \geq 2$, e per conseguenza $\nu \leq \frac{1}{2}$, e il genere è zero. E poichè le radici di $\varphi(y)$ sono $\pi^2 h^2$, si ha, a meno d'un fattore costante, che si trova facilmente essere 1:

$$\varphi(y) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{y}{\pi^2 h^2}\right),$$

da cui:

$$\operatorname{sen} x = x \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 h^2}\right),$$

e quindi $g(x) = 0$.

190. *L'indice* μ, *e quindi l'indice* ν, *ha lo stesso valore per una funzione intera e per la sua derivata.*

Invece della derivata $f'(x)$ si può considerare la funzione $x f'(x)$. Posto:

$$x f'(x) = \sum_{h=1}^{\infty} b_h x^h,$$

si ha:

$$b_h = h a_h,$$

quindi:

$$\beta_h = | b_h | = h \alpha_h.$$

Ora si ha, da un certo h in avanti:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}}},$$

da cui:

$$\beta_h^{\frac{1}{h}} < \frac{h^{\frac{1}{h}}}{h^{\mu - \frac{\varepsilon}{2}}};$$

e, poichè, se $h > \frac{2}{\varepsilon}$, segue:

$$h^{\frac{1}{h}} < h^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

risulta, da un certo h in avanti:

$$\beta_h^{\frac{1}{h}} < \frac{1}{h^{\mu - \varepsilon}}.$$

D'altra parte, poichè per infiniti valori di h si ha:

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu + \varepsilon}},$$

si ha, a maggior ragione, per gli stessi valori di h:

$$\beta_h^{\frac{1}{h}} > \frac{1}{h^{\mu + \varepsilon}}.$$

Quindi l'indice μ ha lo stesso valore per $f(x)$ e per $x f'(x)$.

Dal teorema dimostrato e dai risultati stabiliti nell'art. 185 segue:

Se ν non è intero, f (x) *e* f′ (x) *hanno lo stesso genere* (che è il massimo intero contenuto in ν).

Se ν è intero, il genere di f′ (x) *può differire al massimo di un'unità in più o in meno da quello di* f (x).

191. Oltre che l'andamento del modulo massimo d'una funzione intera, è interessante studiare anche quello del suo modulo minimo, che denoteremo con $m_\rho\,[(f\,(x)]$. A tale proposito può dimostrarsi il teorema seguente:

Se f (x) *è una funzione di indice ν finito, dato un numero positivo ε e un numero $\nu' > \nu$, si può trovare un numero* R *tale che, per ogni punto* x *che disti dall'origine più di* R *e dalla radice* $\mathrm{c_h}$ $(\mathrm{h} = 1, 2, \ldots)$ *più di* $\dfrac{1}{|\,\mathrm{c_h}\,|^{\nu'}}$, *sia:*

$$|\,\mathrm{f\,(x)}\,| > \mathrm{e}^{-\xi^{\nu}+\varepsilon}.$$

a) Sia dapprima $f\,(x)$ funzione semplice, e $\nu = \lambda < 1$, quindi $p = 0$, sicchè:

$$f\,(x) = \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{c_h}\right).$$

Fissato un numero positivo ε arbitrariamente piccolo, e preso σ in modo che sia:

$$\lambda < \sigma < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \sigma < 1\,,$$

sarà (art. 177) $\lim\limits_{h=\infty} \dfrac{h}{\gamma_h^{\sigma}} = 0$, e quindi da un certo valore h_0 di h in avanti:

$$\gamma_h^{\sigma} > h \, .$$

Sia $\xi > \frac{1}{2} h_0^{\frac{1}{\sigma}}$, e sia n un numero intero tale, che:

$$n < (2\ \xi)^{\sigma} \leq n + 1 \, ,$$

donde $n + 1 > h_0$; se:

$$\gamma_m < 2\ \xi < \gamma_{m+1} \, ,$$

sarà:

$$n + 1 \geq (2\ \xi)^{\sigma} > \gamma_m^{\sigma} > m \, ,$$

quindi $n \geq m$. Dopo ciò scomponiamo il prodotto infinito in tre prodotti (di cui il secondo manca se $n = m$):

$$\prod_{h=1}^{m} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) = \varphi_1(x) \, ,$$

$$\prod_{h=m+1}^{n} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) = \varphi_2(x) \, ,$$

$$\prod_{h=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) = \varphi_3(x) \, .$$

Essendo $| x - c_h | > \frac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$, sarà:

$$| \varphi_1 (x) | = \prod_{h=1}^{m} \left| \frac{c_h - x}{c_h} \right| > \frac{1}{\gamma_m^{m(\nu'+1)}} > (2\ \xi)^{-m(\nu'+1)}.$$

Inoltre, poichè per $h > m$ è $\dfrac{\xi}{\gamma_h} < \dfrac{1}{2}$:

$$| \varphi_2 (x) | \geq \prod_{h=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\xi}{\gamma_h}\right) \geq \frac{1}{2^{n-m}},$$

e, tenendo anche conto che $e^{-u} < 1 - \dfrac{u}{2}$ per $0 < u < 1$ (*), e che $n + 1 > h_0$:

$$| \varphi_3 (x) | \geq \prod_{h=n+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi}{\gamma_h}\right) > e^{-2\xi \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h}} > e^{-2\xi \sum\limits_{h=n+1}^{\infty} h^{-\frac{1}{\sigma}}}$$

(*) Essendo $e^u > 1 + u$, ne segue, per $0 < u < 1$:

$$e^u \left(1 - \frac{u}{2}\right) > (1 + u) \left(1 - \frac{u}{2}\right) = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{2} > 1,$$

da cui:

$$e^{-u} < 1 - \frac{u}{2}.$$

Si ha invece:

$$e^{-u} > 1 - u,$$

come risulta dalla considerazione che la serie:

$$e^{-u} = 1 - \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} - \dots$$

per $0 < u < 1$ è a termini di segni alternati, decrescenti in valore assoluto e tendenti a zero.

Ora (*):

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} h^{-\frac{1}{\sigma}} < \frac{\alpha}{(n+1)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}} \leq \frac{\alpha}{(2\ \xi)^{1-\sigma}},$$

quindi:

$$|\varphi_3(x)| > e^{-\alpha(2\xi)^\sigma},$$

e:

$$|f(x)| > (2\ \xi)^{-m(\nu'+1)}\, 2^{m-n}\, e^{-\alpha(2\xi)^\sigma}.$$

Supposto $\xi > 1$, si ha, essendo $m - n \leq 0$:

$$2^{m-n} \geq (2\ \xi)^{m-n},$$

inoltre:

$$(2\ \xi)^{-m(\nu'+1)} \geq (2\ \xi)^{-n\nu'-m},$$

(*) Si ha per $\tau > 0$:

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^{\tau+1}} = \left[\frac{1}{(n+1)^{\tau+1}} + \ldots + \frac{1}{(2\,n+1)^{\tau+1}}\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{(2\,n+2)^{\tau+1}} + \ldots + \frac{1}{(4\,n+3)^{\tau+1}}\right] +$$
$$+ \left[\frac{1}{(4\,n+4)^{\tau+1}} + \ldots + \frac{1}{(8\,n+7)^{\tau+1}}\right] + \ldots$$
$$< \frac{n+1}{(n+1)^{\tau+1}} + \frac{2\,n+2}{(2\,n+2)^{\tau+1}} + \frac{4\,n+4}{(4\,n+4)^{\tau+1}} + \ldots =$$
$$= \left[1 + \frac{1}{2^\tau} + \frac{1}{4^\tau} + \ldots\right] \frac{1}{(n+1)^\tau} \doteq \frac{\alpha}{(n+1)^\tau},$$

posto:

$$\alpha = \frac{2^\tau}{2^\tau - 1}.$$

quindi:

$$(2\,\xi)^{-m(\nu'+1)}\,2^{m-n} \geq (2\,\xi)^{-n(\nu'+1)} > (2\,\xi)^{-(\nu'+1)\,(2\,\xi)^{\sigma}},$$

e:

$$|\,f\,(x)\,| > e^{-[\alpha + (\nu' + 1)\lg 2\,\xi]\,(2\,\xi)^{\sigma}}.$$

Se ξ è abbastanza grande perchè sia:

$$2^{\sigma}\,[\alpha + (\nu' + 1)\lg 2\,\xi] < \xi^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

segue:

$$|\,f\,(x)\,| > e^{-\xi^{\sigma + \frac{\varepsilon}{2}}} > e^{-\xi^{\lambda + \varepsilon}} = e^{-\xi^{\nu + \varepsilon}}.$$

b) Sia ancora $f\,(x)$ una funzione semplice, e sia però $\nu = \lambda \geq 1$. Indicando con ω una radice primitiva dell'unità di indice q, dove q è un numero intero maggiore di ν, e ponendo $x^q = y$, sarà:

$$f\,(x)\,f\,(\omega\,x)\,f\,(\omega^2\,x)\ldots f\,(\omega^{q-1}\,x) = \tag{1}$$
$$= \prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{c_h^{\,q}}\right) = F\,(y);$$

$F\,(y)$ è una funzione semplice, il cui indice λ è $\dfrac{\lambda}{q} < 1$. Si prenda ancora $\nu' > \nu$, e sia x un punto che disti più di $\dfrac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$ non solo dai punti c_h, ma anche dai punti $\omega\,c_h$, $\omega^2\,c_h$, $\ldots$, $\omega^{q-1}\,c_h$; il corrispondente punto y disterà più di $\frac{1}{\gamma_h^{q\nu'}}$ dai punti c_h^q, radici di $F(y)$, e sarà, se $|y| = \eta$ è abbastanza grande:

$$(2) \qquad |F(y)| > e^{-\eta^{\frac{\nu}{q} + \frac{\varepsilon}{2q}}} = e^{-\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

D'altra parte si ha, per la definizione dell'indice ν:

$$|f(\omega x)| < e^{\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}, \; |f(\omega^2 x)| < e^{\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}, \ldots,$$

$$|f(\omega^{q-1} x)| < e^{\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}};$$

dalle (1), (2) segue quindi, se ξ è abbastanza grande perchè sia $q < \xi^{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$|f(x)| > e^{-q\,\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}} > e^{-\xi^{\nu + \varepsilon}}.$$

Per i punti x che, distando dai punti c_h più di $\frac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$, distano meno di $\frac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$ da qualcuno dei punti $\omega\, c_h, \omega^2 c_h, \ldots, \omega^{q-1} c_h$, bisogna seguire una via alquanto diversa.

Si prenda un numero intero q' maggiore di q e primo con q. Le differenze:

$$\frac{2\pi}{q} r - \frac{2\pi}{q'} s \quad (0 \leq r \leq q-1, \; 0 \leq s \leq q'-1)$$

saranno tutte diverse da zero, fatta eccezione per $r = s = 0$; detto δ il loro minimo valore assoluto, si determini R in modo che, posto $\theta = \frac{1}{\gamma_1^{\nu'}}$, sia:

$$(R - \theta) \operatorname{sen} \delta > 2\,\theta. \tag{3}$$

Allora, se $|x| > R$ e il punto x dista da un punto $\omega^r c_h$ $(r \neq 0)$ meno di θ, sarà anzitutto:

$$|c_h| = |\omega^r c_h| > R - \theta ,$$

e quindi la distanza del punto $\omega^r c_h$ da qualunque dei raggi di argomenti $\frac{2\pi}{q'} s$ $(0 \leq s \leq q' - 1)$ sarà, per la (3), maggiore di $2\,\theta$, e tale sarà, a maggior ragione, la sua distanza da qualunque dei punti $\omega'^s c_h$ $(0 \leq s \leq q' - 1)$ dove ω' è una radice primitiva dell'unità di indice q'. Ne segue che la distanza di x da qualunque di tali punti sarà maggiore di θ e quindi maggiore di qualunque dei numeri $\frac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$.

