Prof. TULLIO LEVI-CIVITA

Lezioni di calcolo differenziale assoluto

RACCOLTE E COMPILATE

DAL

Dott. ENRICO PERSICO

MCMXXV
ALBERTO STOCK - EDITORE
ROMA

PREFAZIONE

La metrica generale di RIEMANN e una formula del CHRISTOFFEL costituiscono i presupposti del calcolo differenziale assoluto, il quale tuttavia fu concepito solo posteriormente quale organismo sistematico dal RICCI, e da lui corredato nel decennio 1887-1896 di tutti quegli eleganti e comprensivi algoritmi che ne assicurano l'agile adattamento a svariate questioni analitiche, geometriche e fisiche.

Il RICCI stesso, in una memoria comparsa nel T. XVI del *Bulletin des Sciences Mathématiques* (1892) fece una prima esposizione dei suoi metodi e ne diede qualche applicazione alla geometria differenziale e alla fisica matematica. Più tardi altre applicazioni interessanti, fattene da lui e dai suoi scolari diretti, alla cerchia dei quali mi onoro di appartenere, consigliarono di raccogliere, in una esposizione sommaria, metodi, risultati e indicazioni bibliografiche. Da ciò la memoria intitolata *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, che, per cortese invito del KLEIN, fu redatta in collaborazione dal Prof. RICCI e da me, e apparve nel volume 54 dei *Math. Ann.* (1901).

Un capitolo sui fondamenti del calcolo assoluto, con speciale riguardo alla trasformazione delle equazioni dinamiche, si trova nel volumetto del WRIGHT: *Invariants of quadratic differential forms* (Cambridge: University Press, 1908); del resto si può dire che, pur continuandosi, dopo il 1901, da un ristretto numero di studiosi ricerche speciali basate sull'impiego di quei metodi, l'attenzione generale vi fu richiamata soltanto dal grandioso rinnovamento einsteiniano della filosofia naturale, che appunto nel calcolo differenziale assoluto trovò i mezzi necessari per la formulazione matematica e per l'ulteriore sviluppo quantitativo.

Nella celebre nota *Zur allgemeinen Relativitätstheorie* (1) la scoperta delle equazioni gravitazionali fu dall'EINSTEIN annunciata colle parole: « ...sie bedeutet einen wahren Triumph der durch GAUSS, RIEMANN, CHRISTOFFEL, RICCI... begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalculus ».

In una memoria anteriore lo stesso EINSTEIN aveva fatto una nuova esposizione di quegli elementi e di quelle formule di calcolo assoluto che più specificamente servivano ai suoi fini. Analogo criterio fu in seguito adottato dai più insigni trattatisti della relatività generale, in particolare dal WEYL (2), dal LAUE (3), dall'EDDINGTON (4), e dal BIRKHOFF (5), i quali apportarono cospicuo contributo di pensiero e di sviluppi originali alle teorie fisiche, nonchè utili, eleganti complementi anche alle premesse di calcolo tensoriale. E lo stesso fecero — per citare, nella vasta letteratura, soltanto i libri che ho avuto occasione di consultare — CARMICHAEL (6), MARCOLONGO (7), KOPFF (8), BECQUEREL (9), mentre il DE DONDER (10) ha evitato l'algoritmo del calcolo assoluto, ricorrendo alla teoria degli invarianti integrali.

Recentemente fu dedicata al calcolo assoluto anche qualche opera d'insieme: ricorderò i volumi del JUVET (11), del GALBRUN (12),

---

(1) Sitzungsberichte der Preuss. Ak. der Wissenschaften, 11 novembre 1915, pp. 778-786.

(2) *Raum, Zeit, Materie* (5a ediz.), Berlin: Springer, 1923,

(3) *Die Relativitätstheorie*, B. II, Braunschweig: Vieweg, 1921.

(4) *The mathematical theory of relativity*, Cambridge: University Press, 1923.

(5) *Relativity and modern physics*, Cambridge (Mass.): Harvard University Press, 1923.

(6) *The theory of relativity* (2a ediz.), New York: Wiley, 1920.

(7) *Relatività* (2a ediz.), Messina: Principato, 1923.

(8) *I fondamenti della relatività einsteiniana* (ediz. italiana con prefazione di G. ARMELLINI), Milano: Hoepli, 1923.

(9) *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*, Paris: Gauthier-Villars, 1923.

(10) *La gravifique einsteinienne*, ibidem, 1921.

(11) *Introduction au calcul tensoriel et au calcul différentiel absolu*, Paris: Blanchard, 1922.

(12) *Introduction géometrique à l'étude de la relativité*, Paris: Gauthier-Villars, 1923

del MARAIS [1]. Infine un calcolo non meno comprensivo, anzi più generale, fu, su nuovi criteri, ideato dallo SCHOUTEN, che ebbe tosto nello STRUIK [2] un fervido collaboratore.

In tanta copia di eccellenti referenze una nuova elaborazione dei metodi del RICCI potrebbe apparire superflua: e lo è forse in linea concettuale.

Invero i perfezionamenti e le aggiunte rispetto allo schema del 1901 (memoria dei *Math. Annalen*), che derivano sostanzialmente dalla nozione di parallelismo [3] e che in base ad essa, mi venne fatto di introdurre in due corsi tenuti all'Università di Roma negli anni scolastici 1920-1921, 1922-1923, finiscono col figurare tutti o quasi tutti, per indipendente iniziativa degli Autori citati, un po' in questo, un po' in quello dei loro libri.

Così, per es., la definizione di tensore e alcuni accorgimenti algebrici intesi a semplificare le verificazioni materiali si trovano in WEYL, LAUE e MARAIS, i quali tutti, al pari dell'EDDINGTON, collegano più o meno intimamente la derivazione covariante al parallelismo. D'altra parte JUVET e GALBRUN offrono al Lettore uno studio approfondito di quest'ultimo. Comunque il collegamento all'impostazione algebrico-tensoriale e ai primi elementi di geometria

---

(1) *Introduction à la théorie de la relativité. Calcul différentiel absolu et géométrie*, Paris: Gauthier-Villars, 1923.

(2) Cfr. in particolare D. J. STRUIK, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie*, Berlin: Springer, 1922, che contiene anche una copiosa e accurata bibliografia; nonchè il libro dello stesso SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkul*, testè pubblicato (1924) presso il medesimo editore.

Accanto alla estensione dei metodi debbo qui segnalare (pur non avendo potuto farlo in lezione) l'estensione della geometria oltre i confini, già sì larghi, tracciati da RIEMANN. Alludo alle speculazioni fisiche del WEYL e dell'EDDINGTON, culminate recentemente in una ulteriore generalizzazione dello schema relativistico ad opera dello stesso EINSTEIN. La struttura spaziale in relazione al nuovo concetto del WEYL (connessione affine) fu oggetto di studi di questo Autore, già raccolti in volume (*Mathematische Analyse des Raumproblems*, Berlin: Springer, 1923), di altre notevoli ricerche sistematiche del CARTAN e di numerose note concernenti problemi particolari dei signori BERWALD, BLASCHKE, DIENES, EISENHART, KASNER, VEBLEN...

(3) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, fascicolo XLII, 1917, pp. 173-215.

differenziale è sempre meno circostanziato e sistematico di quello che cercai di stabilire nelle mie lezioni. Perciò lo sviluppo ivi dato alla materia presenta una particolare compagine, e può apparirne oggi ancora giustificata la stampa.

Il manoscritto fu redatto dal Dott. ENRICO PERSICO, su appunti di lezione, coordinati con intelligente solerzia. Grato a lui per il valido aiuto prestato in tal guisa, ringrazio altresì l'Editore, sig. STOCK (che fu pure tra i miei uditori), al cui incitamento ripetuto si deve la presente pubblicazione.

Roma, Dicembre 1923.

TULLIO LEVI-CIVITA.

PARTE PRIMA

Teorie introduttive

CAPITOLO I.

Determinanti e matrici funzionali.

§ 1. — Locuzioni geometriche. — Avviene frequentemente in geometria analitica che relazioni algebriche di forma complicata traducano proprietà geometriche semplici, sì che, mentre quelle relazioni algebriche mal si prestano ad essere enunciate in parole, si può invece, usando il linguaggio della geometria, esprimere le equivalenti relazioni geometriche in modo chiaro, conciso, ed accessibile all'intuizione; spesso poi le relazioni geometriche sono più facili a scoprire che non quelle analitiche corrispondenti, sì che il linguaggio geometrico fornisce non solo un espressivo mezzo di esposizione, ma anche un efficace strumento di ricerca. Si può quindi prevedere che sarà vantaggioso adottare denominazioni tolte alla geometria in svariate questioni di analisi.

È fondamentale, sotto tale riguardo, la convenzione di chiamare *punto di una varietà astratta ad n dimensioni* (n designando un intero positivo qualsiasi) una ennupla di valori attribuiti ad n variabili quali si vogliono $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ciò costituisce un'ovvia estensione nominale della corrispondenza biunivoca che, nei casi di $n = 2$ e $n = 3$, si può stabilire fra le coppie o terne di coordinate e i punti del piano o rispettivamente dello spazio. Si può così parlare anche nel caso di n variabili di *campo* di punti (anzichè di valori attribuiti alle x) e di *intorno* di un punto determinato x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Se le x sono n funzioni $x_i(t)$ di una variabile reale t, quando t varia con continuità fra due valori t_0 e t_1, si ha una successione semplicemente infinita di punti, il cui insieme si chiama (come per $n = 2$ o $n = 3$) *linea*, e più precisamente *arco* o *segmento di linea*.

§ 2. — Determinanti funzionali e cambiamenti di variabili. — Si abbiano n funzioni di altrettante variabili, e si suppongano finite, continue e derivabili quante volte occorre nel campo che si considera:

$$u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Per semplificare la notazione, rappresenteremo talora con x (senza alcun indice), non solo (come si fa sempre) una qualunque delle n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ma anche (come si fa talvolta) il complesso da esse costituito, e così per altre lettere, che ricorreranno più innanzi. Con tale convenzione potremo scrivere le funzioni date sotto la forma abbreviata:

$$u_i(x).$$

Ricordiamo che si dice *determinante funzionale* o *jacobiano* delle u il determinante, di ordine n, formato con le derivate prime delle u, cioè

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Un tale determinante si indica talora con la notazione abbreviata

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$$

analoga a quella delle frazioni e delle sostituzioni (ove si faccia fungere da numeratore al complesso delle funzioni u e da denominatore al complesso delle variabili x). L'analogia del simbolo è giustificata da analogia di proprietà, come apparisce considerando il modo di comportarsi di un determinante funzionale di fronte a un cambiamento di variabili. E, precisamente, si suppongano le x funzioni di altrettante variabili y,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1\,(y_1\,, \ldots, y_n)\,, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ x_n = x_n\,(y_1\,, \ldots, y_n)\,, \end{array}\right\} \qquad [1]$$

e si supponga inoltre che queste equazioni rappresentino un'effettiva trasformazione, cioè definiscano anche le y come funzioni delle x (siano risolubili rispetto alle y). Se allora si risguardano le u come funzioni delle y (attraverso le x) e si forma il relativo determinante funzionale

$$D_1 = \begin{pmatrix} u_1 \ldots u_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix},$$

si trova, come vedremo al § 4, che D_1 è uguale a D moltiplicato per il determinante delle [1], cioè per

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}.$$

§ 3. — RICHIAMO DELLA PROPOSIZIONE FONDAMENTALE SULLE FUNZIONI IMPLICITE. — Prima di dimostrare questo teorema, richiamiamo una proposizione fondamentale relativa alle funzioni implicite. È noto che una relazione (fra due variabili) del tipo

$$f\,(x,\ y) = 0$$

è atta a definire la y in funzione della x, purchè soltanto siano soddisfatte convenienti condizioni qualitative (1). Una forma classica di tali condizioni (sufficienti ad assicurare la risolubilità) è la

(1) In questo concetto di risolubilità, si prescinde dalle eventuali difficoltà algoritmiche.

seguente. Sia x^0, y^0 un punto in cui la f si annulla mantenendosi continua in un suo intorno (superficiale) I. In I esiste la $\frac{\partial f}{\partial y}$ diversa da zero per $x = x^0$, $y = y^0$. Allora in un certo intorno (lineare) del valore x^0 resta definita una funzione continua $y(x)$ tale che $f\,[y(x), x]$ è identicamente zero. Per le funzioni implicite di più variabili, vale il teorema seguente, che è una generalizzazione di quello ricordato testè.

Siano date n equazioni fra altrettante variabili y e quante si vogliono variabili x:

$$f_i\,(y \mid x) = 0 \qquad . \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Esista un sistema di valori x^0, y^0 che soddisfano queste equazioni; in un intorno di quel punto le f siano continue, assieme alle loro derivate, rapporto alle y, e il determinante

$$\begin{pmatrix} f_1 \ldots f_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix}$$

sia diverso da zero: allora le equazioni date definiscono, in un intorno del sistema di valori x^0, le y come funzioni delle x. Si vede da questo che il determinante funzionale di più funzioni di altrettante variabili costituisce, sotto un certo punto di vista, la naturale generalizzazione della derivata di una funzione di una variabile. Tutto ciò risulterà in modo espressivo dalle applicazioni del paragrafo seguente.

§ 4. — Comportamento di un determinante funzionale di fronte a un cambiamento di variabili. — Cominciamo dalla condizione (sufficiente) di risolubilità delle [1]. Immaginiamole scritte sotto la forma

$$x_i\,(y_1, \ldots, y_n) - x_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

e ammettiamo che esista almeno un sistema di valori per le y e le x, per cui sono soddisfatte (e le $x_i(y)$ sono continue assieme alle loro derivate); allora, per applicare il teorema precedente, dovremo calcolare le derivate parziali dei primi membri rispetto alle y, e formarne il determinante: ma quelle derivate sono le $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, e quindi la condizione di risolubilità rispetto alle y è

$$\Delta = \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} \neq 0 .$$

Riprendiamo ora il teorema enunciato nel § 2, e ammettiamo che sia $\Delta \neq 0$. Formiamo il prodotto dei due determinanti D e Δ, cioè (scambiando in Δ le righe con le colonne) dei due seguenti:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} .$$

Se facciamo il prodotto per righe, tenendo presente la nota regola, troviamo che l'elemento generico a_{rs} del determinante prodotto è del tipo

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_s} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s}$$

(ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte). Dunque il prodotto è il determinante D_1, come avevamo annunciato. Ciò si traduce nella formula

$$\begin{pmatrix} u_1 \ldots u_n \\ x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \ldots u_n \\ y_1 \ldots y_n \end{pmatrix} \qquad [2]$$

che costituisce appunto la giustificazione del simbolo adottato pei determinanti funzionali.

§ 5. — Indipendenza di n funzioni di altrettante variabili. Condizione necessaria e sufficiente. — Risulta da quanto precede, che, se il determinante funzionale di n funzioni di altrettante variabili non è identicamente zero, questa proprietà si conserva anche quando alle primitive variabili se ne sostituiscono altre mediante la trasformazione [1] (con la clausola $\cancel{\Delta} \neq 0$), o, come si suol dire, questa proprietà è *invariantiva*. Appare ~~quindi~~ opportuna la seguente

Definizione. Si dice che n funzioni di n variabili sono indipendenti, quando il loro determinante funzionale non è identicamente zero.

La ragione per cui questa proprietà si designa con la parola *indipendenza*, risulta dal seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perchè n funzioni u di altrettante variabili x non siano legate da alcuna relazione (derivabile) del tipo

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0, \qquad [3]$$

involgente le sole u e non le x, è che il determinante funzionale non sia identicamente zero.

Dimostreremo dapprima che la condizione è sufficiente; poi dimostreremo che è anche necessaria, ma limitandoci, per ora, ad un caso particolare: il teorema in tutta la sua generalità risulterà poi contenuto in un altro teorema, ancora più generale (cfr. § 7).

Supponiamo che sia soddisfatta la condizione

$$D = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \\ x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \neq 0; \qquad [4]$$

dimostreremo allora che non può esistere alcuna relazione del tipo [3] (beninteso, non identica; escludiamo cioè che la [3] sia soddisfatta prendendo le u arbitrariamente, nel qual caso essa non rappresenterebbe alcun legame fra le u). Difatti, se esistesse, derivandola rispetto a $x_1, \ldots, x_n$, si avrebbero n equazioni

$$\sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

lineari ed omogenee nelle $\dfrac{\partial f}{\partial u_\alpha}$; ora, poichè f è per ipotesi una effettiva funzione, queste derivate non sono tutte nulle, e allora le equazioni ora scritte dovrebbero aver nullo il determinante dei coefficienti, il quale è D, ciò che contraddice all'ipotesi. La condizione [4] è dunque sufficiente perchè non esista alcuna relazione del tipo [3].

Per dimostrare che la condizione [4] è necessaria, faremo vedere che, se essa non è soddisfatta, cioè se

$$D = 0, \tag{5}$$

le u sono legate da una relazione (almeno) del tipo [3]; ci limiteremo, per ora, al caso che fra i minori d'ordine $n-1$ del determinante D ve ne sia almeno uno non nullo. Questo sarà, in generale, del tipo

$$D' = \begin{pmatrix} u_{q_1} & u_{q_2} & \dots & u_{q_{n-1}} \\ x_{p_1} & x_{p_2} & \dots & x_{p_{n-1}} \end{pmatrix}$$

dove $p_1, \dots, p_{n-1}$ e $q_1, \dots, q_{n-1}$ rappresentano due qualunque disposizioni di $n-1$ indici, scelti senza ripetizione tra i numeri $1, 2, \dots, n$. Ma poichè è indifferente l'ordine col quale si fanno corrispondere le x e le u ai numeri $1, \dots, n$, potremo, senza diminuire la generalità, supporre la designazione delle variabili fatta in modo che D' sia il minore formato dalle prime $n-1$ righe ed $n-1$ colonne; avremo dunque

$$D' = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n-1} \\ x_1 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0 . \tag{6}$$

Questa condizione esprime il fatto che fra le prime $n-1$ funzioni non passa alcuna relazione.

Ora sappiamo, che se si eseguisce sulle x una trasformazione (effettiva), dall'ipotesi [5] segue che è anche nullo il determinante delle u rispetto alle nuove variabili y. Prendiamo queste legate alle x dalle seguenti relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = u_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} = u_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ y_n = x_n . \end{array}\right\} \tag{7}$$

Notiamo che queste formule definiscono una effettiva trasformazione, poichè il determinante funzionale delle y rispetto alle x è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

che, sviluppato rispetto all'ultima linea, risulta uguale a D', per ipotesi non nullo.

Consideriamo dunque le u come funzioni delle y: esse saranno, in virtù delle [7],

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= y_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_{n-1} &= y_{n-1}, \\ u_n &= u_n(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad [8]$$

1 è uguale al prodotto
D = 0 per [illegible]
[illegible] 2)

Scriviamo che il determinante delle u rispetto alle y è zero; avremo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\partial u_n}{\partial y_1} & \frac{\partial u_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_n}{\partial y_n} = 0 .$$

Risulta dunque che l'ultima delle [8] non contiene y_n; tenendo poi presenti le rimanenti [8], si vede che quella diviene

$$u_n = u_n(u_1, \dots, u_{n-1})$$

cioè una relazione fra le u, non contenente le x.

Dunque dalle ipotesi [**6**] e [5′] segue che esiste *una* relazione del tipo [3], e precisamente, che la u_n è esprimibile mediante le rimanenti u; questa relazione è poi *unica*, perchè se ve ne fosse un'altra, eliminando fra di esse la u_n si avrebbe una relazione fra le $u_1, \ldots, u_{n-1}$, il che, come si è osservato, è escluso dall'ipotesi [6].

§ 6. — Matrici funzionali. Definizione dell'indipendenza di m funzioni di n variabili. — Passeremo ora a studiare il caso, più generale, in cui il numero m delle funzioni u non uguaglia quello n delle variabili x. Torna allora opportuno considerare la *matrice funzionale* delle assegnate funzioni, cioè la seguente matrice ad m righe e n colonne:

$$M = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| .$$

Essa verrà nel seguito designata con la lettera M; è da rilevare però che al simbolo non è coordinato alcun valore numerico, e quindi la lettera M non rappresenta una quantità, ma una abbreviazione dello schema di cui parliamo.

Ricordiamo anche che si dice *caratteristica* di una matrice il massimo ordine dei determinanti non nulli che se ne possono estrarre; la caratteristica non può evidentemente superare il più piccolo dei numeri delle righe e delle colonne.

Diamo ora una definizione, che verrà giustificata nel § seguente. *Si dice che m funzioni di quante si vogliono variabili sono indipendenti, quando la caratteristica della loro matrice funzionale è m.* Se ne deduce subito, che se il numero delle funzioni supera quello delle variabili, le funzioni non possono essere indipendenti; se poi i due numeri sono uguali, la definizione coincide con quella data precedentemente, poichè la matrice diviene un determinante d'ordine m, e l'essere la caratteristica m significa che questo determinante non è nullo.

§ 7. — Teorema. — *Date m funzioni u di quantesivogliono variabili x, se la caratteristica della loro matrice funzionale è k, tra le u passano $m-k$ relazioni (e non più) non involgenti le x.* Si dedurrà subito il corollario, che se le funzioni sono indipendenti ($k = m$), fra esse non passa alcuna relazione. Il teorema ora enunciato è stato da noi dimostrato (§ 5) nei casi particolari in cui il numero delle funzioni eguaglia quello delle variabili, e inoltre $k = m$, oppure $k = m - 1$; passiamo a dimostrarlo in generale, considerando successivamente vari casi, secondo lo schema seguente:

$$\begin{cases} 1)\ k = m \text{ (e quindi } m \leqq n\text{), caso dell'indipendenza.} \\ 2)\ k < m \qquad \begin{cases} 2_a)\ k = n\,, \\ 2_b)\ k < n\,. \end{cases} \end{cases}$$

Caso 1); $k = m$. Questa ipotesi equivale a dire che esiste un minore d'ordine m non nullo; ricordando l'osservazione fatta al §5, potremo supporre, senza diminuire la generalità, che sia

$$\begin{pmatrix} u_1 \dots u_m \\ x_1 \dots x_m \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Possiamo dunque affermare (§ 5) che fra le u non esiste nessuna relazione che non involga qualcuna delle x.

Caso 2_a); $k < m$, $k = n$. Esisterà dunque un minore d'ordine n, non nullo; ordiniamo gli indici delle u e delle x in modo che esso sia quello delle prime n linee ed n colonne, ed avremo

$$D = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \neq 0\,.$$

Mostreremo ora che le $u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_m$ si possono esprimere mediante le rimanenti u, senza l'intervento delle x. Si avranno così $m - n$ (ossia $m - k$) relazioni fra le u. Difatti l'essere $D \neq 0$ ci autorizza a fare un cambiamento di variabili, prendendo come nuove variabili

$$u_1 = u_1(x_1, \dots, x_n),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_n = u_n(x_1, \dots, x_n).$$

Risolvendo queste equazioni rispetto alle x, e sostituendo le espressioni ottenute in $u_{n+1}, \ldots, u_m$, avremo queste in funzione di $u_1, \ldots, u_n$, e così resta dimostrato l'asserto.

Caso 2_b); $k < m$, $k < n$. L'ipotesi è che esista un determinante d'ordine k non nullo, e che ogni determinante d'ordine superiore sia invece zero. Ordiniamo le u e le x in modo che sia

$$D = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k \\ x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix} \neq 0 . \tag{9}$$

Faremo vedere che una qualunque u_h (con $h = k+1, \ldots, m$) si può esprimere mediante la prime k funzioni u, senza coinvolgere le x. A tal uopo, consideriamo il determinante Θ formato orlando D con la ~~colonna~~ h^{esima} e la ~~riga~~ $k+1^{\text{esima}}$ della matrice; poichè esso è di ordine $k+1$, sarà per ipotesi nullo, cioè

$$\Theta = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k & u_h \\ x_1 & \ldots & x_k & x_{k+1} \end{pmatrix} = 0 . \tag{10}$$

Ora, in virtù del teorema dimostrato a § 5, da questa uguaglianza e dalla [9], si può concludere che u_h è esprimibile mediante $u_1, \ldots, u_k$, senza l'intervento di $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$; cioè, (poichè nulla possiamo ancora dire sulle rimanenti x)

$$u_h = \varphi\,(u_1, \ldots, u_k \,|\, x_{k+2}, \ldots, x_n) . \tag{11}$$

Il nostro assunto sta ora nel dimostrare che in questa espressione le $x_{k+2}, \ldots, x_n$ effettivamente non entrano. Se $n = k+1$, non vi è luogo a considerare $x_{k+2}, \ldots, x_n$, e quindi la [11] rappresenta proprio la desiderata espressione di u_h mediante le sole $u_1, \ldots, u_k$. Se ciò non è, denotiamo con x_j una generica delle $x_{k+2}, \ldots, x_n$, e consideriamo il determinante Θ', ottenuto da Θ sostituendo x_{k+1} con x_j,

$$\Theta' = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_k & u_h \\ x_1 & \ldots & x_k & x_j \end{pmatrix} = 0 .$$

Esso è nullo, perchè è un minore di ordine $k+1$ estratto dalla matrice: ma se lo scriviamo per disteso e, badando alla [11], vi facciamo alcune trasformazioni, ci sarà facile constatare che ciò porta per conseguenza l'annullarsi di $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, onde se ne potrà concludere che φ non contiene x. Difatti, rappresentando compendiosamente la matrice quadrata di quegli elementi di Θ, che formano il determinante D, con la stessa lettera D, avremo

$$\Theta' = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \\ & D & & \cdots \\ & & & \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ \hline \frac{\partial u_h}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_h}{\partial x_k} & \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \end{array}\right| .$$

Gli elementi dell'ultima riga sono dati, a norma della [11], da

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} = \sum_1^k {}_l \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \sum_1^k {}_l \frac{\partial\varphi}{\partial u_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_j} .$$

Perciò, se dall'ultima riga si sottraggono le rimanenti moltiplicate rispettivamente per $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$ (con che non si altera il valore del determinante), l'ultima riga diviene

$$0 \; . \; . \; . \; 0 \; \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} .$$

e quindi, sviluppando secondo la linea medesima,

$$\Theta' = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} D .$$

Poichè per ipotesi è $D \neq 0$, se ne conclude che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0,$$

il che dimostra l'asserto.

Il teorema enunciato in principio di questo § è così completamente dimostrato. Esso, applicato al caso particolare di $m = n$, coincide con quello enunciato nel § 5, il quale pertanto resta ora stabilito senza restrizioni.

CAPITOLO II.

Sistemi di equazioni ai differenziali totali.

§ 1. — Preliminari. — Richiamiamo dapprima alcune nozioni risguardanti le espressioni differenziali. È noto che si dice *differenziale totale* di una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ l'espressione

$$df = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

la quale uguaglia (a meno di infinitesimi di ordine superiore) al dx l'incremento che subisce la f nel passaggio dal punto $x_1, x_2, \ldots, x_n$ al punto infinitamente vicino $x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n$.

Date n funzioni X_i del posto (cioè delle x) che supporremo finite e continue assieme alle derivate prime, si dice *espressione differenziale, o pfaffiano* (dal nome del matematico Pfaff) l'espressione

$$\psi = \sum_1^n {}_i X_i (x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i \,. \tag{1}$$

Una tale espressione non è sempre un differenziale esatto, cioè non sempre esiste una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di cui l'assegnato pfaffiano sia il differenziale totale; condizione necessaria e sufficiente perchè ciò abbia luogo, cioè perchè sia integrabile un'equazione del tipo

$$df = \sum_1^n {}_i X_i \, dx_i \,, \tag{2}$$

è che siano verificate le $\frac{n(n-1)}{2}$ condizioni seguenti di Schwarz

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{3}$$

Se queste condizioni sono soddisfatte in un certo campo, il calcolo integrale ([1]) insegna a costruire la più generale funzione f avente

([1]) Cfr. per es. Dini, *Lezioni di analisi infinitesimale*, Vol. II (Pisa: Nistri, 1909), Cap. XVII, pag. 440.

la proprietà richiesta, cioè a *integrare* l'espressione differenziale data. Tutte le possibili determinazioni della f differiscono fra loro per una costante. Se ci si limita, come si fa di solito nelle trattazioni elementari, all'aspetto locale della questione, considerando (non tutto il campo, ma) un intorno convenientemente limitato di un punto arbitrariamente prefissato x, ogni determinazione della f costituisce, nell'intorno, una funzione *uniforme* (cioè ad un valore, come tutte quelle da noi considerate) degli argomenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Vogliamo ora discutere un problema più generale di questo. Si abbiano m funzioni incognite u di n variabili indipendenti x, e fra i loro differenziali sia assegnato un sistema di relazioni atto a definire le du mediante le dx, sotto la forma

$(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_m)$

$$du_\alpha = \sum_{i}^{n} {}_{1} X_{\alpha\,|\,i}(x\,|\,u)\,dx_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

m funz. $u = u(x)$

dove le X sono $n.m$ funzioni (finite e continue assieme alle loro derivate prime) assegnate ad arbitrio.

Un gruppo di relazioni del tipo [4] si dice sistema di equazioni ai differenziali totali [1]: la [2], evidentemente, non ne è che un caso particolare. Si può osservare che la [2] stessa equivale al sistema di n equazioni

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = X_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{2'}$$

e le [4] equivalgono analogamente al sistema di $m\,.\,n$ equazioni

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} = X_{\alpha\,|\,i}(x\,|\,u) \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1,\ 2, \ldots, m \\ i = 1,\ 2, \ldots, n \end{pmatrix}. \tag{4'}$$

---

(1) In tale sistema si presenta già fissato il gruppo delle variabili da risguardarsi indipendenti. Il prof. G. Ricci in un recente lavoro, ha invece considerato un sistema di l equazioni del tipo

$$\sum_{s}^{n} {}_{1} a_{rs}(x)\,dx_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, l),$$

stabilendo le condizioni affinchè le n variabili x possano considerarsi funzioni di un numero qualunque p ($< n$) di variabili indipendenti, e indicando il procedimento per la soluzione (*V. Atti del Reale Ist. Ven.*, t. XXXI, anno 1922-23, pp. 179-183).

La teoria generale dei sistemi di Pfaff, coi perfezionamenti recenti, dovuti sopra tutto ai sig.ri von Weber, Cartan e Goursat, si trova esposta nelle belle *Leçons sur le problème de Pfaff* di quest'ultimo autore (Paris: Hermann, 1922).

L'uno e l'altro sono problemi di equazioni a derivate parziali, e sono risolubili solo sotto determinate condizioni; ma se queste sono soddisfatte, vedremo che l'integrazione si riconduce a quella di equazioni differenziali ordinarie.

§ 2. — Condizioni necessarie per l'integrabilità. Sistemi completi o illimitatamente integrabili. — Posto il problema sotto la forma [4'], si vede subito che affinchè esistano soluzioni è necessario (per la simmetria delle derivate seconde delle u) che siano soddisfatte le condizioni

$$\frac{dX_{\alpha|i}}{dx_j} = \frac{dX_{\alpha|j}}{dx_i} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \ldots, m\,; \\ i\,, j = 1, 2, \ldots, n\end{pmatrix}. \qquad [5]$$

Si è usato il simbolo di derivata totale per ricordare che, nell'effettuare la derivazione, si deve tener conto del fatto che anche gli argomenti u dipendono dalle x: si ha cioè

$$\frac{dX_{\alpha|i}}{dx_j} = \frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j} + \sum_{1}^{m}{}_{\beta} \frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} = \frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j} + \sum_{1}^{m}{}_{\beta} \frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u_\beta} X_{\beta|j}\,. \qquad [6]$$

Tenuto conto di questo, le [5] si presentano sotto forma di $m\,\dfrac{n\,(n-1)}{2}$ relazioni del tipo

$$F\,(x\,|\,u) = 0\,. \qquad [5']$$

Esse, come si vede, contengono in generale non solo le x, ma anche le u (al contrario delle [3]); queste si debbono intendere sostituite da quelle incognite funzioni delle x, che soddisfano il sistema proposto. Non è quindi possibile scrivere esplicitamente le condizioni di integrabilità, senza conoscere precedentemente le soluzioni del sistema. Per l'equazione [2] ciò non si presentava, perchè le X, e quindi le loro derivate, non contenevano la funzione incognita.

Ma può avvenire — ed è il caso più interessante — che le [5] non solo siano soddisfatte per quelle particolari u che risolvono il sistema, ma lo siano identicamente, cioè per qualsivoglia sistema di valori delle u e delle x. In tal caso, come vedremo, esse sono condizioni non solo necessarie, ma anche sufficienti per l'integrabilità del sistema, il quale si dice allora *illimitatamente integrabile*, o *completo*.

§ 3. — L'INTEGRAZIONE DI UN SISTEMA CHE NON SIA INCOMPATIBILE, SI PUÒ SEMPRE RIDURRE A QUELLA DI UN SISTEMA ILLIMITATAMENTE INTEGRABILE. — Ora mostreremo che ogni qualvolta un sistema di equazioni ai differenziali totali è integrabile (nel senso che esiste almeno un'ennupla di funzioni $u_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che lo rendono soddisfatto), la sua integrazione si riduce a quella di un sistema completo; potremo così limitare in seguito le nostre considerazioni ai sistemi di quest'ultima specie.

Le condizioni di integrabilità [5'] sono, come abbiamo detto, in numero di $m\,\frac{n(n-1)}{2}$, mentre le u sono in numero di m, cioè meno di quelle (per $n > 2$). In generale, quindi, non esistono m funzioni u che le soddisfino, e allora il sistema non può certo ammettere soluzioni. Se invece quelle condizioni sono compatibili potrà avvenire che ve ne siano m indipendenti, e allora vi è un solo sistema di valori, per le u, che le soddisfi e non resta che verificare se queste u verificano anche il sistema proposto; oppure che siano tutte identicamente soddisfatte (e allora il sistema è completo); o infine, e sarà questo il caso più generale, che esse si riducano a un numero $\nu < m$ di equazioni *compatibili e indipendenti*. In tal caso, da esse si possono ricavare, in termini finiti, ν delle incognite, espresse mediante le x e le rimanenti $m - \nu = \mu$. Ordinando convenientemente gli indici delle u, potremo supporre che le [5'] ci diano le ultime ν funzioni u, cioè posto $\mu = m - \nu$,

$$u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \ldots, u_m$$

espresse mediante le x e le rimanenti u

$$u_1, u_2, \ldots, u_\mu .$$

Per maggiore chiarezza, designeremo con u'_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$ queste prime μ funzioni u e con $u''_\beta = u_{\mu+\beta}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, \nu)$ le ultime ν. Le [5'] potranno in conformità presentarsi sotto forma risoluta, scrivendo

$$u''_\beta = f_\beta\,(x \mid u') \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{5''}$$

Dopo ciò, si immaginerà scisso il sistema [4] in due gruppi di equazioni: uno formato dalle prime μ

$$du'_\alpha = \sum_{1}^{n}{}_i \, X_{\alpha \mid i} (x \mid u) \, dx_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu) \; ; \qquad [4_a]$$

e l'altro dalle rimanenti ν

$$du''_\beta = \sum_{1}^{n}{}_i \, X_{\alpha \mid i} (x \mid u) \, dx_i \qquad (\alpha = \mu + 1, \mu + 2, \ldots, m = \mu + \nu) \, .$$

A quest'ultimo, ponendovi $\alpha = \mu + \beta$, attribuiremo la forma

$$du''_\beta = \sum_{1}^{n}{}_i \, X_{\mu + \beta \mid i} (x \mid u) \, dx_i \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu) \, . \qquad [4_b]$$

I due membri, tenendo conto delle [5″] e delle $[4_a]$, divengono in definitiva espressioni lineari nei differenziali dx_i, a coefficienti che dipendono unicamente dalle x e dalle u'. Dovendo i coefficienti nei due membri coincidere (per l'indipendenza dei differenziali dx_i), le $[4_b]$ si riducono in sostanza ad equazioni in termini finiti (in numero di $n\nu$) fra le u' e le x.

Se queste si riducono tutte ad identità, basta occuparsi del sistema $[4_a]$, in cui le u'' si devono riguardare sostituite mediante le loro espressioni [5″], sicchè si ha un sistema ai differenziali totali, della stessa forma dell'originario [4], nelle sole u', in numero di $\mu = m - \nu < m$. L'essenziale è che, nell'eventualità considerata, il sistema $[4_a]$ così ridotto risulta senz'altro completo. Infatti esso consta di una parte dell'originario [4], cogli addizionali vincoli [5″] tra le u. Le condizioni di integrabilità dell'intero sistema [4] (dove *a priori* le u si trattavano come altrettante indeterminate) erano costituite dalle [5], o, possiamo dire, dalle equivalenti [5″]. Per il sistema $[4_a]$ le analoghe condizioni saranno costituite da parte delle [5″] (o loro combinazioni), coll'avvertenza che ogni u'' va sostituita colla sua espressione fornita dalle [5″] stesse. Ma così si ottengono manifestamente delle pure identità; perciò il sistema $[4_a]$ è illimitatamente integrabile giusta l'asserto.

Se invece le $[4_b]$ danno luogo a effettive relazioni (in termini finiti) fra le u' e le x, dovremo associarle alle $[4_a]$ e trattare questo sistema di equazioni fra μ incognite (in parte ai differenziali totali e in parte in termini finiti) come già il sistema [4], [5].

Così procedendo, o incontreremo delle incompatibilità, e in tal caso dovremo concludere che il sistema proposto non ammette soluzioni; oppure constateremo che il problema si trova in definitiva ricondotto alla integrazione di un sistema completo (con un numero di incognite certamente minore di m),

c. d. d.

In seguito a queste considerazioni, rivolgeremo la nostra attenzione esclusivamente ai sistemi illimitatamente integrabili.

§ 4. — Covarianti bilineari. Conseguente espressione della condizione di illimitata integrabilità. — La condizione di illimitata integrabilità è stata da noi espressa per mezzo delle [5], supposte verificate per valori arbitrari delle u e delle x. Vogliamo ora presentarla sotto forma più compendiosa.

Consideriamo all'uopo due diversi sistemi di incrementi infinitesimi dati alle x, che indicheremo con dx_i e δx_i rispettivamente: gli incrementi subiti in corrispondenza da una generica funzione u del posto (cioè delle x) si indicheranno in conformità con du e δu rispettivamente, e le loro espressioni saranno

$$\left.\begin{aligned} du &= \sum_1^n{}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i\,, \\ \delta u &= \sum_1^n{}_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\, \delta x_i\,. \end{aligned}\right\} \qquad [7]$$

Ora, i dx sono infinitesimi arbitrari, su cui *a priori* possiamo fare quelle ipotesi che più ci piacciono: converremo di considerarli come funzioni (infinitesime) del posto. In tale accezione gli incrementi di questi dx, corrispondenti agli incrementi δx, delle variabili, verranno naturalmente indicati con δdx; analogo significato avrà poi $d\delta x$. Quanto al du, anch'esso risulterà una funzione (infinitesima) del posto, e così c'è luogo a considerare il δdu; in modo perfettamente analogo, verrà definito il $d\delta u$. Vogliamo adesso procurarci l'espressione esplicita di questi due *differenziali secondi* della u, per far rilevare che basta limitare un poco l'arbitrarietà dei differenziali secondi delle variabili indipendenti perchè risulti $\delta du = d\delta u$, qualunque sia la funzione u.

Intanto, operando sulla prima delle [7] la differenziazione col simbolo δ, si ha (senza alcuna ipotesi restrittiva)

$$\delta du = \sum_1^n{}_i \, \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx_i + \sum_1^n{}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta dx_i$$

$$= \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} dx_i \, \delta x_j + \sum_1^n{}_i \frac{\partial u}{dx_i} \delta dx_i \, . \qquad [8]$$

D'altra parte il $d\delta u$ ha manifestamente un'espressione analoga, che si ottiene scambiando materialmente, nella formula precedente, d con δ. Ora, la prima parte della formula non si muta con tale scambio: nella seconda invece δdx_i viene sostituito con $d\delta x_i$. Se noi perciò imponiamo alle funzioni arbitrarie dx e δx del posto la condizione (abbastanza poco restrittiva)

$$d\delta x_i = \delta dx_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad [9]$$

anche l'ultima sommatoria della [8] resterà immutata scambiando d con δ, e si avrà quindi, per qualsiasi funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$d\delta u = \delta du. \qquad [10]$$

Ricordiamo incidentalmente che nel calcolo differenziale si fa di solito una ipotesi assai più restrittiva della [9]: si conviene cioè che i differenziali secondi delle variabili indipendenti siano nulli, ossia che i dx siano non già funzioni del posto, ma costanti.

Ora vogliamo considerare, accanto agli incrementi delle variabili indipendenti, anzichè una funzione u coi suoi differenziali, un generico pfaffiano

$$\psi_d = \sum_1^n{}_i X_i \, dx_i \, .$$

in cui le X sono funzioni assegnate delle x.

Abbiamo apposto l'indice d, per mettere in evidenza che il pfaffiano si riferisce agli incrementi dx_i, mentre lo stesso pfaffiano, relativo agli incrementi δx_i rimane opportunamente contraddistinto dall'analoga notazione

$$\psi_\delta = \Sigma_i X_i \, \delta x_i \, .$$

Tanto ψ_d che ψ_δ saranno, naturalmente, funzioni del posto. Calcolando in conformità $\delta\psi_d$ si ha:

$$\delta\psi_d = \sum_1^n{}_i \, \delta X_i \, dx_i + \sum_1^n{}_i X_i \, \delta \, dx_i = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_i \, \delta x_j + \sum_1^n{}_i X_i \, \delta \, dx_i \, ;$$

ovvero, come si usa scrivere più brevemente, quando più sommatorie, estese fra gli stessi limiti, vengono effettuate sullo stesso termine generale,

$$\delta \psi_d = \sum_1^n{}_{ji} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_i \, \delta x_j + \sum_1^n{}_i X_i \, \delta \, dx_i \, .$$

$d\psi_\delta$ si otterrà scambiando d con δ. Ove si tenga conto delle [9], la differenza $\delta\psi_d - d\psi_\delta$ si riduce a

$$\sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} dx_i \, \delta x_j - \sum_1^n{}_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \delta x_i \, dx_j \, .$$

Ma sul valore di una sommatoria non ha evidentemente alcuna influenza il designare gli indici, rispetto a cui si somma, con una o con altra lettera dell'alfabeto; perciò, nella seconda sommatoria della formula precedente, potremo scambiare fra loro gli indici i e j, il che ci permetterà di scrivere l'eguaglianza sotto la forma

$$\delta \psi_d - d \psi_\delta = \sum_1^n{}_{ij} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) dx_i \, \delta x_j \, . \qquad [11]$$

All'espressione $\delta \psi_d - d \psi_\delta$ si dà il nome di *covariante bilineare* relativo all'assegnato pfaffiano: l'appellativo di bilineare è sufficientemente giustificato dall'espressione testè scritta, che è lineare sia rispetto agli argomenti dx, sia rispetto agli argomenti δx. Quanto al nome *covariante*, esso è dovuto alla circostanza che il valore numerico e la struttura formale dei due membri della [11] rimangono sempre gli stessi, quando si cambiano in modo qualunque le variabili indipendenti x. Ma su questo punto torneremo più innanzi (cfr. Cap. VI) in relazione alla nozione generale di enti (funzioni o forme differenziali) invarianti.

Notiamo intanto che, se il pfaffiano ψ_d è un differenziale esatto, cioè se sono soddisfatte le [3], il secondo membro della [11] risulta nullo, e si ritrova un risultato già noto (v. formula [10]).

Tutto ciò premesso, riprendiamo in esame il sistema [4], e le sue condizioni di illimitata integrabilità. Consideriamo gli m pfaffiani che costituiscono i secondi membri delle [4]:

$$\psi_d^{(\alpha)} = \sum_{1}^{n}{}_i X_{\alpha \mid i}\, dx_i ,$$

e formiamone i covarianti bilineari. Dimostreremo che l'essere questi identicamente nulli (comunque siano scelti i dx e δx) è una condizione perfettamente equivalente all'essere le [5] verificate identicamente per qualunque determinazione delle u, talchè la condizione di illimitata integrabilità potrà scriversi sotto la forma

$$\delta\psi_d^{(\alpha)} - d\psi_\delta^{(\alpha)} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)\,, \tag{12}$$

con l'intesa che tale eguaglianza deve aver luogo per valori arbitrari dei dx e δx (¹).

Infatti, scriviamo, a norma della [11], l'espressione esplicita di questi covarianti bilineari, tenendo presente però che nel fare le derivazioni le X debbono considerarsi funzioni delle x, e direttamente, e per il tramite delle u, onde le derivate dovranno indicarsi, secondo la convenzione già fatta, col simbolo di derivata totale; la [12] diverrà dunque

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij} \left(\frac{dX_{\alpha \mid i}}{dx_j} - \frac{dX_{\alpha \mid j}}{dx_i} \right) dx_i\, \delta x_j = 0\ . \tag{12'}$$

(¹) In verità ai differenziali secondi δdx_i abbiamo imposto le restrizioni [8], ma queste lasciano ancora perfettamente arbitrari gli incrementi infinitesimi dx_i, δx_i da attribuire alle x_i nel posto (generico) che si considera.

Ora, se sono soddisfatte le condizioni di illimitata integrabilità [5], i coefficienti di questa forma bilineare (cioè le espressioni in parentesi) sono tutti nulli, e quindi l'eguaglianza è soddisfatta comunque si prendano i dx e i δx. Viceversa, supponiamo che quest'ultima circostanza abbia luogo; allora dovranno necessariamente essere nulli tutti i coefficienti: per vederlo basterebbe prendere tutti i dx, δx nulli, salvo una coppia, p. es. dx_i, δx_j (dove i e j sono due indici scelti fra $1, 2, \ldots, n$, arbitrari, ma ben determinati); allora, nella [12′] la sommatoria si ridurrebbe al solo termine

$$\left(\frac{dX_{\alpha\,|\,i}}{dx_j} - \frac{dX_{\alpha\,|\,j}}{dx_i}\right) dx_i\, \delta x_j$$

il quale non potrebbe esser nullo se non fosse

$$\frac{dX_{\alpha\,|\,i}}{dx_j} - \frac{dX_{\alpha\,|\,j}}{dx_i} = 0\,.$$

Si può dunque concludere che le condizioni [5] possono compendiarsi nella [12].

§ 5. — Metodo di integrazione del Morera [1]. — Dimostreremo ora che le condizioni di illimitata integrabilità sono sufficienti per l'integrabilità, più precisamente che, se esse sono soddisfatte, esiste una (e una sola) emmupla di funzioni $u(x)$ che soddisfa il sistema di equazioni proposto, e assume valori arbitrariamente prefissati in un punto pure prefissato. Risguardando (come è evidentemente il caso) questi valori iniziali delle u quali costanti arbitrarie, si potrà dire in forma più sbrigativa che l'integrale generale dipende da m costanti arbitrarie, oppure che esistono ∞^m integrali.

Per la dimostrazione, cominciamo appunto col fissare a piacimento, nel campo di variabilità delle x, in cui sono definite le X, un punto generico, $P_0\,(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \ldots, \overset{0}{x}_n)$. Sia poi $P_1\,(\overset{1}{x}_1, \overset{1}{x}_2, \ldots, \overset{1}{x}_n)$ un altro punto arbitrario nel campo, e immaginiamolo congiunto a P_0 mediante una linea T, la quale non esca mai da quel campo.

Essa sarà definita mediante equazioni parametriche

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

[1] *Zur Integration der vollständigen Differentiale*, Math. Ann., B. 27, 1886, pp. 403-411. Cfr. altresì Severi, *Sul metodo di Mayer per l'integrazione delle equazioni lineari ai differenziali totali*, Atti del R. Ist. Veneto, T. LXIX, 1910, pp. 419-425.

dove t è un parametro che assume il valore t_0 in P_0 e il valore t_1 in P_1. Limiteremo provvisoriamente il nostro studio ai punti di questa linea, cosicchè le eventuali funzioni del posto u saranno, per ora, da considerarsi quali funzioni della sola variabile t (pel tramite delle x e delle [13]). Le loro derivate saranno

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

ovvero indicando con un punto la derivazione rispetto a t, e badando alle [4'],

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \sum_{1}^{n}{}_i X_{\alpha|i}\,\dot{x}_i \tag{14}$$

o anche

$$\frac{du_\alpha}{dt} = \frac{\psi_d^{(\alpha)}}{dt} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{14'}$$

Le x_i sono funzioni conosciute di t a norma delle [13]; quindi queste equazioni sono del tipo

$$\frac{du_\alpha}{dt} = U_\alpha\,(t\,|\,u_1, u_2, \ldots, u_m) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{14''}$$

cioè formano un sistema di equazioni differenziali ordinarie, in forma normale. È noto dal calcolo come (sotto limitazioni qualitative di continuità e derivabilità, che qui supponiamo senz'altro soddisfatte), assegnate ad arbitrio m costanti $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_m^0$, esistono m funzioni $u_\alpha(t)$ che soddisfano quel sistema, e che, per $t = t_0$, assumono quei valori: dati dunque ad arbitrio i valori delle u in P_0, queste restano definite lungo tutta la linea T, e quindi anche in P_1. Potrà darsi però (e, in generale, così avviene) che, se i punti P_0 e P_1 si congiungono con un'altra linea, invece che con T, si trovino, per le u in P_1, dei valori diversi. Ma ora dimostreremo che, se sono soddisfatte le condizioni di illimitata integrabilità, il valore delle u in P_1, trovato col metodo ora descritto, è indipendente dalla linea T, sicchè queste u saranno funzioni solo delle coordinate di P_1, ossia funzioni del posto: esse soddisferanno il sistema di equazioni proposto non solo lungo una linea, ma lungo tutte le infinite linee che si possono tracciare nel campo dato, ossia in tutto questo campo: e costituiranno quindi, come verificheremo ulteriormente, proprio le richieste soluzioni del sistema ai differenziali totali [4].

Faciliteremo il nostro compito ricorrendo a considerazioni infinitesimali, cioè facendo intanto vedere che i valori delle u in P_1 non variano, se la linea T si deforma infinitamente poco: ne verrà di conseguenza che essi saranno gli stessi, per qualunque linea che si possa ottenere da T con una successione di deformazioni infinitesime, cioè con una deformazione continua della T; se supponiamo poi che il campo sia tale che ogni linea congiungente P_0 con P_1 possa ottenersi in tal modo, non ci sarà altro da aggiungere. Campi siffatti (quali ad es. un triangolo o un cerchio nel piano, un cubo o una sfera nello spazio) si dicono *semplicemente connessi*.

Consideriamo dunque una linea T' infinitamente prossima a T: possiamo pensarla ottenuta trasportando ciascun punto P della T, di coordinate x_i in un punto P' di coordinate $x_i + \delta x_i$, e gli incrementi infinitesimi δx_i potremo per es. assumerli sotto la forma $\varepsilon \chi_i$, essendo ogni χ_i una quantità finita variabile da punto a punto della curva (e quindi funzione di t) e ε un fattore infinitesimo (costante, cioè) indipendente da t. Con tali determinazioni le equazioni parametriche della curva T' saranno

$$x_i + \delta x_i = \varphi_i(t) + \varepsilon\, \chi_i(t)\,. \tag{15}$$

Le funzioni χ_i si possono risguardare arbitrarie, salvo la condizione di annullarsi per $t = t_0$ e per $t = t_1$, affinchè le linee T e T' abbiano gli stessi estremi. Indicheremo — come è naturale — con l'operatore δ l'incremento che subisce una generica quantità (scalare o vettoriale) nel passaggio dal punto P di T al punto corrispondente P' di T'.

Ciò premesso, immaginiamo integrate le [14″] lungo T': avremo delle funzioni di t, $u_\alpha + \delta u_\alpha$, soddisfacenti le equazioni

$$\frac{d}{dt}(u_\alpha + \delta u_\alpha) = \frac{1}{dt}\left(\psi_d^{(\alpha)} + \delta\,\psi_d^{(\alpha)}\right) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)\,,$$

ossia

$$\frac{d\,\delta u_\alpha}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\delta\,\psi_d^{(\alpha)}\right);$$

sfruttando l'ipotesi [12], esprimente la illimitata integrabilità, possiamo anche scrivere

$$\frac{d\,\delta u_\alpha}{dt} = \frac{d\,\psi_\delta^{(\alpha)}}{dt}. \qquad [16]$$

Dal teorema di esistenza degli integrali dei sistemi differenziali ordinari (già richiamato a proposito delle [12′]) segue che le δu_α sono determinate univocamente da queste condizioni e da quella di annullarsi in P_0: ora, queste equazioni [16] sono evidentemente soddisfatte prendendo per la prima parte delle [16]

$$\delta u_\alpha = \psi_\delta^{(\alpha)} = \sum_1^r X_{\alpha,i}\,\delta x \qquad [17]$$

(cioè assumendo per le δu_α le espressioni loro spettanti nel caso che le u siano effettivamente funzioni del posto 1)): tali espressioni si annullano dove si annullano le δx_i, cioè in P_0 — e con ciò verificano la condizione iniziale che, associata alle [16], le individua univocamente — nonchè in P_1, il che dimostra ciò che si voleva.

1) ricordo quanto è stato ricordato a pag. prec. I

Resta così provato che per costruire le funzioni u i cui differenziali totali sono gli assegnati pfaffiani $\psi_d^{(\alpha)}$ (soddisfacenti identicamente la [12] ovvero le originarie [5]) e che in un punto dato P_0 assumono dati valori u_α^0, basta congiungere P_0 con il punto generico P_1 mediante una linea qualunque T, e integrare lungo T il sistema di equazioni differenziali ordinarie [14].

Per essere completi, conviene ora far vedere che le funzioni delle coordinate di P_1, che così si ottengono, hanno effettivamente per differenziali i $\psi_d^{(\alpha)}$. Consideriamo infatti un punto P_2 infinitamente vicino a P_1, e, per costruire i valori delle u in P_2, utilizziamo la spezzata formata da T, e dal segmentino $P_1 P_2$. È evidente allora che eseguendo l'integrazione delle [14] lungo questa linea si ha, nel passaggio da P_1 a P_2, l'incremento $du_\alpha = \psi_d^{(\alpha)}$.

§ 6. — Cenno sul metodo di Mayer. — Il metodo, seguito nel § precedente, per dimostrare l'esistenza degli integrali di un sistema ai differenziali totali completo, è dovuto al Morera.

Prima di esso era stato proposto dal Mayer un altro metodo, assai meno luminoso, che pareva dominato da un artificio puramente formale. Il metodo di Morera, guidato da un'intuizione geometrica, lascia scorgere l'intima ragione del successo dell'artificio del Mayer, e permette di indicarne il criterio in due parole.

Questo consiste nel congiungere i punti P_0 e P_1 con un segmento di retta, anzichè con una linea qualunque T, cioè nell'attribuire alle [13] la forma

$$x_i = x_i^1 + (x_i^0 - x_i^0)\, t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,;$$

si sostituiscono poi verificazioni puramente algoritmiche alle considerazioni testè svolte quasi senza calcolo. Inoltre, mentre per applicare il metodo di Morera basta supporre che il campo in cui sono valide le equazioni date sia semplicemente connesso, per l'altro è evidentemente necessaria una ipotesi più restrittiva: che cioè due punti qualunque del campo si possano congiungere mediante una retta, senza uscire dal campo medesimo, il che si esprime dicendo, che questo è *convesso.*

§ 7. — Applicazione. — Sia dato un generico pfaffiano

$$\psi = \sum_1^n{}_i\, X_i(x)\, dx_i :$$

domandiamoci se è possibile stabilire fra le x una relazione del tipo

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \qquad (C \text{ costante})\,, \tag{18}$$

che sia integrale della equazione

$$\psi = \sum_1^n{}_i\, X_i\, dx_i = 0\,, \tag{19}$$

nel senso che la relazione proveniente dalla differenziazione della [18],

$$df = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = 0\,, \tag{18'}$$

sia equivalente alla [19].

All'uopo è manifestamente necessario e basta che le derivate dell'incognita funzione f risultino proporzionali alle assegnate funzioni X_i.

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \rho X_i$

Si tratta pertanto di riconoscere sulle X_i stesse, quando si dà la circostanza particolare che siano proporzionali alle derivate di una medesima funzione a priori indeterminata.

Questo problema, che si presenta anche in questioni geometriche (come vedremo in particolare nel Cap. X), si riconduce subito a un caso particolare di sistema ai differenziali totali. Infatti, supponiamo, come è sempre lecito, dato che ψ non si annulla identicamente e ha quindi almeno uno dei suoi coefficienti diverso da zero, che X_n *non* sia identicamente nullo: potremo allora scrivere la [19] sotto la forma

$$dx_n = -\sum_{1}^{n-1}{}_i \frac{X_i}{X_n} dx_i \cdot \qquad [19']$$

Per la supposta equivalenza colla [18'] dovrà essere in questa $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$, il che assicura che l'equazione in termini finiti [18] è atta a definire una funzione

$$x_n = u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, C), \qquad [18'']$$

la quale rende identicamente verificata la [18] stessa, e per conseguenza anche la [18'], nonchè le equivalenti [19] e [19']. Quest'ultima, che rientra manifestamente nei sistemi di tipo [4] con una sola equazione e una sola funzione incognita x_n, deve in conformità risultare illimitatamente integrabile, ammettendo l'integrale [18''] che dipende dalla costante arbitraria C. Reciprocamente l'illimitata integrabilità della [19'] assicura l'esistenza di una soluzione [18''] dipendente da una costante arbitraria C, e quindi, risolvendo rispetto a C, di una relazione integrale della voluta forma [18]. Tutto si riduce pertanto ad esprimere che la [19'] è illimitatamente integrabile.

Le condizioni di illimitata integrabilità della [19'] sono, conformemente alla [5],

$$\frac{d}{dx_j}\frac{X_i}{X_n} = \frac{d}{dx_i}\frac{X_j}{X_n} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1; i \neq j),$$

relazioni che, sviluppando le derivate, si mettono facilmente sotto la forma seguente

$$\left.\begin{array}{c} X_n\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}-\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)+X_i\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_n}-\frac{\partial X_n}{\partial x_j}\right)+X_j\left(\frac{\partial X_n}{\partial x_i}-\frac{\partial X_i}{\partial x_n}\right)=0 \\ (i\,,j=1,2,\ldots,n-1\,;\;i\neq j). \end{array}\right\} \qquad [20]$$

Introduciamo per un momento l'ipotesi restrittiva che, al pari di X_n, anche tutte le altre funzioni X siano diverse da zero. Potremo allora porre senza riserve dividendo per $X_n X_i X_j$

$$p_{rs}=\frac{1}{X_r X_s}\left(\frac{\partial X_r}{\partial x_s}-\frac{\partial X_s}{\partial x_r}\right) \qquad (r\,,s=1\,,2\,,\ldots,n) \qquad [21]$$

e presentare le condizioni di integrabilità sotto la forma più comprensiva

$$p_{ij}+p_{jn}+p_{ni}=0 \qquad (i\,,j=1,2,\ldots,n-1\,;\;i\neq j)\,. \qquad [22]$$

Le [22] sono in numero di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, cioè quante le possibili coppie di indici distinti i e j, essendo fisso n. Esse rappresentano *tutte* le condizioni di integrabilità; siccome però la scelta della variabile x_n come funzione delle rimanenti x era arbitraria (soggetta solo alla condizione $X_n \neq 0$), così dovranno esser verificate, più in generale, le relazioni

$$p_{ij}+p_{jk}+p_{ki}=0\,, \qquad [22']$$

dove i, j, k sono tre indici qualunque, diversi fra loro, scelti fra $1, 2, \ldots, n$. Le terne i, j, k sono in numero di $\frac{n\,(n-1)(n-2)}{6}$, e tante sono quindi le [22']: si capisce però che esse non possono esser tutte indipendenti dal momento che bastano le [22] (che sono soltanto una parte delle [22']) ad assicurare la illimitata integrabilità. Effettivamente è facile mostrare per via diretta che delle [22'] soltanto $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, per es. le [22], sono essenziali, le altre riducendosi a conseguenze algebriche di quelle.

Ciò si desume dal seguente lemma, valido qualunque sia il significato delle p_{ik}. *Se* p_{ik} $(i\,,\,k=1,2,\ldots,n)$ *è un sistema doppio emisimmetrico* (1), *e se, α designando un indice fisso, per ogni coppia i, k, vale la relazione ciclica*

$$p_{ik}+p_{k\alpha}+p_{\alpha i}=0\,,$$

questa sussiste pure per una terna qualsiasi i, k, l. Basta associare alla relazione precedente le due analoghe, relative alle coppie k, l, ed l, i, cioè

$$p_{kl}+p_{l\alpha}+p_{\alpha k}=0\,,$$

$$p_{li}+p_{i\alpha}+p_{\alpha l}=0\,,$$

e sommare membro a membro. Attesa l'emisimmetria,

$$p_{k\alpha}+p_{\alpha k}=0,\ \text{ecc.},$$

e rimane

$$p_{ik}+p_{kl}+p_{li}=0\,,$$

c. d. d.

Tenute presenti le espressioni [21] delle p, le [22′], ridotte a forma intera, cioè moltiplicate per $X_i\,X_j\,X_k$, danno luogo alle equazioni di condizione

$$\left.\begin{array}{c} X_i\left(\dfrac{\partial X_j}{\partial x_k}-\dfrac{\partial X_k}{\partial x_j}\right)+X_j\left(\dfrac{\partial X_k}{\partial x_i}-\dfrac{\partial X_i}{\partial x_k}\right)+X_k\left(\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial X_j}{\partial x_i}\right)=0 \\ (i,\,j,\,k=1,2,\ldots,n)\,. \end{array}\right\} \qquad [23]$$

Queste si presentano così come conseguenza necessaria di una loro parte, quella in cui uno degli indici è fisso — diciamo delle [20] — sotto la limitazione (sfruttata nelle precedenti trasformazioni, dividendo per prodotti di X) che siano diverse da zero tutte le X. Tale limitazione è però inessenziale, e può in definitiva essere tolta, ragionando come segue. Essendosi riconosciuto che le [23] sono conseguenza necessaria delle [20] per determinazioni non nulle,

(1) Cioè un sistema di numeri corrispondenti biunivocamente, con legge determinata, alle coppie di numeri interi i, k $(=1,2,\ldots,n)$; inoltre tale, che per qualunque coppia di indici sia $p_{ik}=-p_{ki}$. V. pag. 79.

ma comunque piccole, delle X, è lecito, *data la forma intera di queste equazioni* (nelle X e loro derivate), passare al limite quando qualcuna delle X converge allo zero. Si può pertanto ritenere che le [23] — *o anche soltanto una parte di esse del tipo* [20] — *costituiscono le condizioni necessarie e sufficienti* per l'illimitata integrabilità delle [19], ossia *affinchè le* n *funzioni* X_i $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *siano proporzionali alle derivate di una medesima funzione.*

§ 8. — Sistemi misti. — In certi problemi si presentano dei *sistemi misti,* cioè formati da equazioni ai differenziali totali, e da equazioni in termini finiti:

$$du_\alpha = \sum_1^n{}_i\, X_{\alpha|i}\, dx_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{4}$$

$$F_k\,(x\,|\,u) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{24}$$

La discussione è concettualmente identica a quella svolta nel § 3. Vogliamo tuttavia riprenderla, onde indicare, sotto una forma comoda pei casi concreti, le condizioni sotto cui un sistema misto del tipo [4], [24] è illimitatamente integrabile.

È evidente in primo luogo che, affinchè esistano soluzioni, è necessario che le equazioni [24] (che supporremo compatibili e indipendenti) siano in numero non superiore a m (numero delle incognite u).* Se poi esse fossero proprio m, ne resterebbero completamente determinate le u, e non ci sarebbe che da verificare se queste soddisfano le equazioni [4]. Supporremo dunque

altrimenti anche le [illegible] rimarrebbero [illegible]

$$\nu < m,$$

e immagineremo le [24] risolte rispetto a ν delle u, le quali pertanto saranno espresse mediante le x e le rimanenti $\mu = m - \nu$ incognite u.

Come al § 3, chiameremo i due gruppi di u rispettivamente u''_β $(\beta = 1, 2, \ldots, \nu)$ e u'_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)$, talchè le [24] potranno scriversi (come già le [5''])

$$u''_\beta = f_\beta\,(x\,|\,u') \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{24'}$$

Corrispondentemente a questa divisione delle u in due gruppi conviene, come già si notò al § 3, scindere anche le [4] nei due gruppi $[4_a]$ e $[4_b]$ che qui riscriviamo per comodo del lettore:

$$du'_\alpha = \sum_{1}^{n}{}_i X_{\alpha\,|\,i}\, dx_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu), \qquad [4_a]$$

$$du''_\beta = \sum_{1}^{n}{}_i X_{\mu+\beta\,|\,i}\,(x\,|\,u)\, dx_i \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad [4_b]$$

Tutto ciò premesso, ci proponiamo di far vedere che il nostro sistema misto risulta illimitatamente integrabile — e si dirà *completo* — se sono soddisfatte le condizioni seguenti:

a) le condizioni [5] di illimitata integrabilità delle [4] sono soddisfatte (non — in generale — prendendo per le u delle funzioni qualunque, ma) allorquando (a derivazione eseguita) si introducono per le u'' i loro valori [24′];

b) le equazioni $[4_b]$, quando in esse per le u'' si sostituiscano le espressioni [24′], coincidono con quelle che si otterrebbero differenziando le [24′] stesse: più comprensivamente, le $[4_b]$ si riducono ad identità, quando si tien conto delle [24′].

Dimostreremo che, se il sistema misto è completo, nel senso ora dichiarato, le equazioni $[4_a]$, ove in esse si esprimano le u'' per le u' e le x mediante le [24′], costituiscono un sistema (di μ equazioni ai differenziali totali, in μ incognite) *illimitatamente integrabile*: se ne potranno quindi ricavare le u', e poi, per mezzo delle [24′], le u''; per l'ipotesi *b*) rimarranno così soddisfatte anche le $[4_b]$, e quindi il problema sarà risolto e *il suo integrale generale dipenderà* (cfr. § 5) *da* $\mu = m - \nu$ *costanti arbitrarie.*

Per dare alle formule maggiore chiarezza, conveniamo che, se

$$\Phi\,(x\,|\,u', u'')$$

è una funzione qualunque delle x e delle u,

$$[\Phi]\,(x\,|\,u')$$

denoti la stessa funzione, ove le u'' siano sostituite dalle espressioni [16′]. Sarà evidentemente

$$\frac{\partial\,[\Phi]}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right] + \sum_1^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u''_{\beta}}\right] \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad [25]$$

$$\frac{\partial\,[\Phi]}{\partial u'_{\gamma}} = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u'_{\gamma}}\right] + \sum_1^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial u''_{\beta}}\right] \frac{\partial f_{\beta}}{\partial u'_{\gamma}} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, \mu)\,. \qquad [26]$$

Con la convenzione ora adottata, le ipotesi *a*) e *b*) si scrivono rispettivamente

$$\left.\begin{array}{c} \left[\dfrac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j}\right] + \sum_1^{m}{}_{\lambda} \left[\dfrac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u_{\lambda}}\right] \left[X_{\lambda|j}\right] = \left[\dfrac{\partial X_{\alpha|j}}{\partial x_i}\right] + \sum_1^{m}{}_{\lambda} \left[\dfrac{\partial X_{\alpha|j}}{\partial u_{\lambda}}\right] \left[X_{\lambda|i}\right] \\ (i\,, j = 1, 2, \ldots, n) \\ (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu), \end{array}\right\} \quad [27]$$

$$\left[X_{\mu+\beta|j}\right] = \frac{\partial f_{\beta}}{\partial x_j} + \sum_1^{\mu}{}_{\gamma} \frac{\partial f_{\beta}}{\partial u'_{\gamma}} \left[X_{\gamma|j}\right] \quad 1) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \nu)\,. \qquad [28]$$

Dobbiamo dunque prendere in esame le condizioni di illimitata integrabilità delle [4_a], che saranno

[illegible] $\frac{\partial u'_{\gamma}}{\partial x_j}$ [illegible] il nostro problema [illegible]

$$\frac{d\,[X_{\alpha|i}]}{dx_j} = \frac{d\,[X_{\alpha|j}]}{dx_i} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \mu)\,, \qquad [29]$$

e dobbiamo dimostrare che esse sono identicamente soddisfatte.

Trasformiamo il primo membro, esplicitando in primo luogo l'operatore $\dfrac{d}{dx_j}$ applicato ad una funzione delle x e delle u'. Avremo

$$\frac{\partial[X_{\alpha|i}]}{\partial x_j} + \sum_1^{\mu}{}_{\gamma} \frac{\partial\,[X_{\alpha|i}]}{\partial u'_{\gamma}}\;[X_{\gamma|j}]\,,$$

ossia, per le [25] e [26],

$$\left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j}\right] + \sum_{1}^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u''_\beta}\right] \frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\gamma} \left[X_{\gamma|j}\right] \left\{ \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u'_\gamma}\right] + \sum_{1}^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u''_\beta}\right] \frac{\partial f_\beta}{\partial u'_\gamma} \right\} =$$

$$= \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j}\right] + \sum_{1}^{\mu}{}_{\gamma} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u'_\gamma}\right] \left[X_{\gamma|j}\right] + \sum_{1}^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u''_\beta}\right] \underbrace{\left\{ \frac{\partial f_\beta}{\partial x_j} + \sum_{1}^{\mu}{}_{\gamma} \frac{\partial f_\beta}{\partial u'_\gamma} \left[X_{\gamma|j}\right] \right\}}_{7} ;$$

e infine, per la [28],

$$\left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial x_j}\right] + \sum_{1}^{\mu}{}_{\gamma} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u'_\gamma}\right] \left[X_{\gamma|j}\right] + \sum_{1}^{\nu}{}_{\beta} \left[\frac{\partial X_{\alpha|i}}{\partial u''_\beta}\right] \left[X_{\mu+\beta|j}\right] .$$

Se ora si tien conto che gli m argomenti u risultano dai due gruppi u' ed u'', si riconosce immediatamente che questo non è che il primo membro delle [27]. Scambiando i con j si identificherebbe il secondo membro di [29] con quello di [27]: si vede così che le [29] sono soddisfatte identicamente.

Dunque: *l'integrazione di un sistema misto* COMPLETO *del tipo* [4], [24], *si riduce a quella di un sistema ai differenziali totali,* COMPLETO *(e quindi integrabile) in* μ *incognite. L'integrale generale contiene quindi* $\mu = m - \nu$ *costanti arbitrarie.*

Se il sistema misto non è completo, cioè se le condizioni a) e b) non sono senz'altro soddisfatte, la discussione, condotta come al § 3, mostra ovviamente che (dovendo sussistere le [12] ogni qualvolta esiste un'emmupla di integrali u_α) bisogna aggiungere alle [24] quelle tra le condizioni a) e b)* che non si riducono ad identità in virtù delle [24] stesse. Ripetendo poi il medesimo procedimento, si arriva o a constatare delle incompatibilità e quindi ad escludere che il sistema [4], [24] comporti soluzioni, oppure ad un sistema completo con meno di μ incognite. In tal caso è pure $< \mu$ il numero di costanti da cui dipende l'integrale generale.

* sotto la forma (17) (18) [illegible] in termini finiti

Da quanto precede si ricava in particolare che l'aggiunta di ν equazioni (indipendenti) in termini finiti ad un sistema ai differenziali totali [4] fra m funzioni u, per sè stesso completo, ha, nella migliore ipotesi (cioè quando il sistema complessivo risulta anche esso completo) la conseguenza di abbassare di ν unità il numero delle costanti da cui dipende l'integrale, riducendolo da m a $m - \nu$.

In generale (cioè quando il sistema misto non riesce completo), gli integrali, se pure esistono, contengono certo meno di $m - \nu$ costanti.

CAPITOLO III.

Equazioni lineari a derivate parziali. Sistemi completi.

