BIBLIOTECA DI MATEMATICHE SUPERIORI
DIRETTA DA ROBERTO MARCOLONGO E GAETANO SCORZA

GIULIO VIVANTI
PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

ELEMENTI
DEL
CALCOLO DELLE VARIAZIONI

CASA EDITRICE GIUSEPPE PRINCIPATO — MESSINA
1923

Tipografia Matematica di Palermo — Direttore-Proprietario G. SENATORE

Piazza Regalmici, Vicolo Guccia, 15. — PALERMO

INTRODUZIONE [1].

Uno dei capitoli più interessanti del Calcolo differenziale è la teoria dei massimi e minimi. Essa ha per iscopo la determinazione dei valori della variabile x pei quali una funzione $f(x)$ è massima o minima, cioè è maggiore o minore che per tutti i valori abbastanza vicini della variabile stessa; e tratta pure l'analogo problema per le funzioni di più variabili. La risoluzione consta di due parti: anzitutto si stabilisce che i soli valori di x in cui può cadere un massimo od un minimo sono le radici dell'equazione $f'(x)=0$; in secondo luogo, si cerca quali ulteriori condizioni debbano essere soddisfatte per una di tali radici perchè ad essa corrisponda effettivamente un massimo od un minimo, e come si distinguano i due casi.

Ma possono presentarsi questioni di massimo o di minimo di carattere alquanto diverso.

Proponiamoci ad esempio il seguente problema: Dato in un piano α due punti P_0, P_1 ed una retta r, determinare tra le curve che giacciono nel piano α e congiungono P_0 e P_1 quella o quelle che, ruotando intorno alla retta r, generano la superficie di minima area.

Presa la retta come asse x, e denotando con x_0, y_0, x_1, y_1 le coordinate ortogonali di P_0, P_1, con $y=f(x)$ l'equazione della curva

[1]) Per la letteratura del Calcolo delle variazioni dal 1850 al 1913 vedi: LECAT, *Bibliographie du Calcul des variations*, Gand, Hoste, 1913.

cercata, l'area da rendersi minima è:

$$I = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx,$$

e il nostro problema consiste nel cercare la funzione o le funzioni $f(x)$ che rendono minimo l'integrale definito I e soddisfanno alle condizioni:

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1).$$

Qui le incognite non sono più come prima uno o più *valori* di una variabile, ma una o più *funzioni;* e il problema è pertanto di natura assai più elevata.

Generalizzando, possiamo proporci la questione seguente:

Dato un integrale definito:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx,$$

dove $F(x, y, z)$ è una funzione nota dei suoi 3 argomenti, e x_0, x_1 sono due costanti note, determinare la funzione o le funzioni $f(x)$ che rendono l'integrale I massimo o minimo e per i valori x_0, x_1 di x prendono valori dati y_0, y_1.

Questo problema, ed altri che se ne deducono con varie modificazioni o generalizzazioni, costituiscono l'oggetto del *Calcolo delle variazioni,* così denominato per un motivo che apparirà tra poco.

Anche qui, come nella ricerca degli ordinari massimi e minimi, la risoluzione si compie in due stadi. Anzitutto si paragona il valore che prende I per una funzione $f(x)$ con quello che esso prenderebbe se ad $f(x)$ si sostituisse una funzione che nell'intervallo considerato ne differisse per meno di una quantità assegnata ad arbitrio; affinchè $f(x)$ corrisponda ad un massimo o ad un minimo, sarà necessario che la differenza dei due valori dell'integrale, o *variazione* dell'integrale, abbia sempre lo stesso segno qualunque sia il modo in cui si è variata la funzione $f(x)$. Le funzioni che soddisfanno a questa condizione sono quelle che rendono nulla la *variazione prima* di I, cioè la parte infinitesima del 1° ordine della sua variazione, e la ricerca di tali funzioni esige l'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine. Rimane poi da vedere quali ulteriori condizioni debbano essere soddisfatte per un integrale di tale equazione, affinchè ad esso corrisponda effettivamente un massimo od un minimo; questa parte, che presenta difficoltà teoriche molto maggiori della precedente, ha minor interesse di essa dal punto di vista delle applicazioni, giacchè bene spesso dalla natura stessa del problema trattato risulta se le soluzioni ottenute corrispondano veramente ad un massimo o ad un minimo, e quale dei due casi abbia luogo.

L'accennata divisione della risoluzione del problema in due stadi distinti ci servirà di guida per tracciare le linee fondamentali del piano del nostro studio. Tratteremo cioè in una *Prima Parte* delle condizioni di massimo e di minimo dipendenti dalle variazioni prime, anzitutto per il problema più semplice sopra enunciato, poi per altri via via più generali, riservando ad una *Seconda Parte* la discussione delle ulteriori condizioni.

Però gli estremi sin qui considerati sono soltanto *relativi*, cioè tali rispetto alle funzioni abbastanza poco differenti da quelle corrispondenti agli estremi stessi. Ora, come nel caso degli estremi ordinari esistono funzioni (discontinue) aventi uno, più od anche infiniti estremi relativi e nessun estremo assoluto [1]), lo stesso può avvenire

---

[1]) La funzione definita come segue nell'intervallo 0 1:

$$f(x) = x \qquad \text{per} \qquad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{4},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \qquad \text{per} \qquad \frac{1}{4} \leqq x \leqq \frac{1}{2},$$

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \qquad \text{per} \qquad \frac{1}{2} \leqq x < 1,$$

$$f(1) = 0$$

ha un massimo relativo per $x = \frac{1}{4}$, e non ha massimo assoluto.

La funzione definita come segue nell'intervallo 0 1:

$$f(x) = \begin{cases} x \\ 0 \end{cases} \qquad \text{per} \qquad x = \frac{n-1}{n},$$

nel nostro caso per certi integrali. Importerebbe pertanto esaminare quali condizioni assicurino per un dato integrale l'esistenza d'un estremo assoluto. Ma una tale ricerca si connette con considerazioni delicate d'Analisi, che esigerebbero lunghe premesse, e che hanno carattere molto diverso da quanto precede. Noi quindi dedicheremo a questo argomento soltanto una brevissima *Appendice,* nella quale faremo anche un cenno del *Calcolo funzionale,* di cui il Calcolo delle variazioni può considerarsi come un capitolo particolare [1]).

---

secondochè n è pari o dispari, ed è lineare tra due di tali punti successivi,

$$f(1) = 0,$$

ha infiniti massimi relativi nei punti $x = \frac{2n-1}{2n}$, e non ha massimo assoluto.

[1]) Possono consultarsi a tale riguardo le seguenti opere:

HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1910.

VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913.

LEVI E. E., *Elementi della teoria delle funzioni e Calcolo delle variazioni,* Genova, Castello, 1915 (litogr.).

TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni,* t. I, Bologna, Zanichelli, 1921.

PARTE PRIMA

CONDIZIONI DIPENDENTI DALLE VARIAZIONI PRIME.

CAPITOLO I.

IL PROBLEMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI NEL CASO PIÙ SEMPLICE.

---

1. Richiamiamo l'enunciato del problema.

Dato un integrale definito:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx,$$

dove $F(x, y, z)$ *è una funzione nota dei suoi tre argomenti, e* x_0, x_1 *sono due costanti note, determinare la funzione o le funzioni che rendono l'integrale* I *massimo o minimo e per i valori* x_0, x_1 *di* x *prendono valori dati* y_0, y_1.

In forma geometrica:

Dati nel piano due punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), *determinare la curva o le curve piane* $y = f(x)$ *che congiungono questi due punti e per le quali l'integrale* I *è massimo o minimo.*

È necessario anzitutto porre alcune restrizioni riguardo alla natura della funzione data F e delle funzioni cercate f.

Tra gli archi di curva congiungenti i due punti dati, noi considereremo solo quelli giacenti in un campo finito C e aventi la tangente e il raggio di curvatura determinati in ogni punto e varianti con continuità, tali cioè che le funzioni $f(x)$ di cui sono l'imagine ammettano almeno la prima e la seconda derivata, e quest'ultima sia continua. Supporremo poi che la funzione $F(x, y, z)$ sia continua per qualunque sistema di valori x, y corrispondenti a punti del campo C

e per qualunque valore finito di z, e ammetta le derivate parziali prime e seconde continue per gli stessi valori degli argomenti.

2. Invece della funzione $f(x)$ introduciamo nell'integrale un'altra funzione $f_\varepsilon(x)$ dipendente da un parametro ε, e tale che, preso un numero positivo arbitrario σ, si possa trovare un numero corrispondente τ per il quale sia soddisfatta la condizione:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \sigma \qquad \text{per} \qquad |\varepsilon| < \tau \qquad \text{e per} \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1;$$

supponiamo che sia inoltre:

$$f_\varepsilon(x_0) = f(x_0) = y_0, \qquad f_\varepsilon(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

Si suole scrivere:

$$f_\varepsilon(x) - f(x) = \delta f(x),$$

e $\delta f(x)$ si dice la *variazione* della funzione $f(x)$; la differenza corrispondente, o *variazione*, di I:

$$\int_{x_0}^{x_1} F[x, f_\varepsilon(x), f'_\varepsilon(x)]\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\,dx$$

si denota con ΔI. Comprenderemo più innanzi la ragione di questa apparente dissimmetria.

È chiaro che in generale non si può prendere τ in modo che, insieme alla relazione:

$$|\delta f(x)| < \sigma,$$

sussista anche l'altra:

$$|\delta f'(x)| < \sigma$$

per $|\varepsilon| < \tau$ e per $x_0 \leqq x \leqq x_1$ [1]). Se ciò è possibile per qualunque

---

[1]) Sia per es.:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = 1, \qquad y_0 = y_1 = 0,$$

$$f(x) = 0, \qquad \delta f(x) = f_\varepsilon(x) = \varepsilon \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\varepsilon},$$

σ, la variazione si dice *debole*, nel caso contrario essa si dice *forte*. Geometricamente può dirsi che, nel caso di una variazione debole, non solo le ordinate della curva primitiva e della curva variata, ma anche le inclinazioni delle loro tangenti, differiscono infinitamente poco nei punti aventi una stessa ascissa.

3. Un tipo molto particolare di variazioni deboli è il seguente:

$$\delta f(x) = \varepsilon \eta(x),$$

dove $\eta(x)$ è una funzione che si annulla in x_0 ed in x_1, e che nell'intervallo $x_0 x_1$ soddisfa alle stesse condizioni di continuità e di derivabilità a cui è soggetta $f(x)$. Noi adotteremo per ora questa forma di variazione, *il che è lecito almeno finchè si ricercano soltanto condizioni necessarie.*

Considerando I come funzione di ε, può scriversi:

$$I(0) = I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x), f'(x)]\, dx,$$

$$I(\varepsilon) = I + \Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F[x, f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x)]\, dx,$$

quindi, essendo soddisfatte le condizioni che rendono lecita la derivazione sotto il segno [1]):

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta')}{\partial(f+\varepsilon\eta)}\eta + \frac{\partial F(x, f+\varepsilon\eta, f'+\varepsilon\eta')}{\partial(f'+\varepsilon\eta')}\eta' \right\} dx,$$

e in particolare:

$$\left[\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F(x, f, f')}{\partial f}\eta + \frac{\partial F(x, f, f')}{\partial f'}\eta' \right\} dx.$$

---

dove ε prende tutti i valori inversi dei numeri interi positivi. Preso $\varepsilon < \sigma$, si ha:

$$|\delta f(x)| < \sigma,$$

mentre $\delta f'(x)$ oscilla fra -2π e $+2\pi$.

[1]) V. per es.: VIVANTI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Torino, Lattes, 1920, § 249.

Coll'integrazione per parti, ricordando che $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, si ha:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial f'} \eta' \, dx = \left[\frac{\partial F}{\partial f'} \eta\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} \eta \, dx = - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} \eta \, dx,$$

e quindi:

$$\left[\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right] \eta \, dx = \int_{x_0}^{x_1} Q \eta \, dx,$$

posto per brevità:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = Q.$$

Affinchè l'integrale I sia massimo o minimo per la funzione $f(x)$, ossia per $\varepsilon = 0$, dev'essere, come è noto:

$$\left[\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0,$$

e quindi, qualunque sia la funzione $\eta(x)$:

$$\int_{x_0}^{x_1} Q \eta \, dx = 0. \tag{1}$$

4. La condizione trovata è soddisfatta evidentemente per qualunque funzione $\eta(x)$, se la funzione $f(x)$ è tale che sia $Q = 0$. Ma può anche dimostrarsi che questa condizione è necessaria, che, cioè, se non è $Q = 0$, è possibile scegliere η in modo che l'integrale non si annulli. Sviluppando l'espressione di Q:

$$Q = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'',$$

dove abbiamo scritto y in luogo di f per seguire l'uso comune, si vede, per le condizioni poste in principio, che Q è funzione continua di x nell'intervallo $x_0 x_1$. Quindi, se essa in un punto è diversa da zero, per es. positiva, esisterà un intorno pq di questo punto in cui essa è costantemente positiva. Si scelga ora la funzione $\eta(x)$ come segue:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \\ (q-x)^3(x-p)^3 & \text{per} \\ 0 & \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 \leqq x \leqq p \\ p \leqq x \leqq q\,; \\ q \leqq x \leqq x_1 \end{cases}$$

è facile verificare che essa possiede tutte le proprietà prescritte, e d'altra parte è nulla negli intervalli $x_0 p$, $q x_1$, e positiva nell'intervallo pq. Ne segue che l'integrale (1) del § prec. risulta positivo.

Concludendo, l'annullarsi di Q è condizione *necessaria* e *sufficiente* perchè sussista l'equazione (1) del § prec., e quindi è condizione *necessaria* [1]) perchè la funzione $f(x)$ renda massimo o minimo l'integrale I. In altre parole, le sole funzioni $y = f(x)$ che *possono* rendere massimo o minimo l'integrale:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$$

sono quelle che soddisfanno all'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine **(equazione d'Eulero)**:

$$(2) \qquad F_y - F'_{y'} = F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \quad {}^{2}),$$

ed inoltre alle condizioni iniziali:

$$(3) \qquad y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

---

[1]) Necessaria, ma non sufficiente, per due motivi: anzitutto, perchè tale è la condizione dell'annullarsi di $\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ per $\varepsilon = 0$; in secondo luogo, perchè le variazioni da noi considerate e introdotte nei nostri calcoli sono di forma particolare.

[2]) Se t, u sono due argomenti, diversi o no, di F, scriviamo F_t, F_{tu} per $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial u}$, e F'_t per $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial t}$.

L'integrale generale dell'equazione (2) contiene due costanti arbitrarie, che si determinano mediante le condizioni (3).

Le curve rappresentanti le funzioni che soddisfanno all'equazione d'EULERO si dicono *estremali*.

5. L'integrazione dell'equazione d'EULERO si semplifica in alcuni casi speciali.

a) La F non contiene x. — L'equazione diviene allora:

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

e moltiplicando per y':

$$F_y y' - F_{yy'}y'^2 - F_{y'y'}y'y'' = \frac{d}{dx}[F - F_{y'}y'] = 0,$$

donde integrando e denotando con a una costante arbitraria:

$$F - F_{y'}y' = a,$$

equazione del 1° ordine non contenente x, e che quindi si integra con una quadratura.

b) La F non contiene y. — L'equazione diviene:

$$F'_{y'} = 0,$$ pr $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}$

donde:

$$F_{y'} = a,$$

equazione del 1° ordine non contenente y, e che quindi si integra con una quadratura.

c) La F non contiene nè x nè y. — L'equazione diviene:

$$F_{y'y'}y'' = 0,$$

ossia $y'' = 0$, da cui, essendo a e b due costanti arbitrarie:

$$y = ax + b.$$

Le estremali sono rette.

d) La F non contiene y'. — L'equazione si riduce ad una relazione finita tra x ed y, che in generale non sarà soddisfatta per $x = x_0$, $y = y_0$ nè per $x = x_1$, $y = y_1$. Quindi in generale il problema è insolubile.

*e) L'equazione d'*EULERO *è soddisfatta identicamente,* cioè per qualunque funzione y. — Allora, poichè y'' figura soltanto nell'ultimo termine, dovrà essere anzitutto:

$$F_{y'y'} = 0,$$

donde segue che F è una funzione lineare intera di y':

$$F = \varphi(x, y) + \psi(x, y)y'.$$

Sostituendo nell'equazione, essa diviene:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}y'\right] - \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}y' = 0,$$

ossia:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Da questa identità risulta, tenendo presenti le condizioni di continuità stabilite, che φ e ψ devono essere le derivate parziali d'una stessa funzione $w(x, y)$:

$$\varphi(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \qquad \psi(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y},$$

donde segue:

$$F(x, y, y') = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}y' = \frac{d w(x, y)}{d x},$$

e:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx = w(x_1, y_1) - w(x_0, y_0).$$

Il valore dell'integrale è dunque indipendente dalla scelta della funzione y, e quindi non esiste nè massimo nè minimo.

*f) Nell'equazione d'*EULERO *non figura* y''. — È un caso apparentemente più generale del precedente. Dovendo essere ancora $F_{y'y'} = 0$, segue come prima:

$$F = \varphi(x, y) + \psi(x, y)y',$$

e, sostituendo nell'equazione:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Se questa è un'identità, ritorniamo al caso precedente; se non lo è, definisce y come funzione di x, ma allora le condizioni $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ non saranno in generale soddisfatte, e il problema sarà insolubile.

Possiamo osservare che, se l'equazione di EULERO non è di 2° ordine, essa non è neppure di 1° ordine, ma si riduce ad una identità o ad una equazione finita.

6. Un'osservazione affatto ovvia è la seguente.

Se una curva rende minimo un dato integrale, qualunque sua parte ha la stessa proprietà. Infatti, se la curva $ABCDE$ rendesse minimo un certo integrale, e lo stesso non avesse luogo per la parte BCD di essa, si potrebbe far passare per B e D una curva BGD tale che l'integrale esteso ad essa fosse minore dell'integrale esteso a BCD; ma allora l'integrale esteso alla curva $ABGDE$ sarebbe minore dell'integrale esteso alla curva $ABCDE$, contro l'ipotesi.

7. Sia:

$$y' = p(x, y) \tag{4}$$

un integrale primo dell'equazione d'EULERO; ciò vuol dire che l'equazione:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial p} p - \frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} p\right) = 0, \tag{5}$$

dove per F s'intende $F(x, y, p)$, è soddisfatta identicamente. Ora la (5) è, come si verifica senza difficoltà, la condizione necessaria e sufficiente perchè:

$$\left(F - \frac{\partial F}{\partial p} p\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy$$

sia un differenziale esatto $d\Omega(x, y)$. Ne segue, che l'integrale:

$$\int \left[\left(F - \frac{\partial F}{\partial p} p\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy\right],$$

esteso ad una curva che congiunga due punti fissi (x_0, y_0), (x_1, y_1) [1]), ha sempre lo stesso valore $\Omega(x_1, y_1) - \Omega(x_0, y_0)$, qualunque sia la curva d'integrazione.

L'integrale generale:

$$y = \theta(x, a)$$

della (4) rappresenta una famiglia semplicemente infinita di estremali. Se le curve della famiglia corrispondenti ai valori del parametro compresi fra due certi limiti a_0, a_1 hanno la proprietà, che per ciascun punto della striscia contenuta fra le due rette $x = x_0$, $x = x_1$, o di una parte abbastanza piccola C di essa, ne passa tutt'al più una sola, si dice che quelle curve costituiscono un *campo di estremali*; dato un punto (x, y) del campo C, la (4) determina il coefficiente angolare dell'estremale del campo passante per quel punto.

Sia l un'estremale del campo congiungente i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), l_1 un'altra linea qualunque avente gli stessi estremi; sarà:

$$(6) \quad \int_{(l)} \left[\left(F - \frac{\partial F}{\partial p} p\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy\right] = \int_{(l_1)} \left[\left(F - \frac{\partial F}{\partial p} p\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p} dy\right].$$

---

[1]) Se la linea l, di equazione $y = g(x)$, congiunge i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), e se $\varphi(x, y)$ è una funzione qualunque, diconsi *integrali curvilinei* estesi alla linea l gli integrali:

$$\int_{(l)} \varphi(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi[x, g(x)]\, dx, \qquad \int_{(l)} \varphi(x, y)\, dy = \int_{x_0}^{x_1} \varphi[x, g(x)]\, g'(x)\, dx.$$

Se $\varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$ è un differenziale esatto, l'integrale di questa espressione non dipende che dagli estremi della curva d'integrazione.

Ma sulla linea l si ha:

$$\frac{dy}{dx} = p(x, y),$$

quindi l'integrale del primo membro si riduce a:

$$\int_{(l)} F(x, y, p)\,dx,$$

che può anche scriversi:

$$\int_{(l)} F(x, y, y')\,dx.$$

Dalla (6) segue allora immediatamente:

$$\int_{(l_1)} F(x, y, y')\,dx - \int_{(l)} F(x, y\ y')\,dx$$
$$= \int_{(l_1)} \left[F(x, y, y') - F(x, y, p) - \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}(y' - p)\right] dx,$$

o più brevemente:

$$(7) \qquad \int_{(l_1)} F(x, y, y')\,dx - \int_{(l)} F(x, y, y')\,dx = \int_{(l_1)} W(x, y, p, y')\,dx,$$

posto:

$$W(x, y, p, \bar{p}) = F(x, y, \bar{p}) - F(x, y, p) - \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p}(\bar{p} - p).$$

La funzione W, che dicesi *funzione di* WEIERSTRASS, dipende dalle coordinate x, y di un punto, dal coefficiente angolare p della tangente all'estremale del campo passante per esso, e da un quarto argomento $\bar{p}$, che può rappresentare il coefficiente angolare della tangente ad una curva qualunque passante per (x, y).

Se si considera l_1 come una curva variata rispetto all'estremale l, affinchè a quest'ultima corrisponda un minimo per l'integrale fondamentale dovrà il secondo membro della (7) essere $\geqq 0$. E, poichè la stessa condizione deve verificarsi per ogni tratto, per quanto piccolo, della curva (§ 6), dovrà essere in tutti i punti di l_1 e qualunque sia $\bar{p}$:

$$W(x, y, p, \bar{p}) \geqq 0,$$

e sarà sufficiente che sia $W > 0$, denotando (x, y) un punto qualunque del campo abbastanza vicino alla curva considerata l, p il coefficiente angolare della tangente all'estremale del campo passante per esso, $\bar{p}$ un valore finito qualunque.

8. ESEMPI. — 1. *Tra le linee che giacciono in un piano e congiungono due punti dati di esso, trovare quella di lunghezza minima.*

L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Poichè F non contiene nè x nè y, le estremali sono rette (§ 5). Perchè la retta $y = ax + b$ passi pei punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), dev'essere:

$$y_0 = a x_0 + b, \qquad y_1 = a x_1 + b;$$

eliminando a e b, risulta:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2 (cfr. Introd.). — *Tra le linee, che giacciono in un piano e congiungono due punti dati di esso, trovare quella che, ruotando intorno ad una retta data del piano, genera la superficie d'area minima.*

Se la retta data si prende come asse x, l'integrale da rendersi minimo è:

$$I = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

o più semplicemente:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

L'equazione da integrarsi è (§ 5, a):

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{\partial(y\sqrt{1+y'^2})}{\partial y'} y' = a,$$

ossia:

$$y = a\sqrt{1+y'^2}.$$

Questa equazione si integra rapidamente ponendo:

$$y = a \operatorname{ch} t;$$

ne segue, per la relazione precedente:

$$y' = \operatorname{sh} t,$$

mentre d'altra parte:

$$\frac{dy}{dt} = a \operatorname{sh} t,$$

quindi:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a},$$

e:

$$t = \frac{x-b}{a}.$$

L'integrale generale è dunque:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x-b}{a},$$

equazione che rappresenta una catenaria. La superficie di rotazione da essa generata dicesi *catenoide*.

La determinazione di a e b dipende dal sistema di equazioni trascendenti:

$$(8) \qquad y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x_0 - b}{a}, \qquad y_1 = a \operatorname{ch} \frac{x_1 - b}{a}.$$

Tra esse, mediante la formola che dà il coseno iperbolico della differenza di due argomenti, si può eliminare b, ottenendo l'equazione trascendente in a:

$$\operatorname{ch}\frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_0 y_1 - \sqrt{(y_0^2 - a^2)(y_1^2 - a^2)}}{a^2};$$

risolta questa, si ricava b dall'una o dall'altra delle due equazioni (8).

Può dimostrarsi però che il problema non è sempre risolubile. Supponiamo costruita la catenaria, e prendiamo per asse y il suo asse di simmetria; sarà allora $b = 0$, e l'equazione della curva diverrà, scrivendo per semplicità t in luogo di $\frac{x}{a}$:

$$y = a \operatorname{ch} t,$$

donde:

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{ch} t}{t}.$$

Questa espressione, che rappresenta il coefficiente angolare del raggio congiungente l'origine col punto (x, y) della curva, varia con continuità mentre x, e quindi t, percorre l'intervallo $0\ \infty$, prendendo il valore $+\infty$ ai due estremi [1]). Essa avrà pertanto in questo intervallo uno o più minimi, che saranno dati dall'equazione:

$$t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t = 0.$$

Il primo membro di questa equazione varia da -1 a $+\infty$ mentre t percorre l'intervallo $0\ \infty$, ed è sempre crescente, perchè la sua derivata $t \operatorname{ch} t$ è costantemente positiva; quindi l'equazione ha un'unica soluzione, a cui corrisponde necessariamente un minimo per $\frac{y}{x}$. Si trova $t = 1{,}20$ circa, a cui corrisponde:

$$\frac{y}{x} = 1{,}509 = \operatorname{arctg} 56^\circ.28'.$$

---

[1]) Per $t = 0$ la cosa è evidente; per $t = \infty$, applicando la nota regola pel calcolo delle espressioni della forma $\frac{\infty}{\infty}$, si ha:

$$\lim_{t=\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{t} = \lim_{t=\infty} \operatorname{sh} t = \infty.$$

Quindi, se il segmento che unisce i due punti dati è visto da tutti i punti dell'asse x sotto un angolo maggiore di $180° - 2 \times 56°.28'$, il problema è insolubile [1]).

3. *Fra tutte le curve poste in un piano verticale e congiungenti due dati punti di esso, determinare quella che viene percorsa nel più breve tempo da un grave, supposta data la velocità iniziale* (**curva brachistocrona**).

Prendiamo l'asse y verticale rivolto in basso. È noto che, se v_0, y_0 sono la velocità e l'ordinata iniziali di un punto pesante, v, y la sua velocità e la sua ordinata in un istante qualunque, si ha [2]):

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0),$$

da cui:

$$v = \sqrt{2g(y - h)},$$

posto:

$$2gy_0 - v_0^2 = 2gh.$$

Ora il tempo impiegato dal grave a percorrere un arco elementare ds è $\frac{ds}{v}$, quindi il tempo impiegato a percorrere l'intera curva è:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - h)}} dx,$$

---

[1]) Per maggiori particolari su questo punto, vedi: MAC NEISH, *On the determination of a catenary with given directrix and passing through two given points*, Annals of Math., s. II, t. 7 (1905-06), p. 65-71.

[2]) Se R è la resistenza (normale) della curva, le equazioni del moto sono:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = R\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = g - R\frac{dx}{ds},$$

da cui:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = g\frac{dy}{dt},$$

ossia:

$$v\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt},$$

e integrando:

$$v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0).$$

e l'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - h}}\, dx.$$

Siamo ancora nel caso *a*) del § 5, e l'equazione da integrarsi è:

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - h}} - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - h}}\right] y' = a,$$

ossia:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{y - h}} = a,$$

che può anche scriversi, mutando la costante arbitraria:

$$(1 + y'^2)(y - h) = 2a.$$

Per eseguire l'integrazione, poniamo:

$$(9) \qquad y - h = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = a(1 - \cos t),$$

ciò che è lecito, poichè dalla precedente equazione risulta:

$$0 \leqq \frac{y - h}{2a} \leqq 1.$$

Segue allora dall'equazione stessa:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}.$$

D'altra parte:

$$\frac{dy}{dt} = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2},$$

quindi:

$$\frac{dx}{dt} = 2a \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} = a(1 - \cos t),$$

e integrando:

$$(10) \qquad x = a(t - \operatorname{sen} t) + b.$$

Le (9), (10) rappresentano una cicloide.

Supponiamo in particolare che sia $v_0 = 0$. Allora $h = y_0$, e, indicando con t_0, t_1 i valori del parametro t corrispondenti ai due punti estremi, si vede dalla (9) che può prendersi $t_0 = 0$, donde, per la (10), $b = x_0$. Dopo ciò si ha:

$$(11) \quad y_1 - y_0 = a(1 - \cos t_1), \qquad x_1 - x_0 = a(t_1 - \operatorname{sen} t_1),$$

da cui l'equazione trascendente per determinare t_1:

$$\frac{1 - \cos t_1}{t_1 - \operatorname{sen} t_1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Noto t_1, dall'una o dall'altra della (11) si ricava a.

4. Nell'esempio precedente la velocità risultava proporzionale alla radice quadrata dell'altezza (contata da un punto opportunamente scelto). *Supponiamo ora la velocità una funzione qualunque dell'altezza*:

$$v = \varphi(y).$$

L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(y)} dx,$$

e l'equazione da integrarsi è:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}\,\varphi(y)} = a,$$

od anche:

$$\sqrt{1 + y'^2}\,\varphi(y) = a.$$

Ne segue:

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - \varphi^2(y)}}{\varphi(y)},$$

e integrando:

$$x = b + \int \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(y)}}.$$

Sia per es. $\varphi(y) = y$. Allora:

$$x = b + \int \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = b + \sqrt{a^2 - y^2},$$

ossia:

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2.$$

Le estremali sono cerchi col centro sull'asse x, cioè sull'orizzontale corrispondente alla velocità nulla.

CAPITOLO II.

METODO PARAMETRICO.

9. Al principio del nostro studio abbiamo imposto alcune restrizioni alle curve da considerarsi come linee di integrazione. Ma di una di queste non abbiamo fatto cenno esplicito: di quella cioè dovuta al fatto di avere rappresentato analiticamente le curve da studiare sotto la forma $y = f(x)$.

L'uso di questa forma implica che, almeno nell'intervallo $x_0 x_1$, a ciascun valore di x corrisponda un unico valore di y, ossia che tutti i punti dell'arco da considerarsi debbano avere proiezioni diverse sull'asse x. Volendo togliere questa restrizione, converrà rappresentare la curva in forma parametrica:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \tag{1}$$

dove t è un parametro che varia in senso costantemente crescente (oppure decrescente) da un certo valore t_0 corrispondente al punto (x_0, y_0) ad un altro t_1 corrispondente al punto (x_1, y_1):

$$x_0 = x(t_0), \qquad y_0 = y(t_0); \qquad x_1 = x(t_1), \qquad y_1 = y(t_1).$$

Mediante le (1) l'integrale fondamentale diviene:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} F\left[x(t),\ y(t),\ \frac{y'(t)}{x'(t)}\right] x'(t)\, dt.$$

Possiamo scrivere, omettendo anche, per semplicità, l'argomento t:

$$(2) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x', y')dt,$$

dove Φ è una funzione omogenea di 1° grado rispetto ad x' e y'.

Reciprocamente, dato un integrale della forma (2), dove Φ è una funzione qualunque, noi possiamo considerarlo come un integrale esteso ad un arco $t_0 t_1$ di una curva (1), purchè però l'integrale non muti di valore quando si muti la rappresentazione parametrica della curva. Rappresentiamo pertanto la nostra curva con un nuovo parametro u:

$$x = \xi(u), \qquad y = \eta(u), \qquad u_0 \leqq u \leqq u_1,$$

e costruiamo l'integrale della funzione Φ nella nuova rappresentazione:

$$I_1 = \int_{u_0}^{u_1} \Phi[\xi(u), \eta(u), \xi'(u), \eta'(u)]\, du.$$

Il passaggio da uno ad un altro parametro avviene mediante una relazione della forma:

$$t = \theta(u),$$

dove θ è funzione crescente almeno nell'intervallo $u_0 u_1$, e:

$$t_0 = \theta(u_0), \qquad t_1 = \theta(u_1);$$

e dev'essere:

$$(3) \qquad x[\theta(u)] = \xi(u), \qquad y[\theta(u)] = \eta(u),$$

da cui:

$$(4) \qquad x'[\theta(u)]\theta'(u) = \xi'(u), \qquad y'[\theta(u)]\theta'(u) = \eta'(u)$$ [1].

Introduciamo ora la nuova variabile u nell'integrale I; risulta, tenendo conto delle (3), (4):

$$I = \int_{u_0}^{u_1} \Phi\left[\xi(u), \eta(u), \frac{\xi'(u)}{\theta'(u)}, \frac{\eta'(u)}{\theta'(u)}\right]\theta'(u)\, du,$$

---

[1]) Non è forse superfluo avvertire che qui $x'[\theta(u)]$, $y'[\theta(u)]$ denotano $x'(t)$, $y'(t)$ in cui si sia posto $\theta(u)$ in luogo di t.

sicchè l'eguaglianza $I = I_1$ diviene:

$$\int_{u_0}^{u_1} \Phi\left[\xi(u),\ \eta(u),\ \frac{\xi'(u)}{\theta'(u)},\ \frac{\eta'(u)}{\theta'(u)}\right]\theta'(u)\,du$$
$$= \int_{u_0}^{u_1} \Phi[\xi(u),\ \eta(u),\ \xi'(u),\ \eta'(u)]\,du.$$

Poichè questa eguaglianza deve sussistere per qualunque parte dell'arco di curva considerato, possiamo riguardare l'estremo superiore come variabile lungo la curva e scrivere:

$$\int_{u_0}^{u} \Phi\left[\xi(u),\ \eta(u),\ \frac{\xi'(u)}{\theta'(u)},\ \frac{\eta'(u)}{\theta'(u)}\right]\theta'(u)\,du$$
$$= \int_{u_0}^{u} \Phi[\xi(u),\ \eta(u),\ \xi'(u),\ \eta'(u)]\,du,$$

da cui derivando:

$$\Phi\left[\xi(u),\ \eta(u),\ \frac{\xi'(u)}{\theta'(u)},\ \frac{\eta'(u)}{\theta'(u)}\right]\theta'(u) = \Phi[\xi(u),\ \eta(u),\ \xi'(u),\ \eta'(u)].$$

Osservando che la relazione deve valere qualunque sia la nuova rappresentazione parametrica assunta, cioè qualunque sia $\theta'(u)$, *purchè positiva,* vediamo che essa esprime che la funzione $\Phi(x, y, x', y')$ è omogenea di primo grado rispetto agli argomenti x', y' per ogni fattore positivo, o, come si dice più brevemente, è *omogenea-positiva* di primo grado [1]).

---

[1]) Una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si dice omogenea di grado m, se per qualunque k si ha:

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

omogenea-positiva, se questa relazione ha luogo solo per valori positivi di k. Per es. la funzione:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

è omogenea-positiva, ma non omogenea, di 1° grado, giacchè, indicando con h un numero positivo, si ha:

$$+\sqrt{(-hx_1)^2 + (-hx_2)^2 + \ldots + (-hx_n)^2} \neq (-h)(+\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}).$$

Concludendo: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale della forma* (2) *possa considerarsi come esteso ad una determinata curva* — cioè perchè il suo valore sia indipendente dalla rappresentazione parametrica scelta per la curva — *è che la funzione* Φ *sia omogenea-positiva di primo grado rispetto agli argomenti* x', y'.

10. Supporremo pertanto d'ora innanzi che la funzione Φ della (2) sia omogenea-positiva di 1° grado rispetto a x', y', donde segue che Φ_x e Φ_y sono ancora omogenee di 1° grado, $\Phi_{x'}$ e $\Phi_{y'}$ di grado 0, e $\Phi_{x'x'}$, $\Phi_{x'y'}$, $\Phi_{y'y'}$ di grado -1. Supporremo ancora che la Φ e le $x(t)$, $y(t)$ abbiano gli stessi caratteri di continuità e di derivabilità che avevamo ammessi per la F e la $y(x)$, e che in nessun punto degli archi di curve considerati si annullino insieme $x'(t)$ e $y'(t)$.

Per una nota proprietà delle funzioni omogenee sarà:

$$(5)\qquad \begin{cases} \Phi = x'\Phi_{x'} + y'\Phi_{y'}; \\ \Phi_x = x'\Phi_{xx'} + y'\Phi_{xy'}, \qquad \Phi_y = x'\Phi_{yx'} + y'\Phi_{yy'}; \\ 0 = x'\Phi_{x'x'} + y'\Phi_{x'y'}, \qquad 0 = x'\Phi_{y'x'} + y'\Phi_{y'y'}. \end{cases}$$

Da queste ultime relazioni segue:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{\Phi_{x'x'}}{\Phi_{x'y'}} = -\frac{\Phi_{x'y'}}{\Phi_{y'y'}},$$

che può scriversi:

$$\frac{\Phi_{x'x'}}{y'^2} = \frac{\Phi_{x'y'}}{-x'y'} = \frac{\Phi_{y'y'}}{x'^2},$$

e, indicando con $G(x, y, x', y')$ il valor comune di questi tre rapporti:

$$(6)\qquad \Phi_{x'x'} = y'^2 G, \qquad \Phi_{x'y'} = -x'y'G, \qquad \Phi_{y'y'} = x'^2 G.$$

Inoltre, ponendo per brevità:

$$\frac{d\Phi_{x'}}{dt} = \Phi'_{x'}, \qquad \frac{d\Phi_{y'}}{dt} = \Phi'_{y'},$$

risulta:

$$\Phi'_{x'} = x'\Phi_{xx'} + y'\Phi_{yx'} + x''\Phi_{x'x'} + y''\Phi_{y'x'},$$

$$\Phi'_{y'} = x'\Phi_{xy'} + y'\Phi_{yy'} + x''\Phi_{x'y'} + y''\Phi_{y'y'},$$

e quindi, per le (5), (6):

$$
(7) \quad \begin{cases} \Phi_x - \Phi'_{x'} = y'[\Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + (x'y'' - x''y')G], \\ \Phi_y - \Phi'_{y'} = - x'[\Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + (x'y'' - x''y')G]. \end{cases}
$$

11. Per trovare la prima condizione necessaria per un estremo, procediamo in modo analogo a quanto si fece nei §§ 3 e 4. Sostituiamo cioè alle funzioni $x(t)$, $y(t)$ altre due funzioni:

$$
x(t) + \varepsilon\xi(t), \qquad y(t) + \varepsilon\eta(t),
$$

dove ε è una costante arbitrariamente piccola, e $\xi(t)$, $\eta(t)$ sono due funzioni che soddisfanno alle solite condizioni di continuità e derivabilità e si annullano per $t = t_0$ e per $t = t_1$. Potremo scrivere:

$$
I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x + \varepsilon\xi,\ y + \varepsilon\eta,\ x' + \varepsilon\xi',\ y' + \varepsilon\eta')dt,
$$

quindi:

$$
I'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial\Phi(x + \varepsilon\xi,\ y + \varepsilon\eta,\ x' + \varepsilon\xi',\ y' + \varepsilon\eta')}{\partial(x + \varepsilon\xi)}\xi \right.
$$
$$
\left. + \frac{\partial\Phi}{\partial(y + \varepsilon\eta)}\eta + \frac{\partial\Phi}{\partial(x' + \varepsilon\xi')}\xi' + \frac{\partial\Phi}{\partial(y' + \varepsilon\eta')}\eta'\right]dt,
$$

e:

$$
I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_x\xi + \Phi_y\eta + \Phi_{x'}\xi' + \Phi_{y'}\eta']dt,
$$

dove per Φ s'intende $\Phi(x, y, x', y')$. Affinchè l'integrale sia massimo o minimo per le funzioni x, y, è necessario che s'annulli $I'(0)$ qualunque sieno ξ ed η. Coll'integrazione per parti, tenendo conto delle condizioni ai limiti imposte alle ξ, η, si ha di qui:

$$
\int_{t_0}^{t_1} [(\Phi_x - \Phi'_{x'})\xi + (\Phi_y - \Phi'_{y'})\eta]\,dt = 0,
$$

da cui, per l'arbitrarietà delle ξ, η:

$$
\int_{t_0}^{t_1} [\Phi_x - \Phi'_{x'}]\xi\,dt = 0, \qquad \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_y - \Phi'_{y'}]\eta\,dt = 0,
$$

e quindi (§ 4):

(8) $$\Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0.$$

Dalle (7) risulta che queste due equazioni equivalgono all'unica:

(9) $$\Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + (x'y'' - x''y')G = 0,$$

che può dirsi *equazione d'*EULERO, e dove la funzione G è definita da una qualunque delle (6).

La (9) può porsi sotto altra forma. Se R è il raggio di curvatura dell'estremale nel punto di parametro t, si ha:

$$R = \left| \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \right|;$$

in virtù di questa relazione la (9) diviene:

(10) $$\frac{1}{R} = \left| \frac{\Phi_{yx'} - \Phi_{xy'}}{G(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

È ovvio che l'equazione (9) non può bastare da sola a determinare le due funzioni $x(t)$, $y(t)$, pur tenendo conto delle condizioni ai limiti; occorre associare ad essa un'altra relazione fra t e le x, y ed eventualmente le loro derivate, relazione che dipende dalla speciale scelta del parametro. Se per es. si vuole assumere come parametro l'arco, converrà associare alla (9) l'equazione:

$$x'^2 + y'^2 = 1.$$

Ottenuto il sistema integrale:

$$x = x(t, a, b), \qquad y = y(t, a, b),$$

le 4 costanti a, b, t_0, t_1 si determineranno mediante le relazioni:

$$x_0 = x(t_0, a, b), \qquad y_0 = y(t_0, a, b),$$

$$x_1 = x(t_1, a, b), \qquad y_1 = y(t_1, a, b).$$

12. L'integrazione dell'equazione (9) si semplifica in vari casi (cfr. § 5).

a) *La* Φ *non contiene* x. — Allora la prima delle (8) diviene:

$$\Phi'_{x'} = 0,$$

che si integra immediatamente e dà:

$$\Phi_{x'} = a.$$

b) *La* Φ *non contiene* y. — Si ottiene analogamente:

$$\Phi_{y'} = a.$$

c) *La* Φ *non contiene nè* x *nè* y. — Dalla (10) segue $\frac{1}{R} = 0$, sicchè le estremali sono rette.

d) *La* (9) *è soddisfatta identicamente.* — Dev'essere allora $G = 0$, e quindi:

$$\Phi_{x'x'} = \Phi_{x'y'} = \Phi_{y'y'} = 0,$$

sicchè Φ deve avere la forma:

$$\Phi = \mu(x, y)x' + \nu(x, y)y',$$

donde:

$$\Phi_{xy'} = \nu_x, \qquad \Phi_{yx'} = \mu_y.$$

La (9) diviene pertanto:

$$\nu_x - \mu_y = 0, \tag{11}$$

la quale identità mostra che $\Phi\, dt$ è un differenziale esatto.

In questo caso il valore dell'integrale è indipendente dalla curva d'integrazione.

e) *Nella* (9) *mancano* x'' *e* y''. — Dev'essere ancora $G = 0$, donde si giunge alla (11). Se questa è un'identità, siamo nel caso precedente; se non lo è, rappresenta una curva, che in generale non passerà per gli estremi dati.

13. Si è già posto (§ 9):

$$F(x, y, p) = \frac{1}{x'} \Phi(x, y, x', y'),$$

essendo:

$$p = \frac{y'}{x'}.$$

Ne segue, derivando rispetto ad y':

$$\frac{1}{x'} \frac{\partial F}{\partial p} = \frac{1}{x'} \frac{\partial \Phi}{\partial y'},$$

ossia:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial \Phi}{\partial y'}.$$

Se pertanto per simmetria di scrittura si pone:

$$\bar{p} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'},$$

risulta:

$$W\left(x, y, \frac{y'}{x'}, \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'}\right) = \frac{1}{\bar{x}'} \Phi(x, y, \bar{x}', \bar{y}') - \frac{1}{x'} \Phi(x, y, x', y')$$
$$- \frac{\partial \Phi(x, y, x', y')}{\partial y'} \left(\frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} - \frac{y'}{x'}\right).$$

Ora si ha, per l'omogeneità:

$$\Phi(x, y, x', y') = x' \Phi_{x'} + y' \Phi_{y'},$$

quindi:

$$W\left(x, y, \frac{y'}{\bar{x}'}, \frac{y'}{\bar{x}'}\right) = \frac{1}{\bar{x}'} \bar{\Phi} -$$
$$- \frac{1}{x'} (x' \Phi_{x'} + y' \Phi_{y'}) - \left(\frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} - \frac{y'}{x'}\right) \Phi_{y'},$$

dove si è posto per semplicità di scrittura:

$$\Phi(x, y, x', y') = \Phi, \qquad \Phi(x, y, \bar{x}', \bar{y}') = \bar{\Phi}.$$

Semplificando:

$$W\left(x, y, \frac{y'}{x'}, \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'}\right) = \frac{1}{\bar{x}'}[\bar{\Phi} - \bar{x}'\Phi_{x'} - \bar{y}'\Phi_{y'}].$$

La funzione $\bar{x}'W$ si suole indicare con E; si scrive cioè:

$$(12)\qquad \begin{cases} E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') = \bar{\Phi} - \bar{x}'\Phi_{x'} - \bar{y}'\Phi_{y'} \\ = \bar{\Phi} - \Phi - (\bar{x}' - x')\Phi_{x'} - (\bar{y}' - y')\Phi_{y'}, \end{cases}$$

od anche:

$$(13)\quad E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') = \bar{x}'(\bar{\Phi}_{\bar{x}'} - \Phi_{x'}) + \bar{y}'(\bar{\Phi}_{\bar{y}'} - \Phi_{y'}).$$

La E è omogenea positiva di grado 0 rispetto a x, y, e di grado 1 rispetto a $\bar{x}'$, $\bar{y}'$; essa si dice, come la W, *funzione di* WEIERSTRASS.

Dalla (13) si vede immediatamente che $E = 0$ se $\bar{x}' = x'$, $\bar{y}' = y'$.

Dalla (12) segue poi:

$$(14)\qquad \frac{\partial E}{\partial \bar{x}'} = \bar{\Phi}_{\bar{x}'} - \Phi_{x'}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \bar{y}'} = \bar{\Phi}_{\bar{y}'} - \Phi_{y'};$$

quindi per $\bar{x}' = x'$, $\bar{y}' = y'$ si ha anche:

$$\frac{\partial E}{\partial \bar{x}'} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \bar{y}'} = 0.$$

Se si pone:

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} = \operatorname{tang}\bar{\varphi},$$

e si scrive per brevità:

$$\operatorname{sen}\varphi = s, \qquad \cos\varphi = c, \qquad \operatorname{sen}\bar{\varphi} = \bar{s}, \qquad \cos\bar{\varphi} = \bar{c},$$

per l'omogeneità della E si ha:

$$\begin{aligned} E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') &= \sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}\,E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) \\ &= \sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2}[\bar{c}(\bar{\Phi}_{\bar{c}} - \Phi_c) + \bar{s}(\bar{\Phi}_{\bar{s}} - \Phi_s)]. \end{aligned}$$

Ora:

$$\Phi_{\bar c} - \Phi_c = \int_\varphi^{\bar\varphi} \frac{d}{du}\frac{\partial \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \cos u}\, du$$

$$= \int_\varphi^{\bar\varphi}\left[-\frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \cos u^2}\operatorname{sen} u \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \cos u\, \partial \operatorname{sen} u}\cos u\right] du,$$

$$\Phi_{\bar s} - \Phi_s = \int_\varphi^{\bar\varphi} \frac{d}{du}\frac{\partial \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \operatorname{sen} u}\, du$$

$$= \int_\varphi^{\bar\varphi}\left[-\frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \operatorname{sen} u\, \partial \cos u}\operatorname{sen} u \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \operatorname{sen} u^2}\cos u\right] du,$$

inoltre (§ 10):

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \cos u^2} = G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\operatorname{sen}^2 u,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \operatorname{sen} u\, \partial \cos u} = -\, G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\operatorname{sen} u \cos u,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)}{\partial \operatorname{sen} u^2} = G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\cos^2 u.$$

Quindi:

$$\Phi_{\bar c} - \Phi_c = -\int_\varphi^{\bar\varphi} G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\operatorname{sen} u\, du,$$

$$\Phi_{\bar s} - \Phi_s = \int_\varphi^{\bar\varphi} G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\cos u\, du,$$

e:

$$E(x,\ y,\ c,\ s,\ \bar c,\ \bar s) = \int_\varphi^{\bar\varphi} G(x,\ y,\ \cos u,\ \operatorname{sen} u)\operatorname{sen}(\bar\varphi - u)\, du.$$

Secondochè $\bar\varphi > \varphi$ o $\bar\varphi < \varphi$, si ha:

$$0 \leqq \bar\varphi - u \leqq \bar\varphi - \varphi \qquad \text{o} \qquad 0 \geqq \bar\varphi - u \geqq \bar\varphi - \varphi;$$

scelti quindi φ e $\bar{\varphi}$ (che sono determinati a meno di multipli di 2π) in modo che sia $|\bar{\varphi} - \varphi| \leqq \pi$, sen $(\bar{\varphi} - u)$ avrà segno costante in tutto l'intervallo d'integrazione, e per il primo teorema della media si avrà:

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = [1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)]\, G(x, y, \cos u, \operatorname{sen} u),$$

dove u è un certo valore intermedio tra φ e $\bar{\varphi}$.

Di qui segue che, se $E = 0$ essendo $\bar{\varphi} \neq \varphi$, vi è almeno un angolo u intermedio tra φ e $\bar{\varphi}$ per cui:

$$G(x, y, \cos u, \operatorname{sen} u) = 0.$$

14. Un'elegante rappresentazione geometrica permette di rendere intuitive le relazioni che passano tra le funzioni Φ, E e G.

Dicesi *indicatrice* del punto $P(x, y)$ $\left(\text{rispetto ad un determinato integrale } \int \Phi\, dt\right)$ la curva di cui l'equazione polare col polo in P e coll'asse polare parallelo all'asse x è:

$$\rho = \frac{1}{\Phi(x, y, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi)},$$

o, ciò che è lo stesso, le cui equazioni parametriche sono:

$$(15)\qquad \xi = \frac{\cos\varphi}{\Phi}, \qquad \eta = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\Phi},$$

dove φ è il parametro, e ξ, η sono le coordinate ortogonali.

Indicando con apici le derivazioni rispetto a φ, si ha:

$$(16)\quad \begin{cases} \xi' = \dfrac{-s\Phi - c(-s\Phi_c + c\Phi_s)}{\Phi^2} \\ \qquad = \dfrac{-s(c\Phi_c + s\Phi_s) - c(-s\Phi_c + c\Phi_s)}{\Phi^2} = -\dfrac{\Phi_s}{\Phi^2}, \\ \eta' = \dfrac{c\Phi - s(-s\Phi_c + c\Phi_s)}{\Phi^2} \\ \qquad = \dfrac{c(c\Phi_c + s\Phi_s) - s(-s\Phi_c + c\Phi_s)}{\Phi^2} = \dfrac{\Phi_c}{\Phi^2}, \\ \rho' = \dfrac{s\Phi_c - c\Phi_s}{\Phi^2}, \end{cases}$$

quindi:

$$\frac{\rho'}{\rho^2} = s\,\Phi_c - c\,\Phi_s,$$

e derivando di nuovo:

$$\frac{\rho\rho'' - 2\rho'^2}{\rho^3} = c\Phi_c + s\Phi_s + s(-s\Phi_{cc} + c\Phi_{sc}) - c(-s\Phi_{sc} + c\Phi_{ss}) = \Phi - G.$$

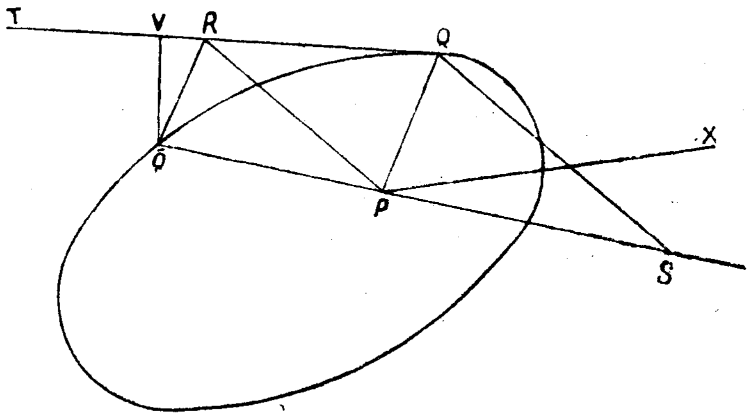
Ne segue:

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{G}{\Phi\rho^3},$$

sicchè l'indicatrice è convessa o concava rispetto a P nel punto di argomento φ, secondochè $\frac{G}{\Phi} \gtrless 0$, e nei suoi punti di flesso dev'essere $G = 0$.

Sieno $Q(\xi, \eta)$, $\bar{Q}(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ i punti dell'indicatrice di argomenti φ, $\bar{\varphi}$.

L'equazione della tangente QT in Q è (Fig. 1), X, Y essendo



(Fig. 1).

le coordinate correnti:

$$\frac{Y - \eta}{X - \xi} = \frac{\eta'}{\xi'},$$

ossia, per le (15), (16):

$$\Phi_c X + \Phi_s Y = 1.$$

L'equazione della retta $\bar{Q}R$ condotta da $\bar{Q}$ parallelamente a PQ è:

$$\frac{Y-\bar{\eta}}{X-\bar{\xi}}=\frac{\eta}{\xi},$$

ossia:

$$-sX+cY=\frac{\operatorname{sen}(\bar{\varphi}-\varphi)}{\bar{\Phi}}.$$

Quindi le coordinate del punto d'incontro R di $\bar{Q}R$ e QT sono:

$$X=\frac{1}{\Phi}\left(c-\frac{\operatorname{sen}(\bar{\varphi}-\varphi)}{\bar{\Phi}}\Phi_s\right)=\frac{\mu}{\Phi},$$

$$Y=\frac{1}{\Phi}\left(s+\frac{\operatorname{sen}(\bar{\varphi}-\varphi)}{\bar{\Phi}}\Phi_c\right)=\frac{\nu}{\Phi},$$

e il coefficiente angolare della retta PR è $\frac{\nu}{\mu}$. La retta QS condotta per Q parallelamente a PR avrà pertanto l'equazione:

$$\frac{Y-\eta}{X-\xi}=\frac{\nu}{\mu},$$

ossia:

$$\nu X-\mu Y=\nu\xi-\mu\eta=\frac{\operatorname{sen}(\bar{\varphi}-\varphi)}{\bar{\Phi}};$$

se S è la sua intersezione colla retta $P\bar{Q}$, e si pone $PS=\lambda$, si otterrà il valore di λ introducendo le coordinate del punto S:

$$X=\pm\lambda\bar{c},\qquad Y=\pm\lambda\bar{s}$$

nell'equazione precedente. Risulta così:

$$PS=\lambda=\pm\frac{\operatorname{sen}(\bar{\varphi}-\varphi)}{\bar{\Phi}(\nu\bar{c}-\mu\bar{s})}=\mp\frac{1}{E},$$

dove deve prendersi il segno superiore o l'inferiore, secondoche $\bar{Q}$ ed S si trovano dalla stessa parte o da parti opposte di P, e dove per E deve intendersi:

$$E(x,\ y,\ c,\ s,\ \bar{c},\ \bar{s}).$$

Se $\bar{Q}$ e P sono dalla stessa parte della tangente in Q, ossia se questa non incontra il segmento $\bar{Q}P$, i segmenti paralleli $\bar{Q}R$, QP hanno senso opposto, e $\bar{Q}RQP$ è un trapezio non incrociato; quindi la parallela per Q alla diagonale RP incontra il prolungamento del lato $\bar{Q}P$ oltre P. Cioè $\bar{Q}$ ed S stanno da parti opposte di P. Il contrario accade se $\bar{Q}$ e P sono da parti opposte della tangente in Q. Può dunque concludersi che E è positiva o negativa secondochè $\bar{Q}$ e P si trovano dalla stessa parte o da parti opposte della tangente in Q.

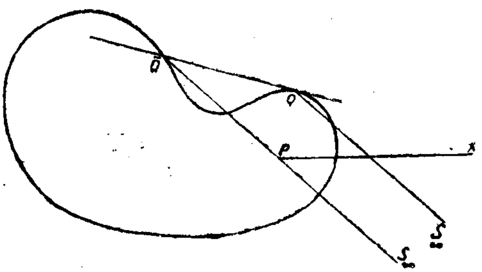
Affinchè sia $E > 0$ per un punto (x, y) di un'estremale e per qualunque valore di $\bar{\varphi}$, l'indicatrice relativa a quel punto deve trovarsi tutta da una stessa parte della tangente ad essa nel punto corrispondente all'argomento $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{y'}{x'}$.

Se da $\bar{Q}$ si conduce la perpendicolare $\bar{Q}V$ alla tangente QT in Q, si ha:

$$\bar{Q}V = \pm \frac{\bar{c}\,\Phi_c + \bar{s}\,\Phi_s - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}\sqrt{\Phi_c^2 + \Phi_s^2}} = \mp \frac{E}{\bar{\Phi}\sqrt{\Phi_c^2 + \Phi_s^2}},$$

dove si deve prendere il segno superiore o l'inferiore, secondochè P e $\bar{Q}$ stanno da parti opposte o dalla stessa parte della tangente.

Se per $\bar{Q}$ si prende un punto d'incontro della tangente in Q colla curva (Fig. 2), R coincide con $\bar{Q}$, e il punto S va all'infinito,



(Fig. 2).

sicchè $E = 0$. Cioè: Se φ è l'argomento d'un punto qualunque dell'indicatrice, $\bar{\varphi}$ quello di uno dei punti d'intersezione della tangente in quel punto colla curva, la funzione $E(x, y, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, \cos\bar{\varphi}, \operatorname{sen}\bar{\varphi})$ è nulla.

Merita speciale considerazione il caso c) del § 12, in cui Φ non contiene nè x nè y. In questo caso l'indicatrice è la stessa per tutti i punti.

15. ESEMPI. — 1 [1]). *Linea più breve tra due punti di un piano.* L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Siamo nel caso c) del § 12, e le estremali sono rette. L'indicatrice per qualunque punto è un cerchio di raggio 1 col centro nel punto considerato. Si ha poi:

$$\Phi(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \Phi_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \Phi_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

quindi:

$$\Phi(x, y, c, s) = 1, \qquad \Phi_c = c, \qquad \Phi_s = s,$$

e:

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = 1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi),$$

che è sempre positiva per $\bar{\varphi} \neq \varphi$.

Risulta pure:

$$\Phi_{x'x'} = \frac{y'^2}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \Phi_{x'y'} = -\frac{x'y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\Phi_{y'y'} = \frac{x'^2}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi:

$$G(x, y, x', y') = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

---

[1]) Per comodità dello studioso assegniamo a ciascun esempio un numero d'ordine fisso.

e:

$$G(x, y, c, s) = 1.$$

2. *Linea che genera la superficie di rivoluzione d'area minima.* L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Esso appartiene al tipo *a*) del § 12, e la equazione da integrarsi è quindi:

$$\Phi_{x'} = \frac{y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a.$$

Prendendo come parametro l'arco, si ha:

$$x'^2 + y'^2 = 1,$$

quindi l'equazione può scriversi:

$$y \sqrt{1 - y'^2} = a,$$

od anche:

$$\frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = ds,$$

da cui integrando:

$$\sqrt{y^2 - a^2} = s,$$

e risolvendo:

$$y = \sqrt{a^2 + s^2}.$$

Si ha poi:

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = \frac{a\, ds}{\sqrt{a^2 + s^2}},$$

quindi:

$$x - b = a \lg \frac{\sqrt{a^2 + s^2} + s}{a} = a \lg \frac{y + \sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

da cui:

$$-(x - b) = a \lg \frac{\sqrt{a^2 + s^2} - s}{a} = a \lg \frac{y - \sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

Di qui segue infine:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x-b}{a}.$$

Si trova poi:

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = y[1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)],$$

che è sempre positiva.

3. *Brachistocrona per un punto pesante.*

L'integrale da rendersi minimo è, scegliendo opportunamente l'asse x:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{y}}\, dt,$$

e l'equazione di integrarsi è:

$$\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a.$$

Prendendo come parametro l'arco e mutando la costante arbitraria, questa equazione può scriversi:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2a}}\, ds.$$

Ne segue:

$$dy = \sqrt{\frac{2a - y}{2a}}\, ds,$$

ossia:

$$\sqrt{\frac{2a}{2a - y}}\, dy = ds;$$

integrando, e prendendo per origine degli archi il punto di ordinata nulla, risulta:

$$-2\sqrt{2a(2a - y)} = s - 4a,$$

e sviluppando:

$$y = \frac{16a^2 - (s - 4a)^2}{8a} = \frac{s(8a - s)}{8a}.$$

Si ha poi:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2a}}\, ds = \frac{\sqrt{16a^2 - (s - 4a)^2}}{4a}\, ds,$$

donde [1]):

$$x - b = \frac{1}{8a}\left[(s - 4a)\sqrt{s(8a - s)} + 16a^2\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{s - 4a}{4a} + \frac{\pi}{2}\right)\right],$$

dove b è il valore di x corrispondente ad $s = 0$.