Dopo ciò la dimostrazione può completarsi come prima.

c) Sia infine $f(x)$ il prodotto di una funzione semplice $\varphi(x)$ per un'esponenziale avente per esponente un polinomio $g(x)$:

$$f(x) = \varphi(x)\, e^{g(x)} .$$

Considerando che l'indice λ ha lo stesso valore per $f(x)$ e per $\varphi(x)$, e che per $f(x)$ si ha $\lambda \leq \nu$, segue da quanto si è stabilito, che per tutti i valori di x precedentemente considerati è:

$$|\varphi(x)| > e^{-\xi^{\lambda + \frac{\varepsilon}{2}}} \geq e^{-\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Inoltre, poichè il grado di $g(x)$ non supera ν, si ha (art. 179), per $|x|$ abbastanza grande:

$$|g(x)| < \xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}},$$

quindi:

$$-\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}} < R[g(x)] < \xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}},$$

e:

$$|e^{g(x)}| = e^{R[g(x)]} > e^{-\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Ne segue:

$$|f(x)| > e^{-2\xi^{\nu + \frac{\varepsilon}{2}}},$$

e, per $\xi > 2^{\frac{2}{\varepsilon}}$:

$$|f(x)| > e^{-\xi^{\nu + \varepsilon}}.$$

192. Dal teorema testè dimostrato segue, che su ogni circonferenza abbastanza grande col centro nell'origine, i cui punti distino dai punti

c_h $(h = 1, 2, \ldots)$ più di $\dfrac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$, si ha:

$$(1) \qquad m(\varrho) > e^{-\varrho^{\nu+\varepsilon}}.$$

La somma delle larghezze delle corone circolari escluse è $2 \sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$, che è un numero finito, per la condizione $\nu' > \nu \geq \lambda$. Quindi, qualunque sia R, esistono circonferenze di raggio $\varrho > R$, per le quali sussiste la (1).

193. *Sotto le stesse condizioni dell'art. 191 si ha:*

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < \xi^{2\nu+\varepsilon} \ (*).$$

Colle solite notazioni si ha, supposto non vi sieno radici nulle:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g'(x) + x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p (x - c_h)}.$$

Fissato un valore x, dividiamo la somma in tre parti, corrispondentemente alle condizioni seguenti:

$$\gamma_h \leq \frac{\xi}{2}, \quad \frac{\xi}{2} < \gamma_h \leq 2\xi, \quad \gamma_h > 2\xi.$$

(*) Il contenuto di questo articolo e del successivo è tolto, salvo qualche modificazione di forma, da una memoria di M. Ålander in *Ark. f. Mat.*, T. 17, 1922-23, n. 23.

Indicando con m il numero dei termini della prima parte, con $n-m$ quello dei termini della seconda (dove n ed m possono anche essere nulli), si ha:

per $\gamma_h \leq \frac{\xi}{2}$, $|x-c_h| \geq \xi - \gamma_h \geq \gamma_h$, quindi:

$$(1) \qquad \left| x^p \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{c_h{}^p (x-c_h)} \right| \leq \xi^p \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{\gamma_h{}^{p+1}};$$

per $\gamma_h > 2\,\xi$, $|x-c_h| \geq \gamma_h - \xi > \frac{\gamma_h}{2}$, quindi:

$$(2) \qquad \left| x^p \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{c_h{}^p (x-c_h)} \right| \leq 2\,\xi^p \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h{}^{p+1}}.$$

Per $\frac{\xi}{2} < \gamma_h \leq 2\,\xi$ si ha, per le condizioni del teorema:

$$|x-c_h| \geq \frac{1}{\gamma_h{}^{\nu'}},$$

quindi:

$$\left| x^p \sum_{h=m+1}^{n} \frac{1}{c_h{}^p (x-c_h)} \right| < \xi^p \sum_{h=m+1}^{n} \frac{\gamma_h{}^{\nu'}}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^p} = 2^p \sum_{h=m+1}^{n} \gamma_h{}^{\nu'},$$

ed a maggior ragione:

$$\left| x^p \sum_{h=m+1}^{n} \frac{1}{c_h{}^p (x-c_h)} \right| < (n-m)\, 2^{p+\nu'} \xi^{\nu'} \leq n\, 2^{p+\nu'} \xi^{\nu'}.$$

Ora, poichè la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$ è convergente e a termini positivi decrescenti, si ha (art. 177):

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^{\nu'}} = 0;$$

può quindi supporsi ξ abbastanza grande perchè sia:

$$n < \gamma_n^{\nu'} \leq (2\ \xi)^{\nu'}.$$

Si ha dunque:

$$(3) \qquad \left| x^p \sum_{h=m+1}^{n} \frac{1}{c_h^p\ (x - c_h)} \right| < 2^{p+2\nu'}\ \xi^{2\nu'}.$$

Dalle (1), (2), (3) segue colle solite considerazioni, e tenendo conto che ν' può essere di quanto poco si vuole differente da ν:

$$\left| x^p \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{c_h^p\ (x - c_h)} \right| < \xi^{2\nu+\varepsilon}.$$

Inoltre, poichè $g'(x)$ è un polinomio di grado $\leq \nu - 1$, si ha (art. 179):

$$|\ g'(x)\ | < \xi^{\nu},$$

e finalmente:

$$\left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| < \xi^{2\nu+\varepsilon}.$$

Ne segue, per infinite circonferenze di raggio arbitrariamente grande (cfr. art. prec.):

$$M_\rho \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] < \varrho^{2\nu+\varepsilon}. \tag{4}$$

194. *Il rango della derivata d'una funzione intera non può superare quello della funzione stessa.*

Diciamo c_h le radici di $f(x)$, d_h quelle di $f'(x)$, e supponiamo per semplicità le une e le altre tutte diverse da zero. Porremo $|c_h| = \gamma_h$, $|d_h| = \delta_h$. Se il cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine contiene i punti $c_1, c_2, \ldots, c_m$ e i punti $d_1, d_2, \ldots, d_n$, si ha (art. 174):

$$I_\rho \left[\frac{\lg |f(x)|}{x}\right] = 2\pi i \lg \frac{|f(0)|\varrho^m}{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m},$$

$$I_\rho \left[\frac{\lg |f'(x)|}{x}\right] = 2\pi i \lg \frac{|f'(0)|\varrho^n}{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n},$$

quindi:

$$I_\rho \left[\frac{\lg \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|}{x}\right] = 2\pi i \lg \frac{|f'(0)|\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m \varrho^{n-m}}{|f(0)|\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n},$$

da cui (art. 172):

$$M_\rho \left[\lg \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\right] \geq \lg \frac{|f'(0)|\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_m \varrho^{n-m}}{|f(0)|\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n}. \tag{1}$$

Supponiamo ora, se è possibile, che $f(x)$ sia di rango $p-1$ e $f'(x)$ di rango $\geq p$; la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^p}$ sarà convergente, e la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^p}$ sarà divergente. Invece della serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^p}$ consideriamo la serie $\sum_{h=N+1}^{\infty} \frac{1}{\delta_h^p}$, dove N è un numero intero non minore di 3ν. Per un teorema noto (*), la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_h)^{\frac{p}{h}}}$ sarà convergente, e la serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\delta_{N+1} \delta_{N+2} \ldots \delta_{N+h})^{\frac{p}{h}}}$ sarà divergente, e quindi il valore dell'espressione:

$$\left[\frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_h}{\delta_{N+1} \delta_{N+2} \ldots \delta_{N+h}}\right]^{\frac{p}{h}} = q_h ,$$

al crescere indefinito di h, non potrà mantenersi tra limiti finiti. Qualunque sia pertanto l'indice r, esisteranno indici $r' > r$ per cui $q_{r'} > q_r$. Sia M il più piccolo di tali indici; sarà allora:

(*) *Se la serie* $\sum_{h=1}^{\infty} u_h$ *a termini positivi è convergente, lo è pure la serie* $\sum_{h=1}^{\infty} (u_1 u_2 \ldots u_h)^{\frac{1}{h}}$ (T. Carleman, *Cinquième Congrès des math. scandinaves*, Helsingfors, 1923, p. 181-196). La reciproca è evidente per una serie a termini positivi generalmente decrescenti, quali sono quelle considerate nel testo.

$$q_{M-1} \leq q_r < q_M,$$

e quindi il fattore $\left(\frac{\gamma_M}{\delta_{N+M}}\right)^{\frac{p}{h}}$ che si aggiunge nel passaggio da q_{M-1} a q_M dovrà essere maggiore di 1, sicchè sarà:

$$\gamma_M > \delta_{N+M}.$$

Segue di qui che, se ϱ è compreso tra γ_M e γ_{M+1}, entro il cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine cadono M punti c_h, mentre il numero M' dei punti d_h in esso contenuti è $\geq N+M$.

Dopo ciò, supposto che il valore scelto di ϱ sia quello che figura nella (1), questa potrà scriversi come segue:

$$(2)\quad M_\rho\left[\lg\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\right] \geq \lg\left|\frac{f'(0)}{f(0)}\right| + \lg\frac{\varrho^N}{\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_N} + \\ + \frac{M}{p}\lg q_M + \lg\frac{\varrho^{M'-N-M}}{\delta_{N+M+1}\ldots\delta_{M'}},$$

ed anche, osservando che $\delta'_{N+M+1},\ldots,\delta'_{M'}$ sono minori di ϱ:

$$M_\rho\left[\lg\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\right] \geq \lg\left|\frac{f'(0)}{f(0)}\right| + \lg\frac{\varrho^N}{\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_N} + \frac{M}{p}\lg q_M.$$

Ne segue, su infinite circonferenze di raggio arbitrariamente grande:

$$(3) \qquad M_\rho \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right] > \rho^{N-\varepsilon},$$

relazione che è in contraddizione colla (4) dell'articolo precedente, essendo $N \geq 3\,\nu$.

Può però osservarsi, che non è certo esistano valori di ρ i quali soddisfacciano contemporaneamente alle due relazioni.

Questa difficoltà si toglie agevolmente.

Indichiamo, per maggior chiarezza, con ρ' uno dei valori di ρ che soddisfanno alla (4) dell'articolo precedente, con ρ uno di quelli che soddisfanno alla (3) di questo articolo. Possiamo sempre supporre:

$$\rho' > \rho \;,\; \rho' - \rho < S = 3\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\nu'}},$$

giacchè è $2\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h^{\nu'}}$ la larghezza complessiva delle corone escluse, di cui alla fine del precedente articolo; si può quindi determinare un numero positivo k che soddisfaccia alla relazione:

$$\rho' = \rho + \frac{S}{\rho^k}.$$

Se invece del cerchio ρ consideriamo il cerchio ρ', saranno compresi tra i due cerchi certi punti c_h e certi punti d_h, p. es. i punti $c_{M+1}, \ldots, c_{M+m}$; $d_{M'+1}, \ldots, d_{M'+n}$, e nel secondo membro della (2) si aggiungerà il termine:

$$\lg \frac{\gamma_{M+1} \ldots \gamma_{M+m} \varrho'^{n-m}}{\delta_{M'+1} \ldots \delta_{M'+n}} = \lg T.$$

Ora tutte le γ e tutte le δ sono maggiori di ϱ e minori di ϱ', quindi:

$$T > \frac{\varrho^m \varrho'^{n-m}}{\varrho'^n} = \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^m = \frac{1}{\left(1 + \frac{S}{\varrho^{k+1}}\right)^m} > e^{-\frac{m\,S}{\varrho^{k+1}}},$$

e:

$$\lg T > -\frac{m\;S}{\varrho^{k+1}},$$

sicchè l'aggiunta del nuovo termine non influisce sensibilmente sul significato della formola.

195. Dal teorema ora dimostrato e dall'ultimo teorema dell'art. 190 risulta che, se $f(x)$ è di rango p, $f'(x)$ non può essere che di rango p o di rango $p-1$. Il primo caso ha sempre luogo per le funzioni semplici a radici reali e per altre funzioni più generali (art. 171). Che possa aver luogo anche il secondo caso, è stato dimostrato con esempi (*). La funzione:

$$f(x) = \prod_{h=2}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c_h}\right) e^{\sum\limits_{k=1}^{p-1} \frac{x^k}{k\,c_h{}^k}},$$

(*) A. Wiman, *C. R. Ac. Paris*, T. 138, 1904, pagine 137-139; *Ark. f. Mat.* T. 1, 1904, p. 327-345.

dove:

$$c_h = [h \lg^{\alpha} h]^{\frac{1}{p}} \ , \ 1 < \alpha \leq 2 \, ,$$

è di rango $p-1$ ed ha tutte le radici reali, mentre, qualunque sia la costante $C\ (\neq 0)$, $g(x) = f(x) - C$ è di rango p. Per il teorema testè citato, $f'(x)$ è di rango $p-1$; ma d'altra parte $g'(x) = f'(x)$, quindi $g(x)$ è una funzione di rango p la cui derivata è di rango $p-1$.

Espressioni asintotiche. Teoria della crescenza.