§ 1. - OPERATORI LINEARI. — In questo capitolo denoteremo spesso con N il numero delle variabili indipendenti, e queste con

$$z_1, \ldots, z_N.$$

Sia $f(z_1, \ldots, z_N)$ una funzione qualunque purchè derivabile quante volte occorre. Chiamasi *operatore lineare* relativo alla f l'operazione con cui da f si ottiene una espressione del tipo

$$\sum_{1}^{N} {}_{\nu}\, a_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu}$$

dove le a_ν sono funzioni qualunque delle z: tale espressione si indica talora con una scrittura del tipo

$$Af$$

con che A — è superfluo quasi il notarlo — non è una quantità, ma un simbolo dell'operazione testè definita.

Ciò si rende espressivo scrivendo

$$A = \sum_{1}^{N} {}_{\nu}\, a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}.$$

Si verifica immediatamente che il simbolo di operatore lineare, nel caso che la f sia una somma, o un prodotto, o una funzione composta, si comporta come il simbolo di derivazione: sussistono cioè, per due generiche funzioni f_1, f_2, le identità

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2, \qquad [1]$$

$$A\,(f_1 f_2) = f_1\,Af_2 + f_2\,Af_1\,, \tag{2}$$

colle loro ovvie estensioni a un numero qualunque di addendi o di fattori. Inoltre, se f dipende dalle variabili z pel tramite di un certo numero n di argomenti $v_1, v_2, \ldots, v_n$, si ha manifestamente

[illegible]
e derivate rispetto
alle z.

$$Af\,(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \frac{\partial f}{\partial v_1}\,Av_1 + \frac{\partial f}{\partial v_2}\,Av_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial v_n}\,Av_n\,. \tag{3}$$

Consideriamo ora l'applicazione successiva di due operatori lineari

$$A = \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}\,,$$

$$B = \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, b_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}\,,$$

le b designando, al pari delle a, funzioni delle z derivabili quanto occorre.

Restano allora definiti gli operatori (del secondo ordine)

$$A\,(Bf)\,,\; B\,(Af)$$

che si possono anche scrivere, senza equivoco,

$$ABf\,,\; BAf\,.$$

Rendendo esplicito il primo, avremo successivamente

$$ABf = \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, a_\nu \frac{\partial Bf}{\partial z_\nu} = \sum_{1}^{N}{}_{\nu}\, a_\nu \sum_{1}^{N}{}_{\rho} \frac{\partial}{\partial z_\nu}\left(b_\rho \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\right) = \sum_{1}^{N}{}_{\nu\rho}\, a_\nu \frac{\partial b_\rho}{\partial z_\nu}\,\frac{\partial f}{\partial z_\rho} +$$

$$+ \sum_{1}^{N}{}_{\nu\rho}\, a_\nu\, b_\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu\,\partial z_\rho} = \sum_{1}^{N}{}_{\rho} \frac{\partial f}{\partial z_\rho}\,Ab_\rho + \sum_{1}^{N}{}_{\nu\rho}\, a_\nu\, b_\rho \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu\,\partial z_\rho}\,.$$

Analogamente (scambiando A con B, e quindi a con b):

$$BAf = \sum_{\rho}^{N}{}_{1} \frac{\partial f}{\partial z_\rho} Ba_\rho + \sum_{\nu\rho}^{N}{}_{1} a_\rho b_\nu \frac{\partial^2 f}{\partial z_\nu \partial z_\rho} .$$

Di qui apparisce che i due operatori ABf e BAf non sono uguali: però la parte del secondo ordine è la stessa, come si vede scambiando fra loro gli indici ν e ρ in una delle due sommatorie doppie. Segue da ciò che la differenza dei due operatori di cui parliamo è un operatore lineare del primo ordine: esso si chiama *funzione alternata* o *parentesi di Poisson* relativa ai due operatori A e B, e si indica col simbolo operativo (A, B), talchè

$$(A, B)f = ABf - BAf = \sum_{\nu}^{N}{}_{1} (Ab_\nu - Ba_\nu) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} . \qquad [4]$$

Dalla definizione stessa risulta

$$(A, B)f = -(B, A)f . \qquad [5]$$

Stabiliremo ora una proprietà formale degli operatori lineari, di cui ci serviremo più avanti.

Abbiansi n operatori lineari

$$A_k f = \sum_{\nu}^{N}{}_{1} a_{k|\nu} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) ,$$

e si formino con essi due qualunque combinazioni lineari (che saranno pure operatori lineari)

$$Bf = \Sigma_k{}_{1}^{n} \lambda_k A_k f ,$$

$$Cf = \Sigma_h{}_{1}^{n} \mu_h A_h f ,$$

le λ e le μ essendo funzioni (derivabili) qualisivogliono delle variabili indipendenti z.

Si tratta di far vedere che la funzione alternata $(B, C)f$ è una combinazione lineare degli operatori A e delle loro funzioni alternate. Basta a tal uopo scrivere per disteso la $(B, C)f$, il che dà

$$(B, C)f = B\,Cf - C\,Bf = \sum_1^n{}_k \lambda_k A_k(Cf) - \sum_1^n{}_h \mu_h A_h(Bf) =$$

$$= \sum_1^n{}_{kh} \left[\lambda_k A_k(\mu_h A_h f) - \mu_h A_h(\lambda_k A_k f)\right].$$

Applicando la regola di derivazione dei prodotti, l'ultima espressione diviene

$$\sum_1^n{}_{kh} \left[(\lambda_k A_k \mu_h) A_h f - (\mu_h A_h \lambda_k) A_k f\right] + \sum_1^n{}_{kh} \lambda_k \mu_h \left[A_k A_h f - A_h A_k f\right],$$

sicchè risulta

$$(B, C)f = \sum_1^n{}_{kh} \left[(\lambda_k A_k \mu_h) A_h f - (\mu_h A_h \lambda_k) A_k f + \lambda_k \mu_h (A_k, A_h) f\right],$$

c. d. d.

§ 2. — Integrali di un sistema differenziale ordinario ed equazione alle derivate parziali che li definisce. — Consideriamo un sistema di n equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine, in n incognite x_i. Indicando con t la variabile indipendente, e supponendo le equazioni risolte rispetto alle derivate delle funzioni incognite, avremo la forma, così detta *normale*,

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x \mid t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Si chiama *soluzione* di questo sistema ogni ennupla di funzioni $x_i(t)$ che soddisfi le equazioni stesse.

Si chiama invece *integrale* del sistema ogni funzione

$$f(x \mid t)$$

tale che, ponendovi in luogo delle x una qualunque soluzione delle [6], si riduce ad una costante. Si può anche dire che f è un integrale, ogni qualvolta

$$f(x \mid t) = \text{cost.}$$

è una conseguenza necessaria delle equazioni differenziali [6].

Ora mostreremo che tutte (e sole) le funzioni f che hanno questa proprietà soddisfano a un'equazione lineare omogenea a derivate parziali del 1° ordine: e, in virtù di tal fatto, che l'integrazione di una equazione di questa forma si può sempre ridurre a quella di un sistema del tipo [6], come vedremo più innanzi.

Sia dunque $f(x|t)$ un integrale delle [6]: qualora per le x si intendano tali funzioni di t da soddisfare le [6], si potrà scrivere

$$f(x|t) = \text{cost.},$$

e quindi, derivando rispetto a t,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = 0,$$

ovvero, in quanto le $x_i(t)$ verificano le [6],

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} X_i = 0. \qquad [7]$$

È questa l'equazione a derivate parziali, di cui parlavamo: potremo scriverla compendiosamente sotto la forma

$$Af = 0,$$

introducendo per brevità l'operatore lineare

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_1^n {}_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad [7']$$

1) nella sola ipotesi che la f sia un integrale del sistema

Va rilevato che la [7], al pari della $f = \text{cost.}$, da cui proviene per derivazione, diviene per ipotesi una identità, ogni qualvolta le x che in essa figurano siano sostituite da soluzioni (qualisivogliano) del sistema [6]; da ciò è facile dedurre che la [7] sussiste identicamente, 1) cioè (entro un campo conveniente) per valori qualisivogliono attribuiti agli argomenti x, t da cui dipende la f.* Infatti dati ad arbitrio

* Ora intendendo le x al pari della t come variabili indipendenti

$n+1$ numeri $x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0$ (di un campo entro il quale sia valido, per il sistema [6], il teorema generale di esistenza) sappiamo che esiste sempre una soluzione x_i del sistema [6], la quale, per $t = t_0$, assume i valori $x_1^0, \ldots, x_n^0$.

Ora la [7] deve valere (qualunque sia t) quando per le x introduciamo questa particolare soluzione $x_i(t)$. Facendo in particolare $t = t_0$ essa si trova verificata in corrispondenza ai valori arbitrariamente prescelti x_i^0, t_0,

c. d. d.

D'altra parte è evidente che qualunque funzione $f(x \mid t)$, la quale soddisfi la [7], quando vi si trattano le x e la t come variabili indipendenti, costituisce un integrale del sistema [6]. Difatti la [7], sussistendo comunque si scelgano le x, sarà in particolare soddisfatta quando si assume per le x una soluzione del sistema [6]; ma in tale accezione il primo membro della [7] si identifica con $\dfrac{df}{dt}$. La funzione f è dunque tale che, quando le x si risguardano soluzioni delle [6], $\dfrac{df}{dt} = 0$, ossia $f = \text{cost}$.

← è solamente in questo caso

Riassumendo, possiamo affermare che *condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione $f(x \mid t)$ sia un integrale del sistema* [6] *è che essa soddisfi l'equazione a derivate parziali* [7], *dove le x e la t sono $n+1$ variabili indipendenti.*

§ 3. — Integrali principali. — Fra gli integrali f del sistema [6] (che si chiamano anche, per quanto si è visto nel § precedente, integrali dell'equazione [7]) ve ne sono, per ogni valore t_0 di t, n particolarmente importanti, che ora passiamo a specificare.

Partiamo dalla più generale soluzione delle [6], che è, come è noto, una ennupla di funzioni della t, contenenti n costanti arbitrarie $x_1^0, \ldots, x_n^0$:

$$x_i = \varphi_i(t \mid x^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Le x^0 sono i valori assunti dalle x per un dato valore t_0 della t, talchè

$$(\varphi_i)_{t=t_0} = x_i^0. \tag{9}$$

Dimostriamo in primo luogo che le [8] sono risolubili rispetto alle x^0, in un intorno del punto t_0. Difatti, scriviamole sotto la forma

$$\varphi_i \, (t \mid x^0) - x_i = 0$$

e consideriamo il determinante funzionale dei primi membri rispetto alle x^0, che è

$$D = \begin{pmatrix} \varphi_1 - x_1 & \varphi_2 - x_2 & \dots & \varphi_n - x_n \\ x_1^0 & x_2^0 & \dots & x_n^0 \end{pmatrix},$$

ovvero, poichè le x^0 sono contenute solo nelle φ, e non nelle x:

$$D = \begin{pmatrix} \varphi_1 \, \varphi_2 \dots \varphi_n \\ x_1^0 \, x_2^0 \dots x_n^0 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamone il valore D_0 per $t = t_0$. Poichè nel determinante stesso non figurano derivate rispetto a t, otterremo lo stesso risultato, sia derivando le $\varphi \, (t \mid x^0)$ rispetto alle x^0, formandone il determinante, e ponendo da ultimo $t = t_0$, sia ponendo fin da principio $t = t_0$ nelle φ, e formando poi il determinante delle derivate. Atteniamoci a questa seconda alternativa, e ricordando le [9] vedremo subito che quel determinante diviene

$$D_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \, x_2^0 \dots x_n^0 \\ x_1^0 \, x_2^0 \dots x_n^0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Ora, se D, che è una funzione continua di t, è $\neq 0$ per $t = t_0$, sarà tale anche in un intorno di t_0, e perciò, in questo intorno, si potranno risolvere le [8] rispetto alle x^0.

Eseguita tale risoluzione, si otterrà,

$$x_i^0 = w_i \, (x \mid t) , \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \qquad [10]$$

e i secondi membri w costituiscono altrettanti integrali del sistema [6], perchè se in essi poniamo per le x una qualunque soluzione (cioè una ennupla di funzioni, ottenute dalle [8] dando alle x^0 particolari valori arbitrari) le w, per la loro stessa costruzione, divengono uguali alle x^0, cioè a delle costanti.

Gli integrali dell'equazione [7] così ottenuti si dicono *integrali principali relativi a* $t = t_0$. Dalla definizione risulta che

$$w_i\,(x^0 \,|\, t_0) = x_i^0 .$$

Scrivendo materialmente x al posto delle x^0, si vede che proprietà caratteristica degli integrali principali w_i relativi a $t = t_0$ si è che le funzioni $w_i(x \,|\, t)$ si riducono ordinatamente alle n variabili x per $t = t_0$.

Senza approfondire lo studio degli n integrali principali, vogliamo però rilevare che nessuno di essi è esprimibile in funzione soltanto dei rimanenti, cioè che essi, considerati come n funzioni delle $n+1$ variabili x e t, sono indipendenti. All'uopo occorre e basta che la matrice funzionale (ad n righe e $n+1$ colonne) delle w rispetto alle x, t abbia per caratteristica n, vale a dire che esista in essa un determinante d'ordine n non nullo: ora, se prendiamo il determinante

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \qquad [11]$$

e facciamo le stesse considerazioni fatte a proposito di D, troviamo che esso è $= 1$ per $t = t_0$ (perchè ivi $w_i = x_i$), e quindi è $\neq 0$ in un intorno di t_0: dunque la caratteristica è n e gli integrali principali sono indipendenti.

§ 4. — Integrali indipendenti. Integrale generale. — Più in generale si dicono *indipendenti* n integrali $v_1, v_2, \dots, v_n$ della [7], se tali sono le funzioni $v_i(x \,|\, t)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Naturalmente ogni funzione

$$F\,(v_1, v_2, \dots, v_n) \qquad [12]$$

delle (sole) v è ancora un integrale, come risulta immediatamente dalla [3], tenendo conto che (colla determinazione [7′] di A) si ha, per ogni v_i,

$$A\, v_i = 0 .$$

Ma sussiste anche la reciproca, ossia ogni integrale della [7] si può porre sotto la forma [12], la quale, pertanto, rappresenta l'*integrale generale* dell'equazione [7].

Sia infatti f un integrale della [7]: saranno soddisfatte le $n+1$ equazioni

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_{j} \frac{\partial f}{\partial x_j} X_j = 0\,,$$

$$Aw_i = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_{j} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} X_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

che sono lineari omogenee nelle $n+1$ quantità 1, $X_1, \ldots, X_n$, non tutte nulle. Dovrà dunque annullarsi il determinante dei loro coefficienti, cioè dovrà essere

$$\begin{pmatrix} f & v_1 & \ldots & v_n \\ t & x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Ciò significa intanto che le $f, v_1, v_2, \ldots, v_n$ non sono indipendenti. Siccome lo sono le v, è certo diverso da zero uno dei determinanti d'ordine n della matrice funzionale relativa a $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Ci troviamo perciò nel caso contemplato al § 5 del Cap. prec. e possiamo concludere che la f è esprimibile mediante le v (senza l'intervento di t e delle x).

§ 5. — Studio diretto della più generale equazione lineare omogenea alle derivate parziali. — I rapporti che abbiamo messo in luce fra le equazioni lineari omogenee del 1° ordine a derivate parziali, e i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, ci permettono di ricondurre, in ogni caso, l'integrazione di una di quelle alla integrazione di uno di questi. Difatti, la [7] non ha altra particolarità che quella di avere uno dei coefficienti uguale a 1: ma si riconosce immediatamente che qualunque equazione lineare omogenea del primo ordine si può ridurre a tal forma. Fermiamoci un momento su questa osservazione elementare.

Sia data l'equazione (in N variabili indipendenti $z_1, \ldots, z_N$).

$$Af = \sum_{1}^{N}{}_{\nu} a_\nu \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0\,. \qquad [13]$$

Una almeno delle a sarà diversa da zero: sia a_N. È allora legittimo di dividere l'equazione per a_N. D'altra parte la z_N viene così a trovarsi privilegiata (in quanto si è ridotto all'unità il coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial z_N}$); è dunque naturale designarla in modo speciale. Denotandola con t, e indicando, in modo simmetrico, le rimanenti variabili z con

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (n = N - 1),$$

l'equazione [13] diviene

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{1}^{n}{}_i \frac{a_i}{a_N} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

che coincide materialmente colla [7], purchè si ponga

$$\frac{a_i}{a_N} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il corrispondente sistema di equazioni [6] sarà così

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{a_i}{a_N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [14]$$

Integrate queste n equazioni (in cui va considerata t come variabile indipendente), trovate cioè le $x_i\,(t, x^0)$, che si riducono a x_i^0; per $t = t_0$, dovremo risolverle rispetto alle x^0: le espressioni

$$w_i\,(x \mid t) = w_i\,(z)$$

così trovate saranno gli n integrali principali della equazione [13] relativi a $t = t_0$, e l'integrale generale potrà assumersi sotto la forma

$$F\,(w_1, \ldots, w_n)$$

dove F è il simbolo di una funzione arbitraria. Senza passare attraverso gli integrali principali w, sarà spesso più rapido procurarsi comunque n integrali *indipendenti* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ delle [14]. L'integrale generale è senz'altro esprimibile quale funzione arbitraria delle sole v:

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

Come si vede, fra le variabili z che figurano (effettivamente, nel senso che il relativo coefficiente a è diverso da zero) come variabili di derivazione nella [13], se ne può scegliere una qualunque per farla fungere da variabile indipendente nel sistema [14]: la scelta può essere fatta in base a ragioni di comodità nella integrazione del sistema, e per lasciarla impregiudicata fino al momento in cui tali ragioni appariscono, può convenire di scrivere il sistema [14] sotto la forma

$$\frac{dx_i}{a_i} = \frac{dx_N}{a_N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

cioè, tornando alla primitiva notazione,

$$\frac{dz_1}{a_1} = \frac{dz_2}{a_2} = \ldots = \frac{dz_N}{a_N}. \tag{15}$$

Questo sistema, come si vede, si desume immediatamente dall'equazione a derivate parziali proposta; con l'avvertenza che, se qualcuna delle a è zero, deve esser uguagliato a zero anche il differenziale della corrispondente variabile.

Esempi.

1° Sia data l'equazione in tre variabili

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

Il corrispondente sistema di due equazioni a derivate ordinarie è

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

cioè

$$dlgx = dlgy = dlgz.$$

Scriviamolo sotto la forma

$$dlgy - dlgx = 0\,,$$
$$dlgz - dlgx = 0\,,$$

vale a dire

$$d\ lg\,\frac{y}{x} = 0\,,$$

$$d\ lg\,\frac{z}{x} = 0\,,$$

ed avremo

$$\frac{y}{x} = c_1 \qquad \frac{z}{x} = c_2 \qquad (c_1,\ c_2 \text{ costanti})$$

da cui senz'altro i due integrali indipendenti

$$\frac{y}{x}\,,\ \frac{z}{x}\,.$$

L'integrale generale sarà dunque

$$F\left(\frac{y}{x}\,,\ \frac{z}{x}\right).$$

Questa non è che la più generale funzione omogenea di grado zero
Difatti, detta $\varphi(x,\ y,\ z)$ tale funzione, essa dovrà per definizion
esser tale che, per λ qualunque,

$$\varphi(\lambda x\,,\lambda y\,,\lambda z) = \varphi(x\,,y\,,z)\,,$$

e, preso $\lambda = \dfrac{1}{x}$,

$$\varphi\left(1,\ \frac{y}{x}\,,\frac{z}{x}\right) = \varphi(x\,,y\,,z):$$

la φ è dunque, in sostanza, una funzione arbitraria F di $\dfrac{y}{x}\,,\dfrac{z}{x}$.

Abbiamo così ritrovato, in un caso particolare (ovviamente ge-
neralizzabile), il noto teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.

2° Consideriamo ora l'equazione

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

dove a, b, c sono costanti (non tutte nulle). Posto

$$X = \begin{vmatrix} y & z \\ b & c \end{vmatrix} \quad , \quad Y = \begin{vmatrix} z & x \\ c & a \end{vmatrix} \quad , \quad Z = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} ,$$

quest'equazione si scrive

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 ,$$

e il sistema ordinario corrispondente è

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} . \tag{17}$$

Scegliendo, p. es., x come variabile indipendente, avremmo da integrare le due equazioni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X} \quad , \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z}{X} .$$

Ma possiamo trovare più facilmente, per altra via, due integrali indipendenti. Difatti, osserviamo che le X, Y, Z, per il modo come son formate, verificano le equazioni

$$\left.\begin{aligned} xX + yY + zZ = 0 , \\ aX + bY + cZ = 0 : \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

questo perchè, se nel determinante dato si sostituisce la prima linea con x, y, z, o con a, b, c, esso si annulla; sviluppandolo, si trovano le identità ora scritte.

Ora, se dx, dy, dz soddisfano le [17], cioè sono proporzionali a X, Y, Z, potremo sostituirli a queste nelle [18] e otterremo

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0\,,$$
$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0\,.$$

I primi membri, sono differenziali esatti; sicchè, integrando, abbiamo come conseguenza necessaria delle [17]

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1\,,$$
$$ax + by + cz = c_2\,.$$

Ecco due integrali particolari del sistema, certo indipendenti, poichè una almeno delle a, b, c, è diversa da zero. L'integrale generale è così

$$F\,(x^2 + y^2 + z^2\,, \quad ax + by + cz)\,.$$

Interpretazione geometrica. Quando le variabili sono tre (o anche se fossero due) le considerazioni precedenti sono interpretabili geometricamente nello spazio ordinario (o nel piano). All'uopo conviene pensare un qualsiasi integrale $f\,(x, y, z)$ di una equazione

$$(a) \qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

come parametro di una *famiglia di superficie* $f =$ cost. Scegliendo opportunamente la costante che sta al secondo membro, si può intanto fare in modo che, per un punto P arbitrariamente prescelto, passi una superficie della famiglia: basta manifestamente attribuire alla costante la determinazione della f nel punto prescelto P. L'equazione (a) imposta ad f esprime il fatto geometrico che, in qualsiasi punto P, la normale alla superficie della famiglia, passante per P, è normale ad una direzione, quella del vettore (X, Y, Z), assegnata come funzione del posto.

Il sistema associato alla (a)

$$(b) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

(che vincola due delle variabili alla terza) esprime invece una proprietà di certe linee. Poichè sappiamo, dal teorema d'esistenza, che è possibile (e in un sol modo) trovare due funzioni

$$x = x(z) \qquad y = y(z)$$

che soddisfino quel sistema, e che per un valore z_0, dato ad arbitrio della z, assumano valori egualmente prefissati ad arbitrio x_0, y_0, così possiamo affermare che, dato un punto qualunque P, passa per esso una, e una sola, linea che gode la proprietà espressa dal sistema (b), cioè di essere in ogni punto diretta come il vettore (X, Y, Z). Un insieme di linee tali che per ogni punto (di un campo) ne passa sempre una, e una sola, dicesi *congruenza.*

Tra la famiglia di superficie che rappresentano gli integrali dell'equazione (a), e la congruenza di linee, che rappresentano le soluzioni del sistema (b), passa un legame ben semplice: *ogni linea della congruenza giace per intero su una superficie della famiglia.* Infatti, consideriamo un punto P (x, y, z), e chiamiamo L la linea della nostra congruenza, che passa per P, e S la superficie, passante per P, della famiglia che abbiamo considerato: faremo vedere, che se da P ci si sposta infinitamente poco sulla L, passando a un punto P', non si esce dalla superficie S, cioè che se le coordinate x, y, z soddisfano l'equazione della superficie S,

$$f(x, y, z) = C\ ,$$

la soddisfano anche le coordinate $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, di P'. E ciò è chiaro, poichè la f, in corrispondenza delle coordinate di P', diviene

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

e, siccome dx, dy, dz sono per le (b) proporzionali a X, Y, Z, l'incremento della f è proporzionale a

$$\frac{\partial f}{\partial x}X + \frac{\partial f}{\partial y}Y + \frac{\partial f}{\partial z}Z\ ,$$

cioè nullo, per la (a).

Le superficie che consideriamo sono dunque formate da linee della congruenza: queste linee si chiamano le loro *caratteristiche.*

Nella dimostrazione della proprietà che ogni linea della congruenza giace interamente sopra una superficie $f = \text{cost.}$, si possono naturalmente evitare le considerazioni infinitesimali, ragionando (ciò che è sostanzialmente la stessa cosa) nel modo seguente: Si pensino in $f(x, y, z)$ le variabili x, y, z come coordinate dei punti di una linea L della congruenza, e sia λ un parametro generico, per es. l'arco di curva, atto a fissare la posizione di un punto su L: le x, y, z vanno così risguardate quali funzioni ben determinate di λ. Dico che la $f(x, y, z)$, in cui si introducano tali funzioni al posto di x, y, z è indipendente da λ, ossia che $\frac{df}{d\lambda} = 0$. Infatti

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\lambda};$$

ma in virtù delle (*b*), lungo L, $\frac{dx}{d\lambda}$, $\frac{dy}{d\lambda}$, $\frac{dz}{d\lambda}$ sono proporzionali a X, Y, Z, talchè, siccome f verifica la (*a*), risulta effettivamente $\frac{df}{d\lambda} = 0$. Il fatto che f si conserva costante lungo L traduce appunto la proprietà geometrica che la linea L appartiene ad una superficie $f = \text{cost.}$

§ 6. — Integrali di un sistema ai differenziali totali, e sistema (associato) di equazioni alle derivate parziali che li definisce. — Partendo da un sistema di equazioni differenziali *ordinarie* siamo giunti a integrare la più generale *equazione* lineare omogenea *a derivate parziali, del 1° ordine*. Con un procedimento analogo, prendendo le mosse da un sistema di equazioni ai *differenziali totali*, riusciremo a integrare il più generale sistema di equazioni lineari omogenee *a derivate parziali*, del 1° ordine.

Consideriamo dunque il sistema

$$du_\alpha = \sum_{1}^{n}{}_i X_{\alpha|i}\, dx_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m). \tag{19}$$

Chiameremo *integrale* di questo sistema ogni funzione

$$f(x \mid u)$$

tale che, ponendovi in luogo delle u una *soluzione* qualsiasi delle [19], si riduce ad una costante.

Differenziando la f si ha

$$df = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{1}^{m}{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}\, du_\alpha \ ,$$

e, se le u sono soluzioni delle [19],

$$df = \sum_{1}^{n}{}_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1}^{m}{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}\, X_{\alpha\,|\,i}\right) dx_i \ .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè questo differenziale sia nullo, qualunque siano i dx, è evidentemente che siano verificate le n eguaglianze

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{1}^{m}{}_\alpha \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}\, X_{\alpha\,|\,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [20]$$

Queste devono valere non solo — come appare da qui — quando le u sono soluzioni delle [19], ma identicamente,[1] e lo si vedrebbe come nel § 2.

Introducendo gli operatori lineari

$$\Omega_i = \sum_{1}^{m}{}_\alpha X_{\alpha\,|\,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\ , \qquad [21]$$

$$B_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Omega_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad [22]$$

le [20] si possono scrivere

$$B_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [20']$$

Il sistema [20] o [20′] si dice *associato* del sistema (19): condizione necessaria e sufficiente perchè la f sia un integrale del sistema

1) Ossia anche considerando le u_α al fuori delle x_i come variabili indipendenti assegnando ad esse valori qualunque - e questo nella ipotesi che f sia un integrale del sistema —

[19], è che soddisfi il sistema associato [20] alle derivate parziali, o, come si dice, che sia un integrale del sistema associato.

§ 7. — INTEGRALI PRINCIPALI, COME CASI TIPICI DI INTEGRALI INDIPENDENTI. — Supponiamo che il sistema [19] sia illimitatamente integrabile; fissiamo ad arbitrio, nel campo di regolarità delle X, le costanti x^0 e u^0: sappiamo allora che esistono m funzioni, regolari nell'intorno dei valori x^0, u^0,

$$u_\alpha = \varphi_\alpha(x \mid u^0)$$

che soddisfano le [19], e che per $x_i = x_i^0$ divengono uguali alle u_α^0. Le equazioni ora scritte sono risolubili, in un intorno del punto x^0, rispetto alle u^0 (e ciò si dimostrerebbe con le stesse considerazioni fatte nel § 3). Immaginandole risolte, esprimeremo le u^0 per le x e le u, e potremo scrivere

$$w_\alpha(x \mid u) = u_\alpha^0 .$$

Le w sono evidentemente degli integrali del sistema ai differenziali totali [19], e quindi sono anche integrali del sistema a derivate parziali [20]; faremo vedere ora che sono indipendenti. Pensiamo alla matrice funzionale delle w rispetto alle x e alle u: bisognerà mostrare che la sua caratteristica è m, o, ciò che è lo stesso, (poichè non se ne possono estrarre determinanti d'ordine $> m$), che se ne può estrarre un determinante d'ordine m, non nullo. Ora tale determinante è

$$\begin{pmatrix} w_1 \, w_2 \ldots w_m \\ u_1 \, u_2 \ldots u_m \end{pmatrix}$$

che, per $x_i = x_i^0$, diviene uguale a 1, e quindi in un intorno di quel punto è diverso da zero.

Gli m integrali indipendenti w si chamano *integrali principali* del sistema ai differenziali totali [19], o del sistema alle derivate parziali [20], *in corrispondenza ai valori* x_i^0 delle variabili indipendenti x. Così si è provato che, nell'ipotesi che il sistema [19] sia illimitatamente integrabile, le [20] (o [20′]) ammettono, in infiniti modi, m integrali indipendenti: non foss'altro gli integrali principali testè considerati i quali in generale variano colla scelta dei valori iniziali x^0.

Anche qui, come a § 4, diremo più generalmente *indipendenti* m integrali

$$v_1, v_2, \ldots, v_m$$

delle [20], se lo sono le funzioni $v(x \mid u)$ delle $n+m$ variabili x ed u.

§ 8. — Integrale generale. — Per una proprietà già ricordata degli operatori lineari, se si forma una funzione qualunque delle v

$$F(v_1, v_2, \ldots, v_m), \tag{23}$$

si ottiene un nuovo integrale del sistema alle derivate parziali [20]. Di più, anche per il sistema [20], come già per l'unica equazione [7], la più generale funzione che soddisfa il sistema rientra nella [23], ossia questa costituisce l'*integrale generale* del sistema in quanto si risguardi F come funzione arbitraria.

Per dimostrarlo, indichiamo con $f(x \mid u)$ un qualunque integrale delle [20], e consideriamo la matrice funzionale delle $m+1$ funzioni (di $m+n$ variabili) $v_1, v_2, \ldots, v_m, f$:

$$M = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial x_n} & \frac{\partial v_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial x_n} & \frac{\partial v_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial v_m}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial f}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial u_m} \end{matrix} \right\| .$$

Se riusciremo a dimostrare che la caratteristica di questa matrice è m, ne concluderemo (v. Cap. I, § 6) che fra le $m+1$ funzioni passano $(m+1)-m=1$ relazioni esenti dalle x, u: questa relazione dovrà contenere necessariamente ed effettivamente la f, perchè fra le sole v non può esservi legame, e si potrà perciò risolvere rispetto alla f, la quale pertanto avrà la forma [23]: sarà così dimostrato quanto si voleva.

Trasformiamo un poco la matrice M, facendovi figurare solo derivate rispetto alle u: ciò è agevole, perchè essendo

$$B_i v_\alpha = 0 \quad , \quad B_i f = 0 \quad ,$$

si ha (per la [22])

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_i} = -\,\Omega_i v_\alpha \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = -\,\Omega_i f \; .$$

La matrice diviene

$$M = \begin{Vmatrix} -\,\Omega_1 v_1 & \ldots & -\,\Omega_n v_1 & \dfrac{\partial v_1}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial v_1}{\partial u_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\,\Omega_1 v_m & \ldots & -\,\Omega_n v_m & \dfrac{\partial v_m}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial v_m}{\partial u_m} \\ -\,\Omega_1 f & \ldots & -\,\Omega_n f & \dfrac{\partial f}{\partial u_1} & \ldots & \dfrac{\partial f}{\partial u_m} \end{Vmatrix} .$$

Per dimostrare che la caratteristica è m, bisognerà dimostrare:

1) che ogni determinante di ordine $m + 1$ (che è il massimo possibile) è zero;

2) che almeno un determinante di ordine m non è zero.

Un determinante generico di ordine $m + 1$ sarà formato con tutte le $m + 1$ righe, e con $m + 1$ colonne scelte in modo arbitrario tra le $m + n$ della matrice (le quali, come si vede, si presentano di due tipi: le prime n contengono gli operatori Ω, le altre m le $\left.\dfrac{\partial}{\partial u}\right)$: ne siano scelte r fra quelle del primo tipo e s fra quelle del secondo; naturalmente sarà $r + s = m + 1$. Ora, per scrivere in modo generico una riga di questo determinante, la quale potrà contenere o le v o (se è l'ultima) la f, denoteremo con φ una qualunque delle v oppure la f: potremo allora scrivere la riga in questo modo

$$\Omega_{h_1} \varphi, \; \Omega_{h_2} \varphi, \; \ldots, \; \Omega_{h_r} \varphi \; , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k_1}} \; , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k_2}} \; , \ldots \; \frac{\partial \varphi}{\partial u_{k_s}} :$$

(gli indici $h_1, h_2, \ldots, h_r$ costituiscono una qualsiasi disposizione di r numeri, scelti da 1 ad n, e gli indici $k_1, k_2, \ldots, k_s$, una qualsiasi disposizione di s numeri, scelti da 1 ad m). Se si ricordano le [21], si riconosce che ciascuno dei primi r elementi della riga generica è una combinazione lineare dei rimanenti, anzi, come si suol dire, che le prime r colonne del determinante sono combinazioni lineari delle rimanenti. Allora quel determinante si potrà scindere in una combinazione lineare di determinanti, di ordine $m+1$, nei quali tutte le colonne saranno del secondo tipo $\left(\text{cioè formate di } \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)$. Ma le colonne del secondo tipo sono in tutto m: quindi non se ne possono scegliere $m+1$ senza ripeterne almeno una. Da ciò si conclude che in ciascuno di quei determinanti parziali vi sono almeno due colonne uguali, e quindi che i determinanti stessi sono tutti nulli. È nullo perciò anche il determinante generico d'ordine $m+1$, che ne era una combinazione lineare. E così la prima proposizione è dimostrata.

Che vi sia un determinante d'ordine m non nullo risulta senz'altro dall'ipotesi che gli integrali v sono indipendenti.

È dunque dimostrato che la caratteristica di M è m, e quindi che la f è esprimibile mediante gli integrali indipendenti v, cioè che ha la forma [23].

§ 9. — Studio diretto del più generale sistema di equazioni lineari, omogenee, alle derivate parziali del I° ordine. Sistemi completi. Sistemi jacobiani. — Prediamo a considerare un generico sistema di n equazioni lineari omogenee alle derivate parziali, del 1° ordine, in N variabili (e una sola funzione incognita); sia

$$A_k f = \sum_{1}^{N} {}_{\nu}\, a_{\nu k} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad [24]$$

Supporremo che queste n equazioni siano indipendenti; e potremo anche ritenere $n < N$. Infatti se fosse $n > N$, le equazioni, che abbiamo supposto indipendenti, considerate come algebriche nelle N quantità $\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$, sarebbero incompatibili, e, se fosse $n = N$, implicherebbero senz'altro $\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0$, ossia $f = \text{cost}$. Ciò posto, è chiaro che ogni f, la quale verifichi le [24], deve necessariamente verificare anche le altre $\frac{n(n-1)}{2}$ seguenti (ottenute formando tutte le possibili parentesi di Poisson con gli operatori dati):

$$(A_h\,,\,A_k)f = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{25}$$

Esse sono conseguenze differenziali del sistema dato. Ora può avvenire che queste, o alcune di queste, siano anche conseguenze algebriche del sistema stesso, cioè che si possano dedurre algebricamente da esso facendo una combinazione lineare delle n equazioni date.

Se *tutte* le equazioni [25] sono conseguenze algebriche del sistema [24], questo si dice *completo*.

In caso diverso, consideriamo il sistema, formato aggiungendo a [24] quelle fra le equazioni [25], che non ne sono conseguenze algebriche: esso sarà equivalente al dato, e avrà qualche equazione di più. Ripetendo lo stesso procedimento sul nuovo sistema, e così seguitando, o si perverrà a un sistema completo, ovvero si perverrà a un sistema in cui il numero delle equazioni eguaglia o supera N, caso di incompatibilità, come già si rilevò al principio di questo §.

Basterà dunque considerare i sistemi *completi*: la condizione di completezza si può scrivere nel modo seguente

$$(A_h\,,\,A_k)f = \sum_{l=1}^{n} p_{hkl}\, A_l f\,. \tag{26}$$

i coefficienti p designando funzioni, *a priori* qualisivogliano, delle variabili indipendenti z. Dalla stessa definizione, attesa l'identità [5] del § 1, segue che, fra questi coefficienti, passano le relazioni

1) $(A_l, A_k) = -(A_k, A_l)$

$$p_{hkl} = -\,p_{khl} \qquad (h, k, l = 1, 2\,, \ldots, n)\,.$$

Caso particolare — e particolarmente importante — di sistema completo è quello in cui tutte le parentesi di Poisson sono identicamente nulle (cioè tutte le p_{hkl} sono zero): allora il sistema si dice ***jacobiano***.

§ 10. — Equivalenza di ogni sistema completo ad uno jacobiano costituito da altrettante equazioni. Nota sulla regola di Cramer. — Vogliamo dimostrare che ad un sistema completo se ne può sempre sostituire uno equivalente, di altrettante equazioni, ma jacobiano: cosicchè, in definitiva, ci si può sempre ridurre al caso del sistema jacobiano.

Partiamo dunque dal sistema [24], e supponiamo che esso sia *completo*, cioè che siano verificate le [26]. Il procedimento che seguiremo consisterà in questo: formeremo, con le n equazioni date, n combinazioni lineari distinte,

$$B_i f = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} A_k f = 0 \qquad [27]$$

con la condizione

$$\| c_{ik} \| \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

scegliendo i coefficienti c in modo che il sistema [27], che è equivalente al dato, sia jacobiano.

Prima di far questo però scriviamo le equazioni date in modo leggermente diverso. Sappiamo che la matrice delle a ha caratteristica n (perchè le equazioni sono indipendenti): ordiniamo le variabili in modo che il determinante a formato dalle prime n colonne sia quello (o uno di quelli) diverso da zero:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Scindiamo poi le variabili z in due gruppi: le prime n le chiameremo $x_1, \ldots, x_n$, le altre $N - n = m$ le chiameremo $u_1, \ldots, u_m$. Ciò posto, il sistema dato si può scrivere

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} + U_k f = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

denotando con U_k un operatore, involgente le sole derivate rispetto alle u, del quale ora non ci interessa l'espressione esplicita. Ora risolviamo [1] queste n equazioni rispetto alle $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$: postele sotto la forma

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} a_{\nu k} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = - U_k f,$$

moltiplichiamole per a^{ik} (elemento reciproco di a_{ik} nel determinante delle a) e sommiamo rispetto a k da 1 ad n; formiamo cioè le n com-

---

[1] La nota regola di Cramer si può presentare sotto la forma seguente, di cui faremo frequente uso, qui ed altrove. Siano date le n equazioni lineari

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{\nu} a_{\nu k} \xi_\nu = \eta_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

col determinante a dei coefficienti diverso da 0.

Indichiamo con a^{rs} *l'elemento reciproco* dell'elemento generico a_{rs} nel determinante a, vale a dire il complemento algebrico di a_{rs}, diviso per a. Si ha, ricordando due noti teoremi sui determinanti, e indicando con δ_r^s lo zero o l'unità secondochè $r \neq s$ o $r = s$,

$$(\beta) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ik} a^{jk} = \delta_i^j$$

$$(\beta') \qquad \sum_{1}^{n}{}_{k} a_{ki} a^{kj} = \delta_i^j .$$

In virtù di queste proprietà, le (α) si possono risolvere facendone delle opportune combinazioni lineari. Per avere, ad es., ξ_i, si moltiplichi la k^{esima} equazione per a^{ik} e, dati a k tutti i valori da 1 ad n, si sommi: si avrà

$$\sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} \sum_{1}^{n}{}_{\nu} a_{\nu k} \xi_\nu = \sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} \eta_k .$$

Ora il primo membro si può trasformare come segue

$$\sum_{1}^{n}{}_{k\nu} a^{ik} a_{\nu k} \xi_\nu = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \xi_\nu \sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} a_{\nu k} = \sum_{1}^{n}{}_{\nu} \xi_\nu \delta_i^\nu = \xi_i ,$$

e quindi si ha la formula risolutiva

$$(\alpha') \qquad \xi_i = \sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} \eta_k .$$

binazioni lineari (indipendenti, perchè il determinante delle a^{ik} non è nullo, essendo notoriamente eguale ad $\frac{1}{a}\Big)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\sum_{k\,1}^{n} a^{ik}\, U_k f \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

che potremo scrivere, più concisamente,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \Omega_i f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [24']$$

indicando con Ω_i degli operatori lineari contenenti, al pari degli U, sole derivate rispetto alle u, e quindi del tipo

$$\Omega_i = \sum_{\alpha\,1}^{m} X_{\alpha\,|\,i} \frac{\partial}{\partial u_\alpha}\,.$$

Il sistema [24′] è equivalente all'originario [24]: l'unica semplificazione formale, che vi apparisce, è la forma particolarmente semplice in cui vi compaiono le $\frac{\partial}{\partial x}$. Ma mostreremo che il sistema [24′] presenta il vantaggio di essere, nonchè completo, jacobiano: esso quindi costituisce proprio il richiesto particolare sistema di n combinazioni lineari che nella [27] abbiamo denotato con gli operatori B_i: i coefficienti c_{ik} si identificheranno con gli a^{ik}.

Dimostriamo dunque che il sistema [24′], che scriveremo anche brevemente

$$B_i f = 0\,, \qquad [24'']$$

avendo posto

$$B_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \Omega_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha\,1}^{m} X_{\alpha\,|\,i} \frac{\partial}{\partial u_i}\,, \qquad [28]$$

è completo. Basta pensare che, per un teorema già da noi dimostrato al § 1, essendo gli operatori B combinazioni lineari degli A, le parentesi di Poisson $(B_i, B_j) f$ sono combinazioni lineari delle espressioni:

$$A_k f \quad , \quad (A_h, A_k) f .$$

Ora, in virtù della completezza del sistema [24], le $(A_h, A_k) f$ sono alla lor volta combinazioni lineari delle Af, talchè in definitiva gli operatori (B_i, B_j) vengono ad essere combinazioni lineari dei soli A; ma questi sono combinazioni lineari dei B, onde infine le (B_i, B_j) sono combinazioni lineari dei B. E ciò significa che il sistema [24''] è esso pure completo.

Si potrà scrivere dunque

$$(B_i, B_j) f = \sum_{1}^{m}{}_l \, q_{ijl} \, B_l f , \qquad [29]$$

i coefficienti q essendo analoghi ai p della formula [26].

Per dimostrare che [24''] è jacobiano, bisognerà far vedere che i coefficienti q sono tutti nulli. A tal uopo osserviamo che i due membri della [29] sono lineari nelle $\frac{\partial f}{\partial x}$, e l'identità non potrà sussistere se non saranno uguali, nei due membri, i coefficienti della stessa derivata, p. es. di $\frac{\partial f}{\partial x_h}$. Cerchiamo questi coefficienti.

Il primo membro si può scrivere

$$B_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \Omega_j f \right) - B_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \Omega_i f \right) .$$

Nell'esplicitare ulteriormente converrà ricordare (§ 1) che le derivate seconde non figurano nel risultato, e ci si può quindi risparmiare di applicare l'operatore B alle derivate della f, onde il detto primo membro si riduce a

perchè B_i si riferisce esclusivamente alle $X_{\alpha,i}$ come si è detto per quel fattore)

$$B_i \, \Omega_j f - B_j \, \Omega_i f = \sum_{1}^{m}{}_\alpha \left[B_i X_{\alpha \mid j} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} - B_j X_{\alpha \mid i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_\alpha} \right] . \qquad [30]$$

Di qua apparisce che in esso non figurano le $\frac{\partial}{\partial x}$, e quindi il coefficiente di ogni $\frac{\partial f}{\partial x_h}$ è zero. Viceversa nel secondo membro tale coeffi-

ad un certo $\frac{\partial f}{\partial x_k}$

ciente è q_{ijh} (basta ricordare l'espressione di B); è quindi dimostrato che ogni $q_{ijh} = 0$, e per conseguenza che

$$(B_i , B_j) f = 0 \ ,$$

ossia che il sistema [24′] è jacobiano. Osserviamo, perchè ci sarà utile tra un momento, che dall'essere identicamente nullo ciascun membro della [29] nonchè della [30] segue l'annullarsi anche dei coefficienti delle $\frac{\partial}{\partial u}$, ossia, per la (30) stessa,

$$B_i X_{\alpha \mid j} - B_j X_{\alpha \mid i} = 0 . \qquad [31]$$

§ 11. — Integrazione fornita dal sistema associato. — Vediamo ora, raccogliendo le cose dette, come, dato un sistema di equazioni alle derivate parziali, lineari, omogenee, del 1º ordine, si possa trovarne — se esiste — l'integrale generale, mediante l'integrazione di un sistema completo ai differenziali totali.

Sappiamo intanto trasformare sempre il sistema dato in uno *completo* (se non lo era già, o se non vi erano incompatibilità); notiamo poi che il sistema jacobiano [24′], a cui siamo giunti trasformando ulteriormente il generico sistema completo [24], è identico al sistema [20], che si era presentato come *associato* di un generico sistema ai differenziali totali. L'importante è che se, coi coefficienti X spettanti al sistema [24′], si costruisce il sistema ai differenziali totali [19], questo risulta illimitatamente integrabile.

Infatti, la condizione perchè ciò sia è

$$\frac{dX_{\alpha \mid i}}{dx_j} = \frac{dX_{\alpha \mid j}}{dx_i} \qquad \begin{matrix} (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ (\ \alpha = 1, 2, \ldots, m) \end{matrix} ,$$

ossia

$$\frac{\partial X_{\alpha \mid i}}{\partial x_j} + \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial X_{\alpha \mid i}}{\partial u_\beta} X_{\beta \mid j} = \frac{\partial X_{\alpha \mid j}}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\beta \frac{\partial X_{\alpha \mid j}}{\partial u_\beta} X_{\beta \mid i}$$

le quali, ricordando la definizione [28] degli operatori B, si compendiano in

$$B_j X_{\alpha \mid i} = B_i X_{\alpha \mid j} \ .$$

Le [31] ci assicurano appunto che le X ricavate dal sistema [24] soddisfano queste condizioni.

Trasformato dunque il sistema proposto nella forma [24'], basterà costruire il sistema associato [19], e integrarlo col procedimento dato nel Cap. precedente: si otterrà la più generale soluzione sotto la forma

$$u_\alpha = \varphi_\alpha (x \mid u^0) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Risolvendo queste m equazioni rispetto alle u^0 si avranno $m = N - n$ integrali principali, e formandone una funzione qualunque, si avrà l'integrale generale del sistema proposto.

Questo metodo sistematico di integrazione è esauriente dal punto di vista teorico, ma di applicazione piuttosto laboriosa. In pratica è spesso più sbrigativo integrare separatamente le equazioni, e ricercare poi gli m integrali comuni che certo esistono, quando si sia preventivamente accertato che si tratta di sistema completo. Eccone un esempio.

Abbiasi il sistema

$$\left.\begin{aligned} Af &= \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \\ Bf &= - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad [32]$$

Constateremo anzitutto che esso è non solo completo ma anche jacobiano. Per far ciò nel modo più rapido, convien porre

$$A_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad B_1 = - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$A_2 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad B_2 = - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4},$$

talchè $A = A_1 + A_2$, $B = B_1 + B_2$, e formare poi la funzione alternata dei due operatori dati. Avremo successivamente

$$\begin{aligned} (A, B) f &= ABf - BAf = \\ &= A_1 B_1 f + A_2 B_1 f + A_1 B_2 f + A_2 B_2 f - B_1 A_1 f - B_1 A_2 f - B_2 A_1 f - \\ &\qquad - B_2 A_2 f = (A_1, B_1) f + (A_2, B_1) f + (A_1, B_2) f + (A_2, B_2) f. \end{aligned}$$

Ora, si verifica direttamente che

$$(A_1, B_2)f = 0 \qquad , \qquad (A_2, B_1)f = 0$$

e, scambiando x_1, x_2 con x_3, x_4, se ne deduce

$$(A_2, B_2)f = 0 \qquad , \qquad (A_1, B_2)f = 0 .$$

Quindi

$$(A, B)f = 0$$

il che significa che il sistema è jacobiano. Esso ammetterà dunque $4 - 2 = 2$ integrali indipendenti, anzi (§ 4) infinite coppie siffatte.

Per trovarne una, si noti che la prima equazione (che è del tipo studiato nel 1º esempio del § 5) ha per integrale generale una qualsiasi funzione omogenea di grado zero nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4. Basterà pertanto trovare due integrali (indipendenti) della seconda equazione che siano omogenei di grado zero.

Ora il sistema di equazioni differenziali ordinarie, associato alla seconda delle [32], è

$$-\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = -\frac{dx_3}{x_4} = \frac{dx_4}{x_3} .$$

Di queste equazioni, quella formata dai primi due membri si integra immediatamente, e dà

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 ; \tag{33_a}$$

analogamente dagli ultimi due risulta

$$x_3^2 + x_4^2 = b^2 , \tag{33_b}$$

dove a e b designano costanti.

Eguagliando invece primo e terzo membro, dopo aver sostituito x_2 e x_4 con le espressioni ricavate da [33_a] e [33_b], si ha

$$\frac{dx_1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} = \frac{dx_3}{\sqrt{b^2 - x_3^2}}$$

e quindi integrando

$$\arcsin \frac{x_1}{a} - \arcsin \frac{x_3}{b} = c$$

dove c è una terza costante.

Quest'ultimo integrale si può assumere sotto la forma

$$\arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}} = c. \qquad [33_c]$$

D'altra parte da (33_a) e (33_b) si ha

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2} = \frac{a^2}{b^2}. \qquad [33_d]$$

Dei quattro integrali così trovati, gli ultimi due, $[33_c]$ e $[33_d]$, sono omogenei di grado zero, e quindi sono integrali anche della prima equazione, e sarebbe facile verificare che sono indipendenti: perciò l'integral generale del sistema [32] è

$$f\left(\arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \arcsin \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + x_4^2}},\ \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2 + x_4^2}\right)$$

dove f è il simbolo di una funzione arbitraria.

CAPITOLO IV.

Fondamenti algebrici del Calcolo Differenziale Assoluto.

§ 1. — COMPORTAMENTO DEGLI ENTI ANALITICI NEI CAMBIAMENTI DI VARIABILI. — Questo capitolo è dedicato allo studio del comportamento di taluni enti analitici di fronte a un cambiamento di variabili: nel presente paragrafo vogliamo intanto mettere in luce con qualche esempio l'indole delle considerazioni generali che ci proponiamo di istituire.

Fissiamo l'attenzione su n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, che designeremo al solito, comprensivamente, con x, e immaginiamo di effettuare su di esse una trasformazione passando così ad altre n variabili indipendenti $\bar{x}$; è bene inteso che supponiamo si tratti di trasformazione effettiva, cioè che le formule di trasformazione

$$x_i = x_i(\bar{x}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

siano, nel campo che si considera, invertibili, talchè accanto ad esse sussistono le equivalenti

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x). \tag{1'}$$

Nel linguaggio geometrico, come è noto, questa operazione prende il nome di *cambiamento di coordinate*: possiamo assumere, per fissare le idee, $n = 3$, pensando al passaggio da coordinate cartesiane ortogonali x, y, z a tre loro combinazioni indipendenti generiche (coordinate curvilinee) q_1, q_2, q_3.

Ora, supponiamo che una questione fisica, geometrica, o d'altra natura, ci abbia condotto a considerare, accanto alle variabili x, un certo insieme di enti ad esse legati. Per es., in una certa regione dello spazio fisico riferito a coordinate cartesiane x, y, z, sia definita in ogni punto la temperatura T; questa si presenta così come una ben determinata funzione di x, y, z. Oppure supponiamo che nella detta regione esista un campo di forza, ed avremo allora da considerare in ogni punto un vettore, e quindi le sue componenti, cioè tre funzioni X, Y, Z, delle x, y, z. Facciamo ora il nostro cambiamento di variabili: vi sarà luogo a caratterizzare lo stesso ente o fenomeno fisico (temperatura, forza, ecc.); e si è all'uopo condotti a introdurre dei parametri determinativi, i quali, nel nuovo sistema di riferimento, sostituiscono con vantaggio quelli che sono invece i più opportuni quando ci si riferisce a coordinate cartesiane. Questi nuovi parametri si chiamano naturalmente trasformati dei primitivi, e da quelli si deducono con una legge, che non si può assegnare *a priori*, ma dipende dalla natura del problema, e in parte da opportune convenzioni. Per esempio, la temperatura T sarà, nel nuovo sistema, una funzione di q_1, q_2, q_3, tale che allo stesso punto dello spazio competa la stessa temperatura, sia che la si calcoli con le variabili primitive, sia con quelle nuove; perciò la T in funzione delle q si otterrà ponendo, nella $T(x, y, z)$, in luogo di x, y, z, le loro espressioni per mezzo di q_1, q_2, q_3. Un tale modo di comportarsi, che è il più semplice fra quelli che avremo occasione di considerare, dicesi *trasformazione per invarianza*: così si trasformano tutte le funzioni del posto che hanno una determinazione indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Non così avviene, nell'altro esempio citato, per le componenti di un vettore. Infatti, se (come supponiamo) questo ha una grandezza e una direzione indipendenti dal sistema di coordinate scelto (lo penseremo anzi definito fisicamente come una forza) le sue componenti invece, pur considerate sempre nello stesso punto, cambiano di valore col mutare del riferimento, come si vede subito, pensando ad una rotazione di assi cartesiani. Anzi, se la trasformazione di cui si parla non è di questa particolar natura, non sappiamo *a priori* che cosa sostituire nel nuovo sistema, per caratterizzare il vettore, alle sue proiezioni X, Y, Z sugli assi dell'antico sistema [1]; dobbiamo cioè, in base a ragioni di opportunità, *convenire* quale sarà in questo caso la legge di trasformazione. Il criterio più atto a servir di guida in questa

[1] Vedremo diffusamente al Cap. V come l'introduzione di nuove variabili q_1, q_2, q_3 dia luogo geometricamente a corrispondenti *superficie coordinate* $q_1 = \text{cost}$, $q_2 = \text{cost}$; $q_3 = \text{cost}$, e a *linee coordinate* che ne sono le intersezioni. Ciò premesso, se ci proponessimo di individuare con criteri geometrici desunti dal nostro sistema coordinato gli elementi determinativi di un vettore, ci troveremmo di fronte a quattro possibilità tutte egualmente accettabili, di cui l'una o l'altra può divenire preferibile secondo i casi. Basta pensare che, in ogni punto, le tangenti alle linee e le normali alle superficie coordinate formano due triedri fra loro supplementari (in generale obliquangoli e quindi distinti). Orbene, un vettore si può caratterizzare sia mediante le sue proiezioni ortogonali sia mediante le sue componenti secondo ciascuno di questi due triedri.

scelta consiste nel far intervenire, accanto al nostro vettore, uno scalare che abbia significato fisico, e che si trasformi per invarianza. Ed ecco come: consideriamo due punti infinitamente vicini, le cui coordinate differiscano di dx, dy, dz: il lavoro della forza di componenti X, Y, Z, nel passaggio dall'uno all'altro di quei punti, sarà

$$dL = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,; \qquad [2]$$

questo scalare ha un significato fisico invariante ed è quindi concretamente determinabile. Dal punto di vista matematico importa la circostanza che le componenti cartesiane della forza coincidono (in qualsiasi sistema di assi ortogonali $Oxyz$) coi coefficienti di dx, dy, dz in tale espressione. Passiamo ora alle coordinate curvilinee q_1, q_2, q_3, ed esprimiamo conseguentemente dx, dy, dz mediante i differenziali delle nuove variabili, per mezzo delle formule

$$dx = \sum_i^{\overline{3}}{}_{\underline{1}} \frac{\partial x}{\partial q_i}\,dq_i\,, \text{ ecc.}$$

Il dL assumerà la forma

$$dL = \sum_i^{\overline{3}}{}_{\underline{1}} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\,X + \frac{\partial y}{\partial q_i}\,Y + \frac{\partial z}{\partial q_i}\,Z\right) dq_i$$

che è analoga alla [2].

Infatti, ponendo

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\,X + \frac{\partial y}{\partial q_i}\,Y + \frac{\partial z}{\partial q_i}\,Z = Q_i \qquad (i = 1, 2, 3)\,, \qquad [3]$$

si ha

$$dL = Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2 + Q_3\,dq_3\,.$$

Le quantità Q_1, Q_2, Q_3, fanno qui l'ufficio che, in coordinate cartesiane, facevano X, Y, Z: appare dunque l'opportunità di chiamarle componenti della forza nel nuovo sistema di riferimento, onde si può dire che la [3] rappresenta la legge di trasformazione delle componenti di un vettore. Questa legge prende il nome di *covarianza*.

A questa stessa legge si è condotti anche da un punto di vista diverso (che è del resto subordinabile al precedente, come tra un momento constateremo). Consideriamo all'uopo una funzione invariante $u(x, y, z)$ e ricerchiamo la più opportuna legge di trasformazione delle sue tre derivate $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, che sono evidentemente altrettante funzioni di x, y, z. Si presenta naturale di considerare come enti ad esse corrispondenti nel nuovo sistema di riferimento le tre derivate, $\frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{\partial u}{\partial q_2}, \frac{\partial u}{\partial q_3}$, che sono notoriamente date da $\frac{\partial u}{\partial q_i} = C_i^{\,i} \frac{\partial u}{\partial x^i}$

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_i} . \qquad [4]$$

Se invece si assumesse la trasformazione per invarianza, le tre quantità che consideriamo avrebbero il significato di derivate d'una funzione soltanto nell'originario sistema di riferimento cartesiano, mentre in qualunque altro, in generale, esse perderebbero questa notevole particolarità.

Le formule [4] sono manifestamente un caso particolare delle [3], in cui si sostituiscano le derivate di una medesima funzione u alle componenti del vettore generico. La ragione intima di ciò si ravvisa nel fatto che anche la legge di persistenza delle derivate è compendiabile nell'invarianza di una forma differenziale lineare. Basta, come caso particolare, sostituire al dL (che non è in generale un differenziale esatto) il differenziale totale du, che è ad un tempo esprimibile sotto le due forme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial u}{\partial q_3} dq_3 .$$

Si può intravedere da quanto si è detto, e si vedrà meglio in seguito, quale sia il compito che ci proponiamo.

Dato, in un certo sistema qualsivoglia di riferimento, un insieme di quantità aventi un certo significato, p. es. fisico o geometrico, assegnando una legge di trasformazione per cui ad ogni altro sistema di riferimento venga coordinato un sistema di quantità aventi lo stesso significato, si viene a introdurre un insieme di parametri, indipendente (nel suo complesso) dal sistema di riferimento (cartesiano o no): di qui l'importanza concettuale e la fecondità delle considerazioni che andremo svolgendo.

§ 2. — SISTEMI m-PLI. FORME DI GRADO m E FORME m VOLTE LINEARI. — Cominciamo col definire un *sistema d'ordine* m o *emmuplo*. Chiameremo così un sistema di numeri

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

che con una legge determinata corrispondono in modo biunivoco alle emmuple di numeri interi $i_1, i_2, \ldots, i_m$, ciascuna delle i potendo assumere tutti i valori interi da 1 ad n. Gli elementi di un sistema m-*plo* sono dunque in numero di n^m, chè tante sono le disposizioni con ripetizione di n numeri m ad m: non è necessario però che questi n^m elementi siano tutti diversi fra loro.

Un sistema formato da un solo numero (quindi rappresentato da una lettera senza indice) potrà esser considerato come un sistema di ordine zero. Un sistema semplice sarà l'insieme di n elementi, rappresentabile con la notazione

$$A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n):$$

tale, è per esempio, l'insieme delle 3 componenti di un vettore (qui $m = 1$, $n = 3$).

Un sistema doppio sarà del tipo

$$A_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

e sarà composto di n^2 elementi; e così via.

Un sistema d'ordine maggior d'uno si chiama *simmetrico*, se in esso tutti gli elementi che differiscono solo per l'ordine degli indici hanno lo stesso valore: p. es., nel caso di $m = 2$, se è $A_{ji} = A_{ij}$. Si dice invece *emisimmetrico* se, scambiando due indici fra loro, l'elemento cambia di segno e non di valore: sempre per $m = 2$, se si ha $A_{ij} = - A_{ji}$. n coefficienti u di una forma (1) lineare generica

$$\varphi = \sum_i^n u_i x_i$$

costituiscono un sistema semplice, anzi il più generale di questi, essendo manifestamente sempre possibile, date n quantità u_i, di pensarle assunte come coefficienti di una forma lineare φ.

Consideriamo invece una forma quadratica, che possiamo scrivere

$$\varphi = \sum_{ij}^{n} {}_1 A_{ij} x_i x_j ,$$

dove, la somma essendo estesa a tutte le *disposizioni* degli indici due a due, il prodotto di x_i con x_j figura due volte, l'una sotto la forma $x_i x_j$, l'altra sotto la forma $x_j x_i$: perciò il coefficiente di quel prodotto è $A_{ij} + A_{ji}$. Questo non si altera scambiando i con j, onde si riconosce che i coefficienti di una forma quadratica costituiscono un sistema doppio *simmetrico* (qui pure il più generale possibile). Ma, per individuare un sistema doppio generico (non simmetrico) mediante i coefficienti di una forma, non basta più una quadrica nelle variabili indipendenti x. Occorre ricorrere a due diverse ennuple di variabili indipendenti, per es., le coordinate x ed x' di due punti non aventi a priori alcun legame, e formare l'espressione (*forma bilineare*)

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ij} A_{ij} x_i x'_j$$

che è lineare così rispetto alle x, come rispetto alle x'; i coefficienti di questa forma sono proprio le A_{ij}, del tutto arbitrarie.

Più in generale, si riconosce facilmente che un sistema *m-plo* generico si può ritenere individuato da una forma plurilineare in m gruppi di variabili, mentre i coefficienti di una forma di grado m costituiscono il più generale sistema *m-plo simmetrico*.

§ 3. — INVARIANZA, COVARIANZA E CONTRAVARIANZA DI UN SISTEMA SEMPLICE RISPETTO ALLE TRASFORMAZIONI LINEARI. VARIABILI DUALI. — Incominciamo ora lo studio delle leggi di trasforma-

---

(1) Si chiama forma, rispetto a dati argomenti, un polinomio omogeneo rispetto a quegli argomenti, per es. le variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

zione dei sistemi; limitandoci in primo luogo a un cambiamento *lineare* di variabili e a un sistema semplice $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Supporremo cioè che dalle variabili x si passi alle nuove variabili $\bar{x}$, e da queste alle antiche, per mezzo delle formule

$$x_i = \sum_1^n {}_k\, c_{ik}\, \bar{x}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) ; \qquad [5]$$

$$\bar{x}_i = \sum_1^n {}_k\, c^{ki}\, x_k , \qquad [5']$$

dove le c sono coefficienti costanti arbitrari, il cui determinante non è nullo: la seconda formula è naturalmente ricavata dalla prima mediante la regola di Cramer, sì che c^{ki} rappresenta l'elemento reciproco di c_{ki} (cfr. Cap. III, § 10).

L'ipotesi più ovvia è che le u siano funzioni del posto, le quali si trasformino per *invarianza* (v. § 1).

Un caso, un po' meno semplice, ma molto notevole, si ha supponendo che le u si trasformino secondo la stessa legge delle coordinate, e in tal caso le u si diranno *contravarianti*. Le coordinate stesse formano, in particolare, un sistema semplice contravariante.

Supponiamo invece che le u siano i coefficienti d'una forma lineare

$$\varphi = \sum_1^n {}_i\, u_i\, x_i$$

e che la φ si trasformi per invarianza, cioè sostituendo alle x le loro espressioni [5], con che la φ si presenta come forma lineare anche nelle nuove variabili $\bar{x}$. Conveniamo di assumere come trasformate $\bar{u}$ delle u, i coefficienti di questa nuova forma; diremo allora che le u formano un sistema *covariante*.

Esplicitando avremo

$$\varphi = \sum_1^n {}_i\, u_i \sum_1^n {}_k\, c_{ik}\, \bar{x}_k = \sum_1^n {}_{ik}\, c_{ik}\, u_i\, \bar{x}_k = \sum_1^n {}_k\, \bar{x}_k \sum_1^n {}_i\, c_{ik}\, u_i .$$

I nuovi coefficienti sono dunque

$$\bar{u}_k = \sum_1^n {}_i\, c_{ik}\, u_i .$$

Scambiando (per uniformarsi alla [5']) gli indici i e k, si ha

$$\bar{u}_i = \sum_1^n {}_k\, c_{ki}\, u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

che esprime la legge di covarianza.

Anche qui giova naturalmente associare le formule equivalenti, che si ottengono risolvendo rispetto agli elementi primitivi u, e sono fornite dal solito algoritmo (di Cramer). Scrivendole per prime, con che si tiene ordine corrispondente a quello delle [5], [5'], si ha in definitiva *la legge di covarianza espressa dai due gruppi di formule equivalenti:*

$$u_i = \sum_1^n {}_k\, c^{ik}\, \bar{u}_k, \tag{6}$$

$$\bar{u}_i = \sum_1^n {}_k\, c_{ki}\, u_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6'}$$

Considereremo spesso, assieme alle variabili x (che si chiamano anche variabili *puntuali*) un sistema di variabili covarianti u (dette *duali*): le formule [5] e [6] forniscono il modo di comportarsi delle une e delle altre in un cambiamento lineare di variabili.

Per interpretare geometricamente le variabili duali, fissiamo l'attenzione sul caso $n = 4$, in cui x_1, x_2, x_3, x_4 si possono risguardare come coordinate cartesiane (omogenee) dei punti dello spazio. Un piano ha un'equazione del tipo

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \tag{7}$$

e i coefficienti u_1, u_2, u_3, u_4 si dicono, come è noto, le coordinate (plückeriane) del piano. Ora, dato il significato geometrico della [7], il suo primo membro deve essere invariante (a meno di un fattore, inessenziale, essendo le coordinate omogenee) e quindi le coordinate plückeriane u si debbono trasformare per covarianza. Dalla nota legge di dualità della geometria proiettiva è venuto ad esse il nome di variabili duali. Analogamente per n qualsiasi.

§ 4. — Invarianza, covarianza e contravarianza di un sistema m-plo rispetto alle trasformazioni lineari. Sistemi misti o tensori. Carattere invariantivo del loro annullarsi. — Estendiamo ora le considerazioni del paragrafo precedente ai sistemi d'ordine qualunque, pur limitandoci sempre a considerare trasformazioni lineari del tipo [5], [5']. Definiamo cioè i sistemi misti, di cui sono casi particolari quelli covarianti e quelli contravarianti.

Consideriamo m n-ple di variabili puntuali (cioè m punti), e distinguiamo con un indice in alto il numero d'ordine della n-pla. Avremo complessivamente gli argomenti

$$\begin{array}{l} x_1^1 \ , x_2^1 \ , \ \ldots, \ x_n^1 \ ; \\ x_1^2 \ , x_2^2 \ , \ \ldots, \ x_n^2 \ ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_1^m , \ x_2^m \ , \ \ldots, \ x_n^m \ . \end{array}$$

Consideriamo anche un certo numero μ di n-ple di variabili duali

$$\begin{array}{l} u_1^1 , u_1^1 \ , \ \ldots, \ u_n^1 \ ; \\ u_1^2 , u_2^2 \ , \ \ldots, \ u_n^2 \ ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u_1^\mu , \ u_2^\mu \ , \ \ldots, \ u_n^\mu \ . \end{array}$$

Formiamo una forma plurilineare F in tutte queste variabili, i cui termini cioè contengano come fattore un elemento di ciascuna n-pla. I relativi coefficienti, *a priori* completamente arbitrari, costituiranno un sistema generico, d'ordine $m + \mu$. Scriveremo in basso gli indici corrispondenti alle x, in alto quelli corrispondenti alle u, e avremo in conformità

$$F = \sum_{i_1 \ldots i_m j_1 \ldots j_\mu}^{1 \ldots n} A_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} \, x_{i_1}^1 \ldots x_{i_m}^m \, u_{j_1}^1 \ldots u_{j_\mu}^\mu \ . \qquad [8]$$

Ora, trasformando le x secondo la legge di contravarianza, le u secondo quella di covarianza e sostituendo queste espressioni nella [8] (cioè trasformando la F per invarianza), si otterrà una forma plurilineare nelle nuove variabili $\bar{x}$, $\bar{u}$: assumiamo come trasformate delle A i coefficienti $\bar{A}$ di questa nuova forma. Diremo allora che le A

costituiscono un *tensore* o *sistema misto*, *covariante* rispetto agli indici scritti in basso, *contravariante* rispetto a quelli scritti in alto. Potrebbe in particolare esser nullo m o μ, mancando in conformità nella F le variabili puntuali, ovvero quelle duali: allora il sistema dei coefficienti è puramente contravariante se le variabili della F sono tutte covarianti, e puramente covariante nel caso contrario.

Il caso del sistema semplice rientra subito in questa definizione: difatti la F diviene in tal caso la φ del § precedente, e, se la consideriamo lineare nelle x, troviamo che i coefficienti u, secondo la definizione data or ora, debbono chiamarsi covarianti, se invece la risguardiamo come lineare nelle u, concludiamo che le x formano un sistema contravariante, concordemente a quanto avevamo prima stabilito.

Un tensore covariante, contravariante o misto, avente complessivamente $m + \mu$ indici, si dice di *rango* $m + \mu$; un sistema semplice, covariante o contravariante — cioè un tensore di rango uno — si chiama anche *vettore*, e i suoi elementi si chiamano componenti covarianti o rispettivamente contravarianti del vettore.

Si potrebbe, come si è fatto nel § precedente per giungere alle [6], [6'], trovare le formule generali di trasformazione dei sistemi misti (e quindi, in particolare, di quelli contravarianti e di quelli covarianti): noi non avremo bisogno nel seguito di tali formule poichè ricorreremo sempre alla definizione ora data; ma pure, a titolo d'esempio, vogliamo stabilirle e scriverle distesamente per il caso del sistema misto più semplice cioè con un solo indice di covarianza e uno di contravarianza.

Consideriamo perciò la forma bilineare

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ij} A_i^j x_i u_j$$

e trasformiamola per invarianza. Ricordando le [5] e [6] abbiamo,

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ij} A_i^j \sum_{1}^{n}{}_{k} c_{ik} \bar{x}_k \sum_{1}^{n}{}_{h} c^{jh} \bar{u}_h = \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} A_i^j c_{ik} c^{jh} \bar{x}_k u_h =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{hk} \bar{x}_k \bar{u}_h \sum_{1}^{n}{}_{ij} A_i^j c_{ik} c^{jh} .$$

I coefficienti di questa nuova forma sono

$$\bar{A}_k^h = \sum_{1}^{n}{}_{ij} A_i^j c_{ik} c^{jh} , \qquad [9]$$

e si ha qui la legge di trasformazione del sistema misto a due indici. Si troverebbe in modo analogo, per il sistema misto più generale,

$$\bar{A}^{j_1 \dots j_\mu}_{i_1 \dots i_m} = \sum_{k_1 \dots k_m h_1 \dots h_\mu}^{1 \dots n} A^{h_1 \dots h_\mu}_{k_1 \dots k_m} c_{k_1 i_1} \dots c_{k_m i_m} c^{h_1 j_1} \dots c^{h_\mu j_\mu}. \quad [10]$$

Dal punto di vista mnemonico, aggiungeremo che, ricordando le formule di trasformazione delle x e delle u, si ricordano facilmente anche quelle di un tensore qualsivoglia: esse sono difatti sempre lineari, e i coefficienti sono formati con le c in modo analogo a quelli delle [5] e [6]: ad ogni indice di covarianza corrisponde una c con gli indici in basso, a ogni indice di contravarianza una c con gli indici in alto. Nelle formule inverse ha luogo il contrario.