Per mettere in luce la natura della curva trovata, poniamo:

$$s = 8a \operatorname{sen}^2 u;$$

ne segue:

$$s - 4a = -4a\cos 2u, \qquad 8a - s = 8a\cos^2 u,$$

$$\operatorname{arc\,sen}\frac{s - 4a}{4a} = \operatorname{arc\,sen}(-\cos 2u) = 2u - \frac{\pi}{2},$$

quindi:

$$x - b = a(4u - \operatorname{sen} 4u), \qquad y = 8a\operatorname{sen}^2 u\cos^2 u = a(1 - \cos 4u),$$

donde si vede che la curva è una cicloide.

Risulta inoltre:

$$E = \frac{1}{\sqrt{y}}[1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)] > 0.$$

OSSERVAZIONE. — Gli esempi 2 e 3 appartengono ad un tipo di problemi, di cui dovremo occuparci più innanzi, nei quali Φ ha la

---

[1]) $\int \sqrt{c^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{c^2 - x^2} + c^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{c}\right].$

forma:

$$\Phi = \mu(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Per tutti questi problemi si ha:

$$G(x, y, c, s) = \mu(x, y),$$

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = \mu(x, y)[1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)];$$

l'indicatrice è un cerchio di raggio $\frac{1}{\mu(x, y)}$, fatta eccezione pei punti della linea $\mu(x, y) = 0$, per i quali l'indicatrice non esiste.

5. *Un corpo rotondo si muova in un fluido resistente con velocità costante nella direzione del proprio asse. Supposta la resistenza normale alla superficie e proporzionale al quadrato della componente normale della velocità, determinare la forma del meridiano per cui la resistenza totale è minima* **(problema di Newton).**

Sia ds un elemento d'arco di meridiano; esso ruotando genera una zona di area $2\pi y\, ds$, supposto che l'asse x coincida coll'asse del solido. La componente normale della velocità costante v in un punto della zona è $v\frac{dy}{ds}$, quindi la resistenza totale che subisce un elemento $y\, d\varphi\, ds$ della zona è, a meno d'un fattore di proporzionalità, $y\, d\varphi\, ds\, v^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$. Scomposta questa resistenza, che si esercita normalmente alla superficie, in una componente normale all'asse ed in una parallela ad esso, le componenti normali all'asse delle resistenze che agiscono su tutta la zona si elidono reciprocamente, mentre le componenti parallele all'asse si sommano, e la loro somma è:

$$\sum y\, d\varphi\, ds\, v^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\frac{dy}{ds},$$

o in forma di integrale:

$$2\pi v^2\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds.$$

Omettendo il fattore costante, ed introducendo un parametro qualunque t, l'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{y\, y'^3}{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

dove t_0 e t_1 corrispondono agli estremi del meridiano supposti dati. L'equazione da integrarsi è (§ 12 a):

$$\frac{y\, x'\, y'^3}{(x'^2 + y'^2)^2} = a.$$

Prendiamo come parametro il rapporto $\frac{x'}{y'}$:

$$\frac{x'}{y'} = t; \tag{17}$$

risulta allora dalla precedente:

$$y = \frac{a(t^2 + 1)^2}{t} = a\left(t^3 + 2t + \frac{1}{t}\right), \tag{18}$$

e derivando:

$$y' = a\left(3t^2 + 2 - \frac{1}{t^2}\right) = a\frac{(3t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t^2},$$

quindi:

$$x' = a\left(3t^3 + 2t - \frac{1}{t}\right) = a\frac{(3t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t},$$

e:

$$x - b = a\left(\frac{3}{4}t^4 + t^2 - \lg t\right). \tag{19}$$

Dalla (18) si vede che, per avere la parte del meridiano posta al disopra dell'asse x, basta considerare valori positivi di t.

Le (18), (19) sono le equazioni parametriche del meridiano.

Dalla (17) segue:

$$x'' = t y'' + y',$$

quindi:

$$x' y'' - x'' y' = - y'^2;$$

d'altra parte:

$$x'^2 + y'^2 = (t^2 + 1) y'^2,$$

quindi:

$$R = \left|\frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}\right| = \left|(t^2+1)^{\frac{3}{2}} y'\right| = \left|a\frac{(3t^2-1)(t^2+1)^{\frac{5}{2}}}{t^2}\right|.$$

Il raggio di curvatura diviene infinito per $t = 0$ e per $t = \infty$, ma per questi valori del parametro x ed y sono infiniti, sicchè la curva non ha flessi. Si ha invece $R = 0$, cioè una cuspide, per $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a cui corrispondono, supposto per semplicità $b = 0$, le coordinate:

$$x = \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2}\lg 3\right)a, \qquad y = \frac{16}{3\sqrt{3}}a;$$

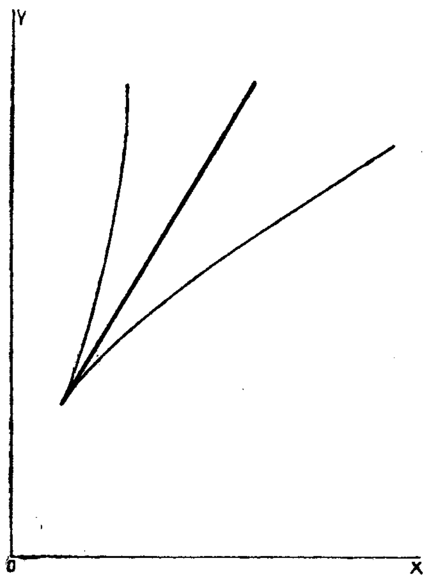
l'inclinazione della tangente cuspidale rispetto all'asse x è $\frac{\pi}{3}$.

È noto che una curva è concava o convessa rispetto all'asse x in un punto (x, y), secondochè in esso:

$$y\frac{x'y'' - x''y'}{x'^3} \lesseqgtr 0;$$

ora nel caso nostro $y > 0$, $x'y'' - x''y' < 0$, quindi si ha concavità o convessità secondochè $x' \gtreqless 0$, cioè secondochè $t \gtreqless \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La forma della curva è data dalla figura qui sotto (Fig. 3). Le



(Fig. 3).

x, y decrescono mentre t varia da 0 a $\frac{1}{\sqrt{3}}$, poi crescono mentre t varia da $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ad ∞.

Naturalmente, affinchè la curva trovata dia la soluzione del problema, è necessario che ambi gli estremi stieno in uno stesso dei due tratti in cui la cuspide divide la curva.

Il problema di NEWTON porge un esempio dell'importanza del metodo parametrico. Quì infatti non sarebbe lecito prendere x come variabile indipendente, giacchè a ciascun valore di x corrispondono due valori di y.

Si trova poi:

$$G = \frac{2 y y'(3 x'^2 - y'^2)}{(x'^2 + y'^2)^3} = \frac{2 t^5}{a^2 (t^2 + 1)^4 (3 t^2 - 1)^2},$$

$$\begin{aligned} E(x, y, s, c, \bar{s}, \bar{c}) &= [\bar{s}^3 + 2 s^3 c \bar{c} - (3 c^2 + s^2) s^2 \bar{s}] y \\ &= [(s^2 + c^2)^2 \bar{s}^3 + 2 s^3 c \bar{c}(\bar{s}^2 + \bar{c}^2) - (3 c^2 + s^2) s^2 \bar{s}(\bar{s}^2 + \bar{c}^2)] y \\ &= (c \bar{s} - s \bar{c})^2 [(c^2 - s^2) \bar{s} + 2 s c \bar{c}] y = y \operatorname{sen}^2(\bar{\varphi} - \varphi) \operatorname{sen}(\bar{\varphi} + 2 \varphi). \end{aligned}$$

L'equazione cartesiana dell'indicatrice è:

$$y \eta^3 - (\xi^2 + \eta^2) = 0,$$

ossia:

$$\xi = \pm \eta \sqrt{y \eta - 1}.$$

La curva, che ha il nome di *duplicatrice cubica* [1]), è simmetrica rispetto all'asse η, lo taglia nel punto $\eta = \frac{1}{y}$, e sta tutta al disopra della retta $\eta = \frac{1}{y}$, estendendosi all'infinito. Si ha poi:

---

[1]) V.: LORIA, *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven,* 2 Aufl., T. 1, Leipzig, Teubner, 1910, p. 93.

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \pm \frac{3y\eta - 2}{2\sqrt{y\eta - 1}}, \qquad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \pm \frac{y(3y\eta - 4)}{4(y\eta - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

donde si vede che la curva è concava rispetto all'asse η per $\eta < \frac{4}{3y}$, convessa per $\eta > \frac{4}{3y}$, ed ha due flessi nei punti di ordinata $\eta = \frac{4}{3y}$. L'inclinazione delle tangenti di flesso nell'asse ξ è $\pm \frac{\pi}{3}$.

CAPITOLO III.

SOLUZIONI DISCONTINUE.

16. Fra le restrizioni che abbiamo posto in principio riguardo alla natura delle curve da prendere in considerazione, vi è quella, che la direzione della tangente debba variare con continuità. Vogliamo ora comprendere nel nostro studio anche le curve *angolose*, quelle cioè aventi un numero finito di punti in cui $\frac{dy}{dx}$ ha una discontinuità di prima specie, o, in altre parole, composte di un numero finito di archi a tangente continua incontrantisi ad angolo. Con una denominazione non del tutto esatta, si dice che tali curve, se rendono minimo o massimo l'integrale considerato, costituiscono delle *soluzioni discontinue* del problema proposto.

Consideriamo, per semplicità, una curva $P_0 P_1$ avente un solo punto angoloso o *vertice* P_2. È ovvio che, se la curva rende minimo un integrale esteso fra i suoi estremi P_0, P_1, ciascuno dei due tratti $P_0 P_2$, $P_2 P_1$ dovrà rendere minimo l'integrale esteso fra i propri estremi; giacchè, se ciò p. es. non accadesse per l'arco $P_0 P_2$, si potrebbe trovare un arco $P_0 Q P_2$ avente gli stessi estremi e tale che l'integrale esteso ad esso valor minore, ed allora l'integrale esteso alla curva $P_0 Q P_2 P_1$ sarebbe minore dell'integrale esteso alla curva primitiva, contro l'ipotesi.

Le curve $P_0 P_2$, $P_2 P_1$ devono pertanto essere estremali, cioè devono soddisfare alla equazione di Eulero; soltanto le costanti d'integrazione potranno avere valori diversi per le due curve.

Sia t_2 il parametro del punto P_2. Poichè le funzioni x', y' sono continue negli intervalli $t_0 t_2$ e $t_2 t_1$, escluso al più l'estremo t_2, si otterrà, procedendo come nel § 11:

$$\int_{t_0}^{t_2} [\Phi_x \xi + \Phi_{x'} \xi'] dt + \int_{t_2}^{t_1} [\Phi_x \xi + \Phi_{x'} \xi'] dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_2} [\Phi_y \eta + \Phi_{y'} \eta'] dt + \int_{t_2}^{t_1} [\Phi_y \eta + \Phi_{y'} \eta'] dt = 0,$$

e integrando per parti:

$$\int_{t_0}^{t_2} [\Phi_x - \Phi'_{x'}] \xi \, dt + [\Phi_{x'} \xi]_{t_0}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} [\Phi_x - \Phi'_{x'}] \xi \, dt + [\Phi_{x'} \xi]_{t_2}^{t_1}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_2} [\Phi_y - \Phi'_{y'}] \eta \, dt + [\Phi_{y'} \eta]_{t_0}^{t_2} + \int_{t_2}^{t_1} [\Phi_y - \Phi'_{y'}] \eta \, dt + [\Phi_{y'} \eta]_{t_2}^{t_1} = 0.$$

Ora, poichè le curve $P_0 P_2$, $P_2 P_1$ sono estremali, in tutti i punti di esse si ha:

$$\Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0;$$

inoltre:

$$\xi(t_0) = \xi(t_1) = \eta(t_0) = \eta(t_1) = 0.$$

Quindi la relazione precedente diviene:

$$[\Phi_{x'} \xi]_{t=t_2-0} - [\Phi_{x'} \xi]_{t=t_2+0} + [\Phi_{y'} \eta]_{t=t_2-0} - [\Phi_{y'} \eta]_{t=t_2+0} = 0,$$

od anche:

$$\{[\Phi_{x'}]_{t=t_2-0} - [\Phi_{x'}]_{t=t_2+0}\} \xi(t_2) + \{[\Phi_{y'}]_{t=t_2-0} - [\Phi_{y'}]_{t=t_2+0}\} \eta(t_2) = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà delle funzioni ξ, η:

$$[\Phi_{x'}]_{t=t_2-0} = [\Phi_{x'}]_{t=t_2+0}, \qquad [\Phi_{y'}]_{t=t_2-0} = [\Phi_{y'}]_{t=t_2+0}.$$

Ponendo:

$$x(t_2) = x, \qquad y(t_2) = y,$$

$$x'(t_2 - 0) = x', \qquad y'(t_2 - 0) = y',$$

$$x'(t_2+0)=\bar{x}', \qquad y'(t_2+0)=\bar{y}',$$

$$\Phi(x,y,x',y')=\Phi, \qquad \Phi(x,y,\bar{x}',\bar{y}')=\bar{\Phi},$$

le condizioni che devono essere soddisfatte in un vertice possono scriversi:

$$\Phi_{x'}=\bar{\Phi}_{\bar{x}'}, \qquad \Phi_{y'}=\bar{\Phi}_{\bar{y}'}. \tag{1}$$

Fa eccezione il caso in cui il vertice deve trovarsi sopra una data retta parallela ad uno degli assi, per es. all'asse x. Allora $\eta(t_2)$ è necessariamente nulla, e le due equazioni (1) si riducono alla prima soltanto. Così, se il vertice deve stare sopra una retta parallela all'asse y, le (1) si riducono alla seconda.

Non può escludersi (v. più innanzi, n° 19, Es. 6) che il parametro risulti preso in modo da subire una discontinuità nel vertice, pur rimanendo x ed y continue. In tal caso in luogo di t_2-0, t_2+0 si dovrà scrivere t_2, $\bar{t}_2$, se così si denotano i due valori differenti di t nel vertice.

Se:

$$x=x(t,a_0,b_0), \quad y=y(t,a_0,b_0); \quad x=x(t,a_1,b_1), \quad y=y(t,a_1,b_1)$$

sono le equazioni delle curve P_0P_2, P_2P_1, per la determinazione delle 8 costanti t_0, t_1, t_2, $\bar{t}_2$, a_0, b_0, a_1, b_1 si hanno, oltre le (1), le relazioni seguenti:

$$x_0=x(t_0,a_0,b_0), \qquad y_0=y(t_0,a_0,b_0);$$

$$x_1=x(t_1,a_1,b_1), \qquad y_1=y(t_1,a_1,b_1);$$

$$x(t_2,a_0,b_0)=x(\bar{t}_2,a_1,b_1), \qquad y(t_2,a_0,b_0)=y(\bar{t}_2,a_1,b_1).$$

17. Dalle (1) segue, per le (13), (14) del § 13:

$$\begin{cases} E(x,y,x',y',\bar{x}',\bar{y}')=0, \\[2mm] \dfrac{\partial E(x,y,x',y',\bar{x}',\bar{y}')}{\partial \bar{x}'}=0, \\[2mm] \dfrac{\partial E(x,y,x',y',\bar{x}',\bar{y}')}{\partial \bar{y}'}=0. \end{cases} \tag{2}$$

Vogliamo chiarire il significato delle relazioni (2).

Essendo (§ 13):

$$E(x,\ y,\ x',\ y',\ \bar{x}',\ \bar{y}') = \bar{x}'\,W(x,\ y,\ p,\ \bar{p}),$$

dove:

$$p = \frac{y'}{x'}, \qquad \bar{p} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'},$$

il sistema (2) equivale al sistema [1]):

$$W(x,\ y,\ p,\ \bar{p}) = 0, \qquad \frac{\partial W(x,\ y,\ p,\ \bar{p})}{\partial \bar{p}} = 0.$$

Quindi, tenendo presente quanto si è trovato nel § 13, può concludersi:

a) Che l'equazione:

$$W(x,\ y,\ z,\ \zeta) = 0, \tag{3}$$

considerata come equazione in ζ, ha, qualunque sieno x ed y, la radice multipla $\zeta = z$;

b) Che, se ai simboli x, y, x', y', $\bar{x}'$, $\bar{y}'$, si attribuisce il significato dato ad essi nel § precedente, e si pone $z = \dfrac{y'}{x'}$, l'equazione (3) ha la radice multipla $\zeta = \dfrac{\bar{y}'}{\bar{x}'}$.

Pertanto, se per nessuna coppia di valori x, y la (3) ammette radici multiple diverse da $\zeta = z$, il problema non ha soluzioni discontinue.

---

[1]) Se $\varphi(u,\ v)$ è una funzione omogenea di grado n delle variabili u, v, posto:

$$\frac{v}{u} = t, \qquad \varphi(u,\ v) = u^n\,\psi(t),$$

l'equazione $\varphi(u,\ v) = 0$ equivale alla $\psi(t) = 0$, che ammette n radici [alcune delle quali sono infinite, se $\varphi(u,\ v)$ si annulla per $u = 0$], e il sistema:

$$\varphi(u,\ v) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi(u,\ v)}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi(u,\ v)}{\partial v} = 0 \tag{α}$$

equivale al sistema:

$$\psi(t) = 0, \qquad \psi'(t) = 0.$$

Quindi, se una coppia di valori u, v soddisfa al sistema (α), il loro quoziente $t = \dfrac{v}{u}$ è radice multipla dell'equazione $\psi(t) = 0$.

Abbiamo trovato (§ 14) che la tangente all'indicatrice nel punto di parametro φ ha l'equazione:

$$\Phi_c X + \Phi_s Y = 1,$$

la quale può anche scriversi:

$$\Phi_{x'} X + \Phi_{y'} Y = 1.$$

Segue quindi dalle (1) che, se φ, $\overline{\varphi}$ sono le inclinazioni delle due tangenti in un vertice di un'estremale discontinua, le tangenti nei punti dell'indicatrice di argomenti φ, $\overline{\varphi}$ coincidono, cioè *i punti di argomenti* φ, $\overline{\varphi}$ *sono punti di contatto di una tangente doppia.* Di quì potrebbe dedursi nuovamente, considerando ciò che si disse alla fine del § 14 ed effettuando un semplice passaggio al limite, che per un vertice $E = 0$ ha una radice multipla.

Dal risultato trovato segue che, se l'indicatrice non ha tangenti doppie, non esistono soluzioni discontinue. Questa conclusione può applicarsi in particolare al caso in cui:

$$\Phi = \mu(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

giacchè in questo caso l'estremale è un cerchio (§ 15).

18. Perchè (x, y) sia un vertice di un'estremale discontinua per un dato integrale I, è necessario e sufficiente che le equazioni (1), dove, in causa dell'omogeneità, può scriversi $\cos\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi$ in luogo di x', y', sieno risolubili rispetto a φ, $\overline{\varphi}$. Scriviamo queste equazioni cosi:

$$\Phi_c - \overline{\Phi}_{\bar{c}} = 0, \qquad \Phi_s - \overline{\Phi}_{\bar{s}} = 0,$$

e calcoliamo il loro determinante funzionale rispetto a φ, $\overline{\varphi}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c\Phi_{sc} - s\Phi_{cc} & -\bar{c}\,\overline{\Phi}_{\bar{s}\bar{c}} + \bar{s}\,\overline{\Phi}_{\bar{c}\bar{c}} \\ c\Phi_{ss} - s\Phi_{sc} & -\bar{c}\,\overline{\Phi}_{\bar{s}\bar{s}} + \bar{s}\,\overline{\Phi}_{\bar{s}\bar{c}} \end{vmatrix}.$$

Si è trovato (§ 10):

$$\Phi_{ss} = c^2 G, \qquad \Phi_{sc} = -sc\,G, \qquad \Phi_{cc} = s^2 G,$$

donde:

$$c\Phi_{sc} - s\Phi_{cc} = -s\,G, \qquad c\Phi_{ss} - s\Phi_{sc} = c\,G.$$

Risulta:

$$\Delta = \operatorname{sen}(\bar{\varphi} - \varphi)\, G(x, y, c, s)\, G(x, y, \bar{c}, \bar{s}),$$

sicchè dev'essere:

$$G(x, y, c, s) \neq 0, \qquad G(x, y, \bar{c}, \bar{s}) \neq 0.$$

Per le condizioni di continuità poste in principio, queste diseguaglianze continueranno a sussistere per valori abbastanza vicini di x, y, φ, $\bar{\varphi}$; sicchè può concludersi che *è possibile assegnare un intorno del punto* (x, y), *ogni punto del quale è vertice di una estremale discontinua.*

19. Esempi. — 2. *Linea che genera la superficie di rivoluzione d'area minima.*

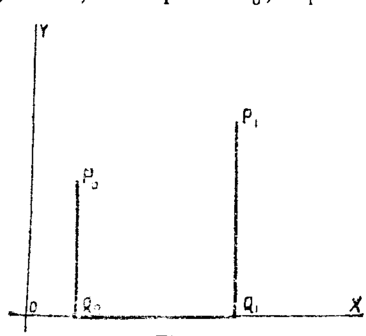
Poichè l'indicatrice è un cerchio per tutti i punti, eccettuati quelli della retta $y = 0$ (§ 15), solo i punti di questa retta possono essere vertici di una soluzione discontinua. Ora dobbiamo osservare che nell'integrazione dell'equazione:

$$\Phi_{x'} = \frac{y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a$$

relativa al problema considerato, abbiamo tacitamente supposto $a \neq 0$. Per $a = 0$ l'equazione si scinde in due, cioè:

$$y = 0, \qquad x' = 0.$$

Di qui si vede che si può avere un'estremale discontinua (dotata di 2 vertici) formata da due segmenti paralleli all'asse y e da un tratto dell'asse x (Fig. 4). Anzi, se i punti P_0, P_1 sono tali che per essi



(Fig. 4).

non passi alcuna catenaria avente per direttrice l'asse x (cfr. § 8), l'estremale discontinua è l'unica soluzione del problema. Si può di più dimostrare che, anche quando esiste la soluzione continua, l'area corrispondente a questa è in certi casi maggiore dell'area corrispondente alla soluzione discontinua.

Calcoliamo le due aree, che designeremo rispettivamente con σ_c, σ_d. Si ha:

$$\sigma_c = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\, d s, \qquad \sigma_d = \pi(y_0^2 + y_1^2).$$

Ora:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a},$$

da cui, posto $\frac{x-b}{a} = t$, segue:

$$y = a \operatorname{ch} t, \qquad d s = a\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}\, d t = a \operatorname{ch} t\, d t,$$

quindi:

$$\sigma_c = 2\pi a^2 \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{ch}^2 t\, d t = \pi a^2 [t_1 - t_0 + \operatorname{sh} t_1 \operatorname{ch} t_1 - \operatorname{sh} t_0 \operatorname{ch} t_0],$$

$$\sigma_d = \pi a^2 [\operatorname{ch}^2 t_0 + \operatorname{ch}^2 t_1],$$

e:

$$\lambda = \sigma_d - \sigma_c = \pi a^2 [(\operatorname{ch}^2 t_1 - \operatorname{sh} t_1 \operatorname{ch} t_1 - t_1) + (\operatorname{ch}^2 t_0 + \operatorname{sh} t_0 \operatorname{ch} t_0 + t_0)]$$
$$= \frac{\pi a^2}{2} [e^{-2t_1} - 2 t_1 + e^{2t_0} + 2 t_0 + 2].$$

Per $x_1 = x_0$, ossia per $t_1 = t_0$, si ha evidentemente $\lambda > 0$, giacchè in questo caso $\sigma_c = 0$, $\sigma_d = 2\pi y_0^2$. Per $x_1 = +\infty$, $t_1 = +\infty$, si ha $\lambda = -\infty$. Inoltre:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t_1} = -\pi a^2 (e^{-2t_1} + 1),$$

che è sempre negativa. Quindi, supposto fisso P_0 e facendo allontanare P_1 lungo l'estremale continua, si giungerà ad un punto al di là del quale sarà costantemente $\lambda < 0$, cioè l'area della soluzione discontinua sarà sempre minore di quella della soluzione continua. In quel punto le due aree saranno eguali.

5. *Problema di* NEWTON.

In un vertice formato da due archi di curve di NEWTON dev'essere (§ 15):

$$-\frac{2yx'y'^3}{(x'^2+y'^2)^2} = -\frac{2yx'_1y'^3_1}{(x'^2_1+y'^2_1)^2},$$

$$\frac{yy'^2(3x'^2+y'^2)}{(x'^2+y'^2)^2} = \frac{yy'^2_1(3x'^2_1+y'^2_1)}{(x'^2_1+y'^2_1)^2},$$

dove, per comodità tipografica, abbiamo scritto x'_1, y'_1 in luogo di $\overline{x}'$, $\overline{y}'$. Introducendo le funzioni trigonometriche di φ e φ_1, e scrivendo, come già si è fatto, c, s per $\cos\varphi$, $\operatorname{sen}\varphi$, le precedenti divengono, tenuto conto che dev'essere $y \neq 0$:

$$cs^3 = c_1 s_1^3, \qquad s^2(3-2s^2) = s_1^2(3-2s_1^2). \tag{4}$$

La seconda equazione può porsi sotto la forma:

$$[2(s_1^2+s^2)-3](s_1^2-s^2) = 0.$$

Eguagliando a zero il secondo fattore, si ottiene $s_1 = \pm s$, e quindi dalla prima delle (4) $c_1 = \pm c$, soluzione che non dà un vertice. Eguagliando invece a zero il primo fattore, risulta:

$$s_1 = \pm\sqrt{\frac{3-2s^2}{2}}, \tag{5}$$

quindi:

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{2s^2-1}{2}}, \tag{6}$$

essendo i segni delle due espressioni tra loro indipendenti. Sostituiamo nella prima della (4); si ottiene:

$$c^2 s^6 = \frac{(2s^2-1)(3-2s^2)^3}{16},$$

ossia:

$$64s^6 - 144s^4 + 108s^2 - 27 = (4s^2 - 3)^3 = 0,$$

da cui:

$$s^2 = \frac{3}{4}, \qquad c^2 = \frac{1}{4},$$

e per le (5), (6):

$$s_1^2 = \frac{3}{4}, \qquad c_1^2 = \frac{1}{4}.$$

Si ha quindi, per la prima delle (4):

$$s_1 = \pm s, \qquad c_1 = \pm c,$$

essendo i segni corrispondenti; cioè si ritrova la soluzione già ottenuta. Pertanto può concludersi che non esistono soluzioni discontinue formate da due archi di curve di NEWTON.

Ma anche in questo caso, nel fare l'integrazione, abbiamo trascurato l'ipotesi $a = 0$. In tale ipotesi, tenuto conto che $y = 0$ non può essere una soluzione, l'equazione d'EULERO si scinde nelle due:

$$x' = 0, \qquad y' = 0,$$

sicchè possiamo avere delle estremali costituite da rette parallele all'uno od all'altro degli assi.

Si presenta quindi la possibilità di estremali discontinue formate:

a) Da un segmento parallelo all'asse x e da uno parallelo all'asse y;

b) Da un segmento parallelo all'asse x e da un arco di estremale curva;

c) Da un segmento parallelo all'asse y e da un arco di estremale curva.

Esaminiamo queste diverse possibilità.

a) Consideriamo l'estremale discontinua formata dai due segmenti P_0P_2, P_2P_1, essendo rispettivamente x_0, y_0; x_0, y_1; x_1, y_1 le coordinate di P_0, P_2, P_1, e supposto $x_0 < x_1$, $0 < y_0 < y_1$.

L'integrale I esteso a P_2P_1 è nullo; l'integrale medesimo esteso a P_0P_2 è:

$$\int_{y_0}^{y_1} y\,dy = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_0^2),$$

sicchè si ha per l'intera estremale:

$$I = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_0^2).$$

Ora, se si fa passare per P_0 e P_1 una curva lungo la quale y sia sempre crescente, si ha per questa curva:

$$I = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y\,dy}{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

che evidentemente ha valor minore del precedente. Dunque all'estremale considerata non può corrispondere un minimo.

b) In questo caso (§ 16) deve considerarsi la sola equazione:

$$\Phi_{x'} = \overline{\Phi}_{\overline{x'}},$$

cioè:

$$c s^3 = c_1 s_1^3,$$

dove $s = 0$, $c_1 \neq 0$, $s_1 \neq 0$. L'equazione, come si vede immediatamente, non può sussistere.

c) In questo caso deve considerarsi la sola equazione:

$$\Phi_{y'} = \overline{\Phi}_{\overline{y'}},$$

cioè:

$$s^2(3 - 2s^2) = s_1^2(3 - 2s_1^2),$$

dove $c = 0$, $c_1 \neq 0$, $s_1 \neq 0$. Si ha cioè:

$$2s_1^4 - 3s_1^2 + 1 = (2s_1^2 - 1)(s_1^2 - 1) = 0,$$

e quindi $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. L'arco di curva incontra la parallela all'asse y sotto un angolo di $45°$. È evidente che quest'arco deve appartenere al ramo concavo rispetto all'asse x, poichè le tangenti all'altro ramo hanno un'inclinazione rispetto a quest'asse variabile da $60°$ a $90°$.

Dati due punti qualunque $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, e supposto:

$$x_0 < x_1, \qquad 0 < y_0 < y_1,$$

si può far passare per questi due punti una ed una sola estremale discontinua della natura ora considerata. In altre parole, si possono determinare univocamente le costanti a, b, t_1, in modo che sieno soddisfatte le equazioni:

$$(7) \qquad \begin{cases} x_1 - b = a\left(\frac{3}{4}t_1^4 + t_1^2 - \lg t_1\right), \\ y_1 = \frac{a(t_1^2+1)^2}{t_1}, \end{cases}$$

e che la curva avente le equazioni (18), (19) del § 15 incontri la retta $x = x_0$ sotto un angolo di 45°. Ricordando che $t = \frac{x'}{y'}$, quest'ultima condizione prende la seguente forma analitica: l'equazione (19) del § 15 deve essere soddisfatta per $x = x_0$, $t = 1$, cioè dev'essere:

$$x_0 - b = \frac{7}{4}a.$$

Dalle equazioni scritte segue:

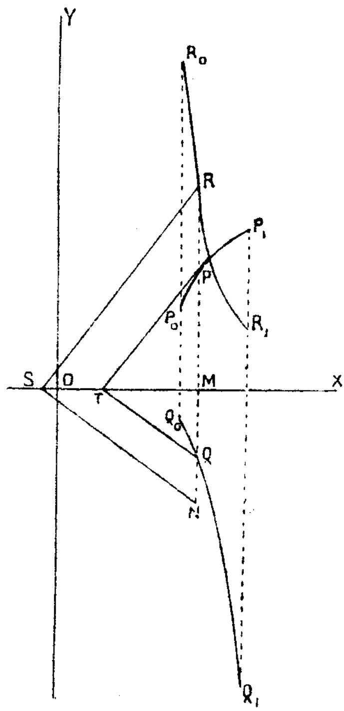
$$(8) \qquad \frac{x_1 - x_0}{y_1} = \frac{t_1\left(\frac{3}{4}t_1^4 + t_1^2 - \frac{7}{4} - \lg t_1\right)}{(t_1^2+1)^2}.$$

È facile verificare che il 2° membro di questa equazione varia crescendo costantemente da 0 a $+\infty$ mentre t_1 varia da 1 a ∞. Qualunque sieno quindi i valori di x_0, x_1, y_1 (sotto le restrizioni stabilite), esiste sempre uno ed un sol valore di t_1 che soddisfa alla (8); trovato t_1, la seconda delle (7) dà a, e poi la prima dà b [1]).

---

[1]) Si osservi che il coefficiente di a nella prima delle (7) è sempre positivo per $t_1 \geqq 1$.

6. *Abbiasi un arco* $P_0 P_1$ *di una certa curva* $y = f(x)$ (Fig. 5).



(Fig. 5).

In un punto generico P dell'arco si conduca la tangente, che tagli l'asse in T; si conduca TQ perpendicolare in T a PT, che tagli il prolungamento dell'ordinata PM in Q. Preso poi su MQ un segmento MN di lunghezza costante h, si conduca NS parallela a QT ad incontrare l'asse x in S, e SR parallela a TP ad incontrare MP in R. Si vuol determinare la curva $P_0 P_1$ *in modo che l'area compresa tra le curve generate dai punti Q, R e le ordinate estreme sia minima.*

Posto $\dfrac{dy}{dx} = p$, si ha, in valore assoluto:

$$MT = \frac{y}{p}, \quad MQ = \frac{MT}{p} = \frac{y}{p^2}, \quad MS = hp, \quad MR = MS . p = hp^2,$$

quindi le aree comprese tra le curve generate dai punti Q, R, le ordinate estreme e l'asse x sono rispettivamente, in valore assoluto:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{y}{p^2}\, d x, \qquad \int_{x_0}^{x_1} h p^2\, d x,$$

e l'area da rendersi minima è:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{y}{p^2} + h p^2\right) d x,$$

o in forma parametrica:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{y x'^3}{y'^2} + h \frac{y'^2}{x'}\right) d t.$$

Siccome manca x, l'equazione d'EULERO si riduce a:

$$\Phi_{x'} = \frac{3 y x'^2}{y'^2} - \frac{h y'^2}{x'^2} = 2 a.$$

Prendiamo come parametro t quello che prima abbiamo indicato con p, cioè poniamo:

$$\frac{y'}{x'} = t;$$

risulta allora:

$$y = \frac{t^2}{3}(h t^2 + 2 a). \tag{9}$$

Derivando si ha:

$$y' = \frac{4 t}{3}(h t^2 + a),$$

quindi:

$$x' = \frac{4}{3}(h t^2 + a),$$

e:

$$x = b + \frac{4 t}{9}(h t^2 + 3 a). \tag{10}$$

Le (9), (10) sono le equazioni parametriche delle estremali; la loro equazione cartesiana è:

$$243\,h(x-b)^4 - 864\,a\,h(x-b)^2 y - 256\,h^2 y^3 + 96\,a^3(x-b)^2 + 512\,a^2 h y^2 - 256\,a^4 y = 0.$$

Esse hanno il punto isolato $x = b$, $y = \dfrac{a^2}{h}$.

Cerchiamo le soluzioni discontinue. Indicando con t, $\bar{t}$ i due parametri relativi ad un vertice (cioè i coefficienti angolari delle due tangenti nel vertice), si ha dalle (1) del § 16:

$$\frac{3y}{t^2} - ht^2 = \frac{3y}{\bar{t}^2} - h\bar{t}^2, \qquad -\frac{2y}{t^3} + 2ht = -\frac{2y}{\bar{t}^3} + 2h\bar{t}.$$

Dalla seconda segue, sopprimendo il fattore $\bar{t} - t$, che non ha alcuna importanza:

$$y = -\frac{h t^3 \bar{t}^3}{t^2 + t\bar{t} + \bar{t}^2}; \tag{11}$$

sostituendo nella prima, risulta:

$$0 = (\bar{t}^2 - t^2)\left(\frac{3y}{t^2\bar{t}^2} + h\right)$$
$$= (\bar{t}^2 - t^2)\frac{h(\bar{t}-t)^2}{t^2 + t\bar{t} + \bar{t}^2} = \frac{h(\bar{t}-t)^2(\bar{t}+t)}{t^2 + t\bar{t} + \bar{t}^2},$$

sicchè dev'essere:

$$\bar{t} = -t,$$

cioè le due tangenti devono fare angoli eguali coll'asse x.

Si ha poi dalla (11):

$$y = h t^4,$$

e quindi dalle (9), (10):

$$t = \sqrt{\frac{a}{h}}, \qquad x = b + \frac{16}{9}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}, \qquad y = \frac{a^2}{h}.$$

Pertanto esiste il vertice se $a > 0$.

Se a_0, b_0; a_1, b_1 sono le costanti arbitrarie relative ai due tratti di una estremale discontinua che congiunge i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), le 6 incognite t_0, t_1, a_0, b_0, a_1, b_1 sono determinate dalle equazioni seguenti [1]):

$$x_0 = b_0 + \frac{4t_0}{9}(h t_0^2 + 3a_0), \qquad y_0 = \frac{t_0^2}{3}(h t_0^2 + 2a_0);$$

$$x_1 = b_1 + \frac{4t_1}{9}(h t_1^2 + 3a_1), \qquad y_1 = \frac{t_1^2}{3}(h t_1^2 + 2a_1);$$

$$b_0 + \frac{16}{9}\frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}} = b_1 + \frac{16}{9}\frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{a_0^2}{h} = \frac{a_1^2}{h}.$$

Dall'ultima equazione, tenendo conto che dev'essere $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, segue:

$$a_1 = a_0,$$

e dalla precedente, ricordando che $\bar{t} = -t$:

$$b_1 = b_0 + \frac{32}{9}\frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}.$$

L'indicatrice ha l'equazione:

$$\rho = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi}{y\cos^4\varphi + h\operatorname{sen}^4\varphi},$$

o in coordinate cartesiane:

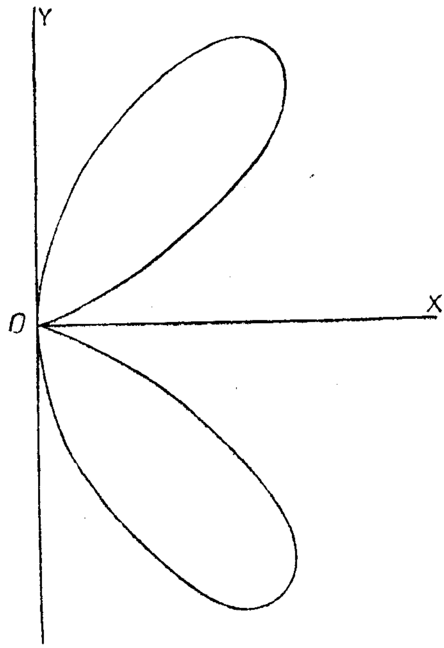
$$y\xi^4 + h\eta^4 - \xi\eta^2 = 0.$$

---

[1]) Qui si presenta il caso sopra accennato di una discontinuità del parametro nel vertice. Per evitare tale discontinuità, basta mutare t in $-t$ nelle equazioni del secondo tratto di curva, cioè scrivere queste equazioni così:

$$x = b_1 - \frac{4t}{9}(h t^2 + 3a_1), \qquad y = \frac{t^2}{3}(h t^2 + 2a_1).$$

Essa è (Fig. 6) una curva del 4° ordine con un punto triplo



(Fig. 6).

nell'origine, che fu già costruita da CRAMER [1]).

L'equazione può anche mettersi sotto la forma seguente:

$$\eta = \pm \frac{\sqrt{y\xi}}{k}\left(\sqrt{1 + k\xi} \pm \sqrt{1 - k\xi}\right),$$

dove:

$$k = \sqrt{4hy}.$$

20. Vi sono certi problemi che, per loro natura, ammettono soltanto soluzioni discontinue. La forma tipica di tali problemi, nel caso più semplice, è la seguente:

Sia data una curva c, che divida il piano in due regioni, e sieno dati rispettivamente in queste regioni i punti P_0, P_1. *Fra tutte le curve*

---

[1]) V.: LORIA, op. cit., T. 1, p. 172; TEIXEIRA, *Obras sobre Mathematica*, T. 4, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1908, p. 306.

che congiungono questi due punti incontrando una sola volta la curva c, determinare quelle che rendono massima o minima la somma:

$$\int F_0(x, y, y')dx + \int F_1(x, y, y')dx,$$

dove F_0 e *F_1 sono due funzioni date, e i due integrali sono estesi ai tratti di curva giacenti rispettivamente nelle due regioni.*

Volendo trattare il problema in forma parametrica, basterà sostituire alle funzioni $F_0(x, y, y')$, $F_1(x, y, y')$ le funzioni $\Phi(x, y, x', y')$, $\Psi(x, y, x', y')$ omogenee-positive di 1° grado rispetto ad x', y', e considerare la somma:

$$\int \Phi(x, y, x', y')dt + \int \Psi(x, y, x', y')dt.$$

È da presumersi che le estremali avranno una discontinuità (nel senso dato precedentemente a questa parola) nel punto d'incontro P_2 colla curva c.

Anzitutto è evidente (cfr. § 16) che i due tratti di curva dovranno essere estremali rispettivamente pei due integrali; sicchè sarà sulla prima curva:

$$\Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0,$$

sulla seconda:

$$\Psi_x - \Psi'_{x'} = 0, \qquad \Psi_y - \Psi'_{y'} = 0.$$

Tenuto conto di questo risultato, colla solita integrazione per parti, e con una notazione facilmente interpretabile, si ha:

$$[\Phi_{x'}\xi + \Phi_{y'}\eta]_{t_2-0} - [\Psi_{x'}\xi + \Psi_{y'}\eta]_{t_2+0} = 0.$$

Le funzioni ξ, η debbono essere tali che, essendo $P_2(x_2, y_2)$ il punto d'intersezione dell'estremale cercata colla curva fissa:

$$\omega(x, y) = 0,$$

ed essendo t_2 il parametro di quel punto, il punto variato:

$$P'_2[x_2 + \varepsilon\xi(t_2),\ y_2 + \varepsilon\eta(t_2)]$$

si trovi ancora sulla curva medesima; ne segue che per $t = t_2$ dev'essere:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}\xi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\eta = 0,$$

onde la precedente relazione diviene:

$$(1) \qquad \left[(\Phi_{x'} - \Psi_{x'})\frac{\partial\omega}{\partial y} - (\Phi_{y'} - \Psi_{y'})\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]_{t_2} = 0.$$

Anche in questo caso non possiamo escludere che t subisca una discontinuità nel punto P_2; indichiamo perciò con t_2, $\bar{t}_2$ i suoi limiti dalle due parti di P_2.

Se:

$$(2) \qquad x = x(t, a_0, b_0), \qquad y = y(t, a_0, b_0);$$

$$(3) \qquad x = \bar{x}(t, a_1, b_1), \qquad y = \bar{y}(t, a_1, b_1)$$

sono rispettivamente le equazioni dei due tratti di estremale, nella (1) dovranno intendersi introdotte in luogo di x, y nei termini $\Phi_{x'}$, $\Phi_{y'}$ le (2), con $t = t_2$, nei termini $\Psi_{x'}$, $\Psi_{y'}$ le (3), con $t = \bar{t}_2$; nei termini $\frac{\partial\omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\omega}{\partial y}$ è indifferente introdurre le une o le altre, giacchè devono sussistere le relazioni:

$$x(t_2, a_0, b_0) = \bar{x}(\bar{t}_2, a_1, b_1), \qquad y(t_2, a_0, b_0) = \bar{y}(\bar{t}_2, a_1, b_1).$$

Queste, insieme alla (1) ed alle:

$$x_0 = x(t_0, a_0, b_0), \qquad y_0 = y(t_0, a_0, b_0),$$

$$x_1 = \bar{x}(t_1, a_1, b_1), \qquad y_1 = \bar{y}(t_1, a_1, b_1),$$

$$\omega[x(t_2, a_0, b_0), \quad y(t_2, a_0, b_0)] = 0,$$

servono a determinare le 8 costanti incognite a_0, b_0, a_1, b_1, t_0, t_1, t_2, $\bar{t}_2$.

La (1) può mettersi sotto forma più espressiva. Posto:

$$\sqrt{\Phi_{x'}^2 + \Phi_{y'}^2} = r, \quad \frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{x'}} = \operatorname{tang} \theta, \quad \sqrt{\Psi_{x'}^2 + \Psi_{y'}^2} = \bar{r}, \quad \frac{\Psi_{y'}}{\Psi_{x'}} = \operatorname{tang} \bar{\theta},$$

ed indicando con λ l'angolo che la normale alla curva fissa fa col-l'asse x, sicchè:

$$\operatorname{tang} \lambda = \frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}{\dfrac{\partial \omega}{\partial x}},$$

la (1) diviene:

$$\frac{\operatorname{sen}(\theta - \lambda)}{\operatorname{sen}(\bar{\theta} - \lambda)} = \frac{\bar{r}}{r}. \tag{4}$$

21. ESEMPIO. — 7. *Una linea* $\omega(x, y) = 0$ *divida il piano in due regioni, e un mobile vada da un punto* $P_0(x_0, y_0)$ *dell'una di queste ad uno* $P_1(x_1, y_1)$ *dell'altra con velocità costante in ciascuna delle regioni. Date le due velocità* v_0, v_1, *si vuol determinare la linea di percorso più rapido.*

Poichè il tempo impiegato a percorrere lo spazio elementare ds rispettivamente nell'una o nell'altra delle due regioni è $\frac{ds}{v_0}$ o $\frac{ds}{v_1}$, l'espressione da rendersi minima è:

$$\int_{t_0}^{t_2} \frac{1}{v_0} \frac{ds}{dt} dt + \int_{t_2}^{t_1} \frac{1}{v_1} \frac{ds}{dt} dt,$$

ossia:

$$\int_{t_0}^{t_2} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v_0} dt + \int_{t_2}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v_1} dt.$$

Le estremali relative ai due integrali sono rette (§ 12, *c*):

$$y = a_0 x + b_0, \qquad y = a_1 x + b_1,$$

e si ha:

$$r = \sqrt{\Phi^2_{x'} + \Phi^2_{y'}} = \frac{1}{v_0}, \qquad \bar{r} = \sqrt{\Psi^2_{x'} + \Psi^2_{y'}} = \frac{1}{v_1},$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{x'}} = \frac{y'}{x'} = a_0, \qquad \operatorname{tang}\bar{\theta} = \frac{\Psi_{y'}}{\Psi_{x'}} = \frac{y'}{x'} = a_1,$$

sicchè $\theta - \lambda$ e $\bar{\theta} - \lambda$ sono gli angoli che formano colla normale alla curva $\omega = 0$ i due tratti rettilinei della traiettoria, e l'equazione (4) esprime la nota legge della rifrazione della luce: *Il rapporto del seno dell'angolo di incidenza a quello dell'angolo di rifrazione è eguale al rapporto delle velocità nei due mezzi.*

Per determinare le costanti incognite x_2, y_2, a_0, b_0, a_1, b_1, abbiamo le equazioni seguenti:

$$y_0 = a_0 x_0 + b_0, \quad y_1 = a_1 x_1 + b_1, \quad y_2 = a_0 x_2 + b_0 = a_1 x_2 + b_1,$$

$$\omega(x_2, y_2) = 0,$$

$$\left[\frac{1}{v_0\sqrt{1 + a_0^2}} - \frac{1}{v_1\sqrt{1 + a_1^2}}\right]\frac{\partial \omega(x_2, y_2)}{\partial y_2} - \left[\frac{a_0}{v_0\sqrt{1 + a_0^2}} - \frac{a_1}{v_1\sqrt{1 + a_1^2}}\right]\frac{\partial \omega(x_2, y_2)}{\partial x_2} = 0.$$

Dalle prime si ottiene:

$$b_0 = y_0 - a_0 x_0, \qquad b_1 = y_1 - a_1 x_1,$$

$$x_2 = \frac{(y_1 - y_0) - (a_1 x_1 - a_0 x_0)}{a_0 - a_1}, \quad y_2 = \frac{a_0 y_1 - a_1 y_0 + a_0 a_1 (x_0 - x_1)}{a_0 - a_1};$$

introducendo queste espressioni nelle due ultime, si hanno due equazioni colle due incognite a_0, a_1.

Nel caso in cui la linea $\omega(x, y) = 0$ si riduce alla retta $y = 0$, le due ultime equazioni divengono:

$$a_0 y_1 - a_1 y_0 + a_0 a_1 (x_0 - x_1) = 0,$$

$$\frac{1}{v_0\sqrt{1 + a_0^2}} = \frac{1}{v_1\sqrt{1 + a_1^2}};$$

dall'eliminazione di una delle incognite si ha per l'altra una equazione di 4° grado.

Il risultato ottenuto può estendersi ad un caso più generale. Supponiamo che la velocità non sia costante, ma sia funzione della posizione del punto mobile:

$$v = v(x, y),$$

e che questa funzione abbia una discontinuità quando si attraversi la linea $\omega(x, y) = 0$. Sarà allora:

$$\Phi(x, y, x', y') = \Psi(x, y, x', y') = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v(x, y)},$$

quindi:

$$r = \frac{1}{v}, \qquad \operatorname{tang} \theta = \frac{y'}{x'}.$$

Pertanto nella formola (4) θ e $\bar{\theta}$ sono gli angoli che formano i due tratti dell'estremale colla normale alla curva fissa, r e $\bar{r}$ sono i valori reciproci dei limiti della velocità dall'una e dall'altra parte di questa curva, e si ha ancora la legge della rifrazione per due mezzi di densità variabile con continuità.

Determiniamo la forma della traiettoria in un caso particolare. Supponiamo che la linea di separazione dei due mezzi sia una retta, che prenderemo come asse x, e che v dipenda soltanto dalla distanza del punto da questa retta, cioè sia funzione della sola y. È ciò che avviene nel caso della rifrazione atmosferica.

Poichè Φ non dipende da x, l'equazione di Eulero si riduce a:

$$\Phi_{x'} = \frac{x'}{v\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{1}{a},$$

che, prendendo y come variabile indipendente, può scriversi:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v}{a}\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2};$$

ne segue:

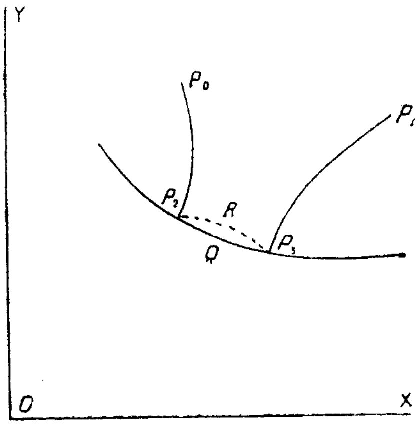
$$\frac{dx}{dy} = \frac{v}{\sqrt{a^2 - v^2}},$$

e integrando:

$$x = b + \int \frac{v\,dy}{\sqrt{a^2 - v^2}} .$$

22. Un altro tipo di problemi che conducono necessariamente a soluzioni discontinue è costituito dai problemi in cui la linea cercata non può uscire da un certo campo, ma deve di essa far parte un tratto (od eventualmente un punto) del contorno di questo campo.

Sia l'estremale cercata $P_0 P_2 Q P_3 P_1$, dove $P_2 Q P_3$ si suppone appartenga al contorno della data regione C (Fig. 7). È chiaro anzitutto



(Fig. 7).

che $P_0 P_2$ e $P_3 P_1$ debbono essere archi di estremali, cioè che dev'essere in tutti i loro punti soddisfatta l'equazione di EULERO. Per esaminare ciò che avviene sull'arco $P_2 P_3$, supponiamo — per fissare le idee — che la parte del contorno di C alla quale esso appartiene sia una curva le cui tangenti variino con continuità senza mai divenire parallele all'asse y, e che la regione C stia al disopra di questa curva. Allora, se all'arco $P_2 Q P_3$ sostituiamo un arco prossimo $P_2 R P_3$ giacente per intero in C, di due punti dei due archi aventi la stessa ascissa quello del secondo avrà ordinata maggiore; sicchè, se:

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

sono le equazioni di $P_2 Q P_3$, quelli di $P_2 R P_3$ potranno scriversi:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) + \mu(t),$$

colla condizione $\mu(t) \geqq 0$. Pertanto nelle formole del § 11 potrà porsi:

$$\xi(t) = 0, \qquad \varepsilon\eta(t) = \mu(t) \geqq 0;$$

si avrà allora:

$$\delta I = \int_{t_2}^{t_3} [\Phi_y \mu + \Phi_{y'} \mu'] dt = \int_{t_2}^{t_3} [\Phi_y - \Phi'_{y'}] \mu \, dt,$$

e dovrà essere, sotto le condizioni poste, $\delta I \geqq 0$, donde si deduce, con un ragionamento analogo a quello sviluppato altrove, che deve essere:

$$\Phi_y - \Phi'_{y'} \geqq 0,$$

ossia, per le (7) del § 10:

$$\Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + (x'y'' - x''y') G \leqq 0.$$

Mutando la posizione della regione C, o considerando il caso del massimo invece di quello del minimo, muterebbe il senso della diseguaglianza; in tutti i casi però l'espressione che figura nel primo membro deve mantenere segno costante lungo tutto l'arco di contorno che fa parte dell'estremale.

23. Denotiamo, per maggior chiarezza, con u il parametro della curva fissa, e scriviamone le equazioni così:

$$x = \bar{\bar{x}}(u), \qquad y = \bar{\bar{y}}(u),$$

essendo:

$$x = x(t), \qquad y = y(t); \qquad x = \bar{x}(t), \qquad y = \bar{y}(t)$$

le equazioni delle estremali P_0P_2, P_3P_1. Se u_2 è il parametro del punto P_2, u quello d'un punto qualunque P della curva fissa, le estremali che congiungono P_0 coi punti P costituiranno una famiglia di curve di parametro u:

$$x = X(t, u), \qquad y = Y(t, u),$$

e sarà:

$$X(t_0, u) \equiv x(t_0), \qquad Y(t_0, u) \equiv y(t_0);$$

$$X(t, u_2) \equiv x(t), \qquad Y(t, u_2) \equiv y(t);$$

$$X(t_2, u) \equiv \bar{\bar{x}}(u), \qquad Y(t_2, u) \equiv \bar{\bar{y}}(u).$$

Perchè l'integrale esteso alla curva $P_0 P_2 P_3 P_1$ sia minimo, dovrà l'integrale esteso alla curva formata dall'estremale $P_0 P$ e dall'arco di curva fissa $P P_2$ essere minimo quando P coincide con P_2, cioè dovrà essere minima per $u = u_2$ la funzione di u:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_2} \Phi[X(t, u), Y(t, u), X_t(t, u), Y_t(t, u)]\, dt$$
$$+ \int_{u}^{u_2} \Phi[\bar{\bar{x}}(u), \bar{\bar{y}}(u), \bar{\bar{x}}'(u), \bar{\bar{y}}'(u)]\, du.$$

Ora:

$$J'(u) = \int_{t_0}^{t_2} [\Phi_X X_u + \Phi_Y Y_u + \Phi_{X_t} X_{tu} + \Phi_{Y_t} Y_{tu}]\, dt -$$
$$- \Phi[\bar{\bar{x}}(u), \bar{\bar{y}}(u), \bar{\bar{x}}'(u), \bar{\bar{y}}'(u)],$$

e, poichè la linea $P_0 P$ è un'estremale, e $X_u = Y_u = 0$ per $t = t_0$:

$$\int_{t_0}^{t_2} [\Phi_X X_u + \Phi_Y Y_u + \Phi_{X_t} X_{tu} + \Phi_{Y_t} Y_{tu}]\, dt = [\Phi_{X_t} X_u + \Phi_{Y_t} Y_u]_{t=t_2}.$$

Dev'essere quindi:

$$[\Phi_{X_t} X_u + \Phi_{Y_t} Y_u]_{\substack{u=u_2\\ t=t_2}} - \Phi[\bar{\bar{x}}(u_2), \bar{\bar{y}}(u_2), \bar{\bar{x}}'(u_2), \bar{\bar{y}}'(u_2)] = 0.$$

Osservando che:

$$[\Phi_{X_t}]_{u=u_2} = \frac{\partial \Phi[x(t), y(t), x'(t), y'(t)]}{\partial x'(t)},$$

$$[\Phi_{Y_t}]_{u=u_2} = \frac{\partial \Phi[x(t), y(t), x'(t), y'(t)]}{\partial y'(t)},$$

$$[X_u]_{t=t_2} = \bar{\bar{x}}'(u), \qquad [Y_u]_{t=t_2} = \bar{\bar{y}}'(u),$$

si vede che il primo membro dell'ultima equazione ottenuta è, a meno del segno, la funzione di Weierstrass relativa al punto P_2 e alle tangenti alle due curve che s'incontrano in esso. Dev'essere dunque nel punto P_2:

$$E(x,\ y,\ x',\ y',\ \bar{\bar{x}}',\ \bar{\bar{y}}') = 0,$$

dove i simboli x', y', $\bar{\bar{x}}'$, $\bar{\bar{y}}'$ si riferiscono rispettivamente alla curva $P_2 P_0$ ed alla curva $P_2 P_3$. Una condizione analoga deve sussistere per il punto P_3.

24. Consideriamo ora il caso in cui l'estremale deve avere un solo punto, che diremo P_2, comune col contorno. Se:

$$x = \bar{X}(t,\ u), \qquad y = \bar{Y}(t,\ u)$$

sono le equazioni della famiglia di estremali che vanno da P_1 ad un punto generico P del contorno, dovrà essere minima per $u = u_2$ la funzione di u:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_2} \Phi[X(t,\ u),\ Y(t,\ u),\ X_t(t,\ u),\ Y_t(t,\ u)]\, du$$
$$+ \int_{t_2}^{t_1} \Phi[\bar{X}(t,\ u),\ \bar{Y}(t,\ u),\ \bar{X}_t(t,\ u),\ \bar{Y}_t(t,\ u)]\, du,$$

cioè dovrà essere, indicando con Φ, $\bar{\Phi}$ le funzioni che figurano nei due integrali:

$$[\Phi_{X_t} X_u + \Phi_{Y_t} Y_u]_{\substack{u=u_2\\ t=t_2}} - [\bar{\Phi}_{\bar{X}_t} \bar{X}_u + \bar{\Phi}_{\bar{Y}_t} \bar{Y}_u]_{\substack{u=u_2\\ t=t_2}} = 0.$$

Aggiungendo e togliendo $\Phi[\bar{\bar{x}}(u),\ \bar{\bar{y}}(u),\ \bar{\bar{x}}'(u),\ \bar{\bar{y}}'(u)]$, si ha di qui la condizione per il punto P_2:

$$E(x,\ y,\ x',\ y',\ \bar{\bar{x}}',\ \bar{\bar{y}}') = E(x,\ y,\ \bar{x}',\ \bar{y}',\ \bar{\bar{x}}',\ \bar{\bar{y}}'),$$

dove i simboli x', y'; $\bar{x}'$, $\bar{y}'$; $\bar{\bar{x}}'$, $\bar{\bar{y}}'$ si riferiscono rispettivamente alle due estremali ed al contorno. Può anche scriversi, ricordando che Φ

è omogenea di primo grado in x', y':

$$(\Phi_{\bar{c}} - \Phi_c)\bar{\bar{c}} + (\Phi_{\bar{s}} - \Phi_s)\bar{\bar{s}} = 0,$$

dove c ed s rappresentano il coseno ed il seno dell'angolo della tangente alla curva coll'asse x. Osservando che:

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = \bar{\Phi} - \Phi_c \bar{c} - \Phi_s \bar{s} = (\Phi_{\bar{c}} - \Phi_c)\bar{c} + (\Phi_{\bar{s}} - \Phi_s)\bar{s},$$

$$E(x, y, \bar{c}, \bar{s}, c, s) = \Phi - \bar{\Phi}_{\bar{c}} c - \bar{\Phi}_{\bar{s}} s = -(\Phi_{\bar{c}} - \Phi_c)c - (\Phi_{\bar{s}} - \Phi_s)s,$$

si ha per eliminazione dei due binomi:

$$\begin{vmatrix} c & s & E(x, y, \bar{c}, \bar{s}, c, s) \\ \bar{c} & \bar{s} & -E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) \\ \bar{\bar{c}} & \bar{\bar{s}} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\frac{E(x, y, \bar{c}, \bar{s}, c, s)}{E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s})} = \frac{s\bar{\bar{c}} - c\bar{\bar{s}}}{\bar{\bar{s}}\bar{c} - \bar{\bar{c}}\bar{s}} = \frac{\operatorname{sen} \alpha\gamma}{\operatorname{sen} \gamma\beta},$$

dove α, β, γ indicano i due tratti di estremale e la curva di contorno.

25. Esempi. — 8. *Determinare la linea più breve che congiunge due punti P_0, P_1 senza penetrare nell'interno di un'ellisse di cui un asse fa parte del segmento $P_0 P_1$.*

In questo caso i tratti $P_0 P_2$ e $P_3 P_1$ sono rettilinei (§ 8); si ha:

$$\Phi = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad G(x, y, x', y') = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad G(x, y, \cos t, \operatorname{sen} t) = 1,$$

e l'ultima formola del § 13 mostra che non può essere $E = 0$ se non sia $\bar{\varphi} = \varphi$. Cioè, qualunque sia la curva data, le rette $P_0 P_2$, $P_3 P_1$ debbono essere tangenti ad essa rispettivamente in P_2 e in P_3.

