Al Prof. L. Bianchi
Omaggio dell'A.

FRANCESCO SEVERI

PROFESSORE ORDINARIO DELL'UNIVERSITÀ DI PARMA

COMPLEMENTI

DI

GEOMETRIA PROIETTIVA

Raccolta di oltre 300 problemi colle relative soluzioni.

BOLOGNA
DITTA NICOLA ZANICHELLI
1906

A

CORRADO SEGRE

MAESTRO INCOMPARABILE

CHE CON ASSIDUA CURA

M' EDUCÒ L' INTELLETTO

ALLE SEVERE INDAGINI DELLA SCIENZA

QUESTO LIBRO DEDICO

ELEVANDO IL CUORE

AI PIÙ ALTI SENTIMENTI FILIALI

NEL RICORDO CARO E VENERATO

DI MIO PADRE

PREFAZIONE

" Fare un libro elementare, un libro che schiettamente
" si adatti alle scuole, è cosa difficilissima e che richiede
" molto e molto tempo. Per chi vive di scienza, tale impresa
" è piena di dubbi, di sacrifizi e di amarezze: per mesi e
" mesi, ed anche per anni, dovrete lasciar da canto i più cari
" studi, chiudere negli scaffali e nascondere a voi stesso i
" libri più nuovi e curiosi, mettervi a litigare coll' abbiccì
" della scienza; fare, disfare e rifare il vostro lavoro, tre,
" quattro volte, insomma sciupare il meglio delle vostre
" forze. Se riuscite, gloria non ne avrete: già non la spe-
" ravate nemmeno, chè a siffatte fatiche altri non ci si sob-
" barca che per beneficio altrui.... „

(Cremona, Prefazione degli " Elementi di Geometria proiettiva „, Paravia, 1873).

Questo libro, che licenzio non senza trepidazione, nacque coll' intendimento modestissimo di fornire agli studenti di matematiche e d' ingegneria del nostro primo corso universitario, una raccolta graduata di problemi di Geometria proiettiva, che servissero ad illustrare la teoria, dando anche materia appropriata alle esercitazioni grafiche.

Ma, durante l' esecuzione, i confini del primitivo disegno si sono alquanto allargati, e, specialmente in seguito agl' incitamenti autorevoli ed amichevoli, dei professori Bertini, Enriques, Segre, ho creduto di far cosa utile esponendo, insieme alle applicazioni delle teorie fondamentali, alcune teorie complementari, che dànno luogo a problemi eleganti e svariatissimi. E fra queste teorie complementari classifico anche alcune nozioni, che si espongono in molti corsi di Geometria proiettiva, senza che, tuttavia, sieno parti veramente vitali di questa disciplina.

A ciò m'indussi riflettendo che l'insegnamento della Geometria proiettiva staudtiana, riesce, a parer mio, tanto più efficace e rispondente ad uno dei principali suoi fini, qual'è quello di educare la facoltà logica, quanto più la trattazione delle teorie fondamentali venga spogliata dalle proposizioni accessorie, che turbano al principiante la visione netta della mirabile armonia e dell'intima struttura dell'edificio geometrico.

Ma, data appunto la convenienza di mantenere la purezza del metodo nello sviluppo delle teorie più essenziali, ad evitare il danno d'un insegnamento unilaterale, conviene di presentare le applicazioni con varietà di metodo; e l'opportunità di ciò si riconosce anche maggiore, quando si osservi che, come più volte fu avvertito, la concezione di STAUDT lascia troppo in disparte le proprietà metriche, e fa dimenticare quasi completamente il metodo delle proiezioni, usato in modo sistematico nella classica opera di PONCELET.

A questo inconveniente della trattazione puramente grafica, occorre por rimedio, non soltanto in considerazione dell'influenza preponderante che le proprietà metriche ed il metodo delle proiezioni hanno avuto nello sviluppo storico della Geometria proiettiva; ma anche perchè il metodo di PONCELET contribuisce molto più efficacemente del metodo staudtiano, all'educazione dell'intuizione spaziale, che altrimenti resterebbe un po' negletta, a vantaggio di un'esclusiva educazione logica.

L'indice ampiamente analitico, che accompagna questi « Complementi », mi dispensa dal presentare al lettore un quadro riassuntivo degli argomenti svolti nel volume; nè, d'altra parte, sarebbe cosa agevole il farlo, per la natura stessa della materia trattata.

Dirò soltanto che, allo scopo di rendere il libro più facilmente accessibile al principiante, ho creduto opportuno di farne procedere lo sviluppo parallelamente alle « Lezioni di Geometria proiettiva » del prof. ENRIQUES [1], adottando quasi la stessa suddivisione in capitoli e rimandando a questo libro, ogni volta occorra, per la chiarezza del ragionamento, il richiamo di qualche teorema [2].

La scelta delle « Lezioni » del prof. ENRIQUES, tra i buoni testi di Geometria proiettiva, mi è stata suggerita, tra l'altro, dalla giusta misura nella trattazione delle teorie fondamentali: d'accordo col proposito di semplificare il corso, riserbando agli esercizi le proposizioni accessorie.

Tuttavia, tenendo conto delle esigenze della scuola, al principio di ogni paragrafo ho creduto opportuno di riassumere brevemente le proposizioni che lo studente deve già conoscere, per comprendere le applicazioni e le nozioni complementari, cui il paragrafo si riferisce; ed ho pure corredato i paragrafi di ampi sommari, che sono riprodotti nell'indice, e che spero potranno rendere il libro più maneggevole.

Ho tralasciato di esporre gli esercizi più ovvii, come quelli che si deducono specializzando metricamente i noti problemi costruttivi della Geometria proiettiva; ma, per quanto apparisca evidente la ragione di tale omissione, debbo tuttavia avvertire che io pure riconosco la convenienza di far disegnare ai giovani anche questi

[1] Bologna, Zanichelli, 2ª ed. 1904.

[2] Ad evitare ambiguità, le citazioni dei §§ delle « Lezioni » sono sempre precedute dalla lettera *E*.

esercizi più semplici, per render loro familiari le costruzioni fondamentali e l'uso degli elementi impropri.

Il testo è illustrato da abbondanti notizie storiche, che ho tratte dalle migliori fonti, col desiderio che i nostri giovani non ignorino del tutto le vicende della scienza che imprendono a studiare.

Ed ora, nell'affidare il libro al giudizio del pubblico, mi conforta il pensiero che, se l'opera ha potuto riuscire imperfetta, io non ho mancato di dedicare ad essa tutte le mie forze, lavorando con grande amore attorno alle soluzioni delle varie questioni, per semplificarle talora, per presentarne di nuove qualche altra volta: sempre preoccupato dal desiderio di armonizzare tra loro argomenti così disparati, aggruppandoli in modo da ottenere una raccolta omogenea.

E termino ringraziando pubblicamente i miei ex-allievi signori Luigi Amoroso, che ha curato l'esecuzione delle figure intercalate nel testo, e Mauro Picone, che mi ha aiutato nella revisione delle bozze di stampa.

Vadano pure i miei ringraziamenti all'editore Zanichelli, che, continuando le tradizioni della sua Casa, ha voluto dare al volume un'elegante veste tipografica.

Parma, 21 giugno 1905.

Francesco Severi.

ELENCO DEI LIBRI
CONSULTATI PIÙ FREQUENTEMENTE

I trattati classici di PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT, REYE, e le opere seguenti:

KÖTTER E, *Die Entwickelung der synthetischen Geometrie.* — 1ª parte: Da Monge fino a Staudt. — (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Leipzig, Teubner, 1898 und 1901).

DINGELDEY F., *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.* — (Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Teubner, 1903).

CASTELNUOVO G., *Lezioni di Geometria analitica e proiettiva.* — Volume I. — (Società editrice Dante Alighieri, Roma-Milano, 1904).

CAPITOLO PRIMO

Proiezioni e sezioni — Costruzioni lineari

§ 1. *Metodo delle proiezioni.*

SOMMARIO: *Il metodo delle proiezioni come metodo induttivo e come metodo deduttivo. Proprietà proiettive. — Alcuni esempî semplici di trasformazione delle figure piane mediante la proiezione centrale.*

1. Dalle figure che si studiano in Geometria elementare, mediante le operazioni fondamentali della Geometria proiettiva, cioè per mezzo di proiezioni e sezioni, si possono ottenere figure di natura più elevata, rispetto alle quali le prime sono da considerarsi come casi particolari metrici. In tale passaggio, o nel suo inverso, le proprietà geometriche delle une si trasportano alle altre, o viceversa.

Il *metodo delle proiezioni* si può quindi considerare sotto un duplice aspetto: come metodo *induttivo* in quanto permette di scoprire nuove figure e le proprietà di queste, operando su figure già note (così p. e. le proprietà delle coniche da quelle del cerchio); e come metodo *deduttivo* in quanto semplifica la dimostrazione di certe proprietà geometriche, facendole dipendere da considerazioni più elementari.

Per far subito un esempio semplicissimo dell' uso induttivo del metodo, proiettiamo da un punto sopra un piano α' la figura F costituita da due rette parallele a, b e dalla bisettrice p della striscia tra esse compresa.

Si ottengono sul piano α' due rette a' b', che s' incontrano nel punto P', proiezione del punto improprio P, comune alle a, b; e la bisettrice p si proietta in una retta p', uscente da P'. Orbene, indicando con q' la proiezione della retta impropria q del piano ab, la proprietá che p è il luogo dei centri dei parallelogrammi che hanno due lati opposti sopra a, b, si trasporta alla figura trasformata F', dicendo che il luogo del punto comune alle diagonali di un quadrangolo semplice, di cui due lati opposti giacciono sulle a' b' e gli altri due si tagliano in un punto di q', è una retta passante pel punto P'.

Qui è opportuno rilevare che la proprietà iniziale della figura F si enuncia nello stesso modo della proprietà corrispondente di F', purchè s' introducano gli elementi improprî q e P, e invece di parlare di un parallelogramma e del suo centro, si parli rispettivamente di un quadrangolo di cui le due coppie di lati opposti si tagliano in q, e punto del comune alle sue diagonali.

Sicchè, quando non si distingua tra elementi proprî ed improprî, si può dire che la proprietà della F, si trasmette immutata alla figura F', cioè che quella *proprietà* è *proiettiva.*

Tra le proprietà proiettive delle figure si trovano anzitutto le *proprietà grafiche*, che (come quella dell' esempio precedente) si riferiscono soltanto a relazioni di appartenenza tra elementi fondamentali (proprî o improprî), nonchè alle nozioni di ordine e di continuità; mentre le *proprietà metriche*, cioè quelle che dipendono dai concetti di misura, di perpendicolarità e di parallelismo, non sono in generale proiettive. Tuttavia esistono anche *proprietà metrico-proiettive*, delle quali vedremo più tardi numerosi esempî.

Il valore deduttivo del metodo delle proiezioni si rivela specialmente nella dimostrazione delle proprietà proiettive di una figura, giacchè per la loro stessa natura basta stabilirle sopra una proiezione qualunque della figura oggettiva. Ora, tra le proiezioni di questa figura ve ne possono esser di quelle, che a causa di speciali posizioni degli elementi fondamentali della proiezione, si riducono così semplici che la dimostrazione di una determinata proprietà proiettiva della figura data, si ottiene su esse coi mezzi più elementari della Geometria.

Per far subito un esempio, riprendiamo la figura costituita dalle rette $a'b'p'q'$, di cui sopra abbiamo parlato. Il metodo delle proiezioni, usato induttivamente, ci ha portato a considerare uno speciale legame grafico tra quelle quattro rette. Ci possiamo ora domandare se viceversa date due rette $a'b'$, uscenti da un punto P′, ed una retta q' appartenente al fascio di quelle due, accada sempre che il luogo del punto comune alle diagonali di un quadrangolo di cui due lati opposti si taglino in un punto di q' e gli altri due giacciano sulle $a'b'$, sia una retta passante per P′.

Ebbene, a questa domanda si risponde subito in modo affermativo, usando deduttivamente del metodo delle proiezioni. Invero basterà provare che i punti M′N′ comuni alle diagonali di due quadrangoli soddisfacenti alle condizioni suddette, sono allineati con P′.

Perciò si proietti la figura costituita dalle rette $a'b'q'$ e da quei quadrangoli, da un punto O sopra un piano ω parallelo al piano Oq'. Allora la retta q' si muterà nella retta impropria q di ω, le rette a',b' in due rette parallele a,b, e i due quadrangoli in due parallelogrammi, ciascuno dei quali avrà due lati opposti sulle a,b; e infine i punti M′ N′ si proietteranno nei centri M,N di questi parallelogrammi.

Poichè i punti M, N appartengono alla bisettrice della striscia ab, che è una retta p parallela alle a, b, i punti oggettivi M′, N′ risulteranno allineati con P′.

Come si vede da questo esempio, la ragione del successo sta tutta nella opportunità della scelta degli elementi fondamentali della proiezione; ed il criterio con cui deve farsi tale scelta è di ottenere una figura elementarmente più semplice della data.

Volendo dunque abituarsi ad usare questo metodo fecondo, occorre anzitutto impadronirsi del modo di trasformare una figura, mediante proiezioni e sezioni, in altre che abbiano caratteri più elementari.

Ecco ora alcuni esempii di queste trasformazioni.

a) Proiettare una figura piana F in modo che una retta u *del suo piano si muti in una retta impropria.*

Come abbiamo già visto nel caso della figura $a'b'p'q'$ precedentemente considerata, basterà proiettare F da un punto O esterno al suo piano, sopra un piano parallelo ad Ou.

Se la figura F è un quadrangolo ABCD, e si sceglie come retta u la congiungente i due punti $E \equiv AB.CD$, $G \equiv AD.BC$, *mediante la proiezione suddetta il quadrangolo si trasforma in un parallelogramma.*

b) Proiettare una figura piana F in modo che due sue rette a, b, *si mutino in due rette perpendicolari.*

Si tracci sul piano di F una retta u, che seghi a, b rispettivamente nei punti H, K e, preso un punto O (esterno al piano di F) sulla sfera di diametro HK, si consideri l'angolo diedro $H\widehat{OP}K$, ove $P \equiv ab$.

Ogni piano α parallelo al piano HOK, sega il diedro suddetto secondo un angolo uguale ad $H\widehat{O}K$, ossia secondo un angolo retto; sicchè proiettando da O sopra il piano α, le proiezioni a', b' delle a, b risulteranno perpendicolari.

In particolare se F è un quadrangolo ABCD e se come retta u si sceglie la congiungente i due punti $E \equiv AB.CD$, $G \equiv AD.BC$, e come rette a, b si scelgono i lati CD, BC, *mediante la proiezione da O il quadrangolo si trasforma in un rettangolo* (parallelogramma con due lati consecutivi perpendicolari).

Se invece si scelgono come rette a, b le AC, BD, e come retta u la EG, si avrà il modo di *trasformare con una* *proiezione il quadrangolo* ABCD in un parallelogramma con le diagonali perpendicolari, ossia *in un rombo.*

Se infine il punto O si sceglie sul cerchio comune alle due sfere di diametri EG, MN, ove M $\equiv$ EG. AC, N $\equiv$ EG. BD, e si fa la proiezione sopra un piano parallelo ad EOG, il *quadrangolo* ABCD *si trasforma in un quadrato*, giacchè il parallelogramma che si ottiene, è insieme un rettangolo e un rombo.

Osservazione. Si può dimostrare che in ogni caso le due sfere di diametri EG, MN risultano secanti, osservando che le due coppie EG, MN si separano (*E.* § 12).

c) Proiettare una figura piana F in modo che due sue rette a, b, *si mutino in due rette inclinate di un dato angolo* θ.

Si tracci sul piano di F una retta u, che seghi le a, b in E, G, e, sopra un piano α (diverso dal piano di F) condotto ad arbitrio per u, si consideri un punto O appartenente ad uno dei due cerchi, simmetrici rispetto ad EG, che costituiscono il luogo dei punti da cui E, G son veduti secondo l' angolo θ o secondo l' angolo supplementare.

Proiettando da O sopra un piano parallelo ad α, le due rette a, b si muteranno in due rette inclinate dell' angolo θ.

d) Proiettare un triangolo ABC in un triangolo equilatero.

Si conduca un piano α per uno dei lati BC del triangolo, diverso dal piano ABC, e su α si costruisca un triangolo equilatero di lato BC. Sia M il terzo vertice di questo triangolo ed O un punto della retta AM, diverso da A, M.

Il triedro O(MBC) è segato da piani paralleli ad α secondo triangoli simili ad MBC, ossia secondo triangoli equilateri. Quindi proiettando da O sopra un piano parallelo ad α, il triangolo ABC si trasforma nel modo voluto.

A questi primi esempii di trasformazione delle figure mediante proiezioni, se ne aggiungeranno in seguito altri relativi a figure meno elementari, e così avremo agio di penetrare sempre più lo spirito del metodo e di convincerci della sua fecondità.

Il metodo della proiezione centrale fu usato sistematicamente da PONCELET (Traité des propriétés projectives des figures, 1822 e 1865); ma se ne trovano tracce anche in Autori più antichi (DESARGUES, PASCAL, LAMBERT, MONGE, CARNOT). — Seguendo l'assetto logico dato da STAUDT alla Geometria proiettiva (Geometrie der Lage, 1847), tutte le proposizioni di questa Scienza si stabiliscono sulla base di alcuni postulati grafici, ed abbracciano come casi particolari metrici i teoremi di Geometria elementare; sicché la trattazione di Poncelet procede inversamente a quella di Staudt, in quanto subordina le proprietà grafiche alle proprietà metriche. Alcuni degli esempî particolari sopra addotti, di trasformazione delle figure col mezzo della proiezione centrale, trovansi in NERENBURGER (1837).

§ 2. ***Prime applicazioni del metodo delle proiezioni alle proprietà grafiche delle figure.***

SOMMARIO: a) *Triangoli omotetici e omologici e applicazioni relative — Polare di un punto rispetto a due rette — Polare di un punto rispetto ad un triangolo — Esagono di Pappo.* b) *Costruzioni lineari.* c) *Gruppi armonici — Proprietà armonica del quadrangolo — Costruzioni metriche dei gruppi armonici — Teoremi della media geometrica e della media armonica — Applicazioni della proprietà armonica del quadrangolo — Coppia che separa armonicamente due altre — Scala armonica — Altre costruzioni lineari — Centro delle medie armoniche — Piano polare di un punto rispetto ad un tetraedro — Tetraedri desmici.*

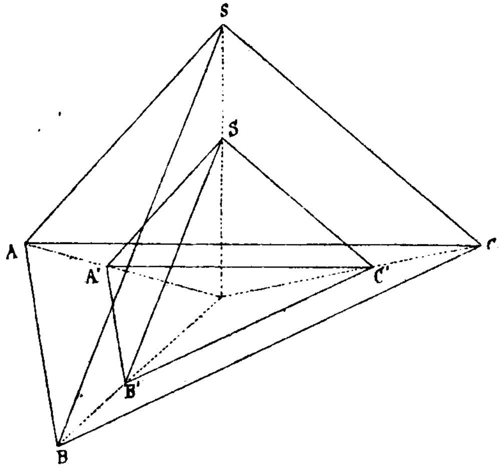
In questo § si troveranno raccolte alcune applicazioni dirette del metodo di Poncelet, insieme ai problemi che ad esse si collegano. Tra le applicazioni dirette, è certamente una delle più notevoli la dimostrazione del teorema dei triangoli omologici, di cui andiamo ad occuparci.

1. *Per due triangoli ABC, $A'B'C'$, complanari e senza elementi comuni, le due proprietà:*

1.a) *le tre coppie di lati omologhi AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$ s' incontrano in tre punti di una retta;*

2.ª) *le tre coppie di vertici omologhi A,A'; B,B'; C,C', son congiunte da tre rette passanti per un punto*; *sono l'una conseguenza dell'altra* (*E.* § 10).

Consideriamo anzitutto il caso di due triangoli *omotetici* ABC, A'B'C', cioè di due triangoli situati in uno stesso piano ρ e aventi le coppie di lati AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A', a due a due paralleli. Pei lati AB, BC, CA si conducano tre piani γ, α, β concorrenti nel punto S, e pei lati A'B', B'C', C'A' si conducano i piani risp. paralleli γ', α', β', concorrenti nel punto S'. Le due rette $SA \equiv \beta\gamma$, $S'A' \equiv \beta'\gamma'$ risultano parallele, ed il loro piano sega ρ lungo la retta AA'.



Analogamente $SB \equiv \gamma\alpha$, $S'B' \equiv \gamma'\alpha'$ son parallele e il loro piano sega ρ lungo la BB'. Ed infine il piano delle rette $SC \equiv \alpha\beta$, $S'C' \equiv \alpha'\beta'$, sega ρ lungo la CC' Sicchè le tre rette AA', BB', CC' passano pel punto $O \equiv \rho . SS'$.

Sieno ora ABC, A'B'C' due triangoli senza elementi comuni, situati nello stesso piano ρ, e riferiti in guisa che le tre coppie di lati omologhi si taglino in tre punti d'una retta u. Proiettando dal punto P esterno a ρ sopra un piano ρ_1, parallelo a Pu, si hanno due triangoli $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ coi lati omologhi paralleli, e quindi le rette A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' passeranno per un punto O_1. Da ciò segue che le rette AA', BB', CC' passeranno pel punto O, proiezione di O_1 su ρ.

Per stabilire la reciproca, si osservi che se due triangoli ABC, A'B'C' di uno stesso piano ρ, son riferiti in guisa che AA', BB', CC' passino pel punto O, ed i lati AB, BC sien rispettivamente paralleli ai lati omologhi $A'B'$, $B'C'$, anche i lati rimanenti CA, $C'A'$ risultano paralleli. Infatti la parallela condotta da A' al lato AC, per la proposizione diretta, deve incontrare $B'C'$ in un punto C_0 tale che CC_0 passi per O; ma giacchè, per ipotesi, C' è comune alle rette $B'C'$ ed OC, il punto C_0 coinciderà con C', e quindi la $A'C'$ risulterà parallela ad AC.

Ciò posto, sieno ABC, $A'B'C'$ due triangoli, senza elementi comuni, appartenenti al piano ρ, e riferiti in guisa che AA', BB', CC' passino per O. Si considerino i punti $L \equiv AB.\, A'B'$, $M \equiv BC.\, B'C'$ e si proiettino i due triangoli da un punto P sopra un piano ρ_1 in guisa che L ed M vadano all' infinito. Poichè le rette A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' congiungenti le coppie di vertici omologhi delle proiezioni $A_1B_1C_1$, $A_1'B_1'C_1'$ passano pel punto O_1, proiezione di O, e i lati A_1B_1, $A_1'B_1'$ e B_1C_1, $B_1'C_1'$ son paralleli, anche C_1A_1, $C_1'A_1'$ risulteranno paralleli, e quindi i lati CA, $C'A'$ dei triangoli oggettivi, s' incontreranno in un punto della retta LM, proiezione della retta all' infinito di ρ_1.

Il teorema dei triangoli omologici è dovuto a Desargues (Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective...., pubblicata a cura di A. Bosse, 1648), la dimostrazione del quale poggia sul teorema di Menelao, che incontreremo più tardi tra le applicazioni metriche del metodo delle proiezioni. La denominazione di *triangoli omologici*, di *centro* ed *asse d' omologia* rispettivamente pel punto in cui concorrono le congiungenti i vertici omologhi, e per la retta in cui s' incontrano le coppie di rette omologhe, sono state introdotte da Poncelet. La denominazione di *triangoli omotetici* e più in generale di *figure omotetiche,* è stata introdotta da Chasles (1827).

Il teorema di Desargues si può anche enunciare sotto la forma seguente: Se i lati di un triangolo ruotano attorno a tre punti fissi di una retta, e due vertici scorrono sopra due rette fisse, anche il terzo vertice scorre sopra una retta passante pel punto comune alle due precedenti. Ora, secondo l' interpretazione di Simson (1724), pare che questo teorema sia racchiuso in due proposizioni che Pappo adduce nelle sue *Collezioni*, come esempio dei porismi di Euclide (contenuti in un' opera che non è a noi pervenuta).

2. *Se due tetraedri senza elementi comuni, son riferiti in guisa che le quattro coppie di vertici omologhi sieno congiunte da rette passanti per un punto, le quattro coppie di facce omologhe si tagliano lungo rette di un piano; e viceversa* (dualmente).

Siano ABCD, A′B′C′D′ i due tetraedri ed O il punto di concorso delle rette AA′, BB′, CC′, DD′.

I triangoli ABC, ABD, BCD risultano prospettivi ai triangoli omologhi A′B′C′, A′B′D′, B′C′D′, e quindi (*E.* § 10) i punti L ≡ AB. A′B′, M ≡ BC. B′C′, N ≡ CA. C′A′ appartengono ad una retta *u*; i punti L, P ≡ AD. A′D′, Q ≡ BD. B′D′, ad un'altra retta *v*; e infine i punti M, Q, S ≡ CD. C′D′, ad una terza retta *w*. Le tre rette *uvw*, determinano il triangolo LMQ e quindi appartengono ad un medesimo piano, il quale contiene la intersezione delle due facce omologhe rimanenti ACD, A′C′D′, perchè queste si segano lungo la retta NP (passante anche per S).

Questo teorema, dovuto a Poncelet, costituisce la base della teoria delle figure omologiche nello spazio, come il teorema analogo di Desargues, dà luogo alle costruzioni fondamentali dell'omologia piana (ved. il Traité des propriétés projectives....).

3. *Se due n-goni piani completi* $A_1A_2 .... A_n$, $A_1' A_2' .... A_n'$, *privi di elementi comuni e appartenenti o no allo stesso piano, son così riferiti che il lato* A_1A_2 *e gli altri 2(n-2) lati del primo che escono dai vertici* A_1A_2, *incontrino i corrispondenti lati del secondo in punti di una retta* u, *lo stesso accade per le altre coppie di lati omologhi e le congiungenti delle coppie di vertici omologhi passano per un punto U.*

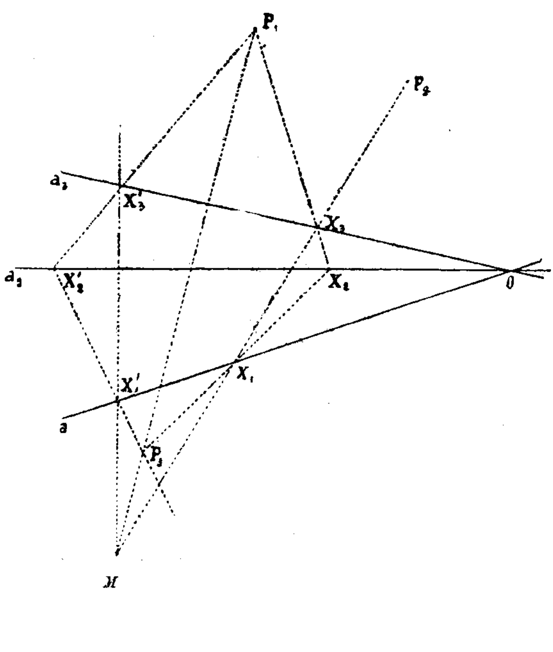
Dall' ipotesi risulta infatti che i triangoli $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$...., $A_1A_2A_n$ sono prospettivi o omologici rispettivamente coi triangoli $A_1'A_2'A_3'$, $A_1'A_2'A_4'$...., $A_1'A_2'A_n'$, e quindi che le rette A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'...., A_nA_n' concorrono in uno stesso punto U.

Se ora consideriamo i triangoli $A_1A_kA_m$, $A_1'A_k'A_m'$ (ove *k*, *m* son due qualunque dei numeri 3, ..., *n*), si vede che essi son riferiti in modo che le tre coppie di vertici omologhi son congiunte da 3 rette per U; dunque le coppie di lati omologhi A_1A_k, $A_1'A_k'$; A_kA_m, $A_k'A_m'$; A_mA_1, $A_m'A_1'$ si taglieranno in punti di una medesima retta, la quale, dovendo contenere i punti $A_1A_k . A_1'A_k'$ e $A_1A_m . A_1'A_m'$, sarà precisamente la *u*. Ne segue che anche i lati A_kA_m, $A_k'A_m'$ si segano sulla *u*, *c. d. d.*

Osservazione. Il lettore potrà verificare che anche le rette che congiungono i punti diagonali omologhi, passano per U, e successivamente che le rette che congiungono punti diagonali omologhi s' incontrano sulla *u*. Ciò si può esprimere dicendo che *i poligoni diagonali dei due n-goni sono omologici rispetto allo stesso asse* u *e allo stesso centro U.*

Si enuncino le proposizioni duali della 3. nello spazio e nel piano (quando si supponga che i due n-goni giacciano in uno stesso piano).

4. *Costruire un triangolo $X_1X_2X_3$ i cui vertici giacciano rispettivamente sopra le tre rette* $a_1\, a_2\, a_3$, *concorrenti in*

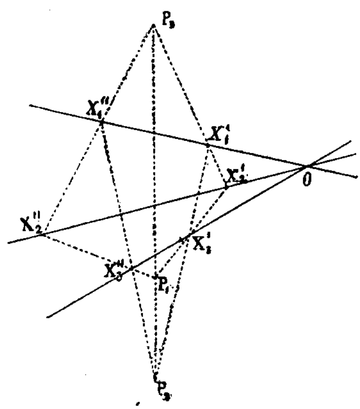


un punto, e i cui lati X_2X_3, X_3X_1, X_1X_2 *passino rispettivamente pei punti dati* $P_1P_2P_3$.

Si prenda un punto arbitrario X_2' su a_2 e lo si proietti da P_1, P_3 nei punti X_3', X_1' di a_3, a_1. La retta $X_1'X_3'$ sega P_1P_3 in un punto M, e la MP_2 taglia le a_1a_3 in due punti X_1X_3, che son proiettati da P_3, P_1 sopra a_2 in un medesimo punto.

Infatti chiamando X_2 il punto $P_1X_3 . a_2$, il triangolo $X_1X_2X_3$ risulta omologico con $X_1'X_2'X_3'$ rispetto al centro O (punto di concorso delle $a_1a_2a_3$), e quindi i lati omologhi s'incontrano in tre punti allineati. Mà due di questi punti sono P_1, ed M, dunque il lato X_1X_2 dovrà passare pel punto P_3 ove la P_1 M è segata dal lato omologo $X_1'X_2'$. Il triangolo $X_1X_2X_3$ soddisfa quindi alle condizioni richieste.

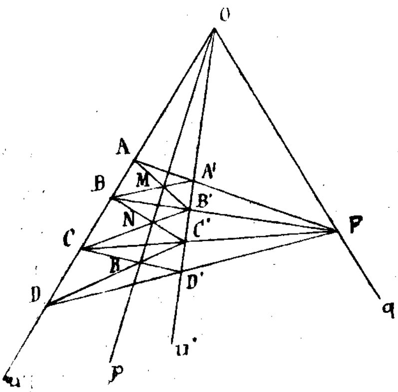
Osservazione. Se i tre punti $P_1P_2P_3$ sono allineati, il problema non ammette in generale nessuna soluzione propriamente detta, a meno che non si voglia riguardare come tale la terna dei punti $X_1X_2X_3$ in cui la retta P_1P_2 sega le rette date $a_1a_2a_3$. Ma se esiste una soluzione propria $X_1'X_2'X_3'$ allora ne esistono infinite. Infatti proiettando da P_1P_3 un punto arbitrario X_2'' di a_2 nei punti $X_3''X_1''$ di a_3a_1, il triangolo $X_1''X_2''X_3''$ risulterà omologico ad $X_1'X_2'X_3'$ col centro di omologia in O e con l'asse di omologia in P_1P_3; dunque la retta $X_1'X_3''$ passerà per P_2.



§ 5. *Avendosi in un piano due rette* u u' *ed un punto P fuori di esse, se da P si conducono alcune traversali a segare le* u u' *rispettivamente nei punti AA', BB', CC', ..., le rette AB', A'B e AC', A'C e BC', B'C ...., si tagliano in punti di una medesima retta passante pel punto* u u'.

Basterà provare, evidentemente, che il punto $M \equiv AB' . A'B$

ed il punto N ≡ BC′. B′C sono allineati col punto O ≡ *uu′*. Ciò si dimostra osservando che i due triangoli AMA′, CNC′ son riferiti in guisa che le tre coppie di lati omologhi AM, CN; A′M, C′N; AA′, CC′, s'incontrano nei punti B′, B, P della retta BP, e quindi le rette AC, NM, A′C′, che congiungono le coppie di vertici omologhi, passano per un medesimo punto, che è precisamente il punto O, comune ad AC ≡ *u*, e ad A′C′ ≡ *u′*.



OSSERVAZIONI. La retta *p*, sulla quale giacciono i punti O, M, N,...., dicesi la *polare del punto P rispetto alle due rette* u, u′.

La polare di un punto R arbitrario della *p*, rispetto alle *u u′*, è la retta *q* ≡ OP. Infatti proiettando C, C′ da R nei punti D, D′ (ved. la figura), la polare di R risulta la retta che congiunge O col punto CC′. DD′. Ora questo punto non può differire da P, perchè la retta DP deve segare *u′* in un punto appartenente alla CR, ossia nel punto D′.

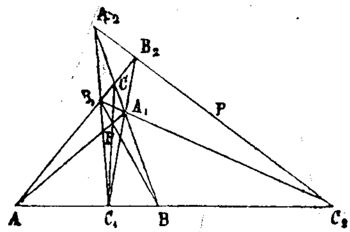
Poichè le due rette *p*, *q* sono in condizione reciproca rispetto alle *u*, *u′*, potremo dire che *ogni punto di una retta* p *passante pel punto O* ≡ uu′, *ha la stessa polare* q *rispetto ad* u, u′, *ed ogni punto di* q *ha per polare* p.

Si consideri dualmente, il *polo di una retta rispetto ad una coppia di punti*. Un'altra dimostrazione della prop. 5, fondata direttamente sul metodo di Poncelet, è quella che abbiamo esposto nel § 1.

La nozione della polare di un punto rispetto ad una coppia di rette, è stata introdotta da PONCELET nella sua *teoria delle polari reciproche* (1822).

6. *Le polari di un punto rispetto alle tre coppie di lati di un triangolo, incontrano i lati opposti in tre punti allineati.*

Sia ABC il triangolo dato e P un punto del suo piano, esterno ai lati del triangolo. Indichiamo con $A_1B_1C_1$ le proiezioni di ABC fatte da P sui lati rispettivamente opposti, e poniamo $A_2 \equiv BC.B_1C_1$, $B_2 \equiv CA.C_1A_1$, $C_2 \equiv AB.A_1B_1$. Le polari di P rispetto alle coppie di lati AB, AC; BA, BC; CA, CB, sono rispettivamente le rette AA_2, BB_2, CC_2; e poichè i due triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ sono omologici rispetto al centro P, i punti A_2, B_2, C_2 d' intersezione delle tre coppie di lati omologhi giaceranno sopra una retta p, c. d. d.



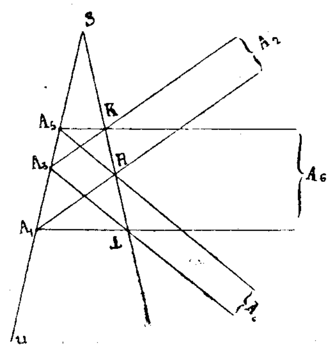
Osservazioni. La retta p si chiama *polare del punto P rispetto al triangolo ABC*. Dualmente si potrà considerare il *polo di una retta* p *rispetto ad un trilatero* abc. Si osservi che la prop. duale della 6., si può dimostrare riducendosi mediante la proiezione centrale al caso in cui p è all' infinito, giacchè allora si vede subito che i poli della p rispetto alle coppie di vertici di *abc*, son proiettati dai vertici opposti secondo le tre mediane del trilatero.

7. *Se un esagono piano semplice $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ ha i vertici di posto dispari sopra una retta* u, *e quelli di posto pari sopra un' altra retta* u', *le tre coppie di lati opposti si segano i punti di una retta* (1).

1.ª *dimostrazione.* Possiamo supporre che la retta u' che contiene i vertici di posto pari, sia all' infinito, perchè a questo caso ci possiamo ridurre con una proiezione. Dicansi H, K i punti d' intersezione delle coppie di lati opposti A_1A_2.

(1) Dato un poligono $A_1A_2 \dots A_{2n}$ di un numero pari di lati, si chiama lato *opposto* al lato $A_i A_{i+1}$ quello determinato dai vertici che s' incontrano nell' n-esimo posto percorrendo il perimetro in un verso o nell' altro a partire da A_{i+1} o da A_i. Così al lato A_1A_2 è opposto il lato $A_{n+1} A_{n+2}$, al lato A_2A_3 il lato $A_{n+2} A_{n+3}$, ecc.

A_4A_5, A_2A_3. A_5A_6, ed L il punto in cui la retta HK incontra il lato A_1A_6. Se riusciremo a provare che la retta A_3L è parallela alla A_5H, vorrà dire che A_3L coincide con A_3A_4 e quindi che i lati A_3A_4, A_6A_1 s' incontrano nel punto L della HK.



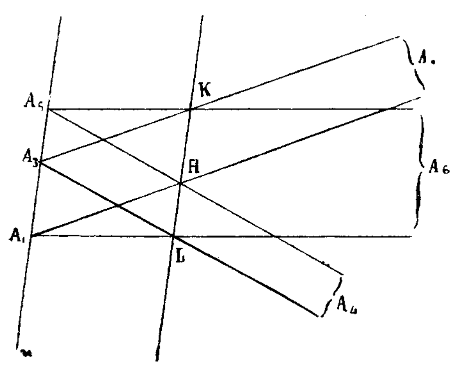
A tal uopo si chiami S il punto u. HK e si applichi il teorema di Talete alle due trasversali SA_1, SH, segate dalle parallele A_3K, A_1H. Verrà:

$$\frac{SA_1}{SA_3} = \frac{SH}{SK}$$

Analogamente dalla considerazione delle due traversali SA_1, SL segate dalle parallele A_5K, A_1L, si trae:

$$\frac{SA_1}{SA_5} = \frac{SL}{SK}$$

Dividendo membro a membro le due uguaglianze ottenute, avremo:



$$\frac{SA_5}{SA_3} = \frac{SH}{SL},$$

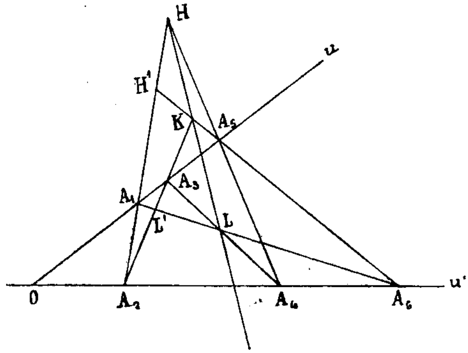
la quale ci dice che le due rette A_5H, A_3L son parallele.

La dimostrazione precedente cade in difetto quando il punto S è all' infinito, ossia quando le rette u, HK son parallele. Ma in tal caso si giunge pure alla conclusione che la retta A_3L è parallela alla A_5H, osservando che per una notissima proprietà dei parallelogrammi:

$$A_1A_5 = KL, \quad A_1A_3 = KH,$$

e quindi: $A_3A_5 = HL$.

2.ª *dimostrazione.* Poniamo $H \equiv A_1A_2 . A_4A_5$, $K \equiv A_2A_3 . A_5A_6$, $L \equiv A_3A_4 . A_6A_1$, $H' \equiv A_1A_2 . A_5A_6$, $L' \equiv A_2A_3 . A_6A_1$, e si osservi che



$$(A_1HA_2H') = (OA_4A_2A_6),$$

giacchè il 1° gruppo di punti è proiezione del 2°, dal punto A_5 (*E.* § 34). Si osservi inoltre che

$$(A_1LL'A_6) = (OA_4A_2A_6),$$

essendo l'un gruppo proiezione dell'altro dal punto A_3.

Dunque:

$$(A_1HA_2H') = (A_1LL'A_6).$$

Da questa relazione, tenendo conto della proprietà proiettiva del birapporto e del fatto che in una forma di prima specie è unico l' elemento che fa un dato birapporto con tre elementi assegnati, si deduce che le rette HL, A_2L', $H'A_6$ concorrono in un punto. Ma siccome le A_2L', $H'A_6$ s' incontrano nel punto K, la HL passerà per questo punto, c. d. d.

Osservazione. Trasformando per dualità il teorema di Pappo, si ottiene la proposizione seguente:

8. *Se un seilatero piano semplice ha i lati di posto dispari passanti per un punto, e i lati di posto pari passanti per un altro punto, le rette che congiungono le tre coppie di vertici opposti concorrono in un punto.*

La prop. 7., conosciuta sotto il nome di teorema di Pappo, trovasi nelle Collezioni matematiche di questo Geometra, tra i lemmi destinati a facilitare la intelligibilità dei porismi di EUCLIDE. La 2^a dimostrazione che noi abbiamo esposta, coincide in sostanza con quella originaria di PAPPO.

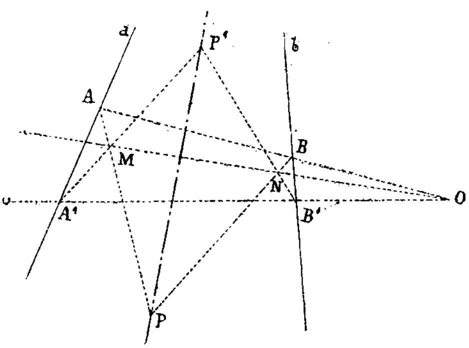
b) *Costruzioni lineari.*

Ci occuperemo ora delle *costruzioni lineari*, cioè di quelle che si possono eseguire nel disegno con l'uso della sola riga.

Le costruzioni lineari permettono di risolvere tutti i *problemi determinati di 1° grado* (cioè quelli la cui risoluzione dipende, in Geometria analitica, da equazioni di 1° grado) sieno essi *grafici* o *metrici*, purchè questi ultimi si pongano in relazione con certi enti metrici (da considerarsi come *dati*), in modo da poterli enunciare col linguaggio proiettivo.

Ricorrendo a teorie che s' incontrano nello sviluppo inoltrato della Geometria proiettiva, si dimostra (*E.* § 72) che tutti i problemi metrici di 1° grado si risolvono con la sola riga, quando sieno assegnate sul piano due coppie di rette parallele e due coppie di rette ortogonali, o qualche figura dalla quale si possano dedurre questi dati con l'uso della sola riga: come p. e. un quadrato, o un cerchio col suo centro, ecc.

Nel gruppo degli esercizii che seguono, sono esposte le *costruzioni lineari fondamentali*, e le risoluzioni di alcuni problemi di 1° grado. Molti altri ne risolveremo in seguito come applicazioni di teorie successive.

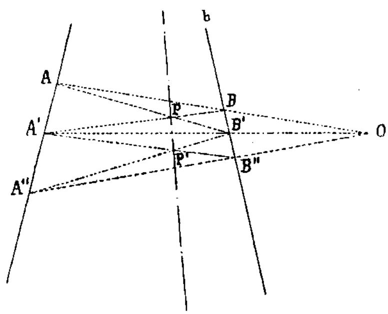


9. *Dati nel foglio un punto* P *e due rette* a, b *che si taglino fuori del foglio, congiungere* P *col punto* ab, *facendo uso della sola riga.*

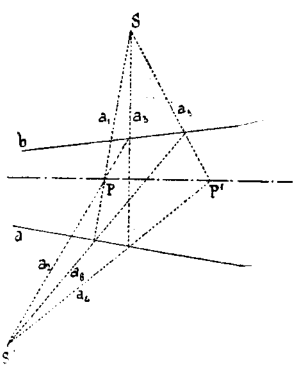
1.ª *soluzione.* Si consideri un triangolo APB coi vertici A, B risp. su a, b, e, condotte per un punto arbitrario O della AB, la trasversale u, che seghi AP, BP in M, N, e la v, che seghi a, b in A′, B′, s'intersechino in P′ le rette A′M, B′N (ved. la fig. nella pagina precedente).

I due triangoli APB, A′P′B′ risultano omologici rispetto all'asse u, e quindi la retta PP′, che congiunge due vertici omologhi, passa pel punto ab, comune alle rette a, b, che congiungono le altre due coppie di vertici omologhi.

2.ª *soluzione.* Si tirino per P due trasversali arbitrarie, che seghino a, b risp. nei punti AA′, BB′. Il punto Q ≡ AB . A′B′ giacerà sulla polare di P rispetto alle a, b (§ 2, prop. 5), e quindi la polare di Q passerà per P e pel punto ab; ossia sarà la retta richiesta. Ora tirando da Q la trasversale A″B″, il punto P′ ≡ A′B″ . A″B′, apparterrà alla polare di Q; dunque la retta PP′ passerà per ab.



3.ª *soluzione.* Dal punto S diverso da P ed esterno alle a, b, si tirino tre rette $a_1\, a_3\, a_5$ delle quali la 1ª passi per P; si proietti il punto $a_3\, b$ da P, mediante la retta a_2, e il punto $a_5 b$ da $a_1 a$, mediante la retta a_6. Pongasi inoltre S′ ≡ $a_2 a_6$, e si proietti il punto $a_3 a$ da S′, mediante la retta a_4. Dico che il punto P′ ≡ $a_4 a_5$, congiunto con P, dà la retta cercata.



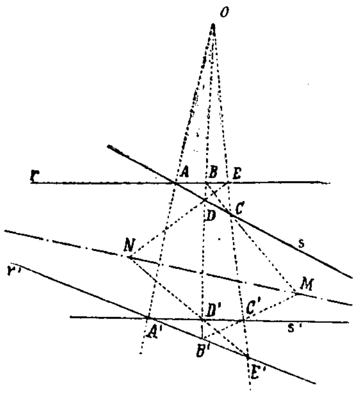
Infatti i lati di posto dispari del seilatero $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ passano per S, i lati di posto pari per S′, e inoltre due vertici opposti, $a_2 a_3$, $a_5 a_6$, giacciono su b, altri due, $a_3\, a_4$, $a_6\, a_1$, su a, e uno dei due rimanenti, cioè $a_1 a_2$, coincide con P. Dunque il sesto vertice $P' \equiv a_4 a_5$ sarà congiunto a P mediante una retta passante pel punto ab, comune alle rette che congiungono le altre due coppie di vertici opposti; e ciò in virtù del teorema duale a quello di Pappo (§ 2, prop. 8).

Osservazione. In particolare si ha il modo di risolvere *con la sola riga* il problema di *condurre da un punto la parallela a due rette date.*

La 2.ª risoluzione del problema 9 trovasi nella *Freye Perspective* di Lambert (1774).

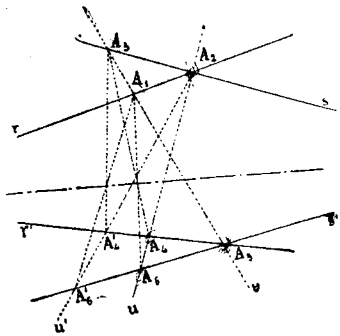
10. *Date due coppie di rette* rr′, ss′, *che si taglino fuori del foglio, congiungere il punto* rr′ *col punto* ss′.

1.ª *soluzione.* Sulla retta che congiunge il punto $A \equiv rs$, col punto $A' \equiv r's'$, si scelga il punto O, e per esso si conducano due trasversali: l'una seghi r, r' in B, B′ ed s, s' in D, D′; l'altra seghi r, r' in E, E′ ed s, s' in C, C′. I due triangoli ABC, A′B′C′ risultano omologici rispetto al centro O, e poichè i lati AB, A′B′ si tagliano nel punto rr' ed i lati AC, A′C′ si tagliano in ss', il punto $M \equiv BC . B'C'$ apparterrà alla retta cercata. Analogamente dalla considerazione dei due triangoli AED, A′E′D′ si rileva che il punto $N \equiv DE . D'E'$ appartiene alla retta $rr' . ss'$.



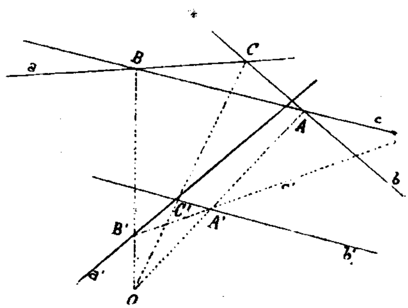
2.ª *soluzione.* Si costruisca un esagono piano semplice i cui vertici di posto pari giacciano sopra una retta e i cui vertici di posto dispari giacciano sopra un'altra retta; e soddisfacente inoltre alla condizione che rr', ss' sieno due coppie di lati opposti. Il punto comune alla coppia rimanente, variando l'esagono, descriverà la retta $rr' . ss'$, in virtù del teorema di Pappo (§ 2, prop. 7).

Per realizzare questa costruzione, poniamo $A_2 \equiv rs$, $A_5 \equiv r's'$ e per A_2, A_5 conduciamo risp. le trasversali u, v, la prima delle quali seghi r', s' nei punti A_4, A_6, e la seconda seghi r, s nei punti A_1, A_3. L'esagono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ soddisfarà alle condizioni volute, e quindi il punto $A_3A_4 \,.\, A_6A_1$, variando una delle trasversali, p. e. la u, descriverà la retta cercata.



11. *Trovare il punto comune ad una retta data nel foglio e ad una retta data fuori del foglio.*

La retta data nel foglio sia c, e la retta data fuori del foglio sia individuata dai punti aa', bb'. Poniamo $A \equiv bc$, $B \equiv ca$, $C \equiv ab$, $C' \equiv a'b'$, e, scelto un punto arbitrario O sulla CC', si proietti da O il punto A nel punto A' di b' e il punto B nel punto B' di a'. La retta $c' \equiv A'B'$ passa pel punto cercato, come subito si desume dalla considerazione dei triangoli omologici ABC, A'B'C'.

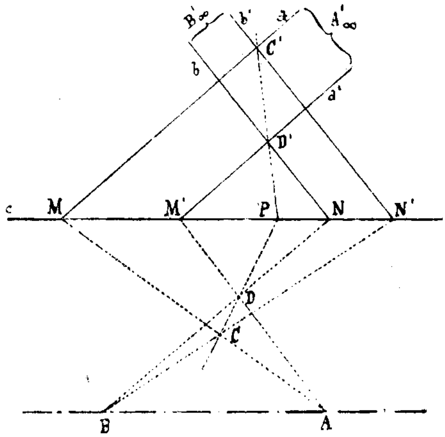


Osservazione. Il lettore potrà cercare un'altra soluzione di questo problema, imitando la 2ª soluzione del precedente.

12. *Dati nel foglio un parallelogramma* aa'bb' *ed una retta* c, *per un punto* A *condurre la parallela a* c *facendo uso della sola riga.*

Questo problema si potrebbe risolvere profittando del precedente e del problema 9, ma preferiamo di esporre la seguente elegante soluzione:

Siano MM'NN'P i punti ove la c sega le $aa'bb'$ e la diagonale C′D′ del parallelogramma dato. Tiriamo le AM, AM′ e seghiamo queste rette in C, D con una retta arbitraria uscente da P. Le due rette ND, N′C si segano in un punto B, che congiunto con A, dà la parallela richiesta. Infatti i due



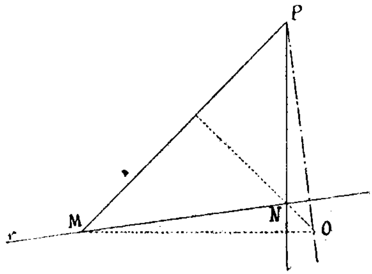
quadrangoli completi $A'_\infty\, B'_\infty\, C'\, D'$ (ove $A'_\infty \equiv aa'$, $B'_\infty \equiv bb'$), ABCD, son riferiti in guisa che 5 coppie di lati omologhi si tagliano in punti della *c*, e quindi (*E.* § 11) anche i due lati rimanenti $A'_\infty\, B'_\infty$, AB si tagliano in un punto di *c*. Ma $A'_\infty\, B'^\infty$ taglia *c* nel suo punto all'infinito, dunque AB risulta parallela a *c*.

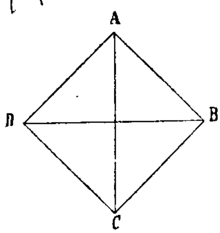
Questa risoluzione del problema 12 è dovuta a Lambert (1774); la risoluzione, alla quale abbiamo accennato, e che poggia sui problemi 9 e 11, è dovuta a Poncelet (1822).

Osservazione. Mediante il probl. 12, si risolve immediatamente la questione di *trasportare con la sola riga un segmento* AB *parallelamente a se stesso*, od anche di farlo scorrere lungo la propria retta, in modo che venga ad avere un estremo in un punto dato.

13. *Dati nel foglio un quadrato* ABCD, *un punto* P *ed una retta* r, *condurre da* P *la perpendicolare ad* r, *facendo uso della sola riga.* Da P si tirino le parallele PM, PN al

lato AD e alla diagonale AC del quadrato (§ 2, 12) e da M, N le parallele rispettivamente alle rette DB, AB. Il





punto O, comune a queste parallele, risulta l'ortocentro (punto delle altezze) del triangolo MNP, e quindi la retta PO è perpendicolare ad r.

Se P appartenesse ad r, alla r si sostituirebbe una sua parallela.

Questo problema è stato risoluto da Steiner.

c) *Gruppi armonici.* — *Altre costruzioni lineari.* — Dati sopra una retta u tre punti A B C, se in un piano per u si costruisce un quadrangolo completo di cui due lati opposti passino per A, altri due per B, e uno dei due rimanenti passi per C, il sesto lato segnerà sulla u un punto D, che, come segue subito dal teorema dei quadrangoli omologici, non varia effettuando la costruzione in un altro qualunque dei modi possibili.

Il gruppo ABCD, seguendo lo Staudt, dicesi allora *armonico* (*E.* § 12).

Da questa *definizione grafica* si deduce che la coppia CD separa la coppia AB (*E.* § 12), e che se è armonico ABCD lo è pure CDAB; ossia che se CD separa armonicamente AB, questa coppia separa armonicamente quella (*E.* § 13).

Il concetto di gruppo armonico di punti si trasporta per dualità nello spazio e si ha il concetto di *gruppo armonico di 4 piani di un fascio.* Ogni gruppo armonico di punti dato sulla u, vien proiettato da un asse sghembo, secondo un gruppo armonico di piani, e dualmente (*E.* § 14).

Si dice infine che un *gruppo di 4 raggi di un fascio è armonico,* quando da una retta generica pel centro del fascio vien proiettato secondo un gruppo armonico di piani, e (in conseguenza) quando da una retta generica del suo piano vien segato secondo un gruppo armonico di punti (*E.* § 14).

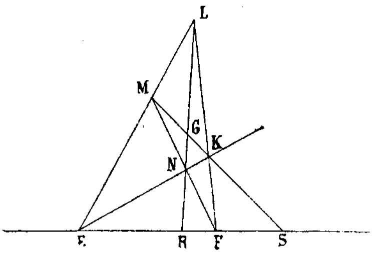
Ora tutte queste proprietà dei gruppi armonici, si possono stabilire anche prendendo le mosse dalla seguente *definizione metrica.* Si dice che un gruppo ABCD costituito da 4 elementi di una forma di 1ª specie, è armonico, quando il suo *birapporto* (*E.* § 34) vale -1, cioè, in simboli, quando:

$$(1) \qquad (ABCD) = -1.$$

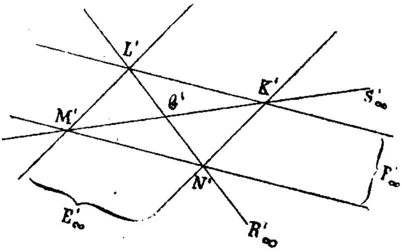
Per mostrare con un esempio come si possa costruire la teoria dei gruppi armonici, partendo da questa definizione, stabiliremo la proprietà armonica del quadrangolo piano completo.

Perciò cominciamo dal ricordare che il birapporto gode della proprietà proiettiva (*E.* § 34), e quindi che un gruppo armonico si proietta sempre in un gruppo armonico. In particolare, se ABCD son quattro punti di una retta, e il punto D, mediante una proiezione, va all' infinito, dalla (1) si rileva che il coniugato armonico del punto D diviene medio tra A e B.

Ciò posto, consideriamo un quadrangolo completo KLMN, di cui sieno EFG i punti diagonali, e diciamo R, S le intersezioni dei lati opposti uscenti da G, con la retta EF. Mediante una proiezione trasformiamo il quadrangolo in modo che EF vada all' infinito, e indichiamo con le lettere K'L'M'.... le proiezioni dei punti KLM....



Poichè il punto G' è il centro del parallelogramma K'L'M'N', il gruppo $M'K'G'S'_\infty$ sarà armonico, e quindi lo sarà pure il gruppo MKGS primitivo. Proiettando questo gruppo da L sulla retta EF, si deduce che è armonico anche il gruppo EFRS, e si ritrova così quella proprietà che Staudt assume come definizione del gruppo armonico.

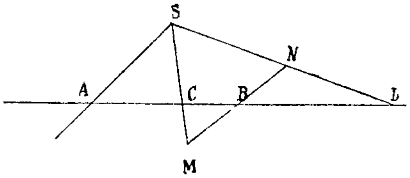


La proprietà proiettiva dei gruppi armonici di punti, e la proprietà armonica del quadrangolo completo, trovansi nelle *Collezioni* di Pappo; ma l'origine della divisione armonica si perde nella più remota antichità. Ne parla anche Apollonio di Perga nel suo libro sulle sezioni coniche (anno 247 avanti Cristo).

Ph. de la Hire pone questa nozione a fondamento della teoria delle sezioni coniche (Sectiones conicae...., 1685), e Staudt la pone a fondamento della teoria delle corrispondenze proiettive (Geo. der Lage, 1847).

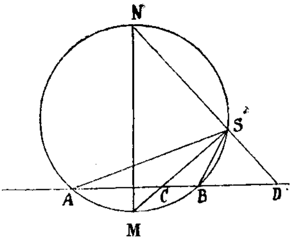
14. Oltre alla costruzione lineare mediante un quadrangolo completo, vi sono anche *altre costruzioni dei gruppi armonici*, che però non si eseguiscono con la sola riga. Ci limiteremo ad accennare a due di esse.

Vogliasi il coniugato armonico di C rispetto alla coppia AB. Conducasi per A una retta e su questa si assuma un punto arbitrario S; si conduca poi da B la parallela alla AS, e dopo aver segato questa parallela con la retta CS nel punto M, si costruisca il punto N simmetrico di M rispetto a B: la retta SN sega la AB nel punto D cercato.



Ciò si prova ricorrendo alla similitudine dei triangoli, o, più semplicemente, osservando che il gruppo ABCD è proiezione da S del gruppo armonico LBMN, ove L è il punto improprio della MN.

Un' altra costruzione è la seguente: Si conduca un cerchio arbitrario per A, B, e il diametro MN di questo cerchio, perpendicolare ad AB; si congiunga con C uno degli estremi M di questo diametro, e si segni l' ulteriore intersezione S della MC col cerchio. La retta che congiunge S con l' altro estremo N del diametro MN, taglia AB nel punto D cercato.



Infatti le due rette SC, SD essendo le bisettrici degli angoli formati dalle SA, SB, il gruppo dei 4 raggi S (ABCD) è armonico (*E.* § 17, 2° teorema).

15. Tra le proprietà metriche dei gruppi armonici son notevoli: il *teorema della media geometrica* e il *teorema della media armonica.*

Ecco in che cosa consiste il primo di questi teoremi. Sia ABCD un gruppo armonico di punti, ed M il punto medio del segmento finito AB. Dalla relazione:

$$(1) \qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD},$$

che caratterizza l' armonicità del gruppo, riferendo tutti i segmenti all' origine M (come si fa in Geometria analitica) si trae quest' altra relazione:

$$\frac{MC - MA}{MC - MB} = \frac{MA - MD}{MD - MB}.$$

Ora si osservi che MB = — MA, e quindi che:

$$\frac{MC - MA}{MC + MA} = \frac{MA - MD}{MA + MD}.$$

Applicando a questa uguaglianza un teorema ben noto sulle proporzioni, verrà:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{MA}{MD}, \text{ ossia: } MA^2 = MC \,.\, MD,$$

la quale si può enunciare dicendo che *in un gruppo armonico di punti, la metà della distanza tra i punti di una coppia, è media proporzionale tra le distanze dei punti dell'altra coppia dal punto medio della prima.*

Passiamo ad esporre il teorema della media armonica. Nella (1) riferiamo tutti i segmenti all'origine A. Avremo allora:

$$\frac{AC}{AC - AB} = \frac{AD}{AB - AD},$$

la quale si può scrivere sotto la forma:

$$(2) \qquad \frac{AB - AD}{AC - AB} = \frac{AD}{AC},$$

oppure, liberando dai fratti eppoi dividendo i due membri per AB . AC . AD, sotto quest'altra forma:

$$(3) \qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

Questa relazione mostra che $\frac{1}{AB}$ è medio aritmetico tra $\frac{1}{AC}$ ed $\frac{1}{AD}$: perciò si dice che *AB è medio armonico tra AC ed AD* [1].

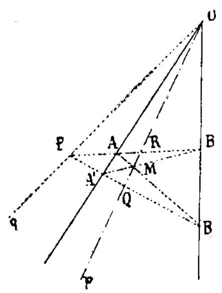
[1] Più numeri si dicono in *progressione armonica*, quando i loro inversi sono in progressione aritmetica (MAC-LAURIN).

Le proporzioni della forma (2) vennero considerate spesso dai Geometri greci, e se ne trovano tracce anche in PITAGORA (6 secoli circa avanti Cristo). Furon dapprima chiamate *proporzioni opposte*, eppoi da ARCHITA e da IPPARCO, furon chiamate *armoniche*. La (2) fu posta sotto la forma (3) da MAC-LAURIN (De linearum geometricarum...., 1748).

La divisione armonica s' incontra anche in Fisica. Così tre corde che sieno identiche nella sostanza, nella grossezza e nella tensione, ed abbiamo lunghezze proporzionali ai numeri $1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ (dei quali il 2° è medio armonico tra gli altri due), eccitate dànno l'accordo armonico perfetto do, mi, sol. — In uno specchio sferico di piccola curvatura, il vertice e il centro dello specchio son separati armonicamente dall' oggetto e dalla sua immagine. Perciò la formola che lega le distanze dell' oggetto e dell' immagine dallo specchio, è della forma (3). Un' osservazione analoga si può fare per le lenti sferiche sottilissime.

16. *Dati in un piano un punto* P *e due rette* a, b, *il luogo dei coniugati armonici di* P *rispetto alle intersezioni delle* a, b *con le trasversali uscenti da* P, *è la polare di questo punto rispetto alle due rette.*

Infatti se AB, A'B' son due coppie di punti delle a, b, allineate con P, la polare p di P è la retta che congiunge

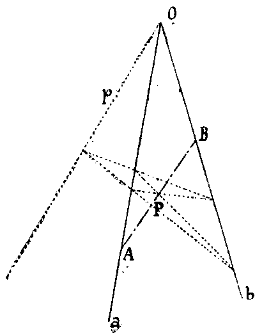


O $\equiv ab$, col punto M $\equiv$ AB$'$. A$'$B (§ 2, n° 5).

Ora, a causa del quadrangolo completo OAMB, il gruppo A'B'PQ, ove si è posto Q $\equiv$ p. A'B', è armonico; e quindi lo è pure il gruppo dei raggi $a\,b\,q\,p$, che proiettano quei punti da O. Ne deriva che ogni retta AB uscente da P, sega la retta p nel punto R coniugato armonico di P rispetto alla coppia AB.

In particolare, per risolvere il problema di *condurre per* P *una trasversale che seghi le* a, b *nei punti* A, B, *in guisa che* P *dimezzi il segmento* AB, basterà condurre per P la parallela alla polare p del punto P rispetto alla coppia $a\,b$ (ved. la fig. nella pagina seguente).

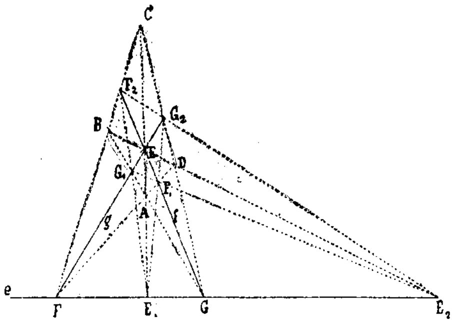
Osservazione. Se nello spazio consideriamo due piani $\omega\,\omega'$ ed un punto P esterno ad essi, il luogo dei coniugati armonici di P rispetto alle intersezioni dei piani dati con le trasversali uscenti da P, è il piano π coniugato armonico del piano $P\,.\,\omega\,\omega'$ rispetto alla coppia ω, ω'. Questo piano π dicesi il *piano polare del punto* P *rispetto ai piani dati* ω, ω'.



17. *Costruire un quadrangolo piano completo, di cui è noto un vertice* A *ed il triangolo diagonale* EFG.

Si trovino le polari di A rispetto alle tre coppie di lati del triangolo EFG, ripetendo la costruzione del n° 6 (§ 2), e sieno EE_2, FF_2, GG_2 queste polari, E_1 F_1 G_1 le proiezioni dei vertici E F G da A sui lati opposti *e f g*.

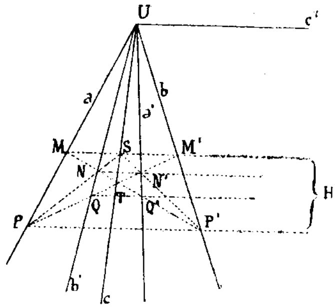
Poichè i tre punti E_2 F_2 G_2 sono allineati (n° 6), dalla considerazione del quadrangolo completo EE_2FF_2, di cui GBG_2 è il triangolo diagonale, si rileva che GB ha per coniugata armonica rispetto ad *e f* la retta GG_2 (*E.* § 14); ma d'altronde quest' ultima, che è polare di A rispetto ad *e f*, è pure coniugata armonica di GA rispetto alla coppia suddetta (n° precedente), dunque la GA passa per B. Analogamente ponendo $C \equiv FF_2\,.\,GG_2$, $D \equiv GG_2\,.\,EE_2$, si prova che la EA passa per C, e la FA per D. Il quadrangolo ABCD soddisfa perciò alle condizioni richieste.



18. *Se* a, b, c *son tre elementi di una forma di 1ª specie,*

e si costruiscono i gruppi armonici bcaa', cabb', abcc', *risultano armonici anche i gruppi* b'c'a'a, c'a'b'b, a'b'c'c.

1ª *dimostrazione (grafica).* Riferiamoci ad un fascio di raggi U. Per costruire il raggio a', si prenda su a un punto arbitrario M; da questo punto si tirino due trasversali a segare c, b rispettivamente nei punti ST, M'P', e si proietti da U il punto N' ≡ SP'. TM'. Per costruire b' si prolunghi M'T fino ad incontrare a in P, e si proietti da U il punto N ≡ SP. MT; infine per costruire c' si proietti da U il punto H ≡ MM'. PP'.

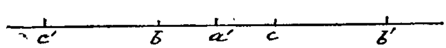


I due triangoli MNP, M'N'P' sono omologici rispetto all' asse c; perciò la retta NN' passa pel punto H, comune alle MM', PP'. Anche i triangoli NPQ, N'P'Q', ove Q ≡ b'.M'T e Q' ≡ a'. MT, sono omologici rispetto all' asse c; e quindi la retta QQ' passa pel punto H comune alle NN', PP'.

In conclusione il quadrilatero determinato dalle rette NQ', N'Q, NN', QQ', ha due vertici opposti, N', Q', su a', altri due, N, Q, su b', e degli altri due, l' uno T su c, e l' altro H su c'; dunque il gruppo $a'b'c'c$ è armonico (*E.* § 14).

Permutando circolarmente le lettere a b c, si deduce che sono armonici anche $b'c'a'a$, $c'a'b'b$.

2ª *dimostrazione (metrica).* Con una proiezione o sezione ci possiamo sempre ridurre al caso in cui a, b, c son 3



punti di una retta, ed a è all' infinito. Allora il punto a' sarà medio tra b, c, il punto b' sarà il simmetrico di b rispetto a c, e c' il simmetrico di c rispetto a b.

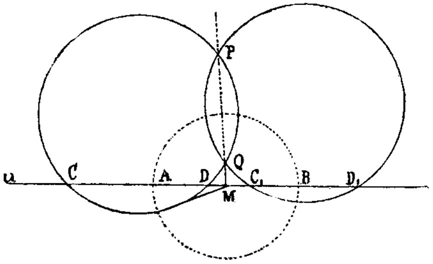
Il gruppo $b'c'a'a$ è armonico, perchè a' risulta medio tra $b'c'$; il gruppo $c'a'b'b$ è pure armonico, perchè il punto b

divide internamente il segmento finito $c'a'$ nel rapporto $2:1$ ed il punto b' divide esternamente il segmento $c'a'$ nello stesso rapporto; ed infine il gruppo $a'b'c'c$ è armonico per una ragione analoga.

19. *Date due coppie di elementi di una forma di 1ª specie, trovare una coppia che le separi entrambe armonicamente.*

Due coppie di elementi di una forma di 1ª specie ammettono o no una coppia che le separi entrambe armonicamente, secondo che non si separano o si separano: nel 1° caso la coppia è unica (*E.* §§ 20, 38).

La dimostrazione di questo teorema ed insieme la costruzione della coppia separante armonicamente due coppie che non si separano, si può ottenere per via metrica nel modo che segue.



Riferiamoci ad una punteggiata u e consideriamo su essa due coppie CD, C_1D_1. Se esiste una coppia AB armonica con CD, C_1D_1, dicendo M il punto medio del segmento finito AB, pel teorema della media geometrica, dovremo avere:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD = MC_1 \cdot MD_1.$$

Per costruire il punto M soddisfacente alla relazione:

$$MC \cdot MD = MC_1 \cdot MD_1,$$

prendiamo un punto P, fuori di u, e conduciamo i due cerchii PCD, PC_1D_1. Essi si taglieranno fuori di P in un altro punto Q (eventualmente coincidente con P), e la retta PQ segherà u nel punto M richiesto, perchè, come segue da notissimi teoremi di Geometria elementare:

$$MP \cdot MQ = MC \cdot MD = MC_1 \cdot MD_1.$$

Ora se le due coppie CD e C_1D_1 non si separano, i punti PQ giacciono da una stessa banda di u, mentre se si separono, giacciono da bande opposte. Nel 1° caso M sarà esterno ai due cerchi, e condotta da M la tangente MT ad uno di essi, avremo:

$$\overline{MT}^2 = MC \cdot MD,$$

e quindi i due punti A, B cercati, saranno distanti da M di un segmento uguale ad MT. Evidentemente in tal caso la coppia AB sarà l'unica coppia armonica con CD, C_1D_1.

Nel 2° caso il punto M risulterà interno ai due cerchi e non esisterà nessuna coppia armonica con CD, C_1D_1.

20. *Dati sopra una retta due segmenti, trovare il luogo di un punto dal quale essi son veduti secondo angoli uguali o supplementari.*

Cominciamo ad osservare che se gli estremi dei due segmenti dati non si separano, essi si possono in un sol modo distribuire in due coppie che non si separino, in guisa che i punti di una coppia non sieno estremi di uno stesso segmento; mentre se gli estremi si separano, ossia se i due segmenti hanno una parte comune (senza però che uno contenga l'altro) quella distribuzione in due coppie, si può fare in due modi diversi.

Ciò posto, nel caso in cui i due segmenti sono l'uno esterno all'altro, non possono esistere punti da cui i due segmenti stessi sieno veduti sotto angoli supplementari perchè l'angolo che proietta da un punto uno dei due segmenti, è contenuto nel supplemento dell'angolo che dallo stesso punto proietta l'altro. Dunque in tal caso ci sarà da ricercare se esistono punti da cui i due segmenti AB, CD sieno proiettati secondo angoli uguali.

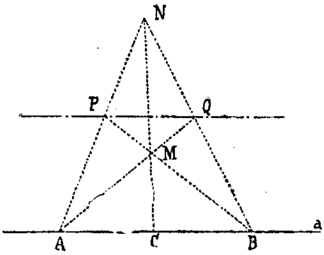
Se P è un tal punto, e se supponiamo, ad es., che il segmento finito AD contenga nel suo interno BC, gli angoli $\widehat{APD}$, $\widehat{BPC}$ avranno la stessa bisettrice; e così i loro angoli supplementari. Queste bisettrici taglieranno la retta dei due segmenti, nella coppia HK armonica con AD e BC; e quindi il punto P apparterrà alla sfera di diametro HK. Viceversa è chiaro che da ogni punto di questa sfera i due segmenti son veduti sotto angoli uguali.

Nel caso in cui uno dei segmenti dati contiene l'altro, non possono esistere punti da cui i due segmenti sieno veduti sotto angoli uguali, perchè l'angolo che proietta il segmento maggiore, contiene l'angolo che proietta il segmento minore. In tal caso si vede, come prima, che il luogo di un punto da cui i due segmenti sieno veduti sotto angoli supplementari, è una sfera che ha per diametro la coppia armonica con le due coppie non separantisi, ciascuna delle quali è formata prendendo un estremo da ognuno dei due segmenti dati.

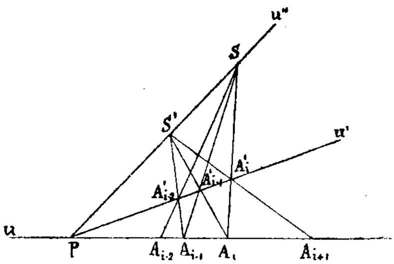
E infine se i due segmenti hanno una parte comune, vi è una sfera luogo di un punto da cui i due segmenti son veduti sotto angoli uguali, la quale ha per diametro la coppia armonica con due coppie non separantisi, ciascuna delle quali è formata prendendo un estremo da ognuno dei dati segmenti; e vi è una sfera luogo di un punto dal quale i due segmenti son veduti sotto angoli supplementari, la quale ha per diametro la coppia armonica con le altre due coppie non separantisi, formate in modo analogo alle precedenti.

21. *Dati in un piano un punto, una retta e su questa un segmento col suo punto medio, condurre dal punto la parallela alla retta, facendo uso della sola riga.*

Sia P il punto dato, *a* la retta data, AB il segmento dato su questa retta e C il relativo punto medio. Si tirino le rette PA, PB, e da C una retta arbitraria che incontri le due precedenti nei punti N, M: le rette AM, BN s' incontrano in un punto Q, che congiunto con P dà la parallela richiesta. Infatti due lati opposti del quadrangolo completo MNPQ passano per A, altri due per B, ed un quinto per C; dunque il lato rimanente PQ passerà pel coniugato armonico di C rispetto ad AB, ossia pel punto all' infinito di *a*.



22. *Scala armonica. Costruzione e proprietà.* Si dice che più punti di una retta, considerati in un determinato ordine, formano una *scala armonica* rispetto ad *un' origine* P, quando la coppia costituita dal punto P e da uno qualunque, A, di quei punti, è separata armonicamente dal punto precedente e dal punto seguente ad A. Una scala armonica è completamente definita dandone l' origine P ed una coppia di punti consecutivi $A_{i-1}A_i$. Per costruirla si opera nel modo seguente:



Si assumano due rette u' u'' uscenti da P e complanari con la $u \equiv A_{i-1}A_i$, e si proietti un punto arbitrario A'_{i-1} della u' dal punto A_{i-1} nel punto S della u'' e dal punto A_i nel punto S' della u''. Chiamando con A'_i la proiezione di A_i fatta da S sulla u'', la retta $S'A'_i$ taglierà la u nel punto A_{i+1} successivo ad A_i nella scala armonica inviduata da P e dalla coppia $A_{i-1}A_i$. Infatti, a causa del quadrangolo completo $SS'A'_{i-1}A_i'$, il punto A_{i+1} è il coniugato armonico di A_{i-1} rispetto alla coppia PA_i.

Analogamente chiamando A'_{i-2} la proiezione di A_{i-1} fatta da S' sulla u', la retta SA'_{i-2} taglierà u nel punto A_{i-2} precedente ad A_{i-1} nella scala armonica data.

Per prolungare indefinitamente la scala in ambedue i sensi, basta osservare che, qualunque sia k, *le rette* SA_{k-1}, $S'A_k$ *che proiettano due punti successivi* A_{k-1}, A_k *della scala armonica, s' incontrano in un punto* A'_{k-1} *di* u'.

I punti A, considerati nell' ordine in cui s' incontrano nella scala armonica, si succedono in un determinato verso sopra la u. Infatti i punti $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ si susseguono nel senso individuato dalla terna $PA_{i-1}A_i$, perchè la coppia PA_i separa la $A_{i-1} A_{i+1}$.

Ricordando che sopra una retta il coniugato armonico del punto all' infinito, rispetto ad una coppia di punti, è il punto medio di questa coppia, si vede che *quando l' origine P è all' infinito, due punti consecutivi della scala hanno una distanza costante.*

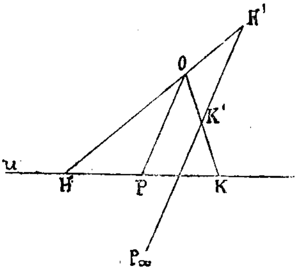
La scala armonica gode della proprietà proiettiva, appunto perchè con una proiezione si passa sempre da un gruppo armonico ad un gruppo armonico.

Profittando di queste due ultime proprietà, dimostriamo che *percorrendo la scala armonica in un determinato verso, a partire da uno de' suoi punti, s' incontra sempre un punto della scala che dista dall' origine meno di un segmento prefissato, comunque piccolo.*

Sia P l' origine della scala, A_1 il punto da cui si parte, ed $A_2A_3A_4\ldots$ i punti successivi ad A_1 nel verso fissato. Proiettiamo la punteggiata u, a cui appartengono i punti A, sopra una retta u', in guisa che il punto P', proiezione di P, vada all' infinito; e diciamo $A'_1 A'_2\ldots$ le proiezioni dei punti $A_1A_2\ldots$

Sieno inoltre H, K i due punti di u distanti da P del segmento prefissato ε, ed H', K' le loro proiezioni sulla u'. Poichè il punto P, interno al segmento finito HK, si proietta nel punto all' infinito di u', il segmento finito HK si proietterà nel segmento infinito H'K'.

Ciò posto, se il punto A_1 è interno al segmento finito HK, il teorema è senz' altro verificato. Se A_1 è esterno a questo segmento, il punto A'_1 sarà interno al segmento finito H'K'; ma ad ogni modo, pel postulato di ARCHIMEDE, esisterà sempre un punto A'_n, della successione $A'_1 A'_2 A'_3 \ldots$, esterno al segmento finito H'K'.



La proiezione A_n di A'_n, sarà interna al segmento finito HK, e quindi A_n disterà da P meno del segmento prefissato ε.

Dal teorema della media armonica si deduce che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè più punti formino una scala armonica rispetto ad una data origine, è che le distanze dei punti stessi da quest' origine formino una progressione armonica.*

Infatti se $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ son 3 punti consecutivi della scala, essendo armonico il gruppo $PA_i A_{i-1} A_{i+1}$, avremo:

$$\frac{2}{PA_i} = \frac{1}{PA_{i-1}} + \frac{1}{PA_{i+1}},$$

ossia:

$$\div \frac{1}{PA_{i-1}} \cdot \frac{1}{PA_i} \cdot \frac{1}{PA_{i+1}};$$

e viceversa se questa condizione è soddisfatta, i quattro punti $PA_i A_{i-1} A_{i+1}$ formano un gruppo armonico.

23. *Dato un segmento rettilineo $A_0 A_1$ ed una retta ad esso parallela, dividere il segmento in* n *parti eguali, facendo uso della sola riga.*

Si costruisca la scala armonica che ha per origine A_0 e nella quale al punto improprio A_∞ succede il punto A_1; e siano $A_{1/2}\, A_{1/3} \ldots$ i punti successivi ad A_1. Poichè $\frac{1}{A_0 A_\infty} = 0$, avremo la progressione:

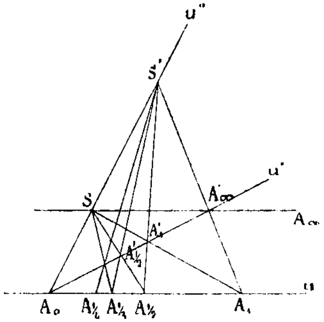
$$\div\ 0 \cdot \frac{1}{A_0 A_1} \cdot \frac{1}{A_0 A_{1/2}} \cdot \frac{1}{A_0 A_{1/3}} \cdots \frac{1}{A_0 A_{1/n}} \cdots,$$

la quale ha per ragione $\frac{1}{A_0A_1}$. Da ciò si trae subito che

$$\frac{1}{A_0A_{1/n}} = \frac{n}{A_0A_1},$$

ossia:

$$A_0A_{1/n} = \frac{A_0A_1}{n}.$$

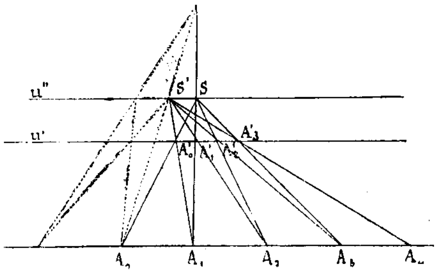


Giacchè si conosce una retta uscente dal punto A_∞ (che è la data parallela al segmento rettilineo A_0A_1) la determinazione del punto $A_{1/n}$ si fa con la sola riga particolarizzando, come mostra la figura, la costruzione della scala armonica, esposta al n° precedente.

La teoria della scala armonica trovasi sviluppata in PONCELET (1824); ma della soluzione del problema 23., si erano già occupati LAMBERT (1774) e BRIANCHON (1818).

24. *Dato un segmento rettilineo A_0A_1 ed una sua parallela, n-plicare il segmento facendo uso della sola riga.*

Nella scala armonica che ha per origine il punto improprio P_∞ della retta A_0A_1, e in cui al punto A_0 succede A_1, la distanza tra due punti consecutivi è costante ed è uguale ad A_0A_1 (n° 22). Sicchè indicando con A_2, $A_3, \ldots$, $A_n, \ldots$ i punti successivi ad A_1,



il segmento A_0A_2 sarà doppio di A_0A_1; A_0A_3 sarà triplo di $A_0A_1 \ldots$, A_0A_n sarà n-plo di A_0A_1.

Essendo nota una parallela u'' alla retta A_0A_1, se ne può costruire una seconda u', facendo uso della sola riga (§ 2. n° 9. Oss.); ed allora la costruzione della scala armonica individuata dall' origine P_∞ e dalla coppia A_0A_1, si ottiene con la sola riga particolarizzando la costruzione del n° 22, come lo mostra la figura.

Osservazione. Quando sia *dato sul foglio del disegno un parallelogramma*, noi sappiamo condurre (da un punto arbitrario del piano) una parallela ad una retta data, facendo uso della sola riga (§ 2, n° 12), e quindi sappiamo risolvere con la sola riga i problemi di n-plicare o di dividere in n-parti eguali un segmento dato; e, più in generale, *sappiamo risolvere il problema di determinare, con la sola riga, un segmento che abbia un dato rapporto razionale con un segmento assegnato.*

25. *Centro delle medie armoniche. Sua costruzione lineare.*

La relazione della media armonica, già incontrata al n° 15 di questo §, può venire estesa nel modo seguente.

Dati $n+1$ punti propri $O, A_1, \ldots, A_n$, di una retta u, cerchiamo un punto X di u, tale che sia soddisfatta la relazione:

$$(1) \qquad \frac{n}{OX} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots + \frac{1}{OA_n},$$

ove ciascun segmento si considera in grandezza e verso. Poichè questa relazione è di 1° grado rispetto ad OX, esisterà un sol punto X soddisfacente ad essa: lo chiameremo *centro delle medie armoniche* (o *centro armonico del 1° ordine*) del gruppo $A_1 \ldots A_n$ rispetto al *polo* O (o del polo O rispetto al gruppo $A_1 \ldots A_n$). Nel caso $n=2$, il centro delle medie armoniche non è altro che il coniugato armonico di O rispetto alla coppia A_1A_2.

La proprietà proiettiva di un gruppo armonico si estende al gruppo $OXA_1 \ldots A_n$, e si ha il teorema:

Il centro delle medie armoniche gode della proprietà proiettiva.

Per dimostrarlo scriviamo la (1) sotto la forma:

$$\left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_1}\right) + \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{OX} - \frac{1}{OA_n}\right) = 0,$$

ossia:

$$\frac{OA_1 - OX}{OA_1 \, . \, OX} + \frac{OA_2 - OX}{OA_2 \, . \, OX} + \ldots = 0,$$

donde:

$$\frac{XA_1}{OA_1} + \frac{XA_2}{OA_2} + \ldots + \frac{XA_n}{OA_n} = 0.$$

Poichè uno dei termini del 1° membro si annulla solo quando X coincide col relativo punto A, se i punti A non coincidono tutti in un solo, sarà lecito supporre ad es. che non sia nullo $\frac{XA_n}{OA_n}$. Dividendo allora ambo i membri dell' ultima uguaglianza qer questo rapporto, verrà:

$$(2) \qquad (XOA_1A_n) + (XOA_2A_n) + \ldots + (XOA_{n-1}A_n) + 1 = 0,$$

la quale, per la proprietà proiettiva del birapporto (*E.* § 34), dimostra la proprietà proiettiva del punto X soddisfacente alla (1).

Dalla (2) si rileva che quando, mediante una proiezione, il punto O diviene improprio, il centro X soddisfa alla uguaglianza:

$$A_1X + A_2X + \ldots + A_nX = 0.$$

Prendendo come origine dei segmenti il punto arbitrario P, avremo:

$$(PX - PA_1) + (PX - PA_2) + \ldots + (PX - PA_n) = 0,$$

donde:

$$PX = \frac{PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n}{n},$$

la quale mostra che il punto X è il *centro delle medie distanze* dei punti $A_1A_2 \ldots A_n$.

La (2) può servire come definizione del centro delle medie armoniche, anche quando è improprio qualcuno dei punti A.

Vediamo ora come si può eseguire la costruzione del centro delle medie armoniche, facendo uso della sola riga.

Se X è il centro delle medie distanze dei punti $A_1 \ldots A_n$, cioè il centro armonico del gruppo $A_1 \ldots A_n$ rispetto al punto improprio O della retta u, a cui appartengono i punti A; ed Y il centro delle medie distanze dei punti $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$, prendendo Y come origine dei segmenti, verrà:

$$YX = \frac{YA_1 + \ldots + YA_{n-1} + YA_n}{n},$$

e giacchè:

$$YA_1 + \ldots + YA_{n-1} = 0,$$

avremo:

$$YX = \frac{YA_n}{n}.$$

Sicchè dividendo il segmento YA_n in n parti uguali, il primo punto di divisione che s' incontra andando da Y verso A_n nel senso del segmento finito YA_n, è il punto X cercato.

Tenendo presente il n° 23, le operazioni che conducono al punto X si possono esprimere sotto forma grafica, nel modo che segue: Si costruisca la scala armonica che ha per origine Y e nella quale al punto O succede A_n: il punto X è l'$(n-1)$-esimo elemento della scala, successivo ad A_n.

Poichè la relazione che passa tra il punto X ed i punti $OA_1 \ldots A_n$, è proiettiva, anche quando il punto O è al finito, varrà la costruzione enunciata sotto forma grafica. In tal modo si riduce la costruzione del centro armonico di n punti, a quella del centro armonico di $n-1$ punti; e così proseguendo si arriva alla nota costruzione lineare del centro armonico di 2 punti.

Così per esempio, il centro X delle medie armoniche del gruppo $A_1 A_2 A_3$ rispetto al punto O, si ottiene considerando il coniugato armonico A_{12} del punto O rispetto alla coppia $A_1 A_2$, poi il coniugato armonico A'_{12} del punto O rispetto alla coppia $A_{12} A_3$, e infine il coniugato armonico X di A_3 rispetto alla coppia $A_{12} A'_{12}$.

Osservazione. Nel definire il centro armonico di un gruppo $A_1 \ldots A_n$ rispetto al punto O, non si esclude che alcuni dei punti A possano coincidere tra loro. Le costruzioni esposte varranno dunque anche nel caso in cui i punti A non sono tutti distinti.

Così se vogliamo il centro armonico X del punto O rispetto al gruppo $A_1A_2A_3$, ove $A_1 \equiv A_2$, seguiremo la regola già esposta, con l'avvertenza che il punto A_{12}, coniugato armonico di O rispetto alla coppia A_1A_2, coincide in tal caso col punto A_1.

Alcune proprietà del punto X definito dalla (1) furono osservate da Maclaurin (1748); ma la teoria fu sviluppata da Poncelet (1824), il quale introdusse la denominazione di *centro delle medie armoniche*.

Lo studio più generale dei centri armonici d'ordine r, come preparazione alla teoria della polarità rispetto ad una curva algebrica d'ordine qualunque, può vedersi nel Cremona (Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane, 1862).

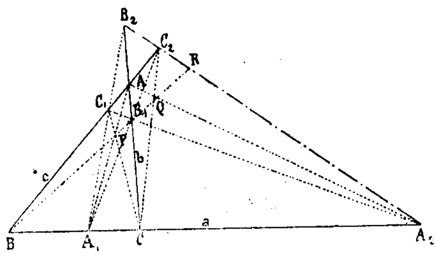
26. *Il luogo dei centri delle medie armoniche di un punto P rispetto alle intersezioni dei lati* a, b, c *di un triangolo con le traversali uscenti da P, è la polare del punto rispetto al triangolo.* (§ 2, nº 6).

Proviamo anzitutto che il luogo dei centri armonici, di cui si parla nell'enunciato, è una retta. A tal uopo indichiamo con $P_aP_bP_c$ le intersezioni dei lati del triangolo con una trasversale uscente da P; e si ricordi (nº 25) che per costruire il centro armonico di P rispetto alla terna $P_aP_bP_c$, bisogna costruire dapprima il coniugato armonico P_{ab} di P rispetto alla coppia P_aP_b, poi il coniugato armonico P'_{ab} di P rispetto alla coppia $P_{ab}P_c$, e infine il coniugato armonico X del punto P_c rispetto alla coppia $P_{ab}P'_{ab}$.

Variando la trasversale, il punto P_{ab} varia descrivendo la polare p_{ab} del punto P rispetto alle rette a, b (§ 2, nº 16), ed il punto P'_{ab} la polare p'_{ab} del punto P rispetto alle rette p_{ab}, c. Ora si osservi che la retta p'_{ab} passa pel punto $p_{ab}c$ e quindi che sopra una trasversale qualsiasi il coniugato armonico della traccia di c rispetto alle tracce di $p_{ab}\,p'_{ab}$, sta sulla retta x coniugata armonica di c rispetto alla coppia $p_{ab}\,p'_{ab}$. Ne segue che il luogo del punto X è la retta x.

Stabilito ciò, basterà evidentemente provare che sulle rette proiettanti dal punto P i vertici $A \equiv bc$, $B \equiv ca$, $C \equiv ab$, del trilatero, la polare di P rispetto ad abc, sega i centri armonici del punto P rispetto alle terne AAA_1, BBB_1, CCC_1; ove $A_1B_1C_1$ son le proiezioni di P, dai vertici ABC, sui lati opposti.

Dimostriamo la cosa per la trasversale BP. Osserviamo anzitutto che il coniugato armonico del punto P rispetto alla coppia BB_1, appartiene tanto alla polare di P rispetto ad ab, quanto alla polare di P rispetto a cb; e quindi che le due polari suddette AA_2, CC_2, si segano in un punto Q della BP.



Ora dal fatto che è armonico il gruppo $PQBB_1$, e che lo è pure il gruppo B_1RBQ, perchè è proiezione da C_2 del gruppo armonico A_1A_2BC (ved. la figura), segue subito (n° 25, Oss.) che R è il centro delle medie armoniche del gruppo BBB_1 rispetto al punto P, c. d. d.

Osservazione. Dalla proposizione dimostrata si trae che per *costruire il centro delle medie armoniche di un punto O rispetto ad una terna $A_1A_2A_3$*, si possono condurre per $A_1A_2A_3$ tre rette complanari, non concorrenti in un punto, e segare la retta A_1A_2 con la polare di O rispetto al trilatero formato dalle tre rette.

27. *Se si considerano i poli di una retta rispetto alle coppie di vertici di un quadrangolo piano completo, le coppie di punti che si ottengono sui lati opposti, son con-*

giunte da 3 rette concorrenti in un punto, che è il polo della retta data rispetto a ciascuna di queste ultime coppie.

Sia $A_1A_2A_3A_4$ il dato quadrangolo piano, p la retta data e P_{ik} $(i, k=1, 2, 3, 4)$ l'intersezione di questa retta col lato A_iA_k del quadrangolo. Consideriamo i poli della retta p rispetto alle coppie di vertici del quadrangolo, cioè i punti P'_{ik} coniugati armonici dei punti P_{ik} rispetto alle coppie A_iA_k (§ 2, n.° 5).

Vogliamo dimostrare, anzitutto, che le rette $P'_{12}P'_{34}$, $P'_{13}P'_{24}$, $P'_{14}P'_{23}$ concorrono in un medesimo punto P.

Infatti, il gruppo armonico $A_1A_2P_{12}P'_{12}$ vien proiettato dal punto P_{23}, sulla retta A_1A_3 in un gruppo armonico di punti. Ma A_1 si proietta in A_1, A_2 in A_3 e P_{12} in P_{13}; dunque P'_{12} si proietterà in P'_{13}. Da ciò si trae che la retta $P'_{12}P'_{13}$ passa pel punto P_{23}.

In modo analogo si prova che la retta $P'_{ik}P'_{il}$, ove $i\,k\,l$ son tre qualunque dei quattro numeri 1234, incontra la retta A_kA_l nel punto P_{kl}.

Ne segue che i due triangoli $P'_{12}P'_{13}P'_{14}$, $P'_{34}P'_{24}P'_{23}$ son omologici rispetto all'asse p, e quindi che le rette $P'_{12}P'_{34}$, $P'_{13}P'_{24}$, $P'_{14}P'_{23}$ concorrono in un punto P.

Ora si osservi che le rette $P'_{12}P'_{42}$, $P'_{31}P'_{34}$ s'incontrano nel punto P_{14}, e quindi che la polare u del punto P_{14} rispetto alle rette $P'_{12}P'_{13}$, $P'_{42}P'_{43}$, passa pel punto $P'_{12}P'_{34} \cdot P'_{13}P'_{24} \equiv P$. Ma le rette $P'_{12}P'_{13}$, $P'_{42}P'_{43}$ s'incontrano nel punto P_{23} di p, dunque le quattro rette p, u, $P'_{12}P'_{13}$, $P'_{42}P'_{43}$, formano, nell'ordine in cui sono scritte, un gruppo armonico. Segando con la retta $P'_{12}P'_{34}$ questo gruppo armonico di raggi, vediamo che la retta p e il punto P separano armonicamente la coppia $P'_{12}P'_{34}$: il che dimostra che P è il polo della retta p rispetto alla coppia $P'_{12}P'_{34}$.

In modo analogo si vede che il P è pure polo della p rispetto alle coppie $P'_{13}P'_{24}$, $P'_{14}P'_{23}$.

Osservazione. Il teorema precedente si può stabilire anche col metodo della proiezione centrale, perchè quando la retta p è all'infinito, la proposizione segue facilmente per via elementare ricordando che la retta che congiunge i punti medî di due lati d'un triangolo, è parallela al terzo lato ed uguale alla sua metà.

28. *I piani polari di un punto rispetto alle sei coppie di facce d'un tetraedro, segano gli spigoli opposti in sei punti di un piano.*

Sia $A_1A_2A_3A_4$ il tetraedro e P il punto dato. Indichiamo con $A'_1A'_2A'_3A'_4$ le proiezioni di P dai vertici $A_1A_2A_3A_4$ sulle facce opposte del tetraedro, e con P_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ la proiezione di P sullo spigolo A_iA_k, dallo spigolo opposto.

Il tetraedro $A'_1A'_2A'_3A'_4$ è omologico con $A_1A_2A_3A_4$ rispetto al centro P: dunque le coppie di spigoli omologhi e di facce omologhe s'incontreranno in punti e rette di uno stesso piano π (§ 2, n° 2). Detta $i\,k\,h\,m$ una permutazione qualunque degli indici 1234, porremo:

$$a_i \equiv A_kA_hA_m \,.\, A'_kA'_hA'_m,\quad P'_{ik} \equiv A_iA_k \,.\, A'_iA'_k.$$

Le rette a_i ed i punti P'_{ik} giaceranno sul piano π.

Ciò posto, osserviamo che il piano polare del punto P rispetto alle facce uscenti dallo spigolo A_hA_m passa pel coniugato armonico di P_{ik} rispetto alla coppia A_iA_k (§ 2, n° 16, Oss.). Per stabilire il teorema enunciato, basterà quindi dimostrare che il coniugato armonico di P_{ik} rispetto ad A_iA_k è P'_{ik}.

Sul piano A_iA_kP si ha la retta A_iP_{hm}, che contiene il punto A'_k, la retta A_kP_{hm}, che contiene il punto A'_i, e la retta $P_{ik}P_{hm}$ che, essendo comune al piano suddetto e al piano A_hA_mP, passa pel punto P. Se si ricorda che le rette $A_iA'_i$, $A_kA'_k$ passano per P, si vedrà che il quadrangolo completo $A'_iA'_kPP_{hm}$ ha due lati opposti, $P_{hm}A'_k$ e PA'_i passanti per A_i, altri due lati opposti $P_{hm}A'_i$, PA'_k, passanti per A_k, e dei due rimanenti, l'uno, PP_{hm}, per P_{ik}, e l'altro,

$A'_iA'_k$, per P'_{ik}. Dunque il gruppo $A_iA_kP_{ik}P'_{ik}$ è armonico, c. d. d.

Osservazione 1ª. Il piano π chiamasi *piano polare del punto P rispetto al tetraedro.*

Osservazione 2ª. Si noti che i 6 punti $P'_{12}P'_{34}P'_{13}P'_{24}P'_{14}P'_{23}$ sono le tre coppie di vertici opposti del quadrilatero $a_1a_2a_3a_4$. Precisamente: al vertice P'_{12} sta opposto P'_{34}, al vertice P'_{13}, il vertice P'_{24}, ecc.

Osservazione 3ª. Proiettando la figura dei punti e delle rette considerate nella dimostrazione precedente, da un punto O del piano π sopra un piano ω, e chiamando $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\ldots$ le proiezioni dei punti $A_1A_2\ldots$ e p la traccia di π sul piano ω, avremo che il punto $\overline{P}_{ik}$ sarà il polo di p rispetto alla coppia dei vertici $\overline{A}_i\,\overline{A}_k$ del quadrangolo $\overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\,\overline{A}_4$. Applicando allora la proposizione dimostrata al nº precedente, vediamo che il punto $\overline{P}$ e la retta p separano armonicamente la coppia $\overline{P}_{ik}\,\overline{P}_{hm}$, e quindi anche nella figura oggettiva il punto P e il piano π separeranno armonicamente la coppia $P_{ik}P_{hm}$. Si conclude pertanto che:

Il piano polare di un punto P rispetto ad un tetraedro, contiene i coniugati armonici di P rispetto alle tre coppie di punti degli spigoli opposti, allineate con P.

29. *Tetraedri desmici — Costruzione e proprietà.* Due tetraedri diconsi *desmici* allorquando ogni coppia di spigoli opposti dell' uno, si appoggia ad una coppia di spigoli opposti dell' altro.

Vediamo anzitutto come dato un punto A'_1 esterno alle facce di un tetraedro T di vertici $A_1A_2A_3A_4$, si possa costruire un tetraedro desmico con T ed avente un vertice in A'_1.

Perciò chiamiamo $b_2b_3b_4$ le tre rette uscenti da A'_1 e appoggiate rispettivamente alle coppie di spigoli opposti A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_2A_4; A_1A_4, A_2A_3, del tetraedro T. Il piano b_ib_k (ove ikm è una permutazione qualunque dei 3 indici 234) sega il tetraedro secondo un quadrilatero completo; e le coppie di vertici opposti di questo quadrilatero, son segnate dalle coppie di spigoli opposti di T. Dunque due delle tre diagonali coincidono con b_i e b_k e la terza b'_m si appoggia ai due spigoli opposti A_1A_m, A_iA_k.

Poichè in un quadrilatero completo due vertici opposti son coniugati armonici rispetto ai due punti diagonali che appartengono alla loro congiungente (*E.* § 14), il punto diagonale $A'_1 \equiv b_i b_k$ e il punto diagonale $b_i\, b'_m$ separeranno armonicamente i due vertici opposti appartenenti a b_i, ossia i due punti in cui b_i incontra gli spigoli A_1A_i, A_mA_k.

Da ciò si trae che se indichiamo con A'_i il coniugato armonico del punto A'_1 rispetto alla coppia dei punti $A_1A_i . b_i$, $A_mA_k . b_i$ $(i = 2, 3, 4)$, ossia il punto comune alla retta b_i e al piano polare di A'_1 rispetto al tetraedro T (n° preced., Oss. 3ª), la retta b'_m passerà pei punti $A'_iA'_k$, sicchè i lati del triangolo $A'_2A'_3A'_4$ saranno le rette $b'_2b'_3b'_4$.

Il tetraedro T′ di vertici $A'_1A'_2A'_3A'_4$ sarà dunque desmico con T, perchè i due spigoli opposti $A'_1A'_i$ $(\equiv b_i)$, $A'_kA'_m$ $(\equiv b'_i)$ di T′, si appoggiano ai due spigoli opposti A_1A_i, A_kA_m di T.

La costruzione precedente ci mostra che, dato un punto, vi è un solo tetraedro T′ avente un vertice in quel punto e desmico con un dato tetraedro T, ed anzi la faccia di T′ opposta al punto dato, è il piano polare di questo rispetto a T. Ne segue che il piano polare del vertice A'_i rispetto al tetraedro T è il piano $A'_iA'_kA'_m$. Siccome i due tetraedri T e T′ sono in condizione simmetrica, potremo dire che:

Due tetraedri desmici sono mutuamente autopolari, cioè ogni vertice dell' uno ha per piano polare rispetto all' altro tetraedro, la faccia ad esso opposta nel primo.