196. Lo studio dell'andamento d'una funzione intera può farsi più rapidamente coll'uso delle espressioni asintotiche.

Se $f(x)$ è una funzione della variabile reale e positiva x, che tende ad ∞ insieme ad x, si dice che $\varphi(x)$ è una sua *espressione asintotica*, quando:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1 \, .$$

Si scrive:

$$f(x) \sim \varphi(x) \, . \tag{1}$$

Una notevole espressione asintotica è quella data dalla **formola di Stirling** (*) per il fattoriale:

(*) Questa formola, dovuta a J. STIRLING (1692-1770) (*Methodus differentialis*, Londra, 1730), si può dimostrare come segue, partendo dalla *formola di* WALLIS:

$$(\alpha) \qquad \frac{\pi}{2} = \lim_{n=\infty} \frac{2.2.4.4\ldots.2n.2n}{1.3.3.5\ldots.(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n=\infty} \frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)}.$$

Posto:

$$\varphi(n) = \frac{n!\,e^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n} = \frac{(n-1)!\,e^n}{\sqrt{2\pi}\,n^{n-\frac{1}{2}}},$$

si ha:

$$\frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{2n+1}{2n}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}},$$

e quindi, per la (α):

$$(\beta) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{[\varphi(n)]^2}{\varphi(2n)} = 1.$$

D'altra parte:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

quindi:

$$\lg \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} = -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\lg\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

ora (art. 97):

$$\lg\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{h=1}^{\infty}(-1)^{h-1}\frac{1}{h\,n^h},$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n .$$

---

quindi:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\sum_{h=1}^{\infty}(-1)^{h-1}\frac{1}{h\,n^h}=$$

$$=1+\sum_{h=2}^{\infty}(-1)^h\frac{h-1}{2h(h+1)}\frac{1}{n^h}.$$

L'ultima serie scritta è a termini di segni alternati, decrescenti in valore assoluto e tendenti a zero; quindi essa è convergente, e la sua somma è compresa tra 0 e il valore del primo termine. Si ha pertanto:

$$0<\lg\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}<\frac{1}{12n^2}.$$

Analogamente:

$$0<\lg\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}<\frac{1}{12(n+1)^2}<\frac{1}{12n^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0<\lg\frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}<\frac{1}{12(2n-1)^2}<\frac{1}{12n^2},$$

e di qui:

$$0<\lg\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}<\frac{1}{12n},$$

quindi:

$$\lim_{n=\infty}\lg\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=0,$$

e:

$$(\gamma)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=1.$$

Dalle (β), (γ) segue:

$$\lim_{n=\infty}\varphi(n)=1,$$

ossia:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n!\,e^n}{\sqrt{2\pi n}\,n^n}=1.$$

Colla notazione asintotica le definizioni degli indici μ e ν possono scriversi come segue:

$$a_h \sim \frac{1}{(h\,!)^{\mu}}\ ,\quad M_{\rho}\,[f\,(x)] \sim e^{\rho^{\nu}}\ ;$$

qui però il segno $\sim$ ha un significato meno preciso che non nella (1).

Se $f\,(x) \sim \varphi\,(x)$, si dice qualche volta che le funzioni $f\,(x)$, $\varphi\,(x)$ sono *paragonabili tra loro.* Così una funzione intera avente un dato indice ν è paragonabile colla funzione $e^{\rho^{\nu}}$.

197. È interessante osservare, che il fatto di essere una funzione $f\,(x)$ paragonabile con $e^{\rho^{\nu}}$ dipende dalla circostanza che *uno* dei termini del suo sviluppo, diverso a seconda dei diversi valori di ϱ, è paragonabile con $e^{\rho^{\nu}}$, mentre la somma dei termini rimanenti è trascurabile rispetto ad esso.

Prendiamo per semplicità la funzione intera:

$$f\,(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h\, x^h\ ,$$

dove:

$$a_h = h^{-h\mu}\ ,$$

sicchè, posto $x = y^{\mu}$, si ha:

$$f\,(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu}.$$

Diamo ad y un valore fisso reale e positivo, ma non intero, e consideriamo dapprima i termini di indice $h < y$. Tra essi ha valore massimo quello per cui h si avvicina di più ad $\frac{y}{e}$ (*); il valore di questo termine, supposto $h = \frac{y}{e}$, è:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu} = e^{\frac{\mu y}{e}} = e^{\frac{\mu}{e} x^{\frac{1}{\mu}}} \sim e^{\rho^{\frac{1}{\mu}}}.$$

Per $h > y$, posto $h = y + z$, si ha:

(*) Dalle diseguaglianze (art. 191):

$$e^u > 1 + u \quad , \quad e^{-u} > 1 - u,$$

ossia:

$$\frac{1+u}{e^u} < 1 \quad , \quad \frac{1-u}{e^{-u}} < 1,$$

segue che $\frac{1+u}{e^u}$ è massimo per $u = 0$.

Posto $u = \lg \frac{y}{h\,e}$, segue:

$$\frac{1+u}{e^u} = \frac{h\,e}{y} \lg \frac{y}{h} = e \lg \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{y}},$$

sicchè $\lg \left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{y}}$ è massimo per $\frac{y}{h\,e} = 1$, ossia per $h = \frac{y}{e}$, e lo stesso può dirsi di $\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{h}{y}}$, e quindi di $\left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu}$.

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu} = \left(\frac{1}{1+\frac{z}{y}}\right)^{z\mu\left(1+\frac{y}{z}\right)}.$$

Ora, se $m-1 < u < m$, dove m è intero:

$$\left(1+\frac{1}{u}\right)^{1+u} \geq \left(1+\frac{1}{u}\right)^{m} \geq 1+\frac{m}{u} > 2,$$

quindi:

$$\left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu} < 2^{-z\mu} = 2^{y\mu} \cdot 2^{-h\mu},$$

e, se k è il minimo numero intero maggiore di y:

$$\sum_{h=k}^{\infty}\left(\frac{y}{h}\right)^{h\mu} < 2^{y\mu}\,\frac{2^{-k\mu}}{1-2^{-\mu}} = \frac{2^{\mu(y-k+1)}}{2^{\mu}-1} \leq \frac{2^{\mu}}{2^{\mu}-1}.$$

Riassumendo, uno dei termini per cui $h \leq y$ è paragonabile con $e^{\rho^{\frac{1}{\mu}}}$, mentre gli altri sono minori di esso; i termini di indici $h > y$ danno una somma che non oltrepassa un limite fisso (*).

(*) Un risultato più preciso è dovuto ad A. WIMAN (*Acta math.*, T. 37, 1914, p. 305-326), il quale ha dimostrato che, indicando con $\varphi(\rho)$ il massimo dei moduli dei termini per $|x| = \rho$, si ha per questi valori di x:

$$|f(x)| < \varphi(\rho)\,[\lg \varphi(\rho)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Può concludersi di qui, che:

$$| f(x) | \sim e^{\rho^{\frac{1}{\mu}}},$$

cioè che $\nu = \dfrac{1}{\mu}$, come si è già dimostrato (articolo 188).

Inoltre il teorema di Jensen (art. 174), supposto $m = 0$, $f(0) = 1$, può scriversi, qualunque sia h:

$$| f(x) | \sim \frac{\varrho^h}{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_h} \sim \frac{\varrho^h}{\gamma_h{}^h},$$

mentre si è dimostrato che per un opportuno valore di h variabile con ϱ è:

$$\alpha_h \varrho^h = \frac{\varrho^h}{h^{h\mu}} \sim | f(x) |.$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\gamma_h} \sim \frac{1}{h^{\mu}};$$

quindi $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^{\frac{1}{\mu} - \varepsilon}}$ è divergente, $\sum\limits_{h=1}^{\infty} \dfrac{1}{\gamma_h{}^{\frac{1}{\mu} + \varepsilon}}$ è convergente, cioè $\lambda = \dfrac{1}{\mu} = \nu$ (cfr. art. 185).

La relazione:

$$\frac{1}{\gamma_h} \sim \frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$$

può prendersi (cfr. art. 177) come definizione dell'indice λ; essa può anche scriversi:

$$h \sim \varrho^\lambda,$$

dove h è il numero degli zeri contenuti nel cerchio di raggio ϱ col centro nell'origine, sicchè ϱ^λ rappresenta la *densità* degli zeri. La densità è ϱ^ν, se $\lambda = \nu$, è minore di ϱ^ν, se $\lambda < \nu$.

198. Il metodo esposto acquista un carattere di maggior precisione mediante l'introduzione del concetto di *crescenza*, dovuto a BOREL (*).

L'*ordine di crescenza* d'una funzione (di una variabile reale e positiva ϱ) è un elemento atto a rappresentare la maggior o minor rapidità con cui la funzione stessa, supposta reale, positiva e indefinitamente crescente, tende ad ∞ per $\lim \varrho = \infty$. L'ordine della funzione $f(x)$ si denota con ord $f(x)$.

La notazione:

$$\operatorname{ord} f(x) = \operatorname{ord} g(x)$$

esprime che il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, al crescere indefinitamente di x, si mantiene tra due limiti finiti e non nulli.

La notazione:

$$\operatorname{ord} f(x) > \operatorname{ord} g(x)$$

(*) E. BOREL, *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, 1910.

esprime che $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$; essa equivale all'altra:

$$\text{ord } g(x) < \text{ord } f(x).$$

Si definiscono poi come segue l'*addizione* e la *moltiplicazione* degli ordini:

$$\text{ord } f_1(x) + \text{ord } f_2(x) = \text{ord } [f_1(x) f_2(x)],$$
$$\text{ord } f_1(x) \,.\, \text{ord } f_2(x) = \text{ord } f_1[f_2(x)];$$

l'addizione è associativa e commutativa, la moltiplicazione è associativa ma, in generale, non commutativa (*). In particolare:

$$[\text{ord } f(x)]^p = \text{ord } f^{(p)}(x),$$

dove $f^{(p)}(x)$ è l'*iterata* p-esima della funzione $f(x)$. Si pone inoltre:

$$[\text{ord } f(x)]^{-1} = \text{ord } f^{(-1)}(x),$$

dove $f^{(-1)}(x)$ è l'*inversa* della funzione $f(x)$.

Si scrive:

$$\text{ord } x^n = n \quad , \quad \text{ord } e^x = \omega \text{ (**)};$$

(*) Posto per es. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = e^x$, si ha: $f_1[f_2(x)] = e^{2x} \sim e^x$, $f_2[f_1(x)] = e^{x^2}$.

(**) Questo simbolo ha proprietà diverse da quelle del numero ordinale trasfinito designato colla stessa

ne segue:

$$\text{ord}\,[f\,(x)]^n = n\,\text{ord}\,f\,(x),$$

$$\text{ord}\,e_n\,(x) = \omega^n \quad , \quad \text{ord}\,\lg_n x = \omega^{-n}\ (*);$$

inoltre, qualunque sia n:

$$\omega > n,$$

giacchè $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = \infty$;

$$\omega\,(n - \varepsilon) < m\,\omega\,n < \omega\,(n + \varepsilon),$$

$$(n - \varepsilon)\,\omega^{-1} < n\,\omega^{-1}\,m < (n + \varepsilon)\,\omega^{-1},$$

giacchè, fissati comunque i numeri positivi m, n, ε, si ha da un certo valore di x in avanti:

$$e^{x^{n-\varepsilon}} < e^{m\,x^n} < e^{x^{n+\varepsilon}},$$

$$(\lg x)^{n-\varepsilon} < (\lg x^m)^n < (\lg x)^{n+\varepsilon}.$$

---

lettera (art. 29). Per es. abbiamo qui:

$$\omega + n = n + \omega\ ,\ \omega + \omega = 2\,\omega,$$

mentre per il numero trasfinito ω è:

$$\omega + n > n + \omega\ ,\ \omega + \omega = \omega\,.\,2 \neq 2\,\omega;$$

inoltre la notazione ω^{-1} non ha alcun significato per il numero trasfinito ω, mentre qui rappresenta l'ordine di $\lg x$.

(*) Le notazioni $e_n(x)$, $\lg_n x$ sono definite da:

$$e_1\,(x) = e^x\ ,\ e_n\,(x) = e^{e_{n-1}\,(x)},$$

$$\lg_1 x = \lg x\ ,\ \lg_n x = \lg \lg_{n-1} x.$$

199. Il concetto di ordine si può estendere alquanto (*ordine generalizzato*), scrivendo che:

$$\text{ord}\, f(x) = (n),$$

per esprimere che, da un certo x in avanti:

$$x^{n-\varepsilon} < f(x) < x^{n+\varepsilon}. \tag{1}$$

Così:

$$\text{ord}\, x^{n+\alpha(x)} = (n),$$

se $\lim\limits_{x=\infty} \alpha(x) = 0$.