Prendiamo la retta $P_0 P_1$ come asse x e il centro dell'ellisse come origine; sieno $x_0 < 0$, $x_1 > 0$ le ascisse di P_0, P_1, sieno:

$$x = \alpha \cos u, \qquad y = \beta \operatorname{sen} u$$

le equazioni parametriche dell'ellisse, e sia:

$$y = a(x - x_0)$$

l'equazione della retta $P_0 P_2$. Si avrà per il tratto d'estremale $P_0 P_2$:

$$\Phi_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \qquad \Phi_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}},$$

per il tratto d'estremale facente parte dell'ellisse:

$$\Phi = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 u + \beta^2 \cos^2 u},$$

quindi il coefficiente angolare a di $P_0 P_2$ e il parametro u_2 del punto P_2 saranno determinati dalle equazioni:

$$\beta \operatorname{sen} u_2 = a(\alpha \cos u_2 - x_0),$$

$$E = \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sen}^2 u_2 + \beta^2 \cos^2 u_2} - \frac{-\alpha \operatorname{sen} u_2 + a\beta \cos u_2}{\sqrt{1 + a^2}} = 0.$$

La seconda sviluppata dà:

$$\beta \cos u_2 + a\alpha \operatorname{sen} u_2 = 0,$$

la quale esprime che $P_0 P_2$ è tangente all'ellisse in P_2; combinando colla prima, risulta:

$$\cos u_2 = \frac{\alpha}{x_0}, \qquad \operatorname{sen} u_2 = \pm \frac{\sqrt{x_0^2 - \alpha^2}}{x_0}, \qquad a = \mp \frac{\beta}{\sqrt{x_0^2 - \alpha^2}},$$

quindi:

$$x_2 = \frac{\alpha^2}{x_0}, \qquad y_2 = \pm \frac{\beta\sqrt{x_0^2 - \alpha^2}}{x_0}.$$

Analogamente per la retta $P_3 P_1$.

9. *Un mobile va da un punto P_0 ad un altro P_1 di una certa regione percorrendo una traiettoria che non esce dalla regione stessa, ma*

che ha un punto comune col contorno di questa; la velocità è funzione della posizione. Determinare il percorso più rapido.

Detta $v(x, y)$ la velocità, si ha:

$$\Phi(x, y, x', y') = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{v}, \quad \Phi_{x'} = \frac{x'}{v\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \Phi_{y'} = \frac{y'}{v\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

quindi:

$$\Phi(x, y, c, s) = \frac{1}{v}, \qquad \Phi_c = \frac{c}{v}, \qquad \Phi_s = \frac{s}{v},$$

$$E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = \frac{1}{v}[1 - \bar{c}c - \bar{s}s],$$

$$E(x, y, \bar{c}, \bar{s}, c, s) = \frac{1}{v}[1 - \bar{c}c - \bar{s}s],$$

e per conseguenza:

$$\operatorname{sen} \alpha\gamma = \operatorname{sen} \gamma\beta.$$

Cioè i due tratti di estremale $P_0 P_2$, $P_1 P_2$ devono fare angoli eguali col contorno della regione. È la legge della riflessione della luce generalizzata.

Nel caso speciale in cui v è costante, $P_0 P_2$ e $P_1 P_2$ sono rette; sieno:

$$y - y_0 = a_0(x - x_0), \qquad y - y_1 = a_1(x - x_1)$$

le loro equazioni, e:

$$x = \bar{\bar{x}}(u), \qquad y = \bar{\bar{y}}(u)$$

le equazioni parametriche del contorno. Le incognite a_0, a_1, u_2 saranno determinate dalle relazioni:

$$\bar{\bar{y}}(u_2) - y_0 = a_0[\bar{\bar{x}}(u_2) - x_0],$$

$$\bar{\bar{y}}(u_2) - y_1 = a_1[\bar{\bar{x}}(u_2) - x_1],$$

$$\frac{\bar{\bar{x}}'(u_2) + a_0\bar{\bar{y}}'(u_2)}{\sqrt{1 + a_0^2}} = \frac{\bar{\bar{x}}'(u_2) + a_1\bar{\bar{y}}'(u_2)}{\sqrt{1 + a_1^2}}.$$

Se per es. il contorno della regione è una retta, prendendola come asse x, si ha:

$$-y_0 = a_0(x_2 - x_0),$$

$$-y_1 = a_1(x_2 - x_1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_1^2}},$$

donde segue (non potendo essere $a_1 = a_0$):

$$a_1 = -a_0 = \frac{y_0 + y_1}{x_1 - x_0}, \qquad x_2 = \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}.$$

CAPITOLO IV.

MASSIMI E MINIMI CONDIZIONATI O PROBLEMI ISOPERIMETRICI.

26. Vi sono certi problemi del Calcolo delle variazioni, i quali presentano un interesse soltanto se si limita la ricerca delle funzioni che rendono massimo o minimo un certo integrale al campo di quelle per le quali un altro integrale assume un valore costante proposto. Tipo di tali problemi, che da ciò appunto hanno avuto il nome di *isoperimetrici,* è il problema detto *degli isoperimetri.*

Abbiansi nel piano due punti P_0, P_1, e sieno Q_0, Q_1 le loro proiezioni sull'asse x. Se ci chiedessimo, qual è la linea che congiunge P_0 con P_1 e insieme alla spezzata $P_0 Q_0 Q_1 P_1$ racchiude la massima o la minima area, la domanda non avrebbe alcun interesse; qualunque curva $P_0 P_1$ si tracci, se ne può sempre trovare un'altra a cui corrisponda area maggiore, e d'altra parte la minima area (nulla) è data dalla spezzata stessa $P_0 Q_0 Q_1 P_1$. Può essere invece interessante conoscere, quali tra le infinite curve $P_0 P_1$ aventi una lunghezza determinata l (maggiore della lunghezza del segmento $P_0 P_1$) racchiuda, insieme alla spezzata $P_0 Q_0 Q_1 P_1$, area massima o minima. Qui il confronto non ha luogo fra tutte le possibili figure mistilinee, ma soltanto fra quelle aventi egual perimetro; da ciò il nome dato al problema [1]).

[1]) È noto come la questione si risolva fisicamente. Se agli estremi P_0, P_1 di un telaio rigido $P_0 Q_0 Q_1 P_1$ si attacca un filo flessibile ed inestendibile di lunghezza maggiore della distanza dei punti P_0, P_1, e si immerge il tutto in una soluzione di sapone, si forma entro il telaio un velo liquido di area minima, e il filo $P_0 P_1$ si dispone in forma di arco di cerchio, come è dato appunto dalla teoria (v. § 31).

Mettiamo la questione in termini: si tratta di cercare le funzioni y che rendono massimo o minimo l'integrale:

$$\int_{x_0}^{x_1} y\,dx,$$

e che soddisfanno all'equazione:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = l,$$

e alle condizioni:

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1.$$

Generalizzando, e facendo uso della rappresentazione parametrica, può formularsi il problema seguente:

Determinare le funzioni $x(t)$, $y(t)$ che rendono massimo o minimo l'integrale:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x', y')\,dt,$$

e che soddisfanno alle condizioni:

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0,$$

$$x(t_1) = x_1, \qquad y(t_1) = y_1,$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(x, y, x', y')\,dt = l,$$

dove x_0, y_0, x_1, y_1, l sono costanti date. — S'intende che Φ e Ψ debbono essere omogenee positive di primo grado rispetto ad x' e y'.

27. Alle funzioni x, y sostituiamo (cfr. § 11) le funzioni $x + \varepsilon\xi + \varepsilon_1\xi_1$, $y + \varepsilon\eta + \varepsilon_1\eta_1$, dove ξ, ξ_1, η, η_1 sono funzioni di t soddisfacenti alle solite condizioni di continuità e derivabilità e nulle ai limiti, e ε, ε_1 sono due parametri indeterminati. Le relazioni:

$$I(\varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x + \varepsilon\xi + \varepsilon_1\xi_1, \ldots) dt = I(0, 0) + \sigma,$$

$$J(\varepsilon, \varepsilon_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(x + \varepsilon\xi + \varepsilon_1\xi_1, \ldots) dt = l,$$

in cui x, y si suppongono note e ξ, ξ_1, η, η_1 fissate, se:

$$\left(\frac{d(I, J)}{d(\varepsilon, \varepsilon_1)}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} \neq 0,$$

definiscono ε, ε_1 come funzioni continue di σ che si annullano per $\sigma = 0$; cioè per ogni valore di σ abbastanza piccolo esiste una coppia di valori ε, ε_1 prossimi a zero che soddisfa a quelle relazioni. Si possono quindi scegliere ε, ε_1 in modo che, essendo $J(\varepsilon, \varepsilon_1) = l$, la differenza $I(\varepsilon, \varepsilon_1) - I(0, 0)$ abbia quel segno che si vuole. Pertanto, affinchè le funzioni x, y rappresentino un'estremale, è necessario che, qualunque sieno ξ, ξ_1, η, η_1, sia:

$$\left(\frac{d(I, J)}{d(\varepsilon, \varepsilon_1)}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} = 0. \tag{1}$$

Ora colle integrazioni per parti già più volte applicate si ha:

$$\left(\frac{\partial I(\varepsilon, \varepsilon_1)}{\partial \varepsilon}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} = \int_{t_0}^{t_1} (\Phi_x \xi + \Phi_y \eta + \Phi_{x'} \xi' + \Phi_{y'} \eta') dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (P\xi + Q\eta) dt,$$

$$\left(\frac{\partial I(\varepsilon, \varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} = \int_{t_0}^{t_1} (\Phi_x \xi_1 + \Phi_y \eta_1 + \Phi_{x'} \xi_1' + \Phi_{y'} \eta_1') dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (P\xi_1 + Q\eta_1) dt,$$

$$\left(\frac{\partial J(\varepsilon,\ \varepsilon_1)}{\partial \varepsilon}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} = \int_{t_0}^{t_1} (\Psi_x \xi + \Psi_y \eta + \Psi_{x'} \xi' + \Psi_{y'} \eta') dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (R\xi + S\eta) dt,$$

$$\left(\frac{\partial J(\varepsilon,\ \varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1}\right)_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon_1=0}} = \int_{t_0}^{t_1} (\Psi_x \xi_1 + \Psi_y \eta_1 + \Psi_{x'} \xi_1' + \Psi_{y'} \eta_1') dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (R\xi_1 + S\eta_1) dt,$$

posto:

$$\Phi_x - \Phi'_{x'} = P, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = Q,$$

$$\Psi_x - \Psi'_{x'} = R, \qquad \Psi_y - \Psi'_{y'} = S.$$

La (1) diviene quindi:

$$\int_{t_0}^{t_1} (P\xi + Q\eta) dt . \int_{t_0}^{t_1} (R\xi_1 + S\eta_1) dt -$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} (R\xi + S\eta) dt . \int_{t_0}^{t_1} (P\xi_1 + Q\eta_1) dt = 0,$$

relazione che deve sussistere qualunque sieno ξ, ξ_1, η, η_1. Fissando in modo arbitrario ξ_1, η_1, gli integrali che contengono queste funzioni si riducono a due costanti, che denoteremo con α, $-\beta$, sicchè si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} [(\alpha P + \beta R)\xi + (\alpha Q + \beta S)\eta] dt = 0,$$

relazione da cui segue, come è noto:

$$\alpha P + \beta R = 0, \qquad \alpha Q + \beta S = 0.$$

Ma queste sono le equazioni d'Eulero relative all'integrale $\alpha I + \beta J$, sicchè può concludersi:

Le estremali dell'integrale I sotto la condizione $J = l$ sono le estremali dell'integrale $\alpha I + \beta J$, dove α, β sono due costanti da determinarsi.

Supposto per ora che possano scegliersi ξ_1, η_1 in modo che sia:

$$\alpha = \int_{t_0}^{t_1} (R\xi_1 + S\eta_1)\,dt \neq 0, \tag{2}$$

può scriversi λ invece di $\frac{\beta}{\alpha}$, e $I + \lambda J$ invece di $\alpha I + \beta J$.

Il sistema integrale dell'equazione d'Eulero dell'integrale $I + \lambda J$ conterrà, oltre alle costanti arbitrarie a, b ed alle incognite t_0, t_1, anche la costante λ; esso potrà scriversi:

$$x = x(t,\ a,\ b,\ \lambda), \qquad y = y(t,\ a,\ b,\ \lambda),$$

e le 5 quantità incognite saranno determinate dalle relazioni:

$$x_0 = x(t_0,\ a,\ b,\ \lambda), \qquad y_0 = y(t_0,\ a,\ b,\ \lambda),$$

$$x_1 = x(t_1,\ a,\ b,\ \lambda), \qquad y_1 = y(t_1,\ a,\ b,\ \lambda),$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Phi[x(t,\ a,\ b,\ \lambda),\ \ldots]\,dt = l.$$

28. Il risultato ottenuto dà luogo ad una conseguenza importante.

Se ci proponessimo di cercare i massimi e i minimi dell'integrale J sotto la condizione che I rimanga costante, saremmo condotti all'integrazione dell'equazione di Eulero per l'integrale $J + \lambda I$, che non differisce essenzialmente da quello poc'anzi considerato $I + \lambda J$. Cioè:

Le estremali dell'integrale I sotto la condizione che J sia costante coincidono con quelle dell'integrale J sotto la condizione che I sia costante **(teorema di reciprocità)**.

Dimostreremo più innanzi come i due problemi coincidano completamente. Di tale coincidenza è facile rendersi ragione; cercare, per es., tra le linee di lunghezza data quella che racchiude area massima equivale a cercare tra le linee che racchiudono egual area quella di lunghezza minima.

29. Il caso in cui non si possono scegliere le ξ_1, η_1 in modo che abbia luogo la diseguaglianza (2) merita speciale considerazione.

In questo caso, qualunque sieno ξ_1, η_1, si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} (R\xi_1 + S\eta_1)\,dt = 0,$$

donde segue:

$$R = 0, \qquad S = 0.$$

Cioè le estremali del nostro problema sono anche estremali dell'integrale J, e quindi, poichè vi ha completa simmetria fra gli integrali I, J (§ 28), anche dell'integrale I. Gli integrali I, J hanno adunque in questo caso delle estremali comuni.

È facile vedere che nel caso considerato il problema è in generale irresolubile; invero, supposte soddisfatte le condizioni sufficienti (di cui si dirà a suo luogo) perchè all'estremale considerata corrisponda per l'integrale J un massimo od un minimo, questo integrale avrà valore minore, o rispettivamente maggiore, per ogni curva prossima, e quindi sarà impossibile trovare una famiglia di curve prossime all'estremale considerata per le quali J abbia lo stesso valore che ha per questa.

Come vedremo fra poco, queste considerazioni non valgono per le soluzioni discontinue.

Si può dimostrare che, se gli integrali I, J hanno le estremali incondizionate comuni, nessuna curva diversa da queste può essere estremale del problema condizionato.

Per semplicità facciamo uso della rappresentazione non parametrica, e scriviamo gli integrali dati così:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \qquad J = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx.$$

La nostra ipotesi è che le equazioni (§ 4):

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0,$$

$$G_y - G_{xy'} - G_{yy'}y' - G_{y'y'}y'' = 0$$

coincidano. Se ne deduce allora:

$$y'' = \frac{F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y'}{F_{y'y'}} = \frac{G_y - G_{xy'} - G_{yy'}y'}{G_{y'y'}} = \theta(x, y, y'),$$

e l'equazione d'EULERO relativa all'integrale $\alpha I + \beta J$ diviene:

$$(3) \qquad (\theta - y'')(\alpha F_{y'y'} + \beta G_{y'y'}) = 0.$$

Il fattore $(\theta - y'')$ eguagliato a zero dà ancora le estremali comuni di I, J. Resta ad esaminare il significato dell'altro fattore.

Scriviamo per brevità:

$$\alpha I + \beta J = H;$$

poichè l'equazione d'EULERO è soddisfatta per $y'' = \theta$, sarà identicamente rispetto ad x, y, y':

$$H_y - H_{xy'} - H_{yy'} y' - H_{y'y'} \theta = 0,$$

da cui, derivando rispetto ad y' e ponendo $H_{y'y'} = K$:

$$K_x + K_y y' + K_{y'} \theta + K \theta_{y'} = 0.$$

Sia $y = \varphi(x, a, b)$ l'integrale generale dell'equazione $y'' = \theta$, sicchè:

$$\theta(x, \varphi, \varphi_x) = \varphi_{xx}(x, a, b);$$

e pongasi:

$$K(x, \varphi, \varphi_x) = L(x, a, b).$$

Sarà:

$$(K_x + K_y y' + K_{y'} \theta)_{\substack{y=\varphi \\ y'=\varphi_x}} = L_x;$$

e, posto:

$$(\theta_{y'})_{\substack{y=\varphi \\ y'=\varphi_x}} = \mu(x, a, b),$$

la relazione trovata diverrà:

$$L_x + \mu L = 0,$$

donde integrando:

$$L = C e^{-\int \mu dx},$$

dove la costante C è funzione di a, b. L'equazione:

$$\alpha F_{y'y'} + \beta G_{y'y'} = H_{y'y'} = 0,$$

ossia:

$$K = L = 0,$$

equivale, fatta eccezione pei punti in cui μ non è regolare, all'altra:

$$C = 0,$$

che rappresenta una famiglia semplicemente infinita di estremali comuni ad I e a J. Quindi il secondo fattore dell'equazione (3) non dà alcuna soluzione nuova.

30. È facile vedere che tutto quanto si è detto riguardo alle soluzioni discontinue può estendersi ai problemi isoperimetrici.

Le condizioni che devono sussistere in un vertice sono:

$$\alpha \Phi_{x'} + \beta \Psi_{x'} = \alpha \overline{\Phi}_{\overline{x'}} + \beta \overline{\Psi}_{\overline{x'}},$$

$$\alpha \Phi_{y'} + \beta \Psi_{y'} = \alpha \overline{\Phi}_{\overline{x'}} + \beta \overline{\Psi}_{\overline{y'}},$$

da cui, eliminando α e β:

$$\begin{vmatrix} \Phi_{x'} - \overline{\Phi}_{\overline{x'}} & \Psi_{x'} - \overline{\Psi}_{\overline{x'}} \\ \Phi_{y'} - \overline{\Phi}_{\overline{y'}} & \Psi_{y'} - \overline{\Psi}_{\overline{y'}} \end{vmatrix} = 0.$$

Nel caso eccezionale studiato nel § 29 esistono, in generale, soltanto soluzioni discontinue. Infatti l'impossibilità notata di trovare una famiglia di curve prossime ad un'estremale di J e per le quali J abbia uno stesso valore cessa quando, oltre alle curve continue, si considerano anche le curve discontinue. Per esempio, se J è l'integrale che esprime la distanza di due punti P_0, P_1 del piano, l'unica estremale continua passante per questi due punti è la retta $P_0 P_1$; ma, se l è una quantità maggiore della lunghezza del segmento $P_0 P_1$, vi sono infinite estremali discontinue (spezzate) di lunghezza l congiungenti i due punti dati.

31. ESEMPI. — 1o. *Sieno dati due punti P_0, P_1, le cui proiezioni sull'asse x sieno Q_0, Q_1, e sia dato un numero l maggiore della distanza dei due punti P_0, P_1. Fra tutte le linee di lunghezza l che* *congiungono* P_0 *con* P_1 *determinare quelle che rendono massima l'area della figura mistilinea* $P_0 Q_0 Q_1 P_1$ **(problema degli isoperimetri)**.

Si ha:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y x' dt, \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

quindi:

$$\Omega = \Phi + \lambda \Psi = y x' + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

e le equazioni:

$$\Omega_x - \Omega'_{x'} = 0, \qquad \Omega_y - \Omega'_{y'} = 0$$

divengono:

$$(4) \qquad -\left[y + \lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right]' = 0, \qquad x' - \lambda \left[\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\right]' = 0,$$

da cui integrando:

$$y - b = -\lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \qquad x - a = \lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

e quindi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \lambda^2,$$

sicchè le estremali sono cerchi.

Poniamo:

$$x = a + \lambda \cos t,$$

quindi:

$$y = b + \varepsilon \lambda \operatorname{sen} t,$$

dove $\varepsilon = \pm 1$; ne segue, prendendo t come parametro:

$$x' = -\lambda \operatorname{sen} t, \qquad y' = \varepsilon \lambda \cos t, \qquad \sqrt{x'^2 + y'^2} = |\lambda|,$$

e quindi, per le (4), $\varepsilon\lambda = |\lambda|$, sicchè l'espressione di y diviene:

$$y = b + |\lambda| \operatorname{sen} t.$$

Le equazioni che determinano le 5 costanti t_0, t_1, a, b, λ

sono:

$$|\lambda|(t_1 - t_0) = l,$$

$$x_0 = a + \lambda \cos t_0, \qquad y_0 = b + |\lambda| \operatorname{sen} t_0,$$

$$x_1 = a + \lambda \cos t_1, \qquad y_1 = b + |\lambda| \operatorname{sen} t_1.$$

Si può supporre, senza diminuzione di generalità, che l'asse x sia la retta $P_0 P_1$, e che l'origine sia il punto di mezzo del segmento $P_0 P_1$. Allora, indicando con $2c$ la lunghezza di questo segmento, si ha:

$$x_0 = -c, \qquad x_1 = c, \qquad y_0 = y_1 = 0,$$

quindi:

$$-c = a + \lambda \cos t_0, \quad c = a + \lambda \cos t_1, \quad 0 = b + |\lambda| \operatorname{sen} t_0 = b + |\lambda| \operatorname{sen} t_1,$$

da cui:

$$t_0 = \pi - t_1, \qquad a = 0, \qquad t_1 = \operatorname{arc\,cos} \frac{c}{\lambda}, \qquad b = \pm \sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

$$-2|\lambda| \operatorname{arc\,sen} \frac{c}{\lambda} = l.$$

L'ultima di queste equazioni determina λ, e da essa risulta che λ è negativo. Pertanto le equazioni dell'estremale sono:

$$x = \lambda \cos t, \qquad y = b - \lambda \operatorname{sen} t,$$

e λ è determinato dall'equazione trascendente:

$$2\lambda \operatorname{arc\,sen} \frac{c}{\lambda} = l.$$

L'indicatrice:

$$\rho = \frac{1}{y \operatorname{sen} \varphi + \lambda}$$

è una conica, e perciò non ha tangenti doppie; quindi non esistono soluzioni discontinue. Ciò si può verificare anche scrivendo le condizioni per un vertice:

$$y + \lambda \cos \varphi = y + \lambda \cos \bar{\varphi}, \qquad \lambda \operatorname{sen} \varphi = \lambda \operatorname{sen} \bar{\varphi},$$

le quali evidentemente sono verificate soltanto per $\varphi = \bar{\varphi}$.

11. *Si sa dalla Meccanica che la posizione d'equilibrio di un filo pesante omogeneo sospeso ai due capi è quella in cui il baricentro è il più basso possibile. Determinare la forma del filo.*

La curva, secondo cui si dispone il filo, giace in un piano verticale. Prendiamo in questo piano l'asse y verticale e rivolto verso l'alto. Allora l'ordinata del baricentro sarà, detta l la lunghezza del filo:

$$\frac{1}{l}\int_0^l y\, ds = \frac{1}{l}\int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

e l'integrale da rendersi minimo sarà, trascurando un fattore costante:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt,$$

essendo:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = l.$$

Si ha quindi:

$$\Phi + \lambda \Psi = (y + \lambda)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

che non differisce dalla funzione a cui conduce l'Es. 2 (§ 15) se non per la sostituzione di $y + \lambda$ ad y. L'estremale è dunque una catenaria:

$$y + \lambda = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a},$$

e per la determinazione delle costanti a, b, λ si hanno le tre equazioni:

$$y_0 + \lambda = a \operatorname{ch} \frac{x_0 - b}{a}, \qquad y_1 + \lambda = a \operatorname{ch} \frac{x_1 - b}{a},$$

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch} \frac{x - b}{a}\, dx$$

$$= a\left[\operatorname{sh} \frac{x_1 - b}{a} - \operatorname{sh} \frac{x_0 - b}{a}\right].$$

Sia in particolare $y_0 = y_1$, e prendiamo per asse y l'asse di simmetria della curva, sicchè $x_1 = -x_0$. Posto $x_1 = -x_0 = c$, si ha:

$$\mathrm{ch}\,\frac{-c-b}{a} = \mathrm{ch}\,\frac{c-b}{a},$$

da cui:

$$\frac{-c-b}{a} = -\frac{c-b}{a},$$

e quindi $b = 0$. Segue poi:

$$\lambda = a\,\mathrm{ch}\,\frac{c}{a} - y_0,$$

dove la costante a è determinata dall'equazione trascendente:

$$2\,a\,\mathrm{sh}\,\frac{c}{a} = l.$$

La possibilità di soluzioni discontinue è esclusa da ragioni fisiche. Del resto l'indicatrice per qualunque punto è un cerchio:

$$\rho = \frac{1}{y+\lambda}.$$

12. *Dati in un piano due punti P_0, P_1 ed una retta r, determinare la linea di lunghezza l che congiunge i due punti P_0, P_1 e che, ruotando intorno alla retta r, genera il solido di volume massimo.*

Presa la retta r come asse x, si ha, trascurando nel primo integrale il fattore π:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y^2 x'\,dt, \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = l,$$

quindi:

$$\Phi + \lambda\Psi = y^2 x' + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Mancando x, l'equazione da integrarsi si riduce a:

$$y^2 + \frac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a,$$

che, prendendo x come variabile indipendente, diviene:

$$y^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = a.$$

Ne segue:

$$dx = \frac{(a - y^2)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (a - y^2)^2}},$$

e integrando:

$$x - b = \int \frac{(a - y^2)\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - (a - y^2)^2}}.$$

L'integrale che figura nel secondo membro è un integrale ellittico, tranne il caso in cui $\lambda = \pm a$.

La curva rappresentata dall'equazione ottenuta si dice *curva elastica,* perchè dà la forma che assume, sotto certe condizioni, un'asta elastica carica di pesi.

Dall'equazione trovata segue:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (a - y^2)^2}}{a - y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\lambda^2 y}{(a - y^2)^3},$$

quindi per il raggio di curvatura:

$$R = \left|\frac{\lambda}{2y}\right|;$$

il raggio di curvatura è inversamente proporzionale all'ordinata.

L'indicatrice è una conica, quindi non esistono soluzioni discontinue.

13. *Dati in un piano due punti P_0, P_1 ed una retta r, determinare la linea che congiunge i due punti P_0, P_1 e che, ruotando intorno ad r, genera il solido di volume minimo tra quelli di superficie data l.*

Si ha qui, trascurando i fattori costanti π, 2π:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} y^2 x' \, dt, \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} y \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt,$$

sicchè:

$$\Phi + \lambda \Psi = y^2 x' + \lambda y \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

L'equazione da integrarsi è:

$$(5) \qquad y^2 + \frac{\lambda y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a,$$

da cui, prendendo x come variabile indipendente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{\lambda^2 y^2 - (a - y^2)^2}}{a - y^2},$$

e integrando:

$$x - b = \int \frac{a - y^2}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - (a - y^2)^2}} \, dy.$$

Anche qui abbiamo in generale un integrale ellittico.

Le superficie trovate hanno la proprietà di avere la curvatura media costante $= -\frac{1}{\lambda}$ [1]).

---

[1]) Se $x = \varphi(y)$ è l'equazione del meridiano d'una superficie di rivoluzione, la curvatura media della superficie è data da:

$$\frac{y\varphi'' + \varphi'(1 + \varphi'^2)}{2y(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nel caso nostro si ha:

$$\varphi'(y) = \frac{a - y^2}{\sqrt{\lambda^2 y^2 - (a - y^2)^2}}, \qquad \varphi''(y) = -\frac{\lambda^2 y (a + y^2)}{[\lambda^2 y^2 - (a - y^2)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

fatti i calcoli, la curvatura media risulta $= -\frac{1}{\lambda}$.

Se i dati del problema sono tali che la costante a risulti nulla, si ha:

$$x - b = -\int \frac{y\,dy}{\sqrt{\lambda^2 - y^2}} = -\sqrt{\lambda^2 - y^2},$$

ossia:

$$(x-b)^2 + y^2 = \lambda^2;$$

la superficie cercata è una sfera col centro sull'asse x.

Il problema si risolve più completamente risalendo all'equazione (5):

$$y^2 + \frac{\lambda y x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0,$$

che può scriversi:

$$y\left(y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \lambda\right) = 0,$$

e che quindi si scinde nelle due:

$$y = 0, \qquad y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = -\lambda.$$

La prima di queste rappresenta l'asse x, la seconda una curva la cui normale geometrica è costante ed eguale a $|\lambda|$, cioè un cerchio di raggio $|\lambda|$ col centro nell'origine, o le rette $y = \pm\lambda$ [1]).

Però il problema non è sempre risolubile con estremali continue. Un caso in cui $a = 0$ è quello in cui uno almeno dei punti P_0, P_1, per es. P_0, sta sull'asse x, sicchè $y_0 = 0$; in questo caso la (5) non può sussistere per $y = y_0$ se non è $a = 0$.

Posto allora, ciò che è sempre lecito, $x_0 = 0$, si hanno per la determinazione di b e λ le relazioni:

$$b^2 = \lambda^2, \qquad (x_1 - b)^2 + y_1^2 = \lambda^2,$$

$$l = 2\pi \int_0^{x_1} y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi\lambda x_1,$$

[1]) Che le soluzioni $y = 0$, $y = \pm\lambda$ sieno sfuggite nel calcolo precedente, si spiega colla considerazione che, assumendo y come variabile indipendente, resta per sè escluso il caso di y costante.

da cui:

$$b = \lambda = \frac{x_1^2 + y_1^2}{2x_1}, \qquad l = \pi(x_1^2 + y_1^2).$$

Quindi, affinchè il problema sia risolubile, deve esistere una certa relazione tra le quantità date.

Veniamo alle soluzioni discontinue. Si ha:

$$E(x, y, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, \cos\bar{\varphi}, \operatorname{sen}\bar{\varphi}) = \lambda y[1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)],$$

sicchè E si annulla soltanto per $y = 0$. Un vertice d'una soluzione discontinua non può essere che un punto dell'asse x; e quindi una soluzione discontinua può esistere solo nel caso in cui $a = 0$. Una tale soluzione risulta composta di un segmento dell'asse x e di un arco di cerchio avente il centro su quest'asse. Così nel caso ultimamente considerato, supposto per es. $x_1 > 0$ e:

$$\pi y_1^2 < l < \pi(x_1^2 + y_1^2),$$

si prenda x_2 compreso tra 0 x_1 e tale che:

$$l = \pi[(x_1 - x_2)^2 + y_1^2],$$

donde:

$$x_2 = x_1 - \sqrt{\frac{l}{\pi} - y_1^2};$$

la superficie cercata avrà per meridiano la linea composta del tratto dell'asse x compreso tra l'origine e il punto $(x_2, 0)$ e dell'arco di cerchio avente il centro sull'asse x e passante pei punti $(x_2, 0)$, (x_1, y_1).

14. *Una mezza sfera si imagini proiettata dal centro sul piano tangente π parallelo al suo piano di base. Dati due punti P_0, P_1 del piano π, che sieno proiezioni dei punti P'_0, P'_1 della sfera, fra tutte le linee poste nel piano π che congiungono P_0 con P_1, ed hanno lunghezza data $l > \overline{P_0 P_1}$, determinare quella che è proiezione della linea sferica $P'_0 P'_1$ di lunghezza minima.*

Prima ancora di costruire gli integrali I, J, possiamo affermare che essi hanno le stesse estremali; infatti le linee di lunghezza minima nel piano sono rette, quelle sulla sfera sono, come è noto, cerchi massimi, che si proiettano sul piano π in rette. Ci troviamo dunque nel caso eccezionale.

Prendiamo il piano di base della mezza sfera come piano xy, e il centro come origine, e sia 1 il raggio. Se (X, Y, Z) è il punto della sfera avente per proiezione il punto $(x, y, 1)$ del piano π, si ha:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{1}, \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

donde:

$$X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}.$$

Di qui si ottiene:

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}\, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{(y^2 + 1)x'^2 - 2xyx'y' + (x^2 + 1)y'^2}}{x^2 + y^2 + 1}\, dt. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Posto:

$$\alpha \Phi + \beta \Psi = \Omega,$$

l'equazione d'Eulero è:

$$\Omega_{xy'} - \Omega_{x'y} + G(x'y'' - x''y') = 0,$$

dove:

$$G = \frac{\Omega_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{\Omega_{x'y'}}{x'y'} = \frac{\Omega_{y'y'}}{x'^2}.$$

Indicando per brevità il radicale che figura in I con T e il polinomio $x^2 + y^2 + 1$ con V, si ha:

$$\Omega = \alpha \frac{T}{V} + \beta \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

quindi:

$$\Omega_x = \alpha \frac{V T_x - T V_x}{V^2}, \qquad \Omega_y = \alpha \frac{V T_y - T V_y}{V^2},$$

$$\Omega_{xy'} = \alpha \frac{V T_{xy'} - T_{y'} V_x}{V^2}, \qquad \Omega_{yx'} = \alpha \frac{V T_{yx'} - T_{x'} V_y}{V^2},$$

$$\Omega_{xy'} - \Omega_{yx'} = \frac{\alpha}{V^2} [V(T_{xy'} - T_{yx'}) + (V_y T_{x'} - V_x T_{y'})].$$

Ora:

$$T_{x'} = \frac{(y^2+1)x' - xyy'}{T}, \qquad T_{y'} = \frac{-xyx' + (x^2+1)y'}{T},$$

quindi:

$$T_{xy'} = \frac{T^2(-yx' + 2xy') - [-xyx' + (x^2+1)y'](-yx'y' + xy'^2)}{T^3}$$

$$= \frac{1}{T^3} [-y(y^2+1)x'^3 + x(3y^2+2)x'^2y' - 3x^2yx'y'^2 + x(x^2+1)y'^3],$$

e scambiando x con y, tenuto conto che T è funzione simmetrica delle due variabili:

$$T_{yx'} = \frac{1}{T^3} [-x(x^2+1)y'^3 + y(3x^2+2)y'^2x' - 3xy^2y'x'^2 + y(y^2+1)x'^3].$$

Ne segue:

$$T_{xy'} - T_{yx'}$$
$$= -\frac{2}{T^3} [y(y^2+1)x'^3 - x(3y^2+1)x'^2y' + y(3x^2+1)x'y'^2 - x(x^2+1)y'^3]$$
$$= \frac{2}{T}(xy' - yx').$$

Inoltre:

$$V_y T_{x'} - V_x T_{y'} = \frac{1}{T}\{2y[(y^2+1)x' - xyy'] - 2x[-xyx' + (x^2+1)y']\}$$
$$= -\frac{2V}{T}(xy' - yx');$$

quindi:

$$\Omega_{xy'} - \Omega_{yx'} = 0.$$

Ancora:

$$\Omega_{x'} = \alpha \frac{T_{x'}}{V} + \beta \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = \alpha \frac{(y^2 + 1)x' - xyy'}{VT} + \beta \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

$$\Omega_{x'y'} = \frac{\alpha}{VT^3}\{- T^2 xy - [(y^2 + 1)x' - xyy'][- xyx' + (x^2 + 1)y']\} -$$

$$- \beta \frac{x'y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{\alpha x'y'}{T^3} - \frac{\beta x'y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi:

$$G = \frac{\alpha}{T^3} + \frac{\beta}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'equazione d'EULERO diviene pertanto:

$$\left[\frac{\alpha}{T^3} + \frac{\beta}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right](x'y'' - x''y') = 0;$$

essa si scinde nelle due:

$$\frac{\alpha}{T^3} + \frac{\beta}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \tag{6}$$

$$x'y'' - x''y' = 0. \tag{7}$$

Le curve integrali della (6) hanno la proprietà, che in tutti i loro punti la curvatura è nulla, cioè sono rette.

La (6) può scriversi, indicando con γ una costante:

$$T = \gamma \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

ossia:

$$(xy' - yx')^2 + (x'^2 + y'^2) = \gamma^2 (x'^2 + y'^2),$$

da cui, posto $\sqrt{\gamma^2 - 1} = \lambda$:

$$xy' - yx' = \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

e prendendo x come variabile indipendente:

$$y - x\frac{dy}{dx} = -\lambda\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

equazione di Clairaut, il cui integrale generale è:

$$y = cx - \lambda\sqrt{1 + c^2}.$$

Esso è compreso nell'integrale generale della (7); si verifica cioè che l'equazione d'Eulero non dà altre estremali che quelle comuni ad I e a J.

Dopo ciò è evidente che il problema non ammette soluzioni continue; poichè, se vi fosse una soluzione, essa dovrebbe essere un arco di cerchio massimo, e avrebbe come proiezione sul piano π il segmento $P_0 P_1$, la cui lunghezza non è l.

Cerchiamo le soluzioni discontinue.

Dev'essere in un vertice:

$$\begin{vmatrix} T_{x'} - \overline{T}_{\overline{x}'} & \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \dfrac{\overline{x}'}{\sqrt{\overline{x}'^2 + \overline{y}'^2}} \\ T_{y'} - \overline{T}_{\overline{y}'} & \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} - \dfrac{\overline{y}'}{\sqrt{\overline{x}'^2 + \overline{y}'^2}} \end{vmatrix} = 0.$$

Poichè la figura costituita dalla mezza sfera e dal piano tangente ha per asse di simmetria l'asse z, è lecito supporre, cambiando opportunamente i punti P_0, P_1, che il vertice cada nel piano xz, ciò che semplifica i calcoli. Facendo nella precedente $y = 0$, risulta, tenute presenti le espressioni trovate per $T_{x'}$, $T_{y'}$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+(x^2+1)y'^2}} - \dfrac{\overline{x}'}{\sqrt{\overline{x}'^2+(x^2+1)\overline{y}'^2}} & \dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \dfrac{\overline{x}'}{\sqrt{\overline{x}'^2+\overline{y}'^2}} \\ \dfrac{(x^2+1)y'}{\sqrt{x'^2+(x^2+1)y'^2}} - \dfrac{(x^2+1)\overline{y}'}{\sqrt{\overline{x}'^2+(x^2+1)\overline{y}'^2}} & \dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} - \dfrac{\overline{y}'}{\sqrt{\overline{x}'^2+\overline{y}'^2}} \end{vmatrix} = 0,$$

od anche:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{c}{\sqrt{1+x^2 s^2}} - \dfrac{\bar{c}}{\sqrt{1+x^2 \bar{s}^2}} & c - \bar{c} \\ \dfrac{(x^2+1)s}{\sqrt{1+x^2 s^2}} - \dfrac{(x^2+1)\bar{s}}{\sqrt{1+x^2 \bar{s}^2}} & s - \bar{s} \end{vmatrix} = 0.$$

L'equazione, ridotta a forma razionale, diviene:

$$[(c\bar{s} - \bar{c}s) + x^2 s(c - \bar{c})]^2 (1 + x^2 \bar{s}^2) -$$

$$- [(c\bar{s} - \bar{c}s) + x^2 \bar{s}(c - \bar{c})]^2 (1 + x^2 s^2) = 0,$$

e sviluppando:

$$x^2 (s - \bar{s}) \{[2\nu - (s + \bar{s})\mu]\mu + [(s + \bar{s})\nu - 2 s\bar{s}\mu]\nu x^2\} = 0,$$

dove si è posto:

$$c\bar{s} - \bar{c}s = \mu, \qquad c - \bar{c} = \nu.$$

Ora:

$$2\nu - (s + \bar{s})\mu = \nu(1 - c\bar{c} - s\bar{s}),$$

$$(s + \bar{s})\nu - 2 s\bar{s}\mu = \mu(1 - c\bar{c} - s\bar{s}),$$

quindi l'equazione diviene:

$$\mu\nu(s - \bar{s})(1 - c\bar{c} - s\bar{s}) x^2 (1 + x^2) = 0,$$

che si scinde nelle quattro:

$$c\bar{s} - \bar{c}s = 0, \quad c - \bar{c} = 0, \quad s - \bar{s} = 0, \quad 1 - c\bar{c} - s\bar{s} = 0,$$

ossia:

$$\operatorname{sen}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0, \quad \cos\varphi = \cos\bar{\varphi}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\bar{\varphi}, \quad \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = 1,$$

da cui rispettivamente:

$$\varphi = \bar{\varphi}, \qquad \varphi = -\bar{\varphi}, \qquad \varphi = \pi - \bar{\varphi}, \qquad \varphi = \bar{\varphi}.$$

Esclusa la soluzione $\varphi = \bar{\varphi}$, risulta che uno degli angoli formati dai due segmenti rettilinei costituenti la proiezione piana della soluzione discontinua deve essere bisecato dall'asse x, o in generale — fatta astrazione dalla posizione speciale da noi assunta — dalla congiungente del vertice col punto di contatto del piano tangente.

Per trovare quindi le posizioni possibili dei vertici, si descriva nel piano tangente l'ellisse di asse maggiore l avente per fuochi P_0 e P_1, e dal punto di contatto di questo piano colla sfera si conducano le tangenti e le normali all'ellisse; i punti di contatto delle tangenti e i punti d'incontro delle normali colla curva saranno i soli vertici possibili.

CAPITOLO V.

INTEGRALI CON LIMITI VARIABILI.

32. Una modificazione del problema citato come esempio nell'*Introduzione* è la seguente: Dati in un piano un punto P_0, una retta r ed una curva c, determinare, tra le curve che giacciono in quel piano, escono da P_0 e terminano alla curva c, quella o quelle che, ruotando intorno alla retta r, generano la superficie di minima area.

Si tratta ancora di rendere minimo l'integrale:

$$I = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

colle condizioni:

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1);$$

però x_1 e y_1 non sono date, ma sono legate dalla relazione che rappresenta analiticamente la curva c.

Generalizzando, possiamo formulare il seguente problema:

Dato un integrale definito:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', x_0, y_0, x_1, y_1)\, dx,$$

e date $r \leqq 3$ relazioni [1]) tra x_0, x_1, y_0, y_1:

$$(1) \qquad \omega_i(x_0, x_1, y_0, y_1) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

---

[1]) Se le relazioni fossero 4, gli estremi risulterebbero fissi.

determinare quelle funzioni $y = f(x)$ che rendono l'integrale massimo o minimo e soddisfanno alle condizioni:

$$y_0 = f(x_0), \qquad y_1 = f(x_1)\ ^{1)}.$$

Un ragionamento semplicissimo fa vedere che il problema, nella parte essenziale della sua risoluzione analitica, si riduce a quello degli estremi fissi. Infatti, se la curva $P_0 P_1$ rende massimo o minimo l'integrale rispetto a tutte quelle i cui estremi soddisfanno a certe condizioni, alle quali soddisfanno anche i punti P_0, P_1, essa lo renderà in particolare massimo o minimo rispetto a tutte le curve aventi gli stessi suoi estremi. Ne segue che le estremali del nostro problema debbono essere estremali del problema corrispondente ad estremi fissi, cioè debbono rendere soddisfatta l'equazione d'EULERO, o, se il problema è in forma parametrica, le equazioni:

$$(2) \qquad \Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0.$$

33. Imaginiamo l'integrale posto in forma parametrica:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x', y', x_0, y_0, x_1, y_1) dt,$$

e, applicando il metodo già usato, sostituiamo alle funzioni $x(t)$, $y(t)$ le funzioni $x(t) + \varepsilon\xi(t)$, $y(t) + \varepsilon\eta(t)$; le coordinate dei nuovi estremi saranno:

$$x(t_0) + \varepsilon\xi(t_0), \quad y(t_0) + \varepsilon\eta(t_0); \quad x(t_1) + \varepsilon\xi(t_1), \quad y(t_1) + \varepsilon\eta(t_1),$$

---

[1]) Nell'esempio prima citato le relazioni sono 3, e cioè:

$$x_0 = p, \qquad y_0 = q, \qquad \theta(x_1, y_1) = 0,$$

essendo p, q le coordinate del punto P_0, $\theta(x, y) = 0$ l'equazione della curva c; la funzione sotto il segno d'integrale è indipendente da x_0, y_0, x_1, y_1.

e dovrà essere:

$$I'(0) = \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_x \xi(t) + \Phi_y \eta(t) + \Phi_{x'} \xi'(t) + \Phi_{y'} \eta'(t)$$
$$+ \Phi_{x_0} \xi(t_0) + \Phi_{y_0} \eta(t_0) + \Phi_{x_1} \xi(t_1) + \Phi_{y_1} \eta(t_1)] dt = 0.$$

Colla solita integrazione per parti si ha, tenendo presenti le (2):

$$[\Phi_{x'} \xi(t) + \Phi_{y'} \eta(t)]_{t_0}^{t_1}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_{x_0} \xi(t_0) + \Phi_{y_0} \eta(t_0) + \Phi_{x_1} \xi(t_1) + \Phi_{y_1} \eta(t_1)] dt = 0,$$

ossia:

$$\left[-(\Phi_{x'})_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x_0} dt\right] \xi(t_0) + \left[-(\Phi_{y'})_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{y_0} dt\right] \eta(t_0)$$
$$+ \left[(\Phi_{x'})_{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x_1} dt\right] \xi(t_1) + \left[(\Phi_{y'})_{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{y_1} dt\right] \eta(t_1) = 0,$$

essendo le $\xi(t_0)$, $\eta(t_0)$, $\xi(t_1)$, $\eta(t_1)$ legate dalle relazioni:

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_0} \xi(t_0) + \frac{\partial \omega_i}{\partial y_0} \eta(t_0) + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_1} \xi(t_1) + \frac{\partial \omega_i}{\partial y_1} \eta(t_1) = 0$$
$$(i = 1, \ldots, r).$$

Per la coesistenza di queste relazioni colla precedente dovranno annullarsi tutti i determinanti della matrice di 4 colonne e di $r + 1$ linee:

$$\left\| \begin{matrix} -(\Phi_{x'})_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x_0} dt & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_0} & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \omega_r}{\partial x_0} & \cdots\cdots \end{matrix} \right\|,$$

ciò che dà luogo a $4 - r$ condizioni indipendenti.

Ottenuto l'integrale delle (2), dove figureranno in generale anche x_0, y_0, x_1, y_1:

$$x = x(t,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

$$y = y(t,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

le $4 - r$ condizioni testè trovate, insieme alle r equazioni (1) ed alle relazioni:

$$x_0 = x(t_0,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

$$y_0 = y(t_0,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

$$x_1 = x(t_1,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

$$y_1 = y(t_1,\ a,\ b,\ x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1),$$

serviranno a determinare le 8 costanti:

$$t_0,\quad t_1,\quad a,\quad b,\quad x_0,\quad y_0,\quad x_1,\quad y_1 .$$

34. Un caso che si presenta di frequente è quello in cui Φ è indipendente da x_0, y_0, x_1, y_1 e i punti P_0, P_1 sono soggetti alla condizione di stare su due curve date:

$$\theta_0(x,\ y) = 0, \qquad \theta_1(x,\ y) = 0$$

(una delle quali può, in particolare, ridursi ad un punto). Si ha allora:

$$\theta_0(x_0,\ y_0) = 0, \qquad \theta_1(x_1,\ y_1) = 0,$$

e la matrice del § prec. diviene:

$$\left\|\begin{matrix} -(\Phi_{x'})_{t_0} & -(\Phi_{y'})_{t_0} & (\Phi_{x'})_{t_1} & (\Phi_{y'})_{t_1} \\ \dfrac{\partial \theta_0(x_0,\ y_0)}{\partial x_0} & \dfrac{\partial \theta_0(x_0,\ y_0)}{\partial y_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial \theta_1(x_1,\ y_1)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \theta_1(x_1,\ y_1)}{\partial y_1} \end{matrix}\right\|,$$

sicchè si hanno le condizioni:

$$\left(\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{x'}}\right)_{t_0} = \frac{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}}, \qquad \left(\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{x'}}\right)_{t_1} = \frac{\dfrac{\partial\theta_1(x_1, y_1)}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial\theta_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}}.$$

Queste condizioni esprimono i rapporti di direzione tra l'estremale e le due curve fisse nei punti d'incontro; esse si dicono *condizioni di trasversalità*, e si dice anche che le curve si incontrano *trasversalmente*. Può concludersi pertanto che, quando Φ è indipendente dalle coordinate degli estremi e questi devono stare su due curve fisse, l'estremale deve incontrare le curve fisse trasversalmente.

Consideriamo l'indicatrice relativa al punto P_0, e sia (ξ, η) il suo punto d'incontro colla tangente all'estremale in P_0; sarà (§ 14):

$$\frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{\Phi_c}{\Phi_s} = -\frac{\Phi_{x'}}{\Phi_{y'}},$$

dove $\dfrac{y'}{x'}$ è il coefficiente angolare della tangente all'estremale. La condizione di trasversalità diviene:

$$\frac{\eta'}{\xi'} = -\frac{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}}{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}};$$

essa esprime che *la tangente all'indicatrice del punto P_0 nel suo punto d'incontro colla tangente all'estremale in P_0 è parallela alla tangente alla curva fissa in P_0*.

La condizione di trasversalità in forma non parametrica è:

$$\left(\frac{F_{y'}}{F - y' F_{y'}}\right)_{x_0} = \frac{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial\theta_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}}.$$

Si trova in qualche caso che la trasversalità coincide coll'ortogonalità. Ci chiediamo qual è la condizione perchè ciò avvenga qualunque sia la curva fissa. La risposta è facile: la tangente all'indicatrice in ogni suo punto dev'essere perpendicolare al raggio vettore, e quindi l'indicatrice dev'essere un cerchio, donde segue che Φ deve avere la forma seguente, dove $\mu(x, y)$ è una funzione qualunque di x, y (§ 15):

$$\Phi(x, y, x', y') = \mu(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}. \tag{3}$$

35. ESEMPI. — 1. *Minima distanza tra due curve, o tra un punto e una curva.*

L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt;$$

le estremali sono rette. Poichè Φ è della forma (3), la soluzione del problema sarà data da rette normali alla o alle curve date. Scrivendo l'equazione generale delle estremali sotto la forma:

$$y = ax + b,$$

nel primo caso le 6 incognite a, b, x_0, y_0, x_1, y_1 saranno determinate dalle equazioni:

$$y_0 = ax_0 + b, \qquad y_1 = ax_1 + b,$$

$$\theta_0(x_0, y_0) = 0, \qquad \theta_1(x_1, y_1) = 0,$$

$$\frac{\dfrac{\partial \theta_0(x_0, y_0)}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial \theta_0(x_0, y_0)}{\partial x_0}} = a, \qquad \frac{\dfrac{\partial \theta_1(x_1, y_1)}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial \theta_1(x_1, y_1)}{\partial x_1}} = a,$$

nel secondo caso, supposto fisso il punto P_0, le 4 incognite a, b, x_1, y_1 saranno determinate dalla 1^a, 2^a, 4^a e 6^a delle equazioni precedenti.

2. *Linea che, uscendo da un punto fisso ed appoggiandosi ad una curva fissa, colla rotazione intorno ad una retta genera la superficie d'area minima.*

La linea è una catenaria, e, avendo Φ la forma (3), incontra la curva fissa ortogonalmente.

10. *Problema degli isoperimetri.*

L'integrale da rendersi minimo è:

$$\int_{t_0}^{t_1} [y x' + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2}]\, dt.$$

Le estremali sono cerchi:

$$x = a + \lambda \cos t, \qquad y = b - \lambda \operatorname{sen} t,$$

e le condizioni di trasversalità sono:

$$\left[\frac{\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}{y + \dfrac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}}\right]_{t_i} = \frac{\dfrac{\partial \theta_i(x_i, y_i)}{\partial y_i}}{\dfrac{\partial \theta_i(x_i, y_i)}{\partial x_i}} \qquad (i = 0, 1),$$

ossia:

$$\frac{\lambda \cos t_i}{b} = \frac{\dfrac{\partial \theta_i(x_i, y_i)}{\partial y_i}}{\dfrac{\partial \theta_i(x_i, y_i)}{\partial x_i}} \qquad (i = 0, 1).$$

Supponiamo in particolare che le due linee fisse sieno due rette:

$$y = r_i x + s_i \qquad (i = 0, 1);$$

allora si ha:

$$\frac{\lambda \cos t_i}{b} = -\frac{1}{r_i} \qquad (i = 0, 1),$$

equazioni che, insieme alle:

$$\left.\begin{array}{c} y_i = r_i x_i + s_i \\ x_i = a + \lambda \cos t_i, \qquad y_i = b - \lambda \operatorname{sen} t_i \end{array}\right\} \qquad (i = 0, 1),$$

$$-\lambda(t_1 - t_0) = l,$$

determinano le 9 incognite:

$$t_0, \; t_1, \; a, \; b, \; x_0, \; y_0, \; x_1, \; y_1, \; \lambda.$$

Se per es. i due estremi devono stare sull'asse x, si ha:

$$r_0 = s_0 = r_1 = s_1 = 0,$$

e risulta [1]):

$$b = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \pi, \quad \lambda = -\frac{l}{\pi}, \quad x_0 = a + \lambda, \quad x_1 = a - \lambda;$$

la costante a rimane indeterminata, come poteva prevedersi. La curva è un semicerchio avente il centro sull'asse x.

Se invece si suppone P_0 dato sull'asse x, per es. coincidente coll'origine, e si vuole che anche P_1 stia sull'asse x, si trova:

$$b = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \pi, \quad \lambda = -\frac{l}{\pi}, \quad a = -\lambda, \quad x_1 = -2\lambda;$$

si ha ancora un semicerchio col centro sull'asse x, ma in questo caso il centro è determinato.

3. *Brachistocrona che si appoggia a due curve fisse.*

L'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{y - h}} \, dt,$$

dove:

$$h = y_0 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Qui la funzione Φ dipende anche dalle coordinate di P_0, poichè non solo essa contiene esplicitamente y_0, ma può supporsi che v_0 dipenda da x_0 e y_0.

Siccome Φ non contiene x_1, y_1, ed è della forma (3), può affer-

[1]) Ricordiamo che la costante λ è negativa (§ 31).

marsi che la cicloide, la quale risolve il problema, dovrà incontrare ortogonalmente la curva $\theta_1(x, y) = 0$. Lo stesso non avverrà in generale per la curva $\theta_0(x, y) = 0$.

Dovrà invece essere soddisfatta la condizione:

$$(4) \quad \begin{vmatrix} -(\Phi_{x'})_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x_0} dt & -(\Phi_{y'})_{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} \Phi_{y_0} dt \\ \frac{\partial \theta_0(x_0, y_0)}{\partial x_0} & \frac{\partial \theta_0(x_0, y_0)}{\partial y_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Ora le equazioni delle estremali possono scriversi:

$$x = b + a(2t - \text{sen } 2t), \qquad y = h + a(1 - \cos 2t);$$

ne segue:

$$x' = 2a(1 - \cos 2t) = 4a \,\text{sen}^2 t, \quad y' = 2a \,\text{sen } 2t = 4a \,\text{sen } t \cos t,$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 4a \,\text{sen } t,$$

$$\Phi_{x'} = \frac{x'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)(y - h)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}, \quad \Phi_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)(y - h)}} = \frac{\text{cotg } t}{\sqrt{2a}},$$

$$\Phi_{x_0} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2(y - h)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial h}{\partial x_0} = \frac{1}{\sqrt{2a} \,\text{sen}^2 t} \frac{\partial h}{\partial x_0},$$

$$\Phi_{y_0} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{2(y - h)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial h}{\partial y_0} = \frac{1}{\sqrt{2a} \,\text{sen}^2 t} \frac{\partial h}{\partial y_0},$$

quindi:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x_0} dt = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{\partial h}{\partial x_0} (\text{cotg } t_0 - \text{cotg } t_1),$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{y_0} dt = \frac{1}{\sqrt{2a}} \frac{\partial h}{\partial y_0} (\text{cotg } t_0 - \text{cotg } t_1),$$

sicchè la (4) diviene, indicando con γ_0 il coefficiente angolare della tangente alla curva $\theta_0(x, y) = 0$ nel punto P_0:

$$\gamma_0 = \frac{1 - \dfrac{\partial h}{\partial x_0}(\operatorname{cotg} t_0 - \operatorname{cotg} t_1)}{-\operatorname{cotg} t_0 + \dfrac{\partial h}{\partial y_0}(\operatorname{cotg} t_0 - \operatorname{cotg} t_1)} .$$

Se, in particolare, v_0 è indipendente da x_0, y_0, si ha:

$$\frac{\partial h}{\partial x_0} = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial y_0} = 1,$$

e quindi:

$$\gamma_0 = -\operatorname{tang} t_1 = -\left(\frac{x'}{y'}\right)_{t_1} .$$

In questo caso la tangente alla curva $\theta_0(x, y) = 0$ in P_0 e la tangente all'estremale in P_1 sono tra loro perpendicolari.

CAPITOLO VI.

INTEGRALI CONTENENTI DERIVATE D'ORDINE SUPERIORE.

36. Finora abbiamo trattato di alcune *modificazioni* del problema fondamentale; vogliamo ora occuparci di alcune *generalizzazioni* del problema stesso.

Ed anzitutto vogliamo cercare i massimi ed i minimi di un integrale contenente una funzione incognita e derivate di essa di vari ordini:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})\, dx.$$

In forma parametrica questo integrale diviene:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, x', \dots, x^{(n)}, y, y', \dots, y^{(n)})\, dt, \tag{1}$$

dove x, y sono funzioni del parametro t, e gli apici denotano derivazioni rispetto a questo parametro; a seconda della scelta del parametro, esso assume forme diverse. Reciprocamente importa stabilire sotto quali condizioni il valore d'un integrale della forma (1) sia indipendente dalla scelta del parametro (cfr. § 9).

Indicando con u un nuovo parametro:

$$u = \theta(t),$$

e posto:

$$u_0 = \theta(t_0), \qquad u_1 = \theta(t_1),$$

$$x(t) = \xi(u), \qquad y(t) = \eta(u),$$

dev'essere, qualunque sieno t_0, t_1:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi[x(t),\ x'(t),\ \ldots,\ x^{(n)}(t),\ y(t),\ y'(t),\ \ldots,\ y^{(n)}(t)]\,dt$$

$$= \int_{u_0}^{u_1} \Phi[\xi(u),\ \xi'(u),\ \ldots,\ \xi^{(n)}(u),\ \eta(u),\ \eta'(u),\ \ldots,\ \eta^{(n)}(u)]\,du$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Phi[\xi(u),\ \xi'(u),\ \ldots,\ \xi^{(n)}(u),\ \eta(u),\ \eta'(u),\ \ldots,\ \eta^{(n)}(u)]\frac{du}{dt}\,dt,$$

da cui:

$$\Phi[x(t),\ x'(t),\ \ldots] = \Phi[\xi(u),\ \xi'(u),\ \ldots]\frac{du}{dt}\,. \tag{2}$$

Poniamo in particolare:

$$u = t + \varepsilon\tau,$$

dove ε è una costante arbitraria e τ è una funzione di t. Sarà:

$$x(t) = \xi(u) = \xi(t + \varepsilon\tau) = \xi(t) + \varepsilon\tau\xi'(t) + \cdots,$$

$$y(t) = \eta(u) = \eta(t + \varepsilon\tau) = \eta(t) + \varepsilon\tau\eta'(t) + \cdots,$$

quindi la (2) diverrà:

$$\begin{aligned}\Phi[\xi(t) + \varepsilon\tau\xi'(t) + \cdots,\ \xi'(t) + \varepsilon[\tau\xi'(t)]' + \cdots,\ \cdots]&\\ = \Phi[\xi(t+\varepsilon\tau),\ \xi'(t+\varepsilon\tau),\ \ldots]\left(1 + \varepsilon\frac{d\tau}{dt}\right),&\end{aligned}$$

da cui sviluppando ed eguagliando i termini di primo grado in ε, e scrivendo, per comodità tipografica, x, y in luogo di ξ, η:

$$\begin{aligned}\Phi_x\tau x' + \Phi_{x'}(\tau x')' + \cdots + \Phi_{x^{(n)}}(\tau x')^{(n)} + \Phi_y\tau y' + \Phi_{y'}(\tau y')' + \cdots&\\ \cdots + \Phi_{y^{(n)}}(\tau y')^{(n)} = \Phi\tau' + \tau\Phi' = (\Phi\tau)',&\end{aligned}$$

od anche:

$$\Phi\tau' + \tau\Phi' = \sum_{r=0}^{n}[\Phi_{x^{(r)}}(\tau x')^{(r)} + \Phi_{y^{(r)}}(\tau y')^{(r)}]$$

$$= \sum_{r=0}^{n}\left[\Phi_{x^{(r)}}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\tau^{(i)}x^{(r+1-i)} + \Phi_{y^{(r)}}\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}\tau^{(i)}y^{(r+1-i)}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\tau^{(i)}\sum_{r=i}^{n}\binom{r}{i}[\Phi_{x^{(r)}}x^{(r+1-i)} + \Phi_{y^{(r)}}y^{(r+1-i)}],$$

dove per $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ deve intendersi x, y. Poichè questa relazione deve sussistere qualunque sia la funzione τ, dovranno essere eguali nei due membri i coefficienti delle derivate di τ di egual ordine. Ne risultano le seguenti relazioni, di cui la prima è una conseguenza immediata della nota regola per la derivazione delle funzioni composte:

$$\Phi' = \sum_{r=0}^{n} [\Phi_{x^{(r)}} x^{(r+1)} + \Phi_{y^{(r)}} y^{(r+1)}] = H_0, \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \sum_{r=1}^{n} r[\Phi_{x^{(r)}} x^{(r)} + \Phi_{y^{(r)}} y^{(r)}] = H_1, \\ 0 &= \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} [\Phi_{x^{(r)}} x^{(r+1-i)} + \Phi_{y^{(r)}} y^{(r+1-i)}] = H_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Le (4) sono le relazioni cercate. Per $n = 1$ esse si riducono all'unica relazione:

$$\Phi = \Phi_{x'} x' + \Phi_{y'} y',$$

che esprime il risultato ottenuto nel § 9.