Poichè la retta A_iA_k si appoggia alla $A'_iA'_k$ in un punto della retta a_1 comune ai piani $A_2A_3A_4$, $A'_2A'_3A'_4$, i due triangoli $A_2A_3A_4$, $A'_2A'_3A'_4$ saranno prospettivi, e quindi le rette $A_2A'_2$, $A_3A'_3$, $A_4A'_4$ concorreranno in un punto O.

Siccome inoltre la retta A_1A_i si appoggia alla $A'_1A'_i$, le due rette $A_1A'_1$, $A_iA'_i$ saranno pure incidenti, e quindi la $A_1A'_1$ passerà pel punto O suddetto.

Dunque i due tetraedri $A_1A_2A_3A_4$, $A'_1A'_2A'_3A'_4$ sono omologici, ossia la retta a_1 e le tre rette

$$a_i \equiv A_lA_kA_m \,.\, A'_lA'_kA'_m$$

appartengono ad un medesimo piano ω (§ 2, n° 2).

Ora il vertice A_1, che si è preso come omologo di A'_1, è uno qualunque dei 4 vertici di T, e quindi i due tetraedri si potranno riferire omologicamente in 4 modi diversi, secondo che si fa corrispondere al vertice *fissato* A_1' di T′, uno qualunque dei 4 vertici di T. Però una volta fissato l'omologo di A'_1 e chiamatolo A_1, restano determinati i vertici che si debbono assumere come omologhi di $A'_2A'_3A'_4$, ossia che si debbon chiamare risp. $A_2A_3A_4$. E precisamente si dovrà chiamare A_i l'ulteriore vertice giacente sullo spigolo di T, che esce da A_1, e si appoggia alle rette $A'_1A'_i$, $A'_kA'_m$.

I 4 piani d'omologia non possono concorrere in un punto. Infatti nei 4 riferimenti omologici dei tetraedri T e T′, a due spigoli opposti u, v di T, corrispondono quei due spigoli opposti u', v' di T′, che si appoggiano ad u, v, e che, ora ed in seguito, diremo brevemente *coniugati* ad u, v. Sicchè in due dei 4 riferimenti, allo spigolo u corrisponderà u' e a v lo spigolo v', e negli altri due si corrisponderanno u, v' e v, u'; ossia due piani d'omologia passeranno per la congiungente dei punti uu', vv', e gli altri due per la retta $uv' \,.\, vu'$.

Da ciò segue che la retta comune a due piani d'omologia, è sghemba con la retta comune agli altri due piani; e quindi che i 4 piani d'omologia formano un tetraedro T″, di cui due qualunque spigoli opposti si appoggiano a due spigoli opposti di T e a due spigoli opposti di T′. Dunque T″ sarà desmico con T e T′.

Dualmente i 4 centri d'omologia formeranno un tetraedro T''_0 desmico con T e T′.

Ora è facile vedere che non può esistere più di un tetraedro desmico con T e T', e quindi che i due tetraedri T'' e T''_0 debbono coincidere.

Invero due spigoli opposti u, v di T appoggiandosi ai loro coniugati u', v' di T', determinano un tetraedro di cui sono uv, $u'v'$ due coppie di spigoli opposti, e i due spigoli opposti rimanenti $u''v''$, costituiscono l'*unica* coppia di rette appoggiate simultaneamente alle $u, v,\ u', v'$. Dunque $u''v''$ saranno spigoli (opposti) di ogni tetraedro desmico con T e T'.

Considerando le altre due coppie di spigoli opposti di T e le coppie coniugate in T', avremo due altre coppie analoghe ad $u''v''$: in tutto dunque tre coppie di rette sghembe, le quali non possono costituire più di un tetraedro.

Si può verificare direttamente che T'' e T''_0 coincidono, dimostrando di più che ad ogni vertice del tetraedro T'', considerato come centro d'omologia in uno dei 4 riferimenti fra T e T', viene associata in tal modo la faccia opposta come piano d'omologia relativo.

Dicansi infatti u, v due spigoli opposti di T ed u', v' gli spigoli di T', omologhi nel riferimento che ha per centro uno dei vertici, O, del tetraedro T''. Poichè i due piani uu', vv' passano per O, la loro retta comune, che congiunge i punti uv' e vu', passerà pure per O; mentre il piano d'omologia relativo dovrà passare per la retta $uu' . vv'$.

Dunque questo piano contiene lo spigolo di T'' opposto ad uno qualunque di quelli che escono da O; cioè coincide colla faccia opposta ad O nel tetraedro T''.

Ricordando l'unicità del tetraedro desmico con due altri, si vede che i 4 riferimenti omologici che intercedono tra T'' e T (o T'), dànno luogo al tetraedro T' (o T). Si conclude pertanto che:

Dati due tetraedri desmici esiste sempre un sol tetraedro desmico con entrambi, e due qualunque dei tre tetraedri sono omologici in 4 modi diversi, coi centri e i piani d'omologia nei vertici e nelle facce opposte del tetraedro rimanente.

Gli spigoli dei tre tetraedri concorrono a 3 a 3 in 12 punti e le facce s' incontrano a 3 a 3 in 16 rette.

La considerazione di due tetraedri omologici in 4 modi diversi, trovasi in CREMONA (1877); ma il primo studio completo su tali tetraedri è dovuto a C. STÈPHANOS (1879), il quale li chiamò *desmici*, perchè tre tetraedri come quelli che abbiamo denotato con T, T' T'' appartengono ad un fascio (in greco δεσμη) di superficie del 4° ordine. Furono poi studiati da SCHRÖTER, HESS e da altri.

§. 3. *Prime applicazioni del metodo delle proiezioni alle proprietà metrico-proiettive delle figure.*

SOMMARIO: *Criteri per decidere a priori sul carattere proiettivo delle espressioni metriche — Legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive —* a) *Relazioni proiettive tra i segmenti di una medesima forma di 1ª specie — Rapporti semplici e bisapporti —* b) *Relazioni proiettive tra i segmenti di più forme di 1ª specie — Rapporto plurisezionale — Teorema di Menelao — Teorema di Simson — Teorema di Ceva — Duali dei teoremi di Menelào e di Ceva — Una relazione metrico-proiettiva da cui si deduce il teorema dei triangoli omologici.*

1. Per dimostrare una relazione metrica tra le parti di una data figura, non si può senz' altro ricorrere al metodo di Poncelet, perchè quel legame non si conserva in generale passando dalla figura data ad una sua proiezione.

Conviene dunque che noi stabiliamo qualche norma per riconoscere a priori se una relazione metrica ha carattere proiettivo; e di ciò ci occuperemo prima di passare alle singole applicazioni.

In seguito, per brevità, chiameremo sovente *misura di un segmento* AB, appartenente ad una forma di 1ª specie su cui è fissato un verso positivo, il rapporto tra AB e un' unità di misura (preso positivamente o negativamente secondo che il segmento *finito* AB è percorso nel verso positivo o negativo), se la data forma è una punteggiata;

oppure il seno dell' angolo che il senso positivo (o la pagina positiva) di A fa col senso positivo (o con la pagina positiva) di B, nel verso positivo delle rotazioni, se la data forma è un fascio di raggi (o di piani).

Si può allora dire che un' *espressione* formata con le misure di più segmenti omogenei (cioè tutti rettilinei, o di fasci di raggi o di fasci di piani), è *metrico-proiettiva*, quando è uguale all' espressione formata allo stesso modo con le misure dei segmenti (omogenei), che si ottengono dai precedenti con una qualunque proiezione o sezione.

Questa definizione richiederebbe qualche parola di spiegazione nel caso in cui alcuni elementi, estremi dei segmenti considerati, fossero o divenissero improprii; ma di questo parleremo più tardi.

Ciò premesso, passiamo ad occuparci di un criterio assai generale per decidere sul carattere proiettivo di un' espressione metrica.

Sia f un' espressione frazionaria il cui numeratore e il cui denominatore risultino entrambi dal prodotto delle misure di più segmenti rettilinei, che abbiano per estremi certi punti proprii A, B, C,... dello spazio; e supponiamo che f soddisfi a queste due condizioni:

1ª) il numeratore e il denominatore contengano le stesse A B C..., ripetute lo stesso numero di volte;

2ª) ogni retta che contenga più segmenti del numeratore ne contenga altrettanti del denominatore; e viceversa.

Allora il valore assoluto ed il segno della f, riescono indipendenti dalla scelta dell' unità di misura lineare e dei versi positivi delle rette che contengono i segmenti dati.

Prendiamo un punto (proprio) O dello spazio, non appartenente alla figura F costituita dai punti A, B, C... e dalle rette sulle quali sono contate le distanze che compongono la frazione f; e tiriamo i raggi che proiettano da O i punti A, B, C... Considereremo dapprima i segmenti e gli angoli facendo astrazione dai versi positivi, e indicheremo con h l'altezza del triangolo OAB, rispetto alla base AB. Confrontando due espressioni ben note dell' area OAB, avremo:

$$AB = \frac{OA \,.\, OB \,.\, sen\, \widehat{AOB}}{h};$$

e analoghe espressioni verranno per gli altri segmenti di F. Sostituendo questi valori di AB,..., nella f, per la 1ª) ipotesi si elimineranno le lunghezze OA, OB,..., e per la 2ª) si elimineranno le altezze h, h',...; sicchè in valore assoluto la f verrà uguale all' espressione f_0 formata allo stesso modo con le *misure* degli angoli che proiettano da O i segmenti di F.

Ma la uguaglianza tra f ed f_0 ha luogo anche nel segno. Ciò si verifica facilmente allorchè sui raggi OA, OB,... si scelgono come versi positivi quelli che vanno da O ai punti A, B,... di F, e come versi positivi sui fasci della stella O, quelli che si ottengono per proiezione dai versi positivi fissati sulle rette di F. Siccome il segno di f_0 è indipendente dalla scelta dei versi positivi suddetti, si conclude che f ed f_0 hanno sempre lo stesso segno.

Prendiamo ora sulle rette OA, OB, OC,... rispettivamente i punti arbitrarii A_1, B_1, C_1,... e congiungiamoli a due a due con la stessa regola con cui son congiunti i punti corrispondenti di F. Avremo così una figura F_1 e la frazione f_1, analoga ad f e relativa alla nuova figura F_1, risulterà uguale ad f_0 e quindi anche ad f.

In particolare la proprietà sussiste se F_1 è una figura piana; sicchè rimane stabilito che la frazione f non muta di valore, passando dalla F ad una sua proiezione piana.

Ma è pur facile provare che il valore di f non s' altera passando dalla F ad una sua proiezione sopra una retta u', fatta da un asse u sghembo con ogni retta di F. Basta perciò osservare che la proiezione da u sopra u', si può eseguire proiettando prima la F da un punto O di u sopra un piano passante per u' e segante l'asse u in un punto proprio Q, eppoi proiettando la figura piana che così si ottiene, dal punto Q sopra (un piano per u', ossia sopra) la retta u'.

Infine noteremo che l'espressione f è uguale a quella che si ottiene proiettando dall'asse u i punti A, B, C,... di F, mediante i piani α, β, γ,..., e sostituendo al posto delle misure dei segmenti AB,..., che figurano nella f, le misure dei diedri $\alpha\beta$,...

Ciò si deduce osservando che l'espressione relativa al fascio di piani è uguale a quella che si ottiene segando α, β, γ,... con un piano perpendicolare ad u (perchè gli angoli $\alpha\beta$,... hanno la stessa misura dei loro rettilinei), e che quest'ultima è uguale a quella che si ottiene segando il fascio di raggi con una retta del suo piano.

Potremo dunque enunciare la proposizione seguente:

Se $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$ *son due gruppi di* n *segmenti rettilinei dello spazio e se ogni punto che sia estremo di più segmenti* a (*o* b), *lo è pure di altrettanti segmenti* b (*od* a), *ed ogni retta che contenga più segmenti* a (*o* b), *contiene altrettanti segmenti* b (*od* a), *la frazione*

$$\frac{a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n}{b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_n},$$

è un' espressione metrico-proiettiva. Questo teorema è un estensione di quello che afferma la proprietà proiettiva del *birapporto* (*E.* § 34). E difatti se ABCD son 4 punti di una retta, la frazione

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{\mathrm{AC}\,.\,\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}\,.\,\mathrm{AD}},$$

soddisfa alle ipotesi del teorema ora enunciato.

Osservazione. Nel ragionamento precedente si supponeva implicitamente che i punti A_1, B_1, C_1,... scelti sulle rette OA, OB, OC,... per formare la figura F_1, fossero tutti proprii.

Conserviamo ancora quest' ipotesi e diciamo A_1B_1, A_1C_1 due segmenti di F_1 aventi lo stesso estremo A_1, e appartenenti l' uno al numeratore e l' altro al denominatore di f_1. Adottando per F_1 le notazioni già usate per F, avremo:

$$A_1B_1 = \frac{OA_1 \,.\, OB_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OB_1}}{h_1} \qquad A_1C_1 = \frac{OA_1 \,.\, OC_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OC_1}}{h'_1},$$

donde:

$$(1) \qquad \frac{A_1B_1}{A_1C} = \frac{OB_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OB_1}}{h_1} : \frac{OC_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OC_1}}{h'_1}.$$

Ora se il punto A_1 diviene improprio, la retta OA_1 risulta parallela ad A_1B_1 e A_1C_1 e quindi si avrà in valore assoluto:

$$h_1 = OB_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OB_1}\,, \quad h'_1 = OC_1 \,.\, sen\, \widehat{A_1OC_1}.$$

Dunque affinchè sussista anche in tal caso l' uguaglianza tra f_1 ed f, siccome questa dipendeva dalla validità della relazione (1) e delle analoghe, dovremo porre $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = 1$.

Ma se vogliamo che, dopo tale posizione, f_1 risulti pure dello stesso segno di f, bisognerà scegliere sulle due rette parallele A_1B_1, A_1C_1, sensi positivi concordanti (che si rivolgano cioè verso una medesima pagina di un piano segante le due parallele).

Le stesse cose si potranno ripetere se ci sono nella F_1 altri punti improprii, purchè però ogni punto improprio appartenga a due segmenti (l' uno del numeratore e l' altro del denominatore di f_1) i quali abbiano i rimanenti estremi proprî; ossia purchè sia proprio uno almeno degli estremi di ogni segmento della figura F_1.

Dunque « il valore dell' espressione metrico proiettiva f,
« composta mediante i segmenti della figura F, si potrà cal-
« colare supponendo che alcuni punti della figura stessa

« vadano all' infinito sui raggi fissi che li proiettano da un « punto O, purchè rimanga proprio uno almeno degli estremi « di ogni segmento di F, e purchè si scelgano sensi posi- « tivi concordanti sulle rette parallele che vanno ad un « punto improprio, e si ponga uguale all' unità il rapporto « tra due segmenti che hanno un estremo comune all' infi- « nito ».

2. Alla espressione f del n° precedente, la quale si riferiva alla figura F costituita dai segmenti rettilinei AB, CD,.... possiamo associare due altre espressioni, rèlative a figure costituite da angoli rettilinei o diedri.

Costruiamo perciò due figure Φ e Ψ, costituite rispettivamente dagli angoli rettilinei ab, cd,... e dagli angoli diedri $\alpha\beta$, $\gamma\delta$,..., appartenenti o no ad una stella, in guisa che sieno soddisfatte le condizioni seguenti:

1ª) ad ogni estremo d' un segmento di F corrisponda un lato (o faccia) di un angolo di Φ (o Ψ), e viceversa; e quindi ad ogni segmento di F corrisponda un angolo di Φ (o Ψ), e viceversa;

2ª) a punti di F situati in linea retta, corrispondano raggi (o piani) di Φ (o Ψ) appartenenti ad uno stesso fascio, e viceversa.

Dimostreremo allora che le espressioni φ e ψ formate con le misure degli angoli di Φ e Ψ, come la f è formata con le misure dei segmenti di F, hanno carattere proiettivo.

Cominciamo a provare che il valore della espressione f_0, relativa alla sezione F_0 (A_0B_0, C_0D_0,...) di Φ con un piano generico ω, è uguale al valore di φ.

Si conducano perciò da un punto O dello spazio i raggi a_1 b_1 c_1 d_1... rispettivamente paralleli ad a b c d..., e si seghi la figura Φ_1 (a_1b_1, c_1d_1,...) che così si ottiene, col piano ω. Avremo allora una figura F_1 (A_1B_1, C_1D_1,...), la quale è così riferita alla F_0, che due rette corrispondenti, come A_0B_0, A_1B_1, sono parallele (giacchè son le sezioni di ω coi due piani paralleli ab e a_1b_1). Dunque le due figure F_0 ed F_1 sono omotetiche, ossia le rette $a_0 \equiv A_0A_1$, $b_0 \equiv B_0B_1, \ldots$, passano per un medesimo punto Q [1].

In tal modo nel fascio di raggi Q si viene ad ottenere una figura $\Phi_0\,(a_0b_0, c_0d_0, \ldots)$, che è contemporaneamente proiezione di F_0 e di F_1.

Ricordando il teorema del n° precedente e confrontando successivamente le espressioni relative alle figure F_0 F_1 Φ_1 Φ, si conclude che i valori di f_0 e φ sono uguali.

Una volta stabilito questo fatto, con procedimenti (analoghi a quelli del n° 1) che il lettore potrà utilmente sviluppare, si dimostra l'invarianza del valore di φ per ogni proiezione o sezione.

E analogamente si procede per dimostrare il carattere proiettivo dell'espressione ψ relativa alla figura Ψ costituita dai diedri $\alpha\beta$, $\gamma\delta$.... Anzi per questa dimostrazione si può profittare anche del risultato stabilito per Φ, segando i diedri di Ψ con piani perpendicolari alle rispettive costole, in modo che due diedri di uno stesso fascio diano per sezioni angoli di uno stesso fascio.

Si conclude pertanto che:

Se $a_1 a_2 \ldots a_n$, $b_1 b_2 \ldots b_n$ *son due gruppi di* n *angoli rettilinei (o diedri) dello spazio, e se ogni raggio (o piano) che sia lato (o faccia) di più angoli* a *(o* b*), lo è pure di altrettanti angoli* b *(o* a*), ed ogni fascio che contenga più angoli* a *(o* b*), contiene altrettanti angoli* b *(od* a*), la frazione*

$$\frac{sen\, a_1\ sen\, a_2 \ldots sen\, a_n}{sen\, b_1\ sen\, b_2 \ldots sen\, b_n},$$

è un' espressione metrico-proiettiva.

Esaminando il procedimento che serve per dedurre il carattere proiettivo delle frazioni φ e ψ, dal carattere proiettivo dell'espressione f, si vede che esso non dipende dalla

[1] Qui supponiamo nota dalla Geometria elementare, la teoria delle figure omotetiche.

natura della f; ma soltanto dall'ipotesi che le figure Φ e Ψ si possano riferire ad F in modo che:

1ª) ad ogni estremo di un segmento di F corrisponda un lato (o faccia) di Φ (o Ψ); e viceversa;

2ª) a punti di F situati in linea retta corrispondano raggi (o piani) di Φ (o Ψ) appartenenti ad un fascio.

Sicchè, *comunque siano disposti i segmenti rettilinei che costituiscono una figura F, ad ogni espressione proiettiva formata con le misure dei segmenti di* F, *ne vengono associate due altre, pure proiettive, formate nello stesso modo con le misure dei segmenti corrispondenti delle figure* Φ *e* Ψ, *che soddisfano alle ipotesi* 1ª *e* 2ª.

In ciò consiste la *legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive.*

Per le notizie storiche sulla legge di dualità, si veda il n° 9 del § 9.

a) *Relazioni proiettive tra i segmenti di una medesima forma di* 1ª *specie.*

3. Diremo *rapporto semplice* di 3 elementi A, B, C di una forma di 1ª specie, il rapporto $\frac{AC}{BC}$ tra le *misure* dei segmenti AC, BC; e lo designeremo brevemente con (ABC).

Con la notazione del rapporto semplice, il *birapporto* (ABCD) di quattro elementi A, B, C, D d'una forma di 1ª specie, si può scrivere sotto la forma $\frac{(ABC)}{(ABD)}$. Se si tratta di 4 punti, sviluppando avremo:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \,.\, BD}{BC \,.\, AD};$$

e se si tratta di 4 raggi o piani:

$$(ABCD) = \frac{sen\ AC}{sen\ BC} : \frac{sen\ AD}{sen\ BD} = \frac{sen\ AC \,.\, sen\ BD}{sen\ BC \,.\, sen\ AD}$$

Riuniamo qui alcune proprietà del birapporto, che ci serviranno nella risoluzione di qualche problema.

Dall' espressione del birapporto si deduce subito che scambiando tra loro due lettere e insieme le altre due, il birapporto non muta valore. Così:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

E quindi dei 24 birapporti che si posson formare con 4 elementi, 6 soli sono distinti, e come tali si posson prendere p. e. quelli che si ottengono lasciando fissa la lettera A e permutando le altre in tutti i modi possibili.

Fra questi 6 birapporti passano relazioni del tipo:

$$(ABCD)\,(ABDC) = 1$$
$$(ABCD) + (ACBD) = 1\,;$$

cioè è uguale ad 1 il prodotto di due birapporti che differiscano per l' ordine delle ultime due lettere, ed è uguale ad 1 la somma di 2 birapporti che differiscano per l' ordine delle due lettere intermedie.

Le relazioni del 1° tipo divengono evidenti quando si sostituiscano ai birapporti le loro espressioni; quanto a quelle del 2° tipo, per dimostrarle, nel caso in cui A, B, C, D son punti di una retta, conviene far capo alla *relazione di* EULERO:

$$AB\,.\,CD + AC\,.\,DB + AD\,.\,BC = 0\,,$$

la quale riducesi ad un' identità quando si osservi che:

$$CD = AD - AC\,,\ DB = AB - AD\,,\ BC = AC - AB.$$

E infatti se dividiamo per AD . BC i due membri della relazione di Eulero, avremo:

$$\frac{AB\,.\,CD}{AD\,.\,BC} + \frac{AC\,.\,DB}{AD\,.\,BC} + 1 = 0,$$

ovvero:

$$\frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD} + \frac{AB\,.\,CD}{CB\,.\,AD} = 1,$$

la quale può anche scriversi sotto la forma:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1.$$

La proprietà proiettiva del birapporto ci permette subito di scrivere la stessa relazione anche nel caso in cui **A**, B, C, **D** son quattro elementi di un fascio di raggi o di piani. Profittando delle relazioni del 1° e 2° tipo, i 6 birapporti distinti si possono esprimere mediante uno di essi, scelto ad arbitrio.

La teoria del birapporto è dovuta a Möbius (Der barycentrische Calcul, 1827), che lo chiamò *doppio rapporto*, a Steiner (Systematische Entwicklung..., 1832) e a Chasles, che lo chiamò *rapporto anarmonico* (Aperçu historique..., 1837). Ma alcune proprietà del birapporto erano già note anteriormente. Così la proprietà che la quaderna di punti segnati sopra una trasversale arbitraria da quattro raggi di un fascio, ha un birapporto costante, trovasi già in Pappo (Collezioni matematiche, a. 300 di Cristo).

4. *Se* $p\ a_1\ a_2 \dots a_n$ *son* $n+1$ *raggi di un fascio, ha luogo la relazione*:

$$(1)\qquad \frac{sen\ a_1 a_2}{sen\ p a_1\ sen\ p a_2} + \frac{sen\ a_2 a_3}{sen\ p a_2\ sen\ p a_3} + \dots$$
$$\dots + \frac{sen\ a_n a_1}{sen\ p a_n\ sen\ p a_1} = 0.$$

Infatti indicando con $P A_1 A_2 \dots A_n$ gli $n+1$ punti che i raggi suddetti segnano sopra una trasversale, tra le mutue distanze di questi punti si ha la relazione:

$$(2)\qquad \frac{A_1 A_2}{PA_1 . PA_2} + \frac{A_2 A_3}{PA_2 . PA_3} + \dots + \frac{A_n A_1}{PA_n . PA_1} = 0.$$

Invero questa si riduce a un' identità tra i numeri $\frac{1}{PA_i}$, quando si osservi che

$$A_i A_k = P A_k - P A_i,$$

e si eseguiscano le divisioni parziali.

La (2) può scriversi sotto la forma:

$$\frac{A_1A_2 \,.\, PA_n \,.\, PA_1}{A_nA_1 \,.\, PA_1 \,.\, PA_2} + \frac{A_2A_3 \,.\, PA_n \,.\, PA_1}{A_nA_1 \,.\, PA_2 \,.\, PA_3} + \ldots + 1 = 0.$$

Ma pel criterio stabilito al n° 1, ciascuna delle frazioni del 1° membro è proiettiva, dunque anche la (2) è proiettiva. Da ciò segue senz' altro la validità della relazione (1).

Osservazione. Dalla (1) si deducono quasi tutte le relazioni fondamentali della trigonometria. Così supponendo $n = 3$, avremo:

$$\frac{sen\ a_1a_2}{sen\ pa_1\ sen\ pa_2} + \frac{sen\ a_2a_3}{sen\ pa_2\ sen\ pa_3} + \frac{sen\ a_3a_1}{sen\ pa_3\ sen\ pa_1} = 0,$$

ossia:

$$\frac{sen\,(pa_2 - pa_1)}{sen\ pa_1\ sen\ pa_2} + \frac{sen\,(pa_3 - pa_2)}{sen\ pa_2\ sen\ pa_3} + \frac{sen\,(pa_1 - pa_3)}{sen\ pa_3\ sen\ pa_1} = 0,$$

la quale, se si pone $a_1p = \alpha$, $pa_2 = \beta$, e si suppone $pa_3 = \frac{\pi}{2}$, riducesi alla *formola d' addizione*:

$$sen\,(\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\,\alpha\ sen\ \beta.$$

La relazione (1) trovasi in Carnot (Géométrie de position, 1803).

5. *Se* $A\,B\,C\,D_1\,D_2\,D_3\,D_4$ *son elementi di una forma di* 1ª *specie, ponendo* $(ABCD_i) = x_i$, *si ha*:

$$(D_1\,D_2\,D_3\,D_4) = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4}.$$

Consideriamo infatti l' espressione:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_3} = \frac{(ABCD_1) - (ABCD_3)}{(ABCD_3)} = \frac{(ABCD_1)}{(ABCD_3)} - 1.$$

Sviluppando i birapporti della frazione $\frac{(ABCD_1)}{(ABCD_3)}$, si vede che essa è uguale al birapporto (ABD_3D_1); dunque avremo:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_3} = (ABD_3D_1) - 1,$$

e, giacchè

$$(\mathrm{ABD_3D_1}) + (\mathrm{AD_3BD_1}) = 1,$$

verrà:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_3} = -(\mathrm{AD_3BD_1}).$$

Analogamente, mutando l'indice 1 in 2:

$$\frac{x_2 - x_3}{x_3} = -(\mathrm{AD_3BD_2});$$

sicchè:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{(\mathrm{AD_3BD_1})}{(\mathrm{AD_3BD_2})} = \frac{(\mathrm{AD_3\,D_2})}{(\mathrm{AD_3\,D_1})} = (\mathrm{AD_3D_2D_1}) = (\mathrm{D_1D_2D_3A})$$

Mutando in questa l'indice 3 in 4, avremo:

$$\frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = (\mathrm{D_1D_2D_4A}).$$

Sarà dunque:

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} : \frac{x_1 - x_4}{x_2 - x_4} = \frac{(\mathrm{D_1D_2D_3A})}{(\mathrm{D_1D_2D_4A})} = (\mathrm{D_1D_2D_3D_4}).$$

Osservazione. Il 1° membro di questa relazione si definisce come il *birapporto dei 4 numeri* $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$, e s'indica con $(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)$.

Se i 3 elementi A B C sono fissi, ad ogni elemento D della forma corrisponde un valore per (ABCD) e viceversa. Perciò si può assumere il birapporto (ABCD) come *coordinata* dell'elemento D nella data forma di 1ª specie.

Questo sistema di coordinate, che racchiude come casi particolari gli altri sistemi che si considerano in Geometria analitica, si dice delle *coordinate proiettive*, appunto pel carattere proiettivo del birapporto.

La proposizione dimostrata si può ora enunciare dicendo che *il birapporto di 4 elementi di una forma di 1ª specie, uguaglia il birapporto delle loro coordinate proiettive.*

Le coordinate proiettive per le forme fondamentali, furono introdotte sotto forma di birapporti da Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage, 2° fascicolo, 1857), e la teoria fu sviluppata da W. FIEDLER (Darstellende Geometrie, 1870). Ma la proposizione dell'Esercizio 5, trovasi anche in MÖBIUS.

b) *Relazioni proiettive tra i segmenti di più forme di 1ª specie.*

Un corollario immediato del criterio stabilito al n. 1, è il seguente:

6. *Se* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *son* n *punti proprii dello spazio e* $B_1 B_2 \ldots B_n$ *sono* n *punti proprii od improprii, scelti rispettivamente sulle rette* A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1, *il prodotto*

$$(A_1A_2B_1)\,(A_2A_3B_2)\ldots(A_nA_1B_n)$$

è proiettivo.

Questo prodotto fu chiamato dal MÖBIUS *rapporto plurisezionale.*

Applicando la legge di dualità del n. 2 si potrà enunciare il teorema:

7. *Se* $a_1 a_2 \ldots a_n$ *sono* n *raggi dello spazio tali che ciascuno incontri il successivo, e* $b_1 b_2 \ldots b_n$ *sono* n *raggi appartenenti rispettivamente ai fasci* $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, ..., $a_n a_1$, *il prodotto*

$$(a_1 a_2 b_1)\,(a_2 a_3 b_2)\ldots(a_n a_1 b_n)$$

è proiettivo.

Una proposizione analoga si ha se $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n\,b_1 \ldots b_n$ son piani.

Supponiamo ora che i punti $B_1 \ldots B_n$ dei quali si parla nella prop. 6, giacciano in un piano. Allora proiettando la figura costituita dai punti A e B, da un punto O di questo piano, sopra un piano parallelo, avremo una figura costituita dai punti $A'_1 \ldots A'_n B'_1 \ldots B'_n$, ed i punti B' saranno tutti improprii. Sicchè, in forza dell'Osservazione con la quale si chiude il n. 1, il valore dell'espressione

$$(A'_1 A'_2 B'_1)\ldots(A'_n A'_1 B'_n)$$

risulterà uguale all'unità, e dunque anche nel caso generale sarà:

$$(A_1 A_2 B_1)\ldots(A_n A_1 B_n) = 1.$$

Onde possiamo enunciare:

8. *Se* $A_1 \dots A_n$ *è un n-gono semplice (piano o gobbo) e* $B_1 \dots B_n$ *sono i punti (proprii o improprii) in cui un piano arbitrario sega rispettivamente i lati* $A_1 A_2, \dots, A_n A_1$, *si ha la relazione*:

$$(A_1 A_2 B_1) \dots (A_n A_1 B_n) = 1.$$

In particolare questa relazione sussiste se $A_1 A_2 \dots A_n$ è un n-gono piano ed i punti $B_1 \dots B_n$ sono allineati. In tal caso la si può dimostrare anche assumendo il centro di proiezione sopra la trasversale u, che contiene i punti B, ed osservando che l'espressione relativa agli angoli $a_i\, u$, che proiettano i segmenti $A_i B_k$, diviene

$$(a_1 a_2 u)\,(a_2 a_3 u) \dots (a_n a_1 u),$$

che è manifestamente uguale all' unità.

Osservazione. Le cose analoghe si possono ripetere per un poligono sferico i cui lati (archi di cerchi massimi) vengano segati da un cerchio massimo trasversale. Basterà sostituire i seni degli archi di cerchi massimi alle lunghezze dei segmenti rettilinei, che si ottengono proiettando gli archi stessi dal centro della sfera sopra un piano.

La stessa osservazione si può fare per tutte le relazioni metrico-proiettive concernenti le figure piane, sicchè possiamo dire che *ogni relazione metrico-proiettiva tra i segmenti di una figura piana, dà luogo ad una relazione di trigonometria sferica.*

Dalla prop. 8, per $n = 3$, si trae che se i lati di un triangolo $A_1A_2A_3$ son segati da una trasversale nei punti $B_1B_2B_3$, si ha:

$$(A_1 A_2 B_1)\,(A_2 A_3 B_2)\,(A_3 A_1 B_3) = 1.$$

In tal caso la proposizione s' inverte. Infatti se consideriamo la retta $B_1 B_2$ e diciamo B'_3 il punto in cui essa sega il lato $A_3 A_1$, per la prop. 8, avremo:

$$(A_1 A_2 B_1)\,(A_2 A_3 B_2)\,(A_3 A_1 B'_3) = 1.$$

che confrontata con la precedente, la quale è vera per ipotesi, dà:

$$(A_3 A_1 B_3) = (A_3 A_1 B'_3),$$

donde si trae che i due punti B_3, B'_3 coincidono, ossia che $B_1 B_2 B_3$ sono allineati. Si ha così il seguente teorema:

9. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti* $B_1 B_2 B_3$ *situati sui lati* A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 *di un triangolo* $A_1A_2A_3$, *sieno allineati, è che:*

$$(A_1 A_2 B_1) (A_2 A_3 B_2) (A_3 A_1 B_3) = 1.$$

In modo del tutto analogo si vede che la prop. 8 è invertibile anche quando si tratta di un quadrangolo gobbo. Si ha dunque il teorema:

10. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti* $B_1 B_2 B_3 B_4$ *situati sui lati di un quadrangolo gobbo semplice* $A_1 A_2 A_3 A_4$, *sieno complanari, è che:*

$$(A_1 A_2 B_1) (A_2 A_3 B_2) (A_3 A_4 B_3) (A_4 A_1 B_4) = 1.$$

La proposizione 8 trovasi in CARNOT (Géom. de pos., 1803; Essai sur la théorie des transversales, 1806); ma la dimostrazione da noi sviluppata è di PONCELET. La 9 dicesi il teorema di MENELAO, perché fu data per la prima volta da questo geometra nelle *Sferiche* (1° secolo d. C.), come lemma alla relazione analoga sulla sfera. Si ritrova anche nell' *Almagesto* di TOLOMEO (125 d. C.) e sempre, come in Menelao, allo scopo di trarne applicazioni astronomiche. La prop. 10 è dovuta a G. CEVA (De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio, 1678).

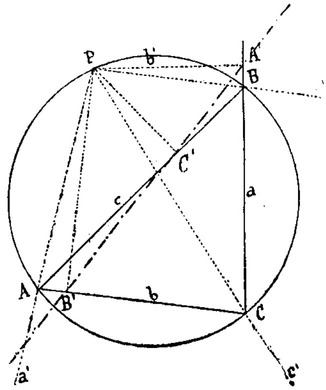
Un' applicazione notevole del teorema di Menelao è il seguente

11. *Teorema di* SIMSON (1735). — *I piedi delle perpendicolari abbassate sui lati di un triangolo da un punto qualunque del cerchio circoscritto, sono allineati.*

Sia ABC il triangolo dato e P un punto del suo cerchio circoscritto. Pongasi

$$PA \equiv a',\ PB \equiv b',\ PC \equiv c',\ BC \equiv a,\ CA \equiv b,\ AB \equiv c,$$

e si chiamino A′, B′, C′ i piedi delle perpendicolari calate da P sui lati BC, CA, AB. Dalla considerazione del triangolo rettangolo AC′P si rileva (in valore e segno):



$$AC' = AP\, cos\, a'c,$$

e dal triangolo BC′P si rileva:

$$BC' = BP\, cos\, b'c.$$

Dividendo membro a membro, viene:

$$(ABC') = \frac{AP}{BP}\, \frac{cos\, a'c}{cos\, b'c}.$$

In modo analogo si hanno le uguaglianze:

$$(BCA') = \frac{BP}{CP}\, \frac{cos\, b'a}{cos\, c'a}$$

$$(CAB') = \frac{CP}{AP}\, \frac{cos\, c'b}{cos\, a'b}$$

sicchè:

$$(ABC')\,(BCA')\,(CAB') = \frac{cos\, a'c \times cos\, b'a \times cos\, c'b}{cos\, b'c \times cos\, c'a \times cos\, a'b}.$$

Ora l' angolo $a'c$ è uguale o supplementare di $c'a$, perchè i due lati del 1° e i due lati del 2° incontrano il cerchio negli stessi due punti P, B; e analogamente dicasi per le altre coppie di angoli $b'a$, $a'b$; $c'b$, $b'c$. Dunque in valore assoluto, il 2° membro dell' ultima uguaglianza è uguale ad 1; quanto al segno, si vede che è positivo facendo una particolare scelta dei versi positivi sulle rette a, b, c, a', b', c'.

12. *Se* $A'_1\, A'_2 \ldots A'_n$ *son le intersezioni di una trasversale con* n *raggi di un fascio* S, *ed* $A_1\, A_2 \ldots A_n$ *le intersezioni dei raggi stessi con un' altra trasversale, si ha:*

$$\frac{A_1A_2}{(A_1SA'_1)(A_2SA'_2)} + \frac{A_2A_3}{(A_2SA'_2)(A_3SA'_3)} + \cdots + \tag{1}$$

$$\cdots + \frac{A_nA_1}{(A_nSA'_n)(A_1SA'_1)} = 0.$$

Infatti dividendo il 1° membro per $\frac{A_nA_1}{(A_nSA'_n)(A_1SA'_1)}$ e sviluppando i rapporti semplici, si ottiene l'espressione:

$$(2)\ \frac{A_1A_2 \,.\, SA'_2 \,.\, A_nA'_n}{A_nA_1 \,.\, A_2A'_2 \,.\, SA'_n} + \frac{A_2A_3 \,.\, SA'_2 \,.\, SA'_3 \,.\, A_nA'_n \,.\, A_1A'_1}{A_nA_1 \,.\, A_2A'_2 \,.\, A_3A'_3 \,.\, SA'_n \,.\, SA'_1} + \dots + 1$$

e le frazioni che ivi compariscono son proiettive, perchè soddisfano alle condizioni del n. 1.

Per calcolare il valore della (2) possiamo dunque supporre che le due trasversali sieno parallele, perchè a questo caso ci possiamo ridurre con una proiezione. Allora, pel teorema di TALETE, avremo le proporzioni:

$$\frac{SA'_1}{A_1A'_1} = \frac{SA'_2}{A_2A'_2} = \dots = \frac{SA'_n}{A_nA'_n},$$

e quindi la (2) diverrà:

$$\frac{A_1A_2}{A_nA_1} + \frac{A_2A_3}{A_nA_1} + \dots + 1 = \frac{1}{A_nA_1}(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1).$$

Ora notoriamente:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1 = 0,$$

dunque la (2) avrà per valore 0, e quindi la (1) sarà soddisfatta.

Nel caso $n = 3$, la proposizione s'inverte in modo analogo a quello tenuto per stabilire la sufficienza della condizione data dal teorema di Menelao, e si giunge al teorema:

13. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti* $A'_1\,A'_2\,A'_3$, *situati sulle rette che proiettano dal punto* S *i tre punti allineati* $A_1\,A_2\,A_3$, *sieno essi pure allineati, è che:*

$$A_1A_2\,(A_3SA'_3) + A_2A_3\,(A_1SA'_1) + A_3A_1\,(A_2SA'_2) = 0.$$

OSSERVAZIONE 1ª. Questa proposizione (che trovasi in PONCELET) si può ottenere anche come caso limite del teorema di Menelao, supponendo che uno dei lati del triangolo si avvicini indefinitamente al vertice opposto.

Osservazione 2.ª La relazione precedente può anche scriversi così:

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A'_3 \cdot SA'_2}{A_3A_1 \cdot SA'_3 \cdot A_2A'_2} + \frac{A_2A_3 \cdot A_1A'_1 \cdot SA'_2}{A_3A_1 \cdot SA'_1 \cdot A_2A'_2} + 1 = 0,$$

e sotto questa forma vale anche quando il punto S è all'infinito (ved. l'Osservazione alla fine del n. 1). In tal caso riducesi alla seguente:

$$\frac{A_1A_2 \cdot A_3A'_3}{A_3A_1 \cdot A_2A'_2} + \frac{A_2A_3 \cdot A_1A'_1}{A_3A_1 \cdot A_2A'_2} + 1 = 0,$$

ossia:

$$A_1A_2 \cdot A_3A_3' + A_2A_3 \cdot A_1A'_1 + A_3A_1 \cdot A_2A'_2 = 0.$$

14. *Se da un punto P del piano di un poligono semplice* $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ *di un numero dispari di vertici, si proietta ciascun vertice* A_m *nel punto* A'_m *del lato opposto* A_iA_k, *si ha la relazione*:

$$\Pi\,(A_iA_kA'_m) = -1,$$

ove il prodotto Π *si estende a tutti i possibili termini, analoghi a quello scritto* (¹).

Infatti il prodotto considerato è proiettivo (n. 1) e quindi se scegliamo come centro di proiezione il punto P, e poniamo $PA_i \equiv a_i$, avremo:

$$\Pi\,(A_iA_kA'_m) = \Pi\,(a_ia_ka_m).$$

Nel 2° membro ad ogni fattore (*sen* a_ia_m) di uno dei termini della frazione, che si ottiene sviluppando i rapporti semplici, corrisponde un fattore (*sen* a_ma_i) dell'altro termine

(¹) In un poligono $A_1A_2 \ldots A_{2n+1}$ di un numero dispari di vertici, si chiama lato opposto ad un vertice A_i quello determinato dai vertici, che s'incontrano nell' n^{esimo} posto dopo A_i, percorrendo il perimetro in un verso e nell'altro. Così ad A_1 sta opposto A_{n+1} A_{n+2}, ad A_2 sta opposto A_{n+2} A_{n+3}, ecc.

che differisce dal precedente soltanto nel segno. Siccome i fattori dei due termini sono in numero dispari, si conclude che:

$$\Pi\,(a_i a_k a_m) = -1.$$

Osservazione. Il teorema 14 si estende anche ad un poligono d'un numero pari di lati, purchè si tiri una retta per un suo vertice A, e si riguardi questa retta come lato di un poligono di un numero dispari di vertici, ottenuto dal precedente aggiungendovi un vertice coincidente con A.

Nel caso $n = 1$, ossia nel caso di un triangolo $A_1A_2A_3$, la prop. 14 s'inverte col solito procedimento (ved. il teorema di Menelao), e si ottiene il teorema:

15. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè i punti* $A'_1A'_2A'_3$ *appartenenti rispettivamente ai lati* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *di un triangolo* $A_1A_2A_3$, *sieno proiettati dai vertici opposti secondo tre rette concorrenti in un punto, è che:*

$$(A_1A_2A'_3)\,(A_2A_3A'_1)\,(A_3A_1A'_2) = -1.$$

La prop. 14 trovasi in Poncelet; e la 15 è il teorema di Ceva (De lineis rectis..., 1678).

Osservazione. Dal teorema di Ceva segue subito che le mediane di un triangolo concorrono in un punto; che le bisettrici degli angoli interni di un triangolo concorrono in un punto (si profitta del fatto che una bisettrice sega il lato opposto in parti proporzionali agli altri due); che le altezze concorrono pure in un punto (si profitta del fatto che in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa nel coseno dell'angolo adiacente); ecc.

Ritornando ora alla prop. 7 di questo §, supponiamo che le rette $b_1b_2 \dots b_n$ dei fasci $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$, passino per un medesimo punto P, il che, essendo le rette b diverse dalla a, implica che l'n-latero $a_1a_2 \dots a_n$ sia piano. Allora segando le rette a,b con un piano per P, e chiamando A_i la traccia di a_i su questo piano, per la prop. 7, avremo:

$$(a_1a_2b_1)(a_2a_3b_2)\ldots)(a_na_1b_n) = (A_1A_2P)(A_2A_3P)\ldots(A_nA_1P),$$

e poichè il 2° membro ha manifestamente per valore l'unità, otterremo:

$$(a_1a_2b_1)(a_2a_3b_2)\ldots(a_na_1b_n) = 1.$$

Si conclude pertanto che:

16. *Se* $a_1a_2\ldots a_n$ *è un* n-*latero piano semplice e* $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\ldots\mathrm{b}_n$ *son* n *rette concorrenti in un punto e uscenti dai vertici* $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_2\mathrm{a}_3, \ldots, \mathrm{a}_n\mathrm{a}_1$ *dell'* n-*latero, si ha:*

$$(a_1a_2b_1)(a_2a_3b_2)\ldots(a_na_1b_n) = 1.$$

Questa proposizione s'inverte per $n = 3$ e dà luogo al teorema seguente da considerarsi come *duale del teorema di Menelao:*

17. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette* $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3$ *uscenti dai vertici di un trilatero* $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3$, *concorrano in un punto, è che:*

$$(a_1a_2b_1)(a_2a_3b_2)(a_3a_1b_3) = 1.$$

In modo analogo si ottengono le duali di proposizioni già dimostrate, come delle 12., 13., 14., ma noi ci limiteremo ad enunciare soltanto quella *duale del teorema di Ceva:*

18. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre rette* $\mathrm{a'}_1\mathrm{a'}_2\mathrm{a'}_3$ *uscenti dai vertici* $\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3, \mathrm{a}_3\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2$ *di un trilatero* $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3$, *incontrino i lati opposti in tre punti allineati, è che:*

$$(a_1a_2a'_3)(a_2a_3a'_1)(a_3a_1a'_2) = -1.$$

La necessità si dimostra segando le a,a' con la retta che contiene i punti $A_1A_2A_3$, ove le $a'_1a'_2a'_3$ incontrano i lati opposti, ed osservando che, per la proprietà proiettiva del 1° membro della relazione precedente:

$$(a_1a_2a'_3)(a_2a_3a'_1)(a_3a_1a'_2) = (A_1A_2A_3)(A_2A_3A_1)(A_3A_1A_2).$$

La sufficienza discende al solito modo dal fatto che v'è un sol raggio di un fascio che formi con due altri raggi di questo, un dato rapporto semplice.

19. *Se le rette* $a'_1 a'_2 a'_3$ *uscenti dai vertici* $A_1A_2A_3$ *di un triangolo, incontrano i lati opposti* $a_1a_2a_3$ *nei punti* $A_1'A_2'A'_3$, *si ha la relazione* (di CHASLES):

$$(1)\ (A_1A_2A'_3)\,(A_2A_3A'_1)\,(A_3A_1A'_2)\,(a_1a_2a'_3)\,(a_2a_3a'_1)\,(a_3a_1a'_2) = -1.$$

Consideriamo infatti altre tre rette $a''_1a''_2a''_3$ uscenti dai vertici $A_1A_2A_3$ e seganti i lati opposti nei punti $A''_1A''_2A''_3$, e formiamo l'espressione:

$$(2)\ (A_1A_2A''_3)\ (A_2A_3A''_1)\ (A_3A_1A''_2)\ (a_1a_2a''_3)\ (a_2a_3a''_1)\ (a_3a_1a''_2).$$

Il quoziente del 1° membro della (1) e dell'espressione formata, è:

$$(3)\qquad \begin{gathered}(A_1A_2A'_3A''_3)\ (A_2A_3A'_1A''_1)\ (A_3A_1A'_2A''_2)\\ (a_1a_2a'_3a''_3)\ (a_2a_3a'_1a''_1)\ (a_3a_1a'_2a''_2).\end{gathered}$$

Per la proprietà proiettiva del birapporto avremo:

$$(A_1A_2A'_3A''_3) = (a_2a_1a'_3a''_3),$$

giacchè le rette $a_2a_1a'_3a_3''$ proiettano ordinatamente i punti $A_1A_2A_3'A_3''$ dal vertice A_3. Analogamente sarà:

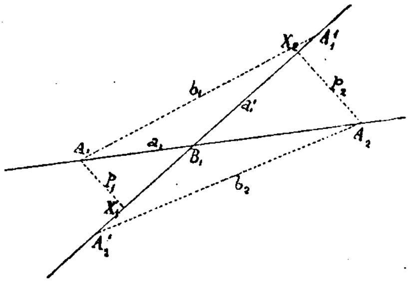
$$(A_2A_3A'_1A''_1) = (a_3a_2a'_1a''_1),\ (A_3A_1A'_2A''_2) = (a_1a_3a'_2a''_2).$$

Dunque la (3) avrà per valore l'unità. — Ora se supponiamo che i punti $A''_1A''_2A''_3$ sieno allineati, pel teorema di Menelao e pel duale del teorema di Ceva, il valore della (2) sarà -1; e quindi la (1) sarà soddisfatta.

20. *Consideriamo due n-goni semplici* $A_1 \ldots A_n$, $A'_1 \ldots A'_n$ *di uno stesso piano e diciamo omologhi i vertici* A_i, A'_i *ed i lati* $a_i \equiv A_i\, A_{i+1}$, $a'_i \equiv A'_i\, A'_{i+1}$. *Se* B_i *è il punto comune ai lati omologhi* $a_i\, a_i'$, e b_i *la retta che congiunge i vertici omologhi* $A_iA'_i$, *ha luogo la relazione:*

$$(A_1A_2B_1)\,(A_2A_3B_2) \ldots (A_nA_1B_n) = (a'_2a'_1b_2)\,(a'_3a'_2b_3)\ \ldots\ (a'_1a'_nb_1).$$

Per dimostrarla si abbassino da A_1, A_2 le perpendicolari p_1, p_2 alla retta $a_1' \equiv A'_1A'_2$, e sieno X_1X_2 i loro piedi. Se si conviene di scegliere i sensi positivi concordanti sulle rette parallele A_1X_1, A_2X_2, avremo in valore e segno:



$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \frac{A_1X_1}{A_2X_2}.$$

Scegliendo i versi positivi sui fasci X_1, X_2, in guisa che risulti $a'_1p_1 = a'_1p_2 = +\frac{\pi}{2}$, verrà, in valore e segno:

$$A_1X_1 = A_1A_1' \; sen \; a_1'b_1, \quad A_2X_2 = A_2A_2' \; sen \; a'_1b_2,$$

e quindi:

$$(1) \qquad (A_1A_2B_1) = \frac{A_1A'_1}{A_2A'_2} \cdot \frac{sen \; a'_1b_1}{sen \; a'_1b_2},$$

e ciò in valore e segno, indipendentemente dai versi positivi scelti sulle rette a_1, a'_1, b_1, b_2 e sui fasci A'_1, A'_2.

In modo analogo si hanno le relazioni:

$$(2) \qquad (A_2A_3B_2) = \frac{A_2A'_2}{A_3A'_3} \cdot \frac{sen \; a'_2b_2}{sen \; a'_2b_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(n) \qquad (A_nA_1B_n) = \frac{A_nA'_n}{A_1A'_1} \cdot \frac{sen \; a'_nb_n}{sen \; a'_nb_1}.$$

Moltiplicando membro a membro le (1) (2) ... (n), otterremo la uguaglianza da dimostrarsi.

OSSERVAZIONE. Accanto alla relazione dimostrata si può scrivere quest' altra, mutando l' ufficio dei due n-goni:

$$(A'_1A'_2B_1)\,(A'_2A'_3B_2) \ldots (A'_nA'_1B_n) = (a_2a_1b_2)\,(a_3a_2b_3) \ldots (a_1a_nb_1).$$

Moltiplicando membro a membro le due relazioni, avremo:

$$(A_1A_2B_1)\,(A'_1A'_2B_1)\,(A_2A_3B_2)\,(A'_2A_3'B_2) \ldots (A_nA_1B_n)\,(A'_nA'_1B_n) =$$
$$= (a_2a_1b_2)\,(a'_2a'_1b_2)\,(a_3a_2b_3)\,(a'_3a'_2b_3) \ldots (a_1a_nb_1)\,(a'_1a'_nb_1),$$

la quale è simmetrica rispetto ai due poligoni.

La prop. 20, per $n = 3$, ci dà:

$$(A_1A_2B_1)(A_2A_3B_2)(A_3A_1B_3) = (a'_2a'_1b_2)(a'_3a'_2b_3)(a'_1a'_3b_1).$$

Ora se i tre punti $B_1B_2B_3$ sono allineati, il primo membro è uguale ad 1, pel teorema di Menelao; e quindi, pel duale di questo teorema, le tre rette $b_1b_2b_3$ concorrono in un punto; viceversa se $b_1b_2b_3$ concorrono in un punto, risulterà uguale ad 1 il 2° membro, e quindi i punti $B_1B_2B_3$ saranno allineati. Si ritrova così il *teorema dei triangoli omologici,* di cui ci siamo occupati al n° 1 del § 2.

CAPITOLO SECONDO

Proiettività tra forme di 1ª specie.

§ 4. *Applicazioni del teorema e delle costruzioni fondamentali della proiettività.*

SOMMARIO: *Generalità — Applicazioni della condizione affinchè due punteggiate complanari sieno prospettive — Un esempio di corrispondenze trilineari — Alcuni teoremi di Steiner sui poligoni — Un teorema di Staudt su due quaderne proiettive legate ad un tetraedro — Polare di un punto rispetto ad un quadrilatero — Risoluzione di alcuni problemi del tipo seguente: Date due convenienti forme di 1ª specie proiettive, segare o proiettare una di esse o entrambe, in guisa da ottenere una proiettività particolarizzata metricamente.*

1. Richiamiamo anzitutto brevemente i concetti e le proprietà più importanti, che si riferiscono alle corrispondenze proiettive tra forme di 1ª specie.

Allorquando tra gli elementi di due forme di 1ª specie, distinte o sovrapposte, intercede una corrispondenza biunivoca tale che ad ogni gruppo armonico dell'una forma, corrisponda nell'altra un gruppo armonico, si dice che le due forme son *proiettive*, e la corrispondenza tra i loro elementi dicesi una *proiettività*.

Una proiettività è una corrispondenza *ordinata*, cioè essa fa corrispondere ad elementi susseguentisi dell'una forma, elementi susseguentisi dell'altra (*E.* § 20).

Esiste una ed una sola proiettività tra due forme fondamentali di 1ª specie, nella quale a tre elementi assegnati dell' una corrispondano tre elementi assegnati dell' altra (*teorema fondamentale*, *E.* Cap. V).

Un esempio di proiettività tra due forme di 1ª specie, si ha considerando la corrispondenza che intercede tra i loro elementi, quando si passa dall' una all' altra con un numero finito di proiezioni e sezioni; e ciò in virtù del carattere proiettivo dei gruppi armonici. Anzi dal teorema fondamentale segue che questo esempio abbraccia la classe di tutte le proiettività, ossia che ogni tal corrispondenza si costruisce con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Nel caso di due punteggiate o di due fasci di raggi distinti e complanari, la costruzione della proiettività assume una forma molto semplice, in virtù di alcune proprietà, che giova richiamare.

Se u, u' son due punteggiate proiettive distinte e complanari, ed XX' YY' due coppie qualsiansi di elementi corrispondenti, i punti del tipo $XY'.X'Y$, appartengono tutti ad una retta, che dicesi *asse di collineazione*. Questa retta incontra le u, u' nei punti omologhi del punto $O \equiv uu'$, pensato come appartenente all' una o all' altra punteggiata; e nel caso di due punteggiate prospettive rispetto al centro S, l' asse u_0 è la polare di S rispetto alle u, u' (*E.* § 28).

Dualmente si definisce il *centro di collineazione* di due fasci di raggi proiettivi distinti e complanari.

Dalla proprietà dell' asse di collineazione si trae una nuova dimostrazione del *teorema di* Pappo, che già abbiamo stabilito al n° 7 del § 2.

E infatti se i vertici di posto dispari dell' esagono semplice ABCDEF stanno sopra una retta u, e quelli di posto pari sopra un' altra retta u', le tre coppie di lati opposti AB, DE; BC, EF; CD, FA, si tagliano in tre punti dell' asse della proiettività che fa passare dalla terna ACE alla DFB.

Le proprietà metriche delle proiettività tra forme di 1ª specie, fanno tutte capo alla proprietà invariantiva del birapporto, rispetto alle trasformazioni proiettive; la quale si dimostra subito ricordando che il birapporto non s'altera con una proiezione o sezione, e che ogni proiettività si costruisce con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Diconsi *punti limiti o di fuga* nella proiettività tra due punteggiate u, u', gli omologhi dei punti all'infinito delle u, u'. Indicando con J il punto limite esistente sulla u (omologo del punto J'_{∞} di u') e con I' il punto limite esistente sulla u' (omologo del punto I_{∞} di u), e infine con A,A' una coppia qualsiasi di punti corrispondenti, ha luogo la *relazione di Steiner:*

$$JA \,.\, I'A' = \text{costante},$$

che si deduce dalla proprietà proiettiva del birapporto (*E.* § 34), oppure muovendo le due punteggiate sino a farle divenire parallele ed osservando che l'asse di collineazione delle u, u' in questa nuova posizione, è la retta JI'.

Il concetto generale di corrispondenza e in particolare il concetto di proiettività tra forme fondamentali, è dovuto a Möbius (*Der barycentrische Calcul....* 1827), il quale considera la proiettività tra due punteggiate, come una corrispondenza biunivoca subordinata da una collineazione fra due piani passanti per quelle rette; e ne fa la costruzione trasportando le due punteggiate in posizione prospettiva.

Steiner, a cui si deve la denominazione ormai più usata di forme proiettive, considera come tali due forme di 1ª specie che si ottengano l'una dall'altra con un numero finito di proiezioni e di sezioni (Systematische Entwickelung..., 1832); e fonda la teoria sulla proprietà proiettiva del birapporto.

Chasles definisce due forme proiettive mediante l'uguaglianza dei rapporti anarmonici (birapporti) di due quaderne di elementi corrispondenti, e le chiama *omografiche* (Aperçu historique..., 1837).

E infine Staudt, allo scopo di liberare la Geometria proiettiva dalle considerazioni metriche, definisce la proiettività tra due forme di 1ª specie, come una corrispondenza che conserva i gruppi armonici, e dimostra che una tal corrispondenza si costruisce sempre con un numero finito di proiezioni e sezioni. (*Geometrie der Lage*, 1847). Questa caratterizzazione delle proiettività segue, come abbiamo sopra richiamato, dal teorema che Staudt ebbe il grande merito di porre a base della Geometria proiettiva. Occorre però avvertire che la dimostrazione originaria di Staudt non era del tutto esatta, come giustamente osservò il KLEIN. Essa fu completata in modo rigoroso dal DARBOUX.

2. *Se di tre rette complanari, concorrenti in un punto, due son riferite prospettivamente alla terza, esse risultano riferite prospettivamente tra loro, ed i tre centri di prospettiva sono allineati.*

Sieno $u\,u'\,u''$ le tre rette date concorrenti nel punto O, e sieno S, S′ i centri delle prospettività tra $u'u''$ ed $u''u$. Tra le due punteggiate u,u' nasce una proiettività chiamando omologhi due punti di u, u' quando corrispondono ad uno stesso punto di u'' nelle prospettività suddette; ed anzi la corrispondenza tra u, u' è una prospettività, perchè il punto O, essendo unito nelle prospettività date, risulta unito nella corrispondenza *prodotto*.

Ciò posto, se la retta SS′ non passa per O, essa sega $uu'u''$ nei punti distinti AA′A″, e poichè A, A′ corrispondono ad A″ nelle prospettività date, risulteranno pure omologhi nella corrispondenza tra u,u'; e quindi il centro di prospettiva S″ relativo a quest' ultima, giacerà sulla retta AA′ $\equiv$ SS′.

Se la retta SS′ passa per O, il punto S″ non può essere esterno alla SS′, perchè altrimenti la SS″ non passerebbe per O e quindi, pel ragionamento precedente, essa conterrebbe anche il punto S′; ossia la SS′ non passerebbe per O: contro il supposto.

OSSERVAZIONE. Si associno tre punti di una retta r, diversa dalle $uu'u''$, i quali si trovino nella condizione di S, S′, S″, cioè sieno centri di tre prospettività fra $u'u''$, uu'', uu', tali che una qualunque sia il prodotto delle altre due. Vi sono sulla r infinite terne di punti soddisfacenti a queste condizioni, e le tre punteggiate sovrapposte $ss's''$, descritte dai punti $S S' S''$ di una terna variabile, si dicono riferite con una *corrispondenza trilineare*. Questa corrispondenza gode della proprietà che, dati due dei tre punti $SS'S''$, resta determinato in modo unico il rimanente e si costruisce con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Infatti il punto S'' si ottiene intersecando le $u'u''$ nei punti $A'A''$ con una retta arbitraria per S, eppoi intersecando la u nel punto A con la retta $S'A''$ e infine segando in S'' la r con la retta AA'. Tenendo fisso S e facendo variare S', la punteggiata descritta da S'' sarà proiettiva a quella descritta da S', perchè da questo punto si passa ad S'' con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Così abbiamo un esempio di *una corrispondenza fra tre punteggiate, tale che a due punti di due di quelle punteggiate, corrisponde un sol punto della rimanente; e ad un punto di una, vengono associate nelle altre due, le infinite coppie di punti omologhi in una determinata proiettività.*

3. *Se un n-gono piano semplice si deforma in guisa che i suoi vertici scorrano sopra* n *rette concorrenti in un punto, mentre* n-1 *de' suoi lati passano per altrettanti punti fissi, anche il lato rimanente e le diagonali passeranno per dei punti fissi.*

Sia $A_1A_2 \dots A_n$ l' n-gono dato, $u_1u_2 \dots u_n$ le rette, concorrenti in O, sulle quali scorrono i vertici $A_1A_2 \dots A_n$, ed $S_1S_2 \dots S_{n-1}$ i punti attorno ai quali ruotano i lati A_1A_2, $A_2A_3, \dots, A_{n-1}\ A_n$.

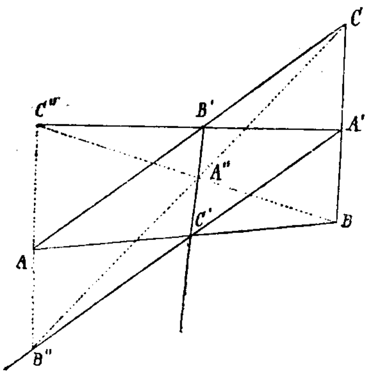
La punteggiata descritta da A_1 è prospettiva a quella descritta da A_2, rispetto al centro S_1; quella descritta da A_2 a quella descritta da A_3, rispetto al centro S_2; ... quella descritta da A_{n-1} a quella descritta da A_n, rispetto al centro S_{n-1}. Sicchè fra la punteggiata descritta da A_1 e quella descritta da A_n si avrà una proiettività prodotto delle prospettività suddette; ed anzi, siccome in ciascuna di queste il punto O è unito, risulterà pure unito nella corrispondenza prodotto, la quale dunque sarà una prospettività (*E.* § 27). Ne deriva che il lato A_1A_n passerà per un punto fisso S_n.

Si osservi inoltre che, per una ragione analoga a quella per cui le punteggiate descritte da A_1, A_n risultano prospettive, lo saranno anche le punteggiate descritte da A_1,A_3 da A_1,A_4, ... da A_2,A_4, ... e quindi le diagonali A_1A_3, A_1A_4, ... A_2A_4, ... passeranno per dei punti fissi.

Per $n = 3$, ricordando la prop. precedente, si ha in sostanza il teorema di Desargues sui triangoli omologici. Questa però non può dirsi una nuova dimostrazione del teorema quando si segua l'ordinamento logico di Staudt, ma lo diviene quando si proceda come Steiner (Syst. Entw..., 1832).

4. *Dati due triangoli* ABC, A′B′C′, *dei quali il primo sia circoscritto al secondo, esistono infiniti triangoli inscritti nel secondo e circoscritti al primo,*

Preso un punto arbitrario A″ su B′C′, lo si proietti da B,C risp. in C″,B″ sui lati A′B′, A′C′. Poichè le punteggiate descritte da B″,C″ son prospettive a quella descritta dal punto variabile A″, esse risulteranno proiettive; ma di più saranno prospettive, perchè nelle prospettività tra A″,C″ ed A″, B″ al punto BC.B′C′ corrisponde il punto A′, il quale dunque risulta unito nella proiettività tra B″ e C″.



Nella corrispondenza tra B″, C″ al punto C′ corrisponde il punto AB.A′B′, e al punto B′ il punto AC.A′C′; sicchè le rette AB, AC, che congiungono due coppie di punti omologhi, s'incontrano nel centro di prospettiva, che risulterà quindi il punto A. Dunque la retta C″B″ passa per A, ed il triangolo A″B″C″ è inscritto in A′B′C′ e circoscritto ad ABC. Variando A″ si ottengono infiniti triangoli analoghi ad A″B″C″.

Questo teorema è dovuto a STEINER (Syst. Entw...).

5. *Gli ortocentri dei quattro trilateri che si ottengono combinando a tre a tre i lati di un quadrilatero completo* abcd, *sono allineati.*

Diciamo A, B, C i punti d' intersezione della d con le abc, ed A′B′C′ i punti all' infinito delle rette perpendicolari rispettivamente ad a,b,c. I tre punti:

$$AC' \, . \, A'C, \quad BC' \, . \, B'C, \quad AB' \, . \, A'B$$

apparterranno all' asse di collineazione u della proiettività $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$. Ma il punto AC′ . A′C è il punto delle altezze del trilatero acd, e analogamente BC′ . B′C e AB′. A′B sono gli ortocentri dei trilateri bcd, abd; dunque questi tre ortocentri appartengono alla u.

Se nel ragionamento esposto mutiamo le veci delle rette c, d, giungeremo alla conclusione che l' ortocentro di abc, appartiene alla retta che congiunge quelli di bcd, acd, ossia alla u; c . d . d.

OSSERVAZIONE. È evidente che la prop. 5 si può presentare anche come un' applicazione del teorema di PAPPO.

La prop. 5 è dovuta a STEINER (1828).

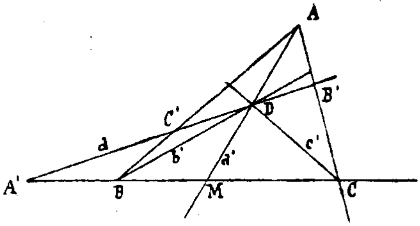
6. *Dati in un piano un triangolo* ABC *e un punto* D *esterno ai lati del triangolo, se una trasversale arbitraria* d *condotta per* D, *sega i lati* BC, CA, AB, *nei punti* A′B′C′, *il gruppo delle rette* DA, DB, DC, d *è proiettivo al gruppo dei punti* A′B′C′D.

Infatti ponendo $a' \equiv DA$, $b' \equiv DB$, $c' \equiv DC$, $M \equiv a' \, . \, BC$, avremo:

$$a'b'c'd \; \pi \; MBCA',$$

ove il simbolo π posto tra i due gruppi, serve ad indicare ch' essi son proiettivi. Proiettando il gruppo MBCA′ da A sulla d, verrà:

$$\mathrm{MBCA}' \;\pi\; \mathrm{DC'B'A'}$$



Se nel gruppo a destra si scambiano i punti 1° e 4°, e il 2° col 3°, otterremo (*E.* § 33):

$$\mathrm{DC'B'A'} \;\pi\; \mathrm{A'B'C'D},$$

e quindi:

$$a'b'c'd \;\pi\; \mathrm{A'B'C'D}.$$

7. *Il gruppo dei punti segati sopra una trasversale dalle facce d'un tetraedro, è proiettivo al gruppo dei piani, che da quella trasversale proiettano i vertici rispettivamente opposti.*

Sia ABCD il tetraedro ed u la trasversale considerata, la quale seghi le facce BCD, CDA, DAB, ABC, risp. nei punti A′B′C′D′, e proietti i vertici ABCD, secondo i piani $\alpha\beta\gamma\delta$.

Proiettando il gruppo A′B′C′D′ da D sulla faccia opposta ABC, e indicando con A″B″C″ le proiezioni di A′B′C′ (le quali verranno a cadere sugli spigoli BC, CA, AB) pel teorema precedente, avremo:

$$a'b'c'u' \;\pi\; \mathrm{A''B''C''D'},$$

ove $a'b'c'$ sono le rette D′A, D′B, D′C ed u' è la proiezione di u. Segando il gruppo dei piani $\alpha\beta\gamma\delta$, con ABC, avremo:

$$\alpha\beta\gamma\delta \;\pi\; a'b'c'u'.$$

Ma giacchè

$$\mathrm{A'B'C'D'} \;\pi\; \mathrm{A''B''C''D'},$$

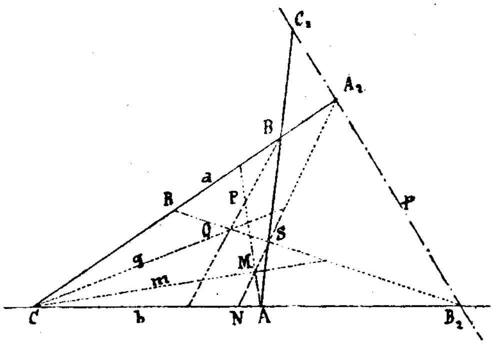
essendo l'un gruppo proiezione dell' altro da D, risulterà, come si voleva provare:

$$\alpha\beta\gamma\delta \;\pi\; \mathrm{A'B'C'D'}.$$

Questo teorema è dovuto a STAUDT (Beiträge zur Geo. der Lage, 1° fascicolo, 1856).

8. *Quando in un triangolo* ABC $\equiv$ abc, *un lato* c *ruota attorno ad un punto* S, *la polare di un punto* P *rispetto al triangolo* (§ 2, n° 6) *varia in un fascio, che ha per centro un punto della retta* PS.

Cominciamo dall'osservare che se il gruppo C (ASPB) è armonico, il punto a . SP è coniugato armonico di P ri-



spetto alla coppia dei punti S e b . SP, onde esso appartiene alla polare di P rispetto alla coppia bc; e siccome il punto stesso a . SP giace sul lato opposto al vertice A $\equiv bc$, la polare di P rispetto al triangolo passerà per quel punto, qualunque sia la posizione di c nel fascio S. Analogamente se è armonico il gruppo C (APSB), la polare di P rispetto al triangolo passerà pel punto b . SP, qualunque sia la posizione di c.

Così la proposizione enunciata resta verificata, quando è soddisfatta una delle condizioni particolari suddette.

Supponiamo ora che non sia armonico nè l'uno nè l'altro dei due gruppi nominati, e diciamo A_2B_2 le intersezioni della polare p di P rispetto al triangolo ABC, coi lati fissi a,b.

Variando c nel fascio S, varia la retta p e variano i due punti A_2B_2: si tratta di provare che le punteggiate descritte da A_2, B_2 son prospettive e che il centro di prospettiva è un punto della retta PS.

Infatti dato A_2 si tiri la A_2S, che seghi b in N e si costruisca il coniugato armonico M del punto A_2 rispetto ad SN. Poichè il gruppo C (ASPB) non è armonico, il punto M è diverso da P, e la retta PM sega b in un punto, che è la posizione assunta da A, corrispondentemente alla posizione data di A_2.

La posizione corrispondente di B si otterrà proiettando A da S sulla a, e dopo ciò, essendo noti i tre vertici del triangolo ABC, sarà pienamente determinato il punto B_2. E si osservi che la retta SB_2 dovrà segare la retta PB in un punto Q, diverso da P (chè altrimenti sarebbe armonico il gruppo C (APSB)) ed il lato a in un punto R, tale che il gruppo B_2QRS riesce armonico. Sicchè al variare di A_2 il punto M descriverà la retta m, coniugata armonica di a rispetto alle CS, CA; ed il punto Q la retta q, coniugata armonica di b rispetto alle CS, CB; onde il fascio descritto dalla SA_2 sarà prospettivo a quello descritto da PA, rispetto all'asse m, ed il fascio descritto da SB_2 a quello descritto da PB, rispetto all'asse q.

Ma i due fasci PA, PB son proiettivi, perchè proiettano da P le due punteggiate, prospettive rispetto al centro S, descritte da A,B; dunque i due fasci descritti da SA_2, SB_2, e quindi le due punteggiate A_2,B_2, risulteranno proiettive tra loro.

Ora è facile vedere che quando A_2 assume la posizione C, anche B_2 cade in C, e che quando A_2 cade nel punto a . SP, B_2 cade nel punto b . SP. Da ciò si trae che le due punteggiate A_2, B_2 son prospettive, e che la retta SP, che congiunge due punti omologhi in questa prospettività, contiene il centro di prospettiva.

9. *Le polari di un punto* P *rispetto ai triangoli che si possono formare prendendo a tre a tre i lati d'un quadrilatero, costituiscono un altro quadrilatero omologico col precedente.*

Sia $abcd$ il quadrilatero dato e sieno $a'b'c'd'$ le polari di P rispetto ai triangoli *bcd*, *cda*, *dab*, *abc*. Se la retta *c* ruota attorno al punto *cd* fino a coincidere con *d*, pel teorema del n.° precedente, la retta *d'* si muoverà attorno ad un punto della retta P. *cd* fino a coincidere con la retta *c'*. Dunque il punto *cd* e il punto *c'd'* sono allineati con P. Analogamente si vede che le congiungenti delle altre 5 coppie di vertici omologhi dei due quadrilateri *abcd*, *a'b'c'd'*, passano per P; e quindi si deduce che le 4 coppie di lati omologhi s' incontrano in 4 punti di una retta *p* (*E.* § 11).

Osservazione 1.ª La retta *p* si chiama la *retta polare del punto* P *rispetto al quadrilatero* abcd.

Osservazione 2.ª Il teorema dimostrato si può anche stabilire mediante considerazioni spaziali, ricorrendo al n.° 28 del § 2. Lasciamo al lettore la cura di sviluppare questa dimostrazione, e di provare inoltre che *il luogo dei centri delle medie armoniche di un punto* P, *rispetto alle intersezioni delle rette date* abcd *con trasversali uscenti da* P, *è la polare del punto rispetto al quadrilatero* abcd (cfr. col n.° 26 del § 2).

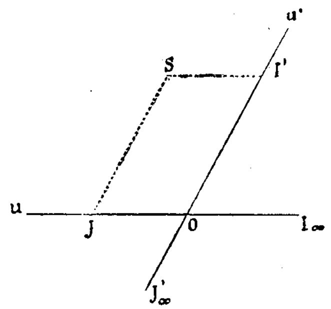
Ne risulta una semplice costruzione lineare del centro armonico di un punto P rispetto a 4 punti, dati sopra una retta per P.

Si osservi infine che le considerazioni esposte sono suscettibili di essere estese ad un *n*- latero piano.

10. *Se di due punteggiate prospettive complanari, se ne fa ruotare una attorno al punto comune, esse restano prospettive ed il centro di prospettiva descrive un cerchio (se la rotazione avviene in un piano, una sfera se la retta mobile descrive una stella), il cui centro è il punto limite della punteggiata fissa, e il cui raggio è la distanza fra il punto limite della punteggiata mobile ed il punto comune alle due punteggiate.*

Sieno *u*, *u'* le due punteggiate prospettive rispetto al centro S. I punti limiti JI' sono segati su esse dalla parallele condotte da S alle rette medesime, e quindi la distanza tra il punto J ed il centro S, uguaglia la distanza OI′, ove O $\equiv$ *uu′*.

Ora se *u′* si muove attorno ad O, le due punteggiate restano proiettive, ed anzi prospettive, perchè il loro punto comune si conserva unito; e siccome due punti corrispondenti si mutano in punti corrispondenti, il punto limite di *u* resterà fisso, e il punto limite di *u′*, avrà da O la distanza costante OI′.



Da ciò deriva che il centro di prospettiva delle due punteggiate nella nuova posizione, avrà da J una distanza uguale ad OI′, e quindi si troverà sopra un cerchio (o sopra una sfera) di centro J e raggio OI′.

Osservazione. Se il centro S è all' infinito, le due punteggiate risultano simili (*E.* § 29) e tali rimarranno facendo ruotare *u′* attorno ad O. Onde, in tal caso, il punto S descrive una retta impropria (o il piano improprio dello spazio).

Se è all' infinito il punto O (nel qual caso le due punteggiate sono ancora simili), invece di parlare di una rotazione di *u′* attorno ad O, si dovrà parlare di una traslazione di *u′* secondo una certa direzione. Allora il centro S si sposterà parallelamente a quella direzione.

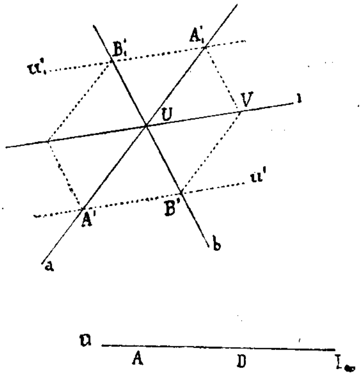
11. *Proiettare due punteggiate omografiche, in guisa che le proiezioni risultino simili.*

Siano AA′ due punti omologhi qualsiansi, nella proiettività data tra le due punteggiate complanari *u*, *u′*.

Si assumano nel piano *uu′*, fuori delle *u*, *u′*, due punti S, S′, e da S si proietti la *u*, sopra una retta u_1 parallela ad SA, e da S′ la *u′*, sopra una retta u'_1 parallela ad S′A′. Allora il punto A si muta nel punto all' infinito A_1 di u_1, ed A′ nel punto improprio A'_1 di u'_1; sicchè A_1, A_1' risultano omologhi nella proiettività tra u_1, u'_1, trasformata di quella data tra u, u'; e quindi le due punteggiate $u_1 u_1'$ risultano simili (*E.* § 29).

12. *Dati un fascio di raggi* U *ed una punteggiata* u, *proiettiva ad* U, *segare il fascio con una retta* u′, *in modo da avere su questa una punteggiata congruente ad* u.

Si costruisca il raggio i di U omologo del punto improprio I_∞ di u: tutte le rette parallele ad i segano U secondo punteggiate simili ad u, perchè al punto I_∞ di u viene a corrispondere, su ciascuna di queste, il punto d' intersezione con i, ossia il punto improprio.



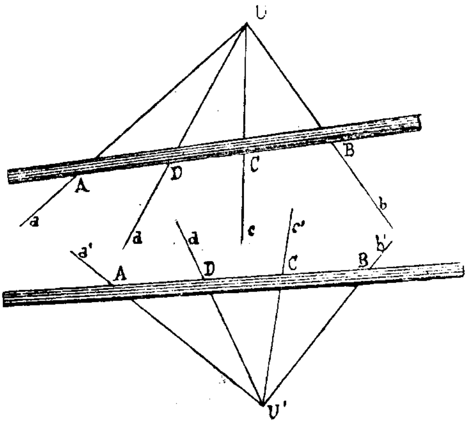
Si consideri su u un segmento qualsiasi AB, e l' angolo ab corrispondente nel fascio U. Riportando su i a partire da U, in un senso o nell' altro, un segmento UV uguale ad AB, e dall' estremo V tirando la parallela al raggio a (o al raggio b) otteniamo su b (o su a) un punto B′ (o A_1'), dal quale esce una retta u' (o u_1') parallela ad i, che sega U secondo una punteggiata simile ad u, col rapporto di similitudine uguale ad 1, ossia secondo una punteggiata congruente ad u (*E.* § 29).

Esistono dunque due rette u' u_1', simmetriche rispetto ad U, che risolvono il problema.

OSSERVAZIONE. Dalla risoluzione precedente si trae un *metodo pratico per costruire con rapidità quante si vogliano coppie di elementi corrispondenti in una omografia tra due forme di 1ª specie.*

Riferiamoci, ad es., a due fasci di raggi U, U′, e supponiamo che la proiettività sia individuata da tre coppie aa', bb', cc' di elementi corrispondenti. Vogliamo costruire il raggio d' di U′ omologo di un raggio d di U.

A tal uopo si prenda una striscia rettangolare di carta, si adatti sul piano di U, e si segnino su essa i punti ABCD, in cui uno de' suoi bordi vien segato dai raggi *abcd*. Si trasporti quindi la striscia sul piano di U′ e si adattino i punti A, B sulle *a′b′*, facendo poi scorrere la striscia (in guisa che i punti suddetti si muovano sulle *a′ b′*) finchè il punto C venga a cadere su *c′*: il che certamente accadrà due volte. Si segni sul piano di U′ la posizione assunta da D, e si proietti il punto segnato, da U′. Così avremo il raggio *d′* omologo di *d*.



Se fossero dati altri raggi *e*, *f*,.... del fascio U, il trasporto eseguito servirebbe anche a costruire i raggi omologhi *e′*, *f′*,.... di U′.

Avendo da eseguire la costruzione della proiettività tra due altre forme di 1.ª specie, basterebbe passare prima a due fasci di raggi, con proiezioni e sezioni.

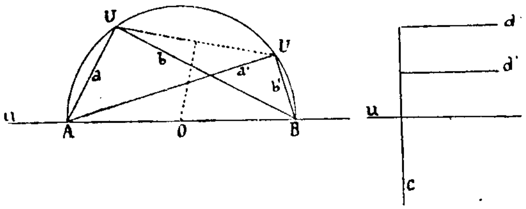
✝ 13. *Dati due fasci proiettivi (di raggi o di piani) esiste sempre una coppia di elementi perpendicolari dell' un fascio, a cui corrisponde sull' altro una coppia di elementi pure perpendicolari, e ne esiste una sola, se i due fasci non sono congruenti* (¹).

Escluso il caso dei fasci congruenti, nel qual caso ad ogni angolo retto dell' un fascio corrisponde un angolo retto dell' altro, consideriamo due fasci di raggi U, U′ proiettivi, e

(¹) Un fascio di raggi ed un fascio di piani possono dirsi *congruenti,* quando il fascio di raggi è congruente ad una sezione normale del fascio di piani.

trasportiamoli in posizione prospettiva facendo coincidere due raggi omologhi e i piani dei due fasci. L'asse di prospettività u risulterà una retta propria, per l'ipotesi che i due fasci non siano congruenti.

Si descriva il cerchio passante per U, U′ ed avente il centro O sulla u, e si chiamino A, B le sue intersezioni con



la retta u. È chiaro allora che all'angolo retto formato dai raggi $a \equiv$ UA, $b \equiv$ UB, del fascio U, corrisponde in U′ un angolo retto, che è quello formato dai raggi $a' \equiv$ U′A, $b' \equiv$ U′B; e che i due angoli retti ab, $a'b'$, sono i soli che si corrispondano nella proiettività tra U, U′.

Potrebbe darsi che U, U′ giacessero sopra una retta perpendicolare ad u, senza peraltro esser situati simmetricamente rispetto ad u. Allora all'angolo retto formato dal raggio comune (unito) $c \equiv$ UU′, e dalla perpendicolare d condotta a c per U, corrisponde in U′ l'angolo retto cd', ove d' è la perpendicolare a c per U′; e non esistono altri angoli retti che si corrispondano.

Se infine U, U′ giacciono simmetricamente rispetto ad u, i due fasci risultano congruenti (inversamente) e sono infinite le coppie di angoli retti corrispondentisi.

Il risultato si trasporta subito a due fasci di piani, considerandone le sezioni con due piani perpendicolari ai rispettivi sostegni; o ad un fascio di raggi e ad uno di piani, facendo una sezione normale di quest'ultimo.

Osservazione. Dicansi i j gli elementi perpendicolari (raggi o piani) del fascio U, a cui corrispondono in U′ gli elementi pure perpendicolari i' j'.

Segando il fascio U con una retta u perpendicolare ad j, ed il fascio U′ con una retta u' perpendicolare ad i', i punti $J \equiv ju$, $I' \equiv i'u'$ risulteranno i punti limiti della proiettività che viene determinata tra u, u', e quindi avremo (pag. 72):

$$JA \,.\, I'A' = \text{costante},$$

ove A, A′ sono le intersezioni delle u, u' con due elementi corrispondenti qualsiansi, a, a'.

Poichè i segmenti delle rette u, u' contati dalle origini J, I′, son proporzionali (in valore e segno) alle tangenti trigonometriche degli angoli che proiettano quei segmenti dai sostegni dei fasci U, U′, la relazione precedente darà luogo a quest'altra:

$$tg ja \,.\, tg i'a' = \text{costante}.$$

Analogamente si prova che:

$$tg ia \; tg j'a' = \text{costante},$$

e si vede che il valore di quest'ultima costante è reciproco del valore della precedente.

La considerazione degli angoli retti che si corrispondono in due fasci proiettivi; la loro determinazione mediante il trasporto dei due fasci in posizione prospettiva, e la relazione metrica ad essi relativa, son dovute a STEINER (Syst. Entw.).

14. *Dati una punteggiata* u *ed un fascio* U *proiettivi, trovare un punto dal quale la* u *si proietti mediante un fascio congruente ad* U.

Si considerino due coppie ab, cd di raggi ortogonali del fascio U e si determinino le coppie omologhe AB, CD, sulla punteggiata u. Se da un punto U′ la u vien proiettata secondo un fascio congruente ad U, i raggi U′A, U′B e U′C, U′D dovranno essere ortogonali, sicchè il punto U′ dovrà essere comune alle due sfere di diametri AB, CD.

Viceversa da ogni punto U′ comune a queste due sfere, la u vien proiettata secondo un fascio riferito proiettivamente ad U, in modo che a due angoli retti di U′ corrispondono due angoli retti di U; e quindi, pel teorema precedente, U′ risulterà congruente ad U (ved. anche *E.* § 29).

Osservazione. Poichè due coppie di angoli retti *ab*, *cd* di un fascio U si separano sempre, lo stesso accadrà delle AB, CD (*E.* § 20), e quindi le due sfere che hanno per diametri AB, CD, si taglieranno secondo un circolo. Dunque:

Dati una punteggiata u *ed un fascio* U *proiettivi, in un piano per* u *esistono sempre due punti dai quali la* u *vien proiettata secondo fasci congruenti ad* U.

15. *Dato un fascio di raggi* U *ed un fascio di piani* u, *proiettivo ad* U, *segare* u *con un piano, in guisa da avere un fascio di raggi congruente ad* U.

Cominceremo dal risolvere la seguente questione preliminare: « Dato un segmento XY ed una retta u sghemba « con XY, esistono sulla u punti da cui il segmento XY si « veda secondo angoli retti? »

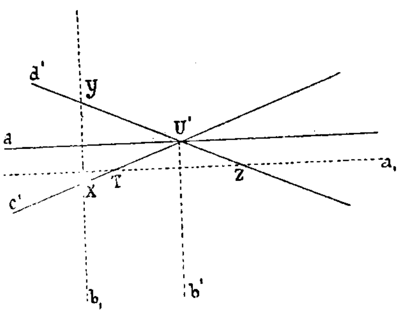
Tali punti, se esistono, dovranno essere comuni ad u e alla sfera di diametro XY; e viceversa ogni punto comune ad u e a questa sfera, soddisfa alla condizione richiesta. Ora se la distanza m tra il punto O, medio tra X, Y, e la retta u, è maggiore di $\frac{XY}{2}$ (raggio della sfera), la u sarà tutta esterna alla sfera, e quindi il problema non avrà soluzioni. Se invece $m \leq \frac{XY}{2}$, si avranno sulla u due punti, distinti o coincidenti, che risolvono il problema.

In particolare se la XY ha la direzione ortogonale ad u, il piede U′ della perpendicolare abbassata da O ad u, sarà contenuto nel piano perpendicolare ad u condotto per XY, e la mediana m del triangolo XU′Y, riescirà maggiore, eguale o minore di $\frac{XY}{2}$, secondo che il punto U′ è esterno alla circonferenza di diametro XY, o giace su essa, o è interno; ossia secondo che l'angolo $\widehat{XU'Y}$ è acuto, o retto, o ottuso.

Ciò premesso, sieno a, b due raggi ortogonali del fascio dato U, a cui corrispondono due piani ortogonali α, β del fascio u (§ 4, n° 13); e sieno c, d altri due raggi ortogonali di U e γ, δ i due piani corrispondenti in u. Se questi due piani sono perpendicolari, ogni piano perpendicolare ad u taglierà $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ secondo due angoli retti e quindi il fascio sezione risulterà congruente ad U; e in tal caso il problema sarà risoluto.

Supponiamo ora che γ, δ non sieno perpendicolari, e si osservi anzitutto che le due coppie $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ si separano, perchè corrispondono a due coppie di angoli retti ab, cd, le quali si separano sempre.

Un piano perpendicolare alla u seghi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nelle a', b', c', d' e la u nel punto U′, e supponiamo, ad esempio, che a' sia interno all'angolo *acuto* $c'd'$ e b' sia interno all' angolo *ottuso* $c'd'$. Allora il segmento finito XY, che le $c'd'$ determinano sopra una retta b_1 perpendicolare ad a', sarà veduto da U′ secondo l' angolo acuto $c'd'$, mentre il segmento finito TZ staccato dalle $c'd'$ sopra una retta a_1 perpendicolare a b', sarà veduto da U′ secondo l' angolo ottuso $c'd'$.



Poichè le $a_1 b_1$ sono sempre in direzioni ortogonali ad u, applicando il lemma sopra stabilito, arriveremo alla conclusione che per ogni retta a_1 si possono condurre due piani seganti il diedro $\gamma\delta$ secondo un angolo retto, mentre per una retta b_1 non se ne può condurre nessuno.

Ma i due piani suddetti, passanti per a_1, segano secondo angoli retti anche il diedro $\alpha\beta$, perchè la retta a_1 è perpendicolare a β, dunque essi tagliano il fascio u secondo due fasci di raggi congruenti ad U.

Si conclude pertanto che:

Dati un fascio di raggi U *ed un fascio di piani* u, *proiettivi, esistono infiniti piani che tagliano* u *secondo fasci di raggi congruenti ad* U, *e questi piani apparten-*

gono a due giaciture, che coincidono quando u *ed* U *sono congruenti.*

Il ragionamento precedente c' insegna a costruire queste giaciture.

OSSERVAZIONE 1ª. Dato un fascio di raggi U ed un fascio di piani u, proiettivi, si può sempre *trasportare il fascio di raggi in guisa da farlo divenir prospettivo al fascio di piani;* e ciò in infiniti modi. Basta perciò portare a coincidere tre raggi di U coi tre raggi che ad essi corrispondono in uno dei fasci, congruenti ad U, ottenuti segando u coi piani che appartengono alle due giaciture suddette.

OSSERVAZIONE 2ª. I due fasci dati, di raggi e di piani, si possono concepire come appartenenti ad una stella S, perchè se così non fosse, basterebbe trasportare rigidamente il fascio U, finchè il suo centro venisse a cadere in un punto S di u. Allora il teorema dimostrato dà luogo ad una proposizione di Geometria della stella, alla quale si può applicare la legge di dualità, perchè nella stella questa legge vale anche per le proprietà metriche (*E.* § 55). Si ha così il teorema:

Dato un fascio di raggi U *ed un fascio di piani* u *ad esso proiettivo, esistono sempre due rette uscenti dal punto* U, *e dalle quali il fascio di raggi vien proiettato secondo fasci di piani congruenti ad* u.

Ma su questa applicazione della legge di dualità nella stella, ritorneremo in seguito.

OSSERVAZIONE 3ª. Dal teorema dimostrato si trae anche questo corollario:

Dato un prisma triangolare di spigoli a b c, *esistono infiniti piani che segano il prisma secondo triangoli* ABC *simili ad un triangolo dato* A′B′C′, *e questi piani appartengono a due determinate giaciture.*

Conduciamo da a il piano parallelo a bc, e diciamolo α; e poniamo inoltre $\beta \equiv ab$, $\gamma \equiv ac$. In modo analogo chiamiamo a' la parallela alla B′C′ condotta da A′, e poniamo $b' \equiv A'B'$, $c' \equiv A'C'$.

Ogni piano che seghi il fascio di piani $\alpha\beta\gamma$ secondo fasci di raggi congruenti ad $a'b'c'$, taglia gli spigoli a, b, c rispettivamente in A, B, C, ed il triangolo così formato, ha gli angoli $\widehat{A}\ \widehat{B}\ \widehat{C}$ risp. uguali agli angoli $\widehat{A'}\ \widehat{B'}\ \widehat{C'}$ del triangolo dato; dunque è simile ad esso.

Si badi che qui noi supponiamo di aver fissato lo spigolo su cui deve cadere il vertice del triangolo da costruirsi, omologo di un dato vertice del triangolo A′B′C′; e precisamente abbiamo associato al vertice A′ lo spigolo a, a B′, b, a C′, c.

Se non si stabilisce quali sono gli spigoli da associarsi ad A′, B′, C′, esisteranno *12 giaciture* soddisfacenti al problema: due per ognuna delle 6 permutazioni degli spigoli abc.

La proposizione dell' Oss. 3ª serve per dimostrare elementarmente il *teorema di* Pohlke (1853), che nella Geometria descrittiva, sta a fondamento dell' *assonometria obliqua.*

§ 5. *Elementi uniti di una proiettività Problemi di 2° grado.*

Sommario: *Generalità — Criterio di Steiner per riconoscere la natura di una proiettività data sopra una retta — Teorema di Chasles concernente la possibilità di proiettare una omografia ellittica di una retta secondo una congruenza diretta di un fascio di raggi — Costruzioni di Steiner degli elementi uniti d' una proiettività — Primi problemi di 2° grado: Coppie di raggi omologhi paralleli nella proiettività tra due fasci complanari — Segare due fasci proiettivi secondo due punteggiate simili sovrapposte — Coppie comuni a due proiettività — Tirare da un punto una retta che seghi due punteggiate proiettive complanari secondo due punti omologhi — Problemi di sezione di Apollonio; ecc. — Inscrivere in un dato triangolo un rettangolo di area data — Dati in un piano due n-goni semplici, costruire un n-gono inscritto nell' uno e circoscritto all' altro.*

1. Nei problemi di questo § interverrà la nozione degli *elementi uniti* di una proiettività tra due forme di 1ª specie sovrapposte, cioè di quegli elementi che coincidono coi loro omologhi.

Il teorema fondamentale c'insegna che l'unica proiettività dotata di tre elementi uniti è l'identità; sicchè escludendo la proiettività identica, si possono presentare (e si presentano effettivamente — *E.* § 31) soltanto i tre casi seguenti:

1°) Proiettività con due elementi uniti, che diconsi *iperboliche.*

2°) Proiettività con un solo elemento unito, che diconsi *paraboliche.*

3°) Proiettività senza elementi uniti, che diconsi *ellittiche.*

Se la proiettività è individuata mediante tre coppie di elementi omologhi, non si può decidere sul numero degli elementi uniti, guardando alla disposizione delle coppie date, se non nel caso in cui la proiettività è discorde, chè allora è certamente iperbolica (ma non viceversa) (*E.* § 31).

2. *Se due punteggiate sovrapposte* u, u′ *son riferite proiettivamente, ed* J, I′ *sono i punti limiti,* O *il punto medio del segmento* JI′, *ed* O′ *il corrispondente di* O, *pensato come appartenente alla* u, *la proiettività tra* u, u′ *è iperbolica o ellittica secondo che* O *è interno o esterno al segmento finito* JO′; *ed è parabolica quando* O *coincide con* O′.

Infatti per la relazione di STEINER (*E.* § 34), indicando con M un punto unito della proiettività tra *u*, *u′* (supposto esistente), avremo:

$$(1) \qquad MJ \cdot MI' = OJ \cdot O'I'.$$

Riferendo i segmenti del 1° membro all'origine O, e osservando che OJ = — OI′, otterremo:

$$(OJ - OM)\,(OJ + OM) = - OJ \cdot O'I',$$

ossia:

$$(2) \qquad \overline{OJ}^2 - \overline{OM}^2 = - OJ \,.\, O'I',$$

donde:

$$(3) \quad \overline{OM}^2 = OJ(OJ + O'I') = OJ\,(O'I' - OI') = OJ \,.\, O'O,$$

la quale prova che se esistono punti uniti, il prodotto $OJ \,.\, O'O$ è positivo o nullo. Il 1° fatto si verifica quando la proiettività è iperbolica, ed allora è chiaro che il punto O risulta interno al segmento finito JO'; il secondo fatto si verifica quando la proiettività è parabolica, ed allora O risulta coincidente con O'.

Poichè viceversa se un punto M soddisfa alla (3), risalendo si vede che soddisfa alla (1), quando la proiettività è ellittica non dovrà potersi estrarre la radice quadrata di $OJ \,.\, O'O$ (restando nel campo reale), ossia O dovrà essere esterno al segmento finito JO'.

Questo criterio per riconoscere la natura di una proiettività, trovasi in STEINER (Syst. Entw....), il quale presenta la condizione per l'esistenza dei punti uniti sotto la forma:

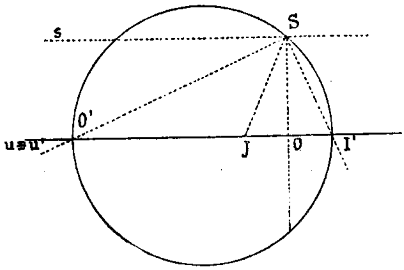
$$k \geq -\frac{1}{4}\,\overline{JI'}^2,$$

ove k è il prodotto costante $AJ \,.\, A'I'$. La disuguaglianza precedente si deduce subito dalla (2).

3. *Se fra due punteggiate sovrapposte si ha una proiettività ellittica, essa può (in infiniti modi) generarsi segando il sostegno comune coi lati di un angolo di grandezza costante, che ruoti in un determinato verso attorno al suo vertice fisso; cioè essa può proiettarsi secondo una congruenza diretta di un fascio di raggi.*

Conservando le stesse notazioni del n.° precedente, in virtù del criterio ivi stabilito, il punto O corrispondente ad O' nella data proiettività ellittica tra u' ed u, dovrà essere esterno al segmento finito JO'.

Ciò posto, supponiamo che esista un punto S da cui la data proiettività ellittica si proietti secondo una congruenza diretta (*E.* § 32). Dicendo *s* la parallela condotta da S ad $u \equiv u'$, l'angolo formato dalle rette *s*, SJ dovrà risultare uguale all'angolo corrispondente, formato dalle SI', *s*, e quindi il triangolo JSI' dovrà risultare isoscele, ossia S dovrà giacere sul piano perpendicolare ad *u*, condotto per O.



Inoltre gli angoli corrispondenti formati dalle rette *s*, SO e dalle SI', SO', dovranno essere uguali, e poichè il primo è retto, anche il secondo dovrà esser retto, ossia il punto S si troverà sulla sfera di diametro I'O'.

Viceversa ogni punto comune a questa sfera e al piano perpendicolare ad *u*, condotto per O, soddisfa alla condizione richiesta.

Ora la sfera e il piano suddetti si tagliano secondo un circolo (di centro O), perchè O è interno alla sfera; e da ogni punto di questo circolo la data proiettività ellittica si proietta in una congruenza diretta di un fascio di raggi.

Osservazione. Volendo *proiettare due fasci di raggi sovrapposti, riferiti mediante una proiettività ellittica, in guisa da avere due fasci sovrapposti, direttamente congruenti*, basterà segare i due fasci dati con una retta *u*, considerare un punto S dal quale la proiettività che si viene ad avere su *u* sia proiettata secondo una congruenza diretta, e infine proiettare i due fasci dati, sul piano S*u*, da un punto della retta che congiunge il loro centro comune col punto S.

La prop. 3 trovasi in Chasles.

4. *Costruzioni degli elementi uniti di una proiettività tra due forme di 1ª specie sovrapposte.*

1ª *costruzione.* Considereremo il caso di due punteggiate sovrapposte, perchè avendosi due fasci (di raggi o di piani) sovrapposti, con una sezione ci possiamo ridurre subito al caso suddetto.

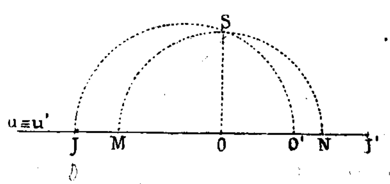
Diciamo J, I′ i punti limiti della proiettività tra le due punteggiate sovrapposte u, u'. Se J, I′ fossero ambedue impropri, il punto all'infinito di $u \equiv u'$ sarebbe unito, ed allora l'altro punto unito si costruirebbe lineamente (*E.* § 30). Noi supporremo perciò che J ed I′ sieno propri ed inoltre supporremo che sieno distinti, chè il caso dei punti limiti coincidenti verrà trattato più tardi tra le applicazioni della teoria dell'involuzione.

Diciamo (come al n° 2) O il punto medio del segmento finito JI′ ed O′ l'omologo di O, pensato come appartenente ad u. Se O′ coincide con O, la proiettività è parabolica ed allora l'unico punto unito è O.

Affinchè la proiettività data sia iperbolica bisogna e basta che O risulti interno al segmento finito JO′ (n° 2). In tali ipotesi la relazione

$$\overline{OM}^2 = OJ\,.\,O'O,$$

già trovata al n° 2, ci dice che i due punti uniti distano da O di un segmento che è medio proporzionale tra OJ ed O′O. Dunque per costruire questi punti uniti, basterà condurre il cerchio di diametro JO′, intersecarlo in S con la perpendicolare condotta da O ad u, e infine segare la retta u nei punti M, N, col cerchio di raggio OS.



Osservazione. Se la proiettività tra u, u' fosse individuata mediante tre coppie di punti omologhi, con le note costruzioni della proiettività si cercherebbero i punti limiti e il corrispondente O′ di O, eppoi si applicherebbe la costruzione esposta. *Le operazioni occorrenti si effettuerebbero tutte con la riga e col compasso.*

2ª *costruzione.* Un' altra costruzione elementare degli elementi uniti di una proiettività, poggia sopra la considerazione delle *corrispondenze proiettive tra i punti di una circonferenza.*

Ecco come si perviene a trasportare sulla circonferenza il concetto di proiettività, stabilito per le forme fondamentali di 1ª specie.

Poichè, com' è noto dalla Geometria elementare, gli angoli che proiettano uno *stesso* arco di circonferenza da due punti della medesima, sono uguali, e dello stesso verso, potremo dire che i fasci che proiettano i punti di una circonferenza da due punti fissi della medesima, sono direttamente congruenti.

Da ciò deriva che se quattro raggi uscenti da un punto della circonferenza formano un gruppo armonico, le ulteriori intersezioni di quei raggi con la circonferenza, son proiettate da un altro punto qualunque di questa, secondo un gruppo armonico di raggi.