Due funzioni possono avere lo stesso ordine generalizzato senza avere lo stesso ordine. Infatti, se:

$$\lim_{x=\infty} \alpha(x) = \lim_{x=\infty} \beta(x) = 0,$$

si ha:

$$\text{ord}\, x^{n+\alpha(x)} = \text{ord}\, x^{n+\beta(x)} = (n),$$

$$\frac{x^{n+\alpha(x)}}{x^{n+\beta(x)}} = x^{\alpha(x)-\beta(x)} = e^{[\alpha(x)-\beta(x)]\lg x},$$

e, se $[\alpha(x) - \beta(x)] \lg x$ non tende ad un limite finito, le due funzioni non sono dello stesso ordine. P. es., se:

$$\alpha(x) = \frac{1}{\lg_2 x}, \quad \beta(x) = \frac{1}{\lg x},$$

ne segue:

$$\lim_{x=\infty} [\alpha(x) - \beta(x)] \lg x = \lim_{x=\infty} \left[\frac{\lg x}{\lg_2 x} - 1\right] = \infty .$$

Se:

(2) $$\operatorname{ord} f(x) = (n),$$

ne segue:

(3) $$\lim_{x=\infty} \frac{\lg f(x)}{\lg x} = n .$$

Infatti dalla (1) risulta:

$$(n - \varepsilon) \lg x < \lg f(x) < (n + \varepsilon) \lg x ,$$

ossia:

$$n - \varepsilon < \frac{\lg f(x)}{\lg x} < n + \varepsilon .$$

Reciprocamente dalla (3) segue la (2).
Se:

(4) $$\operatorname{ord} f_1(x) = (n_1), \operatorname{ord} f_2(x) = (n_2) \text{ o } n_2 ,$$

segue:

(5) $$\operatorname{ord} [f_1(x) f_2(x)] = (n_1 + n_2) .$$

Infatti dalle relazioni:

$$x^{n_1-\varepsilon} < f_1(x) < x^{n_1+\varepsilon},$$

$$x^{n_2-\varepsilon} < f_2(x) < x^{n_2+\varepsilon},$$

la seconda delle quali comprende come caso particolare quello in cui $\frac{f_2(x)}{x^{n_2}}$ si mantiene tra limiti finiti e non nulli, risulta:

$$x^{n_1+n_2-\varepsilon} < f_1(x)\ f_2(x) < x^{n_1+n_2+\varepsilon}.$$

Dalle (4) segue pure:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{ord} f_1[f_2(x)] = (n_1 n_2).$$

Infatti, essendo:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg f_1(x)}{\lg x} = n_1, \ \lim_{x=\infty} \frac{\lg f_2(x)}{\lg x} = n_2,$$

si ha dalla prima di queste relazioni:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg f_1[f_2(x)]}{\lg f_2(x)} = n_1,$$

che, moltiplicata per la seconda, ci dà:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg f_1[f_2(x)]}{\lg x} = n_1 n_2:$$

Le (5), (6) si assumono come definizioni della somma e del prodotto di un ordine generalizzato e di uno non generalizzato, *anche se quest'ultimo non è rappresentato da un numero finito* n. In base a ciò, supposto:

$$\lim_{x=\infty} \alpha(x) = \lim_{x=\infty} \beta(x) = 0\,,$$

si ha:

$$\operatorname{ord} e^{x^{n+\alpha(x)}} = \omega(n)\,,$$

$$\operatorname{ord} e^{[m+\beta(x)]\,x^{n+\alpha(x)}} = (m)\,\omega(n)\,.$$

I simboli come $\omega(n)$, $(m)\,\omega(n)$ possono considerarsi come ordini generalizzati.

200. Una funzione avente un ordine o un ordine generalizzato determinato si dice *a crescenza regolare.*

Per una funzione intera $f(x)$ di indice ν finito si ha, da un certo ϱ in avanti:

$$M_\rho[f(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}}\,,$$

mentre vi sono valori arbitrariamente grandi di ϱ, per cui:

$$M_\rho[f(x)] > e^{\rho^{\nu-\varepsilon}}\,.$$

Se questa seconda relazione ha sempre luogo da un certo ϱ in avanti, la funzione $M_\rho[f(x)]$ è a crescenza regolare e d'ordine $\omega(\nu)$; e si suol dire che anche $f(x)$ è a crescenza regolare e dello stesso ordine.

Le funzioni più comuni sono a crescenza regolare; però si può dimostrare l'esistenza di funzioni a crescenza irregolare col seguente esempio.

Abbiasi la funzione:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^{n_h}}{n_h!},$$

dove $n_1, n_2, \ldots$ è una successione crescente di numeri interi e positivi, tali che:

$$n_{h+1} = n_h^{\alpha_h},$$

essendo i numeri α_h tutti compresi tra due limiti maggiori di 1. Facciamo variare x da n_r a $n_{r+1} - \varepsilon$, cioè poniamo:

$$(2) \qquad x = n_r^t \quad , \quad 1 \leq t < \alpha_r .$$

Indicando con u_h il termine h-esimo della serie (1), e tenendo conto che (art. 196):

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

si ha in generale:

$$u_h \sim \left(\frac{e\,x}{n_h}\right)^{n_h},$$

e quindi per il valore (2) di x:

$$u_r \sim (e\, n_r^{t-1})^{n_r} \sim e^x \text{ per } t = 1\,,$$

$$u_r \sim (e\, n_r^{t-1})^{n_r} \sim x^{x^{\frac{1}{t}}} \sim e^{x^{\frac{1}{t}} \lg x} \sim e^{x^{\frac{1}{t}}} \text{ per } t > 1\,,$$

$$u_{r-1} \sim \left(\frac{e\, n_r^t}{n_{r-1}}\right)^{n_{r-1}} = \left(e\, n_r^{t-\frac{1}{\alpha_{r-1}}}\right)^{n_{r-1}} =$$

$$= \left(e\, x^{1-\frac{1}{\alpha_{r-1}t}}\right)^{x^{\frac{1}{\alpha_{r-1}t}}} \sim e^{x^{\frac{1}{\alpha_{r-1}t}}}\,,$$

$u_{r+1} \sim \left(\dfrac{e\, n_r^t}{n_{r+1}}\right)^{n_{r+1}} = (e\, n_r^{t-\alpha_r})^{n_{r+1}} < 1$ per r abbastanza grande.

Di qui risulta che per i valori (2) di x il termine prevalente della serie è u_r, sicchè per tutti questi valori:

$$f(x) \sim u_r.$$

Quindi:

$$\text{per } x = n_r\,, \text{ e così per } x = n_{r+1}\,,\ f(x) \sim e^x,$$

$$\text{per } x = n_{r+1} - 0,\ f(x) \sim e^{x^{\frac{1}{\alpha_r}}}.$$

Cioè:

$$\text{per } x = n_{r+1}\,,\ e^{x-\varepsilon} < f(x) < e^{x+\varepsilon},$$

$$\text{per } x = n_{r+1} - 0\,,\ e^{x^{\frac{1}{\alpha_r}-\varepsilon}} < f(x) < e^{x^{\frac{1}{\alpha_r}+\varepsilon}}.$$

Si ha dunque per ogni x abbastanza grande:

$$f(x) < e^{x+\varepsilon},$$

mentre soltanto per certi valori di x si ha:

$$f(x) > e^{x-\varepsilon}.$$

La funzione è a crescenza irregolare.

201. *Se una funzione è a crescenza regolare, lo è anche la sua derivata* (*).

Sia per la funzione $f(x)$, da un certo ϱ in avanti:

$$e^{\rho^{\nu-\varepsilon}} < M_\rho [f(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}}. \tag{1}$$

Poichè (art. 190) l'indice ν della $f'(x)$ è eguale a quello della $f(x)$, sarà anzitutto, da un certo ϱ in avanti:

$$M_\rho [f'(x)] < e^{\rho^{\nu+\varepsilon}}. \tag{2}$$

Inoltre, se x_0 è un punto qualunque, si ha:

$$f(x_0) - f(0) = \int_0^{x_0} f'(x)\, dx,$$

da cui (art. 103, nota):

$$|\, f(x_0) - f(0) \,| \leq L \,|\, x_0 \,|,$$

intendendo l'integrazione estesa lungo il seg-

(*) G. Gallina, *Giorn. di mat.*, T. 62, 1924, p. 59-61.

mento $0\,x_0$, e indicando con L il massimo modulo di $f'(x)$ su questo segmento. Se $|x_0| = \varrho$, si ha di qui, considerando che (art. 105) $L \leq M_\rho [f'(x)]$:

$$M_\rho [f(x)] - |f(0)| \leq \varrho\, M_\rho [f'(x)],$$

donde si deduce facilmente, tenuta presente la (1):

$$e^{\rho^{\nu-\varepsilon}} < M_\rho [f'(x)]. \qquad (3)$$

Le (2), (3) dimostrano l'asserto.

202. Il concetto d'ordine può estendersi alle successioni indefinitamente crescenti di numeri positivi. Se:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots$$

è una successione di tale specie, può dirsi che essa è d'ordine (n), se da un certo h in avanti è:

$$h^{n-\varepsilon} < \delta_h < h^{n+\varepsilon}.$$

P. es. la successione dei moduli degli zeri di una funzione intera d'indice λ finito è di ordine $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Gli indici di Lindelöf.

203. E. Lindelöf (*) ha sostituito agli indici λ e ν sistemi di indici $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$; ν, $\nu_1, \ldots, \nu_m$, che permettono un'analisi più pro-

(*) *Acta Soc. sc. Fennicae,* T. 31, 1902, p. 1-79.

fonda dell'andamento d'una funzione intera. Essi si definiscono come segue:

a) $$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\lambda} \lg^{\lambda_1} \gamma_h \lg_2^{\lambda_2} \gamma_h \ldots \lg_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \gamma_h \lg_m^{\lambda_m - \varepsilon} \gamma_h}$$

è divergente, mentre:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h \lg^{\lambda_1} \gamma_h \lg_2^{\lambda_2} \gamma_h \ldots \lg_{m-1}^{\lambda_{m-1}} \gamma_h \lg_m^{\lambda_m + \varepsilon} \gamma_h}$$

è convergente;

b) da un certo ϱ in avanti è:

$$M_\rho [f(x)] < e^{\rho^{\nu} \lg^{\nu_1} \rho \lg_2^{\nu_2} \rho \ldots \lg_{m-1}^{\nu_{m-1}} \rho \lg_m^{\nu_m + \varepsilon} \rho},$$

mentre vi sono valori arbitrariamente grandi di ϱ per cui:

$$M_\rho [f(x)] > e^{\rho^{\nu} \lg^{\nu_1} \rho \lg_2^{\nu_2} \rho \ldots \lg_{m-1}^{\nu_{m-1}} \rho \lg_m^{\nu_m - \varepsilon} \rho} \; (*).$$

Per semplicità di scrittura supporremo $m=2$. Per il teorema di JENSEN (art. 174) si ha:

$$M_\rho [f(x)] \geq \frac{\varrho^h}{\gamma_h{}^h},$$

(*) Una definizione alquanto diversa da quella di LINDELÖF è stata proposta ultimamente da S. MINETTI (*Rend. Acc. Lincei,* S. VI, T. 6, 1927, p. 268-274).

essendo $\gamma_h < \varrho < \gamma_{h+1}$; ne segue, supposta soddisfatta la prima condizione b):

$$(1) \qquad \frac{1}{\gamma_h{}^h} \leq \frac{M_\rho\,[f\,(x)]}{\varrho^h} < \frac{e^{\rho^\nu \lg^{\nu_1} \rho \lg_2{}^{\nu_2+\varepsilon} \rho}}{\varrho^h}.$$

Cerchiamo il valore di ϱ che rende minima quest'ultima espressione. Poichè $\lg \varrho$ e $\lg_2 \varrho$ crescono meno rapidamente di ϱ, basterà, per valori molto grandi di ϱ, cercare il minimo di:

$$\varphi\,(\varrho) = \frac{e^{\rho^{\nu'}}}{\varrho^h},$$

dove ν' differisce di pochissimo da ν.