37. Dalle (3), (4) si può dedurre una conseguenza importante. Si ha immediatamente:

$$0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H_i^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} \{[\Phi_{x^{(r)}} x^{(r+1-i)}]^{(i)} + [\Phi_{y^{(r)}} y^{(r+1-i)}]^{(i)}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} \sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h} [\Phi_{x^{(r)}}^{(h)} x^{(r+1-h)} + \Phi_{y^{(r)}}^{(h)} y^{(r+1-h)}].$$

Posto $r + 1 - h = m$, $r - i = s$, poichè $i \leqq r \leqq n$, $0 \leqq h \leqq i$, segue $1 \leqq m \leqq n + 1$; inoltre:

$$\binom{r}{i}\binom{i}{h} = \frac{r!}{s!\,(r-s)!} \, \frac{(r-s)!}{(r-m+1)!\,(m-s-1)!}$$

$$= \frac{r!\,(m-1)!}{s!\,(r-m+1)!\,(m-s-1)!\,(m-1)!} = \binom{r}{m-1}\binom{m-1}{s}.$$

Quindi la relazione precedente, invertendo l'ordine delle somme, diviene:

$$0 = \sum_{m=1}^{n+1} \left\{ x^{(m)} \sum_{r=m-1}^{n} (-1)^r \binom{r}{m-1} \Phi_{x^{(r)}}^{(r+1-m)} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \right.$$
$$\left. + y^{(m)} \sum_{r=m-1}^{n} (-1)^r \binom{r}{m-1} \Phi_{y^{(r)}}^{(r+1-m)} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \right\}.$$

Ora:

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{per } m \overline{\overline{>}} 1,$$

quindi la relazione trovata si riduce a:

$$(5) \qquad P_0 x' + Q_0 y' = 0,$$

essendo:

$$P_0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \Phi_{x^{(r)}}^{(r)} = \Phi_x - \Phi'_{x'} + \Phi''_{x''} - \cdots + (-1)^n \Phi_{x^{(n)}}^{(n)},$$

$$Q_0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \Phi_{y^{(r)}}^{(r)} = \Phi_y - \Phi'_{y'} + \Phi''_{y''} - \cdots + (-1)^n \Phi_{y^{(n)}}^{(n)}.$$

38. Vogliamo stabilire anche un'altra formola che ci servirà in seguito.

Dalle (4) segue:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} H_i^{(i-1)}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{r=i}^{n} \binom{r}{i} \sum_{h=0}^{i-1} \binom{i-1}{h} [\Phi_{x^{(r)}}^{(h)} x^{(r-h)} + \Phi_{y^{(r)}}^{(h)} y^{(r-h)}].$$

Ponendo $r - h = m$, $i - h - 1 = s$, si ottiene di qui:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{n} \left\{ x^{(m)} \sum_{r=m}^{n} \frac{(-1)^{r-m} r!}{(r-m)!(m-1)!} \Phi_{x^{(r)}}^{(r-m)} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{r+s+1-m} \binom{m-1}{s} \right.$$
$$\left. + y^{(m)} \sum_{r=m}^{n} \frac{(-1)^{r-m} r!}{(r-m)!(m-1)!} \Phi_{y^{(r)}}^{(r-m)} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s}{r+s+1-m} \binom{m-1}{s} \right\}.$$

Per calcolare il valore della somma rispetto all'indice s che figura in questa formola, poniamo:

$$\omega(u) = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \frac{u^{r+s+1-m}}{r+s+1-m},$$

donde segue $\omega(0) = 0$, tenuto presente che $r > m-1$. Derivando risulta:

$$\omega'(u) = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} u^{r+s-m} = u^{r-m}(1-u)^{m-1},$$

e quindi:

$$\sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \binom{m-1}{s} \frac{1}{r+s+1-m} = \omega(1) = \int_0^1 u^{r-m}(1-u)^{m-1} du$$

$$= B(r-m+1, m) = \frac{\Gamma(r-m+1)\Gamma(m)}{\Gamma(r+1)} = \frac{(r-m)!(m-1)!}{r!}.$$

Si ha pertanto:

$$\Phi = \sum_{m=1}^{n} [P_m x^{(m)} + Q_m y^{(m)}], \tag{6}$$

posto:

$$P_m = \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} \Phi_{x(r)}^{(r-m)}, \qquad Q_m = \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} \Phi_{y(r)}^{(r-m)}; \tag{7}$$

queste ormole comprendono come caso particolare quelle date sopra per P_0, Q_0.

Le P_m, Q_m soddisfanno alle relazioni:

$$P_{m-1} = \Phi_{x(m-1)} - P'_m, \qquad Q_{m-1} = \Phi_{y(m-1)} - Q'_m. \tag{8}$$

39. È utile aver presente la forma che assumono alcune delle espressioni trovate nel caso della rappresentazione non parametrica. Basta per questo fare:

$$x' = 1, \qquad x'' = x''' = \cdots = x^{(n)} = 0,$$

e porre:

$$\Phi(x, x', \ldots, x^{(n)}, y, y', \ldots, y^{(n)}) = F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

dove gli apici nel 2° membro rappresentano ordini di derivazione rispetto ad x. Si ha allora dalle (5), (6), (7), (8):

$$Q_m = \sum_{r=m}^{n} (-1)^{r-m} F_{y^{(r)}}^{(r-m)},$$

$$P_0 = - Q_0 y',$$

(9)
$$P_1 = F - \sum_{m=1}^{n} Q_m y^{(m)},$$

(10)
$$P_1' = F_x - P_0 = F_x + Q_0 y'.$$

40. La forma generale della funzione Φ si otterrebbe integrando il sistema di equazioni a derivate parziali (4) [1]). Può giungersi però più direttamente allo stesso risultato per la via seguente.

Sia y una funzione di x. Posto:

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

e denotando con apici le derivazioni rispetto al parametro t, si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\psi_1(t)}{x'}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x' y'' - x'' y'}{x'^3} = \frac{\psi_2(t)}{x'^3},$$

ed in generale:

$$\frac{d^r y}{dx^r} = \frac{\psi_r(t)}{x'^{2r-1}},$$

dove $\psi_r(t)$ è una funzione di t composta mediante le $x', x'', \ldots, x^{(r)}$, $y', y'', \ldots, y^{(r)}$ (di cui è funzione razionale intera), definita dalla condizione iniziale $\psi_1(t) = x'$ e dalla relazione ricorrente:

$$\psi_r(t) = x' \psi'_{r-1}(t) - (2r-3) x'' \psi_{r-1}(t).$$

---

[1]) V.: G. USAI, *Sopra un tipo speciale di equazioni a derivate parziali*, G. di mat., T. 52, 1914, p. 63-79; *Sopra un sistema speciale e completo di equazioni a derivate parziali lineari omogenee di primo ordine*, G. di mat., T. 53, 1915, p. 136-154.

Se in luogo di t si introduce il parametro u legato a t dalla relazione $t = \theta(u)$, si ha:

$$\frac{d^r y}{d x^r} = \frac{\psi_r(u)}{\left(\frac{d x}{d u}\right)^{2r-1}} = \frac{\psi_r(u)}{x'^{\,2r-1}\left[\frac{d\theta(u)}{d u}\right]^{2r-1}},$$

quindi:

$$\psi_r(u) = \psi_r(t)\left[\frac{d\theta(u)}{d u}\right]^{2r-1},$$

ossia:

$$\sqrt[2r-1]{\psi_r(u)} = \sqrt[2r-1]{\psi_r(t)}\,\frac{d\theta(u)}{d u}. \tag{11}$$

Dopo ciò risulta:

$$\int F\left(x,\ y,\ \frac{d y}{d x},\ \frac{d^2 y}{d x^2},\ \ldots,\ \frac{d^n y}{d x^n}\right) d x$$
$$= \int F\left(x,\ y,\ \frac{\psi_1(t)}{x'},\ \frac{\psi_2(t)}{x'^3},\ \ldots,\ \frac{\psi_n(t)}{x'^{\,2n-1}}\right) x'\, d t,$$

che può anche scriversi:

$$\int F\left(x,\ y,\ \frac{d y}{d x},\ \frac{d^2 y}{d x^2},\ \ldots,\ \frac{d^n y}{d x^n}\right) d x$$
$$= \int K\left[x,\ y,\ \frac{\psi_1(t)}{x'},\ \frac{\sqrt[3]{\psi_2(t)}}{x'},\ \ldots,\ \frac{\sqrt[2n-1]{\psi_n(t)}}{x'}\right] x'\, d t;$$

il prodotto $K x'$ è una funzione omogenea positiva di primo grado di:

$$x',\quad \psi_1(t) = y',\quad \sqrt[3]{\psi_2(t)},\ \ldots,\ \sqrt[2r-1]{\psi_r(t)},\ \ldots,\ \sqrt[2n-1]{\psi_n(t)}.$$

Abbiasi reciprocamente l'integrale:

$$I = \int \Omega\left[x,\ y,\ x',\ y',\ \sqrt[3]{\psi_2(t)},\ \ldots,\ \sqrt[2r-1]{\psi_r(t)},\ \ldots,\ \sqrt[2n-1]{\psi_n(t)}\right] d t,$$

dove Ω rappresenta una funzione omogenea positiva di primo grado dei suoi argomenti, esclusi i due primi. Se s'introduce nell'integrale il nuovo parametro u, si ottiene:

$$I = \int \Omega \{ x[\theta(u)], \ y[\theta(u)], \ x'[\theta(u)], \ y'[\theta(u)], \ \ldots$$

$$\ldots, \sqrt[2r-1]{\psi_2[\theta(u)]}, \ \ldots \} \frac{d\theta(u)}{du} du,$$

ossia, posto $x[\theta(u)] = \xi(u)$, $y[\theta(u)] = \eta(u)$, e tenendo conto della relazione (11):

$$I = \int \Omega \left[\xi(u), \ \eta(u), \ \frac{\xi'(u)}{\theta'(u)}, \ \frac{\eta'(u)}{\theta'(u)}, \ \ldots, \ \frac{\sqrt[2r-1]{\psi_r(u)}}{\theta'(u)}, \ \ldots \right] \theta'(u) \, du,$$

od infine, per l'ipotesi fatta sulla funzione Ω:

$$I = \int \Omega [\xi(u), \ \eta(u), \ \xi'(u), \ \eta'(u), \ \ldots, \sqrt[2r-1]{\psi_r(u)}, \ \ldots] du,$$

relazione che prova l'asserto.

41. Vogliansi ora trovare i massimi e i minimi dell'integrale (1), essendo dati i valori iniziali e finali di x e di y e delle loro prime $n-1$ derivate. Procedendo nel modo solito, si trova che dev'essere, qualunque sieno le funzioni ξ, η:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_x \xi + \Phi_{x'} \xi' + \cdots + \Phi_{x^{(n)}} \xi^{(n)} + \Phi_y \eta + \Phi_{y'} \eta' + \cdots + \Phi_{y^{(n)}} \eta^{(n)}] dt.$$

Coll'integrazione per parti opportunamente ripetuta, tenendo conto che ξ ed η devono essere nulle agli estremi insieme alle loro derivate dei primi $n-1$ ordini, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x'} \xi' \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \Phi'_{x'} \xi \, dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x''} \xi'' \, dt = \int \Phi''_{x''} \xi \, dt,$$

. . . .

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_{x^{(n)}} \xi^{(n)} \, dt = (-1)^n \int \Phi^{(n)}_{x^{(n)}} \xi \, dt,$$

e formole analoghe per y, η, sicchè la relazione trovata diviene, colla notazione usata nel § 37:

$$\int_{t_0}^{t_1} [P_0 \xi + Q_0 \eta] dt = 0.$$

Ne segue (cfr. § 4) che dev'essere:

$$P_0 = 0, \qquad Q_0 = 0. \tag{12}$$

Le equazioni (12), che costituiscono un'ovvia generalizzazione delle (8) del § 11, verranno ancora designate col nome di equazioni d'Eulero. Risulta immediatamente dalla (5) che esse non sono indipendenti, come poteva prevedersi.

Le (12) sono equazioni differenziali ordinarie d'ordine $2n$, e ad esse sarà necessario associare un'altra relazione dipendente dalla scelta del parametro. Ottenuto l'integrale generale:

$$x = x(t, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}),$$

$$y = y(t, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}),$$

le $2n$ costanti arbitrarie si determineranno mediante le condizioni assegnate per gli estremi.

In forma non parametrica si ha l'equazione:

$$Q_0 = F_y - F'_{y'} + F''_{y''} - \cdots + (-1)^n F^{(n)}_{y^{(n)}} = 0.$$

42. Importa considerare anche qui alcuni casi particolari.

a) *La* Φ *non contiene* x. — Essendo $\Phi_x = 0$, da $P_0 = 0$ segue per la prima delle (8) $P'_1 = 0$, e quindi:

$$P_1 = a_1,$$

dove a_1 è una costante arbitraria. L'ordine del problema si abbassa di un'unità, essendo P_1 d'ordine $2n - 1$.

In forma non parametrica si ha pure, in virtù delle (9), (10),

$P_1 = a_1$, ossia:

$$F - \sum_{m=1}^{n} Q_m y^{(m)} = a_1 .$$

b) *La* Φ *non contiene* y. — Si ha analogamente, tanto in forma parametrica che in forma non parametrica:

$$Q_1 = a_1 .$$

c) *La* Φ *non contiene* $x, x', \ldots, x^{(r-1)}, y, y', \ldots, y^{(s-1)}$. — Si hanno allora, in virtù delle (8), le equazioni:

$$P_r^{(r)} = 0, \qquad Q_s^{(s)} = 0,$$

che si integrano immediatamente, la prima r volte, la seconda s volte. Il problema è ridotto all'ordine $2n - r - s$.

Per es., se mancano x ed y, si ha:

$$P_1 = a_1 , \qquad Q_1 = a_2 ,$$

ed in forma non parametrica:

$$F - \sum_{m=1}^{n} Q_m y^{(m)} = a_1 , \qquad Q_1 = a_2 ,$$

da cui:

$$F - a_2 y' - \sum_{m=2}^{n} Q_m y^{(m)} = a_1 ,$$

che è d'ordine $2n - 2$.

d) *L'equazione d'*EULERO, *in forma non parametrica, non contiene* $y^{(2n)}$. — Il solo termine di Q_0 contenente $y^{(2n)}$ è $F_{y^{(n)}}^{(n)}$; d'altra parte il solo termine di $F'_{y^{(n)}}$ contenente $y^{(n+1)}$ è $F_{y^{(n)}y^{(n)}} y^{(n+1)}$, e dalla derivazione di questo termine ripetuta $n - 1$ volte proviene l'unico termine di $F_{y^{(n)}}^{(n)}$ contenente $y^{(2n)}$, cioè $F_{y^{(n)}y^{(n)}} y^{(2n)}$. Quindi, affinchè Q_0 non contenga $y^{(2n)}$, è necessario e sufficiente che sia $F_{y^{(n)}y^{(n)}} = 0$, od anche, che F sia funzione lineare intera di $y^{(n)}$.

Ora è facile dimostrare che in questo caso Q_0 non contiene neppure $y^{(2n-1)}$.

Scriviamo:

$$F = M + Ny^{(n)},$$

dove M ed N non contengono $y^{(n)}$. Allora l'equazione $Q_0 = 0$ diviene:

$$M_y - M'_{y'} + \cdots + (-1)^{n-1} M^{(n-1)}_{y^{(n-1)}} + (Ny^{(n)})_y - (Ny^{(n)})'_{y'} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} (Ny^{(n)})^{(n-1)}_{y^{(n-1)}} + (-1)^n (Ny^{(n)})^{(n)}_{y^{(n)}} = 0.$$

I soli termini contenenti $y^{(2n-1)}$ sono i due ultimi. Ora:

$$(Ny^{(n)})_{y^{(n-1)}} = N_{y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

quindi, a meno di termini non contenenti $y^{(2n-1)}$:

$$(Ny^{(n)})^{(n-1)}_{y^{(n-1)}} = N_{y^{(n-1)}} y^{(2n-1)}.$$

D'altra parte:

$$(Ny^{(n)})_{y^{(n)}} = N,$$

$$N' = N_x + N_y y' + \cdots + N_{y^{(n-1)}} y^{(n)},$$

$$N'' = \cdots + N_{y^{(n-1)}} y^{(n+1)},$$

etc., e infine, a meno di termini non contenenti $y^{(2n-1)}$:

$$N^{(n)} = N_{y^{(n-1)}} y^{(2n-1)}.$$

Dunque i due soli termini contenenti $y^{(2n-1)}$ si distruggono; e può concludersi che: *Se in* Q_0 *manca* $y^{(2n)}$, *manca anche* $y^{(2n-1)}$.

Allo stesso risultato può giungersi per altra via, che dà luogo ad un'estensione importante.

Può scriversi identicamente:

$$F = M + Ny^{(n)} = U' + V,$$

essendo U, V indipendenti da $y^{(n)}$; basta porre:

$$U = \int N d y^{(n-1)},$$

da cui:

$$U_{y^{(n-1)}} = N,$$

e quindi:

$$V = M - (U' - U_{y^{(n-1)}} y^{(n)}) = M - U_x - U_y y' - U_{y'} y'' - \cdots - U_{y^{(n-2)}} y^{(n-1)}.$$

Considerando Q_0 come simbolo d'operazione, scrivendo cioè l'equazione d'Eulero così:

$$(13) \qquad Q_0(F) = 0,$$

si ha manifestamente:

$$Q_0(F) = Q_0(U') + Q_0(V).$$

Ora, posto:

$$Z = U' = U_x + \sum_{r=0}^{n-1} U_{y^{(r)}} y^{(r+1)},$$

si ha:

$$Z_y = U_{xy} + \sum_{r=0}^{n-1} U_{yy^{(r)}} y^{(r+1)} = U'_y,$$

$$Z_{y^{(i)}} = U_{xy^{(i)}} + \sum_{r=0}^{n-1} U_{y^{(i)}y^{(r)}} y^{(r+1)} + U_{y^{(i-1)}} = U'_{y^{(i)}} + U_{y^{(i-1)}} \quad (i = 1, \dots, n-1),$$

$$Z_{y^{(n)}} = U_{y^{(n-1)}},$$

quindi:

$$Q_0(U') = Q_0(Z) = U'_y + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (U^{(i+1)}_{y^{(i)}} + U^{(i)}_{y^{(i-1)}}) + (-1)^n U^{(n)}_{y^{(n-1)}} = 0,$$

e la (13) si riduce a:

$$Q_0(V) = 0,$$

che è d'ordine $2n - 2$ al massimo.

Se l'equazione non contiene neppure $y^{(2n-2)}$, potrà porsi analogamente:

$$V = U'_1 + V_1,$$

essendo U_1, V_1 d'ordine $n - 3$ al più; e l'equazione si ridurrà a:

$$Q_0(V_1) = 0,$$

che sarà d'ordine $2n - 4$. E così di seguito. Sicchè può concludersi che *l'equazione d'*EULERO *è sempre d'ordine pari* [1]).

Nel caso estremo in cui l'equazione è d'ordine < 2, essa non contiene neppure y', e si riduce a:

$$Q_0(V_{n-1}) = \frac{\partial V_{n-1}}{\partial y} = 0,$$

sicchè V_{n-1} è funzione della sola x. Si ha allora:

$$F = U' + U'_1 + \cdots + U'_{n-1} + V_{n-1},$$

da cui integrando:

$$I = \int F\,dx = U + U_1 + \cdots + U_{n-1} + \int V_{n-1}\,dx.$$

L'integrale I in questo caso è una funzione di x, y indipendente dalla forma della funzione y, e perciò l'integrale esteso fra due punti non dipende dalla curva che li congiunge, sicchè non v'ha più luogo a ricerca di massimi e di minimi; l'equazione d'EULERO si riduce ad un'identità. Si dice allora che la funzione $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ è *incondizionatamente integrabile*; la condizione perchè ciò avvenga è:

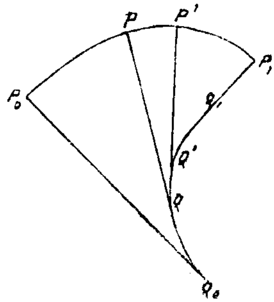
$$Q_0(F) \equiv 0.$$

43. ESEMPI. — 15. *Trovare una curva che congiunga due punti dati P_0, P_1, e renda minima l'area compresa tra la curva stessa, la sua evoluta e le normali nei punti estremi.*

---

[1]) A ciò non contraddice il fatto della riduzione all'ordine $2n - 1$ che ha luogo quando manca x oppure y; giacchè in questi casi non avviene un vero abbassamento d'ordine, ma è possibile eseguire, indipendentemente dalla conoscenza più particolare della forma della funzione Φ, una integrazione, che riduce l'equazione ad una di ordine immediatamente inferiore introducendo una costante arbitraria.

Se P, P' sono due punti infinitamente vicini della curva (Fig. 8),



(Fig. 8).

Q, Q' i punti corrispondenti dell'evoluta, la retta $Q\,Q'\,P'$ sarà la normale alla curva in P', e l'elemento dell'area da rendersi minima sarà il triangolo infinitesimo $P\,Q\,P'$. L'area di questo triangolo, designando R il raggio di curvatura in P, è:

$$d\sigma = \frac{1}{2} R\,ds = \frac{1}{2}\,\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\,dx,$$

quindi l'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{(1+y'^2)^2}{y''}\,dx.$$

Ci troviamo nel caso c) del § prec. per $r = s = 1$, e quindi l'equazione da integrarsi è:

$$F - 4\,b\,y' - Q_2\,y'' = 4\,a,$$

ossia:

$$F - 4\,b\,y' - F_{y''}\,y'' = 4\,a,$$

dove a e b sono due costanti arbitrarie. Ponendo per F, $F_{y''}$ le loro espressioni, risulta:

$$\frac{(1+y'^2)^2}{y''} - 2\,a - 2\,b\,y' = 0.$$

Per integrare questa equazione, poniamo $y' = p$; ne segue:

$$dx = \frac{2(a + bp)}{(1 + p^2)^2} dp, \qquad dy = \frac{2p(a + bp)}{(1 + p^2)^2} dp,$$

e integrando:

$$(14) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{-b + ap}{1 + p^2} + a \operatorname{arctg} p + c, \\[2ex] y = \dfrac{-a - bp}{1 + p^2} + b \operatorname{arctg} p + d, \end{cases}$$

equazioni parametriche delle estremali. Per meglio riconoscere la natura di queste curve, poniamo:

$$a = 2r \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}, \qquad b = 2r \cos \frac{\gamma}{2}, \qquad p = \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

e facciamo la trasformazione di coordinate:

$$X = (x - c) \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + (y - d) \cos \frac{\gamma}{2} + r(\gamma + \operatorname{sen} \gamma),$$

$$Y = (x - c) \cos \frac{\gamma}{2} - (y - d) \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} + r(1 + \cos \gamma);$$

risulta:

$$X = r[(u + \gamma) - \operatorname{sen}(u + \gamma)],$$

$$Y = r[1 - \cos(u + \gamma)],$$

donde si vede che le estremali sono cicloidi.

Se oltre ai punti P_0, P_1 saranno date altre due condizioni, per es. le direzioni delle tangenti nei punti stessi, l'estremale richiesta sarà completamente determinata.

Supponiamo di prendere come asse x la retta $P_0 P_1$, e come origine il punto di mezzo del segmento $P_0 P_1$; indicando con $2\pi h$ la lunghezza di questo segmento, sarà allora:

$$x_0 = -\pi h, \qquad y_0 = 0; \qquad x_1 = \pi h, \qquad y_1 = 0.$$

Sia inoltre:

$$p_0 = -\infty, \qquad p_1 = +\infty.$$

Introducendo questi valori nelle equazioni (14), si ottiene:

$$-\pi h = -\frac{\pi a}{2} + c, \qquad 0 = -\frac{\pi b}{2} + d;$$

$$\pi h = \frac{\pi a}{2} + c, \qquad 0 = \frac{\pi b}{2} + d,$$

da cui:

$$a = 2h, \qquad b = c = d = 0,$$

e le (14) divengono:

$$x = 2h\left(\frac{p}{1+p^2} + \operatorname{arctg} p\right) = h(u + \operatorname{sen} u),$$

$$y = -\frac{2h}{1+p^2} = -h(1 + \cos u).$$

16. *Cercare i massimi e i minimi dell'integrale:*

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{y^2 y''}{y'} dx.$$

Poichè F è lineare rispetto ad y'', l'equazione d'Eulero si ridurrà al secondo ordine (§ 42, d). Si ha nel caso attuale:

$$M = 0, \qquad N = \frac{y^2}{y'},$$

quindi:

$$U = \int N\,dy' = y^2 \lg y',$$

$$V = -U_x - U_y y' = -2yy' \lg y',$$

e l'equazione da integrarsi è:

$$Q_0(yy' \lg y') = 0,$$

ossia:

$$\frac{\partial}{\partial y}(yy' \lg y') - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(yy' \log y') = 0,$$

e sviluppando:

$$-y' - \frac{yy''}{y'} = 0,$$

od anche:

$$yy'' + y'^2 = 0.$$

Integrando:

$$yy' = \frac{a}{2},$$

$$y^2 = ax + b.$$

Le estremali sono parabole. Le costanti a, b sono determinate dalle due equazioni:

$$y_0^2 = ax_0 + b, \qquad y_1^2 = ax_1 + b;$$

si ottiene:

$$a = \frac{y_1^2 - y_0^2}{x_1 - x_0}, \qquad b = \frac{x_1 y_0^2 - x_0 y_1^2}{x_1 - x_0}.$$

CAPITOLO VII.

INTEGRALI CONTENENTI PIÙ FUNZIONI.

44. Consideriamo ora un integrale contenente più funzioni incognite e le loro derivate prime.

Per semplicità di scrittura supponiamo l'integrale contenga due sole funzioni:

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx,$$

o in forma parametrica:

$$(2) \qquad I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, x', y, y', z, z')\, dt.$$

Cogli stessi ragionamenti già fatti si trova che le equazioni le quali definiscono le estremali sono:

$$(3) \qquad P = \Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad Q = \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0, \qquad R = \Phi_z - \Phi'_{z'} = 0,$$

essendo le espressioni P, Q, R legate dalla relazione:

$$P x' + Q y' + R z' = 0.$$

Il problema è d'ordine 4, e, in generale, se il numero delle funzioni incognite è n, è d'ordine $2n$.

La condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale della forma (2) sia riducibile ad uno della forma (1) è che Φ sia omogenea positiva di primo grado rispetto ad x', y', z'.

La teoria delle soluzioni discontinue e quella dei massimi e minimi condizionati si può estendere facilmente agli integrali contenenti più funzioni.

45. Esempi. — 17. *Minima distanza di due punti nello spazio.* L'integrale da rendersi minimo è:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

Mancando in Φ le x, y, z, le (3) si riducono a:

$$\Phi_{x'} = a, \qquad \Phi_{y'} = b, \qquad \Phi_{z'} = c,$$

ossia a:

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = a, \qquad \frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = b, \qquad \frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} = c,$$

che, mutando opportunamente il significato dei simboli a, b, c, divengono:

$$x' = a, \qquad y' = b, \qquad z' = c.$$

Integrando:

$$x = at + a_1, \qquad y = bt + b_1, \qquad z = ct + c_1,$$

equazioni che rappresentano tutte le rette dello spazio. Le costanti si determineranno colla condizione che l'estremale passi pei due punti dati.

18. *Dati nello spazio due punti P_0, P_1 ed una retta r, congiungere i due punti con una curva c di lunghezza data $l > \overline{P_0 P_1}$ e tale, che il cilindro avente c per direttrice e le generatrici parallele ad r e limitato dai due piani perpendicolari ad r condotti per P_0, P_1 abbia area minima.*

Prendiamo il piano perpendicolare ad r condotto per P_0 come piano xy e P_0 come origine. Se:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t)$$

sono le equazioni della curva cercata, colle condizioni:

$$x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0, \quad x(t_1) = x_1, \quad y(t_1) = y_1, \quad z(t_1) = z_1,$$

dovrà essere anzitutto:

$$(4) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = l;$$

inoltre, essendo $\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$ l'elemento d'arco della sezione retta del cilindro, l'area del cilindro stesso sarà:

$$z_1 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt.$$

Si tratta dunque di rendere minimo l'integrale:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

sotto la condizione $J = l$; e perciò la funzione da considerarsi è:

$$\Phi = \sqrt{x'^2 + y'^2} + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Posto:

$$\int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = u(t),$$

può scriversi:

$$\Phi = u' + \lambda \sqrt{u'^2 + z'^2},$$

e le equazioni d'EULERO sono:

$$\Phi_{u'} = a, \qquad \Phi_{z'} = b,$$

ossia:

$$1 + \frac{\lambda u'}{\sqrt{u'^2 + z'^2}} = a, \qquad \frac{\lambda z'}{\sqrt{u'^2 + z'^2}} = b.$$

Ne segue:

$$\frac{z'}{u'} = \frac{b}{a - 1} = c,$$

da cui integrando:

$$z = cu + d,$$

che si riduce a:

$$(5) \qquad z = cu,$$

essendo $u = 0$ per $z = 0$.

La costante c si determina mediante la (4). Essa diviene infatti, in virtù della (5):

$$l = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c} \int_{t_0}^{t_1} z' \, dt = \frac{z_1 \sqrt{c^2 + 1}}{c},$$

da cui:

$$c = \frac{z_1}{\sqrt{l^2 - z_1^2}}.$$

La relazione (5) esprime che, se P è un punto qualunque della curva cercata, la lunghezza della parte della sezione retta del cilindro compresa tra le generatrici per P_0 e per P è proporzionale alla distanza di P dal piano perpendicolare alle generatrici condotto per P_0. Da ciò segue che, se si sviluppa il cilindro sopra un piano, la curva cercata si trasforma in una retta, cioè che essa *è una geodetica del cilindro.*

La lunghezza della sezione retta della parte del cilindro compresa fra le generatrici estreme è:

$$u_1 = \frac{z_1}{c} = \sqrt{l^2 - z_1^2}.$$

Qualunque cilindro, la cui sezione retta abbia questa lunghezza, soddisfa al problema, giacchè, se si varia la forma del cilindro senza alterare la lunghezza della sua sezione retta, la sua area evidentemente rimane costante. Quindi la forma della curva cercata non è ulteriormente determinabile, se non si fissi (ad arbitrio) la forma della sezione retta del cilindro.

CAPITOLO VIII.

PROBLEMA DI LAGRANGE.

46. Con questo nome si suol designare un problema, che è il più generale del Calcolo delle variazioni nel caso di una variabile indipendente, e nel quale rientrano come casi particolari tutti quelli finora trattati.

Il problema può enunciarsi così:

Dato un integrale:

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)\, dx,$$

contenente n funzioni incognite $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *e le loro derivate prime* [1]*, determinare, tra le funzioni che soddisfanno alle* $m < n$ *condizioni:*

$$(2) \qquad H_r(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

quelle che rendono massimo o minimo l'integrale I.

---

[1]) L'esclusione delle derivate d'ordine superiore non costituisce una restrizione. Se per es. della funzione y_1 figurassero le derivate sino all'ordine r, basterà introdurre $r - 1$ funzioni ausiliarie $z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}$ legate ad y_1 e fra loro dalle relazioni:

$$z_1 - y'_1 = 0, \qquad z_2 - z'_1 = 0, \ldots, z_{r-1} - z'_{r-2} = 0,$$

che andranno ad aggiungersi alle (2), mentre in F compariranno, invece delle y_1, $y'_1, y''_1, \ldots, y_1^{(r)}$, le $y_1, z_1, z_2, \ldots, z_{r-1}, z'_{r-1}$.

I valori delle funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$ per $x = x_0$ e per $x = x_1$, e i valori stessi x_0, x_1, possono essere dati, oppure assoggettati a un certo numero di condizioni.

Sia $y_1, \ldots, y_n$ un sistema di funzioni che rendano massimo o minimo l'integrale (1) soddisfacendo alle condizioni (2). Supponiamo che, prese ad arbitrio $n - m$ funzioni $\eta_1, \ldots, \eta_{n-m}$, le quali si annullino per $x = x_0$ e per $x = x_1$, le equazioni:

$$(3) \quad H_r(x, y_1 + \varepsilon\eta_1, \ldots, y_n + \varepsilon\eta_n, y'_1 + \varepsilon\eta'_1, \ldots, y_n + \varepsilon\eta'_n) = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

sieno atte a determinare, per ε abbastanza piccolo, le rimanenti funzioni $\eta_{n-m+1}, \ldots, \eta_n$, in modo che queste si annullino pure per $x = x_0$ e per $x = x_1$ [1]). Si dimostra nel modo solito che, affinchè I sia massimo o minimo, dev'essere per ogni sistema di tali funzioni:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\partial F}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial F}{\partial y'_i}\eta'_i\right] dx = 0;$$

d'altra parte segue dalle (2), (3):

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H_r}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\eta'_i\right] = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

Quindi, qualunque siano le funzioni $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ di x:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial K}{\partial y_i}\eta_i + \frac{\partial K}{\partial y'_i}\eta'_i\right] dx = 0,$$

posto:

$$(4) \qquad K = F + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r H_r.$$

Coll'integrazione per parti si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} [K_{y_i} - K'_{y'_i}]\eta_i \, dx = 0.$$

[1]) Lo studio delle condizioni perchè ciò avvenga esigerebbe sviluppi troppo ampi per trovar posto nel presente volume. Vedi sull'argomento: BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, Leipzig-Berlin, Teubner, 1909, Cap. XI.

Se si imaginano le m funzioni $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ determinate in modo da soddisfare alle m equazioni differenziali:

$$K_{y_i} - K'_{y'_i} = 0 \qquad (i = n - m + 1, \ldots, n),$$

la relazione trovata si riduce a:

$$\int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n-m} [K_{y_i} - K'_{y'_i}] \eta_i \, dx = 0,$$

donde segue, per l'arbitrarietà delle $\eta_1, \ldots, \eta_{n-m}$:

$$K_{y_i} - K'_{y'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n - m).$$

Si ha pertanto:

(5) $$K_{y_i} - K'_{y'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Queste equazioni (che equivalgono a $2n$ equazioni del 1° ordine) determinano, insieme alle (2), le $n + m$ funzioni $y_1, \ldots, y_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Il sistema trovato di $2n + m$ equazioni può ridursi ad un sistema di $2n$ equazioni col seguente processo.

Sviluppando le (5), si ha, tenuta presente la (4):

(6) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial K}{\partial y_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'_i} - \sum_{r=1}^{m} \lambda_r \frac{\partial^2 H_r}{\partial x \partial y'_i} - \sum_{r=1}^{m} \lambda'_r \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} - \\ &\quad - \sum_{h=1}^{n} y'_h \frac{\partial^2 K}{\partial y_h \partial y'_i} - \sum_{h=1}^{n} y''_h \frac{\partial^2 K}{\partial y'_h \partial y'_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right.$$

Inoltre segue dalle (2):

(7) $$\frac{\partial H_r}{\partial x} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H_r}{\partial y_h} y'_h + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial H_r}{\partial y'_h} y''_h = 0 \quad (r = 1, \ldots, m).$$

Perchè il sistema differenziale (6), (7), in cui possono considerarsi come variabili dipendenti $y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$, si possa ridurre a forma normale (cioè sia risolubile rispetto ad

$y''_1, \ldots, y''_n, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m$), è necessario e sufficiente che non sia identicamente nullo il determinante [1]):

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K}{\partial y_1'^2} & \ldots & \frac{\partial^2 K}{\partial y_1' \partial y_n'} & \frac{\partial H_1}{\partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial y_1'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 K}{\partial y_n' \partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial^2 K}{\partial y_n'^2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_n'} & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial y_n'} \\ \frac{\partial H_1}{\partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial H_1}{\partial y_n'} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial H_m}{\partial y_1'} & \ldots & \frac{\partial H_m}{\partial y_n'} & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Può osservarsi che R è il determinante funzionale di $\frac{\partial K}{\partial y_1'}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial y_n'}, H_1, \ldots, H_m$ rispetto a $y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$R = \frac{d\left(\frac{\partial K}{\partial y_1'}, \ldots, \frac{\partial K}{\partial y_n'}, H_1, \ldots, H_m\right)}{d(y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}.$$

Il sistema (6), (7), ridotto a forma normale, diviene:

$$\frac{dy_i}{dx} = y_i',$$

$$\frac{dy_i'}{dx} = S_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\frac{d\lambda_r}{dx} = T_r(x, y, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \quad (r = 1, \ldots, m) \; ^{2}).$$

---

[1]) Un caso, in cui $R \equiv 0$, è quello in cui le (2) sono tali, o possono ridursi a forma tale, che alcune di esse non contengano le derivate $y_1', \ldots, y_n'$.

[2]) Le costanti arbitrarie risultanti dall'integrazione del sistema sono $2n + m$; esse si riducono a $2n$ mediante le (2).

Essendo $R \neq 0$, saranno risolubili rispetto alle y'_i, λ_r in un certo intorno dell'estremale considerata le equazioni:

$$\frac{\partial K}{\partial y'_i} = v_i, \qquad H_r = 0 \quad (i = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, m). \tag{8}$$

Se da esse risulta:

$$y'_i = P_i(x, y, v), \qquad \lambda_r = L_r(x, y, v), \tag{9}$$

sarà identicamente rispetto alle x, y, v:

$$\frac{\partial K(x, y, P, L)}{\partial P_i} = v_i, \qquad H_r(x, y, P) = 0, \tag{10}$$

e quindi, pure identicamente:

$$K(x, y, P, L) = F(x, y, P) + \sum_{r=1}^{m} L_r H_r(x, y, P) = F(x, y, P), \tag{11}$$

$$\frac{\partial K(x, y, P, L)}{\partial L_r} = 0. \tag{12}$$

Ora segue dalle (5), (8):

$$\frac{dv_i}{dx} = \frac{\partial K(x, y, P, L)}{\partial y_i},$$

sicchè si ha il sistema differenziale con $2n$ variabili dipendenti:

$$\frac{dy_i}{dx} = P_i(x, y, v), \qquad \frac{dv_i}{dx} = \frac{\partial K(x, y, P, L)}{\partial y_i}.$$

Questo sistema si può mettere sotto altra forma.

Poniamo, tenuta presente la (11):

$$D(x, y, v) = \sum_{h=1}^{n} P_h v_h - K(x, y, P, L) = \sum_{h=1}^{n} P_h v_h - F(x, y, P).$$

Allora:

$$\frac{\partial D}{\partial y_i} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_h}{\partial y_i} v_h - \frac{\partial K}{\partial y_i} - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial P_h} \frac{\partial P_h}{\partial y_i} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial L_r} \frac{\partial L_r}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial D}{\partial v_i} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_h}{\partial v_i} v_h + P_i - \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial K}{\partial P_h} \frac{\partial P_h}{\partial v_i} - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial K}{\partial L_r} \frac{\partial L_r}{\partial v_i},$$

ossia, per le (9), (10), (12):

$$\frac{\partial D}{\partial y_i} = -\frac{\partial K(x, y, P, L)}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial D}{\partial v_i} = P_i,$$

quindi il sistema differenziale diviene (FORMA CANONICA) [1]):

$$\frac{d y_i}{d x} = \frac{\partial D(x, y, v)}{\partial v_i}, \qquad \frac{d v_i}{d x} = -\frac{\partial D(x, y, v)}{\partial y_i}.$$

47. Possiamo verificare su alcuni dei problemi già trattati, che la loro soluzione è compresa come caso particolare in quella ora esposta.

---

[1]) La riduzione a forma canonica non è possibile (v. nota [1]) a pag. 134), e il numero delle costanti arbitrarie si riduce, quando non tutte le H_r contengono le y_i'.

Supponiamo che il sistema (2) sia tale, o possa ridursi a forma tale, che soltanto $m_1 (\geqq 0)$ delle H_r contengano le y_i'; tali sieno per es. le $H_1, \ldots, H_{m_1}$. Allora, posto $m_2 = m - m_1$; le (5) non contengono le derivate di $\lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_m$, ed eliminando da esse questi argomenti risultano $n - m_2$ equazioni contenenti le y_i e le $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$. Aggiungendo a queste equazioni quelle che si ottengono per derivazione dalle:

$$(\alpha) \qquad H_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m_1),$$

si ha un sistema di $n - m_2 + m_1$ equazioni del 2° ordine rispetto alle $y_1, \ldots, y_n$ e del 1° ordine rispetto alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$. Delle y_i se ne possono eliminare m_2 mediante le:

$$H_r = 0 \qquad (r = m_1 + 1, \ldots, m)$$

e le loro derivate, e si ha finalmente un sistema di $n - m_2 + m_1$ equazioni del 2° ordine nelle $n - m_2$ funzioni y_i rimaste e del 1° ordine nelle $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m_1}$. Il numero delle costanti arbitrarie è $2n - 2m_2 + m_1$, delle quali m_1 si determinano mediante le (α), sicchè il numero delle costanti arbitrarie è in definitiva $2n - 2m_2$, ossia $2(n - m + m_1)$.

a) Abbiasi l'integrale (§ 36):

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\, dx.$$

Posto:

(13) $$y = y_1, \quad y' = y_2, \ldots, y^{(n-1)} = y_n,$$

si hanno le equazioni di condizione:

$$y_{r+1} - y'_r = 0 \qquad (r = 1, \ldots, n-1),$$

quindi:

$$K = F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y'_n) + \sum_{r=1}^{n-1} \lambda_r (y_{r+1} - y'_r),$$

e il sistema da integrarsi è:

(14) $$K_{y_i} - K'_{y'_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ora:

$$K_{y_1} = F_{y_1},$$

$$K_{y_i} = F_{y_i} + \lambda_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

$$K_{y'_i} = -\lambda_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1),$$

$$K_{y'_n} = F_{y'_n},$$

quindi le (14) divengono:

$$F_{y_1} + \lambda'_1 = 0,$$

$$F_{y_i} + \lambda_{i-1} + \lambda'_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, n-1),$$

$$F_{y_n} + \lambda_{n-1} - F'_{y'_n} = 0.$$

Deriviamo queste equazioni 0, 1, ..., $n-1$ volte, e sommiamo i risultati dando loro segni alterni; si otterrà:

$$F_{y_1} + \lambda'_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} [F_{y_i}^{(i-1)} + \lambda_{i-1}^{(i-1)} + \lambda_i^{(i)}]$$
$$+ (-1)^{n-1} [F_{y_n}^{(n-1)} + \lambda_{n-1}^{(n-1)} - F_{y'_n}^{(n)}] = 0,$$

ossia:

$$F_{y_1} - F'_{y_2} + F''_{y_3} - \cdots + (-1)^{n-1} F^{(n-1)}_{y_n} + (-1)^n F^{(n)}_{y'_n} = 0,$$

e per le (13):

$$F_y - F'_{y'} + F''_{y''} - \cdots + (-1)^{n-1} F^{(n-1)}_{y^{(n-1)}} + (-1)^n F^{(n)}_{y^{(n)}} = 0,$$

come si è già trovato.

Il determinante R prende in questo caso la forma seguente, che, per maggior chiarezza, scriviamo per $n = 3$:

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 F}{\partial {y'_3}^2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

il suo valore è $\dfrac{\partial^2 F}{\partial {y'_3}^2}$, ossia $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''^2}$, e in generale $(-1)^{n-1} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {y^{(n)}}^2}$, sicchè R è nullo sempre e soltanto quando F è lineare intera rispetto ad $y^{(n)}$ (cfr. § 42 *d*).

b) Consideriamo il problema isoperimetrico; si vogliano i massimi e i minimi dell'integrale:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx$$

sotto la condizione:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx = l.$$

Posto:

$$\int_{x_0}^{x} G(x, y, y')\, dx = z,$$

il problema può enunciarsi così: Determinare le funzioni y, z legate dalla relazione:

$$G(x, y, y') - z' = 0,$$

colle condizioni iniziali:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = 0, \quad z(x_1) = l,$$

in modo che l'integrale I sia massimo o minimo.

Si ha allora:

$$K = F + \lambda(G - z'),$$

e le equazioni da integrarsi sono:

$$K_y - K'_{y'} = 0, \qquad K_z - K'_{z'} = 0.$$

Ora:

$$K_y = F_y + \lambda G_y, \qquad K_z = 0,$$

$$K_{y'} = F_{y'} + \lambda G_{y'}, \qquad K_{z'} = -\lambda,$$

quindi le equazioni scritte divengono:

$$F_y + \lambda G_y - (F'_{y'} + \lambda G'_{y'} + \lambda' G_{y'}) = 0,$$

$$\lambda' = 0,$$

da cui, come si è già trovato:

$$F_y + \lambda G_y - (F'_{y'} + \lambda G'_{y'}) = 0,$$

λ essendo costante.

48. È ovvio che la teoria esposta è immediatamente applicabile al caso in cui tanto x che le funzioni y_i si considerino come funzioni d'un parametro. Affinchè il problema sia indipendente dalla scelta del parametro, è necessario e sufficiente che le funzioni F, $H_1, \ldots, H_m$ sieno omogenee positive di primo grado rispetto alle derivate di x e delle y_i.

49. ESEMPI. — 15. V. l'enunciato nel § 43.

Vogliamo trattare questo problema come caso particolare del problema di LAGRANGE.

Si ha, posto $y = y_1$, $y' = y_2$:

$$F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = \frac{(1 + y_2^2)^2}{y_2'}, \quad H(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = y_2 - y_1',$$

quindi:

$$K(x, y_1, y_2, y_1', y_2', \lambda) = \frac{(1 + y_2^2)^2}{y_2'} + \lambda(y_2 - y_1'),$$

e le equazioni (8) divengono:

$$-\lambda = v_1, \qquad \frac{-(1 + y_2^2)^2}{y_2'^2} = v_2, \qquad y_2 - y_1' = 0,$$

da cui:

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = \frac{1 + y_2^2}{\sqrt{-v_2}}, \qquad \lambda = -v_1.$$

Si ha pertanto il sistema differenziale:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1 + y_2^2}{\sqrt{-v_2}}, \quad \frac{dv_1}{dx} = 0, \quad \frac{dv_2}{dx} = 4y_2\sqrt{-v_2} - v_1.$$

Posto $v_2 = -t^2$, il sistema può scriversi:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{y_2} = \frac{dy_2}{\frac{1 + y_2^2}{t}} = \frac{dv_1}{0} = \frac{dt}{\frac{-4y_2t + v_1}{2t}}.$$

Un integrale è $v_1 = 4a$. Si ha poi:

$$(1 + y_2^2)dt + 2(y_2t - a)dy_2 = 0,$$

da cui:

$$t = \frac{2(b + ay_2)}{1 + y_2^2},$$

e quindi:

$$dx = \frac{2(b + ay_2)}{(1 + y_2^2)^2} dy_2, \qquad dy_1 = \frac{2y_2(b + ay_2)}{(1 + y_2^2)^2} dy_2,$$

che coincidono coi risultati già ottenuti.

19. *Trovare le geodetiche d'una data superficie.*

Si tratta di rendere minimo l'integrale:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

essendo le x, y, z legate dall'equazione della superficie:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Le equazioni da integrarsi sono:

$$(15) \quad K_x - K'_{x'} = 0, \qquad K_y - K'_{y'} = 0, \qquad K_z - K'_{z'} = 0,$$

dove:

$$K = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda f,$$

λ essendo una funzione da determinarsi del parametro t. Le (15) divengono:

$$\lambda f_x - \left(\frac{x'}{s'}\right)' = 0, \qquad \lambda f_y - \left(\frac{y'}{s'}\right)' = 0, \qquad \lambda f_z - \left(\frac{z'}{s'}\right)' = 0,$$

posto:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2,$$

ossia:

$$(16) \quad \lambda f_x = \frac{s'x'' - s''x'}{s'^2}, \qquad \lambda f_y = \frac{s'y'' - s''y'}{s'^2}, \qquad \lambda f_z = \frac{s'z'' - s''z'}{s'^2}.$$

I tre binomi a destra sono proporzionali ai coseni direttori della normale principale alla curva, mentre f_x, f_y, f_z sono proporzionali ai coseni direttori della normale alla superficie; quindi le (16) esprimono la proprietà nota delle geodetiche, che *la normale principale alla geodetica coincide colla normale alla superficie.*

Posto:

$$y'z'' - y''z' = \xi, \qquad z'x'' - z''x' = \eta, \qquad x'y'' - x''y' = \zeta,$$

si ha:

$$s'(s'x'' - s''x') = \eta z' - \zeta y',$$

e le analoghe, sicchè le (16) possono scriversi:

$$\lambda f_x = \frac{\eta z' - \zeta y'}{s'^3}, \qquad \lambda f_y = \frac{\zeta x' - \xi z'}{s'^3}, \qquad \lambda f_z = \frac{\xi y' - \eta x'}{s'^3}.$$

Moltiplicando per ξ, η, ζ e sommando, risulta:

(17) $$\xi f_x + \eta f_y + \zeta f_z = 0,$$

che è l'equazione differenziale delle geodetiche, essendo le x, y, z legate dalla relazione $f = 0$.

Per mettere l'equazione sotto la forma ordinaria, supponiamo l'equazione della superficie risolta rispetto a z:

(18) $$z = g(x, y),$$

ed indichiamo, come ordinariamente si usa, con p, q, r, s, t le derivate parziali prime e seconde di z rispetto ad x e ad y. La (17) diviene:

(19) $$p\xi + q\eta - \zeta = 0.$$

Ora dalla (18) segue:

$$z' = px' + qy',$$

$$\begin{aligned} z'' &= px'' + qy'' + (rx' + sy')x' + (sx' + ty')y' \\ &= px'' + qy'' + rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2, \end{aligned}$$

quindi la (19) diviene:

$$(py' - qx')(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) - (p^2 + q^2 + 1)(x'y'' - x''y') = 0.$$

Se in particolare si prende come parametro x, si ha:

$$(py' - q)(ty'^2 + 2sy' + r) - (p^2 + q^2 + 1)y'' = 0.$$

Consideriamo alcuni casi particolari.

a) Sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

La (17) diviene:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

equazione la quale esprime che le x, y, z sono legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$ax + by + cz = 0.$$

Le geodetiche giacciono dunque in piani passanti pel centro della sfera, cioè sono cerchi massimi.

b) Cilindro:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

La (17) diviene:

$$\xi \varphi_x + \eta \varphi_y = 0,$$

mentre dall'equazione della superficie segue:

$$x' \varphi_x + y' \varphi_y = 0.$$

Dev'essere quindi:

$$\xi y' - \eta x' = 0,$$

relazione la quale esprime che la normale principale è perpendicolare alle generatrici del cilindro. Essa può anche scriversi:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{x'x'' + y'y''}{x'^2 + y'^2},$$

da cui, integrando due volte:

$$z' = c\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

$$z = c\int \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

Quest'ultima equazione esprime (cfr. § 45, Es. 18) che la curva cercata nello sviluppo del cilindro sopra un piano si trasforma in una retta, cioè che taglia le generatrici sotto angolo costante.

20. *Fra tutte le curve, che congiungono due punti dati* P_0, P_1 *dello spazio ed hanno in tutti i loro punti flessione costante* $\frac{1}{h}$, *trovare quella di lunghezza minima.*

Preso come parametro l'arco s della curva, l'integrale da rendersi minimo è:

$$I = \int_0^{s_1} ds$$

(dove s_1 è incognito), mentre le funzioni x, y, z di s sono legate dalle relazioni:

$$(20)\qquad \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = \dfrac{1}{h^2}. \end{cases}$$

Si ha dunque:

$$\Phi = 1 + \lambda(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1) + \mu\left(x''^2 + y''^2 + z''^2 - \frac{1}{h^2}\right),$$

e le equazioni da integrarsi sono:

$$\Phi_{x'} - \Phi'_{x''} = 2a, \qquad \Phi_{y'} - \Phi'_{y''} = 2b, \qquad \Phi_{z'} - \Phi'_{z''} = 2c,$$

cioè:

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda x' - \mu' x'' - \mu x''' = a, \\ \lambda y' - \mu' y'' - \mu y''' = b, \\ \lambda z' - \mu' z'' - \mu z''' = c. \end{cases}$$

Ne segue:

$$\mu'(y'z'' - y''z') + \mu(y'z''' - y'''z') = bz' - cy',$$

da cui integrando:

$$\mu(y'z'' - y''z') = bz - cy + a_1,$$

ed analogamente:

$$\mu(z'x'' - z''x') = cx - az + b_1,$$

$$\mu(x'y'' - x''y') = ay - bx + c_1,$$

donde:

$$(bz - cy + a_1)x' + (cx - az + b_1)y' + (ay - bx + c_1)z' = 0,$$

essendo le x, y, z legate dalle relazioni (20).

Scriviamo l'ultima equazione trovata così:

$$(bz - cy + a_1)dx + (cx - az + b_1)dy + (ay - bx + c_1)dz = 0.$$

Se questa equazione si considera come un'equazione a differenziali totali, e se la condizione d'integrabilità è per essa soddisfatta, essa è *completamente integrabile*, cioè è integrabile indipendentemente da qualunque relazione che possa esistere tra x, y, z. La condizione accennata è:

$$(bz - cy + a_1)\left[\frac{\partial(cx - az + b_1)}{\partial z} - \frac{\partial(ay - bx + c_1)}{\partial y}\right]$$

$$+ (cx - az + b_1)\left[\frac{\partial(ay - bx + c_1)}{\partial x} - \frac{\partial(bz - cy + a_1)}{\partial z}\right]$$

$$+ (ay - bx + c_1)\left[\frac{\partial(bz - cy + a_1)}{\partial y} - \frac{\partial(cx - az + b_1)}{\partial x}\right] = 0,$$

ossia:

(22) $$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0.$$

Sotto questa condizione l'integrale dell'equazione è:

$$\frac{bz - cy + a_1}{cx - az + b_1} = \text{cost.},$$

che rappresenta un piano. Dunque, se la posizione dei punti P_0, P_1 e il valore di h sono tali che tra le costanti d'integrazione abbia luogo la relazione (22), le estremali sono curve piane, e quindi (essendo a flessione costante) cerchi.

Consideriamo ora il caso generale.

Dalle (20) segue:

$$(23)\qquad x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \qquad x''x''' + y''y''' + z''z''' = 0;$$

sostituendo nell'identità:

$$(x'y'' - x''y')^2 = (x'^2 + y'^2)(x''^2 + y''^2) - (x'x'' + y'y'')^2,$$

risulta:

$$(x'y'' - x''y')^2 = (1 - z'^2)\left(\frac{1}{h^2} - z''^2\right) - z'^2 z''^2$$
$$= \frac{1}{h^2}(1 - z'^2 - h^2 z''^2).$$

Prendiamo come asse z una retta avente i coseni direttori proporzionali ad a, b, c. Dovrà porsi $a = b = 0$, $c = 1$.

Dopo ciò, moltiplicando le (21) rispettivamente per x'', y'', z'' e sommando, si ottiene, in virtù delle (20), (23):

$$-\frac{\mu'}{h^2} = z'',$$

da cui integrando:

$$\mu = h^2(C - z').$$

Mediante le espressioni trovate l'equazione:

$$\mu(x'y'' - x''y') = c_1$$

diviene, posto hc_1 in luogo di c_1:

$$(24) \qquad (C - z')\sqrt{1 - z'^2 - h^2 z''^2} = c_1 \quad ^{1)}.$$

Colla sostituzione $z' = u$ si ha di qui:

$$(25) \qquad ds = \frac{h(C-u)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(C-u)^2 - c_1^2}},$$

che è il differenziale d'un integrale ellittico. Trovato z' come funzione di s, si ha poi:

$$x'y'' - x''y' = \frac{1}{h}\sqrt{1 - z'^2 - h^2 z''^2} = \frac{c_1}{h(C - z')},$$

quindi:

$$\frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{c_1}{h(C - z')(1 - z'^2)},$$

da cui integrando:

$$\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'} = \frac{c_1}{h}\int\frac{ds}{(C - z')(1 - z'^2)},$$

che è una funzione nota di s. Indicandola con $\psi(s)$, si ha:

$$x' = \sqrt{1 - z'^2}\cos\psi(s),$$

$$y' = \sqrt{1 - z'^2}\operatorname{sen}\psi(s),$$

ed infine:

$$x = \int\sqrt{1 - z'^2}\cos\psi(s)\,ds, \qquad y = \int\sqrt{1 - z'^2}\operatorname{sen}\psi(s)\,ds,$$

che, insieme alla z ottenuta dall'integrazione di z', rappresentano le estremali.

Il passaggio dalla (24) alla (25) presuppone $z'' \neq 0$. Se invece

---

[1]) Dev'essere $c_1 \neq 0$, perchè nel caso contrario sussisterebbe la (22).

$z'' = 0$, ne segue $z' = k$ (costante), e quindi:

$$x'^2 + y'^2 = 1 - k^2, \qquad x''^2 + y''^2 = \frac{1}{h^2},$$

donde:

$$x' x'' + y' y'' = 0, \qquad x' y'' - x'' y' = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{h}.$$

Ne segue:

$$\frac{x' y'' - x'' y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{h\sqrt{1 - k^2}},$$

e integrando:

$$\operatorname{arctg} \frac{y'}{x'} = m s + n,$$

posto:

$$\frac{1}{h\sqrt{1 - k^2}} = m,$$

ed essendo n una nuova costante. Può anche scriversi:

$$\frac{y'}{x'} = \operatorname{tang}(m s + n),$$

da cui, in virtù delle precedenti:

$$x' = \sqrt{1 - k^2}\cos(m s + n), \qquad y' = \sqrt{1 - k^2}\operatorname{sen}(m s + n),$$

e integrando, a meno di costanti additive:

$$x = h(1 - k^2)\operatorname{sen}(m s + n), \qquad y = -\,h(1 - k^2)\cos(m s + n),$$

che, insieme alla $z = k s$, rappresentano un'elica cilindrica.

21. *Brachistocrona in un mezzo resistente.*

L'integrale da rendersi minimo è (cfr. § 8, Es. 3):

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{v}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,d t,$$

dove v è la velocità nel punto di parametro t. Si suppone la resistenza R funzione della velocità:

$$R = \varphi(v),$$

e diretta in senso contrario al moto. Allora, preso l'asse z verticale, e ammesso che il punto pesante abbia la massa 1, l'equazione delle forze vive è:

$$v\,dv = g\,dz - \varphi(v)\,ds,$$

ossia:

$$v\,v' = g\,z' - \varphi(v)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

e la funzione da considerarsi è:

$$\Phi = \frac{1}{v}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda\left[v\,v' - g\,z' + \varphi(v)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{v} + \lambda\,\varphi(v)\right]\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} + \lambda\,v\,v' - \lambda\,g\,z',$$

dove figurano le 4 funzioni incognite x, y, z, v e le loro derivate prime. Essendo:

$$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0,$$

le equazioni di EULERO divengono:

$$\Phi_{x'} = a, \qquad \Phi_{y'} = b, \qquad \Phi_{z'} = c, \qquad \Phi_v - \Phi'_{v'} = 0,$$

cioè:

$$\psi(v,\ \lambda)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = a,$$

$$\psi(v,\ \lambda)\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = b,$$

$$\psi(v,\ \lambda)\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} - \lambda g = c,$$

$$\frac{\partial\psi(v,\ \lambda)}{\partial v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}+\lambda v'-(\lambda v)'=\frac{\partial\psi(v,\ \lambda)}{\partial v}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}-\lambda' v=0,$$

posto:

(26) $$\frac{1}{v} + \lambda\varphi(v) = \psi(v, \lambda).$$

Dalle due prime segue:

$$b x' - a y' = 0,$$

da cui integrando:

$$b x - a y = C.$$

Il movimento ha luogo dunque in un piano verticale. Preso questo come piano xz, il sistema si riduce alle 3 equazioni colle 4 funzioni incognite x, z, v, λ:

$$\psi(v, \lambda)\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} = a,$$

$$\psi(v, \lambda)\frac{z'}{\sqrt{x'^2 + z'^2}} - \lambda g = c,$$

$$\frac{\partial\psi(v, \lambda)}{\partial v}\sqrt{x'^2 + z'^2} - \lambda' v = 0,$$

alle quali deve associarsi l'equazione di condizione:

$$v v' - g z' + \varphi(v)\sqrt{x'^2 + z'^2} = 0.$$

Preso come parametro l'arco, cioè posto:

$$x'^2 + z'^2 = 1,$$

le equazioni divengono:

(27) $$\begin{cases} \psi(v, \lambda)x' = a, \\ \psi(v, \lambda)z' - \lambda g = c, \\ \dfrac{\partial\psi(v, \lambda)}{\partial v} - \lambda' v = 0, \\ v v' - g z' + \varphi(v) = 0, \end{cases}$$

dove $\psi(v, \lambda)$ è definita dalla (26). Ne segue anzitutto:

$$\psi^2(v, \lambda) = a^2 + (\lambda g + c)^2,$$

ossia:

$$\left[\frac{1}{v} + \lambda\varphi(v)\right]^2 = a^2 + (\lambda g + c)^2, \tag{28}$$

da cui si ottiene λ in funzione di v:

$$\lambda = \theta(v),$$

e quindi:

$$\psi(v, \lambda) = \frac{1}{v} + \theta\varphi,$$

$$\frac{\partial\psi(v, \lambda)}{\partial v} = -\frac{1}{v^2} + \theta\varphi'.$$

Dopo ciò si ha:

$$ds = \frac{v\,d\lambda}{\dfrac{\partial\psi(v, \lambda)}{\partial v}} = \frac{v\,\theta'\,dv}{-\dfrac{1}{v^2} + \theta\varphi'} = \eta(v)\,dv, \tag{29}$$

quindi:

$$dx = \frac{a\eta\,dv}{\dfrac{1}{v} + \theta\varphi}, \qquad dz = \frac{(g\theta + c)\eta\,dv}{\dfrac{1}{v} + \theta\varphi},$$

donde si hanno x e z in funzione di v, od anche, mediante la (29), in funzione di s.