Riassumendo: *si chiama* COVARIANTE m-PLO *un sistema* m-plo *che si trasforma come i coefficienti d'una forma plurilineare nelle variabili* PUNTUALI; CONTRAVARIANTE m-PLO *uno che si trasforma come i coefficienti di una forma plurilineare nelle variabili* DUALI; *più generalmente* SISTEMA MISTO *o* TENSORE *uno che si trasforma come i coefficienti d'una forma plurilineare nelle variabili* PUNTUALI *e* DUALI (*rimanendo inclusi in questo come casi particolari anche i sistemi puramente covarianti o puramente contravarianti*).

Gli indici di contravarianza si scrivono generalmente in alto, quelli di covarianza in basso: tuttavia per le variabili x si fa eccezione designandole secondo la consuetudine con $x_1, x_2, \dots, x_n$, apponendo cioè l'indice in basso, sebbene si tratti di un sistema contravariante di fronte alle trasformazioni lineari, di cui ci stiamo ora occupando.

Chiuderemo con una osservazione altrettanto ovvia quanto fondamentale dovunque si fa intervenire la nozione di tensore. Si tratta del fatto che se, con referenza ad un certo sistema di variabili, si annullano tutti gli elementi di un tensore, lo stesso segue necessariamente per gli elementi trasformati, in corrispondenza ad un qualsiasi cambiamento (lineare) di variabili. Ciò risulta immediatamente dall'annullarsi identico della forma invariante F, in forza dell'ipotesi.

§ 5. — SISTEMI DOPPI SIMMETRICI. — Poichè avremo occasione, nel seguito, di trattare un notevole sistema covariante doppio simmetrico, vogliamo qui presentare alcune proprietà dei sistemi di tale specie. Siano

$$a_{ik} = a_{ki} \quad [11]$$

gli elementi di un tal sistema; la loro covarianza sarà espressa dal fatto, che la forma bilineare

$$F(x \mid x') = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, x'_k \qquad [12]$$

è invariante in qualsiasi trasformazione lineare che muti le x e le x' in altrettante variabili $\bar{x}$, $\bar{x}'$.

Anzitutto faremo vedere che in un tal cambiamento di variabili la simmetria si conserva, cioè che

$$\bar{a}_{ik} = \bar{a}_{ki} \,. \qquad [13]$$

Difatti, se nella forma bilineare [12] si scambiano le variabili x, x', si ottiene

$$F(x' \mid x) = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, x_k\, x'_i$$

cioè (poichè il secondo membro non differisce da quello della [12] che per l'inessenziale scambio delle lettere i e k)

$$F(x' \mid x) = F(x \mid x') \,. \qquad [11']$$

Viceversa, se ha luogo tale relazione, se ne conclude (ripetendo il ragionamento in senso inverso) che vale anche la [11].

Quindi, la condizione di simmetria [11] è perfettamente equivalente alla [11']. Ora, sotto questo aspetto, si riconosce facilmente che essa è invariante, perchè, in seguito al cambiamento di variabili, designando per brevità

$$F\left\{x(\bar{x}) \mid x(\bar{x}')\right\}$$

con

$$\bar{F}(\bar{x} \mid \bar{x}') ,$$

la [11'] si muta nella eguaglianza

$$\bar{F}(\bar{x}' \mid \bar{x}) = \bar{F}(\bar{x} \mid \bar{x}')$$

che, come si è visto or ora, è equivalente alla [13].

Si proverebbe nello stesso modo che, se un sistema doppio *contravariante* è simmetrico rispetto a un sistema di coordinate, resta tale dopo qualsiasi cambiamento lineare di variabili; invece per un sistema misto a_i^h questa proprietà non sussiste. Anche per sistemi doppi, covarianti o contravarianti, *emisimmetrici*, si può dimostrare, in modo analogo, l'invarianza della proprietà di emisimmetria.

Possiamo ora giovarci della proprietà illustrata testè, per far vedere come la covarianza di un sistema doppio *simmetrico* possa stabilirsi ricorrendo, anzichè alla forma bilineare (12), alla forma quadratica

$$\varphi(x) = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} x_i x_k . \qquad [14]$$

Se si opera il cambiamento di variabili sulla $\varphi(x)$, questa diverrà ovviamente una forma quadratica nelle $\bar{x}$, che scriveremo

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \sum_{1}^{n}{}_{ik} \bar{a}_{ik} \bar{x}_i \bar{x}_k . \qquad [14']$$

Mostreremo che i suoi coefficienti $\bar{a}_{ik}$ sono i trasformati per covarianza delle a_{ik}, cioè sono gli stessi che si otterrebbero operando il cambiamento di variabili sulla $F(x \mid x')$. Difatti dalla $F(x \mid x')$ si ottiene la $\varphi(x)$ ponendovi prima le x' uguali alle x, cioè

$$\varphi(x) = F(x \mid x) ,$$

e da questa, con il solito cambiamento di variabili, si ottiene poi la $\varphi(\bar{x})$, la quale pertanto proviene da $F(x \mid x')$ mediante la successiva applicazione delle due operazioni

$$x'_i = x_i \qquad , \qquad [a]$$

$$x_i = x_i(\bar{x}) . \qquad [b]$$

Ma si otterrà manifestamente lo stesso risultato applicando le due operazioni in ordine inverso, cioè passando prima dalla $F(x \mid x')$ alla $F(\bar{x} \mid \bar{x}')$, (i cui coefficienti sono, per definizione i trasformati per covarianza delle a_{ik}) e poi, con l'operazione [a], la quale implica $\bar{x}' = \bar{x}$ e, attesa la simmetria, non altera i coefficienti, alla $\bar{\varphi}(\bar{x})$: i coefficienti di questa sono dunque i trasformati per covarianza delle a_{ik}. Tutto il ragionamento non potrebbe applicarsi se il sistema delle a_{ik} non fosse simmetrico poichè in tal caso una forma quadratica non basterebbe a individuarlo (v. § 2).

§ 6. — n-PLE DI SISTEMI COVARIANTI E CONTRAVARIANTI SEMPLICI. TEOREMA SULLE n-PLE RECIPROCHE. — Vogliamo ora dimostrare un lemma nel quale avremo da considerare (non un solo sistema semplice, ma) n sistemi covarianti semplici, cioè una n-pla di sistemi siffatti, e parimenti una n-pla di sistemi contravarianti semplici. Dovremo perciò contrassegnare gli elementi in questione con due indici, l'uno indicante il numero d'ordine del sistema nell'n-pla, l'altro (che sarà un indice di covarianza o di contravarianza) indicante il numero d'ordine dell'elemento nel sistema. Consideriamo dunque l'n-pla di sistemi covarianti semplici

$$\lambda_{\alpha|i} \qquad (\alpha, i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

dove α rappresenta il numero ordinale del sistema (e non è quindi indice di covarianza nè di contravarianza); supponiamo inoltre che il determinante delle λ non sia nullo (o, come si dice, che l'n-pla sia indipendente). In tale ipotesi, ad ogni elemento $\lambda_{\alpha|i}$ corrisponderà un elemento reciproco (il suo complemento algebrico diviso per il valore del determinante), che indicheremo con

$$\lambda_\alpha^i \qquad (\alpha, i = 1, 2, \ldots, n): \tag{15'}$$

in un cambiamento (lineare) di variabili le $\lambda_{\alpha|i}$ si muteranno secondo la legge di covarianza, e saranno denotate con $\bar{\lambda}_{\alpha|i}$: assumeremo come trasformate delle λ_α^i gli elementi reciproci $\bar{\lambda}_\alpha^i$ delle $\bar{\lambda}_{\alpha|i}$.

Ebbene, dimostreremo che questa legge coincide con la contravarianza, cioè, che dando ad α i valori 1, 2, ..., n, le λ_α^i costituiscono altrettanti sistemi contravarianti semplici; brevemente, che l'n-pla reciproca è una n-pla di sistemi contravarianti. È questa la ragione per cui l'indice i è stato posto in alto.

L'ipotesi della covarianza della n-pla [15] significa che le n forme lineari

$$\tau_\alpha = \sum_1^n{}_i \lambda_{\alpha|i} x_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

sono invarianti. Ciò che si deve dimostrare è che lo sono anche le n forme lineari

$$\psi_\alpha = \sum_1^n{}_i \lambda_\alpha^{\,i} u_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

cioè che

$$\bar{\psi}_\alpha - \psi_\alpha = \sum_1^n{}_i \bar{\lambda}_\alpha^{\,i} \bar{u}_i - \sum_1^n{}_i \lambda_\alpha^{\,i} u_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \qquad [16]$$

qualunque siano le u. Ora, queste espressioni sono lineari nelle u (chè le $\bar{u}$ non sono che combinazioni lineari di queste), cioè ciascuna di esse è del tipo

$$\sum_1^n{}_i \xi^i u_i .$$

Per dimostrare che è identicamente nulla (cioè che tutte le ξ^i sono zero) basterà dimostrare che si annulla dando alle u n *distinti* sistemi di valori numerici, poichè si avranno allora n equazioni lineari omogenee nelle ξ^i, il cui determinante non è nullo (ciò si intendeva dire poc'anzi con l'aggettivo *distinti*). Diamo alle u i valori

$$\lambda_{\beta\,|\,i} \qquad (\beta, i = 1, 2, \ldots, n)$$

e quindi, in virtù della covarianza di queste quantità, alle $\bar{u}$ i valori $\bar{\lambda}_{\beta\,|\,i}$. Se ricordiamo poi una proprietà dei determinanti (v. Cap. prec., § 10 in nota, form. [β]) e sostituiamo nella [16], abbiamo

$$\bar{\psi}_\alpha - \psi_\alpha = \delta_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

È così dimostrato quanto si voleva.

§ 6. — Addizione dei tensori. — Siano dati due tensori (generalmente misti) della stessa specie, cioè aventi lo stesso numero di indici di covarianza, e lo stesso numero di indici di contravarianza (in particolare, due sistemi covarianti, o due contravarianti, dello stesso ordine):

$$A_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} \quad , \quad B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} \; ,$$

Sommando gli elementi corrispondenti (cioè quelli che portano gli stessi indici) si ottiene un nuovo sistema, il cui elemento generico è

$$A_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} + B_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} \; ,$$

dipendente dallo stesso numero di indici: dimostreremo che questo sistema è ancora un tensore, covariante rispetto agli indici di covarianza dei sistemi dati, contravariante rispetto a quelli di contravarianza, talchè si può indicarne, in base alla notazione adottata, l'elemento generico ora scritto con

$$C_{i_1 \ldots i_m}^{j_1 \ldots j_\mu} \; .$$

Per semplicità di scrittura dimostriamo la cosa riferendoci al caso di un solo indice di covarianza e uno di contravarianza: il ragionamento è identico nel caso generale. L'ipotesi è dunque che siano invarianti le forme

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \, A_i^j \, x_i \, u_j \; ,$$

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \, B_i^j \, x_i \, u_j \; .$$

Sarà perciò invariante anche la somma

$$F + \Phi = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \left(A_i^j + B_i^j \right) x_i \, u_j = \sum_{1}^{n}{}_{ij} \, C_i^j \, x_i \, u_j \; ,$$

il che è quanto dire che il sistema

$$C_i^j = A_i^j + B_i^j$$

è covariante rispetto all'indice scritto in basso, contravariante rispetto a quello scritto in alto.

Si dice che il tensore C è la *somma* dei due tensori A e B.

§ 8. — Moltiplicazione dei tensori. — Definiamo ora il *prodotto* di due tensori. Siano questi qualunque, generalmente misti, ed abbiano l'uno m indici di covarianza e μ di contravarianza, l'altro m' e μ' rispettivamente:

$$A_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_\mu} \quad , \quad B_{i_1 \dots i_{m'}}^{j_1 \dots j_{\mu'}} .$$

Formiamo il sistema avente per elemento generico il prodotto di un qualunque elemento A per uno qualunque B: l'elemento così formato verrà a dipendere da $m + \mu + m' + \mu'$ indici, onde il rango del sistema *prodotto* sarà la somma dei ranghi dei sistemi dati. Dimostreremo che esso è un *tensore* avente per indici di covarianza gli $m + m'$ indici di covarianza dei sistemi dati, e per indici di contravarianza i $\mu + \mu'$ indici di contravarianza di quelli: per semplicità di scrittura ci riferiremo, come precedentemente, al caso di due soli indici.

Le due forme invarianti per ipotesi siano

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ih} A_i^h \, x_i \, u_h ,$$

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{jk} B_j^k \, x'_j \, u'_k :$$

il prodotto di queste due forme, invariante in conseguenza dell'invarianza di esse, è

$$F\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{ih,jk} A_i^h \, B_j^k \, x_i \, x'_j \, u_h \, u'_k ,$$

ovvero, posto

$$A_i^h \, B_j^k = C_{ij}^{hk} ,$$

$$F\Phi = \sum_{1}^{n}{}_{ihjk} C_{ij}^{hk} \, x_i \, x'_j \, u_h \, u'_k .$$

L'invarianza di questa forma significa che gli indici i e j apposti alla lettera C sono di covarianza, h e k di contravarianza, il che prova l'asserto. Lo stesso nel caso generale.

§ 9. — Saturazione degli indici. — Definiremo ora l'operazione di *saturazione*, per cui da un sistema misto qualunque si passa ad un altro sistema avente un indice di covarianza ed uno di contravarianza in meno.

Per comodità di scrittura, metteremo in evidenza uno solo fra gli indici di covarianza, ed uno solo fra quelli di contravarianza, del tensore dato, sostituendo gli altri con dei puntini; scriveremo cioè

$$A_{\cdots r}^{\cdots s}.$$

Formiamo ora il sistema

$$B_{\cdots}^{\cdots} = \sum_1^n {}_r\, A_{\cdots r}^{\cdots r},$$

il quale dipenderà da tutti gli indici, meno i due posti in evidenza: si dice allora che quei due indici sono stati *saturati*. Dimostriamo che il sistema così ottenuto è ancora un tensore, il quale ha gli stessi indici di covarianza e gli stessi indici di contravarianza del dato, salvo, beninteso, la coppia saturata. Ci limiteremo, al solito, per semplicità di scrittura, ad un caso particolare, ma non differente in sostanza da quello generale. Sia dunque invariante la forma

$$F = \sum_1^n {}_{ihrs}\, A_{ir}^{hs}\, x_i\, x'_r\, u_h\, u'_s$$

qualunque siano le variabili x, x', u, u' (purchè puntuali le prime due, duali le altre). In virtù di questa arbitrarietà, potremo porre, in luogo delle u'_s, n distinti sistemi di quantità covarianti, che indicheremo con $\lambda_{\alpha|s}$, secondo la notazione [15] del § 6; al posto delle x'_r potremo poi porre le λ_α^r, elementi reciproci di quelle, e perciò contravarianti (§ 5). Avremo così le n forme lineari

$$F_\alpha = \sum_1^n {}_{ihrs}\, A_{ir}^{hs}\, x_i\, u_h\, \lambda_\alpha^r\, \lambda_{\alpha|s} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

tutte invarianti. Sarà pertanto invariante anche la loro somma G. Scriviamola, e trasformiamola un poco, tenendo presente la proprietà fondamentale degli elementi reciproci. Avremo

$$G = \sum_1^n{}_\alpha F_\alpha = \sum_1^n{}_{ihrs} A_{ir}^{hs} x_i u_h \sum_1^n{}_\alpha \lambda_\alpha^r \lambda_{\alpha|s} = \sum_1^n{}_{ihrs} A_{ir}^{hs} x_i u_h \delta_r^s ;$$

ricordiamo che $\delta_r^s = 0$ per $r \neq s$, e $\delta_r^s = 1$ per $r = s$: perciò nella sommatoria spariranno tutti i termini in cui $r \neq s$, e resterà

$$G = \sum_1^n{}_{ihr} A_{ir}^{hr} x_i u_h = \sum_1^n{}_{ih} x_i u_h \sum_1^n{}_r A_{ir}^{hr} = \sum_1^n{}_{ih} x_i u_h B_i^h .$$

L'invarianza di questa forma dimostra, come si voleva, che il sistema

$$B_i^h = \sum_1^n{}_r A_{ir}^{hr}$$

è un tensore covariante rispetto a i, contravariante rispetto ad h.

L'operazione di saturazione si può evidentemente ripetere più volte, saturando successivamente diverse coppie di indici, sì che, per es., dal sistema

$$A_{ijr}^{hks}$$

si passa, saturando due coppie, al tensore

$$B_i^h = \sum_1^n{}_{jr} A_{ijr}^{hjr} .$$

Se si satura l'unica coppia di indici di un sistema doppio misto, si ottiene un invariante

$$A = \sum_1^n{}_i A_i^i .$$

§ 10. — Composizione dei tensori. — Combinando l'operazione di *moltiplicazione* di due tensori con quella di *saturazione*, si ottiene l'operazione detta *composizione* di due tensori. Scriviamo i due sistemi sotto la forma abbreviata

$$A_{\dots r}^{\dots} \qquad , \; B_{\dots}^{\dots s}$$

in cui si è messo in evidenza un solo indice di covarianza per l'uno, uno di contravarianza per l'altro.

Si dice *composto* di quei due il tensore

$$C^{\cdots}_{\cdots} = \sum_1^n {}_r A^{\cdots}_{\cdots r} B^{\cdots r}_{\cdots}$$

i cui indici di covarianza sono quelli di A (tranne r) e tutti quelli di B, quelli di contravarianza sono tutti quelli di A, e quelli di B (tranne s).

Che si tratti effettivamente di un tensore si riconosce subito, considerando che il sistema C è ottenuto per saturazione (dei due indici r ed s) dal sistema

$$\Gamma^{\cdots s}_{\cdots r} = A^{\cdots}_{\cdots r} B^{\cdots s}_{\cdots} ,$$

e questo per prodotto dai due sistemi dati. Così, p. es., componendo i sistemi

$$A^h_{ir} \quad , \quad B^{ks}_j$$

rispetto agli indici r ed s, si ottiene

$$C^{hk}_{ij} = \sum_1^n {}_r A^h_{ir} B^{kr}_j .$$

§ 11. — Cambiamenti generali di variabili. Sistemi m-pli a elementi funzioni del posto. Prima definizione generale di tensore. Tensori tipici di rango 1. — Finora abbiamo considerato solo cambiamenti *lineari* di variabili, e abbiamo definito, riferendoci ad essi, la covarianza, la contravarianza e le operazioni fondamentali sui sistemi: estenderemo ora queste definizioni ai cambiamenti quali si vogliono di variabili.

Supponiamo dunque che le formule di trasformazione, invece delle [5], siano

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \qquad [17]$$

le f_i designando funzioni arbitrarie, salvo le restrizioni qualitative di derivabilità, ecc., che verranno tacitamente imposte ogni qualvolta occorra, e la condizione che la trasformazione sia effettiva; cioè che le [17] siano risolubili rispetto alle $\bar{x}$ e si possano quindi presentare anche sotto la forma equivalente

$$\bar{x}_i = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad [17']$$

Alla trasformazione *generale* [17] resta subordinata una trasformazione *lineare* nei differenziali: difatti, posto

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} = c_{ik} \quad , \quad \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = c^{ki} \quad , \qquad [18]$$

si ha, differenziando le [17] e [17'] ,

$$dx_i = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k = \sum_{1}^{n}{}_k c_{ik}\, d\bar{x}_k ; \qquad [19]$$

$$d\bar{x}_i = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_{1}^{n}{}_k c^{ki}\, dx_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [19']$$

Di queste formule, le seconde devono coincidere con quelle che si otterrebbero risolvendo le prime, epperò le c^{ki} non sono altro che gli elementi reciproci delle c_{ik}, il che giustifica la notazione con cui le abbiamo indicate [1].

---

(1) Ciò del resto si può verificare, anche direttamente, provando che le c^{ki} e le c_{ik} possiedono la proprietà fondamentale degli elementi reciproci. Difatti, se nelle [17] poniamo in luogo delle $\bar{x}$ le espressioni date dalle [17'] otteniamo altrettante identità. Deriviamone una generica rispetto a x_k, con la regola delle funzioni composte. Avremo

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_h} \frac{\partial \bar{x}_h}{\partial x_k} ;$$

ora, il primo membro è 0 o 1 secondochè $i \neq k$ o $i = k$; nel secondo possiamo introdurre le posizioni [14], ottenendo

$$\delta^i_k = \sum_{1}^{n}{}_k c_{ih}\, c^{kh} \quad ,$$

che è quanto si voleva provare.

Le [19], [19'], per la loro analogia con le [5], [5'], ci permettono di estendere subito le considerazioni precedenti ai sistemi m-upli i cui elementi sono *funzioni* qualisivogliono *del posto* (cioè delle variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Diremo che un sistema m-uplo a elementi funzioni del posto costituisce un tensore covariante o contravariante o misto, rispetto ad una generica trasformazione [17], quando esso è tale (*in ogni posto* del campo che si considera) rispetto alla trasformazione lineare [19], [19'] fra i differenziali delle antiche e delle nuove variabili.

Per conseguenza *i differenziali delle variabili indipendenti forniscono il tipo del sistema contravariante semplice.* Vediamo invece qual'è il tipo del sistema covariante semplice.

A § 3 vi siamo pervenuti introducendo le variabili duali u_i, definite formalmente come coefficienti d'una forma lineare nelle variabili x. A queste vanno ora sostituiti i loro differenziali dx; sicchè conviene partirsi da un generico pfaffiano

$$\psi = \sum_1^n {}_i \, u_i \, dx_i$$

e considerarlo invariante di fronte a cambiamenti *qualisivogliono* delle variabili x. I coefficienti u_i si risguardano quali funzioni del posto e quindi, inizialmente, delle x. Quando si eseguisce la trasformazione [17], la dipendenza dal posto va invece riferita alle nuove variabili $\bar{x}$. Sostituendo in ψ ai dx_i le loro espressioni [19], si constata in primo luogo — cosa evidente data la linearità — che si ha ancora un pfaffiano nelle nuove variabili $\bar{x}$. Più precisamente risulta

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_i u_i \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k = \sum_{1}^{n}{}_{ik} u_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} d\bar{x}_k = \sum_{1}^{n}{}_k d\bar{x}_k \sum_{1}^{n}{}_i u_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} .$$

I coefficienti dei nuovi differenziali $d\bar{x}_k$, cioè gli elementi $\bar{u}_k$ del sistema trasformato dei coefficienti, u, sono pertanto

$$\bar{u}_k = \sum_{1}^{n}{}_i u_i \frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Scambiando i con k e adottando la notazione [18], abbiamo per i coefficienti di un pfaffiano la legge di trasformazione espressa dalle formule

$$\bar{u}_i = \sum_{1}^{n}{}_k c_{ki}\, u_k$$

che coincidono identicamente colle [6′]. Completando colle formule inverse e riponendo per le c_{ki}, c^{ik} i loro valori [18], abbiamo la forma esplicita

$$u_i = \sum_{1}^{n}{}_k \bar{u}_k \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}, \tag{20}$$

$$\bar{u}_i = \sum_{1}^{n}{}_k u_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{20'}$$

delle *formule di trasformazione dei coefficienti di un pfaffiano (invariante), i quali costituiscono il tipo del sistema covariante semplice.*

Supponiamo in particolare che il pfaffiano (invariante) sia il differenziale esatto di una funzione u del posto, invariante, vale a dire tale che la sua espressione mediante le $\bar{x}$ si ottenga da quella mediante le x sostituendo queste con le $f_i(\bar{x})$, e viceversa, talchè la scrittura

$$u(x) = u(\bar{x})$$

è un'identità ogniqualvolta si sostituiscano in essa le x (o le $\bar{x}$) con le loro espressioni [17] (o [17′]).

I coefficienti u_i, $\bar{u}_i$ del pfaffiano sono rispettivamente $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ovvero $\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}_i}$ secondo che il du si pensa espresso per le x o per le $\bar{x}$.

Ne consegue che *le derivate di una funzione invariante si trasformano, a norma delle* [20], [20′], *per covarianza.*

Viceversa, per procurarsi le formule di covarianza ([20] o [20′]) relative ad un sistema semplice, senza ricavarsele *ex novo* o saperle a memoria, il criterio mnemonico più semplice è quello di pensare per un momento gli elementi del sistema generico di cui si tratta come derivate di una medesima funzione e applicare la regola di derivazione delle funzioni composte. Si è allora condotti automaticamente alle [20] o [20′] secondo che si parte da un elemento primitivo o da uno trasformato.

La diretta e immediata trasformazione dei differenziali fornisce d'altra parte, come abbiamo visto, le [19] e [19′], che servono di schema per la trasformazione di un generico sistema contravariante semplice, sostituendovi ai dx_i gli elementi primitivi ξ^i e ai $d\bar{x}_k$ gli elementi trasformati $\bar{\xi}^k$.

Riassumendo, i differenziali delle variabili indipendenti e le derivate di una medesima funzione danno luogo agli schemi tipici delle formule di trasformazione per i sistemi semplici, rispettivamente contravarianti e covarianti.

§ 12. — Seconda definizione generale di tensore a elementi funzioni del posto. Esempi. — Sia data una forma plurilineare rispetto a quantesivogliono serie di variabili contravarianti (cioè che si trasformano come i dx_i) e a quantesivogliono serie di variabili covarianti (cioè che si trasformano come le $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$): si risguardino i coefficienti come funzioni del posto, e la forma, in ogni singolo posto, come invariante. È chiaro, in base alla definizione del § prec., che i coefficienti formano un *tensore misto*, i cui indici di covarianza sono quelli relativi alle variabili contravarianti, e viceversa. Reciprocamente ogni tensore, nel senso della prima definizione, si identifica coi coefficienti di una siffatta forma plurilineare. Le due definizioni sono dunque perfettamente equivalenti.

Dopo ciò tutto è analogo a quanto si è detto nel § 4, e perciò ci dispensiamo da ulteriori dettagli: vogliamo tuttavia rilevare ancora una volta esplicitamente quanto fu notato in fine del § 4 circa il *carattere invariantivo dell'annullarsi di un tensore* (cioè di tutti i suoi elementi). La proprietà sussiste in generale, di fronte a cambiamenti di variabili di natura qualsiasi. In altri termini, se si pongono eguali a zero *tutti* gli elementi di un generico tensore

$$A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{h_1 h_2 \dots h_\mu},$$

riferiti ad un particolare sistema di variabili, si può star sicuri che le equazioni

$$A^{h_1 h_2 \dots h_\mu}_{i_1 i_2 \dots i_m} = 0 \quad (i_1, i_2 \dots i_m \,;\, h_1, h_2 \dots h_\mu)$$

seguitano a sussistere comunque si cambino le variabili.

Chiuderemo questo § con due esempi di tensori che si presentano assai frequentemente.

Consideriamo in primo luogo un operatore lineare

$$Af = \sum_{i}^{n}{}_{1} A^i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

i cui coefficienti A^i siano assegnate funzioni del posto. Trattiamo l'operatore come *invariante*. In tal caso, poichè le $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono covarianti, i coefficienti A^i risultano, per definizione, contravarianti, e debbono quindi trasformarsi a norma delle [19'], risultandone per i coefficienti trasformati le espressioni

$$\overline{A}^i = \sum_{k}^{n}{}_{1} A^k \frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x_k},$$

come sarebbe facile verificare direttamente.

Consideriamo poi una forma differenziale quadratica

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

che debba mantenersi invariante: i coefficienti a_{ik} (da pensarsi in generale funzioni del posto) saranno allora covarianti, e quindi le loro formule di trasformazione saranno

$$a_{ik} = \sum_{rs}^{n}{}_{1} \overline{a}_{rs} \frac{\partial \overline{x}_r}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{x}_s}{\partial x_k}, \tag{21}$$

ovvero (risolute rispetto agli elementi trasformati)

$$\bar{a}_{ik} = \sum_{rs}^{n} {}_{1} a_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_k}. \qquad [21']$$

§ 13. — Leggi di trasformazione più complesse, e scopo del calcolo differenziale assoluto. — In un cambiamento generico di variabili un sistema si trasforma, come abbiamo detto, in maniera dipendente dalla sua definizione: i casi esaminati finora sono i più semplici, ma possono presentarsene altri notevolmente più complessi dei quali vogliamo ora dare un esempio.

Abbiamo visto che il sistema (semplice) delle derivate prime u_i di una funzione invariante u è covariante: passiamo ora ad esaminare il sistema (doppio) delle derivate prime $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ di un sistema covariante semplice u_i; come caso particolare, se le u_i sono le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ di una medesima funzione u, veniamo ad includere la trasformazione delle derivate seconde di una funzione invariante.

Per trovare le formule di trasformazione di questo sistema, cioè le relazioni fra le $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j}$ e le $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, partiamo dalla formula di trasformazione delle u_i:

$$\bar{u}_i = \sum_{k}^{n} {}_{1} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} u_k$$

e deriviamola rispetto a $\bar{x}_j$, pensando nel secondo membro le u_k come funzioni delle $\bar{x}$ per il tramite delle x. Avremo

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} = \sum_{kh}^{n} {}_{1} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \sum_{k}^{n} {}_{1} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_i \, \partial \bar{x}_j} u_k . \qquad [22]$$

Se mancasse l'ultima sommatoria, la legge di trasformazione sarebbe la covarianza: invece la presenza delle derivate seconde delle x rispetto alle $\bar{x}$ mostra che il sistema che esaminiamo non è nè invariante, nè covariante, nè contravariante, nè misto, vale a dire *non* *è un tensore:* la sua legge di trasformazione è più complicata di quelle finora esaminate. Lo stesso avviene più generalmente per il sistema costituito dalle derivate di un tensore qualsiasi.

Poichè occorre frequentemente di considerare le derivate, rispetto alle variabili indipendenti, degli elementi di un tensore covariante, contravariante o misto, conviene, per evitare la complicazione ora accennata, sostituire ad esse alcune loro combinazioni lineari cosiffatte che, nelle formule di trasformazione, restino eliminati appunto quei termini che apportano la complicazione in discorso. È questo il compito del calcolo differenziale assoluto, il quale raggiunge lo scopo, come vedremo più innanzi, introducendo un elemento ausiliario: una forma differenziale quadratica invariante. Perciò dedichiamo intanto il capitolo seguente allo studio di questo importante elemento.-

CAPITOLO V.

Introduzione geometrica alla teoria delle forme differenziali quadratiche.

a) L'elemento lineare d'una superficie.

§ 1. — Equazioni parametriche di una superficie. — È noto dalla geometria analitica che cosa si intenda per equazioni parametriche d'una superficie: tuttavia vogliamo qui richiamare questa nozione, per presentare le formule in quell'aspetto che meglio conviene ai nostri scopi.

Rappresentiamo (come faremo in tutto questo capitolo) con y_1, y_2, y_3 le coordinate cartesiane dei punti dello spazio, riferiti a tre assi ortogonali. Consideriamo poi una superficie, o, più generalmente, un pezzo di superficie σ (al quale intenderemo limitate le considerazioni che seguono); e supponiamo che si sia stabilita, in modo qualunque, una corrispondenza biunivoca fra i punti di σ e le coppie di valori che si possono attribuire a due parametri x_1, x_2 entro un certo campo C (di un piano rappresentativo degli argomenti x_1, x_2; cfr. le generalità del Cap. I).

Ciò implica che i punti di σ e con essi le loro coordinate cartesiane y_ν siano funzioni ben determinate (e finite) di x_1, x_2 (nel campo C). Scriveremo in conformità

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2) \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{1}$$

ammettendo ulteriormente che le tre funzioni y_ν siano, in C, dotate di derivate continue, fino all'ordine che ci avverrà di considerare.

Ma questo comportamento delle funzioni non basta da solo ad assicurare che le [1] definiscono effettivamente una superficie, cioè che sussista la ammessa corrispondenza biunivoca fra C e i punti di una porzione di varietà a due dimensioni.

Potrebbe darsi p. es. che nelle [1] entrasse solo la somma $x_1 + x_2$, nel qual caso la dipendenza da *due* parametri sarebbe solo apparente, essendo uno solo di essi essenziale. Le [1] definirebbero in tale caso un arco di curva. Per escludere simili eventualità supporremo che due delle equazioni [1] siano (in C) risolubili rispetto a x_1, x_2, talchè, effettuando la risoluzione, e sostituendo i valori così trovati nella rimanente equazione, si possa ottenere una relazione e una sola fra y_1, y_2, y_3, cioè l'equazione di un'effettiva superficie.

Ciò equivale ad esigere, che la matrice funzionale delle [1] abbia la caratteristica 2. Allora le [1] rappresenteranno effettivamente le equazioni parametriche di un pezzo di superficie σ; e si potrebbe dimostrare che, limitando, se occorre, il campo C ad una sua parte conveniente Γ (intorno di un punto scelto ad arbitrio), la porzione di superficie che così rimane circoscritta è proprio tale che ad un suo punto qualsiasi corrisponde uno ed un solo sistema di valori dei parametri del campo Γ. Perciò, con questa limitazione qualitativa circa il campo — che considereremo sempre di tipo Γ — in cui si fanno variare i parametri x_1, x_2, è ben giustificato di chiamarli coordinate curvilinee sulla superficie σ, definita dalle [1].

Dando ad x_1 un valore costante, e facendo variare x_2, si ottengono tutti i punti di una linea, che diremo linea $x_1 = cost$, *o linea* x_2, o anche, più brevemente, 2 (perchè su di essa varia la sola x_2); analogamente definiremo le linee $x_2 = cost$, o *linee* x_1, ovvero anche soltanto 1, come quelle su cui varia la sola x_1. Così potremo pensare la nostra superficie (o regione di superficie) σ coperta di un doppio reticolato di linee (*linee coordinate*), tali che per ogni punto ne passano due, e due sole (una linea x_1 e una x_2).

§ 2. — Espressione del ds^2. — Fissiamo ora su σ due punti, P e P', infinitamente prossimi: le loro coordinate curvilinee siano in conformità

$$x_i\,, \quad x_i + dx_i \qquad (i = 1, 2)\,,$$

e, subordinatamente alle [1],

$$y_\nu\,, \quad y_\nu + dy_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3)\,,$$

le rispettive coordinate cartesiane.

Notiamo che, per assegnare un punto P di σ, si possono dare *arbitrariamente* (entro Γ) le due coordinate x_1, x_2; e così, per passare a P', i due incrementi dx_1, dx_2.

Le y sono definite dalle [1], sicchè i loro differenziali rimangono legati ai dx dalle

$$dy_\nu = \sum_{1}^{2}{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\, dx_i \qquad (\nu = 1, 2, 3)\,, \tag{2}$$

che si ottengono differenziando le [1].

Calcoliamo la distanza $PP' = ds$, o, perchè più immediato, il suo quadrato

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_\nu\, dy_\nu^2\,.$$

Sostituendo per i dy le [2], avremo

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_\nu \sum_{1}^{2}{}_{ik} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\, dx_i\, dx_k = \sum_{1}^{2}{}_{ik} dx_i\, dx_k \sum_{1}^{3}{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\,,$$

da cui, posto

$$a_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \tag{3}$$

(con che definiamo un importantissimo sistema doppio, simmetrico, di funzioni regolari delle x), risulta

$$ds^2 = \sum_{1}^{2}{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,. \tag{4}$$

Questa forma quadratica, che è, come vedremo, fondamentale per lo studio delle proprietà metriche delle nostra superficie, generalizza ovviamente l'espressione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

che dà, in coordinate cartesiane x, y, la distanza di due punti infinitamente vicini di un piano.

Mostreremo ora che la [4] è una forma *definita positiva*, cioè che non diviene mai nè nulla, nè negativa, qualunque siano i valori (reali e non nulli) che si attribuiscono ai dx. Che non divenga negativa, si vede subito, ricordando che essa non è che la somma dei quadrati dei dy, i quali sono sempre reali, se tali sono i dx. Perchè poi si annullasse, bisognerebbe che si annullassero tutti i dy, il che faremo vedere che non può essere, per uno spostamento effettivo (dx_1 e dx_2 non contemporaneamente nulli).

Infatti, proviamoci a supporre che sia

$$dy_1 = dy_2 = dy_3 = 0.$$

Queste si presentano, in base alle [2], come 3 equazioni (lineari) omogenee in dx_1, dx_2. Perchè due qualunque fossero soddisfatte da valori non nulli di queste variabili, bisognerebbe che fosse nullo il relativo determinante: da ciò concluderemmo, poichè la coppia di equazioni scelta è arbitraria, dover esser nulli tutti e tre i determinanti funzionali (del secondo ordine) delle y rispetto alle x, ciò che contraddice l'ipotesi che la matrice funzionale abbia caratteristica 2. Del resto, si poteva senz'altro applicare il teorema generale relativo ai sistemi lineari omogenei, secondo cui il numero delle soluzioni indipendenti è la differenza fra il numero delle incognite e la caratteristica della matrice dei coefficienti: nel caso nostro, $2 - 2 = 0$.

Dimostrato così che la forma quadratica di cui parliamo è definita, ne segue, in virtù di un noto teorema sulle forme quadratiche (1), che il determinante

$$a = \| a_{ik} \|$$

(1) Ecco il teorema. Sia

$$\varphi = \sum_{ik}^{n}{}_{1} a_{ik} x_i x_k$$

una forma quadratica ***definita***, in n variabili: dimostreremo che il suo discriminante a non può essere nullo.

Infatti, posto

$$y_i = \sum_{k}^{n}{}_{1} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la φ diviene

$$\varphi = \sum_{i}^{n}{}_{1} y_i x_i ;$$

formato coi coefficienti del ds^2 (detto *discriminante* della forma) è diverso da 0; anzi, quando si tratta, come nel caso nostro, di forme definite *positive*, risulta specificamente $a > 0$.

Un'ultima osservazione, immediata ma notevole, dobbiamo fare riguardo alla forma fondamentale [4]: che cioè il sistema delle a_{ik} è *covariante rispetto a trasformazioni qualsivogliono delle variabili* x_1, x_2 (con che resterà giustificato l'aver posto in basso gli indici i, k). La covarianza risulta senz'altro, in virtù di una osservazione fatta nel cap. precedente (§ 12), dall'invarianza della forma quadratica ds^2.

§ 3. — Caratterizzazione delle direzioni spiccate da un punto generico. — Nello spazio y_1, y_2, y_3, una direzione spiccata da un punto generico P, si può pensare individuata per mezzo di un segmento infinitesimo avente un estremo in P, o se si vuole, per mezzo di un altro punto P', infinitamente vicino a P, o ancora, il che torna lo stesso, per mezzo di uno spostamento infinitesimo attribuito a P.

Ora supponiamo che P appartenga a σ, e consideriamo le direzioni, spiccate da P, e *tangenti* alla superficie: ad individuarle, occorreranno punti P', infinitamente vicini a P, e appartenenti a σ; se quindi diciamo x_1, x_2 le coordinate (superficiali) di P, potremo individuare P' con le coordinate (superficiali).

$$x_1 + dx_1 , \qquad x_2 + dx_2 .$$

Pertanto ad ogni coppia dx_1, dx_2 *corrisponde una (ed una sola) direzione tangenziale spiccata da P*. Invece ad *una* direzione corrispondono infinite coppie di differenziali, che differiscono per un fattore

---

ora, se fosse $a = 0$, si potrebbe render $\varphi = 0$ senza che fossero nulle tutte le x (contrariamente all'ipotesi che la forma sia definita); basterebbe a tal uopo render nulle le y, risolvendo le n equazioni lineari omogenee

$$\sum_{1}^{n} {}_k\, a_{ik}\, x_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(le quali sarebbero risolubili con valori non tutti nulli delle x, qualora fosse $a = 0$).

Per le forme definite positive anche a risulta necessariamente positivo. Lo si riconosce, immaginando per es. di ricorrere a una delle infinite sostituzioni lineari (reali) che riducono φ a forma canonica [cfr. per es. Bianchi, *Lezioni di geometria analitica*, Pisa: Spoerri, 1920; Appendice, pp. 571-592]. È evidente che una forma positiva la quale contiene soltanto i quadrati delle variabili ha il suo discriminante $\bar{a} > 0$. Ma fra l'a originario e $\bar{a}$ passa la relazione $a = \bar{a}\Delta^2$, designando Δ il determinante della sostituzione lineare. Si ha quindi necessariamente anche $a > 0$, c. d. d.

di proporzionalità *positivo* poichè la *lunghezza ds* del segmento PP', che si è scelto a individuare la direzione, è a priori arbitraria (purchè infinitesima).

Per rendere biunivoca la corrispondenza, assumeremo, per individuare una direzione, in luogo dei differenziali, le quantità ad essi proporzionali

$$\lambda^1 = \frac{dx_1}{ds} \quad , \; \lambda^2 = \frac{dx_2}{ds}$$

(che non si alterano, moltiplicando dx_1 e dx_2 per un fattore positivo k, poichè, come risulta dalla [4], anche ds resta allora moltiplicato per k).

Queste quantità si dicono *parametri della direzione* e si riducono ovviamente a coseni direttori, nel caso in cui la superficie σ sia piana e x_1, x_2 rappresentino coordinate cartesiane ortogonali. I parametri non sono indipendenti, ma legati dalla relazione

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i \lambda^k = 1 \tag{5}$$

che si ottiene subito, dividendo la [4] per ds^2, e che fa riscontro alla nota identità del piano euclideo (somma dei quadrati dei coseni $= 1$). Poichè ds è invariante e i dx contravarianti, i parametri sono pure *contravarianti* (il che giustifica l'aver posto l'indice in alto).

Invece dei parametri, si usano talvolta due loro combinazioni lineari indipendenti, e precisamente

$$\lambda_i = \sum_{1}^{2}{}_k\, a_{ik}\, \lambda^k \qquad (i = 1, 2) \;, \tag{6}$$

che si chiamano *momenti*. Dacchè le a_{ik} costituiscono (§ prec.) un sistema covariante doppio, e i parametri (come si è osservato or ora) un sistema contravariante semplice, i *momenti risultano covarianti* (cfr. Cap. prec., § 10).

Come abbiamo dimostrato nel § prec., il determinante a è diverso da 0: le [6] si possono pertanto risolvere, ottenendo le formule

$$\lambda^i = \sum_{1}^{2}{}_k\, a^{ik}\, \lambda_k \tag{6'}$$

che danno i parametri per mezzo dei momenti. Fra gli uni e gli altri passa poi una relazione bilineare particolarmente semplice e notevole, che è immediata conseguenza delle posizioni [6], e della [5]. Infatti, moltiplicando la [6] generica, relativa all'indice i, per λ^i, e sommando rispetto all'indice i (da 1 a 2), si ha, in virtù della [5],

$$\sum_1^2 \lambda_i \lambda^i = 1 \,. \qquad [5']$$

Di qui risulta immediatamente che anche i momenti sono legati da una relazione quadratica. Basta, nella [5'], sostituire alle λ^i le risolventi [6'], con che

$\angle 2$

$$\sum_{1\;ik}^{n} a^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1 \,. \qquad [5'']$$

§ 4. — Angolo di due direzioni. Contravarianza delle a^{ik}. — Consideriamo due direzioni superficiali uscenti da un medesimo punto P: le denoteremo con λ e μ, intendendo con questi simboli, più precisamente, i due vettori unitari che caratterizzano quelle direzioni: i parametri e i momenti di λ saranno designati con λ^i, λ_i rispettivamente; e in modo analogo quelli di μ. Vogliamo ora trovare, in funzione di questi parametri (o momenti) l'angolo ϑ formato dalle due direzioni.

I coseni direttori di λ saranno, se indichiamo con dy_ν, dx_i l'incremento delle coordinate y_ν, x_i, rispettivamente, per uno spostamento ds lungo λ,

$$\frac{dy_\nu}{ds} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_1^2{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \lambda^i \qquad (\nu = 1, 2, 3) \,. \qquad [7]$$

Analogamente, indicando con il simbolo δ gli incrementi delle coordinate per uno spostamento δs lungo μ, avremo, per i coseni di questa direzione,

$$\frac{\delta y_\nu}{\delta s} = \sum_1^2{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta s} = \sum_1^2{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \mu^k. \qquad [7']$$

Allora, come insegna la geometria analitica, avremo

$$\cos\vartheta = \sum_1^3{}_\nu \frac{dy_\nu}{ds}\frac{\delta y_\nu}{\delta s} = \sum_1^3{}_\nu \sum_1^2{}_{ik} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\lambda^i\mu^k =$$

$$= \sum_1^2{}_{ik} \lambda^i\mu^k \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k},$$

e infine

$$\cos\vartheta = \sum_1^2{}_{ik} a_{ik}\lambda^i\mu^k . \qquad [8]$$

Sostituendo in luogo di μ^k, o di λ^i, o di entrambi, le loro espressioni per mezzo dei momenti, si hanno per $\cos\vartheta$ le espressioni equivalenti

$$\cos\vartheta = \sum_1^2{}_i \lambda^i\mu_i , \qquad [8']$$

$$\cos\vartheta = \sum_1^2{}_i \lambda_i\mu^i , \qquad [8'']$$

$$\cos\vartheta = \sum_1^2{}_{ik} a^{ik}\lambda_i\mu_k . \qquad [8''']$$

L'ultima di queste formule ci offre il modo di far notare che la notazione a^{ik} è conforme non solo alla convenzione relativa al modo di indicare gli elementi reciproci, ma altresì alla consuetudine di porre in alto gli indici di contravarianza. Poniamo infatti

$$u_i = \lambda_i\, ds \qquad , \quad v_k = \mu_k\, \delta s \qquad (i, k = 1, 2) ,$$

e osserviamo che le u, v sono variabili *indipendenti* (non legate fra loro come le λ e le μ); d'altra parte la [8'''] si può scrivere

$$ds\,\delta s \cos\vartheta = \sum_1^2{}_{ik} a^{ik} u_i v_k ,$$

e dall'essere invariante il primo membro, e il secondo costituito da una forma bilineare in variabili covarianti *arbitrarie*, si riconosce la contravarianza delle a^{ik}.

Se si vuol esprimere ϑ per mezzo del suo seno conviene osservare che, effettuando per righe il prodotto

$$\begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$$

e tenendo presenti la [5] e la [8'], [8''], si ottiene

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2\vartheta = \sin^2\vartheta \,.$$

Si ha perciò

$$\sin\vartheta = \sqrt{\begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}} \qquad [9]$$

dove va dato al radicale il segno $+$, perchè l'angolo ϑ di due direzioni è sempre, per sua definizione, $\leq \pi$, e quindi $\sin\vartheta \geq 0$.

L'espressione [9] si può, volendo, trasformare, osservando che si ha, come è facile verificare,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\sin\vartheta = \sqrt{a} \begin{vmatrix} \lambda^1 & \lambda^2 \\ \mu^1 & \mu^2 \end{vmatrix} ; \qquad [9']$$

od anche

$$\sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} , \qquad [9'']$$

sempre coll'intesa che il radicale $\sqrt{a}$ abbia il suo valore aritmetico.

§ 5. — Tensori associati, e in particolare reciproci. Esempio tipico offerto dai parametri e momenti di una stessa direzione. — Dato (con referenza alle variabili x_1, x_2) un tensore generico

$$A^{h_1 h_2 \ldots h_\mu}_{i_1 i_2 \ldots i_m}$$

di rango $m+\mu$, se lo si compone coi coefficienti a_{ik} del nostro ds^2, si può portare uno qualunque degli indici h, diciamo per es. h_1, dall'alto in basso, ottenendo

$$B^{h_2 \dots h_\mu}_{i_1 i_2 \dots i_m h_1} = \sum_{k}^{1 \dots 2} a_{h_1 k} A^{k h_2 \dots h_\mu}_{i_1 i_2 \dots i_m},$$

che è un tensore dello stesso rango, avente però un indice di covarianza di più e uno di contravarianza di meno: l'indice h_1. Analogamente, componendo invece col sistema contravariante doppio costituito (§ prec.) dagli elementi reciproci a^{ik}, si può portare in alto uno qualunque degli indici di covarianza, per es. i_1. Basta porre

$$C^{h_1 h_2 \dots h_\mu i_1}_{i_2 \dots i_m} = \sum_{k}^{1 \dots 2} a^{i_1 k} A^{h_1 h_2 \dots h_\mu}_{k i_2 \dots i_m},$$

con che il sistema C risulta ancora un tensore dello stesso rango.

Queste operazioni di composizione possono manifestamente ripetersi, in modo da spostare (anzichè un solo) più o anche tutti gli indici del tensore dato. Tutti i tensori che così si ottengono si dicono *associati del tensore* $A^{h_1 h_2 \dots h_\mu}_{i_1 i_2 \dots i_m}$, l'associazione risultando così subordinata ad un dato ds^2. In particolare il tensore

$$Z^{i_1 i_2 \dots i_m}_{h_1 h_2 \dots h_\mu} =$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \dots j_m k_1 k_2 \dots k_\mu}^{1 \dots 2} a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \dots a^{i_m j_m} a_{h_1 k_1} a_{h_2 k_2} \dots a_{h_\mu k_\mu} A^{k_1 k_2 \dots k_\mu}_{j_1 j_2 \dots j_m},$$

che ha per indici di covarianza quelli che in A figurano come indici di contravarianza, e viceversa, si chiama *reciproco*, la denominazione essendo giustificata dal carattere involutorio (come Z è reciproco di A, così A lo è di Z). Ciò si mette formalmente in evidenza immaginando di risolvere rispetto alle A le precedenti formule di definizione del sistema Z.

Un esempio, particolarmente semplice e notevole, di sistemi reciproci è offerto, in base alle [6] e [6′], dai parametri e dai momenti di una stessa direzione.

Osservazione I. — Nella definizione dei tensori associati ad uno generico A, interviene essenzialmente un dato ds^2 (pel tramite dei coefficienti a_{ik} e loro reciproci a^{ik}). Quando convenga mettere in rilievo questa circostanza, si specificherà dicendo tensore o tensori associati *rispetto al* ds^2, *di cui si tratta.*

Osservazione II. — Il sistema covariante doppio, simmetrico, a_{ik} e quello contravariante degli elementi reciproci a^{ik}, con cui si costruiscono, per composizione, i tensori associati, potrebbe manifestamente essere fornito, anzichè dai coefficienti del ds^2, da quelli di un'altra qualsiasi quadrica invariante φ (purchè soltanto irriducibile, sì che esista la reciproca). Si avrebbero allora sistemi associati, *rispetto alla quadrica* φ.

Osservazione III. — Importa rilevare fin d'ora che la nozione di sistemi associati vale senz'altro per quante si vogliono variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Basta supporre che gli indici comportino i valori $1, 2, \ldots, n$, fungendo, per es., da elemento ausiliario una forma differenziale quadratica (irriducibile) $\varphi = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$ in n, anzichè in due variabili.

§ 6. — VETTORI SUPERFICIALI. — Sia R un vettore non nullo spiccato da un punto P della superficie σ, *tangenzialmente* a questa: lo diremo vettore *superficiale* o *tangenziale*, e potremo individuarlo mediante le sue componenti cartesiane Y_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ oppure, più conformemente al suo carattere di ente intimamente collegato alla superficie, per mezzo della sua grandezza R e della sua direzione, caratterizzata questa dai suoi parametri λ^i (o dai suoi momenti λ_i). Queste tre quantità non sono indipendenti, poichè i parametri (o i momenti) sono legati dalla nota identità: il vettore è quindi caratterizzato da *due* quantità essenziali. Torna comodo, in conformità, rappresentarlo mediante le due grandezze indipendenti

$$R^i = R\lambda^i \qquad (i = 1,2) \tag{10}$$

oppure le altre due

$$R_i = R\lambda_i \qquad [10']$$

che si dicono *componenti contravarianti*, o rispettivamente *covarianti*, *del vettore.*

Esse costituiscono manifestamente due *sistemi reciproci*, tali essendo (§ prec.) parametri e momenti da cui, a norma delle [10], [10′], le R_i e R^i differiscono soltanto per un fattore comune R.

Da esse si può ricavare R per mezzo delle identità,

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a_{ik}\, R^i R^k = R^2, \qquad [11]$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{ik}\, a^{ik}\, R_i R_k = R^2, \qquad [11']$$

$$\sum_{1}^{2}{}_{i}\, R_i R^i = R^2, \qquad [11'']$$

(che non sono che la [5], la [5′] e la [5″], moltiplicate per R^2) e poi, per mezzo di [10] e [10′] risalire alle λ^i o λ_i: così si vede che il vettore è completamente individuato dalle sue componenti contravarianti (o da quelle covarianti).

Per legare le componenti contravarianti alle componenti Y_ν rispetto agli assi cartesiani y_1, y_2, y_3 conviene ricordare che i coseni della direzione di parametri λ^i sono dati dalla [7], e quindi le Y_ν (che sono uguali a questi coseni moltiplicati per R) sono date da

$$Y_\nu = \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} R^i . \qquad [12]$$

È poi ovvio che dalle componenti contravarianti si possono ottenere quelle covarianti, e viceversa, per mezzo di formule perfettamente analoghe alla [6] e alla [6′], e che si otterrebbero da queste moltiplicandole per R.

Se si tratta di vettori *nulli*, aventi cioè lunghezza R nulla e direzione indeterminata, si è in primo luogo condotti, per rendere soddisfatte anche in questo caso limite le [10], [10′], ad assumere $R^i = 0$, $R_i = 0$. Con ciò seguitano a valere anche tutte le altre ([11], [11′], ecc.), come si verifica immediatamente, constatando che se ne annullano entrambi i membri.

Analogamente, possiamo trovare delle semplici espressioni per il prodotto scalare di due vettori (superficiali) R, V, ricordando che, se ϑ è l'angolo dei due vettori, si ha

$$R \times V = RV \cos \vartheta . \qquad [13]$$

Infatti, considerando dapprima il caso generale di due vettori entrambi diversi da zero, ove siano λ e μ i versori rispettivi, dalla [8'], moltiplicando per RV, si ha

$$R \times V = \sum_1^n {}_i R^i V_i , \qquad [14]$$

mentre formule analoghe si ricaverebbero da [8], [8''], [8'''].

L'espressione [14] del prodotto scalare seguita a valere, come la [13], anche quando uno o entrambi i vettori sono nulli, andando allora a zero sia il prodotto scalare (per definizione) che i secondi membri.

§ 7. — Parametri e momenti delle linee coordinate. Elemento di area. — **Procuriamoci le espressioni dei parametri relativi alla direzione di una linea coordinata, p. es. la linea x_1 (cioè x_2 = cost), considerata nel verso delle x_1 crescenti. Per uno spostamento infinitesimo in questa direzione, è**

$$dx_2 = 0 \ , \ ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 = a_{11}\, dx_1^2 \, .$$

Essendo ds positivo per sua natura, e dx_1 per ipotesi, estraendo da quest'ultima formula la radice quadrata, si ha

$$ds = \sqrt{a_{11}}\, dx_1 \, ,$$

dove il radicale va preso positivamente. Con tale intesa risulta

$$\lambda^1 = \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \quad , \quad \lambda^2 = \frac{dx_2}{ds} = 0 \, . \qquad [15]$$

Analogamente, i parametri della linea 2, nel verso delle x_2 crescenti, saranno

$$\mu^1 = 0 \quad , \quad \mu^2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} . \qquad [15']$$

Dalla [8], o dalla [9'], ponendovi le espressioni ora trovate, possiamo ottenere l'angolo Ω formato dalle due direzioni coordinate. Avremo

$$\cos \Omega = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}\, a_{22}}} , \qquad [16]$$

$$\sin \Omega = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}\, a_{22}}} . \qquad [16']$$

Si vede dalla [16] che condizione necessaria e sufficiente perchè le coordinate x_1, x_2 siano ortogonali, è che sia $a_{12} = 0$.

Consideriamo un elemento infinitesimo di superficie, ottenuto spiccando da un punto P due segmenti infinitesimi ds, δs lungo le linee coordinate, e completando il parallelogrammo: l'area di questo sarà

$$d\sigma = ds\, \delta s \sin \Omega = \sqrt{a_{11}}\, dx_1 . \sqrt{a_{22}}\, dx_2 . \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_{11}\, a_{22}}} = \sqrt{a}\, dx_1\, dx_2 . \qquad [17]$$

§ 8. — OSSERVAZIONE FONDAMENTALE (DI GAUSS) CIRCA LA GEOMETRIA INTRINSECA DI UNA SUPERFICIE. — Siamo ora in grado di fare un'osservazione la quale metterà in luce tutta l'importanza che ha la forma quadratica [4] nello studio della superficie. Per far ciò, fissiamo prima con considerazioni intuitive il concetto di *geometria intrinseca* d'una *superficie*.

Si materializzi il concetto di superficie, pensando ad un foglio di materia flessibile ed inestensibile, su cui si possano disegnare delle figure: si possa deformarlo, curvandolo e piegandolo in infiniti modi, ma non mai lacerarlo, *nè dilatarlo*. Le figure disegnate su tale superficie verranno ad assumere, in conseguenza delle deformazioni di quella, diverse configurazioni spaziali: tuttavia alcune loro proprietà rimarranno invariate. Per esempio, se due linee si tagliano, esse conservano questa proprietà comunque si deformi il foglio: la lunghezza di un tratto di linea resta la stessa, e quindi la distanza di due punti, *contata sulla superficie* (cioè lungo la più breve linea superficiale che li congiunge) non varia; così pure non varia l'angolo di due linee, che si incrocino in un punto, ecc. Brevemente, tutte quelle proprietà nelle quali non intervengono enti estranei alla superficie (o, come suol dirsi, quelle che si possono studiare senza uscire da questa) sono indipendenti dalle deformazioni della superficie, e costituiscono la sua *geometria intrinseca.*

Anche nella geometria elementare abbiamo esempi di tal genere: la geometria piana si può costruire, e per lo più si costruisce tutta, senza far uso di punti esterni al piano, ed è quindi *intrinseca* di tal superficie: essa vale (almeno in regioni convenientemente limitate) anche se il piano si piega, o si avvolge su un cono o un cilindro.

Ora si ponga mente al fatto che gli elementi fondamentali per lo studio delle proprietà metriche di una figura sono: la distanza di due punti infinitamente vicini, e l'angolo di due direzioni. Difatti, la lunghezza di una linea qualunque si ottiene per integrazione da quella dei suoi elementi infinitesimi, l'area di una figura si può calcolare decomponendola in parallelogrammi elementari, ecc. Ora le formule [4] e [8] (o [8′], ecc.) ci forniscono appunto quei due elementi fondamentali per lo studio della geometria intrinseca d'una superficie, ogni qualvolta siano conosciuti i coefficienti del ds^2 (in funzione delle x): questi coefficienti dunque caratterizzano le proprietà metriche (intrinseche) della superficie, e sono invarianti in qualsivoglia deformazione di questa (senza dilatazioni). Da ciò l'interesse particolare che presentano tutti quei teoremi, di cui si può dare una espressione analitica involgente solo le coordinate superficiali x e i coefficienti a_{ik} della forma fondamentale: essi esprimono proprietà pertinenti alla *geometria intrinseca della superficie.* L'introduzione nella matematica di questo concetto, e la osservazione fondamentale che ad esso si riferisce, sono dovute a Carlo Federico Gauss.

§ 9. — Cenno sulle superficie sviluppabili. — Si chiamano *sviluppabili* quelle superficie che, supposte flessibili e inestensibili, possono esser portate a coincidere con una regione di piano, senza lacerazioni nè duplicature: esempi, il cilindro e il cono, e qualunque superficie formata di più pezzi di piano. La geometria intrinseca di tali superficie è identica, come si è visto nel § prec., a quella del piano, e l'elemento lineare di esse può assumere le stesse forme di quello del piano (per es., può assegnarsi un sistema di coordinate superficiali, tale che $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$).

Si consideri una semplice infinità di piani (che possono pensarsi rappresentati da un'equazione lineare nelle coordinate cartesiane y_1, y_2, y_3, i cui coefficienti siano funzioni continue di un parametro u). L'*inviluppo* di questa famiglia è una superficie sviluppabile, di cui quelli sono i piani tangenti. Questa proposizione può rendersi intuitiva con le seguenti considerazioni infinitesimali. Siano $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \ldots$ piani della famiglia, corrispondenti a successivi incrementi infinitesimi del parametro u; diciamo g_1 l'intersezione di $\tilde{\omega}_1$ con $\tilde{\omega}_2$, g_2 quella di $\tilde{\omega}_2$ con $\tilde{\omega}_2$, e così via.

Il luogo geometrico di tutte queste rette, è, per definizione, la superficie *inviluppo*: le rette $g_1, g_2 \ldots$ diconsi le sue *caratteristiche* o le sue *generatrici*: ognuno dei piani $\tilde{\omega}$ ne contiene due, racchiudenti fra loro un angolo infinitesimo (v. fig. 1), e l'inviluppo può pensarsi costituito da queste infinite regioni piane infinitesime. È chiaro allora come possa realizzarsene lo sviluppo, per mezzo di successive rotazioni intorno alle generatrici $g_1, g_2, \ldots$

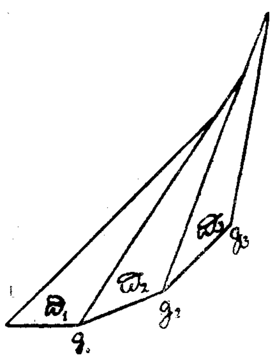


Fig. 1.

Avremo occasione fra poco di considerare l'inviluppo di una particolar famiglia (ad un parametro) di piani, e precisamente di tutti i piani tangenti ad una superficie qualunque σ, lungo una sua linea prefissata T. L'inviluppo di questi piani è una superficie sviluppabile σ_T, che si chiama *la sviluppabile circoscritta a σ lungo T*; poichè i piani tangenti a σ lungo T, sono anche tangenti a σ_T, ne risulta che la sviluppabile circoscritta è tangente a σ lungo la linea T.

b) Parallelismo superficiale. (fondamentalmente importante)

§ 10. — Definizione geometrica. — Nella geometria piana euclidea è ben noto come, fissati due punti P, P_1, ad ogni direzione spiccata da P ne corrisponda una, e una sola, spiccata da P_1, *parallela* alla prima. Ci proponiamo ora di estendere questa nozione dalla geometria intrinseca del piano a quella di una superficie qualunque σ.

Consideriamo a tal uopo un punto P di σ, il relativo piano tangente $\tilde{\omega}$ e una direzione generica, spiccata da P tangenzialmente a σ, e quindi contenuta in $\tilde{\omega}$: penseremo individuata la direzione mediante il corrispondente versore (vettore unitario) $\boldsymbol{u}$, e in conformità diremo semplicemente direzione $\boldsymbol{u}$, anzichè direzione il cui versore è $\boldsymbol{u}$. Sieno ancora P_1 un altro punto qualsiasi di σ, e $\tilde{\omega}_1$ il piano tangente in P_1.

Se la superficie σ è *sviluppabile*, si può ovviamente stabilire fra le direzioni uscenti tangenzialmente da P e le analoghe uscenti da P_1 una corrispondenza, che diremo *per parallelismo*, chiamandosi *parallela ad* $\boldsymbol{u}$ *in senso superficiale* quella $\boldsymbol{u}_1$, che diviene parallela ad $\boldsymbol{u}$ in senso ordinario, quando si fa lo sviluppo di σ sopra un piano.

Un tale criterio vien meno nel caso di una superficie σ non sviluppabile (anche del tipo più elementare, come ad es. la sfera), ed è naturale di cercarne una generalizzazione adeguata. Vi si è condotti nel modo più spontaneo purchè agli elementi posizionali già presi in considerazione (i quali sono sufficienti senza ulteriore specificazione per le superficie sviluppabili) si aggiunga una legge, *a priori* arbitraria, di concatenamento, raffigurandosi P_1 come proveniente da P attraverso una *determinata* curva T di σ (curva di trasporto).

Con referenza a questa T, si può allora definire il trasporto per parallelismo da P a P_1 nel modo seguente. Si consideri la sviluppabile circoscritta a σ lungo T: questa superficie, che chiameremo σ_T, è, come sappiamo, tangente a σ lungo la curva data, e, in particolare, in P e P_1, onde le direzioni tangenziali a σ, spiccate da questi due punti, sono anche tangenziali a σ_T: potremo allora assumere come definizione di parallelismo superficiale su σ lungo la T, quello subordinato dalla sviluppabile σ_T, *convenendo di chiamare parallela in* P_1 *ad una direzione generica* (*superficiale*) $\boldsymbol{u}$ in P *lungo la linea* T, *la direzione* (*superficiale*) $\boldsymbol{u}_1$ *che, sulla sviluppabile* σ_T, *è parallela a* $\boldsymbol{u}$ *nel senso poc'anzi definito* (1).

§ 11. — PRIME CONSEGUENZE. EQUIPOLLENZA (SUPERFICIALE) DI VETTORI. — Conseguenza necessaria della precedente definizione è che (a differenza di quanto accade per le sviluppabili) la direzione $\boldsymbol{u}_1$, superficialmente parallela ad $\boldsymbol{u}$ in P, non è univocamente determinata

(1) Un tracciamento, per così dire automatico, delle direzioni parallele si può conseguire assai semplicemente mediante rotolamento (della superficie σ sopra un piano). Cfr. PERSICO, *Realizzazione cinematica del parallelismo superficiale*, Rend. della R. Acc. dei Lincei. vol. XXX (2° semestre 1921), pp. 127-128.

dai soli dati P, $\boldsymbol{u}$, P_1, ma in generale *dipende anche dalla curva di trasporto*. Sotto questo aspetto, la nozione geometrica di parallelismo si può ravvicinare a quella fisica di lavoro, in cui interviene l'integrale di un'espressione della forma $X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2$ (dove x_1, x_2 sono coordinate, di qualsiasi specie, dei punti di σ), integrale che dipende, in generale, dalla linea T di integrazione: solo nel caso particolare che $X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2$ sia un differenziale esatto, questa dipendenza non ha più luogo.

Tornando al parallelismo lungo T, conviene rilevare in primo luogo che *nel trasporto si conservano gli angoli*, cioè se $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sono due generiche direzioni superficiali in P, le loro parallele superficiali in P_1, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, formano il medesimo angolo. Ciò risulta evidente, se si considera che, nel piano su cui si sviluppa σ_T, si ha parallelismo in senso ordinario, e che d'altra parte l'operazione di sviluppo non altera gli angoli.

Nelle considerazioni istituite finora ci siamo riferiti unicamente alle direzioni, considerando i corrispondenti versori. È chiaro che la stessa costruzione con cui si passa da $\boldsymbol{u}$ ad $\boldsymbol{u}_1$ può essere applicata ad un vettore (tangenziale) $\boldsymbol{R}$ di lunghezza qualsiasi R (non unitaria). Se $\boldsymbol{u}$ è il corrispondente versore, si ha $\boldsymbol{R} = R\,\boldsymbol{u}$, e se ne trae un vettore $\boldsymbol{R}_1 = R\boldsymbol{u}_1$, cioè un vettore applicato in P_1, avente la stessa lunghezza di $\boldsymbol{R}$ e per direzione quella della parallela superficiale $\boldsymbol{u}_1$. Diremo, come è naturale, che $\boldsymbol{R}$ ed $\boldsymbol{R}_1$ sono *vettori* (superficialmente) *equipollenti*, con referenza al cammino T. In sostanza questa nozione di equipollenza superficiale si riconduce senz'altro al parallelismo, essendo equipollenti due vettori tangenziali quando sono paralleli ed hanno la stessa lunghezza.

Un cenno particolare, nei riguardi del parallelismo, merita il caso che la curva di trasporto T sia una geodetica [1] di σ. Essa è allora geodetica anche rispetto a σ_T. Per convincersene, basta pensare che σ e σ_T hanno gli stessi piani tangenti lungo T, e quindi, se i vari piani osculatori di T risultano normali ad una della due superficie, lo sono pure all'altra. Nello sviluppo, la geodetica T diviene una retta (come risulta immediatamente dalla sua proprietà caratteristica di segnare

---

[1] Ricordiamo che si chiama così ogni linea di σ, che abbia in ogni punto il piano osculatore perpendicolare al piano tangente di σ. Le linee che segnano il più breve percorso (sulla superficie) fra due punti dati, godono sempre tale proprietà: d'altra parte, anche la proposizione reciproca — sotto certe restrizioni — è vera; perciò per definire le geodetiche si adotta talvolta l'uno, talvolta l'altro criterio. Torneremo in seguito su tali questioni (cfr § 23).

il minimo percorso fra due suoi punti qualunque) e le direzioni u e u_1, che, per effetto dello sviluppo, divengono parallele nel piano, formeranno con tale retta angoli uguali. Poichè lo sviluppo non altera gli angoli, ne concluderemo che *direzioni parallele su σ lungo una geodetica, formano con questa geodetica angoli eguali* (¹). In particolare, se la u coincide con la direzione di T in P, anche la u_1 coinciderà con la direzione di T in P_1, cioè le direzioni di una geodetica, nei vari suoi punti, sono tutte parallele (lungo la geodetica stessa); brevemente, le *geodetiche sono curve autoparallele.* Da queste stesse considerazioni risulta che l'autoparallelismo è proprietà *caratteristica* delle geodetiche, e può servire a definirle (²).

§ 12. — TRASPORTO INFINITESIMO. FORMA DIFFERENZIALE DELLA LEGGE DI PARALLELISMO. — Supponiamo in particolare P_1 infinitamente vicino a P, riducendo il cammino T all'arco elementare PP_1 (che, a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo, rimane univocamente determinato dagli estremi). Per avere lo sviluppo, basta in tal caso far subire al piano $\tilde{\omega}_1$ una rotazione elementare attorno alla retta r, secondo cui esso interseca $\tilde{\omega}$. La direzione di tale retta — notiamolo per incidenza — dicesi *coniugata* della direzione PP_1, (in P o in P_1, ciò che è lo stesso, a meno di infinitesimi). Indicheremo con $-\omega$ il vettore (infinitesimo), parallelo ad r, che rappresenta, in grandezza, direzione e verso, la rotazione elementare mediante cui si adagia $\tilde{\omega}_1$ su $\tilde{\omega}$. Sarà allora ω la rotazione elementare che fa ripassare $\tilde{\omega}_1$ dal piano di sviluppo $\tilde{\omega}$ alla sua effettiva posizione di piano tangente in P_1. Se $\boldsymbol{R}$ è vettore generico (tangenziale) spiccato da P, per avere l'equipollente $\boldsymbol{R}_1$ in P_1, si spiccherà da P_1, quando questo si trova nel piano di sviluppo, il vettore equipollente (nel senso ordinario) a $\boldsymbol{R}$, e poi si ricondurrà il piano $\tilde{\omega}_1$ alla sua posizione primitiva, trasportando con esso il vettore descrittovi, talchè il vettore $\boldsymbol{R}_1$ non è altro che $\boldsymbol{R}$, cui si è fatta subire (oltre a una traslazione, che non ci

(¹) Assumendo questa proprietà come definizione del parallelismo superficiale, si può trarne, per la sfera, una elegante genesi geometrico-cinematica, da cui discendono varie altre proprietà in modo espressivo. Cfr. G. CORBELLINI, *Genesi cinematica intrinseca del parallelismo di Levi-Civita*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXXII (1° semestre 1923), pp. 72-76.

(²) Si riconosce in questo enunciato una ovvia estensione a superficie di natura qualsiasi dell'intuizione primordiale della retta, espressa da Euclide con le parole εὐθεῖα γραμμή ἐστίν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὐτῆς σημείοις κεῖται (linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti).

interessa se consideriamo il vettore indipendentemente dal suo punto di applicazione) la rotazione ω. Dai primi elementi di cinematica dei sistemi rigidi si ha allora, per il divario dei due vettori $\boldsymbol{R}_1$ ed $\boldsymbol{R}$, cioè per l'incremento (vettoriale) $d\boldsymbol{R}$ che subisce il vettore $\boldsymbol{R}$ nel trasporto per parallelismo da P a P_1,

$$d\boldsymbol{R} = \omega \wedge \boldsymbol{R} .$$

Siccome tanto ω che $\boldsymbol{R}$ sono vettori appartenenti a $\tilde{\omega}$ l'incremento $d\boldsymbol{R}$ risulta perpendicolare a questo piano (o, in particolare, nullo) [1].