Poniamo:

$$\frac{h}{\nu'} = k \quad , \quad \varrho = k^{\frac{1}{\nu'}}\,(1+u)^{\frac{1}{\nu'}};$$

sarà:

$$\varphi\,(\varrho) = \frac{e^{k(1+u)}}{k^k\,(1+u)^k} = \left[\frac{e}{k}\,\frac{e^u}{1+u}\right]^k.$$

Ora $\dfrac{e^u}{1+u}$ è minimo per $u = 0$ (art. 197, nota), quindi $\varphi\,(\varrho)$ sarà minimo per:

$$\varrho = \left(\frac{h}{\nu'}\right)^{\frac{1}{\nu'}},$$

relazione che può scriversi:

$$\varrho^{\nu} \lg^{\nu_1} \varrho \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} \varrho \sim \frac{h}{\nu}.$$

Ne segue:

$$\lg h \sim \nu \lg \varrho \, , \, \lg_2 h \sim \lg_2 \varrho + \lg \nu \sim \lg_2 \varrho \, ,$$

quindi:

$$\varrho^{\nu} \sim \frac{h \, \nu^{\nu_1 - 1}}{\lg^{\nu_1} h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} h} \sim \frac{h}{\lg^{\nu_1} h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} h} .$$

Dalla (1) risulta pertanto:

$$\frac{1}{\gamma_h^{\,h}} < \left[\frac{e \lg^{\nu_1} h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} h}{h}\right]^{\frac{h}{\nu}} ,$$

e quindi:

$$\gamma_h > \left[\frac{h}{\lg^{\nu_1} h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} h}\right]^{\frac{1}{\nu}} , \tag{2}$$

$$\lg \gamma_h > \frac{1}{\nu} \lg h \; , \; \lg_2 \gamma_h > \lg_2 h \, , \tag{3}$$

donde segue, per la (2):

$$\gamma_h > \left[\frac{h}{\nu^{\nu_1} \lg^{\nu_1} \gamma_h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} \gamma_h}\right]^{\frac{1}{\nu}} ,$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\gamma_h > \left[\frac{h}{\lg^{\nu_1} \gamma_h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} \gamma_h}\right]^{\frac{1}{\nu}},$$

da cui:

$$h < \gamma_h^{\nu} \lg^{\nu_1} \gamma_h \lg_2^{\nu_2+\varepsilon} \gamma_h ,$$

e, per le (3):

$$h \lg h \lg_2^{1+\delta} h < \gamma_h^{\nu} \lg^{\nu_1+1} \gamma_h \lg_2^{\nu_2+1+\varepsilon'} \gamma_h .$$

Ora, poichè, come è noto, la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h \lg h \lg_2^{1+\delta} h}$$

è convergente, a maggior ragione lo sarà la serie:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^{\nu} \lg^{\nu_1+1} \gamma_h \lg_2^{\nu_2+1+\varepsilon'} \gamma_h} .$$

Generalizzando, può concludersi che, se il sistema di indici $\nu , \nu_1 , \nu_2 , \ldots , \nu_m$ soddisfa alla prima condizione *b*), il sistema ν , $\nu_1 + 1$, $\nu_2+1, \ldots$ $\ldots, \nu_m + 1$ soddisfa alla prima condizione *a*). È una generalizzazione del teorema $\lambda \leq \nu$.

Teoremi di Picard.

204. *Una funzione intera prende tutti i valori, eccettuato uno al più* (**primo teorema di Picard**) (*).

Per stabilire questo teorema, basta dimostrare che una funzione intera $f(x)$, la quale non prende due valori p, q, è una costante. Supposto che

(*) Questo teorema fu dimostrato da E. PICARD (*C. R. Ac. Paris*, T. 88, 1879, p. 1024-1027; *Ann. Ec. norm.*, S. II, T. 9, 1880, p. 145-166) in modo molto semplice coll'uso della *funzione modulare*. Più tardi E. BOREL (*C. R. Ac. Paris*, T. 122, 1896, p. 1045-1048; *Acta math.*, T. 20, 1896-97, p. 357-396; *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, 1ª ed. 1900, 2ª ed. 1920) ne diede una dimostrazione *elementare*, cioè fondata soltanto sui principii generali dell'Analisi. In seguito il teorema fu dimostrato di nuovo per altre vie; vedi: A. BLOCH, *C. R. Ac. Paris*, T. 178, 1924, pagine 1593-1595; B. DÉIRMENDJIAN, *C. R. Ac. Paris*, T. 173, 1921, p. 897-899; J. HADAMARD, E. LANDAU, *Rend. Acc. Lincei*, S. VI, T. 6, 1927, p. 3-9; E. LANDAU, *Vierteljahrsschr. naturf. Ges. Zürich*, T. 51, 1906, p. 252-308; *Handel. XXI Nederland. Nat.-en Geneesk. Congres*, Amsterdam, 1927; E. LINDELÖF, *Congr. Math. Stockholm* 1909, Leipzig, 1910, p. 112-136; R. NEVANLINNA, *Acta Soc. sc. Fennicae*, T. 50, 1924, n. 6; W. F. OSGOOD, *Bull. Amer. math. Soc.*, S. II, T. 5, 1898, p. 59-69; F. SCHOTTKY, *Sitzungsb. Ak. Berlin*, 1904, p. 1244-1262; 1906, p. 32-36; G. VALIRON, *C. R. Ac. Paris*, T. 170, 1920, p. 167-169; T. 177, 1923, p. 740-741; T. 183, 1926, p. 728-730; *Bull. sc. math.*, S. II, T. 44, 1920, p. 91-104; *Mémorial des sc. math.*, fasc. 2, 1925; A. WIMAN, *Acta math.*, T. 41, 1916, p. 1-28.

$f(x)$ non prenda i valori p, q, la funzione intera:

$$g(x) = \frac{f(x) - p}{q - p}$$

non prenderà i valori 0 e 1, e reciprocamente. Basterà quindi dimostrare, che una funzione intera, la quale non prende i valori 0 e 1, si riduce ad una costante.

Noi dimostreremo il seguente teorema (**teorema di Landau**), che comprende quello di PICARD:

Se $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{h}=0}^{\infty} \mathrm{c_h}\,\mathrm{x^h}$ *è una funzione intera, esiste un numero positivo* R *dipendente soltanto da* c_0 *e da* c_1, *e tale che entro il cerchio di raggio* R *col centro nell'origine* f (x) *prende almeno una volta il valore 0 o il valore 1* (*).

205. Supponiamo, se è possibile, che $f(x)$ non prenda entro il cerchio R nessuno dei due valori 0, 1; sarà (art. 134):

$$(1) \qquad f(x) = e^{\varphi(x)} \quad , \quad 1 - f(x) = e^{\psi(x)},$$

essendo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due funzioni regolari entro il cerchio R, che non possono annullarsi nè assumere valori della forma $2\pi k i$ con k intero.

Scomponiamo $\varphi(x)$ nelle sue parti reale ed

(*) La dimostrazione esposta nel testo segue, salvo qualche modificazione, quella data da E. LINDELÖF nella memoria citata nella nota precedente.

imaginaria pura:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} a_h x^h = A(x) + i B(x),$$

e facciamo:

$$a_h = a_h' + i a_h'';$$

attribuendo a $C(\varrho)$, $D(\varrho)$ lo stesso significato dato a questi simboli nell'art. 175, si ha per $h > 0$ (v. articolo citato):

$$|a_h| \leq \frac{4}{\varrho^h}\left[C(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right],$$

$$|a_h| \leq \frac{4}{\varrho^h}\left[D(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right],$$

quindi per ogni x tale che $|x| = \xi < \varrho$:

$$|\varphi(x)| \leq |a_0'| + |a_0''| + $$
$$+ 4\left[C(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right]\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^h$$
$$= |a_0'| + |a_0''| + 4\left[C(\varrho) + \frac{1}{2}|a_0'|\right]\frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Supposto:

$$\frac{1}{2}\varrho < \xi < \varrho,$$

ne segue:

$$\frac{\xi}{\varrho - \xi} > 1,$$

quindi, scrivendo per brevità $M(\xi)$ invece di $M_\xi[\varphi(x)]$:

$$(2)\quad C(\xi) \leq M(\xi) \leq \left[4\, C(\varrho) + 3\,|a_0'| + |a_0''|\right] \frac{\xi}{\varrho - \xi}.$$

Analogamente:

$$(3)\quad C(\xi) \leq M(\xi) \leq \left[4\, D(\varrho) + 3\,|a_0'| + |a_0''|\right] \frac{\xi}{\varrho - \xi};$$

ed allo stesso modo:

$$(4)\quad C'(\xi) \leq M'(\xi) \leq \left[4\, C'(\varrho) + 3\,|b_0'| + |b_0''|\right] \frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

$$C'(\xi) \leq M'(\xi) \leq \left[4\, D'(\varrho) + 3\,|b_0'| + |b_0''|\right] \frac{\xi}{\varrho - \xi},$$

dove b_h sono i coefficienti dello sviluppo di $\psi(x)$, e C', D', M' sono i simboli corrispondenti a C, D, M per quest'ultima funzione.

D'altra parte dalle (1) segue:

$$e^{\varphi(x)} + e^{\psi(x)} = 1,$$

e quindi:

$$|e^{\psi(x)}| < 1 + |e^{\varphi(x)}|,$$

da cui:

$$e^{C'(\varrho)} \leq 1 + e^{C(\varrho)} = e^{C(\varrho)}\,(1 + e^{-C(\varrho)}),$$

quindi:

$$C'(\varrho) \leq C(\varrho) + \lg[1 + e^{-C(\rho)}] < C(\varrho) + e^{-C(\rho)} (*),$$

ed a maggior ragione:

$$(5) \qquad C'(\varrho) < C(\varrho) + 1 .$$

Sia ora x_0 un punto tale, che:

$$|x_0| = \varrho \ , \ A(x_0) = -D(\varrho) \ (**);$$

poichè dalle relazioni (1) segue (art. 97), per $|e^{\varphi(x)}| = e^{A(x)} < 1$:

$$\psi(x) = \lg(1 - e^{\varphi(x)}) = - e^{\varphi(x)} - \frac{1}{2} e^{2\varphi(x)} - \frac{1}{3} e^{3\varphi(x)} - \ldots,$$

sarà:

$$|\psi(x_0)| \leq e^{-D(\rho)} + \frac{1}{2} e^{-2D(\rho)} + \frac{1}{3} e^{-3D(\rho)} + \ldots$$

$$< e^{-D(\rho)} + e^{-2D(\rho)} + e^{-3D(\rho)} + \ldots = \frac{e^{-D(\rho)}}{1 - e^{-D(\rho)}}.$$

Se ϱ è abbastanza grande perchè sia:

$$(6) \qquad D(\varrho) > 3 \lg 2 ,$$

(*) Dalla relazione ($\xi > 0$):

$$1 + \xi < e^{\xi}$$

segue l'altra:

$$\lg(1 + \xi) < \xi .$$

(**) $A(x)$, essendo funzione continua sulla circonferenza ρ, raggiunge, per un noto teorema, i suoi limiti superiore e inferiore.

sarà:

$$| \psi (x_0) | < \frac{8}{7} e^{-D(\rho)} < 2 e^{-D(\rho)}.$$

Osserviamo però che la funzione $\psi (x)$ è determinata a meno d'un multiplo intero di $2 \pi i$; dovrà quindi dirsi più esattamente che, fissata comunque questa funzione, si può trovare per ciascun valore di ϱ che renda soddisfatta la (6) un numero intero s tale, che sia:

$$(7) \qquad | \psi (x_0) - 2 \pi i s | < 2 e^{-D(\rho)}.$$

Ricordando che $\psi (x)$ non può prendere entro il cerchio R nessun valore multiplo di $2 \pi i$, possiamo porre:

$$(8) \qquad \psi (x) - 2 \pi i s = e^{\chi_s(x)},$$

dove la funzione $\chi_s (x)$ è regolare nel cerchio R.

Indicheremo con γ_s, δ_s, μ_s le funzioni corrispondenti a C, D, M per la $\chi_s (x)$, con p_{sh} i coefficienti dello sviluppo di quest'ultima funzione.