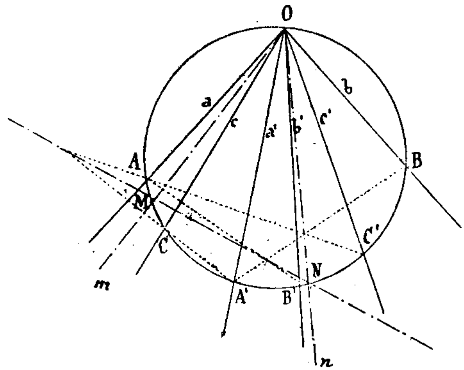
Perciò si dice che quei punti formano *un gruppo armonico sulla circonferenza.*

Due punteggiate, sopra circonferenze distinte o sovrapposte, si diranno *proiettive,* quando son riferite biunivocamente in guisa che ad un gruppo armonico dell' una corrisponda un gruppo armonico dell' altra.

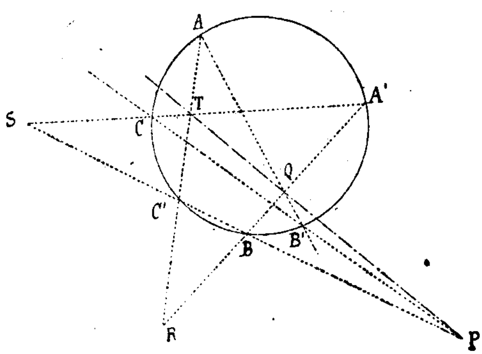
Proiettando ciascuna di quelle punteggiate da un punto della relativa circonferenza, si ottengono due fasci di raggi proiettivi. In particolare se le due punteggiate ABC..., A′B′C′..., appartengono ad una medesima circonferenza, proiettando la ABC... dal punto A′ e la A′B′C′... dal punto A, si ottengono due fasci col raggio AA′ unito e quindi prospettivi.

Sicchè i raggi AB′ e A′B, AC′ e A′C, ... si taglieranno in punti di una medesima retta *s*. Ogni punto unito della proiettività $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ apparterrà alla retta *s*, e viceversa ogni punto comune a questa retta e alla circonferenza sarà unito.

Ciò premesso, avendosi tra due fasci di raggi sovrapposti di centro O una proiettività $\begin{pmatrix} abc \\ a'b'c' \end{pmatrix}$, per trovarne i raggi uniti, si conduca una circonferenza per O nel piano di quei fasci, e si chiamino ABC, A′B′C′ le ulteriori intersezioni dei raggi *abc*, *a′b′c′* con la circonferenza. Costruendo, come prima, la retta *s* e proiettando da O le eventuali intersezioni di *s* con la circonferenza, avremo i raggi uniti richiesti.



Osservazione 1ª. La costruzione precedente si eseguisce anch' essa con la riga e col compasso; anzi con la sola riga se il cerchio ausiliario è completamente tracciato. In tal caso si costruiscono con la sola riga, anche i punti uniti di una proiettività tra due punteggiate sovrapposte, date sul foglio, bastando proiettarle sopra la circonferenza ausiliaria da un punto di questa.



Osservazione 2ª. La retta *s* che contiene i punti $Q \equiv AB' \,.\, A'B$, $T \equiv AC' \,.\, A'C, \ldots$, d' intersezione dei raggi omologhi nella proiettività tra i fasci A ed A', che proiettano le punteggiate $A'B'C'\ldots$, $ABC\ldots$, non muta se queste punteggiate si proiettano da altri due punti omologhi B, B': proprio come accade dell'asse di una proiettività tra due punteggiate complanari, ma non sovrapposte (*E.* § 28). Per provar ciò, basterà dimostrare ad esempio che il punto $P \equiv BC' \,.\, B'C$ è allineato coi punti Q e T.

Proiettando il gruppo $BA'B'C'$, dai punti A, C, avremo:

$$A(BA'B'C') \,\pi\, C(BA'B'C'),$$

e segando questi due gruppi di raggi rispettivamente con le trasversali BA' e BC' e ponendo:

$$R \equiv AC' \,.\, A'B \ , \ S \equiv A'C \,.\, BC',$$

verrà:

$$BA'QR \,\pi\, BSPC'.$$

Siccome queste due quaderne hanno il punto comune B unito, le rette $A'S$, QP, RC' concorreranno in un punto; cioè il punto T, comune alle rette $A'S \equiv A'C$, $RC' \equiv AC'$, apparterrà alla QP, *c. d. d.*

La retta *s* che contiene i punti $AB' \,.\, A'B$, $AC' \,.\, A'C$, $BC' \,.\, B'C$, ... dicesi *asse di proiettività* delle due punteggiate $ABC\ldots$, $A'B'C'\ldots$.

Le costruzioni esposte sono dovute entrambe a STEINER (Syst. Entw....).

5. Il problema risoluto al n. precedente è il tipo dei *problemi di 2° grado*, cioè di quei problemi determinati che in Geometria analitica dipendono dalla risoluzione di un sistema di equazioni di 1° grado e di una sola equazione di 2° grado.

Anzi possiamo dire che le operazioni analitiche occorrenti per la risoluzione di un tale sistema, si traducono geometricamente in operazioni di proiezione e sezione, con l'aggiunta delle operazioni che occorrono per determinare gli elementi uniti di una proiettività.

Ciò dipende dal fatto che il problema di risolvere un' equazione di 2° grado, è perfettamente equivalente al problema geometrico di determinare gli elementi uniti di una proiettività. Invero avendosi un' equazione di 2° grado

$$(1) \qquad x^2 - px - q = 0,$$

e interpretando x come ascissa di un punto sopra una retta u, si può sempre immaginare una proiettività tra i punti di u, per modo che un punto limite J coincida con l' origine, che l' altro punto limite I′ abbia l' ascissa uguale a p e che inoltre il prodotto JA . I′A′ delle distanze di due punti corrispondenti AA′ dai punti limiti, sia misurato da q.

Se s' indica con M un punto unito di questa proiettività, la relazione:

$$\mathrm{JM} \,.\, \mathrm{I'M} = q,$$

osservando che $\mathrm{I'M} = \mathrm{JM} - \mathrm{JI'}$, diviene

$$\overline{\mathrm{JM}}^2 - p \,.\, \mathrm{JM} - q = 0;$$

sicchè le radici dell' equazione (1) sono le ascisse dei punti uniti della proiettività suddetta.

Dalla definizione dei problemi di 2° grado, si trae che un problema *determinato* di questa classe può avere al più due soluzioni (reali).

Anche i problemi di 2° grado si distinguono in *grafici* e *metrici*, e questi ultimi si possono trattare come problemi grafici allorquando sieno assegnate sul foglio del disegno due coppie di rette ortogonali e due coppie di rette parallele.

Ma su ciò, come sulla possibilità di risolvere con la sola riga tutti i problemi di 2° grado della geometria piana, quando sieno assegnati sul foglio certi enti geometrici, come ad es. un cerchio col suo centro (*E.* § 73), ritorneremo più tardi dando molti altri esempi di problemi di 2° grado, oltre a quelli semplicissimi, che verranno ora risoluti.

6. *Dati in un piano due fasci di raggi distinti proiet-*

tivi, determinare le coppie di raggi omologhi tra loro paralleli.

Sieno U, U′ i due fasci proiettivi. Si faccia corrispondere ad ogni raggio a di U il raggio a_1 tirato da U parallelamente al raggio a', omologo di a in U′. Il fascio U_1 descritto dal raggio a_1, risulta proiettivo al fascio U descritto da a. I raggi uniti nella proiettività tra U ed U_1, insieme ai loro corrispondenti in U′, dànno le coppie richieste.

7. *Dati in un piano due fasci proiettivi* U, U′, *per un punto* P *del loro piano, condurre una retta che li seghi secondo due punteggiate simili.*

Basta condurre per P le parallele alle coppie di raggi omologhi tra loro paralleli, o ai raggi uniti, se i due fasci fossero sovrapposti. La dimostrazione semplicissima al lettore.

8. *Date sopra una retta due diverse proiettività* ω, π, *trovare due punti che sieno omologhi in entrambe.*

Consideriamo la proiettività $\gamma \equiv \omega^{-1}\pi$; cioè, preso un punto A della retta u, troviamone gli omologhi A′, A″ nelle proiettività ω, π, e consideriamo la corrispondenza che nasce tra A′, A″ al variare di A. Se X′, Y′ sono i punti uniti eventuali della proiettività γ, ad essi corrisponderanno, mediante la ω^{-1} o la π^{-1}, due medesimi punti X, Y, e le coppie XX′, YY′ soddisfaranno al problema proposto.

In particolare se la π è una congruenza diretta, si risolve il problema di *determinare due punti omologhi in una proiettività data sopra una retta, i quali abbiano una distanza assegnata in grandezza e verso.*

9. *Date in un piano due punteggiate proiettive, non sovrapposte, per un punto dato condurre una retta che seghi le due punteggiate in due punti omologhi.*

Le rette che risolvono il problema sono evidentemente gli eventuali raggi uniti della proiettività tra i fasci sovrapposti, che si ottengono proiettando le due punteggiate dal punto dato.

Il problema è di 2° grado, ma si abbassa al 1° grado quando il punto è dato sopra una delle due rette: invero in tal caso una delle soluzioni è la retta a cui appartiene il punto, e l'altra soluzione si ottiene congiungendo il punto stesso col suo omologo nell'altra punteggiata.

Osservazione. Il problema precedente comprende come casi particolari metrici i seguenti problemi:

Problema della sezione di ragione. — *Dati in un piano un punto* O *e due rette* u, u' *coi relativi versi positivi, e su queste rette due punti* A, A', *condurre per* O *una retta la quale seghi* u, u' *in due punti* X, X' *tali che il rapporto* $\frac{AX}{A'X'}$ *sia uguale, in valore e segno, ad un numero dato* r.

Consideriamo la similitudine che tra le due punteggiate *u*, *u'* viene individuata dalla coppia A, A' di punti corrispondenti e dal rapporto di similitudine *r*. Le rette uscenti da O e seganti *u*, *u'* in coppie di questa similitudine, risolvono il problema.

Problema della sezione di spazio. — *Dati, come sopra, il punto* O *e le rette* u, u', *sulle quali sieno fissati i punti* J, I', *condurre per* O *una retta che le tagli in due punti* X, X' *tali che il prodotto* JX . I'X' *sia uguale, in valore e segno, ad un numero dato* p.

Basta costruire le rette uscenti da O, che segano su *u*, *u'* punti omologhi nella proiettività individuata dai punti limiti J, I' e dalla condizione che il prodotto costante delle distanze di due punti corrispondenti da J, I', sia misurato da *p*.

Se in particolare si suppone che i punti J, I' coincidano entrambi col punto *uu'*, si ottiene la risoluzione del problema di *condurre per un punto* O *una retta che insieme a due rette date formi un triangolo di area data.*

Un altro problema, che per quanto non rientri nel problema 9, pure è analogo ai precedenti, è il

Problema della sezione determinata. — *Dati sopra una retta (col suo verso positivo) quattro punti* A, A′, B, B′, *trovare su essa un punto* X *tale che*

$$\frac{A'X}{B'X} = r\,\frac{AX}{BX},$$

ove r *è un numero dato di grandezza e di segno.*

Diciamo I′ il punto della retta data che soddisfa alla condizione $\frac{A'I'}{B'I'} = r$, ed I_∞ il punto improprio della retta. Allora la relazione da soddisfare diviene:

$$(ABXI_\infty) = (A'B'XI'),$$

la quale prova che il punto X richiesto è unito nella proiettività $\begin{pmatrix} ABI_\infty \\ A'B'I' \end{pmatrix}$.

I problemi delle sezioni di ragione, di spazio e determinata, furono risoluti da Apollonio in tre scritti: *De sectione rationis, De sectione spatii, De sectione determinata*, dei quali il primo è a noi pervenuto, e gli altri due sono stati ricostruiti sulle indicazioni di Pappo.

10. *Sopra una retta data determinare un segmento che sia veduto da due punti dati sotto angoli assegnati in grandezza e verso.*

Si considerino le due proiettività segate sulla retta dalle due congruenze dirette, che i due dati angoli individuano nei fasci di raggi aventi per centri i punti dati. Una coppia di punti omologhi in entrambe le proiettività (n. 8), dà un segmento soddisfacente alla condizione richiesta.

11. *Date in un piano due rette e un punto, condurre per questo due trasversali che intercettino su quelle, due segmenti dati in grandezza e verso.*

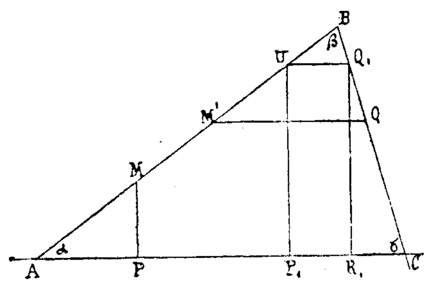
Si considerino le due congruenze generate sulle due rette dalle traslazioni secondo i dati segmenti. Una coppia di raggi omologhi in ambedue le omografie ottenute proiettando dal punto dato quelle congruenze, risolve il problema.

12. *In un dato triangolo, inscrivere un rettangolo di area data, il quale abbia due vertici consecutivi sopra un lato assegnato del triangolo, e gli altri due vertici sugli altri due lati.*

Sia ABC il dato triangolo, ed a, b sieno l'altezza e la base di un rettangolo equivalente a quello che vogliamo inscrivere nel dato triangolo, in modo che *due* vertici cadano sul lato AC. Preso un punto M del lato AB, si abbassi da M la perpendicolare MP sul lato AC, e si determini un segmento x tale che

$$a \times b = \mathrm{MP} \times x.$$

Esistono due rette parallele ad AC e simmetriche rispetto a B, sulle quali l'angolo $\beta = \widehat{\mathrm{ABC}}$ stacca due segmenti uguali ad x. Queste due rette segnano su AB due punti, e noi converremo di scegliere quel punto M', tra i due suddetti, pel quale il segmento BM' ha un determinato verso rispetto al segmento AM (p. e. il verso contrario, come nella figura).



Al variare del punto M sul lato AB, il punto M' descrive una punteggiata proiettiva a quella descritta da M. Infatti, se poniamo $\alpha \equiv \widehat{\mathrm{BAC}}$, $\gamma \equiv \widehat{\mathrm{ACB}}$ e consideriamo i segmenti e gli angoli in valore assoluto, avremo:

$$\mathrm{MP} = \mathrm{MA}\ sen\ \alpha, \quad \frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{M'B}} = \frac{sen\ \beta}{sen\ \gamma},$$

dalle quali si trae:

$$\mathrm{MA} \cdot \mathrm{M'B} = \frac{\mathrm{MP} \cdot \mathrm{M'Q}\ sen\ \gamma}{sen\ \alpha\ sen\ \beta} = \frac{ab\ sen\ \gamma}{sen\ \alpha\ sen\ \beta}.$$

Dunque in valore assoluto il prodotto MA . M′B è costante; ma lo è pure anche in segno per l'ipotesi fatta che ad ogni posizione di M corrisponda una tal posizione di M′, che il segmento M′B abbia un verso assegnato rispetto al segmento MA. È quindi vero che le posizioni di M, M′ si corrispondono in una proiettività, di cui A, B sono i punti limiti (appartenenti risp. alle punteggiate descritte da M, M′).

Se U è unito nella proiettività suddetta, tirando da U la perpendicolare UP_1 e la parallela UQ_1 ad AC, e da Q_1 la perpendicolare Q_1R_1 pure ad AC, avremo un rettangolo soddisfacente al problema. I punti uniti della proiettività tra M ed M′ si potranno costruire immediatamente con la regola di STEINER esposta al n° 4 (1ª Costr.).

Si può vedere facilmente sotto quali condizioni esisteranno dei rettangoli tutti interni al triangolo e soddisfacenti al problema.

Perchè ciò accada occorre e basta che, avendo scelto il punto M′ in guisa che il prodotto MA . M′B sia negativo, la proiettività tra le punteggiate descritte da M, M′, risulti iperbolica o parabolica. Avremo dunque anzitutto:

$$MA \,.\, M'B = - \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta};$$

e inoltre, giacchè $M'B = AB - AM'$:

$$AM \,.\, AM' - AB \,.\, AM + \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = 0;$$

dalla quale si ottiene l'equazione determinatrice dei punti uniti, ponendo $AM' = AM$:

$$\overline{AM}^2 - AB \,.\, AM + \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} = 0.$$

Perchè quest' equazione abbia radici reali bisogna e basta che:

$$\overline{AB}^2 - \frac{4\, ab \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \geq 0,$$

ossia:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\overline{AB}^2\, sen\,\alpha\, sen\,\beta}{sen\,\gamma} \geq 2ab.$$

Ora il primo membro di questa disuguaglianza è l'area del dato triangolo ed il secondo è il doppio dell'area del rettangolo da costruirsi; dunque:

Perchè sia possibile il problema di inscrivere (nel senso precisato) un rettangolo di area data in un dato triangolo, con la condizione ulteriore che il rettangolo risulti interno al triangolo, bisogna e basta che l'area di questo non sia inferiore del doppio dell'area di quello.

13. *Dati in un piano due n-goni semplici, costruire un n-gono inscritto nell'uno e circoscritto all'altro.*

Date n rette $r_1\ r_2 \ldots r_n$ ed n punti $S_1\ S_2 \ldots S_n$, il problema proposto consiste nel determinare un n-gono i cui vertici giacciano ordinatamente sulle rette $r_1 r_2 \ldots r_n$ ed i cui lati passino ordinatamente pei punti $S_1\ S_2 \ldots S_n$.

Di un punto P_1 di r_1 diciamo P_2 la proiezione su r_2 fatta da S_1, di P_2 diciamo P_3 la proiezione su r_3 fatta da S_2, ... , di P_{n-1} diciamo P_n la proiezione su r_n da S_{n-1}, e infine chiamiamo P'_1 la proiezione di P_n da S_n su r_1.

Poichè al variare di P_1 sulla r_1, le punteggiate descritte dai punti $P_1\ P_2 \ldots P_{n-1}\ P_n\ P'_1$ sono ciascuna prospettiva alla seguente, le punteggiate descritte da P_1, P'_1 saranno proiettive.

Se U_1 è unito nella proiettività tra P_1 e P'_1, dicendo $U_2\ U_3 \ldots U_n$ le proiezioni di $U_1\ U_2 \ldots U_{n-1}$ risp. dai centri $S_1\ S_2 \ldots S_{n-1}$ sulle rette $r_2\ r_3 \ldots r_n$, la proiezione di U_n da S_n su r_1, sarà il punto U_1 di partenza, onde il poligono $U_1\ U_2 \ldots U_n$ avrà i suoi lati $U_1\ U_2$, $U_2\ U_3$, ..., $U_{n-1}\ U_n$, $U_n\ U_1$ passanti ordinatamente pei punti $S_1\ S_2 \ldots S_n$, e i vertici giacenti ord. sulle rette $r_1\ r_2 \ldots r_n$; cioè $U_1\ U_2 \ldots U_n$ sarà una soluzione del problema.

Sicchè tutto si riduce alla costruzione dei punti uniti della proiettività tra P_1, P'_1. Basterà perciò conoscere le posizioni di P'_1 corrispondenti a tre posizioni arbitrarie di P_1 (§ 5, n. 4, 2ª costr.).

OSSERVAZIONE 1ª. Il metodo che abbiamo seguito nella risoluzione di questo problema, si chiama *metodo dei tentativi o di falsa posizione.*

OSSERVAZIONE 2ª. Il problema risoluto è di 2º grado e quindi in generale non ha più di due soluzioni. Ma per particolari legami tra gli elementi $r_1\ r_2 \ldots r_n\ S_1\ S_2 \ldots S_n$, può darsi che la proiettività considerata tra P_1 e P'_1 si riduca ad un' identità: ossia che vi sieno infiniti n-goni inscritti in $r_1\ r_2 \ldots r_n$ e circoscritti ad $S_1\ S_2 \ldots S_n$. Un esempio di tale possibilità lo abbiamo già incontrato al nº 4 del § 4.

Il probl. 13 trovasi risoluto in STEINER (Syst. Ent..., 1832).

CAPITOLO TERZO

Involuzione nelle forme di 1ª specie

§ 6. *Problemi sul concetto di involuzione in generale, ed in particolare sulle involuzioni ellittiche ed iperboliche.*

SOMMARIO: *Generalità — Luogo di un punto dal quale due punteggiate proiettive complanari vengono proiettate secondo una involuzione — Sovrapporre due forme di 1ª specie proiettive in guisa da ottenere un' involuzione — Una condizione grafica affinchè tre coppie appartengano ad un' involuzione — Conseguenze relative alle proiettività paraboliche — Risoluzione di altri problemi del tipo: Date due convenienti forme di 1ª specie proiettive, segare o proiettare una di esse o entrambe, in modo da avere una proiettività con un assegnato carattere metrico — Involuzione unita di una proiettività — Dimostrazione metrica dell' esistenza di tale involuzione per le proiettività ellittiche. Involuzioni armoniche con una proiettività. Cenni sugli immaginarî — Costruzioni degli elementi doppi di un' involuzione — Coppia comune a due involuzioni — Costruzione di Chasles dei punti uniti di una proiettività — Punti coniugati in un' involuzione ellittica e aventi la distanza minima — Proiettività cicliche. Proprietà delle potenze successive di una proiettività tra forme sovrapposte — Risoluzione lineare approssimata dei problemi di 2° grado — Alcune relazioni metriche concernenti più coppie in involuzione.*

1. Ricordiamo brevemente le nozioni fondamentali della teoria dell' involuzione tra forme di 1ª specie (*E.* Cap. VII).

Una proiettività ω tra due forme di 1ª specie sovrapposte dicesi *involutoria* o brevemente un' *involuzione*, quando due elementi qualunque AA' del comune sostegno, si corrispondono in doppio modo, cioè quando nella ω ad A corrisponde A′ e ad A′, A.

Una proiettività involutoria ω coincide con la sua inversa, e quindi il suo quadrato produce l'identità. La considerazione delle due forme sovrapposte corrispondentisi mediante la ω, nel caso che stiamo esaminando, è superflua; sicchè si suol parlare di un'involuzione della forma, e due elementi in essa corrispondenti si dicono *coniugati*, perchè si trovano in condizione reciproca.

Si dimostra che affinchè una proiettività sia involutoria basta che esista una coppia di elementi distinti che si corrispondano in doppio modo; cioè se esiste una tal coppia, tutte le altre godono della stessa proprietà (*E.* § 36). Da questo teorema segue che un'involuzione è individuata da due coppie di elementi coniugati.

Le involuzioni si distinguono in *ellittiche* ed *iperboliche*, secondo che son concordi o discordi. Il primo caso si presenta quando due coppie qualunque di elementi coniugati si separano, il secondo nel caso contrario (*E.* § 37).

In un'involuzione iperbolica due elementi corrispondenti separano armonicamente gli elementi doppi (*E.* § 38).

Si dimostra pure che due involuzioni, di cui una almeno sia ellittica, hanno sempre una coppia comune (*E.* § 37), e che nel caso che sieno entrambe iperboliche, esse hanno o non hanno una coppia comune, secondo che le coppie degli elementi doppi non si separano o si separano.

L'insieme di tre coppie di punti coniugati in un'involuzione, che Desargues (come afferma Beaugrand) chiamava l'*involuzione dei sei punti*, trovasi già considerato in Pappo, il quale poneva una costruzione di tre coppie in involuzione tra le premesse ai porismi di Euclide, come vedremo più dettagliatamente nelle citazioni storiche del § seguente. Della proposizione di Pappo si trova un'estensione notevole in Desargues (Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan, 1639). In quest'opera Desargues considera anche le involuzioni dei 5 e dei 4 punti, che si hanno rispettivamente quando una o due delle tre coppie son costituite da elementi coincidenti (doppi). L'insieme delle infinite coppie d'un' involuzione — anche di ordine superiore — fu studiato da PONCELET (in lavori del 1831 restati inediti fino al 1866 — Traité des propriétés projectives... t. II). Ma la teoria moderna dell' involuzione, come corrispondenza proiettiva tra gli elementi di una forma di 1ª specie, si è formata specialmente in seguito ai lavori di CHASLES (Aperçu...., Note X), di SEYDEWITZ (Theorie der involutorischen Gebilde..., 1844) e di STAUDT (Geo. der Lage, 1847), il quale liberò completamente la teoria dalle considerazioni metriche.

2. *Il luogo di un punto del piano da cui due punteggiate proiettive, non sovrapposte, vengono proiettate secondo un fascio in involuzione, è l'asse di collineazione delle due punteggiate.*

Infatti se u, u' son le due punteggiate proiettive, u_0 il loro asse di collineazione, A, A′ una coppia qualunque di punti omologhi ed S un punto di u_0, non appartenente ad u, u', al raggio SA $\equiv a$, riguardato come elemento del fascio che proietta u, corrisponde nel fascio che proietta u' il raggio SA′ $\equiv a'$. Ora, se si pone B′ $\equiv au'$, per la proprietà caratteristica dell'asse di collineazione (*E.* § 28), la retta A′B, che congiunge A′ con l'omologo B di B′, deve incontrare AB′ nel punto S; ossia deve coincidere con la retta a'. Da ciò deriva che riguardando a' come elemento del primo fascio (quello che proietta u), gli corrisponde nell' altro fascio (quello che proietta u') il raggio a; donde, per definizione, si trae che la proiettività tra i due fasci è involutoria.

Tenendo sempre conto della proprietà caratteristica dell'asse di collineazione u_0, si vede che, viceversa, ogni punto da cui le due punteggiate vengano proiettate secondo un fascio in involuzione, appartiene ad u_0. — Si consideri pure la proposizione duale.

3. *Sovrapporre due punteggiate o due fasci proiettivi, in guisa da avere un' involuzione sopra una punteggiata o sopra un fascio.*

Se si tratta di due punteggiate proiettive u, u', basterà sovrapporle in modo che due convenienti punti A, B di u, dei quali siano A′,B′ i corrispondenti in u', vengano a coincidere rispettivamente coi punti B′, A′; chè allora la proiettività tra le due punteggiate sovrapposte possiederà una coppia di elementi corrispondentisi in doppio modo, e quindi sarà involutoria.

Ora il modo più semplice per operare questa sovrapposizione, è quello di portare una delle due punteggiate, e sia u', sull'altra, u, in modo che il punto limite J′ di u' venga a coincidere col punto limite, I, di u. Infatti dicendo J_∞, I'_∞ i punti impropri di u, u', dopo aver operato il movimento suddetto di u', i punti $J_\infty I$ di u, a cui corrispondono i punti $J'I'_\infty$ di u', coincideranno rispettivamente coi punti $I'_\infty J'$.

Nel caso in cui le due punteggiate son simili, la sovrapposizione in modo che si abbia una proiettività involutoria, è impossibile, se si eccettua il caso in cui le due punteggiate son congruenti, perchè una similitudine involutoria tra due punteggiate sovrapposte è una congruenza inversa (*E.* § 40).

Se si tratta di due fasci proiettivi (di raggi o di piani), indicando con ij un angolo retto del 1° fascio, a cui corrisponda nel secondo l'angolo $i'j'$, pure retto (§ 4, n. 13), ragionando come nel caso delle punteggiate, si vede che basterà sovrapporre i due fasci in modo che i coincida con j' ed j con i'.

4. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una proiettività che abbia per elementi uniti, distinti o coincidenti, gli elementi* M, N, *e che faccia corrispondere ad* A, A′ *e a* B, B′, *è che le tre coppie* MN, AB′, A′B *appartengano ad un' involuzione.*

Consideriamo dapprima l'ipotesi in cui M, N sono distinti e dimostriamo anzitutto che la condizione è necessaria (cfr. *E.* § 38).

Invero dalla relazione:

(1) $$\mathrm{MNAB} \barwedge \mathrm{MNA'B'},$$

si trae (*E.* § 33):

(2) $$\mathrm{MNAB} \overline{\barwedge} \mathrm{NMB'A'},$$

la quale ci dice che nella proiettività $\begin{pmatrix} \mathrm{MAB} \\ \mathrm{NB'A'} \end{pmatrix}$ i due elementi *distinti* MN si corrispondono in doppio modo; dunque quella proiettività è involutoria.

Viceversa, se è soddisfatta la (2), la quale esprime appunto che le tre coppie MN, AB′, A′B, appartengono ad una involuzione, si deduce la (1), e quindi la sufficienza della condizione (2).

Se ora supponiamo che i due elementi uniti coincidano, cioè che esista una proiettività parabolica con l'elemento unito in M, la quale faccia passare da A ad A′ e da B a B′, considerando l'involuzione individuata dalle coppie AB′, A′B, in essa l'elemento M dovrà esser doppio, perchè se il coniugato di M fosse un elemento N diverso da M, si avrebbe la (2) e quindi la (1); donde si trarrebbe che la proiettività $\begin{pmatrix} \mathrm{MAB} \\ \mathrm{MA'B'} \end{pmatrix}$ è iperbolica, contro il supposto.

Viceversa, se nell'involuzione individuata dalle coppie AB′, A′B, l'elemento M è doppio, la proiettività parabolica ben determinata, che ha in M l'elemento unito e che fa corrispondere ad A, A′, farà passare da B ad un certo elemento B_1; e per quanto precede, nell'involuzione individuata dalle coppie AB_1, A′B l'elemento M sarà doppio. Quest'involuzione non può dunque differire dall'involuzione $\begin{pmatrix} \mathrm{AB'A'} \\ \mathrm{B'A\,B} \end{pmatrix}$, ossia lo elemento B_1 coincide con B.

Osservazione — Dal teorema dimostrato segue che *la condizione necessaria affinchè gli elementi* A′,B′ *si possano riguardare come omologhi degli elementi* A,B *in una proiettività parabolica, è che le due coppie* AB′, A′B *non si separino.* Invero l'involuzione delle coppie AB′, A′B avendo un elemento doppio nell'elemento unito della data proiettività parabolica, sarà discorde (*E.* § 37), cioè le coppie AB′, A′B non si dovranno separare.

Viceversa *la condizione suddetta è sufficiente,* cioè il problema di *costruire una proiettività parabolica di cui sieno date due coppie di elementi omologhi* AA′, BB′, è possibile allorquando le coppie AB′, A′B non si separano; ed ammette due soluzioni. Infatti se MM_1 è la coppia che separa armonicamente le AB′, A′B (§ 2, n° 19), ciascuna delle due proiettività $\begin{pmatrix} MA\,B \\ MA'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} M_1A\,B \\ M_1A'B' \end{pmatrix}$ è parabolica.

5. *Dati in un piano due fasci di raggi distinti, proiettivi, ma non prospettivi, pel punto* A *comune a due raggi omologhi, condurre una retta che seghi i due fasci secondo due punteggiate, riferite mediante una proiettività parabolica col punto unito in* A.

Siano S, S′ i due fasci dati e ai raggi *abc* del 1°, corrispondano i raggi *a′b′c′* del 2°. Supponiamo inoltre che il punto A, di cui si parla nell' enunciato, sia comune ai raggi *a*, *a′*.

Consideriamo tra i due fasci S, S′ la proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'c'b' \end{pmatrix}$, e di questa proiettività si costruisca il centro di collineazione O, comune alle rette *bb′*. *cc′* ed *ac′*. *a′b*. Per l' ipotesi che i due fasci dati sieno distinti e non prospettivi, il punto O sarà diverso dai punti A,S,S′.

Ciò premesso, si osservi che, per la proposizione duale di quella dimostrata al n° 2 di questo §, ogni retta per O, non appartenente nè ad S nè ad S′, sega i raggi *abc*, *a′b′c′* in punti $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ tali che le coppie $A_1A'_1$, $B_1C'_1$, $C_1B'_1$ appartengono ad un' involuzione. In particolare la retta OA sega *bc*, *b′c′* nei punti BC, B′C′, in guisa che nell'involuzione delle coppie BC′, B′C il punto A è doppio. Ma allora pel teorema del n° precedente, si deduce che la retta OA sega S,S′ secondo due punteggiate riferite mediante una proiettività parabolica col punto unito in A.

Invertendo il ragionamento, si vede che una retta soddisfacente alla condizione richiesta, passa certamente pel punto O prima costruito.

6. *Dati in un piano due fasci distinti proiettivi, ma non prospettivi, determinare una retta che li tagli secondo due punteggiate direttamente congruenti.*

Si costruiscano come al n. 6 del § 5 i raggi omologhi aa', a_1a_1', fra loro paralleli, dei fasci dati S, S', e, scelte due altre coppie di raggi omologhi bb', cc', si costruiscano i centri O,O$_1$' delle proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'c'b' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1\,b\,c \\ a'_1c'b' \end{pmatrix}$.

Pel n° precedente le rette che da O, O$_1$ vanno rispettivamente ai punti impropri delle a,a_1, risolvono il problema, perchè sopra una retta una proiettività parabolica col punto unito all'infinito, è una congruenza diretta (*E.* § 32).

Il problema, dipendendo dalla determinazione degli elementi uniti di una proiettività, può avere due, una o nessuna soluzione.

7. *Dati in un piano due fasci distinti proiettivi, ma non prospettivi, determinare una retta che li tagli secondo due punteggiate inversamente congruenti.*

Si costruiscano ancora i raggi omologhi aa', $a_1a'_1$ fra loro paralleli, dei fasci proiettivi S,S', e dal centro di collineazione di questi fasci si tirino le rette che vanno ai punti impropri delle a,a_1.

Ciascuna di queste rette sega i due fasci S,S' secondo due punteggiate in involuzione (§ 6, n° 2) ed uno dei punti doppi dell'involuzione è improprio. Ciò significa che questa involuzione è una congruenza inversa (*E.* § 40).

Il problema è di secondo grado.

8. *Date in un piano due punteggiate distinte* u,u', *proiettive, ma non prospettive, proiettare* u' *sopra* u *in guisa da avere due punteggiate sovrapposte, direttamente o inversamente congruenti.*

Da ogni punto della retta r condotta pel punto limite I' di u' parallelamente ad u, la u' si proietta sulla u secondo una punteggiata simile ad u.

Dicendo I_∞ il punto improprio di u, e BB', CC' due coppie di punti corrispondenti nella proiettività tra u ed u', per la proposizione duale di quella stabilita al n° 5 di questo §, l'asse della proiettività $\begin{pmatrix} I_\infty B\ C \\ I'\ C'B' \end{pmatrix}$ segnerà sulla r un punto S, da cui le u, u' sono proiettate secondo due fasci riferiti mediante una proiettività parabolica col raggio unito in r. Segando con u, otteniamo dunque tra la punteggiata u e la proiezione u'_1 di u' fatta da S su u, una proiettività parabolica col punto unito all'infinito, cioè una congruenza diretta.

Se la proiezione u'_1 di u' su u si vuol fare in modo da avere tra u'_1 ed u una congruenza inversa, basterà proiettare u' dal punto comune alla r e all'asse della proiettività $\begin{pmatrix} I_\infty B\ C \\ I'\ B'\ C' \end{pmatrix}$ (§ 6, n. 2).

9. *Data sopra una punteggiata un' involuzione iperbolica, trovare il luogo di un punto dal quale essa venga proiettata secondo una congruenza inversa.*

È la sfera che ha per diametro il segmento finito determinato dai punti doppi: al lettore la dimostrazione semplicissima.

10. *Dati in un piano due fasci distinti* S, S' *proiettivi, ma non prospettivi, uno degli angoli completi determinati dai raggi che congiungono* S,S' *col centro di collineazione dei fasci dati, è costituito (esclusi gli estremi) da rette che segano i due fasci secondo involuzioni iperboliche, e l'angolo complementare (esclusi gli estremi) da rette che li segano secondo involuzioni ellittiche.*

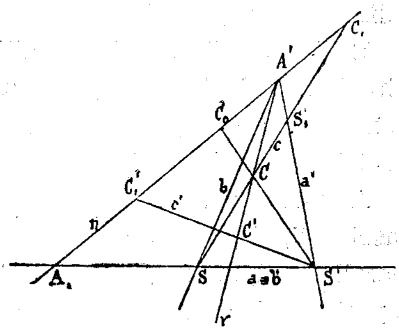
La proiettività tra i due fasci dati S,S' si può individuare assegnando il centro di collineazione A' (e quindi i raggi $a' \equiv S'A'$, $b \equiv SA'$ omologhi del raggio SS' pensato come raggio a di S o come raggio b' di S'), ed una coppia cc' di raggi corrispondenti.

È chiaro anzitutto che se si congiunge il centro A', con un punto P, comune a due raggi omologhi nella proiettività

$\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c' \end{pmatrix}$, ma diverso dai punti S,S′, sulla retta A′P i due fasci segheranno un' involuzione iperbolica (§ 6, n° 2) con uno dei punti doppi in P.

Dunque in ogni caso esistono rette, uscenti da A′, sulle quali i due fasci segano involuzioni iperboliche.

Sia r una tal retta ed A, C, C′ i punti in cui essa sega i raggi $a \equiv$ SS′, c, c'. Per l' ipotesi che le AA′, CC′ sieno coppie d' un' involuzione iperbolica, esse non si separeranno (*E.* § 37). Indichiamo ora con r_1 una retta passante per A′ e appartenente all'angolo completo ba' che non contiene r,



e poniamo $A_1 \equiv SS'.\,r_1$, $C_1 \equiv cr_1$, $C'_1 \equiv c'r_1$. Dimostreremo che le due coppie A_1A', $C_1C'_1$, si separano, ossia che sulla r_1 i due fasci S,S′ segnano un' involuzione ellittica.

Poichè le due coppie ba', rr_1 si separano, lo stesso accadrà delle coppie SS′, AA_1 e delle coppie C_1C_0, $A'A_1$, che si ottengono da queste ultime, proiettandole da C sulla retta r_1.

Proiettando da S′ su r_1 le coppie AA′, CC′, che non si separano per ipotesi, avremo le due coppie A_1A', $C_0C'_1$ che pure non si separano.

Da ciò segue che il punto C_1 appartiene a quel segmento A_1A' che non contiene C_0, ed il punto C'_1 a quel segmento A_1A' che contiene C_0: dunque le coppie A_1A', $C_1C'_1$ si separano, come si voleva provare.

Si noti che le stesse argomentazioni servono a dimostrare che se la retta r sega i fasci S,S′ secondo un' involuzione ellittica, cioè se le coppie AA′, CC′ si separano, la retta r_1, situata nell' angolo ba', complementare di quello che contiene r, taglia i fasci S,S′ secondo un' involuzione iperbolica.

11. *Dati in un piano due fasci di raggi distinti proiettivi, da un centro proiettarli sopra un altro piano, in modo da avere due fasci direttamente congruenti.*

Supponendo dapprima che i due fasci proiettivi dati S,S' non sieno prospettivi, conduciamo pel loro centro di collineazione A', una retta r, che li seghi secondo un' involuzione ellittica ω (n° precedente).

Esistono nello spazio infiniti punti, distribuiti sopra un circolo k, col piano perpendicolare ad r e col centro sulla retta stessa, da ognuno dei quali l' involuzione ellittica ω si proietta secondo un' involuzione di angoli retti (*E.* § 41).

Assunto un punto O del cerchio k, esterno al piano dei fasci dati, si proiettino questi fasci da O sopra un piano π parallelo ad Or, in guisa che l' involuzione ellittica ω verrà a proiettarsi nell' involuzione assoluta ω_1 del piano π; e, come due raggi omologhi dei fasci S,S' tagliano r in due punti coniugati nella ω, così due raggi omologhi nella proiettività tra i fasci proiezioni S_1,S'_1, taglieranno la retta impropria del loro piano in due punti coniugati nella ω_1, ossia saranno perpendicolari.

Da ciò segue che due angoli corrispondenti nella proiettività tra S_1 ed S'_1, sono uguali e dello stesso verso, onde questa proiettività è una congruenza diretta.

Se i due fasci S,S' sono prospettivi, mediante una proiezione che muti l' asse di prospettività in una retta impropria, essi si trasformano in due fasci direttamente congruenti.

La considerazione dell' involuzione degli angoli retti, che è utilissima nelle questioni metriche (come già apparisce dal problema precedente), trovasi in SEYDEWITZ (1844).

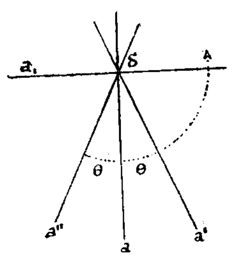
12. In questo n° ci occuperemo dell' *involuzione unita* di una proiettività non involutoria ω, data tra due forme di 1ª specie sovrapposte, cioè dell' involuzione I permutabile con ω (*E.* § 38). Nel caso in cui la proiettività ω è iperbolica,

l'involuzione unita I è quella che ha per elementi doppi gli elementi uniti di ω (donde la denominazione); e si dimostra facilmente (ricorrendo al teorema che abbiamo esposto al n° 4 di questo § — cfr. *E.* § 38), che il coniugato nell'involuzione I, di un elemento A della forma, non è altro che il coniugato armonico di A rispetto alla coppia A'A'', costituita dagli omologhi di A nelle proiettività ω ed ω^{-1}.

Ora noi vogliamo *dimostrare, per via metrica, l'esistenza e l'unicità della involuzione unita* I, *di una proiettività ellittica non involutoria* ω, *e far vedere che per la* I *vale la costruzione sopra richiamata, nel caso di una proiettività iperbolica.*

Potremo supporre, senza restrizione, che la proiettività ellittica ω sia data sopra una punteggiata u. Allora esisteranno (infiniti) punti da ciascuno dei quali la ω si proietta secondo una congruenza diretta ω_1, di un fascio di raggi (§ 5, n° 3): diciamo S uno di questi punti.

L'omologo a' di un raggio a di S nella proiettività ω_1, si ottiene facendo ruotare il raggio a, in un determinato verso, di un angolo determinato θ; mentre l'omologo a'' di a nella proiettività ω_1^{-1}, si ottiene facendo ruotare a, nel verso opposto al precedente, dello stesso angolo θ.



Sicchè il coniugato armonico a_1 di a, rispetto alla coppia $a'a''$, è il raggio del fascio S perpendicolare ad a. Da ciò deriva che, al variare di a, la coppia aa_1 varia nell'involuzione circolare I_1 del fascio S.

La permutabilità di ω_1 con I_1 risulta dal fatto che assoggettando il raggio a prima alla rotazione di ampiezza θ, nel verso debito, eppoi alla rotazione di ampiezza $\frac{\pi}{2}$, il raggio a cui si perviene alla fine del movimento, resta il medesimo se si scambia l'ordine delle due operazioni.

Viceversa, se un' involuzione I_1 è permutabile con ω_1, ogni coppia di raggi omologhi nella I_1 dovrà esser trasformata da ω_1, in una coppia di raggi omologhi nella I_1 medesima. Se dunque diciamo aa_1 una coppia dell' involuzione I_1, applicando a questa coppia due volte di seguito l' operazione ω_1, avremo altre due coppie $a'a'_1$, $a''a''_1$ di I_1, e siccome ω_1 non è involutoria, i 3 raggi $aa'a''$ saranno distinti; e così i 3 raggi $a_1a'_1a''_1$.

Poichè gli angoli aa_1, $a'a'_1$, $a''a''_1$ sono uguali e dello stesso verso, assoggettando il fascio S alla rotazione dell' angolo aa_1, i tre raggi $aa'a''$ verranno a coincidere risp. coi raggi a_1 a_1' a_1'', e quindi ogni raggio di S coinciderà col suo omologo in I_1. Da ciò deriva che la involuzione I_1 è una congruenza diretta, e quindi che coincide con l' involuzione circolare del fascio S (*E.* § 41).

Se si prescinde dall' ipotesi che la proiettività I_1, permutabile con ω_1, sia involutoria, la seconda parte del ragionamento precedente conduce alla conclusione che *in un fascio di raggi le proiettività permutabili con una congruenza diretta non involutoria, son congruenze dirette.* Viceversa è chiaro che due congruenze dirette son sempre tra loro permutabili. E inoltre ogni proiettività, non involutoria, che muti in se stessa l' involuzione circolare, è una congruenza diretta (§ 4, n.° 13).

Ritornando alla punteggiata u, le congruenze dirette del fascio S, dànno luogo alle proiettività ellittiche permutabili con ω. Sicchè possiamo dire che:

In una forma di 1ª specie vi sono infinite proiettività, non involutorie, permutabili con una data involuzione, ed esse sono tutte permutabili tra loro. E inoltre ogni proiettività non involutoria, permutabile con una delle infinite proiettività suddette, è permutabile con tutte le altre.

Nell' enunciato precedente abbiamo anche incluso il caso delle infinite proiettività iperboliche permutabili con una data involuzione (iperbolica), cioè aventi gli stessi elementi uniti, perchè, come si prova facilmente, tutte le proiettività iperboliche che hanno gli stessi elementi uniti M, N, sono permutabili tra loro. Invero, per dimostrar ciò, basterà provare che una proiettività ω con gli elementi uniti in M, N, muta in se stessa ogni altra proiettività π con gli stessi elementi uniti, cioè che muta una coppia qualunque di elementi omologhi in π, in una coppia analoga.

Diciamo perciò A,A′ due elementi corrispondentisi nella π, e supponiamo che la ω faccia passare da A ad A_1 e da A′ ad A'_1, in guisa che:

$$MNAA' \barwedge MNA_1A'_1$$

Da questa relazione si trae (*E.* § 33):

$$MNAA_1 \barwedge MNA'A'_1,$$

la quale prova che nella proiettività $\pi \equiv \begin{pmatrix} MNA \\ MNA' \end{pmatrix}$ all'elemento A_1 corrisponde A'_1.

Il teorema precedente si può completare dimostrando che:

Una proiettività (iperbolica o ellittica) è individuata dalla sua involuzione unita e da una coppia di elementi corrispondenti.

Ciò è chiaro anzitutto nel caso di una proiettività iperbolica, perchè assegnare l'involuzione unita di una tale proiettività, equivale ad assegnare la coppia degli elementi uniti.

Nel caso di una proiettività ellittica, la proposizione si può dimostrare per via metrica, passando dalla data forma ad un fascio di raggi, in guisa che la data involuzione unita si muti nell'involuzione circolare, ed osservando che ogni proiettività non involutoria del fascio, la quale abbia per involuzione unita l'involuzione circolare, è individuata ulteriormente da una coppia di raggi omologhi, perchè essa non è altro che una congruenza diretta.

Tanto nel caso in cui l'involuzione unita I è iperbolica, quanto nel caso in cui è ellittica, la costruzione della proiettività ω, che ha per involuzione unita I e che fa passare da A ad A', si eseguisce linearmente, perchè se A_1, A'_1 sono i coniugati di A, A' nella I, ed A'' il coniugato armonico di A' rispetto alla coppia AA_1, la ω sarà individuata dalle tre coppie AA', $A''A$, A_1A_1'.

13. Alle nozioni esposte nel n° precedente sull'involuzione unita di una proiettività, ne aggiungeremo altre, di cui in seguito ci gioveremo spesso.

Abbiamo veduto che di involuzioni permutabili con una data proiettività ce n'è una sola, quando la proiettività non è involutoria. Invece quando la proiettività è involutoria, ci sono infinite involuzioni con essa permutabili.

È chiaro infatti che due involuzioni iperboliche *distinte* son permutabili, quando le coppie dei loro elementi doppi si separano armonicamente, e che un'involuzione ellittica è permutabile con un'involuzione iperbolica, quando gli elementi doppi della seconda costituiscono una coppia della prima.

Viceversa, se due involuzioni distinte I, I_1 son permutabili, una almeno di esse è iperbolica. Invero se le I, I_1 fanno passare rispettivamente dall'elemento A agli elementi A' ed A_1, dicendo A'_1 il coniugato di A' nella I_1, la coppia $A_1A'_1$ apparterrà ad I, sicchè le involuzioni I, I_1 potranno individuarsi mediante le coppie AA', $A_1A'_1$ e AA_1, $A'A'_1$. Ora se l'una di esse, p. e. I, è ellittica, le coppie AA', A_1A_1' si separeranno, e quindi gli elementi che le costituiscono si succederanno nell'ordine $AA_1A'A'_1$, onde le due coppie AA_1, $A'A'_1$ non si separeranno, cioè la involuzione I_1 sarà iperbolica.

Due *involuzioni* distinte permutabili diconsi anche *armoniche*.

Le osservazioni precedenti si possono quindi enunciare così: *Esistono infinite involuzioni armoniche con una data, e di due involuzioni armoniche una almeno è iperbolica.*

È facile anche provare che:

Un' involuzione, la quale debba essere armonica con una data involuzione I, *è individuata assegnandone una coppia* AA'.

Difatti se A_1, A'_1 sono i coniugati rispettivi degli elementi A, A' nella I, l' involuzione richiesta sarà quella individuata dalle coppie AA', $A_1A'_1$.

Ciò premesso, passiamo a caratterizzare le *involuzioni armoniche con una data proiettività* ω, cioè le involuzioni armoniche con l' involuzione unita della ω.

Supponiamo che la ω faccia passare da A ad A' e da B a B': e consideriamo l' involuzione I individuata dalle coppie AB', A'B. Se s' indicano con C e D' due elementi coniugati in I, e con C',D gli elementi che corrispondono ai precedenti risp. nella proiettività ω e nella ω^{-1}, dalla relazione:

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; A'B'C'D',$$

si trae (*E.* § 33)

$$ABCD \;\overline{\wedge}\; B'A'D'C',$$

la quale prova che anche DC' è una coppia dell' involuzione I. Ne segue che la I trasforma la proiettività

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} A\ B\ C\ D \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$$

nella

$$\omega^{-1} \equiv \begin{pmatrix} B'A'D'C' \\ B\ A\ D\ C \end{pmatrix};$$

e poichè, evidentemente, la ω e la ω^{-1} hanno la stessa involuzione unita, si conclude che la I muta in se stessa l' involuzione unita di ω, ossia che è armonica con ω.

Così, per ogni coppia analoga ad AB', noi abbiamo un' involuzione ben determinata, analoga alla I, cioè armonica con ω (ossia con la sua involuzione unita). Siccome un' involuzione che debba essere armonica con l' involuzione unita di ω, è individuata assegnandone una coppia, si conclude che le involuzioni del tipo I sono *tutte* le involuzioni armoniche con ω.

Dunque:

Se la proiettività non involutoria ω *fa passare da* A *ad* A' *e da* B *a* B', *le involuzioni armoniche con* ω *son tutte quelle del tipo* $\begin{pmatrix} A & A' \\ B' & B \end{pmatrix}$, *cioè quelle che mutano la* ω *nella sua inversa.*

Osservazione. Le proposizioni delle quali ci siamo occupati in questo n° e nel precedente, divengono più espressive quando si enuncino col *linguaggio degli immaginarî.*

Ricordiamo qui che le locuzioni « *coppia di elementi immaginarî (coniugati) di una forma di 1ª specie* », « *involuzione con una coppia di elementi doppi immaginarî* », non sono che modi convenzionali di denotare un'*involuzione ellittica* della forma di 1ª specie.

Queste convenzioni, completate con altre alle quali ora accenneremo, riescono assai opportune, perchè permettono di rendere uniforme il linguaggio e di comprendere in un solo enunciato proposizioni relative a involuzioni iperboliche ed ellittiche ed anche a proiettività iperboliche ed ellittiche.

Si definiscono come *punti uniti immaginarî* di una proiettività ellittica, i punti doppi della sua involuzione unita (cioè l'involuzione stessa); e questa che si assume come definizione nel caso di una proiettività ellittica, corrisponde ad una proprietà effettiva nel caso di una proiettività iperbolica.

Il teorema dimostrato al n° 12, che cioè in una forma di 1ª specie vi sono infinite proiettività non involutorie, permutabili con un'involuzione, si può allora enunciare dicendo che *vi sono infinite proiettività non involutorie che hanno due dati elementi uniti (reali o immaginarî)*, e questa proposizione si può completare (come abbiamo visto) dicendo, col linguaggio attuale, che *una proiettività è individuata dai* *suoi elementi uniti (reali o immaginarî) è da una coppia di elementi corrispondenti.*

Si dirà inoltre che due coppie di elementi di una forma di 1ª specie sono *armoniche* (o si separano armonicamente), quando le 2 involuzioni (iperboliche o ellittiche) che hanno gli elementi di quelle coppie come doppi, son permutabili (armoniche). Nel caso di due coppie reali si ricade facilmente nella solita definizione di gruppo armonico.

Si dirà che una coppia (reale o immaginaria) *appartiene* ad una data involuzione, quando è armonica con la coppia degli elementi doppi dell'involuzione stessa.

Con queste nuove locuzioni le proposizioni del n. 13, si enunciano così:

Esistono infinite coppie che separano armonicamente una data, e di due coppie armoniche una è sempre reale.

(E quindi le coppie di un'involuzione ellittica son tutte reali).

Le involuzioni che contengono la coppia degli elementi uniti di una data proiettività non involutoria, son tutte e soltanto quelle che trasformano tale proiettività nella sua inversa.

È facile inoltre dimostrare che:

La proiettività prodotto di due involuzioni, ha per elementi uniti, reali o immaginarî, quelli che costituiscono la coppia comune alle due involuzioni (cioè l'involuzione permutabile con entrambe). Invero se delle due involuzioni I_1 I_2 una almeno è ellittica, la proiettività I_1I_2 è iperbolica ed ha per coppia degli elementi uniti la coppia reale comune alle due involuzioni (*E.* § 37), e lo stesso accade, evidentemente, se le due involuzioni sono iperboliche, ma le coppie dei loro elementi doppi non si separano. Se le I_1, I_2 sono iperboliche e le coppie M_1N_1, M_2N_2 dei loro elementi doppi si separano (o no), l'elemento corrispondente ad M_1 mediante la I_1I_2, sarà il coniugato armonico M'_1 di M_1 rispetto alla coppia M_2N_2 e l'elemento corrispondente ad M_1 mediante la $(I_1 I_2)^{-1} \equiv I_2 I_1$, sarà il coniugato armonico M_1'' di M_1' rispetto alla coppia $M_1 N_1$; sicchè il coniugato armonico di M_1 rispetto agli elementi $M_1' M_1''$, che gli corrispondono nella $I_1 I_2$ e nell'inversa, sarà l'elemento N_1; onde nell'involuzione unita della proiettività $I_1 I_2$ gli elementi $M_1 N_1$ saranno coniugati. Analogamente si vede che nella stessa involuzione saranno coniugati gli elementi $M_2 N_2$.

Ne risulta che *esiste sempre una coppia armonica con due date coppie di elementi di una forma di 1ª specie.*

Dal teorema dimostrato deriva pure la *costruzione lineare di un' involuzione (iperbolica) individuata da due coppie di elementi coniugati, quando una o ambedue le coppie son costituite da elementi immaginarî.* Se sono I_1, I_2 le involuzioni (di cui una almeno ellittica), che hanno per coppie degli elementi doppi le coppie date, il coniugato di un elemento qualunque, nell'involuzione individuata dalle due coppie, si costruirà linearmente come l'omologo di quell'elemento, nell'involuzione unita della proiettività $I_1 I_2$.

Da questi cenni, ai quali dobbiamo limitarci, s'intravede già l'utilità dell'introduzione degli elementi immaginarî nella Geometria proiettiva.

In seguito ne faremo qualche applicazione; ma avvertiamo fin da ora che quando non si parli esplicitamente di elementi immaginarii, s'intenderà che essi siano reali.

La teoria rigorosa degli elementi immaginarî, come enti geometrici indipendenti da ogni considerazione analitica, è dovuta a STAUDT (Beiträge zur Geo. der Lage, 1° fasc., 1856), il quale non soltanto definiva una coppia di elementi immaginarî *coniugati* di una forma di 1ª specie, come un'involuzione ellittica della forma; ma separava i due elementi immaginarî, associando a ciascuno di essi un verso della forma. Però la teoria diviene assai complicata quando si vogliano studiare i *singoli* elementi immaginarî. Una esposizione elementare, puramente *grafica*, della teoria delle coppie di elementi immaginarî coniugati, trovasi in SEGRE (Le coppie di elementi immaginarî nella geometria proiettiva sintetica, 1886). Ivi è data, ad esempio, la dimostrazione grafica dell'esistenza dell'involuzione unita di ogni proiettività, che noi, nel caso ellittico, abbiamo stabilita per via metrica.

Anche il teorema che serve per costruire l'*involuzione unita*, è dovuto a STAUDT (Beiträge, 2° fasc.); tuttavia spesso trovasi attribuito ad H. SCHRÖTER.

14. *Costruzione metrica dei punti doppî di un'involuzione iperbolica, individuata da due coppie di punti coniugati.*

Se le due coppie date (che non si separano) sono AA', BB', basterà costruire come al n. 19 del § 2, la coppia MN che separa armonicamente AA' e BB' (*E.* § 38).

15. *Profittando delle proprietà dei fasci di cerchî, trovare la coppia comune a due involuzioni.*

Il sistema degli infiniti circoli di un piano, che hanno a due a due lo stesso asse radicale, si chiama un *fascio di circoli* (*E.* § 40). In particolare è un fascio il sistema di tutti i circoli che passano per due punti assegnati del piano (*punti base*): l'asse radicale comune a due qualunque di essi, è in tal caso la retta che riunisce i due punti base.

Per ogni punto del piano, non base pel fascio, passa un sol circolo del sistema.

Ricordando che in un' involuzione data sopra una punteggiata, il prodotto delle distanze di due punti coniugati dal *centro* dell' involuzione (coniugato del punto all' infinito) è costante (*E.* § 40), si dimostra facilmente che i circoli di un fascio segano sopra una retta, non passante per nessuno degli eventuali punti base, le infinite coppie di una involuzione. Sicchè, se l' involuzione è iperbolica, i punti doppi relativi son punti di contatto di due cerchi del fascio, con la trasversale considerata.

Dalle proprietà richiamate si deduce subito un' elegante costruzione della coppia comune a due involuzioni

$$\mathrm{I} \equiv \begin{pmatrix} A & A'B \\ A' & A\ B' \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I}_1 \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A_1'\ B'_1 \\ A_1' & A_1\ B_1' \end{pmatrix},$$

date sopra una punteggiata u.

In un piano per u si assuma un punto P esterno ad u, e si conducano i circoli PAA', PBB', che si seghino ulteriormente nel punto Q (distinto o no da P): le infinite coppie dell'involuzione I si potranno allora segare coi circoli passanti per i punti P, Q.

Analogamente, se si conducono i circoli PA_1A_1', PB_1B_1', i quali si seghino ulteriormente nel punto R, le infinite coppie dell'involuzione I, si potranno segare coi circoli passanti per P, R.

Sicchè, se esiste una coppia comune alle involuzioni I, I_1, questa sarà segnata sulla u dal circolo PQR.

Si noti che se una (almeno) delle due involuzioni, e sia p. e. la I, è ellittica, i due punti P, Q risultano da bande opposte di u, sicchè il cerchio PQR sega certamente la retta u in due punti. Si ritrova così per via metrica la proposizione che « due involuzioni di cui almeno una sia ellittica, hanno sempre una coppia comune ».

Osservazione 1ª. Se coincidono i due punti P e Q, saranno certamente distinti P ed R, perchè altrimenti le due involuzioni coinciderebbero. — Dunque, in ogni caso, il circolo PQR resta individuato. — Si osservi però che i punti P,Q,R potrebbero risultare allineati: ciò accade quando le due involuzioni hanno lo stesso centro. In tal caso il circolo PQR si spezza nella retta PQR e nella retta all'infinito del piano.

Osservazione 2ª. Giacchè siamo a parlare di fasci di circoli, noteremo, incidentalmente, una proprietà di cui ci serviremo in seguito. Intendiamo alludere al teorema seguente: *Gli assi radicali di tre circoli, presi a due a due, concorrono in un medesimo punto*, che si chiama il *centro radicale* dei tre circoli. Naturalmente si esclude che questi circoli abbiano lo stesso asse radicale, ossia che appartengano ad un medesimo fascio.

La dimostrazione del teorema enunciato è semplicissima. Invero se c c' c'' sono i tre circoli, e se l'asse radicale di c' c'', non coincide con quello di c'' c, il punto comune a questi due assi radicali avrà la stessa potenza rispetto a c' c'' e rispetto a c'' c: donde segue che avrà la stessa potenza rispetto a $c\,c'$, ossia che l'asse radicale della coppia $c\,c'$ passerà per quel punto.

È chiaro che il centro radicale resulta esterno o interno a tutti e tre i circoli. Nel 1° caso le 6 tangenti condotte da esso a $c\,c'\,c''$, sono di egual lunghezza, sicchè il cerchio che ha il centro nel centro radicale ed il raggio uguale alla lunghezza di quelle tangenti, sarà ortogonale a $c\,c'\,c''$. Ed anzi sarà l'unico cerchio ortogonale ai dati.

Il concetto di *potenza* di un punto rispetto ad un cerchio, deriva da due note proposizioni di EUCLIDE, e trovasi (nel caso più generale delle coniche) in APOLLONIO (anno 225 avanti Cristo). Le denominazioni di *asse radicale* di due circoli e di *centro radicale* di tre circoli, sono di GAULTIER (1813). STEINER (1826) chiamava quella retta *linea di ugual potenza* e PLÜCKER (1828) la *cordale.* La proprietà dell'asse radicale di un fascio di circoli, di essere il luogo dei punti da cui si possono condurre tangenti uguali a tutti i circoli del fascio, era già nota ai geometri arabi (1000 di Cristo). Il teorema del centro radicale, attribuito spesso a MONGE, fu dato prima da CARNOT (Géo. de position). La costruzione accennata al n° 14 trovasi in PONCELET (Traité..., 1822), il quale espone anche molte altre proprietà dei fasci di circoli, e le trasporta poi ai fasci di coniche col metodo delle proiezioni, come vedremo più tardi su qualche esempio. I *cerchî limiti* di un fascio, cioè i cerchî di raggio nullo, od anche i punti doppî dell'involuzione segata dai circoli del fascio sulla retta che contiene tutti i loro centri, furono considerati da PONCELET. Applicazioni delle proprietà dei fasci di circoli, si trovano pure in BRIANCHON (Mémoire sur les lignes du seconde ordre, 1817).

16. *Profittando del concetto di involuzione tra i punti di una circonferenza, costruire la coppia comune a due involuzioni.*

La costruzione della coppia comune a due involuzioni si può pure effettuare in modo assai semplice, riducendosi mediante una proiezione o sezione, al caso di due involuzioni sopra un fascio di raggi, e quindi al caso di due *involuzioni sopra una circonferenza*, passante pel centro del fascio.

È appena necessario avvertire che un'involuzione sopra una circonferenza, si può definire allo stesso modo di un'involuzione sopra una forma fondamentale di 1ª specie; cioè come una proiettività coincidente con la sua inversa.

Ora se tra i punti di una circonferenza k si ha un'involuzione nella quale AA', BB', CC',... son coppie di punti *coniugati*, all'asse di proiettività (§ 5, n° 4, 2ª costr.), che in tal caso si chiama più specialmente *asse dell' involuzione*, apparterranno non soltanto i punti $AB' . A'B$, $AC' . A'C$, $BC' . B'C$,... ma anche i punti $AB . A'B'$, $AC . A'C'$, BC, $B'C'$,..., e ciò perchè le coppie AA', BB',... si corrispondono in doppio modo. Ne deriva che i triangoli ABC, $A'B'C'$ (e gli analoghi) sono omologici, ossia che le rette AA', BB', CC',... passano tutte per un medesimo punto P, che dicesi *polo dell' involuzione*.

Viceversa è chiaro che se si chiamano omologhi due punti di k allorquando son allineati con P, la corrispondenza che si ottiene è un'involuzione. Invero dicendo AA', BB' due coppie allineate con P, l' involuzione individuata da esse avrà per polo P, e coinciderà con la corrispondenza ora definita.

Ciò premesso, supponiamo di avere su k le due involuzioni I ed I_1, individuate rispettivamente dalle coppie AA', BB' e A_1A_1', B_1B_1', e consideriamo i poli

$$P \equiv AA' . BB' \ , \quad P_1 \equiv A_1A_1' . B_1B_1'$$

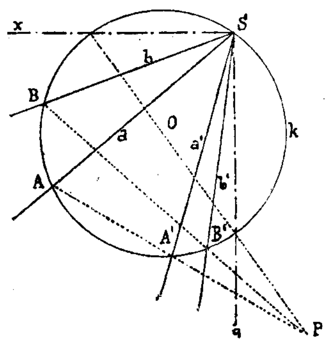
di queste involuzioni.

Poichè le coppie di I son allineate con P e quelle di I_1 con P_1, l'eventuale coppia comune alle due involuzioni sarà segata sulla circonferenza dalla retta PP_1.

OSSERVAZIONE 1ª. Il concetto di involuzione tra i punti di una circonferenza offre una nuova soluzione del problema trattato al n° 14 di questo §. Basterà particolarizzare la 2ª costruzione di Steiner esposta al n° 4 del § 5.

Nel caso in cui l' involuzione è iperbolica, il polo P dovrà essere esterno e i punti di contatto delle tangenti a k tirate per P, saranno i punti doppi dell' involuzione. Siccome questi punti devono pure appartenere all' asse dell' involuzione, si conclude che per tirare le tangenti alla circonferenza k, dal punto P ad essa esterno, basta congiungere P coi punti ove k è segata dall' asse dell' involuzione che ha per polo P. E poichè la costruzione di questo asse si eseguisce con la sola riga, si ottiene così un modo di *tirare le tangenti da un punto esterno ad una circonferenza completamente tracciata, facendo uso della sola riga.*

Osservazione 2ª. Un' applicazione notevole del problema trattato in questo numero e nel precedente, è la *ricerca della coppia dei raggi ortogonali, coniugati in una involuzione data sopra un fascio di raggi* S.



Se si conduce per S, nel piano del fascio, una circonferenza k, si vede subito che i raggi coniugati nell' involuzione data, segnano ulteriormente su k le coppie di un' involuzione, di cui sia P il polo. Congiungendo P col polo dell' involuzione segata sulla circonferenza dall' involuzione circolare del fascio S, cioè col centro O di k, e proiettando da S gli estremi del diametro PO, avremo la coppia xy richiesta.

Il teorema che le coppie di un' involuzione tra i raggi di un fascio, segano sopra una circonferenza, passante pel centro del fascio, le coppie di un' involuzione, trovasi sotto altra forma in Castillon (1776).

17. *Un' altra costruzione dei punti uniti di una proiettività tra due punteggiate sovrapposte.*

Già abbiamo veduto (§ 5, nº 4) due modi differenti di costruire i punti uniti di una proiettività tra due punteggiate sovrapposte e quindi, più in generale, di determinare gli elementi uniti di una proiettività tra due forme sovrapposte.

Un altro modo di risolvere lo stesso problema, viene dato dalla prop. 4 di questo §.

Invero, se la proiettività tra due punteggiate sovrapposte u, u' è individuata mediante tre coppie AA′, BB′, CC′ di elementi corrispondenti, gli eventuali punti uniti M, N (distinti o coincidenti) costituiranno la coppia comune alle involuzioni

$$I \equiv \begin{pmatrix} A & B' & A' \\ B' & A & B \end{pmatrix}, \quad I_1 \equiv \begin{pmatrix} A & C' & A' \\ C' & A & C \end{pmatrix},$$

sicchè per determinarli basterà applicare una delle costruzioni esposte ai n.^{i} 15, 16.

Applicando la costruzione del n° 15, otterremo la regola seguente: In un piano pel comune sostegno delle punteggiate u, u', ma fuori di questo sostegno, si assuma un punto P e si dica Q l' ulteriore intersezione dei cerchi PAB′, PA′B, ed R l' ulteriore intersezione dei cerchi PAC′, PA′C. Il cerchio PQR taglierà il comune sostegno negli eventuali punti uniti richiesti.

Questa costruzione è dovuta a CHASLES.

18. *Data sopra una retta un' involuzione ellittica, trovare due punti coniugati che abbiano la distanza minima.*

Sia I l' involuzione ellittica data sulla retta u ed O il centro dell' involuzione. Dicendo A, A′ una coppia qualunque della I, avremo:

$$OA \,.\, OA' = k,$$

ove k è una costante negativa, indipendente dalla coppia considerata (*E.* § 40). Ricordando ora dall' Algebra elementare che se il prodotto di due numeri variabili è costante, la loro somma è minima quando i due numeri sono uguali, si vede che, in valore assoluto, la somma OA + OA′ è minima, quando i due punti A, A′ sono equidistanti da O.

Sicchè la coppia richiesta è quella comune all' involuzione ellittica I e alla simmetria rispetto al centro O.

La costruzione relativa si può eseguire profittando dei n.^{i} 15, 16 di questo §.

OSSERVAZIONE. Il problema analogo pel fascio di raggi, di determinare cioè due raggi coniugati in una data involuzione ellittica (non circolare) che formino l'angolo acuto minimo (e quindi l'angolo ottuso massimo), si risolve facilmente, profittando della relazione:

$$tang\ oa\ tang\ oa' = costante,$$

che lega le tangenti trigonometriche degli angoli formati da due raggi a, a', coniugati nella data involuzione ellittica, con uno, o, dei raggi coniugati ortogonali (§ 4, n° 13, Oss.).

Come prima si vede che i due raggi richiesti costituiscono la coppia comune alla data involuzione ed alla simmetria rispetto ad o.

Analogamente dicasi pel fascio di piani.

19. *Se una proiettività data tra gli elementi di una forma di* 1ª *specie, possiede un ciclo di* n *elementi, essa è ciclica di ordine* n.

Ricordiamo anzitutto che una proiettività ω tra gli elementi di una forma di 1ª specie u, dicesi *ciclica di ordine* n, quando applicando $n - 1$ volte successive l'operazione ω ad un elemento *generico* della forma, si ottengono $n - 1$ elementi distinti, ma applicando ancora una volta l'operazione ω all'ultimo elemento ottenuto, si ritorna all'elemento di partenza.

Simbolicamente una proiettività ciclica di ordine n si definisce scrivendo

$$\omega^n \equiv 1,$$

purchè però non sia l'identità nessuna delle potenze inferiori di ω.

Se a partire dall'elemento A_1, applicando $n - 1$ volte successive l'operazione di una proiettività, si ottengono gli elementi distinti $A_2\ A_3 \ldots\ A_n$, ed applicando ancora una volta l'operazione, si ritorna ad A_1, il gruppo $A_1\ A_2 \ldots\ A_n$ si dice un *ciclo* per la data proiettività.

Il teorema che vogliamo dimostrare, afferma appunto che, se un particolare elemento della forma può prendersi come origine di un ciclo di n elementi, lo stesso accade per ogni altro elemento, cioè la proiettività è ciclica di ordine n.

Nel caso $n = 2$ si tratterà di una proiettività nella quale due elementi si corrispondono in doppio modo, e già sappiamo che da ciò si deduce che la corrispondenza è involutoria, cioè che $\omega^2 \equiv 1$ (*E.* § 36).

Trattiamo dunque il caso $n > 2$. Sieno $A_1\, A_2 \ldots A_n$ n elementi distinti, che costituiscano un ciclo per una proiettività data ω. La proiettività ω^{n-1} fa passare dagli elementi $A_1\, A_2 \ldots A_n$ rispettivamente agli elementi $A_n\, A_1\, A_2 \ldots A_{n-1}$ e quindi la ω^n lascierà fissi gli elementi $A_1\, A_2 \ldots A_n$. Essendo $n \leqq 3$, dal teorema fondamentale di Staudt, si deduce che $\omega^n \equiv 1$, c. d. d.

20. *Una proiettività ciclica di ordine* n $>$ 2, *è sempre ellittica.*

Sia ω la data proiettività ciclica tra gli elementi della forma u, e diciamo $A_1\, A_2 \ldots A_n$ un ciclo di ω. Proviamo anzitutto che la proiettività ω è concorde.

Invero, nell'ipotesi che la ω sia discorde, nella successione delle terne:

$$A_1\, A_2\, A_3\ ,\ A_2\, A_3\, A_4\ ,\ A_3\, A_4\, A_5\ , \ldots ,\ A_{n-1}\, A_n\, A_1$$

che si ottengono dalla 1ª applicando successivamente la ω, ciascuna ha senso contrario alla precedente.

Dal confronto delle prime due terne, si rileva che A_4 giace nel segmento $A_2\, A_3$ che non contiene A_1; dal confronto della 2ª e della 3ª, che A_5 giace nel segmento $A_3\, A_4$ che non contiene A_2 e quindi nel segmento $A_2\, A_3$ che non contiene A_1; e così proseguendo si giunge all'assurdo che A_1 appartiene a quel segmento $A_2\, A_3$ in cui per ipotesi non deve trovarsi. Si conclude pertanto che l'ipotesi che la ω sia discorde è assurda.

Ciò posto, se un elemento P si muove descrivendo la forma u in un determinato verso, a partire da A_1, il suo omologo P′ si muove nello stesso verso, e mentre P descrive i segmenti A_1A_2, A_2A_3,..., A_nA_1, che hanno il verso fissato, l'elemento P′ descrive i segmenti A_2A_3, A_3A_4,..., A_1A_2: dunque P′ non viene mai a coincidere con P.

21. *Se* $A_1A_2 \ldots A_n$, $B_1B_2 \ldots B_n$ *son due gruppi di elementi di una forma di* 1ª *specie, che si ottengano dagli elementi* A_1, B_1 *applicando* $n-1$ *volte di seguito la proiettività* ω, *si ha*

$$(1) \qquad A_1A_2 \ldots A_n \;\overline{\wedge}\; B_1B_2 \ldots B_n ,$$

e la proiettività ω_1 *in cui si corrispondono questi due gruppi, ha la stessa involuzione unita della proiettività* ω.

Se la proiettività ω è iperbolica o parabolica, la relazione (1) ed il fatto che la ω_1 ha gli stessi punti uniti della ω, derivano dalla replicata applicazione di un teorema ben noto (*E.* § 33).

Se la ω è ellittica (o iperbolica) si può ragionare così: Dicasi I l'involuzione unita di ω (§ 6, nº 12), e si consideri la proiettività ω_1, ben determinata, che ha per involuzione unita la I e che fa passare da A_1 a B_1. Questa proiettività sarà permutabile con ω, e quindi la ω trasformerà una coppia di elementi omologhi della ω_1, in una coppia analoga. Ma ω trasforma successivamente la coppia A_1B_1 nella A_2B_2, la A_2B_2 nella A_3B_3, ecc.; dunque la ω_1 fa passare da A_2 a B_2, da A_3 a B_3, ecc.

Osservazione. In particolare si deduce che *tutti i cicli di una proiettività ciclica* ω, *si corrispondono fra loro mediante una proiettività che ha la stessa involuzione unita di* ω.

22. *Se* A B C *son tre elementi di una forma di* 1ª *specie, e se si determinano gli elementi* A′ B′ C′ *in guisa che risultino armonici i gruppi*

$$BCAA' , \quad CABB' , \quad ABCC' ,$$

le tre coppie AA′, BB′, CC′ *appartengono all'involuzione unita della proiettività ciclica del* 3° *ordine* $\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$.

Invero nella corrispondenza diretta l'omologo di A è l'elemento B, e nell'inversa l'omologo di A è C, sicchè il coniugato armonico A′ di A rispetto alla coppia BC, è pure coniugato di A nell'involuzione unita di $\begin{pmatrix} ABC \\ BCA \end{pmatrix}$ (§ 6, n° 12).

Analogamente si vede che in quest'involuzione B e C hanno per coniugati B′ e C′.

Osservazione. Nell'involuzione unita ora considerata ai gruppi BCAA′, CABB′, ABCC′ corrispondono i gruppi:

$$B'C'A'A \ , \ C'A'B'B \ , \ A'B'C'C \ ;$$

dunque anche questi sono armonici. E così ritroviamo la proposizione dimostrata al n° 18 del § 2.

23. *Se una proiettività* ω *fa passare da* A *a* B, *da* B *a* C *e da* C *a* D, *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la* ω *sia ciclica del* 4° *ordine, è che sia armonico il gruppo* ACBD.

Infatti se la proiettività

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} ABC \\ BCD \end{pmatrix}$$

è ciclica del 4° ordine, all'elemento D dovrà corrispondere A e quindi sarà:

$$(1) \qquad ACBD \;\overline{\wedge}\; BDCA$$

Ricordando che (*E.* § 33):

$$(2) \qquad BDCA \;\overline{\wedge}\; ACDB,$$

avremo:

$$(3) \qquad ACBD \;\overline{\wedge}\; ACDB,$$

la quale dimostra che il gruppo ACBD è armonico (*E.* § 33).

Viceversa, se ACBD è armonico, si può scrivere la (3), la quale confrontata con la (2), che ha luogo in ogni caso, dà la (1). Quest' ultima prova che nella proiettività $\omega \equiv \begin{pmatrix} ABC \\ BCD \end{pmatrix}$ il gruppo ABCD è un ciclo: dunque la ω è ciclica del 4° ordine (§ 6, n° 19).

24. *Una proiettività ellittica* ω *tra i punti di una retta, o è ciclica, oppure applicando ad un punto della retta le operazioni di una potenza di* ω, *ad esponente abbastanza alto, si ottiene un punto distante dal primitivo meno di un segmento prefissato, comunque piccolo.*

Sia u la retta su cui è data la proiettività ellittica ω, e sia S un punto dal quale la ω si proietti in una congruenza diretta di un fascio di raggi (§ 5, n° 3).

Il rapporto tra l' angolo acuto costante α, compreso tra due raggi omologhi in questa congruenza, e l' angolo piatto π, può essere razionale o irrazionale.

Se $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{h}{k}$, con h, k interi, partendo da un raggio a del fascio S e ripetendo h volte la rotazione di ampiezza α, nel senso debito, si esauriscono k semigiri, ossia il raggio a^h, a cui si perviene, coincide con a. Allora è chiaro che la potenza ω^h della data proiettività, è l' identità, ossia che ω è *ciclica* d' indice uguale ad h (se $\frac{h}{k}$ è ridotta alla minima espressione).

Supponiamo ora che $\frac{\pi}{\alpha}$ sia irrazionale. Allora operando sugli angoli π, α col procedimento della comune misura, avremo una successione *indefinita* di uguaglianze, che saranno del tipo:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \pi = h_1\alpha + \alpha_1 \ (\alpha_1 < \alpha) \\
(2) & \alpha = h_2\alpha_1 + \alpha_2 \ (\alpha_2 < \alpha_1) \\
(3) & \alpha_1 = h_3\alpha_2 + \alpha_3 \ (\alpha_3 < \alpha_2) \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(s+1) & \alpha_{s-1} = h_{s+1}\alpha_s + \alpha_{s+1} \ (\alpha_{s+1} < \alpha_s), \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}
$$

con $h_1\, h_2 \dots\, h_{s+1} \dots$, numeri interi.

Ciò posto, sia A un punto di u, a il raggio che lo proietta da S; M, N i due punti di u distanti da A di un segmento prefissato ε; m, n i relativi raggi proiettanti.

Diciamo γ il più piccolo fra i due angoli am, an, che si ottengono proiettando da S i due segmenti finiti AM, AN, e nella successione degli angoli

$$\alpha\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_s \ldots,$$

indefinitamente decrescenti, cerchiamone uno, α_{s+1}, tale che esso, e tutti i successivi, sieno minori di γ. Se fra le relazioni (1) (2).... $(s+1)$ si eliminano $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_s$, avremo un' uguaglianza del tipo:

$$p\pi = q\alpha \pm \alpha_{s+1},$$

con p, q interi (positivi); il che significa che i due angoli $p\pi$ e $q\alpha$ differiscono tra loro meno di γ.

Ne deriva che partendo dal raggio a e applicando q volte la rotazione α, col debito senso, si arriva ad un raggio a^q contenuto in uno dei due angoli am, an, prima definiti; e quindi applicando al punto A di u le operazioni della ω^q, si arriva ad un punto A^q appartenente all' intorno MN di A, c. d. d.

25. *Una proiettività iperbolica non involutoria* ω, *tra i punti di una retta* u, *gode della proprietà che una sua potenza abbastanza alta, porta un punto qualunque della retta in un intorno prefissato, comunque piccolo, di uno dei punti uniti; mentre una potenza abbastanza alta dell' inversa,* ω^{-1}, *porta un punto della retta in un intorno prefissato dell' altro punto unito.*

Dicansi infatti M, N i due punti uniti e si ricordi che il birapporto (MNAA') — *invariante assoluto* della proiettività — rimane costante al variare della coppia di punti AA' corrispondentisi nella ω (*E.* § 35). Se si pone:

(1) $$(\mathrm{MNAA'}) = k$$

e si chiamano $A''A'''.... A^s....$ i punti corrispondenti ad A mediante le potenze successive $\omega^2\, \omega^3 .... \omega^s ....$ di ω, otterremo:

$$(2)\ (MNA'A'') = k, \quad (3)\ (MNA''A''') = k, ...,$$
$$(s)\ (MNA^{s-1}\, A^s) = k, ...;$$

sicchè, moltiplicando membro a membro le prime s di queste uguaglianze, avremo il valore dell'invariante di ω^s:

$$(MNAA^s) = k^s.$$

Poichè la ω non è nè identica nè involutoria, il valore assoluto di k sarà diverso da 1, e quindi due ipotesi sono possibili: o il valore assoluto di k è maggiore d'uno, oppure è minore di 1.

Nella prima ipotesi le potenze successive di k, in valore assoluto, cresceranno oltre ogni limite; sicchè il valore assoluto del rapporto semplice:

$$(MNA^s) = \frac{(MNA)}{k^s},$$

per valori abbastanza grandi di s, potrà rendersi minore di un numero positivo assegnato, comunque piccolo, e quindi la distanza di A^s dal punto unito M, potrà rendersi, in valore assoluto, minore di ogni segmento prefissato.

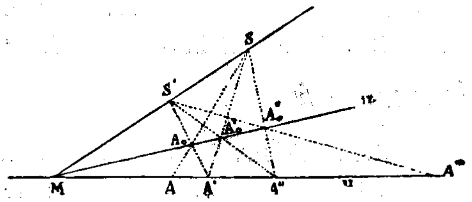
Nella seconda ipotesi si vede analogamente che il valore assoluto del rapporto (MNA^s), cresce oltre ogni limite, sicchè il punto A^s, col crescere di s, tende al punto unito N.

Se si osserva infine che la inversa ω^{-1} ha per invariante $(MNA'A) = \frac{1}{k}$, si vedrà che, nella prima ipotesi, applicando ad un punto di u le successive potenze della ω^{-1}, si ottiene una successione di punti che tende ad N, mentre nella seconda ipotesi questa successione tende ad M.

Osservazione. Questo ragionamento non è applicabile ad una proiettività parabolica; tuttavia in tal caso vale la seguente proposizione, analoga alla precedente:

Se ω *è una proiettività parabolica, tra i punti di una retta* u, *una potenza abbastanza alta di* ω *porta un punto qualunque della retta in un intorno prefissato del punto unito.*

Per dimostrarla conduciamo una retta pel punto unito M e, presi sopra questa due punti S, S′, da S proiettiamo la punteggiata ABC.... e da S′ la punteggiata A′ B′ C′ ...., corrispondente alla precedente mediante la ω. Avremo così due fasci projettivi col raggio comune unito e quindi prospettivi, e l'asse di prospettiva u_0 passerà pel punto unito M (*E.* § 30).



L'omologo A″ del punto A′, nella ω, ossia l'omologo di A nella ω^2, si costruirà proiettando A′ da S nel punto A'_0 dell'asse u_0, e poi A'_0 da S′ nel punto A″ di u; e analogamente si otterranno i punti A‴ (omologo di A″), A⁗ (omologo di A‴),...

Ricordando la costruzione esposta al n° 22 del § 2, si vede che i punti A A′ A″ A‴.... formano una *scala armonica* rispetto all'origine M; e quindi il teorema enunciato non è che un modo diverso di presentare una proprietà già dimostrata per le scale armoniche (§ 2, n° 22).

26. *Risoluzione lineare approssimata dei problemi di 2° grado.*

Abbiamo già osservato che ogni problema di 2° grado della Geometria piana si riduce, con proiezioni e sezioni, alla determinazione degli elementi uniti di una proiettività (ed in particolare degli elementi doppî di un'involuzione); e quindi che in generale per risolverlo non basta la riga, ma ci vuole anche il compasso (§ 5, n° 5).

A ciò fa riscontro, nel campo algebrico, il fatto che per risolvere un'equazione di 2° grado, non bastano in generale le operazioni razionali (di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) sui suoi coefficenti, ma occorre anche l'estrazione di un radicale quadratico.

Tuttavia le operazioni razionali possono servire ad approssimare le radici dell'equazione, tanto quanto si vuole. Orbene, anche quest'ultimo fatto algebrico ha il suo corrispondente nella Geometria, giacchè con la sola riga si può giungere ad elementi di una forma di 1ª specie (punteggiata o fascio di raggi) tanto prossimi quanto si vuole agli elementi uniti di una data proiettività, e quindi si può risolvere, con quell'approssimazione che più si desideri, qualunque problema di 2° grado, come adesso ci proponiamo di far vedere.

Supponiamo che un problema *grafico* di 2° grado, con proiezioni e sezioni, sia stato ricondotto alla *determinazione degli elementi uniti di una proiettività discorde* ω, non involutoria, tra gli elementi di una forma di 1ª specie.

Immagineremo che questa forma sia un fascio (proprio) di raggi, perchè ragionando sopra una punteggiata, dovremmo avere un particolare riguardo al suo punto all'infinito (ciò che del resto non porterebbe che leggere complicazioni di forma).

Partendo dal raggio a del fascio, con operazioni lineari, si posson costruire i raggi a' a'' a'''... omologhi di a nelle proiettività ω, ω^2, ω^3,...; e questa successione si può prolungare finchè si vuole e si ottengono sempre raggi diversi da quelli che li precedono (§ 6, n° 20), purchè, beninteso, il raggio a di partenza non sia unito: il qual caso naturalmente escludiamo, perchè allora si conoscerebbe un raggio unito e quindi l'altro si costruirebbe linearmente (*E.* § 30).

Un'analoga esclusione si sottintenderà anche quando esamineremo il caso in cui ω è concorde.

Nella proiettività ω discorde, e quindi iperbolica, due elementi corrispondenti qualunque separeranno la coppia degli elementi uniti m, n (*E.* § 31), sicchè i due angoli ama', ana' saranno complementari.

Se facciamo l'ipotesi che il raggio a'' cada nell'angolo ama', *ossia* che le coppie ma, $a'a''$ si separino, si separeranno pure le coppie ma', $a''a'''$ e ma'', $a'''a''''$,..., che si ottengono dalle precedenti applicando le operazioni ω, ω^2,...; donde si trae che il raggio a''' appartiene all'angolo $a'ma''$; che il raggio a'''' appartiene all'angolo $a''ma'''$, e così di seguito. In tal caso la successione:

$$aa'a''a''' \dots a^{s-1} a^s a^{s+1} \dots$$

tende al raggio unito m (cfr. col n° 25 di questo §).

Analogamente dicasi se a'' cade nell'angolo ana'.

Da ciò deriva che nella successione degli angoli:

$$aa''a',\ a'a'''a'',\ a''a''''a''',\dots,\ a^{s-1}a^{s+1}a^s,\dots,$$

ciascuno sarà contenuto nel precedente, ed uno dei raggi uniti, e sia m, sarà contenuto in tutti gli angoli della successione stessa. Se dunque si prende come raggio m un raggio qualunque dell'angolo $a^{s-1}a^{s+1}a^s$, si commette un errore minore dell'ampiezza di quest'angolo; sicchè non solo possiamo dire che col crescere del numero delle operazioni l'errore decresce, ma che è soddisfatto anche il requisito essenziale di ogni sistema di approssimazione, che cioè dopo un certo numero finito di operazioni, si può sempre assegnare un limite superiore dell'errore.

In modo analogo si potrà approssimare l'altro raggio unito, giovandosi delle potenze successive di ω^{-1}.

Si conclude pertanto che quando la ω è discorde e non involutoria, il dato problema grafico di 2° grado si può risolvere linearmente, con quell'approssimazione che si desidera.

Passando ora ad esaminare il *caso in cui la ω è concorde*, ma non involutoria, vediamo anzitutto come si possa stabilire con operazioni lineari se essa è iperbolica o parabolica o ellittica; se cioè il dato problema di 2° grado ha due soluzioni o ne ha una sola o è impossibile (nel campo reale).

Di due elementi pq della forma (che supporremo ancora sia un fascio di raggi) si costruiscano gli omologhi $p'q'$ nella ω e gli omologhi p_1q_1 nella ω^{-1}, e sieno p_0q_0 i quarti armonici dopo $p'p_1p$, $q'q_1q$. La condizione necessaria e sufficiente perchè la ω sia iperbolica (o ellittica), è che le coppie pp_0, qq_0, che appartengono alla sua involuzione unita (§ 6, n° 12), non si separino (o risp. si separino), e (quindi) la condizione necessaria e sufficiente perchè la ω sia parabolica, è che p_0 coincida con q_0 (cfr. col n° 25, Oss.).

Anzi *quando la ω è parabolica* l' unico elemento unito è $p_0 \equiv q_0$, sicchè in tal caso il problema si risolve linearmente, senz' alcun errore.

Nel *caso in cui la ω è iperbolica*, indicando con m, n i raggi uniti (incogniti) ed applicando ad un raggio a del fascio le operazioni $\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots$, otterremo i raggi $a'\, a''\, a''' \ldots$ appartenenti tutti all' angolo man, che contiene a, perchè due elementi omologhi nella ω non separano gli elementi uniti. Tenendo sempre conto del fatto che la ω è concorde si vede inoltre che i raggi

$$(1) \qquad a\, a'\, a''\, a''' \ldots a^s \ldots,$$

si succedono entro al fascio nell' ordine scritto, tendendo per es., al raggio unito m (§ 6, n° 25).

Se poi b è un raggio che insieme ad a separi la coppia mn, e mediante le potenze di ω costruiamo a partire da b la successione

$$(2) \qquad b\, b'\, b''\, b''' \ldots b^s \ldots$$

si vede che anche la (2) ha per limite m (§ 6, n° 25), ma che i suoi elementi si succedono nel fascio in senso contrario agli elementi della (1).

Si conclude che per approssimarsi ad un raggio unito, bisognerà anzitutto procurarsi due raggi a, b che separino gli elementi uniti. Tali raggi li possiamo ottenere linearmente considerando ad es. due raggi coniugati nell' involuzione unita di ω. Dopo ciò applicheremo ad essi le operazioni delle successive potenze di ω. Si otterranno così le due successioni indefinite (1), (2), i cui elementi, considerati complessivamente, si succederanno nell' ordine naturale:

$$aa'a'' \ldots a^s \ldots b^s \ldots b''b'b.$$

Formando la successione

$$ab, a'b', a''b'', \ldots, a^sb^s, \ldots$$

costituita dagli angoli che hanno il verso dato da quest' ordine naturale, e prendendo come raggio unito un raggio qualunque dell' angolo a^sb^s, si commette un errore minore dell' ampiezza di a^sb^s, e quindi decrescente indefinitamente col crescere di s.

L' altro raggio unito si otterrà analogamente applicando le potenze della ω^{-1}.

Infine nel *caso in cui la ω è un' involuzione iperbolica*, individuata dalle coppie aa', $a_1a'_1$, fissiamo l' angolo aa', che contiene i raggi $a_1a'_1$. Preso quindi un raggio a_2 dell' angolo a_1a_1', che sta in aa', costruiamone il coniugato a_2'. Costruendo similmente l' angolo $a_3a'_3$ interno all' angolo a_2a_2', che sta in aa', e così proseguendo, avremo una successione di angoli decrescenti, i cui lati tendono ad uno dei raggi doppi. In modo analogo, partendo dall' angolo a_1a_1' che contiene aa', si approssima l' altro raggio doppio.

Osservazione. Si noti che a questo processo di approssimazione ci possiamo ridurre anche nel caso di una proiettività non involutoria, costruendo dapprima due coppie della sua involuzione unita.

Sicchè in ogni caso si conclude che *un problema grafico di 2° grado si può risolvere con la sola riga, con quell' approssimazione che si desidera.*

Se il problema è di natura *metrica*, se cioè i *dati* hanno particolari caratterizzazioni metriche, per riguardarlo come un problema grafico, occorre aggiungere ai dati quegli enti del piano che permettono di enunciare il problema sotto forma grafica. Questi enti sono, com' è noto (*E.* § 50, Oss. 2ª e § 73), la retta impropria e l'involuzione assoluta, nella quale sono coniugati i punti all'infinito delle coppie di rette perpendicolari del piano.

Ed è pur noto che questi enti metrici fondamentali, che costituiscono l'*assoluto* del piano, si possono dare assegnando sul piano del disegno un quadrato, oppure un cerchio col suo centro (*E.* § 73).

27. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè tre coppie* AA', BB', CC' *di elementi di una forma di 1ª specie, appartengano ad un' involuzione, è che:*

$$(1) \qquad (BCA')\,(CAB')\,(ABC') = 1.$$

Supponendo infatti che la data forma di 1ª specie sia una punteggiata u, se le coppie AA', BB', CC' appartengono ad un' involuzione, sarà:

$$(2) \qquad ABA'C' \barwedge A'B'AC,$$

ossia (*E.* § 34):

$$(3) \qquad (ABA'C') = (A'B'AC),$$

donde, sviluppando, si trae:

$$(4) \qquad \frac{AA'.BC'}{BA'.AC'} = \frac{A'A.B'C}{B'A.A'C},$$

od anche:

$$(5) \qquad BA'.CB'.AC' = CA'.AB'.BC',$$

la quale si può scrivere sotto la forma (1).

Viceversa se è soddisfatta la (1), ossia la (5), sarà vera anche la (4), e quindi risalendo si dedurrà la relazione (2), sicchè le tre coppie AA', BB', CC' apparterranno ad un' involuzione.

Osservazione. Dalla (1), se si scambiano *alcune* lettere senza apice in altre con apice, il che è lecito perchè gli elementi delle due forme proiettive sovrapposte sono in condizione simmetrica, si ottengono altre tre relazioni dello stesso tipo.

Si noti che la relazione che si deduce dalla (1) scambiando *tutte* le lettere senza apice in lettere con apice, coincide con la (1) medesima.

Ma tra le *misure* dei segmenti che hanno per estremi i dati elementi AA′, BB′, CC′, passano anche altre relazioni, ciascuna delle quali da sola può servire ad esprimere la condizione perchè le tre coppie AA′, BB′, CC′ sieno in involuzione. Il tipo di quest' altro gruppo di relazioni (che sono in numero di 3), è il seguente:

$$(BCA)(B'C'A) = (BCA')(B'C'A').$$

Questa relazione si riconduce subito all' uguaglianza

$$(BCAA') = (B'C'A'A).$$

Basta perciò dividerne i due membri per (B′C′A) (BCA′).

È chiaro che le sette relazioni suddette debbono dedursi tutte da una qualunque di esse, con trasformazioni razionali.

Le sette relazioni (dipendenti tutte da una) che passano tra le misure dei segmenti che hanno per estremi i punti di tre coppie in involuzione, si trovano in Pappo, nei casi particolari dell' involuzione dei 5 punti e dei 4 punti, ed anche nel caso particolare in cui una delle coppie è costituita dal centro dell' involuzione e dal punto all' infinito. Naturalmente nelle *Collezioni* di Pappo si trovano enunciate con un linguaggio differente da quello che ci suggerisce la teoria dell' involuzione, il cui studio, come abbiamo detto altrove, fu cominciato da Desargues (1639). Le relazioni stesse si ritrovano in Brianchon (1817) e in Poncelet (1822).

28. *Se sopra una retta si ha un' involuzione individuata dalle coppie AA′, BB′, ed O è il centro dell' involuzione,* P *un punto qualunque della retta, ha luogo la relazione:*

$$PA.PA' - PB.PB' = (AB + A'B')PO.$$

Per dimostrarla riferiamo tutti i segmenti del 1° membro all' origine O. Verrà allora:

$$PA.PA' - PB.PB' =$$
$$= (OA - OP)(OA' - OP) - (OB - OP)(OB' - OP),$$

ossia:

$$PA\,.\,PA' - PB\,.\,PB' =$$
$$= OA\,.\,OA' - OB\,.\,OB' + OP(OB - OA) + OP(OB' - OA').$$

Ricordando che (*E.* § 40):

$$OA\,.\,OA' = cost.,$$

avremo:

$$PA\,.\,PA' - PB\,.\,PB' = OP(OB - OA) + OP(OB' - OA'),$$

la quale riducesi immediatamente alla relazione da dimostrarsi.

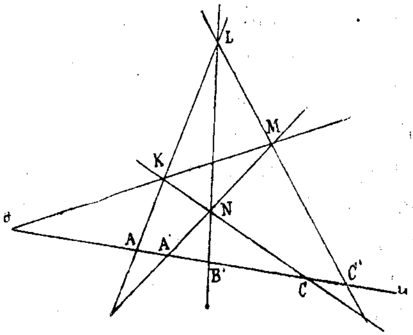
Anche questa relazione trovasi nelle *Collezioni matematiche* di Pappo.

§ 7. *Applicazioni del teorema del quadrangolo.*

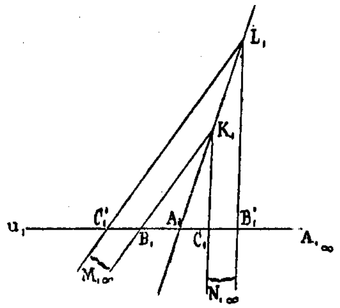
Sommario: *Dimostrazione del teorema del quadrangolo col metodo della proiezione centrale — Teorema reciproco — Estensione del teorema di Simson — Teorema di Gauss — Se due quadrangoli completi hanno 5 coppie di lati perpendicolari, anche i lati rimanenti son perpendicolari — Tetraedri di Möbius.*

1. *Dimostrazione del teorema del quadrangolo col metodo della proiezione centrale.*

Sia KLMN un quadrangolo piano completo ed u una trasversale del suo piano, non passante per nessun vertice del quadrangolo. Chiamiamo AA′, BB′, CC′ le tre coppie segnate su u, rispettivamente dalle coppie di lati opposti KL, MN; KM, LN; KN, LM. Il teorema del quadrangolo (*E.* § 39) consiste in ciò: le tre coppie AA′, BB′, CC′ appartengono ad una medesima involuzione.



Per dimostrarlo proiettiamo il quadrangolo e la trasversale u, da un centro sopra un piano, in modo che vada all'infinito uno dei lati del quadrangolo: p. e. il lato MN; e indichiamo con le lettere $K_1 L_1 \ldots$ $A_1 A_1' \ldots$ le proiezioni dei punti KL... AA'..., e con u_1 la proiezione di u.



Dai triangoli simili $B_1 A_1 K_1$ $C'_1 A_1 L_1$, si rileva, in valore e segno:

$$\frac{A_1 B_1}{A_1 C_1'} = \frac{A_1 K_1}{A_1 L_1},$$

e dai triangoli simili $C_1 A_1 K_1$, $B'_1 A_1 L_1$, si rileva:

$$\frac{A_1 C_1}{A_1 B'_1} = \frac{A_1 K_1}{A_1 L_1}.$$

Dal confronto di queste due proporzioni si trae, in valore e segno:

$$A_1 B_1 . A_1 B'_1 = A_1 C_1 . A_1 C'_1 .$$

La relazione trovata ci dice che le due coppie $B_1 B_1'$, $C_1 C_1'$ individuano un'involuzione di cui A_1 è il *centro* (*E.* § 40), ossia che le tre coppie $A_1 A_1'{}_\infty$, $B_1 B_1'$, $C_1 C_1'$ appartengono ad un'involuzione della u_1.

Poichè passando mediante proiezioni e sezioni da una forma di 1ª specie ad un'altra, a coppie della prima in involuzione, corrispondono nella seconda coppie in involuzione, si conclude, come volevasi, che le tre coppie AA', BB', CC' appartengono ad un'involuzione della u.

Il teorema del quadrangolo trovasi sostanzialmente nelle *Collezioni* di PAPPO. Dimostrazioni di questo teorema analoghe a quella esposta sopra, furono date da BRIANCHON (1817) e da PONCELET (1822). La dimostrazione puramente grafica, che si usa esporre oggidì (*E.* § 39), si legge nella *Geo. der Lage* di STAUDT (1847).

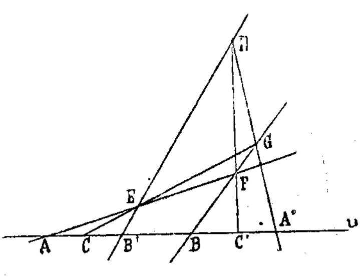
2. Il teorema del quadrangolo si può enunciare anche sotto la forma seguente (considerata da STAUDT), la cui equivalenza con l'enunciato usuale apparisce subito:

Se in un piano si considera un triangolo, un punto non appartenente ai suoi lati ed una retta non contenente nè il punto nè alcun vertice del triangolo, i lati di questo ed i raggi che proiettano dal punto dato i vertici rispettiv. opposti, segano sulla retta data tre coppie in involuzione.

Del teorema così enunciato, è vero anche il reciproco:

Dati in un piano un triangolo EFG ed una trasversale u *(non passante per alcun vertice), la quale seghi i lati EF, FG, GE nei punti A, B, C, le rette che congiungono i vertici rispettivamente opposti a quei lati, coi coniugati A′, B′, C′, dei punti A, B, C, in una involuzione data sulla* u, *concorrono in un punto.*

Invero, s'indichi con H il punto in cui concorrono le rette GA′, EB′, e si osservi che, essendo A diverso da B e quindi A′ diverso da B′, il punto H risulta esterno alla *u*. Applicando il teorema del n.° precedente al quadrangolo completo EFGH tagliato dalla trasversale *u*, che non ne contiene nessun vertice, si vede che la HF dovrà tagliare la *u* nel punto coniugato di C nell'involuzione individuata dalle coppie AA′, BB′, cioè nella involuzione data sulla *u*. Dunque la retta FC′ passa per H, c. d. d.



Lasciamo al lettore le considerazioni duali.

OSSERVAZIONE. Dal teorema ora dimostrato segue subito la proposizione di Geometria elementare: *Le tre altezze di un triangolo concorrono in un punto* (ortocentro).