Ora faremo vedere che questa condizione, unita all'altra che $\boldsymbol{R}_1$ sia un vettore tangenziale, cioè appartenga a $\tilde{\omega}_1$, individua completamente il vettore $\boldsymbol{R}_1$, talchè, come definizione (differenziale) del parallelismo superficiale, si può assumere quella contenuta nelle relazioni geometriche seguenti, in cui con n si indica la normale a $\tilde{\omega}$:

$$d\boldsymbol{R} \parallel n , \qquad [18]$$

$$\boldsymbol{R}_1 \parallel \tilde{\omega}_1 .$$

Si pensi infatti che deve risultare

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 - d\boldsymbol{R} ,$$

cioè il vettore $\boldsymbol{R}$ deve essere decomponibile in un componente $\boldsymbol{R}_1$ parallelo a un piano dato, e in un altro, $-\, d\boldsymbol{R}$, parallelo a una direzione data (non contenuta in quel piano); tale decomposizione, come è noto, può effettuarsi in un modo solo [2].

§ 13. — Carattere intrinseco della nozione di parallelismo. — Tornando al trasporto per parallelismo lungo un arco T, di lunghezza finita, si vede subito che, se si tratta di un arco di geode-

(1) Quest'ultima circostanza si presenta quando $\boldsymbol{R}$ abbia la direzione di ω, cioè la coniugata di $\overline{PP_1}$: in questo caso, e in questo solo, la parallela superficiale $\boldsymbol{R}_1$ coincide con la parallela euclidea. L'osservazione è dovuta al prof. E. Bompiani, che se ne è valso per generalizzare la teoria dei sistemi coniugati alle superficie appartenenti a spazi non euclidei; cfr. Atti del R. Ist. Veneto, T. LXXX, 1921, p. 1120.

(2) Interessanti conseguenze geometriche, relative specialmente al caso delle superficie rigate, e all'interpretazione della seconda forma fondamentale per una superficie qualunque, sono state segnalate dal sig. A. Myller in alcune note dei Comptes Rendus. Cfr. T. 174 (1922), pp. 997-998; T. 175 (1922), pp. 939-941; T. 176 (1923), pp. 483-485; T. 178 (1924), pp. 1954-1956.

tica, il parallelismo dipende esclusivamente dalle proprietà intrinseche della superficie σ, cioè dalla natura dell'elemento lineare ds, e non dalla configurazione della superficie nello spazio, come *a priori* può lasciar supporre la costruzione geometrica (che utilizza lo spazio ambiente) o le equivalenti formule [18] e $\boldsymbol{R}_1 \parallel \tilde{\omega}_1$.

Basta infatti ricordare la proprietà generale della conservazione degli angoli, e quella di autoparallelismo delle geodetiche: la parallela $\boldsymbol{u}_1$ in P_1 ad una generica direzione $\boldsymbol{u}$ spiccata da P rimane individuata dalla condizione (di appartenere alla superficie σ, e) di formare in P_1 con la geodetica di trasporto lo stesso angolo che la $\boldsymbol{u}$ forma in P. Si tratta, come si vede, di proprietà angolari che dipendono unicamente dalla metrica di σ.

Questa considerazione relativa ad una T geodetica si estende agevolmente al caso generale, immaginandolo scisso in trasporti elementari, da un generico punto P a un punto vicinissimo P_1. In tale trasporto l'alterazione elementare della direzione $\boldsymbol{u}$ rimane definita, come abbiamo visto, dagli estremi PP_1: la natura della congiungente non influisce, e si può pertanto pensarlo come un trasporto lungo un tratto infinitesimo di geodetica: ma un tale trasporto ha carattere intrinseco, e così si riconosce il carattere intrinseco che ha in generale l'alterazione di $\boldsymbol{u}$, e quindi il parallelismo, qualunque sia la linea di trasporto.

Lo stesso per l'equipollenza, cioè per il trasporto di vettori aventi lunghezza (non unitaria, ma) qualsiasi. Infatti (§ 11) tale lunghezza rimane, per definizione, inalterata.

§ 14. — Equazione simbolica. — Alla [18] si può dare una forma più espressiva, osservando che essa equivale a dire che il vettore $d\boldsymbol{R}$ è perpendicolare a qualunque direzione tangenziale a σ in P, ovvero, se pensiamo tale direzione individuata da uno spostamento infinitesimo del punto P lungo la superficie; che $d\boldsymbol{R}$ è perpendicolare a tutti questi spostamenti. In simboli, se con δP indichiamo il vettore (infinitesimo) rappresentante lo spostamento, avremo

$$d\boldsymbol{R} \times \delta P = 0 \tag{19}$$

per *qualsiasi* δP tangenziale a σ (equazione che ricorda (formalmente) il principio dei lavori virtuali). Se denotiamo con dY_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ le componenti di $d\boldsymbol{R}$, e con δy_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ quelle di δP (le une e le altre riferite al sistema cartesiano ortogonale y_1, y_2, y_3), si ha identicamente

$$dR \times \delta P = \sum_1^3{}_\nu \, dY_\nu \, \delta y_\nu \,, \qquad [20]$$

e la precedente relazione [19] di aspetto vettoriale si traduce nella relazione scalare

$$\sum_1^3{}_\nu \, dY_\nu \, \delta y_\nu = 0 \qquad [19']$$

che può chiamarsi, come l'originaria [19], *equazione simbolica del parallelismo.*

§ 15. — Equazioni intrinseche. — L'equazione simbolica, facendo intervenire elementi geometrici estranei alla superficie, non mette in evidenza il carattere intrinseco della nozione di parallelismo: però si presta assai bene a ricavarne delle equazioni, che abbiano questa notevole particolarità.

A tal uopo, converrà naturalmente procurarsi le espressioni dei dY_ν e δy_ν, che figurano nella [19'] per mezzo di elementi intrinseci. Cominciamo dai δy_ν: essi sono soggetti solo alla condizione (di essere infinitesimi e) di rappresentare uno spostamento *lungo* σ; si otterranno pertanto in termini delle variazioni δx_1, δx_2, (completamente arbitrarie) subite in corrispondenza dalle coordinate superficiali, differenziando le [1]. Avremo in conformità

$$\delta y_\nu = \sum_1^2{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \delta x_k \,.$$

Siccome poi il vettore R è tangenziale, possiamo caratterizzarlo intrinsecamente mediante le sue componenti contravarianti, sostituendo alle Y_ν le loro espressioni [12]. $Y_\nu = \sum_1^2{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} R^i = r \frac{dy_\nu}{ds}$

Con ciò, posto per brevità

$$\tau_k = \sum_1^2{}_j \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \, d\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} R^j\right) \qquad (k = 1, 2) \,, \qquad [21]$$

l'identità [20] può ulteriormente essere scritta

$$dR \times \delta P = \sum_1^2{}_k \tau_k \, \delta x_k \,, \qquad [20']$$

e l'equazione simbolica del parallelismo, per la completa arbitrarietà di δx_1, δx_2, equivale alle due seguenti:

$$\tau_k = 0 \qquad (k = 1, 2). \qquad [22]$$

Sono queste le due equazioni che definiscono gli incrementi dR^1, dR^2 da attribuirsi alle componenti di un vettore generico $\boldsymbol{R}$ quando lo si trasporta per parallelismo lungo il cammino elementare dx_1, dx_2: il loro carattere intrinseco apparirà esplicitando le τ_k, come ora faremo.

Effettuando, nei secondi membri delle [21], la differenzazione del prodotto, e ricordando la espressione dei coefficienti a_{ik} (v. formula [3]) l'espressione delle τ_k diviene

$a_{ik} = \sum_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}$

$$\tau_k = \sum_1^2{}_j \, a_{kj} \, dR^j + \sum_1^3{}_\nu \sum_1^2{}_{jl} \, R^j \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \, \partial x_l} \, dx_l \,,$$

ovvero

$$\tau_k = \sum_1^2{}_j \, a_{kj} \, dR^j + \sum_1^2{}_{jl} \, R^j dx_l \sum_1^3{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \, \partial x_l} \,. \qquad [21']$$

Si tratta ora di far vedere che la sommatoria rispetto a ν è esprimibile con elementi intrinseci, e, precisamente, è una combinazione lineare delle derivate delle a_{ik}. Consideriamone il termine generale, ed osserviamo che si può scrivere

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \, \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \, \partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_l} \,,$$

oppure, analogamente,

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j \, \partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_l \, \partial x_k} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_j} \,.$$

Per conservare la simmetria rispetto agli indici j ed l, assumiamo, come espressione del termine in questione, la semisomma dei due secondi membri; osserviamo però che gli ultimi termini di questi, sommati insieme, danno esattamente la derivata rispetto a x_k del prodotto $\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}$, e quindi avremo

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j\,\partial x_l} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_l}\right)\right].$$

Ora effettuiamo la somma rispetto a ν, tenendo presenti le espressioni delle a_{ik}. Risulta

$$\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\frac{\partial^2 y_\nu}{\partial x_j\,\partial x_l} = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\right].$$

Così a quella sommatoria si è data la forma desiderata. Il secondo membro di questa equazione si indica brevemente con la notazione

$$\begin{bmatrix} j\ \ l \\ k \end{bmatrix}$$

(simbolo di Christoffel di prima specie), facile a ricordarsi, perchè la disposizione degli indici è quella stessa del termine negativo della combinazione lineare (mentre gli altri due termini hanno gli stessi indici, diversamente disposti). Rileveremo fra breve alcune proprietà di questi simboli: ci basta ora osservare che essi rappresentano certe funzioni delle x_1, x_2, dipendenti solo dalla forma quadratica fondamentale.

Tornando alla espressione [21′] delle τ_k, possiamo ora scriverla

$$\tau_k = \sum_{1}^{2}{}_{j}\, a_{kj}\, dR^j + \sum_{1}^{2}{}_{jl}\begin{bmatrix} j\ \ l \\ k \end{bmatrix} R^j\, dx_l \qquad (k = 1, 2). \qquad [21'']$$

Prima di procedere, è importante di rilevare il *carattere covariante* delle formazioni τ_k, le quali (a norma delle [21′]) dipendono da due vettori (R e lo spostamento dx_1, dx_2), nonchè dai coefficienti del ds^2 e loro derivate prime. Tale covarianza segue dall'invarianza della forma lineare $\sum_1^2{}_k\, \tau_k\, dx_k$, attestata dall'identità [20′].

Il sistema reciproco delle τ_k

$$\tau^i = \sum_1^2{}_k\, a^{ik}\, \tau_k \qquad (i = 1,\, 2)$$

risulta in conformità *contravariante;* in base alle [21′], esso si esplicita come segue

$$\tau^i = dR^i + \sum_1^2{}_{jl} R^j\, dx_l \sum_1^2{}_k a^{ik} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix},$$

ovvero, posto

$$\sum_1^2{}_k a^{ik} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} j & l \\ & i \end{Bmatrix}$$

(simbolo di Christoffel di seconda specie), sotto la forma

$$\tau^i = dR^i + \sum_1^2{}_{jl} \begin{Bmatrix} j & l \\ & i \end{Bmatrix} R^j\, dx_l\,. \qquad [21''']$$

Le *equazioni di parallelismo* [22], come è *a priori* prevedibile per il loro significato geometrico, ***hanno carattere invariantivo*** di fronte a qualsiasi sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2. Ciò è formalmente messo in evidenza dalla circostanza che esse esprimono * l'annullarsi del sistema (di un tensore) covariante τ_k (cfr. Cap. prec., § 12). Naturalmente le equazioni di parallelismo si possono anche assumere sotto la forma equivalente

$$\tau^i = 0 \qquad (i = 1,\, 2), \qquad [22']$$

di cui è pure manifesto il carattere invariantivo.

* se un tensore è nullo rispetto ad un sistema di coordinate [illegible] lo è tuttavia rispetto a qualunque altro sistema

Risolvendole rispetto ai differenziali dR^i, si ha

$$dR^i = -\sum_{jl}^{2}{}_{1} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} R^j dx_l \qquad (i = 1, 2)\,. \qquad [23]$$

$d^* R^i = 0$

Questa è la forma finale delle equazioni differenziali del parallelismo: esse forniscono l'incremento subìto dalle componenti contravarianti di un vettore superficiale nel trasporto per equipollenza lungo il cammino elementare dx_i, espresso mediante le dx_i stesse, le componenti del vettore, e certe funzioni del posto (da considerarsi assegnate) dipendenti solo dai coefficienti del ds^2, e quindi dalla natura intrinseca della superficie.

§ 16. — Simboli di Christoffel. — Abbiamo introdotto le notazioni (estensibili formalmente anche a forme quadratiche in n variabili)

$$\begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\right], \qquad [24]$$

$$\left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} = \sum_{k}{}_{1}^{2} a^{ik} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix}: \qquad [25]$$

vogliamo ora esporre le più elementari proprietà di questi simboli.

Intanto, è evidente la simmetria rispetto agli indici scritti in alto, cioè che

$$\begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & j \\ & k \end{bmatrix} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l & j \\ & i \end{matrix} \right\}.$$

In conseguenza di ciò, di simboli di ciascuna specie, per una forma in n variabili, ve ne sono n in corrispondenza ad ogni possibile coppia di indici. Ve ne ha dunque in tutto (per ogni specie)

$n \cdot C'_{n,2} = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

$$\frac{1}{2} n^2 (n + 1)$$

(quante sono le derivate prime delle a_{ik}).

È facile esprimere le derivate delle a_{ik} mediante i simboli di Christoffel: basta scrivere la [24], e quella che se ne ottiene scambiando l con k, e poi sommarle, e si ottiene la formula seguente, che occorre spesso:

$$\frac{\partial a_{lk}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j & k \\ & l \end{bmatrix}. \tag{24'}$$

Dalla [25] si possono ricavare, col solito mezzo della regola di Cramer, i simboli di prima specie espressi mediante quelli di seconda: basta moltiplicare per a_{im} e sommare rispetto a i, ottenendo

$$\begin{bmatrix} j & l \\ & m \end{bmatrix} = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{im} \begin{Bmatrix} j & l \\ & i \end{Bmatrix}. \tag{25'}$$

Infine, dimostreremo una formula di uso frequente, che fornisce le derivate del determinante a (o, più precisamente, del suo logaritmo) per mezzo dei simboli di Christoffel.

Ricordando come si forma la derivata di un determinante di ordine n, si riconosce che la derivata di a rispetto a una qualunque delle x (per es. x_i) è la somma di n determinanti di cui uno qualunque (per es. il k^{esimo}) è ottenuto da a sostituendovi gli elementi della k^{esima} linea con le loro derivate; un tale determinante, sviluppato secondo la k^{esima} linea (tenendo presente che complementi algebrici delle a_{jk} sono le a^{jk} moltiplicate per a) si può scrivere

$$\sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} a^{jk}\, a\,,$$

e perciò

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n}{}_{kj} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} a^{jk}\, a\,,$$

ovvero, dividendo per a, e ricordando la [24'],

$$\frac{\partial\, lg\, a}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n}{}_{kj} \left(\begin{bmatrix} j & i \\ & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & i \\ & j \end{bmatrix} \right) a^{jk}$$

e infine, per la [25],

$$\frac{\partial \lg a}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} j\ i \\ j \end{Bmatrix} + \sum_{1}^{n}{}_{k} \begin{Bmatrix} k\ i \\ k \end{Bmatrix}.$$

Le due sommatorie differiscono solo per la materiale designazione degli indici: si ha quindi

$$\frac{\partial \lg a}{\partial x_i} = 2 \sum_{1}^{n}{}_{k} \begin{Bmatrix} k\ i \\ k \end{Bmatrix}.$$

Più frequentemente, questa formula si scrive divisa per 2, cioè

$$\frac{\partial \lg \sqrt{a}}{\partial x_i} = \sum_{1}^{n}{}_{k} \begin{Bmatrix} k\ i \\ k \end{Bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) . \qquad [26]$$

§ 17. — Equazioni del parallelismo nelle componenti covarianti. — È facile trovare delle equazioni, analoghe alle [23], per i differenziali delle componenti *covarianti*. Queste componenti infatti si ottengono da quelle contravarianti, per mezzo della relazione (cfr. § 6)

$$R_i = \sum_{1}^{2}{}_{j}\, a_{ij} R^j ,$$

donde, differenziando e cambiando l'indice j in k nell'ultima sommatoria,

$$dR_i = \sum_{1}^{2}{}_{jl} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} dx_l\, R^j + \sum_{1}^{2}{}_{k} a_{ik}\, dR^k .$$

Ora si sostituisca dR^k con la sua espressione, data da [23], e si avrà

$$dR_i = \sum_{1}^{2}{}_{lj} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} dx_l\, R^j - \sum_{1}^{2}{}_{jlk} a_{ik} \begin{Bmatrix} j\ l \\ k \end{Bmatrix} R^j\, dx_l .$$

Nella prima sommatoria, si può esprimere la derivata delle a_{ij} per mezzo dei simboli di 1ª specie, ottenendo

$$\sum_{jl}^{2}{}_{1} \left(\begin{bmatrix} j\ l \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\ l \\ j \end{bmatrix} \right) dx_l\, R^j ;$$

nella seconda, si può effettuare la somma rispetto a k (v. formula [25′]), ottenendo

$$- \sum_{jl}^{2}{}_{1} \begin{bmatrix} j\ l \\ i \end{bmatrix} R^j\, dx_l .$$

Complessivamente, resta, dopo un'ovvia riduzione,

$$dR_i = \sum_{jl}^{2}{}_{1} \begin{bmatrix} i\ l \\ j \end{bmatrix} dx_l\, R^j .$$

Affinchè scompaiano del tutto le componenti contravarianti, si sostituisce R^j con la sua espressione

$$R^j = \sum_{1}^{2}{}_k\, a^{jk}\, R_k ,$$

ed effettuando la somma rispetto a j (il che cambia il simbolo di 1ª specie in uno di 2ª, in base alla formula [25]), si ottiene

$$dR_i = \sum_{kl}^{2}{}_{1} \begin{Bmatrix} i\ l \\ k \end{Bmatrix} R_k\, dx_l .$$

Infine, scambiando l'indice k in j per mettere meglio in evidenza l'analogia con le [23], si ha

$$dR_i = \sum_{jl}^{2}{}_{1} \begin{Bmatrix} i\ l \\ j \end{Bmatrix} R_j\, dx_l \qquad (i = 1, 2) , \qquad [27]$$

equazioni equivalenti alle [23]. Infatti esse risultano da combinazione di posizioni e di identità colle [23]; e reciprocamente da esse, con analoghe combinazioni, si risale alle [23], come si può verificare nel modo più ovvio.

§ 18. — Alcune conferme analitiche. — Siamo ora in grado di dimostrare per via analitica alcune proprietà del parallelismo, già dedotte come conseguenze immediate della definizione geometrica.

Consideriamo intanto il trasporto per parallelismo di un vettore R lungo un tratto *finito* T di curva, da P in P_1. Questa curva sia definita dalle equazioni parametriche

$$x_i = x_i(s) \tag{28}$$

dove s rappresenta un parametro qualunque (o, se si vuole, la lunghezza dell'arco a partire da un'origine arbitraria P_0). Le R^i sono da considerarsi funzioni di s di cui sono assegnati (arbitrariamente) i valori in P. Le [23], divise per ds, divengono

$$\dot{R}^i = -\sum_{jl}^{1 \ldots 2} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ & i \end{matrix} \right\} R^j \dot{x}_l \qquad (i = 1, 2)$$

(dove il punto indica derivazione rispetto a s, e le $\dot{x}_l$ sono, naturalmente, ricavate derivando le [28], e quindi da considerarsi funzioni assegnate). Queste sono due equazioni differenziali lineari, del primo ordine, in forma normale rispetto alle derivate delle due funzioni incognite R^1, R^2, e pertanto, come si sa dal calcolo, queste funzioni restano da esse univocamente determinate, una volta assegnati (ad arbitrio) i valori iniziali. Si ha così la conferma del fatto, geometricamente evidente, della *possibilità del trasporto* di un vettore (superficiale) arbitrariamente assegnato, e della *unicità del risultato*.

Verifichiamo ora (sempre giovandoci delle equazioni differenziali trovate) che il trasporto *conserva la lunghezza di un vettore* e *l'angolo di due vettori*: le due verifiche si possono fare contemporaneamente, nel modo seguente. Siano $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$ due vettori: trasportiamoli per parallelismo lungo un cammino infinitesimo, e calcoliamo l'alterazione subita, in questo trasporto, dal loro prodotto scalare. Avremo (*v.* formula [14])

$$d\,(\boldsymbol{R}\times \boldsymbol{V}) = \sum_{i}^{1\ldots 2} R^i\, dV_i + \sum_{i}^{1\ldots 2} V_i\, dR^i\,,$$

e ponendo per dR^i e dV_i le espressioni [23] e [27],

$$d\,(\boldsymbol{R}\times \boldsymbol{V}) = \sum_{ijl}^{1\ldots 2} R^i \left\{ {i\ l \atop j} \right\} V_j\, dx_l - \sum_{ijl}^{1\ldots 2} V_i \left\{ {j\ l \atop i} \right\} R^j\, dx_l\,.$$

Scambiando, in una delle due sommatorie, gli indici i e j, si riconosce che esse sono uguali, e che quindi

$$\underline{d\,(\boldsymbol{R}\times \boldsymbol{V}) = 0}\,,$$

cioè il trasporto infinitesimo (e quindi anche il trasporto finito) non altera il prodotto scalare. Ora basta supporre $\boldsymbol{V}$ coincidente con $\boldsymbol{R}$ (nel qual caso $\boldsymbol{R}\times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^2$) per concluderne che il trasporto per parallelismo conserva la lunghezza di un vettore. Se poi si tien presente questo risultato, e si ricorda la [13], si riconosce che restando invariato il prodotto scalare di due vettori, e le loro rispettive lunghezze, deve, se si tratta di due vettori entrambi diversi da zero, restare invariato anche il loro angolo.

§ 19. — Commutabilità. — I vettori tangenziali, pur rimanendo caratterizzati intrinsecamente da due numeri, provengono, come si è detto, dall'immagine geometrica di un segmento, spiccato tangenzialmente da un punto P della superficie σ, ente che *non* appartiene interamente a σ, almeno in generale. Se però si tratta di vettori *infinitesimi*, l'elemento di piano tangente a cui appartengono si confonde con l'elemento superficiale di σ circostante a P e si può dire che non si esce da σ. *Vale* pertanto, *per un generico vettore tangenziale infinitesimo, la solita immagine di uno spostamento che fa passare dall'origine P all'estremo P_1, anch'esso punto di σ*. Riducendosi in tal caso la lunghezza R ad un elemento lineare ds, le $R^i = \lambda^i\, ds$ si identificano (in base alla stessa definizione di parametri di direzione) cogli incrementi dx_i che subiscono le coordinate (curvilinee) passando, da P a P_1.

Ciò posto, consideriamo due sistemi di differenziali dx_i, δx_i, e i corrispondenti vettori (o spostamenti) infinitesimi (s'intende, sopra σ) $dP = PP_1$, $\delta P = PP_2$. Conveniamo di designare con df l'aumento che subisce un generico vettore, o ente (scalare o vettoriale) ad esso subordinato f, quando si passa di P a P_1 per equipollenza superficiale. Analogo significato attribuiremo a δf in corrispondenza al passaggio da P a P_2.

In conformità, $d\delta P$ sta a rappresentare l'incremento vettoriale di δP quando lo si trasporta da P a P_1, e $d\delta x_i$ l'incremento subordinato nel suo sistema contravariante δx_i. Per quest'ultimo si ha dalla [23]

$$d\delta x_i = -\sum_{jl}^{1\ldots 2} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} \delta x_j \, dx_l \qquad (i = 1, 2) \,. \tag{29}$$

Il trasporto di dP da P a P_2 dà invece luogo agli incrementi δdx_i, e

$$\delta dx_i = -\sum_{jl}^{1\ldots 2} \left\{ \begin{matrix} j & l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \, \delta x_l \,. \tag{29'}$$

Basta ora scambiare, in una di queste due sommatorie, gli indici j ed l, e tener presente la proprietà di simmetria dei simboli di Christoffel, per riconoscere che si ha

$$d\delta x_i = \delta dx_i \,, \tag{30}$$

che prova la *commutabilità* dei due operatori d e δ, definiti nel modo poc'anzi dichiarato.

Il significato geometrico del risultato è particolarmente semplice. Basta tener presente che, per vettori infinitesimi (e tali sono tutti quelli qui considerati), gli elementi del sistema contravariante altro non sono se non differenze di coordinate omologhe. Perciò, se x_i sono le coordinate di P, avremo in primo luogo per P_1 le coordinate $x_i + dx_i$, e per P_2 le coordinate $x_i + \delta x_i$. Detto Q il punto di σ a cui si perviene guidando da P_1 il vettore equipollente a δP, siccome il sistema contravariante di quest'ultimo è $\delta x_i + \delta d x_i$, si hanno in definitiva per Q le coordinate

$$x_i + dx_i + \delta x_i + \delta d x_i \,.$$

Chiamiamo invece Q^* il punto di σ a cui si perviene guidando da P_2 il vettore equipollente a dP: le coordinate di Q^* si otterranno da quelle di Q scambiando gli operatori d e δ, ossia saranno

$$x_i + \delta x_i + dx_i + d\delta x_i \,.$$

Ora si vede che in virtù della [30], *Q coincide con Q^**. Si può dire, in forma più espressiva, che *per vettori infinitesimi superficialmente equipollenti seguita a valere la regola del parallelogramma* (¹).

Si osservi che in ciò che precede si tien conto di quantità del secondo ordine del tipo $d\delta x$, ma si trascurano $(dx_i)^2$, $(\delta x_i)^2$. Se se ne volesse tener conto, considerando i vettori δP, dP e i loro equipollenti superficiali per P_2 e P_1 come vettori nello spazio, non si avrebbe più un parallelogrammo, anzi, nemmeno un quadrangolo chiuso. Ricordando, infatti, la costruzione spaziale di vettori superficialmente equipollenti (cfr. § 3) si riconosce che $d\delta P$ e $\delta d P$, sebbene entrambi diretti secondo la normale a σ in P, hanno però lunghezze in generale diverse poichè i tre punti P, P_1, P_2 e i rispettivi piani tangenti non hanno a priori altra relazione che di essere infinitamente vicini.

Le formule [29] o [29'] forniscono una definizione dei differenziali secondi, che presenta carattere invariantivo rispetto a qualunque cambiamento di variabili. Per ben comprendere il significato di questo fatto e riconoscerne il vantaggio, conviene ricordare le convenzioni che si fanno, negli elementi del calcolo, sui differenziali secondi.

Consideriamo, per fissare le idee, il caso più semplice di una sola variabile indipendente. Abitualmente si fa la convenzione $d^2 x = 0$, (cioè si risguardano, come è perfettamente lecito, gli incrementi dx indipendenti dalla x); ma questa semplificazione non si conserva se si

(¹) Si potrebbe partire da questa proprietà per stabilire intrinsecamente il parallelismo, rispetto alla metrica di σ, prescindendo dallo spazio ambiente. Il metodo si applica senz'altro alle varietà V_n di quante si vogliono dimensioni. Cfr. H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, § 14, Berlin: Springer, 1923.

cambia la variabile indipendente ponendo $x = f(\xi)$ con che, ammesso che si tratti di una effettiva trasformazione, si può reciprocamente ritenere ξ funzione di x: $\xi = F(x)$. Infatti, differenziando successivamente questa formula, si ha $d\xi = F'(x)\, dx$,

$$d^2\xi = F''(x)\, dx^2 + F'(x)\, d^2x\ ,$$

da cui apparisce che, pur ponendo $d^2 x = 0$, non ne segue in generale che sia zero anche $d^2\xi$.

Se poi le variabili sono n, si prendono di solito in considerazione solo sistemi di differenziali completamente indipendenti dalle variabili x_i, per modo che, non solo sia $d^2x_i = 0$, ma inoltre, per due loro sistemi dx_i e δx_i quali si vogliono, si abbia sempre

$$d\,\delta x_i = \delta\, dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ .$$

Ora si cambino le variabili, ponendo comprensivamente

$$x_i = f_i\,(\bar{x})\,,\ \text{donde}\ \bar{x}_i = F_i\,(x)\ .$$

Si avrà, in base alle condizioni $\delta\, dx_i = 0$,

$$\delta\, d\bar{x}_i = \sum_{jl}^{n}{}_{1} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j\, \partial x_l}\, dx_j\, \delta x_l\ ,$$

e quindi sarà bensì conservata la proprietà

$$\delta\, d\bar{x}_i = d\,\delta\bar{x}_i\ ,$$

ma questi differenziali non saranno in generale nulli. La convenzione abituale è dunque legittima (e suggerita da ovvie ragioni di semplicità, quando, in una data questione, ci si riferisce sempre alle stesse variabili), ma non ha carattere invariantivo di fronte alla trasformazione di variabili.

Invece, assumendo, a norma delle [29], [29'],

$$d\,\delta x_i = \delta\, dx_i = -\sum_{jl}^{2}{}_{1} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \delta x_j\, dx_l\ , \qquad [31]$$

si ha, per lo stesso contenuto geometrico di questa formula,

$$d\,\delta\bar{x}_i = \delta d\bar{x}_i = -\sum_{jl}^{1 \ldots 2} \overline{\left\{ {j\ l \atop i} \right\}}\, \delta\bar{x}_j\, d\bar{x}_l$$

dove con una sopralineatura si sono indicati i simboli di Christoffel relativi alle variabili $\bar{x}$, cioè alla forma quadratica trasformata

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1 \ldots 2} \bar{a}_{ik}\, d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k\ .$$

Ben si intende che la rilevata permanenza formale delle espressioni [31] potrebbe essere confermata anche per materiale verificazione diretta. Del resto si tratta di un immediato corollario del carattere invariantivo, rilevato al § 15, delle equazioni $\tau^i = 0$: basta porvi $R^i = \delta x_i$.

Per questo carattere invariantivo i differenziali secondi, definiti in base alle [31], si dicono *contravarianti*, sebbene non siano effettivamente tali: sono invece le espressioni $d\delta x_i + \sum_{jl}^{1 \ldots 2} \left\{ {j\ l \atop i} \right\} \delta x_j\, dx_l$, le quali costituiscono in ogni caso un sistema contravariante semplice.

c) Estensione delle nozioni precedenti alle varietà ad n dimensioni di metrica qualunque.

§ 20. — Generalità sulle V_n. — Accanto alle estensioni nominali di concetti geometrici, che abbiamo svolto nel Cap. I, introdurremo ora (sulla scorta delle considerazioni della sez. *a*) di questo capitolo) la nozione fondamentale di varietà metrica ad n dimensioni (n intero qualunque).

Se sono date n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sappiamo che il complesso dei valori ad esse attribuibili prende il nome di varietà ad n dimensioni. Supponiamo ora che, insieme a queste variabili, e al loro campo di variabilità, sia assegnata *a priori* una forma quadratica differenziale

$$ds^2 = \sum_{ik}^{1 \ldots n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad [32]$$

k

(dove le $a_{ik} = a_{ki}$ sono funzioni assegnate delle x) e conveniamo di riguardare ds come *distanza* dei due punti infinitamente vicini di coordinate

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad \text{e} \qquad x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, \ldots, x_n + dx_n :$$

per conseguenza, converremo che ds sia *invariante* in qualsiasi cambiamento di coordinate. Introdotta così nella varietà la definizione di distanza elementare, ne segue senz'altro, per integrazione, quella di *lunghezza* di una linea, e inoltre ne derivano, come vedremo, i criteri più spontanei per definire tutte le proprietà di estensione (angoli, aree, volumi...).

Una varietà, a cui sia associata una forma quadratica del tipo [32] (o, come suol dirsi, una varietà di cui sia assegnata la metrica) si chiama *varietà metrica*, e sarà nel seguito denotata brevemente con V_n. In tutte le nostre considerazioni, supporremo che le a_{ik} (che costituiscono evidentemente un sistema doppio simmetrico covariante, data l'invarianza del ds^2) siano funzioni finite e continue, assieme alle loro derivate prime e seconde, e tali da rendere la forma quadratica *definita positiva* (1). Così la distanza di due punti (reali) sarà sempre reale; il determinante a delle a_{ik} sempre > 0. Si designeranno al solito con a^{ik} gli elementi reciproci, ecc.

Estenderemo poi ad una V_n generica il concetto di direzione, pensando questa individuata da due punti infinitamente vicini, cioè da un sistema di dx: chiameremo, come abbiamo fatto precedentemente, *parametri* le n quantità contravarianti

$$\lambda^i = \frac{dx_i}{ds} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che caratterizzano una direzione (e restano da essa univocamente determinati) e chiameremo *momenti* le quantità covarianti

$$\lambda_i = \sum_1^n {}_k\, a_{ik} \lambda^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

(1) Considereremo brevemente alla fine del capitolo (§ 28) anche l'ipotesi di una forma quadratica indefinita, la quale (trascurata dapprima come poco promettente dal punto di vista applicativo) ha ora assunto grandissima importanza in seguito alla teoria della relatività.

Si tratta così, anche per n qualunque, di due sistemi semplici, reciproci rispetto al ds^2, ossia rispetto alla forma [32] (cfr. § 5, Oss. III).

Fra i parametri passa una relazione perfettamente analoga alla [5], e così pure si estendono senza difficoltà (mandando gli indici di sommatoria da 1 a n anzichè da 1 a 2) le formule [5'], [5''] e [6']. Chiameremo poi *vettore* $\boldsymbol{R}$ in una V_n il complesso di una direzione e di un numero positivo R (grandezza del vettore), e diremo *componenti contravarianti* R^i i prodotti di R per i parametri della direzione, *componenti covarianti* R_i i prodotti di R pei momenti: sussisteranno le formule analoghe alle [11], [11'], [11''].

Supponiamo le x espresse come funzioni regolari (cioè finite e continue, assieme a tutte le derivate di cui eventualmente si ragiona, nel campo che si considera) di p parametri (p intero, positivo, $< n$),

$$x_i = f_i\,(u_1, u_2, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

facendo l'ipotesi che fra le [33] ve ne siano almeno p di indipendenti, cioè che la matrice funzionale delle f rispetto alle u abbia p per caratteristica. Con ciò si legano le x con $n-p$ e non più che $n-p$ relazioni: quelle che si otterrebbero eliminando le u fra le [33]; e si definisce quindi una varietà subordinata W_p, a p dimensioni, di cui le u sono le coordinate, e che dicesi contenuta o *immersa* nella V_n, inquantochè ad ogni sistema di p valori attribuiti alle u corrisponde, per mezzo delle [33], un sistema di n valori attribuiti alle x (cioè ogni punto della varietà a p dimensioni appartiene a V_n) mentre non tutti i sistemi di valori attribuibili alle x soddisfano le [33] (non tutti i punti di V_n appartengono alla varietà a p dimensioni). Ora, se si tien presente l'analogia col caso di $n = 3$, $p = 2$ (v. § 1) si trova naturale di attribuire alla distanza di due punti della varietà subordinata lo stesso valore [32] che ha la distanza dei medesimi due punti in quanto appartenenti a V_n; ciò significa formare il ds^2 della varietà subordinata, sostituendo nella [32], per i dx_i, i valori ottenuti differenziando le [33]. Con tale criterio si otterranno facilmente i coefficienti della forma quadratica fondamentale nei du, e sarà completamente definita la metrica della varietà a p dimensioni W_p, immersa in V_n. Per $p = 1$, la definizione coincide con quella, data nel Cap. I, § 1, di una linea, di cui le [33] sono le equazioni parametriche.

Se $p = n - 1$, la W_p si chiama spesso *superficie* o, più propriamente, *ipersuperficie*.

§ 21. — Varietà euclidee. Una V_n qualunque può sempre considerarsi immersa in uno spazio euclideo. — Se il ds^2 si riduce alla somma dei quadrati dei differenziali (come nel caso delle coordinate cartesiane ortogonali), la forma quadratica dicesi *euclidea* e le coordinate si chiamano (per ovvia analogia coi casi elementari $n = 2,3$) *cartesiane ortogonali*. In tal caso evidentemente tutti i simboli di Christoffel sono identicamente nulli, poichè le a_{ik} sono costanti. Data una V_n generica (e quindi un generico ds^2) non è in generale possibile operare un cambiamento di variabili tale che il ds^2 assuma la forma euclidea, ossia stabilire in V_n un sistema di coordinate cartesiane: se ciò è possibile la V_n dicesi *varietà euclidea* (e si indica talora con S_n). Troveremo in seguito a quali condizioni debbono soddisfare le a_{ik} perchè ciò sia. È possibile però sempre considerare la V_n come immersa in una varietà euclidea a un numero di dimensioni $N > n$, ed ora lo faremo vedere.

Proponiamoci di determinare N funzioni delle x

$$y_1(x) \quad , \quad y_2(x), \ldots, y_N(x) \tag{34}$$

tali che, differenziandole e facendo la somma dei quadrati dei differenziali, si abbia una forma (quadratica nei dx) coincidente con l'assegnato ds^2, cioè tali che sia identicamente

$$\sum_{1}^{N}{}_{\nu} dy_\nu^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,.$$

Esprimendo i dy per i dx, avremo

$$\sum_{1}^{N}{}_{\nu} \sum_{1}^{n}{}_{ik} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k}\, dx_i\, dx_k = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,,$$

ossia, eguagliando i coefficienti di $dx_i dx_k$,

$$\sum_{1}^{N}{}_{\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} = a_{ik} \qquad (i,k=1,2,\ldots,n)\,. \tag{35}$$

Siamo così condotti a $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni differenziali (più precisamente a derivate parziali del primo ordine) nelle N incognite y: salvo eventuali incompatibilità — che una più accurata discussione mostrerebbe inesistenti — se ne può concludere che per $N = \frac{n(n+1)}{2}$ il problema è solubile; e lo è a maggior ragione per $N > \frac{n(n+1)}{2}$. Le y si possono evidentemente considerare coordinate cartesiane in una varietà *euclidea* S_N, in cui la V_n assegnata è immersa; le [34] ne costituiscono la rappresentazione parametrica (v. formule [33]). È dunque possibile immergere una V_n generica in una varietà euclidea S_N purchè N superi o eguagli $\frac{n(n+1)}{2}$. Però, per particolari V_n, può bastare un numero minore di dimensioni; per es., per le V_n euclidee, bastano n dimensioni: in tal caso le y sono coordinate cartesiane della stessa V_n.

Se N ha il minimo valore possibile, la differenza $N - n$ si dice *classe* della V_n. Poichè N non può superare $\frac{n(n+1)}{2}$, la classe non può superare

$$\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'altra parte, N non può essere (¹) minore di n e quindi il minimo valore della classe è 0. Per $n = 2$, la classe è 1, il che mostra che ogni ds^2 binario può risguardarsi appartenente ad una ordinaria superficie. In altri termini la rappresentazione parametrica da cui siamo inizialmente partiti (§ 1) non costituisce alcuna restrizione per lo studio intrinseco dei ds^2 a due variabili.

§ 22. — METRICA ANGOLARE. — Estendiamo ora alle V_n generiche la nozione di *angolo di due direzioni*. Il criterio più spontaneo consiste nell'estendere formalmente la [8] (e le sue equivalenti) man-

(¹) Una forma quadratica $\varphi = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$ si dice ***irriducibile*** quando non è possibile diminuire il numero delle variabili indipendenti, sostituendo alle ξ delle loro combinazioni lineari. Ciò ha sempre luogo quando la forma è definita, essendo in tal caso certo diverso da zero (cfr. § 2) il determinante $\boldsymbol{a}$. È quindi impossibile che sia $N < n$.

dando gli indici di sommazione da 1 a n anzichè da 1 a 2: ciò sarà lecito però (se si vogliono evitare valori immaginari di $\Im$) solo quando si sarà dimostrato che il secondo membro risulta < 1.

A tal uopo faremo alcune considerazioni di carattere algebrico sulle forme quadratiche.

Sia

$$\varphi_{zz} = \sum_{ik}^{n} {}_1\, a_{ik}\, z_i\, z_k$$

una forma quadratica definita positiva: supponiamo che le z siano combinazioni lineari di due diversi sistemi di variabili (non proporzionali fra loro); poniamo cioè

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i$$

e avremo

$$\varphi_{zz} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i)(\lambda\, x_k + \mu\, y_k) =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} \left[\lambda^2\, x_i\, x_k + \lambda\, \mu\, (x_i\, y_k + y_i\, x_k) + \mu^2\, y_i\, y_k\right].$$

Scindendo il secondo membro in tre sommatorie, e ponendo

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\; a_{ik}\, x_i\, x_k = \varphi_{xx}\,,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, x_i\, y_k = \sum_{1}^{n}{}_{ih}\, a_{ik}\, y_i\, x_k = \varphi_{xy} = \varphi_{yx}\,,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, y_i\, y_k = \varphi_{yy}\,,$$

risulta

$$\varphi_{zz} = \lambda^2\, \varphi_{xx} + 2\lambda\, \mu\, \varphi_{xy} + \mu^2\, \varphi_{yy}\,. \qquad [36]$$

Questa si può risguardare come una forma quadratica nelle variabili λ, μ: è facile dimostrare che è definita positiva, cioè che per λ e μ diverse da zero è sempre $\varphi_{zz} > 0$. Infatti φ_{zz}, considerata come forma quadratica nelle z, è sempre positiva, se una almeno delle z

è $\neq 0$, (cioè se le x e le y non sono proporzionali, come si è supposto).

Dalla [36] si ha dunque, qualunque siano λ e μ,

$$\lambda^2 \varphi_{xx} + 2\lambda\mu\, \varphi_{xy} + \mu^2 \varphi_{yy} > 0 \,.$$

Di qui, ricordando una proprietà delle disuguaglianze quadratiche, si ricava

$$\varphi_{xx}\, \varphi_{yy} - \varphi^2_{xy} > 0 \tag{37}$$

che è la formula che ci occorreva dimostrare.

Ora, tornando alla accennata estensione formale della [8], ricordiamo che dovevamo dimostrare che, qualunque siano i parametri λ^i, μ^i (purchè non proporzionali, poichè escluderemo il caso ovvio che le direzioni coincidano o siano opposte), si ha

$$\left(\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i\, \mu^k\right)^2 < 1 \,,$$

cioè

$$1 - \left(\sum_{1}^{n} a_{ik}\, \lambda^i\, \mu^k\right)^2 > 0 \,.$$

Una tale disuguaglianza si dimostra ora immediatamente, scrivendola, in virtù della relazione quadratica fra i parametri, così

$$\left(\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i\, \lambda^k\right)\left(\sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \mu^i\, \mu^k\right) - \left(\sum_{1}^{n} a_{ik}\, \lambda^i\, \mu^k\right)^2 > 0 \,;$$

e questa non è che la [37], in cui le λ^i e μ^i hanno preso il posto delle x_i e y_i.

Si può dunque assumere

$$\cos \vartheta = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i\, \mu^k \,, \tag{38}$$

e varranno anche le altre espressioni a questa equivalenti

$$\cos \vartheta = \sum_1^n{}_i \, \lambda^i \mu_i \,, \qquad [38']$$

$$\cos \vartheta = \sum_1^n{}_i \, \lambda_i \mu^i \,, \qquad [38'']$$

$$\cos \vartheta = \sum_1^n{}_{ik} \, a^{ik} \lambda_i \mu_k \,, \qquad [38''']$$

in cui appariscono, per una o per entrambe le direzioni, i *momenti* (§ 20), in luogo dei parametri.

Nel caso, provvisoriamente escluso, in cui si tratti di due direzioni coincidenti, od opposte ($\lambda^i = \pm \mu^i$), si deve naturalmente convenire che sia $\cos \vartheta = \pm 1$. Con ciò le quattro formule ora scritte seguitano a sussistere, riducendosi a ± 1 anche i secondi membri, in virtù delle identità fondamentali fra parametri e momenti di una stessa direzione $\sum_1^n{}_{ik} \, a_{ik} \lambda^i \lambda^k = \sum_1^n{}_i \, \lambda_i \lambda^i = \sum_1^n{}_{ik} \, a^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1$ (cfr. § 20).

Pensiamo ora la nostra V_n immersa in uno spazio euclideo S_N: date due direzioni λ, μ appartenenti a V_n (e spiccate dallo stesso punto), l'angolo che esse formano resta definito in due modi, poichè le direzioni λ, μ possono individuarsi sia coi loro parametri λ^i, μ^i relativi a V_n, sia con quelli $\lambda'^{\nu}, \mu'^{\nu}$ relativi a S_N, (1) e la [38] si può applicare sia agli uni che agli altri. Diciamo ϑ, l'angolo calcolato nel primo modo, ϑ' l'altro: mostreremo che $\cos \vartheta = \cos \vartheta'$. Abbiamo intanto (ricordando che rispetto alle coordinate cartesiane y di S_N il ds^2 ha la forma $\sum_1^N{}_\nu \, dy_\nu^2$)

$$\cos \vartheta = \sum_1^n{}_{ik} \, a_{ik} \lambda^i \mu^k \,,$$

$$\cos \vartheta' = \sum_1^N{}_\nu \, \lambda'^{\nu} \mu'^{\nu} \,.$$

(1) Notiamo incidentalmente che in una varietà euclidea, riferita a coordinate cartesiane, i parametri di una direzione e i suoi momenti coincidono, come immediatamente si verifica; e (di fronte a trasformazioni ortogonali di coordinate cartesiane) le formule di covarianza si identificano con quelle di contravarianza.

Ora i parametri λ'^{ν}, μ'^{ν} sono dati dalle formule analoghe alle [7], [7′]

$$\lambda'^{\nu} = \frac{dy_\nu}{ds} = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \lambda^i ,$$

$$\mu'^{\nu} = \frac{\delta y_\nu}{\delta s} = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta s} = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \mu^k .$$

Si ha quindi

$$\cos \vartheta' = \sum_{1}^{N}{}_\nu \sum_{1}^{n}{}_{ik} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \lambda^i \mu^k = \sum_{1}^{n}{}_{ik} \lambda^i \mu^k \sum_{1}^{N}{}_\nu \frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} ,$$

e per le [35]

$$\cos \vartheta' = \sum_{1}^{n}{}_{ik} \lambda^i \mu^k a_{ik} = \cos \vartheta ,$$

c. d. d.

Consideriamo ora due vettori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{V}$, di direzioni λ, μ rispettivamente: possiamo estendere la definizione di prodotto scalare, dando questo nome all'invariante

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} = R\,V \cos \vartheta ,$$

dove ϑ è l'angolo delle due direzioni. Corrispondentemente alle diverse espressioni di $\cos \vartheta$, avremo altrettante espressioni del prodotto scalare, che si otterranno moltiplicando per RV le [8], [8′], [8″], [8‴], (relative ad n qualunque), e saranno le seguenti

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V} = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} R^i V^k = \sum_{1}^{n}{}_i R^i V_i = \sum_{1}^{n}{}_i R_i V^i = \sum_{1}^{n}{}_{ik} a^{ik} R_i V_k .$$

Se uno dei vettori, per es. $\boldsymbol{V}$, è di lunghezza 1, chiameremo il prodotto $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{V}$ *proiezione* del vettore R sulla direzione individuata dal vettore unitario $\boldsymbol{V}$; ovvero *componente* secondo tale direzione.

L'ortogonalità di due vettori (non nulli) è manifestamente espressa dall'annullarsi del loro prodotto scalare.

Possiamo ora fare alcune utili osservazioni, relative a certe direzioni particolari. Chiamiamo [1] s_i la direzione della linea coordinata i (cioè il vettore unitario avente quella direzione, nel verso delle x_i crescenti): se si pon mente al fatto che per uno spostamento lungo la linea i si ha $dx_r = 0$ per $r \neq i$ e $ds = \sqrt{a_{ii}}\, dx_i$, si riconosce che i parametri $\overset{r}{s}_i$ della direzione s_i sono tutti nulli tranne l'i^{esimo} e precisamente:

$$\overset{r}{s}_i = 0 \quad (r \neq i) \quad , \quad \overset{i}{s}_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} .$$

Invece la direzione n_j, normale alla ipersuperficie coordinata $x_j = \text{cost}$, con che intendiamo perpendicolare a qualsiasi direzione tracciata su tale ipersuperficie, ha i *momenti* $n_{i|j}$ tutti nulli tranne l'j^{esimo}: basta osservare che n_j deve essere perpendicolare a ciascuna delle n–1 direzioni s_i $(i \neq j)$, il che porta a scrivere, applicando la [38], ai valori testè trovati per parametri di s_i,

$$n_{j|i} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} = 0 \qquad\qquad (i \neq j)$$

donde $n_{j|i} = 0$ (per $i \neq j$). Il valore di $n_{j|j}$ resta allora determinato dall'identità quadratica che lega i momenti, e che fornisce

$$n_{j|j} = \frac{1}{\sqrt{a^{jj}}} ,$$

se si suppone che il verso di n_j sia quello delle x_j crescenti: nell'ipotesi opposta, si dovrebbe premettere il segno —.

La n_j così definita (in un punto generico) risulta effettivamente perpendicolare a qualsiasi direzione λ tracciata sulla ipersuperficie $x_j = \text{cost}$ (passante per lo stesso punto). Infatti, per ogni cotale direzione, il parametro λ^j è nullo, e quindi di $\sum_1^n n_{j|i} \lambda^j = 0$.

Si vedrebbe immediatamente, applicando le cose ora dette, che l'angolo ω_{ik} fra le linee coordinate i e k è fornito da

$\cos\omega_{ik} = \sum_{ik} a_{ik} \overset{i}{s}_i \overset{k}{s}_k =$

$$\cos\omega_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\, a_{kk}}} ,$$

$= \sum a_{ik} \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{kk}}}$

[1] L'indice i non è, naturalmente, un indice di covarianza.

mentre l'angolo σ_{ik} fra le ipersuperficie coordinate $x_i = \text{cost}$ e $x_k = \text{cost}$ (cioè fra le loro normali $\boldsymbol{n}_i$ e $\boldsymbol{n}_k$) è dato da

$$\cos \sigma_{ik} = \frac{a^{ik}}{\sqrt{a^{ii}\, a^{kk}}}\,.$$

$\cos\sigma_{ik} = a^{ik}\, n_{i|i}\, n_{k|k}$

Con ciò è messo in luce il significato dei coefficienti del ds^2, e le circostanze geometriche equivalenti al loro annullarsi.

Cerchiamo ora il significato geometrico delle componenti covarianti e contravarianti di un vettore $\boldsymbol{R}$.

Calcoliamo a tal uopo le proiezioni ortogonali di $\boldsymbol{R}$ sulla direzione $\boldsymbol{s}_i$ e sulla $\boldsymbol{n}_i$. Troveremo

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{s}_i = \sum_{1}^{n}{}_r\, R_r\, s_i^{\,r} = \frac{R_i}{\sqrt{a_{ii}}}\,,$$

$$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}_i = \sum_{1}^{n}{}_r\, R^r\, n_{i\,|\,r} = \frac{R^i}{\sqrt{a^{ii}}}\,.$$

Si vede dunque che R_i e R^i rappresentano le proiezioni del vettore $\boldsymbol{R}$ sulla direzione coordinata $\boldsymbol{i}$ e sulla normale alla ipersuperficie coordinata $x_i = \text{cost}$, moltiplicate rispettivamente per $\sqrt{a_{ii}}$, $\sqrt{a^{ii}}$.

§ 23. — Definizione delle geodetiche. — Fissiamo, in una V_n generica, due punti qualunque A, B, e proponiamoci di ricercare la più breve fra tutte le linee che congiungono A con B. Questo problema è in un certo senso analogo a quello di ricercare i punti di massimo o minimo di una funzione (problema, la cui soluzione costituisce, come è noto, una notevole applicazione del calcolo differenziale): qui però non si tratta di trovare i *punti* e quindi i valori di una (o, in generale, di n) variabili che soddisfano la condizione voluta; bensì di determinare una *linea*, e quindi, analiticamente, determinare la forma di n funzioni (le equazioni parametriche della linea). Il problema è quindi di un ordine di difficoltà più elevato: mentre il primo conduceva a delle equazioni in termini finiti, questo porta a certe equazioni differenziali. La risoluzione di questo problema, e di altri affini, è il compito principale del *calcolo delle variazioni*. Ne richiameremo ora brevemente il concetto fondamentale il quale non differisce, per il principio, da quello che porta alla soluzione dell'altro più elementare problema dei massimi e minimi di una funzione assegnata.

Ricordiamo che se una funzione $f(x)$ (per fissare le idee, supponiamo che la variabile sia una sola) ha un massimo o un minimo in x_0, ivi il suo differenziale $df = f'(x_0)\,dx$ è nullo, qualunque sia dx (e quindi $f'(x_0) = 0$), cioè, spostandosi infinitamente poco, a destra o a sinistra, dal punto x_0, la f si mantiene (a meno di infinitesimi di ordine superiore) costante: ciò si vede del resto intuitivamente, tenendo presente la rappresentazione grafica (V. punti M e N). Non è vera però l'inversa, che cioè, dove $df = 0$, ivi necessariamente vi sia un massimo o un minimo (v., p. es., il punto P della annessa figura): i massimi e i minimi vanno cercati *fra* i punti, in cui $df = 0$.

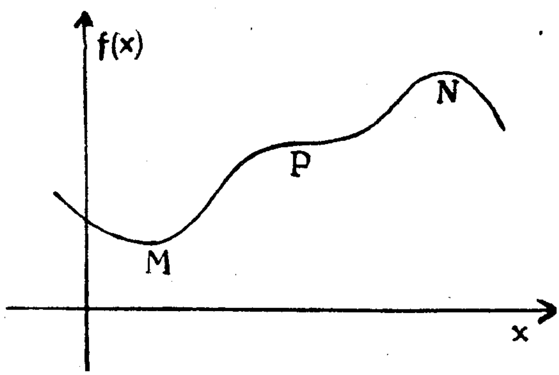


Fig. 2.

Vediamo ora di applicare questo metodo al caso che si voglia determinare la linea più breve che congiunge A con B, senza uscire da una assegnata V_n (si fissi l'attenzione su una linea tracciata sopra una superficie, $n = 2$). Sia g una tal linea: tracciamo una linea g', avente gli stessi estremi, e infinitamente poco discosta da g, ma del resto completamente arbitraria: potremo pensarla ottenuta deformando infinitamente poco la g, cioè portando ciascun suo punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in $(x_1 + \delta x_1, \ldots, x_n + \delta x_n)$. Se g è la più breve congiungente, la sua lunghezza *non si altera* (1) in questa deformazione (a meno di infinitesimi di ordine superiore), talchè, detta l la lunghezza di g, ed $l + \delta l$ quella di g' si avrà (per una tale g)

$$\delta l = 0 \qquad [39]$$

qualunque sia la g' (salve le limitazioni già imposte), condizione analoga all'annullarsi del df, nel caso precedente. Anche qui però è da

(1) Per una trattazione più rigorosa e completa, rimandiamo ai trattati di analisi.

notare che in generale la [39] può essere soddisfatta non soltanto dalla linea richiesta, ma anche da altre linee che *non* segnano il più breve cammino da A a B.

Per es., A e B siano su di un cilindro, anzi, su una stessa generatrice di esso: il più breve cammino è evidentemente segnato dalla generatrice stessa, e questa, lo si vedrebbe facilmente, soddisfa la [39], ma anche le infinite eliche che vanno da A a B, avvolgendosi 1, 2, ... volte sul cilindro, soddisfano la stessa equazione.

Tutte le linee che soddisfano la condizione [39] le chiameremo *geodetiche*: esse godono di notevoli proprietà caratteristiche, che si possono ricavare come conseguenze della [39] (p. es., le geodetiche di una superficie hanno il piano osculatore normale al piano tangente della superficie stessa; proprietà che abbiamo anzi adottato, nel § 11, come definizione). *Le linee di minima lunghezza* fra due punti dati vanno cercate fra le geodetiche che passano per quei due punti.

È questa la definizione da tener presente nel seguito: è da notare però che alcuni autori definiscono le geodetiche partendo da un'altra proprietà. Si potrebbe infatti dimostrare, che, fissato un punto A su una geodetica g, per tutti i punti B abbastanza vicini ad A, la g è l'*unica* geodetica che li congiunge, e costituisce perciò la loro più breve congiungente. Quindi si può anche dire che le geodetiche sono le linee che segnano il più breve cammino fra due *qualunque* dei loro punti, *purchè abbastanza vicini*.

Con questa restrizione, le due definizioni risulterebbero effettivamente coincidenti.

§ 24. — Equazioni differenziali delle geodetiche. — Vediamo ora come la proprietà di non variar di lunghezza in una deformazione infinitesima (che non sposti gli estremi), proprietà espressa compendiosamente dalla [39], si traduca in n equazioni differenziali cui debbono soddisfare le n funzioni

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

che definiscono la curva g.

Le equazioni di g' siano

$$x_i = x_i(s) + \delta x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove le δx_i si risguardano funzioni (infinitesime) di s, dotate di derivate prime e seconde finite e continue, e nulle per $s = 0$ e $s = l$: del resto arbitrarie.

Prendiamo un tratto infinitesimo di g, PP_1, di lunghezza ds: si tratta di calcolare il δds, cioè l'incremento (o, come si dice, la variazione) subito da ds nella deformazione che porta P in P' e P_1 in P'_1. Se dx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ è la differenza fra le coordinate di P e quelle di P_1, la corrispondente differenza dopo la deformazione, (che denoteremo con $d(x + \delta x_i) = dx_i + d\,\delta x_i$, dove $d\,\delta x_i$, è, naturalmente il differenziale della funzione δx) si calcola nel modo seguente:

le coordinate di P' sono $x_i + \delta x_i$;
quelle di P'_1 sono $(x_i + dx_i) + \delta(x_i + dx_i)$;
quindi la differenza cercata è $dx_i + \delta dx_i$.

Ne segue che

$$\delta dx_i = d\delta x_i \,, \tag{40}$$

formula di cui faremo uso fra poco. Ciò premesso, partiamo dall'espressione del ds^2, e calcoliamone la variazione, differenziando col simbolo δ.

Si ha

$$2\,ds\,.\,\delta\,ds = \sum_1^n{}_{jk}\,\delta a_{jk}\,dx_j\,dx_k + \sum_1^n{}_{jk}\,a_{jk}\,dx_k\,\delta\,dx_j + \sum_1^n{}_{jk}\,a_{jk}\,dx_j\,\delta\,dx_k\,.$$

Poichè le ultime due sommatorie coincidono, potremo scrivere, ricordando la [40],

$$2\,ds\,\delta ds = \sum_1^n{}_{jk}\,\delta a_{jk}\,dx_j\,dx_k + 2\sum_1^n{}_{jk}\,a_{jk}\,dx_j\,d\delta x_k\,.$$

Di qui, dividendo per $2ds$, e indicando con un punto le derivate rispetto a s, ricaviamo

$$\delta ds = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_{jl}\,\delta\,a_{jl}\,\dot{x}_j\,\dot{x}_l\,ds + \sum_1^n{}_{jk}\,a_{jk}\,\dot{x}_j\,d\delta x_k\,,$$

da cui, poichè

$$\delta a_{jl} = \sum_1^n{}_k \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k}\,\delta x_k\,,$$

risulta il cercato δds sotto la forma

$$\delta ds = \frac{1}{2} \sum_{jlk}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_l \, \delta x_k \, ds + \sum_{jk}^{n} a_{jk} \dot{x}_j \, d\delta x_k .$$

Ora, poichè la lunghezza di g è

$$l = \int_{AB} ds ,$$

la variazione che nella [39] è uguagliata a 0 è

$$\delta l = \int_{AB} \delta ds ,$$

ossia

$$\delta l = \int_{AB} \frac{1}{2} \left(\sum_{jlk}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_l \, \delta x_k \right) ds + I \qquad [41]$$

dove si è posto

$$I = \int_{AB} \sum_{1}^{n}{}_{jk} \, a_{jk} \, \dot{x}_j \, d \, \delta x_k . \qquad [42]$$

Lasciamo da parte per un momento la [41], e occupiamoci della trasformazione di questo integrale con lo scopo di mettere in evidenza anche in esso le variazioni arbitrarie δx_k. Con una integrazione per parti avremo

$$I = \left[\sum_{1}^{n}{}_{jk} \, a_{jk} \, \dot{x}_j \, \delta x_k \right]_{AB} - \int_{AB} \sum_{1}^{n}{}_{jk} \, d\,(a_{jk} \, \dot{x}_j) \, \delta x_k .$$

La parte integrata si annulla, perchè $\delta x_k = o$ agli estremi: l'altra parte, eseguendo la differenziazione, fornisce

$$I = - \int_{AB} \sum_{1}^{n}{}_{jk} \, a_{jk} \, \ddot{x}_j \, ds \, \delta x_k - \int_{AB} \sum_{1}^{n}{}_{jk} \, \dot{x}_j \, da_{jk} \, \delta x_k . \qquad [42']$$

Ora l'ultima sommatoria, sviluppando il da_{jk}, si può scrivere

$$\sum_{jkl}^{n} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} \dot{x}_j \dot{x}_l \delta x_k ds ,$$

oppure, scambiando gli indici j, l,

$$\sum_{jkl}^{n} \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_j} \dot{x}_j \dot{x}_l \delta x_k ds .$$

Noi assumeremo come sua espressione, da porre nella [42′], la media di queste due, cosicchè la [42′] diverrà

$$I = -\int_{AB} \sum_{jk}^{n} a_{jk} \ddot{x}_j \delta x_k ds - \int_{AB} \tfrac{1}{2} \left(\sum_{jlk}^{n} \left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_j} \right] \dot{x}_j \dot{x}_l \delta x_k \right) ds ,$$

Ora, riprendiamo la [41] e poniamovi questa espressione di I, formando un solo integrale, e raccogliendo a fattor comune $\delta x_k ds$; avremo

$$\delta l = -\int_{AB} \sum_{k}^{n} \left\{ -\tfrac{1}{2} \sum_{jl}^{n} \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_k} \dot{x}_j \dot{x}_l + \sum_{j}^{n} a_{jk} \ddot{x}_j + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} \sum_{jl}^{n} \left[\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{lk}}{\partial x_j} \right] \dot{x}_i \dot{x}_l \right\} \delta x_k ds$$

ovvero, ricordando la definizione dei simboli di Christoffel,

$$\delta l = -\int_{AB} \sum_{k}^{n} \left\{ \sum_{j}^{n} a_{jk} \ddot{x}_j + \sum_{jl}^{n} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} \dot{x}_j \dot{x}_l \right\} \delta x_k ds .$$

Poniamo

$$p_k = \sum_{j}^{n} a_{jk} \ddot{x}_j + \sum_{jl}^{n} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} \dot{x}_j \dot{x}_l , \qquad [43]$$

e questa formula assumerà la forma compendiosa.

$$\delta l = -\int_{AB} \sum_1^n {}_k \, p_k \, \delta x_k \, ds \, . \qquad [44]$$

Da tutto questo calcolo si conclude che la [39] si può scrivere

$$\int_{AB} \sum_1^n {}_k \, p_k \, \delta x_k \, ds = 0 \, . \qquad [39']$$

Ora, poichè la [39′] deve valere comunque si scelgano le funzioni arbitrarie δx_k (salvo le condizioni qualitative imposte), deve essere necessariamente

$$p_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n): \qquad [45]$$

altrimenti basterebbe prendere le δx_k dello stesso segno delle corrispondenti p_k (il che può farsi rispettando le suaccennate condizioni), per esser certi che la sommatoria risulterebbe positiva lungo tutto l'arco di integrazione, e quindi l'integrale non si annullerebbe. È questa la considerazione fondamentale del calcolo delle variazioni: per mezzo di essa dalla condizione [39′] (che non è che la [39] sviluppata) si ricavano le n equazioni differenziali [45] che, scritte distesamente, sono

$$\sum_1^n {}_j \, a_{jk} \, \ddot{x}_j + \sum_1^n {}_{jl} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} \dot{x}_j \, \dot{x}_l = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \, . \qquad [45']$$

È comodo presentare questo sistema risolto rispetto alle $\ddot{x}$: a tal uopo conviene introdurre le quantità

$$p^i = \sum_1^n {}_k \, a^{ik} \, p_k \, , \qquad [46]$$

e sostituire alle [45] le equivalenti combinazioni lineari

$$p^i = 0$$

ossia

$$\ddot{x}_i + \sum_{jl}^{n}{}_1 \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \dot{x}_j \dot{x}_l = 0 . \qquad [47]$$

Queste n equazioni differenziali del 2° ordine nelle n funzioni incognite $x_i(s)$ equivalgono alla [39] e sono perciò le *equazioni caratteristiche delle geodetiche*: la loro integrazione fornisce le equazioni parametriche di tali curve. Gli integrali conterranno, come è noto, $2n$ costanti arbitrarie, che si possono determinare con la condizione che la geodetica passi per due punti assegnati, oppure che esca da un punto dato, e abbia una assegnata direzione.

Si osservi che nelle [47] figurano solo elementi intrinseci, il che si poteva prevedere dalla stessa definizione di geodetica.

§ 25. — CURVATURA GEODETICA. — Prendiamo occasione dagli sviluppi del § precedente, per introdurre una nozione geometrica assai espressiva e feconda spettante ad una curva qualsiasi $x_i = x_i(s)$ della nostra V_n.

Conviene stabilire a tal uopo che le quantità p_k, definite dalla [43], in corrispondenza ad una generica curva $x_i = x_i(s)$, sono *covarianti*, (e, per conseguenza, le p^i sono contravarianti), dalla qual cosa saremo tratti a coordinare ad ogni punto della linea l (*a priori* qualunque) il *vettore* $\boldsymbol{p}$, di cui quelle sono le componenti. Si osservi dunque che, se passiamo, con una qualunque trasformazione, dalle variabili x a nuove variabili $\bar{x}$, e chiamiamo $\bar{p}_k$ i valori delle p_k calcolati in questo nuovo sistema, avremo da [44] per l'invarianza di δl

$$\delta l = -\int_{AB} \sum_{1}^{n}{}_k \bar{p}_k \, \delta\bar{x}_k \, ds ,$$

e quindi

$$0 = \int_{AB} \left[\sum_{1}^{n}{}_k \bar{p}_k \, \delta\bar{x}_k - \sum_{1}^{n}{}_k p_k \, \delta x_k \right] ds .$$

Con la stessa considerazione che ci ha condotto dalla [39′] alla [45], possiamo di qui concludere che deve aversi in ogni punto di l

$$\sum_{1}^{n}{}_k \bar{p}_k \, \delta\bar{x}_k - \sum_{1}^{n}{}_k p_k \, \delta x_k = 0 .$$

il che esprime l'invarianza della forma lineare (nelle variabili contravarianti arbitrarie δx_k)

$$\sum_1^n{}_k\, p_k\, \delta x_k\ ,$$

e quindi la covarianza delle p_k. Ne segue, in virtù delle [46], che il sistema contravariante (reciproco) è costituito dalle p^i, ossia dai primi membri delle [47].

Chiameremo *curvatura geodetica* della linea l in un suo punto generico il vettore $\boldsymbol{p}$ le cui componenti covarianti sono definite da [43], e quelle contravarianti, per conseguenza, da [46], ossia da

$$p^i = \ddot{x}_i + \sum_1^n{}_{jl} \begin{Bmatrix} jl \\ i \end{Bmatrix} \dot{x}_j \dot{x}_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ . \tag{43'}$$

Corollario immediato è che *le geodetiche sono le linee, la cui curvatura geodetica è dovunque nulla.*

Più generalmente si ha, per la lunghezza del vettore $\boldsymbol{p}$, una notevole proprietà, rilevata dal LIPKA, (1) di cui ci limitiamo a riportare l'enunciato: *Il valore assoluto della curvatura geodetica si presenta*, come nello spazio ordinario, *quale rapporto fra angolo di contingenza e arco elementare*, chiamandosi angolo di contingenza quello compreso, in uno degli estremi dell'arco, fra la tangente ivi e la parallela alla direzione tangenziale nell'altro estremo.

Un'altra proprietà notevole è che la *curvatura geodetica è normale alla curva*, vale a dire (poichè i parametri della tangente alla curva sono le $\dot{x}_i$) che si ha

$$\sum_1^n{}_k\, p_k\, \dot{x}_k = 0\ . \tag{48}$$

Per dimostrarlo, partiamo dall'identità

$$\sum_1^n{}_{jk}\, a_{kj}\, \dot{x}_k\, \dot{x}_j = 1$$

(che si ottiene dividendo per ds^2 la [32]) e deriviamola rispetto a s.

---

(1) *Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXXI (1° sem. 1922), pp. 353-356.

Avremo

$$2 \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{kj}\, \dot{x}_k\, \ddot{x}_j + \sum_{1}^{n}{}_{jk}\, \dot{a}_{kj}\, \dot{x}_k\, \dot{x}_j = 0 \ ,$$

ossia

$$2 \sum_{1}^{n}{}_{jk}\, a_{kj}\, \dot{x}_k\, \ddot{x}_j + \sum_{1}^{n}{}_{jkl}\, \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_l}\, \dot{x}_k\, \dot{x}_j\, \dot{x}_l = 0 \ ,$$

e per la [24′]

$$2 \sum_{1}^{n}{}_{jk}\, a_{kj}\, \dot{x}_k\, \ddot{x}_j + \sum_{1}^{n}{}_{jkl} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} \dot{x}_k\, \dot{x}_j\, \dot{x}_l + \sum_{1}^{n}{}_{jkl} \begin{bmatrix} k & l \\ & j \end{bmatrix} \dot{x}_k\, \dot{x}_j\, \dot{x}_l = 0 \ .$$

L'ultima sommatoria si identifica con la seconda, con lo scambio materiale fra k e j: quindi si può scrivere, sopprimendo un fattore 2,

$$\sum_{1}^{n}{}_{jk}\, a_{kj}\, \dot{x}_k\, \ddot{x}_j + \sum_{1}^{n}{}_{jkl} \begin{bmatrix} j & l \\ & k \end{bmatrix} \dot{x}_k\, \dot{x}_j\, \dot{x}_l = 0 \ .$$

Questa non è che la [48], ove per p_k si sia posta la espressione [43]: resta così dimostrato l'asserto.

Nello spazio ordinario, come si riconosce subito, la direzione della curvatura geodetica coincide con quella della normale principale, e la grandezza si identifica con la *flessione* o *prima curvatura* della curva.

§ 26. — Estensione della nozione di parallelismo. Vettori associati secondo il Bianchi. — Premesse queste considerazioni generali sulla geometria delle V_n, vogliamo estendere a queste la nozione di parallelismo o, più generalmente, di equipollenza già definita per le V_2.

Manca veramente in questo caso un criterio analogo a quello, poichè non esiste in generale la sviluppabile circoscritta da cui avevamo preso le mosse.

È invece adattabile immediatamente anche alle V_n la legge differenziale del parallelismo espressa dall'equazione simbolica [19]. Consideriamo a tal uopo un vettore $\boldsymbol{R}$ spiccato da un punto P di V_n, e diciamo $\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R}$, il vettore equipollente spiccato da un punto vicinissimo di V_n, P_1. Potremo pensare la V_n (e quindi i vettori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R}$) immersa in uno spazio euclideo S_N (dove N è un intero sufficientemente grande), e quindi caratterizzare i vettori $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} + d\boldsymbol{R}$, oltrechè con le loro componenti (covarianti o contravarianti) rispetto a V_n, anche con le loro componenti Y_ν, $Y_\nu + dY_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, N$), rispetto a un sistema di coordinate cartesiane $y_1, y_2, \ldots, y_N$, in S_N. Consideriamo poi un arbitrario spostamento infinitesimo δP, contenuto in V_n e spiccato da P: esso potrà caratterizzarsi sia intrinsecamente mediante i δx_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), sia, riferendosi alle coordinate cartesiane, mediante i δy_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, N$): si noti però che, mentre i primi sono arbitrari, i secondi non lo sono, in base (§ 21) alle equazioni che definiscono le y in funzione delle x. Si può anche dire, con linguaggio geometrico, che lo spostamento deve soddisfare alla condizione di essere *tangenziale*, cioè di appartenere a V_n. Ciò premesso, definiremo il vettore $d\boldsymbol{R}$, e quindi il trasporto per parallelismo, mediante l'equazione simbolica [19] che si esplicita (§ 22) in forma analoga alla [19'], cioè

$$\sum_1^N{}_\nu \, dY_\nu \, \delta y_\nu = 0, \tag{49}$$

valida per tutti gli spostamenti che soddisfano la detta condizione.