L'ultima delle (27) risulta identicamente soddisfatta. Infatti segue dalla (28):

$$\frac{d\lambda}{dv} = -\frac{\psi\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\psi\varphi - g(\lambda g + c)},$$

quindi per la terza delle (27):

$$v\frac{dv}{ds} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial v}}{\dfrac{d\lambda}{dv}} = -\frac{\psi\varphi - g(\lambda g + c)}{\psi} = \frac{g(\lambda g + c)}{\psi} - \varphi;$$

d'altra parte dalla seconda della (27) si ha:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\lambda g + c}{\psi}.$$

Quindi:

$$v\frac{dv}{ds} - g\frac{dz}{ds} + \varphi = 0,$$

che è l'ultima delle (27).

CAPITOLO IX.

INTEGRALI DOPPI.

50. Per trattare dei massimi e minimi degli integrali doppi, dobbiamo premettere alcuni cenni intorno alle coordinate curvilinee.

Una superficie può rappresentarsi analiticamente mediante tre equazioni:

$$(1) \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

dove u e v sono due parametri tali, che ad ogni coppia di valori di essi corrisponde un punto della superficie (o della parte di essa che si considera).

Indicando al solito con p, q le derivate parziali prime di z rispetto ad x e ad y nell'ipotesi che l'equazione della superficie abbia la forma:

$$z = f(x, y),$$

risulta:

$$z_u = p x_u + q y_u, \qquad z_v = p x_v + q y_v,$$

quindi, posto:

$$(2) \quad y_u z_v - y_v z_u = A, \qquad z_u x_v - z_v x_u = B, \qquad x_u y_v - x_v y_u = C,$$

si ottiene:

$$p = -\frac{A}{C}, \qquad q = -\frac{B}{C},$$

sicchè i coseni direttori della normale (positiva) alla superficie sono:

$$\lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \nu = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Si suol scrivere:

$$x_u^2+y_u^2+z_u^2=E, \qquad x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v=F, \qquad x_v^2+y_v^2+z_v^2=G,$$

donde, per una nota identità:

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2.$$

Dalle identità:

$$Ax_u+By_u+Cz_u=0, \qquad Ax_v+By_v+Cz_v=0$$

segue derivando:

$$Ax_{uu}+By_{uu}+Cz_{uu}+A_u x_u+B_u y_u+C_u z_u=0,$$

$$Ax_{uv}+By_{uv}+Cz_{uv}+A_v x_u+B_v y_u+C_v z_u=0,$$

$$Ax_{uv}+By_{uv}+Cz_{uv}+A_u x_v+B_u y_v+C_u z_v=0,$$

$$Ax_{vv}+By_{vv}+Cz_{vv}+A_v x_v+B_v y_v+C_v z_v=0.$$

Si suol porre:

$$D=Ax_{uu}+By_{uu}+Cz_{uu}=-(A_u x_u+B_u y_u+C_u z_u),$$

$$D'=Ax_{uv}+By_{uv}+Cz_{uv}=-(A_u x_v+B_u y_v+C_u z_v)$$
$$=-(A_v x_u+B_v y_u+C_v z_u),$$

$$D''=Ax_{vv}+By_{vv}+Cz_{vv}=-(A_v x_v+B_v y_v+C_v z_v).$$

Il significato geometrico dei parametri u, v è evidente. Le linee su cui u o v è costante formano un reticolo che ricopre la superficie, e ciascun punto di questa è individuato dalle due linee che si intersecano in esso. La condizione necessaria e sufficiente perchè i due sistemi di linee si taglino ortogonalmente è $F = 0$.

La lunghezza dell'arco elementare congiungente i punti (u, v), $(u + du, v + dv)$ è:

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

L'area del quadrilatero elementare avente i vertici nei punti (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$ è:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv.$$

Se U, V è un nuovo sistema di coordinate curvilinee legate alle primitive dalle relazioni:

(3) $$u = \varphi(U, V), \qquad v = \psi(U, V),$$

si ha:

$$x_u y_v - x_v y_u = (x_U y_V - x_V y_U)\frac{d(U, V)}{d(u, v)},$$

e le analoghe; quindi, affinchè il senso positivo della normale si mantenga, dev'essere su tutta la superficie:

(4) $$\frac{d(U, V)}{d(u, v)} > 0.$$

Le formole (1) si possono interpretare come una corrispondenza tra i punti della superficie e quelli di un piano di cui u, v sieno le coordinate cartesiane. Se si fa sistema delle equazioni (1) e di un'equazione tra u e v:

(5) $$\omega(u, v) = 0,$$

si ottiene una linea posta sulla superficie; l'imagine di questa linea nel piano uv ha l'equazione $\omega(u, v) = 0$.

51. Sieno le (1) le equazioni d'una superficie, e sia data su questa una linea (5), che supporremo chiusa e senza punti doppi, ed un integrale esteso alla parte di superficie contenuta entro questa linea:

$$I = \int\int \Phi(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v)\, du\, dv.$$

Si applichi ai parametri la trasformazione (3), che soddisfaccia alla condizione (4), e sieno:

$$x = X(U, V), \qquad y = Y(U, V), \qquad z = Z(U, V),$$

$$\Omega(U, V) = 0$$

le trasformate delle (1), (5). Vogliamo stabilire le condizioni perchè l'integrale:

$$\int\int \Phi(X, Y, Z, X_U, Y_U, Z_U, X_V, Y_V, Z_V)\, dU\, dV$$

esteso alla stessa parte di superficie già considerata [il cui contorno ha ora l'equazione $\Omega(U, V) = 0$] abbia lo stesso valore di I, qualunque sia il campo d'integrazione.

Introducendo in quest'ultimo integrale le variabili u, v, esso diviene:

$$\int\int \Phi(X, Y, Z, X_U, Y_U, Z_U, X_V, Y_V, Z_V) \frac{d(U, V)}{d(u, v)}\, du\, dv,$$

dove le U, V devono intendersi espresse per le u, v; il campo d'integrazione è quello dell'integrale I. Pertanto, affinchè l'ultimo integrale scritto coincida con I qualunque sia il campo d'integrazione, dovrà essere:

$$(6) \quad \begin{cases} \Phi(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) \\ = \Phi(X, Y, Z, X_U, Y_U, Z_U, X_V, Y_V, Z_V) \dfrac{d(U, V)}{d(u, v)}, \end{cases}$$

dove è da osservarsi che le $X(U, V)$, $Y(U, V)$, $Z(U, V)$, in cui le

U, V si intendono espresse per le u, v, coincidono colle $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Poniamo:

$$U = u + \varepsilon\rho, \qquad V = v + \varepsilon\sigma,$$

dove ε è una costante arbitraria e ρ, σ sono funzioni qualunque di u, v. Tenendo conto soltanto della prima potenza di ε, si avrà:

$$x = X(U, V) = X(u + \varepsilon\rho, v + \varepsilon\sigma) = X + \varepsilon(\rho X_u + \sigma X_v) = X + \varepsilon\xi,$$

$$y = Y(U, V) = Y(u + \varepsilon\rho, v + \varepsilon\sigma) = Y + \varepsilon(\rho Y_u + \sigma Y_v) = Y + \varepsilon\eta,$$

$$z = Z(U, V) = Z(u + \varepsilon\rho, v + \varepsilon\sigma) = Z + \varepsilon(\rho Z_u + \sigma Z_v) = Z + \varepsilon\zeta,$$

dove con X, Y, Z si indicano $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$; inoltre:

$$\frac{d(U, V)}{d(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 + \varepsilon\rho_u & \varepsilon\rho_v \\ \varepsilon\sigma_u & 1 + \varepsilon\sigma_v \end{vmatrix} = 1 + \varepsilon(\rho_u + \sigma_v).$$

Quindi la (6) diviene:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Phi[X + \varepsilon\xi, \ldots, X_u + \varepsilon\xi_u, \ldots, X_v + \varepsilon\xi_v, \ldots] \\ &= \Phi[X(u + \varepsilon\rho, v + \varepsilon\sigma), \ldots][1 + \varepsilon(\rho_u + \sigma_v)]. \end{aligned} \right.$$

Ora:

$$\begin{aligned} \Phi(X + \varepsilon\xi, \ldots, X_u + \varepsilon\xi_u, \ldots, X_v + \varepsilon\xi_v, \ldots) = \Phi + \varepsilon[\Phi_X\xi + \Phi_Y\eta + \Phi_Z\zeta \\ + \Phi_{X_u}\xi_u + \Phi_{Y_u}\eta_u + \Phi_{Z_u}\zeta_u + \Phi_{X_v}\xi_v + \Phi_{Y_v}\eta_v + \Phi_{Z_v}\zeta_v], \end{aligned}$$

$$\Phi[X(u + \varepsilon\rho, v + \varepsilon\sigma), \ldots] = \Phi + \varepsilon(\Phi_u\rho + \Phi_v\sigma),$$

dove:

$$\Phi \equiv \Phi(X, Y, Z, X_u, Y_u, Z_u, X_v, Y_v, Z_v).$$

Risulta quindi dalla (7):

$$\Phi_X\xi + \cdots + \Phi_{X_u}\xi_u + \cdots + \Phi_{X_v}\xi_v + \cdots = \Phi_u\rho + \Phi_v\sigma + \Phi(\rho_u + \sigma_v),$$

ossia sviluppando:

$$\Phi_X(\rho X_u+\sigma X_v)+\cdots+\Phi_{X_u}(\rho X_{uu}+\sigma X_{uv}+\rho_u X_u+\sigma_u X_v)+\cdots$$
$$\cdots+\Phi_{X_v}(\rho X_{uv}+\sigma X_{vv}+\rho_v X_u+\sigma_v X_v)+\cdots=\Phi_u\rho+\Phi_v\sigma+\Phi(\rho_u+\sigma_v),$$

ed eguagliando i coefficienti di ρ, σ, ρ_u, σ_u, ρ_v, σ_v:

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi_X X_u + \cdots + \Phi_{X_u} X_{uu} + \cdots + \Phi_{X_v} X_{uv} + \cdots = \Phi_u, \\ \Phi_X X_v + \cdots + \Phi_{X_u} X_{uv} + \cdots + \Phi_{X_v} X_{vv} + \cdots = \Phi_v, \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_{X_u} X_u + \Phi_{Y_u} Y_u + \Phi_{Z_u} Z_u = \Phi, \\ \Phi_{X_u} X_v + \Phi_{Y_u} Y_v + \Phi_{Z_u} Z_v = 0, \\ \Phi_{X_v} X_u + \Phi_{Y_v} Y_u + \Phi_{Z_v} Z_u = 0, \\ \Phi_{X_v} X_v + \Phi_{Y_v} Y_v + \Phi_{Z_v} Z_v = \Phi. \end{cases}$$

Le (8) sono identità. Dalle (9) segue, scrivendo, per comodità tipografica, x, y, z in luogo di X, Y, Z:

$$\Phi_{x_u} x_v + \Phi_{y_u} y_v + \Phi_{z_u} z_v = 0,$$

$$\Phi_{x_v} x_u + \Phi_{y_v} y_u + \Phi_{z_v} z_u = 0,$$

$$\Phi_{x_u} x_u + \Phi_{y_u} y_u + \Phi_{z_u} z_u - \Phi_{x_v} x_v - \Phi_{y_v} y_v - \Phi_{z_v} z_v = 0.$$

Questo sistema di 3 equazioni a derivate parziali lineari omogenee a 6 variabili indipendenti si integra facilmente; si trova [1]) che

---

[1]) Anche senza ricorrere ai noti metodi d'integrazione dei sistemi di equazioni a derivate parziali, l'integrazione del sistema:

$$(a)\qquad \Phi_r \rho + \Phi_s \sigma + \Phi_t \tau = 0,$$

$$(b)\qquad \Phi_\rho r + \Phi_\sigma s + \Phi_\tau t = 0,$$

$$(c)\qquad \Phi_r r + \Phi_s s + \Phi_t t - \Phi_\rho \rho - \Phi_\sigma \sigma - \Phi_\tau \tau = 0,$$

esso ammette i tre integrali indipendenti A, B, C rappresentati dalle (2), quindi ogni suo integrale è una funzione di A, B, C. Sarà

---

dove abbiamo scritto per semplicità r, s, t, ρ, σ, τ in luogo di x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, può farsi elementarmente come segue.

Il sistema ausiliario della (a) è:

$$\frac{dr}{\rho} = \frac{ds}{\sigma} = \frac{dt}{\tau} = \frac{d\rho}{0} = \frac{d\sigma}{0} = \frac{d\tau}{0},$$

donde gli integrali:

$$\rho = \text{cost.}, \quad \sigma = \text{cost.}, \quad \tau = \text{cost.}, \quad s\tau - t\sigma = A = \text{cost.}, \quad t\rho - r\tau = B = \text{cost.},$$

sicchè, indicando con ψ una funzione arbitraria, l'integrale della (a) è:

$$\Phi = \psi(\rho, \sigma, \tau, A, B).$$

Ne segue:

$$\Phi_r = -\psi_B \tau, \qquad \Phi_s = \psi_A \tau, \qquad \Phi_t = -\psi_A \sigma + \psi_B \rho,$$

$$\Phi_\rho = \psi_\rho + \psi_B t, \qquad \Phi_\sigma = \psi_\sigma - \psi_A t, \qquad \Phi_\tau = \psi_\tau + \psi_A s - \psi_B r;$$

sostituendo queste espressioni nella (c), risulta:

$$(d) \qquad \psi_\rho \rho + \psi_\sigma \sigma + \psi_\tau \tau = 0.$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{d\tau}{\tau} = \frac{dA}{0} = \frac{dB}{0};$$

esso ha gli integrali:

$$\frac{\rho}{\tau} = \text{cost.}, \qquad \frac{\sigma}{\tau} = \text{cost.}, \qquad A = \text{cost.}, \qquad B = \text{cost.}$$

L'integrale generale della (d) è dunque:

$$\Phi = \psi = \eta(\lambda, \mu, A, B),$$

dove η è funzione arbitraria, e dove si è posto:

$$\frac{\rho}{\tau} = \lambda, \qquad \frac{\sigma}{\tau} = \mu.$$

pertanto:

$$\Phi(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v) = \Theta(x, y, z, A, B, C).$$

Di qui segue:

$$\Phi_{x_u} = - z_v \Theta_B + y_v \Theta_C, \qquad \Phi_{y_u} = z_v \Theta_A - x_v \Theta_C,$$

$$\Phi_{z_u} = - y_v \Theta_A + x_v \Theta_B,$$

e sostituendo nella prima delle (9):

$$A\Theta_A + B\Theta_B + C\Theta_C = \Theta,$$

la quale relazione esprime che Θ dev'essere omogenea di primo grado in A, B, C.

Reciprocamente, se Θ, ossia Φ, è omogenea di primo grado in A, B, C, introducendo dei nuovi parametri U, V, le A, B, C risultano

---

Si ha poi:

$$\Phi_\rho = \eta_\lambda \frac{1}{\tau} + \eta_B t, \quad \Phi_\sigma = \eta_\mu \frac{1}{\tau} - \eta_A t, \quad \Phi_\tau = - \eta_\lambda \frac{\rho}{\tau^2} - \eta_\mu \frac{\sigma}{\tau^2} + \eta_A s - \eta_B r;$$

sostituendo nella (b), risulta:

$$- B\eta_\lambda + A\eta_\mu = 0.$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{d\lambda}{-B} = \frac{d\mu}{A} = \frac{dA}{0} = \frac{dB}{0},$$

donde gli integrali:

$$A\lambda + B\mu = \text{cost.}, \qquad A = \text{cost.}, \qquad B = \text{cost.}$$

Ora:

$$A\lambda + B\mu = \frac{1}{\tau}(A\rho + B\sigma) = - C,$$

sicchè il primo integrale può scriversi $C = \text{cost.}$

Pertanto il sistema considerato ha i 3 integrali indipendenti A, B, C.

moltiplicate per $\frac{d(u, v)}{d(U, V)}$, e quindi per lo stesso fattore risulta moltiplicata Φ, e la relazione (6) è soddisfatta. Può concludersi che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè il valore dell'integrale I non dipenda dalla scelta dei parametri è che in Φ le x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v entrino soltanto nelle combinazioni A, B, C, e che Φ sia rispetto ad A, B, C omogenea positiva [1]) *di primo grado.*

Deriviamo la prima delle (9) rispetto ad u e la terza rispetto a v e sommiamo; risulta, indicando con Σ le somme di termini simili contenenti rispettivamente x, y, z:

$$\sum \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} x_u + \sum \Phi_{x_u} x_{uu} + \sum \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} x_u + \sum \Phi_{x_v} x_{uv} = \Phi_u,$$

e sottraendo dalla prima delle (8):

$$\sum \left[\Phi_x - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v}\right] x_u = 0.$$

Analogamente si trova:

$$\sum \left[\Phi_x - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v}\right] x_v = 0.$$

Posto:

$$(10) \quad \left\{\begin{aligned} \Phi_x - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} &= P, \\ \Phi_y - \frac{\partial \Phi_{y_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{y_v}}{\partial v} &= Q, \\ \Phi_z - \frac{\partial \Phi_{z_u}}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{z_v}}{\partial v} &= R, \end{aligned}\right.$$

può scriversi:

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned} P x_u + Q y_u + R z_u &= 0, \\ P x_v + Q y_v + R z_v &= 0, \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Omogenea positiva, perchè noi consideriamo soltanto le trasformazioni per cui è soddisfatta la condizione (4).

donde:

(12) $$P:Q:R = A:B:C.$$

52. Abbiasi nello spazio una linea chiusa semplice c. Essa può essere il contorno di infinite superficie; e, se la funzione Φ che figura nell'integrale I del § prec. soddisfa alla condizione stabilita nel § stesso, per ciascuna superficie l'integrale I prende un valore determinato, indipendente dalla rappresentazione parametrica assunta. Possiamo pertanto chiederci per quali superficie aventi il contorno c l'integrale abbia valore massimo o minimo.

Procedendo come nei casi già trattati, alle funzioni x, y, z sostituiamo le funzioni $x+\varepsilon\xi$, $y+\varepsilon\eta$, $z+\varepsilon\zeta$, dove ξ, η, ζ sono nulle sul contorno. Dovrà essere:

$$o = I'(o) = \int\int [\sum \Phi_x \xi + \sum \Phi_{x_u} \xi_u + \sum \Phi_{x_v} \xi_v]\, d u\, d v.$$

Ora:

$$\Phi_{x_u} \xi_u = \frac{\partial(\Phi_{x_u} \xi)}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} \xi,$$

quindi:

$$\int\int \Phi_{x_u} \xi_u\, d u\, d v = \int\int \frac{\partial(\Phi_{x_u} \xi)}{\partial u} d u\, d v - \int\int \frac{\partial \Phi_{x_u}}{\partial u} \xi\, d u\, d v,$$

e per la formola di Green:

$$\int\int \frac{\partial(\Phi_{x_u} \xi)}{\partial u} d u\, d v = \int_c \Phi_{x_u} \xi\, d v,$$

dove il secondo integrale è esteso al contorno c; analogamente:

$$\int\int \Phi_{x_v} \xi_v\, d u\, d v = \int\int \frac{\partial(\Phi_{x_v} \xi)}{\partial v} d u\, d v - \int\int \frac{\partial \Phi_{x_v}}{\partial v} \xi\, d u\, d v,$$

e:

$$\int\int \frac{\partial(\Phi_{x_v} \xi)}{\partial v} d u\, d v = - \int_c \Phi_{x_v} \xi\, d u.$$

Si ha quindi, posto:

$$\Phi_{x_u}\xi + \Phi_{y_u}\eta + \Phi_{z_u}\zeta = M,$$

$$\Phi_{x_v}\xi + \Phi_{y_v}\eta + \Phi_{z_v}\zeta = N,$$

e tenendo presenti le (10):

$$\int\int(P\xi + Q\eta + R\zeta)\,du\,dv + \int_c(M\,dv - N\,du) = 0.$$

Ora, essendo sul contorno $\xi = \eta = \zeta = 0$, il secondo integrale è nullo, e l'equazione si riduce a:

$$\int\int(P\xi + Q\eta + R\zeta)\,du\,dv = 0,$$

donde seguono le equazioni, che diremo ancora di Eulero [1]):

$$(13)\qquad P = 0,\qquad Q = 0,\qquad R = 0.$$

Esse, in virtù delle (11) o della (12), si riducono ad un'equazione unica.

53. Sviluppiamo le equazioni (13).

Si ha:

$$\Phi_x = \Theta_x,\qquad \Phi_{x_u} = -z_v\Theta_B + y_v\Theta_C,\qquad \Phi_{x_v} = z_u\Theta_B - y_u\Theta_C,$$

---

[1]) Supponiamo, se è possibile, che in un punto della superficie sia $P \neq 0$, per es. $P > 0$; allora, per la continuità, sarà $P > 0$ in tutto un intorno di questo punto. Prendiamo un quadrilatero λ di vertici (u_0, v_0), (u_0, v_1), (u_1, v_0), (u_1, v_1) tutto contenuto nell'intorno; e facciamo $\eta = \zeta = 0$ su tutta la superficie, $\xi = 0$ fuori di λ, e:

$$\xi = (u - u_0)^3(u_1 - u)^3(v - v_0)^3(v_1 - v)^3$$

in λ. L'integrale doppio risulta essenzialmente positivo. Deve dunque essere su tutta la superficie $P = 0$, e analogamente si dimostra che deve essere $Q = 0$, $R = 0$.

quindi la $P = 0$ diviene:

$$\Theta_x - \frac{\partial}{\partial u}(-z_v \Theta_B + y_v \Theta_C) - \frac{\partial}{\partial v}(z_u \Theta_B - y_u \Theta_C) = 0.$$

Ora, per l'omogeneità:

$$\Theta_x = A\Theta_{xA} + B\Theta_{xB} + C\Theta_{xC},$$

inoltre:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}(-z_v \Theta_B + y_v \Theta_C) &= -z_{uv}\Theta_B + y_{uv}\Theta_C - \\ &- z_v[x_u\Theta_{xB} + y_u\Theta_{yB} + z_u\Theta_{zB} + A_u\Theta_{AB} + B_u\Theta_{BB} + C_u\Theta_{CB}] \\ &+ y_v[x_u\Theta_{xC} + y_u\Theta_{yC} + z_u\Theta_{zC} + A_u\Theta_{AC} + B_u\Theta_{BC} + C_u\Theta_{CC}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}(z_u \Theta_B - y_u \Theta_C) &= z_{uv}\Theta_B - y_{uv}\Theta_C \\ &+ z_u[x_v\Theta_{xB} + y_v\Theta_{yB} + z_v\Theta_{zB} + A_v\Theta_{AB} + B_v\Theta_{BB} + C_v\Theta_{CB}] - \\ &- y_u[x_v\Theta_{xC} + y_v\Theta_{yC} + z_v\Theta_{zC} + A_v\Theta_{AC} + B_v\Theta_{BC} + C_v\Theta_{CC}];\end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione trovata, risulta:

$$\begin{aligned}A(\Theta_{xA} + \Theta_{yB} + \Theta_{zC}) + A_u(z_v\Theta_{AB} - y_v\Theta_{AC}) + B_u(z_v\Theta_{BB} - y_v\Theta_{BC}) \\ + C_u(z_v\Theta_{CB} - y_v\Theta_{CC}) + A_v(-z_u\Theta_{AB} + y_u\Theta_{AC}) \\ + B_v(-z_u\Theta_{BB} + y_u\Theta_{BC}) + C_v(-z_u\Theta_{CB} + y_u\Theta_{CC}) = 0.\end{aligned}$$

Per porre l'equazione in forma simmetrica rispetto ad x, y, z, osserviamo che, per l'omogeneità, si ha:

$$A\Theta_{AA} + B\Theta_{AB} + C\Theta_{AC} = 0,$$

inoltre:

$$Ax_u + By_u + Cz_u = 0.$$

Da queste due equazioni segue:

$$A:B:C = -z_u\Theta_{AB} + y_u\Theta_{AC} : -x_u\Theta_{AC} + z_u\Theta_{AA} = -y_u\Theta_{AA} + x_u\Theta_{AB}.$$

Poniamo:

$$\frac{-z_u\Theta_{AB} + y_u\Theta_{AC}}{A} = \frac{-x_u\Theta_{AC} + z_u\Theta_{AA}}{B} = \frac{-y_u\Theta_{AA} + x_u\Theta_{AB}}{C} = L_1,$$

ed analogamente:

$$\frac{-z_u\Theta_{BB}+y_u\Theta_{BC}}{A}=\frac{-x_u\Theta_{BC}+z_u\Theta_{BA}}{B}=\frac{-y_u\Theta_{BA}+x_u\Theta_{BB}}{C}=M_1,$$

$$\frac{-z_u\Theta_{CB}+y_u\Theta_{CC}}{A}=\frac{-x_u\Theta_{CC}+z_u\Theta_{CA}}{B}=\frac{-y_u\Theta_{CA}+x_u\Theta_{CB}}{C}=N_1,$$

$$\frac{z_v\Theta_{AB}-y_v\Theta_{AC}}{A}=\frac{x_v\Theta_{AC}-z_v\Theta_{AA}}{B}=\frac{y_v\Theta_{AA}-x_v\Theta_{AB}}{C}=L_2,$$

$$\frac{z_v\Theta_{BB}-y_v\Theta_{BC}}{A}=\frac{x_v\Theta_{BC}-z_v\Theta_{BA}}{B}=\frac{y_v\Theta_{BA}-x_v\Theta_{BB}}{C}=M_2,$$

$$\frac{z_v\Theta_{CB}-y_v\Theta_{CC}}{A}=\frac{x_v\Theta_{CC}-z_v\Theta_{CA}}{B}=\frac{y_v\Theta_{CA}-x_v\Theta_{CB}}{C}=N_2.$$

L'equazione diviene, sopprimendo il fattore A:

$$\Theta_{xA}+\Theta_{yB}+\Theta_{zC}+A_uL_2+B_uM_2+C_uN_2+A_vL_1+B_vM_1+C_vN_1=0. \tag{14}$$

Si trovano poi facilmente le espressioni:

$$L_1=\frac{1}{EG-F^2}[(Ex_v-Fx_u)\Theta_{AA}+(Ey_v-Fy_u)\Theta_{AB}+(Ez_v-Fz_u)\Theta_{AC}],$$

$$L_2=\frac{1}{EG-F^2}[(Gx_u-Fx_v)\Theta_{AA}+(Gy_u-Fy_v)\Theta_{AB}+(Gz_u-Fz_v)\Theta_{AC}],$$

e le analoghe per M_1, N_1, M_2, N_2.

54. Quando la superficie è rappresentata analiticamente da un'equazione della forma:

$$z=f(x,\ y),$$

l'integrale I diviene:

$$I=\int\!\!\int F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dx\,dy,$$

e le (13) si riducono all'equazione:

$$F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0,$$

ossia:

$$(15)\quad F_z - F_{px} - F_{qy} - pF_{pz} - qF_{qz} - rF_{pp} - 2sF_{pq} - tF_{qq} = 0.$$

L'espressione $M\,dv - N\,du$ diviene:

$$F_p\,dy - F_q\,dx.$$

La (15) è un'equazione a derivate parziali del 2° ordine del tipo di MONGE. Ottenuto, se è possibile, il suo integrale generale, che dipende da due funzioni arbitrarie, si dovrà cercare di determinare queste funzioni in modo che la superficie passi per il contorno dato. Cioè, se $z = f(x, y)$ è l'integrale generale, e:

$$x = \alpha(z), \qquad y = \beta(z)$$

sono le equazioni del contorno, si dovranno determinare le due funzioni arbitrarie da cui dipende f in modo che sussista l'identità:

$$z = f[\alpha(z), \beta(z)].$$

Il problema, tranne in qualche caso speciale, presenta difficoltà notevoli.

55. Vogliamo vedere quale forma debba avere la funzione Θ perchè l'equazione d'EULERO sia identicamente soddisfatta.

Introducendo nella (14) le espressioni di A_u, B_u, C_u, A_v, B_v, C_v, essa diviene:

$$\begin{gathered}\Theta_{xA} + \Theta_{yB} + \Theta_{zC} + x_{uu}(y_v N_2 - z_v M_2) + y_{uu}(z_v L_2 - x_v N_2)\\ + z_{uu}(x_v M_2 - y_v L_2) + x_{uv}(z_u M_2 - y_u N_2 + y_v N_1 - z_v M_1)\\ + y_{uv}(x_u N_2 - z_u L_2 + z_v L_1 - x_v N_1)\\ + z_{uv}(y_u L_2 - x_u M_2 + x_v M_1 - y_v L_1) + x_{vv}(z_u M_1 - y_u N_1)\\ + y_{vv}(x_u N_1 - z_u L_1) + z_{vv}(y_u L_1 - x_u M_1) = 0.\end{gathered}$$

Affinchè l'equazione sussista identicamente, dev'essere:

$$\Theta_{xA} + \Theta_{yB} + \Theta_{zC} = 0,$$

$$y_v N_2 - z_v M_2 = z_v L_2 - x_v N_2 = x_v M_2 - y_v L_2 = 0,$$

$$z_u M_2 - y_u N_2 + y_v N_1 - z_v M_1 = x_u N_2 - z_u L_2 \\ + z_v L_1 - x_v N_1 = y_u L_2 - x_u M_2 + x_v M_1 - y_v L_1 = 0,$$

$$z_u M_1 - y_u N_1 = x_u N_1 - z_u L_1 = y_u L_1 - x_u M_1 = 0.$$

Dalla 2ª e dalla 4ª risulta:

$$L_2 : M_2 : N_2 = x_v : y_v : z_v, \qquad L_1 : M_1 : N_1 = x_u : y_u : z_u;$$

ponendo:

$$L_1 = \rho x_u, \qquad M_1 = \rho y_u, \qquad N_1 = \rho z_u,$$

$$L_2 = -\sigma x_v, \qquad M_2 = -\sigma y_v, \qquad N_2 = -\sigma z_v,$$

risulta dalla 3ª delle precedenti equazioni $\rho = \sigma$, e quindi:

$$x_v L_1 + x_u L_2 = 0, \qquad y_v M_1 + y_u M_2 = 0, \qquad z_v N_1 + z_u N_2 = 0.$$

Introduciamo nella prima di queste equazioni le espressioni di L_1, L_2; si ottiene con facili riduzioni:

$$B\Theta_{AB} + C\Theta_{AC} = 0.$$

D'altra parte, poichè Θ è omogenea di 1° grado rispetto ad A, B, C, sarà Θ_A omogenea di grado zero rispetto agli stessi argomenti; sicchè si avrà:

$$A\Theta_{AA} + B\Theta_{AB} + C\Theta_{AC} = 0.$$

Combinando colla precedente, risulta $\Theta_{AA} = 0$; ed analogamente si otterrebbe $\Theta_{BB} = 0$, $\Theta_{CC} = 0$. La Θ è dunque lineare intera rispetto a ciascuno degli argomenti A, B, C; e poichè essa è anche omogenea di 1° grado rispetto a questi argomenti, sarà lineare intera omogenea, cioè avrà la forma:

$$(16) \qquad \Theta = \alpha A + \beta B + \gamma C,$$

dove α, β, γ sono funzioni di x, y, z. Finalmente, introducendo questa espressione nella:

$$\Theta_{xA} + \Theta_{yB} + \Theta_{zC} = 0,$$

si ottiene:

$$(17) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0.$$

Concludendo: *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione di* EULERO *sia identicamente soddisfatta è che* Θ *abbia la forma* (16), *dove* α, β, γ *sono funzioni di* x, y, z *legate dalla relazione* (17).

In forma non parametrica, dev'essere:

$$F = \alpha p + \beta q - \gamma,$$

dove le funzioni α, β, γ di x, y, z sono ancora legate dalla relazione (17).

Vogliamo ora dimostrare che, se l'equazione di EULERO è identicamente soddisfatta, il valore dell'integrale I non dipende dalla superficie di integrazione, ma soltanto dal suo contorno, cioè è eguale per tutte le superficie aventi comune il contorno, sicchè non esiste nè massimo nè minimo. Per maggior semplicità faremo uso della rappresentazione non parametrica.

Sieno:

$$z = z_1(x, y), \qquad z = z_2(x, y)$$

due superficie qualunque aventi lo stesso contorno, e denotiamo con p_1, q_1, p_2, q_2 le derivate parziali prime di $z_1(x, y)$ e di $z_2(x, y)$ rispetto ad x e ad y, con ε un parametro variabile. Qualunque sia il valore di ε, la superficie:

$$z = z_1(x, y) + \varepsilon[z_2(x, y) - z_1(x, y)]$$

avrà ancora lo stesso contorno delle due superficie date. Considerando I come funzione di ε, si ha:

$$I'(\varepsilon) = \int\int [F_z(z_2 - z_1) + F_p(p_2 - p_1) + F_q(q_2 - q_1)]\,dx\,dy,$$

dove gli argomenti di F, oltre x ed y, sono la z scritta poc'anzi, e le sue derivate parziali prime p e q.

Colla solita integrazione per parti risulta:

$$I'(\varepsilon) = \int\int \left[F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y}\right](z_2 - z_1)\,dx\,dy$$
$$+ \int (z_2 - z_1)(F_q\,dx - F_p\,dy),$$

dove il secondo integrale è esteso al contorno. Ora per ipotesi si ha identicamente:

$$F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0,$$

inoltre sul contorno $z_1 = z_2$; quindi $I'(\varepsilon) = 0$, cioè I è indipendente da ε, e si ha $I(0) = I(1)$, sicchè I ha lo stesso valore per le due superficie considerate.

56. Anche il problema della ricerca dei massimi e minimi degli integrali doppi può subire modificazioni analoghe a quelle considerate per gli integrali semplici. Accenneremo ad una sola. Può supporsi che non sia dato il contorno della superficie cercata, ma che sia data invece una superficie (od un insieme di superficie) a cui essa debba appoggiarsi. Anche in questo caso dovranno essere soddisfatte le (13), come si dimostra con un ragionamento analogo a quello fatto per gli integrali semplici ad estremi variabili; inoltre dovrà essere:

$$\int (M\,dv - N\,du) = 0 \tag{18}$$

[l'integrale essendo esteso alla linea $\omega(u, v) = 0$] per tutti quei sistemi di funzioni ξ, η, ζ per cui i punti $(x + \varepsilon\xi,\ y + \varepsilon\eta,\ z + \varepsilon\zeta)$

stanno sulla superficie data:

$$(19) \qquad g(x, y, z) = 0$$

e che quindi rendono soddisfatta l'equazione:

$$(20) \qquad g_x \xi + g_y \eta + g_z \zeta = 0.$$

Supponiamo per semplicità l'equazione $\omega(u, v) = 0$ posta sotto la forma:

$$v = \sigma(u), \qquad u_0 \leqq u \leqq u_1;$$

allora la (18) può scriversi:

$$\int_{u_0}^{u_1} [M \sigma'(u) - N] du = 0,$$

e, combinandola colla (20), risulta:

$$\int_{u_0}^{u_1} [M \sigma'(u) - N + \lambda(g_x \xi + g_y \eta + g_z \zeta)] du = 0,$$

dove λ è una funzione qualunque di u.

Poniamo per M, N le loro espressioni; l'equazione diviene:

$$\int_{u_0}^{u_1} [(\sigma' \Phi_{x_u} - \Phi_{x_v} + \lambda g_x)\xi + (\sigma' \Phi_{y_u} - \Phi_{y_v} + \lambda g_y)\eta$$
$$+ (\sigma' \Phi_{z_u} - \Phi_{z_v} + \lambda g_z)\zeta] du = 0.$$

Ora delle tre funzioni ξ, η, ζ due, per es. η e ζ, si possono prendere ad arbitrio (non ambedue nulle), mentre la terza, ξ, risulta determinata dalla (20). Se dopo ciò facciamo:

$$\lambda = \frac{\Phi_{x_v} - \sigma' \Phi_{x_u}}{g_x},$$

l'integrale precedente si ridurrà ai due ultimi termini, ed essendo η e ζ arbitrarie, i loro coefficienti, in cui sia posta per λ l'espressione trovata, dovranno essere nulli. In altre parole, esiste una funzione λ che rende soddisfatte simultaneamente le equazioni:

$$\sigma' \Phi_{x_u} - \Phi_{x_v} + \lambda g_x = 0,$$

$$\sigma' \Phi_{y_u} - \Phi_{y_v} + \lambda g_y = 0,$$

$$\sigma' \Phi_{z_u} - \Phi_{z_v} + \lambda g_z = 0.$$

Eliminando σ' e λ, risulta:

(21)
$$\begin{vmatrix} \Phi_{x_u} & \Phi_{x_v} & g_x \\ \Phi_{y_u} & \Phi_{y_v} & g_y \\ \Phi_{z_u} & \Phi_{z_v} & g_z \end{vmatrix} = 0,$$

che deve essere soddisfatta al contorno, e potrebbe chiamarsi *condizione di trasversalità.*

Questa condizione può porsi sotto forma più semplice.

Si ha, dalle formole del § 53:

$$\Phi_{y_u}\Phi_{z_v} - \Phi_{y_v}\Phi_{z_u} = \Theta_A(A\Theta_A + B\Theta_B + C\Theta_C) = \Theta_A\Theta,$$

$$\Phi_{z_u}\Phi_{x_v} - \Phi_{z_v}\Phi_{x_u} = \Theta_B(A\Theta_A + B\Theta_B + C\Theta_C) = \Theta_B\Theta,$$

$$\Phi_{x_u}\Phi_{y_v} - \Phi_{x_v}\Phi_{y_u} = \Theta_C(A\Theta_A + B\Theta_B + C\Theta_C) = \Theta_C\Theta,$$

quindi l'equazione trovata si riduce a:

(22)
$$g_x\Theta_A + g_y\Theta_B + g_z\Theta_C = 0.$$

Dopo ciò è facile stabilire quale forma debba avere la Φ perchè la trasversalità coincida coll'ortogonalità.

La condizione di ortogonalità è:

$$g_x A + g_y B + g_z C = 0.$$

Affinchè le due condizioni coincidano qualunque sia la funzione

$g(x, y, z)$, deve essere:

$$\frac{\Theta_A}{A} = \frac{\Theta_B}{B} = \frac{\Theta_C}{C}.$$

Ne segue:

$$\frac{\Theta_A\, dA + \Theta_B\, dB + \Theta_C\, dC}{A\, dA + B\, dB + C\, dC} = \frac{\Theta_A A + \Theta_B B + \Theta_C C}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{\Theta}{A^2 + B^2 + C^2},$$

ossia:

$$\frac{\Theta_A\, dA + \Theta_B\, dB + \Theta_C\, dC}{\Theta} = \frac{A\, dA + B\, dB + C\, dC}{A^2 + B^2 + C^2},$$

da cui integrando:

$$\Phi = \Theta = H(x, y, z)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{23}$$

dove H è funzione arbitraria.

Nella rappresentazione non parametrica la condizione di trasversalità (21) o (22) prende la forma:

$$F_p g_x + F_q g_y + (F - pF_p - qF_q)g_z = 0,$$

e la (23) diviene:

$$F = H(x, y, z)\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

57. Esempi. — 22. *Trovare le superficie d'area minima tra quelle che hanno un dato contorno.*

L'integrale da rendersi minimo è (§ 50):

$$I = \int\int \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv.$$

Si ha in questo caso, posto per brevità $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R$:

$$\Theta_{xA} = 0, \qquad \Theta_{yB} = 0, \qquad \Theta_{zC} = 0,$$

$$\Theta_{AA} = \frac{B^2 + C^2}{R^3}, \qquad \Theta_{BB} = \frac{C^2 + A^2}{R^3}, \qquad \Theta_{CC} = \frac{A^2 + B^2}{R^3},$$

$$\Theta_{BC} = -\frac{BC}{R^3}, \qquad \Theta_{CA} = -\frac{CA}{R^3}, \qquad \Theta_{AB} = -\frac{AB}{R^3},$$

quindi:

$$L_1 = \frac{1}{R^5}[(Ex_v - Fx_u)(B^2 + C^2) - (Ey_v - Fy_u)AB - (Ez_v - Fz_u)AC]$$

$$= \frac{1}{R^5}\{(Ex_v - Fx_u)R^2 - A[E(Ax_v + By_v + Cz_v) - F(Ax_u + By_u + Cz_u)]\}$$

$$= \frac{Ex_v - Fx_u}{R^3},$$

ed analogamente:

$$M_1 = \frac{Ey_v - Fy_u}{R^3}, \qquad N_1 = \frac{Ez_v - Fz_u}{R^3},$$

$$L_2 = \frac{Gx_u - Fx_v}{R^3}, \quad M_2 = \frac{Gy_u - Fy_v}{R^3}, \quad N_2 = \frac{Gz_u - Fz_v}{R^3},$$

sicchè la (14) diviene, sopprimendo il fattore $\frac{1}{R^3}$:

$$G(A_u x_u + B_u y_u + C_u z_u) - F(A_u x_v + B_u y_v + C_u z_v + A_v x_u + B_v y_u + C_v z_u)$$
$$+ E(A_v x_v + B_v y_v + C_v z_v) = 0,$$

ossia:

(24) $$GD - 2FD' + ED'' = 0.$$

Nella rappresentazione non parametrica si ha:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad D = r, \quad D' = s, \quad D'' = t,$$

quindi l'equazione è:

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

L'equazione (24) esprime che le superficie cercate hanno curvatura media nulla [1]). Essa si integra rapidamente come segue.

---

[1]) L'espressione della curvatura media è:

$$\frac{GD - 2FD' + ED''}{2(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e in forma non parametrica:

$$\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{2(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Prendiamo i parametri u, v in modo che sia $E = G = 0$ [1]); l'equazione si riduce a $D' = 0$, che può scriversi:

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ne segue, R e S essendo due coefficienti (variabili) da determinarsi:

$$x_{uv} = R x_u + S x_v,$$

$$y_{uv} = R y_u + S y_v,$$

$$z_{uv} = R z_u + S z_v,$$

e di qui:

$$x_u x_{uv} + y_u y_{uv} + z_u z_{uv} = RE + SF,$$

$$x_v x_{uv} + y_v y_{uv} + z_v z_{uv} = RF + SG,$$

ossia:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = RE + SF, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = RF + SG.$$

Ma poichè $E = G = 0$, $F \neq 0$, risulta di qui:

$$R = S = 0,$$

e quindi:

$$x_{uv} = y_{uv} = z_{uv} = 0,$$

donde integrando:

$$x = f_1(u) + \varphi_1(v), \qquad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \qquad z = f_3(u) + \varphi_3(v),$$

---

[1]) Evidentemente le linee $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ saranno imaginarie. Invece di u e v si possono prendere come parametri rispettivamente due funzioni qualunque di u e di v, il che, insieme alle (25), riduce a 2 il numero effettivo delle funzioni arbitrarie.

dove le f, φ sono funzioni arbitrarie legate dalle relazioni:

$$(25)\quad f_1'^2(u)+f_2'^2(u)+f_3'^2(u)=0, \qquad \varphi_1'^2(v)+\varphi_2'^2(v)+\varphi_3'^2(v)=0.$$

Se il contorno della superficie cercata non è dato, ma è data invece una superficie alla quale questa debba appoggiarsi, le due superficie dovranno incontrarsi ortogonalmente (§. 56).

È ben nota la connessione della teoria delle superficie d'area minima colle celebri esperienze fisiche di Plateau.

23. *Trovare le superficie d'area minima tra quelle che hanno un dato contorno e racchiudono col cilindro che proietta il contorno sul piano xy e con questo piano un volume dato l.*

Si deve render minimo l'integrale:

$$I=\int\int\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

sotto la condizione:

$$J=\int\int z\,dx\,dy=l.$$

La funzione da considerarsi è quindi, per la teoria dei massimi e minimi condizionati:

$$F=\sqrt{1+p^2+q^2}+\lambda z,$$

dove λ è una costante da determinarsi.

Di qui segue:

$$F_z=\lambda, \qquad F_{px}=F_{qy}=F_{pz}=F_{qz}=0,$$

$$F_{pp}=\frac{1+q^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad F_{pq}=-\frac{pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad F_{qq}=\frac{1+p^2}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi la (15) diviene:

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda.$$

Le superficie cercate sono a curvatura media costante.

24. *Determinare le posizioni d'equilibrio d'una superficie pesante omogenea, flessibile ed inestendibile, avente dato contorno.*

Le posizioni d'equilibrio sono quelle che corrispondono alla minima od alla massima altezza del baricentro. Preso pertanto l'asse z verticale rivolto in alto, e denotando con l l'area della superficie, l'integrale da rendersi minimo sarà, tolto il fattore costante $\frac{1}{l}$:

$$I = \int\int z\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

sotto la condizione:

$$J = \int\int \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = l.$$

La funzione da considerarsi è pertanto:

$$F = (z+\lambda)\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Si ha di qui:

$$F_z = \sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad F_{px} = F_{qy} = 0,$$

$$F_{pz} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad F_{qz} = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$F_{pp} = \frac{(z+\lambda)(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_{pq} = -\frac{(z+\lambda)pq}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_{qq} = \frac{(z+\lambda)(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi la (15) diviene, con qualche riduzione:

$$(z+\lambda)[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] - (1+p^2+q^2) = 0.$$

Essa può scriversi:

$$\frac{(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t}{2(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2(z+\lambda)\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

relazione la quale esprime che la reciproca della curvatura media è eguale al doppio del segmento di normale intercetto tra la superficie e il piano orizzontale $z=-\lambda$.

PARTE SECONDA

CONDIZIONI DIPENDENTI
DALLE
VARIAZIONI D'ORDINE SUPERIORE.

CAPITOLO I.

IL PROBLEMA FONDAMENTALE NEL CASO PIÙ SEMPLICE.

58. Conviene premettere alcune osservazioni sulle equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine.

Abbiasi l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = 0,$$

dove P e Q denotano due funzioni della variabile indipendente x finite e derivabili in un dato intervallo; e sieno y_1, y_2 due integrali linearmente indipendenti di essa. Dalle equazioni:

$$y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0, \qquad y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0$$

segue:

$$y_1'' y_2 - y_2'' y_1 + P(y_1' y_2 - y_2' y_1) = 0,$$

da cui integrando:

$$y_1' y_2 - y_2' y_1 = C e^{-\int P d x}, \tag{1}$$

dove C è una costante diversa da zero, se y_1 e y_2, come si è supposto, sono linearmente indipendenti.

La relazione trovata può anche scriversi:

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{C}{y_2^2} e^{-\int P d x}. \tag{2}$$

Le (1), (2) danno luogo alle osservazioni seguenti.

a) In nessun punto possono annullarsi insieme y_1 e y_2.

b) In nessun punto possono annullarsi insieme y_1 e y'_1, e così y_2 e y'_2; cioè y_1 e y_2 non hanno zeri multipli.

c) In nessun punto può essere:

$$a y_1 + b y'_1 = a y_2 + b y'_2 = 0,$$

a e b denotando due costanti non ambedue nulle. Infatti nel caso contrario sarebbe nel punto considerato $y'_1 y_2 - y'_2 y_1 = 0$, in contraddizione colla (1).

d) Gli zeri di y_1 (e così quelli di y_2) formano un insieme non avente nell'intervallo considerato alcun punto limite, e quindi l'intervallo stesso, supposto finito, ne contiene un numero finito.

Infatti, se x_0 fosse un punto limite di tale insieme, sarebbe $y_1(x_0) = y'_1(x_0) = 0$ [1]), ciò che è escluso.

e) Il rapporto $\frac{y_1}{y_2}$ è costantemente crescente o decrescente.

f) Tra due zeri consecutivi di y_1 è compreso uno ed un solo zero di y_2, e viceversa. Anzitutto si può notare che, per l'oss. *d*), in ogni parte finita dell'intervallo considerato cade un numero finito di zeri di y_1, sicchè può parlarsi di zeri consecutivi. Sieno ora c, d due zeri consecutivi di y_1, e sia $c < d$. Mentre x va da c a d, $\frac{y_1}{y_2}$, supposto, per es., costantemente crescente, dovrà andare da 0 a $+\infty$ e da $-\infty$ a 0; ora il punto in cui $\frac{y_1}{y_2} = \infty$ è l'unico zero di y_2.

59. Riprendiamo l'integrale considerato nel § 1:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

---

[1]) Che $y_1(x_0) = 0$ è evidente, per la continuità di y_1; che $y'_1(x_0) = 0$, risulta dall'osservazione, che in qualunque intorno di x_0 il rapporto incrementale di y_1 si annullerebbe infinite volte, sicchè, dovendo esso avere un limite, questo non potrebbe essere che zero.

ed applichiamo alla funzione y la variazione $\delta y = \varepsilon\eta$ del § 3. Avremo:

$$I + \Delta I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta')dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \varepsilon(F_y\eta + F_{y'}\eta') + \frac{\varepsilon^2}{2}(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}\eta'^2) + \rho \right] dx,$$

dove ρ è il resto della formola di TAYLOR. Porremo:

$$\delta I = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')\, dx,$$

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2\, F_{yy'}\eta\,\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\, dx,$$

e più generalmente, supposta l'esistenza e la continuità delle derivate parziali n-esime di F:

$$\delta^n I = \varepsilon^n \int_{x_0}^{x_1} (F_y\eta + F_{y'}\eta')^{[n]}\, dx,$$

dove l'esponente n racchiuso tra parentesi quadre denota una *potenza simbolica*; $\delta^n I$ si dice la *variazione n-esima* di I.

Affinchè per la funzione $y = f(x)$ l'integrale I sia massimo o minimo, è necessario anzitutto che essa rappresenti un'estremale, cioè che annulli δI qualunque sia la funzione η [1]); supposta soddisfatta questa condizione, è ancora necessario che, qualunque sia la funzione η, sia $\delta^2 I \geqq 0$ per un minimo, $\delta^2 I \leqq 0$ per un massimo.

Per fissare le idee, occupiamoci soltanto del minimo. Deve essere allora, qualunque sia η:

$$\int_{x_0}^{x_1} (F_{yy}\eta^2 + 2\, F_{yy'}\eta\,\eta' + F_{y'y'}\eta'^2)\, dx \geqq 0,$$

dove y è una funzione che soddisfa all'equazione d'EULERO.

---

[1]) È quasi inutile ripetere che questa funzione deve soddisfare alle solite condizioni di continuità e derivabilità ed annullarsi per $x = x_0$ e per $x = x_1$.

Cerchiamo di trasformare opportunamente questa condizione, che scriveremo per semplicità come segue:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} (R\eta^2 + 2S\eta\eta' + T\eta'^2)\,dx \geqq 0,$$

posto:

$$F_{yy} = R, \qquad F_{yy'} = S, \qquad F_{y'y'} = T.$$

Se ψ è una funzione finita e derivabile qualsiasi, si ha identicamente:

$$\eta^2\psi' + 2\eta\eta'\psi = (\eta^2\psi)',$$

e quindi, tenuto presente che η si annulla in x_0 e in x_1:

$$\int_{x_0}^{x_1} (\eta^2\psi' + 2\eta\eta'\psi)\,dx = 0.$$

Può scriversi pertanto:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} [(R + \psi')\eta^2 + 2(S + \psi)\eta\eta' + T\eta'^2]\,dx.$$

Scegliamo, se è possibile, la ψ in modo che l'espressione tra parentesi quadre sia un quadrato perfetto; dev'essere per questo:

(3) $$(S + \psi)^2 = (R + \psi')\,T,$$

e l'espressione di H diviene:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} T\left[\frac{S + \psi}{T}\eta + \eta'\right]^2 dx.$$

Vogliamo dimostrare che è necessario sia in tutto l'intervallo $T \geqq 0$ [1]) affinchè sia $H \geqq 0$.

---

[1]) Non dobbiamo dimenticare che, avendo supposto che nell'integrale si sia introdotta in luogo di y una determinata funzione di x (un integrale dell'equazione d'Eulero), R, S, T risultano funzioni note di x.

Supponiamo che in un punto c di $x_0 x_1$ sia $T < 0$; allora, per la continuità, sarà $T < 0$ in tutto un intorno γ di c, e quindi, per un noto teorema sulle equazioni differenziali, l'equazione (3) ammetterà un integrale ψ finito e continuo in un certo intorno de di c contenuto in γ, integrale che sarà determinato quando ne sia dato il valore in c. Prendiamo ora $\eta = 0$ in $x_0 d$ e in $e x_1$, $\eta = (x-d)^2(e-x)^2$ in de; η sarà continua insieme alla sua derivata in tutto $x_0 x_1$, e sarà:

$$H = \int_d^e T(x-d)^2(e-x)^2 \left[\frac{S+\psi}{T}(x-d)(e-x)+2(d+e-2x)\right]^2 dx,$$

che è evidentemente negativo [1]). Dunque, Affinchè sia $H \geqq 0$, è necessario che in tutto l'intervallo $x_0 x_1$ sia $T \geqq 0$ **(condizione di Legendre).**

60. L'equazione (3) si può trasformare in un'equazione lineare omogenea del 2° ordine. Posto infatti:

$$\frac{S+\psi}{T} = -\frac{\omega'}{\omega},$$

dove ω è una nuova funzione incognita, essa diviene:

$$(4) \qquad -T\omega'' - T'\omega' + (R - S')\omega = 0,$$

che può anche scriversi:

$$(5) \qquad X(\omega) = (R - S')\omega - (T\omega')' = 0,$$

dove X è un *operatore differenziale*. La (4), o la (5), dicesi **equazione di Jacobi**. Essa ammette un integrale finito e continuo in $x_0 x_1$, se in tutto quest'intervallo T è diverso da zero.

---

[1]) L'espressione tra parentesi quadre non può essere identicamente nulla, perchè $\frac{S+\psi}{T}$ non dipende dai punti d, e, che possono essere scelti in infiniti modi.

Facendo uso del simbolo X, può scriversi:

$$R\eta^2 + 2S\eta\eta' + T\eta'^2 = \eta X(\eta) + (S\eta^2 + T\eta\eta')',$$

da cui integrando e tenendo conto che $\eta = 0$ in x_0 e in x_1:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \eta X(\eta)\, dx. \tag{6}$$

Si ha pure:

$$\frac{S+\psi}{T}\eta + \eta' = \frac{\omega\eta' - \omega'\eta}{\omega},$$

quindi:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \frac{T}{\omega^2}(\omega\eta' - \omega'\eta)^2\, dx. \tag{7}$$

L'equazione di JACOBI sta in una relazione molto stretta con quella d'EULERO; si dimostra cioè che, *se* $y = f(x, a, b)$ *è l'integrale generale dell'equazione d'*EULERO, $\frac{\partial f}{\partial a}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial b}$ *sono due integrali linearmente indipendenti della corrispondente equazione di* JACOBI.

Imaginiamo di introdurre nell'equazione d'EULERO:

$$F_y - F'_{y'} = 0$$

in luogo di y la funzione $f(x, a, b)$; essa diverrà un'identità tanto rispetto ad x che ad a e a b. Derivando rispetto ad a, risulta:

$$0 = \frac{\partial F_y}{\partial a} - \frac{\partial F'_{y'}}{\partial a} = \frac{\partial F_y}{\partial a} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F_{y'}}{\partial a}\right)$$

$$= (Ry_a + Sy'_a) - \frac{d}{dx}(Sy_a + Ty'_a) = (R - S')y_a - T'y'_a - Ty''_a,$$

donde segue che y_a è un integrale dell'equazione di JACOBI.

La stessa dimostrazione vale per y_b.

Inoltre si ha:

$$y'_a y_b - y'_b y_a = -\frac{d(y, y')}{d(a, b)};$$

ora, poichè, come è noto, si possono sempre dare ad a, b valori tali che y e y' prendano in un punto dato valori presi ad arbitrio, le y, y' come funzioni di a, b sono tra loro indipendenti, e quindi il loro determinante funzionale non è identicamente nullo, donde segue (§ 58) che y_a e y_b sono linearmente indipendenti.

61. Poniamo:

$$\frac{\partial f(x,\, a,\, b)}{\partial a} = u(x), \qquad \frac{\partial f(x,\, a,\, b)}{\partial b} = v(x);$$

la funzione:

$$\Delta(x,\, x_0) = u(x)v(x_0) - v(x)u(x_0) \tag{8}$$

sarà un integrale della (4); più precisamente, sarà, a meno di un fattore costante, l'unico (§ 58, a) integrale di essa che si annulla per $x = x_0$. Poichè vi è (§ 58, d) un intorno a destra di x_0 non contenente altri zeri di Δ, o Δ non ha alcuno zero a destra di x_0, o fra questi ve ne sarà uno, x_2, tale che tra x_0 e x_2 non ne esistano altri. Il punto x_2 dicesi *coniugato* del punto x_0. Ora possono darsi tre casi, e cioè:

a) x_2 non esiste, o $x_2 > x_1$;

b) $x_2 = x_1$;

c) $x_2 < x_1$.

Nel caso a) $\Delta(x,\, x_1)$ è linearmente indipendente da $\Delta(x,\, x_0)$, perchè il primo s'annulla ed il secondo non s'annulla in x_1. Ne segue [§ 58, f)] che $\Delta(x,\, x_1) \neq 0$ in tutto l'intervallo $x_0 x_1$, escluso il punto x_1, e quindi, per la continuità, anche in un intorno a sinistra di x_0. Se $\bar{x}$ è un punto di questo intorno, $\Delta(x,\, \bar{x})$ non si annulla in alcun punto di $x_0 x_1$, giacchè nel caso contrario due zeri almeno di $\Delta(x,\, \bar{x})$ sarebbero compresi fra due zeri consecutivi di $\Delta(x,\, x_1)$. Posto pertanto nella formola (7) $\omega = \Delta(x,\, \bar{x})$, non potrà $\dfrac{\omega}{\eta}$ essere costante, perchè, comunque si scelga η, questa funzione è soggetta alla condizione d'annullarsi in x_0 e in x_1; ne segue che, supposto in tutto l'intervallo $T > 0$, sarà, per qualunque η, $H > 0$.

Nel caso b) si può prendere $\eta = \Delta(x,\, x_0)$, ed allora risulta dalla (6) $H = 0$.

Nel caso c), preso $\eta = \Delta(x, x_0)$ nel tratto $x_0 x_2$, $\eta = 0$ nel tratto $x_2 x_1$ [1]), segue ancora dalla (6) $H = 0$. Ma si può anche vedere che è possibile scegliere η in modo che sia $H < 0$.

Se u, v sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione di Jacobi, si ha, per la (1):

$$u'v - v'u = \frac{C}{T}. \tag{9}$$

Prendiamo sul tratto $x_2 x_1$ un punto qualunque x_3, in cui $\Delta(x, x_0)$ non si annulli, e poniamo:

$$\Delta(x, x_0) = u, \qquad \pm \Delta(x, x_3) = v,$$

dove il segno sarà scelto in modo che nella formola precedente risulti $C < 0$. Gli integrali u, $u - v$ saranno linearmente indipendenti, quindi sarà $u - v = 0$ in uno ed un sol punto x_4 del tratto $x_0 x_2$ [§ 58, f)]. Definiamo ora la funzione η come segue:

$$\eta = u \qquad \text{per} \qquad x_0 \leqq x < x_4,$$

$$\eta = v \qquad \text{per} \qquad x_4 \leqq x < x_3,$$

$$\eta = 0 \qquad \text{per} \qquad x_3 \leqq x \leqq x_1.$$

La funzione η è continua, ma non lo è in generale η', perciò la formola (6) deve modificarsi così:

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \eta X(\eta)\, dx + [S\eta^2 + T\eta\eta']_{x_0}^{x_4 - 0} + [S\eta^2 + T\eta\eta']_{x_4+0}^{x_3-0}$$

$$+ [S\eta^2 + T\eta\eta']_{x_3+0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \eta X(\eta)\, dx + [T\eta\eta']_{x_4 - 0} - [T\eta\eta']_{x_4+0}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \eta X(\eta)\, dx + T(x_4)[u(x_4)u'(x_4) - v(x_4)v'(x_4)],$$

---

[1]) La funzione η risulta continua anche nel punto x_2. L'eventuale discontinuità della sua derivata in questo punto non ha, come è facile vedere, importanza essenziale.

ossia, considerando che $u(x_1) = v(x_1)$ e tenendo conto della (9):

$$H = \int_{x_0}^{x_1} \eta X(\eta) dx + C,$$

ed infine, poichè l'integrale è nullo, $H = C < 0$.

Dunque, supposto $T > 0$, affinchè sia $H > 0$, dev'essere $x_2 > x_1$ (intendendosi compreso in questa formola anche il caso in cui x_2 non esiste). Questa è la **condizione di Jacobi**.