E dal suo duale si deduce facilmente che *se da un punto O del piano di un triangolo ABC, si conducono le perpendicolari alle rette che da O proiettano i vertici A, B, C, quelle perpendicolari segano i lati risp. opposti, in tre punti allineati.*

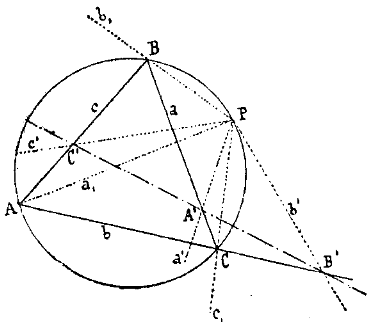
3. *Se da un punto del cerchio circoscritto ad un triangolo, si conducono tre rette, che formino coi lati angoli eguali e dello stesso verso, i punti ch' esse segnano su questi lati sono in linea retta.*

Sia ABC il triangolo dato; a, b, c siano i lati opposti ad A, B, C, e P il punto dato sul cerchio circoscritto ad ABC.

Diciamo a' b' c' tre raggi tirati per P in modo che gli angoli aa', bb', cc' sieno uguali in grandezza e verso, e indichiamo inoltre con A′, B′, C′, i vertici rispettivi di questi angoli.

Si tratta di provare che i punti A′B′C′ sono allineati.

Si tirino infatti i raggi $PA \equiv a_1$, $PB \equiv b_1$, $PC \equiv c_1$ e si osservi anzitutto che i due triangoli A′BP, AB′P sono equiangoli, perchè gli angoli $\widehat{BA'P} \equiv aa'$, $\widehat{AB'P} \equiv bb'$ sono eguali per ipotesi, e gli angoli $\widehat{A'BP}$, $\widehat{PAB'}$ sono inscritti in un medesimo arco di circonferenza. Dunque l'angolo $a'b_1$ è uguale all' angolo a_1b', ed anzi, siccome aa' e bb' hanno lo stesso verso, facendo ruotare rigidamente il triangolo AB′P attorno al vertice P, finchè b' coincida con a', il raggio b diverrà parallelo ad a ed il raggio a_1 verrà a coincidere con b_1; donde segue che i due angoli $a'b_1$, a_1b' sono inversamente uguali, e quindi che i due angoli a_1b_1, $a'b'$ sono pure inversamente uguali.



Analogamente si prova che sono inversamente uguali gli angoli b_1c_1, $b'c'$ e gli angoli c_1a_1, $c'a'$. Ciò equivale a dire che le tre coppie a_1a', b_1b', c_1c' si corrispondono in una congruenza inversa del fascio P, cioè che appartengono ad una medesima involuzione.

Applicando allora il teorema duale di quello stabilito al n° precedente, si giunge alla conclusione che i tre punti A′, B′, C′ sono allineati.

Questo teorema è un' estensione di quello di Simson, che abbiamo già incontrato al n° 11 del § 3. Esso, come ha osservato Poncelet (Traité.... 1822), permette di risolvere con la falsa squadra, il problema di prolungare un allineamento al di là di un ostacolo, che ne impedisca la vista. La soluzione dello stesso problema con l' ordinaria squadra, era già stata esposta da Servois (1813) (1).

4. *Le polari di un punto rispetto alle tre coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo, concorrono in un punto.*

Sia infatti ABCD il dato quadrangolo (non degenere), P il punto dato nel suo piano, P′ il punto in cui s' incontrano le polari di P rispetto alle coppie di lati AB, CD; AC, BD, e infine sieno XX′, YY′, ZZ′ le coppie segnate sulla retta PP′ dalle coppie di lati opposti AB, CD; AC, BD; AD, BC. Ricordando la proprietà armonica della polare di un punto rispetto a due rette (§ 2, n° 16), si vede che la coppia PP′ separa armonicamente le XX′, YY′, e quindi che P, P′ sono i punti doppî dell' involuzione a cui appartengono le tre coppie XX′, YY′, ZZ′ (*E.* § 39). Da ciò si trae che anche il gruppo PP′ZZ′ è armonico, epperò la polare di P rispetto ai lati AD, BC passerà per P′.

(1) Non sviluppiamo qui le soluzioni di questo problema, perchè la loro esposizione ci porterebbe un po' fuori dalla nostra strada. Il lettore potrà consultare in proposito l' articolo di A. Giacomini nelle *Questioni riguardanti la geometria elementare*, raccolte da F. Enriques (Zanichelli, 1900).

Osservazione 1ª. Se P non appartiene ad alcun lato del quadrangolo, la retta PP′ non contiene nessuno dei vertici; se P appartiene ad un lato, la retta PP′ coincide con questo; se infine P cade in un vertice, si ha $P' \equiv P$; ma in ogni caso il teorema non cessa di sussistere.

Osservazione 2ª. Dalla proposizione duale si ottiene, come caso particolare metrico, la seguente: *I punti medii delle diagonali di un quadrilatero piano completo, giacciono in linea retta.*

Il teorema ultimamente enunciato è di Gauss (1810).

5. *Dato un quadrilatero piano completo, trovare un punto del suo piano dal quale le tre coppie di vertici opposti, sieno proiettate secondo tre coppie di angoli retti.*

Se P è un punto comune ai cerchi che hanno per diametri due diagonali del quadrilatero, gli estremi di queste diagonali verranno proiettati da P secondo due coppie di un' involuzione circolare, alla quale, pel duale del teorema del quadrangolo, dovrà appartenere la coppia che proietta da P gli estremi dell' altra diagonale. Dunque P sarà uno dei punti richiesti.

Il problema è di 2° grado.

Osservazione. Si deduce subito (almeno nel caso in cui P è reale), che *i circoli aventi per diametri le diagonali di un quadrilatero completo, appartengono ad un fascio.* I loro centri sono perciò allineati, conformemente al teorema di Gauss.

6. *Se due quadrangoli completi dello stesso piano son riferiti in guisa che cinque coppie di lati omologhi sieno perpendicolari, anche i due lati rimanenti saranno perpendicolari.*

Sieno AA′, BB′, CC′ le coppie, appartenenti ad una medesima involuzione ω, segnate sulla retta all' infinito dalle coppie di lati opposti del 1° quadrangolo, e A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'

le coppie, appartenenti ad un' involuzione ω_1, segate sulla stessa retta dai lati opposti del 2° quadrangolo.

Se le 5 coppie di lati omologhi perpendicolari sono quelle che hanno per punti improprî AA_1, $A'A'_1$, BB_1, $B'B_1'$, CC_1, queste 5 coppie di punti improprî apparterranno all' involuzione assoluta I.

Poichè la I muta due coppie, AA' e BB', di ω, in due coppie, A_1A_1' e B_1B_1', di ω_1, trasformerà l' involuzione ω nella ω_1, e quindi la coppia CC' di ω in una coppia di ω_1. Ma, per ipotesi, la I fa passare da C a C_1, dunque farà pure passare da C' a C_1', ossia i due lati rimanenti dei due quadrangoli saranno ortogonali.

7. *Se due triangoli ABC, A'B'C', di uno stesso piano, son così situati che le perpendicolari tirate dai vertici A', B', C' del 2°, sui lati BC, CA, AB del 1°, passino per un punto, le perpendicolari ai lati B'C', C'A', A'B' del 2°, dai vertici A, B, C del 1°, concorreranno pure in un punto.*

Diciamo O' il punto pel quale passano le perpendicolari tirate da A', B', C' sui lati BC, CA, AB, ed O il punto comune alle perpendicolari tirate da A, B sui lati B'C', C'A'. Nei due quadrangoli OABC, O'A'B'C', i 5 lati BC, CA, AB, OA, OB del 1°, son perpendicolari ai lati O'A', O'B', O'C', B'C', C'A' del 2°: dunque (n° precedente) anche i due lati rimanenti, OC ed A'B', saranno perpendicolari; cioè la perpendicolare tirata da C ad A'B' passerà per O, c. d. d.

8. *Dato un tetraedro* $ABCD \equiv \alpha\beta\gamma\delta$ (1), *esistono infiniti tetraedri* $A'B'C'D' \equiv \alpha'\beta'\gamma'\delta'$ *inscritti e circoscritti al dato, cioè tali che i vertici A'B'C'D' giacciono ordinatamente sulle facce* $\alpha\beta\gamma\delta$, *mentre le facce* $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ *passano ordinatamente pei vertici ABCD.*

Scegliamo infatti ad arbitrio sulla α il punto A', sulla β il punto B' e sulla retta comune ai piani γ ed A'B'D sce-

(1) Scrivendo così intendiamo che α sia la faccia opposta ad **A**, β a B, ecc.

gliamo il punto C'. I punti A'B'C' si proiettano da D sulla faccia opposta δ, in tre punti $A'_1B'_1C'_1$ allineati e giacenti rispettivamente sugli spigoli BC, CA, AB; ed i piani $\alpha' \equiv AB'C'$, $\beta' \equiv BC'A'$, $\gamma' \equiv CA'B'$ tagliano la retta u, che contiene i punti $A'_1B'_1C'_1$, nei punti A''_1 B''_1 C''_1, che sono pure le intersezioni di u coi lati B'C', C'A', A'B' del triangolo A'B'C'.

Per il 1° teorema enunciato al n° 2 di questo §, le tre coppie $A'_1A''_1$, $B'_1B''_1$, $C'_1C''_1$ apparterranno ad una medesima involuzione; e quindi, per il reciproco di quel teorema, le rette AA''_1, BB''_1, CC''_1 concorreranno in un punto D', il quale sarà comune ai piani $\alpha'\beta'\gamma'$.

Così avremo costruito un tetraedro $A'B'C'D' \equiv \alpha'\beta'\gamma'\delta'$, soddisfacente alle condizioni richieste.

Due tetraedri nelle condizioni dell' enunciato precedente, si chiamano *tetraedri di* Möbius, appunto perchè furono scoperti da questo geometra (1828). Proprietà notevoli di tali coppie di tetraedri trovansi in Steiner (Syst. Ent...., 1832). — Due tetraedri di Möbius si possono anche definire come reciproci in un sistema nullo dello spazio.

CAPITOLO QUARTO

Proiettività tra forme fondamentali di 2ª specie.

§ 8. *Applicazioni delle proprietà fondamentali, grafiche e metriche, delle corrispondenze proiettive tra forme di 2ª specie e in particolare dell'omologia.*

SOMMARIO: *Generalità — Sul teorema di* PONCELET-STEINER — a) *Problemi sull'omografia tra piani: Costruzione dell'omografia con un numero finito di proiezioni e sezioni o mediante successive omologie. Soluzione di* SPITZER *del problema di disporre prospettivamente due piani omografici. Fasci di raggi congruenti nell'omografia tra due piani — Birapporto d'area — Teorema di* CHASLES *sui piani prospettivi. Applicazione all'omologia armonica — Prodotto di due omologie con lo stesso asse — Condizione perchè un'omografia possegga una coppia di elementi omologhi in doppio modo — Omologie che particolarizzano metricamente un triangolo o un quadrangolo — Sull'omologia legata a due elementi uniti associati d'un'omografia — Omologie armoniche che mutano in sè una circonferenza — Sui centri e sugli assi di similitudine di tre circoli. Risoluzione di* GAULTIER-PONCELET *del problema di* APOLLONIO *di costruire un circolo tangente a tre dati — Sulle trasformazioni per raggi vettori reciproci e sulle affinità circolari di* MÖBIUS. *Dimostrazione di* ADLER *del teorema fondamentale della Geometria del compasso* — b) *Problemi sulla correlazione tra piani: Di una correlazione legata ad un quadrangolo — Sulle reciprocità tra piani sovrapposti, nelle quali si corrispondono prospettivamente due coppie di forme di 1ª specie. Riduzione del caso generale a questo, mediante il movimento.*

1. Quando tra gli elementi di due forme fondamentali di 2ª specie (sistemi piani o stelle) si ha una corrispondenza biunivoca, la quale faccia passare da elementi di ogni forma di 1ª specie contenuta nell' una ad elementi di una forma di 1ª specie contenuta nell' altra, si dice che le due date forme di 2ª specie son riferite *proiettivamente*; e la corrispondenza che tra esse intercede, chiamasi *proiettività* (*E.* Cap. VIII).

Due forme di 2ª specie omonime — cioè due piani o due stelle — diconsi riferite omograficamente o mediante un' *omografia* o *collineazione*, quando son riferite proiettivamente in modo che si corrispondano gli elementi dello stesso nome; mentre la proiettività che intercede tra esse si chiama una *correlazione* o *reciprocità*, allorquando gli elementi omologhi son di nome diverso.

E un piano ed una stella riferiti proiettivamente, si dicono *collineari* (o *omografici*) oppure *correlativi* (o *reciproci*), secondo che ai punti e alle rette del piano, corrispondono rispettivamente le rette e i piani oppure i piani e le rette della stella.

Il *prodotto* di due o più proiettività è ancora una proiettività, ed è una collineazione o una correlazione, secondo che tra i fattori del prodotto entrano un numero pari o un numero dispari di correlazioni.

Il teorema fondamentale nello studio della proiettività tra forme di 2ª specie, afferma che la corrispondenza biunivoca che nasce tra gli elementi di due forme di 1ª specie omologhe, è pure una proiettività (*E.* § 44).

Fissando sopra un piano α due fasci di raggi di centri (distinti) A, B, e sopra un altro piano α' due fasci di raggi di centri (distinti) A′, B′, esiste tra i due piani una ed una sola collineazione, che faccia corrispondere ai raggi dei fasci A, B rispettivamente i raggi di A′, B′, secondo due proiettività fissate ad arbitrio, colla condizione che in entrambe al raggio AB corrisponda il raggio A′B′ (*E.* § 45). Le proposizioni analoghe, relative agli altri casi a cui dà luogo il concetto di proiettività tra forme di 2ª specie, si ottengono da questa enunciata, applicando la legge di dualità ad uno o ad entrambi i piani.

Dal teorema precedente si deduce che esiste una ed una sola collineazione che faccia passare da 4 punti ABCD del piano α, a 4 punti A′B′C′D′ di α', purchè tre qualunque dei punti dati su α o su α' non siano allineati (*E.* § 45); e si deduce pure il modo di effettuare la costruzione di quest'omografia, la quale s'indica spesso col simbolo:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

Nella pratica del disegno, per costruire rapidamente l'elemento (punto o retta) di α', omologo di un elemento (punto o retta) di α, gioverà tener presente l'osservazione fatta al nº 12 del § 4.

Un teorema utilissimo è quello che dà la condizione affinchè due forme collineari distinte, dello stesso nome, sieno *prospettive*: perchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che la forma di 1ª specie comune alle due date forme di 2ª specie, sia tutta costituita da elementi uniti (*E.* § 46).

Una omografia non identica tra due piani sovrapposti, non può avere quattro elementi uniti omonimi (punti o rette), senza che tre almeno di questi appartengano ad una forma di 1ª specie (*E.* § 47). Orbene, si dimostra che, se un'omografia tra due piani sovrapposti possiede una punteggiata di punti uniti, possiede pure un fascio di rette unite, e viceversa (dualmente) (*E.* § 47).

Una tale omografia si chiama un'*omologia*, e si chiamano *centro* ed *asse d' omologia*, rispettivamente il centro del fascio di rette unite e la retta luogo di punti uniti.

La costruzione dell' omologia deriva immediatamente dal fatto che due punti omologhi sono allineati col centro di omologia e che due rette omologhe si tagliano sull'asse di omologia.

Dicendo AA' una coppia di punti corrispondenti in un'omologia piana di centro U ed asse u, e ponendo $C \equiv AA'.u$, il gruppo $AA'UC$ rimane proiettivo a se stesso mutando comunque la coppia AA'; e dualmente, se a, a' son due rette corrispondenti ed è $c \equiv aa'.U$, il gruppo $aa'cu$ rimane proiettivo a se stesso variando la coppia aa', ed anzi esso è proiettivo al gruppo $AA'UC$.

Quando il gruppo $AA'UC$ (od $aa'cu$) è armonico, *l'omologia* dicesi *armonica* (*E.* § 48).

L'omologia armonica è importante specialmente pel fatto che essa è l'unica omografia involutoria, cioè l'unica omografia che coincida con la sua inversa.

Quanto agli elementi uniti di un'omografia piana, non identica nè omologica, non tutto si può dire, prima di avere intrapreso lo studio delle coniche e delle loro intersezioni. Si dimostra che i punti e le rette unite vanno *associati* a coppie, in modo che indicando con U, u un punto ed una retta di una di queste coppie, la u contiene tutti i centri di prospettiva delle infinite coppie di rette omologhe distinte uscenti da U; e pel punto U passano tutti gli assi di prospettiva delle infinite coppie di fasci omologhi distinti, coi centri in u (*E.* § 49).

I casi particolari a cui può dar luogo un'omografia tra due piani, quando si abbia uno speciale riguardo agli elementi impropri dei due piani, sono i seguenti (*E.* § 50):

1°) L'*omografia affine* o *affinità*, che si ha quando le rette all'infinito dei due piani si corrispondono. — La proprietà più notevole di questa speciale *omografia*, è che due aree corrispondenti serbano un rapporto costante (*rapporto d'affinità*).

In particolare si ha l'*omologia affine*, quando il centro d'omologia è all'infinito, ma l'asse è proprio.

2°) Quando in un'affinità le rette all'infinito si corrispondono in modo che dall'involuzione assoluta dell'una si passa all'involuzione assoluta dell'altra, l'omografia dicesi una *similitudine*, perchè due figure corrispondenti sono simili. — Allorchè la similitudine intercede tra piani sovrapposti, c'è luogo a distinguere la similitudine *diretta* o *inversa*, secondo che è diretta o inversa la congruenza subordinata sulla retta all'infinito.

Una similitudine omologica può essere un' *omotetia*, quando l'asse d'omologia è improprio, ma il centro proprio; oppure una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

3°) In particolare una similitudine può essere una *congruenza*, allorquando due figure corrispondenti sono uguali (congrue). Si dimostra che una congruenza omologica del piano è una traslazione o una simmetria rispetto ad un centro o una simmetria ortogonale rispetto ad un asse; e che una congruenza tra piani sovrapposti può sempre immaginarsi come generata da una rotazione attorno ad un punto fisso o da una traslazione del piano su se stesso, se è diretta; e da una tal traslazione, composta con un ribaltamento del piano attorno ad un asse avente la direzione della traslazione, se è inversa.

Come già abbiamo detto al n° 1 del § 4, il concetto di proiettività tra forme fondamentali non soltanto di 1ª, ma anche di 2ª (e di 3ª) specie, fu stabilito in tutta la sua generalità dal Möbius (1827), nel sistema geometrico da lui creato col *calcolo baricentrico*. Le denominazioni di *collineazione* e *correlazione* sono appunto di Möbius; mentre la denominazione di *figure affini* è di Eulero, che nella sua *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), aveva già studiato l'affinità tra curve. Tracce di questa teoria si trovano anche in Clairaut (1731). A Chasles è dovuta la denominazione di *omografia* e a Steiner quella di *proiettività*.

Nella definizione della proiettività tra forme di 2ª specie, non entra la condizione che due forme di 1ª specie omologhe sieno proiettive, perchè ciò risulta dal teorema fondamentale di Staudt, quando ci limitiamo a considerare la corrispondenza tra elementi reali. Volendo estendere la corrispondenza anche agli elementi immaginarî, in modo che (come nel campo reale) essa venga rappresentata da una sostituzione lineare tra le coordinate omogenee degli elementi omologhi, la definizione adottata non basta più. Ciò fu notato dallo STAUDT (*Beiträge....*, 1857), il quale diede una definizione geometrica delle proiettività, valida anche nel campo complesso. Continuando ad adottare nel campo complesso la definizione usata nel campo reale, si trovano, oltre alle ordinarie proiettività, altre corrispondenze, che il SEGRE chiamò *antiproiettività* (Un nuovo campo di ricerche geometriche, 1890).

La determinazione di una collineazione tra due piani, mediante due proiettività tra due fasci di raggi dell'uno e due fasci dell'altro (con la condizione che entrambe facciano corrispondere tra loro i raggi comuni alle due coppie di fasci), è dovuta a SEYDEWITZ (1846), per quanto in MÖBIUS si possa implicitamente ritrovare questa determinazione (specialmente sotto la forma duale). La correlazione o reciprocità dopo MÖBIUS fu studiata da MAGNUS (1833), PLÜCKER (1835), CHASLES (1837), SEYDEWITZ (1846) e STAUDT (1847); ma la teoria di una particolare correlazione tra piani, e cioè della *polarità* rispetto ad una conica, era già stata costruita da PONCELET (1822).

L'omologia piana fu studiata sistematicamente da PONCELET (1822), che introdusse le denominazioni relative; tuttavia la costruzione era già stata data (per dedurre le coniche dal cerchio) da DE LA HIRE (1673), nel caso di un'omologia individuata mediante il centro (*polo*, secondo D. L. H.), l'asse (*formatrice*) ed una retta limite (*direttrice*). La denominazione di figure omotetiche (come già abbiamo notato) è di CHASLES.

2. Una conclusione importantissima, che si trae dallo studio dei casi metrici d'un'omografia, è che tutte le proprietà metriche delle figure di un piano, si possono riguardare come proprietà grafiche delle figure stesse in relazione con l'assoluto del piano, cioè con la retta all'infinito e l'involuzione assoluta esistente su essa (*E.* § 50).

Questa proposizione ci dice *a priori* la ragione per cui certe costruzioni metriche di 1° grado, già incontrate, si sieno potute effettuare con la sola riga, una volta dato l'assoluto del piano (o parte di esso).

Quanto ai problemi di 2° grado, cioè a quelli che, con proiezioni e sezioni, si riducono graficamente alla determinazione degli elementi uniti d'una proiettività sopra una forma di 1ª specie, è chiaro ormai che anch'essi si possono risolvere *tutti* (anche se metrici) con la sola riga, una volta che sia tracciato sul piano un cerchio col suo centro.

Invero, essendo dato un cerchio col suo centro, si costruiscono linearmente quanti si vogliano punti della retta all' infinito, cioè si ottengono quante si vogliano coppie di rette parallele, congiungendo gli estremi di due diametri variabili; e proiettando da due punti diametralmente opposti, i punti della circonferenza, si ottengono con la sola riga quante si vogliano coppie di rette ortogonali. Ciò significa che, dando un cerchio col suo centro, si viene ad assegnare l' assoluto del piano, e quindi ogni problema metrico si può trattare come un problema grafico.

E poichè ogni problema grafico di 2° grado si riconduce, con la sola riga, alla determinazione degli elementi uniti di una proiettività tra due forme di 1ª specie sovrapposte, e questa determinazione si ottiene linearmente, una volta dato un cerchio, come abbiamo osservato al n° 4 del § 5 (Costr. 2ª), così si conclude che *ogni problema di 2° grado (grafico o metrico) si risolve con la sola riga, quando sia tracciato sul foglio del disegno un cerchio col suo centro.* La considerazione del centro (per costruire l' assoluto) occorrerà soltanto nei problemi metrici (vedi pure *E.* § 73).

L' introduzione dell' *assoluto* per esprimere i legami tra le proprietà metriche e proiettive, e la conseguente subordinazione della geometria metrica alla proiettiva, è dovuta a CAYLEY (1859). Quest' idea fu poi sviluppata ampiamente dal KLEIN (1871).

PONCELET nel 1822 e più tardi STEINER (1833), dimostrarono la possibilità di risolvere con la sola riga e con un cerchio fisso tutti i problemi di 2° grado, ed anzi più in generale quelli risolubili con la riga e col compasso, che comprendono quelli di 2° grado e quelli riducibili ad una successione di problemi di 2° grado.

a) Problemi sull' omografia tra piani.

3. *Se due forme di 2ª specie sono omografiche, si può passare dall' una all' altra con un numero finito di proiezioni e di sezioni.*

Si tratti ad es. di due sistemi piani α, α', che potremo supporre non sovrapposti, perchè se lo fossero, basterebbe proiettare uno di essi da un centro sopra un piano diverso dal comune sostegno.

Presi due punti omologhi A, A', appartenenti rispettivamente ad α, α', ma non alla retta comune, per A' si conduca un piano α_1 diverso da α e da α', e si proietti α su α_1 da un punto S_1 di AA'.

Tra α_1 ed α' avremo una omografia ω_1, prodotto della prospettività π_1 tra α_1 ed α e della omografia ω tra α ed α'. Nella ω_1 il punto A' risulta unito, e quindi la corrispondente in α', di una retta di α_1 uscente da A', passa pure per questo punto. Sieno $a_1 a'$ due rette omologhe nella ω_1, uscenti da A', ma diverse dalla retta $\alpha_1\alpha'$. Poichè il punto $A' \equiv a_1 a'$ è unito, la proiettività tra a_1 ed a', subordinata dalla ω_1, sarà una prospettività, il cui centro indicheremo con S_2. Proiettando il piano α_1 da S_2 sopra un piano α_2 distinto da α_1 e da α', e passante per a', avremo tra α_2 ed α' un' omografia ω_2, prodotto della prospettività π_2 tra α_2 ed α_1 e della omografia ω_1 tra α_1 ad α'. E siccome la retta $a' \equiv \alpha_2\alpha'$ è tutta costituita da punti uniti nella ω_2, quest' omografia sarà una prospettività di centro S_3 (*E.* § 46). Dunque per passare dal sistema piano α al sistema α', si potrà proiettare α su α_1 da S_1, indi α_1 su α_2 da S_2 e infine α_2 su α' da S_3.

4. *Ogni omografia tra due piani sovrapposti può scindersi nel prodotto di un numero finito di omologie.*

Data un' omografia ω tra due piani sovrapposti α, α', consideriamo una coppia A, A' di punti corrispondenti dei piani α, α', e, per maggior generalità, supponiamo che quei due punti non coincidano. Si consideri l' omologia piana π_1 che fa corrispondere al punto A il punto A' e che ha per centro un punto S_1 della retta AA' e per asse una retta s_1, appartenente al comune sostegno dei sistemi piani α, α', ma non passante nè per A nè per A'.

Chiamando α_1 il sistema piano corrispondente ad α mediante la π_1, tra α_1 ed α' avremo un' omografia ω_1 col punto unito A', e quindi ad una retta $\dot{a}_1$ del piano α_1, passante per A', corrisponderà in α' una retta a', pure passante per A'. Sicchè la proiettività subordinata da ω_1 tra a_1 ed a', è una prospettività, di cui indichiamo con S_2 il centro.

Consideriamo ora l'omologia π_2 che fa corrispondere ad a_1 la retta a', che ha per centro il punto S_2 e per asse una retta s_2 uscente da A', e diciamo α_2 il sistema piano trasformato di α_1 mediante la π_2. Tra α_2 ed α' si avrà una omografia nella quale sono uniti tutti i punti della retta a', cioè un'omologia π_3 di asse a' (*E.* § 47).

Da ciò deriva che il passaggio dal sistema α al sistema α', si può ottenere applicando successivamente le omologie π_1, π_2, π_3.

5. *Avendosi due piani proprî collineari, ma non affini, collocarli in posizione prospettiva od omologica.*

Sieno α, α' i due piani collineari, non affini. Perchè i due piani si possano trasportare in posizione prospettiva od omologica, bisogna e basta che esistano due rette omologhe x, x', appartenenti rispettivamente ad α, α', e sulle quali l'omografia tra α, α' subordini una congruenza. Ora due tali rette esistono sempre. Invero se i due piani non sono affini, se cioè le rette limiti rispettive j, i', che corrispondono alle rette improprie j'_∞, i_∞, sono proprie, al punto $J_\infty \equiv j\, i_\infty$ corrisponderà nel piano α' il punto $I'_\infty \equiv i' j'_\infty$, sicchè nel piano α vi saranno soltanto ∞^1 rette, costituenti il fascio improprio J_∞, alle quali corrispondono su α' rette punteggiate simili; e queste ultime costituiranno il fascio I'_∞. Le coppie di punteggiate omologhe congruenti, dovranno ricercarsi tra le rette di questi due fasci improprî.

Si traccino perciò sul piano α due rette parallele a, b, ma non aventi la direzione J_∞, e sieno a', b' le rette omologhe del piano α'. Il punto $a'b'$ sarà un punto *proprio* della retta limite i', sicchè dicendo l la lunghezza comune ai segmenti finiti staccati dalle a, b sulle rette del fascio improprio J_∞, sarà sempre possibile incastrare un segmento di lunghezza l nell' angolo $a'b'$, in modo che assuma la direzione di I'_∞; ed anzi ciò potrà farsi in due maniere diverse.

Dicendo $x'x_1'$ le due rette su cui vengono a giacere i segmenti incastrati nell' angolo $a'b'$, ed xx_1 le rette di α ad esse omologhe, è chiaro che xx', x_1x_1' saranno le due sole coppie di rette omologhe congruenti; e quindi i due piani α, α' potranno portarsi in posizione prospettiva od omologica, facendo coincidere x con x' o x_1 con x_1', in guisa che coincidano i punti omologhi (*E.* §§. 46, 47).

Questo problema trovasi risoluto in MÖBIUS (1827), eppoi in MAGUS, CHASLES, SEYDEWITZ. La semplice soluzione esposta è dovuta a SPITZER (1847).

6. *Dati due piani collineari, non affini, determinare un fascio di raggi dell' uno, a cui corrisponda nell' altro un fascio congruente.*

Sieno α, α' i due piani collineari, non affini. Consideriamo nel piano α due angoli retti ab, cd coi lati non paralleli e diciamo ABCD i punti all' infinito dei lati ab cd, e A'B'C'D' i punti proprî, della retta limite di α', corrispondenti ai punti ABCD.

Da un punto arbitrario del piano α' i punti A'B' (o C'D') son proiettati secondo due raggi i cui corrispondenti in α son paralleli ai raggi ab (o cd), cioè son ortogonali tra loro; e quindi se un punto P' di α' deve esser centro di un fascio congruente al fascio omologo P, esso dovrà esser comune alle circonferenze di diametri A'B', C'D'. Viceversa, un punto P' comune a queste circonferenze, avrà per omologo su α un punto P tale che agli angoli retti $\widehat{A'P'B'}$, $\widehat{C'P'D'}$, corrisponderanno due angoli retti col vertice in P, e quindi i due fasci P, P' saranno congruenti (§ 4, n° 13).

Il problema ha due soluzioni, perchè le coppie A'B', C'D', omologhe delle coppie AB, CD, si separano, e quindi le circonferenze suddette si tagliano in due punti.

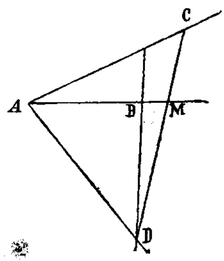
Una soluzione del problema 6, leggermente diversa da quella esposta, trovasi in SEYDEWITZ (1846).

7. *Se ABCDEF son 6 punti indipendenti di un piano, il birapporto d'area:*

$$\frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{BCD}} : \frac{\mathrm{AEF}}{\mathrm{BEF}}$$

non muta per qualunque trasformazione collineare.

Pongasi:



$$\mathrm{M} \equiv \mathrm{AB} \,.\, \mathrm{CD}, \quad \mathrm{N} \equiv \mathrm{AB} \,.\, \mathrm{EF},$$

e si chiamino A'B'C'D'E'F' i punti corrispondenti ai dati, mediante una collineazione. Ai punti M, N corrisponderanno i punti

$$\mathrm{M'} \equiv \mathrm{A'B'} \,.\, \mathrm{C'D'}, \quad \mathrm{N'} \equiv \mathrm{A'B'} \,.\, \mathrm{E'F'},$$

sicchè sulle rette AB, A'B' le due quaderne ABMN, A'B'M'N', saranno proiettive. Onde avremo:

$$(\mathrm{ABMN}) = (\mathrm{A'B'M'N'}).$$

Se si suppone di avere introdotto il segno delle aree, come si fa in Geometria analitica, otterremo in valore e segno:

$$\mathrm{AM} : \mathrm{BM} = \mathrm{ACM} : \mathrm{BCM} = \mathrm{AMD} : \mathrm{BMD},$$

ove ACM rappresenta l'area del triangolo omonimo, considerata in valore e segno, ecc.

E siccome:

$$\frac{\mathrm{ACM} + \mathrm{AMD}}{\mathrm{BCM} + \mathrm{BMD}} = \frac{\mathrm{ACM}}{\mathrm{BCM}},$$

verrà:

$$\frac{\mathrm{ACM} + \mathrm{AMD}}{\mathrm{BCM} + \mathrm{BMD}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}.$$

Poichè sulla retta CD, tenendo conto della convenzione dei segni, si ha:

$$\mathrm{CM} + \mathrm{MD} + \mathrm{DC} = 0,$$

avrà pur luogo la relazione:

$$\mathrm{ACM} + \mathrm{AMD} + \mathrm{ADC} = 0,$$

ossia:

$$\mathrm{ACM} + \mathrm{AMD} = \mathrm{ACD},$$

e analogamente:

$$\mathrm{BCM} + \mathrm{BMD} = \mathrm{BCD}.$$

Sicchè:

$$\frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{BCD}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}.$$

In modo analogo si ottiene:

$$\frac{\mathrm{AEF}}{\mathrm{BEF}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{BN}}.$$

Dividendo membro a membro le due ultime uguaglianze, avremo:

$$\frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{BCD}} : \frac{\mathrm{AEF}}{\mathrm{BEF}} = (\mathrm{ABMN}).$$

Scambiando le lettere senza apici in lettere con apici, verrà:

$$\frac{\mathrm{A'C'D'}}{\mathrm{B'C'D'}} : \frac{\mathrm{A'E'F'}}{\mathrm{B'E'F'}} = (\mathrm{A'B'M'N'}),$$

la quale confrontata con la precedente, dà:

$$\frac{\mathrm{ACD}}{\mathrm{BCD}} : \frac{\mathrm{AEF}}{\mathrm{BEF}} = \frac{\mathrm{A'C'D'}}{\mathrm{B'C'D'}} : \frac{\mathrm{A'E'F'}}{\mathrm{B'E'F'}}, \qquad \text{c. d. d.}$$

L' invarianza del birapporto d' area, rispetto alle trasformazioni collineari, fu dimostrata da Möbius, nel modo sopra esposto (Der barycentrische Calcul, 1827). Come caso particolare si ottiene la proposizione, che in due piani affini è costante il rapporto di due aree corrispondenti. — Anche in Poncelet (1822) si trovano considerate espressioni formate mediante aree piane e che non si alterano per proiezioni e sezioni; ed anzi l' invarianza del birapporto d' area si sarebbe potuta dimostrare mediante i principî esposti da Poncelet, tenendo presente la prop. 3 di questo §.

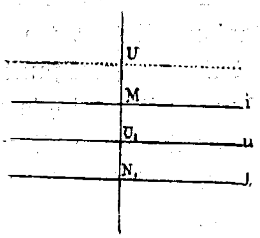
8. *Se di due piani prospettivi α, α', che si seghino lungo una retta propria* u, *se ne fa ruotare uno, e sia p. e.* α', *attorno alla retta* u, *di un angolo qualunque, i due piani si conservano prospettivi ed il centro di prospettiva, se è proprio, descrive una circonferenza in un piano perpendicolare ad* u, *la quale hà il centro sulla retta limite di α e il raggio uguale alla distanza tra la retta limite di α' e la retta* u. *Se la rotazione si continua finchè α' viene a coincidere con α, i due piani divengono omologici, ed il centro d' omologia cade in uno dei punti comuni al piano fisso α e alla circonferenza suddetta.*

Questo teorema si può dedurre dall' analogo per le punteggiate prospettive (§ 4, n° 10), segando i due piani con un terzo piano passante pel centro di prospettiva e perpendicolare alla retta $u \equiv \alpha\alpha'$; e tenendo presente la condizione che caratterizza la prospettività (od omologia) tra piani (*E*. §§ 46, 47).

La prop. 7 è di CHASLES (Aperçu..., 1837).

9. *Ogni omologia armonica con l'asse proprio* u, *può ottenersi da una conveniente omologia (speciale) di asse* u *e col centro sull' asse, ruotando di un angolo piatto, attorno ad* u, *uno dei sistemi piani che si corrispondono in quest' ultima omologia; e viceversa.*

Sia ω un' omologia armonica di asse u, tra i punti dei piani sovrapposti α, α', e supponiamo anzitutto che il centro U dell' omologia sia proprio. Poichè la ω è involutoria (*E*. § 48), le due rette limiti coincideranno colla retta i, bisettrice della striscia compresa tra u e la parallela da U ad u.



Ruotando il piano α' attorno ad u, i piani α, α' diverranno prospettivi, e pel teorema del n° precedente, il centro di prospettiva descriverà una circonferenza di centro M e raggio MU, ove M è il punto in cui la i è segata dalla perpendicolare ad u, condotta per U. Se U_1 è il punto ove questa perpendicolare sega u, dopo una rotazione di 180° il centro di prospettiva verrà a cadere in U_1. Sicchè, indicando con α_1 il sistema piano α' ribaltato, tra α ed α_1 avremo un'omologia di asse u e centro U_1; e quindi la ω si potrà generare nel modo enunciato. — Si osservi che la retta limite appartenente al sistema α_1, dovendo coincidere colla i ribaltata, sarà la retta j_1 simmetrica di i rispetto ad u.

Viceversa, considerando un omologia ω_1 tra due piani sovrapposti α ed α_1, la quale abbia per asse una retta u e per centro un punto U_1 di questa retta, le rette limiti i, j_1 saranno disposte simmetricamente rispetto ad u.

Invero, sopra una retta uscente da U_1, l'omologia subordina una proiettività parabolica col punto unito U_1 e i punti segnati su questa retta dalle rette limiti, saranno gli omologhi del punto all'infinito della retta stessa, pensato come appartenente all'una o all'altra punteggiata; donde deriva che essi sono equidistanti dal centro U_1 (§ 6, n° 25, Oss.)

Se dunque la retta perpendicolare ad u per U_1, sega le i j_1 nei punti M, N_1, sarà $MU_1 = U_1N_1$, e quindi ruotando il piano α_1 attorno ad u, i sistemi α ed α_1 diverranno prospettivi e il loro centro di prospettiva, partendo dalla posizione U_1, descriverà una circonferenza col centro in M e col raggio U_1N_1 ossia MU_1.

Indicando con α' la posizione assunta da α_1 dopo la rotazione di 180°, tra α, α' avremo un'omologia con l'asse u ed il centro nel punto U della MU_1 che dista da M quanto U_1: dunque l'omologia tra α, α' sarà armonica.

Se il centro di un'omologia armonica di asse u è improprio, cioè se l'omologia consiste in una simmetria (obliqua od ortogonale) rispetto ad u, è chiaro che ribaltando attorno ad u uno dei sistemi piani sovrapposti, si otterrà un'omologia affine di asse u e col centro nel punto improprio di u; e viceversa.

10. *Il prodotto di due omologie aventi lo stesso centro, è un' omologia che ha quel centro, e gli assi delle tre omologie concorrono in un punto o coincidono; e dualmente.*

Invero, se due omologie ω_1, ω_2, hanno per centro il punto U, ciascuna di esse muterà in sè ogni retta uscente da U (nel piano), e quindi anche il loro prodotto godrà della stessa proprietà; donde si trae che il prodotto $\omega_1\omega_2$ (eseguito operando prima con ω_1 eppoi con ω_2) sarà un' omologia di centro U.

Se poi P è un punto comune agli assi delle omologie date, ciascuna di queste lascierà fisso il punto P, sicchè P sarà unito per l' omologia prodotto; e quindi, se P è diverso da U, pel punto P passerà l' asse di quest' ultima omologia. Ma la stessa conclusione sussiste anche se $P \equiv U$. Difatti facendo il prodotto dell' omologia $\omega_1\omega_2$ con l' inversa di ω_2, si ottiene ω_1, e da ciò scaturisce subito l' assurdità dell' ipotesi che l' asse dell' omologia $\omega_1\omega_2$ non passi per U.

Osservazione. Sopra la retta UP (o sopra una retta tirata a piacere per U, quando P coincide con U) le tre omologie ω_1, ω_2, $\omega_1\omega_2$, subordinano tre proiettività coi punti uniti P, U. Se dunque la ω_1 fa passare dal punto A della UP al punto A′, e la ω_2 dal punto A′ ad A″, gl' invarianti assoluti delle tre omologie suddette, saranno (*E.* § 47):

$$(UPAA'),\quad (UPA'A''),\quad (UPAA'').$$

E poichè l' ultimo birapporto è il prodotto dei primi due, si conclude che:

L' invariante assoluto dell' omologia prodotto di due date omologie, aventi lo stesso centro (o lo stesso asse), è il prodotto degl' invarianti che spettano alle omologie componenti.

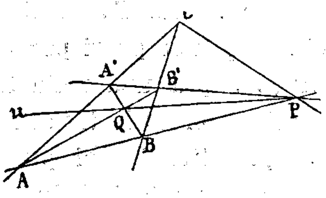
Si badi bene che, per la validità del teorema, occorre adottare una convenzione uniforme relativamente all'ordine in cui si vogliono considerare il centro di un'omologia, una coppia di punti omologhi ed il punto ove la loro congiungente incontra l'asse, per formare l'invariante assoluto.

11. *Se in un'omografia tra due piani sovrapposti ci sono due coppie di punti (o rette), non appartenenti ad una medesima retta (o punto), che si corrispondono in doppio modo, l'omografia è involutoria, cioè è un'omologia armonica.*

Diciamo ω la data omografia ed AA′, BB′ le due coppie di punti corrispondentisi in doppio modo; in guisa che sarà:

$$(1) \qquad \omega \equiv \begin{pmatrix} AA'BB' \\ A'AB'B \end{pmatrix}.$$

Poichè le rette AA′, BB′ risultano unite, il punto U ad esse comune, sarà pure unito, donde segue intanto che tra



i punti AA′BB′ non si verificano mai allineamenti e quindi che la ω resta individuata, come indica l'uguaglianza simbolica (1). Dalla (1) si rileva che al punto P, comune alle rette AB, A′B′, corrisponde il punto comune alle A′B′, AB, cioè il punto P stesso; dunque anche P è unito. Sicchè dal punto U escono le tre rette unite AA′, BB′, UP, e quindi ogni retta per U è unita. Ne deriva che la ω è un'omologia di centro U.

Si vede inoltre che è unito anche il punto $Q \equiv AB' \,.\, A'B$, e perciò l'asse di omologia sarà la retta $u \equiv PQ$. Dalla considerazione del quadrangolo completo AA′BB′, si rileva subito che l'omologia ω è armonica.

Osservazione. È chiaro che se in un'omologia ci sono due elementi distinti che si corrispondono in doppio modo, essa è un'omologia armonica.

12. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè in*

un' omografia non omologica tra due piani sovrapposti, ci sia una coppia di elementi distinti (punti o rette) che si corrispondano in doppio modo, è che il quadrato di quell' omografia sia un' omologia.

Supponiamo infatti che ci sieno due punti distinti A, A′ corrispondentisi in doppio modo nella data omografia ω. Allora sulla retta AA′ (unita) l' omografia subordina una proiettività, che possiede una coppia di elementi omologhi in doppio modo, cioè un' involuzione.

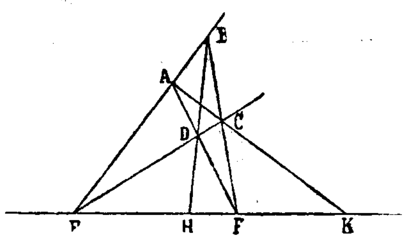
Dunque il quadrato della data omografia subordina sulla AA′, il quadrato di un' involuzione, cioè l' identità.

Da ciò deriva che ω^2 è un' omologia di asse AA′, oppure l' identità. Ma questa seconda alternativa resta esclusa, per l' ipotesi che ω non sia omologica (*E.* § 48).

Viceversa, se il quadrato ω^2 di un' omografia non omologica ω, è un' omologia di asse u, due ipotesi son possibili: o la u non è unita nella ω, oppure è unita. Nella 1ª ipotesi ad u corrisponderà in doppio modo nella ω, una retta u', diversa da u, e quindi la ω possiederà infinite coppie di punti, non appartenenti ad una retta, e che si corrispondono in doppio modo; e ciò non può avvenire se la ω non è omologica (nº precedente).

Nella 2ª ipotesi la ω subordinerà sulla u un' involuzione, e quindi vi sarà una coppia (anzi infinite) di elementi omologhi in doppio modo.

13. *Determinare un' omologia che trasformi un dato quadrangolo semplice ABCD:*
a) in un parallelogramma; b) in un rombo; c) in un rettangolo; d) in un quadrato.



a) Basterà considerare un' omologia che abbia per retta limite del piano di ABCD, la retta EF, ove E $\equiv$ AB . CD, F $\equiv$ AD . BC.

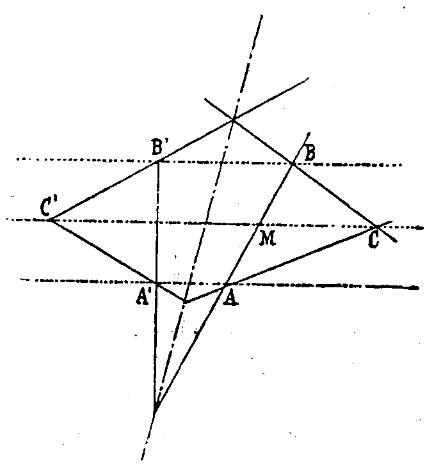
b) Scegliendo l'omologia in modo che soddisfi alla condizione *a*) e inoltre che il suo centro sia un punto della circonferenza di diametro HK, ove H $\equiv$ EF . BD, K $\equiv$ EF . AC, le diagonali del parallelogramma trasformato saranno ortogonali, e si tratterà di un rombo.

c) Scegliendo l'omologia in modo che sia soddisfatta la condizione *a*) e inoltre che il suo centro sia un punto della circonferenza di diametro EF, due lati opposti del parallelogramma trasformato saranno perpendicolari agli altri due, e si tratterà di un rettangolo.

d) Basterà scegliere l'omologia in modo che siano soddisfatte le condizioni *a*) *b*) *c*), cioè prendere la retta limite del piano di ABCD coincidente con EF ed il centro in uno dei punti comuni alle circonferenze di diametri EF ed HK. Si noti che il problema ha sempre soluzioni, perchè le coppie EF, HK si separano armonicamente.

OSSERVAZIONE. Si confrontino le trasformazioni attuali con quelle esposte nel § 1.

14. *Determinare un' omologia affine che trasformi un dato triangolo in un triangolo equilatero.*

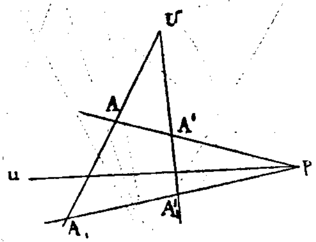


Sia ABC il triangolo dato. Congiungasi il vertice C col punto M, medio tra A, B, e si seghino le parallele condotte per A, B alla MC, nei punti A′, B′, con una loro perpendicolare comune. Il terzo vertice C′ di un triangolo equilatero costruito sul lato A′B′, cadrà certamente sulla retta MC, sicchè i lati omologhi AB, A′B′; BC, B′C′; CA, C′A′ dei triangoli ABC, A′B′C′, si taglieranno in tre punti di una retta *u*.

L'omologia affine richiesta è quella che ha per asse u, per centro il punto all'infinito della retta MC e che fa passare da A ad A'.

15. *Ogni omologia che abbia per centro ed asse due elementi uniti associati in un' omografia piana, non omologica, è permutabile con questa.*

Siano U ed u un punto unito ed una retta unita, fra loro associati in un'omografia piana π (*E.* § 49), e sia ω una qualunque omologia di centro U ed asse u.



Per dimostrare che le due corrispondenze son permutabili, ossia che

$$\pi\omega \equiv \omega\pi,$$

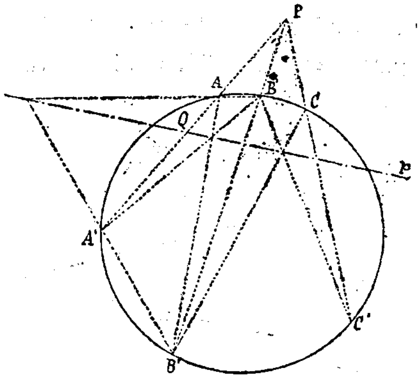
basterà dimostrare che la ω muta in se stessa la π; cioè che trasforma ogni coppia di elementi corrispondenti nella π, in una coppia analoga.

Supponiamo che la π faccia passare dal punto A al punto A', e la ω rispettivamente dai punti A, A' ai punti A_1, A'_1,: si tratterà di provare che mediante la π ad A_1 corrisponde A'_1.

Invero per l'ipotesi che U, u siano associati, il centro di prospettiva delle punteggiate UA ed UA', omologhe nella π, apparterrà ad u, cioè sarà il punto $P \equiv AA'.u$. I punti A_1, A_1', corrispondenti ad A, A' nella ω, giaceranno sulle rette UA, UA', e inoltre la retta $A_1A'_1$ corrispondente ad AA' nell' omologia ω, dovrà passare per P. Dunque i punti A_1A_1' sono omologhi nella prospettività che la data omografia π subordina tra UA e UA', cioè si corrispondono nella π.

16. *Un' involuzione tra i punti di una circonferenza, è sempre subordinata ad un' omologia armonica, che ha per centro il polo e per asse l' asse dell' involuzione* (cfr. con l'es. 16 del § 6).

Sia k la data circonferenza ed I un' involuzione tra i punti di k, che abbia per polo P e per asse p. Se AA', BB' son due coppie di I, cioè due coppie di punti di k, allineate con P, le rette AB' e A'B si segheranno in un punto di p, e così pure le rette AB e A'B'. Ponendo dunque $Q \equiv p \,.\, AA'$, il gruppo PQAA' risulterà armonico, e quindi la retta p conterrà i coniugati armonici di P rispetto alle coppie dell' involuzione.



Da ciò deriva immediatamente, che le coppie dell' involuzione I son costituite da punti omologhi nell' omologia armonica che ha per centro P e per asse p.

17. *Sui centri di similitudine di due circoli.*

Sieno c c' due circoli di un piano, e proponiamoci di ricercare se esistono omotetie che mutino l' uno nell' altro.

Se ω è un' omotetia che muta c in c', essa muterà le tangenti di c in quelle di c', ed in particolare farà corrispondere a due tangenti parallele di c due tangenti pure parallele di c', e quindi ad ogni diametro di c un diametro di c'. Dunque intanto i centri C e C' dei due circoli, dovranno essere omologhi.

Per liberarci anzitutto dal caso dei circoli concentrici, osserviamo che in tal caso il centro comune $C \equiv C'$, sarà centro dell' omotetia ω. Ne segue subito l' esistenza di due omotetie che mutano c in c', secondo che ad un punto A di c si fa corrispondere l' uno o l' altro dei punti $A'A_1'$ in cui il diametro AC sega il cerchio c'.

Se i due circoli non sono concentrici, come d' ora in poi supporremo, l' omotetia ω dovrà far corrispondere ad un raggio di c, che vada al punto A, un raggio parallelo di c';

e quest' ultimo raggio potrà avere l' estremo A', omologo di A, o dalla stessa parte di A, rispetto alla retta CC', oppure dalla parte opposta. In ogni caso il punto $S \equiv AA' . CC'$ sarà il centro dell' omotetia ω.

Viceversa è chiaro che l' omotetia individuata dalle condizioni di far passare da C a C' e da un punto A di c ad uno determinato (A') dei punti in cui c' vien tagliato dal diametro parallelo a CA, fa corrispondere ad ogni punto di c un punto di c'; cioè muta c in c'. Si conclude pertanto che:

a) *Due circoli qualunque di un piano si corrispondono secondo due determinate omotetie, nell' una delle quali sono omologhi due raggi paralleli diretti nello stesso senso, e nell' altra due raggi paralleli diretti in senso contrario. I centri di queste omotetie vengono a coincidere nel centro comune ai due circoli, quando questi sono concentrici.*

La prima delle omotetie suddette, si dirà *diretta* e la seconda *inversa* (1). Il rapporto d' omotetia (*E.* § 47) è rispettivamente positivo o negativo. — I centri delle due omotetie si chiamano risp. *centro di similitudine diretta* e *centro di similitudine inversa* dei due circoli. È chiaro che le eventuali tangenti condotte da un centro di similitudine ad uno dei due cerchi, toccano anche l' altro.

Fissiamo ora uno, S, dei centri di similitudine e un punto qualunque A di c. Dei due punti in cui la retta SA sega il circolo c', uno è l' omologo di A nell' omotetia ω di centro S, e l' altro corrisponde ad A nell' omografia prodotto della ω e dell' omologia armonica π', che subordina sul cerchio c' l' involuzione di polo S. Due elementi (punti o rette) del

(1) Questa distinzione, che si fa seguendo Poncelet, non deve confondersi con la distinzione di una similitudine qualunque in diretta e inversa (*E.* § 50). Secondo quest' ultima distinzione ogni omotetia è diretta, perchè conserva il verso degli angoli.

piano, che sieno corrispondenti nell' omografia $\omega\pi'$, li diremo *inversamente omologhi* rispetto al centro S.

Risulta subito che:

b) I punti determinati dai circoli c, c' *sopra una secante che esca da un centro di similitudine S, si distribuiscono in due coppie di punti omologhi e in due coppie di punti inversamente omologhi rispetto ad S.*

Studiamo più da vicino la natura dell' omografia $\omega\pi'$. Siccome $\omega\pi'$ è il prodotto di due omologie di centro S, essa sarà pure un' omologia di centro S (§ 8, n° 10) e il suo invariante assoluto, risulterà il prodotto degl' invarianti di ω, π' (§ 8, n° 10, Oss.). Ora, se una trasversale per S sega c nei punti A, B e c' nei punti A', B' risp. omologhi dei precedenti mediante la ω, sarà (AA'S) l' invariante di ω, — 1 quello di π' (*E.* § 48) e (AB'SO) quello di $\omega\pi'$; ove O è il punto in cui la AB' taglia l' asse dell' omologia $\omega\pi'$.

Dunque:

$$(AB'SO) = -(AA'S),$$

donde:

$$\frac{OB'}{OA} = -\frac{SB'}{SA'};$$

e analogamente:

$$\frac{OA'}{OB} = -\frac{SA'}{SB'}.$$

Le ultime due, confrontate, dànno:

$$\frac{OB'}{OA} = \frac{OB}{OA'},$$

ossia:

$$OA \,.\, OB = OA' \,.\, OB'.$$

Dunque O ha ugual potenza rispetto ai circoli c, c', ossia appartiene al loro asse radicale. Possiamo quindi enunciare:

c) Dati due circoli c, c', *il prodotto di una delle omotetie che mutano* c *in* c', *per l' omologia armonica che* *trasforma in se stesso* c′ *ed ha il medesimo centro dell' omotetia fissata, è un' omologia che ha (lo stesso centro delle precedenti e) per asse l' asse radicale dei due circoli.*

Se AB, A′B′ son due corde di c, c', inversamente omologhe rispetto al centro S, il punto P $\equiv$ AB . A′B′ appartiene per la c) all' asse radicale di c, c'; sicchè il centro radicale (§ 6, n° 15. Oss. 2ª) dei tre circoli c, c', ABA′, sarà il punto P. Congiungendo P col punto A′ otterremo l' asse radicale dei circoli c', ABA′: dunque il cerchio ABA′ dovrà segare ulteriormente c' nel punto B′; cioè i 4 punti ABA′B′ apparterranno ad un cerchio.

Viceversa, se per due punti AA′ di c, c', inversamente omologhi rispetto ad S, si conduce un cerchio che seghi altrove c, c' nei punti B, B′, il cerchio AA′B (che coincide col precedente) dovrà segare ulteriormente c' nell' omologo inverso di B: donde segue che quest' omologo è il punto B′. Dunque:

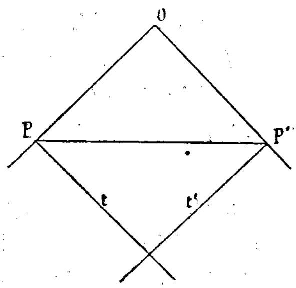
d) Gli estremi di due corde dei circoli c, c′, *inversamente omologhe rispetto ad un centro di similitudine, appartengono ad un cerchio; e viceversa un circolo che passi per due punti di* c, c′, *inversamente omologhi rispetto ad un centro di similitudine, sega altrove i due circoli in una coppia di punti inversamente omologhi rispetto allo stesso centro.*

Se un cerchio k tocca i cerchî dati c, c' nei punti P, P′, con le relative tangenti t, t', queste s' incontreranno nel centro radicale di c, c', k, cioè in un punto dell' asse radicale di c, c'; sicchè le due tangenti (e i relativi punti di contatto) saranno per la c) inversamente omologhe rispetto ad un centro di similitudine.

Ma si può precisare maggiormente, badando alla specie dei contatti di k con c e c'.

Per brevità diremo che *due circoli tangenti si toccano internamente*, quando essi restano da una medesima parte della tangente comune, e che *si toccano esternamente* nel caso contrario. Due contatti si diranno della *stessa specie* o di *specie diversa*, secondo che sono entrambi interni o esterni, oppure l' uno è interno e l' altro esterno.

Conserviamo le notazioni già introdotte sopra, ed osserviamo anzitutto che il centro O di k sarà il punto comune alle perpendicolari in P, P' alle t, t'.



Ora, se i circoli c, c' hanno con k contatti della stessa specie, i loro centri C, C' si troveranno entrambi sulle semirette che escono da P, P' e vanno verso O, oppure entrambi sulle semirette opposte. In ambedue i casi è chiaro che la retta PP' non incontra il segmento *finito* CC', sicchè il centro di similitudine per cui passa la retta PP', è il centro di similitudine diretta.

Se poi c, c' hanno con k contatti di specie diversa, dei punti C, C' l' uno si troverà sopra una, PO, delle semirette che vanno verso O, e l' altro, sulla semiretta opposta a P'O; e quindi la retta PP' taglierà il segmento finito CC', cioè essa passerà pel centro di similitudine inversa. — Concludendo:

e) I punti di contatto di un cerchio con due cerchi dati, sono inversamente omologhi rispetto al centro di similitudine diretta o inversa dei circoli dati, secondo che i contatti son della stessa specie o di specie diversa.

Se A, A' son due punti di c, c' inversamente omologhi rispetto al centro di similitudine S, e B' è l' omologo di A rispetto ad S, avremo le relazioni:

$$\frac{SA}{SB'} = cost. \qquad SA' \, . \, SB' = cost.,$$

ove la prima costante è il rapporto dell'omotetia che ha il centro in S, e l'altra è la potenza di S rispetto al cerchio c'. Da esse si rileva, in valore e segno:

$$SA \,.\, SA' = cost.$$

Diciamo ora k, k' due circoli, che seghino sopra i circoli dati coppie di corde inversamente omologhe rispetto al centro S. — Se al punto A comune a k e c, è inversamente omologo il punto A' comune a k e c', e B, B' è una coppia analoga ad A, A', segata su c, c' dal circolo k', verrà:

$$SA \,.\, SA' = SB \,.\, SB',$$

la quale prova che l'asse radicale dei circoli k, k' passa per S. Dunque:

f) L'asse radicale di due circoli, che seghino sui circoli dati c, c' *due coppie di corde inversamente omologhe rispetto ad un centro di similitudine S, passa per S.*

Per la proprietà *e)* al sistema dei circoli che segano sopra c, c' coppie di corde inversamente omologhe rispetto ad S, appartengono i circoli che hanno contatti della stessa specie coi dati, se S è il centro di similitudine diretta, oppure i circoli che hanno con c, c' contatti di specie diversa, se S è il centro di similitudine inversa.

18. *Assi di similitudine di tre cerchi. — Risoluzione del problema di* Apollonio *di costruire un cerchio tangente a tre circoli dati.*

Consideriamo tre circoli distinti c, c', c'', di centri C, C,' C'', e diciamo risp. S, S', S'' i centri di similitudine diretta delle coppie $c'c''$, $c''c$, cc', ed S_0, S_1, S_2 i centri di similitudine inversa delle stesse coppie.

Poichè l'omotetia diretta che muta c in c'', composta con l'omotetia diretta che muta c'' in c', dà l'omotetia diretta che muta c in c', i tre centri di omotetia diretta SS'S'' saranno allineati (§ 8, n° 10). Analogamente si vede che sono allineati due centri di similitudine inversa, col centro di similitudine diretta relativo alla coppia rimanente; sicchè tra i 6 centri di similitudine si hanno i seguenti allineamenti:

$$SS'S'', \quad SS_1S_2, \quad S_0S'S_2, \quad S_0S_1S''.$$

È facile vedere che se 4 centri di similitudine sono allineati, la retta a cui essi appartengono contiene pure i tre centri CC′C″ e gli altri due centri di similitudine. Invero, se 4 centri di similitudine sono in una retta a, questa conterrà almeno una coppia di centri di similitudine, diretta e inversa, relativi ad una medesima coppia di circoli: p. e. ai circoli $c'c''$. Ne deriva che la a conterrà pure i centri C′C″, e poichè essa contiene certo uno dei centri di similitudine relativi alla coppia cc' o alla coppia $c''c$, il centro C del cerchio c apparterrà ad a: donde segue subito che anche gli altri due centri di similitudine appartengono ad a.

Se dunque si esclude che i tre centri CC′C″ sieno allineati o coincidenti (nel qual caso i 6 centri di similitudine vengono a coincidere nel centro comune ai circoli dati), i 6 centri di similitudine costituiranno i vertici di un quadrilatero completo di lati:

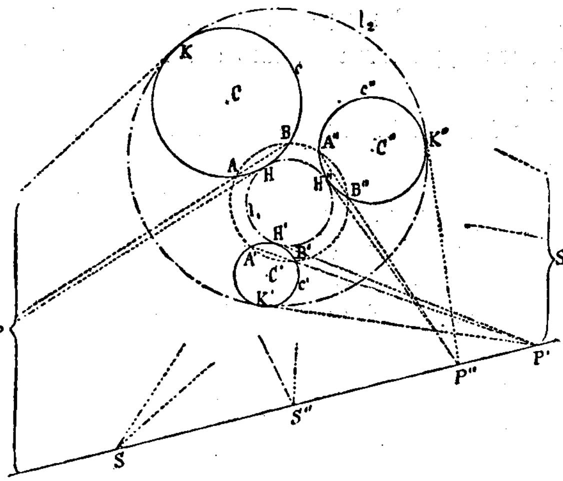
$$a_1 \equiv SS'S'', \quad a_2 \equiv SS_1S_2, \quad a_3 \equiv S_0S'S_2, \quad a_4 \equiv S_0S_1S'';$$

e siccome il trilatero diagonale ha per lati le rette SS_0, $S'S_1$, $S''S_2$, i suoi vertici saranno i centri CC′C″ dei circoli dati. — Potremo dunque enunciare:

Dati in un piano tre circoli c, c′, c″, *i centri di similitudine diretta delle coppie* c′c″, c″c, cc′, *sono allineati; e sono pure allineati i centri di similitudine inversa relativi a due coppie, col centro di similitudine diretta, relativo alla coppia rimanente. Se i centri dei tre circoli non sono allineati, i sei centri di similitudine son vertici di un quadrilatero completo, il cui trilatero diagonale ha per vertici i centri di* c, c′, c″.

I lati $a_1 a_2 a_3 a_4$ di questo quadrilatero, diconsi gli *assi di similitudine* dei tre circoli.

Fissiamo l'attenzione sopra uno di questi assi, e sia, p. e. $a_1 \equiv SS'S''$. Preso un punto A di c (vedi figura), si co-



struisca il punto A' di c' inversamente omologo di A rispetto ad S'', e il punto A'' di c'' inversamente omologo di A' rispetto ad S. Il circolo k individuato dai punti AA'A'', per la prop. d) del n.° prec., taglierà altrove c, c', c'' nei punti B, B', B'', tali che B' sarà inversamente omologo di B rispetto ad S'', e B'' inversamente omologo di B' rispetto ad S.

Se k' è un altro circolo nelle condizioni di k, per la prop. f) del n.° prec., l'asse radicale di k, k' sarà la retta a_1, e quindi *tutti i circoli analoghi a* k *formeranno un fascio* φ_1.— Variando A su c, k varierà nel fascio φ_1, e se il punto B viene a coincidere con A, i punti A', B' verranno a coincidere e così i punti A'', B'': cioè k diverrà tangente ai circoli dati. Si vede di più che se il circolo k' taglia su c, c', c'' le terne $A_1A_1'A_1''$, $B_1B_1'B_1''$, il centro radicale dei tre circoli c, k, k' sarà un punto di a_1; ossia le rette AB, A_1B_1 si taglieranno in un punto fisso P di a_1. Dunque *al variare* *di A sul cerchio* c, *la retta AB passerà per un punto fisso P dell' asse di similitudine* a_1, *e* analogamente *le rette $A'B'$, $A''B''$ passeranno per altri due punti fissi $P'P''$ di* a_1.

Partendo dagli altri assi $a_2 a_3 a_4$, si ottengono altri fasci di circoli $\varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$, dotati di proprietà analoghe a quelle di φ_1; e per la prop. *e*) del n.° prec., se un cerchio l tocca i circoli dati, esso apparterrà ad uno dei 4 fasci suddetti; e precisamente:

1°) Se l tocca intern. o estern. i circoli $cc'c''$, apparterrà a φ_1.

2°) Se l tocca intern. (o estern.) i circoli $c'c''$ ed estern. (o intern.) il circolo c, apparterrà a φ_2.

3°) Se l tocca intern. (o estern.) i circoli $c''c$ ed estern. (o intern.) il circolo c', apparterrà a φ_3.

4°) Se infine l tocca intern. (o estern.) i circoli cc' ed estern. (o intern.) il circolo c'', apparterrà a φ_4.

Volendo *costruire un circolo tangente ai dati $cc'c''$*, e soddisfacente p. e. alla condizione 1°), dovremo dunque procedere nel modo che segue.

Dai punti PP'P'' suddetti si mandino la eventuali tangenti risp. ai circoli $cc'c''$ — I 6 punti di contatto, per quanto precede, si distribuiranno in due terne di punti di contatto di due circoli $l_1 l_2$, l' uno dei quali toccherà intern. e l' altro estern., i circoli dati.

Il criterio con cui i 6 punti di contatto si debbono distribuire in due terne, è *perfettamente determinato* dalla prop. *e*) del n.° prec.

Si noti che se uno dei punti PP'P'' è esterno al relativo circolo, lo stesso accade degli altri due; e se esiste uno dei circoli $l_1 l_2$, esiste anche l' altro.

In modo analogo si costruiscono le soluzioni relative agli altri assi di similitudine.

Osservazione. Il problema risoluto in questo n.° ammette al più otto soluzioni (reali): due per ciascuno degli assi di similitudine. Traducendolo analiticamente, si vede che *il problema è di ottavo grado*, e ciò dà la ragione algebrica del numero delle soluzioni.

Tuttavia, come abbiamo visto, il problema è risolubile con la riga e col compasso, perchè si scinde in quattro problemi di 2° grado. — Anzi se uno almeno dei circoli dati è completamente tracciato, il problema si potrà risolvere con la sola riga (cfr. col n° 2 di questo §).

Il problema di costruire un cerchio che ne tocchi tre altri, fu posto da APOLLONIO, al quale, come si apprende dalle *Collezioni* di PAPPO, si debbono le soluzioni di alcuni casi particolari. Il problema di Apollonio fu posteriormente oggetto delle ricerche di VIETA (1600), FERMAT (1679), NEWTON (1687-1707), EULERO (1790), CARNOT (1803), HACHETTE (1815), DANDELIN (1815), STEINER (1826), ecc. Ma una delle soluzioni più ingegnose fu data da GAULTIER DE TOURS (1815), con l'uso sistematico dei centri di similitudine e degli assi radicali. La soluzione di GAULTIER fu poi semplificata da PONCELET (1822). La costruzione da noi esposta nelle pagine precedenti, concorda appunto, nelle sue linee generali, con quella che si legge nel *Traité des prop. projec....* di PONCELET. — A queste notizie aggiungeremo che il teorema degli assi di similitudine, fu stabilito da MONGE (1799), mediante considerazioni spaziali.

19. *Sulle affinità circolari ed in particolare sulle trasformazioni per raggi vettori reciproci.*

Tra le corrispondenze omografiche fra due piani punteggiati α,α', *le similitudini sono caratterizzate dal fatto di mutare i circoli dell'un piano in circoli dell'altro.* Invero un cerchio c del piano α può definirsi come il luogo di un punto da cui si vedono due punti fissi A,B, diametralmente opposti, secondo un angolo retto; e poichè la similitudine conserva gli angoli (*E.* § 50), ai punti di c corrisponderanno su α' punti dotati di una proprietà analoga rispetto ai punti A′,B′, omologhi di A,B: e quindi la linea corrispondente c' sarà un circolo.

Viceversa, se un'omografia ω tra α,α' fa passare da ogni circolo di α ad un circolo di α', la retta limite di α non potrà esser propria, perchè altrimenti ad un circolo di α

segante la retta limite, corrisponderebbe su α' un circolo con due punti (reali) all'infinito: il che è assurdo. Dunque intanto l'omografia ω è un'affinità (*E.* § 50).

Ora se c, c' son due circoli corrispondenti, la ω farà passare dalle tangenti di c — cioè dalle rette che hanno un sol punto comune con c — a rette comportantisi analogamente rispetto a c', cioè alle tangenti di c'. In particolare a due tangenti parallele di c, corrisponderanno due tangenti parallele di c', e quindi ad un diametro di c un diametro di c' e ad un angolo inscritto in un semicerchio, un angolo inscritto in un semicerchio. Sicchè la ω trasforma l'involuzione assoluta di α nell'involuzione assoluta di α', cioè la ω è una similitudine (*E.* § 50).

Ma le similitudini non sono le sole trasformazioni biunivoche tra due piani, che mutino i circoli dell'uno nei circoli dell'altro. — Un altro esempio notevolissimo viene dato dall'*inversione* o *trasformazione per raggi vettori reciproci.* Ecco come si genera una tal corrispondenza.

Si fissi nel piano un punto O — *centro d'inversione* — e scelta una costante k, positiva o negativa, che si dirà la *potenza d'inversione,* si chiami omologo di ogni punto A del piano, diverso da O, quel punto A', ben determinato, della retta OA, che rende in valore e segno:

$$\text{OA} \,.\, \text{OA}' = k. \tag{1}$$

Si viene così a porre tra i punti del piano una corrispondenza biunivoca involutoria, perchè la relazione tra A ed A' è reciproca.

Questa corrispondenza non è biunivoca senza eccezione, perchè l'omologo del punto O non è determinato. Tuttavia se un punto A si muove sopra una retta a uscente da O, il punto A' si muove sulla retta stessa soddisfacendo alla (1), sicchè A ed A' si corrisponderanno in un'involuzione di potenza k; ed O — punto centrale dell'involuzione — sarà l'omologo del punto improprio di a. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che *ad ogni punto della retta all' infinito corrisponde un punto infinitamente vicino al punto fondamentale O; e viceversa.*

I punti uniti della corrispondenza si ottengono supponendo che nella (1) A coincida con A'; cioè ogni punto unito X dovrà soddisfare alla relazione

$$OX^2 = k;$$

donde si trae che, se k è negativa, non esiste nessun punto unito (reale), mentre se k è positiva, i punti uniti si distribuiscono sopra un circolo (*circolo unito*) di raggio $\sqrt{k}$ e col centro in O.

L' inversione è perfettamente determinata allorquando è dato il centro O ed una coppia di punti corrispondenti A, A' (allineati con O), perchè il prodotto OA . OA' dà il valore della potenza k dell' inversione. Se B, B' è un' altra coppia di punti corrispondenti, avremo la relazione:

$$(2) \qquad OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB',$$

la quale prova che i quattro punti AA' BB' appartengono ad un circolo. Invero, rispetto al circolo AA'B il punto O ha potenza OA . OA', e quindi la retta OB segherà altrove il circolo nel punto B' soddisfacente alla (2); cioè nell' *inverso* del punto B.

Quest' osservazione ci dà il modo di *costruire con la riga e col compasso quante si vogliano coppie di punti omologhi nell' inversione,* allorchè ne sia data una.

Fissiamo ora nel piano una retta a, non passante per O, e diciamo P il piede della perpendicolare abbassata da O ad a, e P' l' omologo di P nella data inversione di centro O. Se un altro punto M di a ha per inverso il punto M', i quattro punti PP' MM' appartengono ad un circolo, e gli angoli $\widehat{MPP'}$, $\widehat{MM'P'}$ saranno uguali o supplementari; e poichè il primo è retto, tale sarà anche il secondo. Ma l' angolo $\widehat{MM'P'}$ coincide con l' angolo $\widehat{OM'P'}$ o col suo supplemento;

dunque al variare di M sulla retta a, il punto M′ descrive un circolo a', che ha per diametro il segmento finito OP′. E si noti che la tangente in O al circolo a' risulta parallela alla retta data a.

Viceversa, se in un circolo a' uscente da O, è P′ il punto diametralmente opposto ad O e P l'inverso di P′, alla retta a perpendicolare alla OP′ nel punto P, corrisponderà nell'inversione il circolo a': cioè a' verrà trasformato dall'inversione nella retta a.

Consideriamo adesso un circolo c del piano, non passante per P. Detto C il centro di c, si tiri la retta OC, la quale seghi c nei punti PP_1, e indichiamo con $P'P_1'$ gl'inversi di questi punti. Proviamo che, mentre un punto M si muove su c, il suo inverso M′ descrive il circolo c', che ha per diametro il segmento finito $P'P_1'$.

Dalla relazione:

$$OP \, . \, OP' = OP_1 \, . \, OP_1',$$

si trae in valore e segno:

$$\frac{OP}{OP_1'} = \frac{OP_1}{OP'},$$

la quale ci mostra che l'omotetia che ha per centro O e che fa passare dal punto P al punto P_1', trasforma il punto P_1 nel punto P′ e quindi il circolo c, di diametro PP_1, nel circolo c', di diametro $P'P_1'$ (cfr. col principio del n.° 17, § 8); cioè O è un centro di similitudine dei due circoli.

La retta OM, che congiunge il centro O col punto M di c, taglia il circolo c' in due punti, l'uno dei quali è l'omologo di M nell'omotetia suddetta e l'altro M′ è l'inversamente omologo di M rispetto ad O (§ 8, n.° 17); ed il prodotto delle distanze di O da M e da quest'inversamente omologo, è costante (in valore e segno) al variare di M (§ 8, n.° 17). Quando M cade in P, il punto inversamente omologo cade in P′: dunque il prodotto costante OM . OM′ uguaglia la potenza della data inversione, cioè M′ è il punto omologo di

M in quest'ultima corrispondenza. Ricordando infine che, per definizione, ogni retta uscente da O si muta in se stessa mediante l'inversione, potremo enunciare:

Un' inversione tra i punti di un piano, muta una retta non passante pel centro O d' inversione, in un circolo passante per O, ed un circolo non passante per O, in un circolo pure non passante per O. Essa muta inoltre in se stessa ogni retta uscente da O, e trasforma in una retta ogni circolo passante per O.

Aggiungeremo che *uno dei centri di similitudine di due circoli mutuamente inversi, è il punto O.*

Se a, b son due rette del piano, non uscenti da O, le tangenti ai circoli inversi a', b', nel punto O, son parallele alle rette a, b, cioè formano un angolo uguale (anche nel verso) all'angolo ab; sicchè le tangenti ai due circoli nel punto P' inverso del punto $P \equiv ab$, formeranno un angolo uguale ad ab, ma di verso contrario.

Se chiamiamo *angolo di due curve* in un punto ad esse comune, l' angolo delle loro tangenti, si può dire che l' angolo formato (fuori del centro d' inversione) dai circoli a', b', è uguale (ma di verso contrario) rispetto all' angolo ab delle rette inverse.

Questa proprietà può estendersi a due curve qualunque del piano, nel modo che ora accenneremo rapidamente. Osserviamo anzitutto che se una curva c è toccata dalla retta a nel punto P, la curva c' inversa di c, sarà toccata dal circolo a' inverso di a, nel punto P' che corrisponde a P. Ciò deriva dalla *continuità* della corrispondenza, tenendo presente che la tangente in P alla curva c non è altro che la posizione limite assunta da una retta che congiunga P con un punto della curva, il quale si approssimi indefinitamente a P.

Se dunque le due curve c, c_1 passano pel punto P con le tangenti a, a_1, le inverse c', c_1' passeranno pel punto P' omologo di P, avendo ivi per tangenti le rette che toccano in P' i circoli $a'a_1'$ inversi delle aa_1. Dunque l'angolo delle $c'c_1'$ sarà uguale, ma di verso contrario, rispetto all'angolo delle cc_1.

Si conclude pertanto che: *Mediante l'inversione, a due curve che formino un certo angolo in un punto P, diverso dal centro d'inversione, corrispondono due curve che formano lo stesso angolo, ma invertito di senso, nel punto P' inverso di P.*

Perciò si dice che l'*inversione è una trasformazione isogonale o conforme.*

Noteremo infine che una curva passa con tanti rami pel centro di inversione O, quanti sono i punti in cui essa sega la retta all'infinito, e che le tangenti in O ai diversi rami dalla curva, son parallele ai suoi *asintoti*, cioè alle tangenti nei punti all'infinito. — Il lettore è ormai in grado di giustificare da sè quest'asserzione.

OSSERVAZIONE. La trasformazione per raggi vettori reciproci può servire ad agevolare la risoluzione di alcuni problemi geometrici, perchè mediante una scelta conveniente del centro d'inversione, si può mutare in una retta qualche circolo della figura a cui il problema si riferisce, o viceversa. Talvolta gioverà disporre anche della potenza d'inversione.

Passiamo ora a studiare in generale un'*affinità circolare*, cioè una corrispondenza biunivoca (continua) tra i punti di due piani α, α', la quale muti i circoli dell'un piano in circoli dell'altro. Ci serviranno di guida in questo studio, che abbozzeremo soltanto, gli esempi, già addotti, delle similitudini e delle inversioni.

E anzitutto osserviamo che all'insieme di tutti i circoli di un piano appartengono anche i *circoli degeneri*, costituiti dalla retta all'infinito e da una retta qualunque del piano, come si vede p. e. facendo allontanare indefinitamente il centro di un circolo, sopra il raggio che va ad un punto fisso del circolo stesso: o, più rigorosamente, per via analitica.

Ciò premesso, se ai punti di un circolo degenere comunque scelto sul piano α, corrispondono biunivocamente i punti di un circolo degenere di α', è chiaro che ai punti improprî di α corrisponderanno i punti improprî di α' ed ogni retta (propria od impropria) di α si muterà in una retta di α': cioè la corrispondenza sarà una similitudine.

Ma può anche darsi che ai punti di un circolo degenere di α, corrispondano su α' i punti di un circolo non degenere.

Considerando allora due circoli degeneri di α, costituiti dalle rette proprie a, b e dalla retta all'infinito, i circoli corrispondenti in α' si taglieranno nel punto M′ omologo del punto $M \equiv ab$ e in un altro punto O′, al quale corrisponderanno *tutti* gli altri punti comuni ai due circoli degeneri, cioè tutti i punti improprî di α.

Il punto (*fondamentale*) O′, che fa eccezione alla biunivocità della corrispondenza, dicesi il *punto centrale* del piano α'.

Dunque se l'affinità circolare tra α ed α' non è una similitudine, ai punti di una retta di α corrispondono su α' punti di un circolo passante per O′, e analogamente ai punti di una retta di α' corrisponderanno su α punti d'un circolo passante pel punto centrale P del piano α, cioè pel punto omologo di tutti i punti improprî di α'.

Ad una retta di α passante per P, corrisponderà su α' un circolo passante per O′, il quale dovrà contenere gli omologhi del punto P, cioè la retta impropria di α'. Si tratterà dunque di un circolo degenere, i cui punti proprî apparterranno ad una retta uscente da O′.

Diciamo ora γ l'affinità circolare considerata tra α, α', e facciamo il prodotto della γ per un'inversione I del piano α', la quale abbia il centro nel punto O′; cioè operiamo sui punti di α con la γ, eppoi sui punti di α', che così si ottengono dai punti di α, operiamo coll'inversione I. La corrispondenza γI tra α ed α' riuscirà biunivoca (senza eccezione) e farà passare da punti allineati di α a punti allineati di α':

e in particolare da punti impropri a punti impropri. Inoltre la γI farà corrispondere ad un circolo di α un circolo di α', quindi sarà una similitudine σ.

Facendo il prodotto di σ per la I, che è involutoria, si otterrà l'affinità γ; dunque:

Ogni affinità circolare tra due piani, può sempre generarsi facendo il prodotto di una similitudine per un' inversione.

Poichè tanto l'inversione che la similitudine conservano gli angoli, si deduce che *un' affinità circolare è una trasformazione conforme.*

Siccome l'affinità γ muta le rette pel punto centrale P in rette pel punto centrale O', e l'inversione I muta in sè ciascuna di queste ultime rette, nella similitudine σ i due punti P ed O' saranno corrispondenti. Se dunque la σ fa passare dal punto M di α al punto M_1 di α', e la I dal punto M_1 al punto M' di α', avremo:

$$\frac{PM}{O'M_1} = cost. \qquad O'M_1 \,.\, O'M' = cost.,$$

donde segue: $PM \,.\, O'M' = cost.$ Si conclude che:

In un' affinità circolare tra due piani, è costante il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti centrali.

Le distanze di cui si parla in quest' enunciato, si considerano in valore assoluto (per quanto con una convenzione opportuna si potrebbe attribuir loro un segno). Se la γ fa passare da A ad A', verrà:

$$PA \,.\, O'A' = k,$$

ove k è una costante (positiva); e se la I fa passare da A' ad A'', avremo:

$$O'A' \,.\, O'A'' = h,$$

ove h è la potenza dell' inversione. Scegliendo $h = k$, si otterrà:

$$\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{O'A''}} = 1,$$

cioè la similitudine $\sigma \equiv \gamma \mathrm{I}$, sarà una congruenza (*E.* § 50). Ne deriva che la γ può generarsi sovrapponendo il piano α al piano α', in modo che vengano a coincidere i punti omologhi nella σ, e operando quindi con l' inversione I. Si conclude pertanto che:

Due piani legati da un' affinità circolare si posson sovrapporre in modo da ottenere tra essi un' inversione.

La trasformazione per raggi vettori reciproci, tra due piani, della quale trovansi tracce in Vieta (1600) e Fermat (1679), fu considerata da Dandelin (1822) come la corrispondenza che nasce proiettando i punti di una sfera dagli estremi di un diametro, sopra un piano a questo perpendicolare. Secondo che il piano è secante o esterno alla sfera, si ha un' inversione colla potenza positiva o negativa. Successivamente Plücker (1828) la studiò per via analitica, osservando che essa è conforme, e Bellavitis (1836) la studiò col *metodo delle equipollenze*. A Plücker è anche dovuta un' elegante *soluzione del problema di* Apollonio (ved. n° precedente) desunta, mediante una inversione, dal caso particolare di tre circoli uguali (1833). La teoria generale delle *affinità circolari* (Kreis-Verwandtschaft) e la teoria analoga nello spazio, son dovute a Möbius (1852-55).

20. *Sul teorema fondamentale della Geometria del compasso.* Un' applicazione notevole della teoria dell' inversione può farsi a dimostrare il teorema fondamentale della *Geometria del compasso*, che cioè *ogni problema risolubile con la riga e col compasso, può risolversi col solo compasso*, quando, beninteso, il problema s' intenda risoluto allorchè si sieno ottenuti due punti di ciascuna retta che, eventualmente, figuri tra gli elementi incogniti.

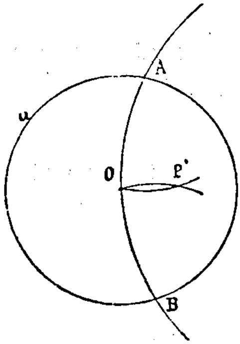
Per dimostrare questo teorema, occorre premettere la *risoluzione col solo compasso dei problemi seguenti:*

1°) Costruire l'omologo di un punto in un'inversione a potenza positiva, essendo noto il circolo unito.

2°) Costruire il circolo inverso di una retta non passante pel centro dell'inversione.

3°) Costruire il circolo inverso di un circolo non passante pel centro dell'inversione.

Risolviamo il 1°) problema. Sia u il circolo unito, O il suo centro — cioè il centro d'inversione — ed r il suo raggio.



Proponiamoci anzitutto di costruire l'inverso del punto P, la cui distanza da O sia $> \frac{r}{2}$. La circonferenza di centro P e raggio PO taglierà u in due punti A,B e le circonf. di raggio r e centri A,B, si taglieranno fuori di O in un punto P' della retta OP, situato con P dalla stessa parte di O. Dai triangoli isosceli simili OAP, OP'A, si rileva:

$$OP \,.\, OP' = OA^2 = r^2,$$

la quale prova che P' è l'inverso di P.

Se la distanza $OP < \frac{r}{2}$, ripetendo n volte (ove n è abbastanza grande) il segmento OP (p. e. nel verso OP), arriveremo col solo compasso [1] ad un punto Q della retta OP, tale che $OQ > \frac{r}{2}$ e quindi potremo costruire l'omologo Q' di Q.

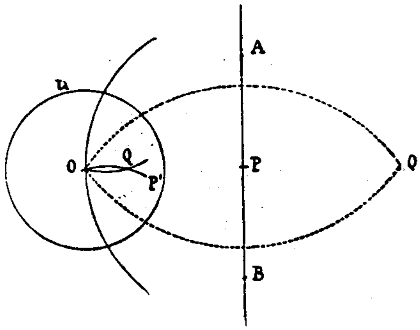
Dalla relazione:

$$OQ \,.\, OQ' = OP \,.\, OP',$$

[1] Basterà provare che il segmento OP si può raddoppiare col solo compasso. Si tracci infatti la circonferenza di centro P e raggio PO e, a partire da O, si stacchino successivamente sulla circonf. tre archi i quali sottendano il raggio: l'ultimo estremo del 3° arco è il punto simmetrico di O rispetto a P.

ricordando che $OQ = n \,.\, OP$, si ricava $OP' = n \,.\, OQ'$: dunque il punto P', inverso di P, si otterrà ripetendo n volte il segmento OQ' (nel verso OP) a partire da O.

Passiamo al 2°) problema. Sia a la retta data mediante due suoi punti A, B. Il punto Q simmetrico di O rispetto ad a, si ottiene col solo compasso, come ulteriore intersezione dei circoli di centri A, B e di raggi rispettivi AO, BO.



Il punto Q', inverso di Q, è il centro del circolo a' inverso di a (il quale risulta così determinato, perchè deve passare per O). Infatti se P è il punto comune alla QQ' ed alla a, cioè il piede della perpendicolare da O ad a, e P' è l'inverso di P, il circolo a' avrà per diametro OP' (ved. il n.° prec.), cioè il suo centro sarà medio tra O e P'. Ora, dall'essere $OQ = 2OP$, si trae $OP' = 2OQ'$, e dunque Q' è il centro di a'.

Risolviamo infine il 3°) problema. Sia c il circolo dato, non passante per O, e C il suo centro; e sieno PP_1 i punti ove c è segato dalla retta OC, e P' l'inverso di P.

Il punto P' corrisponderà a P_1 nell'omotetia di centro O, che trasforma il circolo c nel suo inverso c' (n.° prec.), e quindi dicendo C' il centro di c', avremo:

$$\frac{OP_1}{OP'} = \frac{OC}{OC'}.$$

Inoltre se chiamiamo C_1 l'omologo di C' nell'inversione data, avremo:

$$OP \,.\, OP' = OC_1 \,.\, OC',$$

la quale moltiplicata membro a membro con la precedente, dà:

$$OP \,.\, OP_1 = OC \,.\, OC_1.$$

Riferendo tutti i segmenti all'origine C, verrà:

$$(CP - CO)(CP_1 - CO) = OC(CC_1 - CO).$$

Sviluppando e facendo le riduzioni che derivano dall'uguaglianza $CP = - CP_1$, avremo:

$$CP^2 = CO \,.\, CC_1.$$

Questa relazione ci dice che il punto C_1 è l'omologo di O nell'inversione che ha per circolo unito c.

Dunque per costruire C' si dovrà trovare l'omologo C_1 di O nell'inversione che ha per circolo unito c, e quindi l'omologo di C_1 nell'inversione data: le quali operazioni si sanno tutte eseguire col solo compasso. Il circolo c', inverso di c, risulterà pienamente determinato e si potrà tracciare perchè se ne conoscerà il centro C' ed il punto inverso di un punto arbitrario di c.

Ciò premesso, consideriamo un problema M di geometria piana, che sia risolubile con la riga e col compasso (*E.* § 74), e immaginiamo di effettuarne la risoluzione con questi strumenti. Agli elementi *dati*, costituenti una certa figura F, si aggiungeranno, con questa costruzione, delle rette e dei circoli, che dovranno essere intersecati tra loro in modo opportuno per giungere agli elementi incogniti.

Si chiami F_1 la figura costituita dai dati, dalle linee costruttive e dagli elementi incogniti, e si assuma nel piano come centro d'inversione un punto O non appartenente alle linee di F_1. Mediante le costruzioni esposte sopra, potremo ottenere, col solo compasso, l'inversa F_1' della figura F_1.

Se sugli elementi della figura F' inversa di F, si eseguiscono le operazioni corrispondenti a quelle che permettevano di risolvere il problema M, otterremo tutti gli elementi della figura F_1', e perverremo agli elementi incogniti del problema corrispondente M', tracciando soltanto circoli, e intersecandoli tra loro in modo opportuno, perchè tanto le rette che i circoli di F_1 si mutano in circoli di F_1'.

E poichè il passaggio degli elementi incogniti di M′ agli elementi incogniti di M (che sono gl' inversi dei precedenti), si eseguisce col solo compasso, si conclude che il problema M si può risolvere usando soltanto di questo strumento.

La Geometria del compasso fu inaugurata dalle ricerche di LORENZO MASCHERONI, il quale, in un' opera del 1797, si propose di risolvere tutti i problemi elementari col solo compasso. Nel libro di Mascheroni trovansi tutti gli elementi per la dimostrazione del teorema fondamentale che abbiamo esposto sopra. La dimostrazione mediante l' inversione è dovuta all' ADLER (1890) (¹).

b) Problemi sulla correlazione tra piani:

21. *Se in un quadrangolo piano semplice* $A_1A_2A_3A_4$ *si chiama* a_{ik} *il lato* A_iA_k $(i, k = 1,.., 4)$, *la correlazione*

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ a_{12} & a_{23} & a_{34} & a_{41} \end{pmatrix},$$

dà per quadrato un' omografia ciclica del 4° ordine.

Osserviamo anzitutto che esiste ed è unica una correlazione piana che faccia passare da $A_1A_2A_3A_4$ ad $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$, perchè non essendovi allineamenti tra i 4 punti A, tra le rette a non ve ne saranno mai tre che concorrano in un punto.

Poichè la ω fa passare dal punto A_1 alla retta a_{12}, e da questa retta, cioè dal lato A_1A_2, al punto comune alle rette $a_{12}a_{23}$, cioè al vertice A_2, la ω^2 farà passare da A_1 ad A_2. In modo analogo si vede che la ω^2 fa passare da A_2 ad A_3, ecc. Dunque:

$$\pi \equiv \omega^2 \equiv \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_1 \end{pmatrix}.$$

(¹) Per maggiori notizie e per la risoluzione di molti problemi elementari col metodo di MASCHERONI, il lettore potrà consultare l' articolo di E. DANIELE, *Sulla risoluzione dei problemi geometrici col compasso,* tra le *Questioni riguardanti la Geometria elementare* raccolte da F. ENRIQUES, (Zanichelli, 1900).

Donde si trae:

$$\pi^4 \equiv \begin{pmatrix} A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4 \\ A_1 \, A_2 \, A_3 \, A_4 \end{pmatrix};$$

e poichè i quattro punti A sono indipendenti, si conclude che π^4 è l' identità. Ciò appunto si esprime dicendo che π è *ciclica di 4° ordine.*

22. *Se in una reciprocità tra due piani sovrapposti* α, α', *c' è una retta* u *di* α *a cui corrisponde su* α' *un fascio di rette* U', *prospettivo ad* u, *questa retta, considerata su* α', *avrà per corrispondente su* α *un fascio pure prospettivo.*

Invero, se la correlazione data ω fa passare da un punto P della u (riguardata come appartenente al piano α) al raggio $p' \equiv PU'$, chiamando U il trasformato di u mediante la ω^{-1} — cioè il punto che corrisponde ad u, pensata sul piano α' — la ω^{-1} farà passare dal punto $P \equiv p'u$, alla retta $p \equiv PU$: dunque ogni punto P di u, pensato sul piano α', ha per corrispondente in α una retta p per P.

23. *Se la reciprocità* ω *fa passare dal piano* α *al piano sovrapposto* α', *e da una retta* u *di* α *ad un fascio* U' *prospettivo ad* u, *esisterà in generale un' altra retta* v *di* α, *prospettiva al fascio corrispondente* V'; *e la retta* $U'V'$ *passerà pel punto* uv.

Diciamo infatti v la retta che corrisponde ad U', mediante la ω, e V' il punto omologo di v nella ω stessa. Poichè, per ipotesi, la punteggiata u è prospettiva al fascio corrispondente U', questo sarà prospettivo alla v (duale del n.° 22), e infine la v sarà prospettiva al fascio omologo V' (n.° 22).

Si osservi che la ω^2 muta v in u. Infatti se una retta q' per V' sega v nel punto Q ed u nel punto P, la ω muterà la retta $q' \equiv QP$ nel punto $P \equiv V'Q \,.\, U'P$, e quindi ω^2 muterà il punto Q in P, cioè ogni punto di v in un punto di u. Ne segue pure che la ω muta V' in u.

Se le rette u, v sono distinte, e quindi sono distinti i punti U', V', al punto uv del piano α dovrà corrispondere su α' la retta che lo congiunge con U', in quanto il punto uv appartiene alla u; e la retta che lo congiunge con V', in quanto il punto stesso appartiene alla v: dunque la retta $U'V'$ passerà pel punto uv. Aggiungeremo che il punto uv e la retta $U'V'$ si corrispondono in doppio modo, perchè nella ω al punto uv corrisponde $U'V'$ e nella ω^{-1} ad uv corrisponde $V'U'$.

Osservazione 1.ª Se la retta u coincide con v, e quindi U' con V', i due elementi u ed U' si corrisponderanno in doppio modo, cioè la ω e la ω^{-1} trasformeranno u in U'. Dicendo in tal caso p' la retta per U' che corrisponde mediante la ω ad un punto P di u, è chiaro che alla p' corrisponderà mediante ω il punto P stesso. Sicchè, se u coincide con v, ad ogni punto P di u corrisponde in doppio modo la retta $U'P$. — In tal caso la ω^2 è un'omologia di asse u e centro U'. — Nel caso generale (cioè quando le u, v son distinte) sarà un'omologia la proiettività ω^4, perchè nella ω^2 le rette u, v si corrispondono in doppio modo (cfr. col n° 12 di questo §).

Osservazione 2.ª Due piani reciproci α, α', comunque disposti, si possono sempre sovrapporre in guisa che su α si abbia una punteggiata prospettiva al fascio corrispondente. Basta infatti tracciare una retta u su α e trasportare il piano α in guisa che i punti della u vengano a cadere sui raggi omologhi del fascio U', che corrisponde ad u in α' (§ 4, n.° 12), e ruotare α attorno ad u finchè esso venga a sovrapporsi ad α'.

La costruzione della reciprocità tra i due piani, in questa posizione, è di una notevole semplicità. Se infatti è v l'altra punteggiata di α prospettiva al fascio omologo V', ad un punto M' di α', riguardato come intersezione dei raggi $M'U'$, $M'V'$, corrisponderà su α la retta m che congiunge i punti ove le u, v son segate da $M'U'$, $M'V'$, e ad un punto M di α, corrisponderà su α' la retta m' che congiunge i punti ove le v, u son segate dai raggi MU', MV' (vedere il numero precedente). — Se i punti U′, V′ non fossero allineati con uv, la corrispondenza che nasce dalla costruzione precedente, sarebbe biunivoca, ma non farebbe corrispondere ai punti di una retta i raggi di un fascio, cioè non sarebbe una proiettività.

§ 9. *Polarità in una forma di 2ª specie.*

SOMMARIO: *Generalità — Se in una correlazione piana a due punti corrispondono in doppio modo due rette generiche, la correlazione è una polarità — Varii modi d'individuare una polarità — Le polari di un punto rispetto alle polarità che hanno un dato triangolo autopolare e nelle quali son coniugati due dati punti, formano un fascio — Sovrapporre due piani correlativi in modo da avere un sistema polare — Teorema di* STAUDT-HESSE — *Polarità e antipolarità rispetto ad un circolo — Sulla legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive.*

1. Quando in una reciprocità ω tra due piani sovrapposti, le coppie di elementi omologhi si corrispondono in doppio modo, cioè quando ω coincide con la sua inversa ω^{-1}, la reciprocità si chiama un *sistema polare* od una *polarità*. Una retta ed un punto corrispondenti, diconsi *polo* e *polare* l'uno rispetto all'altra (*E.* § 51).

La condizione affinchè una correlazione tra piani sia una polarità, è che esista un triangolo di cui ciascun vertice abbia per retta omologa il lato opposto. Un tal *triangolo* dicesi *autoconiugato* o *autopolare*.

Due *punti* diconsi *coniugati* in una polarità, quando la polare di uno passa per l'altro, e quindi la polare di quest'ultimo punto passa pel primo. Dualmente, nel piano, si definiscono due *rette coniugate* in una polarità.

Sopra una retta non contenente il proprio polo, si hanno infinite coppie di punti coniugati in una polarità; le quali costituiscono un'involuzione; e dualmente (*E.* § 52).

In una polarità piana vi sono infiniti triangoli autoconiugati.

Una polarità è individuata allorchè se ne conosca un triangolo autopolare, e di un punto non appartenente ai lati di questo triangolo, si conosca la relativa polare.

La polarità può essere di due specie diverse, a seconda che la polare p del punto P, dato fuori dei lati del triangolo autoconiugato ABC, penetra o non penetra in quella delle 4 regioni triangolari ABC, in cui cade il punto P. Nel 1° caso la *polarità* dicesi *non uniforme*, ed è caratterizzata dal fatto di contenere infinite coppie di elementi omologhi, che si appartengono. Sopra due dei lati del triangolo ABC, essa subordina due involuzioni iperboliche di punti coniugati, e sul lato rimanente un' involuzione ellittica. Nel 2° caso si tratta di una *polarità uniforme*, caratterizzata dal fatto che in essa un elemento *qualunque* non appartiene al suo corrispondente. In tal caso sopra i tre lati di ABC si hanno involuzioni ellittiche (*E.* § 53).

Tutte queste proprietà si trasportano con la legge di dualità nello spazio e dànno luogo a teoremi concernenti la *polarità nella stella.* Ivi c' è da considerare un importante caso particolare metrico della polarità, che si ottiene prendendo come piano polare di ogni retta della stella, il piano ad essa perpendicolare. La corrispondenza involutoria che così nasce, dicesi la *polarità ortogonale della stella* (*E.* § 54). Una congruenza tra due stelle, cioè un' omografia la quale faccia passare da un angoloide dell' una ad un angoloide dell' altra avente gli angoli diedri e le facce, uguali agli elementi omologhi del primitivo, è *caratterizzata* dalla proprietà di mutare la polarità ortogonale dell' una stella nella polarità ortogonale dell' altra.

La polarità piana (non uniforme) fu considerata dapprima come una corrispondenza tra i punti e le rette del piano, in relazione ad una conica tracciata sul piano stesso. Su questo modo di concepire la polarità avremo più tardi occasione di ritornare, sia nel caso in cui la conica è un circolo, sia nel caso generale. I teoremi fondamentali della polarità rispetto ad una conica, si trovano in APOLLONIO, PAPPO, DE LA HIRE (*Sectiones conicae, 1685*), PONCELET

(1822) e STAUDT (1831). Le denominazioni di *polo* e *polare* sono state introdotte risp. da SERVOIS (1811) e da GERGONNE (1812). La teoria grafica della polarità piana, come correlazione involutoria, e la distinzione della polarità in due specie, son dovute a STAUDT (*Geo. d. Lage, 1847*).

2. *Se in una correlazione piana a due punti A,B corrispondono in doppio modo due rette* a,b, *delle quali una almeno non appartenga al punto corrispondente, e tali inoltre che il punto P* ≡ ab, *non sia allineato con A,B, la correlazione è una polarità.*

Infatti al punto P ≡ *ab* corrisponderà in doppio modo la retta *p* ≡ AB, la quale segherà una almeno delle rette *a*,*b* in un punto risp. diverso da A,B e da P. Supponiamo, ad esempio, che la *a* sia segata da *p* nel punto C, diverso da A e da P. Allora al punto C ≡ *ap* corrisponderà involutoriamente la retta *c* ≡ AP, e quindi nel triangolo ACP ogni vertice avrà per retta omologa il lato opposto: donde segue che la data correlazione è una polarità (*E.* § 51).

Il teorema 2 è dovuto a SEYDEWITZ (1847).

3. *Una polarità è individuata:*

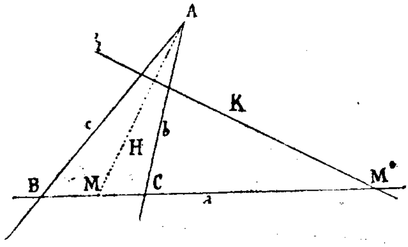
a) *Dato che sia un triangolo autoconiugato, l'involuzione dei punti reciproci sopra uno dei lati, ed una coppia di punti reciproci esterni ai lati del triangolo.*

b) *Date le involuzioni dei punti reciproci sopra due rette* a,b *non coniugate, ed il polo di una di queste rette (il quale dovrà appartenere alla congiungente dei punti coniugati ad O* ≡ ab *nelle due date involuzioni).*

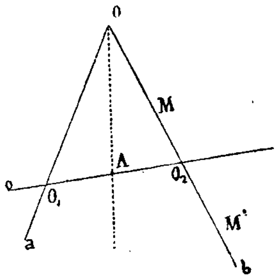
c) *Date due rette* a,b *coniugate e le relative involuzioni dei punti reciproci.*

d) *Prendendo come polari dei vertici di un pentagono semplice i lati risp. opposti.*

a) Sia ABC $\equiv$ *abc* il dato triangolo autoconiugato, HK la coppia dei punti reciproci e ω l'involuzione data su a, nella quale si corrispondono i punti B,C.