La formula [49] non differisce dalla [19'] che definisce il parallelismo superficiale, se non per il fatto che l'indice ν va da 1 a N, anzichè da 1 a 3. Tutti i calcoli successivi procedono automaticamente come al § 15.

Si comincia col mettere in evidenza i δx, ponendo

$$d\boldsymbol{R} \times \delta P = \sum_1^N{}_\nu \, dY_\nu \, \delta y_\nu = \sum_1^n{}_k \, \tau_k \, \delta x_k \,, \tag{50}$$

e, dopo analoghe trasformazioni, si trovano per le τ_k le espressioni

$$\tau_k = \sum_1^n{}_j \, a_{kj} \, dR^j + \sum_1^n{}_{jl} \begin{bmatrix} j\,k \\ l \end{bmatrix} R^j \, dx_l \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{51}$$

ovvia generalizzazione delle [21'']. Manifestamente si tratta qui pure di formazioni *covarianti* (rispetto a trasformazioni qualisivogliono delle x), in base all'identità [50]. Anche il sistema reciproco

$$\tau^i = \sum_1^n {}_k\, a^{ik}\, \tau_k$$

si esprime in perfetta analogia colle [21'''], cioè sotto la forma

$$\tau^i = dR^i + \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} R^j\, dx_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [51']$$

Dalle [49] e [50] si è in definitiva condotti alle *equazioni intrinseche del parallelismo*

$$\tau_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

equivalenti alle $\tau^i = 0$, ossia alle

$$dR^i + \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} R^j\, dx_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,, \qquad [52]$$

le quali definiscono gli incrementi dR^i delle componenti contravarianti quando si passa, per parallelismo rispetto a V_n, da P (di coordinate x) a P_1 (di coordinate $x + dx$).

Per le componenti covarianti si trovano, come al § 17, le equazioni equivalenti

$$dR_i = \sum_1^n {}_{jl} \left\{ \begin{matrix} i\ l \\ j \end{matrix} \right\} R_j\, dx_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,. \qquad [52']$$

Sia da queste che dalle [52] apparisce come il trasporto per parallelismo abbia carattere intrinseco rispetto alla metrica di V_n. Ciò non era *a priori* evidente in base alla definizione geometrica da noi adottata, la quale si traduce nella formula [49], facendo intervenire uno spazio ambiente S_N.

Le [52] e [52′] sono, si può dire, identiche alle [23] e [27] valide per le V_2 (differendone materialmente solo per il numero delle dimensioni): va da sè che $\left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{matrix} i\ l \\ j \end{matrix} \right\}$ designano i simboli di Christoffel di 2ª specie formati col ds^2 di V_n.

Tutte le proprietà che abbiamo dedotto dalle equazioni del parallelismo superficiale (in particolare: il trasporto lungo una curva finita qualunque è sempre possibile, e in modo unico; il trasporto conserva il prodotto scalare di due vettori, e quindi le lunghezze e gli angoli) si estendono senza difficoltà al parallelismo in V_n. Mostreremo nel § seguente che si può anche estendere la proprietà di autoparallelismo delle geodetiche, che nel caso delle superficie avevamo dimostrato per via geometrica.

Qui vogliamo ancora segnalare la nozione dovuta al BIANCHI (¹) di *vettore associato*, lungo una curva T, ad un generico vettore $\boldsymbol{R}$, funzione dei punti di T. Se gli $\boldsymbol{R}(s)$ uscenti dai vari punti di T non sono paralleli fra loro, lungo T, il sistema contravariante semplice τ^i, definito dalle [51′], non è identicamente nullo. Perciò le

$$V^i = \frac{\tau^i}{ds} = \frac{dR^i}{ds} + \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} R^j \frac{dx_l}{ds} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si possono risguardare come *componenti contravarianti* di un vettore $\boldsymbol{V}$ non nullo, funzione esso pure dei punti di T. La direzione e la lunghezza di questo vettore sono chiamate dal BIANCHI rispettivamente *direzione* e *curvatura associate*, punto per punto, col vettore $\boldsymbol{R}(s)$. Se questo si riduce al versore tangenziale sulla stessa curva T, cioè in particolare se $R^i = \frac{dx_i}{ds} = \dot{x}_i$, siamo ricondotti al vettore $\boldsymbol{p}$ di curvatura geodetica, considerato nel prec. §.

Si può dimostrare che in ogni caso $\boldsymbol{V}$ (ove non sia nullo) risulta perpendicolare ad $\boldsymbol{R}$, e stabilire altre interessanti proprietà messe in luce dal BIANCHI. Noi dobbiamo limitarci a rimandare alla memoria citata, ovvero all'appendice al vol. II delle sue *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ediz., Bologna: Zanichelli, 1923).

(¹) Cfr. *Sul parallelismo vincolato di Levi-Civita nella metrica degli spazi curvi*, Rend. della R. Acc. di Napoli, vol. XXVIII, 1922, pp. 150-171.

§ 27. — Autoparallelismo delle geodetiche. — Ricaveremo questa proprietà, per via analitica, dalle equazioni del parallelismo giovandoci delle equazioni differenziali che abbiamo trovato per le geodetiche.

Chiamiamo λ un vettore unitario definito in tutti i punti della geodetica che consideriamo e avente dovunque la direzione di questa: vogliamo dimostrare che esso si può considerare trasportato per parallelismo lungo la geodetica stessa.

Siano infatti λ^i i suoi parametri.

Ricordando la definizione di questi, e facendo intervenire le equazioni parametriche $x_i = x_i(s)$ della geodetica di cui si tratta, avremo manifestamente

$$\lambda^i = \frac{dx_i}{ds} = \dot{x}_i ,$$

e quindi

$$\frac{d\lambda^i}{ds} = \ddot{x}_i .$$

Ora le $\ddot{x}$ e le $\dot{x}$ sono legate fra loro dalle equazioni [47], che caratterizzano le geodetiche. Sostituendovi, per $\dot{x}_i$ e $\ddot{x}_i$, λ^i e $\frac{d\lambda^i}{ds}$, abbiamo

,α

$$p^i = \frac{d\lambda^i}{ds} + \sum_{jl}^{n} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^j \dot{x}_l = 0 , \qquad [53]$$

e moltiplicando per ds

$$p^i\, ds = d\lambda^i + \sum_{jl}^{n} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^i\, dx_l = 0 , \quad * \ d^* \lambda^i = 0$$

equazioni che esprimono il trasporto per parallelismo del vettore λ.

Val la pena di rilevare che, in base alle [51′] e [53], le $p^i ds$ si presentano come un caso particolare delle τ^i (in cui il generico vettore $\boldsymbol{R}$ è sostituito dal vettore unitario λ di componenti contravarianti $\dot{x}_i$). Di qua la contravarianza delle p^i, o, ciò che fa lo stesso, la covarianza delle p_i, che noi abbiamo dimostrata in modo diretto nel § precedente.

§ 28. — CENNI RELATIVI AL CASO DI UN ds^2 INDEFINITO. — Abbiamo convenuto (§ 20) di dire che una varietà V_n ad n dimensioni è metricamente definita quando vi si associa una forma differenziale quadratica, a coefficienti reali a_{ik},

$$\varphi = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Abbiamo subito dopo introdotta l'ipotesi che la forma φ sia definita positiva, attenendoci esclusivamente ad essa nei §§ precedenti. Vogliamo ora dire una parola anche sul caso, in cui la φ si supponga ancora irriducibile, ossia tale che il suo discriminante a sia diverso da zero, ma non più definita, bensì suscettibile di assumere, per certi sistemi di differenziali dx_i, valori positivi, e per certi altri, valori negativi.

Anche in tal caso, fissato un generico punto P di coordinate x_i e un punto infinitamente vicino P' di coordinate $x_i + dx_i$, si pone

$$ds^2 = \varphi = \sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k , \qquad [54]$$

chiamando il ds^2 (che può ora essere positivo, negativo o nullo) quadrato dell'elemento lineare (distanza) o meglio *intervallo* dei due punti P e P'.

Fra gli ∞^n sistemi (reali) di differenziali dx_i, cioè, come diremo, avendo riguardo soltanto ai rapporti, fra le ∞^{n-1} *direzioni* spiccate da P, ve ne ha ∞^{n-2} per cui è verificata l'equazione (quadratica)

$$ds^2 = 0 . \qquad [55]$$

Queste direzioni che si chiamano di *intervallo nullo* costituiscono (interpretando per un momento i differenziali dx_i come coordinate cartesiane di origine P) un cono quadrico di vertice P. Tale cono separa (nella stella di direzioni uscenti da P) due regioni, in una delle quali è

$$ds^2 > 0 , \qquad [56]$$

e nell'altra

$$ds^2 < 0 . \qquad [57]$$

Tutte le direzioni che cadono nella prima regione si chiamano *di prima specie*, ovvero (con appellativo suggerito dall'interpretazione relativista) *temporali:* tutte quelle per cui vale invece la disuguaglianza [57] si chiamano di *seconda specie* o *spaziali*. Per le une e per le altre si definiscono i parametri mediante le posizioni

$$\lambda^i = \frac{dx_i}{|ds|} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{58}$$

mentre non c'è l'analogo per le direzioni di intervallo nullo in corrispondenza a cui $ds^2 = 0$.

Dacchè, per le direzioni temporali, $ds^2 > 0$, designando con ds il valore aritmetico della radice quadrata di ds^2, si ha $|ds| = ds$, e tutto va come nel caso delle quadriche definite.

Invece, per le direzioni spaziali, avendosi

$$|ds^2| = -ds^2 = -\sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

l'identità quadratica verificata dai parametri λ^i è

$$\sum_1^n {}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i \lambda^k = -1, \tag{59}$$

col secondo membro -1, anzichè 1, come per le direzioni temporali.

Con queste premesse non appare certo difficile l'estensione sistematica dei §§ precedenti al caso indefinito. Siccome per altro non ci consta che essa sia stata compiuta in modo esauriente, ci permettiamo di segnalarla al lettore.

Vogliamo soltanto rilevare una circostanza essenziale, pressochè evidente *a priori*, e molto spesso invocata nella teoria della relatività, cioè che definizioni, immagini geometriche e formule dei §§ precedenti sono certo trasportabili al caso indefinito, purchè si tenga presente da un lato il comportamento eccezionale delle direzioni di intervallo nullo e si introducano d'altro lato ovvie modificazioni formali richieste dalla [59], quando intervengono direzioni spaziali.

Noi ci accontenteremo di questa indicazione, terminando con due esempi:

1° La condizione di ortogonalità fra due direzioni, siano esse temporali o spaziali, di parametri λ^i, μ^i, è in ogni caso espressa da

$$\sum_1^n{}_{ik}\, a_{ik}\, \lambda^i\, \mu^k = 0 .$$

2° Se ci si limita a considerare linee tutte costituite da elementi temporali ($ds^2 > 0$), rimane valida automaticamente la trattazione del § 24, e si è condotti alle stesse equazioni [47] delle linee geodetiche.

PARTE SECONDA

Forma quadratica fondamentale e calcolo differenziale assoluto

CAPITOLO VI.

Derivazione covariante. Invarianti e parametri differenziali. Coordinate localmente geodetiche.

§ 1. — DERIVATE COVARIANTI. — Riattaccandoci alle considerazioni svolte alla fine del Cap. IV, ci proponiamo ora di generalizzare l'operazione di derivazione, sostituendo alle ordinarie derivate degli elementi di un tensore alcune combinazioni lineari di tali derivate e degli elementi del sistema assegnato, formanti, a loro volta, un sistema misto (o, in particolare, covariante) avente un indice di covarianza di più del dato. E precisamente, sia $A_{i_1 \ldots i_m}^{h_1 \ldots h_\mu}$ il generico sistema assegnato, i cui elementi siano funzioni delle x ossia, con linguaggio geometrico, del posto: dedurremo da questo un altro sistema $A_{i_1 \ldots i_m l}^{h_1 \ldots h_\mu}$, (in cui l è un nuovo indice di covarianza) che, nel caso particolare che le coordinate siano cartesiane, si riduca al sistema $\dfrac{\partial A_{i_1 \ldots i_m}^{h_1 \ldots h_\mu}}{\partial x_l}$.

Per semplicità di scrittura, consideriamo dapprima un sistema misto A_i^h con un solo indice di covarianza i e un solo indice di contravarianza h.

Fissata l'attenzione su un determinato punto della V_n (prescindendo cioè dal fatto che le A_i^h sono definite come funzioni del posto), ricordiamo che la legge di trasformazione delle A_i^h in un cambiamento di coordinate è definita dall'invarianza della forma

$$F = \sum_{ih}^{n} {}_1 A_i^h \xi^i u_h , \tag{1}$$

in cui le ξ^i costituiscono un generico sistema contravariante, o, se si vuole, sono le componenti contravarianti di un generico vettore ξ: analogamente le u_h si possono considerare componenti covarianti di un generico vettore $\boldsymbol{u}$.

Ora, poichè ad ogni punto di V_n è coordinato un sistema di valori delle A_i^h, potremo in ogni punto scegliere due arbitrari vettori ξ, $\boldsymbol{u}$, e comporre con essi e le A_i^h una forma invariante.

Immaginiamo fatta questa scelta in un ben determinato, ma qualunque, punto P, e prendiamo in considerazione un generico punto P_1 infinitamente vicino a P, convenendo di assumere, in P_1, come ξ, $\boldsymbol{u}$ i vettori *paralleli* a quelli che ci siamo scelti in P (trattandosi di trasporto infinitesimo, non interviene la curva di trasporto). Indichiamo genericamente con l'operatore δ l'incremento di una quantità nel passaggio da P a P_1, e proponiamoci di calcolare il δF. Avremo, differenziando la [1] col simbolo δ,

$$\delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ih} \left\{ \delta A_i^h \xi^i u_h + A_i^h \delta \xi^i u_h + A_i^h \xi^i \delta u_h \right\} .$$

Ora, per la convenzione fatta poc'anzi sui vettori ξ e $\boldsymbol{u}$, le $\delta \xi^i$ e le δu_h si debbono calcolare con le formule del parallelismo (rispettivamente con le [52] e [52']), mentre, le A_i^h essendo per ipotesi funzioni del posto, δA_i^h è dato dalla consueta regola di differenziazione

$$\delta A_i^h = \sum_{1}^{n}{}_{l} \frac{\partial A_i^h}{\partial x_l} \delta x_l .$$

(52) $\quad d R^i + \sum_1^n{}_{jl} \left\{ {jl \atop i} \right\} R^j dx_l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

(52') $\quad d R_i = \sum_1^n{}_{jl} \left\{ {il \atop j} \right\} R_j \, dx_l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$

Tenuto conto di questo, si ha

$$\delta F = \sum_{ihl}^{n} {}_1 \frac{\partial A_i^h}{\partial x_l} \xi^i u_h \delta x_l - \sum_{ihjl}^{n} {}_1 A_i^h \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} u_h \xi^j \delta x_l +$$

$$+ \sum_{ihjl}^{n} {}_1 A_i^h \left\{ \begin{matrix} h\ l \\ j \end{matrix} \right\} \xi^i u_j \delta x_l .$$

Possiamo mettere in evidenza, in ciascuna sommatoria, $\xi^i u_h \delta x_l$: basta a tal uopo scambiare i con j nella seconda e h con j nell'ultima, e avremo, raccogliendo in un'unica somma,

$$\delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ihl} \left[\frac{\partial A_i^h}{\partial x_l} - \sum_{1}^{n}{}_j A_j^h \left\{ \begin{matrix} i\ l \\ j \end{matrix} \right\} + \sum_{1}^{n}{}_j A_i^j \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ h \end{matrix} \right\} \right] \xi^i u_h \delta x_l . \qquad [2]$$

Ora, poichè il primo membro, per il suo significato, è invariante, mentre ξ^i, δx_l, u_h sono sistemi arbitrari contravarianti o covarianti, i coefficienti di questa forma (cioè le espressioni entro [ ]) costituiscono per definizione un sistema covariante rispetto a i e l, contravariante rispetto a h: potremo porre perciò

$$\left(A_i^h\right)_l = \frac{\partial A_i^h}{\partial x_l} - \sum_{1}^{n}{}_j A_j^h \left\{ \begin{matrix} i\ l \\ j \end{matrix} \right\} + \sum_{1}^{n}{}_j A_i^j \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ h \end{matrix} \right\} . \qquad [3]$$

Questo sistema si dice derivato covariante del sistema A_i^h. Esso si indica talora con $A_{i|l}^h$, o anche, quando non nasca equivoco, semplicemente con A_{il}^h.

È evidente che in coordinate cartesiane (le quali esistono quando si tratta di forme euclidee; cfr. § 21 del Cap. prec.) il sistema si riduce a quello delle derivate ordinarie.

Il procedimento seguito si può ripetere in modo analogo per un sistema misto generico: si otterrà sempre per δF (come risulta immediatamente dal calcolo materiale) una forma plurilineare i cui coefficienti definiremo come elementi del sistema derivato covariante: essi sono formati da un primo termine, che è la derivata ordinaria, cui seguono tante sommatorie col segno meno, quanti sono gli indici di covarianza del sistema dato e tante sommatorie col segno più, quanti sono quelli di contravarianza. La formula generale è insomma (denotando con (i) il complesso degli indici $i_1 \dots i_m$, e con (h) il complesso $h_1 \dots h_\mu$) (1)

$$\left.\begin{aligned} A^{(h)}_{(i)|l} = \frac{\partial A^{(h)}_{(i)}}{\partial x_l} - \sum_1^m {}_r \sum_1^n {}_j\, A^{(h)}_{i_1 \dots i_{r-1}\, j\, i_{r+1} \dots i_m} \begin{Bmatrix} i_r\ l \\ j \end{Bmatrix} + \\ + \sum_1^\mu {}_\rho \sum_1^n {}_j\, A^{h_1 \dots h_{\rho-1}\, j\, h_{\rho+1} \dots h_\mu}_{(i)} \begin{Bmatrix} j\ l \\ h_\rho \end{Bmatrix} . \end{aligned}\right\} \quad [4]$$

§ 2. — Casi particolari. — Consideriamo dapprima un sistema covariante semplice A_i, che possiamo sempre interpretare come costituito dalle componenti covarianti (momenti) di un vettore $\boldsymbol{A}$: in tal caso manca il contributo dovuto agli indici di covarianza e la [4] (o anche la [3]) fornisce in particolare.

$$A_{i|l} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \sum_1^n {}_j \begin{Bmatrix} i\ l \\ j \end{Bmatrix} A_j \,. \qquad [5]$$

Si vede facilmente che questo sistema doppio in generale non è simmetrico: dalla [5] segue però senz'altro la relazione notevole

$$A_{i|l} - A_{l|i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \,. \qquad [6]$$

L'annullarsi della derivata covariante $A_{i|l}$ ha un significato geometrico semplice: si ha infatti, in tal caso, moltiplicando la [5] per dx_l,

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_l} dx_l = \sum_1^n {}_j \begin{Bmatrix} i\ l \\ j \end{Bmatrix} A_j\, dx_l$$

che, confrontata con la [52′] del Cap. prec., in cui si suppongano tutte le dx nulle tranne la l^{esima}, esprime che il vettore $\boldsymbol{A}$ si trasporta per parallelismo lungo la linea l.

(1) Cf. in proposito A. Palatini. *Sui fondamenti del Calcolo Differenziale assoluto*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. XLIII, 1919, pp. 192-202.

Un'altra illustrazione vettoriale della derivazione covariante fu indicata dal sig. Hessenberg nella memoria *Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie*, Math. Ann., B. 78, 1917, pp. 187-217.

In modo analogo, per le derivate di un sistema contravariante semplice A^i, si ha

$$A^{i}_{|l} = \frac{\partial A^i}{\partial x_l} + \sum_{j}^{n} {}_{1} A^j \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix}. \qquad [5']$$

Consideriamo ora invece un sistema d'ordine zero, cioè un invariante f: la [4] diviene in tal caso

$$f_l = \frac{\partial f}{\partial x_l}, \qquad [7]$$

cioè *le derivate covarianti coincidono con quelle ordinarie.* Formiamo il sistema delle derivate seconde covarianti, applicando la [5] alla [7], e avremo

$$f_{lk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_k} - \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} l\ k \\ j \end{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_j}: \qquad [8]$$

queste non coincidono con le derivate seconde ordinarie, però sono, come quelle, simmetriche.

Per un tensore doppio covariante la [4] diviene

$$A_{ik|l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} - \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} i\ l \\ j \end{Bmatrix} A_{jk} - \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} k\ l \\ j \end{Bmatrix} A_{ij} \; ; \qquad [9]$$

mentre, per un analogo tensore contravariante, si ha

$$A^{ik}_{|l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x_l} + \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} A^{jk} + \sum_{1}^{n}{}_{j} \begin{Bmatrix} j\ l \\ k \end{Bmatrix} A^{ij}. \qquad [9']$$

§ 3. — LEMMA DI RICCI. — Se la formula [9] si applica al sistema dei coefficienti del ds^2, e si ricorda l'espressione delle derivate di questi per mezzo dei simboli di Christoffel, si trova

$$a_{ik|l} = 0 \qquad (i, k, l = 1\,,\ 2\,, \ldots, n)\,. \qquad [10]$$

Questo notevole teorema, *che le derivate covarianti delle a_{ik} sono nulle*, si può dimostrare direttamente, ricorrendo alla stessa definizione di derivazione covariante.

Dobbiamo infatti scegliere due vettori arbitrari ξ, η, e formare l'espressione

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, \xi^i\, \eta^k ;$$

calcolare poi il δF corrispondente a un trasporto per parallelismo dei vettori ξ, η, e otterremo una forma trilineare in ξ^i, η^k, δx_l, i cui coefficienti forniranno, per definizione, il sistema derivato richiesto.

Ora la F non è che il prodotto scalare dei vettori ξ ed η, che, come sappiamo, non si altera nel trasporto per parallelismo: quindi avremo $\delta F = 0$ qualunque siano ξ, η e i δx, il che significa che tutti i coefficienti di questa forma sono identicamente nulli.

In modo analogo si dimostra che sono nulle le derivate covarianti delle a^{ik}: interverrà in questo caso l'espressiome

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{ik}\, u_i\, v_k ,$$

che è ancora il prodotto scalare dei vettori (arbitrari) u, v.

§ 4. — Derivazione contravariante. — Vi è nel calcolo differenziale assoluto come una legge di reciprocità o di dualità, che permette di trarre da ogni teorema o formula un teorema o una formula reciproca, scambiando fra loro le parole *covariante* e *contravariante*, e portando gli indici dalla posizione in alto a quella in basso e viceversa. Ne abbiamo già visti diversi esempi: accenneremo ora brevemente all'operazione di derivazione contravariante, che fa riscontro all'operazione precedentemente descritta.

Il modo più breve per dedurre da un sistema $A^{(h)}_{(i)}$ il sistema $A^{(h)k}_{(i)}$, che gode le proprietà reciproche di quelle delle derivate covarianti, consiste nel derivare covariantemente il sistema dato, e poi comporlo col sistema delle a^{kl}: fare cioè

$$A^{(h)k}_{(i)} = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a^{kl}\, A^{(h)}_{(i)l} .$$

Si troverebbero, per questo sistema, una espressione analoga alla [4] e proprietà del tutto corrispondenti a quelle delle derivate covarianti, le quali si possono del resto ricavare subito dalle suddette, in base alla precedente formula di definizione. Perciò non insistiamo su questo argomento, e torniamo invece a trattare le proprietà fondamentali della derivazione covariante.

§ 5. — Conservazione delle regole del calcolo differenziale ordinario. — Cominciamo dal considerare un tensore, generalmente misto, che sia la somma di altri due, degli stessi rango e specie, cioè

$$A_{(i)}^{(h)} = B_{(i)}^{(h)} + C_{(i)}^{(h)} .$$

Si constata immediatamente che la derivata covariante del sistema A si ottiene, come una derivata ordinaria, sommando quella di B con quella di C, cioè

$$A_{(i)\,l}^{(h)} = B_{(i)\,l}^{(h)} + C_{(i)\,l}^{(h)} . \qquad [11]$$

Questa formula risulta sia dalla linearità della [4], sia dalla considerazione che la forma F, relativa alle A, risulta dalla somma di una forma relativa alle B, e una relativa alle C, e altrettanto quindi avviene di δF: i coefficienti di questa $\left(\text{cioè, per definizione, le } A_{(i)\,l}^{(h)}\right)$ saranno dunque formati sommando i corrispondenti coefficienti delle altre due $\left(\text{che sono, per definizione, } B_{(i)\,l}^{(h)} \text{ e } C_{(i)\,l}^{(h)}\right)$. Il ragionamento si estende senza difficoltà a una somma di quantisivogliono addendi.

Passiamo a esaminare la derivata di un prodotto. Indicando con $B_{(i')}^{(h')}$, $C_{(i'')}^{(h'')}$ due generici tensori, denoteremo con

$$A_{(i)}^{(h)} = B_{(i')}^{(h')}\, C_{(i'')}^{(h'')}$$

il loro prodotto, intendendo che il simbolo (i) rappresenti il complesso degli indici (i') e degli indici (i''), e analoga convenzione facendo per (h). Dimostreremo che

$$A_{(i)\,l}^{(h)} = B_{(i')\,l}^{(h')} \cdot C_{(i'')}^{(h'')} + B_{(i')}^{(h')} \cdot C_{(i'')\,l}^{(h'')} . \qquad [12]$$

Limitiamoci, per semplicità di scrittura, a un solo indice di covarianza e uno di contravarianza in ciascuno dei due sistemi A, B, e ricordiamo (Cap. IV, § 7), che se

$$\varphi = \Sigma B_{i'}^{h'} \xi^{i'} u_{h'} ,$$

$$\psi = \Sigma C_{i''}^{h''} \eta^{i''} v_{h''}$$

sono le forme invarianti relative ai sistemi B, C, quella relativa al sistema A è

$$F = \varphi \psi .$$

Avremo dunque

$$\delta F = \psi \delta \varphi + \varphi \delta \psi ,$$

e uguagliando i coefficienti di $\xi^{i'} \eta^{i''} u_{h'} v_{h''} \delta x_l$ nei due membri, otterremo la [12] (per il caso cui ci siamo riferiti).

Consideriamo ora la derivata di un sistema misto composto,

$$A_{(i)}^{(h)} = \sum_1^n {}_{(r)\,(s)} B_{(i')\,(r)}^{(h')\,(s)} C_{(i'')\,(s)}^{(h'')\,(r)} \tag{13}$$

dove (i) e (h) hanno il significato precedente, ed (r) e (s) denotano il complesso di tutti gli indici rispetto ai quali si è eseguita là saturazione. Dimostreremo che

$$A_{(i)\,l}^{(h)} = \sum_1^n {}_{(r)\,(s)} \left[B_{(i')\,(r)\,l}^{(h')\,(s)} C_{(i'')\,(s)}^{(h'')\,(r)} + B_{(i')\,(r)}^{(h')\,(s)} C_{(i'')\,(s)\,l}^{(h'')\,(r)} \right] . \tag{14}$$

In particolare, se ciascun complesso si riduce a un indice solo e la saturazione si fa solo rispetto a un indice, la [13] diviene

$$A_{ij}^{hk} = \sum_1^n {}_r B_{ir}^h C_j^{kr} \tag{13'}$$

e la [14]

$$A_{ijl}^{hk} = \sum_1^n {}_r \left[B_{irl}^h C_j^{kr} + B_{ir}^h C_{jl}^{kr} \right] . \tag{14'}$$

Faremo la dimostrazione in questo caso più semplice, avvertendo che è immediata l'estensione al caso generale, il procedimento essendo concettualmente identico.

Partiamo dalle forme invarianti relative ai sistemi B e C

$$\varphi_\alpha = \sum_{1}^{n}{}_{ikr} B^{h}_{ir} \xi^i u_h \lambda^{r}_{\alpha} ,$$

$$\psi_\alpha = \sum_{1}^{n}{}_{jks} C^{ks}_{j} \eta^j v_k \lambda_{\alpha|s} ,$$

dove abbiamo introdotto (analogamente a quanto facemmo nel § 9 del Cap. IV) un'ennupla di sistemi contravarianti λ^{r}_{α} $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ e l'ennupla reciproca. La forma invariante

$$F = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} \varphi_\alpha \psi_\alpha$$

è quella, che ha per coefficienti le A, come si è visto nel Cap. IV

Operando su questa col simbolo δ avremo

$$\delta F = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha} [\psi_\alpha \delta\varphi_\alpha + \varphi_\alpha \delta\psi_\alpha] ,$$

e uguagliando nei due membri i coefficienti di $\xi^i \eta^j u_h v_k \delta x_l$ si ottiene la [14'].

Riassumendo, abbiamo dimostrato che valgono, per la derivazione covariante, le stesse regole fondamentali che servono per la derivazione ordinaria.

§ 6. — Applicazioni. — Osserviamo anzitutto che, se si parte da un generico sistema semplice (funzione del posto), per es. covariante, V_i, e si considera il suo reciproco V^i, si ha per definizione

$$V^i = \sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} V_k ,$$

donde, derivando covariantemente e ricordando il lemma di Ricci,

$$V^{i}_{|l} = \sum_{1}^{n}{}_{k} a^{ik} V_{k|l} . \qquad [15]$$

Calcoliamo ora la derivata covariante del prodotto scalare χ di due vettori: essa coincide, come sappiamo, con la derivata ordinaria. Siano dunque $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ due vettori generici, e poniamo

$$\chi = \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V} = \sum_1^n {}_i \, U_i V^i .$$

Derivando covariantemente, abbiamo

$$\chi_l = \sum_1^n {}_i \left[U_{i\,|\,l} \, V^i + U_i \, V^i_{\;|\,l} \right].$$

Nel secondo termine giova sostituire a $V^i_{\;|\,l}$ la sua espressione [15], con che

$$\sum_1^n {}_i \, U_i \, V^i_{\;|\,l} = \sum_1^n {}_{ik} \, a^{ik} \, U_i \, V_{k\,|\,l} = \sum_1^n {}_k \, U^k \, V_{k\,|\,l} .$$

Cambiando l'indice k in i, e sostituendo in χ_l, si ha la formula di uso frequente

$$\chi_l = \sum_1^n {}_i \left[U_{i\,|\,l} \, V^i + U^i \, V_{i\,|\,l} \right]. \qquad [16]$$

In particolare, se $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}$, si ha $\chi = U^2$, e quindi

$$\chi_l = 2\, U \frac{\partial U}{\partial x_l} = 2 \sum_1^n {}_i \, U^i \, U_{i\,|\,l} . \qquad [16']$$

§ 7. — Divergenza di un vettore, e di un tensore doppio — Δ_2 di un invariante. — Sia dato un sistema semplice covariante X_i (che possiamo sempre pensare come il complesso delle componenti di un vettore $\boldsymbol{X}$) e si formi l'invariante

$$\Theta = \sum_1^n {}_{il} \, a^{il} \, X_{i\,|\,l} \qquad [17]$$

dove le $X_{i\,|\,l}$ indicano derivate covarianti. Nel caso particolare che la forma fondamentale sia euclidea, si ha $a^{il} = \delta^l_i$, e inoltre le derivate covarianti coincidono con quelle ordinarie: quindi in tal caso la [17] diviene

$$\Theta = \sum_{i}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} .$$

Questa espressione, in tre dimensioni, prende, come è noto, il nome di divergenza del vettore X. Estenderemo questa denominazione al caso generale [17].

La [17] si può trasformare mediante la [15]. Quest'ultima infatti, sostituendo materialmente X a V, dà, per $l = i$,

$$X^{l}_{|i} = \sum_{1}^{n}{}_k\, a^{ik} X_{k|i} .$$

Ove si sommi rispetto ad i, il secondo membro dà Θ (come tosto apparisce dalla [17] ponendo l al posto di k e scambiando poi l con i). $a^{ik} : a^{kl}$
Ne viene

$$\Theta = \sum_{1}^{n}{}_i\, X^{i}{}_{|i} . \qquad [17']$$

Dalla regola generale di derivazione covariante, o più specificamente dalla [5'], si ha

$$X^{i}{}_{|i} = \frac{\partial X^i}{\partial x_i} + \sum_{1}^{n}{}_j \begin{Bmatrix} j & i \\ & i \end{Bmatrix} X^j .$$

Sommiamo rispetto ad i, badando, nel primo membro, alla [17'], nel secondo alla identità, già rilevata nel Cap. prec. (formula [26]),

$$\sum_{1}^{n}{}_i \begin{Bmatrix} j & i \\ & i \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_j} .$$

Con ciò, ove (sempre nel secondo membro) si scriva dappertutto l come indice di sommatoria, si ha

$$\Theta = \sum_{1}^{n}{}_l \left(\frac{\partial X^l}{\partial x_l} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_l} X^l \right) ,$$

ovvero, mettendo in evidenza $\frac{1}{\sqrt{a}}$,

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{n}{}_{l} \frac{\partial}{\partial x_l} (\sqrt{a}\, X^l) \,. \qquad [17'']$$

Questa espressione della divergenza, del tutto equivalente alla [17], o alla [17'], si presta al calcolo meglio di quelle, le quali invece sono più adatte alle considerazioni teoriche.

In particolare, consideriamo il caso che il vettore di cui si tratta sia il *gradiente* di un invariante u, cioè che sia

$$X_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \,.$$

In tal caso la sua divergenza si indica col simbolo $\Delta_2 u$ e prende il nome di *parametro differenziale secondo* della funzione u: la sua espressione si deduce immediatamente dalla [17] ovvero dalla [17''], tenendo poi conto, per il calcolo effettivo, che è

$$u^l = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a^{il} \frac{\partial u}{\partial x_i} \,.$$

Si ha così

$$\Delta_2\, u = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a^{ik}\, u_{ik} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{n}{}_{l} \frac{\partial}{\partial x_l} (\sqrt{a}\, u^l) \,, \qquad [18]$$

espressioni che si presentano entrambe come generalizzazione di quella ben nota del Δ_2 in coordinate cartesiane.

Sia dato invece un tensore doppio, contravariante, X^{ik}. Notiamo prima di tutto che, se il tensore dato fosse invece covariante, X_{ik}, o misto, $X_i^{\ k}$, si potrebbe sempre, mediante composizione colle a^{ik}, passare ad un tensore associato con tutti e due gli indici di contravarianza, sicchè non costituisce restrizione il riferirsi al tensore contravariante. Da esso si deduce, per derivazione covariante e saturazione, il sistema semplice (contravariante)

$$Y^i = \sum_1^n {}_k X^{ik}_{;k}, \qquad [19]$$

detto, per ovvia analogia col caso precedente, *divergenza del tensore doppio assegnato*. Qualora si saturasse il primo, anzichè il secondo indice, si avrebbe manifestamente un sistema contravariante

$$\sum_1^n {}_k X^{ki}_{|k},$$

distinto, in generale, dalla divergenza Y^i (coincidente nel caso particolare in cui è simmetrico il tensore dato X^{ik}). Viceversa, se X_{ik} è il sistema reciproco ad X^{ik} (corrispondendosi gli indici nell'ordine scritto), si constata ovviamente, in base alle regole del § 5, che

$$Y_i = \sum_1^n {}_{kl} a^{kl} X_{ik|l}$$

non è altro che il sistema covariante reciproco di [19]. Tornando a quest'ultimo, giova aggiungere che il secondo membro non si lascia in generale trasformare (come ci riuscì per la ordinaria divergenza [17]), in una espressione comoda pel calcolo effettivo. Tuttavia nel caso particolare dei tensori *emisimmetrici* ($X^{ik} + X^{ki} = 0$), l'analogia si conserva perfetta anche sotto questo rapporto. In tal caso infatti, sostituendo per le $X^{ik}_{|k}$ nelle [19] i valori forniti dalle [9′], dei tre termini del secondo membro, il secondo va a zero per l'emisimmetria, mentre gli altri due danno

$$\sum_1^n {}_k \frac{\partial X^{ik}}{\partial x_k} + \sum_1^n {}_{jk} \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ k \end{matrix} \right\} X^{ij}.$$

Di qui, come poc'anzi (nel passare dalla [17′] alla [17″]), si trae

$$Y^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_k \frac{\partial(\sqrt{a}\, X^{ik})}{\partial x_k}. \qquad [19]$$

§ 8. — ALCUNE LEGGI DI TRASFORMAZIONE. SISTEMI ε. PRODOTTO VETTORIALE. NOZIONE DI ESTENSIONE DI UN CAMPO. — Consideriamo una n-pla di sistemi covarianti semplici $\lambda_{\alpha|i}$ (in cui α è il numero d'ordine del sistema, e i l'indice di covarianza) e il relativo determinante

$$\nabla = \| \lambda_{\alpha|i} \| .$$

Eseguendo un cambiamento di coordinate, cioè passando dalle x a altre variabili $\bar{x}$, le $\lambda_{\alpha|i}$ si trasformano (giusta la legge di covarianza) in certe $\bar{\lambda}_{\alpha|i}$; formiamo il determinante di queste nuove quantità

$$\bar{\nabla} = \| \bar{\lambda}_{\alpha|i} \| .$$

Dimostreremo che la relazione fra $\bar{\nabla}$ e ∇ è

$$\bar{\nabla} = \nabla D \qquad [20]$$

dove con D si è indicato il determinante jacobiano della trasformazione, cioè

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \ldots & \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

che è — beninteso — diverso da 0, supponendosi sempre che si tratti di trasformazioni effettive. La [20] si giustifica subito, eseguendo, per righe con la nota regola, il prodotto dei due determinanti a secondo membro, che scriviamo per disteso:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \ldots & \lambda_{1|n} \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \ldots & \lambda_{2|n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n|1} & \lambda_{n|2} & \ldots & \lambda_{n|n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \bar{x}_n} & \frac{\partial x_2}{\partial \bar{x}_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \bar{x}_n} \end{vmatrix} .$$

Ricordando che

$$\bar{\lambda}_{\alpha|i} = \sum_{1}^{n} {}_j \, \lambda_{\alpha|j} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}, \qquad [21]$$

si vede subito che gli elementi del determinante prodotto sono proprio le $\bar{\lambda}_{\alpha|i}$.

È utile anche esaminare come si comporta, nel passaggio dalle variabili x alle $\bar{x}$, il discriminante della forma fondamentale, cioè il determinante

$$a = \| a_{ik} \| .$$

Si ricordi a tal uopo che le a_{ik} si trasformano secondo la legge

$$\bar{a}_{ik} = \sum_{1}^{n} {}_{jh} \, a_{jh} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_k},$$

alla quale, posto

$$b_{jk} = \sum_{1}^{n} {}_h \, a_{jh} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_k}, \qquad [22]$$

si può dare la forma

$$\bar{a}_{ik} = \sum_{1}^{n} {}_j \, b_{jk} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i}.$$

Questa legge, del tutto analoga alla [21], ci permette di concludere senz'altro, sull'esempio del caso precedente, che la relazione fra $\bar{a}$ e il determinante b delle b_{jk} è analoga alla [20], cioè

$$\bar{a} = b\,D. \qquad [23]$$

D'altra parte, anche la [22] è del tipo della [21], cosicchè il determinante b sarà legato ad a dalla relazione

$$b = a\,D,$$

che, insieme alla [23], fornisce la relazione cercata fra a e $\bar{a}$, cioè

$$\bar{a} = a D^2. \tag{24}$$

Segue poi da [20] e [24] che il rapporto

$$\frac{\nabla}{\sqrt{a}}$$

è un invariante assoluto, cioè che

$$\frac{\bar{\nabla}}{\sqrt{\bar{a}}} = \frac{\nabla}{\sqrt{a}}.$$

Questa uguaglianza, a dir vero, è valida a meno del segno, ma se conveniamo di cambiare il segno del radicale ogni volta che si esegue una trasformazione con D negativo, essa è valida in valore e segno.

L'osservazione ora fatta ci dà l'occasione di definire un tensore di particolare utilità, i cui elementi hanno un'espressione semplicissima.

Si noti infatti che la quantità $\frac{\nabla}{\sqrt{a}}$, di cui ora abbiamo constatato l'invarianza, non è che una forma plurilineare nelle n serie di variabili $\lambda_{\alpha|i}$, come si vede subito, se si sviluppa il determinante ∇, secondo la solita definizione, come somma di prodotti dei suoi elementi presi n ad n, in modo che nello stesso prodotto non ne entrino mai due della stessa linea o colonna, e con la consueta regola riguardante i segni; talchè si può scrivere compendiosamente

$$\frac{\nabla}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathsf{S}_{i_1 \dots i_n} \pm \lambda_{1|i_1} \lambda_{2|i_2} \dots \lambda_{n|i_n}, \tag{25}$$

con le convenzioni sopra ricordate sul modo di fare i prodotti, e sul loro segno. Poichè questa forma è invariante, i suoi coefficienti costituiscono un sistema contravariante. E se chiamiamo $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ il coefficiente del prodotto $\lambda_{1|i_1} \lambda_{2|i_2} \dots \lambda_{n|i_n}$, vediamo subito che si ha

$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$ se fra gli indici $i_1 i_2 \dots i_n$ ve ne sono due almeno uguali fra loro;

$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ se quegli indici sono tutti differenti e costituiscono una permutazione di classe *pari* rispetto alla permutazione fondamentale $1, 2, \dots, n$.

$\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ se gli indici sono tutti differenti, e costituiscono una permutazione di classe dispari.

Dunque: il sistema d'ordine n, i cui elementi sono $0, \frac{1}{\sqrt{a}}, -\frac{1}{\sqrt{a}}$, secondo le regole date or ora, è *contravariante*: lo chiameremo *sistema* (*contravariante*) ε.

In modo analogo potremo definire il *sistema* (*covariante*) ε, prendendo in considerazione il determinante (*reciproco* di ∇)

$$\Delta = \| \lambda_\alpha^{i} \| \ ,$$

formato con gli elementi reciproci delle $\lambda_{\alpha|i}$ nel determinante ∇ (i quali costituiscono, come sappiamo dal § 5 del Cap. IV, una *n-pla* di sistemi contravarianti semplici). Si ha, come è noto, e come del resto si verifica immediatamente,

$$\nabla\Delta = 1 \ ;$$

quindi sarà invariante la quantità $\sqrt{a}\,\Delta$ $\left(\text{reciproca di } \frac{\nabla}{\sqrt{a}}\right)$, la quale si può scrivere, sviluppando il determinante Δ,

$$\sqrt{a} \mathop{\mathbf{S}}_{i_1 \dots i_n} \pm \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \ ,$$

il simbolo **S** indicando somma rispetto a tutte le disposizioni semplici degli indici i.

Ne segue che il sistema, i cui elementi $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$ sono nulli, se gli indici $i_1\, i_2 \dots i_n$ non sono tutti diversi, e sono uguali a $\sqrt{a}$ o a $-\sqrt{a}$ secondochè, quegli indici essendo tutti diversi, la classe della permutazione $i_1\, i_2 \dots i_n$ è pari o dispari, è *covariante*.

L'uso della stessa lettera ε è giustificato dalla circostanza che questo sistema covariante è il reciproco del precedente. Ne lasciamo al lettore la facile verificazione [1].

Mediante i sistemi ε, quando sono dati $n-1$ vettori $\mathbf{v}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, se ne deduce (invariantivamente) un ennesimo $\mathbf{w}$, che si dice *prodotto vettoriale*, in quanto, per gli spazi euclidei a tre dimensioni, si identifica coll'ordinario prodotto vettoriale. Dette $\overset{i}{v}_\alpha$ e $v_{\alpha|i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ le componenti, rispettivamente contravarianti e covarianti degli $n-1$ vettori assegnati, le posizioni

$$w_i = \sum_1^n {}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \varepsilon_{i i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \overset{i_1}{v}_1 \overset{i_2}{v}_2 \ldots \overset{i_{n-1}}{v}_{n-1},$$

$$w^i = \sum_1^n {}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \varepsilon^{i i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} v_{1|i_1} v_{2|i_2} \ldots v_{n-1|i_{n-1}}$$

definiscono, come agevolmente si verifica, due sistemi reciproci, e quindi, tanto l'una, quanto l'altra uno stesso vettore $\mathbf{w}$, le cui componenti, quando $n = 3$ e si tratta di spazi euclidei, si riducono appunto a quelle dell'ordinario prodotto vettoriale.

In ogni caso segue dalla precedente definizione delle w_i (ovvero delle w^i) che $\mathbf{w} = 0$, se i vettori $\mathbf{v}_\alpha$ non sono tutti linearmente indipendenti (cioè se la caratteristica della matrice formata dalle loro componenti è $< n-1$); mentre, quando lo sono, $\mathbf{w}$ riesce $\neq 0$ e perpendicolare ad ogni $\mathbf{v}_\alpha$. Quest'ultima proprietà risulta dalla considerazione d'un generico prodotto vettoriale $\mathbf{w} \times \mathbf{v}_\alpha$. Ricorrendo per es. al primo gruppo di formule, si ha

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v}_\alpha = \sum_1^n {}_i\, w_i \overset{i}{v}_\alpha = \sum_1^n {}_{i i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \varepsilon_{i i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \overset{i_1}{v}_1 \overset{i_2}{v}_2 \ldots \overset{i_{n-1}}{v}_{n-1} \overset{i}{v}_\alpha,$$

che va a zero in base alla definizione del sistema ε, cioè, se si vuole, perchè il sommatorio si presenta come lo sviluppo di un determinante con due linee identiche.

---

[1] Per questa e per altre proprietà dei sistemi ε, veggasi un'interessante nota del LIPKA, *Sui sistemi E nel calcolo differenziale assoluto*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, Vol. XXXI (1° sem. 1922), p. 242-245.

Infine vogliamo introdurre nella metrica di una V_n la nozione di *estensione* di un campo, cioè definire, per un dato campo di V_n, una quantità V analoga all'area di un pezzo di superficie, o al volume di un campo a tre dimensioni. Evidentemente la definizione del dV è, a priori, in nostro arbitrio, con la condizione però che, per $n = 2$, si riduca all'espressione già data per l'elemento di area (Cap. V, form. [17]) e che, per $n = 3$, in coordinate cartesiane, si abbia $dV = dx\,dy\,dz$: inoltre, per il suo significato geometrico, l'estensione V di un campo dovrà essere un invariante (1). Tutte queste condizioni sono soddisfatte se assumiamo

$$dV = \sqrt{a}\, dx_1 \dots dx_n,$$

indicando con $\sqrt{a}$ il valore aritmetico della radicale, e quindi

$$V = \int_C \sqrt{a}\, dx_1 \dots dx_n .$$

Si sa infatti che, in un cambiamento di coordinate, il prodotto $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ deve essere sostituito con $|D|\; d\bar{x}_1, d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_n$, e dalla [24], estraendo la radice quadrata, e prendendo i valori assoluti dei due membri, risulta appunto che

$$\sqrt{a}\, |D|\, d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_n = \sqrt{\bar{a}}\; d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 \dots d\bar{x}_n .$$

§ 9. — Rotore di un tensore semplice in tre dimensioni. — Possiamo ora dare una definizione di *rotore* (o rotazione) di un vettore X assegnato come funzione del posto, valida anche nel caso che lo spazio che si considera non sia euclideo, o che, essendolo, le coordinate non siano cartesiane. Per n qualunque, la generalizzazione consiste nel definire come rotore il sistema covariante doppio

$$p_{il} = X_{i\,|\,l} - X_{l\,|\,i}$$

(1) Un esame circostanziato del concetto di estensione e della sua traduzione analitica fu compiuto recentemente dal sig. O. Hölder. Cfr. *Das Volumen in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit*, Math. Zeitschrift, B. 20 (1924), pp. 7-20.

che è manifestamente emisimmetrico (perchè sussistono le identità $p_{il} + p_{li} = 0$). Come abbiamo visto nel § 2, le p_{il} si possono anche presentare come differenze delle derivate ordinarie $\frac{\partial X_i}{\partial x_l} - \frac{\partial X_l}{\partial x_i}$: se poi si considerano le X_i come coefficienti di un pfaffiano

$$\psi = \sum_1^n X_i \, dx_i \ ,$$

si riconosce che le p_{il} non sono altro che i coefficienti del covariante bilineare di questo pfaffiano (cfr. Cap. II, § 4).

Per avere proprio l'analogo dell'ordinario rotore, conviene però limitarsi agli spazi di tre dimensioni. Per $n = 3$, gli elementi $p_{il} = -p_{li}$ distinti sono 3, in corrispondenza alle coppie 23, 31, 12 di indici distinti (alle coppie di indici coincidenti rimanendo subordinate delle p nulle). Ad ognuna delle coppie 23, 31, 12 fanno riscontro gli indici mancanti 1, 2, 3 rispettivamente, ossia, più compendiosamente, ad ogni coppia del tipo $h + 1$, $h + 2$ si può coordinare l'indice h (con la convenzione di risguardare equivalenti gli indici che differiscono di 3: così, p. es., se $h = 2$, con $h + 2$ si deve intendere l'indice 1). Si può dunque comprendere come, nel caso di $n = 3$, il rotore possa essere rappresentato da un sistema semplice (anzichè doppio): se però si ponesse

$$p_h = p_{h+1, h+2} \, ,$$

il sistema semplice così definito non sarebbe nè covariante, nè contravariante. Conviene invece chiamare rotore un vettore $\boldsymbol{R}$, di cui definiremo, con l'aiuto del sistema ε introdotto nel § prec., le componenti contravarianti R^h nel modo che segue:

$$R^h = \sum_1^3{}_{il} \, \varepsilon^{hil} X_{l|i} \qquad (h = 1, 2, 3) \, .$$

La contravarianza di R^h risulta immediatamente dal principio di saturazione. Per vedere l'analogia di questa espressione con quella dell'ordinario rotore, basta osservare che nella sommatoria doppia i ed l possono assumere solo i valori $h + 1$, $h + 2$ (poichè per il valore

h, la ε corrispondente si annullerebbe): dovendo poi i, l essere disuguali tra loro, sono possibili solo i due casi

$$i = h+1 \quad , \quad l = h+2 \qquad \left(\text{nel qual caso } \varepsilon^{hil} = \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$i = h+2 \quad , \quad l = h+1 \qquad \left(\text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \varepsilon^{hil} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\right).$$

Perciò quella sommatoria avrà solo due termini, e R^h si potrà scrivere sotto la forma seguente

$$R^h = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(X_{h+2\,|\,h+1} - X_{h+1\,|\,h+2}\right)$$

ossia

$$R^h = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial X_{h+2}}{\partial x_{h+1}} - \frac{\partial X_{h+1}}{\partial x_{h+2}}\right),$$

forma assai comoda per il calcolo effettivo nelle applicazioni. In coordinate cartesiane $a = 1$, e si ritrova la nota espressione delle componenti del rotore (supposto che x_1, x_2, x_3 corrispondano ordinatamente ad x, y, z).

§ 10. — Concetto di giacitura. Varietà geodetiche. — È noto che se nello spazio ordinario S_3 sono date due direzioni λ, μ uscenti dal medesimo punto P, e definite dai loro coseni λ^i, μ^i ($i = 1, 2, 3$), ogni altra direzione ξ, spiccata da P, e avente per coseni tre combinazioni lineari di quelli, cioè $\xi^i = \rho\,\lambda^i + \sigma\,\mu^i$, giace nel piano individuato da λ e μ.

I coefficienti ρ e σ non sono naturalmente indipendenti, dovendo le ξ^i soddisfare un'identità quadratica: si ha precisamente

$$\rho^2 + \sigma^2 + 2\,\rho\,\sigma \cos\widehat{\lambda\mu} = 1\,.$$

Le direzioni ξ così definite sono dunque una *semplice* infinità, e il loro insieme dicesi *giacitura*.

Tutto ciò si estende agevolmente a una V_n generica. Siano date in essa m direzioni λ_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$).

Presi m moltiplicatori ρ_α, per ora arbitrari, consideriamo la direzione ξ, i cui parametri sono

$$\xi^i = \sum_1^m{}_\alpha\, \rho_\alpha\, \lambda_\alpha^i \tag{27}$$

e i cui momenti sono, per conseguenza,

$$\xi_i = \sum_{1}^{m}{}_\alpha \, \rho_\alpha \, \lambda_{\alpha|i} \, . \qquad [27'].$$

Affinchè queste espressioni possano effettivamente interpretarsi come parametri e rispettivamente momenti, occorre e basta che soddisfino la relazione

$$\sum_{1}^{n}{}_i \, \xi^i \, \xi_i = 1 \, .$$

cioè

$$\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta} \, \rho_\alpha \, \rho_\beta \sum_{1}^{n}{}_i \lambda_\alpha^i \, \lambda_{\beta|i} = 1$$

ovvero, indicando con $\widehat{\alpha\beta}$ l'angolo delle direzioni λ_α e λ_β,

$$\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta} \, \rho_\alpha \, \rho_\beta \cos \widehat{\alpha\beta} = 1 \, . \qquad [28]$$

Supposte dunque le ρ legate da questa relazione, ma del resto arbitrarie, si vede che la [27] (o la [27']) definisce un insieme di ∞^{m-1} direzioni (chè tanti sono i parametri arbitrari), a cui appartengono, in particolare, le m direzioni date: questo insieme si dice *giacitura*.

Definita una giacitura G in tal modo (mediante m sue direzioni λ_α), si prendano in essa m direzioni qualunque λ'_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$: è quasi evidente che la giacitura G' individuata da queste direzioni è ancora la G. Ma si può naturalmente verificarlo per via algebrica.

Infatti, se una direzione ξ appartiene alla G', ciò vuol dire che i suoi parametri sono combinazioni lineari delle λ'^i_α; quindi anche delle λ^i_α, cioè la direzione ξ appartiene anche a G; e viceversa.

Abbiamo visto nel Cap. V, § 23 che una geodetica è individuata se se ne assegna il punto di partenza e la direzione. Ora fissiamo in una V_n un punto P, e da esso spicchiamo due direzioni λ, μ: resterà individuata da queste una giacitura di ∞^1 direzioni uscenti da P. Consideriamo le ∞^1 geodetiche uscenti da P in tutte queste direzioni: esse costituiscono una superficie (∞^2 punti), che si chiama *superficie geodetica di polo P*.

Una superficie geodetica è dunque individuata da un punto e da due direzioni.

Si può definire analogamente una varietà geodetica di m dimensioni: si assegni un punto di V_n, e m direzioni spiccate da esso, le quali definiranno una giacitura di ∞^{m-1} direzioni; facciamo uscire secondo ciascuna di queste la rispettiva geodetica. Poichè ognuna contiene ∞^1 punti, l'insieme di queste geodetiche conterrà ∞^{m-1+1} punti, cioè costituirà una varietà V_m, che diremo *varietà geodetica*.

Sono particolarmente importanti le *superficie* ($m = 2$) e le *ipersuperficie geodetiche* ($m = n - 1$), che sono individuate da $n - 1$ direzioni uscenti da un punto: avremo da servircene nel § seguente.

§ 11. — COORDINATE LOCALMENTE GEODETICHE (O CARTESIANE). — Si chiamano, in generale, coordinate cartesiane quelle che attribuiscono al ds^2 una forma a coefficienti costanti. Non sempre è possibile scegliere in una V_n data tali coordinate; è però sempre possibile trovare un sistema di coordinate che, *nelle immediate vicinanze di un punto P a priori assegnato*, si comportino come cartesiane: più precisamente, siano tali che le derivate dei coefficienti del ds^2 (che sarebbero identicamente nulle se le coordinate fossero cartesiane) siano tutte nulle *nel punto P*. Tali coordinate si chiamano *coordinate geodetiche*, o *localmente cartesiane*.

Il loro interesse, nei riguardi del parallelismo, o, più generalmente, del trasporto elementare per equipollenza, appare in modo espressivo, dalle equazioni [52] e [52′] del Cap. prec., che definiscono gli incrementi delle componenti contravarianti e covarianti rispettivamente. Risulta infatti da queste che, quando ci si riferisce ad un sistema geodetico in P, tali incrementi, nel passare ad un qualsiasi punto vicinissimo, sono nulli, precisamente come quelli delle ordinarie componenti cartesiane negli spazi euclidei.

Ciò premesso, sia data una V_n, in cui sia posto un qualunque sistema di coordinate x: ci proponiamo di introdurre — se è possibile — nuove variabili

$$\bar{x}_i = f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [29]$$

tali che le $\bar{x}$ siano coordinate geodetiche, in P, cioè che, detti $\bar{a}_{ik}$ i coefficienti del ds^2 nelle nuove variabili, sia

$$\left(\frac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}_l}\right)_P = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n), \tag{30}$$

dove con l'indice P si vuol indicare che, eseguita la derivazione, si devono sostituire le $\bar{x}$ con le coordinate $\bar{x}_P$ di P. Ricordando la definizione dei simboli di Christoffel, si vede che la [30] equivale alla condizione che i simboli stessi siano tutti nulli in P, cioè che

$$\overline{\left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}}_P = 0 \qquad (j, l, i = 1, 2, \ldots, n). \tag{30'}$$

Che sia possibile trovare delle f_i definienti una tale trasformazione, si può intanto prevedere dal computo seguente. Le [30] sono $n \dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni contenenti le derivate prime e seconde delle f_i (perchè $\bar{a}_{ik}$ è esprimibile, giusta la legge di covarianza, per mezzo delle a_{ik} e delle derivate prime delle f_i): ora quelle derivate prime sono n^2, le derivate seconde sono $n \dfrac{n(n+1)}{2}$ e quindi, tra prime e seconde, superano il numero delle equazioni. Ne segue che (non esistendo, come constateremo, incompatibilità algebriche) si possono dalle [29] ricavare i valori (in P) delle derivate prime e seconde delle f_i, (anzi, alcuni di questi valori rimangono arbitrari); essendo inoltre indifferente l'andamento delle funzioni fuori del punto P.

Da ciò si vede con quale larga arbitrarietà si possano scegliere le f_i. Per evitare la discussione diretta delle equazioni [30], conviene prendere le mosse dal § 26 del Cap. prec.

Abbiamo visto ivi che le espressioni

$$\tau^i = d\xi^i + \sum_{jl}^{n}{}_{1} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \xi^j \, dx_l$$

costituiscono un tensore contravariante semplice, essendo arbitrari il vettore ξ e quindi le sue componenti contravarianti ξ^i, nonchè i differenziali dx_l. Ciò vale in particolare nell'ipotesi $\xi^i = dx_i$, cioè per

$$\tau^i = d^2 x_i + \sum_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \, dx_l \, . \qquad [31]$$

Se, cambiando le variabili, si ha, in uno speciale punto P,

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} = \delta^i_k \, , \qquad [32]$$

allora, *in quel punto*, in virtù della legge di contravarianza

$$\bar{\tau}^i = \sum_{k=1}^{n} \tau^k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \, ,$$

risulta altresì

$$\bar{\tau}^i = \tau^i \, . \qquad [33]$$

Supposto (come è sempre lecito con un preventivo cambiamento delle originarie variabili x_i in x_i + cost) che le x_i si annullino in P, le [32] rimangono senz'altro verificate purchè le formule di trasformazione [29] sieno del tipo

$$\bar{x}_i = x_i + \varphi_i (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \, , \qquad [29']$$

le φ_i designando funzioni delle x, regolari in P, il cui sviluppo in serie di potenze delle x comincia con termini di secondo grado almeno, per es. polinomi di secondo grado nelle stesse x. In tale ipotesi infatti si annullano in P tutte le derivate prime delle φ. Le loro derivate seconde $\dfrac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_j \, \partial x_l}$ coincidono colle $\dfrac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_j \, \partial x_l}$, e caratterizzano — si pensi allo sviluppo di Maclaurin — la parte di secondo grado nei secondi membri delle [29']. Mercè una scelta opportuna dei valori numerici delle dette derivate seconde in P, si riesce effettivamente, come ora mostreremo, a soddisfare alle [30'], cioè a rendere zero tutti i simboli di Christoffel relativi alle variabili $\bar{x}$.

Infatti le [33], esplicitandone i due membri in base alle [31], e risguardandovi, a norma delle [29'], le x come variabili indipendenti (differenziali secondi nulli) e le $\bar{x}$ come loro funzioni, si possono scrivere

$$d^2\bar{x}_i + \sum_{1}^{n}{}_{hk} \overline{\left\{ \begin{matrix} h\ k \\ i \end{matrix} \right\}} d\bar{x}_h \, dx_k = \sum_{1}^{n}{}_{jl} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \, dx_l .$$

Eguagliando il coefficiente di $dx_j dx_l$ nei due membri e badando alle [32], se ne trae

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_j \, \partial x_l} \right)_P + \overline{\left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}}_P = \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}_P , \tag{34}$$

da cui apparisce che basta prendere, in P,

$$\frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_j \, \partial x_l} = \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}_P \qquad (j, l, i = 1, 2, \ldots, n)$$

perchè risulti ogni $\overline{\left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\}}_P = 0$,

c. d. d. (1).

---

(1) Il sig. **Fermi** ha stabilito recentemente una notevole estensione di questo risultato, mostrando che, data una linea qualsiasi, è anche possibile scegliere tali coordinate che siano localmente geodetiche *in ogni punto della linea*. Cfr. le note *Sopra i fenomeni che avvengono in prossimità di una linea oraria*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXXI (1° semestre 1922), pp. 21-23, 51-52.

Il risultato del **Fermi** si può giustificare rapidamente come segue, mediante computo di indeterminate disponibili e di condizioni da soddisfare.

Si assumano (come è sempre lecito, considerando un arco convenientemente limitato) le equazioni della linea L, sotto la forma

$$x_i = \chi_i(x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1),$$

e si osservi dapprima che, se di una generica funzione $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono noti *lungo la linea* i valori suoi z_L e delle derivate parziali rapporto ad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, rimangono per conseguenza determinati, pure lungo la linea, anche i valori di $\frac{\partial z}{\partial x_n}$. Basta infatti derivare rapporto ad x_n l'identità $z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = z_L(x_n)$ valida lungo L, per avere

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{dz_L}{dx_n} - \sum_{1}^{n-1}{}_i \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dx_n} .$$

Non è fuori di luogo interpretare geometricamente il significato delle condizioni che si impongono alle coordinate $\bar{x}$, affinchè valgano le [30′], ossia affinchè esse riescano geodetiche in P. Tali condizioni possono porsi sotto la forma seguente:

a) le n ipersuperficie coordinate passanti per P si comportino come ipersuperficie geodetiche rispetto ai punti infinitamente vicini (o, in particolare, siano proprio geodetiche);

b) se per un punto P', infinitamente vicino a P e posto su una delle n linee coordinate passanti per P — diciamo quella su cui varia la sola x_i — si conduce la direzione parallela ad un'altra di quelle linee coordinate, questa parallela appartenga all'ipersuperficie coordinata $\bar{x}_i =$ cost passante per P';

Ciò premesso, si immagini di ricorrere ad un cambiamento di variabili del tipo generale [29], e ci si proponga di determinare, se possibile. le n funzioni $f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in tal guisa da rendere, lungo L, ogni $\dfrac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}_l} = 0$. Come già si è notato (quando si trattava di un unico punto P), si hanno così $n\,\dfrac{n(n+1)}{2}$ condizioni che involgono le derivate prime e seconde delle f. Ora le derivate prime $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ sono in numero di n^2, le derivate seconde, $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_h\, \partial x_k}$, in numero di $n\,\dfrac{n(n+1)}{2}$; ma, di queste le n^2 del tipo $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_n\, \partial x_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, in base all'osservazione precedente, si sanno esprimere, lungo L, per mezzo delle altre e delle derivate prime. Complessivamente rimangono, fra derivate prime e seconde, proprio $n^2 + \left\{ n\,\dfrac{n(n+1)}{2} - n^2 \right\} = n\,\dfrac{n(n+1)}{2}$ funzioni incognite di x_n, da determinare per mezzo delle altrettante equazioni $\dfrac{\partial \bar{a}_{ik}}{\partial \bar{x}_l} = 0$: queste contengono, come immediatamente si riconosce, le derivate seconde $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_h\, \partial x_k}$ $(h, k < n)$ in termini finiti, anzi linearmente; mentre i valori incogniti delle derivate prime $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ compariscono assieme alle $\dfrac{d}{dx_n}\,\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$. Si ha comunque un sistema di tante equazioni quante sono le funzioni incognite della sola x_n, che interessa determinare. Noti i valori di queste derivate sulla L, si possono determinare con larga arbitrarietà delle funzioni f_i, che effettivamente li ammettono: basta pensare ad uno sviluppo tayloriano di tali f in funzione degli $n-1$ argomenti $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_{n-1} - x_{n-1}^0$, essendo le x_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ valori delle χ_i lungo L, cioè le funzioni $\chi_i\left(x_n\right)$ che definiscono codesta linea.

c) fissate le ipersuperficie coordinate conformemente alle condizioni precedenti, (il che, come si intuisce geometricamente, è sempre possibile), la *numerazione* di queste superficie (cioè il loro coordinamento ai *valori* dei parametri $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$) sia fatta in modo da soddisfare certe condizioni numeriche che preciseremo in seguito, e che, come vedremo, si possono sempre verificare. Che *a*) e *b*) siano conseguenze delle [30′] risulta immediatamente dalle equazioni del parallelismo e delle geodetiche. Reciprocamente dimostreremo che un sistema di coordinate soddisfacente alle condizioni *a*), *b*), *c*) è geodetico in P.

Cominciamo con l'esprimere analiticamente la condizione *a*). Prendiamo una direzione di parametri $d\bar{x}_k$, uscente da P e giacente nella ipersuperficie $\bar{x}_i = \text{cost}$ (cioè tale che $d\bar{x}_i = 0$). Dobbiamo esprimere che la geodetica avente tale direzione si comporta, in P, come se giacesse su quella ipersuperficie, cioè che, lungo tale geodetica, $\overset{2}{d}\bar{x}_i$ si annulla: sarà dunque $d\bar{x}_i = d^2\bar{x}_i = 0$, e ne risulterà, dall'equazione delle geodetiche,

$$\sum_{jl}^{n}{}_{1} \overline{\begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix}}_P d\bar{x}_j\, d\bar{x}_l = 0\,.$$

Dei termini di questa sommatoria, quelli in cui o j, o l, o entrambi sono uguali a i, si annullano perchè $d\bar{x}_i = 0$: l'annullarsi dei rimanenti (essendo le altre $d\bar{x}$ arbitrarie) richiede che sia

$$\overline{\begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix}}_P = 0 \qquad \text{per } j,\, l \neq i\,.$$

Così è visto il significato analitico della condizione *a*).

Passiamo alla *b*). Prendiamo P' sulla linea i, con che, detti dx gli incrementi delle coordinate da P a P', avremo $dx_l = 0$ per ogni l diversa da i. Detta poi λ la direzione della linea coordinata j in P, con che $\lambda^k = 0$ per ogni k diversa da j, trasportiamola per parallelismo da P in P'. Avremo, applicando la solita formula e ricordando che solo dx_i e λ^j sono diversi da 0,

$$d\lambda^i = -\overline{\begin{Bmatrix} j\ i \\ i \end{Bmatrix}}_P \lambda^j\, dx_i\,.$$

Affinchè la direzione $\lambda' = \lambda + d\lambda$ giaccia nella ipersuperficie $x_i = \text{cost}$, bisogna che sia $\lambda'^i = 0$, ossia (poichè, come abbiamo notato, $\lambda^i = 0$ se $i \neq j$) bisogna che sia $d\lambda^i = 0$ per $i \neq j$, quindi

$$\left\{ \begin{matrix} j & i \\ & i \end{matrix} \right\}_P = 0 \qquad\qquad (\text{per } i \neq j) .$$

Questo è il significato della condizione b). Resta ora da sfruttare la terza condizione, allo scopo di annullare i simboli con i tre indici tutti uguali: con ciò saranno esauriti tutti i tipi di indici di Christoffel. Supponiamo che le coordinate x soddisfino le condizioni precedenti: facciamo una trasformazione che non alteri le superficie coordinate per il che basta porre $x_i = f_i(\bar{x}_i)$ (cioè ogni x funzione di una sola $\bar{x}$) o, ciò che è lo stesso,

$$dx_i = X_i(\bar{x}_i)\, d\bar{x}_i ,$$

designando con X_i la derivata della f rispetto al suo argomento.

Calcoliamo ora l'espressione esplicita di quei simboli che vogliamo annullare. Abbiamo

$$\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{i} \\ & i \end{bmatrix} = \sum_{1}^{n}{}_j\, a_{ij} \left\{ \begin{matrix} \bar{i} & i \\ & j \end{matrix} \right\}$$

e ricordando che tutti i simboli sono già nulli tranne quelli a tre indici uguali

$$\begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{i} \\ & i \end{bmatrix} = a_{ii} \left\{ \begin{matrix} \bar{i} & \bar{i} \\ & i \end{matrix} \right\} ;$$

sostituendo poi nel primo membro l'espressione che definisce il simbolo di prima specie, ricaviamo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{a}_{ii}}{\partial x_i} = \bar{a}_{ii} \left\{ \begin{matrix} \bar{i} & i \\ & i \end{matrix} \right\} .$$

Dunque la condizione

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{i} & \bar{i} \\ & i \end{matrix} \right\} = 0 \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

equivale a

$$\left(\frac{\partial \bar{a}_{ii}}{\partial \bar{x}_i}\right)_P = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) .$$

Ora, dalla legge di covarianza si ha

$$\bar{a}_{ik} = \sum_{jh}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_k} a_{jh} = a_{ik} X_i X_k ,$$

e quindi

$$\frac{\partial \bar{a}_{ii}}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} X_i^3 + 2\, a_{ii} X_i X_i' .$$

Basta quindi che le funzioni X verifichino, in P, le n condizioni numeriche

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_i} X_i^3 + 2\, a_{ii} X_i X_i' = 0$$

(restando, del resto, completamente arbitrarie) perchè sia soddisfatta la condizione voluta.

In tal modo si ottiene che il sistema $\bar{x}$ sia localmente cartesiano in P.

§ 12. — Teorema di Severi. — La possibilità di scegliere coordinate (localmente) cartesiane in un dato punto permette di sveltire la dimostrazione di alcune proprietà geometriche di carattere *locale.* Come esempio, dimostreremo, senza alcun calcolo, un notevole teorema del prof. Severi (¹).

Consideriamo, in una data V_n, due punti infinitamente vicini, P e P_1, e una direzione $\boldsymbol{u}$ spiccata da P. Questa direzione, e la direzione PP_1, individuano una giacitura, e quindi una superficie geodetica V_2 passante per P e per P_1, e contenente la $\boldsymbol{u}$.

Ora possiamo trasportare la $\boldsymbol{u}$ per parallelismo, da P in P_1, e ciò in due modi:

1º) considerando la $\boldsymbol{u}$ come direzione in V_n, e quindi riferendoci alla metrica di questa varietà: otterremo una direzione $\boldsymbol{u}_1$, che diremo *parallela ambientale;*

(¹) *Sulla curvatura della superficie e varietà,* Rend. del Circolo Mat. di Palermo, T. XLII, 1917, pp. 227-259. Cfr. in particolare il § 11.

2°) considerando la $\boldsymbol{u}$ come direzione superficiale, appartenente alla superficie geodetica V_2 dianzi definita, e quindi riferendoci alla metrica di questa: otterremo una direzione $\boldsymbol{u}_1^*$.

Il teorema di Severi afferma che $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_1^*$ coincidono.

Esaminiamo dapprima il caso in cui la V_n è euclidea. In tal caso le geodetiche sono rette (poichè, preso un sistema di coordinate cartesiane y, i simboli di Christoffel sono nulli e le equazioni delle geodetiche divengono $d^2y_i = 0$ $(i = 1 , 2, \ldots, n)$ e le superficie geodetiche sono piani; il teorema di Severi diviene una conseguenza immediata della ordinaria teoria del parallelismo negli spazi euclidei.

Se poi la V_n non è euclidea, osserviamo che tanto nella definizione della parallela ambientale $\boldsymbol{u}_1$, quanto in quella della superficie geodetica V_2, e della parallela $\boldsymbol{u}_1^*$ ad essa relativa, i soli elementi metrici di cui si fa uso sono i simboli di Christoffel della V_n: poichè questi, con opportuna scelta di coordinate, si possono render nulli, quelle due costruzioni procedono esattamente come se la V_n fosse euclidea, e conducono quindi allo stesso risultato.