62. L'equazione della famiglia semplicemente infinita di estremali passanti pel punto (x_0, y_0) si ottiene stabilendo fra i due parametri a, b che figurano nell'integrale generale dell'equazione d'Eulero:

$$y = f(x, a, b) \tag{10}$$

la relazione:

$$y_0 = f(x_0, a, b), \tag{11}$$

che si può dimostrare atta a definire b come funzione implicita di a [1]). L'equazione dell'inviluppo della famiglia considerata si otterrà eliminando a tra la (10) e la:

$$\frac{\partial f(x, a, b)}{\partial a} + \frac{\partial f(x, a, b)}{\partial b} \frac{db}{da} = 0,$$

dove per b si intende posta la funzione di a definita dalla (11), e:

$$\frac{db}{da} = - \frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial a} : \frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial b}.$$

---

[1]) Basta per questo, poichè le condizioni di continuità e derivabilità sono nel caso attuale verificate, che non sia $\frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial b} \equiv 0$. Ora, essendo $\frac{\partial f(x, a, b)}{\partial a}$ e $\frac{\partial f(x, a, b)}{\partial b}$ due integrali linearmente indipendenti dell'equazione di Jacobi (§ 60), non possono ambidue annullarsi per una stessa coppia di valori a, b e per $x = x_0$; cioè per ogni coppia di valori a, b una almeno delle due derivate $\frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial a}$, $\frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial b}$ è diversa da zero.

O, ciò che è lo stesso, l'equazione dell'inviluppo si otterrà eliminando a e b tra la (10), la (11) e la:

$$(12)\qquad \frac{\partial f(x, a, b)}{\partial a}\frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial b} - \frac{\partial f(x, a, b)}{\partial b}\frac{\partial f(x_0, a, b)}{\partial a} = 0.$$

Le ascisse dei punti in cui l'inviluppo tocca una data estremale (a, b) della famiglia si avranno introducendo i corrispondenti valori a, b nella (12). Ora questa equazione può scriversi semplicemente [v. form. (8)]:

$$\Delta(x, x_0) = 0.$$

Dunque: *Il punto* x_2 *coniugato di* x_0 *è la proiezione del primo punto, andando da sinistra verso destra, in cui l'inviluppo delle estremali uscenti dal punto* (x_0, y_0) *tocca l'estremale considerata.* E quindi la condizione di Jacobi può tradursi geometricamente così: *Il primo punto di contatto dell'inviluppo delle estremali uscenti dal punto* (x_0, y_0) *coll'estremale considerata deve proiettarsi fuori del tratto* $x_0 x_1$.

È utile per il seguito osservare che, se l'equazione della famiglia di estremali si scrive $y = \varphi(x, a)$, $\Delta(x, x_0)$ differisce solo per un fattore costante da $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$.

63. *Le tre condizioni:*

$$F_y - F'_{y'} = 0 \qquad (\textit{condizione di } \text{Eulero}),$$

$$T > 0 \qquad (\textit{condizione di } \text{Legendre})\ [1],$$

$$x_2 > x_1 \qquad (\textit{condizione di } \text{Jacobi})$$

sono sufficienti per un minimo debole (§ 2).

Abbiamo considerato finora soltanto variazioni deboli della forma:

$$\delta y = \varepsilon \eta;$$

[1]) Chiamiamo la relazione $T > 0$ ancora condizione di Legendre, sebbene essa sia leggermente diversa da quella a cui abbiamo dato sopra questo nome.

tali variazioni hanno la proprietà che, supposte finite tutte le derivate di η, non solo la variazione di y e quella di y', ma anche quelle delle derivate di tutti gli ordini, tendono a zero (ciascuna uniformemente) nell'intervallo $x_0 x_1$ al tendere a zero di ε. Non è superfluo osservare che vi sono variazioni deboli non aventi questa proprietà; tale è, per es., la variazione:

$$\delta y = \varepsilon^2 \left[\operatorname{sen}^2 \frac{2x - x_0 - x_1}{2\varepsilon} - \operatorname{sen}^2 \frac{x_1 - x_0}{2\varepsilon} \right].$$

Abbiasi una variazione debole qualunque:

$$\delta y = \omega(x, \varepsilon),$$

dove, ω' denotando la derivata di ω rispetto ad x:

$$\lim_{\varepsilon=0} \omega(x, \varepsilon) = 0, \qquad \lim_{\varepsilon=0} \omega'(x, \varepsilon) = 0,$$

e inoltre, qualunque sia ε:

$$\omega(x_0, \varepsilon) = \omega(x_1, \varepsilon) = 0.$$

Sarà:

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [(R + \alpha)\omega^2 + 2(S + \beta)\omega\omega' + (T + \gamma)\omega'^2]\, dx,$$

α, β, γ tendendo a zero insieme ad ε. Aggiungiamo l'identità:

$$0 = \frac{1}{2} [\psi \omega^2]_{x_0}^{x_1} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\psi' \omega^2 + 2\psi\omega\omega')\, dx;$$

risulta:

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_1} \left\{ \left[R + \psi' - \frac{(S + \psi)^2}{T} \right] \omega^2 + T\zeta^2 + (\alpha\omega^2 + 2\beta\omega\zeta + \gamma\zeta^2) \right\} dx,$$

posto:

$$\frac{S + \psi}{T} \omega + \omega' = \zeta,$$

e mutando il valore, ma non il carattere, dei simboli α, β, γ.

Ora risulta dalla relazione posta al principio del § 60 tra ψ e ω, che esiste un integrale ψ finito e continuo in $x_0 x_1$ della (3) se esiste un integrale ω della (4) il quale non si annulli in alcun punto di $x_0 x_1$; d'altra parte un tale integrale esiste se $x_2 > x_1$ (§ 61). Dunque, nelle nostre ipotesi, l'equazione differenziale (3), ossia la:

$$R + \psi' - \frac{(S + \psi)^2}{T} = 0,$$

ammette un integrale finito e continuo in tutto $x_0 x_1$; lo stesso potrà dirsi quindi, per ragioni di continuità, dell'equazione:

$$R + \psi' - \frac{(S + \psi)^2}{T} = c^2,$$

purchè la costante c sia abbastanza piccola. Supposto che la funzione ψ delle formole precedenti sia appunto un integrale di quest'ultima equazione, si ha:

$$\Delta I = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} [c^2 \omega^2 + T\zeta^2 + (\alpha \omega^2 + 2\beta\omega\zeta + \gamma\zeta^2)] \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left[(T + \gamma)\left(\zeta + \frac{\beta}{T+\gamma}\omega\right)^2 + \left(c^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{T+\gamma}\right)\omega^2 \right] dx.$$

Dopo ciò basterà prendere ε abbastanza piccolo perchè sia:

$$T + \gamma > 0, \qquad c^2 + \alpha - \frac{\beta^2}{T+\gamma} > 0,$$

per avere $\Delta I > 0$.

Si potrebbe mostrare con esempi [1]) che le condizioni considerate non sono sufficienti per un minimo forte.

64. Abbiamo dato a suo luogo (§ 7) la definizione di *campo d'estremali*; esso è una famiglia semplicemente infinita di estremali di cui una al più passa per ciascun punto della striscia compresa tra le

---

[1]) V. per es.: Bolza, op. cit., § 15.

rette $x = x_0$, $x = x_1$, o di una parte c di essa. Se sull'estremale, di cui si vuol decidere se corrisponde ad un minimo, si fissa un punto a sinistra di (x_0, y_0) e arbitrariamente vicino ad esso, l'insieme delle estremali uscenti da quel punto costituirà un campo, purchè la striscia $x_0 x_1$ sia abbastanza stretta. Diremo ancora campo d'estremali (distinguendolo eventualmente coll'appellativo di *improprio*) l'insieme delle estremali uscenti dal punto (x_0, y_0), sebbene per questo punto non sussista la condizione contenuta nella definizione. Scrivendo come precedentemente:

$$y = \varphi(x, a) \tag{13}$$

l'equazione di questo insieme, dalla condizione $x_2 > x_1$ (che presuppone la $T \neq 0$) segue, per l'osservazione fatta alla fine del § 62, che $\frac{\partial \varphi}{\partial a} \neq 0$ per $x_0 < x \leqq x_1$. Quindi ad ogni coppia di valori corrispondenti ad un punto della striscia (esclusi i punti $x = x_0$) corrisponde per la (13) uno ed un sol valore di a; ciò che equivale a dire che per ogni punto della striscia passa una sola estremale della famiglia, cioè che le estremali della famiglia formano un campo. Stabilito questo, segue da quanto si disse nel § 7 che per il minimo è sufficiente che sia (**condizione di Weierstrass**):

$$W(x, y, p, \bar{p}) > 0,$$

dove (x, y) è un punto qualunque d'un intorno abbastanza piccolo dell'estremale considerata [1]), p il coefficiente angolare dell'estremale del campo passante per (x, y), e $\bar{p}$ ha un valor finito qualunque diverso da p.

Riassumendo: *Condizioni sufficienti per un minimo forte* (§ 2)

---

[1]) Dato un arco di curva $y = f(x)$ compreso tra i punti (x_0, y_0), (x_1, y_1), diciamo *intorno* di quest'arco la figura compresa tra le linee:

$$y = f(x) - \varepsilon, \qquad y = f(x) + \varepsilon, \qquad x = x_0, \qquad x = x_1,$$

dove ε è una costante arbitrariamente piccola.

sono:

a) $$F_y - F'_{y'} = 0,$$

b) $$T > 0,$$

c) $$x_2 > x_1,$$

d) $$W(x,\ y,\ p,\ \bar{p}) > 0,$$

dove le *a*), *b*) devono essere soddisfatte per tutti i punti della linea, e la *d*) nelle condizioni poc'anzi accennate.

65. Tra la condizione di LEGENDRE e quella di WEIERSTRASS passa una relazione molto stretta.

Dalla definizione di W risulta, per la formola di TAYLOR:

$$W(x, y, p, \bar{p}) = \frac{1}{2}(\bar{p} - p)^2 \frac{\partial^2 F(x, y, p_1)}{\partial p_1^2} = \frac{1}{2}(\bar{p} - p)^2\, T(x, y, p_1),$$

dove p_1 è un valore intermedio tra p e $\bar{p}$. Ne segue che, se $T(x,\ y,\ p) > 0$ per ogni punto $(x,\ y)$ di un certo intorno dell'estremale considerata e per p qualunque, la condizione di WEIERSTRASS è soddisfatta. Quindi le condizioni sufficienti per un minimo forte possono anche enunciarsi così:

$$F_y - F'_{y'} = 0,$$

$$T(x,\ y,\ p) > 0$$

per $(x,\ y)$ in un certo intorno dell'estremale e per p qualunque,

$$x_2 > x_1.$$

66. Riprendiamo a considerare il differenziale esatto (§ 7):

(14) $$(F - p F_p)\, dx + F_p\, dy = d\Omega(x,\ y).$$

Il suo integrale, esteso ad una curva che vada dal punto (x_0, y_0) ad un punto qualunque $(x,\ y)$ del campo, dipende soltanto dalle coordinate di questo punto. Consideriamo la famiglia di linee:

$$\Omega(x, y) = \text{cost.}; \tag{15}$$

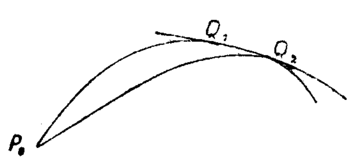
si ha per una qualunque di esse:

$$\Omega_x = F - p F_p, \qquad \Omega_y = F_p,$$

donde segue (§ 34) che *esse tagliano trasversalmente le estremali dell'integrale* $\int F dx$.

Ricordiamo ancora che l'integrale del differenziale esatto (14), quando la curva d'integrazione è un'estremale, si riduce a $\int F dx$. Ne segue che il valore di $\Omega(x, y)$ in un punto qualunque (x, y) del campo è eguale al valore dell'integrale $\int F dx$ esteso all'estremale che congiunge (x_0, y_0) con (x, y). Se quindi si considerano tutte le estremali che vanno da (x_0, y_0) ai vari punti di una stessa curva (15), l'integrale $\int F dx$ esteso ad una qualunque di esse ha un medesimo valore. E così pure ha sempre un medesimo valore l'integrale esteso al tratto di qualunque di quelle estremali compreso tra due stesse curve (15). Le linee (15) potrebbero dirsi *linee di livello* per l'integrale $\int F dx$ nel campo considerato.

Le cose dette ci permettono di renderci ragione intuitivamente della condizione di JACOBI. Abbiansi due estremali uscenti da P_0 e tra loro infinitamente vicine (Fig. 9), e sieno Q_1, Q_2 i loro punti di



(Fig. 9).

contatto coll'inviluppo della famiglia. L'arco elementare $Q_1 Q_2$ sarà comune all'inviluppo ed all'estremale $P_0 Q_1$, sicchè avremo due estremali del campo, $P_0 Q_1 Q_2$ e $P_0 Q_2$, congiungenti P_0 con Q_2. Ciò mostra come il campo cessi di esistere quando si giunge all'inviluppo. Inoltre, siccome per punti del campo vicini quanto si vuole all'inviluppo sussiste la proprietà che il valore dell'integrale dell'espressione differenziale (14) dipende solo dall'estremo superiore, ciò sarà vero, al limite, anche pei punti dell'inviluppo; e, poichè l'integrale si riduce a $\int F\,dx$ se la linea d'integrazione è un'estremale, questo integrale avrà lo stesso valore per le linee $P_0 Q_1 Q_2$ e $P_0 Q_2$, ciò che esclude la possibilità d'un massimo o d'un minimo.

67. Esempi. — 1. *Linea più breve tra due punti del piano.*

Si ha:

$$F = \sqrt{1 + y'^2},$$

quindi:

$$T = \frac{1}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

sicchè $T > 0$ in tutto il piano e per ogni valor finito di y'.

Inoltre l'integrale generale dell'equazione di Eulero è:

$$y = ax + b,$$

quindi due integrali indipendenti dell'equazione di Jacobi sono:

$$u(x) = x, \qquad v(x) = 1,$$

donde:

$$\Delta(x, x_0) = x - x_0,$$

che s'annulla solo in x_0. Si ha dunque un minimo forte.

2. *Superficie di rotazione d'area minima.*

Si ha:

$$F = y\sqrt{1 + y'^2},$$

quindi:

$$T = \frac{y}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

che per $y > 0$ è positivo per ogni valore finito di y'.

L'integrale generale dell'equazione d'Eulero è:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a},$$

donde:

$$u(x) = \operatorname{ch} \frac{x - b}{a} - \frac{x - b}{a} \operatorname{sh} \frac{x - b}{a}, \qquad v(x) = - \operatorname{sh} \frac{x - b}{a},$$

e:

$$\begin{aligned} \Delta(x, x_0) &= -(\operatorname{ch} t - t \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t_0 + (\operatorname{ch} t_0 - t_0 \operatorname{sh} t_0) \operatorname{sh} t \\ &= \operatorname{sh} t \operatorname{sh} t_0 [(\operatorname{cth} t_0 - t_0) - (\operatorname{cth} t - t)], \end{aligned}$$

posto per brevità:

$$\frac{x - b}{a} = t, \qquad \frac{x_0 - b}{a} = t_0.$$

L'equazione $\Delta(x, x_0) = 0$ si riduce quindi a:

$$\operatorname{cth} t - t = \operatorname{cth} t_0 - t_0. \tag{16}$$

La funzione $\operatorname{cth} t - t$ è decrescente, essendo la sua derivata costantemente negativa, e prende rispettivamente i valori $+\infty$, $-\infty$, $+\infty$, $-\infty$ per $t = -\infty$, -0, $+0$, $+\infty$, quindi essa prende ciascun valore due sole volte, una a sinistra ed una a destra di $t = 0$. Ne segue che la (16), oltre alla soluzione evidente $t = t_0$, ha ancora una ed una sola soluzione, che indicheremo con t_2, e che sarà positiva o negativa secondochè $t_0 \lessgtr 0$. Il punto di ascissa x_2 determinata dalla relazione:

$$\frac{x_2 - b}{a} = t_2$$

si troverà a destra di P_0, e quindi sarà il suo punto coniugato, se $x_0 < b$, cioè se P_0 sta sul ramo discendente della catenaria; nel caso contrario il punto coniugato non esiste. Dunque, se P_0 sta sul ramo ascendente della catenaria, si ha sempre un minimo forte; nel caso opposto dev'essere $x_2 > x_1$.

La tangente alla curva nel punto P_0 ha l'equazione:

$$(17) \qquad Y - y_0 = (X - x_0) \operatorname{sh} t_0 ,$$

dove X, Y sono le coordinate correnti; quindi l'ascissa del punto d'incontro della tangente coll'asse x è:

$$X_0 = x_0 - \frac{y_0}{\operatorname{sh} t_0} = b - a(\operatorname{cth} t_0 - t_0).$$

Analogamente si trova che l'ascissa del punto d'incontro della tangente nel punto coniugato P_2 (se esiste) coll'asse x è:

$$X_2 = b - a(\operatorname{cth} t_2 - t_2),$$

donde $X_0 = X_2$. Cioè: *Le tangenti in due punti coniugati si incontrano sulla direttrice.*

Indicando con Q il punto d'incontro delle due tangenti, si trova ancora che l'integrale fondamentale esteso alla somma dei due segmenti $P_0 Q$, $Q P_2$ è eguale all'integrale stesso esteso all'arco di catenaria $P_0 P_2$. Infatti si ha, denotando con I l'integrale $\int F dx$:

$$I_{P_0 Q} = \int_{x_0}^{X_0} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_{y_0}^{0} y \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} dy,$$

dove y' deve dedursi dalla (17), sicchè:

$$I_{P_0 Q} = \operatorname{cth} t_0 \int_{y_0}^{0} y\, dy = -\frac{1}{2} y_0^2 \operatorname{cth} t_0 = -\frac{a^2}{2} \frac{\operatorname{ch}^3 t_0}{\operatorname{sh} t_0} \quad [1]).$$

Analogamente:

$$I_{Q P_2} = \frac{a^2}{2} \frac{\operatorname{ch}^3 t_2}{\operatorname{sh} t_2} .$$

[1]) Non si deve dimenticare che, essendo per ipotesi $t_0 < 0$, è anche $\operatorname{sh} t_0 < 0$, mentre $\operatorname{ch} t_0 > 0$.

D'altra parte:

$$I_{P_0P_2} = \int_{x_0}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,$$

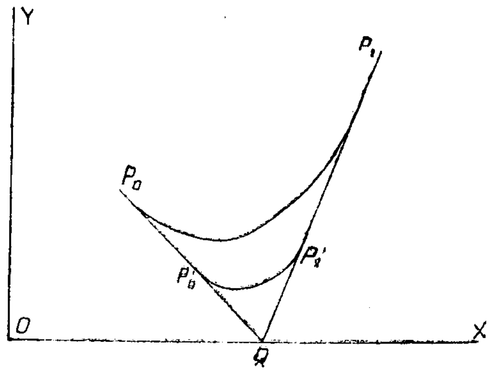
dove y' deve dedursi dall'equazione della catenaria; cioè:

$$I_{P_0P_2} = a^2\int_{x_0}^{x_2} \mathrm{ch}^2\, t\, dt = \frac{a^2}{2}(t_2 + \mathrm{sh}\, t_2\, \mathrm{ch}\, t_2 - t_0 - \mathrm{sh}\, t_0\, \mathrm{ch}\, t_0),$$

e per la (16), di cui $t = t_2$ è radice:

$$\begin{aligned} I_{P_0P_2} &= \frac{a^2}{2}(\mathrm{cth}\, t_2 + \mathrm{sh}\, t_2\, \mathrm{ch}\, t_2 - \mathrm{cth}\, t_0 - \mathrm{sh}\, t_0\, \mathrm{ch}\, t_0) \\ &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\mathrm{ch}^3\, t_2}{\mathrm{sh}\, t_2} - \frac{\mathrm{ch}^3\, t_0}{\mathrm{sh}\, t_0}\right) = I_{P_0Q} + I_{PQ_2}. \end{aligned}$$

Se $P'_0P'_2$ (Fig. 10) è un arco di catenaria omotetico a P_0P_2



(Fig. 10).

rispetto a Q, e quindi tangente alle rette QP_0, QP_2 in P'_0, P'_2, sarà analogamente:

$$I_{P'_0P'_2} = I_{P'_0Q} + I_{QP'_2},$$

quindi:

$$I_{P_0P_2} = I_{P_0P'_0} + I_{P'_0P'_2} + I_{P'_2P_2}.$$

Cioè l'integrale esteso alle curve P_0P_2 e $P_0P'_0P'_2P_2$ ha lo stesso valore, sicchè vi sono infinite altre curve a tangente continua su cui l'integrale prende lo stesso valore che ha su $P_0 P_2$, onde si comprende che a questa non possa corrispondere un minimo nè un massimo. Anche sulla linea angolosa $P_0 Q P_2$ l'integrale prende lo stesso valore.

L'equazione dell'inviluppo delle estremali uscenti da P_0 si ottiene eliminando a, b tra le:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - b}{a}, \qquad y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x_0 - b}{a},$$

$$\operatorname{cth} \frac{x - b}{a} - \frac{x - b}{a} = \operatorname{cth} \frac{x_0 - b}{a} - \frac{x_0 - b}{a}.$$

L'eliminazione può farsi come segue. Posto ancora:

$$\frac{x - b}{a} = t, \qquad \frac{x_0 - b}{a} = t_0,$$

si ha:

$$y = a \operatorname{ch} t, \qquad y_0 = a \operatorname{ch} t_0, \qquad \operatorname{cth} t - t = \operatorname{cth} t_0 - t_0.$$

Supponiamo che da quest'ultima equazione risulti:

$$t_0 = \theta(t);$$

segue allora dalle precedenti:

$$x = x_0 + y_0 \frac{t - \theta(t)}{\operatorname{ch} \theta(t)}, \qquad y = y_0 \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} \theta(t)},$$

che sono le equazioni parametriche dell'inviluppo, essendo t il parametro.

Preso un punto qualunque P_1 a sinistra dell'inviluppo, esiste una ed una sola catenaria passante per P_0 e P_1 e tangente all'inviluppo al di là di P_1; questa dà la soluzione del problema, e corrisponde anzi ad un minimo forte [1]).

---

[1]) Molti dei risultati esposti si estendono a tutti i problemi per cui $F = a \varphi\left(\frac{x - b}{a}\right)$, φ essendo una funzione qualunque. V.: Bolza, *A generalization of* Lindelof's *theorem on the catenary*, Bull. Amer. math. Soc., S. II, T. 18 (1911-12), p. 107-110.

4. *Brachistocrona supposto* $v = \varphi(y)$.
Si ha:

$$F = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\varphi(y)},$$

quindi, supposto $\varphi(y) > 0$ per ogni valore di y:

$$T = \frac{1}{\varphi(y)(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

L'equazione della famiglia di estremali passanti per il punto (x_0, y_0) è:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} \frac{\varphi(y)\,dy}{\sqrt{a^2 - \varphi^2(y)}};$$

l'equazione del suo inviluppo si otterrebbe eliminando a tra la precedente e la:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\varphi(y)\,dy}{[a^2 - \varphi^2(y)]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Da questa equazione segue derivando rispetto ad y:

$$\frac{\varphi(y)}{[a^2 - \varphi^2(y)]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

equazione che non ha alcuna soluzione. Dunque la famiglia non ha inviluppo, e la curva trovata corrisponde ad un minimo forte.

CAPITOLO II.

METODO PARAMETRICO.

---

68. Le considerazioni del precedente capitolo possono svolgersi in modo del tutto parallelo valendosi del metodo parametrico.

Sostituendo alle funzioni x, y le funzioni $x + \varepsilon\xi$, $y + \varepsilon\eta$, si ottiene:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} [\Phi_{xx}\xi^2 + 2\Phi_{xy}\xi\eta + \Phi_{yy}\eta^2 + \Phi_{x'x'}\xi'^2 + 2\Phi_{x'y'}\xi'\eta' + \Phi_{y'y'}\eta'^2$$
$$+ 2\Phi_{xx'}\xi\xi' + 2\Phi_{yy'}\eta\eta' + 2\Phi_{xy'}\xi\eta' + 2\Phi_{yx'}\eta\xi']dt.$$

Ricordiamo che:

$$\frac{\Phi_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{\Phi_{x'y'}}{x'y'} = \frac{\Phi_{y'y'}}{x'^2} = G,$$

e che l'equazione d'Eulero, a cui supponiamo soddisfacciano x, y, è:

$$A \equiv \Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + G(x'y'' - x''y') = 0.$$

Poniamo:

$$w = \xi y' - \eta x',$$

$$L = \Phi_{xx'} - G y' y'',$$

$$M = \Phi_{xy'} + G x' y'' = \Phi_{yx'} + G y' x'',$$

$$N = \Phi_{yy'} - G x' x'',$$

$$R = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2,$$

$$L_1 = \Phi_{xx} - Gy''^2 - L',$$

$$M_1 = \Phi_{xy} + Gx''y'' - M',$$

$$N_1 = \Phi_{yy} - Gx''^2 - N'.$$

Risulta:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} [Gw'^2 + L_1\xi^2 + 2M_1\xi\eta + N_1\eta^2 + R']dt.$$

Ora si ha per l'omogeneità:

$$Lx' + My' = \Phi_x, \qquad Mx' + Ny' = \Phi_y,$$

da cui derivando:

$$Lx'' + My'' + L'x' + M'y' = \Phi_{xx}x' + \Phi_{xy}y' + \Phi_{xx'}x'' + \Phi_{xy'}y''.$$

D'altra parte:

$$Lx'' + My'' = \Phi_{xx'}x'' + \Phi_{xy'}y'' + Gy''(x'y'' - x''y'),$$

quindi sottraendo:

$$L'x' + M'y' = \Phi_{xx}x' + \Phi_{xy}y' - Gy''(x'y'' - x''y').$$

Inoltre:

$$L_1x' + M_1y' = \Phi_{xx}x' + \Phi_{xy}y' - Gy''(x'y'' - x''y') - (L'x' + M'y'),$$

quindi:

$$L_1x' + M_1y' = 0.$$

Analogamente:

$$M_1x' + N_1y' = 0,$$

sicchè può scriversi:

$$L_1 = K y'^2, \qquad M_1 = - K x' y', \qquad N_1 = K x'^2,$$

e si ha infine:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} [G w'^2 + K w^2 + R'] d t = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} [G w'^2 + K w^2] d t,$$

essendo $R = 0$ per $t = t_0$ e per $t = t_1$.

Per un minimo dev'essere, qualunque sieno ξ, η:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} [G w'^2 + K w^2] d t \geqq 0.$$

Trasformiamo l'espressione H.

Aggiungendo l'integrale nullo:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\psi w^2]' d t,$$

dove ψ è qualunque, risulta:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} [G w'^2 + 2 \psi w w' + (K + \psi') w^2] d t$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[G \left(w' + \frac{\psi w}{G} \right)^2 + \left(K + \psi' - \frac{\psi^2}{G} \right) w^2 \right] d t;$$

quindi, se può scegliersi ψ in modo che sia:

(1) $$K + \psi' - \frac{\psi^2}{G} = 0,$$

si ha:

(2) $$H = \int_{t_0}^{t_1} G \left(w' + \frac{\psi w}{G} \right)^2 d t.$$

Aggiungendo invece l'integrale nullo:

$$- \int_{t_0}^{t_1} (G w w')' d t,$$

si ha:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} w\, Y(w)\, dt, \tag{3}$$

posto:

$$Y(w) = Kw - G'w' - Gw''.$$

Se si pone nella (1):

$$\psi = - G\frac{\theta'}{\theta},$$

risulta l'equazione di JACOBI:

$$K\theta - G'\theta' - G\theta'' = Y(\theta) = 0.$$

Dalla (2) si ottiene la condizione di LEGENDRE:

$$G \geqq 0.$$

69. La relazione già stabilita tra l'equazione d'EULERO e quella di JACOBI prende nel caso attuale la forma seguente:

Se $x = x(t, a, b)$, $y = y(t, a, b)$ rappresentano l'integrale generale dell'equazione di EULERO, *le espressioni:*

$$u = x_a y' - y_a x', \qquad v = x_b y' - y_b x'$$

costituiscono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione di JACOBI.

L'equazione di EULERO può scriversi sotto le due forme:

$$\Phi_x - \Phi'_{x'} = 0, \qquad \Phi_y - \Phi'_{y'} = 0. \tag{4}$$

Supposte introdotte in queste equazioni in luogo di x, y le loro espressioni, esse si riducono ad identità rispetto a t, a, b. Derivando rispetto ad a la prima delle (4), risulta:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial \Phi_x}{\partial a} - \frac{\partial \Phi'_{x'}}{\partial a} = \frac{\partial \Phi_x}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Phi_{x'}}{\partial a}\right) = \Phi_{xx} x_a + \Phi_{xy} y_a \\
+ \Phi_{xx'} x'_a + \Phi_{xy'} y'_a - \frac{\partial}{\partial t}(\Phi_{x'x} x_a + \Phi_{x'y} y_a + \Phi_{x'x'} x'_a + \Phi_{x'y'} y'_a) \\
= (\Phi_{xx} - \Phi'_{x'x}) x_a + (\Phi_{xy} - \Phi'_{x'y}) y_a + (\Phi_{xx'} - \Phi'_{x'x'}) x'_a \\
+ (\Phi_{xy'} - \Phi'_{x'y'}) y'_a - \Phi_{x'x} x'_a - \Phi_{x'y} y'_a - \Phi_{x'x'} x''_a - \Phi_{x'y'} y''_a \\
= [Ky'^2 + Gy''^2 - (Gy'y'')'] x_a \\
+ [- Kx'y' - Gx''y'' + (Gx''y')'] y_a - (Gy'^2)' x'_a \\
+ [- Gx'y'' + Gx''y' + (Gx'y')'] y'_a - \\
- Gy'^2 x''_a + Gx'y'y''_a = y'(Ku - G'u' - Gu'').
\end{aligned}$$

Partendo dalla seconda delle (4), si troverebbe analogamente:

$$o = x'(Ku - G'u' - Gu'').$$

E quindi, non potendo essere $x' = y' = o$:

$$o = Ku - G'u' - Gu'' = Y(u).$$

In modo analogo si dimostrerebbe che $Y(v) = o$.

Può pure dimostrarsi che u e v sono linearmente indipendenti.

Poichè è sempre possibile dare a t, a, b valori tali, che x, y e $\frac{y'}{x'}$ assumano valori prefissi, le x, y, $\frac{y'}{x'}$ possono considerarsi come funzioni tra loro indipendenti di t, a, b, donde segue:

$$\frac{d\left(x,\ y,\ \frac{y'}{x'}\right)}{d(t,\ a,\ b)} \neq o.$$

Ora:

$$\frac{d\left(x,\ y,\ \frac{y'}{x'}\right)}{d(t,\ a,\ b)} = \begin{vmatrix} x' & x_a & x_b \\ y' & y_a & y_b \\ \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} & \frac{x'y'_a - y'x'_a}{x'^2} & \frac{x'y'_b - y'x'_b}{x'^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x'^2}\begin{vmatrix} x_a y' - y_a x' & x_b y' - y_b x' \\ x_a y'' - y_a x'' + x'_a y' - y'_a x' & x_b y'' - y_b x'' + x'_b y' - y'_b x' \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x'^2}\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix},$$

e quest'ultimo determinante è il wronskiano di u e v, sicchè queste due funzioni sono linearmente indipendenti.

Posto:

$$\Delta(t,\ t_0) = u(t)v(t_0) - u(t_0)v(t),$$

la condizione di Jacobi è:

$$\Delta(t,\ t_0) \neq o \qquad (t_0 < t \leqq t_1).$$

Si verifica senza difficoltà che la condizione di JACOBI è indipendente dalla scelta del parametro. Infatti, se si introduce un nuovo parametro τ legato a t dalla relazione $t = \theta(\tau)$, in luogo delle espressioni u, v compaiono le:

$$\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial \tau} = u\,\theta'(\tau), \qquad \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial \tau} = v\,\theta'(\tau),$$

e Δ risulta moltiplicato per il fattore $\theta'(\tau)\theta'(\tau_0)$ essenzialmente diverso da zero.

70. La condizione di WEIERSTRASS è (v. § 13):

$$E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') > 0, \tag{5}$$

dove i simboli hanno significato corrispondente a quello stabilito nel § 64.

Anche qui la condizione è certamente soddisfatta, se in un certo intorno dell'estremale che si considera e per tutte le coppie di valori x', y' si ha $G > 0$, come risulta dall'ultima formola del § 13.

Però può dimostrarsi che è sufficiente che sia:

$$E(x, y, x', y', \bar{x}', \bar{y}') > 0$$

per i punti (x, y) dell'estremale l considerata, x', y' riferendosi all'estremale stessa, e $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ essendo qualunque $\left(\text{escluso il caso } \frac{\bar{y}'}{\bar{x}'} = \frac{y'}{x'}\right)$.

Possiamo anche scrivere:

$$E(x, y, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, \cos\bar{\varphi}, \operatorname{sen}\bar{\varphi}) > 0.$$

In virtù della formola poc'anzi citata si ha:

$$\lim_{\bar{\varphi}=\varphi} \frac{E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s})}{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)} = G(x, y, c, s);$$

quindi, supposta soddisfatta la condizione di LEGENDRE, sarà continua e positiva su tutto l'estremale l e per ogni valore di $\bar{\varphi}$, compreso $\bar{\varphi} = \varphi$, la funzione E_1 definita come segue:

$$E_1(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s}) = \frac{E(x, y, c, s, \bar{c}, \bar{s})}{1 - \cos(\bar{\varphi} - \varphi)} \qquad \text{per} \qquad \bar{\varphi} \neq \varphi,$$

$$E_1(x, y, c, s, c, s) = G(x, y, c, s).$$

Sieno:

$$x = x(t, a), \quad y = y(t, a) \qquad (a_0 - \alpha \leqq a \leqq a_0 + \alpha)$$

le equazioni di un campo proprio d'estremali di cui faccia parte l, essendo a_0 il parametro di questa curva; per es. le equazioni della famiglia di estremali passanti per un punto di l di parametro $t_0 - \tau$, essendo τ arbitrariamente piccolo. Considerando per un istante t, a, $\bar{\varphi}$ come le coordinate cartesiane dei punti di uno spazio a tre dimensioni, la funzione:

$$E_1\left[x(t, a), y(t, a), \frac{\partial x(t, a)}{\partial t}, \frac{\partial y(t, a)}{\partial t}, \cos\bar{\varphi}, \operatorname{sen}\bar{\varphi}\right]$$

è continua nel campo parallelepipedo:

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \qquad a_0 - \alpha \leqq a \leqq a_0 + \alpha, \qquad 0 \leqq \bar{\varphi} \leqq 2\pi,$$

e positiva sul rettangolo:

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \qquad a = a_0, \qquad 0 \leqq \bar{\varphi} \leqq 2\pi;$$

quindi, come si dimostra facilmente applicando il teorema della continuità uniforme, esiste un parallelepipedo contenente nel suo interno questo rettangolo, nel quale essa è costantemente positiva; si ha pertanto certamente $E_1 > 0$ per:

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \qquad a_0 - \beta \leqq a \leqq a_0 + \beta, \qquad 0 \leqq \bar{\varphi} \leqq 2\pi,$$

essendo β abbastanza piccolo. Ciò significa, tornando al piano delle nostre estremali, che, se $E_1 > 0$ su l, la stessa condizione è soddisfatta in tutti i punti di un certo intorno di l [1]), donde segue che nello stesso intorno sarà $E > 0$ purchè sia $\bar{\varphi} \neq \varphi$. Se quindi l_1 è una curva qualunque giacente nell'intorno considerato e congiungente P_0 e P_1, sarà per questa curva (v. le formole del § 7) $\Delta I > 0$, salvo il caso che la l_1 avesse in ogni punto la tangente coincidente con quella dell'estremale del campo passante pel punto stesso. Ma questo caso non potrebbe avverarsi, a meno che la l_1 fosse un'estremale del campo, ciò che è impossibile perchè per P_0 e P_1 passa la sola estremale l, o l'inviluppo delle estremali del campo, ciò che è escluso dalla condizione di Jacobi [2]).

71. Riassumendo dunque, le condizioni sufficienti per un minimo forte sono:

$$a) \qquad \Phi_{xy'} - \Phi_{yx'} + G(x'y'' - x''y') = 0,$$

$$b) \qquad G(x, y, x', y') > 0$$

nei punti dell'estremale,

$$c) \qquad \Delta(t_0, t) \neq 0 \qquad \text{per} \qquad t_0 < t \leqq t_1,$$

$$d) \qquad E(x, y, \cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi, \cos\bar{\varphi}, \operatorname{sen}\bar{\varphi}) > 0$$

nei punti dell'estremale e per $\bar{\varphi}$ qualunque purchè $\neq \varphi$.

Riguardo alla forma che deve assumere l'indicatrice per la condizione *d*), v. § 14.

72. Esempi. — 3. *Brachistocrona per un punto pesante.*

---

[1]) Che cosa intendiamo per intorno di un arco di curva, è detto nella nota a p. 193.

[2]) Il ragionamento stesso non può ripetersi per la rappresentazione non parametrica, perchè $\bar{p}$ può variare da $-\infty$ a $+\infty$, e il teorema della continuità uniforme non può applicarsi senz'altro a campi infiniti. Anzi si dimostra con esempi (v.: Bolza, op. cit., § 18) che le condizioni analoghe a quelle del § 71 non sono sufficienti per un minimo forte.

Si ha:

$$\Phi = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{y}},$$

quindi:

$$G = \frac{\Phi_{x'x'}}{y'^2} = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{y}} > 0.$$

Le equazioni delle estremali sono, posto $4u = t$:

$$x = b + a(t - \operatorname{sen} t), \qquad y = a(1 - \cos t),$$

donde:

$$u = a(t \operatorname{sen} t - 2 + 2 \cos t) = a \operatorname{sen} t \left(t - 2 \operatorname{tang} \frac{t}{2}\right),$$

$$v = a \operatorname{sen} t,$$

$$\Delta(t, t_0) = 2a^2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} t_0 \left[\left(\operatorname{tang} \frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2}\right) - \left(\operatorname{tang} \frac{t}{2} - \frac{t}{2}\right)\right].$$

La funzione $\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \frac{t}{2}$ ha la derivata costantemente positiva, quindi è sempre crescente; per $t = 0$, $t = \pi - 0$, $t = \pi + 0$, $t = 2\pi$ [1]) essa prende rispettivamente i valori 0, $+\infty$, $-\infty$, $-\pi$, quindi, mentre t varia da 0 a 2π, essa non può assumere due volte lo stesso valore. Ne segue:

$$\Delta(t, t_0) \neq 0,$$

e la curva corrisponde ad un minimo forte.

5. *Problema di* NEWTON.

Si ha:

$$\Phi = \frac{y y'^3}{x'^2 + y'^2},$$

[1]) Basta considerare per t l'intervallo da 0 a 2π, perchè, per ragioni fisiche, la brachistocrona non può avere alcuna cuspide.

e sull'estremale:

$$G = \frac{2\,t^5}{a^2(t^2+1)^4(3\,t^2-1)^2}\,;$$

inoltre:

$$E = y \operatorname{sen}^2(\bar{\varphi}-\varphi)\operatorname{sen}(\bar{\varphi}+2\,\varphi).$$

La G è sempre positiva sulla curva; perchè sia $E \geqq 0$, dev'essere:

$$0 \leqq \bar{\varphi} + 2\,\varphi \leqq \pi;$$

ora per le curve che si confrontano coll'estremale dev'essere evidentemente, per ragioni fisiche, $0 \leqq \bar{\varphi} \leqq \frac{\pi}{2}$; ne segue $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, e quindi $t \geqq 1$. Il solo tratto di curva che può dare un minimo forte è la parte del suo arco concavo verso l'asse x che è compresa tra i punti $t = 1$ e $t = \infty$.

Rimane ancora da verificare la condizione di Jacobi.

Le equazioni delle estremali sono:

$$x - b = a\left(\frac{3}{4}\,t^4 + t^2 - \lg t\right), \qquad y = a\left(t^3 + 2\,t + \frac{1}{t}\right),$$

quindi si ha:

$$\begin{aligned} u = a\Big[\left(\frac{3}{4}\,t^4 + t^2 - \lg t\right)\left(3\,t^2 + 2 - \frac{1}{t^2}\right) - \\ - \left(t^3 + 2\,t + \frac{1}{t}\right)\left(3\,t^3 + 2\,t - \frac{1}{t}\right)\Big] \\ = -\frac{a}{t^2}(3\,t^4 + 2\,t^2 - 1)\left(\frac{1}{4}\,t^4 + t^2 + 1 + \lg t\right), \\ v = a\left(3\,t^2 + 2 - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{a}{t^2}(3\,t^4 + 2\,t^2 - 1), \end{aligned}$$

e di qui:

$$\begin{aligned} \Delta(t,\,t_0) = -\frac{a^2}{t^2\,t_0^2}(3\,t^4 + 2\,t^2 - 1)(3\,t_0^4 + 2\,t_0^2 - 1)\times \\ \times\left[\frac{1}{4}\,t^4 + t^2 + \lg t - \frac{1}{4}\,t_0^4 - t_0^2 - \lg t_0\right], \end{aligned}$$

che si annulla soltanto per $t = t_0$, dovendo essere $t \geqq 1$, $t_0 \geqq 1$.

Si ha dunque un minimo forte.

CAPITOLO III.

SOLUZIONI DISCONTINUE.

73. Anzitutto è chiaro, per il ragionamento fatto nel § 16, che le condizioni trovate per un minimo debole o per un minimo forte nel caso di una soluzione continua debbono sussistere per ciascun arco continuo di una soluzione discontinua.

Se $P_0 P_2 P_1$ è una soluzione discontinua l con un solo vertice in P_2, la condizione di JACOBI esige che il punto coniugato di P_0 sulla $P_0 P_2$ si trovi al di là di P_2, e che il punto coniugato di P_2 sulla $P_2 P_1$ si trovi al di là di P_1. Si può allora costruire un campo di estremali continue contenente $P_0 P_2$ (per es. il campo improprio delle estremali passanti per P_0), e il risultato stabilito nel § 18 viene precisato come segue: Su ciascuna estremale della famiglia può assegnarsi in vicinanza di P_2 un punto, che sia vertice d'una estremale discontinua, e una direzione, che sia quella della tangente in tale punto al secondo arco di estremale. Si ha così una famiglia semplicemente infinita di estremali discontinue.

Per dimostrare il nostro asserto, dobbiamo far vedere che, se:

$$x = x(t, a), \qquad y = y(t, a) \tag{1}$$

sono le equazioni della famiglia di estremali di cui fa parte $P_0 P_2$, e se a_0 è il parametro di questa curva, le equazioni (v. § 16):

$$\left\{\begin{aligned} X &= \Phi_c(x, y, c, s) - \Phi_{\bar{c}}(x, y, \bar{c}, \bar{s}) = \Phi_c - \bar{\Phi}_{\bar{c}} = 0, \\ Y &= \Phi_s(x, y, c, s) - \Phi_{\bar{s}}(x, y, \bar{c}, \bar{s}) = \Phi_s - \bar{\Phi}_{\bar{s}} = 0, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove:

$$x = x(t,\ a), \qquad y = y(t,\ a), \qquad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{\partial y(t,\ a)}{\partial t}}{\dfrac{\partial x(t,\ a)}{\partial t}},$$

sono risolubili rispetto a t, $\bar{\varphi}$ per valori di a abbastanza vicini ad a_0 (purchè sia soddisfatta una certa condizione).

Formiamo il determinante funzionale Γ dei primi membri rispetto a t e a $\bar{\varphi}$. Si ha:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \Phi_{cx} x' + \Phi_{cy} y' - \Phi_{cc} s \varphi' + \Phi_{cs} c \varphi' - \Phi_{\bar{c}x} x' - \Phi_{\bar{c}y} y',$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \Phi_{sx} x' + \Phi_{sy} y' - \Phi_{sc} s \varphi' + \Phi_{ss} c \varphi' - \Phi_{\bar{s}x} x' - \Phi_{\bar{s}y} y',$$

$$\frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}} = \Phi_{\bar{c}\bar{c}} \bar{s} - \Phi_{\bar{c}\bar{s}} \bar{c}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varphi}} = \Phi_{\bar{c}\bar{s}} \bar{s} - \Phi_{\bar{s}\bar{s}} \bar{c}.$$

Ora:

$$x' = c\sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad y' = s\sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad \varphi' = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2 + y'^2},$$

$$\Phi_{cx} c + \Phi_{sx} s = \Phi_x, \qquad \Phi_{cy} c + \Phi_{sy} s = \Phi_y,$$

$$\Phi_{cc} = G s^2, \qquad \Phi_{cs} = -G c s, \qquad \Phi_{ss} = G c^2,$$

dove per G s'intende $G(x, y, c, s)$; inoltre, per l'equazione d'EULERO, tenuto conto che Φ_c e Φ_s sono omogenee di grado zero rispetto a c, s, e che G è omogenea di grado -3 rispetto agli stessi argomenti:

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{sx} - \Phi_{cy} + G(x, y, x', y')(x'y'' - x''y') \\ &= \Phi_{sx} - \Phi_{cy} + G(x, y, c, s)\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \Phi_{sx} - \Phi_{cy} + G\frac{\varphi'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = (\Phi_{cx} c + \Phi_{sx} s)\sqrt{x'^2 + y'^2} + G\varphi' s - G\varphi' s^3 - G\varphi' s c^2 -$$
$$- (\overline{\Phi}_{\bar{c}x} c + \overline{\Phi}_{\bar{c}y} s)\sqrt{x'^2 + y'^2}$$
$$= [(\Phi_{cx} - \overline{\Phi}_{\bar{c}x})c + (\Phi_{sx} - \overline{\Phi}_{\bar{c}y})s]\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

ed analogamente:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = [(\Phi_{cy} - \overline{\Phi}_{\bar{s}x})c + (\Phi_{sy} - \overline{\Phi}_{\bar{s}y})s]\sqrt{x'^2 + y'^2};$$

inoltre:

$$\frac{\partial X}{\partial \overline{\varphi}} = \overline{G}\,\overline{s}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial \overline{\varphi}} = -\overline{G}\,\overline{c}.$$

Ne segue, fatte le riduzioni:

$$\Gamma = [(c\overline{\Phi}_x + s\overline{\Phi}_y) - (\overline{c}\Phi_x + \overline{s}\Phi_y)]\,\overline{G}\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

sicchè la condizione a cui si è accennato è che nel punto P_2 sia:

$$\Omega = (c\overline{\Phi}_x + s\overline{\Phi}_y) - (\overline{c}\Phi_x + \overline{s}\Phi_y) \neq 0.$$

Si ha:

$$E(x,\, y,\, c,\, s,\, \overline{c},\, \overline{s}) = \overline{\Phi} - \overline{c}\Phi_c - \overline{s}\Phi_s,$$

quindi:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \overline{\Phi}_x x' + \overline{\Phi}_y y' - \overline{c}(\Phi_{cx} x' + \Phi_{cy} y' - \Phi_{cc} s\varphi' + \Phi_{cs} c\varphi') -$$
$$- \overline{s}(\Phi_{sx} x' + \Phi_{sy} y' - \Phi_{sc} s\varphi' + \Phi_{ss} c\varphi')$$
$$= [(c\overline{\Phi}_x + s\overline{\Phi}_y) - \overline{c}(c\Phi_{cx} + s\Phi_{sx}) - \overline{s}(c\Phi_{cy} + s\Phi_{sy})]\sqrt{x'^2 + y'^2}$$
$$= [(c\overline{\Phi}_x + s\overline{\Phi}_y) - (\overline{c}\Phi_x + \overline{s}\Phi_y)]\sqrt{x'^2 + y'^2}$$
$$= \Omega\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Se, in particolare, si prende l'arco s d'estremale come parametro,

si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \Omega.$$

Eliminando t, a, $\bar{\varphi}$ tra le (1) e le (2), si ottiene l'equazione del luogo dei vertici.

Se le (1) rappresentano la famiglia di estremali continue uscenti da P_0, ognuna di queste, purchè abbastanza vicina ad l, dà luogo ad un'estremale discontinua; se i secondi rami di queste estremali ammettono un inviluppo, i loro punti di contatto coll'inviluppo sono i punti coniugati di P_0 sulle rispettive estremali.

74. Esempi. — 5. *Problema di* Newton.

Si ha:

$$\Phi(x, y, c, s) = y s^3, \qquad \Phi_x = 0, \qquad \Phi_y = s^3,$$

quindi:

$$\Omega = s\bar{s}^3 - \bar{s}s^3 = s\bar{s}(\bar{s}^2 - s^2).$$

Ora nel vertice si ha (§ 19):

$$s = 1, \qquad c = 0, \qquad \bar{s} = \bar{c} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

quindi $\Omega \neq 0$.

La soluzione discontinua corrisponde ad un minimo forte, perchè ciò ha luogo per la sua parte curvilinea (§ 72), mentre, per quanto riguarda la parte rettilinea, non v'è alcun'altra estremale passante per i suoi estremi.

6. V. l'enunciato nel § 19.

Si ha:

$$\Phi = \frac{y x'^3}{y'^2} + h\frac{y'^2}{x'},$$

quindi:

$$\Phi_{x'x'} = \frac{6 y x'}{y'^2} + \frac{2 h y'^2}{x'^3},$$

e:

$$G = \frac{6 y x'}{y'^4} + \frac{2 h}{x'^3}.$$

Se ci limitiamo a considerare la parte della curva che sta al di sopra dell'asse x $(y > 0)$ e le cui tangenti, prese nel verso di t crescente, formano con quest'asse positivo un angolo acuto $(x' > 0)$, risulta soddisfatta in ogni punto della estremale la condizione di LEGENDRE.

Le equazioni delle estremali sono:

$$x = b + \frac{4t}{9}(bt^2 + 3a), \qquad y = \frac{t^2}{3}(bt^2 + 2a),$$

quindi:

$$u = \frac{8}{9}t^2(bt^2 + a), \qquad v = \frac{4}{3}t(bt^2 + a),$$

e:

$$\Delta(t, t_0) = \frac{32}{27}tt_0(bt^2 + a)(bt_0^2 + a)(t - t_0).$$

Ora, per le condizioni $y > 0$, $x' > 0$, si ha:

$$t \neq 0, \qquad bt^2 + a > 0,$$

quindi $\Delta(t, t_0)$ si annulla soltanto per $t = t_0$, e la condizione di JACOBI è soddisfatta.

Costruiamo la funzione di WEIERSTRASS. Si ha:

$$\begin{aligned} E(x, y, c, s, c_1, s_1) &= \frac{yc_1^3}{s_1^2} + h\frac{s_1^2}{c_1} - c_1\left(\frac{3yc^2}{s^2} - \frac{hs^2}{c^2}\right) - \\ &\quad - s_1\left(-\frac{2yc^3}{s^3} + \frac{2hs}{c}\right) \\ &= \frac{y}{s_1^2 s^3}(c_1^3 s^3 - 3c_1 s_1^2 c^2 s + 2s_1^3 c^3) + \frac{h}{c_1 c^2}(s_1^2 c^2 + c_1^2 s^2 - 2c_1 s_1 cs) \\ &= \frac{y}{s^2 c_1}(c_1 s - s_1 c)^2\left[\left(\frac{c_1}{s_1}\right)^2 + \frac{2c}{s}\frac{c_1}{s_1} + \frac{hs^2}{yc^2}\right]. \end{aligned}$$

Per l'estremale si ha:

$$y = \frac{t^2}{3}(bt^2 + 2a), \qquad \frac{s}{c} = t,$$

quindi:

$$\left(\frac{c_1}{s_1}\right)^2 + \frac{2c}{s}\frac{c_1}{s_1} + \frac{hs^2}{yc^2} = \left(\frac{c_1}{s_1}\right)^2 + \frac{2}{t}\frac{c_1}{s_1} + \frac{3h}{ht^2+2a},$$

e la E si annulla per:

$$\frac{c_1}{s_1} = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2(-ht^2+a)}{ht^2+2a}}.$$

Di qui si vede che, se $t^2 > \frac{a}{h}$, il trinomio che figura nell'ultima espressione di E ha segno costante, ma E muta di segno insieme a c_1, mentre, se $t^2 < \frac{a}{h}$, il trinomio medesimo, e con esso E, può prendere segni diversi. Dunque si ha un minimo debole.

Però, se si escludono le curve per cui $\bar{x}' < 0$, si ha per $t^2 > \frac{a}{h}$ un minimo forte.

Cerchiamo le estremali discontinue. In un vertice deve E avere uno zero multiplo, e quindi dev'essere $t^2 = \frac{a}{h}$, come si è già trovato [1]). Le coordinate del vertice sono:

$$x = b + \frac{16}{9}\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{h}}, \qquad y = \frac{a^2}{h};$$

inoltre si ha $\frac{c_1}{s_1} = -\frac{1}{t}$, cioè $\bar{\varphi} = -\varphi$.

Sieno:

$$(3) \qquad x = b_1 + \frac{4\bar{t}}{9}(h\bar{t}^2 + 3a_1), \qquad y = \frac{\bar{t}^2}{3}(h\bar{t}^2 + 2a_1)$$

---

[1]) Siccome in tutti i punti del primo ramo di un'estremale discontinua si ha $t^2 > \frac{a}{h}$, essa corrisponde sempre ad un minimo debole.

le equazioni del secondo ramo di estremale. Le 6 costanti $a_0 \equiv a$, $b_0 \equiv b$, a_1, b_1, t_0, t_1 saranno determinate, come si è già detto, dalle equazioni:

$$(4)\quad \begin{cases} x_0 = b_0 + \dfrac{4t_0}{9}(bt_0^2 + 3a_0), & y_0 = \dfrac{t_0^2}{3}(bt_0^2 + 2a_0), \\ x_1 = b_1 + \dfrac{4t_1}{9}(bt_1^2 + 3a_1), & y_1 = \dfrac{t_1^2}{3}(bt_1^2 + 2a_1), \end{cases}$$

$$(5)\qquad b_0 + \frac{16}{9}\frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}} = b_1 + \frac{16}{9}\frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}}, \qquad \frac{a_0^2}{b} = \frac{a_1^2}{b}.$$

Se invece dalle due prime delle (4) e dalle (5) si ricavano le a_0, b_0, a_1, b_1 in funzione di t_0, e si introducono nelle (3) le espressioni ottenute di a_1, b_1, si hanno le equazioni della famiglia costituita dai secondi rami delle estremali discontinue passanti per P_0, t_0 essendo il parametro. L'inviluppo di queste estremali è determinato dall'equazione:

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \bar{t}} & \dfrac{\partial x}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \bar{t}} & \dfrac{\partial y}{\partial t_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{3}b\bar{t}^2 + \dfrac{4}{3}a_1 & \dfrac{\partial b_1}{\partial t_0} + \dfrac{4}{3}\bar{t}\dfrac{\partial a_1}{\partial t_0} \\ \dfrac{4}{3}b\bar{t}^3 + \dfrac{4}{3}a_1\bar{t} & \dfrac{2}{3}\bar{t}^2\dfrac{\partial a_1}{\partial t_0} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4}{3}\bar{t}(b\bar{t}^2 + a_1)\left(\frac{\partial b_1}{\partial t_0} + \frac{2}{3}\bar{t}\frac{\partial a_1}{\partial t_0}\right),$$

da cui:

$$\bar{t} = -\frac{3\dfrac{\partial b_1}{\partial t_0}}{2\dfrac{\partial a_1}{\partial t_0}}.$$

Ora si trova, posto per semplicità $x_0 = 0$, ciò che è sempre lecito:

$$a_0 = a_1, \qquad b_0 = b_1 - \frac{32}{9}\frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b}},$$

$$b_0 = -\frac{4t_0}{9}(bt_0^2 + 3a_0), \qquad y_0 = \frac{t_0^2}{3}(bt_0^2 + 2a_0),$$

quindi:

$$a_0 = \frac{3\,y_0}{2\,t_0^2} - \frac{h\,t_0^2}{2}, \qquad b_1 = -\frac{4\,t_0}{9}\left(\frac{9\,y_0}{2\,t_0^2} - \frac{h\,t_0^2}{2}\right) + \frac{32}{9}\,\frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{h}},$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t_0} = -\frac{3\,y_0}{t_0^3} - h\,t_0 = -\frac{1}{t_0^3}(3\,y_0 + h\,t_0^4),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_1}{\partial t_0} &= \frac{2\,y_0}{t_0^2} + \frac{2\,h\,t_0^2}{3} + \frac{16\sqrt{a_0}}{3\sqrt{h}}\,\frac{\partial a_0}{\partial t_0} \\ &= (3\,y_0 + h\,t_0^4)\left[\frac{2}{3\,t_0^2} - \frac{16}{3\,t_0^3}\sqrt{\frac{a_0}{h}}\right],\end{aligned}$$

e:

$$\bar{t} = t_0 - 8\sqrt{\frac{a_0}{h}} = t_0 - 8\,\tau,$$

essendo τ il parametro del vertice.

CAPITOLO IV.

MASSIMI E MINIMI CONDIZIONATI O PROBLEMI ISOPERIMETRICI.

---

75. Si è trovato (§ 27) che le linee lungo le quali l'integrale:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(x, y, x', y')dt$$

è minimo sotto la condizione:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \Psi(x, y, x', y')dt = l$$

devono essere estremali dell'integrale $\alpha I + \beta J$, dove α e β sono due costanti, il cui rapporto risulta determinato dati i punti estremi P_0, P_1 e dato il valore della costante l. Per giungere a tale risultato, abbiamo sostituito alle funzioni x, y le $x + \varepsilon\xi + \varepsilon_1\xi_1$, $y + \varepsilon\eta + \varepsilon_1\eta_1$, ed abbiamo trovato che, qualunque sieno ξ, ξ_1, η, η_1, dev'essere:

$$\frac{d(I, J)}{d(\varepsilon, \varepsilon_1)} = 0,$$

sicchè, supposte determinate x, y e fissate ξ, ξ_1, η, η_1, si può considerare ε_1 come funzione di ε definita da questa relazione, e quindi $\varepsilon\xi + \varepsilon_1\xi_1$, $\varepsilon\eta + \varepsilon_1\eta_1$ come funzioni di ε.

Per un minimo dev'essere $\delta^2 I \geqq 0$, mentre dalla condizione $J = l$ segue $\delta^2 J = 0$; supposto quindi $\alpha \geqq 0$, ciò che è sempre lecito, dev'essere:

$$\delta^2(\alpha I + \beta J) \geqq 0.$$

Poniamo:

$$\alpha \Phi + \beta \Psi = \Omega, \qquad \varepsilon \xi + \varepsilon_1 \xi_1 = X, \qquad \varepsilon \eta + \varepsilon_1 \eta_1 = Y;$$

sarà:

$$\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)_0 = \Omega_x X_\varepsilon + \Omega_y Y_\varepsilon + \Omega_{x'} X'_\varepsilon + \Omega_{y'} Y'_\varepsilon,$$

$$\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)_0 = \Omega_{xx} X_\varepsilon^2 + 2\Omega_{xy} X_\varepsilon Y_\varepsilon + \Omega_{yy} Y_\varepsilon^2 + \Omega_{x'x'} X'^2_\varepsilon + 2\Omega_{x'y'} X'_\varepsilon Y'_\varepsilon$$
$$+ \Omega_{y'y'} Y'^2_\varepsilon + 2\Omega_{xx'} X_\varepsilon X'_\varepsilon + 2\Omega_{yy'} Y_\varepsilon Y'_\varepsilon + 2\Omega_{xy'} X_\varepsilon Y'_\varepsilon + 2\Omega_{yx'} Y_\varepsilon X'_\varepsilon$$
$$+ \Omega_x X_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_y Y_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{x'} X'_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{y'} Y'_{\varepsilon\varepsilon},$$

dove deve intendersi posto nel secondo membro $\varepsilon = 0$. Ora:

$$\int_{t_0}^{t_1} [\Omega_x X_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_y Y_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{x'} X'_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{y'} Y'_{\varepsilon\varepsilon}]\, dt = -[\Omega_{x'} X_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{y'} Y_{\varepsilon\varepsilon}]_{t_0}^{t_1}$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} [(\Omega_x - \Omega'_{x'}) X_{\varepsilon\varepsilon} + (\Omega_y - \Omega'_{y'}) Y_{\varepsilon\varepsilon}]\, dt,$$

$$X_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{d^2\varepsilon_1}{d\varepsilon^2}\xi_1, \qquad Y_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{d^2\varepsilon_1}{d\varepsilon^2}\eta_1,$$

quindi:

$$[\Omega_{x'} X_{\varepsilon\varepsilon} + \Omega_{y'} Y_{\varepsilon\varepsilon}]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

inoltre:

$$\Omega_x - \Omega'_{x'} = 0, \qquad \Omega_y - \Omega'_{y'} = 0,$$

sicchè risulta:

$$\delta^2\Omega = \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} [\Omega_{xx} X_\varepsilon^2 + 2\Omega_{xy} X_\varepsilon Y_\varepsilon + \Omega_{yy} Y_\varepsilon^2 + \Omega_{x'x'} X'^2_\varepsilon + 2\Omega_{x'y'} X'_\varepsilon Y'_\varepsilon$$
$$+ \Omega_{y'y'} Y'^2_\varepsilon + 2\Omega_{xx'} X_\varepsilon X'_\varepsilon + 2\Omega_{yy'} Y_\varepsilon Y'_\varepsilon + 2\Omega_{xy'} X_\varepsilon Y'_\varepsilon + 2\Omega_{yx'} Y_\varepsilon X'_\varepsilon]\, dt,$$

un'espressione del tutto analoga a quella ottenuta in principio del § 68. Indicando anche qui l'integrale con H, ed applicando le stesse trasformazioni, si ottiene:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} [G w'^2 + K w^2]\, dt,$$

dove G e K sono calcolate per la funzione Ω, e:

$$w = (X_\varepsilon)_0 y' - (Y_\varepsilon)_0 x',$$

ed anche:

$$(1) \qquad H = \int_{t_0}^{t_1} G\left(w' + \frac{\psi w}{G}\right)^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} w\, U(w)\, dt,$$

dove ψ soddisfa all'equazione differenziale:

$$K + \psi' - \frac{\psi^2}{G} = 0,$$

e:

$$U(w) = Kw - G'w' - Gw'' \text{ [1]}.$$

Osserviamo che:

$$(X_\varepsilon)_0 = \xi + \left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon}\right)_0 \xi_1;$$

ora, essendo $\varepsilon_1 = 0$ per $\varepsilon = 0$, si ha:

$$\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon}\right)_0 = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon},$$

limite che indicheremo con h, sicchè:

$$(X_\varepsilon)_0 = \xi + h\xi_1 = \xi_2, \qquad (Y_\varepsilon)_0 = \eta + h\eta_1 = \eta_2,$$

e:

$$\delta J = \varepsilon \int_{t_0}^{t} (R\xi_2 + S\eta_2)\, dt.$$

Quindi le ξ_2, η_2 debbono soddisfare alla condizione:

$$\int_{t_0}^{t_1} (R\xi_2 + S\eta_2)\, dt = 0,$$

---

[1]) Per evitare equivoci, si è sostituita la lettera U alla lettera Y prima usata per designare la stessa espressione.

dove:

$$R = \Psi_x - \Psi'_{x'} = y'[\Psi_{xy'} - \Psi_{yx'} + G(\Psi)(x'y'' - x''y')] = y'V,$$

$$S = \Psi_y - \Psi'_{y'} = -x'V.$$

Si ha poi:

$$w = \xi_2 y' - \eta_2 x',$$

quindi:

(2) $$R\xi_2 + S\eta_2 = Vw,$$

e la condizione a cui debbono soddisfare ξ_2, η_2 diviene:

(3) $$\int_{t_0}^{t_1} Vw\,dt = 0.$$

Si possono scegliere in infinite maniere le ξ_2, η_2 in modo che la (3) sussista. Prendiamo due coppie di funzioni ξ_{12}, η_{12}; ξ_{22}, η_{22}, che s'annullino agli estremi, e formiamo, applicando la (2):

$$w_1 = \frac{1}{V}(R\xi_{12} + S\eta_{12}),\ w_2 = \frac{1}{V}(R\xi_{22} + S\eta_{22});$$

supposto:

$$\int_{t_0}^{t_1} Vw_2\,dt \neq 0,$$

si determini la costante:

$$c = -\int_{t_0}^{t_1} Vw_1\,dt : \int_{t_0}^{t_1} Vw_2\,dt;$$

la funzione:

$$w = w_1 + cw_2$$

avrà tutte le proprietà volute e renderà soddisfatta la (3).