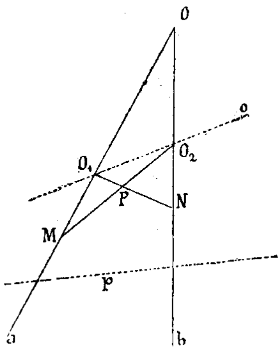


Diciamo M la proiezione di H da A su a ed M' il coniugato di M nella ω. La polarità ben determinata, che ha per triangolo autoconiugato ABC e per polare di H la retta $h \equiv$ KM' (*E.* § 51), è l'unica che soddisfi alle condizioni richieste.



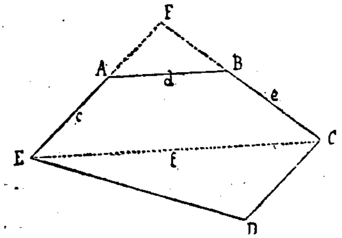
b) Se ω_1, ω_2 son le involuzioni date su a,b ed O_1, O_2 sono i coniugati di O in queste involuzioni ed A il polo di a, situato sulla polare $o \equiv O_1O_2$ di O, il triangolo O_1OA sarà autoconiugato nella polarità richiesta. Se M, M' sono due punti coniugati in ω_2, la polarità suddetta sarà individuata, perchè se ne conosce il triangolo autoconiugato OO_1A, l'involuzione ω_1 sul lato a, ed una coppia M,M' di punti reciproci.

c) Siano ω_1, ω_2 le involuzioni date sulle due rette reciproche a, b ed O_1O_2 i coniugati di O in queste involuzioni. Il triangolo OO_1O_2 risulterà autoreciproco, e se M è un punto di a, la retta O_2M avrà per polo il punto M_1 coniugato di M nella ω_1; analogamente il polo della retta O_1N, che va ad un punto N di b, è il punto N_2 corrispondente ad N nella ω_2, sicchè la retta $p \equiv M_1N_2$ risulterà la polare del punto P $\equiv O_1N.O_2M$. La polarità richiesta sarà dunque indi-



viduata dal triangolo autoconiugato OO_1O_2 e dalla coppia di elementi corrispondenti P,p.

d) Sia ABCDE il dato pentagono semplice. Si vuol provare che esiste una ed una sola polarità, che fa passare dai punti A,B,C,D,E alle rette CD, DE, EA, AB, BC.



Pongasi infatti:

$$F \equiv AE \, . \, BC, \; AB \equiv d, \; AE \equiv c,$$
$$BC \equiv e, \; EC \equiv f,$$

e si osservi che la polarità ben determinata, che ha per triangolo autoreciproco EFC e che fa passare da D a d, soddisfa alle condizioni richieste.

4. *Le polari di un dato punto K del piano, rispetto alle infinite polarità che hanno un triangolo dato $ABC \equiv$ abc come autoreciproco, e nelle quali due punti assegnati H,H' son coniugati, passano tutte per un determinato punto K'.*

Diciamo H_a, K_a le proiezioni di H,K da A su a, H_b K_b le proiezioni di H,K da B su b, e H'_a, H'_b le intersezioni delle a,b con una retta h condotta ad arbitrio per H'.

Consideriamo inoltre sulle a,b le involuzioni ω_a, ω_b individuate risp. dalle coppie BC, $H_aH'_a$ e CA, $H_bH'_b$, e indichiamo con K'_a, K'_b i coniugati di K_a, K_b risp. nelle ω_a, ω_b. Qualunque sia la posizione di h nel fascio H', avremo:

$$BCH_aK_a \barwedge CBH'_aK'_a \barwedge BCK'_aH'_a,$$

donde si trae:

$$BCH_aK'_a \barwedge BCK_aH'_a;$$

sicchè H'_a e K'_a si corrispondono nella proiettività:

$$T_a \equiv \begin{pmatrix} B & C & K_a \\ B & C & H_a \end{pmatrix}$$

Similmente H'_b e K'_b si corrisponderanno nella proiettività:

$$T_b \equiv \begin{pmatrix} CA & K_b \\ CA & H_b \end{pmatrix}$$

Poichè, variando h, le punteggiate descritte da H'_a, H'_b son prospettive tra loro (rispetto al centro H'), le punteggiate descritte da K'_a, K'_b saranno proiettive. È facile anzi provare che anche queste ultime punteggiate son prospettive. Infatti la proiettività che fa passare da K'_a a K'_b, risulta moltiplicando la proiettività T_a^{-1} per la prospettività π tra H'_a ed H'_b e per la proiettività T_b; e poichè in ciascuna delle T_a^{-1}, π, T_b il punto C è unito, risulterà pure unito nella corrispondenza prodotto: donde segue che questa corrispondenza è una prospettività.

Si conclude pertanto che tutte le rette del tipo $K'_aK'_b$ passano per un punto fisso K'.

Ciò dimostra quanto abbiamo enunciato in principio, perchè per ogni data polarità, nella quale ABC sia un triangolo autoreciproco ed H, H' siano coniugati, la polare di H sarà una retta h per H', e la polare di K la relativa retta $K'_aK'_b$.

Osservazione. Dal teorema dimostrato si deduce che *una polarità è individuata noti che siano un triangolo autoreciproco e due coppie di punti coniugati* (generici). Se $ABC \equiv abc$ è il dato triangolo ed H, H'; K, K_1 le due date coppie, si determinerà il punto K' coniugato di K in tutte le polarità che hanno ABC per autoreciproco, e nelle quali H, H' son pure reciproci.

La polare di K nella polarità richiesta, dovrà essere la la retta K_1 K'; e dunque la polarità stessa risulterà individuata.

Se le due coppie HH' KK_1 sono allineate, si costruirà anche più facilmente il polo P della retta $p \equiv H\,H'$. Invero la polare del punto ap, sarà la retta che congiunge A col coniugato di ap nell'involuzione individuata dalle coppie HH', KK_1; e analogamente si costruiranno le polari di bp, cp. Il punto di concorso di queste tre polari sarà P.

Anche in tal caso la polarità risulterà individuata mediante un triangolo autoreciproco, ed un punto ed una retta omologhi.

5. *Dati due piani correlativi* α, α', *tali che alle loro rette all' infinito corrispondano punti proprî, sovrapporli in modo da ottenere un sistema polare.*

Siano u, u' le rette improprie di α, α' ed U', U i punti (proprî) ad esse corrispondenti nella data correlazione. Chiamando omologo di un raggio a di U, il raggio a' di U' che proietta il punto improprio corrispondente ad a (dal che segue che il raggio a proietta il punto improprio corrispondente ad a'), tra i due fasci U ed U' si verrà a porre una proiettività π.

Se sono pq, $p'q'$ due angoli retti omologhi nella π (§ 4, n.° 13), sovrapponendo il piano α' ad α in guisa che i raggi $q'p'$ vengano a coincidere risp. con pq, nel fascio di raggi U $\equiv$ U' verremo ad avere un' involuzione, come trasformata della proiettività π. Dopo la sovrapposizione, nel trilatero formato dalle rette p,q e dalla retta u, ciascun lato avrà per punto corrispondente il vertice opposto: dunque la correlazione sarà divenuta una polarità (*E*. § 51).

Osservazione. La sovrapposizione può farsi in infiniti modi, se i due fasci U, U' risultano congruenti, perchè allora sono infinite le coppie di angoli analoghe a pq, $p'q'$. Se U,U' non sono congruenti, non c' è che la coppia di angoli retti pq, $p'q'$. Fissati dei versi positivi sulle rette p,q, p',q', la sovrapposizione di α' ad α, potrà eseguirsi facendo coincidere in un modo arbitrario i versi positivi o negativi delle p',q' coi versi positivi delle q,p: cioè *in quattro modi diversi.*

Il problema 5 fu risoluto, nel modo esposto, da Seydewitz (1847); ma, analiticamente, la possibilità di sovrapporre due sistemi piani reciproci, in modo da avere un sistema polare, era stata accennata prima da Magnus (1833).

6. *Se due coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo sono costituite da rette reciproche in una polarità piana, anche la terza coppia di lati opposti risulta costituita da rette reciproche nella stessa polarità (e dualmente).*

Sia ABCD il dato quadrangolo e supponiamo che i lati AB, CD e AC, BD siano coniugati tra loro in una polarità piana ω: ciò significa che i poli dei lati AB, AC giacciono rispettivamente sopra CD, BD (e quindi viceversa).

Se la polare a di A non passa per nessun vertice del quadrangolo ABCD, essa taglierà le coppie di lati opposti AB, CD; AC, BD; AD, BC nelle tre coppie L, L'; M, M'; N, N', appartenenti ad un'involuzione (*E.* § 39). Quest'involuzione coinciderà con quella dei punti coniugati rispetto ad ω, perchè i poli delle rette AB, AC sono i punti L', M'. Ne segue che il polo di AD è il punto N', e quindi che i lati AD, BC sono reciproci.

Questo ragionamento non vale quando la polare di A passa per qualcuno dei vertici del quadrangolo, che si potrà supporre diverso da A, perchè il quadrangolo dato, avendo due coppie di lati opposti coniugati nella ω, non può avere i 4 vertici autoreciproci. — Infatti, se il quadrangolo ABCD ha i 4 vertici autoconiugati nella polarità ω, il triangolo diagonale EFG ($E \equiv AB . CD$, $F \equiv AC . BD$, $G \equiv AD . BC$) sarà evidentemente autoreciproco, e quindi, se il lato AB è coniugato a CD, saranno $H \equiv FG . CD$, $K \equiv FG . AB$, $M \equiv AH . DK$ i poli rispettivi dei lati AB, CD, AD. Ora, a causa dei triangoli omologici AMD, CEB, si vede che $M \equiv AH . EF$: e dunque il punto M non potrà appartenere al lato CB, perchè su questo le rette AH, EF segnano risp. i coniugati armonici di B, G rispetto alle coppie CG, CB. Ne deriva i lati AD, BC non sono reciproci; e similmente si prova che non lo sono i lati AC, BD.

Supponiamo che la a passi per uno dei vertici B,C: p. e per B. Poichè il polo di AC giace su a, se questo polo è diverso da B, la retta BD che lo deve contenere, coinciderà con a, e quindi il polo della retta AB sarà il punto $BD . CD \equiv D$ ed il polo della AD sarà il punto $BD . AB \equiv B$. Ne deriva che il lato BC è coniugato ad AD.

Se poi il polo di AC coincide con B, il polo di AB sarà il punto a.AC e poichè la CD deve passare per questo polo, e non può coincidere con CA, il polo di AB dovrà coincidere con C, e quindi il triangolo ABC sarà autoconiugato. Da ciò si trae ancora che i lati AD, BC sono coniugati. — Analogamente si ragiona se a passa per C.

Se infine a passa per D, non può darsi che la a sia diversa da entrambi i lati BD,CD, chè altrimenti D sarebbe il polo di AB, AC: dunque la a coincide con una delle rette BD, CD e si ricade in uno dei casi precedenti.

Osservazione. Se due dei sei elementi del triangolo ABC non sono mai coniugati in una polarità ω del piano ABC, il triangolo A'B'C' *polare* di ABC — cioè il triangolo che ha per vertici i poli A'B'C' dei lati BC, CA, AB — non avrà nessun elemento comune con ABC.

Ponendo AA'.BB' $\equiv$ D e BC.B'C' $\equiv$ L, CA.C'A' $\equiv$ M, $d \equiv$ LM, la d sarà la polare del punto D, e inoltre nel quadrangolo ABCD due lati AD,BD risulteranno coniugati ai lati opposti BC, AC: dunque il lato CD dovrà passare pel polo C' di AB, cioè le tre rette AA', BB', CC' concorreranno in D, e quindi il punto N $\equiv$ AB.A'B' apparterrà a d. Si conclude pertanto che:

Se in un triangolo ABC due elementi non sono mai coniugati, il triangolo polare A'B'C' non ha elementi comuni con ABC ed è omologico ad ABC. Il centro e l' asse d' omologia si corrispondono nella data polarità.

Viceversa si può dimostrare che:

Due triangoli ABC, A'B'C', privi di elementi comuni, ed omologici, sono polari l' uno dell'altro in una determinata polarità, nella quale si corrispondono il centro e l' asse di omologia.

Se D è il centro di omologia ed L $\equiv$ BC.B'C', M $\equiv$ CA.C'A', N $\equiv$ AB.A'B' sono i tre punti dell' asse di omologia d, in cui s' intersecano le tre coppie di lati omologhi, la polarità di cui si parla nell' enunciato, è quella, perfettamente determinata, che fa corrispondere ai punti L, M, N i raggi DA, DB, DC e al punto A la retta B'C' (ved. § 7, n° 2, ed *E.* § 52).

Il teor. 6, che di solito si attribuisce ad HESSE, fu dato prima da STAUDT, che lo dimostrò col metodo della proiezione centrale, nel caso di una polarità relativa ad una conica reale (Ueber die Kurven II. Ordnung, 1831). — HESSE lo ritrovò nel 1840. — La dimostrazione grafica da noi esposta, indipendente dalla natura della polarità, è analoga a quella data da STAUDT nella *Geo. d. Lage* (1847).

7. *Polarità e antipolarità rispetto ad un circolo.*

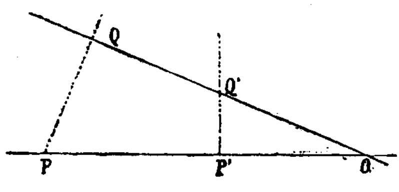
Proponiamoci di caratterizzare una polarità piana, che subordini sulla retta impropria l'involuzione assoluta. Occorre distinguere due ipotesi:

1ª) La data polarità non è uniforme.

2ª) La data polarità è uniforme.

È chiaro anzitutto che, in entrambe le ipotesi, il *centro* O *della polarità*, cioè il polo della retta all'infinito, è un punto proprio, perchè altrimenti le infinite coppie di punti coniugati della retta all'infinito, avrebbero un punto fisso.

Ciò posto, consideriamo dapprima il caso di una polarità non uniforme ω, che subordini sulla retta impropria l'involuzione assoluta. Sopra ogni retta uscente da O la ω subordina un'involuzione iperbolica (*E.* § 53), col centro in O, ed è facile vedere che la potenza di quest'involuzione non muta al variare della retta nel fascio O. Invero, se P è un punto diverso da O, la polare del punto P sarà una retta perpendicolare alla PO, e passante pel punto P′, coniugato di P nell'involuzione che si ha sulla retta PO. Se un'altra retta uscente da O sega la polare di P nel punto Q′, la polare di Q′ passerà per P e sarà perpendicolare ad OQ′, sicchè il punto Q, coniugato di Q′ sulla OQ′,



sarà il piede della perpendicolare alla retta stessa, condotta pel punto P.

Ora dai triangoli rettangoli simili OPQ, OP'Q' si rileva

$$\frac{OP}{OQ'} = \frac{OQ}{OP'},$$

donde (in valore e segno),

$$OP.OP' = OQ.OQ' = k.$$

Poichè i punti doppî delle involuzioni iperboliche subordinate dalla ω sulle rette uscenti da O — cioè i punti autoconiugati nella polarità ω — son disposti a coppie ad una distanza da O uguale a $\sqrt{k}$, si conclude che *i punti autoconiugati nella polarità ω costituiscono un circolo* c *di raggio* $\sqrt{k}$.

La polare di un punto autoconiugato dovrà passare per questo punto ed essere perpendicolare alla retta che lo congiunge ad O; dunque *le rette autoconiugate nella ω sono le tangenti al circolo* c.

Per queste proprietà la ω dicesi una *polarità rispetto al circolo* c. Dato il circolo c essa è perfettamente determinata: la polare di un punto P non appartenente a c, si ottiene tirando la perpendicolare a PO nel punto P' coniugato armonico di P rispetto ai due punti in cui c viene segato dal diametro PO; e la polare di un punto del circolo è latangente ivi.

Consideriamo ora una polarità uniforme ω_1, che subordini sulla retta impropria l'involuzione assoluta, e diciamo σ la simmetria rispetto al punto O, centro della polarità ω_1.

Sopra ogni retta uscente da O la ω_1 subordina un'involuzione ellittica (*E.* § 53), mutata in se stessa dalla simmetria rispetto ad O — centro dell'involuzione — ed ogni punto P diverso da O, avrà ancora per polare una retta perpendicolare alla OP. Ne deriva che la simmetria σ muta in se stessa la ω_1 e quindi che

$$\omega_1 \sigma \equiv \sigma \omega_1 \ (^1).$$

(1) Più in generale si può osservare che *ogni omologia armonica avente il centro e l'asse in due elementi coniugati di una polarità piana, è permutabile con questa; e viceversa.*

Siccome le due trasformazioni ω_1 e σ sono involutorie, dalla relazione precedente si deduce che la $\omega_1\sigma$ è una correlazione involutoria, cioè una polarità. Ed anzi la polarità $\omega_1\sigma$ subordinerà sulla retta impropria l'involuzione assoluta, perchè la σ lascia fisso ogni punto all'infinito e quindi muta in se stessa l'involuzione assoluta.

Poichè infine sopra ogni retta uscente da O la $\omega_1\sigma$ subordina un'involuzione discorde, e quindi iperbolica, di centro O, si conclude che la $\omega_1\sigma$ è una polarità rispetto ad un circolo c di centro O. Dicendo ω questa polarità, dalla relazione:

$$\omega \equiv \omega_1\,\sigma,$$

trarremo, giacchè $\sigma \equiv \sigma^{-1}$:

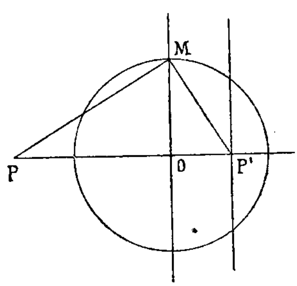
$$\omega_1 \equiv \omega\sigma,$$

cioè la ω_1 si otterrà facendo il prodotto di una certa polarità rispetto ad un circolo, con la simmetria rispetto al centro di questo circolo.

Perciò la ω_1 si dice un'*antipolarità rispetto al circolo* c, che definisce la ω.

Dato il circolo c, la ω_1 è perfettamente determinata, giacchè lo sono la ω e la σ.

Il raggio del circolo c è medio proporzionale tra i segmenti (di verso contrario) che vanno da O a due punti P, P′, allineati con O e reciproci rispetto ad ω_1; sicchè la polare di un punto P rispetto ad ω_1, o come anche si dice l'*antipolare rispetto al circolo* c, si costruirà tirando il diametro OP e il diametro perpendicolare ad OP; congiungendo P con uno, M, degli estremi di questo diametro; intersecando in P′ la OP con la perpendicolare nel punto M alla PM e tracciando infine la perpendicolare in P′ alla OP.



Proiettando la ω_1 da un punto S situato sulla perpendicolare in O al piano di ω_1, ad una distanza da O uguale al raggio di c, si ottiene la polarità ortogonale della stella S. Viceversa, segando una stella S con un piano non passante pel vertice, la polarità ortogonale della S, dà luogo ad un' antipolarità rispetto ad un circolo che ha per centro il piede della perpendicolare abbassata da S sul piano segante, e per raggio la distanza di S da questo piano (*E.* § 54 — Oss. 3ª).

Possiamo enunciare il risultato della discussione fatta, dicendo che:

Una polarità piana che subordini sulla retta impropria l' involuzione assoluta, è una polarità o un' antipolarità rispetto ad un circolo, secondo che non è od è uniforme.

Osservazione. Se Ω è una polarità piana qualunque, esisteranno sempre delle rette sulle quali la Ω subordina involuzioni ellittiche (*E.* § 53). Diciamo u una di queste rette e scegliamo un punto S, esterno al piano di Ω, dal quale l' involuzione ellittica esistente sulla u si proietti secondo un' involuzione circolare (*E.* § 41). Proiettando la Ω da S sopra un piano α parallelo ad Su, avremo ivi una polarità che subordina sulla retta impropria di α l' involuzione assoluta. Dunque:

Una polarità piana qualunque si può sempre proiettare da un punto sopra un' altro piano, in modo da avere ivi una polarità o una antipolarità rispetto ad un circolo, secondo che la data polarità non è od è uniforme.

8. *Sulla legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive.*

Nel n° 2 del § 3 abbiamo già notato come ad ogni espressione metrico-proiettiva, formata con le misure di più segmenti rettilinei, se ne possano associare due altre, pure proiettive, formate allo stesso modo con le misure (seni) di angoli rettilinei o diedri, soddisfacenti alle condizioni grafiche duali.

In particolare da un' espressione metrico-proiettiva, formata con le misure di più segmenti rettilinei di un piano, si può passare ad un' espressione analoga, relativa a più angoli rettilinei di un piano. Ora questo passaggio si può eseguire *a posteriori*, mediante la polarità rispetto ad un circolo.

Per semplicità ragioneremo ancora sull' esempio fissato al n° 1 del § 3.

Supponiamo dunque di avere in un piano due gruppi di n segmenti rettilinei A_1B_1, A_2B_2,..., A_nB_n e C_1D_1,..., C_nD_n, tali che ogni punto che sia estremo di più segmenti dell' un gruppo lo sia di altrettanti segmenti dell' altro, ed ogni retta che contenga più segmenti dell' un gruppo ne contenga altrettanti dell' altro.

Allora noi sappiamo che l' espressione:

$$f = \frac{A_1B_1 . A_2B_2 ...... A_nB_n}{C_1D_1 . C_2D_2 ...... C_nD_n} \tag{1}$$

è dotata di un segno indipendente dalla scelta dei versi positivi sulle rette A_1B_1,...., ed è proiettiva.

Assumiamo nel piano un circolo c di centro O e diciamo a_1b_1... c_1d_1..., le polari dei punti A_1B_1...C_1D_1.... Poichè le rette OA_1, OB_1 son perpendicolari alle a_1, b_1 (n.° prec.), uno degli angoli a_1b_1 sarà uguale all' angolo $a'_1b'_1$ che proietta da O il segmento finito A_1B_1; sicchè in valore assoluto:

$$sen\ a_1b_1 = sen\ a_1'b_1'$$

In modo analogo, dicendo $a_2'b_2'$..., $c_1'd_1'$.... i raggi che proiettano da O i punti A_2B_2...C_1D_1..., avremo:

$$sen\ a_2b_2 = sen\ a_2'b_2'$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$sen\ c_1d_1 = sen\ c_1'd_1'$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Onde (sempre in valore assoluto):

$$\frac{sen\ a_1b_1 . sen\ a_2b_2 ....}{sen\ c_1d_1 . sen\ c_2d_2 ...} = \frac{sen\ a_1'b_1' . sen\ a_2'b_2' ...}{sen\ c_1'd_1' . sen\ c_2'd_2' ...} \tag{2}$$

Se attorno ai poli delle rette A_1B_1,... e sulle rette a_1, b_1,.... si fissano dei versi positivi; e lo stesso si fa attorno al punto O e sulle rette a'_1,b'_1...., ciascuno dei due membri della (2) viene ad acquistare un segno indipendente dalla scelta dei versi positivi suddetti; e quindi, se per una particolare scelta di questi versi, la (2) è valida anche nel segno, lo sarà in ogni caso.

Ora, scegliendo come versi positivi sui fasci a_1b_1,... e sui raggi a_1, b_1,...., quelli che vengono determinati muovendo rigidamente gli angoli $a_1'b_1'$,..., coi loro versi positivi e coi versi positivi dei loro lati, finchè ciascuno di questi angoli venga a coincidere col suo corrispondente (*direttamente* uguale) nel gruppo a_1b_1,.., la (2) sarà evidentemente vera anche nel segno: e dunque lo sarà per ogni scelta dei versi positivi.

Per la proprietà proiettiva della f, avremo pure in valore ed in segno:

$$\frac{A_1B_1 \,.\, A_2B_2 ....}{C_1D_1 \,.\, C_2D_2 ....} = \frac{sen\ a_1'b_1' \,.\, sen\ a_2'b_2' ...}{sen\ c'_1d'_1 \,.\, sen\ c'_2d'_2 ...},$$

quindi l' espressione:

$$(3) \qquad \varphi = \frac{sen\ a_1b_1 \,.\, sen\ a_2b_2 ...}{sen\ c_1d_1 \,.\, sen\ c_2d_2 ...}$$

avrà lo stesso valore e lo stesso segno della f.

Poichè all' operazione di segare con una retta la figura Φ, costituita dagli angoli a_1b_1,..., corrisponde nella polarità rispetto a c, l' operazione di proiettare dal polo di quella retta, la figura F, costituita dai segmenti A_1B_1,...,; si conclude che il valore della φ è uguale al valore dell' espressione formata allo stesso modo con le misure dei segmenti che si ottengono per sezione dagli angoli a_1b_1,....

Più in generale, giacchè il valore di f non s' altera per una trasformazione omografica, che si compone mediante un n.° finito di proiezioni e di sezioni (§ 8, n.° 3), lo stesso accadrà del valore di φ, cioè la φ sarà proiettiva.

Dunque *dall' espressione metrico-proiettiva* (1), *relativa alla figura F, si deduce l'espressione metrico-proiettiva* (3), *la quale è relativa alla figura duale (nel piano)* Φ *(e viceversa). Dalla prima espressione si passa alla seconda, sostituendo alle lunghezze dei segmenti rettilinei i seni degli angoli corrispondenti, e viceversa.*

Osservazione. Nello spazio si potrebbe profittare in modo analogo della polarità rispetto ad una sfera.

La legge di dualità, come principio di reciprocità polare, fu segnalata in modo esplicito da Poncelet, nella sua teoria delle polari reciproche (1818 e 1824); ma indipendentemente da ogni trasformazione delle figure, fu enunciata da Gergonne (1826) e successivamente da Möbius (1827) e da Plücker (1828). La trasformazione per dualità delle proprietà metrico-proiettive, trovasi nel *Mémoire sur la théorie des polaires réciproques* di Poncelet (1824); ed il concetto mediante il quale viene attuata tale trasformazione, è quello che abbiamo esposto sopra, completandolo con la nozione dei segni.

CAPITOLO QUINTO

Le coniche.

§ 10. *Polarità rispetto ad una conica e generazione proiettiva delle coniche.*

SOMMARIO: *Generalità.* — a) *Sulla polarità e su alcune proprietà metriche delle coniche: Quadrangoli completi inscritti e circoscritti ad una conica, in relazione ai triangoli autopolari — Rete delle coniche che hanno un dato triangolo autopolare. Applicazioni. Se due quadrangoli completi hanno gli stessi punti diagonali, gli 8 vertici appartengono ad una conica. — Se due coniche sono iscritte in un medesimo quadrilatero, gli 8 punti di contatto stanno in una conica — Il teorema di* CARNOT *e il suo duale (di* CHASLES*). Applicazioni varie: Le coppie di tangenti mandate ad una conica dai vertici di un triangolo, segano i lati opposti in 6 punti di una conica; e viceversa. Forme ridotte delle equazioni delle coniche. Teorema di chiusura di* PONCELET — b) *Sulla generazione proiettiva delle coniche: Centro di una conica generata come inviluppo da due punteggiate omografiche — Proiettare una conica inviluppo in un circolo inviluppo — Genesi dell' iperbole equilatera con fasci inversamente uguali — Da due punti diametralmente opposti di una ellisse o di un' iperbole un punto della curva vien proiettato secondo rette parallele a due diametri coniugati. Applicazioni — I vertici e i punti di contatto di due angoli circoscritti ad una conica appartengono ad un' altra conica — Teorema di* CHASLES-STAUDT — *Per due triangoli (generici) di un piano le tre condizioni: di essere inscritti in una conica, di essere circoscritti ad un' altra, di essere autoreciproci in una medesima polarità, sono soddisfatte appena si verifichi una qualunque di esse — Coniche coniugate — Descrizione orga-*

nica di NEWTON — *Descrizione di* MAC-LAURIN *e* BRAIKENRIDGE — *Altre generazioni analoghe* — *Equazione dell' iperbole riferita ai suoi asintoti.*

1. Data una polarità piana non uniforme, l'insieme degli infiniti punti e delle infinite rette coniugati di se stessi, si chiama *conica fondamentale* della polarità (*E.* § 56). Le rette che appartengono al proprio polo sono le *tangenti* della curva (*conica luogo*) costituita dai punti autoconiugati; cioè una retta *a* appartenente al suo polo A, può riguardarsi come posizione limite di una retta che congiunga A con un altro punto della conica, il quale si approssimi indefinitamente ad A.

Quando la conica fondamentale si concepisce come insieme delle sue rette (*conica inviluppo*), i poli di queste rette appariscono come *punti di contatto* delle rette medesime rispetto alla conica luogo: e dei punti di contatto si può dare una genesi (intuitiva) duale di quella richiamata per le tangenti.

Le rette del piano sulle quali la polarità subordina involuzioni iperboliche, incontrano la conica in due punti, e sono dette *secanti*; mentre quelle sulle quali si hanno involuzioni ellittiche, non incontrano affatto la conica e sono dette *non secanti* — Dualmente si definiscono i *punti esterni* ed *interni*, rispetto alla conica.

Una *retta* non secante si dice anche *esterna*, perchè più tardi si dimostra che è tutta costituita da punti esterni. Invece di dire che una retta esterna non incontra la conica, si suole anche dire che essa ha comune con la conica due *punti immaginarî*, cioè la coppia dei punti doppi dell' involuzione ellittica subordinata dalla conica su quella retta (cfr. col n. 13 del § 6, Oss.).

Data una polarità piana uniforme, si può dire che le infinite coppie di punti doppî immaginarî delle involuzioni ellittiche ch' essa subordina sulle rette del piano, e le infinite coppie di rette doppie immaginarie delle involuzioni ellittiche subordinate sui fasci del piano, costituiscono una *conica immaginaria.*

Dal punto di vista metrico le coniche si distinguono a seconda della loro posizione rispetto alla retta impropria. — Quando la retta all' infinito è esterna, la conica dicesi una *ellisse*, quando è tangente una *parabola* e quando è secante un' *iperbole.*

Data una conica k, la polare p di un punto P, che non appartenga a k, contiene tutti i coniugati armonici di P rispetto alle coppie di punti di k allineati con P; è l'asse di un' omologia armonica che ha il centro in P e che muta in se stessa la conica; contiene gli ulteriori punti diagonali di ogni quadrangolo completo inscritto in k, ed avente un punto diagonale in P; e infine, se il punto P è esterno, contiene i punti di contatto delle tangenti mandate da P alla conica. Il polo P della retta p, gode delle proprietà duali (*E.* § 57).

Da queste proprietà segue immediatamente che il triangolo diagonale di un quadrangolo completo inscritto nella conica, è autopolare, e dualmente; e che la retta p è secante o esterna, secondo che il punto P è esterno o interno.

Ricorderemo inoltre che dei tre vertici di un triangolo autopolare, uno è interno e gli altri due sono esterni rispetto alla conica.

Una proposizione che si applica spesso nella teoria delle coniche, è la seguente (*E.* § 60): Se un triangolo è inscritto in una conica, ogni retta coniugata ad un lato sega gli altri due lati in punti coniugati; e, viceversa, ogni retta che segni due punti coniugati sopra due lati del triangolo, è coniugata al lato rimanente.

Questa proposizione dà il mezzo di costruire una conica per punti, quando se ne conoscano due punti A, B, e si conosca pure l' involuzione subordinata dalla conica sopra una retta coniugata ad AB: le rette che proiettano da A,B le coppie di questa involuzione, si segano in punti della conica.

Dualmente dicasi per un trilatero circoscritto.

Una conseguenza notevolissima del teorema precedente, è la generazione proiettiva delle coniche (*E.* § 61). Il luogo del punto comune a due raggi omologhi nella proiettività tra due fasci complanari, ma non prospettivi nè concentrici, è una conica; e dualmente, le rette che congiungono le coppie di punti omologhi nella proiettività tra due punteggiate complanari, ma non prospettive nè sovrapposte, inviluppano una conica.

Viceversa, i punti di una conica son proiettati da due punti fissi di essa secondo fasci proiettivi; e le tangenti di una conica segano sopra due tangenti fisse, punteggiate proiettive.

Dai teoremi precedenti seguono varie costruzioni di una conica luogo o inviluppo, individuata da 5 condizioni lineari (*E.* § 63); ma su ciò non c' indugiamo.

Riassumeremo piuttosto le proprietà metriche più importanti, che derivano dalla polarità e dalla generazione proiettiva.

Il polo della retta all' infinito chiamasi *centro* della conica. Le rette passanti pel centro — cioè le polari dei punti impropri — diconsi *diametri* (*E.* § 58).

Nell' ellisse e nell' iperbole il centro è proprio: interno nel 1° caso, esterno nel 2°. Nella parabola il centro è il punto di contatto con la retta all' infinito, e perciò tutti i diametri son paralleli.

Le tangenti nei punti all' infinito dell' iperbole concorrono nel centro, e si chiamano *asintoti.*

In un' ellisse o in un' iperbole i diametri vengono accoppiati in un' *involuzione* (*dei diametri coniugati*), che è ellittica nell' ellisse e iperbolica nell' iperbole. In quest' ultimo caso gli asintoti sono i raggi doppî dell' involuzione.

In una conica qualunque un diametro proprio divide per metà le corde della conica che vanno al polo (improprio) di quel diametro.

In un' ellisse o in un' iperbole il centro è punto medio delle corde che passano per esso.

Tra le coniche va noverato il circolo. La condizione necessaria e sufficiente perchè una conica sia un circolo, è che l' involuzione dei diametri coniugati sia costituita da angoli retti, cioè che la conica subordini l' involuzione assoluta sulla retta impropria. (Ved. il n.° 7 del § 9 ed *E.* § 59).

Chiamando *punti ciclici* i punti doppî immaginarî dell' involuzione assoluta, si può dire che, tra le coniche, un circolo è caratterizzato dal passaggio pei punti ciclici.

Ogni conica si può proiettare in un circolo. (§ 6, n. 11 ed *E.* § 59).

Se si esclude il caso del circolo, in ogni conica a centro proprio vi sono due soli diametri coniugati ortogonali e diconsi *assi* della conica (*E.* § 59).

Nella parabola vi è un solo asse, il quale contiene i punti medî delle corde perpendicolari alla direzione comune a tutti i diametri.

Tra le proprietà metriche che derivano dalla generazione proiettiva (*E.* § 62), ricorderemo le seguenti: In un' iperbole il triangolo determinato dagli asintoti e da una tangente variabile ha un' area costante; in una parabola due tangenti son segate dalle altre secondo punteggiate simili; due fasci direttamente congruenti, non prospettivi, generano un circolo, e, viceversa, da due punti di un circolo gli altri son proiettati secondo fasci direttamente congruenti.

Lo studio delle coniche fu iniziato dai geometri greci della scuola di PLATONE, i quali se ne servirono per la risoluzione dei problemi solidi di 3° grado, e segnatamente per il problema della duplicazione del cubo di cui parleremo più tardi. MENECMO (IV secolo av. Cr.) scolaro di PLATONE, considerava le coniche come sezioni prodotte su di un cono circolare retto da piani perpendicolari alle generatrici. Egli otteneva le tre specie di coniche (triade di Menecmo) a seconda dell' apertura del cono: da un cono acutangolo l' ellisse, da un cono rettangolo la parabola, da un cono ottusangolo l' iperbole. — Anche EUCLIDE (verso il 300 av. Cr.) ed ARCHIMEDE (III secolo av. Cr.) continuarono a considerare le coniche tracciate sul cono o sul cilindro retti. — La genesi delle coniche come sezioni di un cono circolare obliquo, trovasi per la prima volta nella celebre opera di APOLLONIO (circa il 300 av. Cr.), la quale contiene la parte più cospicua della teoria delle sezioni coniche. È in quest' opera che si trovano usati continuamente i nomi di ellisse, iperbole, parabola, per quanto i nomi di ellisse e di parabola si ritrovino anche nelle opere anteriori di ARCHIMEDE.

DESCARTES, nel sistema geometrico da lui creato con l'introduzione delle coordinate (Géométrie, 1637), studiò le coniche come luoghi rappresentati da un' equazione di 2° grado nelle coordinate (cartesiane) di punto; e questo indirizzo fu continuato per molto tempo, a causa della grande influenza che ebbe nello sviluppo delle Scienze matematiche la geniale concezione di Descartes.

STEINER (Syst. Entw., 1832), considerando le coniche come proiezioni del circolo, dalla proprietà elementare che due angoli inscritti nello stesso arco di circolo sono uguali, deduceva la generazione proiettiva delle coniche; e CHASLES dimostrava più tardi (Traité de Géom. supérieure, 1852) che ogni curva luogo dei punti d' intersezione dei raggi omologhi di due fasci proiettivi (non prospettivi), può pensarsi come proiezione del circolo (cfr. col n. 11 del § 6).

A proposito della generazione proiettiva, conviene pure ricordare che CHASLES nel 1829 e STAUDT nel 1831, avevano dimostrato che il luogo di un punto dal quale quattro punti dati del piano son proiettati secondo 4 raggi aventi un dato birapporto, è una conica passante per quei 4 punti; e dualmente.

La teoria della polarità rispetto ad una conica, che si formò attraverso alle opere di APOLLONIO, DESARGUES, DE LA HIRE, PONCELET (ved. le notizie storiche al n.° 1 del § 9), fu il punto di partenza della trattazione di STAUDT (*Geo. d. Lage*, 1847).

Egli, come abbiamo visto, costruì la teoria della polarità in modo autonomo e definì una conica come il luogo di un punto che appartiene alla propria polare in una polarità non uniforme. — La polarità uniforme gli offrì poi il mezzo di definire e studiare geometricamente una conica immaginaria (*Beiträge*, 1856).

a) *Sulla polarità e su alcune proprietà metriche delle coniche.*

2. *Dati quattro punti ABCD di una conica e le tangenti* abcd *in essi, il quadrangolo completo ABCD ed il quadrilatero completo* abcd *hanno lo stesso triangolo diagonale.*

Poniamo infatti:

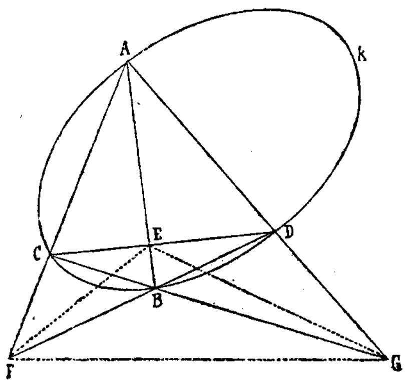
$$E \equiv AB \,.\, CD,\ F \equiv AC \,.\, BD,\ G \equiv AD \,.\, BC,$$
$$e \equiv FG,\ f \equiv GE,\ g \equiv EF.$$

Poichè il punto E ha per polare la retta e (*E.* § 57), i poli delle rette AB, CD, che passano per E, cioè i punti ab, cd, giaceranno sulla e; dunque la retta e sarà un lato del trilatero diagonale di $abcd$. Analogamente si prova che

$$f \equiv ac.bd\,,\ g \equiv ad.bc.$$

Questo teorema trovasi in SIMSON (1735).

3. *Se EFG è un triangolo autoconiugato rispetto ad una conica, ogni quadrangolo completo di cui un vertice giaccia sulla conica e il cui triangolo diagonale sia EFG, è inscritto nella conica.*



Il punto A della conica k sia vertice di un quadrangolo completo avente i punti diagonali in E, F, G; e diciamo B, C, D le ulteriori intersezioni di k con le rette AE, AF, EC. Il quadrangolo ABCD ha un punto diagonale in E, sicchè gli altri due punti diagonali si troveranno sulla polare di E, cioè su FG. Ne deriva che la retta BD passerà per F, e quindi il lato opposto al vertice F nel triangolo diagonale di ABCD dovrà essere la polare di F, cioè la retta EG. Dunque il terzo punto diagonale di ABCD coincide con G.

Ricordando ora che un quadrangolo completo è individuato dal suo triangolo diagonale e da un vertice (§ 2, n.° 17), concludiamo che il dato quadrangolo coincide con ABCD e quindi che esso è inscritto in k.

OSSERVAZIONE 1.ª Dal teorema dimostrato segue che tutte le coniche rispetto alle quali un dato triangolo EFG è autopolare, e che passano per un punto del piano, non allineato con due qualunque dei tre punti EFG, hanno di conseguenza altri tre punti comuni, cioè formano un *fascio*. — Per ogni punto del piano, diverso dai 4 punti *base*, passa una sola conica (eventualmente degenere) di questo fascio.

Tutte le coniche che hanno come autopolare il triangolo EFG, formano una *rete*. Per due punti generici del piano passa una sola conica della rete.

Osservazione 2.ª Dati due punti A ed A′ di una conica ed un triangolo autopolare EFG, costruendo i due quadrangoli completi ABCD, A′B′C′D′, che hanno EFG per triangolo diagonale, troveremo subito altri 6 punti BCDB′C′D′ della conica *individuata* da quei dati; onde la conica stessa si potrà costruire facilmente per punti.

Osservazione 3.ª Poichè quando è data la conica k ed un suo triangolo autopolare EFG, vi sono infiniti quadrangoli ABCD inscritti in k ed aventi i punti diagonali in E, F, G, e d'altronde ogni triangolo formato con tre vertici di uno di questi quadrangoli, è circoscritto ad EFG, si conclude che: *Vi sono infiniti triangoli inscritti in una conica e circoscritti ad un dato triangolo, autopolare rispetto ad essa.*

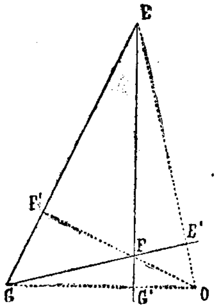
4. *Trovare la condizione affinchè la rete delle coniche che hanno un dato triangolo autopolare, contenga un circolo (reale); e la condizione affinchè ne contenga infiniti.*

Un circolo (reale o immaginario) è una conica definita dalla condizione di passare pei punti ciclici (*E.* § 59), o, in altri termini, è la curva fondamentale di una polarità piana che subordina sulla retta impropria l'involuzione assoluta (cfr. col n.° 7 del § 9); e poichè esiste in generale una ed una sola polarità che subordini sulla retta impropria l'involuzione assoluta e che possegga un dato triangolo autopolare (§ 9, n.° 4, Oss.), si conclude che in generale alla rete Σ delle coniche che hanno un dato triangolo autoconiugato EFG, appartiene *un* circolo reale o immaginario.

Nell'ipotesi che i vertici E, F, G sieno propri, noi vogliamo determinare la condizione perchè il circolo stesso sia reale.

Il centro del circolo — cioè il centro della polarità da esso individuata — sarà in ogni caso il punto O in cui concorrono le altezze del triangolo EFG, delle quali diciamo E′, F′, G′ i piedi rispettivi sui lati FG, GE, EF.

Se il circolo è reale, esso subordinerà sulla retta EE′ un' involuzione *iperbolica* di cui EE′ sarà una coppia ed O il centro: onde il punto O dovrà essere esterno al segmento finito EE′, e quindi esterno alla regione finita triangolare EFG. Da ciò si trae che il triangolo EFG dovrà essere ottusangolo.



Viceversa, se EFG è ottusangolo, i tre prodotti OE . OE′, OF . OF′, OG . OG′ saranno tutti positivi e poichè dalla similitudine dei triangoli FOE′, F′OE, e GOE′ G′OE, si trae:

$$OE \,.\, OE' = OF \,.\, OF' = OG \,.\, OG',$$

il triangolo EFG risulterà autopolare rispetto al circolo di centro O e di raggio $\sqrt{OE \,.\, OE'}$. Dunque *se il triangolo dato* EFG *è ottusangolo, nella rete esiste uno ed un sol circolo (reale), mentre non ne esiste nessuno (reale) se il triangolo è acutangolo o rettangolo (coi tre vertici proprî).*

Quando il triangolo EFG *è rettangolo in* E, *e i due vertici* F, G *sono improprî, alle rete appartengono infiniti circoli,* che son quelli di centro E. — Se, infine, il triangolo EFG non è rettangolo in E, ed i vertici F, G sono ancora improprî, alla rete non può appartenere nessun circolo.

5. *I punti medi dei lati di un triangolo che sia autopolare rispetto ad una parabola, sono vertici di un trilatero circoscritto alla curva.*

Per la proprietà duale di quella dimostrata al n.° 3 di questo §, ogni conica che abbia un dato triangolo autopolare EFG e che tocchi una data retta a, tocca in conseguenza altre tre rette b, c, d, che sono i lati ulteriori del quadrilatero completo, ben determinato, di cui EFG è il trilatero diagonale ed a un lato (§ 2, n.° 17). In particolare se a è all'infinito, si avrà una parabola, tangente ad altre tre rette proprie determinate, b, c, d.

Ora, per la proprietà armonica del quadrilatero completo, si vede che le rette b, c, d incontrano i lati di EFG nei loro punti medî; sicchè si conclude col teorema ennunciato.

6. *Se due quadrangoli completi hanno gli stessi punti diagonali, gli otto vertici appartengono ad una conica (non degenere o degenere).*

Sieno ABCD, A'B'C'D' i due quadrangoli aventi gli stessi punti diagonali

$$E \equiv AB \,.\, CD \equiv A'B' \,.\, C'D',$$
$$F \equiv AC \,.\, BD \equiv A'C' \,.\, B'D',$$
$$G \equiv AD \,.\, BC \equiv A'D' \,.\, B'C'.$$

Le coniche passanti per ABCD formano un fascio ed hanno tutte per triangolo autopolare EFG. Pel punto A' — certamente diverso dai punti base del fascio precedente (§ 2, n.° 17) — passa una conica di questo fascio (degenere o no) la quale contiene in conseguenza i punti B'C'D' (§ 10, n.° 3).

7. *Se due coniche sono inscritte nello stesso quadrilatero, gli otto punti di contatto appartengono ad una conica.*

Se *abcd* è il dato quadrilatero e ABCD, A'B'C'D' i punti di contatto risp. delle coniche k, k', i due quadrangoli ABCD, A'B'C'D' hanno lo stesso triangolo diagonale di *abcd* (§ 10, n.° 2), e quindi, pel teorema precedente, i loro otto vertici appartengono ad una conica (degenere o no).

Questo teorema, dimostrato nel modo esposto da STAUDT (Geo. d. Lage, 1847), trovasi implicitamente (sotto la forma duale) anche in un lavoro anteriore di STAUDT (1831).

8. *Se i lati* A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 *di un n-gono piano semplice tagliano una conica k rispettivamente nelle coppie di punti* $B_1B'_1$, $B_2B'_2$, ..., $B_nB'_n$, *ha luogo la relazione:*

$$(A_1A_2B_1)(A_1A_2B'_1)(A_2A_3B_2)(A_2A_3B'_2) \dots (A_nA_1B_n)(A_nA_1B'_n) = 1.$$

Invero, il primo membro della relazione essendo proiettivo di sua natura (perchè è un' espressione frazionaria sodisfacente alle condizioni del n.° 1, § 3), per calcolarne il valore potremo ricorrere ad una proiezione della conica *k*. — Proiettando la conica in un circolo (*E.* § 59), il numeratore e il denominatore del 1° membro diverranno uguali al prodotto delle potenze rispetto al circolo, dei vertici dell' *n*-gono proiezione, sicchè la frazione risulterà uguale ad 1.

Questo teorema trovasi per $n = 3$ nella *Géom. de position* di CARNOT (1803) e per *n* qualunque in una Memoria posteriore (1806).

9. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè 6 punti* $B_1B'_1$, $B_2B'_2$, $B_3B'_3$ *appartengano ad una conica, è che ponendo*

$$A_1 \equiv B_3B'_3 \,.\, B_1B'_1, \quad A_2 \equiv B_1B'_1 \,.\, B_2B'_2, \quad A_3 \equiv B_2B'_2 \,.\, B_3B'_3,$$

si abbia:

$$(A_1A_2B_1)(A_1A_2B'_1)(A_2A_3B_2)(A_2A_3B'_2)(A_3A_1B_3)(A_3A_1B'_3) = 1.$$

La necessità della condizione risulta come caso particolare ($n = 3$) dal n.° precedente.

Per dimostrare la sufficienza si consideri la conica passante pei punti $B_1B'_1B_2B'_2B_3$ e si chiami $\bar{B}'_3$ l' ulteriore intersezione di questa conica con la retta $B_3B'_3$. Confrontando la relazione che deriva dal n.° precedente, con quella valida per ipotesi, si ottiene:

$$(A_3A_1\bar{B}'_3) = (A_3A_1B'_3),$$

la quale prova che $\bar{B}'_3 \equiv B'_3$, cioè che i 6 punti B dati, giacciono sopra una conica.

OSSERVAZIONE 1.ª Se *tre* dei sei punti, p. e. $B_1B_2B_3$, sono allineati, e tutti e 6 stanno sopra una conica, gli altri tre, $B'_1B'_2B'_3$, saranno pure allineati, cioè la conica si scinderà in due rette. Il teorema precedente è ancora valido, e si dimostra subito applicando due volte il teorema di MENELAO (§ 3, n.° 9).

OSSERVAZIONE 2.ª Applicando la legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive (§ 9, n.° 8), avremo:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè 6 rette $b_1b'_1b_2b'_2b_3b'_3$, *tocchino una conica, è che ponendo:*

$$a_1 \equiv b_3b'_3 \,.\, b_1b'_1, \quad a_2 \equiv b_1b'_1 \,.\, b_2b'_2, \quad a_3 \equiv b_2b'_2 \,.\, b_3b'_3,$$

si abbia:

$$(a_1a_2b_1)(a_1a_2b'_1)(a_2a_3b_2)(a_2a_3b'_2)(a_3a_1b_3)(a_3a_1b'_3) = 1.$$

Qui può farsi l'osservazione duale della precedente, in relazione agli inviluppi di 2ª classe degeneri.

Il teorema 9 è di CARNOT (1803), e quello duale (Oss. 2ª) è dovuto a CHASLES (Traité des sections coniques, 1865). Questi teoremi valgono, con opportune convenzioni, anche quando alcuni punti B o alcune tangenti b, divengano a coppie immaginari. Una dimostrazione elegante, anche per coniche immaginarie, trovasi nella Memoria del SEGRE già citata (Le coppie di elem. imm. nella geo. proiett. sintetica, 1886).

10. *Le coppie di tangenti mandate ad una conica dai vertici di un triangolo, segano i lati opposti in 6 punti di una conica; e viceversa (dualmente).*

Sia $ABC \equiv abc$ il triangolo dato e $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$ le coppie di tangenti mandate alla conica da A, B, C e $A_1A'_1$ $B_1B'_1$, $C_1C'_1$ le coppie dei punti in cui le tangenti suddette segano i lati risp. opposti. Pel n.° precedente avremo:

$$(bca_1)(bca'_1)(cab_1)(cab'_1)(abc_1)(abc'_1) = 1,$$

e per la relazione di CHASLES, dimostrata al n.° 19 del § 3, avremo inoltre:

$$(BCA_1)(CAB_1)(ABC_1)(bca_1)(cab_1)(abc_1) = 1$$
$$(BCA'_1)(CAB'_1)(ABC'_1)(bca'_1)(cab'_1)(abc'_1) = 1,$$

le quali, moltiplicate tra loro e confrontate con la 1ª, dànno:

$$(BCA_1)(BCA'_1)(CAB_1)(CAB'_1)(ABC_1)(ABC'_1) = 1;$$

e questa prova che i 6 punti $A_1A'_1B_1B'_1C_1C'_1$ giacciono in una conica.

Osservazione 1.ª Il teorema può estendersi anche al caso che le tangenti mandate alla conica dai vertici del triangolo, sieno a coppie immaginarie; e dualmente.

Osservazione 2.ª In particolare quando la conica data degenera, come inviluppo, in una coppia di fasci, il teorema è ancora applicabile (n.° prec.) e si ottiene la proposizione seguente:

Se da due punti del piano si proiettano i vertici di un triangolo sopra i lati opposti, si ottengono sei punti di una conica, e dualmente.

Il teor. 10 è dovuto a Chasles (Traité, 1865); ma il caso particolare dell' Oss. precedente, era già stato rilevato da Steiner (1828).

11. *Forme ridotte delle equazioni delle coniche.*

Il teorema di Carnot e il duale, potrebbero porsi a base di una trattazione metrica della teoria delle coniche, giacchè da essi si deducono tutte le proprietà delle coniche, tanto grafiche che metriche; e presto vedremo un esempio notevole di ciò in una dimostrazione del teorema di Pascal.

Il lettore si convincerà facilmente della possibilità di prendere il teorema di Carnot come punto di partenza della teoria delle coniche, quando avremo dedotto da esso le equazioni, che sono il fondamento della trattazione analitica.

Sia AB un diametro di un' ellisse data o un diametro trasverso di una data iperbole; e prendiamo come asse delle x di un sistema cartesiano la retta AB e come asse delle y il diametro coniugato CD. Scelti due punti PP_1 della curva, diciamo $x = OQ$, $x_1 = OQ_1$ le loro ascisse,

$y = QP$, $y_1 = Q_1P_1$ le loro ordinate, ed S, S_1 le ulteriori intersezioni della conica con le rette PQ, P_1Q_1.

Applicando il teorema di Carnot al triangolo QQ_1R_∞, ove R_∞ è il punto improprio comune alle QP, Q_1P_1, avremo:

$$(QQ_1A)(QQ_1B)(Q_1R_\infty P_1)(Q_1R_\infty S_1)(R_\infty QP)(R_\infty QS) = 1,$$

ossia (§ 3, n.° 1, Oss.):

$$\frac{A\ Q \cdot QB}{Q_1A \cdot Q_1B} = \frac{QP \cdot QS}{Q_1P_1 \cdot Q_1S_1}.$$

Se indichiamo con a la lunghezza del semidiametro OA, questa relazione potrà scriversi così:

$$\frac{x^2 - a^2}{x_1{}^2 - a^2} = \frac{y^2}{y_1{}^2},$$

la quale prova che il rapporto $\dfrac{x^2 - a^2}{y^2}$ è costante al variare del punto sulla curva. Posto

$$\frac{x^2 - a^2}{y^2} = \frac{k}{b^2},$$

ove k è una costante conveniente e b è il semidiametro OC, trovando le intersezioni (reali o immaginarie) della conica con l'asse y ($x = 0$), si vede che la costante k è uguale a $-a^2$ nell'ellisse e a $+a^2$ nell'iperbole.

Sicchè avremo *le equazioni ridotte dell'ellisse e dell'iperbole riferite a due diametri coniugati:*

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

nella quale il segno $+$ corrisponde all'ellisse e il $-$ all'iperbole.

Quanto alla parabola, prendendo come origine O un punto della curva, come asse delle x il diametro OA_∞ uscente da quel punto e diretto al punto improprio A_∞ della curva, e come asse delle y la tangente in O; e chiamando $x = OQ$,

$x_1 = OQ_1$ le ascisse di due punti PP_1 della curva, e $y = QP$, $y_1 = Q_1P_1$ le loro ordinate; con l'applicazione del teorema di Carnot al triangolo QQ_1R_∞ ($R_\infty \equiv QP \,.\, Q_1P_1$), verrà:

$$(QQ_1O)(QQ_1A_\infty)(Q_1R_\infty P_1)(Q_1R_\infty S_1)(R_\infty QP)(R_\infty QS) = 1,$$

ove S, S_1 sono le ulteriori intersezioni della parabola con le rette QP, Q_1P_1.

Riducendo avremo:

$$\frac{QO}{Q_1O} = \frac{QP \,.\, QS}{Q_1P_1 \,.\, Q_1S_1},$$

ossia:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y^2}{y_1^2},$$

la quale prova che, variando P sulla curva, rimane costante il rapporto $\frac{y^2}{x}$. Posto

$$\frac{y^2}{x} = 2p,$$

avremo *l'equazione della parabola riferita ad un diametro e alla tangente coniugata:*

$$y^2 = 2px.$$

Osservazione. Il coefficente $2p$, che è positivo quando si scelga come senso positivo dell'asse x quello diretto verso l'interno della curva, si chiama *parametro* della parabola. Se l'origine è nel vertice, $2p$ si chiama il *parametro principale*.

12. *Se due n-goni semplici* $A_1A_2 \dots A_n$, $A'_1A'_2 \dots A'_n$ *sono inscritti in una conica, ponendo:*

$$B_1 \equiv A_1A_2 \,.\, A'_1A'_2,\ B_2 \equiv A_2A_3 \,.\, A'_2A'_3, \dots, B_n \equiv A_nA_1 \,.\, A'_nA'_1,$$

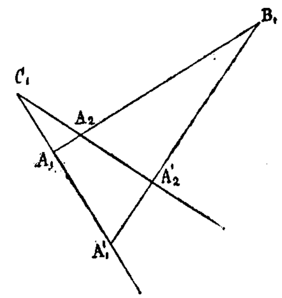
si ha la relazione:

$$(1) \qquad (A_1A_2B_1)(A'_1A'_2B_1)(A_2A_3B_2)(A'_2A'_3B_2) \dots (A_nA_1B_n)(A'_nA'_1B_n) = 1.$$

Poniamo infatti:

$$C_1 \equiv A_1A'_1 \,.\, A_2A'_2,\ C_2 \equiv A_2A'_2 \,.\, A_3A'_3,\ \ldots.,\ C_n \equiv A_nA'_n \,.\, A_1A'_1.$$

Applicando il teorema di Menelao (§ 3, n.° 9) una volta al triangolo $A_1A_2C_1$ segato dalla trasversale $A'_1A'_2B_1$ e un' altra volta al triangolo $A'_1A'_2C_1$ segato dalla trasversale $A_1A_2B_1$, avremo:



$$(A_1A_2B_1)(A_2C_1A'_2)(C_1A_1A'_1) = 1,$$
$$(A'_1A'_2B_1)(A'_2C_1A_2)(C_1A'_1A_1) = 1,$$

le quali, moltiplicate membro a membro, dopo facili riduzioni, dànno:

$$(A_1A_2B_1)(A'_1A'_2B_1) = \frac{\overline{A_1A'_1}^2}{\overline{A_2A'_2}^2}\,\frac{C_1A_2 \,.\, C_1A'_2}{C_1A_1 \,.\, C_1A'_1}.$$

Moltiplicando membro a membro questa relazione con le altre $n-1$ analoghe, verrà:

$$(2) \qquad (A_1A_2B_1)(A'_1A'_2B_1) \ldots\ldots (A_nA_1B_n)(A'_nA'_1B_n) =$$
$$= \frac{C_1A_2 \,.\, C_1A'_2 \,.\, C_2A_3 \,.\, C_2A'_3 \ldots C_nA_1 \,.\, C_nA'_1}{C_1A_1 \,.\, C_1A'_1 \,.\, C_2A_2 \,.\, C_2A'_2 \ldots C_nA_n \,.\, C_nA'_n}.$$

Poichè i lati dell' n-gono $C_1C_2 \ldots C_n$ tagliano la conica nelle coppie $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$, applicando il teorema di Carnot, si vedrà che il 2° membro della relazione precedente è uguale ad 1, c. d. d.

Osservazione 1.ª Viceversa, se è soddisfatta la relazione (1) e $2n-1$ vertici dei due n-goni giacciono sulla conica, ma nulla si sa del vertice rimanente A'_n, chiamando $\overline{A'}_n$ l' ulteriore intersezione della conica col lato $A_nA'_n$ dell' n-gono $C_1 \ldots C_n$, pel teorema di Carnot, avremo:

$$(C_nC_1A_1)(C_nC_1A'_1)(C_1C_2A_2)(C_1C_2A'_2) \ldots (C_{n-1}C_nA_n)(C_{n-1}C_n\overline{A'}_n) = 1,$$

e, quindi in forza della (2), otterremo:

$$(C_{n-1}C_n\overline{A'}_n) = (C_{n-1}C_nA'_n),$$

la quale prova che $\bar{A}'_n \equiv A'_n$. Dunque:

Se $2n-1$ vertici dei due n-goni $A_1 \dots A_n$, $A'_1 \dots A'_n$ appartengono ad una conica, e se è soddisfatta la relazione (1), *anche il vertice rimanente apparterrà a questa conica.*

OSSERVAZIONE 2ª. Applicando la legge di dualità per le proprietà metrico-proiettive (§ 9, n.° 8), avremo il teorema seguente:

Se due n-lateri semplici $a_1 \dots a_n$, $a'_1 \dots a'_n$ *sono circoscritti ad una conica, ponendo:*

$$b_1 \equiv a_1 a_2 . a'_1 a'_2,\ b_2 \equiv a_2 a_3 . a'_2 a'_3, \dots,\ b_n \equiv a_n a_1 . a'_n a'_1,$$

ha luogo la relazione:

$$(3) \quad (a_1 a_2 b_1)(a'_1 a'_2 b_1)(a_2 a_3 b_2)(a'_2 a'_3 b_2) \dots (a_n a_1 b_n)(a'_n a'_1 b_n) = 1;$$

e viceversa se $2n-1$ *lati dei due n-lateri son tangenti alla conica, ed è soddisfatta la* (3), *anche il lato rimanente tocca la conica.*

13. *Date due coniche* k, k′, *a partire da un punto di* k *si conduca una qualunque delle eventuali tangenti a* k′, *e per l'ulteriore punto d'intersezione di questa tangente con* k, *l'ulteriore tangente a* k′; *e così si prosegua: allora, se la linea poligonale generata si chiude dopo* n *operazioni, dando luogo ad un* n*-gono semplice, coi vertici distinti tra loro, le stesse operazioni, ripetute a partire da ogni altro punto di* k, *daranno pure luogo ad una linea poligonale chiusa.*

Supponiamo che, partendo dal punto A_1 di k, si possa inscrivere in questa conica un poligono $A_1 A_2 \dots A_n$ circoscritto a k': il teorema sarà stabilito quando avremo provato che, partendo da un altro punto arbitrario A'_1 di k, e tirando da A_1' una tangente a'_1 a k' e dal punto A'_2 ove questa tangente incontra ulteriormente k, l'altra tangente a'_2 a k'; dal punto A'_3 ovè questa incontra ulteriormente k, l'altra tangente a'_3 a k'; e così proseguendo, fino a condurre dal punto A'_n di k l' ulteriore tangente a'_n a k'; quest' ultima viene a passare pel punto di partenza A'_1.

Indichiamo con $a_1 a_2 \dots a_n$ i lati $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ del primo poligono, e inoltre poniamo:

$$B_1 \equiv A_1A_2 . \bar{A}'_1A'_2,\ B_2 \equiv A_2A_3 . A'_2A'_3, \dots,\ B_n \equiv A_nA_1 . A'_n\bar{A}'_1$$
$$b_1 \equiv a_1a_2 . a'_1a'_2,\ b_2 \equiv a_2a_3 . a'_2a'_3, \dots,\ b_n \equiv a_na_1 . a'_na'_1,$$

ove $\bar{A}'_1$ è il punto $a'_na'_1$. Si tratta di provare che $\bar{A}'_1$ coincide con A'_1.

Poichè i due n-lateri $a_1 \dots a_n$, $a'_1 \dots a'_n$ sono circoscritti a k', avrà luogo la (3) del n.° prec., e quindi per la relazione stabilita al n.° 20 del § 3 (Oss.), si otterrà:

$$(A_1A_2B_1)(\bar{A}'_1A'_2B_1)(A_2A_3B_2)(A'_2A'_3B_2)\dots(A_nA_1B_n)(A'_n\bar{A}'_1B_n) = 1,$$

la quale prova che il punto $\bar{A}'_1$ appartiene alla conica k (n.° prec. Oss. 1.ª). Siccome $\bar{A}'_1$ giace sulla retta a'_1, si conclude che esso coincide col punto A'_1 o col punto A'_2.

Ma se, per ogni posizione di A'_1 sulla conica k, il punto $\bar{A}'_1$ coincidesse con A'_2 non potrebbe esistere un n-gono come $A_1A_2 \dots A_n$: dunque dovrà essere $\bar{A}'_1 \equiv A'_1$.

Osservazione 1ª. Se da un punto A_1 di k non si possono condurre tangenti a k', quel punto si dovrà riguardare come origine di poligonali immaginarie inscritte in k e circoscritte a k'.

Osservazione 2ª. Se la chiusura della poligonale non avviene dopo un certo numero di operazioni, può ben darsi che avvenga, quando il numero delle operazioni cresce.

Osservazione 3ª. Il teor. 13 può pure enunciarsi sotto la forma seguente: *Date due coniche* k, k', *se esiste un* n-*gono inscritto in* k *e circoscritto a* k', *esistono infiniti* n-*goni analoghi.*

La prop. 13 è dovuta a Poncelet (*Traité...*, 1822) e rientra nella categoria dei cosidetti *teoremi di chiusura.* Nel caso di due circoli già Chapple nel 1746 ed Eulero nel 1765 avevano dato la relazione che deve correre tra i raggi e le distanze dei centri dei due circoli, affinchè essi ammettano uno e quindi infiniti triangoli di Poncelet.

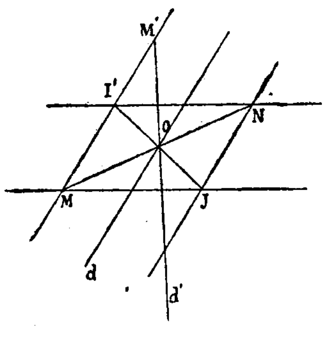
La relazione che corrisponde all'esistenza di un n-gono di Poncelet (per n dato, qualunque), sempre nel caso di due circoli, fu data da JACOBI mediante le funzioni ellittiche (1828), e per due coniche qualunque, la relazione che, in condizioni analoghe, esiste tra i coefficenti delle loro equazioni, fu scritta, con l'aiuto delle funzioni ellittiche, da ROSANES e PASCH (1865).

La dimostrazione da noi esposta del teorema di chiusura di Poncelet, è dovuta a P. SERRET (1861). Una dimostrazione elegantissima fu data pure da CAYLEY (1871), col principio di corrispondenza.

b) *Sulla generazione proiettiva delle coniche.*

14. *La conica inviluppata dalle rette che congiungono i punti omologhi di due punteggiate proiettive (non simili), situate nello stesso piano, ha il centro nel punto medio del segmento che riunisce i punti limiti.*

Sieno t, t' le due punteggiate proiettive, J, I' i risp. punti limiti, M il punto ad esse comune. Le parallele condotte da I' ed J a t e t' toccano la conica k, inviluppata dalle rette che riuniscono le coppie di punti omologhi nella proiettività tra t, t'; sicchè, dicendo N il punto comune a quelle parallele, il parallelogramma MJNI' risulterà circoscritto alla conica k; e poichè il trilatero diagonale di questo parallelogramma è autopolare rispetto a k (*E.* § 57), si conclude che O $\equiv$ JI' . MN è il centro della conica.



OSSERVAZIONE. Se M' è il corrispondente di M pensato come punto della t, la t' toccherà k in M', e quindi, posto $d' \equiv$ OM', il diametro coniugato a d' sarà la parallela d dal punto O alla t'; e poichè due altri diametri coniugati sono I'J, MN, si conclude che *la conica sarà un' ellisse o un' iper-*

bole secondo che il punto M′ risulta interno o esterno al segmento finito MI′.

15. *Data una conica inviluppo, proiettarla in un circolo inviluppo.*

Intendendo per conica luogo l'insieme dei punti comuni alle coppie di raggi omologhi di due fasci complanari proiettivi (non prospettivi), abbiamo già visto come si possa dimostrare che ogni tal curva è proiezione di un circolo (§ 6, n° 11); e ciò profittando soltanto delle più elementari proprietà delle corrispondenze proiettive tra forme di 1ª specie.

Definita ora una conica inviluppo sotto la forma duale, ci proponiamo di stabilire similmente — cioè profittando soltanto della teoria delle proiettività tra forme di 1ª specie — che un tal insieme di rette può sempre proiettarsi nel sistema di tutte le tangenti ad un circolo (circolo inviluppo).

Perciò occorre anzitutto dimostrare direttamente — senza cioè presupporre la teoria delle coniche — che l'insieme delle tangenti di un circolo, può riguardarsi come una conica inviluppo, nel senso della definizione precedente. Sia dunque k_1 un circolo di centro C_1, ed u_1, u'_1 due tangenti arbitrarie che tocchino k_1 nei punti J_1, I'_1. Se la tangente t_1 nel punto M_1 variabile sul circolo, incontra le u_1, u'_1 nei punti A_1, A'_1, a causa delle coppie di triangoli rettangoli uguali $A_1J_1C_1$, $A_1M_1C_1$; $A'_1I'_1C_1$, $A'_1M_1C_1$, l'angolo $A_1\widehat{C_1}A'_1$ risulta uguale alla metà dell'angolo $J_1\widehat{C_1}I'_1$, e quindi rimane costante al variare di t_1. Ed anche il verso di $A_1\widehat{C_1}A'_1$ resterà sempre il medesimo, perchè un angolo di grandezza costante che si muova in piano fisso non può mai invertirsi. Si conclude pertanto che le punteggiate descritte da A_1, A'_1, essendo sezioni di due fasci di raggi sovrapposti, che si corrispondono in una congruenza diretta, sono proiettive tra loro. — In particolare, se i punti J_1, I'_1 fossero diametralmente opposti, essi risulterebbero i punti limiti della proiettività tra A_1 ed A'_1 e l'angolo $A_1\widehat{C_1}A'_1$ risulterebbe retto.

Ciò premesso, diciamo k una conica inviluppo generata dalle due punteggiate proiettive u, u', appartenenti al piano π; e sieno J, I' i punti ove l'asse di collineazione incontra u, u' (cioè gli omologhi del punto $O \equiv uu'$, pensato sulla u' o sulla u), ed A, A' due punti corrispondenti qualunque. Indichiamo inoltre con M il coniugato armonico del punto $N \equiv JI' . AA'$, rispetto alla coppia AA'; e con C il punto OM . JI'.

Facendo la proiezione di u, u', J, I'...., dal punto S sopra il piano π_1, in modo che il quadrangolo semplice AJCM si proietti in un quadrato $A_1J_1C_1M_1$ (§ 1, n° 1), il quadrangolo semplice AJI'A' si proietterà in un rettangolo $A_1J_1I'_1A'_1$ di lati A_1J_1 ed $J_1I'_1 = 2J_1C_1$.

La proiettività che intercede tra le punteggiate u_1, u'_1, proiezioni delle u, u', risulta *individuata* dai punti limiti J_1, I'_1 e dalla coppia di punti omologhi A_1, A'_1. Ma siccome le tangenti del circolo k_1 che ha per diametro $J_1I'_1$ (e che tocca in conseguenza la $A_1A'_1$ in M_1), segano le u_1, u'_1 in coppie di punti omologhi della suddetta proiettività, così si conclude che la conica inviluppo k, mercè la proiezione da S, si è trasformata nel circolo inviluppo k_1.

Osservazione. Da quanto precede risulta che le rette generatrici della conica inviluppo segano due rette *qualsiansi* del sistema, secondo punteggiate proiettive; che l'insieme dei punti del piano π da ciascuno dei quali esce una sola retta dell'inviluppo, è una conica luogo; ecc. ecc. Insomma si possono ritrovare per questa via tutte le proprietà proiettive delle coniche, facendole derivare dalle più elementari proprietà del circolo.

16. *Due fasci complanari inversamente uguali, non prospettivi nè concentrici, con le intersezioni dei raggi omologhi generano un' iperbole equilatera, della quale i centri dei due fasci son punti diametralmente opposti; e viceversa, da due punti diametralmente opposti, un' iperbole equilatera vien proiettata secondo due fasci inversamente congruenti.*

La prima parte del teorema (cfr. anche *E.* § 62) si dimostra osservando che i due fasci direttamente congruenti S, S′ segano sulla retta all' infinito una congruenza inversa, i cui punti uniti (che sono i punti impropri della conica generata dai fasci S, S′) corrispondono a direzioni ortogonali (*E.* § 32). Dunque la conica sarà un' iperbole cogli asintoti ortogonali, cioè un' iperbole equilatera. Poichè i due raggi omologhi del raggio SS′ pensato come appartenente all' uno o all' altro fascio (cioè le tangenti alla conica nei punti S, S′) son tra loro paralleli, ne segue che i punti S, S′ son diametralmente opposti.

Viceversa, se si proiettano i punti di un' iperbole equilatera k, da due punti diametralmente opposti S, S′, il centro di collineazione dei due fasci, cioè il polo della retta SS′, sarà all' infinito, e quindi (§ 6, n.° 2) i due fasci segneranno sulla retta all' infinito un' involuzione. Ora, quest' involuzione dovendo avere per punti doppî i punti impropri degli asintoti, che sono ortogonali, sarà una congruenza inversa, e quindi la proiettività tra i fasci S, S′ sarà pure una congruenza inversa.

17. *Se da due punti diametralmente opposti di un' ellisse o di un' iperbole si proietta un punto della conica, si ottiene una coppia di rette parallele a due diametri coniugati; e viceversa.*

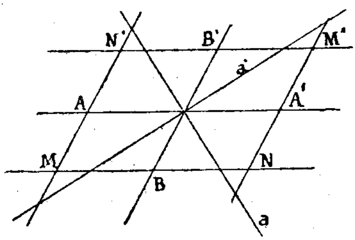
Sieno AA′ i due punti diametralmente opposti e P il punto fissato della conica. Applicando il teorema di Staudt (*E.* § 60) al triangolo inscritto AA′P segato dalla retta all' infinito, che è coniugata al lato AA′, vediamo che i punti all' infinito dei lati AP, A′P son coniugati, e quindi che le parallele condotte ai lati stessi dal centro della conica, son due diametri coniugati.

La reciproca segue applicando l' inversa del teorema di Staudt.

18. *Il luogo di un punto dal quale le coppie di vertici opposti di un parallelogramma si proiettano secondo due*

coppie di una congruenza inversa, è l'iperbole equilatera circoscritta al parallelogramma.

Sia MNM'N' il dato parall., ed osserviamo anzitutto che vi è una sola iperbole equilatera circoscritta al parall. stesso.

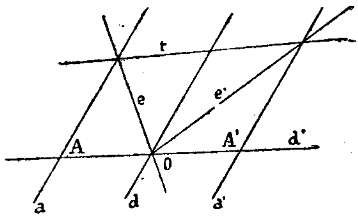


(E un caso particolare di una prop. che verrà dimostrata in seguito. § 12, n.° 7, Oss.). Infatti le due mediane AA', BB' del dato parall. sono evidentemente due diametri coniugati (perchè l'uno di questi diametri biseca le corde parallele all'altro), e quindi ogni iperbole equilatera passante pei punti MNM'N', dovrà avere per asintoti le bisettrici a, a' degli angoli formati dai diametri AA', BB'. Poichè un'iperbole è individuata dagli asintoti e da un suo punto, ne segue che non c'è più d'un'iperbole equilatera circoscritta al dato parall. Per provare che ce n'è una, basta considerare l'iperbole (equilatera) k che passa per M ed ha per asintoti le rette a, a'. Quest'iperbole dovrà passare pel punto M' simmetrico di M rispetto al centro, e pei punti N, N' in forza del teorema stabilito nel n° prec.

Ogni punto P di k vien proiettato da MM' e da NN' secondo due coppie di raggi paralleli a due coppie di diametri coniugati (n.° prec.), e quindi gli angoli $\widehat{MPM'}$, $\widehat{NPN'}$ avranno le stesse bisettrici, cioè le coppie PM, PM' e PN, PN' apparterranno ad un'involuzione simmetrica. Viceversa, se un punto P del piano vien proiettato da MM', NN' secondo due coppie di raggi PM, PM' e PN, PN' di un'involuzione simmetrica, la conica passante pei 5 punti MM'NN'P avrà due diametri coniugati paralleli a PM, PM' e altri due a PN e PN', perchè su essa i punti MM' ed NN' sono diametralmente opposti. Da ciò deriva che l'involuzione dei diametri coniugati sarà una congruenza inversa, cioè la conica coinciderà con l'iperbole equilatera k.

19. *Costruire un' iperbole o un' ellisse per punti e per tangenti, data l' involuzione dei diametri coniugati e una tangente della conica (che non sia un asintoto).*

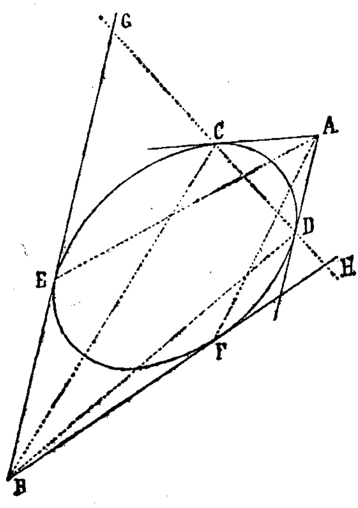
Se a è la data tangente, la retta a' simmetrica di a rispetto al centro O della conica, sarà un' altra tangente, e il diametro d' coniugato al diametro d, parallelo ad a, taglierà a, a' nei punti di contatto relativi A, A′. Tirando da A, A′ le coppie di rette parallele alle coppie di diametri coniugati, i punti comuni a quelle coppie apparteranno alla conica (§ 10, n.° 17).



Se e, e' sono due diametri coniugati, congiungendo il punto ea (o ea') col punto $e'a'$ (o $e'a$) otterremo una tangente t della conica, come si vede applicando il teorema di Staudt (*E.* § 60) al trilatero $aa't$.

Osservazione. Il problema risoluto è un caso metrico del seguente: *Date di una conica due tangenti reali o immaginarie coi relativi punti di contatto, e data un' altra tangente reale, costruire la conica per punti o per tangenti.*

La risoluzione di questo problema si ottiene con facilità traducendo proiettivamente la precedente.



20. *I vertici e i punti di contatto di due angoli circoscritti ad una conica, appartengono ad una seconda conica.*

Siano A, B i vertici dei due angoli e C, D ed E, F i punti di contatto dei rispettivi lati. Ponendo G $\equiv$ BE . CD ed H $\equiv$ BF . CD, i poli delle rette

AE, AF saranno i punti G, H; e poichè inoltre i poli delle AC, AD sono i punti C, D, avremo:

$$A(CDEF) \overline{\wedge} CDGH.$$

Ma il gruppo B(CDEF) è prospettivo al gruppo CDGH, dunque risulta:

$$A(CDEF) \overline{\wedge} B(CDEF).$$

la quale prova che i 6 punti ABCDEF appartengono ad una conica (*E.* § 61).

21. *In un piano, il luogo di un punto dal quale quattro punti dati ABCD, non appartenenti ad una medesima retta, si vedono secondo una quaderna di raggi proiettiva ad una data quaderna di elementi di una forma di 1ª specie, è una conica passante per quei 4 punti, oppure è una retta.*

Escludiamo dapprima che tre qualunque dei quattro punti ABCD appartengano ad una retta, e, detti $a_0 b_0 c_0 d_0$ i 4 elementi dati di una forma di 1ª specie, si costruisca nel fascio A una retta a tale che:

$$a, AB, AC, AD \overline{\wedge} a_0 b_0 c_0 d_0,$$

e sia k la conica, ben determinata, che passa per ABCD toccando in A la a. Da ogni punto di k i punti ABCD vengon proiettati secondo un gruppo proiettivo al gruppo a, AB, AC, AD e quindi al gruppo dato $a_0 b_0 c_0 d_0$ (*E.* § 61).

Viceversa, se P è un punto tale che:

$$P(ABCD) \overline{\wedge} a_0 b_0 c_0 d_0,$$

sarà pure,

$$P(ABCD) \overline{\wedge} a, AB, AC, AD,$$

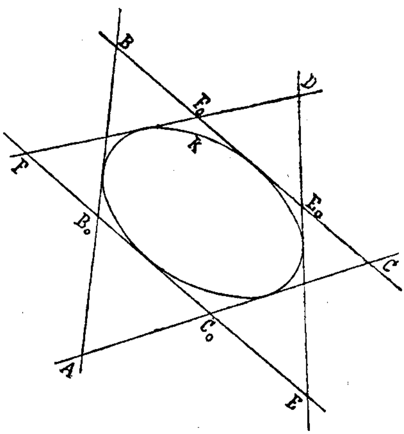
e quindi la conica k passerà per P. — Se poi i tre punti ABC sono allineati, è ben chiaro che il luogo di un punto dal quale i punti ABCD vengon proiettati secondo una quaderna di raggi proiettiva ad $a_0 b_0 c_0 d_0$, è la retta DD_0, ove D_0 è il punto della retta ABC tale che

$$ABCD_0 \overline{\wedge} a_0 b_0 c_0 d_0.$$

Se infine i 4 punti ABCD sono allineati, perchè esistano punti soddisfacenti alla condizione richiesta, occorre che il gruppo ABCD sia proiettivo ad $a_0 b_0 c_0 d_0$: in tal caso ogni punto del piano soddisfa a quella condizione.

Come già abbiamo avvertito (§ 10, n.° 1), questo teorema fu dimostrato da CHASLES (1829) e da STAUDT (1831).

22. *Se due triangoli senza elementi comuni sono circoscritti ad una conica (non degnere), essi sono inscritti in una seconda conica (non degenere); e viceversa (dualmente).*



Sieno ABC, DEF i due triangoli circoscritti ad una conica k, e poniamo:

$$E_0 \equiv BC.DE, \quad F_0 \equiv BC.DF,$$
$$B_0 \equiv EF.AB, \quad C_0 \equiv EF.AC.$$

Poichè le due tangenti fisse EF, BC son tagliate da una tangente variabile secondo due punteggiate proiettive, avremo:

$$BCE_0F_0 \;\overline{\wedge}\; B_0C_0EF,$$

e quindi:

$$D(BCE_0F_0) \;\overline{\wedge}\; A(B_0C_0EF).$$

cioè:

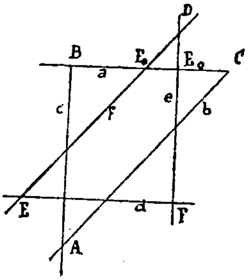
$$D(BCEF) \;\overline{\wedge}\; A(BCEF),$$

la quale prova che i 6 vertici dei due triangoli appartengono ad una conica non degenere, perchè, in forza dell' ipotesi che i due triangoli non abbiano elementi comuni, tre vertici non sono mai allineati.

OSSERVAZIONE. Se due coniche k, k' son tali che esista un triangolo ABC inscritto in k e circoscritto a k', ogni triangolo DEF circoscritto a k' e avente due vertici DE su k, pel teorema dimostrato, avrà il terzo vertice F sulla conica ABCDE, cioè su k. Ritroviamo così un caso particolare del teorema di Poncelet (§ 10, n.° 13): *Se due coniche son così situate che esista un triangolo inscritto nell' una e circoscritto all' altra, esisteranno infiniti triangoli analoghi.*

Questo teorema è dovuto a Brianchon (Mém. sur les lignes du 2[d] ordre, 1817).

23. *Due triangoli* $ABC \equiv abc$ *e* $DEF \equiv def$ *autoconiugati in una polarità piana (uniforme o no) e tali che un vertice dell' uno ed un lato dell' altro non si appartengano mai, sono inscritti in una conica (non degenere) e circoscritti ad un' altra (pure non degenere).*



Viceversa, se si verifica una di queste ultime proprietà (e quindi anche l' altra — n° prec.) i due triangoli sono autoconiugati in una polarità.

Le quattro rette AB, AC, AE, AF del fascio A, hanno per poli nella data polarità i punti C, B, $E_0 \equiv ae$, $F_0 \equiv af$; sicchè si ha:

$$A(BCEF) \barwedge CBE_0F_0,$$

e quindi:

$$A(BCEF) \barwedge D(CBE_0F_0).$$

Se nel gruppo a destra si scambiano fra loro i primi due raggi e così pure gli ultimi due, verrà:

$$A(BCEF) \barwedge D(BCF_0E_0),$$

ossia

$$A(BCEF) \barwedge D(BCEF),$$

la quale prova che i 6 punti ABCDEF appartengono ad una conica. Dualmente si prova che i 6 lati dei due triangoli toccano una conica.

La conica in cui sono inscritti i due triangoli e quella a cui sono circoscritti, possono degenerare, risp. in una coppia di rette e di fasci, solo se qualche vertice dell'un triangolo appartiene ad un lato dell'altro.

Viceversa, se i due triangoli ABC, DEF sono inscritti in una conica k, dicendo E′ il punto di d coniugato ad E nella polarità che ha il triangolo ABC come autopolare e che fa passare dal punto D alla retta d, il triangolo DEE′ risulterà pure autoreciproco in questa polarità; sicchè, per la prop. diretta, i 6 punti ABCDEE′ apparterranno ad una conica, la quale, avendo in comune con k i cinque punti ABCDE coinciderà con k, e quindi risulterà E′ $\equiv$ F. Ciò dimostra il teorema.

Osservazione. Ricordando la prop. dimostrata al n.° precedente, potremo enunciare quanto segue:

Se per due triangoli aventi i vertici in sei punti indipendenti di un piano, si verifica uno dei tre fatti seguenti, si verificano anche gli altri due:

1) *i sei vertici dei due triangoli appartengono ad una conica (non degenere);*

2) *i sei lati toccano una conica (non degenere);*

3) *i triangoli sono autoreciproci in una medesima polarità.*

La prima parte del teor. 23, nel caso di una polarità non uniforme, trovasi in Steiner (Syst. Ent..., 1832). Il teorema nella sua forma più generale fu dato da Staudt (1847).

24. *Date due coniche k, k′, non esiste in generale nessun triangolo inscritto (o circoscritto) in k, e autopolare rispetto a k′; ma se esiste un tal triangolo ne esistono infiniti.*

Se ABC è un triangolo autopolare rispetto a k', e se la conica k passa pei vertici A, B, ma non per C, non potrà esistere nessun triangolo autopolare rispetto a k' e inscritto in k. Invero, se un tal triangolo DEF esistesse, pel n.° prec.

i 6 vertici ABCDEF apparterrebbero ad una conica, la quale, avendo comuni con k i 5 punti ABDEF, coinciderebbe con k; cioè ABC sarebbe inscritto in k, contro il supposto.

Ma se la conica k è circoscritta ad ABC, ogni triangolo autopolare rispetto k' e avente due vertici sopra k, avrà in conseguenza anche il 3° vertice su k, e quindi esisteranno infiniti triangoli inscritti in k e autopolari rispetto a k'.

Dualmente si vede che o non esiste nessun triangolo circoscritto a k e autopolare rispetto a k', o ne esistono infiniti.

Osservazione. Due coniche k, k' così situate che esistano infiniti triangoli inscritti (o circoscritti) in k e autopolari rispetto a k', diconsi *coniugate*.

La considerazione delle coniche coniugate — così chiamate da Rosanes (1873) — è dovuta ad Hesse, il quale scrisse analiticamente la relazione di coniugio (1852). Questa considerazione si presta utilmente nello studio della celebre superficie romana di Steiner.

25. *Se due angoli complanari* ab, a′b′, *di grandezza costante, ruotano attorno ai loro vertici* P, P' *secondo versi assegnati, in modo che il punto* $B \equiv$ bb′ *scorra lungo una retta fissa* u, *il punto* $A \equiv$ aa′ *descrive una conica passante per* P, P'. *Viceversa, ogni conica può descriversi così.*

Dicasi ω la congruenza diretta che si genera nel fascio P ruotando l'angolo ab attorno a P, in un determinato verso, e ω' la congruenza analoga nel fascio P′. Poichè dal fascio descritto da b si passa al fascio descritto da b', mediante una prospettività π, ed i fasci descritti da a, a' sono direttamente congruenti ai fasci descritti da b, b', si conclude che da a si passa ad a' mediante una proiettività $\tau \equiv \omega\pi\omega'^{-1}$. Dunque (*E.* § 61) il punto A $\equiv aa'$ descrive una conica passante per P, P′.

Questa conica si scinderà in due rette allorquando i raggi dei due fasci che fanno col raggio PP′ angoli uguali (anche nel verso) agli angoli $ab, a'b'$, s' incontrano in un punto di u.

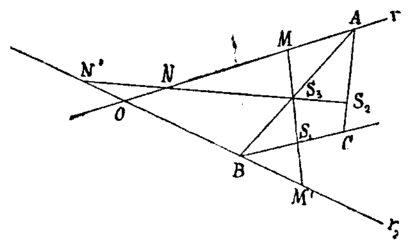
Viceversa, avendosi una conica k, si prendano su essa due punti a piacere P, P′, e sieno a, a' i raggi proiettanti da P, P′ un punto A variabile sulla conica. I fasci descritti dai raggi a, a' si corrisponderanno in una proiettività τ (*E.* § 61).

Si ruoti, in un determinato verso, il fascio descritto da a in modo che un raggio fissato $a_0 \equiv PA_0$ venga a coincidere con PP′; e si ruoti pure il fascio descritto da a' in modo che il raggio $a'_0 \equiv P'A_0$, corrispondente ad a_0, venga a coincidere con PP′.

Dicendo ω, ω' le congruenze dirette generate sui due fasci da queste rotazioni, e π la prospettività di asse u, che viene ad intercedere tra i fasci descritti da a, a' dopo le rotazioni medesime, sarà $\pi \equiv \omega^{-1}\tau\omega'$; sicchè $\tau \equiv \omega\pi\omega'^{-1}$. Dunque la conica si potrà generare nel modo enunciato.

Questo modo di generare le coniche fu scoperto da Newton, (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687), che lo chiamò la *descrizione organica* delle coniche.

26. *Se un triangolo ABC si deforma in guisa che i suoi lati BC, CA, AB passino risp. pei tre punti non allineati $S_1S_2S_3$, mentre i suoi vertici A, B scorrano lungo due rette fisse* r_1, r_2 *non passanti per quei punti, nè concorrenti sulla retta S_1S_2, il vertice C descrive una conica non degenere. Viceversa, ogni conica non degenere può generarsi così.*



Infatti mentre ABC si deforma, A, B descrivono due punteggiate prospettive rispetto al centro S_3, e quindi i due fasci descritti da S_2A, S_1B risultano proiettivi tra loro. Siccome questi fasci, per le ipotesi fatte, non sono prospettivi, si conclùde che il punto C descrive una conica k non degenere.

Si noti che k passa:

1) Pei centri S_1 S_2 dei due fasci generatori.

2) Pel punto $O \equiv r_1 r_2$, perchè quando A cade in O, B pure cade in O, e il punto $C \equiv S_2A \,.\, S_1B$ viene a coincidere con O.

3) Pei punti M, N′ in cui le r_1, r_2 son tagliate risp. dalle rette S_1S_3, S_2S_3. Invero, quando A cade in M, B cade in $M' \equiv S_1S_3 \,.\, r_2$, e quindi $C \equiv S_2A \,.\, S_1B$ coincide col punto $S_2M \,.\, S_1M'$, cioè con M. Analogamente si vede che quando B cade in N′, C cade pure in N′.

Viceversa, data una conica non degenere k mediante 5 suoi punti S_1S_2OMN', si ponga $r_1 \equiv OM$, $r_2 \equiv ON'$, $S_3 \equiv S_1M \,.\, S_2N'$. Allora, se un triangolo ABC si deforma in modo che BC, CA, AB ruotino risp. attorno ad S_1, S_2, S_3, e che i vertici A, B scorrano lungo le r_1, r_2, il vertice C descriverà una conica passante pei 5 punti S_1S_2OMN', cioè coincidente con k.

Osservazione. Il teorema si generalizza facilmente nella forma seguente: *Se un* n*-gono piano semplice si deforma in modo che i suoi lati ruotino attorno ad* n *punti fissi, mentre* n—1 *delle* $\frac{n(n-1)}{2}$ *intersezioni de' suoi lati a due a due, scorrano sopra altrettante rette fisse, le* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *intersezioni rimanenti descrivono altrettante coniche, o, in casi particolari, si muovono descrivendo delle rette.*

Il teorema del n.° 26, ed anzi un teorema più generale relativo al caso di un n-gono i cui vertici scorrano sopra curve di ordine superiore, fu dato da Mac-Laurin (1721-32) e da Braikenridge (1733). Il teorema duale fu osservato da Poncelet (1822).

27. *Date in un piano due rette* p, p′ *ed un punto U fuori di esse, se per U si conduce una trasversale varia-*

bile a segare p. p′ *nei punti A, A′, e a partire da questi punti si riportano su quelle rette, in versi assegnati, i segmenti dati* s, s′, *la retta che congiunge gli estremi B, B′ di questi segmenti, si muove inviluppando una conica. Viceversa, ogni conica inviluppo può generarsi in tal modo.*

La dimostrazione è analoga a quella data per la descrizione organica di Newton (§ 10, n.° 25).

28. *Dati in un piano due punti P, P′, una retta* u *ed un segmento* s, *se si conduce per P una trasversale variabile a segare la* u *nel punto A, e a partire da A si riporta sulla* u, *in un verso assegnato, il segmento* s, *l' altro estremo A′ di questo segmento vien proiettato da P′ sopra PA in un punto M, che si muove descrivendo un' iperbole, di cui* u *è un asintoto. Viceversa, ogni iperbole può generarsi così.*

La punteggiata descritta da A corrisponde alla punteggiata descritta da A′ mediante una congruenza diretta, e quindi il fascio descritto da PA risulta proiettivo al fascio descritto da P′A′, ed il punto M ≡ PA . P′A′ descrive una conica k passante per P, P′.

Questa conica non è degenere se la retta PP′ non è parallela alla u.

Le due rette PA, P′A′ divengono parallele quando il punto A va all' infinito sulla u, e quindi A′ coincide con A; o altrimenti, quando il segmento avente l'origine in P, uguale parallelo e dello stesso senso rispetto al segmento AA′, ha l' altro estremo sulla retta P′A′. Dunque k ha due punti impropri, ossia è un' iperbole. Di più u è un asintoto, perchè il punto M cade in u soltanto quando PA e P′A′ proiettano il punto all' infinito di u.

Viceversa, se da due punti P, P′ di un' iperbole k si proietta un punto M variabile sulla curva, nei punti A, A′ di un asintoto u, le proiezioni A, A′ si corrispondono in una congruenza diretta, perchè sopra u si viene ad avere una proiettività parabolica col punto unito all' infinito.

29. *Se un angolo di grandezza costante si muove in un piano, in modo che il suo vertice scorra lungo una retta fissa ed un suo lato ruoti attorno ad un punto fisso, il lato rimanente inviluppera una parabola tangente alla retta fissa. Ogni parabola inviluppo può generarsi in tal modo.*

Sia ab l'angolo dato, u la retta lungo la quale scorre il vertice P dell'angolo, S il punto fisso attorno al quale ruota il lato b. Mentre P scorre sulla u, i punti impropri A_∞, B_∞ dei raggi a, b, si corrispondono in una congruenza diretta, che è quella generata sulla retta all'infinito da una rotazione del piano attorno ad uno de' suoi punti, di un angolo direttamente congruente ad ab.

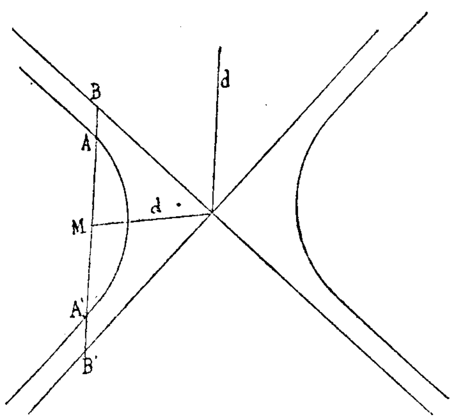
Ora la punteggiata descritta da B_∞ è prospettiva alla punteggiata descritta da P, rispetto al centro S; dunque la punteggiata descritta da A_∞ sarà proiettiva a quella descritta da P. Ne deriva che le posizioni assunte dal lato a, sono le congiungenti delle coppie di punti omologhi nella proiettività tra due punteggiate; e quindi a inviluppera una conica, la quale, essendo tangente ai sostegni delle due punteggiate, toccherà u e la retta all'infinito u'_∞, cioè sarà una parabola.

Gli omologhi del punto comune ad u, u'_∞, pensato come appartenente risp. ad u', u, sono i punti Q ed R'_∞ in cui le rette u, u' son tagliate risp. dalle rette v, v' condotte per S in modo che $\widehat{uv} \equiv \widehat{ab}$, $\widehat{v'u} \equiv ab$, in grandezza e verso. Ne deriva che la conica generata non può mai esser degenere. Inoltre $d \equiv QR'_\infty$ è la polare del punto uu', ossia è un diametro della parabola.

Viceversa, se k è una parabola, Q un suo punto proprio, u la tangente in esso, d il diametro per Q, v la simmetrica di d rispetto ad u, ed a un' altra tangente propria di k, tirando pel punto $P \equiv au$ una retta b che faccia con a un angolo $\widehat{ab} \equiv \widehat{du}$ (in grandezza e verso), il raggio b incontrerà v in un punto *proprio* S; e facendo muovere l' angolo ab in modo che b passi sempre per S, e P scorra lungo u, il lato a inviluppèrà una parabola, la quale avrà in comune con k tre tangenti e i punti di contatto relativi a due di esse, e dunque coinciderà con k.

30. *Il segmento finito che un' iperbole stacca sopra una retta segante, ha lo stesso punto medio del segmento finito staccato dagli asintoti sulla medesima retta.*

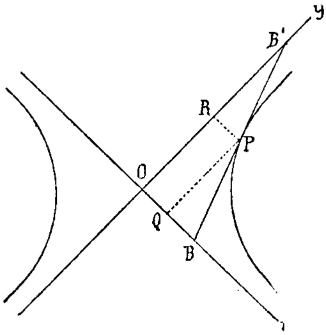
Invero, se l' iperbole stacca sopra la retta u il segmento finito AA′, il punto medio M di questo segmento sarà proiettato dal centro O dell' iperbole, mediante il diametro d coniugato alla direzione della retta u; sicchè il diametro d' coniugato a d, risulterà parallelo ad u, e la coppia dd' sarà separata armonicamente dagli asintoti tt'. Segando con la u il gruppo armonico $tt'dd'$, avremo un gruppo armonico di punti: da ciò deriva che il segmento BB′, staccato dagli asintoti tt' sulla u, avrà per punto medio il punto M $\equiv du$, c. d. d.



In particolare: il segmento staccato dagli asintoti sopra una tangente dell' iperbole, è diviso per metà dal relativo punto di contatto.

Osservazione 1ª. Dal teorema dimostrato si deduce una soluzione semplicissima del problema di *costruire un' iperbole per punti, dati i suoi asintoti* t, t′ *ed un punto A.* Condotta per A una trasversale arbitraria u, si ponga B $\equiv ut$, B′ $\equiv ut'$, e da B′ si riporti sulla u un segmento B′A′ uguale a BA, ma di verso contrario. Variando la trasversale u attorno ad A, il punto A′ descrive l' iperbole.

Osservazione 2ª. Dalla proprietà sopra rilevata, del punto di contatto di una tangente, possiamo dedurre l'*equazione dell' iperbole riferita ai suoi asintoti* x, y. Sia P un



punto dell' iperbole, OQ l'ascissa x di P, OR l'ordinata y, e sieno inoltre B, B' le intersezioni degli asintoti x, y con la tangente all' iperbole in P. Poichè P è il punto medio del segmento finito BB', si ha:

$$OQ = \frac{1}{2} OB, \qquad OR = \frac{1}{2} OB',$$

onde:

$$x\, y = \frac{1}{4} OB \,.\, OB'.$$

Ma OB . OB' è uguale ad una costante k, perchè, variando la tangente, i punti B, B' descrivono due punteggiate proiettive con ambedue i punti limiti in O (E . § 62); dunque si avrà l'equazione dell' iperbole sotto la forma:

$$x\, y = \frac{1}{4} k.$$

§ 11. *I teoremi di Pascal e di Brianchon.*

Sommario: *Generalità — Dimostrazioni del teorema di Pascal, dovute a Mac-Laurin, a Carnot, a Gergonne — Cenno sulle quadriche rigate — Dimostrazione del teorema di Pascal dovuta a Dandelin — Estensione del teorema di Pascal, dovuta a Möbius — I punti di Steiner nella configurazione dell' esagramma mistico.*

1. Se un esagono piano semplice ABCDEF è inscritto in un conica (eventualmente spezzata in due rette), le tre coppie di lati opposti AB, DE; BC, EF; CD, FA si tagliano in tre punti di una medesima retta; e viceversa, se un esagono semplice gode di quest' ultima proprietà, esso

è inscritto in una conica, la quale potrà esser degenere soltanto nel caso in cui tre vertici (non consecutivi) e quindi anche gli altri tre, sieno allineati (*E*. § 64).

Dualmente: Se un seilatero piano semplice *a b c d e f* è circoscritto ad una conica (eventualmente spezzata, come inviluppo, in due fasci di raggi), le tre coppie di vertici opposti *ab, de; bc, ef; cd, fa* son congiunte da tre rette concorrenti in un punto; e viceversa.

Teoremi analoghi valgono per esagoni inscritti in una conica (o per esalateri circoscritti) quando i vertici (o i lati) non sieno tutti distinti; purchè si assuma come congiungente di due vertici coincidenti *consecutivi* (o come punto comune a due lati coincidenti *consecutivi*) la tangente alla conica nel punto in cui essi coincidono (o risp. il punto di contatto con la conica della retta in cui essi coincidono). Ed anche questi teoremi sono invertibili (*E*. § 64).

Tutte queste proprietà possono spesso sostituire con vantaggio la generazione proiettiva delle coniche, ove si tratti di costruire una conica individuata da punti e da tangenti (*E*. § 64).

Il teorema dell' esagono inscritto in una conica, che pel caso di una conica degenere si trovava già in Pappo (ved. le notizie storiche al n. 7 del § 2), fu scoperto da Pascal, all' età di 16 anni, nel 1640. Nell' opuscolo *Essai pour les coniques*, in cui fu pubblicato per la prima volta sotto il nome di teorema dell' *esagramma mistico*, Pascal intendeva di tratteggiare le linee principali di una sua grande opera sulle sezioni coniche, che Leibniz ha conosciuto, ma che non è pervenuta a noi. I contemporanei di Pascal, chiamarono « La Pascale » « questa grande proposizione, di cui », come scriveva Desargues nel 1642, « i 4 primi libri di Apollonio sono o un caso particolare, o una conseguenza immediata ».