Distinguiamo i due casi: $s = 0$, $s \neq 0$.

a) Sia $s = 0$, quindi:

$$(9) \qquad \psi (x) = e^{\chi_0(x)};$$

la (7) diviene:

$$| \psi (x_0) | < 2 e^{-D(\rho)};$$

ne segue:

$$R[\chi_0(x_0)] < \lg 2 - D(\varrho) \ (*),$$

e quindi, per la (6):

$$R[\chi_0(x_0)] < -\frac{2}{3} D(\varrho),$$

da cui:

$$\mu_0(\varrho) > \frac{2}{3} D(\varrho). \tag{10}$$

Inoltre dalla (9):

$$\gamma_0(\varrho) = \lg M'(\varrho). \tag{11}$$

D'altra parte, applicando la (2) alla funzione $\chi_0(x)$, si ha:

$$\mu_0(\varrho) \leq \left[4\gamma_0(\varrho') + 3\,|p_{00}'| + |p_{00}''|\right] \frac{\varrho}{\varrho' - \varrho}, \tag{12}$$

sotto la condizione:

$$\frac{1}{2}\varrho' < \varrho < \varrho'. \tag{13}$$

Dalle (10), (11), (12) segue:

(*) Con $R[\varphi(x)]$ indichiamo, come precedentemente, la parte reale della funzione $\varphi(x)$.

$$D(\varrho) \leq \frac{3}{2}\left[4 \lg M'(\varrho') + 3\,|p_{00}'| + |p_{00}''|\right]\frac{\varrho}{\varrho' - \varrho}.$$

b) Sia $s \neq 0$, e poniamo $|s| = \sigma$. Dalle (6), (7) segue:

$$2\pi\sigma < |\psi(x_0)| + 2\,e^{-D(\rho)} \leq M'(\varrho) + \frac{1}{4},$$

e di qui, essendo $\sigma \geq 1$:

$$(14) \qquad \pi\sigma < M'(\varrho) + \frac{1}{4} - \pi\sigma < M'(\varrho),$$

quindi, per la (8):

$$e^{R[\lambda_s(x)]} = |\psi(x) - 2\pi i s| \leq |\psi(x)| + 2\pi\sigma,$$

da cui, tenuta presente l'ultima diseguaglianza:

$$e^{\gamma_s(\rho)} \leq M'(\varrho) + 2\pi\sigma < 3\,M'(\varrho).$$

Ora, poichè dalla (14) segue anche:

$$M'(\varrho) > 3,$$

si ha:

$$e^{\gamma_s(\rho)} < M'^2(\varrho),$$

quindi:

$$\gamma_s(\varrho) < 2 \lg M'(\varrho),$$

e, per la (14):

$$\gamma_s(\varrho) + \lg \sigma < 3 \lg M'(\varrho) .$$

D'altra parte si ha, per la (2), sotto la condizione (13):

$$\mu_s(\varrho) \leq \left[4\, \gamma_s(\varrho') + 3 \mid p'_{s0} \mid + \mid p''_{s0} \mid \right] \frac{\varrho}{\varrho' - \varrho} .$$

Ora:

$$e^{p_s} = b_0 - 2\pi i s ,$$

quindi:

$$e^{p'_{s0}} \leq \mid b_0 \mid + 2\pi\sigma ;$$

e poichè (art. 71):

$$\mid b_0 \mid \leq M'(\varrho') ,$$

e:

$$\pi\sigma < M'(\varrho) < M'(\varrho') ,$$

ed inoltre:

$$M'(\varrho') > 3 ,$$

segue:

$$e^{p'_{s0}} < 3\, M'(\varrho') < M'^2(\varrho') ,$$

e:

$$p'_{s0} < 2 \lg M'(\varrho') .$$

Tenuto conto poi che può sempre supporsi $\mid p_{s0}'' \mid \leq \pi$, si ha:

$$\mu_s(\varrho) \leq \left[14 \lg M'(\varrho') + \pi \right] \frac{\varrho}{\varrho' - \varrho} .$$

Infine, analogamente alla (10):

$$\mu_s(\varrho) \geq \frac{2}{3} D(\varrho);$$

quindi:

$$D(\varrho) \leq \frac{3}{2}\left[14 \lg M'(\varrho') + \pi\right]\frac{\varrho}{\varrho' - \varrho}.$$

Si ha dunque per tutti i valori di s:

$$(15)\quad D(\varrho) \leq \frac{3}{2}\left[14 \lg M'(\varrho') + 3\,|\,p_{00}'\,| + \pi\right]\frac{\varrho}{\varrho' - \varrho}.$$

Dalle (3), (4), (5), (15) segue, supposto:

$$\frac{1}{2}\,\xi' < \varrho' < \xi',$$

cambiando nella (3) ξ, ϱ in ϱ, ϱ', e nella (15) ϱ, ϱ' in ϱ', ξ', e considerando che le frazioni $\frac{\varrho}{\varrho' - \varrho}, \frac{\xi'}{\xi' - \varrho'}$ sono maggiori di 1:

$$M'(\xi) < \frac{336\ \xi\,\varrho\,\varrho'}{(\varrho - \xi)(\varrho' - \varrho)(\xi' - \varrho')} \lg\left[\alpha\, M'(\xi')\right],$$

posto:

$$336 \lg \alpha = 24\,(3\,|\,p_{00}'\,| + \pi) +$$
$$+ 4\,(3\,|\,a_0'\,| + |\,a_0''\,| + 1) + 3\,|\,b_0'\,| + |\,b_0''\,|,$$

e sotto la condizione:

$$(16) \qquad D(\varrho') > 3 \lg 2 \ (*).$$

Supponiamo in particolare:

$$\varrho - \xi = \varrho' - \varrho = \xi' - \varrho' = \frac{1}{3}(\xi' - \xi);$$

sarà:

$$M'(\xi) < \frac{336 \,.\, 27\, R^3}{(\xi' - \xi)^3} \lg [\alpha\, M'(\xi')],$$

quindi (**):

$$\alpha\, M'(\xi') > \frac{1}{2}\left[\frac{(\xi' - \xi)^3}{336 \,.\, 27\, R^3}\right]^2 M'^2(\xi) >$$
$$> \left[\frac{\xi' - \xi}{24\, R}\right]^6 M'^2(\xi)\,.$$

Poniamo per ogni x reale e positivo:

$$M'(x) = 24^6\, \alpha\, N^6(x);$$

la diseguaglianza trovata diviene, estraendo la radice sesta:

(*) Giacchè nella (15) si è cambiato ρ in ρ'.

(**) Si ha per ogni x positivo $e^x > \dfrac{x^2}{2}$; posto $x = \lg y$, ne segue, per ogni $y > 1$:

$$y > \frac{1}{2} \lg^2 y,$$

$$N(\xi') > \frac{\xi' - \xi}{R} N^2(\xi).$$

Sia $R - \xi = h$, e prendiamo successivamente:

$$\xi' - \xi = \frac{h}{2}, \ \xi'' - \xi' = \frac{h}{2^2}, \ldots, \xi^{(n)} - \xi^{(n-1)} = \frac{h}{2^n};$$

sarà:

$$N(\xi') > \frac{h}{2R} N^2(\xi), \ N(\xi'') > \frac{h}{2^2 R} N^2(\xi'), \ldots,$$

$$N(\xi^{(n)}) > \frac{h}{2^n R} N^2(\xi^{(n-1)}),$$

da cui:

$$N(\xi^{(n)}) > \frac{h}{2^n R} \left(\frac{h}{2^{n-1} R}\right)^2 \left(\frac{h}{2^{n-2} R}\right)^{2^2} \cdots \left(\frac{h}{2R}\right)^{2^{n-1}} N^{2^n}(\xi)$$

$$= \frac{1}{2^p} \left(\frac{h}{R}\right)^q N^{2^n}(\xi) = 2^{2q-p} \left(\frac{h}{4R}\right)^q N^{2^n}(\xi) =$$

$$= 2^n \left(\frac{h}{4R}\right)^{-1} \left[\frac{h}{4R} N(\xi)\right]^{2^n},$$

essendo:

$$p = n + 2(n-1) + 2^2(n-2) + \ldots$$
$$+ 2^{n-2} \cdot 2 + 2^{n-1} = 2^{n+1} - n - 2 \ (*),$$

(*) Per calcolare questa somma si può procedere come segue.

Poniamo:

$$F(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1};$$

$$q = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1 .$$

Ora, poichè $\lim\limits_{n=\infty} \xi^{(n)} = R$, e $N(R)$ è finito, dovrà essere:

$$\frac{h}{4R} N(\xi) < 1 ,$$

ossia:

$$N(\xi) < \frac{4R}{R - \xi} ,$$

e:

$$M'(\xi) < \alpha \left[\frac{96 \; R}{R - \xi} \right]^6 .$$

Se:

$$D(\varrho') \leq 3 \lg 2 ,$$

---

ne segue:

$$F'(x) = n\, x^{n-1} + (n-1)\, x^{n-2} + \ldots + 2x + 1 = \\ = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(x-1)^2} ,$$

da cui per $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{n}{2^{n-1}} + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \ldots + \frac{2}{2} + 1 = 4 \left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1 \right) = \\ = \frac{n}{2^{n-1}} - \frac{n+1}{2^{n-2}} + 4 = - \frac{n+2}{2^{n-1}} + 4 ,$$

e quindi:

$$p = 2^{n+1} - n - 2.$$

Del resto la formola si dimostra facilmente per induzione completa.

segue dalle (3), (4), (5):

$$M'(\xi) < \beta \frac{\xi \varrho}{(\varrho - \xi)(\varrho' - \varrho)} < \beta \left(\frac{6\,R}{R - \xi}\right)^2,$$

dove:

$$\beta = 48 \lg 2 + 4\,(3\,|\,a_0'\,| + |\,a_0''\,| + 1) + \\ + 3\,|\,b_0'\,| + |\,b_0''\,|.$$

Si ha dunque in tutti i casi, denotando con η il maggiore dei due numeri α, β:

$$M'(\xi) < \eta \left[\frac{96\;R}{R - \xi}\right]^6.$$

Ora, per la seconda delle (1), si ha per $|\,x\,| = \xi$:

$$|\,f(x) - 1\,| = e^{R[\psi(x)]} < e^{M'(\xi)},$$

quindi, per $\xi = \dfrac{R}{2}$:

$$|\,f(x) - 1\,| < e^{192^6 \eta},$$

e per conseguenza (art. 71):

$$|\,c_1\,| \frac{R}{2} < e^{192^6 \eta},$$

da cui infine:

$$R < \frac{2}{|\,c_1\,|}\, e^{192^6 \eta}, \tag{17}$$

relazione la quale mostra che il raggio del cerchio, entro il quale $f(x)$ non prende i valori 0 e 1, non supera un certo limite. Rimane da dimostrare che questo limite dipende soltanto dai coefficienti c_0 e c_1.

Le costanti α e β contengono i coefficienti a_0, b_0, p_{00}, e la condizione (17) contiene c_1. Ora dalle (1), (9) segue:

$$c_0 = e^{a_0},$$
$$1 - c_0 = e^{b_0},$$
$$b_0 = e^{p_{00}},$$

donde si vede che a_0, b_0, p_{00} dipendono soltanto da c_0.

Pertanto R dipende soltanto da c_0 e da c_1, e il teorema risulta completamente dimostrato.

206. Il secondo teorema di Picard, che ci limitiamo ad enunciare, è il seguente:

Una funzione intera trascendente *prende tutti i valori un numero infinito di volte, tranne uno al più* (*).

(*) Per varie generalizzazioni dei teoremi di PICARD v.: L. BIEBERBACH, *Math. Ann.*, T. 85, 1922, p. 141-148; *Math. Zeitschr.*, T. 3, 1919, p. 175-190; *Acta math.*, T. 42, 1919-20, p. 357-361; H. BOHR, *Scripta Univ. Hierosol.*, T. 1, 1925; P. BOUTROUX, *C. R. Ac. Paris*, T. 141, 1905, p. 305-307; C. CARATHÉODORY, *C. R. Ac. Paris*, T. 141, 1905, pagine 1213-1215; T. 154, 1912, p. 1690-1693; M. FEKETE, *Math. Ann.*, T. 88, 1922, p. 166-167; T. H. GRONWALL, *C. R. Ac. Paris*, T. 155, 1912, p. 764-766;

207. Un'applicazione notevole del secondo teorema di PICARD è la seguente (*):

Data una funzione intera, esistono linee tendenti all'infinito, sulle quali la funzione prende un insieme di valori denso in tutto il piano complesso.

Consideriamo l'insieme A, denso in tutto il piano complesso, dei numeri $c = a + b\,i$, dove a e b prendono tutti i possibili valori razionali. Poichè l'insieme è numerabile (art. 13), possiamo disporne gli elementi in serie semplice:

$$c_1\,,\,c_2\,,\,c_3\,,\ldots;$$

G. JULIA, *C. R. Ac. Paris*, T. 168, 1919, p. 502-504, 598-600; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 36, 1919, pagine 93-125; T. 37, 1920, p. 165-218; E. LANDAU, *Sitzungsb. Ak. Berlin*, 1904, p. 1118-1133; 1926, p. 467-474; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 24, 1907, p. 179-201; *Math. Ann.*, T. 86, 1922, p. 158-160; *Rend. Circ. mat. Palermo*, T. 46, 1922, p. 456-462; P. LÉVY, *Bull. Soc. math. France*, T. 40, 1912, pagine 25-39; P. MONTEL, *C. R. Ac. Paris*, T. 155, 1912, p. 1000-1003; R. NEVANLINNA, *C. R. Ac. Paris*, T. 177, 1923, p. 389-392; *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1924, p. 151-154; G. RÉMOUNDOS, *C. R. Ac. Paris*, T. 136, 1903, p. 953-955; T. 155, 1912, p. 818-820, 1592-1595; F. SCHOTTKY, *Sitzungsb. Ak. Berlin*, 1907, p. 823-840; *Journ. f. Math.*, T. 147, 1917, p. 161-173; G. VALIRON, *C. R. Ac. Paris*, T. 173, 1921, p. 573-576; T. 179, 1924, p. 740-743; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 39, 1922, p. 317-341.