Dopo ciò, con un ragionamento di cui ci siamo già serviti, si dimostra che condizione necessaria affinchè sia $H \geqq 0$ è $G \geqq 0$.

Così pure si può stabilire senza difficoltà la condizione $E \geqq 0$.

Meno semplice è dimostrare che le condizioni di LEGENDRE e di

WEIERSTRASS, insieme a quella di JACOBI, di cui parleremo tra poco, sono sufficienti per un minimo forte. Per tale dimostrazione rimandiamo all'opera più volte citata di O. BOLZA.

76. La condizione di JACOBI presenta qualche novità.

Se:

$$x = x(t, a, b, \lambda), \qquad y = y(t, a, b, \lambda) \tag{4}$$

sono le equazioni delle estremali dell'integrale $I + \lambda J$ (che sono anche le estremali del problema isoperimetrico che stiamo studiando), le:

$$u = x_a y' - y_a x', \qquad v = x_b y' - y_b x'$$

sono due integrali linearmente indipendenti dell'equazione di JACOBI (§ 69):

$$U(w) \equiv Kw - G'w' - Gw'' = 0,$$

dove G, K si riferiscono alla funzione $\Omega = \Phi + \lambda \Psi$. Dimostriamo ora che:

$$z = x_\lambda y' - y_\lambda x'$$

è integrale dell'equazione:

$$U(w) = -V.$$

Derivando infatti rispetto a λ l'identità a cui si riduce l'equazione d'EULERO:

$$\Omega_x - \Omega'_{x'} = \Phi_x - \Phi'_{x'} + \lambda(\Psi_x - \Psi'_{x'}) = 0$$

per l'introduzione in essa delle (4), si ottiene (cfr. § 69):

$$\begin{aligned} 0 &= y'(Kz - G'z' - Gz'') + (\Psi_x - \Psi'_{x'}) \\ &= y'(Kz - G'z' - Gz'' + V), \end{aligned}$$

donde:

$$Kz - G'z' - Gz'' + V = 0.$$

Ne segue che la funzione μz, dove μ è una costante qualunque, soddisfa all'equazione:

$$U(w) + \mu V = 0, \tag{5}$$

e quindi che l'integrale generale di questa equazione è:

$$w = c_1 u + c_2 v + \mu z, \tag{6}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Se si possono determinare le c_1, c_2, μ in modo che la w soddisfaccia alla condizione (3), si avrà, in virtù della (5):

$$\int_{t_0}^{t_1} w\, U(w)\, dt = 0,$$

e quindi $H = 0$. Sia t'_2 un punto dell'intervallo $t_0 t_1$ diverso da t_0, e definiamo una funzione w in questo modo: essa è nulla nell'intervallo $t'_2 t_1$ (che manca se $t'_2 = t_1$) ed è data nell'intervallo $t_0 t'_2$ dall'espressione (6), in cui le costanti sono soggette alla condizione che sia $w = 0$ per $t = t_0$ e per $t = t'_2$. La (3) si riduce in questo caso a:

$$\int_{t_0}^{t'_2} V w\, dt = 0,$$

e dev'essere:

$$\left\{\begin{aligned} & c_1 u(t_0) + c_2 v(t_0) + \mu z(t_0) = 0, \\ & c_1 u(t'_2) + c_2 v(t'_2) + \mu z(t'_2) = 0, \\ & c_1 \int_{t_0}^{t'_2} V u\, dt + c_2 \int_{t_0}^{t'_2} V v\, dt + \mu \int_{t_0}^{t'_2} V z\, dt = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La condizione necessaria e sufficiente per la coesistenza di queste equazioni è che si annulli per $t = t'_2$ il determinante:

$$D(t, t_0) = \begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) & z(t_0) \\ u(t) & v(t) & z(t) \\ \int_{t_0}^{t} V u\, dt & \int_{t_0}^{t} V v\, dt & \int_{t_0}^{t} V z\, dt \end{vmatrix}.$$

Se prendiamo $\mu = 1$ e scegliamo le c_1, c_2 in modo che sia soddisfatta la prima delle (7), cioè che sia $w(t_0) = 0$, il determinante può scriversi:

$$D(t, t_0) = \begin{vmatrix} u(t_0) & v(t_0) & 0 \\ u(t) & v(t) & w(t) \\ \int_{t_0}^{t} V u\,dt & \int_{t_0}^{t} V v\,dt & \int_{t_0}^{t} V w\,dt \end{vmatrix}$$

$$= -\Delta(t, t_0)\int_{t_0}^{t} V w\,dt + w(t)\left[v(t_0)\int_{t_0}^{t} V u\,dt - u(t_0)\int_{t_0}^{t} V v\,dt\right]$$

$$= -\Delta(t, t_0)\int_{t_0}^{t} V w\,dt + w\int_{t_0}^{t} V\Delta(t, t_0)\,dt.$$

Poniamo per brevità:

$$\int_{t_0}^{t} V w\,dt = A, \qquad \int_{t_0}^{t} V\Delta\,dt = B,$$

sicchè:

$$D = wB - \Delta A.$$

Poichè Δ è integrale dell'equazione $U(z) = 0$, e w è integrale dell'equazione $U(z) + V = 0$, si ha:

$$K\Delta - G'\Delta' - G\Delta'' = 0, \qquad Kw - G'w' - Gw'' + V = 0,$$

da cui:

$$G'(\Delta w' - w\Delta') + G(\Delta w'' - w\Delta'') = V\Delta,$$

e integrando, tenuto conto che $\Delta(t_0) = w(t_0) = 0$:

$$G(\Delta w' - w\Delta') = B.$$

D'altra parte:

$$D' = wB' + w'B - \Delta A' - \Delta' A = w'B - \Delta' A,$$

quindi:

$$\Delta D' - D\Delta' = (\Delta w' - w\Delta')B = \frac{B^2}{G},$$

da cui integrando:

$$\frac{D}{\Delta} = \int_{t_0}^{t} \frac{B^2}{G\Delta^2} dt.$$

La costante d'integrazione è nulla. Infatti $\frac{B}{\Delta}$ si annulla in t_0, poichè, essendo $B' = V\Delta$ e V in generale diverso da zero in t_0, B' e Δ sono nulli dello stesso ordine in t_0, e quindi B lo è d'ordine superiore; $A(t_0)$ è pure nullo; quindi lo è per $t = t_0$ anche $\frac{D}{\Delta} = w\frac{B}{\Delta} - A$.

Dalla formola trovata risulta, tenuto conto che $G > 0$, che nei punti in cui $\Delta \neq 0$ anche $D \neq 0$; nulla può dirsi invece riguardo ai punti (diversi da t_0) in cui $\Delta = 0$, perchè in essi l'integrando diviene infinito.

Ne segue che, indicando con t_2' il primo punto a destra di t_0 in cui D si annulla, si ha:

$$t_2 \leqq t_2'.$$

Cioè: *Il punto coniugato di* t_0 *per il problema condizionato non coincide necessariamente con quello relativo al corrispondente problema incondizionato, ma può trovarsi a destra di esso.*

La condizione di JACOBI si stabilisce come nel caso incondizionato.

Dalle cose dette segue che un'estremale può dare un minimo per l'integrale I sotto la condizione $J = l$ senza darlo per l'integrale $I + \lambda J$.

77. La teoria dei punti coniugati è suscettibile di un'elegante interpretazione geometrica.

Fra le ∞^3 estremali (4) consideriamo le ∞^2 passanti per il punto P_0; sieno le loro equazioni:

(8) $$x = f(t, c, \lambda), \qquad y = g(t, c, \lambda),$$

essendo c il coefficiente angolare della tangente in t_0. Posto:

(9) $$z = \int_{t_0}^{t} \Psi(x, y, x', y') dt,$$

dove per x, y si intendono poste le espressioni scritte, le (8), (9) possono considerarsi come le equazioni di una congruenza di curve sghembe passanti per il punto $(x_0, y_0, 0)$ ed aventi come proiezioni sul piano xy le curve (8); ed il nostro problema si trasforma in un problema di minimo incondizionato nello spazio a 3 dimensioni, essendo $z_0 = 0$, $z_1 = l$.

Se come parametro t prendiamo l'arco contato dal punto P_0, abbiamo su tutte le estremali (8) $t_0 = 0$; le relazioni:

$$x_0 = f(0, c, \lambda), \qquad y_0 = g(0, c, \lambda)$$

sono soddisfatte per tutti i valori di c e di λ, quindi:

$$(10) \quad \frac{\partial f(0, c, \lambda)}{\partial c} = \frac{\partial f(0, c, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial g(0, c, \lambda)}{\partial c} = \frac{\partial g(0, c, \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

La funzione:

$$\bar{u} = f_c g' - g_c f'$$

soddisfa all'equazione $U(\bar{u}) = 0$; la funzione:

$$\bar{v} = f_\lambda g' - g_\lambda f'$$

soddisfa all'equazione $U(\bar{v}) + V = 0$ (cfr. § prec.). Si ha inoltre:

$$z' = \Psi = \Psi_{x'} x' + \Psi_{y'} y' = \Psi_{x'} f' + \Psi_{y'} g',$$

$$z_c = \int_{t_0}^{t} (\Psi_x f_c + \Psi_y g_c + \Psi_{x'} f'_c + \Psi_{y'} g'_c)\, dt$$
$$= \int_{t_0}^{t} (R f_c + S g_c)\, dt + [\Psi_{x'} f_c + \Psi_{y'} g_c]_{t_0}^{t},$$

$$z_\lambda = \int_{t_0}^{t} (R f_\lambda + S g_\lambda)\, dt + [\Psi_{x'} f_\lambda + \Psi_{y'} g_\lambda]_{t_0}^{t};$$

ora (§ 75):

$$R = y' V = g' V, \qquad S = - x' V = - f' V,$$

quindi, tenuto conto delle (10), si ha:

$$z_c = \int_{t_0}^{t} V\bar{u}\,dt + \Psi_{x'}f_c + \Psi_{y'}g_c = \bar{B} + \Psi_{x'}f_c + \Psi_{y'}g_c,$$

$$z_\lambda = \int_{t_0}^{t} V\bar{v}\,dt + \Psi_{x'}f_\lambda + \Psi_{y'}g_\lambda = \bar{A} + \Psi_{x'}f_\lambda + \Psi_{y'}g_\lambda,$$

e:

$$\frac{d(x, y, z)}{d(t, c, \lambda)} = \begin{vmatrix} f' & f_c & f_\lambda \\ g' & g_c & g_\lambda \\ \Psi_{x'}f' + \Psi_{y'}g' & \bar{B} + \Psi_{x'}f_c + \Psi_{y'}g_c & \bar{A} + \Psi_{x'}f_\lambda + \Psi_{y'}g_\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} f' & f_c & f_\lambda \\ g' & g_c & g_\lambda \\ 0 & \bar{B} & \bar{A} \end{vmatrix} = \bar{v}\bar{B} - \bar{u}\bar{A}.$$

Ora, per le (10), $\bar{u}(0) = \bar{v}(0) = 0$; inoltre $\bar{u}$ e $w - \bar{v}$ soddisfanno all'equazione di JACOBI, e $w(0) = 0$; quindi $\bar{u}$ e $w - \bar{v}$ non possono differire da Δ che per fattori costanti. Si ha cioè, indicando con ρ, σ due costanti:

$$\bar{u} = \rho\Delta, \qquad \bar{v} = w - \sigma\Delta,$$

$$\bar{A} = A - \sigma B, \qquad \bar{B} = \rho B,$$

$$\bar{v}\bar{B} - \bar{u}\bar{A} = \rho(wB - \Delta A),$$

e infine:

$$\frac{d(x, y, z)}{d(t, c, \lambda)} = \rho D.$$

Segue da ciò che, se P_2' è il punto coniugato di P_0 sopra un'estremale piana, nel punto corrispondente Q_2 dell'estremale sghemba di cui questa è la proiezione si annulla il determinante $\dfrac{d(x, y, z)}{d(t, c, \lambda)}$.

Le equazioni di una superficie della congruenza si ottengono dalle (8), (9) stabilendo una relazione tra i parametri c, λ, o, ciò che è lo stesso, sostituendo a c, λ due funzioni di un nuovo parametro τ:

$$c = \varphi(\tau), \qquad \lambda = \psi(\tau).$$

Indicando momentaneamente con α, β, γ i coseni direttori della normale alla superficie considerata, con k un coefficiente di proporzionalità, si ha (§ 50):

$$\alpha = k\frac{d(y, z)}{d(t, \tau)} = k\left[\frac{d(y, z)}{d(t, c)}\varphi'(\tau) + \frac{d(y, z)}{d(t, \lambda)}\psi'(\tau)\right],$$

$$\beta = k\frac{d(z, x)}{d(t, \tau)} = k\left[\frac{d(z, x)}{d(t, c)}\varphi'(\tau) + \frac{d(z, x)}{d(t, \lambda)}\psi'(\tau)\right],$$

$$\gamma = k\frac{d(x, y)}{d(t, \tau)} = k\left[\frac{d(x, y)}{d(t, c)}\varphi'(\tau) + \frac{d(x, y)}{d(t, \lambda)}\psi'(\tau)\right].$$

Ora, per una nota proprietà dei determinanti nulli, si ha nel punto Q_2:

$$(11) \qquad \frac{\dfrac{d(y, z)}{d(t, c)}}{\dfrac{d(y, z)}{d(t, \lambda)}} = \frac{\dfrac{d(z, x)}{d(t, c)}}{\dfrac{d(z, x)}{d(t, \lambda)}} = \frac{\dfrac{d(x, y)}{d(t, c)}}{\dfrac{d(x, y)}{d(t, \lambda)}};$$

indicando con h il valor comune di questi rapporti, e scrivendo k in luogo di $k[h\varphi'(\tau) + \psi'(\tau)]$, risulta:

$$(12) \qquad \alpha = k\frac{d(y, z)}{d(t, \lambda)}, \qquad \beta = k\frac{d(z, x)}{d(t, \lambda)}, \qquad \gamma = k\frac{d(x, y)}{d(t, \lambda)}.$$

Pertanto i rapporti $\alpha:\beta:\gamma$ sono indipendenti dalle funzioni φ, ψ, e quindi tutte le superficie della congruenza passanti per Q_2 hanno comune in questo punto la normale, e perciò anche il piano tangente. Il punto Q_2 si dice un *fuoco* della congruenza. Il luogo dei fuochi è la *superficie focale*; essa è rappresentata dalle equazioni (8), (9), essendo i tre parametri t, c, λ legati dalla relazione:

$$(13) \qquad \frac{d(x, y, z)}{d(t, c, \lambda)} = 0.$$

Essa è tangente a tutte le superficie, e quindi anche a tutte le curve, della congruenza. Infatti, indicando con α_1, β_1, γ_1 i coseni direttori della normale alla superficie focale, con k un coefficiente di proporzionalità, e considerando t, c come due parametri indipendenti, λ come una loro funzione definita dalla (13), si ha:

$$\alpha_1 = k\left[\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial c}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial c}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)\right]$$
$$= k\left[\frac{d(y,\, z)}{d(t,\, c)} + \frac{d(y,\, z)}{d(t,\, \lambda)}\frac{\partial \lambda}{\partial c} - \frac{d(y,\, z)}{d(c,\, \lambda)}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right],$$

e le analoghe per β_1, γ_1. Ora nei punti della superficie focale hanno luogo le (11) ed anche le:

$$\frac{\dfrac{d(y,\, z)}{d(c,\, \lambda)}}{\dfrac{d(y,\, z)}{d(t,\, \lambda)}} = \frac{\dfrac{d(z,\, x)}{d(c,\, \lambda)}}{\dfrac{d(z,\, x)}{d(t,\, \lambda)}} = \frac{\dfrac{d(x,\, y)}{d(c,\, \lambda)}}{\dfrac{d(x,\, y)}{d(t,\, \lambda)}};$$

denotando con j il valore comune di questi rapporti, si ha:

$$\alpha_1 = k\frac{d(y,\, z)}{d(t,\, \lambda)}\left[h + \frac{\partial \lambda}{\partial c} - j\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right],$$

o più semplicemente:

$$\alpha_1 = k\frac{d(y,\, z)}{d(t,\, \lambda)},$$

e le analoghe per β_1, γ_1. Il confronto colle (12) dimostra che le superficie e le linee della congruenza sono tangenti alla superficie focale nei punti comuni.

Pertanto il punto coniugato di P_0 sopra un'estremale si può definire come la proiezione del punto di contatto dell'estremale sghemba corrispondente colla superficie focale della congruenza costituita dalle estremali sghembe uscenti da P_0.

78. ESEMPI. — 10. *Problema degli isoperimetri.*

Si ha (§ 31):

$$\Omega = \Phi + \lambda \Psi = y x' + \lambda \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

quindi:

$$\Omega_{x'x'} = \frac{\lambda y'^2}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad G = \frac{\lambda}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Essendo $\lambda < 0$, la condizione di Legendre per un massimo è soddisfatta in tutto il piano; quindi lo è anche quella di Weierstrass, ciò che si può verificare direttamente. Infatti:

$$\begin{aligned} E(x, y, c, s, c_1, s_1) &= y c_1 + \lambda - c_1(y + \lambda c) - s_1 \lambda s \\ &= \lambda(1 - c c_1 - s s_1). \end{aligned}$$

Le equazioni delle estremali sono:

$$x = a + \lambda \cos t, \qquad y = b - \lambda \operatorname{sen} t,$$

quindi:

$$u = -\lambda \cos t, \qquad v = \lambda \operatorname{sen} t, \qquad z = -\lambda$$

dove z è l'espressione così designata a p. 224; inoltre:

$$V = \Psi_{xy'} - \Psi_{yx'} + G(\Psi)(x'y'' - x''y') = \frac{1}{\lambda} \quad {}^{1}),$$

quindi:

$$\int_{t_0}^{t} V u \, dt = \operatorname{sen} t_0 - \operatorname{sen} t, \qquad \int_{t_0}^{t} V v \, dt = \cos t_0 - \cos t,$$

$$\int_{t_0}^{t} V z \, dt = t_0 - t,$$

---

[1]) Conviene tener presente che, essendo $\lambda < 0$, si ha:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = -\lambda.$$

e:

$$D(t,\ t_0) = \begin{vmatrix} -\lambda\cos t_0 & \lambda \operatorname{sen} t_0 & -\lambda \\ -\lambda\cos t & \lambda\operatorname{sen} t & -\lambda \\ \operatorname{sen} t_0 - \operatorname{sen} t & \cos t_0 - \cos t & t_0 - t \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 [-(\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t_0)^2 - (\cos t - \cos t_0)^2 + (t - t_0) \operatorname{sen} (t - t_0)],$$

ossia, posto $\dfrac{t - t_0}{2} = \delta$:

$$D(t,\ t_0) = -4\lambda^2 \operatorname{sen}\delta \cos\delta (\operatorname{tang}\delta - \delta).$$

Dovendo essere:

$$0 \leqq t - t_0 \leqq 2\pi,$$

le sole soluzioni dell'equazione $D(t,\ t_0) = 0$ sono $\delta = 0$, $\delta = \pi$.

Pertanto l'estremale (cerchio), sotto la condizione $\lambda < 0$, dà luogo in tutta la sua estensione ad un massimo forte.

Nel caso del problema incondizionato, in cui cioè si cercano i massimi dell'integrale:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \Omega\, dt,$$

λ essendo una costante data, si ha:

$$\Delta(t,\ t_0) = u(t) v(t_0) - v(t) u(t_0) = \lambda^2 \operatorname{sen} (t - t_0),$$

che s'annulla per $t - t_0 = \pi$; sicchè $t_2 = t_0 + \pi$, mentre si è trovato $t_2' = t_0 + 2\pi$.

Le equazioni delle estremali sghembe sono:

$$x = a + \lambda\cos t, \quad y = b - \lambda \operatorname{sen} t, \quad z = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = \lambda (t_0 - t);$$

le estremali sono eliche inclinate di $\dfrac{\pi}{4}$. La congruenza delle eliche passanti per P_0 è rappresentata da:

$$x = x_0 + \lambda(\cos t - \cos t_0), \quad y = y_0 + \lambda(\operatorname{sen} t_0 - \operatorname{sen} t), \quad z = \lambda(t_0 - t);$$

il punto coniugato di P_0 (fuoco) è dato da $t_2' = t_0 + 2\pi$, le sue coordinate sono:

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = -2\pi\lambda.$$

La superficie focale si riduce alla retta $x = x_0$, $y = y_0$.

11. *Posizione d'equilibrio di un filo pesante.*

Si ha:

$$\Omega = \Phi + \lambda\Psi = (y + \lambda)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

quindi:

$$\Omega_{x'x'} = (y + \lambda)\frac{y'^2}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad G = \frac{y + \lambda}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Essendo $y + \lambda > 0$ (perchè $a > 0$), si ha $G > 0$, sicchè la condizione di Legendre è soddisfatta.

Inoltre:

$$E(x, y, c, s, c_1, s_1) = (y + \lambda)[1 - cc_1 - ss_1] > 0.$$

Prendendo $\frac{x - b}{a}$ come parametro, le equazioni delle estremali sono:

$$x = b + at, \qquad y = a \operatorname{ch} t - \lambda.$$

Quindi:

$$u = a(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t), \qquad v = a \operatorname{sh} t, \qquad z = a,$$

$$V = G(\Psi)(x'y'' - x''y') = \frac{1}{a \operatorname{ch}^2 t},$$

$$\int V u\, dt = -\frac{t}{\operatorname{ch} t}, \quad \int V v\, dt = -\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \quad \int V z\, dt = \operatorname{th} t,$$

$$D(t, t_0) = \begin{vmatrix} a(t_0 \operatorname{sh} t_0 - \operatorname{ch} t_0) & a \operatorname{sh} t_0 & a \\ a(t \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t) & a \operatorname{sh} t & a \\ \dfrac{t_0 \operatorname{ch} t - t \operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} t_0} & \dfrac{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} t_0}{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} t_0} & \operatorname{th} t - \operatorname{th} t_0 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \{(t - t_0) \operatorname{sh}(t - t_0) + 2[1 - \operatorname{ch}(t - t_0)]\}$$
$$= 4a^2 \operatorname{sh} \tau (\tau \operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh} \tau),$$

posto $\tau = \dfrac{t - t_0}{2}$. Il binomio tra parentesi si annulla per $\tau = 0$, e la sua derivata è costantemente positiva per $\tau > 0$, quindi non esiste alcun valore di t maggiore di t_0 per cui D si annulli, cioè non esiste punto coniugato di P_0 [1]).

Si ha dunque in questo caso un minimo forte.

14. *Problema della mezza sfera* (§ 31).

Abbiamo trovato che questo problema ammette soltanto soluzioni discontinue rappresentate nel piano da due segmenti rettilinei, e che uno degli angoli formati da questi segmenti o dai loro prolungamenti è bisecato dalla retta che congiunge il vertice col punto di contatto del piano e della sfera.

Consideriamo separatamente i due casi, supponendo per semplicità, come già si è fatto, che il vertice cada sull'asse x.

a) L'asse x biseca l'angolo interno dei due segmenti, cioè $\varphi_1 = \pi - \varphi$, $s_1 = s$, $c_1 = -c$. Le due condizioni per il vertice $(x_2, 0)$ sono:

$$\frac{c}{(x_2^2 + 1)\sqrt{1 + x_2^2 s^2}} + \lambda c = \frac{c_1}{(x_2^2 + 1)\sqrt{1 + x_2^2 s_1^2}} + \lambda c_1,$$

$$\frac{s}{\sqrt{1 + x_2^2 s^2}} + \lambda s = \frac{s_1}{\sqrt{1 + x_2^2 s_1^2}} + \lambda s_1;$$

la 2^a è identicamente soddisfatta, la 1^a dà:

$$\lambda = -\frac{1}{(x_2^2 + 1)\sqrt{1 + x_2^2 s^2}}.$$

[1]) Osserviamo che nel problema corrispondente incondizionato il punto coniugato sotto certe condizioni esiste; v. § 67.

Si ha poi nel vertice:

$$G = \frac{1}{(1 + x_2^2 s^2)^{\frac{3}{2}}} + \lambda = \frac{x_2^2 c^2}{(x_2^2 + 1)(1 + x_2^2 s^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

negli altri punti:

$$G = \frac{1}{T^3} + \lambda,$$

dove:

$$T = \sqrt{(y^2 + 1)c^2 - 2xysc + (x^2 + 1)s^2} = \sqrt{(yc - xs)^2 + 1}.$$

Ora l'equazione della retta $P_0 P_2$ è:

$$y = (x - x_2) \operatorname{tang} \varphi = (x - x_2) \frac{s}{c},$$

donde:

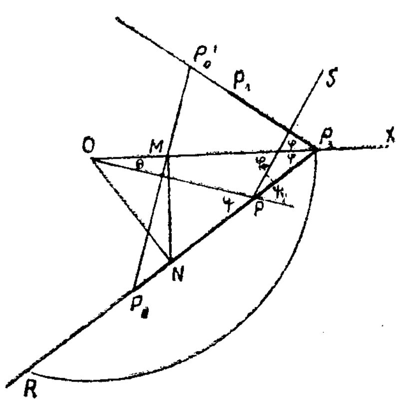
$$yc - xs = - x_2 s,$$

e:

$$T = \sqrt{1 + x_2^2 s^2},$$

sicchè per G risulta per tutti i punti di $P_0 P_2$ lo stesso valore trovato pel vertice. Egual risultato si otterrebbe pei punti del segmento $P_2 P_1$. Pertanto G è positiva su tutta l'estremale.

Diciamo O il punto di contatto della sfera col piano, e, indicando con $P(x, y)$ un punto qualunque del segmento $P_0 P_2$, poniamo (Fig. 11) $OP = \rho$, $OPP_2 = \pi - \psi$, $P_2 OP = \theta$.



(Fig. 11).

Avremo allora, essendo $OP_2 = x_2$, ed osservando che, supposto φ positivo, y risulta negativo:

$$\rho \operatorname{sen} \psi = x_2 \operatorname{sen} \varphi, \qquad x = \rho \cos \theta, \qquad y = -\rho \operatorname{sen} \theta.$$

Essendo poi φ_1 l'inclinazione sull'asse x di un'altra retta qualunque PS passante per P, e indicando con ψ_1 il supplemento di OPS, sarà:

$$\psi_1 - \psi = \varphi_1 - \varphi.$$

Inoltre, come si è già trovato:

$$(y^2+1)c^2 - 2xycs + (x^2+1)s^2 = (yc-xs)^2 + 1 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1 = x_2^2 \operatorname{sen}^2\varphi + 1,$$

e:

$$(y^2+1)c_1^2 - 2xyc_1s_1 + (x^2+1)s_1^2 = (yc_1 - xs_1)^2 + 1 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\psi_1 + 1,$$

quindi:

$$E(x, y, c, s, c_1, s_1) = \left(\frac{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi_1 + 1}}{\rho^2 + 1} + \lambda\right) -$$
$$- c_1\left(\frac{\rho^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1}\,(\rho^2+1)} + \lambda c\right) -$$
$$- s_1\left(\frac{\rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1}\,(\rho^2+1)} + \lambda s\right),$$

e ponendo per λ il valore ottenuto poc'anzi, tenuto conto che $\theta + \varphi_1 = \psi_1$:

$$E(x, y, c, s, c_1, s_1) = \frac{1}{\rho^2+1}\Bigg[\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi_1 + 1} -$$
$$- \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\psi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1}}\Bigg] -$$
$$- \frac{1}{(x_2^2+1)\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1}}\left[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)\right].$$

Supponiamo dapprima $x_2 \geq \rho$; allora:

$$E(x, y, c, s, c_1, s_1) \geq \frac{1}{\rho^2+1}\left[\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi_1 + 1} - \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\psi_1 + 1}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\psi + 1}}\right],$$

espressione che è sempre positiva per $\psi_1 \neq \psi$. Invece, se $x_2 < \rho$, E potrà prendere segni diversi a seconda del valore di φ_1.

Quindi, se, supposto $x_2 > 0$, si ha (come nella figura) $x_0 < x_2$, la funzione di WEIERSTRASS è costantemente positiva in tutto il tratto della retta $P_2 P_0$ che va da P_2 al secondo punto d'intersezione R della retta stessa col cerchio di centro O e di raggio $O P_2$. Essa invece non ha mai segno costante, se $x_0 > x_2$.

Le medesime considerazioni valgono per il secondo tratto di estremale.

Veniamo alla condizione di JACOBI.

Il punto coniugato P_0' di P_0 sull'estremale (piana) discontinua $P_0 P_2 P_1$, se esiste, è il punto d'intersezione di $P_2 P_1$ col secondo tratto di un'estremale discontinua infinitamente vicina $P_0 \overline{P}_2 P_0'$ tale che sia:

$$P_0 \overline{P}_2 + \overline{P}_2 P_0' = P_0 P_2 + P_2 P_0'.$$

Supponiamo per un istante di conoscere questa estremale. Costruita l'ellisse di fuochi P_0, P_0' e di asse maggiore $P_0 P_2 + P_2 P_0'$, i punti P_2, $\overline{P}_2$ saranno due punti infinitamente vicini della curva; inoltre, poichè gli angoli interni in P_2, $\overline{P}_2$ debbono essere bisecati dalle congiungenti i vertici con O, dovranno $P_2 O$, $\overline{P}_2 O$ coincidere colle normali in P_2 e $\overline{P}_2$, sicchè O sarà il centro di curvatura corrispondente al punto P_2.

Ora, se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

è l'equazione dell'ellisse, e si pone $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e$, il raggio di curvatura nel punto (x, y) è:

$$R = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a b},$$

la normale geometrica è:

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - e^2 x^2},$$

e l'angolo φ della normale con ciascuno dei raggi vettori uscenti dai fuochi è dato da:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{e\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - e^2 x^2}}.$$

Quindi, se il punto (x, y) è il punto P_2, e se M è l'intersezione di OP_2 coll'asse maggiore, si ha:

$$OP_2 = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}, \qquad MP_2 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2 x^2},$$

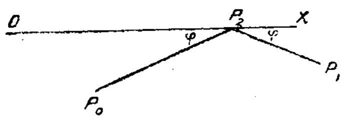
da cui:

$$OM = \frac{e^2}{ab}(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - e^2 x^2} = OP_2 \operatorname{sen}^2\varphi.$$

Di qui risulta una costruzione semplice per trovare il punto P'_0. Si conduca da O la perpendicolare a $P_0 P_2$, il cui piede sia N, e da N la perpendicolare ad OP_2, il cui piede sia M; l'intersezione di $P_0 M$ con $P_2 P_1$ è il punto P'_0.

Concludendo, supposto $x_2 \gtrless \rho$ e $P_2 P_1 < P_2 P'_0$, si ha un minimo forte.

b) L'asse x biseca l'angolo esterno dei due segmenti (Fig. 12),



(Fig. 12).

cioè $\varphi_1 = -\varphi$, $s_1 = -s$, $c_1 = c$. Delle due condizioni pel vertice la 1ª è soddisfatta identicamente, la 2ª dà:

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2 s^2}},$$

quindi si ha:

$$G = \frac{1}{(1 + x_2^2 s^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + x_2^2 s^2}} = -\frac{x_2^2 s^2}{(1 + x_2^2 s^2)^{\frac{3}{2}}} < 0;$$

G è negativa in tutti i punti dell'estremale.

Risulta poi, colle stesse notazioni già usate, e tenendo conto che $\varphi_1 - \varphi = \psi_1 - \psi$:

$$E = \frac{1}{\rho^2 + 1}\left[\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi_1 + 1} - \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \psi_1 + \cos(\varphi_1 - \varphi)}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1}}\right] -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1}}[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)]$$

$$= \frac{1}{(\rho^2 + 1)\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1}} \{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi_1 + 1}\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1} -$$

$$- \rho^2 \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \psi_1 - \cos(\psi_1 - \psi) - (\rho^2 + 1)[1 - \cos(\psi_1 - \psi)]\}$$

$$= \frac{1}{(\rho^2 + 1)\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1}} \{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi_1 + 1}\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1} -$$

$$- (\rho^2 + 1 - \rho^2 \cos \psi \cos \psi_1)\}.$$

Ora:

$$(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi_1 + 1)(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \psi + 1) = \rho^4(1 - \cos^2 \psi - \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi \cos^2 \psi_1)$$
$$+ \rho^2(2 - \cos^2 \psi - \cos^2 \psi_1) + 1,$$

$$(\rho^2 + 1 - \rho^2 \cos \psi \cos \psi_1)^2 = \rho^4(1 - 2\cos \psi \cos \psi_1 + \cos^2 \psi \cos^2 \psi_1)$$
$$+ 2\rho^2(1 - \cos \psi \cos \psi_1) + 1,$$

e la differenza tra la seconda e la prima di queste espressioni è:

$$\rho^2(\rho^2 + 1)(\cos \psi_1 - \cos \psi)^2,$$

sicchè si ha sempre $E < 0$.

Un ragionamento analogo a quello fatto nel caso precedente dimostra che non esiste il punto coniugato di P_0. Infatti, invece di due normali consecutive, si avrebbero qui due tangenti consecutive, le quali non hanno alcun punto comune all'infuori del punto di contatto di una di esse.

In questo caso si ha dunque un massimo forte.

CAPITOLO V.

INTEGRALI CON LIMITI VARIABILI.

79. Nulla di nuovo presenta la teoria degli integrali con limiti variabili per quanto riguarda le condizioni di LEGENDRE e di WEIERSTRASS.

Per lo studio della condizione di JACOBI ci limitiamo al caso in cui l'estremo P_1 è fisso, l'altro estremo deve stare sopra una curva data $\theta(x, y) = 0$, e Φ è indipendente dalle coordinate di P_0. In questo caso dev'essere soddisfatta nel punto P_0 la condizione di trasversalità (§ 34):

$$\left(\frac{\Phi_{y'}}{\Phi_{x'}}\right)_{t_0} = \frac{\dfrac{\partial\theta(x_0, y_0)}{\partial y_0}}{\dfrac{\partial\theta(x_0, y_0)}{\partial x_0}}.$$

Consideriamo la famiglia di estremali che incontrano trasversalmente la curva $\theta(x, y) = 0$. La condizione di JACOBI per la estremale considerata potrà esprimersi geometricamente così: Il punto di contatto dell'estremale coll'inviluppo della famiglia, punto che dicesi *fuoco*, deve trovarsi al di là di P_1.

Il fuoco si riduce al punto coniugato di P_0, se la curva $\theta(x, y) = 0$ si riduce al punto fisso P_0.

Vediamo ora come si trova il fuoco.

Sieno:

$$x = \xi(a), \qquad y = \eta(a)$$

le equazioni parametriche della curva $\theta(x, y) = 0$, e:

$$x = f(t, a), \qquad y = g(t, a)$$

le equazioni della famiglia di trasversali considerata, dove a, che è il parametro dei punti della curva fissa, si assume come parametro della famiglia. Dev'essere identicamente rispetto ad a:

$$f(t_0, a) = \xi(a), \qquad g(t_0, a) = \eta(a);$$

inoltre la condizione di trasversalità diviene:

$$\Phi_{x'}\xi'(a) + \Phi_{y'}\eta'(a) = 0 \qquad \text{per} \quad t = t_0 \text{ [1]}.$$

Derivando questa identità rispetto ad a, risulta:

$$\Phi_{x'}\xi'' + \Phi_{y'}\eta'' + [\Phi_{x'x}f_a + \Phi_{x'y}g_a + \Phi_{x'x'}f_{ta} + \Phi_{x'y'}g_{ta}]\xi',$$
$$+ [\Phi_{y'x}f_a + \Phi_{y'y}g_a + \Phi_{y'x'}f_{ta} + \Phi_{y'y'}g_{ta}]\eta' = 0 \quad \text{per} \quad t = t_0;$$

tenendo conto che:

$$(1) \qquad f_a(t_0, a) = \xi'(a), \qquad g_a(t_0, a) = \eta'(a),$$

e facendo uso delle notazioni introdotte nel § 68, l'eguaglianza scritta diviene:

$$\Phi_{x'}\xi'' + \Phi_{y'}\eta'' + L\xi'^2 + 2M\xi'\eta' + N\eta'^2$$
$$+ G(\xi' g_t - \eta' f_t)(\xi' g_{tt} - \eta' f_{tt} + g_t f_{ta} - f_t g_{ta}) = 0 \quad \text{per} \quad t = t_0.$$

Poniamo:

$$u(t, a) = f_a g_t - g_a f_t,$$

da cui:

$$\frac{\partial u(t, a)}{\partial t} = f_a g_{tt} - g_a f_{tt} + g_t f_{ta} - f_t g_{ta};$$

sarà per le (1) per $t = t_0$:

$$u = \xi' y' - \eta' x', \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \xi' g_{tt} - \eta' f_{tt} + g_t f_{ta} - f_t g_{ta},$$

---

[1]) Non crediamo possa nascere equivoco dal fatto che gli apici applicati alle lettere x, y indicano derivazione rispetto a t, mentre quelli applicati alle lettere ξ, η indicano derivazione rispetto ad a.

e la relazione ottenuta potrà scriversi:

$$\Phi_{x'}\xi''+\Phi_{y'}\eta''+L\xi'^2+2M\xi'\eta'+N\eta'^2+Gu\frac{\partial u}{\partial t}=0 \quad \text{per} \quad t=t_0,$$

o più brevemente:

$$A u + B\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{per} \quad t = t_0, \tag{2}$$

posto:

$$A = \Phi_{x'}\xi'' + \Phi_{y'}\eta'' + L\xi'^2 + 2M\xi'\eta' + N\eta'^2,$$

$$B = Gu^2.$$

Osserviamo che u è (cfr. § 69) un integrale dell'equazione di JACOBI; esso è caratterizzato, a meno di un fattore costante, dalla condizione di soddisfare alla (2) per $t=t_0$ (§ 58, c) [1]; osserviamo ancora che l'equazione $u=0$ insieme alle equazioni della famiglia determina l'inviluppo della famiglia stessa. Può pertanto concludersi che il fuoco è il primo punto in cui s'annulla l'integrale dell'equazione di JACOBI definito dalla condizione (2).

Sopra una determinata estremale di parametro a_0 il parametro t del fuoco è dato dalla relazione $u(t, a_0) = 0$.

Anche qui per la dimostrazione della sufficienza rinviamo al trattato di O. BOLZA.

80. ESEMPI. — 1. *Linea più breve tra un punto ed una curva.*

Le estremali sono rette, e la trasversalità coincide colla normalità; quindi il fuoco di un'estremale è il centro di curvatura della curva fissa corrispondente al suo punto d'incontro coll'estremale.

Pertanto si ha un minimo forte per un'estremale P_0P_1 (retta normale alla curva fissa nel punto P_0), se il centro di curvatura della curva fissa nel punto P_0 si trova al di là di P_1.

Se:

$$x = t, \qquad y = \alpha t + \beta \tag{3}$$

---

[1]) A e B sono funzioni note di t, a; per $t=t_0$ e per il valore di a corrispondente all'estremale che si considera, esse si riducono a costanti.

sono le equazioni delle estremali, quelle della famiglia di estremali che tagliano ortogonalmente la curva:

$$x = \xi(a), \qquad y = \eta(a)$$

si ottengono eliminando α e β fra le (3) e le:

$$\eta = \alpha\xi + \beta, \qquad \xi' + \alpha\eta' = 0;$$

risulta:

$$x = t, \qquad y = -\frac{\xi'}{\eta'}t + \frac{\xi\xi' + \eta\eta'}{\eta'},$$

e quindi:

$$u = -\frac{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}{\eta'^2}t + \frac{\xi(\xi'\eta'' - \xi''\eta') - \eta'(\xi'^2 + \eta'^2)}{\eta'^2}.$$

Si ha $u = 0$ per:

$$t = \xi - \eta'\frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

donde:

$$x = \xi - \eta'\frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}, \qquad y = \eta + \xi'\frac{\xi'^2 + \eta'^2}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'},$$

che sono le note formole per le coordinate del centro di curvatura.

2. *Superficie di rivoluzione d'area minima.*

Le equazioni delle estremali sono:

$$(4) \qquad x = \alpha t + \beta, \qquad y = \alpha \operatorname{ch} t;$$

ed anche in questo caso la trasversalità coincide colla ortogonalità. Preso come parametro a della curva fissa il parametro t_0 dell'estremo della curva (4) ad essa ortogonale che sta su di essa, e indicando come prima con $x = \xi(a)$, $y = \eta(a)$ le equazioni della curva fissa, dovrà essere:

$$(5) \qquad \xi = \alpha a + \beta, \qquad \eta = \alpha \operatorname{ch} a, \qquad \xi' + \eta' \operatorname{sh} a = 0,$$

da cui:

$$\alpha = \frac{\eta}{\operatorname{ch} a}, \qquad \beta = \xi - \frac{a\eta}{\operatorname{ch} a}.$$

Di qui segue:

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{\eta' \operatorname{ch} a - \eta \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch}^2 a},$$

$$\frac{d\beta}{da} = \xi' - \frac{(\eta + a\eta')\operatorname{ch} a - a\eta \operatorname{sh} a}{\operatorname{ch}^2 a},$$

e tenendo conto dell'ultima delle (5):

$$\frac{d\beta}{da} = \frac{\eta(a \operatorname{sh} a - \operatorname{ch} a) - \eta' \operatorname{ch} a(a + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a)}{\operatorname{ch}^2 a}.$$

Dalle (4) segue poi:

$$\begin{aligned} u(t, a) &= \left(t\frac{d\alpha}{da} + \frac{d\beta}{da}\right)\alpha \operatorname{sh} t - \alpha \frac{d\alpha}{da} \operatorname{ch} t \\ &= \alpha \operatorname{ch} t \left[\frac{d\alpha}{da}(t \operatorname{th} t - 1) + \frac{d\beta}{da} \operatorname{th} t\right], \end{aligned}$$

sicchè il fuoco è determinato dall'equazione trascendente:

$$\frac{d\alpha}{da}(t \operatorname{th} t - 1) + \frac{d\beta}{da} \operatorname{th} t = 0. \tag{6}$$

Per lo studio di questa equazione conviene introdurre il raggio di curvatura ρ della curva fissa. Si ha, attribuendo a ρ un segno determinato:

$$\rho = \frac{(\xi'^2 + \eta'^2)^{\frac{3}{2}}}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'};$$

ora, per le (5):

$$\eta = \alpha \operatorname{ch} a, \qquad \xi' = -\eta' \operatorname{sh} a,$$

quindi:

$$\xi'' = -\eta'' \operatorname{sh} a - \eta' \operatorname{ch} a,$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \eta'^2 \operatorname{ch}^2 a, \qquad \xi'\eta'' - \xi''\eta' = \eta'^2 \operatorname{ch} a,$$

$$\rho = \eta' \operatorname{ch}^2 a,$$

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{\rho}{\operatorname{ch}^3 a}\left(1 - \alpha \frac{\operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a}{\rho}\right),$$

$$\frac{d\beta}{da} = -\frac{\rho}{\operatorname{ch}^3 a}\left[(a + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a) + \frac{\alpha \operatorname{ch}^2 a}{\rho}(\operatorname{ch} a - a \operatorname{sh} a)\right].$$

La (6) diviene pertanto:

$$\frac{\rho}{\alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a} = \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\varphi(t) + a + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a},$$

posto:

$$\varphi(t) = \operatorname{cth} t - t.$$

La funzione $\varphi(t)$ [1]) è costantemente decrescente, giacchè la sua derivata è $-\operatorname{cth}^2 t$; per $t = -\infty, -0, +0, +\infty$ essa prende rispettivamente i valori $+\infty, -\infty, +\infty, -\infty$. Quindi essa prende ciascun valore una volta per $t < 0$ ed una per $t > 0$; in particolare esiste uno ed un solo valore $h > 0$ tale che per un determinato a sia:

$$\varphi(h) = -(a + \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a).$$

Può scriversi allora:

$$\frac{\rho}{\alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a} = \frac{\varphi(t) - \varphi(a)}{\varphi(t) - \varphi(h)}; \tag{7}$$

ed è importante osservare che, supposto $\eta > 0$, è anche $\alpha > 0$.

---

[1]) Abbiamo incontrato già questa funzione nel caso degli estremi fissi; abbiamo trovato che il punto t coniugato del punto t_0 è determinato dalla relazione $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ (§ 67).

Considerando ρ come funzione del parametro t del fuoco, si ha:

$$\frac{d\rho}{dt} = \alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a \varphi'(t) \frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{[\varphi(t) - \varphi(b)]^2} = \frac{\alpha \operatorname{ch}^5 a \varphi'(t)}{[\varphi(t) - \varphi(b)]^2},$$

donde risulta che ρ decresce al crescere di t.

Distinguiamo i due casi di $a < 0$ e $a > 0$.

a) $a = t_0 < 0$, cioè il punto P_0 sta sul ramo discendente della catenaria. Sia $t = c$ il parametro del punto coniugato di P_0, cioè sia:

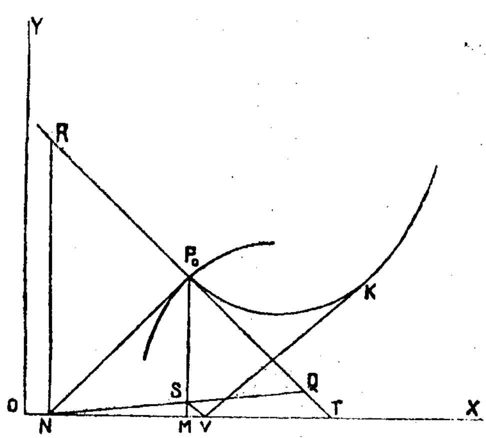
$$\varphi(c) = \varphi(a), \qquad c > 0.$$

Dalla relazione:

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{\operatorname{ch}^3 a}{\operatorname{sh} a}$$

segue $\varphi(c) = \varphi(a) < \varphi(b)$, e quindi $c > b$. A $t = a$, $b - 0$, $b + 0$, c corrisponde $\rho = 0$, $-\infty$, $+\infty$, 0, quindi per ogni valore di ρ esiste uno ed un solo valore di t compreso fra a e c che rende soddisfatta la (7). Cioè su ogni estremale esiste il *fuoco*, e questo si trova tra P_0 e il suo punto coniugato.

Il fuoco può costruirsi geometricamente come segue (Fig. 13).



(Fig. 13).

Condotte nel punto P_0 l'ordinata P_0M, la normale P_0N e la tangente $P_0 T$ all'estremale, si segni su quest'ultima il centro di curvatura Q della curva fissa nel punto P_0; dal punto S d'intersezione di $P_0 M$ con NQ si conduca SV parallela a $P_0 T$ sino ad incontrare l'asse x in V; il punto di contatto K della tangente alla curva condotta da V sarà il fuoco dell'estremale [1]).

Le coordinate del punto P_0 essendo $\alpha a + \beta$, $\alpha \operatorname{ch} a$, e il coefficiente angolare della tangente in P_0 essendo $\operatorname{sh} a$, l'ascissa di T è $\alpha a + \beta - \alpha \operatorname{cth} a = \beta - \alpha\varphi(a)$, e quella di N è $\alpha a + \beta + \alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a = \beta - \alpha\varphi(h)$. Le coordinate del punto Q sono:

$$x = \alpha a + \beta + \frac{\rho}{\operatorname{ch} a}, \qquad y = \alpha \operatorname{ch} a + \rho \operatorname{th} a = \alpha \operatorname{ch}^3 a \frac{\varphi(t) + a}{\varphi(t) - \varphi(h)},$$

quindi l'ordinata y del punto S è determinata dall'equazione:

$$0 = \begin{vmatrix} a\alpha + \beta & y & 1 \\ \beta - \alpha\varphi(h) & 0 & 1 \\ \alpha a + \beta + \dfrac{\rho}{\operatorname{ch} a} & \alpha \operatorname{ch}^3 a \dfrac{\varphi(t) + a}{\varphi(t) - \varphi(h)} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} a & y & 1 \\ -\varphi(h) & 0 & 1 \\ a + \dfrac{\rho}{\alpha \operatorname{ch} a} & \alpha \operatorname{ch}^3 a \dfrac{\varphi(t) + a}{\varphi(t) - \varphi(h)} & 1 \end{vmatrix},$$

da cui:

$$y = \frac{\alpha \operatorname{ch}^3 a \dfrac{\varphi(t) + a}{\varphi(t) - \varphi(h)} [a + \varphi(h)]}{a + \dfrac{\rho}{\alpha \operatorname{ch} a} + \varphi(h)} = \alpha \operatorname{sh} a [\varphi(t) + a].$$

Di qui segue che l'ascissa del punto V è:

$$x = \alpha a + \beta - \frac{1}{\operatorname{sh} a} \alpha \operatorname{sh} a [\varphi(t) + a] = \beta - \alpha\varphi(t).$$

---

[1]) Il punto coniugato di P_0 è invece (§ 67) il punto di contatto della tangente condotta da T.

Il confronto di questa espressione con quella trovata sopra per l'ascissa del punto T mostra che $t(>0)$ è il parametro del punto di contatto della tangente condotta da V verso destra.

Può osservarsi analogamente che h è il parametro del punto di contatto della tangente condotta da N verso destra.

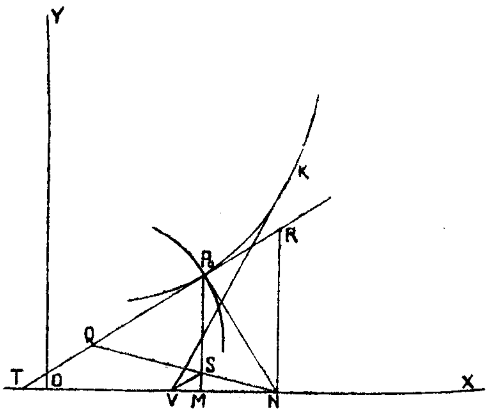
Se $\rho = \infty$, V coincide con N, e $t = h$.

Se $\rho = \alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a$, V è all'infinito, e il fuoco cade nel vertice della catenaria.

Se $\rho = 0$, S coincide con P_0, e $t = c$.

b) $a = t_0 > 0$, cioè P_0 sta sul ramo ascendente della catenaria. Per $t = a$, $h - 0$, $h + 0$, $+\infty$ si ha $\rho = 0, -\infty, +\infty$, $\alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a$; quindi, se ρ è negativo oppure, essendo positivo, è $> \alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a$, il fuoco esiste, se $0 < \rho < \alpha \operatorname{sh} \operatorname{ch}^2 a$, esso non esiste.

La costruzione geometrica (Fig. 14) è perfettamente analoga a



(Fig. 14).

quella del caso precedente. Se R è il punto d'incontro di $P_0 T$ colla parallela all'asse y condotta per N, si ha $P_0 R = \alpha \operatorname{sh} a \operatorname{ch}^2 a$; ed è evidente dalla figura che, se Q cade tra P_0 ed R, dal punto corrispondente V non si può condurre una tangente il cui punto di contatto si trovi a destra di P_0.

CAPITOLO VI.

PROBLEMA DI LAGRANGE.

81. Riprendiamo la ricerca, iniziata nel § 46, dei massimi e minimi dell'integrale:

$$(1) \qquad I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')\,dx$$

sotto le condizioni:

$$(2) \qquad H_r(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0 \quad (r = 1, \ldots, m).$$

Come si è trovato, posto:

$$(3) \qquad K = F + \sum_{r=1}^{m} \lambda_r H_r,$$

dove le $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sono funzioni di x da determinarsi, debbono essere soddisfatte le equazioni:

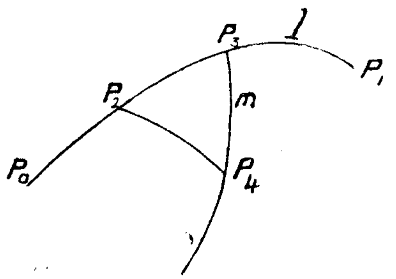
$$(4) \qquad K_{y_i} - K'_{y_i'} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Chiameremo ancora estremali le curve dello spazio ad $n + 1$ dimensioni $(x, y_1, \ldots, y_n)$ per le quali le (2), (4) sono soddisfatte. Supporremo dati gli estremi P_0, P_1 della curva cercata, cioè dati i valori delle funzioni $y_1, \ldots, y_n$ per $x = x_0$ e per $x = x_1$.

Sia:

$$y_i = y_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

l'estremale l da studiarsi, e sieno P_2, P_3 due punti qualunque di essa di ascisse x_2, $x_3 > x_2$ (Fig. 15). Per P_3 si conduca una curva m:



(Fig. 15).

$$y_i = Y_i(x) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

soggetta alla sola condizione che le Y_i rendano soddisfatte le (2), e per P_2 si faccia passare una famiglia di curve che si appoggino alla m, di cui faccia parte l'arco $P_2 P_3$, e per le quali sieno pure soddisfatte le (2). Se un punto generico P_4 di m ha l'ascissa $x_4 = x_3 - \varepsilon$, potrà assumersi ε come parametro della famiglia, le cui equazioni saranno pertanto:

$$y_i = Z_i(x, \varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dovranno avere luogo le relazioni:

$$(5) \qquad \begin{cases} Z_i(x, 0) = y_i(x), & Z_i(x_2, \varepsilon) = y_i(x_2), \\ Z_i(x_4, \varepsilon) = Y_i(x_4), & Y_i(x_3) = y_i(x_3) \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Dopo ciò, indicando genericamente con $I(PQ)$ l'integrale (1) esteso alla curva PQ, ed osservando che, per essere su tutte le curve considerate soddisfatte le (2), si può sempre porre in luogo della F la K definita dalla (3), si ha:

$$\bar{I} = I(P_0 P_2 P_4 P_3 P_1) = I(P_0 P_2) + I(P_2 P_4) + I(P_4 P_3) + I(P_3 P_1),$$

e quindi, essendo l'integrale del 1° membro funzione di ε:

$$\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon} = \frac{dI(P_2 P_4)}{d\varepsilon} + \frac{dI(P_4 P_3)}{d\varepsilon}.$$

Ora:

$$I(P_2 P_4) = \int_{x_2}^{x_4} K(x,\ Z,\ Z')\,dx, \quad I(P_4 P_3) = \int_{x_4}^{x_3} K(x,\ Y,\ Y')\,dx,$$

quindi, tenuto conto che $x_4 = x_3 - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \frac{dI(P_2 P_4)}{d\varepsilon} &= \int_{x_2}^{x_4} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial K}{\partial Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial K}{\partial Z'_i} \frac{\partial Z'_i}{\partial \varepsilon} \right] dx - \\ &\quad - K[x_3 - \varepsilon,\ Z(x_3 - \varepsilon,\ \varepsilon),\ Z'(x_3 - \varepsilon,\ \varepsilon)] \\ &= \int_{x_2}^{x_4} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial K}{\partial Z_i} - \left(\frac{\partial K}{\partial Z'_i} \right)' \right] \frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon} dx + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial K}{\partial Z'_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \varepsilon} \right]_{x_2}^{x_4} - \\ &\quad - K[x_3 - \varepsilon,\ Z(x_3 - \varepsilon,\ \varepsilon),\ Z'(x_3 - \varepsilon,\ \varepsilon)], \end{aligned}$$

$$\frac{dI(P_4 P_3)}{d\varepsilon} = K[x_3 - \varepsilon,\ Y(x_3 - \varepsilon),\ Y'(x_3 - \varepsilon)],$$

e di qui, in virtù delle (4), (5):

$$\begin{aligned} \left[\frac{dI(P_2 P_4)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial K}{\partial y'_i} \right]_{x=x_3} \left[\frac{\partial Z_i(x_4,\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} - \\ &\quad - K[x_3,\ y(x_3),\ y'(x_3)], \end{aligned}$$

$$\left[\frac{dI(P_4 P_3)}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = K[x_3,\ Y(x_3),\ Y'(x_3)] = K[x_3,\ y(x_3),\ Y'(x_3)].$$

Inoltre dalla relazione:

$$Z_i(x_4,\ \varepsilon) = Y_i(x_4)$$

segue derivando rispetto ad ε:

$$\frac{\partial Z_i(x_4,\ \varepsilon)}{\partial x_4} \frac{\partial x_4}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Z_i(x_4,\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \frac{dY_i(x_4)}{dx_4} \frac{\partial x_4}{\partial \varepsilon},$$

da cui, essendo $\dfrac{\partial x_4}{\partial \varepsilon} = -1$:

$$\frac{\partial Z_i(x_4,\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = Z'_i(x_4,\ \varepsilon) - Y'_i(x_4),$$

e:

$$\left[\frac{\partial Z_i(x_4,\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = y'_i(x_3) - Y'_i(x_3).$$

Si ha dunque, tenuto conto che, per essere P_3 un punto qualunque, si può invece di x_3 scrivere x:

$$\left[\frac{d\bar{I}}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = K(x, y, Y') - K(x, y, y') - \sum_{i=1}^{n} (Y'_i - y'_i) \frac{\partial K(x, y, y')}{\partial y'_i}.$$

Il sécondo membro di questa relazione può denominarsi funzione di WEIERSTRASS e indicarsi con $E(x, y, y', Y', \lambda)$.

Dev'essere dunque per un minimo (*condizione di* WEIERSTRASS):

$$E(x, y, y', Y', \lambda) \geqq 0,$$

dove le Y'_i sono quantità qualunque.

82. Dalla condizione di WEIERSTRASS si deduce quella di LEGENDRE sotto la forma seguente: Condizione necessaria per un minimo è che sia in ogni punto dell'estremale:

$$\sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial y'_i \partial y'_h} \eta_i \eta_h \geqq 0 \tag{6}$$

per ogni sistema di valori η per cui:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \eta_i = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Anche qui è indifferente porre K o F.