Nell' opuscolo di Pascal le dimostrazioni sono appena accennate: e quanto alla dimostrazione del teorema dell' esagono, si può dire soltanto ch' egli la stabiliva prima pel circolo, ricorrendo, a quanto pare, ad alcune proposizioni della teoria delle trasversali: eppoi la trasportava alle coniche con una proiezione centrale.

Nelle pagine seguenti noi esporremo alcune, fra le tante dimostrazioni del teorema di Pascal, e aggiungeremo via via altre notizie storiche.

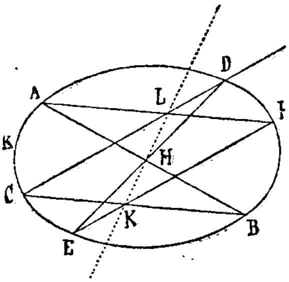
Il teorema (duale di quello di Pascal), che porta il nome di BRIANCHON, fu dimostrato da questo geometra nel 1806, applicando una trasformazione per polari reciproche al teorema di Pascal. Ciò equivale, in sostanza, all' applicazione della legge di dualità.

2. *Dimostrazione del teorema di* PASCAL, *dovuta a* MAC-LAURIN.

Sia ABCDEF l' esagono inscritto nella conica k, e poniamo:

$$H \equiv AB \,.\, DE \,, \quad K \equiv BC \,.\, EF \,, \quad L \equiv CD \,.\, FA.$$

Se un triangolo XYZ si deforma in modo che i suoi vertici XY scorrano sulle rette CD, CB, ed i lati YZ, ZX, XY passino pei punti fissi E, A, H, il vertice Z descrive una conica, che passa pei punti A, E, C, B, D (§ 10, n. 26), cioè Z descrive la conica data k. Sicchè il punto F di k, proiettato da A, E, dovrà dare due raggi seganti risp. le rette CD, CB in due punti L, K, allineati con H. E quest' ultima affermazione costituisce appunto il teorema di Pascal.



Questa dimostrazione, composta da MAC-LAURIN nel 1721, fu pubblicata nel 1735.

3. *Dimostrazione del teorema di* PASCAL, *dovuta a* CARNOT.

Detto ancora ABCDEF l' esagono inscritto nella conica k, consideriamo il triangolo che ha per lati BC, DE, FA e poniamo:

$$X \equiv BC \,.\, DE, \quad Y \equiv DE \,.\, FA, \quad Z \equiv FA \,.\, BC.$$

Dal teorema di Carnot (§ 10, n. 9) si rileva

$$(1) \qquad (YZA)\,(YZF)\,(ZXB)\,(ZXC)\,(XYD)\,(XYE) = 1.$$

Ponendo inoltre:

$$H \equiv AB\,.\,DE, \quad K \equiv BC\,.\,EF, \quad L \equiv CD\,.\,FA,$$

pel teorema di Menelao (§ 3, n. 9), avremo:

$$(YZF)\,(ZXK)\,(XYE) = 1,$$
$$(YZL)\,(ZXC)\,(XYD) = 1,$$
$$(YZA)\,(ZXB)\,(XYH) = 1,$$

le quali, moltiplicate membro a membro, dànno

$$(YZA)(YZF)(ZXB)(ZXC)(XYD)(XYE)(YZL)(ZXK)(XYH) = 1,$$

e questa, confrontata con la (1), porge:

$$(YZL)\,(ZXK)\,(XYH) = 1.$$

Applicando nuovamente il teorema di Menelao, si conclude che i punti H, K, L sono allineati, *c. d. d.*

Questa dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella data da Carnot nella sua *Géom. de position* (1803).

4. *Dimostrazione del teorema di* Pascal, *dovuta a* Gergonne.

Sia ABCDEF un esagono inscritto in una conica k e sieno H, K, L le intersezioni delle tre coppie di lati opposti AB, DE; BC, EF; CD, FA.

Supposto che la retta HK sia esterna alla conica, proiettiamo k da un punto O esterno al suo piano, sopra un altro piano α', in modo che la retta HK si proietti nella retta impropria di α', e k si proietti in un circolo k' di α' (*E* . § 59). Denotiamo con A'B'... H'K'... le proiezioni dei punti AB... HK...

Poichè le rette A'B', D'E' son parallele sarà (vedi figura):

$$\textit{arco}\ A'D' = \textit{arco}\ B'E',$$

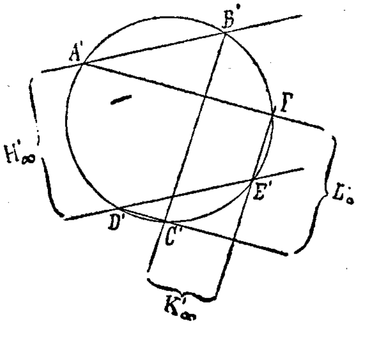
e analogamente, poichè son parallele le B'C', E'F', sarà:

$$\textit{arco}\ B'F' = \textit{arco}\ E'C';$$

onde:

$$\text{arco } A'D' = (\text{arco } B'E' - \text{arco } B'F') + \text{arco } E'C' = \text{arco } F'C',$$

dalla quale si deduce che le due rette D′C′ ed A′F′ sono anch' esse parallele, ossia che il punto L′ appartiene alla retta impropria H′K′. Risalendo alla figura oggettiva, si conclude che i punti H, K, L sono allineati.



Questa dimostrazione non è valida quando la retta HK è secante o tangente rispetto alla conica; tuttavia (come osservava GERGONNE), per quanto il ragionamento sotto la veste geometrica sia legato alla circostanza che la HK risulti esterna alla conica, il risultato è valido in ogni caso; perchè nella trattazione analitica con le coordinate, le proprietà grafiche della figura in questione, dipendono dalle proprietà *formali* di certe espressioni algebriche, composte mediante le coordinate dei punti della figura, e sono del tutto indipendenti dalla natura reale o complessa di queste coordinate. Se dunque i punti HKL sono allineati quando HK sega la conica in due punti immaginari, lo saranno pure quando questi punti d' intersezione son reali.

Abbiamo riprodotto questa dimostrazione, che GERGONNE pubblicava nel 1813, come esempio del modo con cui si applicava il *principio di continuità*, che fu poi formulato esplicitamente da PONCELET (1822), e che fu causa di polemiche acerbe tra PONCELET e CAUCHY. Questo principio non è certamente nè delineato nè analizzato, come richiederebbe il rigore logico, ma è la constatazione esplicita di un elemento intuitivo, che si soleva spesso introdurre nei ragionamenti geometrici. Tuttavia, quando sia usato con discernimento, può divenire un utile strumento di scoperta. Il principio della conservazione del numero, formulato da SCHUBERT (1879), non è, in ultima analisi, che un caso particolare del principio di continuità, e va soggetto alle stesse obiezioni.

5. *Cenno sulle quadriche rigate — Dimostrazione del teorema di* PASCAL, *dovuta a* DANDELIN.

Siano u, u' due punteggiate proiettive sghembe. Le infinite rette che riuniscono le coppie di punti omologhi AA′, BB′, CC′... sono a due a due sghembe, e costituiscono ciò che si chiama una *schiera rigata.*

Le rette $v \equiv$ AA′, $v' \equiv$ BB′, $v'' \equiv$ CC′,..., diconsi *generatrici* della schiera, che s' indicherà con V.

Se da u, u' proiettiamo risp. le punteggiate A′B′C′..., ABC..., otteniamo due fasci proiettivi di piani con gli assi sghembi, e le rette d' intersezione delle coppie di piani omologhi sono precisamente le generatrici di V. Viceversa, è chiaro che il sistema delle infinite rette comuni alle coppie di piani omologhi di due fasci proiettivi con gli assi sghembi, può definirsi anche come il sistema delle rette che riuniscono le coppie di punti omologhi in una proiettività tra due punteggiate sghembe.

Dunque *una schiera rigata è una figura duale di se stessa.*

Fissate tre generatrici $v \equiv$ AA′, $v' \equiv$ BB′, $v'' \equiv$ CC′ della schiera V, vi sono infinite rette appoggiate a queste tre: da ogni punto di v esce una ed una sola retta appoggiata a v' e v''. A questo sistema d' infinite rette, che indichiamo con U, appartengono le u, u'; diciamo u'' una terza retta di U ed A″B″C″ i punti ove essa si appoggia a v, v', v''.

Segando la u'' coi due fasci proiettivi di piani u, u', che generano la V, avremo sopra u'' una proiettività con gli elementi uniti A″, B″, C″, cioè l' identità: il che significa che tutte le generatrici di V si appoggiano ad u''. Dunque tutte le rette del sistema U sono incidenti a tutte le rette della schiera V, o, come anche si dice, le rette del sistema U sono *direttrici* rispetto alle rette di V.

Poichè le rette che si appoggiano a tre rette sghembe a due a due, possono riguardarsi come congiungenti delle coppie di punti omologhi nella prospettività che sopra due delle tre rette date, vien segnata dal fascio di piani che ha per asse la terza, così concludiamo che la U è una schiera rigata.

Inoltre, poichè le generatrici di V si possono definire come le rette che si appoggiano ad u, u', u'', *ogni schiera rigata si potrà anche definire come il sistema delle infinite rette che si appoggiano a tre rette date, sghembe a due a due.*

Dalle cose esposte segue immediatamente che, *se una retta incontra più di due generatrici di una schiera* V, *essa appartiene alla schiera incidente* U.

Due generatrici di una schiera V *sono segate (o proiettate) da tutte le generatrici della schiera incidente* U, *secondo due punteggiate proiettive (o mediante due fasci di piani proiettivi).*

Se U *è la schiera incidente a* V, *questa è la schiera incidente a quella.*

I punti comuni alle rette di due schiere incidenti riempiono una superficie — nel senso intuitivo della parola — che si chiama una *quadrica-luogo rigata*; e l'insieme dei piani che contengono le rette delle due schiere, dicesi una *quadrica-inviluppo rigata.*

Una retta si dice *appartenente* ad una quadrica luogo (o inviluppo), quando ogni punto (o piano) di quella retta è un punto (o piano) della quadrica. È chiaro che alla quadrica non appartengono altre rette, all'infuori di quelle delle due schiere U, V; perchè se una retta appartiene alla quadrica e non alla schiera U, da ogni suo punto escirà una retta di U, e quindi essa apparterrà al sistema delle rette appoggiate a tre generatrici di U, cioè alla schiera V.

Una retta non appartenente alla quadrica luogo Q, la sega in due punti al più; e dualmente. Perciò si dice che *una quadrica è una superficie di secondo ordine e di seconda classe.*

Sia P un punto della quadrica luogo Q, ed u, v le due rette della quadrica uscenti da P e appartenenti risp. alle schiere U, V. Ogni piano passante per u, contiene una retta v' di V; nè può darsi che al piano uv' appartenga un punto di Q fuori di u, v', perchè altrimenti le rette del fascio avente per centro un tal punto, incontrando la quadrica in 3 punti, giacerebbero per intero su Q: il che è manifestamente assurdo. Il punto uv' è diverso dal punto P, se il piano uv' è diverso da uv (appunto perchè due rette di V son sempre sghembe), e quindi ogni retta uscente da P, ma non appartenente al piano uv, taglierà la quadrica in un altro punto diverso da P; mentre le rette passanti per P e appartenenti al piano uv, non incontreranno la quadrica fuori di P.

Per questa ragione le ultime *rette* si diranno *tangenti* alla quadrica in P; il *piano* uv, che le contiene, si dirà *tangente* alla quadrica nel punto P; e questo *punto* si dirà *di contatto* rispetto a quel piano.

È evidente che i piani tangenti alla quadrica luogo Q, costituiscono una quadrica inviluppo.

Poichè i piani tangenti a Q nei punti di una retta v della schiera V, sono i piani che proiettano da v le generatrici di U, e queste, appoggiandosi a v, dànno i punti di contatto dei piani tangenti suddetti, e appoggiandosi ad un'altra retta v' di V, dànno una punteggiata proiettiva a quella dei punti di contatto, si conclude che *il fascio dei piani tangenti alla quadrica* Q *nei punti di una sua retta, è proiettivo alla punteggiata dei punti di contatto.*

Immaginando la schiera rigata V generata dai fasci di piani proiettivi che hanno per sostegni u, u', e segando la schiera con un piano non passante per alcuna generatrice, avremo come luogo delle tracce delle rette di V, una curva generata da due fasci proiettivi (non prospettivi) coi centri nelle tracce di u, u', cioè una conica (non degenere). Dunque:

Un piano non tangente taglia la quadrica Q *secondo* *una conica non degenere; mentre un piano tangente la taglia secondo due rette.*

Viceversa, data una conica k, se da due suoi punti U, U′ si mandano due rette sghembe u, u', non complanari con k, chiamando omologhi due piani per u, u', quando proiettano un medesimo punto di k, avremo tra i due fasci una proiettività; e le intersezioni dei piani omologhi genereranno una schiera rigata V, della quale k sarà una sezione piana.

Premesse queste nozioni sulle quadriche rigate, passiamo a farne un' elegante applicazione, dimostrando il teorema di PASCAL.

Sia ABCDEF un esagono semplice iscritto in una conica k, e sieno U, V le due schiere incidenti di una quadrica Q passante per k. Diciamo u, u', u'' le generatrici della schiera U, uscenti dai vertici di posto dispari A, C, E; e v, v', v'' le generatrici di V, uscenti dai vertici di posto pari B, D, F. Consideriamo le 3 rette l, m, n comuni alle coppie di *facce opposte* uv, $v'u''$; vu', $u''v''$; $u'v'$, $v''u$, del *seilatero sghembo semplice* $uvu'v'u''v''$. Poichè i piani uv, $v'u''$ passano entrambi pel punto uv' e pel punto vu'', la loro retta comune sarà quella che congiunge i punti uv', vu''. Analogamente la retta comune ai piani vu', $u''v''$ sarà la congiungente dei punti vu'', $u'v''$; e infine la retta comune ai piani $u'v'$, $v''u$ sarà quella che congiunge i punti $u'v''$, $v'u$. Dunque le rette l, m, n saranno i lati del triangolo di vertici $u'v''$, uv', $u''v$, cioè apparterranno ad un piano α, il quale sarà certamente diverso dal piano di k, se i tre punti ABC non coincidono risp. con DEF.

Segando il seilatero col piano β di k, le tre coppie di facce opposte del seilatero daranno come tracce le tre coppie di lati opposti dell' esagono ABCDEF, e le tre rette l, m, n, i punti d' intersezione L, M, N di queste tre coppie di lati. Poichè le rette l, m, n giacciono sul piano α, diverso da β, i punti L, M, N apparterranno alla retta $\alpha\beta$.

Le quadriche, come luoghi spaziali rappresentati da un' equazione cartesiana di 2.° grado, furono studiate da EULERO, MONGE e HACHETTE. A MONGE è dovuta la generazione delle quadriche rigate col movimento di una retta. Ad HACHETTE e BINET (1810) è dovuto un caso particolare della generazione proiettiva di un' iperboloide rigato, mediante la costola di un angolo diedro retto variabile, le cui facce passino costantemente per due rette sghembe fisse; e a STEINER (1832) e CHASLES (1839) la generazione proiettiva in generale.

La dimostrazione sopra esposta, del teorema dell' esagono, trovasi in DANDELIN (1826), il quale peraltro ragionava sopra un iperboloide di rotazione passante per la conica data. Il legame tra il teorema di Pascal e le proprietà delle rette tracciate sopra una quadrica rigata, era già stato intravisto da SERVOIS (1810).

6. *Se un poligono semplice di $4m+2$ vertici, inscritto in una conica, è tale che $2m$ delle sue coppie di lati opposti si taglino in altrettanti punti di una medesima retta, anche i due lati rimanenti si taglieranno in un punto di questa retta.*

Sieno AB, A′B′ due corde parallele di un circolo: allora, se con $\overset{\frown}{AA'}$, $\overset{\frown}{B'B}$ intendiamo due archi di *ugual verso*, sottesi dalle corde AA′, B′B, avremo:

$$\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{B'B},$$

Se inoltre la corda BC è parallela a B′C′, avremo similmente:

$$\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{B'B} = \overset{\frown}{CC'},$$

onde le rette AC′, A′C risultano parallele, e quindi le tre coppie di lati opposti dell' esagono ABCA′B′C′ si tagliano in tre punti di una retta (cfr. col n. 4 di questo §).

Se CD è parallela alla corda C′D′, risulterà:

$$\overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{B'B} = \overset{\frown}{CC'} = \overset{\frown}{D'D},$$

e quindi le rette AD, A′D′ saranno parallele. Si ottiene così il teorema:

Se due quadrangoli semplici ABCD, A′B′C′D′ inscritti in un circolo, son così riferiti che tre coppie di lati omologhi AB, A'B'; BC, B'C'; CD, C'D' sien paralleli, anche i lati rimanenti AD, A'D' risultano paralleli.

Se la corda DE è parallela alla D'E', dalle relazioni

$$\widehat{AA'} = \widehat{B'B} = \widehat{CC'} = \widehat{D'D} = \widehat{EE'},$$

si trae che le rette EA', AE' son parallele; cioè, se le 4 coppie di lati opposti AB, A'B'; BC, B'C'; CD, C'D'; DE, D'E' del decagono ABCDEA'B'C'D'E', son parallele, lo stesso accade della coppia rimanente EA', AE'.

Così proseguendo si giunge a dimostrare il teorema 6 per un poligono di $4m + 2$ vertici, inscritto in un circolo, e che abbia $2m$ *coppie di lati opposti paralleli.*

Il teorema si trasporta ad una conica e ad un poligono qualunque, come al n. 4 di questo §.

Osservazione. Nello stesso tempo si viene a stabilire il seguente teorema, di cui abbiamo enunciato sopra un caso particolare:

Se due poligoni semplici di un numero pari di lati, inscritti in una conica, son così riferiti che tutte le coppie di lati omologhi, meno una, si taglino in punti di una medesima retta, lo stesso accade per la coppia rimanente.

Questa estensione del ragionamento di Gergonne, trovasi in Möbius (1847). Il teorema 6 per $m = 1$, non è altro che il teorema di Pascal. — Altre dimostrazioni dei teoremi precedenti si troveranno al n. 16 del § 12 e al n. 2 del § 13.

7. *Le sessanta rette di Pascal relative agli esagoni semplici che si possono formare con sei punti di una conica, si distribuiscono in 20 terne, ciascuna delle quali è costituita da rette concorrenti in un punto; e precisamente, se 123456 sono i 6 punti dati, concorrono in un punto le rette di Pascal relative agli esagoni semplici:*

$$123456 \quad , \qquad 163254 \quad , \qquad 143652.$$

Invero, applicando il teorema di Pascal all' esagono 125436, rileviamo che i tre punti 12 . 43, 25 . 36, 54 . 61 appartengono ad una retta; e quindi i due triangoli che hanno per vertici i punti

$$A \equiv 12 \,.\, 54, \quad B \equiv 54 \,.\, 36, \quad C \equiv 36 \,.\, 12,$$
$$A' \equiv 43 \,.\, 61, \quad B' \equiv 61 \,.\, 25, \quad C' \equiv 25 \,.\, 43,$$

saranno omologici, perchè le tre coppie di lati AB, A′B′; BC, B′C′; CA, C′A′, coincidono con le 3 coppie di lati opposti dell' esagono 125436. Ne sègue che le rette AA′, BB′, CC′ concorrono in un punto.

Ma AA′ è la retta di Pascal relativa all' esagono 123456, BB′ è la Pascal dell' esagono 163254, e infine CC′ è la Pascal dell' esagono 143652; dunque si conclude col teor. 7.

Il teorema dimostrato è dovuto a Steiner (1828), e i 20 punti in cui concorrono le terne suddette, diconsi « punti di Steiner ». Molte altre proprietà grafiche notevoli della configurazione costituita dalle 60 rette di Pascal relative a 6 punti di una conica, si trovano in Plücker (1829), Hesse (1849), Kirkman (1849), Cayley (1849), Veronese (1877) e Cremona (1877).

§ 12. ***Applicazioni del teorema di Desargues, sul quadrangolo inscritto in una conica.***

Sommario: *Generalità — Costruzione lineare del 4.° punto comune a due coniche, che già si segano in 3 punti. Un caso del problema della proiettività nel piano — Costruzione degli ulteriori punti comuni a due coniche, che già si segano in due punti — Estensione dei teoremi di Desargues e Sturm al caso di coniche che segano una trasversale in coppie immaginarie — Ellisse tangente ai lati di un triangolo nei loro punti medi — Fascio delle iperbole equilatere circoscritte ad un triangolo — Fascio delle coniche che posseggono un dato triangolo autopolare e che segano sopra una retta una data involuzione ellittica — Applicazione alle iperbole equilatere — Le polari di un punto rispetto alle coniche di un fascio, formano un fascio. Teorema di Newton — I poli di una retta* *rispetto alle coniche di un fascio, formano una conica. Conica e circolo dei nove punti — Il luogo dei centri delle iperbole equilatere che hanno a comune un triangolo autopolare, è il circolo circoscritto a questo triangolo — Dall' ortocentro di ogni triangolo circoscritto ad una parabola escono due tangenti ortogonali della curva — Condizione perchè un fascio di coniche contenga un circolo — Le coniche di un fascio avente due punti base sopra una data conica, la segano altrove in coppie di punti allineati con un punto fisso. Applicazioni: Coniche osculatrici. Circolo osculatore — Un altro teorema di chiusura di Poncelet — Costruzione di una conica per 3 punti reali e tangente a due rette date (reali o immaginarie), o bitangente ad una conica data (reale o immaginaria) — Costruzione di una conica per due punti reali, due immaginari e tangente ad una retta data — Sulle trasformazioni quadratiche tra piani.*

1. Se un quadrangolo completo è inscritto in una conica k, sopra una retta secante rispetto a k, ma non passante per nessun vertice del quadrangolo, le tre coppie di lati opposti segano tre coppie di un' involuzione, a cui appartiene la coppia comune a k e alla retta stessa (E. § 65)

Questo teorema vale anche se i vertici del quadrangolo non sono tutti distinti; purchè si prenda come lato comune a due vertici coincidenti, la tangente a k nel punto in cui essi coincidono.

Il sistema di tutte le coniche passanti per 4 punti indipendenti di un piano, dicesi un *fascio* di cui quei 4 punti si chiamano i *punti base.*

Sopra una retta non passante per alcun punto base, le coniche di un fascio segano le infinite coppie di un' involuzione.

La definizione di fascio di coniche si può estendere considerando:

1°) il sistema di tutte le coniche tangenti in un punto A ad una retta a, e passanti per due altri punti (reali) B, C;

2°) il sistema di tutte le coniche che toccano le rette reali a, b nei punti reali A, B;

3°) il sistema di tutte le coniche che passano per due punti reali A, B, e per due punti immaginari coniugati C, D; cioè che subordinano sulla retta CD una data involuzione ellittica;

4°) il sistema di tutte le coniche che passano per un punto A, toccando ivi una retta a; e che passano inoltre per due punti immaginari coniugati B, C;

5°) il sistema di tutte le coniche che passano per due coppie AB, CD di punti immaginari coniugati;

6°) il sistema di tutte le coniche che toccano due rette immaginarie coniugate in due punti immaginari coniugati; cioè il sistema di tutte le coniche rispetto alle quali il punto P e la retta p sono polo e polare, e che subordinano su p una data involuzione ellittica.

Si sottintende sempre che i 4 punti dati (reali o immaginari, distinti o infinitamente vicini), sieno tra loro *indipendenti*.

Quanto ai sistemi 1°), 2°), si dimostra subito che, sopra una retta non passante per alcun punto base, essi segano le infinite coppie di un' involuzione: e ciò applicando i casi particolari del teorema di Desargues, relativi ai quadrangoli con vertici coincidenti (*E.* § 65).

Anche i sistemi 3°), 4°), 5°), 6°) sopra una retta non passante per nessun punto base, segano le infinite coppie di un' involuzione; ma la dimostrazione puramente grafica del teorema, è meno semplice che nei casi precedenti. Tuttavia il risultato si può stabilire per via metrica, proiettando il fascio in guisa che due punti base immaginari coniugati, si mutino nei punti ciclici del piano su cui si fa la proiezione (*E*. § 41), e quindi che il sistema dato si muti in un fascio di circoli. Poichè il teorema che si tratta di stabilire è vero per un tal fascio (*E.* § 40), varrà pure pel sistema dato.

Si noti che nel caso del sistema 6°), mediante la proiezione suddetta si ottiene un fascio di circoli concentrici.

Non ci tratterremo sulle proposizioni duali delle precedenti. Ricorderemo soltanto che il sistema delle coniche inviluppo, che corrisponde per dualità ad un fascio di coniche luogo, dicesi una *schiera* di coniche (inviluppo).

Il sistema delle coniche che in due dati punti toccano due date rette, essendo duale di se stesso, si chiama sovente, con R. STURM, un *fascio-schiera.*

A DESARGUES (1639) è dovuto il teorema che le due coppie di lati opposti di un quadrangolo semplice inscritto in una conica, segano sopra una trasversale due coppie di un' involuzione, in cui sono coniugati i punti ove la conica è segata dalla trasversale. Il caso in cui la conica si scinde nelle due diagonali del quadrangolo semplice, era già stato considerato da PAPPO (cfr. col n. 1 del § 7). CH. STURM dedusse poi (1826) dal teorema di Desargues, che tre coniche qualunque circoscritte ad un quadrangolo, segnano sopra una trasversale, tre coppie di un' involuzione. A NEWTON era già noto che per quattro punti del piano passano due coniche tangenti ad una data retta.

2. *Se due coniche* k, k' *si segano in tre punti* A B C, *esse hanno a comune un quarto punto* D, *che si può costruire linearmente, appena sieno noti altri due punti di ciascuna delle due coniche* (¹).

Sieno EF gli altri due punti dati di k, e GH gli altri due punti di k'. La retta EG sega ulteriormente k, k' nei punti E', G' che si sanno costruire linearmente (*E*. §§ 63-64).

Cerchiamo il coniugato L' del punto L ≡ EG . AB nell'involuzione ω individuata dalle coppie EE', GG'; e sia D l'ulteriore intersezione della retta CL' con la conica k.

Poichè (*E* . § 65) le coniche che passano pei punti ABCD, segano sulla retta EG le infinite coppie dell' involuzione individuata dalle coppie EE', LL', che è la ω stessa, la conica del fascio ABCD che passa pel punto G, dovrà segare ulteriormente EG nel punto G' coniugato di G nella ω. Questa

(¹) Questo problema, ed alcuni dei seguenti, possono presentarsi anche come applicazioni del concetto di proiettività tra coniche (*E.* § 75).

conica avrà dunque 5 punti, ABCGG′, comuni con la k', ossia coinciderà con k'.

Ciò significa che la conica k' passa per D.

Osservazione 1.ª Profittando del teorema di Desargues-Sturm, esteso al caso dei fasci con punti base immaginari, la costruzione precedente permette di ottenere linearmente il 4° punto comune a due coniche, che abbiano già comuni due punti immaginari coniugati A, B, e un punto reale C; e delle quali si conoscano inoltre i punti EF e GH.

Ciò dipende dal fatto che l'ulteriore intersezione di una conica con una retta uscente da un suo punto dato, si costruisce linearmente, quando si conoscano 5 punti della conica, anche se tra questi punti si trovano una o due coppie di punti immaginari coniugati (*E*. § 63).

Osservazione 2.ª Il teorema dimostrato, permette di invertire il teorema di Desargues-Sturm, nel modo seguente:

Le infinite coniche che passano per tre punti ABC *(dei quali due possono essere immaginari coniugati) e segnano sopra una trasversale* u, *le coppie di un' involuzione, passano in conseguenza per un altro punto* D.

Invero, se le coniche k, k', passanti per ABC, segano sulla u le coppie XX′, YY′ della data involuzione ω, a quest' involuzione apparterrà la coppia dei punti ZZ′ comuni ad u e alle rette AB, CD, ove D è l'ulteriore intersezione di k, k'. Tenendo fissa la conica k e facendo variare k' in modo che stacchi sempre sulla u una coppia dell' involuzione ω, il quarto punto comune a k, k' dovrà trovarsi sempre sulla retta CZ′, cioè coinciderà con D.

3. *Dati in un piano 5 punti indipendenti* ABCDE, *esiste uno ed un sol punto del piano dal quale essi vengano proiettati secondo un gruppo di raggi proiettivo ad una quintupla di elementi, dati sopra una forma di 1.ª specie.*

Sia $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ la data quintupla. Diciamo k la conica luogo di un punto P tale che (§ 10, n. 21):

$$\mathrm{P}\,(\mathrm{ABCD}) \;\overline{\wedge}\; a_0 b_0 c_0 d_0\,,$$

e k' la conica luogo di un punto P′ tale che:

$$P' (ABCE) \;\overline{\wedge}\; a_0 b_0 c_0 e_0.$$

Fuori dei punti ABC le due coniche k, k' si segano in un punto X (n° prec.), che è evidentemente l'unico punto per cui sia soddisfatta la condizione:

$$X (ABCDE) \;\overline{\wedge}\; a_0 b_0 c_0 d_0 e_0.$$

Poichè delle coniche k, k' si possono costruire linearmente le tangenti nel punto A (§ 10, n° 21), il punto X si potrà pure costruire con la sola riga, in quanto risulterà comune alle due coniche individuate mediante i 3 punti comuni ABC, le tangenti in uno A di essi, e mediante un altro punto (D od E) di ciascuna delle due coniche.

Osservazione 1ª. Se in un altro piano sono dati 5 punti indipendenti A′B′C′D′E′, ad ogni punto X′ di questo piano, verrà a corrispondere un sol punto X del piano ABCDE, tale che:

$$X (ABCDE) \;\overline{\wedge}\; X' (A'B'C'D'E');$$

e viceversa.

Osservazione 2ª. In particolare, se i punti D, E sono i punti ciclici del piano $\alpha \equiv ABC$, ed $a_0 b_0 c_0$ sono tre raggi di α uscenti da un punto S, chiamando con $d_0 e_0$ le rette isotrope SD, SE, esisterà un sol punto X di α tale che:

$$X (ABCDE) \;\overline{\wedge}\; a_0 b_0 c_0 d_0 e_0,$$

e questo punto si potrà costruire linearmente, quando sieno *dati* i punti ciclici (p. es. mediante un quadrato).

Le due quintuple X (ABCDE), $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ segano sulla retta all'infinito, due quintuple proiettive A′B′C′DE, $A_0 B_0 C_0 DE$; e poichè la proiettività $\begin{pmatrix} A'B'C'DE \\ A_0 B_0 C_0 DE \end{pmatrix}$ ha per punti uniti i punti ciclici, sarà una congruenza diretta (§ 6, n° 12); cioè gli angoli sotto cui si vedono da X i due segmenti AB, BC, saranno uguali in grandezza e verso agli angoli $a_0 b_0$, $b_0 c_0$.

Si ha dunque il mezzo di *risolvere con la sola riga il seguente problema di* Potenot, *quando sia assegnato un quadrato:*

Dati in un piano tre punti ABC, costruire un punto da cui i segmenti AB, BC sieno veduti sotto angoli dati in grandezza e verso.

La risoluzione di questo problema col compasso, è elementare ed ovvia.

La prop. contenuta nell' Oss. 1ª di questo n., è un caso particolare di quello che R. Sturm ha chiamato il *problema della proiettività* (1869).

4. *Due coniche* ABCDE, ABFGH *determinate ciascuna mediante 5 punti, di cui due comuni, si segano ulteriormente in una coppia di punti (reali o immaginari)* XY, *la cui congiungente si costruisce linearmente.*

Conduciamo la retta CF e costruiamo linearmente (*E.* §§ 63-64) le ulteriori intersezioni C′, F′ di questa retta con le coniche date $k \equiv$ ABCDE, $k' \equiv$ ABFGH. Sia L′ il coniugato di L $\equiv$ AB. CF nell' involuzione ω individuata dalle coppie CC′, FF′.

Similmente diciamo C_1, G_1 le ulteriori intersezioni della retta CG con le coniche k, k', ω_1 l' involuzione delle coppie CC_1, GG_1 ed M_1 il coniugato di M $\equiv$ AB . CG in quest' involuzione.

Il sistema Σ di tutte le coniche che passano pei punti AB e pei punti (reali o immaginari) ove k' vien segata dalla retta $L'M_1$, segna sulle rette CF, CG le infinite coppie delle involuzioni:

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} F\,F'L \\ F'F\,L' \end{pmatrix}, \quad \omega_1 \equiv \begin{pmatrix} G\,G_1M \\ G_1G\,M_1 \end{pmatrix}.$$

Sicchè la conica k_1 di Σ che passa pel punto C, sega altrove le rette CF, CG nei punti C′, C_1, cioè ha comuni con k i 5 punti $ABCC'C_1$, e quindi coincide con k.

Ne deriva che la conica k sega la $L'M_1$ negli stessi punti XY, in cui questa retta vien segata da k'.

Se si vogliono costruire i punti XY, basterà trovare (linearmente) due coppie di punti della $L'M_1$, coniugati p. e. rispetto a k, eppoi determinare i punti doppi dell'involuzione individuata da queste coppie (§ 6, n° 14).

Osservazione 1.ª Le costruzioni esposte in questo n° valgono anche se A, B sono immaginari coniugati.

Osservazione 2ª. Se i due punti AB coincidono, cioè se le coniche date k, k' si toccano in A, la retta $L'M_1$ che contiene le ulteriori intersezioni delle due coniche, può passare per A, oppure coincidere addirittura con la tangente a comune in A. Nel caso in cui la $L'M_1$ non passa per A, le due punteggiate proiettive, sovrapposte ad a, una delle quali è il luogo dei poli dei raggi per A, rispetto all'una conica, e l'altra il luogo dei poli degli stessi raggi, rispetto all'altra conica, hanno per punti uniti distinti A ed il punto $a \,.\, L'M_1$. In tal caso si dice che le due coniche *si toccano semplicemente* in A. Se la $L'M_1$ passa per A (senza coincidere con a) la proiettività tra le punteggiate suddette è parabolica, col punto unito in A, e si dice che le due coniche *si osculano* in A; se infine la $L'M_1$ coincide con a, la proiettività tra le due punteggiate diviene identica, e si dice che le due coniche hanno in A un *contatto quadripunto*.

Due coniche che si tocchino semplicemente hanno in comune due punti distinti o coincidenti, diversi dal loro punto di contatto; se si osculano, hanno comune un sol punto, fuori del punto d'osculazione; se hanno un contatto quadripunto, nessuno.

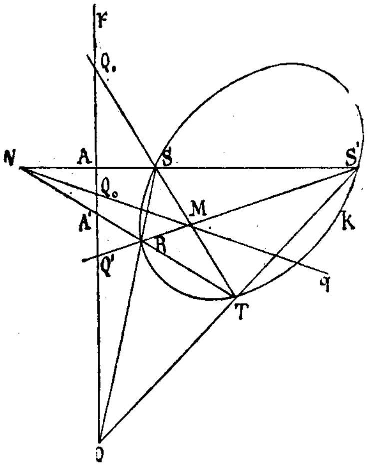
5. *Estensione del teorema di Desargues al caso di una trasversale esterna alla conica.*

Il teorema del quadrangolo inscritto in una conica, può venire esteso al caso in cui la trasversale con cui si segano i lati del quadrangolo e la conica, abbia comuni con questa due punti immaginari.

A tal uopo occorre stabilire il Lemma:

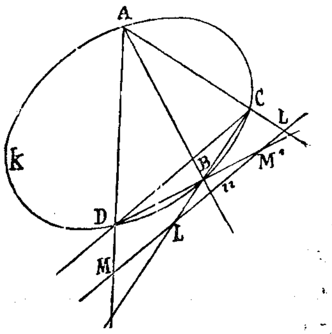
Se s'immagina una conica k *generata da due fasci proiettivi* S, S', *i punti uniti immaginari della proiettività* *che intercede tra le punteggiate sezioni dei due fasci con una retta* p, *esterna a* k, *sono i punti doppî dell' involuzione subordinata da* k *sulla retta* p.

Chiamiamo *prima* punteggiata quella segata da S sulla retta p, e *seconda* quella segata da S'. Per trovare l'omologo del punto Q di p nella 2ª punteggiata, dovremo proiettare Q da S nel punto R di k ed R da S' nel punto Q' di p; e per trovare l'omologo di Q nella 1ª punteggiata, dovremo proiettare Q da S' nel punto T di k e T da S nel punto Q_1 di p.



La retta q che riunisce i punti $M \equiv ST . S'R, N \equiv SS'. RT$, risulterà la polare di Q.

Considerando ora il quadrangolo SS'RT segato dalla trasversale p, avremo che le coppie $Q'Q_1$ ed A $(\equiv p . SS')$ $A' \equiv (p . RT)$, individuano un' involuzione di cui Q è un punto doppio. Dunque il coniugato armonico di Q rispetto alla coppia $Q'Q_1$ coincide col coniugato armonico di Q rispetto alla coppia AA'. Ma essendo q la polare di Q, il punto $Q_0 \equiv qp$ sarà il coniugato armonico di Q rispetto alla coppia AA' e quindi rispetto alla $Q'Q_1$; donde si trae che l' involuzione unita della proiettività tra le due punteggiate sezioni dei fasci S, S', è l' involuzione dei punti coniugati rispetto a k (§ 6, nº 12).



Ciò premesso, se ABCD è un quadrangolo completo inscritto in una conica k, ed u è una retta esterna a k, prendendo i punti A, B come centri di due fasci generatori di k, e ponendo:

$$L \equiv AC . u \ , \ L' \equiv BC . u \ , \ M \equiv AD . u \ , \ M' \equiv BD . u,$$

la coppia degli elementi uniti della proiettività che intercede tra le due punteggiate LM..., L'M'..., cioè (secondo il Lemma precedente) la coppia comune ad u e alla conica k, *apparterrà* all'involuzione delle coppie LM', L'M (§ 6, n° 13. Oss.).

Dunque *secando le coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo inscritto in una conica, con una retta esterna, le tre coppie di punti che così si ottengono, stanno in un' involuzione con la coppia dei punti immaginari comuni alla retta e alla conica.*

Osservazione 1ª. Lo stesso ragionamento serve per provare che due lati di un triangolo inscritto in una conica k, e il terzo lato insieme alla tangente nel vertice opposto, segano sopra una retta esterna a k due coppie di un' involuzione, cui *appartiene* la coppia immaginaria comune alla retta e alla conica. Si vede poi subito (anche senza ricorrere al ragionamento precedente) che l'involuzione ω individuata sopra una retta u esterna a k, dalla coppia delle intersezioni di u con due tangenti di k, e dal punto P ove u è segata dalla corda di contatto, assunto come punto doppio, contiene tra le sue coppie i due punti immaginari ove u sega k. Per veder questo, basta osservare che l'altro punto doppio della involuzione ω, è l'intersezione di u con la polare di P rispetto alla conica.

Osservazione 2ª. Il teorema di Desargues, sotto la forma datagli da Sturm, è pure suscettibile di un' estensione analoga a quella esposta in questo n° pel teorema originario di Desargues.

Consideriamo un fascio di coniche Σ (di uno qualunque dei tipi definiti al n° 1 di questo §), e sia u una trasversale non passante per nessuno degli eventuali punti base di Σ.

Se il fascio Σ *segna su* u *un' involuzione ellittica* ω, *ogni conica del fascio taglia* u *in due punti reali.* Invero, se il fascio ha i 4 punti base reali e distinti ABCD, la coppia comune ad u e ad una conica di Σ, apparterrà all' involuzione segnata su u dalle 3 coppie di lati opposti del quadrangolo ABCD, che è l' involuzione ellittica ω. Dunque quella coppia dovrà essere reale (§ 6, n° 13. Oss.).

Analogamente si ragiona, quando due punti base AB coincidono. L' ipotesi che coincidano anche gli altri due punti base CD, va scartata, perchè le coniche di un fascio-schiera segano sopra ogni retta generica del piano un' involuzione iperbolica (ved. l' Oss. 1ª).

Se due (almeno) dei 4 punti base sono immaginari, si potrà proiettare il fascio Σ in un fascio di circoli Σ'. Si vedrà allora che Σ' (e quindi Σ) dovrà avere due punti base reali e distinti, affinchè possa esistere una retta sulla quale Σ' segni un' involuzione ellittica; e questa retta riuscirà segante rispetto a tutti i circoli di Σ'.

Dunque quando la ω sia ellittica, *tutte* le coppie (reali), segate sulla u dalle coniche di Σ, appartengono ad una medesima involuzione (§ 12, n° 1).

Supponiamo ora che il fascio Σ segni, sopra una trasversale u, un' involuzione iperbolica ω. Se i quattro punti base son reali, profittando dell' estensione sopra stabilita del teorema di Desargues, si vedrà che anche le coppie immaginarie segate su u dalle coniche di Σ appartengono ad ω.

Se due (almeno) dei 4 punti base sono immaginari, con una proiezione potremo ridurci ad un fascio di circoli Σ', il quale seghi sopra una retta u' un' involuzione iperbolica ω'.

Si tratta di provare che i punti doppi M, N della ω' *separano armonicamente* (§ 6, n° 13. Oss.) tutte le coppie — reali o immaginarie — segate su u' dai circoli di Σ'. Sia, invero, c un circolo di Σ', C il suo centro, r il suo raggio, O il piede della perpendicolare tirata da C ad u', S, S' i punti ove questa perp. sega c. Se P è un terzo punto del circolo e si pone $X \equiv SP \,.\, u'$, $X' \equiv S'P \,.\, u'$, pel teorema di Staudt (*E.* § 60), i due punti X, X' saranno coniugati rispetto a c. Ora dai triangoli simili SOX, X'OS' si rileva:

$$OX \,.\, OX' = - OS \,.\, OS', \text{ cioè: } OX \,.\, OX' = r^2 - d^2,$$

ove d è la distanza OC. Dunque la potenza dell'involuzione subordinata da c su u', è $r^2 - d^2$. Ciò posto, dicasi Q il punto medio del segmento MN, e si osservi che $\overline{QM}^2 = \overline{QN}^2 = \overline{QC}^2 - r^2$, perchè i segmenti QM, QN hanno la stessa lunghezza delle tangenti condotte da Q al circolo. D'altronde:

$$\begin{aligned} OM \,.\, ON &= (QM - QO)(QN - QO) = \\ &= \overline{QO}^2 - \overline{QM}^2 = r^2 - (\overline{QC}^2 - \overline{QO}^2) = r^2 - d^2; \end{aligned}$$

dunque i punti M, N son coniugati rispetto al circolo c.

Sicchè resta stabilito in ogni caso che *le coppie reali o immaginarie, segate sopra una trasversale generica dalle coniche di un fascio, appartengono ad una medesima involuzione.*

Osservazione 3ª. Le considerazioni esposte nell'Oss. prec. permettono di riconoscere subito quali specie di coniche contiene un fascio senza punti base all'infinito. Si ha così il teorema:

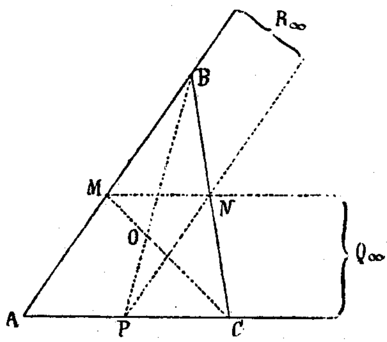
Se un fascio di coniche non ha punti base all'infinito, o esso non contiene parabole (reali) o ne contiene due (proprie o degeneri): nel 1° caso è tutto costituito da iperbole; nel 2° contiene infinite ellissi e infinite iperbole. — Se il fascio ha un sol punto base all'infinito, esso contiene infinite iperbole ed una sola parabola; se ha due punti base all'infinito, secondo che questi punti son reali e distinti o reali e coincidenti o immaginari, il fascio è costituito da iperbole o da parabole o da ellissi.

Le varie possibilità che può presentare un fascio, in relazione alle specie di coniche ch'esso contiene, furono studiate da Möbius col calcolo baricentrico (1827).

6. *Esiste sempre un' ellisse che tocca i lati di un triangolo* ABC *nei loro punti medî, ed il suo centro è il baricentro del triangolo.*

Nel fascio schiera costituito dalle coniche tangenti alle rette AB, BC nei punti M, N, medî tra AB e BC, vi è una sola conica non degenere k tangente alla retta AC, perchè un punto doppio dell' involuzione segata dalle coniche del fascio, sulla AC, cade nel punto $Q_\infty \equiv MN \,.\, AC$ (*E.* § 65), che è il punto di contatto della *retta doppia* MN.

Il punto ove k tocca AC, dovrà essere il coniugato armonico di Q_∞ rispetto alla coppia AC, cioè il punto P medio tra A, C. Dunque la conica k tocca i lati di ABC nei loro punti medî.



Si vede subito intuitivamente che questa conica è un' ellisse, perchè non potendo passare da una parte all' altra di una retta che la tocchi in un punto *proprio*, dovrà esser contenuta nell' interno del triangolo ABC, e quindi non potrà avere punti all' infinito.

Poichè la polare del punto Q_∞ rispetto a k, è la retta BP, e la polare di $R_\infty \equiv AB \,.\, NP$ è la CM, il centro della k sarà il baricentro O del triangolo (cioè il punto di concorso delle mediane).

7. *Le iperbole equilatere circoscritte ad un dato triangolo, formano un fascio, ed il 4° punto base è l' ortocentro del triangolo.*

Infatti le iperbole equilatere passanti pei punti ABC segano sulla retta all' infinito le coppie dell' involuzione assoluta, e quindi passano per un quarto punto D, ben determinato (§ 12, n° 2. Oss. 2ª). Ogni conica (reale) passante per ABCD dovrà segare sulla retta all' infinito una coppia dell' involuzione assoluta (§ 12, n° 5), e siccome ad un' involuzione ellittica non appartengono coppie immaginarie (§ 6, n° 13. Oss.), si conchiude che *ogni* conica per ABCD è un' iperbole equilatera. Dunque le iperbole equilatere per ABC costituiscono *tutto* un fascio.

Le tre coppie di lati opposti del quadrangolo ABCD dovranno segare sulla retta all' infinito tre coppie dell' involuzione assoluta, cioè AD sarà perpendicolare a BC, AC a BD, AB a DC; ossia D sarà il punto delle altezze del triangolo ABC.

Osservazione. Dal teorema dimostrato risulta che *per 4 punti generici del piano passa una ed una sola iperbole equilatera.*

Invero, se ABCE sono i 4 punti indipendenti dati, e il quadrangolo ABCE non è ortogonale (cioè i punti all' infinito delle sue coppie di lati opposti non son coniugati nell' involuzione assoluta), un' iperbole equilatera per ABCE dovrà passare per gli ortocentri dei 4 triangoli ABC, ABE, BCE, ACE, e quindi sarà perfettamente determinata.

Il teorema 7 trovasi in Brianchon e Poncelet (Recherches sur la détermination de l' hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions, 1820-21).

8. *Le coniche che posseggono un dato triangolo autopolare* EFG, *e che segano sopra una retta* u *(diversa dai lati del triangolo) una data involuzione ellittica* ω, *formano un fascio coi quattro punti base reali.*

Costruiamo anzitutto un quadrangolo completo che abbia EFG come triangolo diagonale, e le cui coppie di lati opposti segnino sulla u tre coppie dell' involuzione ω. Perciò basterà costruire due rette l, m uscenti da F, armoniche rispetto alle due FE, FG, e proiettanti una coppia dell' involuzione ω; e due altre rette p, q uscenti da G, armoniche rispetto a GE, FG, e proiettanti pure una coppia di ω. Le quattro rette l, m, p, q risulteranno reali, per l'ipotesi che la ω sia ellittica (*E.* § 37). Ponendo:

$$A \equiv lq, \ B \equiv mp, \ C \equiv lp, \ D \equiv mq,$$

il quadrangolo completo ABCD, avrà due dei punti diagonali in $F \equiv lm \equiv AC \, . \, BD$, $G \equiv pq \equiv AD \, . \, BC$, e l'altro punto diagonale dovrà essere comune ai raggi armonici di FG rispetto alle coppie lm, pq, e quindi coinciderà con E.

Le coniche passanti per ABCD segano sulla u le coppie (tutte reali — § 6, n° 13. Oss.) dell'involuzione ellittica ω, e siccome una conica è individuata da un triangolo autopolare e da due punti (§ 9, n° 4. Oss.), e d'altra parte rispetto alle coniche del fascio ABCD, il triangolo EFG è autopolare, si conclude che ogni conica rispetto alla quale EFG sia autopolare e che seghi sulla u una coppia di ω, appartiene al fascio ABCD (e viceversa).

9. *Le iperbole equilatere rispetto alle quali un dato triangolo* EFG *è autopolare, formano un fascio, che ha per punti base i centri dei circoli inscritto ed ex-inscritti al triangolo.*

Questa prop. è un caso particolare metrico della precedente. La retta u è in tal caso all'infinito e la ω è l'involuzione assoluta. I lati lm del quadrangolo base ABCD, dovendo dividere armonicamente la coppia FE, FG, e dovendo essere ortogonali, saranno le bisettrici degli angoli formati dalle FE, FG; e analogamente dicasi per le altre coppie di lati del quadrangolo. Da ciò segue subito il teorema.

10. *Le polari di un punto rispetto alle coniche di un fascio, formano un fascio.*

Sia Σ il fascio di coniche (di uno qualunque dei tipi definitivi al n° 1 di questo §) e k, k' sieno due coniche del fascio. Diciamo p, p' le polari di un punto generico P rispetto alle coniche k, k', e Q il punto comune alle p, p'. Poichè le coppie (reali o immaginarie) segate sulla retta PQ dalle coniche k, k', sono ambedue armoniche con la coppia PQ

(§ 6, n° 13. Oss.), l'involuzione segata sulla PQ dalle coniche di Σ, avrà per punti doppî P, Q (§ 12, n° 5. Oss. 2ª): in altri termini, questi due punti saranno coniugati rispetto a tutte le coniche del fascio; e quindi la polare di P rispetto ad una conica qualunque di Σ, dovrà passare per Q (e la polare di Q passerà per P). — Il lettore verificherà che *ogni* retta per Q può riguardarsi come polare di P rispetto ad una conica di Σ, osservando che due punti generici del piano son coniugati rispetto ad una (sola) conica di Σ.

Osservazione. Dualmente si ha che *i poli di una retta rispetto alle coniche di una schiera, appartengono ad una retta.*

In particolare se la retta data è all'infinito, si ha il teorema:

I centri delle coniche inscritte in un quadrilatero, giacciono sopra una retta, la quale contiene i punti medî delle coppie di vertici opposti del quadrilatero (cfr. col n° 4 del § 7. Oss.).

Questo teorema serve per *costruire il centro di una conica data mediante 5 tangenti* abcde: infatti il centro cercato è il punto comune alle rette che contengono i punti medî delle diagonali dei quadrilateri *abcd*, *abce*.

Se ne deduce pure la seguente proposizione:

Date in un piano 5 rette indipendenti, le cinque rette che contengono i punti medî delle diagonali dei quadrilateri che si possono formare aggruppando a 4 a 4 le rette date, concorrono in un medesimo punto.

Il teor. 10 è dovuto a Poncelet (1822), e il teorema relativo al luogo dei centri delle coniche inscritte in un quadrilatero, è di Newton (1687).

11. *I poli di una retta rispetto alle coniche di un fascio, formano una conica.*

Diciamo ancora k, k' due coniche del fascio Σ, ed U, U' i poli di una retta u, rispetto a k, k'. Mentre un punto P descrive la u, le sue polari p, p' rispetto a k, k' descrivono due fasci, di centri U, U', proiettivi alla punteggiata descritta da P; sicchè il punto $Q \equiv pp'$, coniugato di P rispetto a tutte le coniche del fascio (n° prec.), descrive una conica l, passante per U, U'. Ogni punto Q di l avrà per coniugato rispetto a tutte le coniche del fascio, un punto P di u, sicchè la conica l apparirà anche come il luogo dei poli di u rispetto alle coniche del fascio Σ, e si dirà perciò la *conica polare* di u rispetto a Σ.

OSSERVAZIONE 1ª. Proviamo che *la conica polare di* u *rispetto al fascio* Σ, *subordina sulla retta* u *l' involuzione stessa che vien segata dalle coniche di* Σ. Ciò è ben chiaro quando la conica l sega la u in due punti reali, chè allora questi due punti risultano di contatto per le due coniche del fascio tangenti ad u. Ma in ogni caso considerando la conica l generata dai fasci proiettivi U, U', la proiettività tra le punteggiate sezioni di quei fasci con la u, risulterà il prodotto delle involuzioni subordinate sulla u dalle coniche k, k' fissate, e quindi le coppie dei punti doppi di queste involuzioni saranno divise armonicamente dalla coppia dei punti uniti, reali o immaginarî, della proiettività suddetta (§ 6, n° 13. Oss.), cioè dalla coppia comune alla conica l e alla u (ved. il Lemma al n° 5 di questo §).

Ricordando l' Oss. 3ª del n° 5 di questo §, potremo dire che *la conica luogo dei centri di un fascio, che non abbia punti base all' infinito, è un' ellisse o un' iperbole secondo che il fascio è tutto costituito da iperbole oppure contiene ellissi, iperbole e parabole.*

OSSERVAZIONE 2ª. Se il fascio Σ ha i 4 punti base reali e distinti ABCD, poichè il triangolo diagonale EFG del quadrangolo completo ABCD, è autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio, il punto u . FG avrà per coniugato rispetto a tutte le coniche di Σ il punto E. Sicchè la conica l passerà per E. Analogamente si vede che essa passerà per F, G.

Poichè inoltre ogni punto P di un lato AB del quadrangolo, ha per coniugato, rispetto a tutte le coniche di Σ, il punto Q coniugato armonico di P rispetto alla coppia AB, la conica l passerà pure pei coniugati armonici dei punti ove u incontra i lati del quadrangolo, rispetto alle coppie di vertici situate su questi lati.

Per ricordare che la conica l contiene i 6 poli di u rispetto alle coppie di vertici di ABCD, e i punti diagonali di questo quadrangolo, si dice che l è la *conica dei nove punti,* relativa al quadrangolo ABCD, segato dalla trasversale u.

In particolare, quando il quadrangolo ABCD è ortogonale (cioè le coppie di lati opposti son perpendicolari), in guisa che il fascio è tutto costituito da iperbole equilatere (§ 12, n° 7), la conica polare della retta all' infinito u, subordinerà su u l' involuzione assoluta, che vien segata dalle iperbole del fascio; cioè sarà un circolo. I nove punti diverranno in tal caso i punti medî dei lati del triangolo ABC, i piedi delle altezze di questo triangolo (le quali concorreranno in D) e i punti medî dei segmenti AD, BD, CD. Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

I punti medî dei lati di un triangolo, i piedi delle altezze e i punti medî dei segmenti compresi tra i vertici e l' ortocentro, appartengono ad un medesimo circolo.

Tutte le iperbole equilatere rispetto alle quali un dato triangolo EFG è autopolare, costituiscono, come sappiamo, (§ 12, n° 9), un fascio che ha per punti base ABCD i centri dei circoli inscritto ed ex-inscritti ad EFG. Il luogo dei centri di queste iperbole sarà dunque il circolo (Oss. 1ª) circoscritto al triangolo diagonale di ABCD, cioè ad EFG. Dunque:

Il luogo dei centri delle iperbole equilatere rispetto alle quali un dato triangolo è autopolare, è il cerchio circoscritto a questo triangolo.

La considerazione della conica polare di una retta rispetto ad un fascio di coniche, trovasi in Poncelet (1822). In Gergonne (1821) trovasi un caso particolare della proposizione relativa alla specie della conica luogo dei centri delle coniche di un fascio; la qual conica fu poi studiata diffusamente da STEINER (1858).

Il *circolo dei nove punti* relativo ad un dato triangolo, fu considerato dapprima da BRIANCHON e PONCELET (1821), come luogo dei centri delle iperbole equilatere circoscritte al triangolo, eppoi da FEUERBACH (1822).

12. *Dall' ortocentro di ogni triangolo circoscritto ad una parabola, escono due tangenti reali della curva, ortogonali tra loro.*

Sia *abc* un triangolo circoscritto ad una parabola *k*, e sia O il punto delle altezze del triangolo *abc*. Indicando con *d* la retta all' infinito del piano, potremo dire che la coppia delle tangenti, reali o immaginarie, mandate da O alla conica, appartiene all' involuzione delle coppie che proiettano da O le tre coppie di vertici opposti del quadrilatero *abcd;* e ciò applicando la prop. duale del teorema di Desargues, esteso come al n° 5 di questo §.

Ma in base all' Oss. 2ª dello stesso n.° 5, potremo di più dire che le tangenti mandate da O alla conica sono reali (cioè che il punto O è esterno). Invero le tre coppie di vertici opposti del quadrilatero *abcd* son proiettate da O, secondo tre coppie di angoli retti, e quindi le coppie di tangenti mandate da O alle infinite parabole della schiera che ha per rette base le *abcd,* costituiscono l' involuzione *ellittica* degli angoli retti aventi per vertice O; donde segue che il punto O è esterno a *tutte* le parabole della schiera.

Si conclude pertanto che da O escono due tangenti reali e ortogonali della parabola *k*.

Questo teorema è dovuto a STEINER (1828).

13. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio di coniche contenga uno ed un sol circolo, è che la conica luogo dei centri delle coniche del fascio, sia un' iperbole equilatera.*

Invero, se un fascio di coniche Σ contiene un sol circolo c, la retta all' infinito non potrà contenere nessuno dei punti base (reali o imm.) del fascio, e inoltre l' involuzione su essa segata da Σ, sarà certo iperbolica, perchè a quest' involuzione deve appartenere la coppia comune a c e alla retta all' infinito, cioè la coppia dei punti ciclici (ved. l' Oss. 2ª al n° 5 di questo §). Poichè inoltre la coppia reale degli elementi doppî dell' involuzione suddetta, deve essere armonica con la coppia dei punti ciclici, si conclude che quei punti doppî son coniugati nell' involuzione assoluta, e quindi che la conica luogo dei centri delle coniche di Σ, è un' iperbole equilatera (§ 12, n° 11, Oss. 1ª).

Viceversa, se la conica luogo dei centri delle coniche di un fascio Σ, è un' iperbole equilatera, il fascio segnerà sulla retta all' infinito un' involuzione a cui apparterrà la coppia dei punti ciclici, e quindi tra le coniche di Σ vi sarà un circolo.

OSSERVAZIONE 1ª. Se un fascio di coniche contiene due circoli, due punti base cadranno nei punti ciclici e quindi tutte le coniche del fascio saranno circoli. In tal caso il luogo dei centri dei circoli (non degeneri) del fascio, è una retta perpendicolare all' asse radicale ad essi comune.

OSSERVAZIONE 2ª. Se nel fascio di coniche Σ c' è un solo circolo, i punti all' infinito U, V dell' iperbole equilatera luogo dei centri, separano armonicamente tutte le coppie, reali o immaginarie, segnate sulla retta all' infinito dalle coniche di Σ (§ 12, n° 11, Oss. 1ª), cioè i due punti U, V son coniugati rispetto a tutte le coniche del fascio, e quindi essi sono i punti all' infinito degli assi di tutte queste coniche.

Dunque il teor. 13 può enunciarsi sotto quest' altra forma: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio di coniche contenga un (sol) circolo, è che gli assi di due (e quindi delle infinite) coniche del fascio, sieno tra loro paralleli.*

OSSERVAZIONE 3ª. Se i 4 punti base del fascio di coniche che contiene un circolo, son reali e distinti, le coppie di lati opposti del quadrangolo base dovranno segare sulla retta all' infinito, coppie armoniche con la UV, e poichè U, V son coniugati nell' involuzione assoluta, ne segue che: *Quando un fascio di coniche coi 4 punti base reali e distinti, contiene un circolo, gli assi di una conica qualunque del fascio son paralleli alle bisettrici delle coppie di lati opposti del quadrangolo base; cioè le coppie dei lati opposti del quadrangolo base formano con ogni asse angoli uguali, ma di verso contrario. E viceversa.*

Più in generale, lo stesso ragionamento prova che, se al fascio appartiene una conica spezzata in due rette, gli assi di una conica del fascio son paralleli alle bisettrici degli angoli formati da queste rette.

Ne segue una soluzione elegante del problema di *costruire le direzioni degli assi di una conica individuata da 5 punti.*

Per tre A, B, C di quei punti, si conduca un circolo, e se ne trovi l' ulteriore intersezione D con la conica (§ 12, n° 2). Le bisettrici di una delle coppie di lati opposti del quadrangolo ABCD, daranno le direzioni degli assi.

La condizione affinchè i 4 punti comuni a due coniche appartengano ad un circolo, fu trovata da De La Hire e Huygens (1680).

14. *Le coppie di punti (reali o immaginari) segate dalle coniche di un fascio sopra una conica che passi per due punti base (reali o imm. coniugati) del fascio, sono congiunte da rette (reali) concorrenti in un medesimo punto.*

Sia k la conica data, Σ il fascio dato con due punti base A, B sopra k, e sia r la retta reale che congiunge gli altri due punti base C, D, reali o immaginari coniugati, del fascio Σ.

Se uno (solo) dei punti C, D appartiene a k (nel qual caso i punti C, D son certo reali), il teorema è evidente. Se poi i due punti C, D appartengono a k, cioè se k è del fascio Σ, allora la congiungente dei punti ulteriormente comuni a k e ad una conica di Σ, sarà la retta fissa $r \equiv$ CD.

Supponiamo dunque che i punti C, D non appartengano a k; e diciamo k' una conica del fascio Σ, C′, D′ i punti reali o immaginari (§ 12, n° 4) in cui essa sega k, fuori di A, B; ed r' la congiungente reale di C′, D′.

In forza del teorema di Desargues-Sturm, esteso al n° 5 (Oss. 2ª) di questo §, le coppie segate sulla r dalle coniche del fascio Σ', che ha per punti base ABC′D′, apparterranno ad una medesima involuzione. In particolare, apparterranno ad un' involuzione: la coppia CD, segata da k', la coppia MN, segata da k, e la coppia PQ, segata dalle due rette AB ed r' che costituiscono una conica degenere di Σ'.

Poichè al variare della conica k' nel fascio Σ, non muta la coppia CD, nè la MN, nè il punto P $\equiv$ AB . r, non muterà il coniugato Q di P nell' involuzione individuata dalle coppie CD, MN; cioè *il raggio* r′ *passerà pel punto fisso* Q, *appartenente alla retta che congiunge i due punti base di* Σ, *non giacenti su* k.

Il teor. 14 trovasi stabilito nel *Traité* di PONCELET (1822), mediante una opportuna proiezione centrale.

15. *Costruire la conica che passa per due punti dati, reali o immaginari, e che è osculatrice in un punto assegnato ad una data conica.*

Sia k la conica data, P il punto assegnato su essa ed A, B i punti dati, fuori della conica k.

Le coniche passanti per A, B e tangenti in P alla k, formano un fascio Σ, sicchè (n° prec.) le rette che riuniscono le coppie segate su k, fuori di P, dalle coniche di Σ, passano per un punto fisso S della retta AB.

Per costruire S basterà intersecare la AB con la corda, diversa dalla tangente in P, comune a k e ad una conica generica di Σ (§ 12, n.° 4). — Se P′ è il punto ove la retta SP taglia k, fuori di P, è evidente che la conica di Σ passante pel punto P′ e tangente a k in P, non incontrerà k, fuori di P e P′, cioè sarà osculatrice a k in P (§ 12, n° 4, Oss. 2ª). Questa costruzione mostra che la conica richiesta è unica.

Osservazione 1.ª La conica di Σ passante per un punto M, variabile su k, incontra k, fuori di P, M, in un punto N (§ 12, n.° 2) che coincide con P, soltanto quando M viene a cadere in P′. Sicchè si può definire intuitivamente la conica di Σ osculatrice in P a k, come la posizione limite di una conica di Σ, che passi per un punto di k, il quale tenda a P. Ed in questo senso si può dire che la conica osculatrice ha comune con k il punto P e due altri punti successivi, infinitamente vicini a P.

Osservazione 2ª. La costruzione esposta cade in difetto quando la retta PS risulta tangente a k in P; cioè quando P′ coincide con P. In tal caso se un punto M si muove su k, e la conica di Σ che passa per M, sega k, fuori di P, M, nel punto N, la retta MN passerà per un punto fisso della tangente in P, e quando M si avvicinerà a P anche il punto N tenderà a P; cioè la conica variabile tenderà ad una conica avente un *contatto quadripunto* con k in P.

Più tardi impareremo una costruzione valida in tutti i casi.

Osservazione 3.ª Se A, B sono i punti ciclici, si ottiene in particolare la seguente *costruzione del circolo osculatore ad una conica* k *in un suo punto* P. Si tracci un circolo tangente a k in P, e segante ulteriormente la conica nei punti M, N. Da P si tiri la parallela ad MN: il circolo passante pel punto P′, ove questa parallela incontra ulteriormente k, e tangente a k in P, è il circolo richiesto.

Ricordando l'Oss. 3ª al n.° 13 di questo §, si vede in primo luogo che la tangente a k in P e la retta PP′, formano con un asse della conica angoli uguali, ma di verso contrario: donde si trae una *costruzione* semplicissima *della retta* PP′ *quando sia dato un asse della conica.* In secondo luogo si vede che il punto P′ può coincidere con P, solo se la tangente a k in P è parallela ad un asse, cioè se P è un vertice della conica. Dunque *il circolo osculatore ad una conica in un punto, ha un contatto quadripunto con la conica, soltanto se quel punto è un vertice.*

La costruzione esposta del circolo osculatore ad una conica in un punto, è dovuta a PONCELET (1822). La proprietà che la tangente e la corda comuni ad una conica e ad un suo circolo osculatore, sono equinclinate sopra un asse della conica, trovasi in SIMSON (1735).

16. *Se un* 2n—*gono semplice inscritto in una conica si deforma in guisa che* 2n—1 *de' suoi lati ruotino attorno ad altrettanti punti di una retta, anche il rimanente lato ruoterà attorno ad un punto di questa retta.*

Questo teorema, che coincide sostanzialmente con quello dimostrato (seguendo MÖBIUS) al n.° 6 del § 11 (Oss.), si può anche presentare come un' applicazione del teorema di Desargues.

Dimostriamolo anzitutto per un quadrangolo $A_1A_2A_3A_4$, inscritto in una conica k, ed i cui lati A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 passino ordinatamente pei punti $S_1S_2S_3$ di una retta u. Variando il quadrangolo in modo che i vertici scorrano sulla k e che i lati suddetti passino sempre pei punti $S_1S_2S_3$, resteranno fissi i punti, reali o immaginari, comuni alla u e a k, e pel teorema di Desargues (esteso come al n.° 5 di questo §), il lato A_4A_1 dovrà passare pel coniugato del punto S_2 nell' involuzione individuata dalla coppia comune a k e ad u, e dalla coppia S_1S_3; e quindi il punto S_4 ove A_4A_1 incontra u, resterà fisso al deformarsi del quadrangolo.

Procediamo ora per induzione completa, supponendo dimostrato il teorema per i poligoni inscritti, di un numero pari di lati, inferiore a $2n$, e dimostriamolo per i poligoni di $2n$ lati. Poichè il teorema è già stabilito per $n = 2$, risulterà allora la sua validità in ogni caso.

Sia $A_1A_2 \dots A_{2n}$ il dato $2n$-gono inscritto in k, ed i cui lati $A_1A_2, A_2A_3, \dots A_{2n-1}A_{2n}$ passino ordinatamente pei punti S_1 $S_2 \dots S_{2n-1}$ della retta u. Dall' ipotesi che il teorema sia vero per i poligoni di $2n-2$ lati, considerando il $(2n-2)$-gono inscritto $A_2A_3 \dots A_{2n-1}$, si deduce che la retta $A_{2n-1} A_2$ passerà per un punto fisso S della u; e quindi applicando il teorema al quadrangolo $A_1A_2A_{2n-1}A_{2n}$, i cui lati A_1A_2, A_2A_{2n-1}, $A_{2n-1}A_{2n}$ passano pei punti fissi S_1SS_{2n-1}, si conclude che il lato $A_{2n}A_1$ passerà per un punto fisso S_{2n} della u, c. d. d.

Osservazione 1.ª Dal teorema dimostrato segue che: *Il problema di inscrivere in una conica un* 2n*-gono tale che i suoi lati passino per* 2n *punti assegnati sopra una retta, non ammette nessuna soluzione oppure ne ammette infinite.* Invero, se $S_1S_2 \dots S_{2n}$ sono i punti assegnati sulla u, prendendo un punto A_1 di k come 1° vertice del $2n$-gono da costruirsi, il vertice A_2 sarà l' ulteriore intersezione di k con la retta A_1S_1, il vertice A_3 l' ulteriore intersezione di k con la retta A_2S_2, ..., il vertice A_{2n} l' ulteriore intersezione di k con $A_{2n-1} S_{2n-1}$. Se il lato $A_{2n}A_1$ non taglia la retta u nel punto S_{2n}, ma nel punto S, variando comunque il punto A_1 da cui partimmo, il lato $A_{2n}A_1$ passerà sempre per S, ed il problema non ammetterà soluzioni; mentre se $A_{2n}A_1$ taglia u nel punto S_{2n}, ogni punto della conica si potrà assumere come vertice A_1, cioè il problema ammetterà infinite soluzioni.

Osservazione 2.ª Dal teor. 16 si trae pure una soluzione del problema: *Inscrivere in una conica un* (2n*—1)-gono tale che i suoi lati passino per* 2n*—1 punti, dati sopra una retta.* Si costruisca un poligono $A_1A_2 \dots A_{2n}$ inscritto in k e di cui $2n-1$ lati passino ordinatamente per i $2n-1$ punti dati. L' ultimo lato $A_{2n}A_1$ taglierà la retta u, a cui appartengono questi punti, in un punto fisso S, indipendente dalla posizione sulla conica del 1° vertice A_1. Il problema sarà risoluto quando avremo trovato quelle posizioni di A_1 per cui A_{2n} coincide con A_1. È chiaro che queste posizioni sono i punti di contatto delle tangenti mandate da S alla conica. Il problema è di 2° grado.

Il teor. 16 è di BRIANCHON (1810). Le conseguenze contenute nelle Osservazioni trovansi in PONCELET (1822).

17. *Costruire una conica passante per tre punti reali* ABC *e tangente a due date rette* r, s.

Diciamo R, S i punti di contatto incogniti risp. con r, s. L' involuzione individuata sulla retta AB dalla coppia AB e dalla coppia R_1S_1 dei punti ove la AB è segata da r, s, ha un punto doppio nell' intersezione della AB con la retta RS (*E.* § 65); e analogamente l' involuzione individuata sulla AC della coppia AC ed R_2S_2 (ove $R_2 \equiv AC \,.\, r$, $S_2 \equiv AC \,.\, s$), dovrà avere un punto doppio nell' intersezione di AC con RS.

Dunque intanto perchè la conica richiesta esista, bisognerà che le involuzioni $\begin{pmatrix} AR_1 \\ BS_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} AR_2 \\ CS_2 \end{pmatrix}$ sieno entrambe iperboliche, cioè che *i tre punti ABC cadano in un medesimo angolo completo* rs.

Viceversa, se questa condizione è soddisfatta e quindi le involuzioni $\begin{pmatrix} AR_1 \\ BS_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} AR_2 \\ CS_2 \end{pmatrix}$ sono iperboliche, coi punti doppî rispettivi U_1V_1 e U_2V_2, ogni retta che congiunga un punto doppio dell' una con un punto doppio dell' altra, segherà le r, s in due punti tali, che la conica passante per essi e per A, B, C, toccherà le due rette r, s; cioè sarà una soluzione del problema.

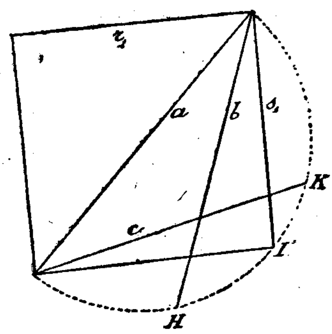
Dunque in tal caso si ottengono 4 soluzioni reali, corrispondenti alle rette U_1U_2, U_1V_2, V_1U_2, V_1V_2.

OSSERVAZIONE 1.ª *Se le due rette date* r, s *sono immaginarie* (cioè son date come raggi doppî di un' involuzione ellittica in un fascio), le considerazioni precedenti continueranno a sussistere, con la sola variante che i punti R_1S_1 saranno immaginari coniugati, e così i punti R_2S_2. In tal caso dunque le due involuzioni $\begin{pmatrix} AR_1 \\ BS_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} AR_2 \\ C\,S_2 \end{pmatrix}$ saranno di necessità iperboliche, cioè il problema sarà risoluto da quattro coniche reali, che si potranno costruire facilmente, perchè ciascuna di esse risulterà individuata dai tre punti ABC e da una coppia di punti immaginari (*E.* § 63).

Osservazione 2.ª Lo stesso procedimento permette di *costruire una conica passante per tre punti reali e bitangente ad una conica data (reale o immaginaria);* e ciò in base al teorema di Desargues-Sturm pei fasci-schiera. Nel ragionamento precedente basterà intendere che i punti R_1S_1 ed R_2S_2 sieno le intersezioni della conica data con le rette AB, AC. È facile vedere (tenendo presente anche la proprietà delle involuzioni ellittiche di non contenere coppie immaginarie) che *il problema avrà 4 soluzioni reali allora e solo allora che i tre punti dati sono tutti interni o tutti esterni rispetto alla conica.* In particolare dunque *il problema avrà 4 soluzioni reali, quando la conica data è immaginaria.*

18. *Il luogo dei centri delle iperbole equilatere inscritte in un triangolo, è il circolo rispetto a cui quel triangolo è autopolare.*

Sieno $a, b, c,$ i lati del triangolo dato. Le infinite iperbole del sistema si ottengono costruendo le coniche che toccano a, b, c e che passano per le coppie dell' involuzione assoluta.



Sia RS una tal coppia ed r_1s_1, r_2s_2 le coppie di raggi che la proiettano dai vertici ab, ac di due angoli *acuti* del triangolo. Traducendo per dualità le considerazioni del n.° prec., si vede anzitutto che affinchè esistano iperbole reali per R, S e inscritte in abc, bisogna e basta che non si separino nè le coppie ab, r_1s_1, nè le coppie ac, r_2s_2. Per l' ipotesi che gli angoli ab, ac sieno acuti, il terzo vertice bc dovrà dunque risultare interno al rettangolo di cui $r_1 r_2$, $s_1 s_2$ son coppie di tali opposti; e quindi il triangolo abc dovrà essere *ottusangolo* in bc. Viceversa, se questa condizione è soddisfatta, esisteranno infiniti rettangoli aventi per diagonale il lato opposto all'angolo ottuso, e contenenti nell'interno il vertice bc (nella fig. son tutti quelli che hanno un vertice nell'arco di circolo HIK); sicchè vi saranno infinite coppie dell'involuzione assoluta, ciascuna delle quali darà 4 soluzioni reali.

Se $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ sono i raggi doppi delle involuzioni $\begin{pmatrix} ar_1 \\ bs_1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} ar_2 \\ cs_2 \end{pmatrix}$, da ogni punto comune ad un raggio doppio dell'una e ad un raggio doppio dell'altra, esciranno due rette tangenti in R,S ad un'iperbole inscritta in abc: dunque i punti $L \equiv u_1 u_2$, $M \equiv u_1 v_2$, $N \equiv v_1 u_2$, $P \equiv v_1 v_2$ saranno i centri delle 4 soluzioni corrispondenti alla coppia RS.

Poichè le $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ separano armonicamente le coppie ab, ac, il quadrangolo LMNP avrà per triangolo diagonale abc, e quindi questo triangolo sarà autopolare rispetto a tutte le coniche passanti per LMNP. Siccome inoltre le bisettrici delle coppie di lati opposti $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ (che sono le rette $r_1 s_1$, $r_2 s_2$) son parallele tra loro, si conclude che i 4 punti LMNP appartengono ad un circolo (§ 12, n.° 13. Oss. 3ª). Questo circolo ha il centro nel punto delle altezze di abc (§ 10, n.° 4).

OSSERVAZIONE. Risulta da quanto precede che *ogni triangolo circoscritto ad un' iperbole equilatera è ottusangolo, o, in particolare, rettangolo, quando due lati coincidano cogli asintoti.*

Il teor. 18 è dovuto a SEYDEWITZ (1843).

19. *Costruire una conica tangente ad una retta* u *e passante per due punti reali e per una coppia di punti immaginari, o per due coppie di punti immaginari.*

Tutte le coniche soddisfacenti all'una o all'altra delle ultime condizioni enunciate, formano un fascio Σ, che sega sulla u le infinite coppie di un' involuzione (§ 12, n.° 5) della quale già si conosce una coppia, che è segata dalle due rette contenenti le due coppie date di punti base. Per trovare un' altra coppia dell' involuzione, basterà assumere sulla u un punto arbitrario, e costruire l' ulteriore intersezione di u con la conica di Σ passante per quel punto; il che si sa fare linearmente, tanto se due punti base son reali, quanto se tutti sono immaginari (*E.* § 63).

Una volta individuata l' involuzione, se ne costruiranno i punti doppî U,V (§ 6, n.° 14) e, se questi son reali, le coniche di Σ passanti per U, V daranno le due soluzioni reali del problema.

20. *Sulle trasformazioni quadratiche tra piani.*

a) Ricordando i teoremi dimostrati ai n.[i] 10, 11 di questo §, possiamo dire che, dato un fascio di coniche Σ (di un tipo qualunque), chiamando omologhi due punti del piano di Σ, allorquando sono coniugati rispetto a tutte le coniche del fascio, si ottiene una corrispondenza involutoria biunivoca, la quale fa passare da una retta (generica) del piano ad una conica non degenere, che è la conica polare di quella retta rispetto a Σ.

Esistono nel piano dei punti (*fondamentali*) che sono eccezionali per la corrispondenza, in quanto ciascuno di essi non ha l' omologo determinato. Nel caso in cui il fascio Σ ha i 4 punti base reali e distinti ABCD, è chiaro che i soli punti pei quali si verifica questa indeterminazione, sono i punti diagonali EFG del quadrangolo base. Invero ciascuno di questi vertici ha per coniugato, rispetto a tutte le coniche di Σ, ogni punto della retta che congiunge gli altri due.

Le rette EF, FG, GE diconsi *fondamentali* per la corrispondenza: ad un punto generico di una di esse corrisponde un punto fisso, che è il vertice opposto nel triangolo EFG; e ai due vertici situati su quel lato, corrispondono gl' infiniti punti dei lati rispettivamente opposti.

Finchè una retta del piano non passa per E, F, G, ai punti di quella retta corrispondono i punti di una conica, la quale dovrà contenere i coniugati dei punti in cui la retta data sega le tre rette fondamentali, cioè i punti EFG (cfr. coll'Oss. 2ª al n.° 11 del § 12). Se la retta viene a passare per uno dei punti fondamentali, la conica polare corrispondente si scinde nella retta fondamentale opposta, e nella coniugata armonica della retta data rispetto ai due lati del quadrangolo, che concorrono in quel punto fondamentale.

Il punto omologo di un punto P del piano, esterno alle rette fondamentali, si ottiene come ulteriore intersezione delle coniche passanti per EFG, e corrispondenti alle infinite rette uscenti da quel punto. Se il punto P cade sopra una retta fondamentale, ma è diverso da un punto fondamentale, le coniche che corrispondono a due rette per P, non si potranno segare in un punto diverso dai fondamentali, chè altrimenti le rette condotte per P si taglierebbero in un punto esterno alle rette fondamentali, contro il supposto. Dunque (§ 12, n.° 2) quelle coniche si toccano in uno dei tre punti fondamentali. Tenendo conto della *continuità* della corrispondenza, si vede che il punto fondamentale di contatto è opposto alla retta fondamentale su cui cade il punto P; sicchè può dirsi che ai punti di una retta fondamentale corrispondono i punti infinitamente vicini al punto fondamentale opposto.

Si conclude pertanto che:

« Dato un fascio di coniche, se si chiamano omologhi
« due punti del piano che sieno coniugati rispetto a tutte
« le coniche del fascio, si ottiene una corrispondenza biu-
« nivoca (involutoria) la quale fa passare da una retta
« generica del piano ad una conica. »

« Se il fascio ha i 4 punti base reali e distinti, le coniche
« che corrispondono alle rette del piano, son quelle passanti
« pei punti diagonali EFG del quadrangolo base. Ad un
« punto infinitamente vicino ad uno dei punti fondamentali
« E,F,G, corrisponde un punto della retta fondamentale op-
» posta; e variando quel punto attorno al punto fonda-

« mentale, il punto corrispondente varia descrivendo la « retta fondamentale opposta. Quando una retta viene a « passare per un punto fondamentale, la conica corrispon- « dente si scinde nella retta fondamentale opposta e in « un' altra retta residua. »

Una trasformazione siffatta, tra due piani sovrapposti, si chiama una *corrispondenza quadratica* (involutoria), per ricordare ch' essa muta le rette in coniche; il qual fatto analiticamente si traduce in ciò: che le coordinate omogenee dei punti dell' un piano, si esprimono come forme intere di 2° grado (quadratiche) delle coordinate omogenee dei punti dell' altro. Per ulteriori dettagli su questa corrispondenza quadratica involutoria, vedasi il n.° 2 del § 14.

b) Un altro esempio di una corrispondenza quadratica involutoria tra i punti di un piano, si ottiene fissando nel piano una conica, reale o immaginaria, k — cioè una polarità non uniforme o uniforme — un punto O, e chiamando omologhi due punti P,P′, allorquando sono allineati con O e coniugati rispetto alla conica.

Invero, mentre il punto P si muove descrivendo una retta, il punto omologo P′ varia conservandosi sempre comune al raggio OP e alla polare p di P rispetto a k; e poichè i raggi OP, p descrivono due fasci proiettivi alla punteggiata descritta da P, si conclude che il punto P′ descrive una conica. Questa conica passa pel punto O e pei punti di contatto R, S delle tangenti, reali o immaginarie, mandate dal punto O alla conica k, se O non appartiene a k; o tocca la conica k in O, se questo punto appartiene a k. Inoltre la conica descritta da P′ sega ulteriormente k nei punti comuni a k e alla retta data.

Se O non appartiene a k, i punti fondamentali per la trasformazione sono i punti ORS; e si può verificare ch' essi godono delle stesse proprietà già viste pei punti fondamentali della trasformazione *a*). — Senonchè, nel caso attuale, ad O corrispondono i punti di RS, ad R i punti di OR, ad S i punti di OS.

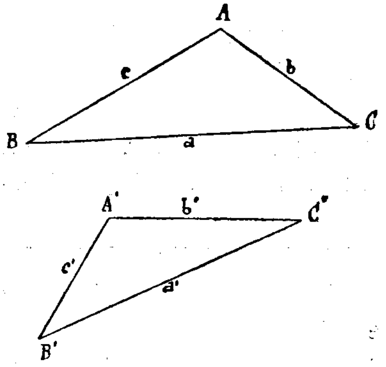
Se O appartiene a k, i tre punti fondamentali vengono infinitamente vicini, cioè le coniche corrispondenti alle rette del piano, non soltanto toccano in O la k, ma tra loro si osculano. — In ogni caso la conica k appare come luogo di punti uniti.

Supponendo che la conica k sia un circolo reale o immaginario — cioè che si tratti di una polarità o di un'antipolarità rispetto ad un circolo (§ 9, n.° 7) — e che il punto O coincida col centro del circolo, si ricade nelle *trasformazioni per raggi vettori reciproci,* già studiate al n° 19 del § 8.

c) Si sa che una trasformazione collineare tra due piani π, π' è individuata assegnando una proiettività tra il fascio A di π e il fascio A′ di π', e una proiettività tra il fascio B di π e il fascio B′ di π', in guisa che nelle due proiettività al raggio AB corrisponda il raggio A′B′ (*E.* § 45).

Se si toglie la restrizione che in entrambe le proiettività al raggio AB corrisponda A′B′, e si chiamano ancora omologhi due punti P, P′ dei due piani, quando nelle proiettività tra A,A′ e B,B′ ai raggi PA, PB del primo piano, corrispondono i raggi P′A′, P′B′ del secondo piano, tra i due piani si ha una corrispondenza quadratica (la quale, se π, π' sono sovrapposti, non è in generale involutoria).

Diciamo b', a' le rette dei fasci A′,B′ che corrispondono al raggio $c \equiv$ AB pensato nel fascio A o nel fascio B; e b, a le rette dei fasci A, B che corrispondono al raggio $c' \equiv$ A′B′ pensato nel fascio A′ o nel fascio B′; e poniamo inoltre C $\equiv ab$ e C′ $\equiv a'b'$.



Ai punti di una retta per A, diversa dalle b,c, corrispondono i punti di una retta per A′, diversa dalle c', b'; anzi, siccome la punteggiata sulla retta per A e quella sulla retta per A′, son sezioni dei due fasci proiettivi B, B′, la corrispondenza tra le due punteggiate risulterà proiettiva. Analogamente ai punti di una retta per B, corrispondono proiettivamente i punti di una retta per B′.

Se un punto P di π si muove sopra una retta r uscente da A (diversa dalle b, c) avvicinandosi al punto A, la retta PB si avvicina a c, e quindi il punto P′ corrispondente a P, si muove sulla retta omologa r', in modo che la retta P′B′ tende ad a'; cioè il punto P′ si avvicina al punto comune alle a', r'.

Sicchè ad un punto infinitamente vicino ad A, corrisponde un punto della retta a'; e la corrispondenza tra le direzioni uscenti da A e i punti della a' è proiettiva, perchè la a' è prospettiva al fascio A′, che alla sua volta è proiettivo ad A.

Analogamente ai punti di π infinitamente vicini a B, corrispondono i punti della retta b'; e la corrispondenza tra le direzioni per B e i punti di b' è proiettiva.

Consideriamo ora una retta r di π uscente da C e diversa dalle a, b. Mentre un punto P descrive r, i raggi A′P′, B′P′, omologhi dei raggi AP, BP, descrivono due fasci, che, essendo riferiti proiettivamente ai due fasci prospettivi descritti dai raggi AP, BP, son proiettivi. Ma giacchè nella prospettività tra i fasci (AP), (BP), al raggio b corrisponde il raggio a, e d'altronde nella proiettività data tra A, A′ e B, B′, ai raggi b, a corrisponde il raggio c', si conclude che nella proiettività tra i fasci (A′P′), (B′P′), il raggio comune c' è unito; ossia che i due fasci son prospettivi. Ne segue che il punto P′ descriverà una retta r', la quale passerà per C′, perchè al punto rc della r, corrisponde il punto $C' \equiv a'b'$.

Così ad ogni retta uscente da C viene a corrispondere una retta uscente da C′, e la corrispondenza tra i fasci C e C′ è proiettiva, perchè i due fasci si possono pensare come proiezioni (da C e C′) di due punteggiate omologhe uscenti da A, A′.

Se un punto P si muove sopra una retta uscente da C, avvicinandosi a C, il punto P′ corrispondente si muoverà sulla retta corrispondente, avvicinandosi ad un punto di c';

onde ai punti infinitamente vicini a C corrispondono i punti di c', ed anzi la corrispondenza tra le direzioni per C e i punti di c' è proiettiva. Considerazioni analoghe possono farsi scambiando l'ufficio dei due piani.

I *punti* ABC, A'B'C' dei piani π, π' sono i soli che abbiano gli omologhi indeterminati, e si dicono *fondamentali*. Ad essi corrispondono ordinatamente gl'infiniti punti delle *rette fondamentali* $a'b'c'$, abc.

Se un punto P di π si muove descrivendo una retta r non passante per nessuno dei punti fondamentali, i raggi A'P', B'P', corrispondenti ai raggi AP, BP, descrivono due fasci che risultano proiettivi, perchè son riferiti proiettivamente ai due fasci prospettivi (AP) (BP). Ma siccome al raggio c', pensato nel fascio (A'P'), corrisponde nel fascio (B'P'), il raggio che, nella proiettività data tra B e B', è l'omologo del raggio B . rb, dall'ipotesi che il punto rb sia diverso dai punti fondamentali, si trae che il raggio c' non è unito: cioè che il luogo del punto P' è una conica (non degenere) la quale passerà evidentemente pei punti A'B'C'. E analogamente, se si scambia l'ufficio dei due piani.

Se in ciascuno dei due piani π, π' si fissano come elementi fondamentali delle coordinate proiettive [1] i punti A, B, C e A,'B,'C', e si prendono come punti unità due punti omologhi U, U', indicando con $x_1x_2x_3$ le coordinate proiettive omogenee di un punto P di π, con $x'_1x'_2x'_3$ le coordinate proiettive omogenee del punto corrispondente P' di π', e rappresentando coi simboli A(BCUP), B(ACUP),... i birapporti delle quaderne di raggi che da A, B,... proiettano le quaderne di punti BCUP, ACUP,..., avremo:

$$\mathrm{A\,(BCUP)} = x_2 : x_3 \quad , \quad \mathrm{A'\,(B'C'U'P')} = x'_2 : x'_3$$
$$\mathrm{B\,(ACUP)} = x_1 : x_3 \quad , \quad \mathrm{B'\,(A'C'U'P')} = x'_1 : x'_3.$$

[1] Ved. p. e. il Cap. XI della *Geometria analitica* di E. D'Ovidio (Torino, Fratelli Bocca, 3ª ed. 1903).

Poichè le due quaderne di raggi A (CBUP), A′ (B′C′U′P′) son proiettive, si avrà:

$$A\,(CBUP) = A'\,(B'C'U'P'),$$

cioè:

$$x'_2 : x'_3 = \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}.$$

Analogamente:

$$x'_1 : x'_3 = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_3},$$

e quindi avremo le *formole di trasformazione:*

$$\rho x'_1 = x_2 x_3\ ,\ \rho x'_2 = x_1 x_3\ ,\ \rho x'_3 = x_1 x_2$$
$$\sigma x_1 = x'_2 x'_3\ ,\ \sigma x_2 = x'_1 x'_3\ ,\ \sigma x_3 = x'_1 x'_2,$$

ove ρ, σ sono fattori di proporzionalità arbitrarî.

La trasformazione di cui ci siamo ora occupati, è la più generale trasformazione quadratica tra due piani.

d) Un altro mezzo di ottenere una trasformazione quadratica tra due piani non sovrapposti π, π', è quello di riferirli mediante una *proiezione sghemba.*

Si assumano nello spazio due rette sghembe uu', non appartenenti ai due piani, e si chiamino omologhi due punti di questi piani, quando la loro congiungente si appoggia ad u, u'. Per un punto dell'un piano esce una retta che si appoggia alle u, u' e che segna sull'altro piano il punto omologo; sicchè la corrispondenza tra i due piani è biunivoca.

Ma vi sono delle eccezioni alla biunivocità della corrispondenza. In primo luogo i punti A, B in cui il piano π è segato dalle u, u', hanno per corrispondenti risp. tutti i punti delle rette a', b' ove il piano π' è segato dai piani Au', Bu. Poichè da un punto di π, diverso da A, B, esce una sola retta appoggiata alle u, u', affinchè l'omologo di quel punto riesca indeterminato, bisogna che questa retta appartenga a π'. Dunque in π si ha come terzo punto fondamentale l'intersezione C della retta $\pi\,\pi'$, con la retta c', che congiunge i punti $A' \equiv u\pi'$, $B' \equiv u'\pi'$.

Analogamente sul piano π' si hanno come punti fondamentali: il punto A', a cui corrispondono tutti i punti della retta fondamentale $a \equiv BC$; il punto B', a cui corrispondono i punti della $b \equiv AC$ e il punto $C' \equiv AB\,.\,\pi\pi'$, a cui corrispondono i punti della $c \equiv AB$.

Ai punti di una retta generica r del piano π, corrispondono i punti in cui π' è segato dalle generatrici della schiera rigata che ha per direttrici le r, u, u' (§ 11, n.° 5), cioè i punti di una conica passante per A', B', C'; e analogamente ai punti di una retta generica del piano π', corrispondono in π i punti di una conica, che passa per A, B, C.

Non ci tratteniamo ad esaminare cosa accade allorchè una retta di uno dei piani π, π' viene a passare per uno dei punti fondamentali, perchè il lettore è ormai in grado di farlo da sè.

Le prime corrispondenze quadratiche, che si presentino in ordine di tempo, son le trasformazioni per raggi vettori reciproci, di cui abbiamo parlato al n° 19 del § 8. — Un altro esempio di trasformazioni quadratiche, si desume dalla descrizione organica delle coniche, dovuta a Newton (§ 10, n° 25).

La particolare corrispondenza quadratica, che nasce tra i punti di un piano, chiamando omologhi due punti che sieno coniugati rispetto a tutte le coniche di un fascio, fu scoperta da Poncelet (1822); e più tardi Magnus (1832-33) considerava le corrispondenze (quadratiche) rappresentate da due equazioni bilineari tra le coordinate dei punti di due piani, cioè riguardava come omologhi due punti dei due piani, reciproci rispetto a due date correlazioni. Le corrispondenze quadratiche furon pure studiate analiticamente da Plücker (1830-35).

La corrispondenza quadratica tra due piani riferiti mediante una proiezione sghemba (Schiefe Projection), fu scoperta da Steiner (1832); quella che nasce tra i punti di un piano chiamando omologhi due punti allineati con un punto fisso e coniugati rispetto ad una conica, da Bellavitis (1838); e infine la generazione di una corrispondenza quadratica con due coppie di fasci di raggi proiettivi, da Seydewitz (1846).

È merito grande del nostro CREMONA (1863-65) di aver considerato le più generali trasformazioni algebriche biunivoche tra i punti di due piani — o spazî — (di cui le proiettività e le corrispondenze quadratiche son casi particolari), e di averne compreso l'importanza per lo sviluppo della moderna geometria algebrica. Queste trasformazioni, in onore allo scopritore, si chiamano appunto *cremoniane*.

CAPITOLO SESTO

Proiettività tra forme elementari e intersezioni di due coniche.

§ 13. *Applicazioni della teoria delle corrispondenze proiettive tra forme elementari.*

SOMMARIO: *Generalità — Ancora sopra un' estensione del teorema di* PASCAL *— Scomposizione di una proiettività nel prodotto di due involuzioni — Involuzione unita di una proiettività tra i punti di una conica — Tutti i problemi determinati, risolubili colla riga e col compasso, si risolvono anche colla riga e con l' uso di un arco di circolo di dato centro, oppure colla riga a due bordi di lunghezza finita — Punto di* FRÉGIER *— Conica inviluppata dalle rette che riuniscono le coppie di punti omologhi in una proiettività data sopra una conica. Proprietà di due coniche bitangenti. Il teorema di chiusura ad esse relativo. Le due regioni multiforme ed uniforme, di un fascio-schiera — Luogo del 3° vertice di un trilatero, che sia circoscritto ad una conica ed abbia due vertici mobili sopra due rette fisse. Poligoni inscritti in una conica ed i cui lati passano per punti fissi — Conica inviluppata dalle corde di una conica vedute da un punto di quest' ultima sotto angolo costante. Luogo del vertice di un angolo mobile circoscritto ad una parabola — Corde di una conica vedute da un punto qualunque secondo le coppie di un' involuzione. Luogo del vertice di un angolo retto circoscritto ad una conica a centro — Sull' area di un triangolo circoscritto ad una parabola. Area di un settore ellittico. Condizione perchè due segmenti di una conica a centro sieno equivalenti — Omologie o prospettività intercedenti tra due coniche che si segano in due punti. Coniche omotetiche — Diametri equiconiugati di un' ellisse — Costruzioni di una conica a centro per punti o per tangenti, dati due diametri coniugati, in posizione e grandezza. Costruzione* *dell' ellisse per moto continuo. Compasso ellittico. Anomalia eccentrica. Teorema di* Joachimsthal *sulle anomalie eccentriche di quattro punti appartenenti ad un circolo. Teorema di* Steiner *sui circoli osculatori che passano per un punto di un' ellisse. I circoli osculatori ad un' ellisse in 4 punti di un circolo, segano ulteriormente la curva in 4 punti di un altro circolo — Teoremi di* Steiner *sui triangoli di area massima inscritti in un' ellisse. Teorema di* Durrande *sui quadrangoli (o quadrilateri) di area massima (o minima) inscritti (o circoscritti) ad un' ellisse. Determinazione dei poligoni di area massima (o minima) inscritti (o circoscritti). Ellisse di area massima (o minima) inscritta (o circoscritta) ad un quadrilatero. — Costruzioni di* Frézier *e di* Chasles *degli assi di un' ellisse di cui son dati due diametri coniugati in posizione e grandezza. Teorema di* Apollonio — *Coniche osculatrici e coniche aventi un contatto quadripunto. Fasci relativi. Estensione ad essi del teorema di* Desargues-Sturm.

1. Due coniche (luogo od inviluppo) si dicono *proiettive* quando i loro elementi si corrispondono biunivocamente mediante una proiettività tra i piani a cui esse appartengono. Questa proiettività trasforma la polarità relativa ad una di quelle coniche, nella polarità relativa all' altra (*E.* § 66).

Una corrispondenza proiettiva tra due coniche è perfettamente individuata, quando sieno assegnati di 3 elementi dell' una gli omologhi nell' altra; cioè esiste tra i loro piani una determinata proiettività, nella quale riescono omologhe le tre coppie assegnate, e che trasforma l' una conica nell' altra.

Se due coniche luogo son proiettive, i fasci che proiettano i punti omologhi da due punti arbitrarî delle due coniche, risultano proiettivi; e viceversa, se due coniche luogo son riferite biunivocamente in guisa che i loro punti omologhi vengano proiettati da due punti di esse secondo fasci proiettivi, le due coniche son proiettive.

La teoria delle proiettività tra due coniche, si può sviluppare anche partendo da un' altra definizione, che, mediante l' ultimo teorema richiamato, si riconosce subito essere equivalente alla definizione posta in principio.

La nuova definizione a cui alludiamo, perfettamente analoga a quella (di STAUDT) che si suole adottare per la proiettività tra due forme fondamentali, richiede che si ponga anzitutto il concetto di gruppo armonico sopra una conica (luogo o inviluppo).

Un *gruppo* di 4 punti di una conica, considerati in un dato ordine, dicesi *armonico*, quando da un punto della conica — e quindi da tutti gli altri (*E.* § 61) — vien proiettato secondo un gruppo armonico di raggi. (Cfr. col n.° 4 — 2ª costr. — del § 5).

Dualmente si definisce un *gruppo armonico di 4 tangenti* di una conica.

Senza parlare dei piani a cui appartengono le due coniche (luogo o inviluppo), si potrà dire ch' esse sono *proiettive*, quando son riferite biunivocamente in modo che ad un gruppo armonico dell' una, corrisponda un gruppo armonico dell' altra. Ma questa seconda definizione, come abbiamo avvertito, non è sostanzialmente diversa dalla prima; cioè due coniche che sien proiettive nel senso della prima definizione, lo sono pure nel senso della seconda; e viceversa.

Se 4 punti ABCD di una conica formano un gruppo armonico, lo stesso accade per le 4 tangenti $a\ b\ c\ d$ in quei punti, perchè la conica luogo e l' inviluppo ad essa aderente, si corrispondono nella polarità di cui quella conica è fondamentale.

Si potrà parlare di corrispondenze proiettive anche tra una conica ed una forma fondamentale di 1ª specie. Due tali figure si diranno riferite proiettivamente, quando tra i loro elementi intercede una corrispondenza biunivoca che conserva i gruppi armonici. Una proiettività tra una conica ed una forma fondamentale sarà individuata da tre coppie di elementi omologhi; ecc., ecc.

Data una proiettività $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ sopra una conica luogo — cioè tra i punti di due coniche sovrapposte — i punti

AB′ . A′B, BC′ . B′C, AC′ . A′C, ... appartengono ad una medesima retta, che dicesi *asse di collineazione* della data proiettività; e se *abc*, *a′b′c′* sono le tangenti nei punti ABC, A′B′C′, le rette *ab′* . *a′b*, *bc′* . *b′c*, *ac′* . *a′c*, ... passano per un medesimo punto — *centro di collineazione* —, che è il polo dell'asse di collineazione, rispetto alla conica (*E.* § 67).

L'asse di collineazione incontra la conica nei punti uniti (eventuali) della data proiettività (*E.* § 67).

Una proiettività sopra una conica è subordinata da una omografia piana, di cui il centro e l'asse di collineazione sono elementi uniti (associati).

Passando ad una rassegna delle principali proprietà metriche delle proiettività sopra una conica, ricorderemo che oltre alle affinità omologiche (armoniche), ciascuna delle quali ha il centro in un punto all'infinito, e per asse il diametro di cui quel punto è polo, vi sono infinite altre affinità trasformanti in se stessa una conica a centro (proprio); e sono quelle che hanno per asse di collineazione la retta all'infinito. Ognuna di queste affinità è ulteriormente individuata da una coppia di punti omologhi proprî della conica.

Ogni affinità trasformante in se stessa una conica a centro, è un'equivalenza affine.

Vi sono ∞^2 (anzichè ∞^1) affinità trasformanti in se stessa una parabola. Ognuna di queste affinità lascia fisso il punto all'infinito della parabola; e quindi è ulteriormente individuata da due coppie di punti corrispondenti della curva. Ogni diametro della parabola è asse per ∞^1 di quelle affinità.

Se ne deduce il teorema di Archimede, che l'area di un settore parabolico è uguale ai $\frac{2}{3}$ dell'area del triangolo circoscritto (*E.* § 67).

Tra le proiettività sopra una conica, meritano uno speciale esame le *involuzioni*, cioè le proiettività coincidenti con le loro inverse. Un'involuzione sopra una conica è sempre subordinata da un'omologia armonica, che ha come centro ed asse, il centro e l'asse di collineazione della data involuzione (*E.* § 68). Ne deriva che le infinite coppie di punti coniugati in un'involuzione data sopra una conica luogo, sono allineate col centro di collineazione (che si chiama anche *polo* dell'involuzione); e dualmente.