(*) G. JULIA, *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 36, 1919, p. 93-125; *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Paris, 1924, p. 90.

relazione la quale mostra che il raggio del cerchio, entro il quale $f(x)$ non prende i valori 0 e 1, non supera un certo limite. Rimane da dimostrare che questo limite dipende soltanto dai coefficienti c_0 e c_1.

Le costanti α e β contengono i coefficienti a_0, b_0, p_{00}, e la condizione (17) contiene c_1. Ora dalle (1), (9) segue:

$$c_0 = e^{a_0},$$
$$1 - c_0 = e^{b_0},$$
$$b_0 = e^{p_{00}},$$

donde si vede che a_0, b_0, p_{00} dipendono soltanto da c_0.

Pertanto R dipende soltanto da c_0 e da c_1, e il teorema risulta completamente dimostrato.

206. Il **secondo teorema di Picard**, che ci limitiamo ad enunciare, è il seguente:

Una funzione intera trascendente *prende tutti i valori un numero infinito di volte, tranne uno al più* (*).

(*) Per varie generalizzazioni dei teoremi di PICARD v.: L. BIEBERBACH, *Math. Ann.*, T. 85, 1922, p. 141-148; *Math. Zeitschr.*, T. 3, 1919, p. 175-190; *Acta math.*, T. 42, 1919-20, p. 357-361; H. BOHR, *Scripta Univ. Hierosol.*, T. 1, 1925; P. BOUTROUX, *C. R. Ac. Paris*, T. 141, 1905, p. 305-307; C. CARATHÉODORY, *C. R. Ac. Paris*, T. 141, 1905, pagine 1213-1215; T. 154, 1912, p. 1690-1693; M. FEKETE, *Math. Ann.*, T. 88, 1922, p. 166-167; T. H. GRONWALL, *C. R. Ac. Paris*, T. 155, 1912, p. 764-766;

207. Un'applicazione notevole del secondo teorema di PICARD è la seguente (*):

Data una funzione intera, esistono linee tendenti all'infinito, sulle quali la funzione prende un insieme di valori denso in tutto il piano complesso.

Consideriamo l'insieme A, denso in tutto il piano complesso, dei numeri $c = a + b\,i$, dove a e b prendono tutti i possibili valori razionali. Poichè l'insieme è numerabile (art. 13), possiamo disporne gli elementi in serie semplice:

$$c_1\,,\, c_2\,,\, c_3\,,\ldots;$$

G. JULIA, *C. R. Ac. Paris*, T. 168, 1919, p. 502-504, 598-600; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 36, 1919, pagine 93-125; T. 37, 1920, p. 165-218; E. LANDAU, *Sitzungsb. Ak. Berlin*, 1904, p. 1118-1133; 1926, p. 467-474; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 24, 1907, p. 179-201; *Math. Ann.*, T. 86, 1922, p. 158-160; *Rend. Circ. mat. Palermo*, T. 46, 1922, p. 456-462; P. LÉVY, *Bull. Soc. math. France*, T. 40, 1912, pagine 25-39; P. MONTEL, *C. R. Ac. Paris*, T. 155, 1912, p. 1000-1003; R. NEVANLINNA, *C. R. Ac. Paris*, T. 177, 1923, p. 389-392; *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1924, p. 151-154; G. RÉMOUNDOS, *C. R. Ac. Paris*, T. 136, 1903, p. 953-955; T. 155, 1912, p. 818-820, 1592-1595; F. SCHOTTKY, *Sitzungsb. Ak. Berlin*, 1907, p. 823-840; *Journ. f. Math.*, T. 147, 1917, p. 161-173; G. VALIRON, *C. R. Ac. Paris*, T. 173, 1921, p. 573-576; T. 179, 1924, p. 740-743; *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 39, 1922, p. 317-341.

(*) G. JULIA, *Ann. Ec. norm.*, S. III, T. 36, 1919, p. 93-125; *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé*, Paris, 1924, p. 90.

e le equazioni:

$$f(x) - c_1 = 0 \ , \ f(x) - c_2 = 0 \ ,$$
$$f(x) - c_3 = 0 \ , \ldots ,$$

salvo una al più, che supponiamo senz'altro di avere esclusa, avranno ciascuna infinite radici aventi come unico punto limite il punto all'infinito. Sia a_1 una radice della prima equazione, a_2 una radice della seconda di modulo $\geq 2 \mid a_1 \mid$, a_3 una radice della terza di modulo $\geq 2 \mid a_2 \mid$, e così di seguito. Congiungendo i punti a_1, a_2, a_3,... con una spezzata, si otterrà una linea che tende all'infinito, e sulla quale $f(x)$ prende l'insieme di valori A.

Funzioni di genere finito.

208. I teoremi di Picard si dimostrano molto semplicemente per le funzioni di genere finito; anzi può dimostrarsi il teorema seguente che li comprende.

Se f (x) *è una funzione intera* trascendente *di genere finito, esiste al più un polinomio* P (x) *tale, che la funzione* f (x) — P (x) *abbia un numero finito di radici.*

Ricordiamo che, per i teoremi degli articoli 176 e 185, la somma e il prodotto di più funzioni di genere finito sono funzioni di genere finito.

Supponiamo, se è possibile, che esistano due polinomi diversi $P(x)$, $Q(x)$ aventi la proprietà indicata nel teorema. Le funzioni di genere finito e con un numero finito di radici $f(x) - P(x)$, $f(x) - Q(x)$ avranno la forma:

$$f(x) - P(x) = A(x)\, e^{\varphi(x)}, \quad f(x) - Q(x) = B(x)\, e^{\psi(x)},$$

dove $A(x)$, $B(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ rappresentano polinomi, e sarà:

$$A(x)\, e^{\varphi(x)} - B(x)\, e^{\psi(x)} = Q(x) - P(x).$$

Derivando questa identità un numero di volte maggiore del più grande dei gradi dei polinomi $P(x)$, $Q(x)$, si ottiene una relazione della forma:

$$A_1(x)\, e^{\varphi(x)} - B_1(x)\, e^{\psi(x)} = 0,$$

dove $A_1(x)$, $B_1(x)$ sono polinomi. Ne segue:

$$A_1(x)\, e^{\varphi(x) - \psi(x)} = B_1(x),$$

relazione che è possibile soltanto se $\varphi(x) - \psi(x)$ si riduce ad una costante, giacchè nel caso contrario il 1° membro avrebbe indice ν diverso da zero, mentre quello del 2° membro è nullo (art. 179). Posto $\varphi(x) - \psi(x) = c$, si ha:

$$e^{\psi(x)}\, [e^c A(x) - B(x)] = Q(x) - P(x),$$

donde risulta come prima che $\psi(x)$ è costante, sicchè $f(x)$ si riduce ad un polinomio.

209. Un teorema più generale è il seguente: *Se* f (x) *è una funzione di indice ν intero e non nullo, esiste al più una coppia di funzioni* g (x), h (x) *di indici ν inferiori a quello di* f (x), *tali che la funzione:*

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{g}(\mathrm{x})\,\mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{h}(\mathrm{x})$$

abbia l'indice λ minore dell'indice ν (*).

Supponiamo, se è possibile, che esistano due coppie di funzioni $g_1(x)$, $h_1(x)$; $g_2(x)$, $h_2(x)$, di indice ν minore di quello di $f(x)$, tali che per le funzioni:

$$F_1(x)=g_1(x)\,f(x) - h_1(x) \quad , \quad F_2(x)=g_2(x)\,f(x) - h_2(x)$$

sia $\lambda < \nu$. Poichè l'indice ν di $F_1(x)$, $F_2(x)$ è ancora quello di $f(x)$, dovrà essere:

$$F_1(x) = p_1(x)\,e^{\varphi_1(x)} \;,\; F_2(x) = p_2(x)\,e^{\varphi_2(x)},$$

denotando $p_1(x)$, $p_2(x)$ funzioni semplici di cui l'indice λ, e quindi anche l'indice ν che è ad esso eguale (art. 185), è minore dell'indice ν di $f(x)$, che designeremo con $\bar{\nu}$, e $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ due polinomi di grado $\bar{\nu}$. Ne segue:

$$p_1(x)\,g_2(x)\,e^{\varphi_1(x)} - p_2(x)\,g_1(x)\,e^{\varphi_2(x)} =$$
$$= h_2(x)\,g_1(x) - h_1(x)\,g_2(x),$$

(*) La funzione $F(x)$ ha (art. 176) lo stesso indice ν della $f(x)$; quindi, se ν non è intero, si ha $\lambda = \nu$ tanto per la $f(x)$ che per tutte le funzioni $F(x)$.

o più semplicemente:

$$(1) \qquad A(x)\, e^{\varphi_1(x)} + B(x)\, e^{\varphi_2(x)} = C(x)\,,$$

dove $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sono funzioni di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (art. 176).

Derivando si ottiene:

$$(2) \qquad (A' + A\,\varphi_1')\, e^{\varphi_1} + (B' + B\,\varphi_2')\, e^{\varphi_2} = C',$$

e dalle (1), (2) risulta:

$$e^{\varphi_1} = \frac{C\,B' - C'\,B + C\,B\,\varphi_2'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')},$$

$$e^{\varphi_2} = \frac{A\,C' - A'\,C - A\,C\,\varphi_1'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')}.$$

I termini di queste frazioni sono funzioni intere aventi le stesse radici, e di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (artt. 176, 190), quindi le frazioni stesse sono funzioni della forma $e^{\omega_1(x)}$, $e^{\omega_2(x)}$, dove $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ sono polinomi di grado minore di $\bar{\nu}$. Di qui l'assurdo.

Le formole trovate non hanno alcun significato, se:

$$A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1') = 0\,.$$

Il primo membro di questa equazione, molti-

o più semplicemente:

$$(1) \qquad A(x)\, e^{\varphi_1(x)} + B(x)\, e^{\varphi_2(x)} = C(x)\,,$$

dove $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sono funzioni di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (art. 176).

Derivando si ottiene:

$$(2) \qquad (A' + A\,\varphi_1')\, e^{\varphi_1} + (B' + B\,\varphi_2')\, e^{\varphi_2} = C',$$

e dalle (1), (2) risulta:

$$e^{\varphi_1} = \frac{C\,B' - C'\,B + C\,B\,\varphi_2'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')},$$

$$e^{\varphi_2} = \frac{A\,C' - A'\,C - A\,C\,\varphi_1'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')}.$$

I termini di queste frazioni sono funzioni intere aventi le stesse radici, e di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (artt. 176, 190), quindi le frazioni stesse sono funzioni della forma $e^{\omega_1(x)}$, $e^{\omega_2(x)}$, dove $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ sono polinomi di grado minore di $\bar{\nu}$. Di qui l'assurdo.

Le formole trovate non hanno alcun significato, se:

$$A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1') = 0\,.$$

Il primo membro di questa equazione, molti-

o più semplicemente:

$$(1) \qquad A(x)\, e^{\varphi_1(x)} + B(x)\, e^{\varphi_2(x)} = C(x)\,,$$

dove $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sono funzioni di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (art. 176).

Derivando si ottiene:

$$(2) \qquad (A' + A\,\varphi_1')\, e^{\varphi_1} + (B' + B\,\varphi_2')\, e^{\varphi_2} = C',$$

e dalle (1), (2) risulta:

$$e^{\varphi_1} = \frac{C\,B' - C'\,B + C\,B\,\varphi_2'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')},$$

$$e^{\varphi_2} = \frac{A\,C' - A'\,C - A\,C\,\varphi_1'}{A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1')}.$$

I termini di queste frazioni sono funzioni intere aventi le stesse radici, e di indice ν minore di $\bar{\nu}$ (artt. 176, 190), quindi le frazioni stesse sono funzioni della forma $e^{\omega_1(x)}$, $e^{\omega_2(x)}$, dove $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ sono polinomi di grado minore di $\bar{\nu}$. Di qui l'assurdo.