CAPITOLO VII.

Simboli di Riemann e proprietà concernenti la curvatura.

§ 1. — Generalità sul trasporto ciclico e sulle relazioni fra parallelismo e curvatura. — Il sig. Schouten, coi suoi metodi vettoriali, (1) e, indipendentemente da lui, con ordinari sviluppi di calcolo, il sig. Pérès (2) hanno messo in evidenza l'importanza che presenta, per la caratterizzazione delle proprietà geometriche di una V_n, il trasporto di una direzione lungo un ciclo chiuso: in particolare, per lo studio delle proprietà locali in un punto generico P, la considerazione dei cicli infinitesimi. E precisamente: si consideri una direzione generica $\mathbf{u}$ (vettore unitario) spiccata da P, e la si trasporti per parallelismo lungo una linea chiusa T, di lunghezza infinitesima, tornando così in P: si otterrà, eseguito il trasporto, una direzione $\mathbf{u}_1$ pure uscente da P, ma *non coincidente*, in generale, con $\mathbf{u}$: l'incremento subito dalle componenti (contravarianti) u^r in questo trasporto ciclico dipende, in generale, dall'*area* del ciclo, dalla sua *giacitura* (cioè dall'orientazione nella V_n dell'elemento di superficie su cui è tracciato il ciclo) e dalle *proprietà metriche* della V_n in P. L'influenza di queste ultime figura pel tramite delle derivate *prime* e *seconde* delle a_{ik}, le quali derivate si presentano raggruppate in certe formazioni caratteristiche, che prendono il nome di *simboli di Riemann*, e sono formate coi simboli di Christoffel e con le loro derivate prime. Nel caso particolare che si tratti di una superficie, tali espressioni si riducono a una sola, che è quella conosciuta in geometria col nome di *curvatura* (gaussiana) della superficie: nel caso di una V_n qualsiasi, la considerazione dei simboli di Riemann permette di estendere in modo opportuno il concetto di curvatura.

(1) *Die direkte Analisis zur neueren Relativitätstheorie*, Verh. der Kon. Ak van Wet. te Amsterdam, Deel 12, N° 6, 1919. Cfr. altresì *Der Ricci-Kalkül* (già citato a pag. 8), II, §§ 12-16.

(2) *Le parallélisme de M. Levi-Civita et la courbure riemannienne*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXVII (1° semestre 1919), pp. 425-428.

In questo capitolo considereremo dapprima il trasporto lungo una forma particolare di ciclo infinitesimo (parallelogramma elementare): ci fermeremo poi alquanto sulle proprietà dei simboli di Riemann, che in quel trasporto intervengono, ci serviremo di queste per trarre la formula che permette di scambiare l'ordine di due derivazioni covarianti successive, fissando l'espressione della differenza delle derivate, e infine riprenderemo lo studio del trasporto su un ciclo qualunque, deducendone la nozione di curvatura, prima per una superficie, poi per una V_n qualsiasi.

§ 2. — TRASPORTO CICLICO LUNGO UN PARALLELOGRAMMA ELEMENTARE. — Da un punto P di una V_n generica si spicchino due vettori infinitesimi, che indicheremo con δP, $\delta' P$. Interpretiamo il primo come uno spostamento elementare PP_1, e trasportiamo lungo esso, per parallelismo, il vettore $\delta' P$; diciamo Q la posizione dell'estremo di questo dopo il trasporto. Se eseguiamo l'operazione analoga trasportando invece il vettore δP lungo il cammino $PP_2 = \delta' P$, giungiamo, come si è detto (v. Cap. V, § 19) allo stesso punto Q (anche tenendo conto dei termini del tipo $\delta\delta' P$, $\delta'\delta P$), purchè si trascurino i termini del 2º ordine rispetto a δP e a $\delta' P$. Possiamo quindi prendere in considerazione, in una V_n qualsiasi, un *parallelogramma elementare* PP_1QP_2.

Conveniamo, come è ovvio, di rappresentare con δq l'incremento che subisce una quantità qualunque q (scalare o vettoriale) nel passaggio da P a P_1, e con $\delta' q$ l'analogo incremento nel passaggio da P a P_2. Se si tratta di un vettore, calcoleremo detti incrementi con le formule del parallelismo.

Ciò premesso, sia $D_1 q$ l'incremento che subisce q, quando si passa da P a Q lungo il cammino PP_1Q, e $D_2 q$ l'analogo incremento corrispondente all'altra coppia di lati PP_2Q, che insieme con la prima costituisce il ciclo.

Si vede subito che (a meno di termini trascurabili in base alle convenzioni adottate) l'incremento totale Δq, quando si percorre l'intero ciclo, nel senso PP_1QP_2P, vale $D_1 q - D_2 q$. Occupiamoci in primo luogo di $D_1 q$.

Al trasporto lungo PP_1, corrisponde l'incremento indicato con δ: perciò, se la determinazione della nostra quantità era q nel punto P, sarà, nel punto P_1,

$$q + \delta q = q_1 .$$

Il trasporto lungo P_1Q cambia q_1 in $q_1 + \delta' q_1$, quindi si avrà, in Q,

$$\begin{aligned} & q + \delta q + \delta' (q + \delta q) \\ & = q + \delta q + \delta' q + \delta' \delta q \,, \end{aligned}$$

da cui

$$D_1 q = \delta q + \delta' q + \delta' \delta q \,.$$

Siccome $D_2 q$, per sua definizione, differisce da $D_1 q$ per lo scambio tra P_1 e P_2 e quindi fra δ e δ', così si ha

$$D_2 q = \delta' q + \delta q + \delta \delta' q \,.$$

Ne consegue che il trasporto ciclico dà luogo all'incremento

$$\Delta q = (\delta' \delta - \delta \delta') \, q \,. \qquad [1]$$

Si tratta ora di esplicitare questa espressione, supponendo che la quantità q sia un vettore $\boldsymbol{u}$, e calcolando gli incrementi δ e δ' con le formule del parallelismo. Conformemente a queste, gli incrementi δu^r delle componenti contravarianti saranno dati dal seguente pfaffiano

$$\delta u^r = - \sum_{ih}^{n} {}_{1} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} u^i \, \delta x_h \,, \qquad [2]$$

mentre lo stesso pfaffiano, relativo agli incrementi $\delta' x_h$, definisce le $\delta' u^r$. Dalla [1] si vede che di tale pfaffiano dobbiamo calcolare il covariante bilineare (cfr. Cap. II, § 4).

Differenziando la [2] col simbolo δ' avremo:

$$\delta' \delta u^r = - \sum_{ih}^{n} {}_{1} \delta' \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} u^i \, \delta x_h - \sum_{ih}^{n} {}_{1} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} \delta' u^i \, \delta x_h - $$
$$- \sum_{ih}^{n} {}_{1} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} u^i \, \delta' \delta x_h \,.$$

La prima sommatoria si sviluppa, osservando che le $\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\}$ sono funzioni delle x, e quindi

$$\delta' \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} = \sum_{1}^{n}{}_{k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} \delta' x_k \,.$$

La seconda, sostituendovi per $\delta' u^i$ la sua espressione analoga alla [2], diviene

$$\sum_{1}^{n}{}_{ihkl} \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\} u^l \, \delta' x_k \, \delta x_h \,,$$

ovvero, scambiando i con l (per avere anche qui il fattore u^i),

$$\sum_{1}^{n}{}_{ihkl} \left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} k\,i \\ l \end{matrix}\right\} u^i \, \delta' x_k \, \delta x_h \,.$$

Si ha dunque, riunendo, nelle due prime sommatorie, i fattori $u^i \, \delta x_h \, \delta' x_k$,

$$\delta' \delta u^r = - \sum_{1}^{n}{}_{ihk} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} - \sum_{1}^{n}{}_{l} \left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} k\,i \\ l \end{matrix}\right\} \right] u^i \, \delta x_h \, \delta' x_k - \\ - \sum_{1}^{n}{}_{ih} \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} u^i \, \delta' \delta x_h \,.$$

L'espressione di $\delta\delta' u^r$ si deduce da questa, scambiando materialmente δ con δ'; nella prima sommatoria converrà inoltre scambiare gli indici h e k, ottenendo

$$\delta \delta' u^r = - \sum_{1}^{n}{}_{ihk} \left[\frac{\partial}{\partial x_h} \left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} - \sum_{1}^{n}{}_{l} \left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} h\,i \\ l \end{matrix}\right\} \right] u^i \, \delta' x_k \, \delta x_h - \\ - \sum_{1}^{n}{}_{ih} \left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} u^i \, \delta \delta' x_h \,.$$

Nel fare la differenza $\delta' \delta u^r - \delta \delta' u^r$, le ultime sommatorie si elidono, perchè $\delta \delta' x_h = \delta' \delta x_h$ (cfr. Cap. II, § 4), e resta la somma rispetto agli indici i, h, k, nella quale si può mettere a fattor comune $u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k$. Perciò, introducendo *i simboli di Riemann di 2ª specie*,

$$
\left.
\begin{aligned}
\{i\,r,\,h\,k\} = {} & \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_h}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} - \\
& - \sum_{1}^{n}{}_{l} \left[\left\{\begin{matrix} l\,h \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} l\,k \\ r \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ l \end{matrix}\right\}\right] \quad (i, r, h, k = 1\,, 2\,, \ldots, n),
\end{aligned}
\right\} \quad [3]
$$

si avrà

$$
\Delta u^r = (\delta'\delta - \delta\delta')\, u^r = - \sum_{1}^{n}{}_{ihk} \{i\,r,\,h\,k\}\, u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k. \qquad [4]
$$

Si vede da questa formula che il cercato incremento $\Delta \boldsymbol{u}$ dipende dal vettore $\boldsymbol{u}$, dai due vettori δP, $\delta' P$ che definiscono il parallelogramma, e infine dalla metrica della varietà pel tramite delle quantità $\{i\,r,\,h\,k\}$. Dalle [4] segue in particolare che, per *le varietà euclidee, i simboli di Riemann* testè definiti *sono tutti nulli*, qualunque siano le coordinate x cui ci si riferisce. Infatti, per tali varietà, si ha $\Delta u^r = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, in quanto qualsiasi vettore riprende la determinazione originaria quando lo si trasporta per parallelismo lungo un ciclo chiuso qualsiasi. Perciò l'ultimo membro delle [4] s'annulla per ogni r, nonchè per qualsiasi determinazione del vettore $\boldsymbol{u}$ e degli spostamenti δP, $\delta' P$, cioè per qualsiasi determinazione degli argomenti u^i, δx_h, $\delta' x_k$. Si devono pertanto annullare i singoli coefficienti $\{i\,r,\,h\,k\}$.

È utile osservare fin da ora le due proprietà seguenti dell'operatore Δ:

a) applicato a un prodotto, si comporta come un simbolo di differenziazione ordinaria, cioè

$$
\Delta(\psi\,\varphi) = \psi\,\Delta\,\varphi + \varphi\,\Delta\,\psi\,,
$$

il che si verifica direttamente (calcolando prima $\delta(\psi\,\varphi)$, poi $\delta'\delta(\psi\,\varphi)$, ecc.);

b) applicato a una funzione del posto, dà per risultato lo zero, come è evidente dal suo stesso significato.

Se si vogliono, in luogo degli incrementi Δu^r, quelli relativi alle componenti covarianti, basta osservare che

$$
u_j = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, a_{jr}\, u^r
$$

e quindi, per le proprietà dell'operatore Δ,

$$\Delta u_j = \sum_1^n {}_r \, a_{jr} \, \Delta u^r$$

$$= - \sum_1^n {}_{rihk} \, a_{jr} \, \{ i\, r, h\, k \} \; u^i \, \delta x_h \, \delta' x_k \, .$$

Si può effettuare la somma rispetto a r, introducendo i simboli di Riemann di 1ª specie

$$(i\, j, h\, k) = \sum_1^n {}_r \, a_{jr} \, \{ i\, r, h\, k \} \quad , \tag{5}$$

e si può allora scrivere

$$\Delta u_j = - \sum_1^n {}_{ihk} (i\, j, h\, k) \, u^i \, \delta x_h \, \delta' x_k, \tag{4'}$$

formula analoga alla [4].

Risolvendo le [5] si hanno i simboli di Riemann di 2ª specie espressi per mezzo di quelli di 1ª, dalle formule, inverse delle [5],

$$\{ i\, r\, , h\, k \} = \sum_1^n {}_j \, a^{jr} \, (i\, j\, , h\, k) \, . \tag{5'}$$

§ 3. — Proprietà fondamentali dei simboli di Riemann di 2ª specie. — I simboli di Riemann di 2ª specie, definiti dalla [3], sono, come si vede, funzioni del posto, e dipendono precisamente dalle a_{ik}, dalle loro derivate prime (contenute nei simboli di Christoffel), nonchè dalle derivate seconde (contenute nelle derivate dei simboli di Christoffel). Essi godono le seguenti proprietà fondamentali:

a) Sono emisimmetrici rispetto agli ultimi due indici, cioè

$$\{ i\, r\, , h\, k \} = - \{ i\, r\, , k\, h \} \tag{6}$$

donde, in particolare

$$\{ i\, r\, , h\, h \} = 0 \, .$$

Questa proprietà risulta immediatamente dalla [3].

b) Costituiscono un tensore misto, contravariante rispetto al secondo indice, e covariante rispetto agli altri tre, talchè il simbolo $\{ir, hk\}$ si potrebbe anche indicare (come taluni fanno) con a^r_{ihk}. Per dimostrarlo, consideriamo l'invariante

$$F = \sum_1^n{}_r\, p_r\, u^r$$

dove le p_r sono funzioni assegnate (ma qualunque) del posto, talchè $\Delta p_r = 0$. Se applichiamo alla F il trasporto lungo un ciclo infinitesimo, troviamo (ricordando il comportamento dell'operatore Δ)

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_1^n{}_r\, (\Delta p_r\, u^r + p_r\, \Delta u^r) \\ &= \sum_1^n{}_r\, p_r\, \Delta u^r . \end{aligned}$$

Questa quantità deve essere invariante (essendo tale F): se nella sua espressione sostituiamo Δu^r con la sua espressione [4], otteniamo la forma quadrilineare

$$\Delta F = -\sum_1^n{}_{ihkr}\, \{ir, hk\}\, p_r\, u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k \qquad [7]$$

che esprime appunto l'annunciata proprietà dei simboli di Riemann, poichè i sistemi semplici p_r, u^i, δx_h, $\delta' x_k$ sono arbitrari.

Dal carattere tensoriale dei simboli di Riemann si può ricavare una seconda dimostrazione (la prima è immediata conseguenza delle [4], come si rilevò nel precedente §) del fatto che per una V_n euclidea i simboli di Riemann sono tutti nulli. Infatti essi sono evidentemente tali, in base alla definizione formale [3], in coordinate cartesiane, e per conseguenza, in qualunque altro sistema di coordinate.

c) Godono di una notevole *proprietà ciclica* rispetto ai tre indici di covarianza, e cioè

$$\{ir, hk\} + \{hr, ki\} + \{kr, ih\} = 0. \qquad [8]$$

Per dimostrarlo, riprendiamo la F e la formula [7], supponendovi però che le p_r siano le derivate di una funzione invariante f del posto (i cui valori numerici sono peraltro arbitrari), e inoltre assumendo come vettore $\boldsymbol{u}$ uno spostamento infinitesimo di componenti $u^r = dx_r$, pur esso arbitrario. In questa accezione, la F diviene

$$F = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial f}{\partial x_r} dx_r = df ,$$

e la [7]

$$(\delta'\delta - \delta\delta')\, df = - \sum_{1}^{n}{}_{ihkr} \{ir, hk\}\, p_r\, dx_i\, \delta x_h\, \delta' x_k . \qquad [9]$$

Scambiando tra loro ciclicamente i tre vettori infinitesimi cui accennano gli operatori d, δ, δ', avremo le altre due formule

$$(d\delta' - \delta' d)\, \delta f = - \sum_{1}^{n}{}_{ihkr} \{ir, hk\}\, p_r\, \delta x_i\, \delta' x_h\, dx_k, \qquad [9']$$

$$(\delta d - d\delta)\delta' f = - \sum_{1}^{n}{}_{ihkr} \{ir, hk\}\, p_r\, \delta' x_i\, dx_h\, \delta x_k. \qquad [9'']$$

Ora, nei secondi membri di queste ultime due formule, si può far apparire, come nella [9], il prodotto $dx_i\, \delta x_h\, \delta' x_k$, sol che si scambino convenientemente gli indici di sommazione. Ciò fatto, si possono sommare le [9], [9'], [9'']: al primo membro si ottiene 0, perchè i termini si elidono due a due (p. es., $\delta'\delta df - \delta' d\delta f = \delta' (\delta df - d\delta f) = 0$, essendo f funzione del posto); e si ottiene

$$0 = \sum_{1}^{n}{}_{ihkr} [\{ir, hk\} + \{hr, ki\} + \{kr, ih\}]\, p_r\, dx_i\, \delta x_h\, \delta' x_k .$$

Di qui segue subito la [8], essendo arbitrari p_r, dx_i, δx_h, $\delta' x_k$.

§ 4. — Simboli di Riemann di 1ª specie, loro proprietà fondamentali e loro numero. — I simboli di Riemann di 1ª specie, definiti dalla [5], cioè ottenuti componendo il sistema quadruplo dei simboli di 2ª specie col sistema delle a_{ik}, godono le seguenti proprietà:

a) Sono covarianti rispetto a tutti e quattro gli indici, talchè si possono indicare, come si fa spesso, con $a_{ij,hk}$: ciò risulta dalla definizione stessa, in virtù della legge di saturazione degli indici.

Vale anche qui l'osservazione, che una V_n euclidea ha tutti i simboli di Riemann nulli, qualunque sia il sistema di riferimento.

b) Sono emisimmetrici rispetto a ciascuna coppia di indici, vale a dire si ha identicamente

$$(ij\,,hk) = -(ij\,,kh), \qquad [10]$$

$$(ij\,,hk) = -(ji\,,hk). \qquad [11]$$

La [10] risulta subito dalla [5], e dalla analoga proprietà dei simboli di 2ª specie. Per dimostrare la [11] seguiremo un metodo analogo a quello impiegato nella sez. *b* del § precedente, prendendo come invariante il prodotto scalare di due arbitrari vettori **u**, **v**,

$$F = \sum_1^n {}_j v_j\, u^j\,.$$

Applicando l'operatore Δ e ricordando che nel trasporto per parallelismo il prodotto scalare non varia (per cui $\Delta F = 0$), avremo

$$0 = \sum_1^n {}_j\, v_j\, \Delta u^j + \sum_1^n {}_j\, u^j\, \Delta v_j\;. \qquad [12]$$

L'espressione di Δu^j è fornita dalla [4], scrivendovi j in luogo di r: quella di Δv_j dalla [4′] . Sostituendo, si ha

$$0 = \sum_1^n {}_{jihk} v_j \left\{ {ij \atop ,\; hk} \right\} u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k + \sum_1^n {}_{jihk}\, u^j\, (i\,j\;,\,h\;k)\, v^i\, \delta x_h\, \delta' x_k\;. \qquad [12']$$

Nella prima sommatoria esprimiamo v_j per mezzo delle componenti contravarianti v^r, e poi, ricordando la [5], effettuiamo la somma rispetto a j, cosicchè avremo successivamente

$$\sum_1^n {}_{jihkr}\, a_{jr}\, v^r \left\{ {ij \atop ,\; hk} \right\} u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k = \sum_1^n {}_{ihkr}\, v^r\, (i\;r\;,\,h\;k)\, u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k\,;$$

infine, scambiando gli indici i ed r in j e i rispettivamente (per uniformarci alla seconda parte della [12′]), risulta

$$\sum_1^n {}_{jihk}\, v^i\, (j\,i\;,\,h\,k)\, u^j\, \delta x_h\, \delta' x_k\,.$$

Ora possiamo riprendere la [12'] mettendo a fattor comune $v^i u^j \delta x_h \delta' x_k$, e avremo

$$0 = \sum_{1}^{n}{}_{jihk} [(j\,i\,, h\,k) + (i\,j\,, h\,k)]\, v^i u^j \delta x_h \delta' x_k \ ,$$

donde si ricava, per l'arbitrarietà delle u^j, v^i, δx_h, $\delta' x_k$, la formula [11].

c) Anche i simboli di Riemann di 1ª specie godono di una *proprietà ciclica* analoga a quella dei simboli di 2ª specie e da essa immediatamente desumibile: si ha cioè (tenendo fisso il secondo indice, e permutando ciclicamente gli altri tre):

$$(i\,j\,, h\,k) + (h\,j\,, k\,i) + (k\,j\,, i\,h) = 0\,. \qquad [14]$$

Questa formula deriva senz'altro dalla [8], moltiplicata per a_{jr} e sommata rispetto a r.

In virtù della emisimmetria dei singoli addendi, da questa identità ne deriva subito una analoga (in cui invece si tien fisso il primo indice):

$$(i\,j\,, h\,k) + (i\,h\,, k\,j) + (i\,k\,, j\,h) = 0. \qquad [14']$$

d) Vi è infine, pei simboli di 1ª specie, una proprietà di *commutabilità*, che è conseguenza delle precedenti, e permette di scambiare fra loro le due coppie di indici, senza cambiare il valore del simbolo. In formula:

$$(i\,j\,, h\,k) = (h\,k\,, i\,j)\,. \qquad [15]$$

Per dimostrarla, scriviamo la [14'] e le altre tre identità che si ottengono da quella permutando ciclicamente i quattro indici nell'ordine i, j, h, k, ossia

$$\begin{aligned}
&\underline{(i\,j\,, h\,k)} + (i\,h\,, k\,j) + (i\,k\,, j\,h) = 0\,,\\
&(j\,h\,, k\,i) + (j\,k\,, i\,h) + \underline{(j\,i\,, h\,k)} = 0\,,\\
&\underline{(h\,k\,, i\,j)} + (h\,i\,, j\,k) + (h\,j\,, k\,i) = 0\,,\\
&(k\,i\,, j\,h) + (k\,j\,, h\,i) + \underline{(k\,h\,, i\,j)} = 0\,.
\end{aligned}$$

Ora sommiamo la prima e l'ultima sottraendo la seconda e la terza, e teniamo presente la proprietà di emisimmetria: vedremo che i termini si elidono due a due, tranne i quattro sottolineati: questi ultimi forniscono

$$2\,(ij\,,\,hk) - 2\,(hk\,,\,ij) = 0\,,$$

donde l'annunciata proprietà.

Calcoliamo adesso il *numero dei simboli di Riemann di* 1ª *specie indipendenti.* Un sistema quadruplo, come abbiamo detto (Cap. IV, § 2), ha in generale n^4 elementi, se n sono le variabili indipendenti. Il numero dei simboli di Riemann distinti di ciascuna specie è però minore, perchè quei simboli sono legati dalle identità che abbiamo precedentemente dimostrato. Fissiamo questo numero per i simboli di 1ª specie, dividendoli in tre classi, e contando separatamente quelli di ciascuna classe, col criterio seguente:

1) *simboli con* 2 *soli indici diversi*: sono del tipo $(ij,\,ij)$, poichè le altre disposizioni possibili danno luogo a simboli nulli, o riducibili a quello scritto. Con ogni coppia di numeri i, j (non uguali) si può dunque formare un solo simbolo di questa classe la quale ne contiene pertanto

$$\frac{n\,(n-1)}{2}\,;$$

2) *simboli con* 3 *indici diversi*: sono del tipo $(ij,\,ih)$, poichè anche qui le altre disposizioni possibili danno luogo a simboli nulli, o riducibili a questo. Con ogni terna di numeri non uguali si possono formare 3 simboli di quel tipo (dovendosi scegliere fra tre l'indice che si ripete); poichè le terne sono $\dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.\,2.\,3}$, i simboli distinti della classe che consideriamo ammontano a

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2}\,;$$

c) *simboli con* 4 *indici diversi*: con una quaterna di numeri tutti diversi i, j, h, k, si possono formare i tre simboli

$$(ij,\,hk)\quad,\quad(ih,\,kj)\quad,\quad(ik,\,jh)\;,$$

mentre ogni altra possibile disposizione dà luogo a simboli riducibili ai tre suindicati. Questi tre però non sono indipendenti, in causa della relazione ciclica [14′]. Ne segue che ognuna delle $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$ quaterne possibili dà luogo a 2 simboli distinti: questi sono perciò in numero di

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

Sommando i tre risultati parziali ottenuti si ha, con facili riduzioni, il numero totale N dei simboli di Riemann di 1ª specie indipendenti:

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Così per una ordinaria superficie ($n = 2$) si ha $N = 1$; per uno spazio a tre dimensioni, $N = 6$; per uno spazio a quattro dimensioni, $N = 20$.

§ 5. — Identità del Bianchi (1). — Si tratta di relazioni cicliche fra le derivate covarianti dei simboli di Riemann, tanto di 1ª che di 2ª specie. Ecco come vi si giunge.

Riprendiamo la formula [3], che definisce il simbolo di 2ª specie $\{ir, hk\}$, e deriviamola rispetto a x_l. Osserviamo però che l'ultima parte (che consta di termini di 2° grado nei simboli di Christoffel) darà luogo nella derivazione, a termini formati dal prodotto di un simbolo di Christoffel per la derivata di un altro di tali simboli: l'essenziale per noi è che, con referenza a un determinato punto P, scegliendo coordinate in tal punto geodetiche, possiamo far sì che tutti questi termini si annullino. Non sarà altrettanto però dei primi, poichè le coordinate geodetiche annullano bensì i simboli, ma non le

(1) Queste identità erano state indicate senza dimostrazione dal Padova, in base ad una comunicazione verbale del Ricci (cfr. *Sulle deformazioni infinitesime*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (4), vol. V, 1° semestre 1889, pag. 176). Poi vennero dimenticate anche dallo stesso Ricci. Il Bianchi le ritrovò e ne pubblicò la dimostrazione, conseguita mediante calcolo diretto, nel 1902 (*ibidem*, (5), vol. XI, 1° semestre 1902, pp. 3-7).

loro derivate. Avremo pertanto la formula, valida nel punto P e per coordinate ivi geodetiche,

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\{i\,r, h\,k\} = \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_l}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\}.$$

Scriviamo anche le altre due formule, che si ottengono da questa permutando ciclicamente gli indici h, k, l (e lasciando fissi i, r):

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\{i\,r, k\,l\} = \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_h}\left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_h}\left\{\begin{matrix} i\,l \\ r \end{matrix}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\{i\,r, l\,h\} = \frac{\partial^2}{\partial x_h\,\partial x_k}\left\{\begin{matrix} i\,l \\ r \end{matrix}\right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_k}\left\{\begin{matrix} i\,h \\ r \end{matrix}\right\}.$$

Sommando membro a membro queste tre uguaglianze otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\{i\,r, h\,k\} + \frac{\partial}{\partial x_h}\{i\,r, k\,l\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\{i\,r, l\,h\} = 0\,, \qquad [16]$$

la quale vale nel punto P, e nel particolare sistema di coordinate scelto. Ora consideriamo il seguente tensore misto di rango cinque

$$A^r_{ihkl} = \{i\,r, h\,k\}_l + \{i\,r, k\,l\}_h + \{i\,r, l\,h\}_k$$

in cui gli indici esterni alle parentesi indicano derivazione covariante.

Questo sistema, riferito al punto P e a coordinate ivi geodetiche, si identifica col primo membro della [16] (poichè le derivate covarianti in tal caso coincidono con quelle ordinarie): esso ha dunque tutti gli elementi uguali a zero, e sarà quindi identicamente nullo qualunque sia il sistema di riferimento (cfr. Cap. IV, § 12). Con ciò si è dimostrata l'identità

$$\{i\,r, h\,k\}_l + \{i\,r, k\,l\}_h + \{i\,r, l\,h\}_k = 0 \qquad [17]$$

che costituisce una prima forma del risultato stabilito dal Bianchi.

La relazione analoga a questa, pei simboli di 1ª specie, si dimostra facilmente, ricordando la definizione di questi, data dalla [5].

Infatti, se deriviamo covariantemente quella formula, tenendo presente il lemma di Ricci, troviamo

$$(i\,j,\,h\,k)_l = \sum_1^n{}_r\, a_{jr} \left\{ i\,r,\,h\,k \right\}_l \;.$$

Di qui, permutando ciclicamente gli indici h, k, l, e sommando, si ottiene, in virtù di [17],

$$(i\,j,\,h\,k)_l + (i\,j,\,k\,l)_h + (i\,j,\,l\,h)_k = 0 \qquad [17']$$

che è la seconda forma delle identità del Bianchi.

§ 6. — REGOLA DI COMMUTAZIONE DELLE DERIVATE SECONDE COVARIANTI. — Una notevole applicazione dei simboli di Riemann si ha nella formula che dà la relazione fra i due sistemi

$$A^{(j)}_{(i)hk} \quad \text{e} \quad A^{(j)}_{(i)kh} \,,$$

ottenuti con una doppia derivazione covariante da un generico tensore $A^{(j)}_{(i)}$ (dove con (i) si intende il complesso dei simboli di covarianza $i_1 \ldots i_m$, e con (j) il complesso dei simboli di contravarianza $j_1 \ldots j_\mu$). Considereremo, per semplicità di scrittura, un sistema misto doppio A^j_i, avvertendo che il procedimento è analogo se gli indici sono di più.

Partiamo, al solito, dalla forma bilineare

$$F = \sum_1^n{}_{ij}\, A^j_i\, \xi^i\, u_j$$

la cui invarianza caratterizza la legge di trasformazione delle A: le ξ^i sono le componenti contravarianti di un vettore arbitrario ξ, le u_j sono le componenti covarianti di un altro vettore arbitrario $\boldsymbol{u}$. Il procedimento consisterà nel calcolare, in due modi diversi, la quantità ΔF corrispondente a un trasporto ciclico lungo un parallelogramma elementare (cfr. § 2), e nell'eguagliare identicamente le due espressioni ottenute.

Un primo modo di calcolare ΔF è il seguente. Facciamo corrispondere, come nel § 2, a due lati del parallelogramma gli incrementi δ, δ', e ricordiamo la [1]. Osserviamo dapprima che δF, per la definizione di derivate covarianti (cfr. Cap. VI, § 1) ha l'espressione seguente:

$$\delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ijh} A^{j}_{i\,|\,h}\, \xi^i\, u_j\, \delta x_h \,.$$

Applicando a questa forma la stessa osservazione, relativamente al simbolo δ', otterremo

$$\delta' \delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} A^{j}_{i\,|\,hk}\, \xi^i\, u_j\, \delta x_h\, \delta' x_k \,.$$

Di qui, scambiando δ con δ',

$$\delta \delta' F = \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} A^{j}_{i\,|\,hk}\, \xi^i\, u_j\, \delta' x_h\, \delta x_k \,;$$

e sottraendo membro a membro, dopo aver scambiato, nella seconda, gli indici h e k, si trae

$$\Delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} \left(A^{j}_{i\,|\,hk} - A^{j}_{i\,|\,kh} \right) \xi^i\, u_j\, \delta x_h\, \delta' x_k \,. \qquad [18]$$

L'altro modo per calcolare questa quantità, consiste nell'applicare direttamente alla espressione di F l'operatore Δ. Ricordandone le proprietà fondamentali (§ 2), si otterrà

$$\Delta F = \sum_{1}^{n}{}_{ij} A^{j}_{i} \left(\Delta \xi^i\, u_j + \xi^i\, \Delta u_j \right),$$

e, sostituendo per $\Delta \xi^i$ e Δu_j, le espressioni fornite dalla [4] e dalla [4'],

$$\Delta F = - \sum_{1}^{n}{}_{ijlhk} A^{j}_{i} \{l i \,,\, h k\}\, u_j\, \xi^l\, \delta x_h\, \delta' x_k -$$
$$- \sum_{1}^{n}{}_{ijphk} A^{j}_{i} (p j \,,\, h k)\, u^p\, \xi^i\, \delta x_h\, \delta' x_k \,.$$

Nell'ultima sommatoria converrà far figurare i simboli di 2ª specie, e le componenti covarianti di $\boldsymbol{u}$ (per uniformarla alla prima): a tal uopo basterà dapprima sfruttare l'emisimmetria rispetto alla prima coppia, ed esprimere le u^p mediante le u_l, con che la sommatoria diviene

$$\sum_1^n {}_{ijphkl} A^j_i \, (j p \, , h k) \, a^{pl} \, \xi^i \, u_l \, \delta x_h \, \delta' x_k \, .$$

Effettuando anche la somma rispetto a p, e badando alla [5'], si ha

$$\sum_1^n {}_{ijhkl} A^j_i \, \{j l \, , h k\} \, \xi^i \, u_l \, \delta x_h \, \delta' x_k \, .$$

Ora, per ricomporre opportunamente l'espressione di ΔF, converrà prima fare qualche scambio di indici, sì da poter mettere in evidenza il fattore $\xi^i \, u_j \, \delta x_h \, \delta' x_k$ che figura nella [18]. Basterà, nella prima sommatoria scambiare l con i, e nella seconda l con j: si avrà allora, raccogliendo le due somme in una,

$$\Delta F = - \sum_1^n {}_{ijhkl} \left[A^j_l \, \{i l \, , h k\} - A^l_i \, \{l j \, , h k\} \right] \xi^i \, u_j \, \delta x_h \, \delta' x_k \, .$$

Confrontando questa espressione con la [18] e rammentando che ξ, $\boldsymbol{u}$, le δx e le $\delta' x$ sono arbitrari, si ricava la *formula di commutazione*

$$A^j_{i \mid hk} - A^j_{i \mid kh} = - \sum_1^n {}_l \left[A^j_l \, \{i l \, , h k\} - A^l_i \, \{l j \, , h k\} \right] .$$

Se il sistema da cui si parte ha m indici di covarianza e μ di contravarianza, si considerano m vettori ξ, individuati dalle componenti contravarianti, e μ vettori $\boldsymbol{u}$, individuati dalle componenti covarianti, e si trova, con analogo procedimento,

$$\left. \begin{aligned} A^{(j)}_{(i) \mid hk} - A^{(j)}_{(i) \mid kh} = - \sum_1^n {}_l \Big[& \sum_1^m {}_r A^{(j)}_{i_1 \ldots i_{r-1} \, l \, i_{r+1} \ldots i_m} \{i_r l \, , h k\} - \\ & - \sum_1^\mu {}_\rho A^{j_1 \ldots j_{\rho-1} \, l j_{\rho+1} \ldots j_\mu}_{(i)} \{l j_\rho \, , h k\} \Big] . \end{aligned} \right\} \quad [20]$$

§ 7. — TRASPORTO CICLICO LUNGO UN CIRCUITO INFINITESIMO QUALUNQUE. — Riprendendo ora l'ordine di considerazioni interrotto al § 2, proponiamoci di trasportare (per parallelismo in V_n) una direzione $\boldsymbol{u}$ assegnata in P, lungo una linea chiusa T, infinitesima, *ma di forma qualsiasi* (passante naturalmente per P), e di calcolare l'incremento Du^r subito da un generico parametro di $\boldsymbol{u}$ in conseguenza del trasporto ciclico. La formula che troveremo non sarà altro che una generalizzazione della [4] con la quale dovrà ridursi a coincidere se, in particolare, per T, si prende un parallelogramma infinitesimo. L'incremento di u^r per un trasporto elementare dx_h è, come sappiamo,

$$du^r = -\sum_1^n{}_{ih} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} u^i\, dx_h\,,$$

cioè ha la forma di un pfaffiano

$$\psi_r = \sum_1^n{}_h X_{rh}\, dx_h \tag{21}$$

in cui le X_{rh} sono funzioni del posto (in quanto contengono i simboli di Christoffel), e delle u^i le quali sono definite *lungo la linea* T dalle equazioni del parallelismo $du^r = \psi_r$. Noi dobbiamo calcolare l'integrale

$$Du^r = \int_T \psi_r = \int_T \sum_1^n{}_h X_{rh}\, dx_h \tag{22}$$

(convenendo di accennare coll'operatore D l'incremento dovuto al trasporto lungo l'intero ciclo). Ora consideriamo una qualunque superficie σ contenente la linea T, e diciamo Γ la regione di questa superficie che è interna a T (e di cui T costituisce il contorno completo). Ci proponiamo di trasformare l'integrale esteso a T, che figura nella [22] in un integrale esteso all'area Γ. Per far ciò, introdurremo anzitutto un sistema di coordinate q_1 e q_2 sulla superficie in discorso, definendola per mezzo delle equazioni parametriche

$$x_h = x_h(q_1, q_2) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

I dx risulteranno in conseguenza funzioni lineari di dq_1 e dq_2 e, sostituendo le loro espressioni nel pfaffiano [21], questo assumerà la forma

$$du^r = \psi_r = Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 \tag{21'}$$

dove le Q_1. Q_2, rimangono, come le X, definite *lungo la linea* T. L'integrale da calcolare sarà così

$$Du^r = \int_T (Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2). \qquad [22']$$

Supporremo scelte le coordinate curvilinee q_1, q_2 in modo che il verso di percorrenza dell'integrale curvilineo, lungo T, sia congruente a quello determinato su Γ (in un punto generico) dalla rotazione (attraverso l'angolo acuto) che fa passare dalla direzione positiva della linea q_1 (senso delle q_1 crescenti) all'analoga direzione della linea q_2.

La trasformazione dell'integrale di linea [22'] in uno di superficie esteso a Γ sarebbe immediata, se le Q fossero definite come funzioni del posto *anche nell'interno di* Γ; ma invece esse contengono le u^r, le quali sono assegnate in P, hanno, nei punti di T, i valori risultanti dal trasporto per parallelismo lungo la T stessa, ma non sono definite per un punto M interno a Γ, dipendendo la loro determinazione in M dal cammino che si segue per trasportare la $\boldsymbol{u}$ (parallelamente) da P in M. Dimostreremo però che, se Γ è infinitesima, l'influenza del cammino di trasporto sui valori delle u^r in M è trascurabile, e quindi è lecito risguardare le u^r, e per conseguenza le X o le Q, come funzioni del posto in tutta l'area Γ, ciò che renderà possibile la desiderata trasformazione della [22'] (¹). Premettiamo a tal uopo alcune considerazioni relative agli ordini di grandezza, invocando in sostanza, come ora diremo, il teorema generale di esistenza degli integrali dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Un tale sistema è costituito dalle

$$du^r = \psi_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

che definiscono le funzioni u^r, lungo una linea generica T, a partire dalle loro determinazioni iniziali in P (cfr. Cap. II, § 5).

Ora il teorema di esistenza assicura che, in generale (cioè quando sono soddisfatte certe condizioni assai poco restrittive di continuità e di derivabilità), i valori iniziali definiscono univocamente gli integrali,

---

(¹) In verità ci limiteremo qui a indicare le linee generali del ragionamento, senza soffermarci sugli sviluppi che sarebbero necessari per giustificare i vari passaggi con perfetto rigore. Una dimostrazione esauriente si può trovare nella memoria *Ueber Parallelverschiebung in Riemannschen Räume* del sig. H. Tietze (Math. Zeitschrift, B. 16, 1923, pp. 308-317).

e questi risultano funzioni continue (assieme alle loro derivate) per un intervallo di valori della variabile indipendente, di ampiezza non inferiore ad un numero assegnabile.

Nel caso nostro, ammesso, come è nella natura delle cose, che i coefficienti a_{ik} del ds^2 e i reciproci a^{ik} sieno finiti e continui, assieme alle loro derivate prime e seconde, in un certo intorno di P, e inoltre che la lunghezza del vettore $\boldsymbol{u}$, in P, si assuma limitata, cioè non superiore a una costante U del resto arbitraria, si può agevolmente desumere dalla proposizione esistenziale sopra richiamata che, risguardando come variabile indipendente l'arco della curva di trasporto, le u^r rimangono definite (come funzioni continue, derivabili, ecc.), a partire da P, lungo una linea qualsiasi, per un tratto non superiore a un certo Λ, dipendente esclusivamente dalla metrica della varietà e da U. Di qua segue in particolare che le differenze fra le u^r e i loro valori iniziali *sono dell'ordine* [1] della lunghezza L dell'arco lungo cui si integra (il sistema $du^r = \psi_r$).

D'altra parte l'area Γ che si prende in considerazione sulla superficie σ è infinitesima (nel senso che ci proponiamo di farla rimpicciolire indefinitamente). È dunque perfettamente legittimo di supporla già abbastanza piccola perchè ogni suo punto si possa raggiungere, a partire da P, con linee di lunghezza non superiore a Λ, e sia pure inferiore a Λ la lunghezza dell'intero contorno T.

Rimane così acquisito che, se si trasporta per parallelismo la $\boldsymbol{u}$ da P a un punto M interno all'area Γ, o anche posto sul suo contorno T, le u^r in M differiscono dalle loro determinazioni in P per quantità dell'ordine di L, se L ($\leq \Lambda$) è la lunghezza massima delle linee che prenderemo in considerazione: potremmo pertanto, in una prima approssimazione (in cui si trascurassero le lunghezze dell'ordine di L) assumere le u^r come costanti $= u^{r(0)}$ in tutta l'area Γ, contorno incluso.

Otterremo invece una più raffinata approssimazione se calcoleremo le u^r in M mediante l'integrazione del pfaffiano [21] lungo una linea PQ, sostituendo però i coefficienti X_{rh}, con i loro valori in P. Con ciò commettiamo un errore dell'ordine di L nella valutazione di quei coefficienti e quindi un errore dell'ordine di L^2 nella valutazione delle u^r in M: quanto alla scelta della linea PM, essa sarà indifferente, divenendo in tale caso il pfaffiano ψ un differenziale esatto. Anzi, poichè

---

(1) Si vuol dire con ciò che le differenze in questione non superano il prodotto di L per un coefficiente *finito* (che non dipende da L, nè dalla linea di integrazione, ma soltanto da P, da U e dalla metrica della varietà).

i suoi coefficienti sono costanti, l'integrazione sarà immediata, e fornirà per le u^r delle funzioni lineari delle x. Con ciò avremo ottenuto le u^r come funzioni del posto in tutta l'area Γ (contorno incluso), trascurando le quantità dell'ordine di L^2.

Una terza approssimazione si potrà ottenere, sostituendo queste espressioni (lineari) approssimate delle u^r nei coefficienti X_{rh}, i quali risulteranno così, come si voleva, funzioni del posto, definite in tutta Γ, contorno T incluso, e coincidenti lungo T (a meno di L^2) coi loro valori esatti, definiti come abbiamo già detto: con tali valori dei coefficienti si calcolerà l'integrale [22], che fornirà la Du^r a meno di quantità dell'ordine di L^3. E con questa approssimazione è necessario calcolarla, poichè le altre due approssimazioni, rendendo ψ un differenziale esatto, fornirebbero per Du^r il valore zero: ciò che significa evidentemente che Du^r è una quantità dell'ordine di L^2.

Riprendiamo quindi la [22], dando alle X_{rh} il significato illustrato testè, e trasformiamola, in base alle equazioni parametriche della superficie σ, nella [22′], dove Q_1 e Q_2 avranno ora il significato di funzioni del posto definite in tutta Γ. Per conseguenza, (¹) potremo trasformare l'integrale di linea in uno di superficie, ottenendo

$$Du^r = \int_\Gamma \left(\frac{\partial Q_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial q_2}\right) dq_1\, dq_2\,,$$

o anche

$$Du^r = \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_2\, dq_2)\, dq_1 - \frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1\, dq_1)\, dq_2\right]. \qquad [23]$$

(¹) Richiamiamo le note formule

$$\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1\, dq_2 = \int_T f dq_2 \quad , \quad \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_1\, dq_2 = -\int_T f dq_1 \qquad (G)$$

(dove f è una funzione di q_1, q_2, continua insieme alle sue derivate prime): di solito in queste formule si interpretano q_1 e q_2 come coordinate cartesiane nel piano, e si definisce il senso di percorrenza della linea T con la condizione che la coppia di direzioni s, n (s tangente al contorno nel suddetto verso di percorrenza, n normale a T rivolta verso l'interno) sia congruente, nel piano, con la coppia q_1, q_2. Le formule valgono però, come è ovvio, indipendentemente da questa interpretazione nel piano, e quindi sono applicabili anche se q_1, q_2 sono coordinate curvilinee qualunque, restando definito il verso di percorrenza con criterio analogo al precedente, purchè si facciano intervenire, in un punto generico del contorno, le direzioni tangenti alla q_1 (cioè

Si tratta ora di esplicitare l'integrando del secondo membro, il che potrà farsi anche senza scrivere per disteso le espressioni di Q_1 e Q_2, per mezzo delle considerazioni seguenti.

Si indichi con l'operatore δ l'incremento di una quantità in corrispondenza a uno spostamento lungo la linea $q_2 =$ cost, in cui q_1 aumenta di dq_1: analogamente, l'operatore δ' corrisponda a un incremento dq_2 della sola q_2. Si avrà in conformità

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\, dq_1 \,, \\ \delta' x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\, dq_2 \end{aligned}\right\} \qquad [24]$$

e analoghe espressioni per qualsiasi funzione del posto. Si osservi ora che nella [21'] il primo termine rappresenta proprio l'incremento della u^r dovuto a uno spostamento del primo tipo $(dq_2 = 0)$, talchè

$$\delta u^r = Q_1\, dq_1 \,,$$

e, analogo significato avendo il secondo termine,

$$\delta' u^r = Q_2\, dq_2 \;.$$

Perciò potremo scrivere la [23] così

$$\begin{aligned} Du^r &= \int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (\delta' u^r)\, dq_1 - \frac{\partial}{\partial q_2} (\delta u^r)\, dq_2 \right] \\ &= \int_\Gamma [\delta\, \delta' u^r - \delta' \delta\, u^r] \;; \end{aligned}$$

da cui, ricordando la [4],

$$Du^r = \int_\Gamma \sum_1^n {}_{ihk} \{i r \,,\, h k\}\, u^i\, \delta x_h\, \delta' x_k \;.$$

$q_2 =$ cost) e q_2, nel senso in cui crescono i rispettivi parametri. Noi abbiamo appunto supposto (pag. 214), rispetto alle ausiliarie coordinate curvilinee q_1, q_2, che esse si comportino quanto al verso, nel modo ora detto. Perciò valgono proprio (in valore e *anche in segno*) le eguaglianze (G).

Se chiamiamo ξ, η i parametri (nella V_n) delle linee $q_2 = \cos t$, $q_1 = \cos t$, cioè se poniamo

$$\xi^i = \frac{\delta x_i}{\delta s} \qquad , \eta^i = \frac{\delta' x^i}{\delta' s}$$

dove δs, $\delta' s$ sono le lunghezze degli spostamenti lungo le linee $q_2 = \cos t$, $q_1 = \cos t$ di componenti δx_i, $\delta' x_i$, potremo anche scrivere

$$Du^r = \int_\Gamma f_r \, \delta s \, \delta' s \tag{25}$$

dove si è posto, per brevità,

$$f_r = \sum_1^n {}_{ihk} \{i\, r\, ,\, h\, k\} \, u^i \, \xi^h \, \eta^k \, .$$

Si può ora osservare che, detto ϑ l'angolo delle linee coordinate q_1, q_2, l'elemento di area è (cfr. Cap. V, § 7).

$$d\Gamma = \delta s \, \delta' s \sin \vartheta \, ,$$

e perciò la [22] diviene

$$Du^r = \int_\Gamma \frac{f_r}{\sin \vartheta} \, d\Gamma \, .$$

Per il teorema del valore medio, indicando con $\left[\frac{f_r}{\sin \vartheta}\right]_{M_0}$ il valore della funzione del posto $\frac{f_r}{\sin \vartheta}$ in un conveniente punto M_0 interno a Γ, (ignoto a priori) e con $D\Gamma$ l'area del campo, potremo anche scrivere

$$Du^r = \left[\frac{f_r}{\sin \vartheta}\right]_{M_0} D\Gamma \, .$$

Ora, il valore della funzione del posto $\frac{f_r}{\sin \vartheta}$ in M_0 differisce da quello in P per quantità dell'ordine di L (chè di tal ordine è la distanza $M_0 P$): poichè l'area $D\Gamma$ è dell'ordine di L^2, sostituendo al valore in M_0

quello in P si commette un errore dell'ordine di L^3, che abbiamo convenuto di trascurare: avremo perciò

$$Du^r = \frac{f_r}{\sin \vartheta} D\Gamma ,$$

ossia

$$Du^r = \frac{D\Gamma}{\sin \vartheta} \sum_{1}^{n}{}_{ihk} \{ir , hk\} u^i \xi^h \eta^k . \qquad [26]$$

In questa formula le ξ^h e le η^k rappresentano i parametri delle linee q_1, q_2 in P, ϑ l'angolo di quelle linee; i valori delle u^i e dei simboli di Riemann si riferiscono al punto P. Come si vede, l'influenza del ciclo di trasporto figura in questa formula pel tramite di tre elementi geometrici, che valgono sostanzialmente a caratterizzare il ciclo stesso, e sono: due direzioni ξ, η (a priori qualunque) che determinano la giacitura su cui si suppone tracciato il ciclo, e insieme l'angolo tra esse compreso; l'area $D\Gamma$ del ciclo stesso (misurata secondo la metrica di V_n).

§ 8. — Formula di Pérès. — Dalla [26] si ricava immediatamente la formula fondamentale che serve al collegamento fra parallelismo e curvatura. Si considera all'uopo una (quarta) direzione qualsiasi $\boldsymbol{v}$ spiccata da P: detto α l'angolo che essa forma con $\boldsymbol{u}$, e $\alpha + D\alpha$ l'angolo che la stessa direzione $\boldsymbol{v}$ forma con la $\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{u}$, ci proponiamo di calcolare $D\alpha$. Basta all'uopo prendere in considerazione il prodotto scalare

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \cos \alpha$$

e differenziare col simbolo D, tenendo conto che, essendo $\boldsymbol{v}$ un vettore fisso, $D\boldsymbol{v} = 0$.

Avremo

$$\boldsymbol{v} \times D\boldsymbol{u} = - \sin\alpha \, D\alpha ,$$

ossia, sostituendo al prodotto scalare la sua espressione $\sum_{1}^{n}{}_r v_r Du^r$, e badando alla [26],

$$\sin \alpha \, D\alpha = - \frac{D\Gamma}{\sin \vartheta} \sum_{1}^{n}{}_{irhk} \{ir , hk\} u^i v_r \xi^h \eta^k .$$

Se si esprimono in questa formula le v_r per mezzo delle v^j, e si effettua la somma rispetto a r (ricordando la [5]) si trova

$$\sin\alpha\, D\alpha = -\frac{D\Gamma}{\sin\vartheta}\sum_{1}^{n}{}_{ijhk}\,(ij\,,hk)\,u^i\,v^j\,\xi^h\,\eta^k\,.$$

Ora, se le direzioni $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ coincidono, oppure sono opposte, questa formula si riduce a un'identità priva di interesse, poichè al primo membro si ha $\sin\alpha = 0$, e d'altra parte il secondo membro si annulla, per l'emisimmetria dei simboli di Riemann. Escludendo questo caso, si può dividere tutta l'equazione per $\sin\alpha$, e si ottiene la *formula di Pérès*

$$D\alpha = \frac{-D\Gamma}{\sin\alpha\,\sin\vartheta}\sum_{1}^{n}{}_{ijhk}\,(ij\,,hk)\,u^i\,v^j\,\xi^h\,\eta^k\,. \qquad [27]$$

§ 9. — Applicazione alle superficie. Curvatura gaussiana di una V_2. — Nel caso particolare che si tratti di una V_2, cioè di una ordinaria superficie, le direzioni $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, debbono naturalmente esser contenute nella giacitura definita da $\xi\,;\eta$ (che è l'unica esistente) e poichè questi due ultimi vettori non hanno altro ufficio che di caratterizzare la giacitura del ciclo, possiamo, senza diminuire la generalità, identificarli con le $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$: la [27] allora diverrà

$$D\alpha = \frac{-D\Gamma}{\sin^2\alpha}\sum_{1}^{n}{}_{ijhk}\,(ij,\,hk)\,u^i\,v^j\,u^h\,v^k\,. \qquad [27']$$

Siccome, per $n = 2$, i simboli di Riemann non nulli corrispondono all'unico schema $(12\,,12)$, questa formula si può ancora ridurre alla forma

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix}\lambda^1 & \lambda^2\\ \mu^1 & \mu^2\end{vmatrix}$

$$D\alpha = \frac{-D\Gamma}{\sin^2\alpha}\,(12\,,12)\,(u^1\,v^2 - u^1\,v^2)^2\,,$$

o infine, se si ricorda l'espressione di $\sin\alpha$ per mezzo dei parametri delle due direzioni $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ (cfr. Cap. V, § 4, form. [9']) si ha

$$D\alpha = -\frac{D\Gamma}{a}\,(12\,,12)\,.$$

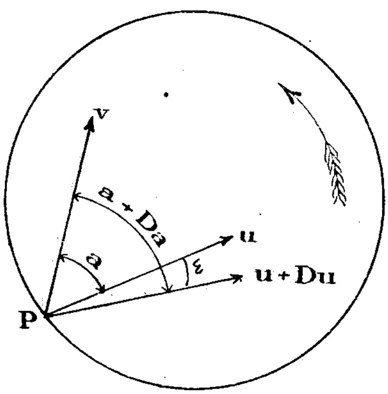
Di solito si pone

$$\frac{(12\,,12)}{a} = K\ , \qquad [28]$$

con che la formula precedente diviene

$$\frac{D\alpha}{D\Gamma} = -K\ . \qquad [29]$$

Di qui si riconosce che la funzione del posto K, definita dalla [28], è un invariante: esso dipende dalle a_{ik}, nonchè dalle loro derivate prime e seconde, e coincide con la quantità che nella teoria delle superficie è nota col nome di *curvatura totale*, o *gaussiana* (prodotto delle curvature delle sezioni principali) (1). Alla [29] si può dare forma più espressiva, introducendo *l'angolo di parallelismo* ε cioè l'angolo che forma la $\boldsymbol{u}$ con la $\boldsymbol{u}+D\boldsymbol{u}$ (ossia con la sua parallela, ottenuta per trasporto lungo il ciclo) contato nel verso in cui si percorre il ciclo. Si può anche dire che ε è l'angolo di cui ha ruotato la $\boldsymbol{u}$ per effetto del trasporto ciclico. È manifesto che ε ha lo stesso valore assoluto di $D\alpha$. Dico che si ha più precisamente



$$\varepsilon = -D\alpha.$$

Per rendersene conto, bisogna ricordare (§ 7, pag. 214) che si è convenuto di percorrere il ciclo nel senso positivo, rispetto alle direzioni delle linee coordinate q_1, q_2, ossia dal versore ξ al versore η. Siccome ora ξ ed η si identificano con $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ il verso di percorrenza del ciclo è da $\boldsymbol{u}$ verso $\boldsymbol{v}$ (attraverso l'angolo convesso). Perciò (cfr. la figura), se $D\alpha > 0$, $\boldsymbol{u}+D\boldsymbol{u}$ si trova fuori dell'angolo convesso

(1) Cfr. in proposito il § 9 del Cap. X.

$\widehat{uv}$, e quindi spostato, a partire da u nel verso negativo ($\varepsilon < 0$), e viceversa. Si può dunque scrivere la [29] sotto la forma

$$\frac{\varepsilon}{D\Gamma} = K \qquad [29']$$

con che la curvatura K riceve questa notevole interpretazione: essa è il *rapporto dell'angolo di parallelismo* (contato con debito segno in relazione al verso di percorrenza del ciclo) *all'area del ciclo.*

Nel caso di una V_2 euclidea, il simbolo di Riemann è nullo (cfr. § 4), quindi $K = 0$. Del resto si può reciprocamente inferire che $K = 0$ dal fatto geometricamente evidente (e già invocato al § 2) che il trasporto per parallelismo è, come suol dirsi, integrabile (ossia che il risultato non dipende dalla linea di trasporto).

§ 10. — CURVATURA RIEMANNIANA DI UNA V_n. RICERCHE DEI SIG. SCHOUTEN E BOMPIANI. — Nel caso che si tratti, anzichè di una superficie, di una V_n qualsiasi, il concetto di curvatura diviene meno semplice. Fissato un punto P della V_n, ad ogni giacitura passante per P (che può essere individuata, come sappiamo, da due arbitrarie direzioni ξ, η uscenti da P) si fa corrispondere un invariante K che dicesi *curvatura riemanniana* della V_n, in P, relativamente alla giacitura considerata. E precisamente, costruita la superficie geodetica individuata dal punto P e dalle due direzioni ξ, η (cfr. Cap. VI, § 10), si introduce col Riemann come curvatura della V_n (nel punto e nella giacitura in questione) la curvatura gaussiana K di tale superficie geodetica. In generale, la curvatura riemanniana è diversa nelle diverse giaciture. Le considerazioni precedenti ci permettono di dare un'altra notevole caratterizzazione della curvatura riemanniana, e di trovarne l'espressione analitica.

Dati gli elementi P, ξ, η, e costruita la superficie geodetica g da essi definita, consideriamo su questa un ciclo infinitesimo, passante per P, di area $D\Gamma$: trasportiamo per parallelismo *superficiale* lungo questo ciclo, nel verso $\xi \to \eta$ una delle direzioni stesse, per es. ξ, e calcoliamo, con la formula di Pérès, la variazione $D\alpha$ subita dall'angolo formato da η con ξ, cioè la differenza fra le sue due determinazioni (in arrivo e in partenza). La curvatura K si otterrà allora per mezzo della [29]. Ora, se si ricorda che, per il teorema di Severi, al trasporto infinitesimo per parallelismo *superficiale* (rispetto alla metrica di g) si può sostituire l'analogo trasporto infinitesimo per parallelismo in V_n, si riconosce subito che questo modo di calcolare K non fa intervenire, sostanzialmente, la superficie geodetica g, talchè si può definire la curvatura riemanniana K come *il rapporto (cambiato di segno) di* $D\alpha$ *a* $D\Gamma$, *essendo* $D\alpha$ *la variazione dell'angolo fra le direzioni date* ξ, η, *prodotta dal trasporto per parallelismo (in* V_n*) di una di queste direzioni lungo un ciclo infinitesimo di area* $D\Gamma$, *appartenente alla giacitura* ξ, η, e percorso nel verso $\xi \rightarrow \eta$. Si ha dunque, come nelle V_2,

$$K = -\frac{D\alpha}{D\Gamma}\,. \tag{30}$$

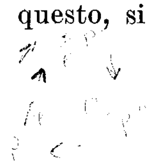
L'espressione effettiva di K si può ottenere in conformità dalla [27'], e si avrà

$$K = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} \, (i\,j,\, h\,k)\, u^i\, v^j\, u^h\, v^k. \tag{31}$$

La simmetria del secondo membro rispetto a $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, porge conferma formale del fatto che è indifferente trasportare $\boldsymbol{u}$ o $\boldsymbol{v}$, ottenendosi sempre uno stesso $D\alpha$, e uno stesso K.

Una terza definizione della curvatura riemanniana si potrà dare, in seguito alla dimostrazione del seguente lemma.

Presi in una V_2 (superficie) tre punti qualunque P, P', P'', si congiungano due a due con archi di geodetiche, formando un cosidetto *triangolo geodetico*. Detti φ, φ', φ'', gli angoli di questo, si chiama *eccesso geodetico* la quantità



$$\varepsilon = \varphi + \varphi' + \varphi'' - \pi. \tag{32}$$

Si trasporti ora per parallelismo lungo il triangolo, a partire da un punto qualsiasi, la direzione del lato in quel punto, o di uno dei lati, se si tratta di un vertice: per es., a partire da P, la direzione $\boldsymbol{u}$ in P del lato PP' (si intende nel verso da P a P').

Vogliamo dimostrare che l'angolo fra le due determinazioni di $\boldsymbol{u}$ in partenza e in arrivo, più precisamente l'angolo che la determinazione finale forma coll'iniziale (contato, a partire da questa, nel verso che, intorno a ciascun vertice, rimane subordinato dal verso

$PP'P''$ del trasporto), cioè l'*angolo di parallelismo* (relativo stavolta a un ciclo di natura speciale, ma senza la restrizione che debba essere infinitesimo) *coincide coll'eccesso geodetico* ε.

Per riconoscerlo basta seguire la $\boldsymbol{u}$ nel trasporto ciclico lungo il triangolo $PP'P''$, notando in primo luogo che, per l'autoparallelismo delle geodetiche, da P a P', la $\boldsymbol{u}$ si conserva sempre tangente al lato PP'. Giunta in P', essa si trova così inclinata sul lato $P'P''$ (nel verso scritto) dell'angolo $\pi-\varphi$ (esterno al triangolo in P'); più precisamente, rispetto alla tangente al lato $P'P''$, essa si trova indietro (il verso del fascio in P' essendo, come s'è detto quello, determinato dal verso di circolazione $PP'P''$) di $\pi-\varphi'$. Nel trasporto da P' a P'' tale angolo si conserva (Cap. V, § 11); in P'' si avrà una ulteriore diminuzione (rispetto al nuovo lato $P''P$) di $\pi-\varphi''$; e finalmente in P (rispetto a PP') ancora una diminuzione di $\pi-\varphi$. Complessivamente, la parallela ad $\boldsymbol{u}$, in arrivo, *si trova ruotata* (in senso negativo) rispetto alla direzione originaria di $3\pi-(\varphi+\varphi'+\varphi'')$, ossia *di* $\varepsilon-2\pi$ *in senso positivo*. Ove si noti che, nel fascio di direzioni uscenti da un punto, un angolo è geometricamente determinato solo a meno di multipli di 2π, rimane provato che *una determinazione dell'angolo di parallelismo è precisamente l'eccesso geodetico* ε. Se si pensa che nelle varietà euclidee l'eccesso geodetico è nullo, talchè in una varietà qualunque, per triangoli infinitesimi, l'analogo eccesso è infinitesimo, si riconosce, per ragione di continuità, che la determinazione adottata per l'angolo di parallelismo è effettivamente la più opportuna, come quella che tende a zero assieme al triangolo.

Il lemma testè stabilito vale rigorosamente in una V_2, qualunque sia la grandezza del triangolo geodetico che si considera: applicato in particolare a un triangolo infinitesimo, permette di sostituire, nella [29], $-D\alpha$ con ε, ottenendo

$$K=\frac{\varepsilon}{D\Gamma},$$

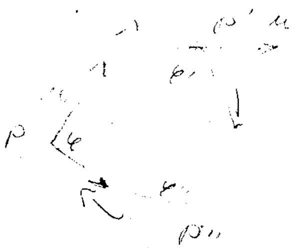
formula che definisce la curvatura riemanniana come il *rapporto fra l'eccesso geodetico e l'area, per un triangolo geodetico infinitesimo adagiato nella giacitura che si considera, e avente un vertice nel punto dato* P. Si riconosce qui un'ovvia estensione a varietà di dimensioni e di metrica qualunque di un risultato elementare di geometria della sfera (area di un triangolo sferico = eccesso $\times$ quadrato del raggio), il quale tuttavia (a differenza dell'enunciato precedente) è valido anche per un triangolo finito.

Non possiamo chiudere questo capitolo senza almeno ricordare le notevoli ricerche dei sig.ri Schouten (¹) e Bompiani (²) circa il trasporto ciclico simultaneo di più direzioni, anzi addirittura dell'intera stella di direzioni, uscenti da un medesimo punto. Ne rimane illustrata sotto nuovi aspetti la teoria della curvatura riemanniana.

(¹) Loco citato a pag. 197.

(²) *Studi sugli spazi curvi*, Atti del R. Ist. Veneto, T. LXXX, 1921, pp. 355-386, 839-859, 1113-1145.

Vedi per complementi – [illegible] p. 171



CAPITOLO VIII.

Relazioni fra due metriche diverse (riferite agli stessi parametri). Varietà a curvatura costante.

§ 1. — Differenze fra i simboli di Christoffel relativi a due metriche diverse (attribuite alla stessa varietà analitica). — Nel Cap. IV abbiamo introdotto i concetti di *tensore*, di *covarianza*, ecc., relativi ad una varietà analitica V_n, cioè al complesso di n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$: abbiamo poi, nel capitolo successivo (sez. *c*), considerato le *varietà metriche*, che si ottengono associando ad una varietà analitica V_n una [ben determinata ma qualunque] forma differenziale quadratica (definita positiva).

Nulla vieta, manifestamente, di attribuire successivamente alla stessa varietà analitica due determinazioni metriche distinte, definite dalle due forme quadratiche (1)

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \qquad [1]$$

$$ds'^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a'_{ik}\, dx_i\, dx_k. \qquad [1']$$

Da ciascuna di queste forme si deriveranno i rispettivi simboli di Christoffel, che indicheremo con

$$\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix}'$$

rispettivamente, e da questi si formeranno poi i simboli di Riemann

$$\{i\,r, h\,k\} \quad \text{e} \quad \{i\,r, h\,k\}',$$

(1) Come interpretazione geometrica, si può pensare a due V_n distinte, i cui punti siano in corrispondenza biunivoca, talchè con una n-pla di valori attribuiti alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ si può rappresentare sia un punto P dell'una sia il punto corrispondente P' dell'altra. Per es., una carta geografica e la superficie terrestre sono due V_2 a metrica diversa (l'una è euclidea, l'altra no), e ad ogni coppia di valori φ (per la latitudine), λ (per la longitudine) corrisponde un punto della carta, e un punto della Terra.

nonchè quelli analoghi di prima specie. Ci proponiamo in questo capitolo di trovare le relazioni che intercedono fra i simboli relativi all'una e all'altra delle due metriche, e di applicare poi i risultati a considerazioni geometriche.

Cominciamo col formare le differenze

$$\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix} = \rho_{ih}^{r} : \qquad [2]$$

giustificheremo la ubicazione adottata per gli indici dei secondi membri dimostramdo che le ρ_{ih}^{r} costituiscono un tensore covariante rispetto a i ed h, e contravariante rispetto ad r. A tal uopo si consideri un arbitrario sistema contravariante ξ^r, i cui elementi si pensino funzioni del posto, ed un sistema pure arbitrario di incrementi dx_h delle variabili indipendenti. Dal Cap. V (§ 26) si sa che le espressioni del tipo

$$\tau^r = d\,\xi^r + \sum_{1}^{n}{}_{ih} \begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix} \xi^i\, dx_h$$

costituiscono un sistema contravariante. Lo stesso naturalmente può dirsi per le analoghe espressioni corrispondenti al ds'^2

$$\tau'^r = d\,\xi^r + \sum_{1}^{n}{}_{ih} \begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix}' \xi^i\, dx_h,$$

nonchè per le differenze

$$\tau'^r - \tau^r = \sum^{n}{}_{ih} \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h\ .$$

L'essere queste contravarianti, significa che, designando con u_r un sistema covariante semplice arbitrario, l'espressione

$$\sum_{1}^{n}{}_{r} (\tau'^r - \tau^r)\, u_r = \sum_{1}^{n}{}_{ihr} \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h\, u_r$$

un invariante: e se si pon mente al secondo membro di questa uguaglianza, dalla sua invarianza risulta l'asserito carattere tensoriale di ρ_{ih}^{r} .

Tornerà comodo in seguito introdurre anche il sistema covariante associato

$$\rho_{ihj} = \sum_1^n{}_r \, a_{rj} \, \rho^{\,r}_{ih} \,. \tag{2'}$$

§ 2. — Differenze fra le derivate covarianti. — Sia dato un generico tensore $A^{(h)}_{(i)}$ (dove (i) denota il complesso di m indici $i_1 \ldots i_m$, e analogamente (h) rappresenta l'insieme di μ indici $h_1 \ldots h_\mu$): di esso potremo considerare le derivate covarianti sia con referenza alla prima che alla seconda forma fondamentale, cioè sia rispetto al ds^2, sia rispetto al ds'^2. Un elemento generico del sistema, derivato con referenza alla prima forma, si designerà, al solito, con $A^{(h)}_{(i)\,|\,k}$, mentre l'omologo, costruito in base alla metrica [1'], si indicherà con $\left(A^{(h)}_{(i)}\right)'_k$. Vogliamo esplicitare le differenze

$$\left(A^{(h)}_{(i)}\right)'_k - A^{(h)}_{(i)\,|\,k} \,.$$

Si può all'uopo ricorrere all'espressione esplicita (Cap. VI, formula [4]) delle derivate covarianti di un sistema misto generico: queste sono lineari nei simboli di Christoffel, talchè le differenze in discorso saranno lineari nelle $\rho^{\,r}_{ih}$, e precisamente si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \left(A^{(h)}_{(i)}\right)'_k - A^{(h)}_{(i)\,|\,k} = &- \sum_1^m{}_\alpha \sum_1^n{}_j \, \rho^{\,j}_{i_\alpha k} \, A^{(h)}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1} j\, i_{\alpha+1} \ldots i_m} + \\ &+ \sum_1^\mu{}_\beta \sum_1^n{}_j \, \rho^{\,h_\beta}_{jk} \, A^{h_1 \ldots h_{\beta-1} j\, h_{\beta+1} \ldots h_\mu}_{(i)} \,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

A queste formule generali si può anche pervenire, senza alcun richiamo mnemonico, in base alla originaria definizione di derivazione covariante (rispetto ad un'assegnata forma fondamentale) di un tensore generico. Perciò conviene ricordare che, per un arbitrario spostamento dx_i, abbiamo attribuito (Cap. VI, § 1) al simbolo d, premesso a una funzione del posto, il solito significato di incremento infinitesimo, subìto per effetto dello spostamento (differenziale);

mentre, se si tràtta di un vettore generico ξ e, per esso, delle sue componenti contravarianti ξ^r, abbiamo assunto

$$d\,\xi^r = -\sum_{1}^{n}{}_{ih} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\} \xi^i\, dx_h, \qquad [3]$$

abbiamo cioè definito i $d\xi^r$ come gli incrementi subordinati dal parallelismo. Questo, con referenza alla metrica [1], che allora si supponeva fissata una volta per sempre. Lo stesso naturalmente può farsi, assumendo come forma fondamentale la [1′]; soltanto conviene, per evitare ambiguità, designare con d' gli incrementi subìti, di fronte allo stesso spostamento, dalle stesse ξ^r, ponendo in conformità

$$d'\xi^r = -\sum_{1}^{n}{}_{ih} \left\{ \begin{matrix} i\ h \\ r \end{matrix} \right\}' \xi^i\, dx_h \qquad [3']$$

Giova anche introdurre l'operatore

$$d^* = d' - d\ .$$

Poichè d' e d, per funzioni del posto, hanno lo stesso significato, si ha

$$d^* f = 0 \qquad [4]$$

per qualsiasi funzione f del posto, mentre per le componenti covarianti di un generico vettore ξ, si ha, sottraendo [3] da [3′],

$$d^*\,\xi^r = -\sum_{1}^{n}{}_{ih}\, \overset{r}{\rho}_{ih}\, \xi^i\, dx_h \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)\ . \qquad [5]$$

In modo analogo si trova, se sono assegnate le componenti covarianti u_h di altro eventuale vettore $\boldsymbol{u}$,

$$d^*\, u_h = \sum_{1}^{n}{}_{jl}\, \overset{j}{\rho}_{hl}\, u_j\, dx_l\ . \qquad [5']$$

Ciò premesso, per dimostrare la [2] basta considerare la forma multilineare invariante F che ha per coefficienti gli elementi dell'assegnato tensore $A_{(i)}^{(h)}$: si sa che le derivate covarianti $A_{(i)|k}^{(h)}$, $\left(A_{(i)}^{(h)}\right)'_k$ non sono altro che i coefficienti di dF e $d'F$ rispettivamente. Orbene, basta aver riguardo all'identità

$$d'F - dF = d^* F \,, \tag{6}$$

e applicare nel secondo membro l'operatore d^* in base alle [4], [5], [5'], per ritrovare la formula [2], identificando nei due membri i coefficienti degli stessi monomi.