Il polo è esterno o interno alla conica, secondo che l'involuzione è iperbolica o ellittica.

Proiettando da un punto di una conica luogo le coppie di un'involuzione, sul relativo asse, si ottengono ivi coppie di punti coniugati rispetto alla conica; e dualmente (*E.* § 69).

Profittando del concetto d'involuzione, si vede subito che ogni retta passante per un punto interno alla conica, è secante; e dualmente che ogni punto di una retta non secante è esterno (donde l'opportunità di chiamare esterna ogni retta non secante). Inoltre sopra una retta secante, i due punti della conica determinano due segmenti complementari, uno dei quali è costituito da punti interni e l'altro da punti esterni. Dualmente si vede che la conica è tutta contenuta in uno degli angoli completi di due sue tangenti.

Questi criterî concernenti i punti esterni ed interni rispetto ad una conica, dànno luogo ad alcune proprietà metriche notevoli, relative ai diametri di una conica (*E.* § 70).

Ogni diametro di un'ellisse è secante; invece per un'iperbole tutti i diametri interni ad uno degli angoli completi formati dagli asintoti, sono secanti (*trasversi* o *reali*), mentre i diametri dell'altro angolo, sono esterni (*non trasversi* o *ideali*). Sicchè nell'ellisse i due assi sono secanti, mentre nell'iperbole uno è secante e l'altro no.

Vertici di una conica sono le sue intersezioni con gli assi: un'ellisse ha 4 vertici (reali), un'iperbole due, ed una parabola ancora due, ma uno è improprio.

Per *lunghezza di un diametro* di un'ellisse, o di un diametro trasverso di un'iperbole, s'intende la lunghezza del segmento finito, determinato dalle intersezioni (estremi del diametro) della conica col diametro.

Ma si può definire anche la *lunghezza di un diametro ideale* di un' iperbole nel modo seguente: Si consideri il diametro reale AA' coniugato del dato diametro ideale d, e si costruisca il parallelogramma di cui due lati opposti son le tangenti t, t' all' iperbole nei punti A, A', e di cui le diagonali sono gli asintoti. Gli altri due lati opposti s, s' tagliano d nei punti B, B', che si assumono come estremi del diametro ideale d, e la loro distanza si assume come lunghezza di questo diametro.

È facile vedere che i punti B, B' son coniugati rispetto all' iperbole, e siccome sono anche simmetrici rispetto al centro della curva (che è poi il centro dell' involuzione ellittica subordinata dalla conica sul diametro d), essi si possono anche definire come i *punti coniugati aventi la distanza minima sopra il diametro ideale* d (§ 6, n° 18).

Profittando della affinità che mutano in sè una conica a centro, si può dimostrare il teorema di APOLLONIO, che in una conica a centro è costante l' area di un parallelogramma avente come vertici gli estremi di due diametri coniugati.

Passeremo ora a discorrere brevemente delle coniche omologiche. Due coniche di un medesimo piano e tangenti in un punto, si corrispondono in una determinata omologia, che ha per centro il punto di contatto; e dualmente (*E.* § 71).

L' asse della prima omologia taglia le due coniche negli stessi punti (*E.* § 71), e ciò è vero anche se l' asse è esterno alle due coniche, come vedremo in seguito. Dualmente per il centro della seconda omologia.

Se due coniche di un piano sono inscritte in uno stesso angolo, oppure hanno comuni due tangenti immaginarie coniugate, si possono riferire omologicamente in due modi diversi, prendendo come centro il punto d' intersezione delle due tangenti comuni. Gli assi di queste omologie tagliano le due coniche negli stessi punti (reali o immaginari); e dualmente.

Da questi teoremi si deducono nuove soluzioni del problema già trattato al n° 17 del § 12 e del problema duale (*E.* § 71).

Un' altra applicazione notevole delle corrispondenze omologiche tra coniche, è la determinazione dell' area di un' ellisse di semiassi a, b; quest' area viene espressa da $\pi a b$ (*E.* § 71).

Le coniche omologiche si trovano studiate per la prima volta in Poncelet (*Traité*...., 1822). La proiettività tra due coniche, come una corrispondenza subordinata da una proiettività tra i loro piani, fu considerata da Möbius (Bary. Calcul, 1827), e da Staudt (Geo. d. Lage, 1847); il quale più tardi (Beiträge, 1856) adottava per le corrispondenze proiettive tra *forme elementari* (forme fondamentali di 1ª specie, coniche, coni quadrici, schiere rigate), la definizione stessa che già aveva dato per la proiettività tra forme fondamentali di 1ª specie.

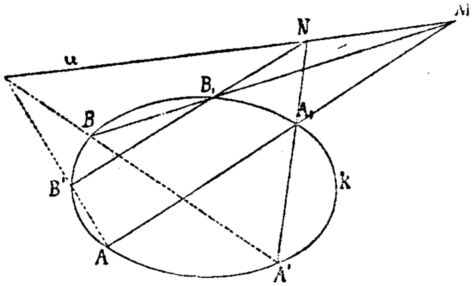
2. *Se dei* 2m + 1 *punti in ciascun dei quali si tagliano due lati opposti di un poligono di* 4m + 2 *vertici, inscritto in una conica,* 2m *giacciono sopra una stessa retta* u, *questa conterrà anche il punto rimanente.*

Per fissare le idee ragioniamo sopra un decagono $A_1A_2 \ldots A_{10}$. Ammettiamo dunque che i lati A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 incontrino i loro opposti A_6A_7, A_7A_8, A_8A_9, A_9A_{10} in punti della retta u. Poniamo tra i punti dalla conica k, in cui è inscritto il decagono, la proiettività $\omega \equiv \begin{pmatrix} A_1A_7A_3 \\ A_6A_2A_8 \end{pmatrix}$. L' asse di collineazione relativo, sarà la retta $A_1A_2 \,.\, A_6A_7$, $A_2A_3 \,.\, A_7A_8$, cioè la retta u; e poichè le rette A_3A_4, A_8A_9, che proiettano i punti A_4, A_9 dai punti omologhi A_3, A_8, si tagliano in un punto di u, nella ω ad A_9 corrisponderà A_4. Similmente ad A_5 corrisponderà A_{10}, perchè le A_4A_5, A_9A_{10} s' incontrano in u. Ne deriva che le rette A_5A_6, A_1A_{10} dovranno pure incontrarsi in un punto di u.

Questo teorema, di cui già abbiamo visto una dimostrazione (dovuta a Möbius) al n° 6 del § 11, trovasi dimostrato nel modo sopra esposto, in Staudt (1847).

3. *Se due rette di un piano ruotano attorno a due punti fissi, in guisa che il loro punto comune scorra sopra una conica, i raggi mobili segnano ulteriormente sulla conica due punteggiate proiettive, e l' asse relativo è la retta che riunisce i punti fissi. Viceversa, ogni proiettività tra i punti di una conica, può generarsi così.*

Sieno M, N i punti fissi, k la data conica, a, a' due raggi uscenti da M, N i quali s' incontrino nel punto A_1 di k, e taglino altrove la conica nei punti A, A'. Al variare del punto A_1, variano i due punti A, A'; e siccome la punteggiata descritta da A risulta involutoria (rispetto al polo M) alla punteggiata descritta da A_1, e questa alla sua volta è involutoria (rispetto al polo N) alla punteggiata descritta da A', si deduce che le punteggiate descritte da A, A' son proiettive tra loro.



Se due altri raggi uscenti da M, N, s' incontrano nel punto B_1 di k e tagliano altrove la conica nei punti B, B', applicando il teorema di Pascal all'esagono $AB'B_1BA'A_1$, si vede che le rette AB', A'B si tagliano in un punto di $u \equiv MN$. Dunque la retta u è l' asse della proiettività tra le punteggiate descritte da A, A'.

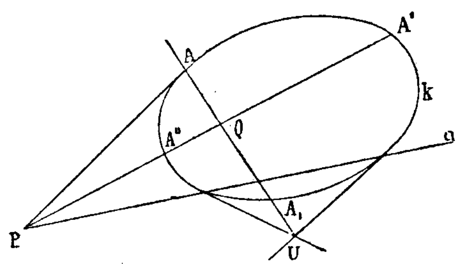
Viceversa, se sulla conica k è data una proiettività ω, di cui sia u l' asse ed A, A' una coppia di punti omologhi, proiettando un punto A_1 della conica da A, A' nei punti M, N della u, due rette uscenti da M, N e incontrantesi in un punto B_1 di k, segheranno ulteriormente la conica in due punti B, B' omologhi nella ω. Invero dal teorema di Pascal, applicato ancora all' esagono $AB'B_1BA'A_1$, si trae che le AB', A'B s' incontrano in un punto di u.

Osservazione. Questa seconda parte del teorema si può enunciare dicendo che *sull' asse di collineazione della proiettività ω si posson sempre determinare due punti, che siano poli di due involuzioni le quali dieno per prodotto ω.*

Scelto ad arbitrio sull' asse di collineazione il polo M di una delle due involuzioni, resta perfettamente determinato il polo N dell' altra.

4. *Il centro e l' asse di una proiettività non involutoria tra i punti di una conica, coincidono col polo e coll' asse della relativa involuzione unita.*

Sieno U, u il centro e l' asse di una proiettività ω data tra i punti di una conica k, ed A, A′ sieno due punti corrispondenti in ω. L'omologo A″ di A nella ω^{-1}, si otterrà proiettando da A′, sulla conica, il punto P ove l'asse u è segato dalla tangente in A. Poichè P appartiene ad u e alla tangente in a, la sua polare rispetto a k, sarà la retta UA, e quindi ponendo $Q \equiv A'A'' \,.\, UA$, il gruppo PQA′A″ risulterà armonico. Proiettando questo gruppo da A sulla conica, avremo un gruppo armonico di punti: il che significa che il coniugato armonico A_1 di A rispetto ad A′A″, è allineato con A ed U, qualunque sia la posizione di A sulla conica.



Ritroviamo così, per altra via, l' involuzione unita di una proiettività (§ 6, n° 12), e vediamo che quest' involuzione ha per polo U (e quindi per asse u).

Osservazione. Nel caso in cui la ω è parabolica, cioè quando u tocca k nell' unico punto unito U, il ragionamento precedente mostra che il coniugato armonico di A rispetto ad A′A″, è il punto fisso U (ved. anche § 6, n° 25, Oss.). Si può dire in tal caso che l' involuzione unita della ω è un' *involuzione degenere,* che ha per polo U ed asse u. Le coppie di quest' involuzione si ottengono riunendo al punto fisso U (*punto singolare*), ogni altro punto della conica. L' involuzione suddetta può dirsi *parabolica,* perchè l' unico suo punto doppio è U.

5. *Sui problemi determinati che si possono risolvere colla riga e col compasso.*

a) I problemi risolubili colla riga e col compasso, cioè i problemi di 2° grado e quelli che si riducono ad una successione di problemi di 2° grado, si possono risolvere con la sola riga, quando sia dato un circolo col suo centro (§ 8, n° 2; *E.* § 74).

Vogliamo completare questo teorema (di PONCELET-STEINER), dimostrando che tutti i problemi suddetti si possono risolvere con la sola riga, anche se è dato un arco (comunque piccolo) di circolo, col suo centro.

Basterà mostrare che, con questi elementi, si può risolvere il problema fondamentale di 2° grado, a cui si riduce ogni altro problema di 2° grado mediante proiezioni e sezioni: quello cioè di costruire gli elementi uniti di una proiettività tra i punti di una retta r.

Se questa proiettività è parabolica (il che si riconosce con operazioni lineari), l' unico punto unito si costruisce linearmente. In caso diverso potremo sostituire alla considerazione della proiettività, quella della sua involuzione unita ω, della quale si sanno costruire linearmente quante coppie si vogliono. Dunque tutto si riduce a trovare gli elementi doppî di ω.

Se le due coppie AB, CD, con cui s' individua l' involuzione ω, si separano, il problema proposto non avrà soluzioni reali. Se esse non si separano, i loro punti si susseguiranno ad es. nell' ordine ABCD, ed il segmento ABCD conterrà i due punti doppi X, Y della ω.

Detto a l' arco tracciato del circolo k', cerchiamo di costruire una proiettività tra la retta r e il circolo k', in modo che ai punti del *segmento* ABCD vengano a corrispondere i punti di un *arco* tutto contenuto in a. Basterà a tal uopo fissare su a tre punti A', B', D', che si succedano nell' ordine scritto, e considerare tra r e k' la proiettività $\tau \equiv \begin{pmatrix} ABD \\ A'B'D' \end{pmatrix}$. Mediante la τ al punto C corrisponde un punto C' dell' arco A'B'D' (tutto contenuto in a).

Poichè i punti doppî dell' involuzione ω' individuata su k' dalle coppie A'B', CD', appartengono all' arco A'B'C'D', questi punti doppî X', Y', si determineranno subito graficamente intersecando *l' arco* stesso con l' asse u' della ω'.

Dopo ciò si otterranno i punti doppî X, Y di ω, trovando gli omologhi di X', Y', nella proiettività τ^{-1}, che fa passare dal circolo k' alla retta r.

Risulta dal ragionamento precedente che il centro dell' arco che si suppone tracciato, non interviene nelle costruzioni, finchè si tratta di un problema grafico; ma se si tratta di un problema metrico, volendolo risolvere colla sola riga, bisognerà introdurre fra i dati l' assoluto, il quale viene determinato assegnando anche il centro dell' arco.

In ogni caso possiamo enunciare il teorema:

Tutti i problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, si risolvono coll' uso della riga e di un arco di circolo di dato centro.

b) Trasportando per dualità il *ragionamento* precedente, si conclude che un problema risolubile colla riga e col compasso, si può pure risolvere coll' uso della riga e di un *arco-inviluppo* appartenente ad un circolo di dato centro. Se il problema ha una sola soluzione reale, questa si costruisce linearmente; se ne ha due, colla sola riga si riesce a determinare due tangenti del dato arco inviluppo, tali che da esse si risale linearmente alle soluzioni del problema.

Da ciò possiamo trarre una conseguenza notevole, che andiamo ad enunciare:

Tutti i problemi determinati risolubili colla riga e col compasso, si risolvono pure coll' uso della sola riga a due bordi di lunghezza finita.

Poichè una riga R a due orli, di lunghezza finita, permette di eseguire qualunque costruzione lineare (così p. e. mediante il teorema dei triangoli omologici, permette di riunire due punti dati fuori del foglio, oppure due punti che sieno più distanti della lunghezza della riga; ecc., ecc., cfr. col § 2, *b*)), basterà provare che, data la riga R, si può individuare sul foglio un arco di circolo di centro conosciuto, e tale che, se da un punto del piano escono due rette che tocchino il circolo in due punti di quell' arco, esse si possano costruire con la riga R.

Fissato un punto O del foglio ed un punto P che disti da O meno della lunghezza λ della riga, ma più della sua larghezza μ, si possono subito tracciare le tangenti a, b al circolo l di raggio μ e centro O, che passano pel punto P, disponendo la riga, nei due modi possibili, in guisa che uno de' suoi bordi passi per P e l' altro per O.

Dei due archi determinati su l dai punti di contatto delle a, b, uno è minore e l' altro è maggiore di mezza circonferenza (poichè per ipotesi le a, b non sono parallele), e ciascuno di essi potrà essere individuato assegnandone una tangente intermedia.

Per tracciare un' altra tangente a quello, dei due archi suddetti, che è minore di mezza circonferenza, basterà muovere la riga R in modo che un suo bordo passi ancora per O, e che l' altro si disponga secondo una retta c, la quale soddisfi alle due condizioni seguenti:

1ª) Il triangolo finito racchiuso dalle abc lasci all' esterno il punto O.

2ª) Il punto O appartenga all' angolo ab (inteso nel senso della Geometria elementare) del triangolo suddetto.

È evidente che queste due condizioni si possono soddisfare in infiniti modi.

Ora proviamo che, se da un punto Q del piano escono due tangenti (reali) del circolo l, appartenenti *entrambe* all'arco-inviluppo *acb* (il quale aderisce ad un arco $\alpha < \pi$), la lunghezza OQ non supera la OP. Invero i punti di contatto delle tangenti che escono da Q, appartengono ambedue all'arco α, sicchè l'angolo β sotto cui quei punti son veduti da O, non supera α (è uguale ad α soltanto quando Q coincide con P). Siccome inoltre

$$OP = \frac{\mu}{\cos \frac{1}{2} \alpha}, \quad OQ = \frac{\mu}{\cos \frac{1}{2} \beta},$$

sarà:

$$OQ \leqq OP.$$

Ricordando che la lunghezza OP è minore della lunghezza λ della riga R, si conclude che sarà $OQ < \lambda$; e d'altronde sarà pure $OQ > \mu$, perchè il punto Q è esterno al circolo l.

Dunque se da un punto del piano escono due tangenti dell'arco inviluppo *acb*, esse si possono costruire colla riga R; cioè l'arco *acb* soddisfa alla condizione richiesta.

La possibilità di sostituire all'uso del compasso, quello della riga a due bordi *indefinita,* fu rilevata dall'Adler (1890); e la possibilità di sostituire al compasso, un arco di circolo di dato centro o una riga a due bordi di lunghezza *finita*, fu dimostrata da me, con un ragionamento leggermente diverso da quello qua esposto. (Rend. del Circolo Mat. di Palermo, 1904).

6. *Le infinite coppie di un' involuzione tra i raggi di un fascio, avente il centro in un punto di una conica, segano ulteriormente su questa le coppie di un' involuzione.*

Detta π la prospettività tra la conica e il fascio ed ω la data involuzione nel fascio di raggi, le coppie di punti segate sulla conica dalle coppie di ω, si corrispondono evidentemente nell'involuzione $\pi\omega\pi^{-1}$.

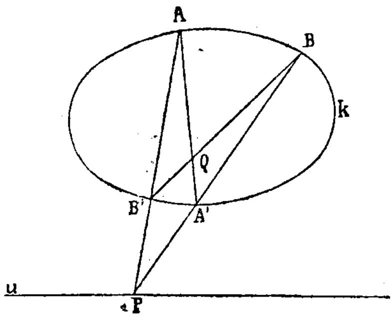
In particolare se la ω è l'involuzione degli angoli retti, si deduce che *le corde di una conica che son vedute da un suo punto fisso sotto angolo retto, passano per un medesimo punto interno alla conica e appartenente alla normale in quel punto fisso.*

Nell'iperbole equilatera tra le corde che son vedute sotto angolo retto, ce n'è una all'infinito, e quindi tutte le corde che si vedono sotto angolo retto da un dato punto dell'iperbole equilatera, son parallele alla normale in quel punto.

Il teor. 6, sotto una forma un po' diversa, è dovuto a Frégier (1816); ma si suol chiamare più specialmente *punto di Frégier*, il polo dell'involuzione segata sopra una conica dagli angoli retti aventi il vertice in un medesimo punto della curva.

7. *Le rette che riuniscono le coppie di punti omologhi nella proiettività tra due coniche sovrapposte, inviluppano una conica non degenere, o (se la proiettività è involutoria) passano tutte per uno stesso punto.*

Sia k la conica che contiene le due punteggiate proiettive sovrapposte ABC...., A'B'C'...., ed u l'asse di collineazione della data proiettività. Fissiamo una congiungente di due punti omologhi, e sia p. es. la AA'; e ad ogni punto P di u, facciamo corrispondere quel punto Q, in cui la AA' vien segata dalla congiungente dei due punti omologhi BB', tali che P $\equiv$ AB'. A'B.



A causa del quadrangolo completo AA'BB', inscritto in k, la polare di P rispetto a k passerà per Q, sicchè la corrispondenza dianzi definita tra P, Q, è una proiettività (*E.* § 60); a meno che, al variare di P, il punto Q resti fisso: il che accade quando Q è il polo di u. Ma in tal caso tutte le rette

AA′, BB′, CC′,.... passano per Q, cioè la data proiettività è un' involuzione di polo Q.

Escludendo il caso dell' involuzione, possiamo dunque dire che la punteggiata segata su AA′ dalla congiungente di una coppia variabile MM′ di punti omologhi, è proiettiva alla punteggiata segata su u dal raggio mobile AM′ (o A′M). Analogamente, fissando un' altra retta congiungente due punti omologhi CC′, sulla CC′ la MM′ taglierà una punteggiata proiettiva a quella segnata su u dal raggio variabile CM′ (o C′M); e poichè i fasci descritti da AM′, CM′ son proiettivi, si conclude che sopra due congiungenti fisse AA′, CC′, le altre congiungenti delle coppie di punti omologhi segano due punteggiate proiettive, e quindi (*E.* § 61) che tutte quelle congiungenti formano un inviluppo di 2ª classe.

Se tre congiungenti AA′, BB′, CC′ concorrono in un punto Q, la data proiettività, pel teorema fondamentale, coinciderà con l' involuzione di polo Q, e quindi tutte le congiungenti delle coppie di punti omologhi passeranno per Q.

Sicchè se si esclude il caso dell' involuzione, l' inviluppo di 2ª classe suddetto non sarà mai degenere, ossia sarà costituito dall' insieme delle tangenti di una conica non degenere k_1.

Osservazione 1ª. Per un punto Q della retta AA′ esce un' ulteriore tangente della conica k_1, che si ottiene come congiungente dei punti B, B′ di k tali che le AB′, A′B si taglino nel punto P di u coniugato di Q rispetto a k. Dunque questa ulteriore tangente sarà diversa da AA′ finchè il punto P non cada sulla AA′, ossia finchè Q non separi armonicamente la coppia AA′ insieme al punto AA′ . u. Si conclude pertanto che *sopra ogni congiungente di due punti omologhi, il punto di contatto con* k_1 *è il coniugato rispetto a* k, *del punto ove quella congiungente sega l' asse di collineazione.*

Osservazione 2ª. Se la proiettività data non è parabolica, cioè se l' asse u non è tangente a k, volendo costruire le eventuali tangenti reali di k_1, che escono da un punto O di u, cioè le eventuali coppie di punti omologhi RR′, SS′ allineati con O, si dovranno trovare i punti doppî H, K dell'involuzione individuata sulla u dalla coppia (reale o immaginaria) comune ad u e a k, e dalla coppia ON, ove $N \equiv AA' . u$; e proiettare su k il punto H da A, A′ risp. in R′, R ed il punto K da A, A′ in S′, S. Ciò segue applicando il teorema di Desargues ai quadrangoli AA′RR′, AA′SS′ segati dalla trasversale u.

Poichè i punti di contatto con k_1 delle due tangenti che escono da O, sono coniugati ad O rispetto a k (Oss. prec.), il punto O avrà la stessa polare rispetto alle due coniche k, k_1; e quindi la retta u avrà lo stesso polo U rispetto a k, k_1, e inoltre nel fascio U le due coniche subordineranno la stessa involuzione di rette coniugate. Ciò si può enunciare dicendo che: *La conica* k_1 *inviluppata dalle rette che riuniscono le coppie di punti omologhi in una proiettività, non involutoria nè parabolica, data sopra una conica* k, *è bitangente a questa conica nei punti, reali o immaginari, in cui* k *è segata dall'asse della data proiettività.*

Se la data proiettività è parabolica, cioè se u tocca k nell'unico punto unito U, per un punto O di u, diverso da U, escirà una sola tangente a k_1, diversa da u, cioè una sola retta contenente due punti omologhi RR′. E difatti applicando il teorema di Desargues al quadrangolo AA′RR′ segato dalla u, si vede che il punto AR′ . A′R deve esser doppio per l'involuzione a cui appartiene la coppia ON ($N \equiv AA' . u$) e che ha l'altro punto doppio in U. Ne deriva che la retta u tocca k_1 nel punto U; il che del resto segue pure immediatamente dal fatto che, all'infuori di u, non vi sono per U altre rette che possano riguardarsi come congiungenti di due punti omologhi. E siccome il punto di contatto con k_1 della tangente ulteriore, che esce dal punto O di u, è coniugato ad O rispetto a k (Oss. 1ª), si conclude che *nel caso in cui la proiettività data su* k *è parabolica, la conica* k_1

tocca k *nell' unico punto unito, ed anzi ogni punto dell' asse di collineazione (che è la tangente comune) ha la stessa polare rispetto alle due coniche.* — Ciò si può esprimere dicendo che *le due coniche hanno un contatto quadripunto nel punto unito* (§ 12, n° 4, Oss. 2ª).

Poichè da ogni punto di k, che non sia unito, escono in ogni caso due tangenti reali di k_1, le quali congiungono quel punto cogli omologhi nella proiettività diretta e nell' inversa, potremo dire che *in ogni caso i punti di* k *sono tutti esterni a* k_1, *tranne gli eventuali punti uniti, i quali appartengono a* k_1.

La conica inviluppata dalle rette che congiungono le coppie di punti omologhi nella proiettività tra due coniche sovrapposte, trovasi in Göpel (1844), Staudt (1847), ecc. Se si abbandona l' ipotesi che le due coniche proiettive sieno sovrapposte, si ottiene in generale un inviluppo di rette di 4ª classe (Schröter, 1857).

8. *Date due coniche bitangenti in punti reali o immaginari, i punti di una (almeno) delle due coniche (esclusi quelli di contatto) sono tutti esterni all' altra, e le tangenti di quest' ultima segano sulla prima due punteggiate proiettive.*

Dire che due coniche k, k_1 son bitangenti in due punti, reali o immaginari, equivale a dire che esistono una retta u ed un punto U, non appartenentisi, che sono polare e polo rispetto alle due coniche, e inoltre che queste subordinano la medesima involuzione di raggi coniugati nel fascio U. I punti di contatto saranno reali o immaginari, secondo che quest' involuzione è iperbolica o ellittica.

Consideriamo un punto P di k diverso dagli eventuali punti di contatto reali e congiungiamolo con un altro punto Q di k, pure diverso dai punti di contatto suddetti. La retta PQ incontra u in un punto H, che ha la stessa polare h rispetto a k, k_1, sicchè posto $\mathrm{H}' \equiv \mathrm{PQ} \,.\, h$, la coppia $\mathrm{P_1Q_1}$ dei punti comuni a k_1 e a PQ sarà armonica con la HH′ al pari *della PQ. Ne deriva che, se la coppia P_1Q_1 è reale, le due coppie PQ, P_1Q_1 non si separono, e quindi i due punti P,Q sono entrambi esterni o entrambi interni a k_1 (E. § 69); se* poi la P_1Q_1 è immaginaria, i due punti PQ risultano senz' altro ambedue esterni a k_1.

Dunque se un punto di k è esterno (o interno) a k_1, tali sono tutti (esclusi, beninteso, gli eventuali punti di contatto).

Da ciò si trae che una *almeno* delle due coniche è tutta costituita da punti esterni all'altra; giacchè se una di esse, p. e. k_1, è tutta costituita da punti interni a k, una tangente di k_1, passando per un punto interno a k, risulterà secante rispetto a questa conica (*E.* § 69), sicchè i punti di k risulteranno tutti esterni a k_1. Si può precisare maggiormente osservando che se u risulta esterna alle due coniche, cioè se i punti comuni sono immaginari, una delle coniche è tutta interna all'altra; mentre se u è secante, una è interna all' altra o sono mutuamente esterne, secondo che sono inscritte o no nello stesso angolo, dei due formati dalle tangenti comuni.

Supponiamo ora che la conica k risulti esterna a k_1, e diciamo AA' i punti reali ove k è tagliata da una tangente di k_1, che sia secante rispetto a k. Tra i punti di k esiste una ben determinata proiettività ω che ha per asse di collineazione u e che fa passare da A ad A' (*E.* § 67). Poichè la retta AA' non contiene il polo di u, pel n.° prec. le coppie di punti omologhi in ω son congiunte da rette inviluppanti una conica, la quale deve esser bitangente a k nei punti comuni a k ed u e inoltre deve toccare AA' nel coniugato armonico del punto u. AA' rispetto alla coppia AA': dunque la conica inviluppata da quelle congiungenti coincide con k_1 (*E.* fine del § 52).

Se le due coniche k, k_1 *hanno un contatto quadripunto*, cioè se toccano in U una medesima retta u, subordinando la stessa proiettività tra i punti di u e le rette di U, si vede in modo analogo che una delle due coniche è tutta interna all' altra, e che le tangenti della prima segano sulla seconda due punteggiate riferite mediante una proiettività parabolica col punto unito in U.

Osservazione 1.ª Le considerazioni svolte permettono di stabilire subito, per due coniche bitangenti, k, k_1, il *teorema di chiusura di* Poncelet, già dimostrato in generale al n.° 13 dal § 10. Invero, se esiste un n-gono inscritto in k e circoscritto a k_1, di vertici $AA'A'' \dots A^{(n-1)}$, la proiettività che su k è individuata dalla coppia AA' di punti corrispondenti e dall' asse di collineazione u (ove u è la corda di contatto delle coniche date), sarà ciclica d' ordine n, perchè possiederà il ciclo $AA' \dots A^{(n-1)}$ (§ 6, n.° 19); e quindi ogni punto di k si potrà assumere come 1° vertice di un n-gono inscritto in k e circoscritto a k_1.

Ricordando proprietà già vedute delle proiettività cicliche (§ 6, n.ⁱ 20, 21) potremo dire che:

Affinchè due coniche bitangenti ammettano un n*-gono (reale) di Poncelet* ($n \geq 3$), *inscritto nell' una e circoscritto all' altra, è necessario che i loro punti di contatto sieno immaginari. Se esiste un tale* n*-gono, ne esistono infiniti, ed ogni punto della conica che contiene nel suo interno l'altra, può assumersi come 1° vertice per uno di questi* n*-goni. I gruppi di vertici di due tali* n*-goni son proiettivi tra loro.*

Osservazione 2.ª In un fascio-schiera di coniche che non abbia i punti base impropri, c' è sempre una parabola non degenere (ed una sola). Se u è la retta che riunisce i due punti base, reali o immaginari, del fascio-schiera, il punto all' infinito di u ha per polare, rispetto a tutte le coniche del fascio, una retta che sega la retta impropria nel punto di contatto della parabola suddetta.

Dalle cose esposte in questo n.° risulta che *la regione dei punti interni alla parabola appartenente ad un fascio-schiera, coi punti base propri, è solcata soltanto da ellissi del fascio, mentre la regione dei punti esterni è solcata soltanto da iperbole.*

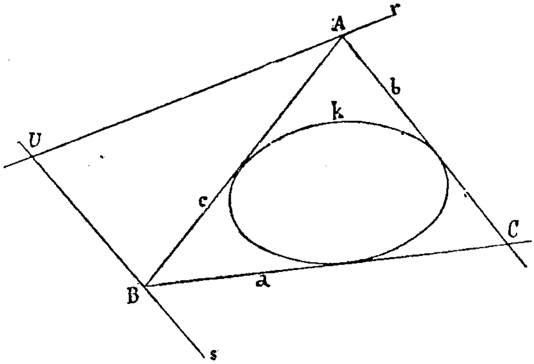
Se i due punti base A,B son reali, ed U è il polo della u rispetto a tutte le coniche del fascio, i punti del piano si suddividono in due regioni: la *regione multiforme*, solcata da ellissi, iperbole e da una parabola, e che riempie l' angolo AUB (nel senso della Geom. elementare); e la *regione uniforme*, solcata soltanto da iperbole, che ricopre l' altra porzione di piano.

Se i due punti AB sono immaginari, si possono ancora distinguere le due regioni: la regione multiforme, traversata da ellissi, iperbole e da una parabola, ricopre il semipiano limitato da $u \equiv AB$, e che contiene il polo U della u; mentre la regione uniforme, solcata soltanto da iperbole, ricopre l' altro semipiano.

Il sistema di due coniche bitangenti fu studiato da Poncelet (1822), che ne scoprì molte proprietà proiettando le due coniche in due circoli concentrici (il che è possibile solo quando i punti di contatto di quelle coniche sono immaginari), ed argomentando col principio di continuità, quando questa proiezione non è possibile. Le due regioni multiforme ed uniforme, in cui si distribuiscono i punti del piano rispetto alle coniche di un fascio schiera, furono considerate da Cayley (1859).

9. *Se un trilatero, mantenendosi sempre circoscritto ad una conica, si deforma in guisa che due suoi vertici scorrano lungo due rette fisse, il terzo vertice descrive in generale una conica bitangente alla data, e la corda di contatto ha per polo il punto d' intersezione delle due rette fisse.*

Sia $abc \equiv ABC$ il dato trilatero circoscritto alla conica k, ed r, s le rette fisse lungo le quali scorrono i vertici A, B. Al variare di c le tangenti a,b corrispondono alla c in due involuzioni, che hanno per assi rispettivi r, s, sicchè le a, b si corrispondono in una proiettività, e quindi (pel teor. duale di quello dimostrato al n.° 7), il punto C ad esse comune descrive una conica bitangente a k. La corda di contatto, che è l' asse della proiettività tra $a, b,$ avrà per polo rispetto a k (ed anche rispetto all'altra conica), il centro di collineazione della proiettività tra a, b (*E.* § 67), cioè il punto $U \equiv rs$ (§ 13, n.° 3).



Osservazione. Tutto ciò vale soltanto quando la proiettività π, prodotto delle involuzioni ρ, σ, di assi r, s, non sia involutoria. Se, al contrario, $\pi \equiv \pi^{-1}$, il punto C descriverà una retta, che sarà la polare, rispetto a k, del punto $U \equiv rs$ (§ 13, n.[i] 3, 7). Ora la condizione perchè $\pi \equiv \pi^{-1}$, è che le due involuzioni ρ, σ sieno permutabili, cioè che le rette r, s sieno coniugate rispetto a k. Dunque:

Se un triangolo circoscritto ad una conica k, *si deforma in guisa che due suoi vertici scorrano lungo due rette* r, s *coniugate rispetto a* k, *il terzo vertice descrive la polare del punto* rs *rispetto alla conica.* Ciò si verifica pure direttamente facendo capo al teorema di Staudt (*E.* § 60).

Il teor. 9 trovasi in Poncelet (1822).

10. *Se un* n-*gono semplice* $A_1A_2 \ldots A_n$ *rimanendo sempre inscritto in una conica data, si deforma in guisa che* n-1 *de' suoi lati passino per altrettanti punti fissi, il lato rimanente inviluppera una conica bitangente alla data o passerà per un punto fisso.*

Invero, mentre il poligono si deforma in modo che i suoi lati A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ passino pei punti dati $P_1 ... P_{n-1}$, la punteggiata descritta da A_1 risulterà involutoria a quella descritta da A_2, rispetto al polo P_1; quelle descritte da A_2 ed A_3 risulteranno involutorie rispetto al polo P_2, ecc. Onde tra la punteggiata descritta da A_1 e quella descritta da A_n intercederà una corrispondenza proiettiva, prodotto delle involuzioni di poli $P_1 ... P_{n-1}$, e quindi (§ 13, n.° 7) la retta A_1A_n inviluppera una conica k_1 bitangente alla data k, o passerà per un punto fisso, secondo che la proiettività tra A_1 ed A_n non è oppure è involutoria.

OSSERVAZIONE 1.ª Volendo *inscrivere in una conica data* k *un poligono* $A_1A_2 ... A_n$ *i cui lati* A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, *passino ordinatamente pei punti dati* $P_1P_2 ... P_n$, basterà costruire i punti uniti della proiettività che sulla k nasce come prodotto delle involuzioni $\omega_1\, \omega_2 ... \omega_n$ di poli $P_1 ... P_n$: ciascuno di questi punti uniti si potrà prendere come vertice A_1 di un poligono soddisfacente alle condizioni richieste, e di cui risulteranno completamente determinati gli altri vertici $A_2 ... A_n$. E per costruire i punti uniti della proiettività $\omega_1\, \omega_2 ... \omega_n$, sappiamo che si deve intersecare la conica con l'asse di collineazione di questa proiettività (*E.* § 67). Il problema, dipendendo dalla determinazione degli elementi uniti della proiettività $\omega_1 ... \omega_n$, avrà due, una o nessuna soluzione; e potrà averne anche infinite, quando quella proiettività diventi identica. Ciò accade p. e, per $n = 3$, quando i punti $P_1P_2P_3$ formano un triangolo autopolare rispetto a k. Infatti in tal caso le involuzioni ω_1, ω_2, che hanno per poli i punti P_1P_2, coniugati rispetto alla conica k, dànno per prodotto un'involuzione che ha per asse la retta P_1P_2 e che ha dunque per polo il punto P_3. Sarà quindi $\omega_1\omega_2 \equiv \omega_3$, cioè $\omega_1\omega_2\omega_3 \equiv 1$. Anzi, siccome il ragionamento è invertibile, si può dire che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano infiniti triangoli inscritti in una conica e circoscritti ad un dato triangolo, è che questo sia autopolare rispetto alla conica* (cfr. col n.° 3 del § 10, Oss. 3.ª).

OSSERVAZIONE 2.ª Quando i punti dati $P_1 \dots P_n$ stanno sopra una retta u, la proiettività $\omega_1\omega_2 \dots \omega_n$ ammette o non ammette come punti uniti i punti UV comuni ad u e alla conica k, secondo che n è pari o dispari. Questa considerazione getta nuova luce sul teorema di chiusura dimostrato al n. 16 del § 12 (Oss. 1ª); giacchè, se, essendo n pari, esiste un n-gono coi vertici distinti $A_1A_2 \dots A_n$ ed i cui lati $A_1A_2, \dots, A_nA_1$ passino ordinatamente pei punti $P_1 \dots P_n$, la proiettività $\omega_1 \dots \omega_n$ possiederà i tre punti uniti UVA_1; onde sarà identica. Dal che segue che ogni punto della conica potrà prendersi come primo vertice di un n-gono soddisfacente al problema.

Il problema di inscrivere in una conica k un n-gono i cui lati passino ordinatamente per n punti dati, fu risoluto da PAPPO (Coll. mat.) nel caso in cui $n = 3$, k è un cerchio ed i tre punti dati sono in linea retta. Una soluzione geometrica pel caso in cui i 3 punti son assegnati comunque, ma la conica è sempre un circolo, fu data da CASTILLON (1776) ed una soluzione analitica da LAGRANGE (1776). Altre soluzioni dello stesso caso particolare furono poi date da EULERO e FUSS (1780). Per un cerchio e per un numero qualunque di punti, la prima soluzione fu data da A. GIORDANO DI OTTAJANO (1788) e da MALFATTI (1788); per una conica ed n punti allineati da BRIANCHON (1810) (ved. il n.° 16 del § 12); per una conica e 3 punti da GERGONNE (1811). La soluzione generale da noi esposta è dovuta a PONCELET (il quale, naturalmente, perveniva ad essa — nel 1822 — senza far uso del concetto di proiettività tra i punti di una conica).

11. *Le corde di una conica* k *vedute da un punto S della medesima sotto angolo costante, inviluppano una conica bitangente a* k *in due punti immaginari, e le due tangenti immaginarie comuni si segano nel punto di* FRÉGIER *relativo ad S.*

La congruenza diretta ω, generata tra i raggi del fascio S da una rotazione di ampiezza uguale all'angolo dato, sega sulla conica k (fuori di S) una proiettività ellittica $\pi\omega\pi^{-1}$, ove π è la prospettività tra la conica ed il fascio S. E se l'angolo dato non è retto, la proiettività $\pi\omega\pi^{-1}$ non è involutoria. Dunque intanto le corde che son vedute da S sotto l' angolo dato, inviluppano una conica bitangente a k in due punti immaginari, ed il punto in cui s' incontrano le tangenti immaginarie comuni, è il centro di collineazione di $\pi\omega\pi^{-1}$ (§ 13, n.° 7, Oss. 2ª).

Poichè l' involuzione unita della proiettività $\pi\omega\pi^{-1}$ è segata su k dall' involuzione unita di ω, cioè dall' involuzione circolare del fascio S (§ 6, n.° 12), si conclude che il centro della proiettività $\pi\omega\pi^{-1}$ è il punto di Frégier relativo ad S (§ 13, n.ⁱ 4 e 6).

12. *Il luogo del vertice di un angolo di grandezza costante, che si muova mantenendosi sempre circoscritto ad una parabola, è una iperbole i cui asintoti formano un angolo doppio del dato, o è una retta, se l' angolo dato è retto.*

Invero, se l' angolo ab di grandezza costante si muove mantenendosi circoscritto alla parabola k, le punteggiate descritte dai punti all' infinito di a, b si corrispondono in una congruenza diretta ω; sicchè, dicendo π la prospettività tra l' inviluppo delle tangenti di k e la retta all' infinito del suo piano, i due inviluppi di 2ª classe sovrapposti descritti dai raggi a, b, si corrisponderanno nella proiettività ellittica $\pi\omega\pi^{-1}$; e quindi (pel teorema duale di quello dimostrato al n.° 7 del § 13) il punto ab descriverà una conica, oppure una retta. Quest' ultimo caso potrà presentarsi solo se la proiettività $\pi\omega\pi^{-1}$ (e quindi la ω) è involutoria; cioè soltanto se l' angolo ab è retto.

Se ab non è retto, la conica descritta dal punto ab sega la retta all' infinito nei punti che corrispondono al punto all' infinito della parabola mediante la ω e la ω^{-1}: sicchè si conclude che essa è un' iperbole i cui asintoti formano un angolo doppio del dato.

Il teor. 12 fu dimostrato per via analitica da De La Hire (1685), e geometricamente (giovandosi delle proprietà dei fuochi) da Poncelet (1822).

13. *Le corde di una conica* k *vedute da un punto S, non appartenente a* k, *secondo coppie di un' involuzione* ω, *inviluppano una conica* k_1, *la quale subordina nel fascio S l' involuzione* ω; *e inoltre le polari di S rispetto a* k, k_1 *coincidono.*

Sieno a, a' due raggi coniugati nell' involuzione ω, i quali seghino k risp. nei punti AB, A'B'. Una corda di k che sia veduta da S secondo una coppia dell' involuzione ω, sega le rette $r \equiv AA'$, $r' \equiv BB'$ in due punti che vengono pure proiettati da S secondo una coppia di ω: come si vede applicando il teorema di Desargues al quadrangolo inscritto ABA'B'. E viceversa, se una retta sega le r, r' in due punti proiettati da S secondo una coppia di ω, essa taglierà k in due punti che godono della stessa proprietà. Dunque le corde di k soddisfacenti alla condizione richiesta, congiungono i punti omologhi di una proiettività tra r, r'; e quindi esse inviluppano una conica k_1.

Poichè il quadrilatero costituito dalle rette AA', BB', AB', A'B, è circoscritto a k_1, il suo trilatero diagonale, che è formato dalle rette aa' e dalla polare s di S rispetto a k, sarà autoconiugato rispetto a k_1 (*E.* § 57), cioè le aa' saranno coniugate rispetto a k_1 e inoltre la polare di S rispetto a k_1 sarà la retta s, c.d.d.

Osservazione. *La conica* k_1 *può degenerare come inviluppo in due fasci di raggi.* Ciò accade quando il punto comune alle punteggiate proiettive r, r' è unito, cioè quando il punto rr' appartiene ad un raggio doppio di ω. In tal caso si vede che le corde proiettate da S secondo coppie di ω, o passano pel punto rr' o pel punto AB' . A'B.

14. *Il luogo del vertice di un angolo retto circoscritto ad un' ellisse o ad un' iperbole, che sia contenuta nell' angolo acuto de' proprî asintoti, è un circolo concentrico alla curva.*

Pel teorema duale di quello dimostrato al n.° prec., le coppie di tangenti di una conica che segano sopra una retta le coppie di una data involuzione, s'incontrano in punti di un'altra conica che subordina su quella retta la data involuzione; ed i poli di questa retta rispetto alle due coniche coincidono.

Se la conica data è un'ellisse k e l'involuzione assegnata è l'involuzione assoluta, poichè due punti coniugati in quest'involuzione sono sempre esterni a k, vi sono infinite coppie di tangenti perpendicolari della curva e i loro punti d'incontro appartengono ad una conica concentrica a k e che subordina sulla retta all'infinito l'involuzione assoluta; cioè ad un circolo. Considerando il rettangolo circoscritto all'ellisse, che ha per mediane gli assi della curva (*E.* § 70), si vede subito che il circolo suddetto è circoscritto a quel rettangolo, e quindi che ha per raggio $\sqrt{a^2 + b^2}$, ove a, b son le lunghezze dei due semiassi.

Se la conica data è un'iperbole k e l'involuzione assegnata è ancora l'assoluta, tre casi possono presentarsi:

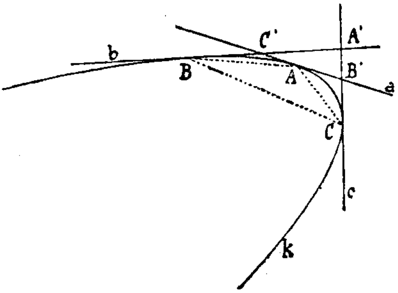
1.°) L'angolo degli asintoti che contiene nel suo interno la curva (*E.* § 69), è acuto. Allora esisteranno infinite coppie dell'involuzione assoluta, costituite da punti esterni a k; e quindi vi sarano infiniti angoli retti circoscritti a k. Il loro luogo sarà ancora un circolo reale, concentrico a k. — Si può dimostrare che il raggio di questo circolo è $\sqrt{a^2 - b^2}$, ove a, b sono le lunghezze rispettive del semiasse trasverso e di quello non trasverso.

2.°) L'angolo degli asintoti è retto, cioè l'iperbole è equilatera. Allora vi sarà una coppia dell'involuzione assoluta appartenente a k, e del resto ogni altra coppia dell'involuzione assoluta sarà costituita da un punto esterno e da un punto interno a k; sicchè in tal caso gli asintoti saranno la sola coppia di tangenti ortogonali.

3.°) L'angolo degli asintoti che contiene la curva, è ottuso. Allora una coppia dell'involuzione assoluta sarà costituita da due punti di cui uno almeno sarà sempre interno a k, e quindi non esisteranno angoli retti (reali) circoscritti alla curva.

Osservazione. Se la curva k è una parabola sappiamo (n.° 12) che il luogo del vertice di un angolo retto circoscritto, è una retta.

Il *circolo direttore o principale,* cioè il luogo dei punti da cui escono tangenti ortogonali di una conica a centro, e la *direttrice*, cioè il luogo analogo per una parabola, furono trovati da De La Hire (1685).



15. *L'area di un triangolo circoscritto ad una parabola è la metà dell'area del triangolo che ha per vertici i punti di contatto.*

Sia $abc \equiv A'B'C'$ il triangolo circoscritto alla parabola k, e sieno A, B, C i punti di contatto dei lati a, b, c. Abbiamo:

$$\text{triang. } BA'C = \text{triang. } BAC + \text{triang. } BC'A + \\ + \text{triang. } AB'C + \text{triang. } C'A'B',$$

e inoltre (*E.* § 67):

$$\frac{2}{3}\ BC'A = \text{seg. } BA,\quad \frac{2}{3}\ AB'C = \text{seg. } AC,$$

$$\frac{2}{3}\ BA'C = \text{seg. } BC.$$

Onde:

$$\text{seg. } BC = \frac{2}{3} \text{ tr. } BAC + \text{seg. } BA + \text{seg. } AC + \frac{2}{3} \text{ tr. } C'A'B',$$

e siccome:

$$\text{seg. } BC = \text{seg. } BA + \text{seg. } AC + \text{tr. } BAC.$$

verrà:

$$\text{tr. } BAC = \frac{2}{3} \text{ tr. } BAC + \frac{2}{3} \text{ tr. } C'A'B',$$

dalla quale si trae:

$$\text{tr. BAC} = 2 \text{ tr. C'A'B'},$$

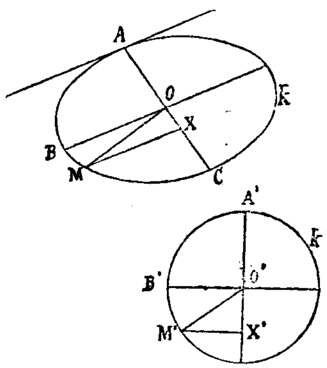
c. d. d.

La prop. 15 è di GREGORY.

16. *Area di un settore ellittico.*

Chiamasi *settore ellittico* la superficie racchiusa da due semidiametri di un' ellisse e da uno dei due archi di ellisse che corrono tra i loro estremi.

Sia AM un arco dell' ellisse k di centro O, che sottenda un angolo minore di 2π; OB il diametro coniugato ad OA; X il punto in cui OA vien segato dalla parallela per M ad OB. Per calcolare l' area del settore OAM, prendiamo in un piano α' due segmenti O'A', O'B' uguali e perpendicolari, e poniamo tra il piano α di k ed il piano α', l' affinità ω che fa passare dalla terna OAB alla O'A'B'. Quest' affinità risulta completamente individuata come l' omografia che fa passare dalle rette OA, OB alle O'A', O'B', subordinando tra OA, O'A' la proiettività $\begin{pmatrix} OAP_\infty \\ O'A'P'_\infty \end{pmatrix}$, ove P_∞, P'_∞ sono i punti impropri di OA, O'A', e tra OB, O'B' la proiettività $\begin{pmatrix} OBQ_\infty \\ O'B'Q'_\infty \end{pmatrix}$, ove Q_∞, Q'_∞ sono i punti impropri di OB, O'B' (*E.* § 45).



L' affinità ω trasforma l' ellisse k in un' ellisse k', che ha due semidiametri coniugati O'A', O'B' uguali e perpendicolari: dunque l' ellisse k' sarà un circolo di centro O' e raggio O'A'.

In relazione al circolo k' si ha:

$$\frac{\text{sett. } O'A'M'}{\text{tr. } O'A'B'} = \frac{\text{arc. } A'M' \times \frac{1}{2} O'A'}{\frac{1}{2} O'A'^2} =$$

$$= \frac{\text{arc. } A'M'}{O'A'} = \text{arc. cos } \frac{O'X'}{O'A'} \text{ [1]},$$

ove M′ è il punto corrispondente ad M, ed X′ l'omologo di X.

Per l'affinità ω che intercede tra k, k', si ha inoltre:

$$\frac{\text{sett. OAM}}{\text{tr. OAB}} = \frac{\text{sett. } O'A'M'}{\text{tr. } O'A'B'}, \quad \frac{O'X'}{O'A'} = \frac{OX}{OA},$$

onde verrà:

$$\text{(1)} \qquad \text{sett. OAM} = \text{tr. OAB arc. cos } \frac{OX}{OA}.$$

Per costruire l'arco il cui coseno è $\frac{OX}{OA}$ (considerato in valore e segno), basterà intersecare il semicerchio di raggio OA con la perpendicolare in X alla retta OA.

Osssrvazione. Se diciamo a, b le lunghezze dei semidiametri OA, OB, θ l'angolo di questi semidiametri e C il punto diametralmente opposto ad A, la formola (1) porge:

$$\text{sett. OAM} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \theta \text{ arc. cos } \frac{OX}{OA}$$

$$\text{sett. OCM} = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \theta \text{ arc. cos } \frac{OX}{OC},$$

le quali sommate membro a membro, dopo averle moltiplicate per 2, dànno:

$$\text{area ellisse} = \pi ab \text{ sen } \theta.$$

[1] Per la validità di questa uguaglianza e delle successive, occorre, manifestamente, che le espressioni *arc. cos* denotino le lunghezze dei relativi archi misurati in *radianti* (cioè prendendo in ogni caso per unità di misura il raggio della rispettiva circonferenza).

In particolare, se a, b sono i semiassi, si ritrova la formola πab per l'area dell'ellisse (*E.* § 71), e inoltre si ritrova il teorema (di APOLLONIO), secondo il quale è costante l'area di ogni parallelogramma inscritto nell'ellisse, e di cui le diagonali sieno due diametri coniugati (*E.* § 67).

La quadratura dell'ellisse e di un segmento parabolico son dovute ad ARCHIMEDE (circa 250 av. Cristo): quella di un settore ellittico a LEIBNIZ (1684). Il procedimento esposto per giungere alla formola di Leibniz è di MÖBIUS (1856).

17. *Due segmenti AB ed A′B′ di un' ellisse o di un' iperbole, sono equivalenti se le corde AB′, A′B risultano parallele; e in tal caso sono pure equivalenti i settori che sottendono quei segmenti.*

Infatti sulla conica k (ellisse o iperbole) la proiettività che ha per asse di collineazione la retta all' infinito e che fa corrispondere al punto A il punto A′, farà passare da B ad un punto tale che la retta che lo congiunge con A risulti parallela ad A′B. Dunque se le AB′, A′B son parallele, a B corrisponde B′, e quindi al seg. AB il segmento A′B′. — Poichè la proiettività tra i punti di k è subordinata da un' affinità equivalente (*E.* § 67), si conclude che i segmenti AB, A′B′ sono equivalenti, e che lo sono pure i settori OAB, OA′B′ (ove O è il centro della conica), perchè si corrispondono nell' affinità suddetta.

18. *Due coniche che abbiano comuni due punti AB, reali o immaginari, per modo che ogni punto della retta AB esterno o interno all' una, sia esterno o interno all' altra, appartengono a due coni quadrici, se non sono complanari, oppure sono omologiche in due modi diversi, se sono complanari.*

Diciamo infatti P,P′ i poli della AB rispetto alle coniche date k, k', e Q, Q′ due punti di queste coniche le cui tangenti si taglino in un punto M di AB. Allora le rette PQ, P′Q′ s' incontreranno nel punto della AB coniugato di M rispetto ad ambedue le coniche, sicchè, se queste son complanari, esisterà un' omologia ben determinata di asse AB, e nella quale P, P' e Q, Q' saranno coppie di punti omologhi; e, se le due coniche non son complanari, esisterà tra i due piani una prospettività di centro $O_1 \equiv PP'.QQ'$, nella quale si corrisponderanno P, P' e Q, Q'.

Sia nell' un caso che nell' altro, l' omografia ω tra i piani delle due coniche, muta k in una conica che tocca in A,B le rette, reali o immaginarie, P'A, P'B, e nel punto Q' la retta MQ'; cioè la ω trasforma k in k'.

Ora, fissato il punto Q di k, in due modi diversi si può scegliere il punto Q' di k' (che dovrà essere di contatto per una delle due tangenti di k' uscenti dal punto M), e quindi avremo due omologie trasformanti k in k', se i piani di k, k' coincidono; oppure due prospettività di centri O_1, O_2 che mutano k in k', se le coniche k, k' non sono complanari. In quest' ultimo caso le due coniche giacciono in due coni quadrici che le proiettano da O_1, O_2.

Si noti che se i punti A, B coincidono, cioè se le due coniche son tangenti, le due omologie o prospettività vengono pure a coincidere.

Osservazione 1.ª Due coniche complanari che seghino la retta all' infinito negli stessi punti, reali o immaginari, staccando sulla retta medesima lo stesso segmento di punti esterni, si potranno riguardare come *coniche omotetiche* (simili e similmente poste, secondo Poncelet) in due modi diversi (o in un sol modo se i punti all' infinito comuni coincidono).

Tutte le coniche omotetiche e concentriche con una data conica a centro, formano un fascio-schiera. *Ogni affinità che muti in se stessa una conica a centro di un sistema di coniche omotetiche e concentriche, muta in se stessa ogni altra conica del sistema.* Invero, le omotetie che si possono porre tra due coniche k, k', che tocchino in due punti all' infinito due date rette, staccando sulla retta impropria lo stesso segmento di punti interni, hanno ambedue per centro il centro comune alle coniche k, k'. Ora un' affinità che muti ogni punto A di k in un punto A' della stessa conica, muterà il punto B di k', corrispondente ad A in una delle suddette omotetie, in un punto B' tale che $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$, cioè nel punto B' di k' che corrisponde ad A' nell'omotetia fissata: onde quell' affinità muterà in se stessa anche la k'. (Cfr. col n.° 15 del § 8).

Alla stessa conclusione si perviene ricordando che ogni affinità che muti in sè una conica a centro, è un' equivalenza affine.

Osservazione 2.ª Le ellissi omotetiche e concentriche ad una data ellisse, formano un fascio-schiera coi punti base immaginari; quindi ogni affinità che muti una di quelle coniche in un circolo, muterà il fascio-schiera in un fascio-schiera di coniche coi punti base nei punti ciclici, cioè in un sistema di circoli concentrici.

Un n-gono regolare inscritto in uno dei circoli del sistema, sarà circoscritto ad un altro circolo del sistema, e, mediante l'affinità, questi due circoli verranno trasformati in due ellissi omotetiche e concentriche k, k', tali che esisterà un n-gono inscritto nell' una, k, e circoscritto all'altra, k'; e quindi esisteranno infiniti n-goni analoghi. Viceversa ogni n-gono inscritto in k e circoscritto a k', si muta, mediante l' affinità, in un poligono regolare.

Ciò permette di dedurre molte proprietà dei poligoni di Poncelet relativi a due ellissi omotetiche e concentriche, dalle proprietà dei poligoni regolari.

19. *In un' ellisse (che non sia un circolo) vi è sempre una ed una sola coppia di diametri coniugati uguali.*

Se in un' ellisse esistono due diametri coniugati uguali, i loro estremi (*E.* § 70) saranno congiunti a due a due dai lati di un rettangolo; e questi lati alla lor volta, pel teorema di Staudt (*E.* § 60), riesciranno paralleli agli assi.

Ne deriva che i due diametri coniugati uguali sono equinclinati su ciascuno degli assi, e quindi costituiscono la coppia comune all' involuzione dei diametri coniugati e alla simmetria rispetto agli assi. Ricordando il n° 18 del § 6, si vede pure che *i due diametri coniugati uguali formano l' angolo acuto minimo.*

Il teor. 19 trovasi in Biot (1810).

20. *Costruire una conica a centro per punti o per tangenti, noti che siano due diametri coniugati in posizione e in grandezza.*

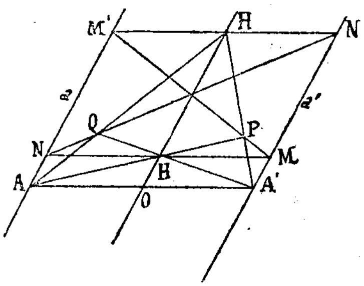
1.ª *Costruzione.* — Sieno AA′, BB′ i due dati diametri ed O il centro della conica. È ben chiaro che con questi dati la conica è individuata appena si sappia se deve essere un' ellisse o un' iperbole: chiamiamola k e proponiamoci di costruirla per punti e per tangenti.

Tra i due diametri dati ce ne sarà sempre uno almeno trasverso, e sia p. es. AA′. I raggi che proiettano da A, A′ le coppie dell' involuzione subordinata da k sull' altro diametro BB′, pel teorema di Staudt (*E.* § 60), si taglieranno in punti della conica. Ora, quest' involuzione, nel caso in cui la conica k da costruirsi debba essere un' ellisse, è perfettamente individuata, perchè ha per punti doppî gli estremi del diametro BB′ (ed ha il centro in O); sicchè si potranno costruire quante si vogliano coppie dell' involuzione stessa: ogni tal coppia, proiettata nei due modi possibili da A, A′, dà origine a due punti di k.

Se poi la conica da costruirsi deve essere un' iperbole, allora l' involuzione subordinata su BB′ avrà il centro in O e in essa saranno coniugati gli estremi B, B′ del diametro non trasverso (come si vede ricordando la definizione degli estremi di un diametro non trasverso). Dunque anche in tal caso l' involuzione sarà individuata, ed ogni sua coppia darà luogo a due punti dell' iperbole.

Vediamo ora come si possa costruire la conica k per tangenti.

Dopo quanto abbiamo detto sulla costruzione della conica per punti, non occorre più distinguere il caso dell' ellisse da quello dell' iperbole ; ed è per questo che nella figura seguente non sono segnati gli estremi BB′ del diametro coniugato al diametro trasverso AA′; i quali estremi, rispetto all' involuzione subordinata sulla BB′, hanno un ufficio diverso, secondo che si tratta di un' ellisse o di un' iperbole.

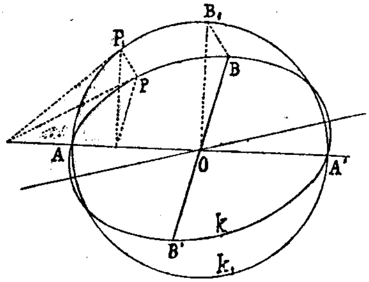


Sia HH′ una coppia dell' involuzione esistente sul diametro BB′, e sia P ≡ AH . A′H′ uno dei due punti della conica relativi a quella coppia. Diciamo inoltre a, a' le tangenti a k in A, A′, cioè le parallele per A, A′ al diametro coniugato.

La polare del punto H, dovendo passare per H′ e pel polo del diametro OH, sarà la parallela H′M′ da H′ al diametro AA′; e analogamente la polare di H′ sarà la parallela HM da H ad AA′. Poichè i tre punti AHP sono allineati, la polare di P, cioè la tangente in P, dovrà passare pel punto M′, comune alle polari di A, H; e, per una ragione analoga, dovrà pure passare pel punto M. Dunque i tre punti MPM′ sono allineati, e la retta che li contiene è la tangente a k in P.

Similmente la tangente a k nel punto Q ≡ A′H . AH′ sarà l' altra diagonale del parallelogramma MNM′N′ (ved. figura). In tal modo per ogni coppia dell' involuzione esistente su BB′, otteniamo due tangenti di k (coi relativi punti di contatto).

2.ª *Costruzione, valida nel caso in cui la conica da costruirsi sia un' ellisse.* Sieno AA′, BB′ i due dati diametri coniugati ed O ≡ AA′ . BB′ il centro dell' ellisse k da costruirsi. Descriviamo il circolo k_1 di centro O e raggio OA, e diciamo OB_1 un raggio di k_1 perpendicolare ad AA′. Esiste una determinata omologia affine che ha per asse la retta AA′, per centro il punto all' infinito della BB_1 e che fa passare da B_1 a B. Quest' omologia trasforma il circolo k_1 in

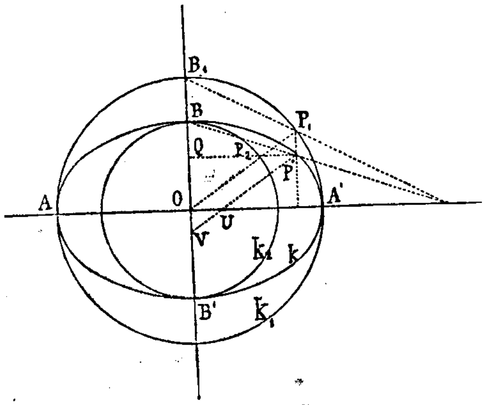


un' ellisse che ha per semidiametri coniugati i segmenti OA, OB, corrispondenti ai due semidiametri coniugati OA, OB_1 del circolo k_1. Dunque l' affinità omologica in questione trasforma il circolo k_1 nell' ellisse richiesta k.

Basterà quindi per trovare dei punti e delle tangenti di k, costruire gli omologhi di alcuni punti e tangenti di k_1 (come indica la fig.).

In particolare, se si tratta di *costruire un' ellisse di cui sono dati gli assi AA′, BB′ in posizione e in grandezza,* basta trasformare il circolo k_1, che ha per diametro uno degli assi AA′, con un' omologia affine la quale abbia per asse AA′, per centro il punto all' infinito dell' asse BB′, e che faccia passare dal punto B ad un punto B_1 di k_1 allineato con B, B′.

L' invariante assoluto dell' affinità omologica che muta k_1 nell' ellisse da costruirsi k, è



$$\frac{OB}{OB_1} = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a},$$

ove b, a denotano le lunghezze dei semiassi OB, OA. Per costruire l' omologo di un punto P_1 di k_1, si conduca da P_1 la perpendicolare P_1P_0 sopra AA′, e dicasi P_2 il punto ove il raggio OP_1 (limitato al punto O), incontra il circolo k_2 di diametro BB′. La parallela da P_2 ad AA′ taglia

P_1P_0 in un punto P, che insieme a P_1 è allineato col centro d'omologia, ed è inoltre tale che:

$$\frac{P_0P}{P_0P_1} = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{b}{a} \quad \text{(invariante dell'omologia);}$$

dunque P corrisponde a P_1 nell'affinità omologica, cioè appartiene all'ellisse k.

La tangente in P all' ellisse si ottiene congiungendo P col punto ove l'asse d'omologia AA′ è tagliato dalla tangente al circolo k_1 in P_1.

Il punto P omologo di P_1 si poteva costruire più speditamente tirando la B_1P_1, intersecandola con l' asse AA′ nel punto M, e intersecando poi la retta P_1P_0 con la BM; ma la costruzione esposta, in cui entra anche il circolo k_2, dà luogo ad alcune conseguenze notevoli.

Invero, se dal punto P di k si tira la parallela alla retta OP_1, dicendo U, V i punti ove questa parallela incontra risp. gli assi AA′, BB′, dal parallelogramma $OUPP_2$ si rileva:

$$UP = OP_2 = b,$$

e dal parallelogramma $OVPP_1$:

$$VP = OP_1 = a;$$

onde, se $a > b$, si ottiene:

$$UV = a - b.$$

Se invece da P si tira una retta r, simmetrica di UV rispetto alla PP_1, e si dicono U′, V′ i punti ove la r sega rispettivamente AA′, BB′, si riconosce facilmente che $U'P = b$, $V'P = a$, onde:

$$U'V' = a + b.$$

Dunque:

Se un segmento di lunghezza invariabile si muove in guisa che i suoi estremi scorrano lungo due rette fisse ortogonali OA, OB, ogni punto P allineato cogli estremi descrive un' ellisse, di cui le rette OA, OB sono gli assi; e le lunghezze dei due semiassi sono uguali alle distanze del punto P dagli estremi del segmento mobile.

Quando di un' ellisse si conoscono gli assi in posizione e in grandezza, essa può sempre descriversi per *moto continuo* nel modo suddetto. Questa generazione si realizza col *compasso ellittico.*

Un' altra conseguenza si può trarre dalla costruzione di un' ellisse di dati assi.

Prendendo l' asse AA' come asse delle x e l' asse BB' come asse delle y, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, e chiamando con φ l' *anomalia eccentrica* $P_1\widehat{O}P_0$, relativa al punto P, la x e la y del punto P, si esprimono mediante le formole:

$$x = OP_0 = OP_1 \cos\varphi, \quad y = P_0P = OQ = OP_2 \operatorname{sen}\varphi,$$

cioè:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$

Dividendo i due membri della 1ª uguaglianza per a, i due membri della 2ª per b, e poi quadrando e sommando, si ottiene l' equazione dell' ellisse riferita ai proprî assi (cfr. col nº 11 del § 10):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

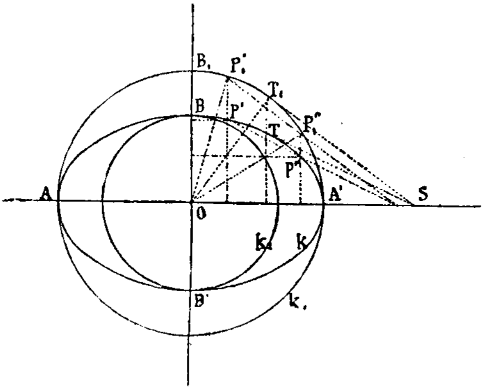
Dalla rappresentazione parametrica (1) si rileva che *un punto della curva determina l' anomalia eccentrica a meno di multipli di 2π.*

La proprietà di un' ellisse di potersi riguardare come omologica affine di un circolo, che abbia per diametro uno de' suoi assi, era nota, sotto forma diversa, ad ARCHIMEDE. La denominazione di *anomalia eccentrica,* fu usata da KEPLERO (1609). La genesi dell' ellisse mediante il movimento di un punto appartenente ad un segmento di lunghezza invariabile, i cui estremi scorrano lungo due rette fisse di un piano, *anche non ortogonali,* fu scoperta dal filosofo greco PROCLUS (410-485 di Cr.). Più tardi SCHOOTEN (1646) dimostrava che ogni punto del piano rigidamente collegato a quel segmento mobile, descrive un' ellisse. DUPIN estese poi (1808) in varî modi queste proprietà, per generare con moto continuo le superficie di secondo ordine.

21. *Se in un' ellisse si considera un sistema di corde parallele, le anomalie eccentriche degli estremi di queste corde dànno una somma costante.*

Sia k la data ellisse di assi AA', BB', e k_1 il circolo di diametro AA', corrispondente a k nell' affinità omologica ω che ha per asse la retta AA', per centro il punto all' infinito dell' asse BB' e che fa passare dal punto B al punto B_1 (ved. figura).

Diciamo $P'_1 P''_1$ i punti di k_1 che corrispondono mediante la ω ai punti $P'P''$ di k, $\varphi'\varphi''$ le anomalie eccentriche di questi ultimi punti (ved. n.° prec.) cioè gli angoli $A'\widehat{O}P'_1$, $A'\widehat{O}P''_1$, (o questi angoli aumentati di multipli di 2π), ed α l'angolo formato dalle rette $P'_1P''_1$ ed AA'.



La tangente a k_1 nel punto medio T_1 dell' arco $P'_1P''_1$, risulta parallela alla corda $P'_1P''_1$, e incontra l' asse d' omologia nel punto S. Poichè il triangolo OT_1S è rettangolo in T_1, avremo:

$$\widehat{SOT_1} + \widehat{T_1SO} = \frac{\pi}{2};$$

e poichè l'angolo

$$\widehat{SOT_1} = \widehat{SOP''_1} + \widehat{P''_1OT_1} = \widehat{SOP''_1} + \frac{1}{2} \widehat{P''_1OP'_1},$$

verrà:

$$\varphi'' + \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'') + \alpha \equiv \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod. } 2\pi),$$

donde:

$$\varphi' + \varphi'' \equiv \pi - 2\alpha. \tag{1}$$

Ciò prova che la somma delle anomalie eccentriche dei punti $P'P''$ dipende soltanto dall' inclinazione sull' asse $A'A''$ della retta $P'_1P''_1$; e siccome quando la retta $P'P''$ varia parallelamente a se stessa, la sua corrispondente nell' affinità

ω varia pure parallelamente a se stessa, si conclude che la somma $\varphi' + \varphi''$ rimane costante mentre la P′P″ si muove parallelamente a se stessa; c. d. d.

OSSERVAZIONE 1.ª Se la retta $P'''P^{IV}$ forma con l'asse AA′ un angolo uguale a quello formato dalla P′P″, ma di verso contrario, la corda del circolo k_1 simmetrica di $P'_1 P''_1$ rispetto all'asse BB′, risulterà parallela alla corda di k_1 che corrisponde a $P''' P^{IV}$; onde avremo

$$(2) \qquad \varphi''' + \varphi^{IV} \equiv \pi + 2\alpha,$$

ove φ''', φ^{IV} sono le anomalie dei punti P''', P^{IV}. Sommando membro a membro le (1), (2), verrà:

$$(3) \qquad \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi^{IV} \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

Viceversa se è soddisfatta la (3), confrontandola colla (1), se ne dedurrà la (2), cioè le rette P′ P″, $P''' P^{IV}$ formeranno con l'asse AA′ (e quindi anche con l'altro asse) angoli uguali, ma di verso contrario. Ricordando il risultato stabilito al n° 13 del § 12 (Oss. 3ª), potremo enunciare il teorema che segue:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè 4 punti di un' ellisse appartengano ad un circolo, è che la somma delle loro anomalie eccentriche sia nulla o multipla di 2π.

OSSERVAZIONE 2ª. Rileviamo ancora esplicitamente una relazione, che ci servirà in seguito. Se una retta tocca l'ellisse in un punto T, di anomalia φ, ed è T_1 il punto di k_1 omologo di T, S il punto ove la tangente al cerchio k_1 in T_1 incontra l'asse AA′, α l'angolo formato da questa tangente con l'asse AA′, dal triangolo rettangolo OT_1S, si rileva:

$$(4) \qquad 2\varphi \equiv \pi - 2\alpha.$$

Il teor. stabilito nell'Oss. 1ª è dovuto ad JOACHIMSTHAL (1847).

22. *Per un punto di un' ellisse passano tre circoli che osculano la curva altrove, ed i tre punti d' osculazione stanno in un circolo col punto primitivo.*

Se il circolo osculatore ad un' ellisse k in un suo punto P, di anomalia eccentrica φ, sega ulteriormente la curva nel punto Q, di anomalia eccentrica ψ, poichè la tangente p in P e la retta PQ debbono formare con un asse angoli uguali, ma di verso contrario (§ 12, n° 15, Oss. 3ª), chiamato α l' angolo formato dalla p con l' asse a cui si riferiscono le anomalie, avremo (n° prec. Oss. 2ª):

$$2\varphi \equiv \pi - 2\alpha,$$

e inoltre:

$$\varphi + \psi \equiv \pi + 2\alpha,$$

cioè:

$$3\varphi + \psi \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Se il punto Q è dato, l'anomalia eccentrica di ogni punto P tale che il circolo osculatore a k in P passi per Q, sarà dunque espressa dalla formola:

$$\varphi = \frac{-\psi}{3} + \frac{2l\pi}{3} \quad (l \text{ intero qualunque}).$$

Poichè due valori di φ congrui rispetto a 2π, dànno lo stesso punto dell' ellisse, i punti distinti soddisfacenti alla condizione suddetta, corrisponderanno a valori di φ incongrui rispetto a 2π; cioè ai valori

$$\frac{-\psi}{3}, \quad \frac{-\psi}{3} + \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{-\psi}{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

Dunque intanto si conclude che per Q passano tre circoli, che osculano l' ellisse nei punti corrispondenti alle suddette anomalie. Siccome inoltre la somma delle anomalie del punto Q e dei tre punti d' osculazione, è congrua a zero, i 4 punti suddetti apparterranno ad un circolo (n° prec.).

Il teor. 22 è dovuto a STEINER (1845). Un' altra dimostrazione dello stesso teorema si ritroverà alla fine del n.° 24.

23. *I circoli osculatori ad un' ellisse in 4 punti di un circolo, segano ulteriormente la curva in 4 punti, che pure appartengono ad un circolo.*

Sieno $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4$ le anomalie eccentriche di 4 punti dell' ellisse appartenenti ad un circolo, cioè soddisfacenti alla condizione (n° 21):

$$(1) \qquad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \equiv 0.$$

Se $\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4$ sono le anomalie delle ulteriori intersezioni dei circoli osculatori all' ellisse in quei 4 punti, avremo (n° prec.):

$$3\varphi_1 + \psi_1 \equiv 0, \quad 3\varphi_2 + \psi_2 \equiv 0, \quad 3\varphi_3 + \psi_3 \equiv 0, \quad 3\varphi_4 + \psi_4 \equiv 0,$$

dalle quali, sommandole membro a membro e ricordando la (1), si trae:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 \equiv 0,$$

e questa esprime che i 4 punti relativi appartengono ad un circolo.

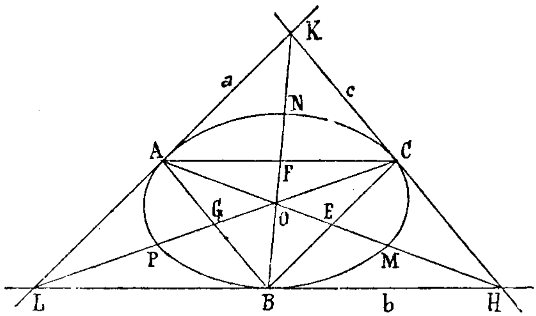
Questa conseguenza del teorema di JOACHIMSTHAL, fu rilevata da CAZAMIAN (1894).

24. *Vi sono infiniti triangoli inscritti in un' ellisse e il cui baricentro cade nel centro della curva. Essi hanno la stessa area, che è la massima tra le aree di tutti i triangoli inscritti nell' ellisse. Le tangenti nei vertici di uno di quei triangoli son parallele ai lati opposti.*

Supponiamo che esista un triangolo ABC inscritto nella ellisse data k, e il cui baricentro (punto delle mediane) cada nel centro O della curva. Allora la mediana di ciascun lato sarà il diametro coniugato alla direzione del lato stesso, sicchè questo lato risulterà parallelo alla tangente nel vertice opposto. Invertendo il ragionamento si vede che, se i lati di un triangolo inscritto son paralleli alle tangenti nei vertici opposti, il baricentro del triangolo coincide col centro della curva.

Vediamo ora come si possano effettivamente inscrivere nell' ellisse infiniti triangoli aventi per baricentro il punto O.

Preso nella curva un punto arbitrario A, si divida per metà in E il semidiametro opposto a quello che passa per A, e



si tiri da E la parallela al diametro coniugato (cioè alla tangente a in A). Questa parallela incontrerà certamente l'ellisse in due punti reali B, C (*E.* §§ 69, 70) simmetrici rispetto ad E: sieno b, c le tangenti alla curva nei punti B, C. Poichè le due rette AE, BC son coniugate, la AE passerà pel punto $H \equiv bc$, e, se diciamo M il punto in cui essa sega k fuori di A, il gruppo AMEH sarà armonico, cioè risulterà (§ 2, n° 15):

$$OM^2 = OE \, . \, OH,$$

dalla quale si trae

$$OH = 4\,OE,$$

od anche:

$$EH = OH - OE = 3\,OE = AE.$$

Ne deriva che la figura ABHC è un parallelogramma, e quindi che il triangolo ABC ha i propri lati paralleli alle tangenti nei vertici opposti, cioè che il suo baricentro è il centro O dell'ellisse.

Poniamo ora tra il piano α di k ed un altro piano α' un'affinità che trasformi il centro dell'ellisse e gli estremi di due semidiametri coniugati, rispettivamente nel centro di un circolo k' di α' e negli estremi di due raggi perpendicolari di k'. Quest'affinità, ben determinata, muterà, come abbiamo già notato più volte (ved. p. e. il n° 16 di questo §), la ellisse k nel circolo k'.

I triangoli inscritti in k e aventi per punto delle mediane il centro della curva, si muteranno evidentemente in triangoli equilateri inscritti in k', e viceversa.

Poichè il rapporto tra le aree di due triangoli inscritti in k, è uguale al rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti, inscritti in k' (*E.* § 50), dal fatto che i triangoli equilateri inscritti in k' sono uguali tra loro, si trae intanto che i triangoli inscritti in k, il cui baricentro cade in O, sono equivalenti. Risulterà provato che essi hanno l' area massima tra tutti i triangoli inscritti in k, quando avremo fatto vedere che *fra i triangoli inscritti in un circolo k', i triangoli equilateri son quelli di area massima.*

Ecco ora come si può dimostrare questo teorema di Geometria elementare.

Se un triangolo A'B'C' inscritto in k' ha due lati *almeno* diseguali, e sieno i lati A'B', A'C', dei due punti in cui il diametro perpendicolare al 3° lato B'C', taglia k', uno dista da B'C' più del vertice A', e quindi esiste un triangolo *isoscele* inscritto nel circolo e maggiore di A'B'C'.

Dunque *se è possibile* trovare un triangolo inscritto di area massima, questo sarà certo equilatero.

Ora fra tutti i triangoli inscritti in k' ve ne sono certamente di quelli che hanno l' area massima. Invero, un triangolo scaleno inscritto è sempre minore di qualche triangolo isoscele inscritto; e ogni triangolo isoscele inscritto è alla sua volta uguale ad un triangolo isoscele inscritto i cui lati uguali concorrano in un punto fissato S' del circolo. Infine fra tutti questi triangoli isosceli col vertice in S', se ne trova uno (almeno) di area massima, perchè la loro area varia con continuità a partire dal valore zero, ritornando a zero.

Osservazione. Se ABC è un triangolo di area massima inscritto nell' ellisse k, il circolo l circoscritto ad ABC taglia k in un altro punto P (§ 12, n° 2), e le coppie di rette AP, BC; BP, CA; CP, AB formano con un asse della conica angoli uguali, ma di verso contrario (§ 12, n° 13, Oss. 3ª). Poichè le rette BC, CA, AB son parallele alle tangenti *a*, *b*, *c* nei vertici opposti, si conclude che le tre coppie di rette *a*, PA; *b*, BP; *c*, CP formano con un asse angoli opposti, e quindi (§ 12, n° 15, Oss. 3ª) i tre circoli osculatori nei punti A, B, C passeranno per P. Dunque:

I circoli osculatori nei vertici di un triangolo d'area massima inscritto in un' ellisse, segano ulteriormente la curva in uno stesso punto, che sta in un circolo coi vertici suddetti.

Invertendo il ragionamento si vede che, se i circoli osculatori in due punti A, B si tagliano nel punto P dell' ellisse, il circolo ABP sega ulteriormente l' ellisse in un punto C tale che ABC è un triangolo d' area massima. Difatti le coppie di rette AP, BC; BP, CA; AP, *a*; BP, *b*, ove *a*, *b* son le tangenti a *k* in A, B, formeranno con un asse angoli opposti; e quindi le coppie di rette *a*, BC; *b*, CA saranno parallele. Ne segue che anche la retta AB è parallela alla tangente *c* in C (*E.* § 64), e perciò il triangolo ABC avrà l' area massima.

Sicchè se per un punto P della curva passa qualche circolo osculatore altrove, ne passeranno certamente tre e soltanto tre, ed i punti d' osculazione saranno vertici di un triangolo d' area massima, il cui cerchio circoscritto conterrà P.

Se si ammette come un fatto intuitivo (che noi non stabiliamo rigorosamente per non dilungarci di soverchio) che mentre il punto d' osculazione di un circolo osculatore descrive l' ellisse, il punto (sempre reale) in cui il circolo sega ulteriormente la curva, si muove descrivendola tutta, si ritrova il teorema di Steiner (§ 13, n° 22), completato con una proprietà notevole del triangolo dei punti d' osculazione.

Il teor. 24 è dovuto a Steiner (1845). Il teorema contenuto nell' osservazione prec. appartiene pure a Steiner, che lo lasciò inedito nei proprî manoscritti.

25. *Fra tutti i quadrangoli semplici e convessi inscritti in un' ellisse, quelli che hanno per diagonali due diametri coniugati, sono di area massima; e fra tutti i quadrilateri semplici e convessi circoscritti, quelli i cui lati toccano l' ellisse negli estremi di due diametri coniugati, sono di area minima.*

Un' ellisse si può mutare in un circolo mediante un' affinità, la quale faccia passare da due semidiametri coniugati dell' ellisse a due raggi ortogonali del circolo (ved. ad es. il n° prec.), ed in questo passaggio due poligoni inscritti (o circoscritti) all' ellisse, si mutano in due poligoni inscritti (o circoscritti) al circolo, le cui aree stanno fra loro come quelle dei poligoni primitivi (*E.* § 50).

Da tutto ciò deriva che, per stabilire il teorema enunciato, basterà dimostrarlo nel caso particolare di un circolo.

Dovremo cioè provare che fra tutti i quadrangoli inscritti in un circolo dato k, i quadrati hanno l' area massima; e fra tutti i quadrilateri circoscritti i quadrati hanno l' area minima.

Cominciamo a dimostrare la cosa pei quadrangoli inscritti.

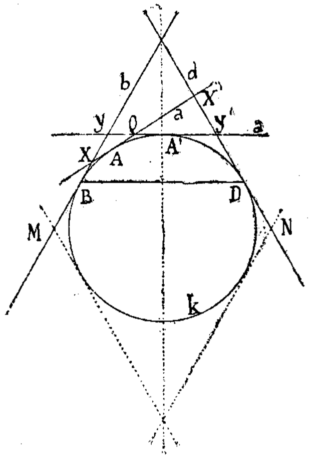
Sia ABCD un quadrangolo semplice convesso inscritto in k, e sieno A′, C′ i punti ove il circolo è tagliato dal diametro perpendicolare alla diagonale BD: allora ciascuno dei triangoli BDA, BDC avrà l' altezza (relativa alla base BD) rispettivamente non superiore di quella dei triangoli isosceli BDA′, BDC′, sicchè l' area del quadrangolo ABCD non sarà superiore di quella del quadrangolo A′BC′D.

Ora l' area di un quadrangolo variabile inscritto, di cui una diagonale sia un diametro fissato A′C′ e l' altra una corda perpendicolare BD, varia con continuità da 0 a 0; dunque quell' area raggiungerà un massimo; e per quanto precede, questo massimo si otterrà allora e solo allora che i due triangoli A′C′B, A′C′D sieno isosceli, cioè allorchè BD sia un diametro del circolo e quindi A′BC′D riducasi ad un quadrato.

Passiamo ora a dimostrare il teorema pei quadrilateri convessi circoscritti.

Stabiliamo a tal uopo il seguente:

Lemma: « Se b, d son due rette che toccano un circolo « k nei punti B, D, ed a è una tangente variabile, il cui punto di « contatto A appartenga sempre « ad uno prefissato degli archi BD, « l'area convessa racchiusa tra le « rette a, b, d, BD, assume il valor « minimo, quando A divide per « metà l'arco fissato BD. »



Diciamo infatti M, N i punti limiti della proiettività segata sulle b, d dalle altre tangenti del circolo, X, X′ i punti in cui le b, d son segate dalla tangente variabile a, ed Y, Y′ i punti in cui esse son tagliate dalla tangente a' nel punto medio A′ dell'arco fissato BD.

Poichè il prodotto MX . NX′ è costante, la somma MX + NX′ sarà minima quando MX = NX′. Se si osserva che i punti M, N sono equidistanti da B, D (o coincidono con questi punti, quando le b, d son parallele), si vede che la somma MX + NX′ diviene minima allorchè il punto variabile di contatto cade in A′. Dunque finchè a è diversa da a', avremo:

$$\mathrm{MX} + \mathrm{NX}' > \mathrm{MY} + \mathrm{NY}',$$

ossia:

$$\mathrm{BX} + \mathrm{DX}' > \mathrm{BY} + \mathrm{DY}'. \tag{1}$$

Esaminando la proiettività che le tangenti di k pongono tra b, a' e tra a', d, si vede che al segmento finito BY di b corrisponde il segmento finito YA′ di a', e al segmento finito A′Y′ di a', il segmento finito Y′D della d; e quindi se a sega a' nel punto Q interno al segmento finito YA′, il punto X cadrà nel segmento finito BY ed il punto X′ fuori del segmento finito Y′D.

Se dunque $YQ < QY'$, dalla (1) si trae:

$$(BY - XY) + (DY' + Y'X') > BY + DY',$$

ossia:

$$X'Y' > XY.$$

Si conclude pertanto che i lati XY, YQ del triangolo XYQ son rispettivamente minori dei lati X′Y′, QY′, del triangolo X′Y′Q; e poichè l'angolo compreso tra i primi, è il supplemento di quello compreso tra i secondi, avremo:

$$\text{area } XYQ < \text{area } X'Y'Q,$$

donde:

$$\text{area } BYY'D < \text{area } BXX'D;$$

e ciò qualunque sia la tangente a che tocchi k in un punto A dell' arco BA′D, diverso dal punto A′. Dunque l' area BYY′D è minima fra tutte le aree analoghe.

Ciò posto, sia $abcd$ un quadrilatero convesso i cui lati tocchino il circolo k nei punti ABCD, e supponiamo che il lato a non sia parallelo alla corda $p \equiv BD$, che riunisce i punti di contatto dei lati adiacenti. Se A′ è il punto medio dell' arco BAD, ed a' è la tangente in quel punto, l' area convessa $abpd$, per quanto precede, sarà maggiore dell' area $a'bpd$; e quindi l' area del quadrilatero $abcd$ sarà maggiore dell' area del quadrilatero $a'bcd$.

Dunque dato un quadrilatero circoscritto, che abbia almeno un lato non parallelo alla corda che riunisce i punti di contatto dei due lati adiacenti, esisteranno infiniti quadrilateri circoscritti di area inferiore.

Perchè dunque un quadrilatero circoscritto abbia l' area minima, bisognerà e *basterà* che ogni suo lato sia parallelo alla retta che riunisce i punti di contatto dei due lati adiacenti, cioè che si tratti di un quadrato.

Osservazione 1ª. Il ragionamento da noi fatto per caratterizzare i quadrangoli inscritti o i quadrilateri circoscritti ad un circolo, che hanno risp. l'area massima o minima, si estende immediatamente e dà luogo al teorema:

« Fra tutti gli n-goni convessi inscritti in un circolo,
« quelli di area massima son caratterizzati dalla proprietà
« di esser regolari; e fra tutti gli n-lateri convessi circo-
« scritti, quelli di area minima son caratterizzati pure dalla
« proprietà di esser regolari. »

Se ricordiamo che nell'affinità tra un circolo ed un'ellisse ad ogni poligono regolare inscritto (o circoscritto) al circolo, corrisponde un poligono inscritto (o circoscritto) all'ellisse data, e circoscritto (o inscritto) in un'ellisse omotetica e concentrica rispetto alla data (§ 13, nº 18, Oss. 2ª), otteniamo questa notevole proposizione:

Fra tutti gli n*-goni (o* n*-lateri) convessi inscritti (o circoscritti) ad un' ellisse, quelli di area massima (o minima) son caratterizzati dalla proprietà di essere circoscritti (o inscritti) in un' ellisse omotetica e concentrica; e i gruppi dei loro vertici (o lati) son cicli di una medesima proiettività ciclica di ordine* n. (§ 13, nº 8, Oss. 1ª).

Osservazione 2ª. Data un'ellisse k, di cui sieno a, b due semidiametri coniugati inclinati di un angolo θ, l'area E dell'ellisse sarà espressa da (§ 13, nº 16, Oss.):

$$E = \pi a b \operatorname{sen} \theta ;$$

l'area m del parallelogramma circoscritto, i cui lati toccano l'ellisse negli estremi dei due diametri, sarà data da

$$m = 4 a b \operatorname{sen} \theta ;$$

e infine l'area M del parallelogramma inscritto, che ha per vertici gli estremi di quei diametri, da:

$$M = 2 a b \operatorname{sen} \theta .$$

Sicchè: « Il rapporto tra l'area di un'ellisse e la mi-
« nima area quadrangolare circoscritta, è espresso da $\frac{\pi}{4}$; ed
« il rapporto tra l'area dell'ellisse e la massima area qua-
« drangolare inscritta da $\frac{\pi}{2}$.

Ciò posto, essendo dato un parallelogramma di area m, tra le infinite ellissi in esso inscritte, se ne vuol trovare una di area massima.

Se un'ellisse k' non tocca i lati del parall. nei loro punti medî, esisterà un parallel. circoscritto a k' di area minima $m' < m$; sicchè l'area di k' sarà espressa da $\frac{\pi m'}{4}$, e risulterà minore dell'area $\frac{\pi m}{4}$ dell'ellisse che tocca i lati del dato parallel. ne' loro punti medî.

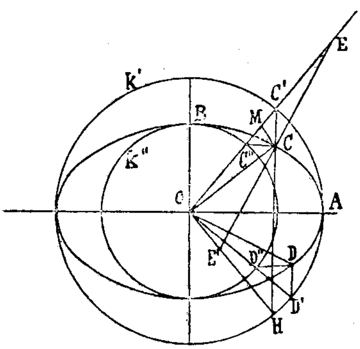
Similmente l'area di un'ellisse k' circoscritta ad un dato parall. di area M, sarà espressa da $\frac{\pi M'}{2}$, ove M' è l'area del parall. inscritto di area massima. Poichè $\frac{\pi M'}{2} \geq \frac{\pi M}{2}$, la minima ellisse si avrà quando il parall. dato sia di area massima fra quelli in essa inscritti; cioè quando le diagonali del parallelogramma sieno diametri coniugati per l'ellisse. Dunque:

Fra tutte le ellissi inscritte in un dato parallelogramma, la massima è quella che tocca i lati del parallelogramma ne' loro punti medî; e fra tutte le ellissi circoscritte, la minima è quella che ha per diametri coniugati le diagonali del parallelogramma.

Il teor. 25 e quello, in certo modo duale, contenuto nell'Oss. 2ª, son dovuti a DURRANDE (1821).

26. *Costruire gli assi di un' ellisse di cui son dati in posizione e in grandezza due diametri coniugati.*

1.ª *costruzione.* Siano OC, OD i due dati semidiametri coniugati e k l'ellisse da essi individuata. Supponiamo risoluto il problema e diciamo k', k'' i circoli, di centro O, che hanno per raggi i due semiassi $OA = a$, $OB = b$ della ellisse ($a > b$). In ciascuna delle omologie affini (§ 13, n° 20, 2ª costr.) che mutano k in k' e k in k'', ai due semidiametri OC, OD corrisponderanno due raggi ortogonali. Sieno OC′, OD′ i raggi corrispondenti nella 1ª affinità, e OC″, OD″ i raggi corrispondenti nella 2ª. I punti C″, D″ dovranno, evidentemente, appartenere ai raggi OC′, OD′.



Prolunghiamo ora il raggio OC′ di un segmento $C'E = b$, e conduciamo la CE. I due triangoli rettangoli CC′C″, DD′D″ sono uguali, perchè hanno i lati rispettivamente perpendicolari e inoltre $C'C'' = D'D'' = a - b$. Ne segue che $CC' = DD''$, e quindi risulteranno uguali anche i triangoli CC′E, DD″O. Da ciò si trae l'uguaglianza dei segmenti CE, OD, e inoltre il fatto che la retta CE è perpendicolare alla OD, perchè nei due triangoli uguali CC′E, DD″O le altre due coppie di lati sono perpendicolari tra loro. Notiamo infine che se M è medio tra C′ e C″, risulta $ME = MO$ ed $MC' = MC'' = MC$.

Da tutto ciò si rileva la seguente costruzione degli assi:

« Si conduca CE perpendicolare ed uguale ad OD; si unisca O con E e si divida per metà il segmento OE in M. « Si riportino quindi da una parte e dall' altra di M i due « segmenti MC′, MC″ uguali ad MC: gli assi della conica « sono allora le parallele da O alle rette CC″, CC′, e le grandezze dei semiassi relativi sono $a = OC'$, $b = OC''$. »

2.ª *costruzione.* La costruzione esposta si può modificare leggermente, rendendola più simmetrica. Sulla CE prendiamo un punto E′ tale che $CE = CE'$, e diciamo H il punto CC′ . OE′. Nel triangolo EOE′ la MC divide due lati per metà, e quindi è parallela al terzo lato ed inoltre $OE' = 2MC = C'C'' = a - b$. I triangoli CMC', HOC' son simili, e poichè il primo è isoscele, tale è pure il secondo, cioè H appartiene al circolo k'. Essendo $C'H$ perpendicolare all' asse OA, ne deriva che quest' asse dividerà per metà uno degli angoli formati dalle OE, OE' e l' altro asse dividerà per metà l' altro angolo.

Si deduce dunque la seguente costruzione degli assi:

« Dati i semidiametri coniugati OC, OD, si conduca per C « la perpendicolare ad OD e su essa si prendano i segmenti « CE, CE' uguali ad OD. Gli assi dell' ellisse sono le bisettrici degli angoli formati dalle OE, OE', e le loro lunghezze « sono date dalle formole:

$$(1) \qquad a = \frac{OE + OE'}{2} \qquad b = \frac{OE - OE'}{2}. \text{ »}$$

Osservazione 1ª. Di questa 2ª costruzione, limitata alla ricerca della posizione degli assi, si può dare una dimostrazione diretta, più semplice, nel modo che segue.

Sopra la tangente t all' ellisse nell' estremo C di uno dei due semidiametri coniugati OC, OD, le infinite coppie di diametri coniugati segano un' involuzione, che ha per centro il punto C e la potenza è uguale a $-OD^2$, giacchè tra le coppie dei diametri coniugati ci sono le diagonali del parallelogramma circoscritto, che ha per mediane i due dati diametri.

Le coppie dell' involuzione che si ha su t, si possono dunque segare con il fascio dei circoli che passano pei due punti E, E' della perpendicolare condotta per C alla t (ossia ad OD), tali che $CE = CE' = OD$. Il circolo del fascio passante per O sega su t una coppia veduta da O sotto angolo retto: dunque le rette che proiettano quella coppia da O saranno gli assi dell' ellisse. Ne deriva che questi assi bisecano gli angoli formati dalle OE, OE'.

Questa costruzione si può estendere ad un' iperbole; ma non ne vale la pena, perchè quando di un' iperbole son noti due semidiametri coniugati OC, OD, si costruiscono subito gli asintoti come diagonali del parallelogramma che ha per mediane i due dati diametri, e gli assi come bisettrici degli asintoti.

OSSERVAZIONE 2ª. Dalle formole (1), quadrando e sommando, si trae:

$$a^2 + b^2 = \frac{\overline{OE}^2 + \overline{OE'}^2}{2},$$

e dai triangoli OCE, OCE' rileviamo:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CE}^2 + 2\,OC\,.\,CE \operatorname{sen} \widehat{OCE},$$

$$\overline{OE'}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CE'}^2 - 2\,OC\,.\,CE' \operatorname{sen} \widehat{OCE'},$$

le quali, sommate membro a membro, ricordando che $CE = CE' = OD$, dànno:

$$\frac{\overline{OE}^2 + \overline{OE'}^2}{2} = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

Dunque:

$$a^2 + b^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2.$$

In un' ellisse è costante la somma dei quadrati di due semidiametri coniugati.

La prima delle costruzioni esposte degli assi di un' ellisse di cui son noti due semidiametri coniugati, è di FRÉZIER (1754); la seconda di CHASLES (1865). Il teor. dell' Oss. 2ª trovasi in APOLLONIO.

27. *Profittando dell' omologia tra coniche, costruire la conica che oscula una conica* k *in un punto dato P, e che passa per due altri punti A, B, reali o immaginari* (*).

(*) Questo stesso problema fu risoluto al n. 15 del § 12, fra le applicazioni del teorema di DESARGUES.

Se una conica passa per A, B, toccando in P la conica data k, la prospettività di centro P che intercede tra le due coniche, resta subordinata da un' omologia di centro P e che ha per asse la congiungente dei punti, reali o immaginari, ulteriormente comuni alle due coniche (*E.* § 71).

Volendo dunque che la conica da costruirsi tagli k in un sol punto diverso da P, bisognerà scegliere l' asse d'omologia passante per P. Inoltre, dicendo A', B' le ulteriori intersezioni di k con le rette PA, PB, nell' omologia alla retta AB dovrà corrispondere la A'B', e quindi il punto $Q \equiv AB . A'B'$ apparterrà all' asse. Nel caso in cui i due punti A B siano immaginari, come retta A'B' si dovrà assumere l' asse dell' involuzione ellittica segata sulla conica (§ 13, n. 6) dalle coppie dell' involuzione che ha per raggi doppi le rette immaginarie PA, PB.

Si conclude pertanto che la conica richiesta si ottiene trasformando k con l' omologia di centro P, asse PQ e che fa passare dalla retta A'B' alla AB.

In particolare se la retta PQ risulta tangente a k in P, le due coniche hanno ivi un contatto quadripunto (§ 12, n. 4, Oss. 2ª); ma la costruzione non cade in difetto.

Si ha così una *nuova costruzione del circolo osculatore ad una conica* k *in un punto* P: per ottenere questo circolo, basta trasformare k con l' omologia che ha per centro P, per asse la parallela condotta da P alla polare del punto di Frégier (§ 13, n. 6) relativo a P, e per retta limite (del piano di k) la polare medesima.

Questa costruzione, a differenza di quella esposta al n. 15 (Oss. 3ª) del § 12, non cade in difetto quando P è un vertice della curva.

Osservazione. Nel corso della costruzione precedente abbiamo fatto uso di una proprietà, che, per quanto venga suggerita dall' analogia che sempre abbiamo riscontrato tra le coppie di elementi immaginari e le coppie di elementi reali, non per questo possiamo ammettere senza dimostrazione.

La proprietà a cui alludiamo è la seguente: « Se due co-« niche k, k' si toccano in un punto P, l'omologia di cen-« tro P, che trasforma k in k', fa passare da due punti im-« maginari coniugati A, B di k, ai due punti immaginari « A′, B′ che vengono segati su k' dall'asse dell'involuzione « ivi determinata da quella che ha per raggi doppi le rette « immaginarie PA, PB ».

Infatti, mediante l'omologia, ai raggi che proiettano da P una coppia dell'involuzione che ha per punti doppi A, B, dovranno corrispondere due raggi seganti la retta omologa A′B′ in due punti coniugati rispetto alla conica k'. Ma poichè quei due raggi sono uniti nell'omologia, la retta A′B′, pel teorema di Staudt (*E.* § 60), dovrà contenere il polo della congiungente i due punti in cui k' vien segata, fuori di P, dai due raggi considerati; e quindi la A′B′ sarà l'asse dell'involuzione segata su k' da quella che ha per raggi doppi PA, PB.

28. *Costruire la conica avente un contatto quadripunto con una conica* k *in un punto dato P, e passante inoltre per un punto assegnato A.*

Dal numero precedente si deduce subito che la conica richiesta è la trasformata di k nell'omologia che ha per centro P, per asse la tangente a k in P, e che fa passare dal punto ove la retta PA sega ulteriormente k, al punto dato A.

Si osservi che se A cade su k, la conica da costruirsi coincide con k.

29. *Fasci di coniche con tre o quattro punti base infinitamente vicini. Ulteriore estensione del teorema di* Desargues-Sturm.

Oltre ai sistemi ∞^1 di coniche che al n. 1 del § 12 abbiamo chiamati fasci, e che si definiscono comprensivamente come i sistemi delle coniche passanti per 4 punti del piano, che a coppie posson essere immaginari coniugati oppure coincidenti, siamo ora in grado di definire altri due sistemi ∞^1, che, per la loro analogia coi precedenti, si chiamano ancora *fasci*.

Vogliamo alludere:

1°) Al sistema di tutte le coniche che osculano una data in un punto fisso P e che passano per un altro punto A del piano.

2°) Al sistema di tutte le coniche che hanno un contatto quadripunto con una data, in un punto fissato P.