Le formole trovate non hanno alcun significato, se:

$$A\,B' - A'\,B + A\,B\,(\varphi_2' - \varphi_1') = 0\,.$$

Il primo membro di questa equazione, molti-

plicato per $\dfrac{e^{\varphi_1-\varphi_2}}{A^2}$, è la derivata di $\dfrac{B\, e^{\varphi_2-\varphi_1}}{A}$, sicchè si ha nel caso considerato, denotando con c una costante:

$$\frac{B\, e^{\varphi_2-\varphi_1}}{A} = c\,,$$

donde, per la (1):

$$e^{\varphi_1} = \frac{C}{(c+1)\,A}\,,$$

relazione che collo stesso ragionamento di prima si dimostra assurda.

210. Particolarmente interessante è il seguente caso speciale ($g(x) = 1$, $h(x)$ costante):

Se f (x) *è una funzione di indice* ν *intero e non nullo, esiste al più una sola costante* c *tale, che la funzione* f (x) — c *abbia l'indice* λ *minore dell'indice* ν.

Se si considera come «normale» la densità dei posti-zero, quando essa è misurata dallo stesso numero che misura la rapidità di crescenza della funzione, cioè quando $\lambda = \nu$, può dirsi che:

*La densità dei posti-*c (*) *è normale per tutti i valori* c, *se* ν *non è intero, per tutti meno uno al più (per il quale la densità è inferiore alla normale), se* ν *è intero.*

211. Le funzioni di indice $\lambda < 1$, e quindi di genere zero, hanno proprietà particolari notevoli.

(*) Cioè dei punti in cui la funzione prende il valore c.

Se $\lambda < 1$, *dati comunque* ε *e* R, *esistono valori di* ϱ *maggiori di* R *per cui:*

$$\mathrm{m}(\varrho) > \mathrm{M}(\varrho)^{\cos \lambda\pi - \varepsilon}.$$

Se $\lambda < \frac{1}{2}$, *dati comunque* ε *e* R, *esistono valori di* ϱ *maggiori di* R *per cui:*

$$\mathrm{m}(\varrho) > e^{\varrho^{\lambda-\varepsilon}} \quad (*).$$

Se $\lambda < \frac{1}{2}$, *in un cerchio abbastanza grande col centro nell'origine* f (x) *e* f (x) — c, *qualunque sia* c, *hanno un egual numero di radici.*

Se $\lambda = 0$, *dati comunque un numero intero e positivo* n *e un numero positivo* R, *esistono valori di* ϱ *maggiori di* R *per cui:*

$$\mathrm{m}(\varrho) > \varrho^{n}.$$

212. Gli indici di LINDELÖF (art. 203) si prestano particolarmente per lo studio delle fun-

---

(*) Che il teorema non sussiste in generale per $\lambda \geq \frac{1}{2}$, lo dimostra l'esempio della funzione $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$:

$$\prod_{h=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x}{h^2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \pi\sqrt{x}}{\pi\sqrt{x}},$$

che tende a zero sull'asse x positivo.

zioni per cui $\nu = 0$ (*). Per esse sussiste il teorema seguente, dove il simbolo $e_n(x)$ ha il significato attribuito ad esso nell'art. 198:

Se si ha:

$$M(\varrho) \sim e^{\lg \rho \lg_2^{\nu_2} \rho \ldots \lg_m^{\nu_m} \rho},$$

e se ν_k è il primo degli esponenti ν diverso da zero, si ha anche:

$$\gamma_h \sim e_k [(h \lg^{-\nu_{k+1}} h \lg_2^{-\nu_{k+2}} h \ldots \lg_{m-k}^{-\nu_m} h)^{\frac{1}{\nu_k}}],$$

$$\alpha_h^{\frac{1}{h}} \sim \frac{1}{e_k [(\nu_k^{\nu_{k+1}} h \lg^{-\nu_{k+1}} h \lg_2^{-\nu_{k+2}} h \ldots \lg_{m-k}^{-\nu_m} h)^{\frac{1}{\nu_k}}]}.$$

Funzioni di genere infinito (**).

213. La teoria delle funzioni di genere infinito è molto meno sviluppata di quella delle

(*) Su queste funzioni v.: R. MATTSON, *Thèse*, Upsal, 1905; *Rend. Circ. mat. Palermo*, T. 33, 1912, p. 91-107; G. POLYA, *Journ. f. Math.*, T. 145, 1915, p. 224-249; G. VALIRON, *Nouv. Ann.*, S. IV, T. 11, 1911, p. 145-151, 445-468, 498-508; T. 13, 1913, p. 97-110; *Math. Ann.*, T. 70, 1911, p. 471-498; *C. R. Ac. Paris*, T. 156, 1913, p. 534-536; J. L. WALSH, *C. R. Ac. Paris*, T. 180, 1925, p. 2009-2011; A. WIMAN, *Math. Ann.*, T. 76, 1915, p. 197-211; H. ZÖLLICH, *Inaugural-Dissertation*, Halle a. S., 1908.

(**) Su queste funzioni v.: O. BLUMENTHAL, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*, funzioni di genere finito. La difficoltà principale che presenta il loro studio consiste in ciò, che, mentre la rapidità di crescenza di una funzione di genere finito e la densità dei suoi zeri sono misurate da numeri fissi, qui figurano, in luogo di tali numeri, funzioni in generale crescenti, il cui andamento può essere più che mai irregolare. È apparso pertanto necessario considerare, accanto a queste funzioni, altre funzioni di andamento più regolare (*funzioni-tipo* secondo O. BLUMENTHAL), che ad esse si avvicinino quanto è possibile.

Scelta una funzione $\varepsilon\,(\varrho)$ della variabile reale e positiva ϱ, continua, decrescente, e tendente a zero per $\lim \varrho = \infty$, si dice funzione-tipo relativa ad $\varepsilon\,(\varrho)$ una funzione crescente $T\,(\varrho)$ che soddisfa alla seguente condizione:

$$T\,(\varrho') \leq T^{1+\varepsilon(\rho)}\,(\varrho) \quad \text{per} \quad \varrho' = \varrho^{1+T^{-\varepsilon(\rho)}\,(\varrho)}.$$

Paris, 1910; inoltre: O. BLUMENTHAL, *Jahresb. deutsch. Math.-Ver.*, T. 16, 1907, p. 97-109; E. BOREL, *Acta math.*, T. 20, 1897, p. 357-396; P. BOUTROUX, *C. R. Ac. Paris*, T. 134, 1902, p. 519-522; *Acta math.*, T. 28, 1904, p. 97-224; A. DENJOY, *C. R. Ac. Paris*, T. 146, 1908, p. 62-64, 1384-1386; T. 147, 1908, p. 118-121; *Journ. de math.*, S. VI, T. 6, 1910, p. 1-136; A. KRAFT, *Dissertation*, Göttingen, 1903; T. LEVI-CIVITA, *Bull. sc. math.*, S. II, T. 26, 1902, p. 333-335; E. MAILLET, *C. R. Ac. Paris*, T. 136, 1903, p. 348-351; T. 140, 1905, p. 300-302; *Ann. Fac. sc. Toulouse*, S. II, T. 9, 1908, p. 183-202; P. PERSSON, *Ark. f. Mat.*, T. 4, 1908, n. 22.

Una funzione-tipo $T(\varrho)$ si dice *aggiunta* ad una funzione continua crescente $\varphi(\varrho)$, se:

$T(\varrho) \geq \varphi(\varrho)$ da un certo valore di ϱ in avanti;

$T(\varrho) < \varphi^{1+\delta(\varrho)}(\varrho)$ per valori di ϱ maggiori di qualunque numero R, essendo $\delta(\varrho)$ una funzione analoga ad $\varepsilon(\varrho)$ opportunamente scelta.

Si dimostra che, data una funzione $\varphi(\varrho)$, è sempre possibile scegliere $\varepsilon(\varrho)$ in modo che esistano funzioni-tipo aggiunte a $\varphi(\varrho)$.

Se $\varphi(\varrho)$ è una funzione continua che, senza essere costantemente crescente, prende tuttavia, al crescere di ϱ, valori arbitrariamente grandi, si può trasformarla in una funzione generalmente crescente $\psi(\varrho)$ come segue: detti ϱ_1, ϱ_2 due punti consecutivi in cui $\varphi(\varrho)$ prende lo stesso valore, e supposto che nell'intervallo $\varrho_1 \varrho_2$ sia:

$$\varphi(\varrho) < \varphi(\varrho_1) = \varphi(\varrho_2),$$

si sostituisce alla $\varphi(\varrho)$ in questo intervallo una funzione $\psi(\varrho)$ costante ed eguale a $\varphi(\varrho_1)$. Una funzione-tipo aggiunta a $\psi(\varrho)$ si considererà come aggiunta a $\varphi(\varrho)$.

214. Se $f(x)$ è una funzione intera di indice ν infinito, posto:

$$\nu(\varrho) = \frac{\lg_2 M(\varrho)}{\lg \varrho},$$

ossia:

$$M(\varrho) = e^{\varrho^{\nu(\varrho)}},$$

la funzione $\nu(\varrho)$ non tende ad un limite finito per $\lim \varrho = \infty$. Qualunque funzione-tipo $\bar{\nu}(\varrho)$ ad essa aggiunta può considerarsi come un indice ν di $f(x)$.

Se $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ sono i moduli delle radici diverse da zero di $f(x)$, e se l'indice λ di questa non è finito, posto:

$$\lambda_h = \frac{\lg h}{\lg \gamma_h},$$

ossia:

$$\gamma_h^{\lambda_h} = h,$$

i numeri λ_h, al crescere di h, superano ogni limite finito. Infatti, se per ogni h fosse $\lambda_h \leq \sigma$, indicando con τ un numero qualunque maggiore di σ, sarebbe:

$$\frac{\gamma_h^\tau}{h} = \gamma_h^{\tau-\lambda_h} \geq \gamma_h^{\tau-\sigma},$$

quindi:

$$\lim_{h=\infty} \frac{h}{\gamma_h^\tau} = 0,$$

sicchè (art. 177) l'indice λ di $f(x)$ non potrebbe superare τ.

Ora, dati i numeri λ_h, si può in infiniti modi costruire una funzione continua $\lambda(\varrho)$ che prenda il valore λ_h per $\varrho = h$. Se $\bar{\lambda}(\varrho)$ è una funzione-tipo aggiunta a $\lambda(\varrho)$, essa può considerarsi come un indice λ di $f(x)$.

Per completare l'analogia colle funzioni di genere finito, conviene precisare anche il concetto di funzione semplice. A tale scopo, scelto $\varepsilon(\varrho)$ in modo che $\varrho^{\varepsilon(\rho)}$ sia crescente e tendente all'infinito, si fissano gli esponenti di convergenza p_h (art. 137) come segue:

$$p_h = E\left(\lambda_h^{1+2\varepsilon(\gamma_h)}\right),$$

dove $E(x)$ denota il massimo numero intero non maggiore del numero reale e positivo x.

215. Stabilite queste definizioni, si hanno i seguenti risultati, che ci limitiamo ad enunciare, e la cui analogia con quelli già stabiliti per le funzioni di prima classe è evidente:

Per una funzione semplice si ha:

$$\nu(\varrho) < \overline{\lambda}^{1+\delta(\rho)}(\varrho) \;,\; \lambda(\varrho) < \overline{\nu}^{1+\delta(\rho)}(\varrho);$$

può scegliersi $\delta(\varrho)$ in modo che sia:

$$\overline{\nu}(\varrho) = \overline{\lambda}^{1+\delta(\rho)}(\varrho).$$

Il numero n *degli zeri di una funzione intera qualunque aventi modulo $\leq \varrho$ soddisfa alla diseguaglianza:*

$$n < \varrho^{\overline{\nu}(\rho)}.$$

L'indice $\overline{\nu}$ d'una funzione intera è il maggiore degli indici $\overline{\nu}$ della funzione semplice e del fattore esponenziale di cui essa è il prodotto.

Per una funzione intera qualunque si ha:

$$\mathrm{m}\,(\varrho) > e^{-\rho^{\bar{\nu}^{-1+\delta(\rho)}(\rho)}},$$

fatta eccezione per le circonferenze contenute in un'infinità di corone circolari tali, che la larghezza complessiva delle corone esterne al cerchio di raggio ϱ *col centro nell'origine è minore di* $e^{-\rho^{\bar{\nu}(\rho)}}$.

L'indice $\bar{\nu}$ *di una funzione è eguale a quello della sua derivata.*

INDICE DEI NOMI (*)

(*) I numeri indicano le pagine.