Come applicazione semplicissima di questo procedimento, stabiliamo direttamente i valori delle differenze $\left(A_r\right)'_k - A_{r|k}$ delle derivate omologhe di un sistema covariante semplice A_r. Partiamo perciò dalla forma invariante

$$F = \sum_1^n{}_r\, A_r\, \xi^r \tag{7}$$

e consideriamo il solito generico spostamento, individuato dagli incrementi dx_i delle variabili indipendenti. Avremo, in quanto ci si riferisca al ds^2,

$$dF = \sum_1^n{}_{rk}\, A_{r|k}\, \xi^r\, dx_k \,; \tag{8}$$

e in quanto ci si riferisca invece al ds'^2,

$$d'F = \sum_1^n{}_{rk} \left(A_r\right)'_k \xi^r\, dx_k \,. \tag{8'}$$

D'altra parte, applicando alla F l'operatore d^* e tenendo presente che $d^* A_r$ è nullo per la [4], e $d^* \xi^r$ è dato da [5], si ha

$$d^*F = -\sum_1^n{}_{rih} A_r\, \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h \,.$$

L'identità [6] si scrive dunque

$$\sum_1^n{}_{rk} \left[\left(A_r\right)'_k - A_{r|k}\right] \xi^r\, dx_k = -\sum_1^n{}_{rih} A_r\, \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h \,;$$

sostituendo materialmente nel secondo membro la lettera k alla lettera h, e scambiando gli indici i ed r, si mette in evidenza anche a secondo membro il monomio $\xi^r\, dx_k$, e si ha quindi, eguagliando i coefficienti nei due membri,

$$\left(A_r\right)'_k - A_{r\,|\,k} = -\sum_1^n{}_i\, \rho^{\,i}_{rk}\, A_i\ . \qquad [9]$$

È questo il caso particolare della [2], di cui avremo bisogno nel calcolo che segue.

§ 3. — Differenze fra i simboli di Riemann. — Ci proponiamo in questo § di calcolare le differenze

$$R^r_{ihk} = \left\{ i\, r,\, h\, k \right\}' - \left\{ i\, r,\, h\, k \right\},$$

il cui carattere tensoriale risulta dalla stessa definizione (differenze di due tensori simili). Si potrebbe effettuare il calcolo diretto sulle espressioni che definiscono i simboli di Riemann (Cap. VII, formule [3]) ma si può evitare il lungo sviluppo formale col metodo che segue.

Detto A_r un qualsiasi sistema covariante semplice, e ξ^r un qualsiasi sistema contravariante semplice, si consideri la forma invariante [7]: applicando ad essa l'operatore $\Delta = \delta d - d\delta$, con riferimento al ds^2 (v. Cap. VII, § 2) otterremo, ricordando le proprietà fondamentali di tale operatore,

$$\Delta F = \sum_1^n{}_r\, A_r\, \Delta\, \xi^r$$

ossia, sviluppando $\Delta\xi^r$ a norma della [4] del Cap. VII,

$$\Delta F = -\sum_1^n{}_{irhk} \left\{ i\, r,\, h\, k \right\} \xi^i\, A_r\, dx_h\, \delta x_k\ .$$

---

(1) Per evitare ambiguità abbiamo qui sostituito le notazioni δ e δ', con cui nel Cap. V designavamo due distinti sistemi di incrementi, con le notazioni d e δ rispettivamente.

Con riferimento al ds'^2, potremo analogamente introdurre l'operatore $\Delta' = \delta' d' - d' \delta'$, e scrivere

$$\Delta' F = - \sum_{1}^{n}{}_{irhk} \{ i\, r, h\, k \}' \xi^i A_r\, dx_h\, \delta x_k$$

da cui, sottraendo la precedente,

$$(\Delta' - \Delta) F = - \sum_{1}^{n}{}_{irhk} R^r{}_{ihk}\, \xi^i A_r\, dx_h\, \delta x_k \,. \qquad [10]$$

Ora noi ci procureremo per altra via l'espressione della stessa quantità come forma quadrilineare nelle $\xi^i A_r\, dx_h\, \delta x_k$, e quindi, eguagliando i coefficienti omologhi delle due forme, otterremo l'espressione di $R^r{}_{ihk}$.

A tal uopo si osservi che

$$\Delta' - \Delta = (\delta' d' - d' \delta') - (\delta d - d\delta) = (\delta' d' - \delta d) - (d' \delta' - d\delta)$$

Poichè la seconda parentesi si ottiene dalla prima con lo scambio materiale delle lettere d e δ, ci basterà calcolare l'espressione di $\delta' d' - \delta d$: anzi in detto calcolo potremo risparmiarci lo sviluppo esplicito di tutti quei termini che non si alterano scambiando d con δ, poichè essi si elimineranno nel fare la differenza: li designeremo complessivamente con $X(d, \delta)$.

Introdotte le notazioni

$$d' - d = d^* \quad , \quad \delta' - \delta = \delta^*$$

si ha

$$\begin{aligned} \delta' d' &= (\delta + \delta^*)\, d' = \delta d' + \delta^* d' = \\ &= \delta\,(d + d^*) + \delta^* d' \\ &= \delta d + \delta d^* + \delta^* d' \,, \end{aligned}$$

da cui

$$\delta' d' - \delta d = \delta d^* + \delta^* d' \,.$$

Avremo dunque, in definitiva,

$$(\Delta' - \Delta) F = \delta d^* F + \delta^* d' F - (d \delta^* F + d^* \delta' F).$$

Calcoliamo il primo termine. A tal uopo cominciamo con l'applicare l'operatore d^* alla forma F, ricordando le [4] e [5]. Avremo

$$d^* F = \sum_{r}^{n} {}_1 A_r\, d^* \xi^r$$

$$= - \sum_{ihr}^{n} {}_1 A_r\, \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h\,.$$

Applicando ora a questa forma l'operatore δ si ha (per la definizione di derivata covariante)

$$\delta d^* F = - \sum_{ihrk}^{n} {}_1 \left(A_r\, \rho_{ih}^{r}\right)_k \xi^i\, dx_h\, \delta x_k = - \sum_{ihrk}^{n} {}_1 \rho_{ih|k}^{r}\, \xi^i\, A_r\, dx_h\, \delta x_k -$$

$$- \sum_{ihrk}^{n} {}_1 \rho_{ih}^{r}\, A_{r\,|\,k}\, \xi^i\, dx_h\, \delta x_k\ .$$

Se poi si osserva che la seconda sommatoria si può scrivere

$$\sum_{rk}^{n} {}_1 A_{r\,|\,k}\, \delta x_k \sum_{ih}^{n} {}_1 \rho_{ih}^{r}\, \xi^i\, dx_h\ ,$$

si ha, applicando la [6],

$$\delta d^* F = - \sum_{ihrk}^{n} {}_1 \rho_{ih|k}^{r}\, \xi^i\, A_r\, dx_h\, \delta x_k + \sum_{rk}^{n} {}_1 A_{r|k}\, \delta x_k\, d^* \xi^r. \qquad [11]$$

Calcoliamo ora il secondo termine $\delta^* d' F$, per il che basta applicare l'operatore δ^* alla [8'], ottenendo

$$\delta^* d'\, F = \sum_{rk}^{n} {}_1 \left(A_r\right)'_k \xi^r\, \delta^* dx_k + \sum_{rk}^{n} {}_1 \left(A_r\right)'_k \delta^* \xi^r\, dx_k,$$

Nella seconda sommatoria, $\left(A_r\right)'_k$ si può sostituire con l'espressione ricavata da [9], e si ha

$$\left.\begin{aligned} \delta^* d' F = \sum_{1}^{n}{}_{rk} \left(A_r\right)'_k \xi^r \delta^* dx_k + \sum_{1}^{n}{}_{rk} A_{r\,|\,k}\, \delta^* \xi^r dx_k - \\ - \sum_{1}^{n}{}_{irk} \rho^{i}_{rk} A_i \delta^* \xi^r dx_k . \end{aligned}\right\} \quad [12]$$

Si debbono ora sommare [11] e [12]. Nel far ciò, si badi che la prima sommatoria della [12] è simmetrica in d e δ, poichè si può scrivere, sviluppando $\delta^* dx_k$ [a norma della [5]]

$$- \sum_{1}^{n}{}_{rkih} \left(A_r\right)'_k \xi^r \rho^{k}_{ih} dx_i \delta x_h ;$$

inoltre la seconda sommatoria della [12], e la seconda della [11], si mutano l'una nell'altra con lo scambio di d con δ, cosicchè la loro somma è simmetrica. Resta dunque

$$\begin{aligned} \delta d^* F + \delta^* d' F = X(d, \delta) - \sum_{1}^{n}{}_{ihrk} \rho^{r}_{ih\,|\,k} \xi^i A_r dx_h \delta x_k - \\ - \sum_{1}^{n}{}_{irk} \rho^{i}_{rk} A_i \delta^* \xi^r dx_k . \end{aligned}$$

Nell'ultimo termine conviene sostituire a $\delta^* \xi^r$, la sua espressione esplicita, con che esso assume l'aspetto

$$- \sum_{1}^{n}{}_{irklh} \rho^{i}_{rk} \rho^{r}_{lh} \xi^l A_i \delta x_h dx_k .$$

Per poter raccogliere insieme le due sommatorie, mettendo a fattor comune il monomio $\xi^i A_r dx_h \delta x_k$, basta, nell'ultima formula, operare una sostituzione materiale sugli indici secondo lo schema $\begin{pmatrix} r & l & i & h & k \\ l & i & r & k & h \end{pmatrix}$, con che risulta

$$\delta d^* F + \delta^* d' F = X(d, \delta) - \sum_{ihrk}^{n} \left[\rho^{r}_{ih \mid k} - \sum_{l}^{n} \rho^{r}_{lh} \rho^{l}_{ik} \right] \xi^i A_r \, dx_h \, \delta x_k .$$

Ciò che si ottiene scambiando nel secondo membro d con δ (attesa la definizione di X) è

$$X(d, \delta) - \sum_{ihrk}^{n} \left[\rho^{r}_{ih \mid k} - \sum_{l}^{n} \rho^{r}_{lh} \rho^{l}_{ik} \right] \xi^i A_r \, \delta x_h \, dx_k .$$

Sottraendo, dopo aver ulteriormente scambiato, nella seconda sommatoria, h con k, si ha finalmente

$$(\Delta' - \Delta) F =$$

$$= - \sum_{ihrk}^{n} \left[\rho^{r}_{ih \mid k} - \rho^{r}_{ik \mid h} - \sum_{l}^{n} \left(\rho^{r}_{lh} \rho^{l}_{ik} - \rho^{r}_{lk} \rho^{l}_{ih} \right) \right] \xi^i A_r \, dx_h \, \delta x_k .$$

Il confronto con la [10] fornisce la formula richiesta

$$\left. \begin{aligned} R'^{r}_{ihk} = \{i\,r, h\,k\}' - \{i\,r, h\,k\} = \rho^{r}_{ih \mid k} - \rho^{r}_{ik \mid h} - \\ - \sum_{l}^{n} \left(\rho^{r}_{lh} \rho^{l}_{ik} - \rho^{r}_{lk} \rho^{l}_{ih} \right) \end{aligned} \right\} \quad [13]$$

che esprime le differenze dei simboli di Riemann, di 2ª specie, mediante le differenze dei simboli di Christoffel. Si noti l'analogia di questa formula con quella che definisce i simboli di Riemann stessi (Cap. VII, form. [3]).

Se si tien conto della formula

$$\rho_{ihj \mid k} = \sum_{r}^{n} a_{rj} \, \rho^{r}_{ih \mid k}$$

che si ottiene derivando covariantemente ρ_{ijk} (rispetto al ds^2), e si satura, nella [13], l'indice r, moltiplicando per a_{rj} e sommando, si ottiene il sistema covariante

$$\sum_1^n {}_r\, a_{jr}\, R'^{r}_{ihk} = \rho_{ihj\,|\,k} - \rho_{ikj\,|\,h} - \sum_1^n {}_l \left(\rho_{lhj}\, \rho^{l}_{ik} - \rho_{lkj}\, \rho^{l}_{ih}\right) \qquad [14]$$

il quale, si noti, non fornisce le differenze dei simboli di Riemann di prima specie. Infatti, sostituendo nel primo membro l'espressione di R'^{r}_{ihk}, la [14] diviene

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n {}_r\, a_{jr} \{i\, r, h\, k\}' - (i\, j, h\, k) = \rho_{ihj\,|\,k} - \rho_{ikj\,|\,h} - {} \\ - \sum_1^n {}_l \left(\rho_{lhj}\, \rho^{l}_{ik} - \rho_{lkj}\, \rho^{l}_{ih}\right), \end{aligned}\right\} \quad [14']$$

e la prima sommatoria è diversa da $(i\, j, h\, k)'$, che sarebbe

$$\sum_1^n {}_r\, a'_{jr} \{i\, r, h\, k\}' .$$

§ 4. — Caso di due metriche in rappresentazione conforme. — Vogliamo ora applicare la formula [14] al caso in cui le due forme fondamentali [1] e [1'] differiscono soltanto per un fattore. Essendo entrambe le forme positive, questo fattore dovrà pure essere positivo, talchè potremo indicarlo con $e^{2\tau}$: supporremo dunque

$$ds'^2 = e^{2\tau}\, ds^2, \qquad [15]$$

ossia

$$ds' = e^{\tau}\, ds .$$

L'interpretazione geometrica di questa condizione è assai semplice: la corrispondenza fra le due varietà è tale che i segmenti infinitesimi sono proporzionali, ossia è *una similitudine nell'infinite-*

simo. Ne segue che l'angolo di due curve (angolo delle rispettive tangenti nel punto di intersezione di due loro elementi infinitesimi) è uguale all'angolo fra le curve corrispondenti: di qui il nome di *rappresentazione conforme*.

Per calcolare la [14], ci procureremo successivamente i simboli di Christoffel di prima specie delle due forme, poi quelli di seconda specie, da cui avremo le ρ^{r}_{ih}, e infine le ρ_{ihj} e le loro derivate.

Partiamo dalle relazioni equivalenti alla [15],

$$a'_{ik} = e^{2\tau} a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{15'}$$

e calcoliamo il simbolo $\begin{bmatrix} ih \\ l \end{bmatrix}'$. Si ha

$$\begin{bmatrix} ih \\ l \end{bmatrix}' = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial a'_{il}}{\partial x_h} + \frac{\partial a'_{lh}}{\partial x_i} - \frac{\partial a'_{ih}}{\partial x_l}\right] = \frac{1}{2} e^{2\tau}\left[\frac{\partial a_{il}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{lh}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial x_l}\right] +$$

$$+ e^{2\tau}\left[a_{il}\frac{\partial \tau}{\partial x_h} + a_{lh}\frac{\partial \tau}{\partial x_i} - a_{ih}\frac{\partial \tau}{\partial x_l}\right] = e^{2\tau}\left(\begin{bmatrix} ih \\ l \end{bmatrix} + a_{il}\tau_h + a_{lh}\tau_i - a_{ih}\tau_l\right)$$

dove τ_h sta per $\dfrac{\partial \tau}{\partial x_h}$, ecc.

Per formare ora i simboli di 2ª specie, ossia

$$\begin{Bmatrix} i\ h \\ r \end{Bmatrix}' = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, a'^{rl} \begin{bmatrix} i\ h \\ l \end{bmatrix}',$$

conviene osservare che le a'^{rl} sono espresse, per definizione, dal quoziente di un determinante A'_{rl} d'ordine $n-1$ (minore complementare di a'_{rl} nel determinante $\|a'_{rl}\|$) per un determinante a' d'ordine n (che è $\|a'_{rl}\|$). Se si pon mente alla [15′], si riconosce che in questi determinanti in ogni elemento si può mettere in evidenza un fattore $e^{2\tau}$, il che permette di scrivere

$$A'_{rl} = e^{2\tau(n-1)} A_{rl} \quad , \quad a' = e^{2\tau n} a$$

dove con A_{rl} e a si sono indicati i determinanti omologhi ad A'_{rl} ed a', ma relativi alle a_{rl}. Si ha dunque

$$a'^{rl} = e^{-2\tau} a^{rl} ,$$

quindi

$$\left\{ \begin{matrix} i\, h \\ r \end{matrix} \right\}' = \sum_1^n {}_l\, a^{rl} \left(\begin{bmatrix} i\, h \\ l \end{bmatrix} + a_{il}\, \tau_h + a_{lh}\, \tau_i - a_{ih}\, \tau_l \right)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} i\, h \\ l \end{matrix} \right\} + \delta^r_i\, \tau_h + \delta^r_h\, \tau_i - \delta^h_i\, \tau^r ,$$

dove le δ hanno il solito significato di 0 o 1, secondo che gli indici sono uguali o diversi.

La differenza $\left\{ \begin{matrix} i\, h \\ r \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i\, h \\ l \end{matrix} \right\}$ è dunque data da

$$\rho^r_{ih} = \delta^r_i\, \tau_h + \delta^r_h\, \tau_i - \cancel{a_{ih}}\, \tau^r . \qquad [16]$$ δ^h_i

Di qui, moltiplicando per a_{jr} e sommando rispetto a r, si ottiene, badando alla [2′],

$$\rho_{ihj} = a_{ij}\, \tau_h + a_{hj}\, \tau_i - a_{ih}\, \tau_j . \qquad [16']$$

Per derivazione covariante (con referenza alla forma ds^2), si ha

$$\rho_{ihj\,|\,k} = a_{ij}\, \tau_{hk} + a_{hj}\, \tau_{ik} - a_{ih}\, \tau_{jk} ,$$

e sottraendo da questa formula quella analoga ottenuta scambiando h con k (per formare la prima parte della [14]) e ricordando che $\tau_{hk} = \tau_{kh}$, si deduce

$$\rho_{ihj\,|\,k} - \rho_{ikj\,|\,h} = a_{hj}\, \tau_{ik} - a_{kj}\, \tau_{ih} - a_{ih}\, \tau_{jk} + a_{ik}\, \tau_{jh} . \qquad [17]$$

La seconda parte della [14] si può costruire in base alle [16], [16′]; così cominciamo col calcolare

$$\sum_{1}^{n}{}_{l}\, \rho_{lhj}\, \rho^{l}_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, (a_{lj}\,\tau_h + a_{hj}\,\tau_l - a_{lh}\,\tau_j)\,(\delta^{l}_{i}\,\tau_k + \delta^{l}_{k}\,\tau_i - a_{ik}\,\tau^{l}) =$$

$$= \underline{a_{ij}\,\tau_h\,\tau_k} + \underline{a_{kj}\,\tau_i\,\tau_h} - a_{ik}\,\tau_h\,\tau_j + a_{hj}\,\tau_k\,\tau_i + \underline{a_{hj}\,\tau_i\,\tau_k} -$$

$$- a_{ik}\,a_{hj}\,\Delta\tau - a_{ih}\,\tau_j\,\tau_k - \underline{a_{kh}\,\tau_j\,\tau_i} + a_{ik}\,\tau_j\,\tau_h\,,$$

dove $\Delta\tau = \sum_{1}^{n}{}_{l}\, \tau_l\, \tau^{l}$ (parametro differenziale primo). Il terzo e l'ultimo termine si elidono. Designando con X il complesso dei quattro termini sottolineati, che non si muta con lo scambio degli indici h e k, possiamo scrivere

$$\sum_{1}^{n}{}_{l}\, \rho_{lhj}\, \rho^{l}_{ik} = - a_{ik}\,a_{hj}\,\Delta\tau + a_{hj}\,\tau_k\,\tau_i - a_{ih}\,\tau_j\,\tau_k + X\,.$$

Sottragghiamo ora da questa formula quella ottenuta scambiando h con k. Avremo

$$\sum_{1}^{n}{}_{l}\left(\rho_{lhj}\,\rho^{l}_{ik} - \rho_{lkj}\,\rho^{l}_{ih}\right) = (a_{ih}\,a_{jk} - a_{ik}\,a_{jh})\,\Delta\tau +$$

$$+ a_{hj}\,\tau_k\,\tau_i - a_{kj}\,\tau_h\,\tau_i - a_{ih}\,\tau_j\,\tau_k + a_{ik}\,\tau_j\,\tau_h\,.$$

Servendoci di questa e della [17], possiamo ricomporre il secondo membro della [14′], il quale diviene

$$- a_{ih}\,(\tau_{jk} - \tau_j\,\tau_k) + a_{ik}\,(\tau_{jh} - \tau_j\,\tau_h) +$$

$$+ a_{jh}\,(\tau_{ik} - \tau_i\,\tau_k) - a_{jk}\,(\tau_{ih} - \tau_i\,\tau_h) - (a_{ih}\,a_{jk} - a_{ik}\,a_{jh})\,\Delta\tau\,.$$

Quanto al primo membro, in virtù della [15′], si può scrivere

$$e^{-2\tau} \sum_{1}^{n}{}_{r}\, a'_{jr}\,\{i\,r,\,h\,k\}' - (i\,j,\,h\,k)$$

ossia

$$e^{-2\tau}(i\,j,h\,k)' - (i\,j,h\,k)\,.$$

In definitiva, la formula [14′], nel caso di due metriche in rappresentazione conforme, si scrive

$$\left.\begin{aligned} e^{-2\tau}(i\,j,h\,k)' - (i\,j,h\,k) &= -a_{ih}(\tau_{jk}-\tau_j\,\tau_k)+\\ &+a_{ik}(\tau_{jh}-\tau_j\,\tau_h)+a_{jh}(\tau_{ik}-\tau_i\,\tau_k)-\\ -a_{jk}(\tau_{ih}-\tau_i\,\tau_h)-(a_{ih}\,a_{jk}-a_{ik}\,a_{jh})\,\Delta\tau\,, \end{aligned}\right\} \qquad [18]$$

formula già trovata, per altra via, dal FINZI, fin dal 1903 (¹).

A questa formula si può dare un aspetto più semplice, ponendo

$$u = e^{-\tau}$$

con che la [15] si scrive

$$ds'^2 = \frac{1}{u^2}\,ds^2\,.$$

Allora si ha

$$u_i = -e^{-\tau}\,\tau_i\,,$$

$$u_{ik} = -e^{-\tau}(\tau_{ik}-\tau_i\,\tau_k),$$

da cui

$$\tau_i = -u_i\,e^{\tau} \quad , \quad \tau_{ik}-\tau_i\,\tau_k = -\frac{u_{ik}}{u}\,,$$

$$\Delta\tau = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\,a^{ik}\,\tau_i\,\tau_k = e^{2\tau}\sum_{1}^{n}{}_{ik}\,a^{ik}\,u_i\,u_k = e^{2\tau}\,\Delta u = \frac{\Delta u}{u^2}\,.$$

(¹) Cfr. la nota ***Le ipersuperficie a tre dimensioni che si possono rappresentare conformemente sullo spazio euclideo***, Atti del R. Ist. Veneto, T. LXII, pp. 1049-1062. A questo proposito è bene segnalare le ricerche ulteriori dello stesso FINZI e dello SCHOUTEN sulle varietà a un numero qualunque di dimensioni rappresentabili conformemente in uno spazio euclideo (a egual numero di dimensioni). Cfr. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXX (1° sem. 1922), pp. 8-12 e vol. XXXI (1° sem. 1923), pp. 215-218, nonchè il volume dello SCHOUTEN citato a pag. 197 (*V*, § 1), e quello dello STRUIK (già citato nella prefazione), dove, al Cap. IV, § 13, pag. 150, si trovano riferiti i risultati dello SCHOUTEN con indicazioni bibliografiche.

Così la [18] diviene

$$\left.\begin{aligned} u^2\,(i\,j,\,h\,k)' - (i\,j,\,h\,k) &= a_{ih}\,\frac{u_{jk}}{u} - a_{ik}\,\frac{u_{jh}}{u} - \\ &- a_{jh}\,\frac{u_{ik}}{u} + a_{jk}\,\frac{u_{ih}}{u} - (a_{ih}\,a_{jk} - a_{ik}\,a_{jh})\,\frac{\Delta u}{u^2}\,. \end{aligned}\right\} \quad [18']$$

Avremo occasione, alla fine di questo capitolo, di mostrare una interessante applicazione geometrica di questo risultato.

§ 5. — VARIETÀ ISOTROPE. — Lasciando per un momento da parte questo ordine di considerazioni, ci proponiamo di studiare quelle V_n in cui la curvatura riemanniana, definita al § 10 del Cap. precedente, *non dipende dalla giacitura*, ma solo, eventualmente, dal posto. Ciò si traduce analiticamente nel fatto che l'espressione di K, data dalla [31] del precedente capitolo, è indipendente dalle $\boldsymbol{u}$ e dalle $\boldsymbol{v}$. Vedremo che queste V_n che chiameremo *isotrope*, cioè a curvatura (localmente) costante, sono caratterizzate da un'espressione particolarmente semplice dei simboli di Riemann.

Osserviamo intanto che una combinazione algebrica assai semplice delle a_{ik}, la quale possiede le proprietà fondamentali dei simboli di Riemann, è la seguente

$$b_{ij,hk} = \gamma\,(a_{ih}\,a_{jk} - a_{ik}\,a_{jh})$$

dove γ è — *a priori* — una qualunque funzione del posto. Tutto si riduce a verificare che queste quantità, sostituite alle $(i\,j,\,h\,k)$ nella [31] del prec. cap., rendono K indipendente da $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Invero, eseguita la sostituzione, si ha

$$K = \frac{\gamma}{\sin^2\alpha}\sum_{ijhk}^{n}{}_{1}\,(a_{ih}\,a_{jk} - a_{ik}\,a_{jh})\,u^i\,v^j\,u^h\,v^k =$$

$$= \frac{\gamma}{\sin^2\alpha}\left[\sum_{ih}^{n}{}_{1}\,a_{ih}\,u^i u^h \sum_{jk}^{n}{}_{1}\,a_{jk}\,v^j\,v^k - \right.$$

$$\left.\sum_{ik}^{n}{}_{1}\,a_{ik}\,u^i\,v^k \sum_{jh}^{n}{}_{1}\,a_{jh}\,v^j\,u^h\right],$$

e poichè

$$\sum_{1}^{n}{}_{ih} a_{ih} u^i u^h = \sum_{1}^{n}{}_{jk} a_{jk} v^j v^k = 1,$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} u^i v^k = \sum_{1}^{n}{}_{jh} a_{jh} v^j u^h = \cos \alpha,$$

risulta

$$K = \frac{\gamma}{\sin^2 \alpha} [1 - \cos^2 \alpha] = \gamma.$$

Dunque la curvatura riemanniana di una V_n, i cui simboli di Riemann siano le $b_{ij,hk}$, è γ, e quindi indipendente dalla giacitura. Ma possiamo anche dimostrare che è questa la più generale espressione dei simboli di Riemann, che rende $K = \gamma$. Poniamo infatti

$$(ij, hk) = b_{ij,hk} + B_{ij,hk}$$

dove $b_{ij,hk}$ ha il significato precedente: dimostreremo che $B_{ij,hk} = 0$. A tal uopo, introduciamo nella [31] questa espressione di (ij,hk): il secondo membro si può allora spezzare in due parti, di cui la prima (contenente le $b_{ij,hk}$), è, come abbiamo visto, uguale a γ, e la seconda, che è

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \sum_{1}^{n}{}_{ijhk} B_{ij,hk} u^i v^j u^h v^k ,$$

dovrà annullarsi affinchè risulti $K = \gamma$.

La sommatoria ora scritta si può semplificare, osservando che, per l'emisimmetria dei simboli di Riemann, i due termini

$$B_{ij,hk} u^i v^j u^h v^k ,$$
$$B_{ij,hk} u^i v^j u^k v^h$$

si raccolgono in uno solo, il quale, posto

$$u^h v^k - u^k v^h = p_{hk} ,$$

si scrive

$$B_{ij,hk} u^i v^j p_{hk} .$$

Così la somma estesa a tutte le *disposizioni* hk si trasforma in una estesa alle *combinazioni semplici* (h, k), in quanto è inutile considerare quelle ripetute $(k = h)$, perchè $p_{hh} = 0$. Indicheremo tale somma estesa alle sole combinazioni semplici, con $\overset{n}{\underset{1}{S}}{}_{hk}$ anzichè con $\sum_{1}^{n}{}_{hk}$. La sommatoria quadrupla diviene in conformità

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, u^i\, v^j \overset{n}{\underset{1}{S}}{}_{hk}\, B_{ij,hk}\, p_{hk}\,.$$

Procedendo in modo analogo per gli indici i, j, si ha ulteriormente

$$\overset{n}{\underset{1}{S}}{}_{ij} \overset{n}{\underset{1}{S}}{}_{hk}\, B_{ij,hk}\, p_{ij}\, p_{hk}\,,$$

cioè un'espressione bilineare nelle p. Le coppie, a cui va estesa ognuna delle somme, saranno in numero di $m = \frac{n\,(n-1)}{2}$: facciamole corrispondere biunivocamente, in un modo qualunque, ai numeri $1, \ldots, m$, e poniamo

$$\begin{array}{llr} p_{ij} = z_\beta & p_{hk} = z_\gamma & (i, j, h, k = 1, 2, \ldots, n), \\ B_{ij,hk} = B_{(\beta),(\gamma)} & & (\beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m), \end{array}$$

(dove γ è il numero d'ordine della coppia ij e β quello della hk), talchè la solita somma si potrà scrivere

$$\sum_{1}^{m}{}_{\beta\gamma}\, B_{(\beta),(\gamma)}\, z_\beta\, z_\gamma\,.$$

Ed ora si vede bene che questa espressione non può esser nulla per valori arbitrari delle z, se non sono nulle tutte le B; il che appunto si voleva dimostrare.

Si può dunque concludere che una V_n la cui curvatura è *localmente* costante (cioè indipendente dalla giacitura) e uguale a una assegnata funzione del posto K, ha necessariamente, per simboli di Riemann, le seguenti espressioni:

$$(i\,j, h\,k) = K\,(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh})\,. \tag{19}$$

Moltiplicando per a^{jr}, e sommando rispetto a j, si ha l'espressione dei simboli di 2ª specie

$$\{ i\, r, h\, k \} = K \left(a_{ih}\, \delta^{r}_{k} - a_{ih}\, \delta^{r}_{h} \right). \qquad [19']$$

La funzione K però non è assegnabile ad arbitrio: anzi, dimostreremo nel § seguente che, per $n > 2$, non può essere altro che una costante.

§ 6. — Teorema di Schur. — Questo teorema afferma che *se la curvatura è localmente costante, è anche indipendente dal posto.* Non entra in considerazione il caso di $n = 2$, in cui, essendovi in ogni punto una sola giacitura, non si può propriamente parlare di curvatura localmente costante.

Dimostreremo dunque che la K, la quale figura nella [19], è costante, ovvero che

$$K_l = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

dove K_l rappresenta una generica derivata covariante, coincidente (v. Cap. VI, § 2) con la derivata ordinaria.

A tal uopo, deriviamo covariantemente la [19] rispetto a x_l, ricordando il lemma di Ricci. Si ha

$$(i\, j, h\, k)_l = K_l \left(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh} \right).$$

Fissati h, k, l, diversi fra loro (il che è possibile perchè $n > 2$), si scrivano le altre due relazioni ottenute da questa permutando ciclicamente h, k, l:

$$(i\, j, k\, l)_h = K_h \left(a_{ik}\, a_{jl} - a_{il}\, a_{jk} \right),$$
$$(i\, j, l\, h)_k = K_k \left(a_{il}\, a_{jh} - a_{ih}\, a_{jl} \right).$$

Sommiamo ora membro a membro queste tre relazioni, ricordando l'identità del Bianchi (Cap. prec., § 5). Viene

$$\left. \begin{aligned} 0 = K_l \left(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh} \right) + K_h \left(a_{ik}\, a_{jl} - a_{il}\, a_{jk} \right) + \\ + K_k \left(a_{il}\, a_{jk} - a_{ih}\, a \right)_{jl}. \end{aligned} \right\} \quad [20]$$

Al variare di i, j, si hanno così $\frac{n(n-1)}{2}$ relazioni, delle quali faremo ora una opportuna combinazione lineare. Si moltiplichi la [20] per $a^{ih}a^{jk}$ e si sommi rispetto a i, j: i coefficienti di K_l, K_h, K_k risulteranno tutti del tipo

$$\sum_1^n {}_{ij}\, a_{i\alpha}\, a_{j\beta}\, a^{ih}\, a^{jk}$$

(dove con α, β si indicano due degli indici h, k, l), ossia, effettuando le due somme successivamente, del tipo

$$\sum_1^n {}_i\, a_{i\alpha}\, a^{ih} \sum_1^n {}_j\, a_{j\beta}\, a^{jk} = \delta_\alpha^h\, \delta_\beta^k$$

dove le δ hanno il solito significato di 0 o 1. Tali quantità sono dunque sempre 0, a meno che non sia contemporaneamente $\alpha = h$, $\beta = k$ (il che si verifica nel coefficiente del primo termine) nel qual caso il valore è 1. La nostra combinazione delle [20] si riduce così a

$$K_l = 0$$

c. d. d.

§ 7. — Forma canonica del ds^2 per una varietà a curvatura costante. — Ci proponiamo ora, data una varietà euclidea S_n, di trovare, se esiste, una varietà V_n' a curvatura costante K, che sia rappresentabile conformemente su S_n, vale a dire (v. § 4) tale che il suo elemento lineare sia dato da

$$ds'^2 = \frac{ds^2}{u^2}$$

dove ds è l'elemento di S_n. Vedremo che ciò è sempre possibile, e la risoluzione di questo problema ci condurrà ad assegnare due notevoli forme pel ds^2 di una varietà a curvatura costante.

Conservando tutte le notazioni del § 4, avremo, per i simboli di Riemann di V_n', l'espressione (v. formula [19])

$$(ij, hk)' = K\left(a'_{ih}\, a'_{jk} - a'_{ik}\, a'_{jh}\right) = \frac{K}{u^2}\left(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh}\right),$$

e per quelli di S_n,

$$(i\,j, h\,k) = 0\ ,$$

inquantochè in una varietà euclidea tutti i simboli di Riemann sono nulli (v. Cap. prec., §§ 2, 3)

Si tratta ora di sostituire questi valori nelle [18′] che costituiscono un sistema di equazioni differenziali dalla cui integrazione si ricaverà la funzione u. Le [18′] divengono, con tale sostituzione,

$$\left.\begin{aligned} & a_{ih}\frac{u_{jk}}{u} - a_{ik}\frac{u_{jh}}{u} - a_{jh}\frac{u_{ik}}{u} + a_{jk}\frac{u_{ih}}{u} - \\ & \qquad - (a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh})\frac{\Delta u + K}{u^2} = 0 \quad (i, j, h, k = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad [21]$$

A queste $\dfrac{n^2\,(n^2-1)}{12}$ equazioni si può soddisfare ponendo

$$u_{ik} = c\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad [22]$$

dove c è una costante: infatti con tale posizione esse si scrivono

$$\frac{1}{u^2}\,(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh})\,(2\, c\, u - K - \Delta u) = 0 \qquad (i, j, h, k = 1, 2, \ldots, n);$$

e, perchè vengano soddisfatte tutte, basterà annullare il fattore comune, cioè porre

$$2\, c\, u - K - \Delta u = 0. \qquad [22']$$

Si è dunque sostituito alle [21] il sistema costituito dalle [22] e [22′], che vale qualunque siano le coordinate x. Se poi si suppone, come è sempre lecito, che le x siano coordinate cartesiane ortogonali di S_n, talchè sia

$$a_{ik} = \delta_i^k\ , \quad \Delta u = \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)^2, \quad u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}\,,$$

il nostro sistema si scriverà nella forma più semplice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = c \, \delta_i^k \quad ; \tag{23}$$

$$2 c u - K - \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)^2 = 0 \ , \tag{23'}$$

Esaminiamo ora separatamente i due casi $c = 0$, $c \neq 0$.
Se $c = 0$, il sistema diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \ , \tag{24}$$

$$K + \sum_1^n {}_\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right)^2 = 0 \ , \tag{24'}$$

e dalla seconda di queste risulta $K < 0$: tale soluzione è dunque possibile solo per varietà a curvatura (costante) negativa (poichè escludiamo il caso, privo d'interesse, che sia $K = 0$, cioè che la V_n' sia essa stessa euclidea). Le [24] ci danno poi, con integrazione immediata,

$$u = \sum_1^n {}_\nu \, b_\nu \, x_\nu + b \tag{25}$$

(dove le b_ν e b sono costanti), e quindi, sostituendo nella [24'],

$$K + \sum_1^n {}_\nu \, b_\nu^2 = 0. \tag{25'}$$

Di qui si vede che le b_ν non sono tutte nulle, e che quindi, con una sostituzione ortogonale sulle coordinate [1], si può dare alla [25] la forma

$$u = k \, x_n \, (k \text{ costante}) \ ,$$

con che la [25'] diviene

$$K + k^2 = 0 \ ,$$

---

[1] Le ipersuperficie $u = \text{cost}$, cioè $\sum_1^n {}_\nu \, b_\nu \, x_\nu = \text{cost}$ sono iperpiani fra loro paralleli: basterà dunque disporre l'asse x_n nella direzione ad essi perpendicolare, perchè la loro equazione assuma la forma $x_n = \text{cost}$, e quindi sia $u = k x_n$.

ossia $k = \sqrt{-K}$. Si ha dunque

$$u = \sqrt{-K}\, x_n$$

e quindi

$$ds'^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{-K\, x_n^2}\,. \qquad [26]$$

È questa la *forma canonica dell'elemento lineare di una varietà a curvatura costante negativa;* già trovata, per altra via, dal Beltrami [1] nel 1868.

Un altro tipo di soluzione, valido questo per K qualunque, si ottiene supponendo $c \neq 0$. La [23] ci dà i due gruppi di equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \quad , \quad \text{per } i \neq k \ , \qquad [27]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = c \ , \qquad [27']$$

Il primo gruppo ha per integrale generale

$$u = \sum_1^n {}_i\, X_i \qquad [28]$$

dove X_i è una funzione della *sola* x_i.

Il secondo gruppo ci dà le

$$X_i'' = c$$

(dove la derivazione si è designata senza equivoco con apice, poichè l'argomento di X_i è la sola x_i).

Si ha di qui, con una prima integrazione,

$$X_i' = c\left(x_i - x_i^0\right)$$

---

(1) *Opere matematiche*, T. I (Milano, Hoepli, 1902), pag. 419.

(dove la costante arbitraria d'integrazione è stata posta sotto la forma $-c\overset{0}{x}_i$, sfruttando l'ipotesi $c \neq 0$), e con una successiva integrazione

$$X_i = \frac{c}{2}\left(x_i - \overset{0}{x}_i\right)^2 + b_i \qquad (b_i \text{ costante});$$

da cui, sostituendo nella [28] e ponendo $b = \sum_1^n{}_i\, b_i$, si ha per u l'espressione

$$u = \frac{c}{2}\sum_1^n{}_i \left(x_i - \overset{0}{x}_i\right)^2 + b \qquad [29]$$

contenente $n + 2$ costanti arbitrarie

Resta da considerare la [23′] la quale, ponendovi questo valore di u, diviene

$$2\,c\,b - K = 0 \qquad [23'']$$

e quindi stabilisce semplicemente un legame fra le due costanti c e b.

Abbiamo dunque ottenuto una soluzione contenente $n + 1$ costanti arbitrarie; possiamo disporne in modo da soddisfare determinate condizioni in un punto O (generico, ma fissato) della S_n. Per es., prendere le $\overset{0}{x}_i$ in modo che nell'origine siano nulle tutte le u_j: poichè si ha da [29]

$$u_j = c\left(x_j - \overset{0}{x}_j\right)$$

dovranno essere nulle tutte le $\overset{0}{x}_j$, cosicchè la [29] si scriverà (tenendo anche conto di [23″])

$$u = \frac{c}{2}\sum_1^n{}_i\, x_i^2 + \frac{K}{2\,c}. \qquad [30]$$

Possiamo poi determinare la c in modo che nell'origine sia $u = 1$: dovrà essere $c = \dfrac{K}{2}$, e avremo così finalmente

$$u = 1 + \frac{K}{4}\sum_1^n{}_i\, x_i^2. \qquad [30']$$

Con ciò il ds'^2 assume la forma data dal Riemann

$$ds'^2 = \frac{\sum_1^n {}_\nu \, dx_\nu^2}{u^2} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{\left(1 + \frac{K}{4} \sum_1^n {}_i \, x_i^2\right)^2}. \qquad [31]$$

Mostreremo in seguito (Cap. seg., § 2) che il ds^2 di una *qualunque* V_n a curvatura costante K si può mettere sotto la forma [31], e anche, se $K < 0$, sotto la forma [26]: resterà così giustificata la denominazione di *forme canoniche* che abbiamo adottate per esse.

Qui vogliamo ancora rilevare la proprietà assai ovviamente prevedibile, spettante alle ipersfere degli spazi euclidei S_{n+1} a n+1 dimensioni, di costituire altrettante V_n a curvatura costante positiva $K = \frac{1}{R^2}$, R designando il raggio. All'uopo indichiamo con $y_0, y_1 y_2, \ldots, y_n$ coordinate cartesiane (ortogonali) di S_{n+1} con che

$$ds^2 = \sum_0^n {}_\nu \, dy_\nu^2 . \qquad [32]$$

Senza pregiudizio della generalità, si può limitarsi a considerare l'ipersfera che ha il centro nell'origine, ed è quindi rappresentata dalla equazione

$$\sum_0^n {}_\nu \, x_\nu^2 = R^2 . \qquad [33]$$

Dimostreremo l'asserto nel modo più diretto, esprimendo le $n+1$ coordinate y dei punti della ipersfera, legate dalla [33], per mezzo di n opportune coordinate curvilinee x, e constatando che, ove si sostituiscano in [33] queste espressioni parametriche delle y per mezzo delle x, il ds^2 assume precisamente la forma canonica [31].

La rappresentazione parametrica delle y, cui alludiamo, è una generalizzazione immediata di quella fornita, per le superficie sferiche ordinarie, dalla proiezione stereografica. In questo caso (n=2), se la proiezione si intende fatta dal punto di coordinate $y_0 = R$, $y_1 = y_2 = 0$ sul piano tangente nel punto diametralmente opposto, ogni punto

(y_0, y_1, y_2) della sfera si proietta in un punto del piano di coordinate x_1, x_2 legate alle y dalle relazioni (¹)

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{\sqrt{K}}\left(\frac{2}{u}-1\right), \\ y_\nu &= \frac{x_\nu}{u} \qquad (\nu = 1, 2), \end{aligned}\right\} \qquad [34]$$

con

$$u = 1 + \frac{K}{4}\rho^2 \quad , \quad K = \frac{1}{R^2} \quad , \quad \rho^2 = \sum_{1}^{2}{}_\nu x_\nu^2 \quad . \qquad [35]$$

Per n qualunque, adotteremo le stesse formule salvo la modificazione evidente che ν *deve farsi variare* da 1 ad n. Si tratta effettivamente di rappresentazione parametrica della nostra ipersfera, perchè, quadrando e sommando le [34] e sostituendo a $\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2$ la sua espressione per u, cioè, in base alla [30′] $\frac{4}{K}(u-1)$, si ritrova materialmente la [33]. Si ha poi, differenziando,

$$dy_0 = -\frac{1}{\sqrt{K}}\frac{2\,du}{u^2},$$

$$dy_\nu = \frac{dx_\nu}{u} - \frac{x_\nu\,du}{u^2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Ove si quadri e si sommi, sostituendo, nel secondo membro, a

$$\sum_1^n {}_\nu x_\nu^2 \quad , \quad 2\sum_1^n {}_\nu x_\nu\,dx_\nu,$$

(¹) Per riconoscere in queste relazioni la forma abituale, basterebbe farvi apparire in luogo di ρ (raggio vettore della proiezione) la colatitudine ϑ del punto obbiettivo. Avendosi, per definizione, $\sqrt{K}y_0 = \cos\vartheta$, risulta in conformità $\frac{1}{u} = \cos^2\frac{1}{2}\vartheta$, $\rho = 2R\,tg\,\frac{1}{2}\vartheta$.

rispettivamente

$$\frac{4}{K}(u-1) \quad , \quad \frac{4}{K}\,du \, ,$$

risulta appunto

$$ds^2 = \frac{\sum_1^n{}_\nu \, dx_\nu^2}{u^2} \, , \qquad c.\ d.\ d.$$

CAPITOLO IX.

Forme differenziali quadratiche di classe zero e di classe uno.

§ 1. — FORME DI CLASSE ZERO (O EUCLIDEE). — Ricordiamo (cfr. Cap. V, § 20) che se N è il minimo numero di dimensioni che deve avere uno spazio euclideo per potervi immergere una V_n data, si dice *classe* di questa V_n (o della forma quadratica ds^2 che la caratterizza) il numero $N - n$.

Diremo, per conseguenza, che è *di classe zero* (ovvero che è *euclidea*) una forma quadratica differenziale

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad [1]$$

se è possibile sostituire alle n variabili x altrettante (poichè $N = n$) variabili y, legate alle x da relazioni

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \qquad [2]$$

tali che la [1] assuma la forma cartesiana

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, dy_\nu^2 \,. \qquad [1']$$

Si tratta di trovare un criterio per riconoscere, data la [1], se tale trasformazione è possibile: dimostreremo che basta formare i simboli di Riemann relativi alla [1], ed esaminare se sono o no tutti identicamente nulli.

Si ricordi (Cap. VII, §§ 2, 3) che questa è condizione necessaria; vogliamo dimostrare che, se, inversamente, tutti i simboli di Riemann relativi alla [1] sono identicamente nulli, la [1] si può trasformare nella [1'], vale a dire, si possono determinare le n funzioni [2] in modo che siano soddisfatte le $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni

$$a_{ik} = \sum_1^n {}_\nu\, y_{\nu\,|\,i}\, y_{\nu\,|\,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

dove

$$y_{\nu\,|\,k} = \frac{\partial y_\nu}{\partial x_k} \tag{4}$$

(cfr. Cap. V, § 2, formula [3]).

Derivando covariantemente la [3], otteniamo

$$0 = \sum_1^n {}_\nu\, (y_{\nu\,|\,il}\, y_{\nu\,|\,k} + y_{\nu\,|\,i}\, y_{\nu\,|\,kl})\,.$$

Scriviamo anche le due equazioni che si ottengono da questa, permutando ciclicamente gli indici i, k, l, cioè:

$$0 = \sum_1^n {}_\nu\, (y_{\nu\,|\,ki}\, y_{\nu\,|\,l} + y_{\nu\,|\,k}\, y_{\nu\,|\,li})\,,$$

$$0 = \sum_1^n {}_\nu\, (y_{\nu\,|\,lk}\, y_{\nu\,|\,i} + y_{\nu\,|\,l}\, y_{\nu\,|\,ik})\,.$$

Sommando le prime due delle equazioni ora scritte e sottraendo la terza (ove si osservi che, in virtù della regola di commutazione, di cui al § 6 del Cap. VII, e dell'annullarsi dei simboli di Riemann, le derivate seconde sono permutabili) si ricava

$$\sum_1^n {}_\nu\, y_{\nu\,|\,ik}\, y_{\nu\,|\,l} = 0\,.$$

Tenendo fissi gli indici i, k, e facendo variare l da 1 ad n, questa formula ci fornisce n equazioni lineari omogenee nelle n incognite $y_{\nu\,|\,ik}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ e il determinante del sistema è certo diverso da zero, poichè è quello formato dalle $y_{\nu\,|\,l}$, cioè è il determinante funzionale della trasformazione [2]: concludiamo dunque

$$y_{\nu\,|\,ik} = 0 \qquad (\nu, i, k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{5}$$

Queste equazioni, che abbiamo dedotto dalle [3], si possono mettere sotto la forma

$$\frac{\partial y_{\nu|i}}{\partial x_k} - \sum_1^n {}_j \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ j \end{matrix} \right\} y_{\nu|j} = f_{\nu|ik}(x|y_{\nu|1}, \ldots, y_{\nu|n}) \qquad [5']$$

in cui ci interessa solo osservare che il secondo membro è una funzione nota del posto e delle $y_{\nu|j}$.

Ed ora è facile riconoscere che si è ricondotto il problema ad uno già studiato nel Cap. II, § 8, cioè a un sistema misto di equazioni ai differenziali totali e in termini finiti.

Difatti, considerando come incognite le y_ν (in numero di n) e le $y_{\nu|k}$ (in numero di n^2), possiamo raccogliere le equazioni [4] e [5'] sotto forma di sistema di equazioni ai differenziali totali

$$\left. \begin{aligned} dy_\nu &= \sum_1^n {}_k\, y_{\nu|k}\, dx_k\,, \\ dy_{\nu|i} &= \sum_1^n {}_k\, f_{\nu,ik}(x|y_{\nu|1}, \ldots, y_{\nu|n})\, dx_k \qquad (\nu, i = 1, 2, \ldots, n)\,, \end{aligned} \right\} \qquad [S]$$

mentre le [3] costituiscono $\frac{n(n+1)}{2}$ relazioni in termini finiti fra le $(n^2 + n) = n(n+1)$ incognite.

Le condizioni di illimitata integrabilità sono, come sappiamo, le seguenti:

$$a) \qquad \frac{\partial y_{\nu|k}}{\partial x_h} = \frac{\partial y_{\nu|h}}{\partial x_k}\,;$$

$$b) \qquad \frac{\partial f_{\nu|ik}}{\partial x_h} = \frac{\partial f_{\nu|ih}}{\partial x_k} \qquad (\nu, i, h, k = 1, 2, \ldots, n)\,;$$

c) le conseguenze differenziali delle [3] debbono essere soddisfatte in virtù delle [S].

Le condizioni a), introducendo le derivate covarianti e tenendo presente ancora una volta la regola di commutazione, si possono scrivere sotto la forma

$$y_{\nu|kh} - y_{\nu|hk} = \text{combinazioni lineari dei simboli di Riemann,}$$

e allora si vede subito che sono identicamente soddisfatte, perchè il primo membro è nullo in virtù delle [5], e il secondo è pure tale, perchè sono nulli, per ipotesi, i simboli di Riemann.

Analoga verifica si può fare per le b) che equivalgono a

$$y_{\nu|ikh} - y_{\nu|ihk} = \text{comb. lin. dei simb. di Riemann.}$$

Se poi si derivano covariantemente le [3], si trovano condizioni c) della forma

$$a_{ik|l} = \sum_1^n{}_\nu (y_{\nu|il}\, y_{\nu|k} + y_{\nu|i}\, y_{\nu|kl}) ,$$

e si verifica immediatamente che sono tutte soddisfatte, in virtù del lemma di Ricci e delle [5].

Il sistema misto è dunque *completo*, e sarà possibile trovare le funzioni [2], le quali conterranno $\dfrac{n(n+1)}{2}$ costanti arbitrarie (differenza fra il numero delle incognite e quello delle equazioni in termini finiti). Ciò si interpreta geometricamente dicendo che, se la varietà è euclidea, esistono in essa $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ sistemi cartesiani (ortogonali). Trovata una soluzione particolare $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, si ottiene la più generale mediante una sostituzione del tipo

$$y_i = c_i + \sum_1^n{}_j \alpha_{ij}\, \eta_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) , \tag{6}$$

dove le α_{ij} sono i coefficienti di una sostituzione ortogonale, cioè sono legate dalle $\dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni

$$\sum_1^n{}_i \alpha_{ij}\, \alpha_{i\nu} = \delta_j^\nu \qquad (j, \nu = 1, 2, \ldots, n) , \tag{7}$$

mentre le c_i sono n costanti del tutto arbitrarie.

La verificazione è immediata in base alle proprietà caratteristiche delle sostituzioni ortogonali.

Infatti dalle [6] si ha materialmente

$$dy_i = \sum_1^n {}_j \alpha_{ij}\, d\eta_j ,$$

$$dy_i^2 = \sum_1^n {}_{i\nu} \alpha_{ij}\, \alpha_{i\nu}\, d\eta_j\, d\eta_\nu ,$$

$$\sum_1^n {}_j dy_j^2 = \sum_1^n {}_{ij\nu} \alpha_{ij}\, \alpha_{i\nu}\, d\eta_j\, d\eta_\nu ,$$

ed effettuando nell'ultima la somma rispetto a i, col tener conto delle [7], risulta

$$\sum_1^n {}_i dy_i^2 = \sum_1^n {}_{j\nu} \delta_j^\nu\, d\eta_j\, d\eta_\nu = \sum_1^n {}_\nu d\eta_\nu^2 .$$

L'ipotesi che le η siano una particolar soluzione del sistema si traduce nel fatto che è $\sum_1^n {}_\nu d\eta_\nu^2 = ds^2$: quindi si può scrivere

$$\sum_1^n {}_i dy_i^2 = ds^2 ,$$

il che prova che anche le y costituiscono una soluzione. Le costanti indipendenti che figurano nella [6] sono $\frac{n\,(n+1)}{2}$, come risulta da un facile computo, e quindi la soluzione così ottenuta è la più generale.

È ovvio che le [6] sono una generalizzazione delle formule pel cambiamento d'assi coordinati dell'ordinaria geometria analitica.

§ 2. — Rappresentazione conforme di una varietà a curvatura costante su una euclidea. Applicabilità di tutte le V_n con la stessa curvatura costante. — Nel Cap. prec. abbiamo risolto (§7) il problema: data una varietà euclidea S_n, trovare una varietà V'_n di assegnata curvatura costante che sia rappresentabile conformemente su quella. Ci proponiamo ora di dimostrare che, inversamente, *data una varietà V_n a curvatura costante, è sempre possibile rappresentarla conformemente su una varietà euclidea S'_n*. Vale a dire, se ds^2 è l'elemento lineare di una V_n a curvatura costante K, vogliamo provare che si può scegliere una conveniente funzione $U = e^{-\tau}$ in modo che

$$ds'^2 = e^{2\tau}\, ds^2 = \frac{1}{U^2}\, ds^2$$

risulti *euclideo*.

All'uopo sarà necessario e sufficiente che le [18'] del prec. Cap., ponendovi

$$\begin{aligned} (ij\,,hk)' &= 0\,, \\ (ij\,,hk) &= K\,(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh}) \end{aligned}$$

e scrivendovi U in luogo di u, risultino tutte soddisfatte. La U dovrà dunque verificare le $\frac{n^2\,(n^2-1)}{12}$ equazioni:

$$\left(\frac{\Delta U}{U^2} - K\right)(a_{ih}\, a_{jk} - a_{ik}\, a_{jh}) = a_{ih}\,\frac{U_{jk}}{U} - a_{ik}\,\frac{U_{jh}}{U} - a_{jh}\,\frac{U_{ik}}{U} + a_{jk}\,\frac{U_{ih}}{U}\,.$$

Ponendo

$$U_{ik} = a_{ik}\,(\alpha U + \beta)\,, \tag{8}$$

dove α e β sono due costanti, si riconosce, con procedimento analogo a quello del § 7 (Cap. prec.), che queste equazioni rimangono soddisfatte purchè sia ulteriormente

$$\frac{\Delta U}{U^2} = K + 2\alpha - \frac{2\beta}{U}\,. \tag{9}$$

In quanto si risguardino le [8] come atte a definire tutte le derivate delle U_i, esse, insieme all'identità

$$dU = \sum_1^n{}_i\, U_i\, dx_i\;, \tag{8'}$$

costituiscono un sistema ai differenziali totali nelle $n + 1$ funzioni U_i, U: ad esso va associata l'equazione in termini finiti [9]. Si verifica subito che basta prendere $\alpha = -K$ perchè questo *sistema misto* risulti illimitatamente integrabile (Cap. II, § 8).

Infatti, le condizioni di integrabilità delle [8] sono espresse dalle formule (di commutazione)

$$U_{i\,|\,kl} - U_{i\,|\,lk} = -\sum_1^n{}_r \{ir\,,kl\}\, U_r\,, \tag{C}$$

e quelle delle [8′] dalle

$$U_{ik} = U_{ki}$$

Queste ultime sono senz'altro soddisfatte, in virtù delle [8]: quanto alle [C], il primo membro, sempre in virtù delle [8], si riduce a

$$\alpha\,(a_{ik}\,U_l - a_{il}\,U_k)$$

e il secondo membro, ricordando l'espressione [19′] (Cap. prec.) dei simboli di Riemann per le varietà a curvatura costante diviene

$$-K\,(a_{ik}\,U_l - a_{il}\,U_k)\,.$$

Le [C] si riducono pertanto a identità purchè si assuma, come si è detto, $\alpha = -K$.

Resta da aver riguardo all'equazione in termini finiti [9], la quale tenendo conto che $\alpha = -K$, si può scrivere

$$\sum_1^n{}_j\, U^j\, U_j = -KU^2 + 2\beta U\,. \tag{9′}$$

Deriviamola (facendo uso della [16′] del Cap. VI), ed avremo, sopprimendo il fattore 2, le condizioni

$$\sum_1^n{}_j\, U^j\, U_{ji} = -KUU_i + \beta U_i$$

che risultano anch'esse identicamente soddisfatte in virtù delle [8].

Osservazione. — Riconosciuta così l'illimitata integrabilità del sistema, sappiamo (Cap. II, § 8) che la soluzione contiene n costanti arbitrarie, delle quali possiamo disporre in modo che le n funzioni

U_i assumano, in un punto O (particolare, ma generico) della nostra varietà, dei valori arbitrariamente prefissati. Inoltre, resta a nostra disposizione la costante β.

Una prima classe di soluzioni si ha assumendo $\beta = 0$, con che la [8] diviene

$$U_{ik} = K\, a_{ik}\, U\, .$$

L'ipotesi $\beta = 0$ è però ammissibile, nel *campo reale*, soltanto quando $K < 0$: infatti la [9′] si riduce per $\beta = 0$ a

$$\Delta U = -KU^2\, .$$

Nel campo reale il primo membro è sempre essenzialmente positivo, escludendo che la funzione U sia una pura costante ossia (in causa delle [8] le quali ora si riducono a $U_{ik} = -Ka_{ik}\,U$) ritenendo $K \gtrless 0$. Il secondo membro ha invece segno opposto a K, sicchè la uguaglianza è possibile solo per $K < 0$.

Per avere una soluzione valida in generale, bisogna supporre $\beta \neq 0$.

Disporremo allora di questa e delle altre n costanti, in modo che nel punto O risulti

$$U_i = 0 \quad , \quad U = 1 \qquad\qquad (i = 1\,, 2\,, \ldots, n)\,,$$

con che andrà assunto a norma della [9′]

$$\beta = \frac{K}{2}\,,$$

e la U rimarrà completamente determinata.

Rammentiamo ora il risultato del Cap. prec., § 7: con le notazioni attuali (cioè apponendo gli apici alle quantità relative alla varietà *euclidea*) esso ci dice che, se esiste un fattore u tale che

$$ds^2 = \frac{ds'^2}{u^2}$$

risulti a curvatura costante K, e che, in un determinato punto O (che possiamo sempre pensare assunto come origine delle coordinate cartesiane), soddisfa le condizioni $u = 1$, $u_i = 0$, esso ha l'espressione

$$u = 1 + \frac{K}{4} \sum_1^n {}_i \, x_i^2 .$$

D'altra parte, noi abbiamo ora trovato che la quantità $\frac{1}{U}$ soddisfa tutte queste condizioni $\left(\text{infatti } \frac{1}{U} = 1 \text{ in } O \,;\ \left(\frac{1}{U}\right)_j = -\frac{U_j}{U^2} = = 0 \text{ in } O\right)$ e quindi si dovrà avere

$$U = \frac{1}{u} = \frac{1}{1 + \frac{K}{4} \sum_1^n {}_i \, x_i^2} .$$

Da quanto abbiamo detto si deduce un corollario importantissimo. Date due varietà ad n dimensioni aventi la *stessa* curvatura costante K, i loro ds^2, come abbiamo visto, possono, con opportuni cambiamenti di variabili, ridursi entrambi alla *stessa* forma canonica

$$\frac{\sum_1^n {}_\nu \, dx_\nu^2}{u^2}$$

con

$$u = 1 + \frac{K}{4} \sum_1^n {}_i \, x_i^2 .$$

È dunque possibile, con un cambiamento di variabili, trasformare l'una forma nell'altra: vale a dire, le due varietà, per il solo fatto di avere la stessa curvatura costante (e lo stesso numero di dimensioni), sono fra loro applicabili.

§ 3. — Generalità sulle ipersuperficie in spazi euclidei. Seconda forma fondamentale. — Abbiasi una varietà euclidea

S_{n+1} e sia $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ un suo sistema di coordinate cartesiane, talchè

$$ds^2 = \sum_1^{n+1}{}_\nu \, dy_\nu^2 \, .$$

Si consideri una ipersuperficie (quando non c'è pericolo di ambiguità, si dice comunemente superficie) V_n immersa in S_{n+1}, e definita dalle equazoni parametriche

$$y_\nu = y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1). \qquad [10]$$

La matrice funzionale di queste equazioni deve essere, come sappiamo, di caratteristica n (cfr. Cap. V, § 1).

Definiamo anzitutto come ovvia estensione del caso ordinario ($n = 2$) la direzione di S_{n+1} *normale* alla V_n in un suo punto generico P.

Indichiamo all'uopo con α_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n+1$) i coseni della direzione che si tratta appunto di caratterizzare, rispetto agli assi y, (vale a dire i parametri, o i momenti, che in uno spazio euclideo non sono distinti): questi coseni saranno legati dalla solita identità quadratica

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \, \alpha_\nu^2 = 1 \, . \qquad [11]$$

La proprietà geometrica che si tratta di tradurre è che la direzione di coseni α_ν è perpendicolare ad una qualsiasi tangente alla V_n in P, o, cioè che è lo stesso, a qualsiasi spostamento elementare dP, tangente alla V_n stessa e quindi tale che (a meno di infinitesimi d'ordine superiore al primo) non fa uscire dalla superficie. Ogni spostamento siffatto deve rispettare le [10], corrispondendo del resto a incrementi arbitrari dx_l delle x. Detti dy_ν gli incrementi subordinati nelle coordinate cartesiane y_ν, dovranno in conformità le α verificare l'equazione

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \, \alpha_\nu \, dy_\nu = 0 \qquad [11]$$

per tutti i sistemi di dy_ν, provenienti dalle [10], ossia per

$$dy_\nu = \sum_1^{n}{}_l \, y_{\nu|l} \, dx_l \qquad [12]$$

coi dx_l arbitrari.

Sostituendo nella precedente, si ha

$$\sum_{1}^{n}{}_{l}\, dx_l \sum_{1}^{n+1}{}_{\nu}\, \alpha_\nu\, y_{\nu\,|\,l} = 0.$$

la quale, per l'arbitrarietà dei dx_l, implica che le α_ν devono soddisfare le n equazioni

$$\sum_{1}^{n+1}{}_{\nu}\, \alpha_\nu\, y_{\nu\,|\,l} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n). \tag{12'}$$

Queste, insieme alla [10], individuano le α_ν a meno del segno, come è naturale, poichè si tratta di una direzione, sul cui verso non si introduce alcuna ipotesi. In ciò che segue lo immagineremo fissato a piacimento.

Sappiamo che la metrica di V_n è definita dalla forma quadratica

$$\varphi = ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k .$$

Accanto a questa conviene considerare una seconda forma differenziale quadratica ψ la quale, a differenza della prima, *dipende* dalla configurazione della V_n in S_{n+1} (vale a dire, *non* è un elemento intrinseco), anzi caratterizza completamente tale configurazione.

Immaginiamo a tal uopo di spiccare da ogni punto della assegnata V_n e nella direzione positiva della normale, dianzi definita, un segmento infinitesimo, di lunghezza costante ε. Gli estremi di tutti questi segmenti giaceranno su una ipersuperficie V'_n, che si dice *parallela* a V_n: ad ogni punto dell'una corrisponderà in modo ovvio un punto dell'altra. Vogliamo considerare due punti di V_n, infinitamente vicini, e confrontare la loro distanza ds con quella ds' dei due punti corrispondenti in V'_n.

Se le coordinate di un punto generico di V_n sono y_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n+1$), quelle del punto corrispondente in V'_n saranno

$$y'_\nu = y_\nu + \alpha_\nu\, \varepsilon .$$

Di qui, differenziando e ricordando che ε è costante,

$$dy'_\nu = dy_\nu + \varepsilon\, d\alpha_\nu .$$

Quadrando e sommando otterremo il ds'^2, che denoteremo con φ':

$$\varphi' = \sum_1^{n+1}{}_\nu \left(dy_\nu^2 + \varepsilon^2 \alpha_\nu^2 + 2\varepsilon\, dy_\nu\, d\alpha_\nu\right).$$

Ora si osservi che $\sum_1^{n+1}{}_\nu\, dy_\nu^2 = \varphi$, e d'altra parte si ricordi che ε è infinitesimo, e quindi $\varepsilon^2\, d\alpha_\nu^2$ è trascurabile rispetto agli altri termini, ne segue

$$\varphi' - \varphi = -2\,\varepsilon\psi \qquad [13]$$

dove si è posto

$$\psi = -\sum_1^{n+1}{}_\nu\, dy_\nu\, d\alpha_\nu . \qquad [14]$$

La [13] ci fornisce l'incremento della prima forma fondamentale φ nel passaggio dalla assegnata V_n a una parallela infinitamente vicina: detto incremento è espresso per mezzo della quantità ψ che è, come ora vedremo, una forma quadratica nei dx. Per riconoscerlo, basta osservare che

$$dy_\nu = \sum_1^n{}_i\, y_{\nu\,|\,i}\, dx_i \;,$$

$$d\alpha_\nu = \sum_1^n{}_k\, \alpha_{\nu\,|\,k}\, dx_k \;.$$

e quindi, sostituendo nella [14], e ponendo

$$b_{ik} = b_{ki} = -\tfrac{1}{2}\sum_1^{n+1}{}_\nu \left(y_{\nu\,|\,i}\,\alpha_{\nu\,|\,k} + y_{\nu\,|\,k}\,\alpha_{\nu\,|\,i}\right), \qquad [15]$$

si ha

$$\psi = \sum_1^n{}_{ik}\, b_{ik}\, dx_i\, dx_k \;. \qquad [14']$$

È questa la cosiddetta *seconda forma fondamentale*. I suoi coefficienti b_{ik}, dati dalla [15], possono essere espressi anche in un altro modo, che sarà utile nel seguito.

Si osservi infatti che, derivando la [12'], si ottiene

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu (\alpha_{\nu|k}\, y_{\nu|l} + \alpha_\nu\, y_{\nu|lk}) = 0$$

o anche, scambiando gli indici l e k,

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu (\alpha_{\nu|l}\, y_{\nu|k} + \alpha_\nu\, y_{\nu|kl}) = 0$$

Facendo la semisomma di queste due identità, e ricordando la simmetria delle derivate seconde, si ottiene

$$-\frac{1}{2}\sum_1^{n+1}{}_\nu (\alpha_{\nu|k}\, y_{\nu|l} + \alpha_{\nu|l}\, y_{\nu|k}) = \sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu\, y_{\nu|lk}\,.$$

Cambiando l in i, il primo membro di questa uguaglianza si identifica col secondo della [15], e quindi

$$b_{ik} = \sum_1^{n+1}{}_\nu\, \alpha_\nu\, y_{\nu|ik}\,. \qquad [15']$$

§ 4. — Forme di classe uno (ipersuperficie in spazi euclidei). — Vogliamo ora indicare un criterio per riconoscere, data una forma differenziale quadratica

$$ds^2 = \sum_1^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\ ,$$

se è di classe uno, cioè se si possono trovare $n+1$ funzioni [10] tali da ridurla al tipo cartesiano. Seguiremo un procedimento analogo a quello del § 1, ossia prenderemo come incognite le $n+1$ funzioni y_ν e le $n(n+1)$ loro derivate $y_{\nu|i}$: in tutto $(n+1)^2$ incognite. Queste, per la loro stessa definizione, debbono anzitutto subordinare il ds^2

assegnato alla forma euclidea $\sum_1^{n+1} {}_\nu \, dy_\nu^2$, il che si traduce nelle $\frac{n(n+1)}{2}$ condizioni

$$a_{ik} = \sum_1^{n+1} {}_\nu \, y_{\nu|i} \, y_{\nu|k} . \qquad [16]$$

Da queste seguono per derivazione covariante le equazioni

$$0 = \sum_1^{n+1} {}_\nu \, (y_{\nu|il} \, y_{\nu|k} + y_{\nu|i} \, y_{\nu|kl}) . \qquad [17]$$

Va poi tenuto presente che le incognite principali y_ν e le ausiliarie $y_{\nu|i}$ non sono indipendenti tra loro ma legate dalle relazioni differenziali

$$\frac{\partial y_\nu}{\partial x_i} = y_{\nu|i} . \qquad [18]$$

Si tratta di formare le condizioni di integrabilità del sistema [16], [17], [18].

Cominciamo col pensare scritte le due equazioni, che si ottengono da [17] permutando ciclicamente i, h, k: allora, da queste tre equazioni, sommando le due prime e sottraendo la terza, troveremo, come al § 1,

$$\sum_1^{n+1} {}_\nu \, y_{\nu|ik} \, y_{\nu|l} = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n) .$$

Fissati i e k, si hanno n equazioni lineari ed omogenee fra le $n+1$ incognite $y_{\nu|ik}$; la matrice dei coefficienti $y_{\nu|l}$ ha per caratteristica n (§ prec.), quindi le equazioni hanno $(n+1) - n = 1$ soluzioni indipendenti: le altre differiscono da questa per un fattore di proporzionalità. Ora, dalla [12′] si vede che una soluzione si ottiene, prendendo $y_{\nu|ik} = \alpha_\nu$: perciò, introducendo un fattore di proporzionalità b_{ik}, potremo scrivere la soluzione più generale sotto la forma

$$y_{\nu|ik} = b_{ik} \, \alpha_\nu . \qquad [19]$$

Per riconoscere il significato delle b_{ik}, basta moltiplicare la [19] per α_ν e sommare rispetto a ν da 1 a $n+1$, profittando della [11]: si trova

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu y_{\nu|ik} = b_{ik}$$

che, confrontata con la [15′], ci dice che le $b_{ik} = b_{ki}$ ora introdotte si identificano con i coefficienti della seconda forma fondamentale.

Ora noi dovremo scrivere che le derivate seconde (covarianti) delle $y_{\nu|i}$ soddisfano la formula di commutazione

$$y_{\nu|ihk} - y_{\nu|ikh} = -\sum_1^n{}_l \{i\,l, h\,k\}\, y_{\nu|l} \tag{20}$$

che tiene luogo della ordinaria condizione di simmetria delle derivate seconde. Il primo membro dovrà calcolarsi partendo dalla [19], che, derivata covariantemente, dà

$$y_{\nu|ikh} = \alpha_\nu b_{ikh} + b_{ik}\alpha_{\nu|h}: \tag{21}$$

dobbiamo procurarci le espressioni delle $\alpha_{\nu|h}$.

A tal uopo osserviamo che, derivando la [11], si ha

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu \alpha_{\nu|h} = 0 \tag{22}$$

e che inoltre le b_{ih} si possono anche esprimere sotto la forma

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu y_{\nu|i}\alpha_{\nu|h} = -b_{ih} \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, n), \tag{23}$$

come si verifica ovviamente immaginando di derivare (covariantemente) l'identità

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu y_{\nu|i}\alpha_\nu = 0,$$

e badando all'espressione [15′] delle b_{ih}.

Fissato h, questa formula rappresenta n equazioni lineari nelle $n+1$ incognite $\alpha_{\nu|h}$: unite alla [22], formano un sistema di equazioni atto a determinare queste incognite. Infatti il determinante di tale sistema è

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n+1} \\ y_{1|1} & y_{2|1} & \dots & y_{n+1|1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1|n} & y_{2|n} & \dots & y_{n+1|n} \end{vmatrix}$$

e, facendone il quadrato, ricordando la [11], le [12'] e le [16], si trova il quadrato del determinante $\| a_{ik} \|$, il quale è certo diverso da zero.