Sia $\eta_1, \ldots, \eta_n$ un sistema di valori (costanti) che per un determinato valore di x renda soddisfatte le (7). Vogliamo dimostrare che, indicando con ε una variabile, si possono trovare n funzioni $p_i(\varepsilon)$ di ε tali, che sia per ε abbastanza piccolo:

$$H_r[x, y_1, \ldots, y_n, p_1(\varepsilon), \ldots, p_n(\varepsilon)] = 0 \quad (r = 1, \ldots, m),$$

ed inoltre:

$$p_i(0) = y'_i, \qquad p'_i(0) = \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Prendiamo:
$$p_i(\varepsilon) = y'_i + \varepsilon \eta_i \qquad (i = m+1, \ldots, n),$$
donde:

(8) $$p_i(0) = y'_i, \qquad p'_i(0) = \eta_i \qquad (i = m+1, \ldots, n).$$

Supposto [1]:

(9) $$\frac{d(H_1, \ldots, H_m)}{d(y'_1, \ldots, y'_m)} \neq 0,$$

le equazioni:

(10) $$H_r[x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_m, y'_{m+1} + \varepsilon \eta_{m+1}, \ldots, y'_n + \varepsilon \eta_n] = 0$$
$$(r = 1, \ldots, m),$$

che sono soddisfatte per:
$$\varepsilon = 0, \qquad p_1 = y'_1, \ldots, p_m = y'_m,$$

definiscono $p_1, \ldots, p_m$ come funzioni di ε soddisfacenti alle condizioni:

(11) $$p_i(0) = y'_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Derivando poi le (10) rispetto ad ε, si ha:
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} p'_i(\varepsilon) + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \eta_i = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m),$$

e di qui, ponendo $\varepsilon = 0$ e tenendo conto delle (8), (11):
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} p'_i(0) + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \eta_i = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m),$$

dove per H_r s'intende $H_r(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n)$. Da queste relazioni e dalle (7), in cui H_r ha lo stesso significato, segue:
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} [p'_i(0) - \eta_i] = 0,$$

---

[1]) V. la nota a p. 136. Nel caso in cui tutte le H_r sono indipendenti dalle y'_i la (9) non può sussistere, ma le condizioni (7) non hanno più ragione di essere, riducendosi ad identità.

e quindi, per la condizione (9):

$$p_i'(0) = \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Date ora le costanti η_i che rendano soddisfatte le (7), e trovate le corrispondenti funzioni $p_i(\varepsilon)$, si potrà prendere $Y_i' = p_i(\varepsilon)$, e sarà:

$$E[x, y, y', p(\varepsilon), \lambda] \geqq 0.$$

Ora, considerando E come funzione di ε, si ha:

$$E(0) = E(x, y, y', y', \lambda) = 0,$$

inoltre:

$$\frac{\partial E(x, y, y', p(\varepsilon), \lambda]}{\partial p_i(\varepsilon)} = \frac{\partial K[x, y, p(\varepsilon)]}{\partial p_i(\varepsilon)} - \frac{\partial K(x, y, y')}{\partial y_i'},$$

e quindi:

$$\left\{\frac{\partial E[x, y, y', p(\varepsilon), \lambda]}{\partial p_i(\varepsilon)}\right\}_{\varepsilon=0} = 0,$$

$$E'(0) = \sum_{i=1}^{n} \left\{\frac{\partial E[x, y, y', p(\varepsilon), \lambda]}{\partial p_i(\varepsilon)}\right\}_{\varepsilon=0} \eta_i = 0.$$

Derivando di nuovo:

$$\frac{\partial^2 E[x, y, y', p(\varepsilon), \lambda]}{\partial p_i(\varepsilon)\partial p_h(\varepsilon)} = \frac{\partial^2 K[x, y, p(\varepsilon)]}{\partial p_i(\varepsilon)\partial p_h(\varepsilon)},$$

e per $\varepsilon = 0$:

$$\left\{\frac{\partial^2 E[x, y, y', p(\varepsilon), \lambda]}{\partial p_i(\varepsilon)\partial p_h(\varepsilon)}\right\}_{\varepsilon=0} = \frac{\partial^2 K(x, y, y')}{\partial y_i'\partial y_h'},$$

quindi:

$$E''(0) = \sum_{i,h=1}^{n} \frac{\partial^2 K(x, y, y')}{\partial y_i'\partial y_h'} \eta_i \eta_h.$$

Di qui segue immediatamente la condizione (6).

83. Tra le ∞^{2n} estremali del problema considerato ve ne sono ∞^n passanti pel punto $P_0[x_0, (y_1)_0, \ldots, (y_n)_0]$. Sieno:

$$y_i = f_i(x, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

le equazioni della famiglia da esse costituita; dovrà essere identicamente rispetto alle a:

$$(y_i)_0 = f_i(x_0, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

donde:

(12)
$$\frac{\partial f_i(x_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_h} = 0 \qquad (i, h = 1, \ldots, n),$$

e quindi:

$$D(x_0) = \left[\frac{d(f_1, \ldots, f_n)}{d(a_1, \ldots, a_n)}\right]_{x=x_0} = 0.$$

Si dimostra [1]) che, qualunque sieno $a_1, \ldots, a_n$, si può assegnare un intorno del punto x_0 in cui $D(x)$ non si annulla mai tranne che in questo punto. Si dice poi *punto coniugato* di P_0 su una data estremale il primo punto di essa a destra di P_0 in cui $D(x)$ si annulla; il luogo di tali punti è la *superficie focale* (a n dimensioni).

Cerchiamo ora di determinare una famiglia semplicemente infinita di estremali contenuta nella famiglia n volte infinita già costruita e contenente l'estremale considerata, e tale da ammettere un inviluppo. Le equazioni della famiglia si otterranno anzitutto esprimendo a_1, $a_2, \ldots, a_n$ in funzione di un parametro c:

$$a_1 = \alpha_1(c), \ldots, a_n = \alpha_n(c);$$

esse saranno dunque:

(13)
$$y_i = f_i[x, \alpha_1(c), \ldots, \alpha_n(c)] \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Se poi $x = \xi(c)$ è l'ascissa del punto di contatto coll'inviluppo,

---

[1]) V.: Bolza, op. cit., p. 633.

i valori corrispondenti delle y_i saranno:

$$y_i = f_i[\xi(c), \alpha_1(c), \ldots, \alpha_n(c)] = \eta_i(c) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

e le:

$$x = \xi(c), \qquad y_i = \eta_i(c)$$

saranno le equazioni parametriche dell'iuviluppo. Le condizioni perchè esso sia tangente alle curve della famiglia (13) sono:

$$\frac{\partial f_i(\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \xi} = \frac{\eta'_i(c)}{\xi'(c)}$$
$$= \frac{1}{\xi'(c)}\left[\frac{\partial f_i(\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \xi}\xi' + \sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_i(\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_h}\alpha'_h\right],$$

da cui:

$$\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_i(\xi, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\partial \alpha_h}\alpha'_h = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

e quindi, non potendo tutte le α'_h essere nulle:

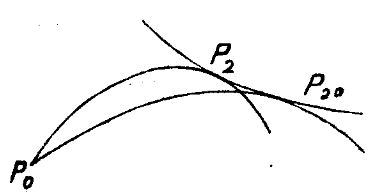
$$\left[\frac{d(f_1, \ldots, f_n)}{d(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}\right]_{x=\xi(c)} = 0,$$

o più semplicemente:

$$D(\xi) = 0.$$

Cioè i punti di contatto delle curve coll'inviluppo sono i punti coniugati di P_0 sulle curve stesse.

Sia c_0 il parametro dell'estremale da studiarsi, c quello di un'estremale generica della famiglia semplicemente infinita considerata; saranno $\xi(c_0)$, $\xi(c)$ le ascisse dei loro punti di contatto P_{20}, P_2 coll'inviluppo (Fig. 16). Indicando con $I(c)$ il valore dell'integrale



(Fig. 16).

(1) esteso all'estremale $P_0 P_2$, si ha:

$$I(c) = \int_{x_0}^{\xi(c)} K\left[x, f(x, \alpha), \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial x}\right] dx,$$

quindi:

$$I'(c) = K\left[\xi(c), f(\xi, \alpha), \frac{\partial f(\xi, \alpha)}{\partial \xi}\right]\xi'$$
$$+ \int_{x_0}^{\xi(c)} \sum_{h=1}^{n} \alpha'_h \sum_{i=1}^{n} \left[K_{y_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h} + K_{y'_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial \alpha_h}\right] dx,$$

e colla solita integrazione per parti:

$$I'(c) = K\left[\xi(c), \eta(c), \frac{\eta'(c)}{\xi'(c)}\right]\xi'(c) + \int_{x_0}^{\xi(c)} \sum_{h=1}^{n} \alpha'_h \sum_{i=1}^{n} [K_{y_i} - K'_{y'_i}] \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h} dx$$
$$+ \sum_{h=1}^{n} \alpha'_h \left[\sum_{i=1}^{n} K_{y'_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h}\right]_{x_0}^{\xi}.$$

Ora, per le equazioni (4), l'integrale è nullo, inoltre, per le (12), (14):

$$\sum_{h=1}^{n} \alpha'_h \left[\sum_{i=1}^{n} K_{y'_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h}\right]_{x_0}^{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \left[K_{y'_i} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_h} \alpha'_h\right]_{x_0}^{\xi} = 0;$$

quindi:

$$I'(c) = K\left[\xi(c), \eta(c), \frac{\eta'(c)}{\xi'(c)}\right]\xi'(c).$$

Se da $x = \xi(c)$ risulta $c = \theta(x)$, le:

$$y_i = \eta_i[\theta(x)] = \rho_i(x)$$

sono le equazioni cartesiane dell'inviluppo, e si ha:

$$\xi'(c) = \frac{1}{\theta'(x)}, \qquad \frac{\eta'_i(c)}{\xi'(c)} = \rho'_i(x),$$

quindi:

$$I'(c) \frac{dc}{dx} = I'(c)\theta'(x) = K[x, \rho(x), \rho'(x)],$$

da cui, integrando lungo l'inviluppo da P_{20} a P_2:

$$I(c) - I(c_0) = \int_{\xi(c_0)}^{\xi(c)} K[x, \rho(x), \rho'(x)]\,dx.$$

Cioè l'integrale I esteso alle linee $P_0 P_{20}$ e $P_0 P_2 P_{20}$ ha lo stesso valore, e quindi l'estremale considerata non può dar luogo ad un minimo nè ad un massimo.

Condizione necessaria per un minimo è dunque (*condizione di* JACOBI):

$$\xi(c_0) > x_1 .$$

84. Supposta soddisfatta per l'estremale considerata la condizione di JACOBI, si può definire, analogamente a quanto si fece nel § 7, un *campo di estremali*, di cui faccia parte l'estremale stessa. Così l'insieme delle estremali uscenti da P_0, e i cui parametri sono compresi entro opportuni limiti, costituiscono un campo (improprio). Per ogni punto $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ del campo diverso da P_0 passa una ed una sola di tali estremali, rappresentate dalle equazioni:

$$(15) \qquad y_i = f_i(x, a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

cioè queste equazioni sono risolubili rispetto ad $a_1, \ldots, a_n$, e si ha:

$$(16) \qquad a_i = \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

l'integrale I, esteso all'estremale del campo che va da P_0 a P, ha un valore determinato, che è funzione delle coordinate di P, od anche, per le (15), dell'ascissa di P e dei parametri dell'estremale:

$$\int_{x_0}^{x} K\,dx = U(x, y_1, \ldots, y_n) = Z(x, a_1, \ldots, a_n).$$

Segue di qui, tenuto conto delle (4), (12):

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = K\left[x, f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a), \frac{\partial f_1(x, a)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f_n(x, a)}{\partial x}\right],$$

$$\frac{\partial Z}{\partial a_h} = \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} \left[K_{y_i} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} + K_{y'_i} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x\, \partial a_h}\right] dx = \sum_{i=1}^{n} \left[K_{y'_i} \frac{\partial f_i}{\partial a_h}\right]_{x_0}^{x}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} K_{y'_i} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} .$$

Inoltre dalle (15), (16) si ha:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{per } i \substack{= \\ \neq} k,$$

quindi:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} = K(x, f_1, \ldots, f_n, f'_1, \ldots, f'_n)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} K'_{y_i} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial x} = K(x, f_1, \ldots, f_n, f'_1, \ldots, f'_n) - \sum_{i=1}^{n} K'_{y_i} y'_i,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial Z}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} = \sum_{i=1}^{n} K'_{y_i} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial a_h} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y_k} = K'_{y_k},$$

e:

$$\left(K - \sum_{i=1}^{n} K'_{y_i} y'_i\right) dx + \sum_{i=1}^{n} K'_{y_i} dy_i = dU,$$

dove y'_i denota la funzione $\frac{\partial f_i(x, a_1, \ldots, a_n)}{\partial x}$, in cui al posto delle $a_1, \ldots, a_n$ si sieno messe le $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Indichiamo ora con l l'estremale $P_0 P_1$ considerata, con l_1 un'altra linea qualunque che congiunga P_0 con P_1, che stia in un certo intorno di l, e lungo la quale sieno verificate le (2). Poichè dU è un differenziale esatto, il suo integrale esteso ad l e ad l_1 avrà lo stesso valore; sarà quindi, considerando che per l'estremale dU si riduce a $K dx$:

$$\int_{(l)} K(x, y, y') dx = \int_{(l_1)} \left\{ K(x, y, y') + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial K(x, y, y')}{\partial y'_i} (Y'_i - y'_i) \right\} dx,$$

dove Y'_i denota il valore di y'_i per la curva l_1. Di qui segue:

$$\int_{(l_1)} K(x, y, Y') dx - \int_{(l)} K(x, y, y') dx = \int_{(l_1)} E(x, y, y', Y') dx.$$

Risulta da questa formola che per un minimo forte è sufficiente che sia:

$$E(x, y, y', Y') > 0$$

in un intorno di l e per $Y'_1, \ldots, Y'_n$ qualunque (cfr. § 7).

85. Si può ottenere la condizione di JACOBI sotto forma puramente analitica come segue.

Posto:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial y_i \partial y_h} = R_{ih}, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial y_i \partial y'_h} = S_{ih}, \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial y'_i \partial y'_h} = T_{ih},$$

si ha (cfr. § 59):

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i,h=1}^{n} [R_{ih} \eta_i \eta_h + S_{ih} \eta_i \eta'_h + T_{ih} \eta'_i \eta'_h] \, dx,$$

dove le η_i sono funzioni di x che si annullano per $x = x_0$ e per $x = x_1$ e soddisfanno alle condizioni (§ 46):

$$(17) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H_r}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \eta'_i \right] = 0 \qquad (r = 1, \ldots, m).$$

Ne segue, qualunque sieno i coefficienti $\mu_1, \ldots, \mu_m$:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \Bigg\{ \sum_{i,h=1}^{n} [R_{ih} \eta_i \eta_h + S_{ih} \eta_i \eta'_h + T_{ih} \eta'_i \eta'_h] + \sum_{r=1}^{m} \mu_r \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial H_r}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \eta'_i \right] \Bigg\} dx,$$

ossia:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ \left[\sum_{h=1}^{n} (R_{ih} \eta_h + S_{ih} \eta'_h) + \sum_{r=1}^{m} \mu_r \frac{\partial H_r}{\partial y_i} \right] \eta_i + \left[\sum_{h=1}^{n} (S_{hi} \eta_h + T_{ih} \eta'_h) + \sum_{r=1}^{m} \mu_r \frac{\partial H_r}{\partial y'_i} \right] \eta'_i \Bigg\} dx,$$

che scriveremo brevemente:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} [A_i \eta_i + B_i \eta'_i] \, dx.$$

Di qui, colla solita integrazione per parti:

$$(18)\qquad \delta^2 I = \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} [A_i - B'_i]\eta_i \, dx.$$

Le equazioni:

$$A_i - B'_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ossia:

$$(19)\qquad \begin{cases} \sum_{h=1}^{n} (R_{ih} - S'_{hi})\eta_h + \sum_{h=1}^{n} (S_{ih} - S_{hi} - T'_{ih})\eta'_h - \sum_{h=1}^{n} T_{ih}\eta''_h \\ + \sum_{r=1}^{m} \left[\frac{\partial H_r}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\right)\right]\mu_r - \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\mu'_r = 0 \quad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

insieme alle (17), costituiscono un sistema di $n + m$ equazioni differenziali lineari omogenee nelle funzioni incognite $\eta_1, \ldots, \eta_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$, del 2° ordine rispetto alle η, del 1° ordine rispetto alle μ.

Questo sistema sta in stretta relazione col sistema (2), (4); infatti, se:

$$(20)\qquad y_i = g_i(x, c_1, c_2, \ldots, c_{2n}), \qquad \lambda_r = l_r(x, c_1, c_2, \ldots, c_{2n})$$
$$(i = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, m)$$

è la soluzione generale di quest'ultimo sistema, le funzioni:

$$(21)\qquad \eta_i = \frac{\partial g_i}{\partial c}, \qquad \mu_r = \frac{\partial l_r}{\partial c} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ r = 1, \ldots, m),$$

dove c è una qualunque delle costanti $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, costituiscono una soluzione delle (17), (19).

Deriviamo rispetto a c le (4), in cui supponiamo introdotte in luogo delle y_i, λ_r le espressioni (20). Risulta:

$$0 = \frac{\partial K_{y_i}}{\partial c} - \frac{\partial K'_{y'_i}}{\partial c} = \frac{\partial K_{y_i}}{\partial c} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial K_{y'_i}}{\partial c}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{n}\left[R_{ih}\frac{\partial y_h}{\partial c} + S_{ih}\frac{\partial y'_h}{\partial c}\right] + \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H_r}{\partial y_i}\frac{\partial \lambda_r}{\partial c} - \frac{d}{dx}\left\{\sum_{h=1}^{n}\left[S_{hi}\frac{\partial y_h}{\partial c} + T_{ih}\frac{\partial y'_h}{\partial c}\right]\right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\frac{\partial \lambda_r}{\partial c}\right\} = \sum_{h=1}^{n}[R_{ih} - S'_{hi}]\frac{\partial y_h}{\partial c} + \sum_{h=1}^{n}[S_{ih} - S_{hi} - T'_{ih}]\frac{\partial y'_h}{\partial c} -$$
$$- \sum_{h=1}^{n} T_{ih}\frac{\partial y''_h}{\partial c} + \sum_{r=1}^{m}\left[\frac{\partial H_r}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\right)\right]\frac{\partial \lambda_r}{\partial c} - \sum_{r=1}^{m}\frac{\partial H_r}{\partial y'_i}\frac{\partial \lambda'_r}{\partial c};$$

dal confronto colle (19) segue l'asserto.

Indichiamo con η_{hi}, μ_{hr} le espressioni η_i, μ_r corrispondenti alla costante c_h. I $2n$ sistemi integrali:

$$\begin{array}{ll} \eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}, & \mu_{11}, \ldots, \mu_{1m}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \eta_{2n,1}, \ldots, \eta_{2n,n}, & \mu_{2n,1}, \ldots, \mu_{2n,m} \end{array}$$

sono linearmente indipendenti; cioè non esiste alcun sistema di $2n$ costanti $C_1, \ldots, C_{2n}$ non tutte nulle e tali che sia:

$$\sum_{h=1}^{2n} C_h \eta_{hi} = 0, \qquad \sum_{h=1}^{2n} C_h \mu_{hr} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n;\ r=1, \ldots, m).$$

Infatti la prima di queste due relazioni, supposta vera, può scriversi:

$$\sum_{h=1}^{2n} C_h \frac{\partial g_i}{\partial c_h} = 0,$$

e da essa segue, indicando con g_i' la derivata di g_i rispetto ad x:

$$\sum_{h=1}^{2n} C_h \frac{\partial g_i'}{\partial c_h} = 0,$$

quindi:

$$\frac{d(g_1, \ldots, g_n, g_1', \ldots, g_n')}{d(c_1, \ldots, c_{2n})} = 0;$$

ma questa relazione non può sussistere, perchè alle $c_1, \ldots, c_{2n}$ possono sempre darsi valori tali, che $g_1, \ldots, g_n, g_1', \ldots, g_n'$ prendano in un certo punto valori assegnati.

86. Sieno:

$$\zeta_i = \sum_{h=1}^{2n} C_h \eta_{hi} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

n integrali linearmente indipendenti del sistema considerato che si annullino per $x = x_0$; se essi si annullano anche in un altro punto x_2, dalle relazioni:

$$\sum_{h=1}^{2n} C_h \eta_{hi}(x_0) = \zeta_i(x_0) = 0, \qquad \sum_{h=1}^{2n} C_h \eta_{hi}(x_2) = \zeta_i(x_2) = 0 \quad (i=1, \ldots, n)$$

segue, per $x = x_2$:

$$\Delta(x, x_0) = \begin{vmatrix} \eta_{11}(x_0) & \dots & \eta_{2n,1}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}(x_0) & \dots & \eta_{2n,n}(x_0) \\ \eta_{11}(x) & \dots & \eta_{2n,1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}(x) & \dots & \eta_{2n,n}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Reciprocamente, se $\Delta(x_2, x_0) = 0$, esiste un sistema di n integrali ζ_i linearmente indipendenti che si annullano nei punti x_0 e x_2. Se $x_2 \leqq x_1$, possiamo prendere le funzioni η_i che figurano nell'espressione di $\delta^2 I$ come segue:

$$\eta_i = \begin{cases} \zeta_i & \text{per} \quad x_0 \leqq x \leqq x_2 \\ 0 & \text{per} \quad x_2 < x \leqq x_1 \end{cases} \qquad (i = 1, \dots, n);$$

e dalla (18) risulta allora $\delta^2 I = 0$. Dunque, affinchè sia $\delta^2 I > 0$, è necessario che il primo punto x_2 in cui si annulla $\Delta(x, x_0)$ sia al di là di x_1.

Possiamo verificare che il determinante $\Delta(x, x_0)$ non differisce essenzialmente dal determinante (§ 83):

$$D(x) = \frac{d(f_1, \dots, f_n)}{d(a_1, \dots, a_n)}.$$

Dalle formole:

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial a_h} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial g_i(x)}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{\partial a_h} = \sum_{k=1}^{2n} \eta_{ki}(x) \frac{\partial c_k}{\partial a_h}$$

segue che $D(x)$ è il prodotto delle due matrici:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11}(x) & \dots & \eta_{2n,1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}(x) & \dots & \eta_{2n,n}(x) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial a_1} & \dots & \frac{\partial c_{2n}}{\partial a_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial c_1}{\partial a_n} & \dots & \frac{\partial c_{2n}}{\partial a_n} \end{vmatrix},$$

cioè la somma dei prodotti dei determinanti omologhi d'ordine massimo contenuti nelle due matrici. Ora, poichè (§ 83):

$$\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial a_h} = 0 \qquad (i, h = 1, \ldots, n),$$

ossia:

$$\sum_{k=1}^{2n} \eta_{ki}(x_0)\frac{\partial c_k}{\partial a_h} = 0 \qquad (i, h = 1, \ldots, n),$$

le due matrici:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11}(x_0) & \ldots & \eta_{2n,1}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{1n}(x_0) & \ldots & \eta_{2n,n}(x_0) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial a_1} & \ldots & \frac{\partial c_{2n}}{\partial a_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial c_1}{\partial a_n} & \ldots & \frac{\partial c_{2n}}{\partial a_n} \end{vmatrix}$$

hanno la proprietà che i loro determinanti complementari sono proporzionali [1]). Ne segue che $D(x)$ è, a meno di un fattore costante,

---

[1]) Abbiansi due matrici:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \ldots & \alpha_{pr} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{q1} & \ldots & \beta_{qr} \end{vmatrix},$$

dove $p + q = r$, e si dicano *complementari* i due determinanti:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \ldots & \alpha_{1i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{pi_1} & \ldots & \alpha_{pi_p} \end{vmatrix}, \qquad \varepsilon\begin{vmatrix} \beta_{1j_1} & \ldots & \beta_{1j_q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{qj_1} & \ldots & \beta_{qj_q} \end{vmatrix},$$

dove $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$ è una permutazione qualunque dei numeri $1, \ldots, r$, e $\varepsilon = \pm 1$ secondochè questa permutazione è pari o dispari. Se fra gli elementi delle due matrici hanno luogo le relazioni:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{\mu i}\beta_{\nu i} = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, p;\ \nu = 1, \ldots, q),$$

i determinanti complementari delle due matrici sono tra loro proporzionali (GORDAN-KERSCHENSTEINER, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, t. I, Leipzig, Teubner, 1885, p. 95).

la somma dei prodotti dei determinanti d'ordine x della matrice:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11}(x) & \dots & \eta_{2n,1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}(x) & \dots & \eta_{2n,n}(x) \end{vmatrix}$$

per i determinanti complementari della matrice:

$$\begin{vmatrix} \eta_{11}(x_0) & \dots & \eta_{2n,1}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \eta_{1n}(x_0) & \dots & \eta_{2n,n}(x_0) \end{vmatrix},$$

ossia che $D(x)$ coincide, a meno di un fattore costante, con $\Delta(x, x_0)$.

87. Esempi. — 17. *Minima distanza di due punti nello spazio.*

Si ha, prendendo x come variabile indipendente:

$$F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

quindi:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{1 + Y'^2 + Z'^2} - \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \\ &- (Y' - y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} - (Z' - z')\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \\ &= \sqrt{1 + Y'^2 + Z'^2} - \frac{1 + Y'y' + Z'z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \\ &= \sqrt{1 + Y'^2 + Z'^2}[1 - \cos(\varphi_1 - \varphi)] > 0. \end{aligned}$$

Inoltre:

$$F_{y'y'} = \frac{1 + z'^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_{y'z'} = -\frac{y'z'}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_{z'z'} = \frac{1 + y'^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quindi l'espressione che figura nella (6) è:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}[(1 + z'^2)\eta^2 - 2y'z'\eta\zeta + (1 + y'^2)\zeta^2] \\ &= \frac{1}{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}[\eta^2 + \zeta^2 + (z'\eta - y'\zeta)^2] > 0. \end{aligned}$$

Infine, essendo le estremali rette, nessuna famiglia semplicemente infinita di estremali uscenti da P_0 può avere inviluppo, sicchè la condizione di JACOBI è soddisfatta.

19. *Geodetiche di una superficie.*

Si ha, prendendo ancora x come variabile indipendente:

$$K = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda f(x, y, z).$$

Le condizioni di WEIESTRASS e di LEGENDRE sono identiche a quelle dell'esempio precedente. Per verificare la condizione di JACOBI, bisognerebbe conoscere l'integrale dell'equazione delle geodetiche, che è noto solo in casi particolari.

21. *Brachistocrona in un mezzo resistente.*

Si è trovato (§ 49) che il moto avviene in un piano verticale, che abbiamo preso come piano xz. L'integrale da rendersi minimo è allora, rispetto ad x come variabile indipendente:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{v} \sqrt{1 + z'^2}\, d x,$$

essendo le funzioni z, v legate dalla relazione:

$$v v' + \varphi(v)\sqrt{1 + z'^2} - g z' = 0,$$

e si ha:

$$K = \left[\frac{1}{v} + \lambda\varphi(v)\right]\sqrt{1 + z'^2} + \lambda v v' - \lambda g z'$$
$$= \psi(v, \lambda)\sqrt{1 + z'^2} + \lambda v v' - \lambda g z'.$$

Ne segue:

$$K_{z'z'} = \frac{\psi(v, \lambda)}{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad K_{z'v'} = K_{v'v'} = 0;$$

considerando poi che (l. c.):

$$\frac{\psi(v, \lambda)}{\sqrt{1 + z'^2}} = a,$$

dove a è una costante, si vede che il primo membro della relazione (6) del § 82 si riduce a:

$$\frac{\psi(v, \lambda)}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}\zeta^2 = \frac{a}{1+z'^2}\zeta^2,$$

che ha costantemente il segno di a.

Inoltre:

$$E(z, v, Z', V', z', v') = [\psi\sqrt{1+Z'^2} + \lambda v V' - \lambda g Z'] -$$
$$- [\psi\sqrt{1+z'^2} + \lambda v v' - \lambda g z'] - (Z' - z')\left[\frac{\psi z'}{\sqrt{1+z'^2}} - \lambda g\right] -$$
$$- (V' - v')\lambda v = \frac{\psi}{\sqrt{1+z'^2}}[\sqrt{1+Z'^2}\sqrt{1+z'^2} -$$
$$- (1 + z'Z')] = a[\sqrt{1+Z'^2}\sqrt{1+z'^2} - (1 + z'Z')],$$

che ha pure costantemente lo stesso segno di a.

CAPITOLO VII.

INTEGRALI DOPPI.

88. Per lo studio della variazione seconda d'un integrale doppio adotteremo, ad evitare soverchia complicazione di formole, la rappresentazione non parametrica [1]).

Se:

$$I = \int\int F(x, y, z, p, q) dx dy,$$

l'equazione d'Eulero è (§ 54):

$$(1) \qquad F_z - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0.$$

Imaginando posto $z + \varepsilon t$ in luogo di z, e facendo, per comodità tipografica:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = u, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = v,$$

$$F_{zz} = L, \quad F_{pp} = M, \quad F_{qq} = N, \quad F_{pq} = P, \quad F_{zq} = Q, \quad F_{zp} = R,$$

si ha:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int\int [L t^2 + M u^2 + N v^2 + 2 P u v + 2 Q t v + 2 R t u] dx dy.$$

---

[1]) Per il calcolo della variazione seconda in forma parametrica vedi: Kneser, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Braunschweig, Vieweg, 1900.

Vogliamo dimostrare che, affinchè sia $\delta^2 I \geqq 0$ per qualunque funzione t (nulla sul contorno), è necessario che la forma:

$$M\alpha^2 + 2P\alpha\beta + N\beta^2 \tag{2}$$

sia definita o semidefinita positiva (*condizione di* LEGENDRE), cioè che sia su tutta la superficie:

$$M \geqq 0, \qquad MN - P^2 \geqq 0. \tag{3}$$

Supponiamo che per un punto interno della superficie, la cui proiezione sul piano xy indicheremo con $P(x_0, y_0)$, tale condizione non sia verificata; esistano cioè coppie di valori α, β per cui sia:

$$M\alpha^2 + 2P\alpha\beta + N\beta^2 < 0,$$

essendo M, N, P calcolate per il punto considerato. Potremo scegliere in infiniti modi due coppie di valori non proporzionali α_1, β_1; α_2, β_2 per cui tale relazione abbia luogo; posto:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \operatorname{tang} \varphi_1, \qquad \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \operatorname{tang} \varphi_2,$$

sarà per il punto considerato:

$$M \cos^2 \varphi_i + 2P \cos \varphi_i \operatorname{sen} \varphi_i + N \operatorname{sen}^2 \varphi_i < 0 \qquad (i = 1, 2).$$

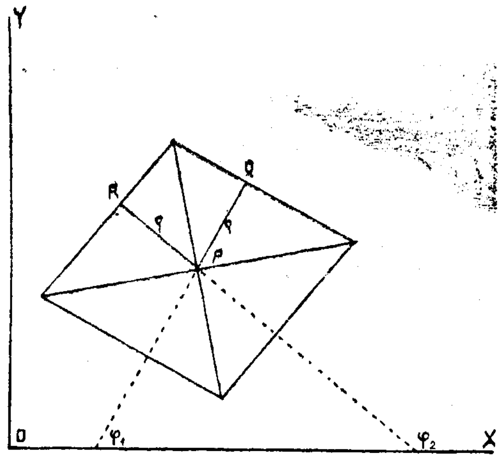
Per le supposte proprietà di continuità della funzione F e delle sue derivate prime e seconde, preso opportunamente un valore positivo k^2, potrà assegnarsi un intorno λ del punto P per tutti i punti del quale sia:

$$M \cos^2 \varphi_i + 2P \cos \varphi_i \operatorname{sen} \varphi_i + N \operatorname{sen}^2 \varphi_i < -k^2. \tag{4}$$

Prendiamo entro λ due punti Q, R equidistanti da P e tali che i raggi PQ, PR abbiano gli argomenti φ_1, φ_2; poniamo $PQ = PR = \rho$. Le rette condotte per Q, R perpendicolarmente a PQ, PR, e le loro simmetriche rispetto a P, avranno le equazioni:

$$(x - x_0)\cos\varphi_i + (y - y_0)\operatorname{sen}\varphi_i \pm \rho = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

e formeranno un rombo di centro P (Fig. 17). In ciascuno dei 4



(Fig. 17).

triangoli, in cui le diagonali dividono il rombo, prendiamo come funzione t il primo membro dell'equazione del lato appartenente a quel triangolo; fuori del rombo sia $t = 0$. È facile verificare che la funzione t è continua, e che:

$$(5) \qquad |t| \leqq \rho, \qquad |u| \leqq 1, \qquad |v| \leqq 1.$$

Supposto preso ρ abbastanza piccolo perchè tutto il rombo sia contenuto nell'intorno λ, sarà per la (4) in tutti i punti del rombo:

$$Mu^2 + 2Puv + Nv^2 = M\cos^2\varphi_i + 2P\cos\varphi_i\operatorname{sen}\varphi_i + N\operatorname{sen}^2\varphi_i < -k^2,$$

e quindi, denotando con σ l'area del rombo, e ricordando che fuori di esso la funzione t è costantemente nulla:

$$\int\int(Mu^2 + 2Puv + Nv^2)dxdy < -k^2\sigma.$$

D'altra parte, se h è il massimo valore assoluto di L, Q, R, si ha, per le (5):

$$\left|\int\int(Lt^2 + 2Rtu + 2Qtv)dx\,dy\right| \leqq (\rho^2 + 4\rho)h\sigma.$$

Basterà dunque prendere ρ abbastanza piccolo perchè sia:

$$(\rho^2 + 4\rho)h < k^2,$$

per rendere $\delta^2 I$ negativo.

89. Supporremo soddisfatte le (3) in forma più restrittiva, cioè col solo segno di diseguaglianza.

Indicando con $2V$ la forma quadratica in t, u, v che figura in $\delta^2 I$, si ha, per l'omogeneità:

$$2V = V_t t + V_u u + V_v v = \left(V_t - \frac{\partial V_u}{\partial x} - \frac{\partial V_v}{\partial y}\right)t + \frac{\partial}{\partial x}(V_u t) + \frac{\partial}{\partial y}(V_v t),$$

quindi, per la formola di Green:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int\int t g(t)\,dx\,dy + \int t(V_u dy - V_v dx)\right],$$

dove il secondo integrale è esteso al contorno della proiezione, e dove si è posto:

$$g(t) = V_t - \frac{\partial V_u}{\partial x} - \frac{\partial V_v}{\partial y}.$$

Se l'equazione a derivate parziali del 2° ordine in t:

$$g(t) = 0, \tag{6}$$

che diremo equazione di Jacobi, ammette un integrale che s'annulli lungo una linea chiusa l interna al campo d'integrazione, basterà prendere t eguale a quell'integrale nel campo racchiuso dalla linea l e nulla fuori di esso perchè sia $\delta^2 I = 0$. Vogliamo anzi dimostrare che, sotto questa ipotesi, può scegliersi t in modo che sia $\delta^2 I < 0$.

Indichiamo ancora con t un integrale della (6) che s'annulli lungo l, e sia λ il campo racchiuso da l, μ la parte rimanente del campo di integrazione. Poniamo nell'espressione di $\delta^2 I$ in luogo di t nel campo λ la funzione $t + \alpha\tau$, dove α è una costante arbitrariamente piccola e τ una funzione per ora indeterminata, nel campo μ la funzione $\alpha\tau$; l'insieme delle due funzioni costituisce una funzione continua in tutto il campo d'integrazione, e si ha:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\int\int_{(\lambda)}(t+\alpha\tau)g(t+\alpha\tau)\,dx\,dy\right.$$

$$\left.+\int_{(l)}\alpha\tau[V_u(t+\alpha\tau)dy - V_v(t+\alpha\tau)dx] + \int\int_{(\mu)}\alpha\tau g(\alpha\tau)\,dx\,dy.\right]$$

Ora, essendo g lineare rispetto a t ed alle sue derivate, si ha:

$$g(t+\alpha\tau) = g(t) + \alpha g(\tau),$$

inoltre sulla curva l (essendo $t = 0$):

$$V_u(t+\alpha\tau) = R\alpha\tau + M(u+\alpha\tau_x) + P(v+\alpha\tau_y),$$

$$V_v(t+\alpha\tau) = Q\alpha\tau + P(u+\alpha\tau_x) + N(v+\alpha\tau_y),$$

quindi:

$$\delta^2 I = \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\alpha\left\{\int\int_{(\lambda)} tg(\tau)dxdy + \int_{(l)}\tau[(Mu+Pv)dy-(Pu+Nv)]dx]\right\}+H\right],$$

dove H è un insieme di termini contenenti il fattore α^2. Ora si trova facilmente:

$$tg(\tau) - \tau g(t) = -\frac{\partial}{\partial x}(M\xi + P\eta) - \frac{\partial}{\partial y}(P\xi + N\eta),$$

posto:

$$\xi = t\tau_x - \tau u, \qquad \eta = t\tau_y - \tau v;$$

mediante la formola di GREEN, tenuto conto che $t = 0$ su l e che

$g(t) = 0$ in λ, risulta:

$$\iint_{(\lambda)} t g(\tau) dx dy = \int_{(l)} [-(M\xi + P\eta) dy + (P\xi + N\eta) dx]$$
$$= \int_{(l)} \tau [(Mu + Pv) dy - (Pu + Nv) dx],$$

quindi:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \left\{ \alpha \int_{(l)} \tau [(Mu + Pv) dy - (Pu + Nv) dx] + \frac{1}{2} H \right\}.$$

Dimostreremo che si può sempre scegliere τ in modo che l'integrale non s'annulli, donde segue immediatamente che, per α abbastanza piccolo, il suo segno dipende da quello di α, e quindi il segno di $\delta^2 I$ può essere variato a piacere. Infatti, se per qualunque τ l'integrale si annullasse, dovrebbe essere su l:

$$(Mu + Pv) dy - (Pu + Nv) dx = 0.$$

Ora su l è $t = 0$, quindi:

$$u dx + v dy = 0,$$

onde la precedente eguaglianza diverrebbe:

$$Mu^2 + 2Puv + Nv^2 = 0,$$

che è impossible per la condizione di LEGENDRE, salvo il caso, che si può escludere sotto condizioni assai poco restrittive [1]), che sia $t_x = t_y = 0$ su l. Può concludersi pertanto che, affinchè l'estremale considerata dia luogo ad un minimo, è necessario che non esista alcuna soluzione dell'equazione (6) che si annulli su tutta una linea chiusa del piano xy interna al campo d'integrazione (*condizione di* JACOBI).

---

[1]) V.: BOLZA, op. cit., p. 678.

L'equazione (6) sviluppata diviene:

$$g(t) = (Lt + Ru + Qv) - \frac{\partial}{\partial x}(Rt + Mu + Pv) - \frac{\partial}{\partial y}(Qt + Pu + Nv)$$
$$= (L - R_x - Q_y)t - \frac{\partial}{\partial x}(Mu + Pv) - \frac{\partial}{\partial y}(Pu + Nv) = 0.$$

Sia:

$$z = f(x, y, a) \tag{7}$$

un integrale dell'equazione (1) contenente una costante arbitraria a; derivando rispetto ad a la (1), in cui si sia posto $z = f$, risulta:

$$0 = Lf_a + Rf_{xa} + Pf_{ya} - \frac{\partial}{\partial x}(Rf_a + Mf_{xa} + Pf_{ya}) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial y}(Qf_a + Pf_{xa} + Nf_{ya}) = g\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right).$$

Cioè: Dato un integrale dell'equazione d'EULERO contenente una costante arbitraria, la sua derivata rispetto a questa costante è un integrale dell'equazione di JACOBI.

L'equazione (7) insieme alla $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ rappresenta la linea di contatto della superficie estremale di parametro a coll'inviluppo della famiglia (7). Quindi, se si suppone che l'estremale da considerarsi faccia parte di tale famiglia, e se la sua linea di contatto coll'inviluppo ha la proiezione tutta contenuta nel campo d'integrazione, l'estremale non corrisponde ad un minimo.

90. Dimostriamo ora che, se la condizione di LEGENDRE è soddisfatta, e se l'equazione di JACOBI ammette un integrale λ che non si annulli in alcun punto del campo d'integrazione, si ha, qualunque sia t, $\delta^2 I > 0$.

Cerchiamo di determinare due funzioni μ, ν di x, y tali che sia identicamente rispetto a t:

$$2V = \lambda^2\left[M\left(\frac{t}{\lambda}\right)_x^2 + 2P\left(\frac{t}{\lambda}\right)_x\left(\frac{t}{\lambda}\right)_y + N\left(\frac{t}{\lambda}\right)_y^2\right] + (\mu t^2)_x + (\nu t^2)_y.$$

Dovrà essere:

$$L = \frac{1}{\lambda^2}[M\lambda_x^2 + 2P\lambda_x\lambda_y + N\lambda_y^2] + \mu_x + \nu_y,$$

$$R = -\frac{1}{\lambda}[M\lambda_x + P\lambda_y] + \mu,$$

$$Q = -\frac{1}{\lambda}[P\lambda_x + N\lambda_y] + \nu,$$

da cui:

$$\mu_x = R_x + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}(M\lambda_x + P\lambda_y) - \frac{\lambda_x}{\lambda^2}(M\lambda_x + P\lambda_y),$$

$$\nu_y = Q_y + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}(P\lambda_x + N\lambda_y) - \frac{\lambda_y}{\lambda^2}(P\lambda_x + N\lambda_y),$$

e quindi:

$$\lambda L = \lambda(R_x + Q_y) + \frac{\partial}{\partial x}(M\lambda_x + P\lambda_y) + \frac{\partial}{\partial y}(P\lambda_x + N\lambda_y),$$

equazione che è soddisfatta perchè λ è integrale dell'equazione $g(t) = 0$. Si ha allora:

$$\begin{aligned}\delta^2 I = \varepsilon^2 \int\int \Big\{ \lambda^2 \Big[M\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_x^2 + 2P\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_x\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_y + N\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_y^2 \Big] \\ + (\mu t^2)_x + (\nu t^2)_y \Big\} dx\, dy \\ = \varepsilon^2 \Big\{ \int\int \lambda^2 \Big[M\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_x^2 + 2P\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_x\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_y + N\Big(\frac{t}{\lambda}\Big)_y^2 \Big] dx\, dy \\ + \int t^2(\mu\, dy - \nu\, dx) \Big\},\end{aligned}$$

dove l'integrale semplice è esteso al contorno del campo d'integrazione. E poichè sul contorno $t = 0$, risulta:

$$\delta^2 I = \varepsilon^2 \int\int \lambda^2 \left[M\left(\frac{t}{\lambda}\right)_x^2 + 2P\left(\frac{t}{\lambda}\right)_x \left(\frac{t}{\lambda}\right)_y + N\left(\frac{t}{\lambda}\right)_y^2 \right] dx\,dy,$$

donde segue, per la condizione di LEGENDRE, $\delta^2 I > 0$.

91. Il concetto di campo di estremali (§ 7) può estendersi alle superficie; un campo di estremali è generato da una famiglia semplicemente infinita di estremali:

$$z = f(x, y, a)$$

comprendente l'estremale considerata σ, e delle quali una sola passa per ciascun punto di un certo intorno di questa. Dato quindi un punto (x, y, z) di tale intorno, i valori corrispondenti di p e q per l'estremale passante per esso sono univocamente determinati, cioè p e q sono funzioni di x, y, z:

$$(8) \qquad p = p(x, y, z), \qquad q = q(x, y, z).$$

Sia l il contorno dato, σ_1 una superficie qualunque contenuta nell'intorno considerato di σ, ed avente per contorno l; dimostreremo che il valore dell'integrale:

$$\int\int_{\sigma_1} [(F - pF_p - qF_q) + \bar{p}F_p + \bar{q}F_q]\,dx\,dy,$$

dove $F = F[x, y, z, p(x, y, z), q(x, y, z)]$, e $\bar{p}$, $\bar{q}$ si riferiscono alla superficie σ_1, non dipende da questa, ma soltanto dal contorno. La condizione perchè ciò avvenga è (§ 55):

$$\frac{\partial}{\partial z}(F - pF_p - qF_q) - \frac{\partial F_p}{\partial x} - \frac{\partial F_q}{\partial y} = 0 \quad [1]);$$

---

[1]) Qui $\frac{\partial}{\partial x}$ denota la derivata rispetto ad x di una funzione di x, y, z, p, q, dove p e q rappresentano le funzioni di x, y, z date dalle (8); mentre altrove ab-

sviluppando il primo membro, si ottiene:

$$\begin{aligned}
&(F_z+p_zF_p+q_zF_q)-p_zF_p-p(F_{pz}+p_zF_{pp}+q_zF_{pq})-q_zF_q-\\
&-q(F_{qz}+p_zF_{pq}+q_zF_{qq})-(F_{px}+p_xF_{pp}+q_xF_{pq})-(F_{qy}+p_yF_{pq}+q_yF_{qq})\\
&=F_z-[F_{px}+pF_{pz}+(p_x+pp_z)F_{pp}+(q_x+pq_z)F_{pq}]-\\
&-[F_{qy}+qF_{qz}+(p_y+qp_z)F_{pq}+(q_y+qq_z)F_{qq}]\\
&=F_z-[F_{px}+pF_{pz}+rF_{pp}+sF_{pq}]-[F_{qy}+qF_{qz}+sF_{pq}+tF_{qq}]\\
&=F_z-\frac{\partial F_p}{\partial x}-\frac{\partial F_q}{\partial y},
\end{aligned}$$

che è $=0$ per l'equazione di EULERO.

Dopo ciò, osservando che per l'estremale σ si ha $\bar{p}=p$, $\bar{q}=q$, sarà:

$$\int\int_{(\sigma_1)}[(F-pF_p-qF_q)+\bar{p}F_p+\bar{q}F_q]dxdy=\int\int_{(\sigma)}Fdxdy=I(\sigma),$$

quindi:

$$\Delta I=I(\sigma_1)-I(\sigma)=\int\int_{(\sigma_1)}E(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \bar{p},\ \bar{q})dxdy,$$

posto:

$$\begin{aligned}
E(x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \bar{p},\ \bar{q})&=F(x,\ y,\ z,\ \bar{p},\ \bar{q})-F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)-\\
&-\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)}{\partial p}(\bar{p}-p)-\frac{\partial F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)}{\partial q}(\bar{q}-q).
\end{aligned}$$

Pertanto, se in un certo intorno dell'estremale σ si ha (*condi-*

---

biamo denotato con $\frac{\partial}{\partial x}$ la derivata rispetto ad x di una funzione di x, y, z, p, q, dove z è una certa funzione di x, y, e p, q sono le sue derivate parziali. Analoga osservazione deve farsi per il simbolo $\frac{\partial}{\partial y}$.

Nella formola successiva del testo $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ riacquistano il significato ordinario.

zione di Weierstrass):

$$E(x, y, z, p, q, \bar{p}, \bar{q}) > 0$$

qualunque sieno $\bar{p}$ e $\bar{q}$ (purchè non sia insieme $\bar{p} = p$, $\bar{q} = q$), l'estremale σ dà un minimo forte.

92. Esempio. — 22. *Superficie d'area minima.*

Si ha:

$$F = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

quindi:

$$F_{zz} = F_{zp} = F_{zq} = 0, \qquad F_{pp} = \frac{1 + q^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_{pq} = -\frac{pq}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_{qq} = \frac{1 + p^2}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e le condizioni di Legendre sono soddisfatte nella forma più restrittiva:

$$F_{pp} > 0, \qquad F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0.$$

L'equazione di Jacobi è:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 + q^2)t_x - pq\,t_y}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{-pq\,t_x + (1 + p^2)t_y}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

essa ammette l'integrale $t = 1$, che non s'annulla mai.

Infine si ha:

$$E(x, y, z, p, q, \bar{p}, \bar{q}) = \sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2} - \sqrt{1 + p^2 + q^2} - \frac{p(\bar{p} - p) + q(\bar{q} - q)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \left[\sqrt{1 + \bar{p}^2 + \bar{q}^2}\,\sqrt{1 + p^2 + q^2} - (1 + \bar{p}p + \bar{q}q) \right],$$

che si dimostra facilmente essere sempre > 0.

Dunque in questo caso si ha un minimo forte.

Questi calcoli valgono anche per l'Es. 23.

APPENDICE.

IL CALCOLO FUNZIONALE
E IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.
IL MINIMO ASSOLUTO.

IL CALCOLO FUNZIONALE
E IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.
IL MINIMO ASSOLUTO.

Dato un insieme I di valori della variabile reale x, se ad ogni elemento di I si fa corrispondere un numero reale, l'insieme di tali numeri costituisce una funzione della variabile x definita nell'insieme I. Analogamente, dato un insieme I di linee piane $y = f(x)$, o di funzioni d'una variabile reale, se a ciascuna linea o funzione si fa corrispondere un numero reale, l'insieme di tali numeri costituisce una *funzione della linea variabile* $y = f(x)$, o, secondo la nomenclatura adottata da alcuni autori, un *funzionale*, che si denota con $\mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]$, essendo $a\,b$ l'intervallo in cui si suppongono date le funzioni $f(x)$. Lo studio dei funzionali costituisce il *Calcolo funzionale*, o *Teoria delle funzioni di linee,* che comprende come caso particolare il Calcolo delle variazioni.

Esempi di funzioni di linee non mancano; tali sono la lunghezza d'una curva, l'area racchiusa da essa, dalle ordinate estreme e dall'asse delle ascisse, etc.

Un insieme di linee può considerarsi come limite d'un insieme di poligonali.

Abbiasi sull'asse x un segmento $a\,b$, e lo si divida in $n - 1$ parti eguali mediante i punti $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, ponendo per simmetria $a = x_1$, $b = x_n$. Si considerino poi tutte le spezzate ad $n - 1$ lati contenute in un certo campo ed aventi i vertici ordinatamente sulle parallele all'asse y condotte per i punti $x_1, \ldots, x_n$; e sieno $y_1, \ldots, y_n$ le ordinate dei vertici di una qualunque di tali spezzate.

Se a ciascuna spezzata S si fa corrispondere un numero reale, che denoteremo con $\mathfrak{F}(S)$, l'insieme dei valori di $\mathfrak{F}(S)$ potrà considerarsi come una funzione delle n variabili $y_1, \ldots, y_n$:

$$\mathfrak{F}(S) = \varphi(y_1, \ldots, y_n).$$

Sieno:

$$S(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \ldots, P_n), \qquad \bar{S}(P_1, \ldots, P_{i-1}, \bar{P}_i, P_{i+1}, \ldots, P_n)$$

due spezzate, che differiscano tra loro soltanto per l'i-esimo vertice; sarà, indicando con $\bar{y}_i$ l'ordinata di $\bar{P}_i$:

$$\mathfrak{F}(\bar{S}) - \mathfrak{F}(S) = \varphi(y_1, \ldots, y_{i-1}, \bar{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) - \\ - \varphi(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \ldots, y_n),$$

quindi:

$$\lim_{\bar{P}_i = P_i} \frac{\mathfrak{F}(\bar{S}) - \mathfrak{F}(S)}{\bar{y}_i - y_i} = \frac{\partial \varphi(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_i}.$$

Posto:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \Delta x,$$

l'area del quadrilatero $P_{i-1} P_i P_{i+1} \bar{P}_i$ è (se $\bar{y}_i > y_i$):

$$\theta_i = (\bar{y}_i - y_i)\Delta x,$$

sicchè la precedente relazione diviene:

$$\Delta x \lim_{\bar{P}_i = P_i} \frac{\mathfrak{F}(\bar{S}) - \mathfrak{F}(S)}{\theta_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i},$$

od anche:

(1) $$\mathfrak{F}'_i(S)\Delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i},$$

posto:

$$\mathfrak{F}'_i(S) = \lim_{\bar{P}_i = P_i} \frac{\mathfrak{F}(\bar{S}) - \mathfrak{F}(S)}{\theta_i}.$$

Ne segue, indicando con $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ le differenze tra le ordinate di una spezzata infinitamente vicina ad S e quelle della S stessa, e con $\delta \mathfrak{F}(S)$ il corrispondente incremento di $\mathfrak{F}(S)$:

$$(2) \qquad \delta \mathfrak{F}(S) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}'_i(S) \delta y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \delta y_i = \delta \varphi.$$

Se si imagina che n cresca indefinitamente, le spezzate divengono, al limite, archi di curve compresi tra le parallele all'asse y condotte per a e per b, e, rappresentando genericamente con $y = f(x)$ una di queste curve, la $\mathfrak{F}(S)$ diventa un funzionale $\mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]$.

Si dice che una linea:

$$y = g(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

sta nell'*intorno* ε *d'ordine* 0, o semplicemente nell'*intorno* ε, di un'altra linea:

$$y = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b),$$

se per ogni valore di x compreso nell'intervallo ab si ha:

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon;$$

si dice che sta nell'*intorno* ε *d'ordine* r, se si ha inoltre:

$$|g^{(h)}(x) - f^{(h)}(x)| < \varepsilon$$

per $h = 1, 2, \ldots, r$.

Dato un aggregato I di linee, che supporremo sempre continue, se una linea, appartenente o no ad I, ha la proprietà che in ogni suo intorno (d'ordine 0) si trovano linee di I diverse da essa, si dice che essa è una *linea limite* dell'aggregato I.

Un aggregato di linee è *chiuso*, se contiene tutte le proprie linee limiti; è *compatto*, se ogni suo aggregato parziale infinito ammette qualche linea limite.

Affinchè un aggregato di linee sia compatto, è necessario e sufficiente che le funzioni rappresentate dalle linee dell'aggregato sieno *egualmente limitate* ed *egualmente continue;* cioè:

a) che i moduli di tutte le funzioni abbiano un unico limite superiore finito;

b) che, comunque si scelga σ, possa determinarsi r in modo che in ogni intervallo di ab di lunghezza minore di r l'oscillazione di qualunque delle funzioni sia minore di σ.

Un aggregato I di infinite linee continue, rettificabili e di lunghezza inferiore ad un determinato numero finito, aventi gli estremi comuni, ammette almeno una curva limite della stessa natura e cogli stessi estremi.

Ne segue che l'insieme H di tutte le curve continue, rettificabili e di lunghezza inferiore ad un determinato numero finito, aventi gli stessi estremi, è compatto e chiuso.

Non è inutile osservare che la classe delle curve rettificabili è più ampia di quella delle curve aventi in ogni punto tangente determinata o dotate di un numero finito di vertici. Analiticamente una curva rettificabile può caratterizzarsi come segue.

Sia:

$$y = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

l'equazione della curva, e si divida l'intervallo ab in n parti in modo qualunque mediante i punti $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, scrivendo anche, per simmetria, $a = x_0$, $b = x_n$; se la somma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + [f(x_{i+1}) - f(x_i)]^2}$$

al tendere uniformemente a zero delle differenze $x_{i+1} - x_i$ tende ad un limite indipendente dal modo di divisione adottato, questo limite si assume per definizione come *lunghezza* della curva, la quale si dice *rettificabile*. Se la derivata $f'(x)$ esiste in tutti i punti dell'intervallo ed è continua, la lunghezza è data dall'integrale:

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Un funzionale $\mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]$, definito per un certo insieme o campo di linee, si dice *continuo* per una linea $f(x)$, se, comunque si prenda

σ, si può determinare ε in modo che per qualunque linea $g(x)$ posta nell'intorno ε di $f(x)$ sia:

$$\left|\mathfrak{F}[g(\overset{b}{\underset{a}{x}})] - \mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]\right| < \sigma;$$

si dice *semicontinuo superiormente* o *inferiormente*, se:

$$\mathfrak{F}[g(\overset{b}{\underset{a}{x}})] < \mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})] + \sigma, \qquad \text{o} \qquad \mathfrak{F}[g(\overset{b}{\underset{a}{x}})] > \mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})] - \sigma.$$

Un funzionale continuo in un campo compatto e chiuso ammette un massimo ed un minimo; un funzionale semicontinuo superiormente (inferiormente) ammette un massimo (minimo).

Sia ξ un punto dell'intervallo ab, e sieno ε, τ due numeri positivi arbitrariamente piccoli; le due funzioni $f(x)$, $g(x)$ coincidano per $a \leqq x \leqq \xi - \tau$ e per $\xi + \tau \leqq x \leqq b$, e sia $g(x) - f(x) > 0$ per $\xi - \tau < x < \xi + \tau$; se il funzionale continuo $\mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]$ soddisfa a certe condizioni, il rapporto:

$$\frac{\mathfrak{F}[g(\overset{b}{\underset{a}{x}})] - \mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})]}{\theta},$$

dove θ rappresenta l'area compresa tra le linee $f(x)$, $g(x)$, al tendere di ε e di τ a zero tende ad un limite finito e determinato, che si dice la *derivata* di $\mathfrak{F}$ nel punto ξ, e si denota con $\mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi]$. Il confronto colla formola (1) mostra chè, quando si passa dalle spezzate alle linee, alla derivata parziale $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}$ corrisponde l'espressione:

$$\mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi]\, d\xi.$$

Analogamente alla variazione $\delta \varphi$ [v. form. (2)] corrisponde la *variazione*:

$$\delta \mathfrak{F} = \int_a^b \mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi]\, \delta f(\xi)\, d\xi,$$

dove $\delta f(\xi)$ rappresenta la variazione della funzione $f(x)$ per $x = \xi$.

Applichiamo i risultati esposti all'integrale più semplice del Calcolo delle variazioni. Si ha:

$$\mathfrak{F}[f(\overset{b}{\underset{a}{x}})] = \int_a^b F[x, f(x), f'(x)]\, dx.$$

Poniamo:

$$g(x) = f(x) \qquad \text{per} \qquad a \leqq x \leqq \xi - \tau$$

$$\text{e per} \qquad \xi + \tau \leqq x \leqq b,$$

$$g(x) = f(x) + \varepsilon \eta(x) \qquad \text{per} \qquad \xi - \tau < x < \xi + \tau,$$

essendo $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$;

$$\eta(x) = 0 \qquad \text{per} \qquad x = \xi - \tau \text{ e per } x = \xi + \tau,$$

$$0 < \eta(x) < 1 \qquad \text{per} \qquad \xi - \tau < x < \xi + \tau.$$

Allora:

$$\mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] = \lim_{\substack{\varepsilon = 0 \\ \tau = 0}} \Big[\int_a^b \{F[x, f(x) + \varepsilon \eta(x), f'(x) + \varepsilon \eta'(x)] - $$

$$- F(x, f(x), f'(x)]\} dx : \int_{\xi - \tau}^{\xi + \tau} \varepsilon \eta(x)\, dx \Big].$$

Ora si ha, scrivendo F in luogo di $F[x, f(x), f'(x)]$:

$$\int_a^b \{F[x, f(x) + \varepsilon \eta(x), f'(x) + \varepsilon \eta'(x)] - F[x, f(x), f'(x)]\} dx$$

$$= \int_a^b \Big\{ \varepsilon \Big(\frac{\partial F}{\partial f} \eta + \frac{\partial F}{\partial f'} \eta' \Big) + \cdots \Big\} dx,$$

dove i termini omessi contengono potenze di ε superiori alla prima; inoltre, essendo η ed η' nulle negli intervalli da a a $\xi - \tau$ e da $\xi + \tau$ a b, si ha, colla solita integrazione per parti:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f}\eta + \frac{\partial F}{\partial f'}\eta'\right) dx = \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial f}\eta + \frac{\partial F}{\partial f'}\eta'\right) dx$$
$$= \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right] \eta \, dx,$$

quindi:

$$\mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] = \lim_{\tau=0} \left[\int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right] \eta \, dx : \int_{\xi-\tau}^{\xi+\tau} \eta \, dx\right],$$

e di qui, applicando ad ambi gli integrali il primo teorema della media e passando al limite:

$$\mathfrak{F}'[f(\overset{b}{\underset{a}{x}}), \xi] = \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right]_{x=\xi}.$$

Ne segue:

$$\delta \mathfrak{F} = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right] \eta(x) \, dx$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right)\right] \delta f(x) \, dx.$$

Per le curve rettificabili in generale può sostituirsi all'integrale finora considerato il limite dell'espressione (*integrale generalizzato*):

$$\sum_{i=0}^{n-1} F[x_i, f(x_i), f(x_{i+1}) - f(x_i)],$$

quando questo limite esiste ed è indipendente dal modo di divisione dell'intervallo ab; esso si riduce all'ordinario integrale quando $f'(x)$ esiste ed è continua.

Se per ogni punto (x, y) del campo considerato e per ogni valore di y' si ha $F_{y'y'} > 0$, l'integrale, o integrale generalizzato, I è semicontinuo inferiormente per ogni curva dell'insieme H, quindi esiste una curva di tale insieme per la quale esso assume il valore minimo (minimo assoluto).

Si dimostra poi facilmente che la linea corrispondente al minimo è un'estremale, o è costituita da un insieme finito o numerabile di archi d'estremale.

ERRATA-CORRIGE

Pagina	34	Linea	8	*Invece di*	x, y	*leggasi*	x', y'
»	48	»	4	»	nell'	»	sull'
»	49	»	19	*Dopo*	esso	*aggiungasi*	abbia
»	93	»	2	*Invece di*	λ	*leggasi*	$-\lambda$
»	96	»	14	»	(6)	»	(7)
»	117	»	3	»	ψ_2	»	ψ_r
»	117	»	3 e 1 dal basso	»	$\int$	»	$\int_{t_0}^{t_1}$
»	132	»	13	»	$i = 0$	»	$i = 1$
»	199	»	7	»	I_{PQ_2}	»	I_{QP_2}

INDICE

INDICE DEGLI ESEMPI

PREZZO DEL PRESENTE VOLUME LIRE QUARANTA