La soluzione del sistema [22], [23] è, come si verifica facilmente,

$$\alpha_{\nu|h} = -\sum_1^n{}_j\, b_{jh}\, \overset{j}{y}_\nu \qquad [24]$$

dove si è posto

$$\overset{j}{y}_\nu = \sum_1^n{}_k\, a^{jh} y_{\nu|k}\,. \qquad [25]$$

Quindi la [21] diviene

$$y_{\nu|ikh} = \alpha_\nu\, b_{ikh} - \sum_1^n{}_j\, b_{ik}\, b_{jh}\, \overset{j}{y}_\nu\,.$$

L'espressione di $y_{\nu|ihk}$ si ottiene da questa con lo scambio materiale degli indici h e k. Possiamo dunque scrivere la [20] sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu\,(b_{ikh} - b_{ihk}) - \sum_1^n{}_j\,(b_{ik}\, b_{jh} - b_{ih}\, b_{jk})\, \overset{j}{y}_\nu &= \\ = -\sum_1^n{}_l \{i\,l\,,\; h\,k\}\, y_{\nu|l}\,. \end{aligned}\right\} \qquad [26]$$

Converrà far figurare anche nel secondo membro le $\overset{j}{y}_\nu$: basta ricavare da [25], con la solita regola di Cramer,

$$y_{\nu|l} = \sum_1^n{}_j\, a_{jl}\, \overset{j}{y}_\nu$$

e sostituire nella sommatoria: effettuando poi la somma rispetto a l, si ha

$$\sum_1^n{}_l \{i\,l\,,\,h\,k\}\, y_{\nu|l} = \sum_1^n{}_j (i\,j\,,\,h\,k)\, \overset{j}{y}_\nu$$

e quindi la [26] diviene

$$\left.\begin{aligned} & -\alpha_\nu (b_{ikh} - b_{ihk}) + \\ & + \sum_1^n{}_j \overset{j}{y}_\nu [(b_{ik}\, b_{jh} - b_{ih}\, b_{jk}) - (i\,j\,,\,h\,k)] = 0 \; \begin{pmatrix} \nu = 1\,,2\,,\ldots, n+1 \\ i\,,k\,,h = 1\,,2\,,\ldots, n \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad [27]$$

Queste condizioni possono esprimersi sotto forma notevolmente più semplice: intanto, si moltiplichi l'uguaglianza ora scritta per α_ν e si sommi rispetto a ν da 1 a $n+1$, ricordando la [11] ed osservando che, per le [25] e [12'],

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \alpha_\nu \overset{j}{y}_\nu = \sum_1^n{}_k a^{jk} \sum_1^{n+1}{}_\nu y_{\nu k}\, \alpha_\nu = 0 :$$

si otterrà

$$-(b_{ihk} - b_{ikh}) = 0\,,$$

vale a dire i coefficienti b dovranno soddisfare le condizioni

$$b_{ihk} = b_{ikh}\,. \qquad [28]$$

Allora la [26] si può scrivere

$$\sum_1^n{}_j \overset{j}{y}_\nu\, p_{ij\,,\,hk} = 0 \qquad (\nu = 1\,,2\,,\ldots, n+1) \qquad [29]$$

dove si è posto

$$p_{ij\,,\,kh} = (b_{ik}\, b_{jh} - b_{ih}\, b_{jk}) - (i\,j\,,\,h\,k)\,.$$

Fissati i, h, k, le [29] costituiscono $n+1$ equazioni lineari ed omogenee, nelle n incognite $p_{ij\,,\,hk}$ $(j = 1\,,2\,,\ldots, n)$. La matrice dei coefficienti $\overset{j}{y}_\nu$ ha caratteristica n: difatti, preso uno qualunque dei suoi determinanti d'ordine n, per es.

$$\begin{vmatrix} \overset{1}{y}_1 & \overset{2}{y}_1 & \dots & \overset{n}{y}_1 \\ \overset{1}{y}_2 & \overset{2}{y}_2 & \dots & \overset{n}{y}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{1}{y}_n & \overset{2}{y}_n & \dots & \overset{n}{y}_n \end{vmatrix},$$

si riconosce facilmente, ricordando la [24], che è uguale al prodotto dei due determinanti

$$\begin{vmatrix} y_{1|1} & y_{1|2} & \dots & y_{1|n} \\ y_{2|1} & y_{2|2} & \dots & y_{2|n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n|1} & y_{n|2} & \dots & y_{n|n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a^{11} & a^{12} & \dots & a^{1n} \\ a^{21} & a^{22} & \dots & a^{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n1} & a^{n2} & \dots & a^{nn} \end{vmatrix}$$

dei quali il secondo è certo diverso da zero. Ne consegue che la caratteristica della matrice $\overset{j}{y}_\nu$ è identica a quella delle $y_{\nu|j}$, cioè n. Da un teorema noto sulle equazioni lineari, segue allora che il sistema [29] non ha soluzioni, all'infuori di

$$p_{ij\,,\,hk} = 0 \qquad (i\,,j\,,k\,,h = 1\,,2\,,\dots,n)\,,$$

il che vuol dire

$$(i\,j\,,h\,k) = b_{ik}\,b_{jh} - b_{ih}\,b_{jk}\,. \qquad [30]$$

Da una più accurata discussione risulterebbe che le formule [28] e [30] esprimono *tutte* le condizioni di integrabilità del sistema. Potremo dunque concludere che:

Affinchè una data forma differenziale quadratica sia di classe uno, occorre e basta che si possa determinare un sistema doppio simmetrico b_{ik} tale che i simboli di Riemann della forma data siano esprimibili con la formula [30], *e che il sistema b_{ikh} (derivato covariante di b_{ik}, rispetto all'assegnata forma differenziale) sia simmetrico (formula* [28]).

Nel precedente Capitolo (§ 7), abbiamo riconosciuto direttamente, assegnando le espressioni esplicite delle funzioni $y_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, che ogni ds^2 a curvatura costante *positiva* è di classe 1. Naturalmente devono trovarsi soddisfatte le condizioni necessarie e sufficienti, testè annunciate.

Per verificarlo, basta assumere le ausiliarie b_{ik} sotto la forma $\sqrt{K} a_{ik}$ e ricordare che, trattandosi per ipotesi di varietà a curvatura costante, i simboli di Riemann (ij, hk) si identificano con $K(a_{ih} a_{jk} - a_{ik} a_{jh})$. Le [30] rimangono perciò automaticamente verificate; d'altra parte, per il lemma di Ricci, le derivate coovarianti delle $b_{ik} = \sqrt{K} a_{ik}$ si annullano, e così sono pure soddisfatte le [28].

Per $K < 0$, la posizione $a_{ik} = \sqrt{K} a_{ik}$ non serve, perche farebbe uscire dal campo reale, sicchè non si può affermare che sussista l'analoga proprietà. Effettivamente si dimostra che per $n > 2$, i ds^2 a curvatura costante *negativa* non sono di classe uno (¹). Per $n = 2$, sappiamo già (Cap. V, § 21) che qualsiasi ds^2, e quindi in particolare quelli a curvatura costante sono di classe uno (al più), ossia appartengono certamente ad una qualche superficie dello spazio ordinario. Di tali superficie (pseudosferiche), con K costante negativa, ve ne ha infinite, tra cui anche rotonde (di tre tipi) (²).

§ 5. – RAPPRESENTAZIONE IPERSFERICA E CURVATURA DI UNA IPERSUPERFICIE. — In una varietà euclidea S_{n+1} pensiamo immerse una ipersuperficie V_n qualunque e inoltre una ipersfera di raggio 1, col centro nell'origine (³).

A ciascun punto P della V_n si può far corrispondere un punto P' della ipersfera, conducendo dal centro di questa la parallela alla normale a V_n in P, e assumendo come punto P' l'intersezione di questa parallela con l'ipersfera: si dice allora che si è rappresentata la V_n sulla ipersfera.

(¹) BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale,* seconda ediz., Vol. I (Pisa: Spoerri, 1902), Cap. XIV, § 205, pag. 471.

(²) *Ibidem*, Cap. VII, § 103, pag. 225; ovvero terza ediz., Vol. I (Bologna: Zanichelli, 1922), Cap. VII, § 127, pag. 338.

(³) Si designa così, come si disse al § 7 del Cap. prec., una ipersuperficie Ω_n la cui equazione, in coordinate cartesiane, è

$$\sum_{1}^{n+1}{}_\nu\, y_\nu^2 = R^2 .$$

L'interesse precipuo di tale rappresentazione è questo: si indichi con V l'estensione (cfr. Cap. VII, § 8) di una regione σ della V_n, e con V' l'estensione della regione ipersferica corrispondente σ': il rapporto $\frac{V'}{V}$ è strettamente legato alle proprietà di curvatura della V_n, e si chiama *curvatura media della V_n nella regione* σ. Se questa regione si riduce all'intorno infinitesimo di un punto P — ossia, se si fa tendere a zero la massima dimensione di σ — detto rapporto (se il punto P non è singolare) tende ad un limite positivo Γ, che si chiama *curvatura ipersferica della V_n in P* (sferica per $n = 2$).

Per procurarcene l'effettiva espressione, cominciamo con lo stabilire un sistema di coordinate intrinseche sulla ipersfera: il criterio più spontaneo consiste nell'attribuire a ogni punto P' di questa le stesse coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che ha il punto corrispondente P in V_n. Chiamiamo $d\sigma$ l'elemento lineare dell'ipersfera, e cerchiamo la sua espressione per mezzo dei dx.

Se, come nei §§ precedenti, denotiamo con α_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n+1)$ i coseni della normale a V_n in un punto generico P, saranno anche α_ν i coseni della parallela a questa, spiccata dall'origine (centro dell'ipersfera). Il punto P' si trova in questa retta, a distanza 1 dall'origine: quindi le sue coordinate cartesiane sono α_ν.

Si ha allora subito

$$d\sigma^2 = \sum_1^{n+1}{}_\nu \, d\alpha_\nu^2 ,$$

e ponendo

$$\sum_1^{n+1}{}_\nu \, \alpha_{\nu\,|\,h} \, \alpha_{\nu\,|\,k} = e_{hk} , \qquad [31]$$

risulta

$$d\sigma^2 = \sum_1^{n}{}_{hk} \, e_{hk} \, dx_h \, dx_k . \qquad [32]$$

È questa la (prima) forma fondamentale relativa alla ipersfera: essa si chiama talora *terza* forma fondamentale della V_n data: Possiamo, per suo mezzo, calcolare subito l'estensione V' di una regione ipersferica σ':

$$V' = \int_{\sigma'} \sqrt{e} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

dove e rappresenta il determinante delle e_{hk}. Analogamente per il campo corrispondente si ha l'estensione di V_n

$$V = \int_{\sigma} \sqrt{a}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n .$$

Se le regioni di cui si tratta sono infinitesime, ciascun integrale si riduce a un solo elemento, e facendone il rapporto, si ha

$$\Gamma = \lim_{\sigma \to 0} \frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{e}{a}}, \tag{33}$$

dovendosi, ben si intende, attribuire sempre ai radicali il loro valore assoluto.

I coefficienti e_{hk} si esprimono per mezzo delle derivate delle y mediante la [31], che diviene, sostituendovi i valori [24] delle $\alpha_{\nu|h}$,

$$e_{hk} = \sum_1^n{}_{ij}\, b_{ih}\, b_{jk} \sum_1^{n+1}{}_{\nu}\, y_\nu^i\, y_\nu^j ,$$

e per le [25]

$$\begin{aligned} e_{hk} &= \sum_1^n{}_{ijuv}\, b_{ih}\, b_{jk}\, a^{iu}\, a^{jv} \sum_1^{n+1}{}_{\nu}\, y_{\nu|u}\, y_{\nu|v} \\ &= \sum_1^n{}_{ijuv}\, b_{ih}\, b_{jk}\, a^{iu}\, a^{jv}\, a_{uv} \\ &= \sum_1^n{}_{ij}\, b_{ih}\, b_{jk}\, a^{ij} . \end{aligned}$$

Da questa espressione delle e_{ik} per mezzo delle b_{ik} e delle a^{ik} è facile ricavare una espressione del determinante e per mezzo dei determinanti a e b. Si osservi infatti che, posto

$$\beta_k^i = \sum_1^n{}_j\, b_{jk}\, a^{ij} , \tag{34}$$

l'ultima formula si può scrivere

$$e_{hk} = \sum_1^n{}_i\, b_{ih}\, \beta_k^i . \tag{34'}$$

Tanto la [34] che la [34′] si identificano con le formule che danno il termine generale del prodotto di due determinanti, ed implicano rispettivamente

$$\beta = b\,\frac{1}{a}\;, \qquad [35]$$

$$e = b\,\beta \qquad [35']$$

$\left(\text{dove } \dfrac{1}{a} = \| a^{ik} \|, \text{ e si è posto } \beta = \| \beta^{i}_{k} \|\right)$, come si verifica facilmente. Moltiplicando membro a membro [35] e [35′] si ha

$$e = \frac{b^2}{a}\,. \qquad [36]$$

Quindi la [33] diviene

$$\Gamma = \frac{|b|}{a}\;, \qquad [33']$$

formula che esprime la *curvatura ipersferica* Γ mediante i discriminanti delle due forme fondamentali.

Come si vede, la curvatura definita in questo paragrafo *non* ha carattere intrinseco (in quanto dipende dalle b_{ik}).

Applichiamo le cose dette al caso di una ordinaria superficie V_2 immersa nello spazio euclideo a tre dimensioni. In tal caso, come sappiamo, vi è un solo simbolo di Riemann distinto (12, 12), e la [30] dà

$$(12, 12) = b_{11}\, b_{22} - b^2_{12} = b\,.$$

Perciò la [33′] si potrà scrivere

$$\Gamma = \left| \frac{(12, 12)}{a} \right|$$

che, confrontata con la [28] del Cap. VII, mostra che, *per* $n = 2$, la curvatura Γ coincide col valore assoluto della curvatura gaussiana K.

CAPITOLO X.

La geometria intrinseca come strumento di calcolo.

§ 1. — Generalità sulle congruenze. Congruenze geodetiche e normali. — Consideriamo una varietà metrica V_n, e supponiamo che in ogni punto di essa (o di una sua regione) sia fissata una direzione λ, definita per es. dai suoi parametri λ^i: vale a dire, sia assegnato un sistema contravariante di funzioni (regolari)

$$\lambda^i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

vincolate soltanto dalla solita identità quadratica e del resto arbitrarie. In causa di tale identità, una almeno delle λ^i è certo diversa da zero.

Se allora consideriamo il seguente sistema di $n-1$ equazioni differenziali

$$\frac{dx_1}{\lambda^1} = \frac{dx_2}{\lambda^2} \cdots = \frac{dx_n}{\lambda^n} \qquad [1]$$

(risguardandovi per es. come variabile indipendente una delle x, e le altre $n-1$ come sue funzioni incognite) riconosciamo subito che gli integrali di questo sistema rappresentano linee di V_n, che sono dirette in ogni loro punto secondo la direzione prefissata λ: infatti, per uno spostamento infinitesimo lungo una di tali linee, i dx sono proporzionali ai parametri di λ. Per ogni punto della regione considerata passa una (e una sola) di tali linee, come risulta dal fatto, che l'integrale generale di [1] contiene $n-1$ costanti arbitrarie, le quali si possono determinare in modo che, per un valore dato ad arbitrio della variabile indipendente, le altre $n-1$ variabili assumono valori pure arbitrariamente dati. Supposto per fissare le idee che sia λ^n diversa da zero (nel campo che si considera), le [1] si possono scrivere

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{\lambda^i}{\lambda^n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

risguardando x_n come variabile indipendente.

Ne consegue, in base al teorema di esistenza, che le equazioni (integrali)

$$x_i = x_i(x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

della linea possono essere soddisfatte per un sistema arbitrario di valori delle n variabili, il che è quanto dire, che la linea si può far passare per un punto arbitrariamente prefissato [1].

Un tale sistema di linee si dice *congruenza:* le $\lambda^i = \frac{dx_i}{ds}$, dove ds designa l'elemento d'arco della linea passante per il punto generico $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ diconsi *parametri* della congruenza, e gli elementi λ_i del sistema reciproco sono i suoi *momenti.*

Se tutte le linee di una congruenza sono geodetiche, si dice che la congruenza è *geodetica:* tali sono per es. le congruenze di rette nello spazio ordinario. È facile stabilire la condizione analitica traducente tale proprietà. Si ricordi a tal uopo che le equazioni caratteristiche delle geodetiche (essendo $\lambda^i = \frac{dx_i}{ds} = \dot{x}_i$) si possono porre sotto la forma seguente (cfr. Cap. V, formula [47])

$$p^i = \frac{d\lambda^i}{ds} + \sum_{jl}^{n}{}_{1} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \lambda^j \dot{x}_l = 0\,.$$

Ora si ha

$$\frac{d\lambda^i}{ds} = \sum_{l}^{n}{}_{1} \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_l} \dot{x}_l\,;$$

sostituendo nelle equazioni precedenti e scrivendo dappertutto λ^l in luogo di $\dot{x}_l$, risulta

$$p^i = \sum_{l}^{n}{}_{1} \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial x_l} + \sum_{j}^{n}{}_{1} \begin{Bmatrix} j\ l \\ i \end{Bmatrix} \lambda^j \right) \lambda^l = 0$$

---

(1) Tutto ciò riuscirà più chiaro, se si terrà presente l'esempio offerto dalla fisica, nella considerazione dei campi di forza: definita fisicamente, in ogni punto dello spazio, una direzione λ (quella della forza), resta determinato un sistema di linee (linee di forza) che hanno in ogni punto la direzione della forza ivi agente, e che riempiono, per così dire, tutto lo spazio, inquantochè per ogni punto ne passa una (e una sola).

da cui, per la [5′] del Cap. VI,

$$p^i = \sum_{1}^{n} {}_l (\lambda^i)_l \lambda^l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) . \qquad [2]$$

Sono queste le condizioni richieste. Vi si fanno apparire i *momenti*, moltiplicando per a_{ik} e sommando rispetto a i, con che si ottiene

$$p_k = \sum_{1}^{n}{}_{il} a_{ik} (\lambda^i)_l \lambda^l = 0 ,$$

e siccome, per il lemma di Ricci,

$$a_{ik} (\lambda^i)_l = (a_{ik} \lambda^i)_l ,$$

si ha infine

$$p_k = \sum_{1}^{n}{}_l \lambda_{kl} \lambda^l = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) . \qquad [2']$$

Un'altra particolarità notevole che può presentare una congruenza è quella di essere *normale*, cioè di essere costituita dalle traiettorie ortogonali d'una famiglia di superficie. A questo proposito conviene notare come, data una famiglia di superficie, esiste sempre una congruenza di curve che tagliano ad angolo retto tutte le superficie della famiglia, e che si chiamano *traiettorie ortogonali*: mentre non sempre esiste una famiglia di superficie, che taglino ad angolo retto tutte le curve d'una congruenza. Ecco come lo si mette in chiaro [1]. Sia data dapprima una generica famiglia di superficie, di equazione

$$f(x) = \text{cost.}$$

---

[1] Ricordiamo per incidenza che già nel Cap. V, § 22 abbiamo riconosciuto l'esistenza delle direzioni ***normali*** alle famiglie di superficie coordinate $x_i = \text{cost}$, caratterizzandone i rispettivi momenti. Si sarebbe potuto riportarsi a quelle indicazioni, osservando che qualsiasi famiglia di superficie $f = \text{cost}$ si può sempre (con cambiamento di variabili) far divenire coordinata. La considerazione del testo ha il vantaggio di fornire senz'altro l'espressione esplicita dei momenti spettanti alle direzioni normali, quando l'equazione della famiglia è generica.

Prendiamo in considerazione quella che passa per un punto prefissato P di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$: si intende, punto regolare, cioè tale che le $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono in P finite e continue e *non tutte nulle.* Vogliamo mostrare che a P rimane associata in modo unico una direzione perpendicolare alla superficie, cioè ad ogni spostamento δx_i appartenente alla superficie. Cominciamo coll'osservare che, per ogni siffatto spostamento δx_i, si ha

$$f(x + \delta x) = f(x)$$

ossia

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i = 0 . \tag{3}$$

Indichiamo poi con λ_i i momenti della (ipotetica) direzione perpendicolare, osservando che la perpendicolarità (ad ogni spostamento superficiale) si traduce nella relazione

$$\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_i \delta x_i = 0 , \tag{4}$$

valida per tutti i δx_i che verificano la [3].

Ciò equivale notoriamente alla proporzionalità fra i coefficienti delle singole δx_i. Dacchè in virtù dell'identità quadratica

$$\sum_{1}^{n}{}_{ik} a^{ik} \lambda_i \lambda_k = 1$$

i momenti non possono essere tutti nulli, possiamo p. es. supporre λ_n diverso da zero e porre $\frac{1}{\lambda_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} = \rho$, con che $\left(\right.$scrivendo brevemente f_i al posto di $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ le relazioni esplicite equivalenti alla [4] assumono la forma

$$f_i = \rho \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) . \tag{5}$$

Le f_i essendo note, le [5] determinano le λ_i a meno di un fattore, il quale risulta a sua volta determinato (a meno del segno) dalla richiamata identità quadratica che dà $\sum_{ik}^{n}{}_{1}\, a_{ik} f_i f_k = \rho^2$. Il primo membro non può annullarsi, in quanto, per ipotesi, una almeno delle f_i è diversa da zero: così siamo anche assicurati che $\rho \neq 0$. In definitiva, *data la famiglia di superficie* $f =$ cost, *rimane univocamente individuata la direzione ortogonale*, su cui il verso positivo può ancora essere scelto a piacimento (in corrispondenza al doppio segno di ρ). Note, in funzione del posto, le λ_i, se ne traggono gli elementi reciproci λ^i e quindi, in base alle [1], una congruenza di linee che tagliano ortogonalmente le superficie di un'assegnata famiglia. Viceversa, data *a priori* una congruenza di linee, mediante i suoi momenti λ_i (da considerarsi come funzioni assegnate del posto), affinchè le linee della congruenza si possano risguardare come traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie $f =$ cost, occorre che le derivate della (*a priori* incognita) funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ verifichino le [5], designando ρ un fattore non nullo, ma a *priori* indeterminato. Una tale f non sempre esiste, anzi abbiamo già visto (Cap. II, § 7) che le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista (le [23] del detto Cap.) sono

$$\left.\begin{aligned} X_i\left(\frac{\partial X_j}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_j}\right) + X_j\left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} - \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\right) + X_k\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) = 0 \\ (i, j, k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

(dove si deve ora assumere $X_i = \lambda_i$, $X_j = \lambda_j$, $X_k = \lambda_k$). Di queste soltanto una parte — per es., quelle in cui l'indice k ha il valore fisso n (le [20] del citato capitolo) — sono distinte, le rimanenti risultandone conseguenza necessaria.

§ 2. — Ennuple di congruenze. Caratterizzazione di un vettore mediante n invarianti. — Consideriamo ora, in una V_n generica, n congruenze di linee: in ogni punto saranno così fissate n direzioni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Noi supporremo inoltre che queste direzioni siano due a due ortogonali, e diremo allora di aver fissato nella V_n una *ennupla di congruenze ortogonali*.

I parametri e i momenti di queste congruenze avranno, naturalmente, due indici, di cui il primo rappresenta il numero d'ordine della congruenza: diremo *congruenza* (h) quella di parametri $\overset{1}{\lambda}_h, \overset{2}{\lambda}_h, \ldots, \overset{n}{\lambda}_h$ e di cui quindi i momenti sono gli elementi reciproci $\lambda_{h|1}, \lambda_{h|2}, \ldots, \lambda_{h|n}$ (rispetto al ds^2 della varietà).

Alle solite identità quadratiche si aggiungono qui le condizioni di ortogonalità delle congruenze: le une e le altre si compendiano nella formula

$$\sum_{1}^{n}{}_i \lambda_{h|i} \lambda_k^i = \delta_h^k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

la quale, se $h = k$, è la solita relazione tra parametri e momenti, e se $h \neq k$, esprime l'ortogonalità delle direzioni λ_h e λ_k, cioè delle congruenze (h) e (k).

Le [7] esprimono altresì la circostanza essenziale che *gli n^2 parametri λ_k^i di un'ennupla ortogonale sono complessivamente gli elementi reciproci (in senso algebrico) degli n^2 momenti $\lambda_{h|i}$ della stessa ennupla, e inversamente* (cfr. Cap. IV, § 6). Valgono quindi, assieme alle [7], le formule equivalenti

$$\sum_{1}^{n}{}_h \lambda_{h|i} \lambda_h^j = \delta_i^j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{7'}$$

Da queste, moltiplicando per a_{jk} e sommando rispetto a j, seguono le notevoli espressioni

$$a_{ik} = \sum_{1}^{n}{}_h \lambda_{h|i} \lambda_{h|k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7''}$$

dei coefficienti del ds^2 mediante i momenti di una qualsiasi ennupla ortogonale. Analogamente si ricava, moltiplicando le stesse [7′] per a^{ik}, sommando rispetto ad i e riponendo poi i per j,

$$a^{ik} = \sum_{1}^{n}{}_h \lambda_h^i \lambda_h^k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{7'''}$$

Un vettore $\boldsymbol{R}$ della nostra V_n è determinato, come sappiamo, dalle sue componenti covarianti R_i o contravarianti R^i: quando però in V_n è fissata una ennupla di congruenze, si può anche individuare il vettore per mezzo delle sue n proiezioni sulle direzioni della ennupla stessa, nel punto in cui si considera il vettore. La proiezione di $\boldsymbol{R}$ nella direzione λ_h è, per definizione, l'invariante

$$c_h = \boldsymbol{R} \times \lambda_h$$

che è suscettibile delle due espressioni equivalenti

$$c_h = \sum_{1}^{n}{}_i R^i \lambda_{h|i} , \qquad [8]$$

$$c_h = \sum_{1}^{n}{}_i R_i \lambda_h^{i} . \qquad [9]$$

Così il vettore $\boldsymbol{R}$ resta caratterizzato dagli n *invarianti* c_i: se da questi si vogliono ricavare, in un dato sistema di riferimento, le componenti covarianti o contravarianti, basta risolvere le [8] o le [9], il che dà (in base alle [7]),

$$R^i = \sum_{1}^{n}{}_h c_h \lambda_h^{i} , \qquad [8']$$

$$R_i = \sum_{1}^{n}{}_h c_h \lambda_{h|i} . \qquad [9']$$

Se in particolare il vettore $\boldsymbol{R}$ è il *gradiente* di un invariante f (cioè se le R_i sono le derivate f_i della f rispetto alle x_i) allora gli invarianti c_h assumono il significato di ***derivate della f nelle direzioni della congruenza*** (derivate intrinseche). Infatti, chiamiamo s_h la lunghezza dell'arco di una delle linee della congruenza (h), contato da un'origine arbitraria: spostandosi di ds_h lungo questa direzione, la f aumenta di

$$df = \sum_{1}^{n}{}_i f_i \, dx_i ,$$

essendo dx_i i differenziali spettanti al detto spostamento.

Dividendo questa quantità per ds_h si otterrà, per definizione, la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial s_h}$ della f nella direzione della congruenza (h); ricordando che $\dfrac{dx_i}{ds_h} = \lambda_h^{i}$, si ha dunque

$$\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_i f_i \lambda_h^{i} , \qquad [10]$$

formula corrispondente alla [9]. Risolvendola, si ha la formula corrispondente alla [9′]

$$f_i = \sum_{1}^{n}{}_h \frac{\partial f}{\partial s_h} \lambda_{h|i} \qquad [10']$$

e, passando agli elementi reciproci, anche

$$f^i = \sum_1^n {}_h \frac{\partial f}{\partial s_h} \lambda_h^i , \qquad [10'']$$

che corrisponde alla [8'].

In generale, sarebbe facile dimostrare che, quando è fissata una ennupla di congruenze, un tensore di rango m si può caratterizzare mediante n^m *invarianti*, anzichè per mezzo di altrettante componenti covarianti, contravarianti o miste, in modo del tutto analogo a quello con cui abbiamo caratterizzato un vettore per mezzo di n invarianti. Ciò permette di semplificare lo studio di talune questioni, donde l'opportunità di approfondire un poco le considerazioni sulle ennuple di congruenze.

§ 3. — Definizione geometrica dei coefficienti di rotazione del Ricci. — A tal uopo conviene introdurre un sistema di invarianti differenziali intimamente legato alla ennupla di congruenze. Vi giungeremo speditamente nel modo seguente.

Consideriamo due punti vicinissimi P e P', della V_n: in ciascuno di essi le linee delle n congruenze determinano una *piramide* (generalizzazione del concetto di triedro) di direzioni mutuamente ortogonali. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono le n direzioni spiccate da P, chiameremo $\lambda'_1 = \lambda_1 + \delta' \lambda_1, \ldots, \lambda'_n = \lambda_n + \delta' \lambda_n$ quelle spiccate da P', e diremo che si passa dalle prime alle seconde per *trasporto locale*, cioè secondo la legge, previamente fissata, che regola l'andamento delle ∞^{n-1} linee dell'ennupla. Ma si può anche trasportare la piramide di direzioni, da P in P' per parallelismo: si otterranno allora in P' n direzioni mutuamente ortogonali $\lambda^*_1 = \lambda_1 + \delta^* \lambda_1, \ldots, \lambda^*_n = \lambda_n + \delta^* \lambda_n$, non coincidenti, in generale, con quelle ottenute per trasporto locale. Si avranno così in P' due piramidi infinitamente vicine tra loro, perchè entrambe infinitamente vicine all'ennupla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Ciò implica in particolare che la i^{esima} direzione dell'una forma un angolo infinitesimo con la i^{esima} direzione dell'altra, e un angolo vicinissimo a $\frac{\pi}{2}$ con le rimanenti $n-1$ direzioni dell'altra. Vogliamo studiare questi divari infinitesimi.

A tal uopo, consideriamo due direzioni λ_h, λ_k della piramide spiccata da P: eventualmente, esse possono coincidere ($h = k$), altrimenti sono ortogonali, talchè si avrà

$$\cos \widehat{\lambda_h \lambda_k} = \delta^k_h .$$

Trasportiamole in P', la prima per trasporto locale, la seconda per parallelismo, sì che la prima verrà a coincidere con λ'_h, la seconda con λ^*_k: calcoliamo di quanto si altera nel trasporto il coseno del loro angolo, cioè calcoliamo la quantità

$$\delta \cos \widehat{\lambda_h \lambda_h} = \cos \widehat{\lambda'_h \lambda^*_k} - \cos \widehat{\lambda_h \lambda_k} .$$

Questa è infinitesima come la distanza ds fra P e P', e la scriveremo perciò sotto la forma $p_{hk}\, ds$: così p_{hk} ci esprimerà in certo modo la rapidità con cui si altera il coseno considerato, spostandosi nella direzione PP'. Per calcolarla, prendiamo le mosse dalla formula

$$\cos \widehat{\lambda_h \lambda_k} = \sum_1^n{}_i\, \lambda_{h\,|\,i}\, \lambda^i_k$$

e differenziamola, ricordando che su $\lambda_{h\,|\,i}$ si deve operare col simbolo δ' (trasporto locale) e su λ^i_k col simbolo δ^* (trasporto per parallelismo). Avremo

$$p_{hk}\, ds = \delta \cos \widehat{\lambda_h \lambda_k} = \sum_1^n{}_i \left(\delta' \lambda_{h\,|\,i} \,.\, \lambda^i_k + \lambda_{h\,|\,i}\, \delta^* \lambda^i_k\right) . \qquad [11]$$

D'altra parte si ha dall'ordinaria regola del calcolo differenziale, δx_j designando gli incrementi delle coordinate da P a P',

$$\delta' \lambda_{h\,|\,i} = \sum_j^n \frac{\partial \lambda_{h\,|\,i}}{\partial x_j}\, \delta x_j ,$$

e dalla legge del parallelismo

$$\delta^* \lambda^i_k = - \sum_{1\;jl}^n \left\{ \begin{matrix} j\; l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^l_k\, \delta x_j .$$

Sostituendo nella [11] si trova

$$p_{hk}\,ds = \sum_1^n{}_{ij} \lambda^{i}_{k} \frac{\partial \lambda_{h\,|\,i}}{\partial x_j}\,\delta x_j - \sum_1^n{}_{ijl} \lambda_{h\,|\,i} \left\{ \begin{matrix} j\ l \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^{l}_{k}\,\delta x_j\,.$$

Nella seconda sommatoria si scambino fra loro gli indici i ed l, il che farà figurare anche in questa sommatoria il fattore $\lambda^{i}_{k}\,\delta x_j$, come nella prima. Potremo allora scrivere

$$p_{hk}\,ds = \sum_1^n{}_{ij} \left[\frac{\partial \lambda_{h\,|\,i}}{\partial x_j} - \sum_1^n{}_l \left\{ \begin{matrix} j\ i \\ l \end{matrix} \right\} \lambda_{h\,|\,l} \right] \lambda^{i}_{k}\,\delta x_j\,.$$

ossia, ricordando la [5] del Cap. VI,

$$p_{hk}\,ds = \sum_1^n{}_{ij} \lambda_{h\,|\,ij}\, \lambda^{i}_{k}\,\delta x_j\,. \qquad [11']$$

Giova indicare con

$$\xi^j = \frac{\delta x_j}{ds}$$

i parametri della direzione PP', e allora avremo

$$p_{hk} = \sum_1^n{}_{ij} \lambda_{h\,|\,ij}\, \lambda^{i}_{k}\, \xi^j\,, \qquad [11'']$$

formula valida per una direzione qualunque.

Giova rilevare che le p_{hk}, in base alla originaria definizione [11], cambiano di segno quando si scambiano i due indici. Ciò si verifica senza difficoltà, sia in base all'espressione finale [11″] ove si risalga alla [7] e si derivi covariantemente; sia, in modo più geometrico, tenendo conto che, nè per trasporto locale, nè per parallelismo, si altera un qualsiasi cos $\widehat{\lambda_h \lambda_k}$, talchè valgono le formule

$$\delta' \left(\sum_1^n{}_i \lambda_{h\,|\,i}\, \lambda^{i}_{k} \right) = 0 \quad , \quad \delta^* \left(\sum_1^n{}_i \lambda_{h\,|\,i}\, \lambda^{i}_{k} \right) = 0\,.$$

Eseguendo le differenziazioni e valendosene per trasformare il secondo membro della [11], si ricava

$$p_{hk}\, ds = -\sum_1^n{}_i \left(\lambda_{h|i}\, \delta' \lambda^i_{k} + \lambda^i_{k}\, \delta^* \lambda_{h|i}\right).$$

D'altra parte, siccome a $\cos \widehat{\lambda_h \lambda_k}$ si può anche attribuire l'espressione $\sum_1^n{}_i \lambda^i_{h}\, \lambda_{k|i}$, la [11] stessa equivale a

$$p_{hk}\, ds = \sum_1^n{}_i \left(\delta' \lambda^i_{h}\, \lambda_{k|i} + \lambda^i_{h}\, \delta^* \lambda_{k|i}\right).$$

Scambiandovi h con k e sommando con la precedente, risulta l'annunciata identità

$$p_{hk} + p_{kh} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{12}$$

Esaminiamo ora il caso in cui la direzione di spostamento coincide con una di quelle dell'ennupla, per es. con la l^{esima}. Avremo allora

$$\xi^j = \lambda^j_{l}\,,$$

e, indicando con γ_{hkl} il valore di p_{hk} in questo caso particolare (cioè la rapidità di variazione di $\cos \widehat{\lambda_h \lambda_k}$ in uno spostamento nella direzione di λ_l, nel quale a λ_h si applichi il trasporto locale, e a λ_k quello parallelo) avremo dalla [11′]

$$\gamma_{hkl} = \sum_1^n{}_{ij}\, \lambda_{h|ij}\, \lambda^i_{k}\, \lambda^j_{l} \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n)\,. \tag{13}$$

Le quantità γ furono introdotte dal Ricci e da lui designate *coefficienti di rotazione* dell'ennupla. Esse godono di notevoli proprietà.

Intanto, sono degli *invarianti*, come risulta dalla [13], in virtù della legge di saturazione degli indici. Inoltre si ha, come caso particolare della [12],

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

che, per $k = h$, si riduce a

$$\gamma_{hhl} = 0 . \qquad [15]$$

Della [14] si può anche dare una verificazione formale diretta, come già accennammo più generalmente a proposito delle p. Basta prendere le mosse dalle identità [7], derivando covariantemente: avremo (ricordando il § 6 del Cap. VI)

$$\sum_1^n{}_i \lambda_{h|ij} \lambda^{i}_{k} + \sum_1^n{}_i \lambda_{k|ij} \lambda^{i}_{h} = 0 .$$

Moltiplicando poi per λ^{j}_{l}, e sommando rispetto a j da 1 a n, risulta

$$\sum_1^n{}_{ij} \lambda_{h|ij} \lambda^{i}_{k} \lambda^{j}_{l} + \sum_1^n{}_i \lambda_{k|ij} \lambda^{i}_{h} \lambda^{j}_{l} = 0$$

ossia appunto

$$\gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 .$$

Gli invarianti γ, dipendendo da tre indici, sono *a priori* in numero di n^3; ma tra essi passano le $\frac{n^2(n+1)}{2}$ relazioni [14] di emisimmetria. Ve ne ha dunque (al più)

$$n^3 - \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n^2(n-1)}{2}$$

algebricamente distinti.

Il minuendo n^3 è uguale al numero delle derivate $\lambda_{h|kl}$ delle $\lambda_{h|k}$; il sottraendo a quello delle relazioni scritte sopra che provengono dalla derivazione delle [7] e legano fra loro queste derivate. Potremo in conformità esprimere le $\lambda_{h|kl}$ in funzione delle $\lambda_{h|k}$ e delle γ, risolvendo le [13]. Per ciò, si moltiplica la generica [12] per $\lambda_{k|i'} \lambda_{l|j'}$, e si somma rispetto a k ed l. Risulta

$$\begin{aligned} \sum_1^n{}_{kl} \gamma_{hkl} \lambda_{k|i'} \lambda_{l|j'} &= \sum_1^n{}_{ij} \lambda_{h|ij} \sum_1^n{}_k \lambda^{i}_{k} \lambda_{k|i'} \sum_1^n{}_l \lambda^{j}_{l} \lambda_{l|j'} \\ &= \sum_1^n{}_{ji} \lambda_{h|ij} \delta^{i'}_{i} \delta^{j'}_{j} \\ &= \lambda_{h|i'j'} , \end{aligned}$$

ossia, sostituendo infine i' e j' con i e j,

$$\lambda_{h|ij} = \sum_{1}^{n}{}_{kl}\, \gamma_{hkl}\, \lambda_{k|i}\, \lambda_{l|j}\,. \qquad [16]$$

Di qui apparisce che, per studiare le proprietà differenziali (dipendenti cioè dal modo di variare delle λ) delle linee delle nostre congruenze, basterà fissare l'attenzione sugli invarianti γ, mercè cui si esprimono tutte le derivate delle λ.

Il significato geometrico delle γ, che già abbiamo illustrato, diviene poi particolarmente espressivo nel caso dello spazio ordinario. In tal caso le tre congruenze definiscono in ogni punto una terna di direzioni ortogonali, e p_{32}, p_{31}, p_{12}, non sono altro che le componenti di un vettore ω tale, che $\omega\, ds$ è la *rotazione elementare* che subisce la terna nel trasporto locale da P a P' (1).

Tornando al caso generale, segnalerò ancora una memoria della sig.na CARPANESE (2), dove si studia il parallelismo in relazione ad un'ennupla assegnata.

§ 4. — FORMULA DI COMMUTAZIONE DELLE DERIVATE SECONDO GLI ARCHI. — Gli invarianti γ intervengono in un'altra formula importante, che ora stabiliremo.

Vogliamo confrontare le due derivate seconde

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k}:$$

troveremo che esse non sono uguali, ma son legate da una relazione più complessa, involgente anche le derivate prime e le γ.

Si ha in primo luogo dalla [10], derivando l'invariante $\frac{\partial f}{\partial s_h}$ rispetto ad x_j ed applicando al secondo membro la regola di derivazione del Cap. V, § 6,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_{1}^{n}{}_i\, f^i\, \lambda_{h|ij} + \sum_{1}^{n}{}_i\, \lambda_h^{\,i}\, f_{ij}\;.$$

(1) Cfr. per es. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Bologna: Zanichelli, 1923, pag. 178.

(2) *Parallelismo e curvatura in una varietà qualunque*, Annali di Mat., T. XXVIII, 1919, pp. 147-169.

Introduciamo nel primo termine, al posto di f^i, la sua espressione fornita dalle [10''] (assumendovi l anzichè h per indice di sommatoria) e moltiplichiamo entrambi i membri per λ^j_{k}, sommando rispetto a j.

Risulta

$$\sum_1^n{}_j \lambda^j_{k} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial s_h}\right) = \sum_1^n{}_{ijl} \frac{\partial f}{\partial s_l} \lambda^i_{l} \lambda^j_{k} \lambda_{h\,|\,ij} + \sum_1^n{}_{ij} f_{ij} \lambda^i_{h} \lambda^j_{k}.$$

Il primo membro, per la definizione [10] di derivata intrinseca, non è altro che $\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}$; il primo termine del secondo, in base alla definizione [13] degli invarianti γ, si riduce a

$$\sum_1^n{}_l \gamma_{hlk} \frac{\partial f}{\partial s_l} = -\sum_1^n{}_l \gamma_{lhk} \frac{\partial f}{\partial s_l}.$$

Risulta dunque

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = -\sum_1^n{}_l \gamma_{lhk} \frac{\partial f}{\partial s_l} + \sum_1^n{}_{ij} f_{ij} \lambda^i_{h} \lambda^j_{k}.$$

Per avere l'altra derivata seconda, basta scambiare materialmente le lettere h e k, il che dà

$$\frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k} = -\sum_1^n{}_l \gamma_{lkh} \frac{\partial f}{\partial s_l} + \sum_1^n{}_{ij} f_{ij} \lambda^i_{k} \lambda^j_{h}.$$

Ora facciamo la differenza, notando che le seconde sommatorie si elidono, poichè uno scambio materiale degli indici i e j ricondurrebbe subito l'una a identificarsi con l'altra. Si conclude

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k} = -\sum_1^n{}_l \frac{\partial f}{\partial s_l}\left(\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}\right). \qquad [17]$$

È questa la *formula di commutazione* alla quale volevamo arrivare.

§ 5. — CASO IN CUI UNA DELLE CONGRUENZE DELL'ENNUPLA È GEODETICA. — Supponiamo che una delle congruenze dell'ennupla sia *geodetica* (cfr. § 1): potremo sempre supporre, senza diminuire la generalità, che questa sia la (n). Ci proponiamo di trovare quale particolarità presentano in tal caso i coefficienti di rotazione γ.

Basterà applicare le [2'] che ci forniscono le seguenti relazioni, per gli elementi della direzione λ_n:

$$\sum_1^n {}_l\, \lambda_{n|il} \lambda_n^{l} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \,. \tag{18}$$

Moltiplichiamo per λ_h^{i}, e sommiamo rispetto a i: ricordando la formula di definizione delle γ, troviamo

$$\gamma_{nhn} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{18'}$$

equivalenti alle [18], come si potrebbe verificare moltiplicando per $\lambda_{h|i}$, sommando rispetto all'indice h e badando alle [16].

Le n equazioni [18'] hanno carattere invariantivo non solo di fronte a tutti i possibili cambiamenti di coordinate, ma anche di fronte a qualsiasi cambiamento delle $n-1$ congruenze $(1), (2), \ldots, (n-1)$, che formano con (n) un'ennupla ortogonale: infatti, per stabilire le equazioni [18] non si è dovuta fare nessuna ipotesi particolare sulla scelta di tali $n-1$ congruenze.

In particolare, se lo spazio è euclideo, le [18'] ci danno la caratterizzazione intrinseca delle congruenze rettilinee.

§ 6. — CURVATURA GEODETICA DI UNA DELLE CONGRUENZE DELL'ENNUPLA. — Tornando al caso che la (n) sia una congruenza generica, vogliamo mostrare che gli n invarianti γ_{nhn} $(h = 1, 2, \ldots, n)$ hanno un'espressiva interpretazione geometrica. Si ricordi a tal uopo che il primo membro della [2'], che abbiamo denotato con p_k, non è altro che una componente covariante della curvatura geodetica $\boldsymbol{p}$ (Cap. V, § 25).

Se la congruenza che si considera è la (n), possiamo dunque scrivere

$$p_k = \sum_1^n {}_l\, \lambda_{n|kl} \lambda_n^{l} .$$

Ora, il vettore $\boldsymbol{p}$, conformemente a quanto si è detto al § 2, si può rappresentare per mezzo degli n invarianti

$$c_h = \sum_1^n {}_k\, p_k \lambda_h^{k} \,,$$

che ne forniscono le proiezioni ortogonali sulle linee dell'ennupla.

Effettuando questa operazione sull'espressione di p_k data testè, si trova

$$c_h = \gamma_{nhn} :$$

si vede da ciò che gli invarianti γ_{nhn} $(h = 1, 2, \ldots, n)$ rappresentano le proiezioni ortogonali sulle linee dell'ennupla del vettore *curvatura geodetica* della congruenza (n).

§ 7. — Caso in cui una delle congruenze dell'ennupla è normale. Normalità completa. Relazioni differenziali verificate in ogni caso dalle γ. — Supponiamo che la (n) sia una congruenza normale. Sappiamo che l'equivalente condizione analitica è data dalle [6] dove basta assumere $X_i = \lambda_{n|i}$. Si ha così

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_{n|k}(\lambda_{n|ij} - \lambda_{n|ji}) + \lambda_{n|i}(\lambda_{n|jk} - \lambda_{n|kj}) + \lambda_{n|j}(\lambda_{n|ki} - \lambda_{n|ik}) = 0 \\ (i, j, k, = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \qquad [19]$$

Ora si moltiplichi questa equazione per $\lambda_{n|k'}^{k}\, \lambda_{n|i'}^{i}$, dove k' e i' sono due nuovi indici scelti fra $1, 2, \ldots, n-1$, e si sommi rispetto a i e k da 1 a n: ricordando la [13], si ottiene

$$\lambda_{n|j}(\gamma_{nk'i'} - \gamma_{ni'k'}) = 0 . \qquad [19']$$

Siccome, j essendo qualunque, si può sempre scegliere tale che $\lambda_{n|j} \neq 0$, se ne trae

$$\gamma_{nki} = \gamma_{nik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1) , \qquad [20]$$

dove si è scritto i, k in luogo di i', k'. Reciprocamente, se sono verificate le [20], ne risultano le [19'] e quindi anche le [19] come necessaria conseguenza. Le [20] costituiscono pertanto la condizione richiesta.

Non è privo di interesse il ritrovarla anche per altra via, prendendo le mosse dall'osservazione che, se le $\lambda_{n|i}$ devono essere proporzionali alle derivate $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ di una stessa funzione, queste derivate potranno essere sostituite nelle condizioni di ortogonalità

$$\sum_1^n{}_i \lambda_{n|i} \lambda_h^{i} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

talchè la ipotetica funzione f dovrà verificare il sistema lineare di equazioni a derivate parziali

$$\sum_1^n{}_i \lambda_h^{i} \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1) .$$

Reciprocamente, se esiste una funzione f che verifica le $n-1$ equazioni ora scritte, le sue derivate devono risultare proporzionali alle $\lambda_{n|i}$.

Perciò le condizioni di cui si tratta sono le stesse che sono necessarie e sufficienti perchè le dette $n-1$ equazioni costituiscano un sistema *completo* (cfr. Cap. III, § 9). Per uniformarci alle notazioni del cit. Cap., introduciamo gli operatori lineari

$$X_h = \sum_1^n{}_i \lambda_h^{i} \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

non senza rilevare che, in base alle [10] del § 2, tali operatori coincidono colle derivate $\frac{\partial}{\partial s_h}$ *rapporto agli archi. Avendo in conformità* il sistema

$$X_h f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1) ,$$

dovremo esprimere che per $h, k = 1, 2, \ldots, n-1$ le parentesi di Poisson

$$(X_h, X_k) f = X_h X_k f - X_k X_h f$$

sono combinazioni lineari delle $X_l f$.

Ora si ha, ripetendo materialmente il calcolo del § 4, o meglio, richiamando senz'altro la espressione di $\frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k}$,

$$X_h X_k f = \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k} = -\sum_{1}^{n} {}_l \gamma_{lkh} \frac{\partial f}{\partial s_l} + \sum_{1}^{n} {}_{ij} f_{ij} \lambda_h^{i} \lambda_k^{j} .$$

Scambiando h e k, e sottraendo, la seconda sommatoria scompare. Nella prima conviene scrivere a parte il termine corrispondente al valore n dell'indice l, e riporre $X_l f$ in luogo di $\frac{\partial f}{\partial s_l}$. Si ottiene così

$$(X_h, X_k) f = \sum_{1}^{n-1} {}_l (\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) X_l f + (\gamma_{nhk} - \gamma_{nkh}) \frac{\partial f}{\partial s_n} .$$

Questa deve ridursi a una combinazione lineare delle $X_l f$ $(l = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Siccome $\frac{\partial f}{\partial s_n}$ è indipendente dalle X_l, ciò richiede che si annulli, in gnuna delle parentesi testè esplicitate, cioè per $h, k = 1, 2, \ldots, n-1$, coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial s_n}$.

Si è dunque ricondotti alle [20].

Si osservi che, se *tutte* le congruenze dell'ennupla sono normali, le γ con tre indici distinti sono tutte nulle. Infatti, scelti tre indici i, h, k, *diversi* fra loro, si possono in tal caso scrivere le seguenti identità

$$\gamma_{ihk} = \gamma_{ikh} ,$$
$$\gamma_{hki} = \gamma_{hik} ,$$
$$\gamma_{kih} = \gamma_{khi} ,$$

e sommando le prime due, e sottraendo la terza, si ottiene, tenendo presente l'emisimmetria rispetto ai primi due indici,

$$\gamma_{ihk} = -\gamma_{ihk} ,$$

ossia appunto

$$\gamma_{ihk} = 0 \qquad (i, h, k, = 1, 2, \ldots, n) ,$$

per ogni terna di indici distinti.

Ove si ponga

$$\gamma_{ij,hk} = \frac{\partial}{\partial s_k} \gamma_{ijh} - \frac{\partial}{\partial s_h} \gamma_{ijk} + \sum_1^n {}_l \left\{ \gamma_{ijl} (\gamma_{lhk} - \gamma_{lkh}) + \gamma_{lik}\gamma_{ljh} - \gamma_{lih}\, \gamma_{ljk} \right\} ,$$

si ha tosto, per definizione e per l'emisimmetria dei coefficienti di rotazione γ, rispetto ai primi due indici,

$$\gamma_{ij,hk} = - \gamma_{ij,kh} \quad , \quad \gamma_{ij,hk} = - \gamma_{ji,hk} \, .$$

Aggiungo, senza dimostrarlo, che sussistono le identità cicliche

$$\gamma_{ij,hk} + \gamma_{ih,kj} + \gamma_{ik,jh} = 0 ,$$

da cui segue ulteriormente

$$\gamma_{ij,hk} = \gamma_{hk,ij} \qquad (i, j, h, k = 1 , 2 , \ldots , n).$$

Il Ricci stabilì tutto ciò fin dal 1895, appoggiandosi, per quanto concerne le γ a quattro indici, sulle analoghe proprietà dei simboli di Riemann di 1ª specie (Cap. VII, § 4). Una deduzione particolarmente semplice e diretta è stata recentemente indicata dal sig. Dei (1).

§ 8. — Sistema canonico rispetto a una congruenza data. — In molte questioni figura fra i dati del problema, o è strettamente legata ad essi, una congruenza di linee. Per trattare questi problemi, giova spesso associare alla data altre $n - 1$ congruenze, ortogonali fra loro e con quella, sì da poter considerare la congruenza data come la n^{esima} di una ennupla. La scelta delle $n - 1$ congruenze ausiliarie è *a priori* arbitraria; sicchè in molti casi conviene sfruttare questa arbitrarietà per introdurre qualche semplificazione. Ciò è possibile, come ora vedremo; e la conclusione è che, data una congruenza

(1) *Sulle relazioni differenziali che legano i coefficienti di rotazione del Ricci*, Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXXII (1° sem. 1923), pp. 474-479.

qualsiasi, esiste sempre *almeno un* modo di scegliere le altre $n-1$, in maniera che siano verificate le relazioni

$$\gamma_{nkl} + \gamma_{nlk} = 0 \qquad (k = = l;\ k, l = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \qquad [21]$$

Il sistema (o uno qualunque dei sistemi) di $n-1$ congruenze che presenta questa particolarità si chiama ***sistema canonico rispetto alla congruenza data.***

Per dimostrarne l'esistenza, associamo alla congruenza data un sistema, *per ora qualunque*, di altre $n-1$ congruenze ortogonali, e fissiamo l'attenzione su un punto P, generico, della varietà; chiamiamo per brevità $\tilde{\omega}$ la piramide delle $n-1$ direzioni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ spiccate da P, ortogonali fra loro e alla λ_n. Immaginiamo di far *ruotare* questa piramide intorno alla direzione λ_n, con che vogliamo dire, che passiamo dalla piramide $\tilde{\omega}$ a un'altra $\tilde{\omega}'$, formata di altre $n-1$ direzioni $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_{n-1}$, pure spiccate da P, e ortogonali fra loro e alla λ_n. Vogliamo, se possibile, determinare la rotazione in modo che in seguito ad essa riescano verificate le [21]. A tal uopo prenderemo le mosse dalle relazioni che legano le λ'_h alle λ_h, e che traducono analiticamente l'accennata rotazione.

Sia α_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, n-1, n)$ il coseno dell'angolo formato dalle direzioni λ_h e λ'_k. Naturalmente, se uno solo dei due indici k, h coincide con n (essendo $\lambda_n = \lambda'_n$), l'α corrispondente è zero $\left(\text{l'angolo essendo } \frac{\pi}{2}\right)$; mentre $\alpha_{nn} = 1$. In formule

$$\begin{cases} \alpha_{hn} = \alpha_{nh} = 0 & (h, k = 1, 2, \ldots, n-1)\,; \\ \alpha_{nn} = 1\,. \end{cases}$$

Si ha comunque per definizione

$$\sum_1^n {}_j\, \lambda'^{\,j}_h\, \lambda'_{k|j} = \alpha_{hk} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)\,,$$

e quindi, moltiplicando per $\lambda_{h\,|\,i}$ e sommando rispetto ad h,

$$\lambda'_{k\,|\,i} = \sum_1^n {}_h\, \alpha\, {}_k\, \lambda_{h|i}\,.$$

Ove si ritenga k limitato ai valori 1, 2, ..., $n-1$ con che $\alpha_{nk}=0$, la sommatoria del 2° membro si può mandare soltanto fino ad $n-1$, scrivendo in conformità

$$\lambda'_{k\,|\,i} = \sum_1^{n-1}{}_h\, \alpha_{hk}\,\lambda_{h\,|\,i} \qquad (k=1,2,\ldots,n-1)\,, \qquad [22]$$

cioè i momenti di $\bar{\omega}'$ sono legati a quelli di $\bar{\omega}$ da una sostituzione lineare, come era da prevedersi: le α_{hk} sono i coefficienti di tale sostituzione. È pure da prevedere che si tratti di sostituzione ortogonale. Per verificarlo, basta riportarsi alle identità [7''], le quali, fattovi in particolare $k=i$, danno

$$\sum_1^n{}_h\, \lambda^2_{h\,|\,i} = a_{ii} \qquad (i=1,2,\ldots,n)\,.$$

I secondi membri a_{ii} dipendono dalle coordinate di riferimento, ma non dalla scelta delle congruenze associate alla (n).

Essendo, per $i \neq n$, $\lambda_{i\,|\,n}=0$, ne segue che (*per qualsiasi* i) l'espressione

$$\sum_1^{n-1}{}_h\, \lambda^2_{h\,|\,i}$$

è invariante di fronte alle rotazioni della piramide $\bar{\omega}$, e quindi la sostituzione definita dalle α è ortogonale. Si tratta ora di disporre della suddetta sostituzione ortogonale d'ordine $n-1$ in modo da rendere soddisfatte le [21].

A tal uopo prendiamo le mosse dalla [16] da cui scende in particolare

$$\lambda_{n\,|\,ij} = \sum_1^n{}_{kl}\, \gamma_{nkl}\,\lambda_{k\,|\,i}\,\lambda_{l\,|\,j} \qquad (i\,,j=1,2,\ldots,n-1)\,.$$

I termini della sommatoria, nei quali si fa $k=n$, sono nulli, in virtù di [15]: quelli in cui $l=n$ si possono mettere in evidenza, scrivendo

$$\lambda_{n\,|\,ij} = \sum_1^{n-1}{}_{kl}\, \gamma_{nkl}\,\lambda_{k\,|\,i}\,\lambda_{l\,|\,j} + \lambda_{n\,|\,j}\sum_1^n{}_k\, \gamma_{nkn}\,\lambda_{k\,|\,i}\,.$$

L'ultima sommatoria si trasforma opportunamente, introducendovi per γ_{nkn} l'espressione data dalla [13]: si ha allora successivamente

$$\sum_1^n {}_k \gamma_{nkn} \lambda_{k|i} = \sum_1^n {}_{kpq} \lambda_{n|pq} \lambda_k^p \lambda_n^q \lambda_{k|i}$$
$$= \sum_1^n {}_{pq} \lambda_{n|pq} \lambda_n^q \delta_i^p$$
$$= \sum_1^n {}_q \lambda_{n|iq} \lambda_n^q .$$

Possiamo dunque scrivere

$$\lambda_{n|ij} = \sum_1^{n-1} {}_{kl} \gamma_{nkl} \lambda_{k|i} \lambda_{l|j} + \lambda_{n|j} \sum_1^n {}_q \lambda_{n|iq} \lambda_n^q .$$

Ora, è da osservare in questa formula che il primo membro, e l'ultima parte del secondo dipendono dai parametri e dai momenti della *sola* direzione λ_n mentre *non* dipendono dalle altre $n-1$ direzioni associate: altrettanto dovrà dunque dirsi della parte restante, cioè della sommatoria

$$\sum_1^{n-1} {}_{kl} \gamma_{nkl} \lambda_{k|i} \lambda_{l|j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n-1) . \qquad [23]$$

Possiamo quindi concludere che queste espressioni sono *invarianti* di fronte a qualsiasi rotazione della piramide $\tilde{\omega}$.

Delle $(n-1)^2$ forme quadratiche che rientrano nella formula [23] e che si ottengono scegliendo in tutti i modi possibili gli indici i e j, a noi interessa una qualunque di quelle, in cui $i = j$. Fissato una volta per tutte l'indice i, e posto per brevità

$$\lambda_{r|i} = z_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

la forma quadratica corrispondente si scrive

$$\sum_1^{n-1} {}_{kl} \gamma_{nkl} z_k z_l = \frac{1}{2} \sum_1^{n-1} {}_{kl} (\gamma_{nkl} + \gamma_{nlk}) z_k z_l . \qquad [23']$$

In questa il coefficiente del prodotto $z_k z_l$ è $\gamma_{nkl} + \gamma_{nlk}$, cioè il primo membro di [21]. Se vogliamo soddisfare le [21], dovremo, per mezzo della sostituzione ortogonale [22], che scriveremo

$$z'_k = \sum_k^{n-1} \alpha_{hk} z_h \,, \qquad [22']$$

rendere nulli tutti i coefficienti dei termini in $z_k z_l$, con $k \neq l$: ciò significa *ridurre la forma quadratica invariante* [23'] *alla forma canonica*

$$\sum_1^{n-1}{}_k \rho_k z'^2_k \qquad [23'']$$

per mezzo di una sostituzione ortogonale. Tale problema algebrico è sempre solubile. Nel caso di $n-1=2$ o 3, esso corrisponde alla ricerca degli assi di una conica o di una quadrica, ed è trattato in geometria analitica. Nel caso generale, la teoria conduce al risultato seguente.

Si consideri l'equazione

$$\left\| \tfrac{1}{2}(\gamma_{nkl} + \gamma_{nlk}) - \delta^l_k \rho \right\| = 0 \qquad [24]$$

che è di grado $n-1$ nell'incognita ρ, e si chiama *equazione secolare. Le sue $n-1$ radici sono sempre reali* (s'intende che supponiamo reali le γ_{nkl}) e forniscono gli $n-1$ coefficienti ρ_k della forma canonica [23''] (¹).

Si può dunque sempre scegliere, in ogni punto P, la piramide $\tilde{\omega}$ e quindi il sistema delle $n-1$ congruenze $(1), (2), \ldots, (n-1)$ in modo da soddisfare le [21]: esiste cioè sempre *almeno* un sistema canonico rispetto a una congruenza data. Se le $n-1$ radici della [24] sono tutte distinte, il sistema canonico è determinato in modo unico; se esse sono tutte eguali tra loro, qualunque sistema di $n-1$ congruenze ortogonali fra loro e alla (n) soddisfa le [21] e può chiamarsi quindi canonico. Nel caso generale che le radici distinte siano

$$p \qquad (1 < p < n-1)$$

(¹) Per le dimostrazioni cfr. per es. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Analitica* (Pisa: Spoerri, 1915), Appendice.

restano arbitrari

$$n-1-p$$

coefficienti della sostituzione ortogonale, e quindi vi sono ∞^{n-1-p} sistemi canonici.

§ 9. — Congruenze di rette nello spazio euclideo. Significato geometrico del sistema canonico. — Nello spazio ordinario (cioè euclideo a tre dimensioni) hanno particolare importanza le congruenze di rette, il cui studio si presenta spontaneo in varie questioni di ottica geometrica, poichè i *raggi* di un fascio di luce (in un mezzo omogeneo) formano appunto una congruenza rettilinea.

Ci occuperemo ora di una proprietà geometrica di tali congruenze, che si mostrerà poi legata alle considerazioni del § precedente: anzi — poichè ciò non porta alcuna maggiore complicazione — tratteremo delle congruenze di rette in uno spazio euclideo in un numero qualunque n di dimensioni.

Si consideri un punto generico P, e sia r il raggio, passante per esso, della data congruenza rettilinea: sia χ l'iperpiano (piano se si tratta di spazio ordinario) perpendicolare a r in P. Spostiamoci, in χ, di un segmento infinitesimo $PP' = \varepsilon$ in una direzione qualunque: per P' passerà un altro raggio r' della congruenza. In generale, i due raggi r ed r' sono sghembi: se, per una particolare direzione dello spostamento PP', avviene che essi appartengono a un medesimo piano, cioè che si incontrano o sono paralleli (più precisamente che la loro minima distanza è un infinitesimo d'ordine superiore a ε), si dice che quella è una *direzione focale*. Dimostreremo ora che esistono, in generale, $n-1$ direzioni focali (che possono essere, eventualmente, in tutto o in parte, immaginarie o coincidenti o indeterminate): indicheremo poi un notevole caso particolare in cui queste direzioni coincidono con quelle del sistema canonico.

Sia dunque PP' una direzione focale: esisterà un punto C (eventualmente a distanza infinita) comune a r e ad r'. Chiamiamo $\dfrac{1}{\omega}$ la lunghezza CP (con che il caso particolare che i due raggi siano paralleli si avrà al limite per $\omega = 0$), e riferiamoci a n assi cartesiani ortogonali y_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Siano $\lambda_{n|\nu}$ i coseni della direzione n (cioè i suoi parametri o momenti, chè nello spazio euclideo

$\lambda_{n|\nu} = \lambda^{\nu}_{n}$). La proiezione sull'asse y_ν del segmento CP sarà allora data da $\frac{1}{\omega}\lambda_{n|\nu}$ e quella di CP' sarà

$$\frac{1}{\omega}\lambda_{n|\nu} + d\left(\frac{1}{\omega}\lambda_{n|\nu}\right),$$

mentre la proiezione di PP' è dy_ν. Se dunque scriviamo che questa ultima è la differenza delle altre due (in quanto PP' è il lato di chiusa del triangolo CPP') abbiamo

$$dy_\nu = d\left(\frac{1}{\omega}\lambda_{n|\nu}\right),$$

da cui

$$dy_\nu = \lambda_{n|\nu}\, d\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}\, d\lambda_{n|\nu}.$$

Ora vogliamo impiegare i metodi del calcolo assoluto: conviene perciò associare alla congruenza data altre $n-1$ congruenze, ortogonali ad essa e fra loro, che distingueremo cogli indici $1, 2, \ldots, n-1$. Per introdurre in conformità, accanto alle proiezioni sugli assi, quelle sulla ennupla di congruenze ora definita, dovremo moltiplicare l'ultima equazione per λ^{ν}_{h} $(h = 1, 2, \ldots, n)$ e sommare rispetto a ν. Facciamo dapprima $h = n$: la proiezione di PP' sulla direzione n è nulla, in quanto PP' appartiene per ipotesi all'iperpiano χ; quindi il primo membro darà zero; d'altra parte

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \lambda^{\nu}_{n}\, d\lambda_{n|\nu} = 0$$

in conseguenza dell'identità

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, \lambda^{\nu}_{n}\, \lambda_{n|\nu} = 1:$$

si ottiene quindi in definitiva

$$d\frac{1}{\omega} = 0$$

che esprime il fatto, evidente a priori, che $CP = CP'$ (beninteso, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo). Facendo invece $h = 1, 2, \ldots, n-1$, e indicando con ε_h la proiezione di PP' sulla direzione h, si trova

$$\varepsilon_h = \frac{1}{\omega} \sum_1^n {}_\nu \overset{\nu}{\lambda}_h \, d\lambda_{n\,|\,\nu} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Sviluppiamo ora $d\lambda_{n\,|\,\nu}$, tenendo presente che, essendo nulli i simboli di Christoffel, alle derivate ordinarie possiamo sostituire senza altro quelle covarianti, e che inoltre, essendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ le proiezioni di PP' sulle direzioni dell'ennupla e dy_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ quelle sugli assi, si ha

$$dy_k = \sum_1^{n-1} {}_j \, \varepsilon_j \overset{k}{\lambda}_j \, .$$

L'ultima formula diviene così

$$\varepsilon_h = \frac{1}{\omega} \sum_1^n {}_{\nu k} \overset{\nu}{\lambda}_h \lambda_{n\,|\nu k} \sum_1^{n-1} {}_j \, \varepsilon_j \overset{k}{\lambda}_j \, ,$$

ossia

$$\omega \, \varepsilon_h = \sum_1^{n-1} {}_j \, \varepsilon_j \sum_1^n {}_{\nu k} \lambda_{n\,|\,\nu k} \overset{\nu}{\lambda}_h \overset{k}{\lambda}_j \, .$$

Ricordando la definizione delle γ si ha il sistema di $n-1$ equazioni

$$\omega \, \varepsilon_h = \sum_1^{n-1} {}_j \, \varepsilon_j \, \gamma_{nhj} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad [25]$$

che possiamo anche scrivere

$$\sum_1^{n-1} {}_j \, (\gamma_{nhj} - \overset{j}{\delta}_h \, \omega) \, \varepsilon_j = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1) \, . \qquad [25']$$

Questo sistema lineare ed omogeneo deve servirci a individuare (se esistono) le direzioni focali PP' nell'iperpiano χ, caratterizzandone le proiezioni $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sulle direzioni ortogonali $1, 2, \ldots, n-1$, che abbiamo associato al raggio r.

Affinchè il sistema [25′] possa ammettere soluzioni ε non tutte nulle, è necessario e sufficiente che si annulli il determinante dei coefficienti, cioè che ω verifichi la equazione di grado $n-1$

$$\| \gamma_{nhj} - \delta^j_h \omega \| = 0 \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad [26]$$

Ad ogni radice ω corrisponde almeno un sistema di valori per le ε cioè almeno una direzione focale PP'. Ve ne ha dunque, in generale, $n-1$, che possono però essere, come le corrispondenti radici della [26], reali, immaginarie, distinte o coincidenti; od anche (nel caso di radici multiple) essere suscettibili di infinite determinazioni.

Infatti le proprietà della equazione secolare, richiamate nel precedente §, valgono per determinanti *simmetrici* tipo [24], mentre tale non è in generale il primo membro della [26]. Vi è per altro una importante categoria di congruenze, in cui questa circostanza si presenta. Fissiamo intanto sopra di esse la nostra attenzione.

Congruenze normali di raggi. — Se la nostra (n) è normale, sarà (§ 7)

$$\gamma_{nhj} = \gamma_{njh} \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si può allora sostituire $\frac{1}{2}(\gamma_{nhj} + \gamma_{njh})$ a γ_{nhj}, talchè la [26] coincide addirittura colla [24] che definisce le direzioni canoniche. Ne consegue che le *direzioni canoniche si identificano colle focali*, donde da un lato l'interpretazione geometrica delle direzioni canoniche; dall'altro (in base al comportamento rilevato alla fine del precedente §) *la proprietà delle direzioni focali di essere sempre reali*, in generale ben determinate e *mutuamente ortogonali* e tali di più che, nei casi di indeterminazione (in cui ne esistono infinite), se ne possono sempre scegliere (in infiniti modi) $n-1$ mutuamente ortogonali.

Va rilevato che, trattandosi di congruenze normali, esiste (per definizione) una famiglia di superficie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{cost},$$

tagliate ortogonalmente dalle rette della congruenza. Queste costituiscono pertanto le normali comuni a tutte le superficie della famiglia.

Se si fissa una di codeste superficie, e si associano ad ogni suo punto le $n - 1$ direzioni focali, ne risultano complessivamente definite, sopra la superficie, altrettante congruenze di linee mutuamente ortogonali. Tali linee si chiamano *linee di curvatura*, con ovvia generalizzazione delle linee così determinate nel caso delle superficie dello spazio ordinario ($n = 3$). Data infatti una di tali superficie, diciamo σ, le sue normali costituiscono appunto una congruenza normale (in quanto tagliano ortogonalmente la σ e le sue parallele), e la considerazione delle due direzioni focali nei punti di σ dà luogo precisamente alla definizione abituale delle linee di curvatura come quelle linee di σ lungo cui le normali costituiscono una rigata sviluppabile.

Caso generale. — Se la congruenza (n), di cui si tratta, non è normale, le direzioni focali, in un punto generico P di un raggio r, sono, come abbiamo visto, distinte (almeno in generale) dalle canoniche, talchè per avere l'interpretazione di queste, converrebbe approfondire ulteriormente l'analisi del comportamento dei raggi della congruenza infinitamente vicini ad r.

Per $n = 3$ si ha in proposito una teoria classica di KUMMER (1), la quale fornisce una interpretazione molto espressiva per le direzioni canoniche (2), e porta in particolare a riconoscere che le loro bisettrici sono tali anche per le direzioni focali (ogni qualvolta queste sono reali).

Noi lascieremo la questione a questo punto, limitandoci a segnalare al lettore la possibilità di interpretazioni analoghe per $n > 3$.

(1) Cfr. per es. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I (3ª ediz., Bologna: Zanichelli, 1922), Cap. X.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sulle congruenze di curve* in Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. VIII (1° sem. 1899), pp. 239-246.

INDICE

PARTE PRIMA

Teorie introduttive

CAPITOLO I.

Determinanti e matrici funzionali

CAPITOLO II.

Sistemi di equazioni ai differenziali totali

CAPITOLO III.

Equazioni lineari a derivate parziali. Sistemi completi

CAPITOLO IV.

Fondamenti algebrici del calcolo differenziale assoluto

CAPITOLO V.

Introduzione geometrica alla teoria delle forme differenziali quadratiche

PARTE SECONDA

Forma quadratica fondamentale e calcolo differenziale assoluto

CAPITOLO VI

Derivazione covariante. Invarianti e parametri differenziali. Coordinate localmente geodetiche

CAPITOLO VII.

Simboli di Riemann e proprietà concernenti la curvatura

CAPITOLO VIII.

Relazioni fra due metriche diverse riferite agli stessi parametri. Varietà a curvatura costante

CAPITOLO IX.

Forme differenziali quadratiche di classe zero e di classe uno

CAPITOLO X.

La geometria intrinseca come strumento di calcolo

INDICE ALFABETICO

ERRATA-CORRIGE

La nota (²) a pag. 122 va rettificata come segue:

(²) Interessanti conseguenze geometriche, relative specialmente al caso delle superficie rigate, sono state segnalate dal sig. A. Myller in alcune note dei Comptes Rendus. Cfr. T. 174 (1922), pp. 997-998; T. 175 (1922), pp. 939-941; T. 176 (1923), pp. 483-485. Cfr. altresì la recente nota del sig. O. Mayer, *Une interprétation géométrique de la seconde forme quadratique fondamentale d'une surface en relation avec la théorie du parallélisme*, ibidem, T. 178 (1924), pp. 954-956.