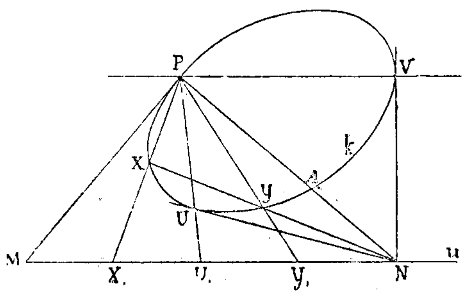
Due coniche qualunque del sistema 1°) si osculano in A. Invero, se due di queste coniche non si osculassero, avrebbero comune un altro punto B, diverso da P, ma eventualmente coincidente con A (§ 12, n.° 4); ed allora per i due punti A, B passerebbero due coniche osculatrici della data in P: il che è assurdo (n. 27). Si può dunque dire che le coniche del 1° sistema passano tutte per tre punti infinitamente vicini e per un altro punto A del piano.

Similmente si prova che due coniche qualunque del 2° sistema hanno un contatto quadripunto in P (n. 28); e quindi si può dire che tutte le coniche di questo sistema passano per 4 punti infinitamente vicini del piano.

Senza escludere i fasci ora definiti, possiamo affermare che per un punto generico del piano passa una sola conica di un dato fascio (n.[i] 27, 28). Ed anche il teorema di Desargues-Sturm, che costituiva la proprietà più importante dei fasci considerati al § 12, si estende ai fasci con tre o quattro punti base infinitamente vicini, come ora ci proponiamo di provare.

Cominciamo a dimostrare il teorema di Desargues-Sturm pel 1° sistema, cioè proviamo che *sopra una retta non passante per alcun punto base, le coniche che si osculano in P e passano per A, segano le coppie reali o immaginarie di un' involuzione.*

Sia k una conica del fascio ed u una trasversale non passante per alcun punto base. Dato un punto X_1 di u, per trovare l' ulteriore intersezione della u con la conica k_1 del fascio passante per X_1, basterà (n. 27) proiettare X_1 da P nel punto X di k, trovare l'omologa XN ($N \equiv PA \, . \, u$) della u, nell'omologia di asse PA, centro P, che trasforma k_1 in k, e proiettare da P in Y_1 l'ulteriore intersezione Y di k con la retta XN. Variando X_1, la coppia X_1Y_1 varia nell'involuzione ω_1, che nasce su u proiettando da P l'involuzione ω di polo N, fra i punti della conica (¹). Resta così provato che le coppie reali segate su u dalle coniche del fascio, appartengono ad una medesima involuzione. Ma si vede di più che la coppia dei punti comuni ad u e a k, appartiene all'involuzione ω_1, anche se è immaginaria. Invero, in tale ipotesi, la ω_1 è iperbolica, ed i suoi punti doppi U_1 V_1 sono le proiezioni dei punti di contatto UV delle tangenti mandate da N alla conica k; sicchè, pel teorema di Staudt (*E.* § 60), i punti U_1 V_1 risultano coniugati rispetto a k.

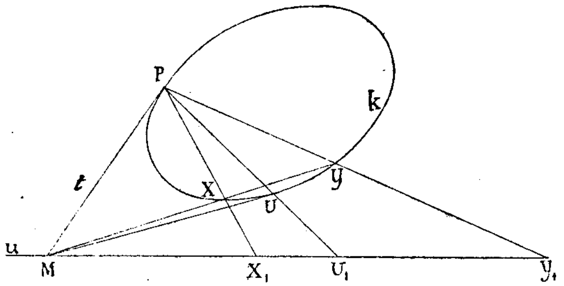


Passiamo ora a dimostrare che *le coniche aventi un contatto quadripunto con una data in P, segano sopra una retta* u *non passante per* P, *le coppie, reali o immaginarie, di un' involuzione.*

Sia k una conica del fascio. Dato un punto X_1 di u, per trovare l'ulteriore intersezione di u con la conica k_1 del fascio passante per X_1, si proietterà X_1 da P nel punto X di k, X dal punto M comune ad u e alla tangente t in P, nel punto Y di k, e infine Y da P in Y_1 (n. 28). Variando X_1, la coppia X_1Y_1 varia nell'involuzione ω_1 di u, proiezione da

(¹) Se la u sega k in due punti reali, si vede pure che la coppia X_1Y_1 varia in un'involuzione, ricorrendo ad un caso limite del teorema di Desargues (*E.* § 65).

P dell' involuzione ω di polo M tra i punti di k. Il punto M è doppio per l' involuzione ω_1; l' ulteriore punto doppio è la



proiezione U_1 da P, del punto di contatto U della tangente, diversa da t, mandata a k da M.

La coppia segata su u da k appartiene all' involuzione ω_1 anche se è immaginaria, perchè i due punti M, U_1 sono evidentemente coniugati rispetto a k.

Osservazione. Si può pervenire più rapidamente al teorema, ricordando che il punto M ha la stessa polare PU_1 rispetto a tutte le coniche del fascio (§ 12, n° 4, Oss. 2ª), e quindi che la coppia, reale o immaginaria, segata su u da una conica del fascio, è armonica colla coppia MU_1.

§ 14. *Sulle intersezioni di due coniche e sui problemi determinati di 3° e 4° grado.*

Sommario: *Generalità — Due coniche di un piano individuano sempre un fascio a cui esse appartengono. Discussione dei vari casi che si possono presentare. Facendo uso della sola riga, costruire la conica che passa per un punto e appartiene al fascio individuato da due coniche, ciascuna delle quali sia data p. e. mediante 5 punti — Dimostrazione del teorema di* Descartes-Smith, *concernente la possibilità di risolvere con la riga e col compasso tutti i problemi di 3.° e 4.° grado, appena sia tracciata sul foglio una conica od anche una sua porzione. Costruzioni relative — Triedro o triedri trirettangoli autopolari in una polarità della stella — Costruzione delle normali ad una conica, che escono da un punto del piano. Teoremi di* Joachim-

STHAL *e di* GAUSS *sui piedi delle suddette normali. Teorema di* SLUSE *sui piedi delle normali ad una parabola, uscenti da un punto del piano — Problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell' angolo.*

1. Abbiamo già avuto occasione di osservare che due coniche le quali abbiano due punti comuni, reali (distinti o coincidenti) o immaginari, si tagliano ulteriormente in altri due punti reali o immaginari; e sappiamo in quali casi queste ulteriori intersezioni vengono a coincidere fra loro o con le primitive (§ 12, n. 4; ed anche *E.* § 75).

È intuitivo il fatto che due coniche di un piano le quali passino per un punto senza toccarsi, hanno ulteriormente almeno un punto comune. Tuttavia ciò può stabilirsi rigorosamente facendo capo al postulato della continuità e al concetto di corrispondenza proiettiva tra i punti di una conica (*E.* § 76).

Se dunque si chiama *problema di 3° grado* un problema che, con operazioni lineari, si riduca alla determinazione delle ulteriori intersezioni di 2 coniche, di cui già si conosca un punto comune (non di contatto), si può dire che ogni problema di 3° grado ammette una soluzione reale almeno; e inoltre se un tal problema ammette più di tre soluzioni ne ammetterà infinite (perchè due coniche distinte si segano soltanto in 4 punti).

Uno dei problemi di 3° grado più notevoli, è la determinazione degli elementi uniti di un' omografia piana ω (non omologica). I punti uniti di ω si ottengono nel modo seguente: Di un punto A del piano, non unito nè appartenente a rette unite, si costruisce l' omologo A′ mediante ω e l' omologo A″ mediante ω^2. La ω subordina una proiettività tra i fasci A ed A′ ed una proiettività tra i fasci A′, A″: le coniche generate da queste due coppie di fasci passano per A′ senza toccarsi e le ulteriori intersezioni sono i punti uniti cercati. Le rette unite si ottengono dualmente, oppure come rette associate ai punti uniti (*E.* § 76).

La determinazione analitica dei punti comuni a due coniche occupò LAMÉ (1816), JACOBI (1835), CLEBSCH (1860), ecc. Della determinazione geometrica trattarono PONCELET (1822), STAUDT (1847), ed altri Autori più recenti. La trattazione rigorosa dell'argomento, sulla base di postulati esplicitamente dichiarati, trovasi in un lavoro di MACCAFERRI (1895). La costruzione, che abbiamo sopra riferita, degli elementi uniti di un'omografia piana, è di STAUDT (1847).

2. *In un piano due coniche, reali o immaginarie, individuano un fascio a cui esse appartengono.*

Sieno k_1, k_2 due coniche, reali o immaginarie, di un piano, definite come curve fondamentali di due polarità ω_1, ω_2. Il prodotto delle due polarità, è un' omografia $\pi \equiv \omega_1\omega_2$, e due ipotesi si presentano come logicamente possibili:

1ª. L' omografia π non è omologica.

2ª. L' omografia π è omologica.

Nella 1ª ipotesi esisterà certo almeno un punto unito E ed una retta unita e, associata ad E (*E*. § 76), e si potranno presentare i casi seguenti:

a) Esistono altri due punti uniti F, G, appartenenti ad e, e quindi (*E*. § 49) ogni vertice del triangolo EFG ha come retta unita associata il lato opposto: cioè ad E è associata la $e \equiv$ FG, ad F la $f \equiv$ GE, a G la $g \equiv$ EF.

In tal caso è facile vedere che le due coniche non hanno punti reali comuni, oppure si segano in 4 punti reali e distinti. Invero, il triangolo EFG è autopolare rispetto alle due coniche e quindi un punto A comune ad esse non può appartenere a nessuna delle rette e, f, g; perchè se appartenesse p. e. ad e, la EA toccherebbe in A le due coniche, e l' omografia π subordinerebbe sopra e una proiettività coi punti uniti A, F, G; contro il supposto che la π non sia omologica.

Ma se A non appartiene a nessuna delle e, f, g, il quadrangolo completo ABCD che ha per triangolo diagonale EFG, è inscritto in ogni conica passante per A e rispetto a cui EFG sia autopolare (§ 10, n. 3): dunque le k_1 k_2 si tagliano nei 4 punti ABCD, cioè individuano un fascio (di cui fanno parte) coi 4 punti base reali e distinti ABCD.

Supponiamo ora che, pur esistendo tre punti uniti EFG dell'omografia π, nulla si sappia circa l'esistenza di punti reali comuni alle coniche k_1, k_2: allora dimostreremo che esse si tagliano in 4 punti reali e distinti, oppure che si tagliano in due coppie di punti immaginari coniugati, cioè che sopra due rette reali subordinano le medesime involuzioni ellittiche.

A tal uopo, data una retta p del piano, consideriamo la sua *conica polare* rispetto alle due coniche k_1, k_2 (cfr. col n. 11 del § 12), cioè la conica c_p generata dai fasci proiettivi descritti dalle polari, rispetto alle due coniche, di un punto variabile su p. La conica c_p è la curva corrispondente a p nella *trasformazione quadratica* (cfr. col n. 20 del § 12) che nasce sul piano, chiamando omologhi i poli di una stessa retta, rispetto a k_1, k_2. Già sappiamo che, qualunque sia la posizione di p, la conica polare c_p passa per E, F, G (cioè questi sono i punti fondamentali della trasformazione quadratica).

La conica c_p può spezzarsi in due rette solo quando i fasci proiettivi che la generano son prospettivi: cioè quando la retta che riunisce i poli di p rispetto a k_1, k_2, ha lo stesso polo rispetto a queste coniche; o, in altri termini, quando p passa per uno dei punti E, F, G.

Allorchè p passa per uno dei punti fondamentali, p. es. per E, la conica c_p si spezza nella retta che riunisce i centri dei due fasci generatori P_1, P_2 (che sono i poli di p rispetto a k_1, k_2), cioè nel lato opposto e del triangolo EFG; ed in un'altra retta p' uscente da E, che è l'asse di prospettiva dei due fasci. La p' è definita in sostanza come il luogo dei punti coniugati di quelli di p rispetto alle due coniche k_1, k_2; sicchè la relazione tra p e p' è simmetrica. Variando p nel fascio E, la retta p' varia nello stesso fascio, e si ha così una corrispondenza biunivoca simmetrica, tra le posizioni assunte da p e quelle assunte da p'. Se riusciamo a provare che questa corrispondenza è proiettiva, ne seguirà dunque ch' essa è un' involuzione.

Per dimostrare questo, consideriamo una retta q pel punto fondamentale F (diversa dalle e, g) e diciamo q' la retta, passante pure per F, che contiene i coniugati dei punti di q rispetto alle due coniche k_1, k_2. La corrispondenza che nasce tra i punti di q, q' è proiettiva (*E.* § 60) ed essa dà per proiezione dal punto E, la corrispondenza tra p, p'. Si conclude pertanto che i fasci descritti da p, p' sono proiettivi, e quindi in involuzione.

In modo analogo potremo ragionare sui fasci di centri F, G; sicchè avremo tre involuzioni I_E, I_F, I_G, nei fasci che hanno per centri i punti fondamentali.

È ben chiaro che, se una delle involuzioni suddette è iperbolica, su ciascuno de' suoi raggi doppi le due coniche k_1 k_2 subordineranno la stessa involuzione; e che viceversa una retta dotata di quest' ultima proprietà, è certamente doppia per una delle tre involuzioni I_E, I_F, I_G.

Ora proviamo che *se una delle tre involuzioni* I_E, I_F, I_G *è ellittica, delle rimanenti una è ellittica, e l' altra è iperbolica.* Prendiamo difatti un punto P non appartenente ad e, f, g, e diciamo P′ il suo coniugato rispetto alle due coniche k_1, k_2. Poichè le rette che proiettano P, P′ da un vertice del triangolo fondamentale, sono coniugate nell' involuzione I relativa a quel vertice, se la I_E è ellittica, le proiezioni di P, P′ da E sul lato opposto, dovranno separare i vertici F, G, ossia P, P′ apparteranno a due diverse regioni triangolari EFG (*E* § 53). Da ciò si trae che delle due coppie ottenute proiettando i punti P, P′ da F, G sui lati risp. opposti, una separa i vertici con essa allineati e l' altra no; cioè delle due involuzioni I_F, I_G una è ellittica e l' altra iperbolica.

Dunque: o tutte e tre le involuzioni I sono iperboliche, o due sono ellittiche ed una è iperbolica.

Se un punto A del piano è comune a due raggi doppi di due diverse involuzioni I, esso sarà coniugato di se stesso rispetto ad ambedue le coniche; e quindi, se le tre involuzioni I sono iperboliche, le tre coppie di raggi doppi non saranno altro che le coppie di lati opposti di un quadrangolo completo avente per triangolo diagonale EFG, ed inscritto in ambedue le coniche. Ricadiamo così nel caso, già considerato, in cui le k_1, k_2 hanno a comune 4 punti reali e distinti.

Se le k_1, k_2 non hanno punti comuni, bisognerà dunque che una delle I, p. e. I_E, sia iperbolica, e le altre due, I_F, I_G, ellittiche; e su ciascuno dei raggi doppi della I_E, le due coniche subordineranno la stessa involuzione ellittica.

Si conclude che anche in tal caso le due coniche individuano un fascio, che le contiene, ed i cui punti base sono immaginari (a coppie coniugati).

b) La omografia non omologica π, sia dotata soltanto dei punti uniti EF. Allora, se al punto unito E viene associata la retta unita e, non passante per E, questa retta dovrà passare per F, e al punto F dovrà essere associata la retta $f \equiv$ EF (chè se ad F fosse associata una retta f diversa da EF, il punto ef sarebbe un punto unito, diverso da E, F).

Ognuno dei due punti uniti avrà la stessa polare rispetto alle due coniche k_1, k_2, ed anzi la polare del punto E dovrà essere la retta unita associata e, perchè se la polare di E fosse f, la polare di F sarebbe e, e la retta EF, che già risulterebbe tangente alle due coniche in E, le incontrerebbe ulteriormente in F: il che è assurdo.

Dunque la polare di F è la retta f, cioè le due coniche si toccano in F (avendo come tangente comune la f).

Ne deriva che esse si tagliano ulteriormente in due punti, reali (distinti o coincidenti) o immaginari (§ 12, n. 4); e quindi individuano un fascio, a cui esse appartengono, e che ha due punti base coincidenti e altri due punti base, reali o immaginari. Si noti che la congiungente delle intersezioni ulteriori delle due coniche, dovrà passare per E.

c) La omografia non omologica π, sia dotata di un sol punto unito E e di una sola retta unita e passante per E.

Allora le due coniche k_1, k_2 si toccheranno in E con la tangente comune e, nè potranno avere comuni fuori di E, *due* altri punti, reali o immaginari, perchè in tale ipotesi la congiungente di questi punti taglierebbe la e in un punto diverso da E, che avrebbe la stessa polare rispetto a k_1, k_2, e si ricadrebbe nel caso precedente.

Dunque le due coniche si osculano in E, oppure hanno ivi un contatto quadripunto. Ma quest' ultima ipotesi va scartata, perchè allora ogni punto di e avrebbe la stessa polare rispetto a k_1, k_2 (§ 12, n. 4, Oss. 2ª), e quindi la π sarebbe omologica.

Si conclude che le k_1, k_2, si osculano in E e si segano ulteriormente in un punto H reale: sicchè individuano un fascio, che ha tre pùnti base infinitamente vicini ed un altro punto base reale H.

d) La omografia non omologica π sia dotata di un sol punto unito E e di una sola retta unita e, non appartenente ad E. In tal caso il punto E avrà per polare rispetto alle due coniche la retta e, e su questa non esisterà nessuna coppia di punti coniugati rispetto ad ambedue le coniche; e quindi le involuzioni subordinate sulla e dalle due coniche saranno iperboliche e le coppie dei loro elementi doppi dovranno separarsi.

Da ciò si trae (intuitivamente) che le due coniche hanno comuni dei punti reali [1].

D' altra parte se esse si tagliassero in 4 punti reali e distinti, l' omografia π avrebbe tre punti uniti (i vertici del

[1] Ciò può dimostrarsi rigorosamente. Ved. la nota di Maccaferri « Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche nel piano » (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1895).

triangolo autoconiugato comune); se si toccassero o si osculassero in un punto, ricadremmo risp. nei casi *b*), *c*); e se fossero bitangenti o avessero un contatto quadripunto, l'omografia π sarebbe omologica. Dunque le k_1, k_2 si taglieranno soltanto in due punti reali e distinti A,B ed avranno quindi in comune ulteriormente due punti immaginari C,D (§ 12, n. 4). Le due coniche individuano un fascio, a cui esse appartengono, e che ha due punti base reali e due immaginari. Si noti che le rette reali AB, CD passeranno per E.

Nella 2ª ipotesi, detti U, u il centro e l'asse dell'omologia π, i due elementi U, u risultano coniugati rispetto a k_1, k_2. Invero, ogni punto di u ha la stessa polare rispetto alle due coniche, sicchè il fascio delle polari dei punti di u, è costituito da rette unite; onde il suo centro è il punto U.

Due casi possono ora presentarsi:

a') Il centro U dell'omologia π non appartiene all'asse u. Allora le involuzioni subordinate sul fascio U e sulla punteggiata u dalle due coniche, coincideranno; cioè le k_1, k_2 si toccheranno in due punti reali o immaginari; e quindi individueranno un fascio (schiera).

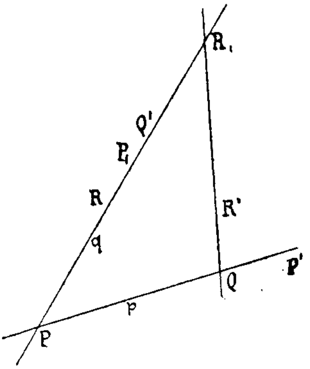
b') Infine può darsi che il centro U appartenga all'asse u. Allora le k_1, k_2 si toccano in U. Ma poichè ogni punto di u ha la stessa polare rispetto alle due coniche, si conclude che in U esse hanno un contatto quadripunto (§ 12, n. 4, Oss. 2ª); ossia che individuano un fascio coi 4 punti base infinitamente vicini.

OSSERVAZIONE 1ª. Tenendo presenti i significati delle locuzioni « due coniche si segano in due o tre o quattro punti coincidenti », il risultato della discussione precedente si può anche enunciare come segue:

Due coniche, reali o immaginarie, appartenenti ad un piano, hanno sempre 4 punti comuni, fra reali (distinti o coincidenti) e immaginari.

OSSERVAZIONE 2ª. Emerge dalla discussione fatta che *se* *una almeno delle due coniche è immaginaria, il fascio individuato ha i 4 punti base immaginari, e può ridursi eventualmente ad un fascio-schiera coi punti base immaginari.*

3. *Facendo uso della sola riga, costruire per punti la conica passante per un punto P del piano, e per le intersezioni, reali o immaginarie, comuni a due altre coniche, ciascuna delle quali sia individuata p. e. da 5 punti.*



Dicasi P′ il punto comune alle due polari di P rispetto alle k_1, k_2, cioè il punto coniugato di P rispetto a tutte le coniche del fascio individuato dalle k_1, k_2 (n° prec., e § 12, n° 10). La retta PP′ sarà tangente in P alla conica del fascio che passa per P, che è precisamente la conica k da costruirsi.

Preso sulla $p \equiv$ PP′ un punto Q, diverso da P, P′, diciamo Q′ il coniugato di Q rispetto a tutte le coniche del fascio (k_1 k_2), e sulla retta $q \equiv$ PQ′, che è la polare di Q rispetto alla conica k, si prenda un punto R, diverso da P, Q′, e anche di questo punto si consideri il coniugato R′ rispetto a tutte le coniche del fascio. La retta $r \equiv$ QR′ sarà la polare di R rispetto a k, ed il punto $R_1 \equiv rq$ sarà il coniugato di R nell'involuzione subordinata su q della conica k; onde il coniugato armonico P_1 di P rispetto alla coppia RR_1, apparterrà a k. Variando Q sulla p, il punto P_1 varierà descrivendo k.

Questa costruzione cade in difetto quando le polari di P rispetto a k_1, k_2 coincidono; ma in tal caso P è il punto doppio di una conica degenere appartenente al fascio, e la determinazione delle rette che costituiscono questa conica, è un problema di 2° grado che, implicitamente, è stato risoluto al n° prec.

4. *Considerazioni generali sui problemi determinati di 3° e 4° grado in relazione ai mezzi che s' impiegano per risolverli.*

Già abbiamo avuto occasione di ricordare (n° 1) che un *problema determinato* dicesi di *3° grado*, allorquando, con proiezioni e sezioni, esso riducesi al problema fondamentale di trovare le intersezioni ulteriori di due coniche aventi un punto comune dato.

Un *problema determinato* dicesi di *4° grado*, quando, con proiezioni e sezioni, può ridursi al problema di trovare le intersezioni di due coniche, delle quali non si conosce nessun punto comune.

Trattati analiticamente i problemi di 3° grado conducono ad una risolvente cubica, e quelli di 4° grado ad una risolvente biquadratica.

Noi ci occuperemo dei problemi di 3° e 4° grado dal punto di vista geometrico, cercando di stabilire quali sono le linee più semplici che occorre saper tracciare per la loro risoluzione.

Accanto al teorema di Poncelet-Steiner (§ 8, n° 2, ed *E.* §§ 73, 74), che costituisce il punto capitale della teoria dei problemi di 2° grado, è da porsi il seguente teorema notevolissimo, che risponde all' analoga questione pei problemi cubici e biquadratici:

Ogni problema determinato di 3° o 4° grado si può risolvere colla riga e col compasso, purchè sul foglio del disegno sia tracciata una conica, diversa da un circolo.

Per chiarezza, nello esporre la dimostrazione di questo teorema, la divideremo in varie parti.

1ª) Trattiamo anzitutto quei casi in cui il problema di trovare le intersezioni di due coniche k_1, k_2, si abbassa di grado.

Ciò accade allorquando l' omografia π prodotto delle polarità ω_1, ω_2, individuate dalle k_1, k_2, è omologica; cioè allorquando le due coniche individuano un fascio-schiera, oppure un fascio con 4 punti base infinitamente vicini (§ 14, n. 2, a', b').

Dopo aver riconosciuto che l' omografia π è omologica (ed a ciò si perviene con evidenti operazioni lineari), si costruirà linearmente il centro U e l' asse u dell'omologia. Se il centro non appartiene all' asse, si troveranno, con la riga e col compasso (*E.* § 73), le intersezioni della retta u con una delle due coniche. Queste intersezioni sono i punti richiesti: in ciascuno di essi le due coniche si toccano e le tangenti relative sono le rette che proiettano i punti stessi dal centro d' omologia.

Se U appartiene ad u, l' unico punto comune alle due coniche è U. Ivi le due coniche hanno un contatto quadripunto, e la tangente comune è u.

2ª) Supponiamo ora che l' omografia $\pi \equiv \omega_1 \omega_2$ non sia omologica. I suoi punti uniti costituiranno il triangolo (che può essere parzialmente immaginario o degenere — ved. l' analisi del n° 2) autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio Φ, individuato dalle coniche k_1, k_2 (n° 2). E noi, prima di ricercare le intersezioni delle due coniche, risolveremo il problema di 3° grado a cui dà luogo la determinazione degli elementi uniti dell' omografia π, *usando della riga, del compasso e di una conica completamente tracciata.*

Dato un punto generico del piano, esiste un sol punto ad esso coniugato rispetto a tutte le coniche del fascio (§ 12, n° 10), e la corrispondenza involutoria biunivoca che nasce tra i punti del piano, è una trasformazione quadratica T (§ 12, n° 20), la quale muta ogni retta del piano nella sua conica polare (§ 12, n° 11) rispetto al fascio Φ. In tal modo veniamo ad ottenere una *rete* Σ di coniche, corrispondenti alle ∞^2 rette del piano.

Le coniche di Σ passano pei vertici del triangolo autopolare comune alle coniche di Φ; ed anzi ogni conica circoscritta a questo triangolo si può riguardare come conica polare di una conveniente retta del piano, cioè appartiene a Σ. Alla rete Σ appartiene generalmente un sol circolo, che è quello circoscritto al triangolo autopolare, e che ha grande importanza nell' attuale ricerca.

Se c è una conica di Σ e p una retta generica del piano, la trasformazione T muta c in una retta c' e p in una conica p' della rete Σ; e le corrispondenze subordinate dalla T tra le linee omologhe c, c' e p, p', son proiettive (come risulta immediatamente dalla costruzione della conica polare di una retta — § 12, n° 11).

Orbene, io dico che l' involuzione I' della retta c', trasformata mediante T di quell' involuzione I della conica c, che ha per asse la retta p, non è altro che l' involuzione subordinata sulla c' dalla conica p'.

Ciò è evidente senz' altro se la retta p taglia la conica c in due punti reali, perchè i punti doppi reali dell' involuzione I, si mutano nei punti doppi della I'. Ma quando la retta p è esterna a c, occorrono altre considerazioni.

In quest' ultima ipotesi, le infinite coppie dell' involuzione ellittica I son tutte date dalle coppie dei punti di contatto delle tangenti mandate a c dai punti di p. Ora, mediante la trasformazione T, alle tangenti di c corrispondono coniche di Σ tangenti alla retta c', e ai punti di contatto delle tangenti di c, che escono da un punto p, corrispondono le coppie dei punti di contatto con c' delle 2 coniche di Σ, passanti per un punto di p', e tangenti alla retta c'.

Poichè le coniche di Σ per un punto di p', formano un fascio di cui fa parte la conica p', pel teorema di DESARGUES (esteso alle coppie immaginarie — § 12, n° 5, Oss. 2ª), i punti di contatto suddetti saranno coniugati rispetto a p'; donde si trae che l' involuzione I', trasformata di I, vien subordinata sulla retta c' dalla conica p'.

Ciò posto, se r è la retta all' infinito del piano, J l' involuzione assoluta, ed s l' asse dell' involuzione J', trasformata di J, che si ha tra i punti della conica r', trasformata di r, la conica polare di s subordinerà sulla retta r l' involuzione J. Dunque la conica polare di s, sarà il circolo s' appartenente alla rete Σ.

Inoltre l'involuzione subordinata da r' sulla s, si muterà in quell'involuzione tra i punti del circolo s', che ha per asse la retta impropria; cioè due punti di s coniugati rispetto ad r', si trasformeranno in due punti diametralmente opposti di s'.

Ne deriva la seguente *costruzione con la riga e col compasso, del circolo* s' *appartenente alla rete* Σ: Di due coppie AB, CD dell'involuzione assoluta, si considerino le omologhe $A'B'$, $C'D'$ nella T (A' è l'intersezione delle polari di A rispetto a k_1, k_2, ecc.). Si costruiscano quindi i punti $M \equiv A'C'.B'D'$, $N \equiv A'D'.B'C'$, e di questi punti si prendano gli omologhi M', N' nella T. Il circolo s' è quello che ha per diametro il segmento $M'N'$.

Sia ora k una conica della rete Σ, diversa dal circolo s'. Uno dei punti comuni alla conica k e al circolo s' si costruisce linearmente, anche se la conica k ed il circolo s' non sono tracciati: è il coniugato rispetto a tutte le coniche del fascio Φ, del punto comune alle rette k', s, che corrispondono alle coniche k, s', mediante la trasformazione T.

Gli altri tre punti (di cui uno almeno reale) comuni alla conica k e al circolo s', costituiscono il triangolo autopolare rispetto a tutte le coniche del fascio Φ; e per determinarli graficamente, se la conica k è completamente tracciata, basta descrivere col compasso il circolo s'.

Osservazione. Nel ragionamento precedente abbiamo supposto che Σ contenesse un sol circolo, cioè che i suoi punti base fossero proprî.

La natura di tali punti base si riconosce *a priori* linearmente, osservando la natura della conica r' trasformata, mediante T, della retta impropria r; giacchè la r' risulta degenere allora e solo allora che qualcuno dei punti base è improprio.

Quando si verifichi quest' ultimo fatto, il problema di ricercare i punti base, cioè i punti uniti dell' omografia π, si abbassa evidentemente di grado, e quindi può risolversi colla riga e col compasso.

3ª) Vediamo ora come si possa costruire il triangolo autopolare rispetto alle coniche di Φ, facendo uso della riga, del compasso e di una conica l, completamente tracciata, che non sia un circolo, nè appartenga alla rete Σ.

Si costruiscano linearmente varî punti di una conica k della rete Σ. (Basterà trovare i trasformati mediante T, di varî punti di una retta generica del piano). Si ponga poi tra k ed l una proiettività, la quale faccia passare da tre punti ABC di k a tre punti A′B′C′ di l. Questa proiettività sarà subordinata da un' omografia piana τ, e se D, D′ sono i poli delle rette AB, A′B′ rispetto alle coniche k, l, l' omografia τ sarà individuata dalle 4 coppie di punti corrispondenti AA′, BB′, CC′, DD′ (*E.* § 66).

La τ trasforma il fascio Φ in un fascio Φ', e la rete Σ, costituita dalle coniche circoscritte al triangolo autopolare rispetto a Φ, in una rete Σ', di cui fa parte la conica l, e che è circoscritta al triangolo autopolare rispetto a Φ'.

Come risulta dalla parte 2ª), il triangolo E′F′G′ autopolare rispetto a Φ', si costruisce con la riga e col compasso profittando della conica tracciata l. Con la sola riga si costruiranno poi i punti E, F, G omologhi di E′, F′, G′ nella τ^{-1}; e così avremo il triangolo EFG autopolare rispetto a Φ.

4ª) Una volta costruito il triangolo EFG autopolare rispetto alle due coniche k_1, k_2, la determinazione dei punti comuni a queste coniche, riducesi a problemi di 2° grado o di 1° grado.

Invero, se i vertici del triangolo EFG sono distinti (due di essi potendo anche essere immaginari coniugati), le rette uscenti da uno (reale) di quei vertici, e sia p. e. E, resteranno accoppiate in un' involuzione iperbolica, chiamando omologhe due rette che proiettino coppie di punti coniugati rispetto ad ambedue le coniche k_1, k_2 (n° 2, *a*, *d*); e le rette doppie di quell' involuzione conterranno ciascuna due punti comuni alle due coniche. Queste due coppie di punti saranno entrambe reali o immaginarie, se i tre vertici EFG sono reali (n° 2, *a*); ed una di esse sarà reale, l' altra immaginaria, se uno solo dei vertici è reale (n° 2, *d*).

Se i vertici EFG sono tutti reali, ma F coincide con G, allora le due coniche si toccano in F (n° 2, *b*). La retta che contiene le ulteriori intersezioni passa per E, e si costruisce linearmente come asse dell' omologia di centro F, che muta k_1 in k_2.

Risolvendo un problema di 2° grado si costruiscono poi i punti comuni all' asse suddetto e ad una delle coniche.

Se infine i vertici EFG coincidono nell' unico punto reale E, le k_1, k_2 si osculano in E (n° 2, *c*), e l' ulteriore punto comune alle due coniche si costruisce linearmente, perchè congiunto con E dà l' asse dell' omologia di centro E, che muta k_1 in k_2.

Si noti che le costruzioni di quest' ultima parte, se si profitta della conica tracciata l, si possono effettuare tutte con la sola riga.

Se una delle intersezioni delle due coniche k_1, k_2, è data, cioè *se si tratta di un problema di 3° grado, dopo aver costruito il triangolo autopolare EFG, non restano da risolvere che problemi di 1° grado.*

Così il teorema enunciato al principio di questo n°, è completamente dimostrato.

Osservazione 1ª. Nel ragionamento precedente non si fa distinzione tra problemi grafici e metrici, perchè essendo permesso l' uso del compasso, è noto l' assoluto del piano, e quindi ogni problema metrico si può trattare come un problema grafico.

Osservazione 2ª. Nel corso del ragionamento abbiamo avuto occasione di esporre *le costruzioni effettive che permettono di risolvere colla riga, col compasso e col sussidio* *di una conica completamente tracciata, ogni problema di 3° o di 4° grado.* Naturalmente nei casi particolari gioverà tener conto delle circostanze speciali che caratterizzano il problema, affine di render più brevi le costruzioni che in generale sono assai lunghe.

OSSERVAZIONE 3ª. È opportuno notare che *i problemi di 3° e 4° grado si possono risolvere colla riga e col compasso, anche se è tracciato sul foglio del disegno un arco, comunque piccolo, di una conica* l *(che non sia un circolo).*

Siano infatti k, m due coniche della rete Σ, corrispondenti, mediante T, a due rette generiche k', m' del piano. Le due coniche hanno comune un punto P, non di contatto, che si costruisce linearmente come il trasformato, mediante T, del punto $P' \equiv k'm'$; e fuori di P si tagliano nei vertici EFG del triangolo autopolare rispetto alle coniche date k_1, k_2.

Ora la dimostrazione (di MACCAFERRI) dell'esistenza di almeno un punto reale comune alle due coniche k, m, fuori di P (*E.* § 76), dà pure il modo di assegnare *linearmente* gli estremi ed un punto interno ad un arco delle due coniche, che contenga un punto reale E, diverso da P, ad esse comune.

Sieno p. e. AB gli estremi e C un punto di un tal arco, sulla conica k. Si ponga allora tra k ed l una corrispondenza proiettiva, che muti l'arco ACB di k nell'arco A'C'B' di l, tutto appartenente alla porzione tracciata di l.

Il circolo della rete Σ', che corrisponde a Σ mediante l'omografia τ individuata dalla proiettività posta tra k ed l, taglia l in un punto che si sa costruire linearmente, e altrove nei punti E'F'G', corrispondenti ai punti E,F,G mediante la τ.

Ora uno di quei punti, E', si determina graficamente col compasso, perchè appartiene all'arco tracciato di l; e gli altri due punti, dopo ciò, si costruiscono con la riga e col compasso.

La possibilità di risolvere colla riga e col compasso ogni problema di 3° o di 4° grado, appena sia tracciata sul foglio una conica od anche una sua porzione, fu enunciata, come risultato analitico, da DESCARTES (1637); ma la dimostrazione geometrica (che è sostanzialmente quella da noi esposta) e le effettive costruzioni, furono date da H. J. S. SMITH nel bel *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques* (Annali di Matematica, 1869). In questa Memoria si trovano anche delle costruzioni particolari più semplici, specialmente nel caso in cui si richiedano soltanto le soluzioni reali di un problema di 3° o di 4° grado.

5. *In una polarità, non ortogonale, di una stella propria* S, *esiste in generale un sol triedro trirettangolo autopolare; e se ne esiste più di uno, ne esistono infiniti, che hanno in comune uno spigolo e la faccia opposta.*

Diciamo infatti ω_1 la data polarità, ω_2 la polarità ortogonale. Poichè quest' ultima è uniforme (cioè priva di cono fondamentale reale), sia o non sia uniforme la ω_1, la collineazione $\pi \equiv \omega_1\omega_2$ avrà tre raggi uniti reali, oppure sarà omologica. (Si trasformi per dualità l' Oss. 2ª del n° 2 di questo §). Nel 1° caso esisterà un sol triedro trirettangolo autopolare nella ω_1, e sarà quello dei raggi uniti; nel 2° caso l' asse e il piano d' omologia saranno ortogonali, e nei fasci della stella che hanno per sostegni l' asse e il piano suddetti, la ω_1 subordinerà involuzioni ortogonali. Cioè in tal caso avremo infiniti (∞^1) triedri trirettangoli autopolari nella ω_1, e tutti questi avranno uno spigolo coincidente con l' asse d' omologia e la faccia opposta coincidente col piano d' omologia (cfr. con *E.* § 81).

OSSERVAZIONE. Si deduce che *in una collineazione o correlazione tra due stelle proprie S, S', esiste sempre almeno un triedro trirettangolo dell' una, a cui corrisponda un triedro trirettangolo dell' altra.* Invero, se τ è la proiettività che fa passare da S ad S', la polarità $\tau^{-1}\omega\tau$ della stella S', trasformata, mediante τ^{-1}, della polarità ortogonale di S, possiede almeno un triedro autopolare trirettangolo, a cui corrisponde, nella S, un altro triedro trirettangolo.

Da ciò si trae che *due stelle proprie correlative S, S′ si possono sempre sovrapporre in modo da avere tra esse una polarità.* Basta sovrapporre S′ ad S in modo che vengano a coincidere due triedri trirettangoli corrispondenti, con la condizione che ogni faccia del triedro fissato in S′, vada a coincidere con la faccia opposta allo spigolo corrispondente di S (*E.* § 51).

La possibilità di sovrapporre due stelle reciproche in modo da avere un sistema polare, fu dimostrata da Seydewitz (1847).

6. *Costruire le rette che escono da un punto P e son normali ad una conica data* k.

Se una retta uscente da P è normale a k nel punto N, il punto comune alla retta PN e al diametro coniugato alla direzione ortogonale a quella retta, cade precisamente in N; sicchè i piedi delle normali di k uscenti da P, saranno i punti comuni alla conica data e alla curva k' generata dal punto X comune ad una retta variabile p del fascio P, e al diametro d coniugato alla direzione normale a p.

La curva k' è una conica passante per P e pel centro O, proprio od improprio, di k; perchè i due fasci descritti da p, d sono proiettivi. Invero il fascio descritto da p è prospettivo alla punteggiata descritta dal punto improprio della p; questa punteggiata è in involuzione con quella descritta dalla direzione ortogonale a p, e infine quest' ultima punteggiata è proiettiva al fascio delle polari de' suoi punti rispetto a k, cioè al fascio descritto da d.

Il punto X va all' infinito quando il coniugato del punto improprio Q_∞ di p, nell' involuzione assoluta, è pure coniugato di Q rispetto alla conica. Se dunque k è una conica a centro, i punti all' infinito degli assi apparterranno alla conica k'; e se k è una parabola, il punto all' infinito di k, ed il suo coniugato nell' involuzione assoluta, apparterranno alla conica k', la quale in ogni caso risulterà un' iperbole equilatera.

Nel caso della parabola, al raggio comune ai due fasci proiettivi P, O_∞, pensato come raggio di P, corrisponde in O_∞ l'asse della parabola; cioè quest'asse è un asintoto dell'iperbole k'. Dunque:

I piedi delle normali tirate da un punto P ad una conica k, *appartengono ad un'iperbole equilatera* k′ *passante per* P *e pel centro della conica. Se* k *è una conica a centro, gli asintoti di* k′ *son paralleli agli assi di* k; *se* k *è una parabola, il suo asse è un asintoto di* k′.

Ne segue che da un punto P escono al più quattro normali di una conica a centro k, e i loro piedi si costruiscono come intersezioni di k con k'. Il problema è dunque di 4° grado. Se la conica k è una parabola, il problema si abbassa al 3° grado, perchè una delle intersezioni di k' con k è il punto all'infinito della parabola.

Se il punto P appartiene ad un asse, l'iperbole k' si spezza in quell'asse e in una retta ortogonale, ed il problema si abbassa al 2° grado.

Allorquando la conica k è un'ellisse, l'iperbole k' passa pel centro di k, che è interno, e quindi sega l'ellisse almeno in due punti reali; se la conica k è un'iperbole, i suoi punti impropri separano i punti impropri di k', e quindi le due coniche hanno almeno due punti reali comuni. Se infine la conica k è una parabola, la conica k' ha comune con k un punto reale (all'infinito), e quindi sega k in un altro punto reale almeno. Concludendo:

Da un punto del piano escono almeno due normali reali ad una conica a centro, e al più quattro; ed esce almeno una normale reale ad una parabola, e al più tre.

Osservazione. Descriviamo un circolo k_1 col centro nel punto P da cui si voglion condurre le normali a k. Un punto improprio ha per polare rispetto a k_1 un certo diametro p, e rispetto a k il diametro d coniugato alla direzione ortogonale a p; dunque il punto coniugato di quel punto improprio, rispetto alle due coniche k, k_1, appartiene a k', cioè (§ 12, n° 11) la conica k' sarà il luogo dei centri delle coniche appartenenti al fascio individuato da k, k_1 (cfr. col n° 13 del § 12).

Ne deriva che *l'iperbole equilatera luogo dei centri delle coniche di un fascio a cui appartenga un circolo, taglia ogni conica* k *del fascio nei piedi delle normali a* k, *uscenti dal centro del circolo.*

L'iperbole equilatera che stacca sopra una conica i piedi delle normali condotte da un punto del piano alla conica, fu considerata da Apollonio. La proprietà dimostrata nell'Oss. prec., è dovuta a Chasles (1838); ma, implicitamente, si trova anche in Poncelet (1822).

7. *Se le normali in 4 punti di una conica a centro concorrono in un punto, il circolo passante per 3 di quei punti sega ulteriormente la curva nel punto diametralmente opposto al quarto.*

Siano P′ P″ due punti di una conica a centro k, P il punto d'intersezione delle normali in P′, P″, e k' l'iperbole di Apollonio (n° prec.) relativa al punto P e alla conica k.

Per costruire le ulteriori intersezioni P‴, P⁗ (reali o immaginarie), di k, k', fuori di P′, P″, potremo ad es. proiettare i punti di k' da P′, P″ su k, e intersecare una delle due coniche con l'asse della proiettività tra le punteggiate sovrapposte che si ottengono sopra k (*E.* § 75).

Dicendo A, A′ i punti simmetrici di P′, P″ rispetto ad un asse di k, e B, B′ i simmetrici di P′, P″ rispetto all'altro asse, nella suddetta proiettività saranno omologhi A ed A′, B e B′; onde la retta P‴ P⁗ passerà pel punto AB′. A′B, che è all'infinito.

I circoli che passano pei punti P′ P″ segano ulteriormente su k coppie di punti le cui congiungenti formano con un asse un angolo opposto a quello formato da P′ P″ con lo stesso asse (§ 12, n° 13, Oss. 3ª), e quindi son tutte parallele tra loro (cfr. pure col n° 14 del § 12). La direzione comune a queste congiungenti, è quella della retta AA′, che riunisce i punti d'intersezione ulteriore di k col circolo per P′, P″, A.

Siccome i punti A, B sono diametralmente opposti, le due rette AA′, BA′ son parallele a due diametri coniugati (§ 10, n° 17), cioè la direzione comune a tutte le congiungenti suddette, è coniugata alla direzione della retta incognita P‴ P⁗.

Supposto ora che i punti P‴ P⁗ siano reali, diciamo Q l'ulteriore intersezione di k col circolo P′ P″ P‴. Le due rette P‴Q e P‴P⁗, per quanto precede, saranno parallele a due diametri coniugati, e quindi (§ 10, n° 17) i punti P⁗ e Q saranno diametralmente opposti, c. d. d.

Osservazione. Poichè le anomalie eccentriche (§ 13, n° 20) di due punti diametralmente opposti di un'ellisse, differiscono di π, e d'altra parte la somma delle anomalie eccentriche dei punti ove l'ellisse è segata da un circolo, è congrua a zero (mod. 2π) (§ 13, n° 21, Oss. 1ª), si deduce che la somma delle anomalie eccentriche dei punti P′P″P‴P⁗, di cui sopra, è congrua a π. Dunque:

Le anomalie eccentriche dei piedi delle normali abbassate da un punto ad un' ellisse, dànno una somma congrua a π (mod. 2π).

Il teor. 7 è di Joachimsthal (1843); e il teor. dell'Oss. prec. è di Gauss (1842).

8. *Il circolo individuato dai piedi delle tre normali tirate da un punto ad una parabola, passa pel vertice della curva; e viceversa un circolo che passi pel vertice della parabola, sega ulteriormente la curva in tre punti le cui normali appartengono ad un fascio.*

Sieno P′P″ due punti della parabola k, le cui normali concorrano in P; sia P‴ il piede dell'ulteriore normale uscente da P (§ 14, n° 6), e V il vertice della curva. Si tratta di provare che i 4 punti P′P″P‴V appartengono ad un circolo.

Se k' è l'iperbole di Apollonio relativa al punto P e alla parabola k (la quale iperbole, come sappiamo (n° 6), ha uno degli asintoti coincidente con l'asse della parabola), per costruire l'ulteriore intersezione propria di k' con k, noti che sieno i punti P′, P″, possiamo proiettare i punti di k' su k da P′ e dal punto improprio O_∞ della parabola, e intersecare k, fuori di P″, con l'asse della proiettività che così si ottiene sulla parabola (*E.* § 75).

Ora, dicendo A′ il punto simmetrico di P′ rispetto all'asse della parabola, vediamo che i punti A′, V sono gli omologhi del punto O_∞ pensato come appartenente all'una o all'altra punteggiata, sicchè l'asse di collineazione dovrà esser parallelo alla retta A′V. Dopo ciò si costruisce subito il punto P‴, intersecando k con la parallela da P″ alla retta A′V.

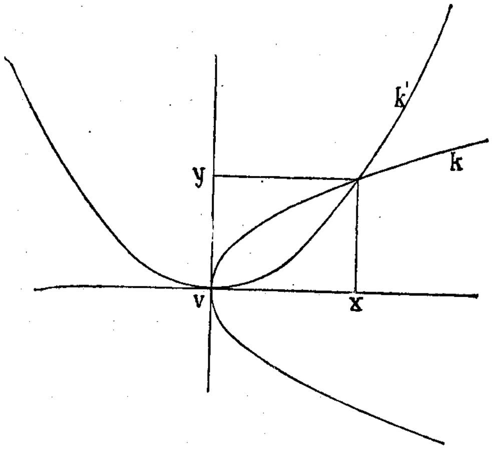
Ne deriva che la retta P′V, simmetrica della A′V rispetto all'asse, forma con questo un angolo uguale, ma di verso contrario, rispetto a quello formato dalla P″P‴ con l'asse medesimo, e quindi (§ 12, n° 13, Oss. 3ª) i 4 punti P′P″P‴V appartengono ad un circolo.

Viceversa, se un circolo k_1 passante pel vertice V, taglia altrove la parabola nei punti P′P″P‴, detto P_0''' il piede della normale ulteriore a k, condotta dal punto P d'intersezione delle normali in P′, P″, per quanto precede, il circolo $P'P''P_0'''$ passerà per V, e quindi coinciderà col circolo k_1, cioè P_0''' coinciderà con P‴.

Il teor. 8 è dovuto a De Sluse (1668).

9. Problema della duplicazione del cubo. — *Dato un cubo, costruirne un altro di volume doppio.*

Sia a lo spigolo del cubo dato, e siano k, k' due parabole aventi lo stesso vertice V, gli assi ortogonali, e i parametri principali (§ 10, n° 11, Oss.) risp. uguali ad a e a $2a$ (*).



Queste parabole si tagliano, fuori di V, in un sol punto reale P, dal quale tireremo le rette PX, PY risp. perpendicolari all'asse di k e all'asse di k'. Avremo allora (§ 10, n° 11):

$$\overline{PX}^2 = a \, . \, PY \quad , \quad \overline{PY}^2 = 2a \, . \, PX,$$

dalle quali, eliminando PY, si trae:

$$\overline{PX}^3 = 2a^3.$$

Dunque PX è il lato del cubo richiesto.

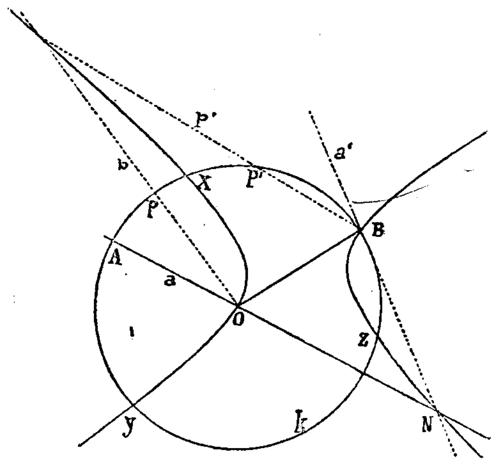
OSSERVAZIONE. Il problema è di 3° grado, ma ha un'unica soluzione reale.

Il problema della duplicazione del cubo, conosciuto anche sotto il nome di *problema di Delo*, è uno dei problemi classici, attorno ai quali si svolsero i primordî della Geometria greca. La soluzione esposta è dovuta a MENECMO, discepolo di PLATONE (verso il 400 av. Cr.).

(*) Al n° 2 del § seguente vedremo come si può costruire per moto continuo una parabola, di cui sono noti il vertice ed il parametro principale.

10. Problema della trisezione dell'angolo. — *Dividere in tre parti uguali un angolo data comunque.*

Fatto centro nel vertice O dell'angolo, descriviamo un circolo k, e sia $\widehat{AB}$ l'arco di questo circolo sotteso dall'angolo dato. Fissato sul circolo k un determinato verso, per ogni posizione di un punto P variabile sul circolo, consideriamo l'arco $\widehat{AP}$ che ha il verso fissato, e a partire da B, prendiamo su k un arco $\widehat{BP'}$, doppio di $\widehat{AP}$, ed in senso contrario a quello fissato.



I raggi $p \equiv OP$, $p' \equiv BP'$, formano rispettivamente col diametro $a \equiv OA$ e con la tangente a' in B, angoli uguali, ma di verso contrario; sicchè al variare di P, e quindi di P', i due raggi p, p' descrivono due fasci inversamente congruenti; ed in questa congruenza sono omologhi i raggi a ed a'.

Ne deriva che il punto $M \equiv pp'$ descrive un'iperbole equilatera k' (§ 10, n° 16), della quale O, B son punti diametralmente opposti, e che passa pel punto $N \equiv aa'$. Gli asintoti di quest'iperbole saranno le parallele condotte dal punto medio del segmento OB, alle bisettrici degli angoli aa'; e quindi si potranno costruire rapidamente quanti si vogliano punti di k' (§ 10, n° 30, Oss. 1ª).

L'iperbole k' incontra il circolo k fuori di B, in tre punti reali X, Y, Z, in ciascuno dei quali coincidono due punti P, P', legati tra loro nel modo visto sopra. Ne segue che uno, X, dei tre punti X, Y, Z, determina la divisione in tre parti dell' arco $\widehat{AB}$ dato, un altro, Y, risolve il problema per l' arco $2\pi - \widehat{AB}$, e infine il terzo, Z, risolve il problema per l' arco $\pi - \widehat{AB}$.

La teoria dei luoghi geometrici fu applicata al problema della trisezione dell' angolo fin dai tempi di PLATONE e de' suoi discepoli.

CAPITOLO SETTIMO

Proprietà focali.

§ 15. *Problemi sui fuochi delle coniche.*

SOMMARIO: *Generalità — Descrizione per moto continuo delle tre specie di coniche — Involuzioni focali. I raggi focali che escono da un punto* P *del piano di una conica, sono equinclinati sulle tangenti mandate da* P *alla curva. Dati di una conica un fuoco e tre tangenti, costruire l' altro fuoco (2 soluzioni). Il teorema di* LAMBERT *sul cerchio circoscritto al triangolo formato da tre tangenti di una parabola. Teorema di* PONCELET *— Teorema di* STEINER *sull' ortocentro del triangolo suddetto — Costruire una conica dati un fuoco e tre tangenti — I punti ove una tangente dell' iperbole incontra gli asintoti, stanno in un circolo coi fuochi, e in un altro circolo col centro del precedente e col centro dell' iperbole — Teorema di* CHASLES *sui raggi focali che escono da 2 punti di una conica — Costruire una conica di cui son noti un fuoco, un vertice dell' asse focale ed un punto; oppure i fuochi e gli estremi dell' asse focale. Con questi ultimi dati costruire le tangenti tirate ad una conica da un punto, o le intersezioni con una retta — Costruzione colla riga e col compasso delle intersezioni di due coniche che hanno in comune un fuoco, conoscendo pure le direttrici di questo fuoco ed un punto di ciascuna delle due coniche — Costruire una conica dati tre punti e un fuoco (3 soluzioni). Teorema di* L' HOSPITAL-PONCELET *sulla polare reciproca di una conica rispetto ad un circolo, che abbia per centro un fuoco — In una conica a centro è costante il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente variabile. Circolo direttore — In una parabola è costante la sottonormale di un punto variabile — Luogo dei centri dei circoli tangenti a due* *circoli dati. Risoluzione di* NEWTON *del problema di* APOLLONIO *— Coniche omofocali. Luogo dei poli di una retta rispetto alle coniche di una schiera omofocale. Parabola inviluppata dalle polari di un punto. La strofoide come luogo dei punti di contatto delle tangenti tirate da un punto alle coniche di una schiera omofocale — Teoremi di* CHASLES *sul luogo del vertice di un angolo retto i cui lati tocchino due coniche omofocali, e sulle tangenti ad una conica mandate da due punti di una omofocale. Teorema di* GRAVES-CHASLES *sugli archi di un' ellisse, aventi per poli punti di un' ellisse omofocale. I poligoni di* PONCELET *relativi a due ellissi omofocali, hanno gli stessi perimetri — Teoremi di* DUPIN *e di* DANDELIN *sui coni rotondi che proiettano una data conica.*

1. Dicesi *fuoco* di una conica, il centro di un fascio di raggi su cui la conica subordini l'involuzione degli angoli retti; cioè un punto dal quale escano due tangenti immaginarie della conica, coincidenti con le rette isotrope. (*E.* § 77).

Dalla definizione si trae subito che ogni fuoco è interno alla conica, ed anzi che appartiene ad un asse, il quale, in ogni caso, dovrà segare la conica in due punti reali (vertici).

Tenendo conto del fatto che le intersezioni di una tangente variabile con le tangenti alla conica nei vertici suddetti, debbono esser vedute sotto angolo retto dal fuoco considerato, si perviene alla conclusione che in un' ellisse di semiassi a, b $(a > b)$ vi sono due fuochi (reali) sull' asse maggiore (asse focale o principale), distanti dal centro della lunghezza $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; che nell' iperbole vi sono due fuochi (reali) sull' asse trasverso (focale o principale), distanti dal centro di $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, ove a, b son le lunghezze dei semiassi; che infine nella parabola c'è un sol fuoco (proprio), pel quale passano tutte le perpendicolari alle tangenti della parabola nei punti ove esse incontrano la tangente nel vertice (cioè la tangente nel vertice è la *podaria* del fuoco rispetto alla parabola).

Nel circolo si ha un sol fuoco, che coincide col centro.

Le polari dei fuochi si chiamano *direttrici* (*E.* § 78). La considerazione delle direttrici si presenta dunque naturale nello studio delle proprietà focali, e dà luogo ad alcune proposizioni che occupano un posto importante tra le proprietà metriche delle coniche.

Così uno degli angoli sotto cui una corda di una conica k è veduta da un fuoco F, è bisecato dalla retta che congiunge F col polo della corda; e l' altro angolo è bisecato dalla retta che congiunge F al punto comune alla corda ed alla polare di F. Le punteggiate proiettive segate sopra due tangenti fisse, da una tangente variabile, son proiettate da un fuoco F secondo due fasci direttamente congruenti; e l'angolo costante formato da due raggi omologhi, è la metà di uno degli angoli sotto cui si vedono da F i punti di contatto delle tangenti fisse. In una conica a centro, gli angoli dei raggi focali che escono da un punto della curva, son bisecati dalla tangente e dalla normale in quel punto; mentre in una parabola, la tangente e la normale in un punto, bisecano gli angoli formati dal raggio focale e dal diametro uscenti da quel punto.

In una conica qualunque il rapporto tra le distanze di un punto della curva da un fuoco e dalla relativa direttrice, è costante al variare del punto sulla curva. Questo rapporto costante si chiama *eccentricità* della conica, e s' indica ordinariamente con la lettera e (*E.* § 79).

Nell' ellisse e nell' iperbole l' eccentricità è uguale al rapporto tra la distanza focale e la lunghezza dell' asse focale; e quindi è minor d' uno nell' ellisse, maggiore nell' iperbole.

Nella parabola l' eccentricità è uguale ad 1, cioè i punti della parabola son definiti dalla condizione di avere una medesima distanza dal fuoco (proprio) e dalla direttrice.

Nel circolo l' eccentricità è nulla.

In un' ellisse o in un' iperbole è costante la somma o la differenza dei raggi focali, che escono da un punto della curva. E viceversa, queste proprietà sono caratteristiche per l' ellisse e per l' iperbole.

Noteremo inoltre che, in una conica a centro, la podaria di un fuoco rispetto alla curva, cioè il luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco alle tangenti, è il circolo che ha per diametro l'asse focale.

Nella parabola la direttrice si può pure definire come il luogo del vertice di un angolo retto, che varii mantenendosi circoscritto alla curva (cfr. pure col n° 12 del § 13).

La genesi di una conica come luogo di un punto variabile le cui distanze da un punto e da una retta fissa, sieno in rapporto costante, era probabilmente nota ad Euclide (secondo l'opinione di Zeuthen): ma s'incontra per la prima volta nelle *Collezioni* di Pappo. Anche in Apollonio si trovano varie proprietà dei fuochi, ch'egli chiamava « puncta ex applicatione facta ». Tra queste proprietà va ricordata quella relativa alla somma o differenza dei raggi focali, che escono da un punto di una conica a centro; il teorema che una tangente variabile sega sulle tangenti condotte negli estremi dell'asse focale, due punti veduti da un fuoco sotto angolo retto; la proprietà relativa alla podaria di un fuoco di una conica a centro; ecc.

La podaria del fuoco rispetto ad una parabola, fu considerata da Mac-Laurin (1720).

Guido Grandus (1737) osservò che uno degli angoli sotto cui si vede da un fuoco una corda di una conica, è bisecato dalla retta che va dal fuoco al polo della corda.

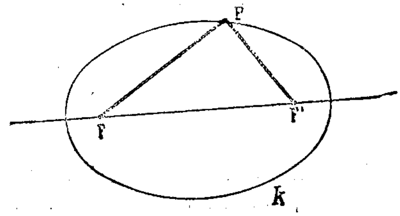
De La Hire (1685) considerò le *direttrici* come polari dei fuochi ed avvertì sostanzialmente la proprietà che due rette coniugate uscenti da un fuoco sono ortogonali.

La denominazione di *fuochi*, introdotta da Keplero (1604), deriva dalla proprietà che, un raggio luminoso uscente da un fuoco, riflettendosi sulla curva, va a passare per l'altro fuoco. A Keplero è pure dovuta la denominazione di *eccentricità* (1609).

La definizione moderna dei fuochi di una conica, da noi richiamata al principio di questo n°, fu adottata da Poncelet (1822), al quale si deve il primo sviluppo organico della teoria dei fuochi.

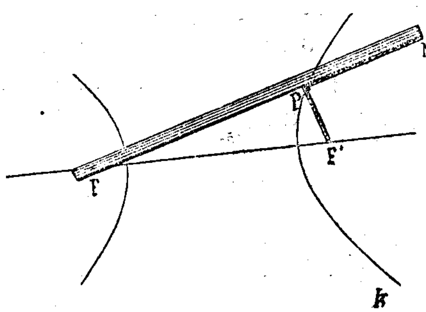
2. *Generazione per moto continuo delle tre specie di coniche.*

a) Di un'ellisse si conoscano i fuochi F, F′ e la lunghezza $2a$ dell'asse focale. Si fissino in F, F′ gli estremi di un filo di lunghezza $2a$, e si tenda il filo con la punta di una matita, facendo poi scorrere la punta stessa sul foglio, in modo che il filo resti sempre teso.



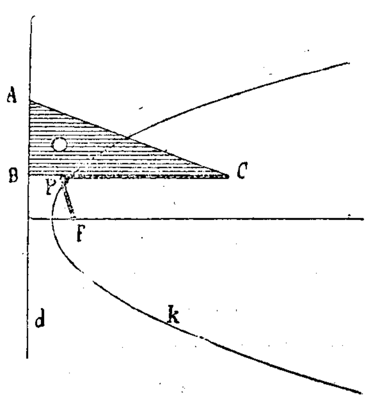
Si traccia così il luogo di un punto le cui distanze da F, F′ dànno la somma costante $2a$; cioè l'ellisse che ha per fuochi i punti F, F′ e che ha l'asse focale di lunghezza $2a$.

b) Sieno F, F′ i fuochi di un'iperbole k e $2a$ la lunghezza dell' asse focale. Fissiamo a cerniera sul fuoco F, uno degli estremi di una riga di lunghezza $l > 2a$, e quindi fissiamo i due capi di un filo di lunghezza $l - 2a$, l'uno nell' estremo mobile M della riga,



e l'altro nel fuoco F′. Se facciamo ruotare la riga attorno ad F, la punta P di una matita, che resti sempre aderente alla riga e che tenga teso il filo verso il fuoco F, descriverà sul foglio un arco dell'iperbole k. Infatti:

$$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = l - \mathrm{PM} - \mathrm{PF}' =$$
$$= l - (\mathrm{PM} + \mathrm{PF}') = l - (l - 2a) = 2a.$$



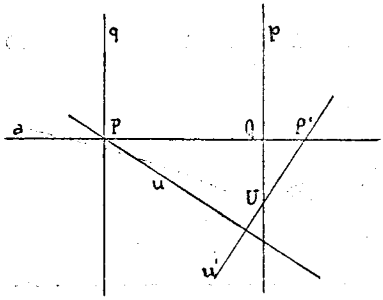
c) Sia F il fuoco e d la direttrice di una parabola k. Si prenda una squadra rettangolare ABC, il cui cateto BC sia maggiore della semidistanza tra F, d, e si adatti il cateto AB sulla direttrice. Si fissino quindi i due capi di un filo di lunghezza BC, l'uno in C e l'altro in F.

Facendo muovere la squadra in modo che il cateto AB strisci lungo la retta d, la punta P di una matita, che resti sempre aderente al cateto BC e che tenga teso il filo verso la direttrice, descriverà un arco della parabola k. Invero $PB = CB - CP = PF$.

Un ellissografo che realizza praticamente la generazione a), fu costruito p. e. da SCHOOTEN (1657), al quale è pure dovuto uno strumento per descrivere l'iperbole (come in b). La generazione c) fu data da ISIDORO DI MILETO (6° sec. dopo Cr.).

3. *Sulle involuzioni focali.* — Sia k una data conica, diversa da un circolo, e ne sia a un asse (proprio). Preso su quest'asse un punto generico P, conduciamone la polare p, che sarà perpendicolare ad a. Ogni retta u uscente da P, ha per polo un punto U della P; e la retta u', condotta per U perpendicolarmente ad u, sega l'asse in un punto P'.

Al variare della u attorno a P, il fascio descritto da questa retta è proiettivo alla punteggiata descritta dal suo polo, ed è pure proiettivo alla punteggiata descritta dal punto U'_∞, coniugato del punto improprio di u nell'involuzione assoluta. Sicchè risultano proiettive le punteggiate descritte da U e da U'_∞.



Quando U va all'infinito sulla p, la retta u viene a coincidere con a, e quindi il punto U'_∞ viene a coincidere con U: dunque le due punteggiate descritte da U, U'_∞ son prospettive. E siccome allorquando U va in $Q \equiv ap$, la retta u viene a coincidere con la q, perpendicolare ad a per P, ed il punto U'_∞ va nel punto improprio di a, il centro della prospettività sarà situato sull'asse a; cioè, al variare di u, la retta u' passerà per il punto fisso P'.

Al variare di P sull'asse, varia il punto P', e si ha così tra i punti di a una corrispondenza biunivoca, che è evidentemente simmetrica, perchè la retta coniugata e perpendicolare della retta u' uscente da P', è la retta u uscente da P.

Ora possiamo dimostrare che questa corrispondenza è una proiettività, e quindi (giacchè è simmetrica) che trattasi di un' ordinaria involuzione.

Invero, se ai raggi di un fascio improprio avente per centro un punto H_∞ (non appartenente a nessun asse), si fanno corrispondere i raggi coniugati ortogonali, si ottiene un fascio improprio H'_∞, riferito proiettivamente ad H_∞, perchè il fascio H'_∞ proietta la punteggiata descritta dal polo di un raggio variabile del fascio H_∞. La corrispondenza tra i punti P, P' vien segata sull' asse a, dalle coppie di raggi omologhi nella proiettività tra i fasci suddetti; e dunque anche la corrispondenza tra P, P' è proiettiva.

Si conclude che *le infinite coppie di rette perpendicolari, coniugate rispetto ad una conica, segano sopra un asse di questa, le infinite coppie di un' involuzione.*

Ogni coppia di tale involuzione vien segata da ∞^1 coppie di rette coniugate ortogonali. Il centro dell' involuzione è il centro (proprio od improprio) della conica.

Se l' involuzione è iperbolica, da ciascuno de' suoi punti doppi esciranno infinite coppie di rette coniugate ortogonali, cioè questi punti saranno *fuochi* (*reali*) per la conica.

Se l' involuzione è ellittica, potremo dire ch' essa è l' immagine reale di due *fuochi immaginari* della conica. Ma in seguito, parlando di fuochi, salvo esplicito avviso, intenderemo alludere a quelli reali.

Anche senza presupporre nota la teoria dei fuochi (come è svolta in *E.* Cap. XII), si possono ritrovare tutte le loro proprietà partendo dalle *involuzioni focali*, che vengono segate sugli assi della conica, dalle infinite coppie di rette coniugate ortogonali.

Così, se si tratta di una parabola, l' involuzione focale relativa all' asse (proprio) avrà uno dei punti doppi all' infinito, cioè si ridurrà ad una simmetria rispetto all' altro punto doppio, che sarà l' unico fuoco (proprio) della parabola.

Se si tratta di un' ellisse o di un' iperbole k, di assi a, b, è facile vedere che *delle due involuzioni focali* I_a, I_b *relative agli assi, una è iperbolica e l' altra è ellittica.*

Infatti se la I_a è iperbolica e ne sono F, F′ i punti doppi, l' involuzione I_b si potrà intendere segata sull' asse b, dalle infinite coppie di rette coniugate ortogonali uscenti da F o da F′, sicchè la I_b risulterà ellittica. Se invece la I_a è ellittica, il circolo avente per diametro una coppia della I_a, taglierà b (cioè la perpendicolare alla retta a, condotta pel centro dell' involuzione); e da ciascuna delle due intersezioni, l' involuzione I_a si proietterà secondo un' involuzione di angoli retti: e quindi l' involuzione I_b avrà come punti doppi le due intersezioni suddette.

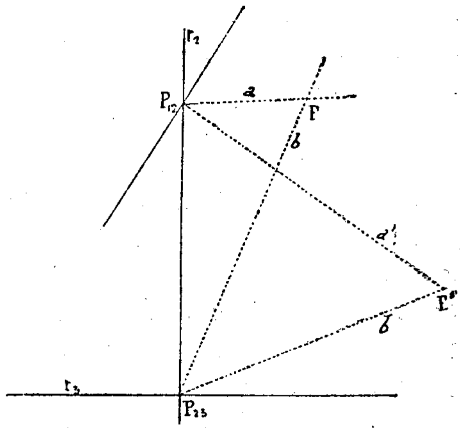
Le involuzioni focali furono considerate da STEINER e da CHASLES (1837). Nel caso della parabola la simmetria rispetto al fuoco si trovava già in DE LA HIRE (1685).

4. *I raggi focali che escono da un punto qualunque P del piano di una conica, sono ugualmente inclinati sulle tangenti mandate alla conica da P.*

Invero, le rette coniugate ortogonali che escono da P, segano sull' asse focale una coppia armonica coi fuochi (n° prec.), e quindi bisecano gli angoli dei raggi focali uscenti da P. Inoltre quelle rette coniugate ortogonali, separano armonicamente anche la coppia delle tangenti uscenti da P: dunque quest' ultima coppia e la coppia dei raggi focali, appartengono ad un' involuzione simmetrica, c. d. d.

OSSERVAZIONE. Dal teor. 4 si deduce una *1ª soluzione* del problema seguente: *Dati di una conica* k *un fuoco F e tre tangenti* t_1, t_2, t_3, *costruire l' altro fuoco.* Pongasi $P_{12} \equiv t_1t_2$, $P_{23} \equiv t_2t_3$, e si costruisca la retta a' simmetrica di $a \equiv P_{12}F$, rispetto alle bisettrici dell'angolo t_1t_2, e la retta b' simmetrica di

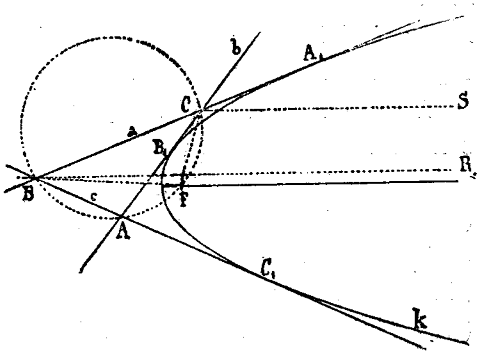
$b \equiv P_{23}F$, rispetto alle bisettrici dell'angolo $t_2 t_3$. Il punto $F' \equiv a'b'$ è l'altro fuoco richiesto.



Una 2ª *soluzione* dello stesso problema, si ottiene considerando la podaria del fuoco F rispetto alla conica k. Si abbassino da F le perpendicolari alle t_1, t_2, t_3. Se i piedi di queste perpendicolari stanno sopra una retta, la conica sarà una parabola toccata nel vertice da quella retta (*E.* § 77); altrimenti il circolo individuato dai tre piedi avrà per diametro l'asse focale (*E.* § 79). Sicchè il centro O del circolo sarà il centro di k, ed il punto F′ simmetrico di F rispetto ad O, sarà l'altro fuoco.

5. *Il cerchio circoscritto al triangolo formato da tre tangenti di una parabola, passa pel fuoco.*

Sia k la parabola, F il suo fuoco ed $ABC \equiv abc$ il triangolo formato da tre tangenti di k. Se da B, C tiriamo le rette BR, CS parallele all' asse della parabola, pel teorema del nº prec., avremo (in grandezza e in verso):



$$\widehat{ABF} = \widehat{RBA_1},$$
$$\widehat{ACF} = \widehat{SCA_1},$$

ove A_1 è il punto di contatto della tangente a. Poichè gli angoli $\widehat{RBA_1}$, $\widehat{SCA_1}$ sono uguali (come corrispondenti), si deduce che $\widehat{ABF} = \widehat{ACF}$, e quindi i 4 punti ABCF appartengono ad un medesimo circolo.

Osservazione 1ª. Il teorema 5 si può enunciare anche sotto questa forma: *Il luogo dei fuochi delle parabole inscritte in un dato triangolo, è il cerchio circoscritto a quel triangolo.*

Osservazione 2ª. Poichè l'angolo $\widehat{ACF} = (\widehat{ABF})$ rimane costante al variare di AB, potremo dire che:

Se dal fuoco di una parabola si tirano le rette che formano colle tangenti un angolo dato in grandezza e in verso, il luogo dei loro piedi è una tangente della parabola. In particolare se l'angolo dato è retto, si ritrova la podaria del fuoco rispetto alla parabola (*E.* § 77). Si ritrova pure, come corollario, l'*estensione del teorema di* Simson, già incontrata al n.° 3 del § 7.

Il teor. 5 è dovuto ed J. Lambert (1761). Le proprietà delle Oss.ⁱ 1ª e 2ª si trovano in Poncelet (1817-22).

6. *L'ortocentro di un triangolo circoscritto ad una parabola appartiene alla direttrice.*

È questa una conseguenza immediata del teorema esposto al n° 12 del § 12, e del fatto che la direttrice di una parabola è il luogo dei punti da cui escono due tangenti ortogonali (*E.* § 79, teor. 10).

7. *Costruire una conica per tangenti, dati un fuoco F e tre tangenti* a, b, c.

Per risolvere questo problema si può profittare del n° 4 (Oss.), ma è più semplice profittare del fatto che le tangenti della conica *k* da costruirsi, segano sulle *a, b* due punteggiate vedute da F secondo due fasci direttamente congruenti (*E.* § 78). Questa congruenza è perfettamente determinata, perchè si conoscono due raggi omologhi, che proiettano da F i punti *ac*, *bc*.

Osservazione. Il probl. 7 è un caso particolare metrico di quest'altro: *Costruire una conica per tangenti, date due tangenti immaginarie uscenti dal punto F e tre tan-*

genti reali a, b, c. La soluzione di questo problema si ottiene enunciando graficamente la soluzione del probl. 7.

Vi è una determinata proiettività ω tra i raggi del fascio F, che fa passare dal raggio $r \equiv$ F. ac al raggio $r' \equiv$ F. bc, e che è armonica coll' involuzione (ellittica) I, data nel fascio F. Le infinite tangenti della conica si ottengono congiungendo le coppie di punti omologhi delle punteggiate segnate sulle a, b, dai fasci sovrapposti riferiti mediante la ω.

Tale soluzione grafica è del resto una conseguenza immediata della proprietà correlativa al Lemma del § 12, n° 5.

Lo stesso problema (e quindi il probl. 7) si può pure risolvere trasportando per dualità la costruzione esposta in *E.* pag. 233. Analoghe osservazioni si possono fare per molti problemi costruttivi in cui entrano i fuochi.

8. *I punti A, B ove una tangente di un' iperbole incontra gli asintoti, stanno in una circonferenza coi fuochi F, F', e in un' altra circonferenza col centro della precedente e col centro O dell' iperbole.*

Dicendo a l' asse focale FF' e p la parallela condotta da F all' asintoto OA, l' angolo $\widehat{AFB}$ risulterà uguale ad uno dei due angoli convessi pa, cioè ad uno dei due angoli convessi formati dalle OA, a (*E.* § 78, 2° teor.) Similmente l' angolo $\widehat{AF'B}$ risulterà uguale all' altro angolo convesso $\widehat{OA, a}$. Ne deriva che i due angoli $\widehat{AFB}$, $\widehat{AF'B}$ son supplementari; e poichè i fuochi F, F' giacciono da parti opposte di AB, si conclude che il quadrangolo ABFF' è inscrittibile in un circolo.

Inoltre, se indichiamo con C il centro di questo circolo, l' angolo $\widehat{ACB}$ risulterà doppio di uno degli angoli $\widehat{AFB}$, $\widehat{AF'B}$ e quindi uguale ad uno degli angoli formati dagli asintoti. Ne segue che anche i punti A, B, C, O appartengono ad un circolo (perchè i punti O,C giacciono da una stessa parte della retta AB).

9. *In una conica qualunque, i quattro raggi focali che escono dagli estremi di una corda, toccano un circolo, che ha per centro il polo della corda.*

Sieno F,F′ i fuochi della conica k (dei quali uno è improprio se k è una parabola), AB la corda data e a,a'; b,b' i raggi focali che escono da A,B. Poichè la tangente in A biseca uno degli angoli aa' (*E.* § 78, 3° teor.), e la retta FP, che congiunge F col polo P di AB, biseca uno degli angoli ab (*E.* § 78, 1° teor.), il punto P sarà equidistante da a,a',b. In modo analogo si prova che P è equidistante da b,b',a', e quindi si conclude che le $aa'bb'$ toccano un circolo di centro P.

Questo teorema è di Chasles (1830).

10. *Costruire una conica di cui son noti un fuoco F, un vertice V dell' asse focale ed un punto P.*

Le coniche aventi per fuoco il punto F e per vertice il punto V, costituiscono una schiera con due rette base immaginarie, uscenti da F, e due rette base reali, coincidenti colla perpendicolare t all'asse focale nel punto V: sicchè per un punto generico P del piano, usciranno due coniche, (sempre reali — cfr. col § 12, n.° 5, Oss. 2ª) di quel sistema.

Il polo della retta VP rispetto ad una di queste coniche, dovrà appartenere alla retta t e ad una delle bisettrici degli angoli formati dalle rette VF, PF; ed il punto ove la VP è tagliata dall' altra bisettrice, dovrà appartenere alla direttrice del fuoco F rispetto a quella conica (*E.* § 78, 1° teor.).

Se dunque diciamo b_1, b_2 le bisettrici degli angoli formati dalle VF, PF, e poniamo $M_1 \equiv VP \cdot b_1$, $M_2 \equiv VP \cdot b_2$, le rette d_1, d_2 condotte per M_1, M_2 perpendicolarmente alla VF, saranno le direttrici del fuoco F rispetto alle due coniche k_1, k_2, che risolvono il problema.

Il punto V_1 (o V_2) coniugato armonico di V rispetto alla coppia costituita dal punto F e dal punto $VF \cdot d_1$

(o VF . d_2), sarà l'altro estremo dell'asse focale di k_1 (o k_2). Le rette che proiettano dai punti V e V_1 (o V_2) le coppie segate sulla d_1 (o d_2) dagli angoli retti col vertice in F, pel teorema di Staudt, s'incontrano in punti della conica richiesta k_1 (o k_2).

11. *Costruire per tangenti una conica a centro di cui son noti i fuochi F,F′ e i vertici V,V′ dell'asse focale.*

Si descriva il circolo c che ha per diametro VV′. Le tangenti alla conica da costruirsi son le perpendicolari negli estremi delle corde di c, che passano per F o F′ (*E.* § 79, 9° teor.).

12. *Con gli stessi dati dell'es. 11, costruire le tangenti della conica che escono da un punto P del piano.*

Si descriva il circolo c che ha per centro il fuoco F′ e per raggio la lunghezza VV′ dell'asse focale; e quindi si descriva il circolo c' che ha per centro P e per raggio PF. Se il circolo c' sega c nei due punti H, H′, le perpendicolari condotte da P alle rette FH, FH′, son le tangenti richieste (*E.* § 79, 8° teor.). — I punti di contatto di queste tangenti son segnati risp. dalle rette F′H, F′H′.

Osservazione. Se il punto P è improprio, s'intersecherà il circolo c in H, H′, colla perpendicolare per F alla retta FP: le tangenti richieste saranno le perpendicolari nei punti medi dei segmenti FH, FH′.

13. *Individuata una parabola mediante il fuoco F ed il vertice V, costruire le tangenti della curva che escono da un punto P del piano.*

Si tracci la tangente t nel vertice della parabola, e si descriva il circolo c' che ha per diametro il segmento PF. Se questo circolo sega t nei punti H, H′, le rette PH, PH′ sono le tangenti richieste (*E.* § 77).

Osservazione. Allorquando P è improprio, si dovrà tirare da F la perpendicolare alla direzione P: la retta che esce dal punto ove questa perpendicolare sega t, è la tangente propria passante per P.

14. *Dati di una conica a centro* k *i fuochi F, F' ed i vertici V, V' dell'asse focale, costruire le intersezioni di* k *con una retta* u *assegnata.*

Il simmetrico F_x del fuoco F rispetto alla tangente a k in uno, X, dei punti X, Y richiesti (supposti reali), appartiene al circolo c di centro F' e raggio VV' (*E.* § 79, 8° teor.), ed al circolo c_x di centro X e raggio XF. Anzi, giacchè la retta XF_x passa pel centro F' del circolo c (*E.* § 78, 3° teor.), nel punto F_x i due circoli c, c_x si toccheranno.

Da quest'analisi si trae che, se i punti X, Y son reali, essi sono i centri di due circoli c_x, c_y, tangenti a c ed appartenenti al fascio dei circoli che passano pel fuoco F ed hanno i centri sulla retta u.

Ora i circoli di questo fascio segano su c (fuori dei punti ciclici) le coppie di un'involuzione, che ha per polo il centro radicale O comune a due di quei circoli e al circolo c (§ 12, n.° 14). I raggi di c che escono dai punti di contatto delle eventuali tangenti mandate a c da O, segano sulla u i punti XY richiesti.

15. *Dati di una parabola* k *il fuoco F ed il vertice V, costruire le intersezioni di* k *con una retta* u *assegnata.*

Il simmetrico F_x del fuoco F rispetto alla tangente a k in uno, X, dei punti incogniti X, Y (supposti reali), appartiene alla direttrice d e al circolo c_x di centro X e raggio XF. Anzi, giacchè la retta XF_x è perpendicolare a d (*E.* § 79, 5.° teor.), il circolo c_x toccherà d in F_x.

Dunque, se i punti XY son reali, essi sono i centri di due circoli, c_x, c_y, tangenti a d e appartenenti al fascio di quelli che passano pel fuoco F ed hanno come retta centrale la u. Per costruire le intersezioni di u con k, basterà dunque intersecare la u colle parallele all'asse VF, tirate dai punti doppi dell'involuzione segata sulla retta d dal fascio suddetto.

16. *Costruire, colla riga e col compasso, le intersezioni di due coniche* k, k' *aventi in comune un fuoco F,*

conoscendo un punto di ciascuna conica, e le direttrici d, d′ *del fuoco comune.*

Le due coniche k, k' essendo tangenti alle rette isotrope che escono da F, si potranno riferire omologicamente in due modi, prendendo come centro d'omologia il punto F, e facendo corrispondere al punto dato Q di k uno dei punti in cui la retta FQ sega k' (*E.* § 71, Oss. 3ª). In ambedue queste omologie alla retta d corrisponderà la retta d', sicchè si potranno costruire subito gli assi x, y delle omologie stesse.

Intersecando le rette x, y con una delle due coniche (n.i 14, 15) otterremo, colla riga e col compasso, i punti comuni a k, k'.

Osservazione. In base al teorema di Desargues-Sturm esteso ai fasci qualunque (§ 12, n.i 1, 5 e § 13, n. 29), la costruzione delle corde x, y comuni alle due coniche, può farsi anche nel modo seguente: Sieno Q, Q′ i punti dati delle coniche k, k', ed R, R′ le ulteriori intersezioni di queste coniche colla retta QQ′. Le rette x, y costituiscono la coppia comune all'involuzione che ha per raggi doppi d, d', e a quella che si ottiene proiettando dal punto dd' l'involuzione $\begin{pmatrix} QR \\ Q'R' \end{pmatrix}$.

La 1ª delle soluzioni esposte è di Poncelet (1822).

17. *Costruire una conica dati tre punti A, B, C e un fuoco F.*

1ª. *Soluzione.* Poichè il problema proposto è un caso particolare metrico del problema di costruire una conica tangente a due rette immaginarie e passante per 3 punti dati, la nota soluzione di questo problema (*E.* § 71) ci fornirà un primo modo di risolvere il probl. 17. Enunciamo senz'altro la costruzione, sotto la forma più conveniente pel disegno.

Si descriva il circolo k' di centro F e raggio FA, e si chiamino $B_1'B_2'$, $C_1'C_2'$ le intersezioni di questo circolo coi diametri che vanno ai punti B, C. Diciamo u_1, u_2, u_3, u_4 le rette che congiungono il punto A rispettivamente coi punti:

$$(1) \quad BC . B'_1C'_1, \; BC . B'_1C'_2, \; BC . B'_2C'_1, \; BC . B'_2C'_2.$$

Le 4 omologie che hanno per centro il punto F, per assi le u_1, u_2, u_3, u_4, e nelle quali si corrispondono risp. le 4 coppie di rette (1), mutano il circolo k' in 4 coniche k_1, k_2, k_3, k_4, che risolvono il problema.

2.ª *Soluzione.* Se le bisettrici degli angoli formati dalle rette AF, BF, segano la corda AB nei punti D_1, D_2, la direttrice di una conica k_x che passi per A,B,C e che abbia un fuoco in F, dovrà passare per uno dei punti D_1, D_2 (*E.* § 78, 1° teor.). Similmente la direttrice del fuoco F rispetto alla conica k_x, dovrà passare per uno dei punti D'_1, D'_2 in cui la retta AC vien segata dalle bisettrici degli angoli formati dalle AF, CF. Dunque se esiste una conica k_x soddisfacente al problema, essa dovrà avere per direttrice corrispondente al fuoco F una delle 4 rette:

$$d_1 \equiv D_1D'_1, \; d_2 \equiv D_1D'_2, \; d_3 \equiv D_2D'_1, \; d_4 \equiv D_2D'_2.$$

Ciò posto, consideriamo una di queste rette, ad es. la d_1, ed osserviamo che esiste una conica k_1 ben determinata, che passa per A, ha per fuoco F e per direttrice corrispondente la retta d_1: la costruzione della conica k_1 per punti, si ottiene facilmente in base al teorema di Staudt (*E.* § 80).

La conica k_1 taglierà la retta AB, fuori di A, in un punto B′, tale che uno degli angoli formati dalle rette FA, FB′ abbia per bisettrice la retta FD_1. Ciò significa che B′ coincide con B. In modo analogo si vede che la conica k_1 passa per C.

Prendendo come direttrice corrispondente al fuoco F, una delle altre tre rette $d_2 d_3 d_4$, avremo altre tre soluzioni del problema. Si osservi anzi che, siccome il segmento finito

AB contiene uno dei punti D_1D_2, e il segmento finito AC contiene uno dei punti $D'_1D'_2$, una sola delle quattro direttrici lascierà da una medesima parte i tre punti A, B, C, e quindi delle 4 soluzioni del problema tre sono certo iperbole. Si conchiude che:

Esistono quattro coniche reali circoscritte ad un dato triangolo e che hanno per fuoco un punto dato; tre di esse sono sempre iperbole, mentre la quarta può essere di specie qualunque.

La 1ª soluzione è dovuta a Poncelet (1822), il quale dimostra che due coniche aventi un fuoco F comune (in particolare una conica ed un circolo col centro in un fuoco di questa), si possono riferire con due omologie diverse aventi per centro F, provando che le due coniche si possono riguardare come proiezioni di due sezioni piane di un cono quadrico, il cui vertice si proietta in F. — La 2ª soluzione è dovuta a De La Hire (1685) e a Newton (1687).

18. *La polare reciproca di una conica rispetto ad un circolo, che abbia per centro un fuoco della conica, è un circolo; e viceversa, la polare reciproca di un circolo rispetto ad un altro circolo, è una conica con un fuoco nel centro di quest' ultimo.*

Sia k la conica data, c il dato circolo avente il centro nel fuoco F di k, e sia π la polarità di cui c è conica fondamentale. La *polare reciproca* di k rispetto a c, è la conica k' trasformata di k mediante la polarità π.

Poichè la π muta il punto F nella retta all' infinito, muterà la direttrice d, relativa ad F, nel polo della retta all' infinito, rispetto alla conica k'; cioè il centro della conica k' sarà il polo D della retta d rispetto al circolo c.

Due rette uscenti da F, coniugate rispetto a k, si mutano mediante la π in due punti impropri coniugati nell' involuzione assoluta; e poichè questi punti sono pure coniugati rispetto a k', si conclude che la k' subordina sulla retta impropria l' involuzione assoluta. Dunque k' è un circolo di centro D.

Il ragionamento è evidentemente invertibile.

OSSERVAZIONE 1.ª Si trae di qua una 3ª *soluzione del problema* (trattato al n.º prec.) *di costruire una conica circoscritta ad un triangolo ABC e avente per fuoco il punto F.*

Tracciato un circolo qualunque γ di centro F, si trovino le polari a, b, c, di A, B, C rispetto a γ. I 4 circoli tangenti alle a, b, c, son trasformati dalla polarità rispetto a γ, nelle 4 coniche circoscritte ad ABC ed aventi per fuoco F.

Il lettore verificherà subito che tre di queste coniche sono iperbole.

OSSERVAZIONE 2.ª Più in generale possiamo dire che *il teor. 18 permette di ridurre ogni problema relativo a coniche, e tra i cui dati sia compreso un fuoco, ad un problema più elementare relativo a circoli.*

Così potremo costruire una conica di cui sia noto un fuoco, un punto, e due tangenti; oppure un fuoco, una tangente e due punti; ecc.

Il teor. 18 fu dimostrato prima da DE L'HOSPITAL (1707), eppoi da PONCELET (1826).

19. *In una conica a centro è costante il prodotto delle distanze dei due fuochi da una tangente variabile, ed è uguale al quadrato del semiasse secondario, preso col + o col —, secondo che si tratta di un' ellisse o di un'iperbole.*

Sia k la conica, t, t_1 due sue tangenti parallele e P, P_1 i piedi della perpendicolare abbassata su queste tangenti da uno, F, dei due fuochi F, F′ della conica. Poichè i punti P,P_1 sono le intersezioni della perpendicolare suddetta colla podaria di F rispetto a k, cioè col circolo γ avente per diametro l'asse principale, il prodotto FP . FP_1 rimarrà costante, in valore ed in segno, al variare delle due tangenti, e sarà uguale alla potenza del punto F rispetto a γ. Questa potenza è data da $FO^2 - a^2 = \mp b^2$, ove O è il centro di k, a, b sono i semiassi (principale e secondario): il segno — vale per l'ellisse, il + per l'iperbole.

Se la perpendicolare a t condotta pel fuoco F', ha per piede il punto P', a causa della simmetria della conica rispetto al centro O, sarà $F'P' = - FP_1$, e quindi avremo:

$$FP \cdot F'P' = \pm b^2 \ , \quad \text{c. d. d.}$$

Osservazione. Sia M un punto del piano da cui escano due tangenti s, t della conica a centro k, ortogonali tra loro; e diciamo N, N' e P, P' le intersezioni di s, t col circolo γ, cioè i piedi delle perpendicolari abbassate sulle s, t dai fuochi F, F'. Dall'esame dei rettangoli FNMP, F'N'MP', risulta:

$$FN = PM \ , \ F'N' = P'M;$$

sicchè, in valore e segno, sarà:

$$PM \ . \ P'M = FN \ . \ F'N' = \pm b^2.$$

Osservando che PM . P'M è la potenza del punto M rispetto al circolo γ, avremo:

$$\pm b^2 = \overline{OM}^2 - a^2,$$

ossia:

$$\overline{OM}^2 = a^2 \pm b^2,$$

dove il + vale per l'ellisse e il — per l'iperbole.

In tal modo si ritrova, completato, un teorema che già dimostrammo al n. 14 del § 13.

Per un' ellisse o per un' iperbole (che abbia l' asse focale a *maggiore del secondario* b), *il luogo dei punti da cui escono due tangenti ortogonali, è un circolo, concentrico con la curva, e avente per raggio* $\sqrt{a^2 \pm b^2}$; *ove il + vale per l' ellisse e il — per l' iperbole.*

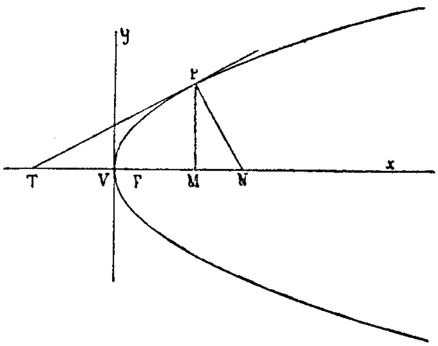
Non esistono tangenti ortogonali di un' iperbole per la quale sia a $<$ b.

Il teor. 19 è di J. KEILL (1709). — Pel circolo direttore ved. le notizie al n.° 14 del § 13.

20. *In una parabola è costante la sottonormale d' un punto variabile, ed è uguale al doppio del segmento dell' asse compreso tra il vertice e il fuoco.*

Dicesi *sottonormale* di un punto P di una parabola k, la proiezione ortogonale sull' asse x del segmento di normale compresa tra P ed x.

Per dimostrare il teorema enunciato, indichiamo con T, N le tracce sull' asse x della tangente e della normale in P, con M il piede della perpendicolare da P all' asse, con V il vertice e con F il fuoco di k. Poichè T, N sono coniugati nell' involuzione focale dell' asse x (n. 3), sarà TN $=$ 2TF; e poichè inoltre i punti T, M son coniugati rispetto alla conica (essendo PM la polare di T), sarà pure TM $=$ 2TV. Se ne ricava:



$$\mathrm{MN} = \mathrm{TN} - \mathrm{TM} = 2\,\mathrm{TF} - 2\,\mathrm{TV} = 2\,\mathrm{VF}, \quad \text{c. d. d.}$$

OSSERVAZIONE. Dalla proprietà dimostrata si ricava di nuovo l' equazione della parabola, riferita all' asse come asse delle x, e alla tangente in V come asse delle y (cfr. col n° 11 del § 10).

Infatti dette x, y le coordinate di P, si ha $x = \mathrm{VM}$,

$y = \text{MP}$. Ma dal triangolo rettangolo TPN, che ha per altezza MP, si ricava:

$$\overline{\text{MP}}^2 = \text{TM} \,.\, \text{MN},$$

sicchè, ponendo $\text{VF} = \frac{p}{2}$, e quindi $\text{MN} = p$, avremo:

$$y^2 = 2px.$$

21. *I centri dei circoli tangenti a due circoli dati* c, c′, *appartengono a due coniche, aventi per fuochi i centri* F, F′ *di questi circoli.*

Sia P il centro di un circolo l, di raggio ρ, tangente ai circoli dati c, c', di raggi r, r'. Varie ipotesi sono possibili in relazione alla mutua posizione dei due circoli dati:

1ª) I circoli c, c' sono mutuamente esterni. Allora esistono circoli tangenti internamente all' uno ed esternamente all' altro, ed anche circoli tangenti internamente o esternamente ad entrambi.

Se l tocca internamente c ed esternamente c', sarà certo $\rho > r$, e quindi

$$\text{PF} = \rho - r, \quad \text{PF}' = \rho + r',$$

donde si trae:

$$\text{PF}' - \text{PF} = r + r'.$$

In modo analogo, se l tocca esternamente c ed internamente c', si vede che:

$$\text{PF} - \text{PF}' = r + r';$$

e quindi si conclude che i centri dei circoli tangenti internamente all' uno dei circoli dati ed esternamente all' altro, appartengono ad un' iperbole k avente per fuochi F, F′ e per lunghezza dell' asse focale $r + r'$; i centri dei circoli tangenti inter. a c ed ester. a c' appartengono ad un ramo dell' iperbole k, e i centri dei circoli tangenti ester. a c ed inter. a c', appartengono all'altro ramo. Gli asintoti di k sono le perpendicolari abbassate dal punto medio di FF', alle due tangenti comuni a c, c', che escono dal centro di similitudine inversa dei due circoli (§ 8, n° 17).

Se l tocca esternamente tanto c che c', avremo:

$$\mathrm{PF} = r + \rho, \quad \mathrm{PF}' = r' + \rho,$$

donde:

$$\mathrm{PF} - \mathrm{PF}' = r - r';$$

e se l tocca internamente tanto c che c', poichè $\rho > r$ e $\rho > r'$, sarà:

$$\mathrm{PF} = \rho - r, \quad \mathrm{PF}' = \rho - r',$$

da cui:

$$\mathrm{PF}' - \mathrm{PF} = r - r'.$$

Dunque, se $r > r'$, i centri dei circoli che toccano internamente o esternamente entrambi i circoli dati, appartengono ad un'iperbole k', avente per fuochi F, F', per lunghezza dell'asse focale $r - r'$, e per asintoti le perpendicolari abbassate dal punto medio di FF', alle tangenti comuni a c, c', che escono dal centro di similitudine diretta. A seconda che i contatti avvengono inter. o estern. si ha l'uno o l'altro ramo dell'iperbole.

Se $r = r'$ l'iperbole k' vien sostituita dall'asse radicale dei due circoli.

Si vede subito, viceversa, che un punto dell'iperbole k è centro di un circolo tangente internamente ad uno dei circoli c, c' ed esternamente all'altro, e che un punto dell'iperbole k' (o dell'asse radicale, se $r = r'$) è centro di un circolo tangente internamente o esternamente a c e c'. Dunque:

Quando i circoli dati c, c' *sono mutuamente esterni, il luogo dei centri dei circoli tangenti ad entrambi si* *compone di due iperbole, una delle quali riducesi all' asse radicale allorchè i due circoli sono uguali.*

2ª) I circoli c, c' si segano in due punti reali e distinti. Con una discussione analoga alla precedente si stabilisce che *in tal caso il luogo dei centri dei circoli tangenti a* c, c' *si compone di un' ellisse* k *e di un'iperbole* k', *la quale riducesi all' asse radicale quando i circoli* c, c' *sono uguali.*

L' ellisse k è luogo dei centri dei circoli che toccano internamente l' uno dei circoli dati ed esternamente l' altro. Essa ha per fuochi F, F' e per lunghezza dell' asse focale $r + r'$.

L' iperbole k' è luogo dei centri dei circoli che toccano intern. o ester. c e c': un ramo corrisponde ai contatti della prima specie e l' altro ai contatti della seconda. I suoi fuochi sono F, F', la lunghezza dell' asse focale $r - r'$ (se $r > r'$), e i suoi asintoti le perpendicolari dal punto medio di FF' alle due tangenti comuni a c, c'.

3ª) Dei due circoli c, c' uno è interno all' altro: p. e. c' è interno a c.

Il luogo dei centri dei circoli tangenti a c, c' *si compone allora di due ellissi* k, k'. Una, luogo dei centri dei circoli che toccano intern. c ed estern. c', ha per fuochi F, F' e per lunghezza dell' asse focale $r + r'$; l' altra, luogo dei centri dei circoli tangenti intern. tanto a c che a c', ha per fuochi F, F' e per lunghezza dell' asse focale $r - r'$.

4ª) I circoli c, c' si toccano esternamente.

Il luogo dei centri dei circoli tangenti a c, c' *si compone della retta centrale* k, *e di un' iperbole* k', *che riducesi alla tangente nel punto comune, se i due circoli sono uguali.*

L' iperbole k' ha per fuochi F, F', l' asse focale di lunghezza $r - r'$ (se $r > r'$), e per asintoti le perpendicolari dal punto medio di FF' alle 2 tangenti ulteriormente comuni a c, c'. Un ramo di k è costituito dai centri dei circoli tangenti inter. a c, c', e l'altro dai centri di quelli che toccano ester. c e c'. La retta centrale k è poi il luogo dei centri dei circoli tangenti inter. ad uno e ester. all'altro dei due circoli c, c'.

5ª) I circoli c, c' si toccano internamente; p. e. c' è interno a c.

Il luogo dei centri dei circoli tangenti a c, c', *si compone della retta centrale* k, *e di un' ellisse* k'.

Quest' ellisse ha per fuochi F, F', per lunghezza dell'asse focale $r + r'$, e contiene i centri dei circoli che toccano intern. c ed estern. c'; mentre la retta centrale contiene i centri dei circoli che toccano inter. o ester. tanto c che c'.

Osservazione 1ª. Le considerazioni svolte in questo numero forniscono una nuova soluzione del *problema di* Apollonio (già trattato al n° 18 del § 8), di *costruire un circolo tangente a tre circoli dati* c, c', c''. Consideriamo le due coniche k_1 k_2, che contengono i centri dei circoli tangenti a c, c', e le 2 coniche k_3 k_4, che contengono i centri dei circoli tangenti a c', c''; ed accoppiamo una delle coniche k_1 k_2 ad una delle k_3 k_4, con l'avvertenza di porre nella stessa coppia due coniche luogo dei centri di circoli che abbiano con c' contatti della stessa specie.

Intersecando le coniche delle due coppie così ottenute, abbiamo in tutto 8 punti (tra reali, ecc.), che sono i centri delle 8 soluzioni del problema.

Si noti che a queste soluzioni si perviene *colla riga e col compasso* (come al n° 18 del § 8), perchè due coniche di una coppia hanno un fuoco comune (il centro di c'), e quindi si può applicare la costruzione del n.° 16 di questo §.

Osservazione 2ª. Se di due circoli c, c' di centri F, F', uno varia in modo che il suo centro si allontani indefinitamente, le due coniche che contengono i centri dei circoli tangenti a c, c', tenderanno a due parabole.

Si può verificare direttamente che *il luogo dei centri dei circoli che toccano una retta ed un circolo dati, è* *costituito da due parabole, aventi entrambe per fuoco il centro del circolo.*

Alle notizie storiche sul problema di APOLLONIO, esposte al n. 18 del § 8, aggiungeremo adesso che la soluzione contenuta nell' Oss. 1ª è di NEWTON (Philos. naturalis principia math., 1687).

22. *Sulle coniche omofocali.* — Due coniche a centro diconsi *omofocali* (o *confocali*) quando hanno gli stessi fuochi; e due parabole diconsi omofocali, quando hanno lo stesso fuoco (proprio) e lo stesso punto all' infinito.

a) Le coniche a centro che hanno per fuochi due punti dati F, F′, costituiscono una *schiera* di coniche, avente per rette base le due coppie di rette isotrope uscenti dai punti F, F′; onde allo studio di un tal sistema di coniche, si potrebbero applicare i teoremi già noti per le schiere, come il teorema di DESARGUES-STURM, sotto la forma duale (vedi il n° 5, Oss. 2ª, del § 12); ecc.

Ma le proprietà più notevoli si possono pure ottenere direttamente, e val la pena di notarlo.

Un punto P del piano, appartiene soltanto a *due* coniche aventi per fuochi F, F′; una di esse è l' ellisse che ha per lunghezza dell' asse focale PF + PF′, e l' altra è l' iperbole che ha per lunghezza dell' asse focale il valore assoluto della differenza PF — PF′.

Le bisettrici degli angoli formati dalle rette PF, PF′, sono l' una tangente all' ellisse e l' altra all' iperbole suddette: e precisamente è tangente all' ellisse, quella che lascia da una stessa parte i fuochi F, F′, all' iperbole l' altra.

Sicchè le due coniche che passano per P si segano ivi ortogonalmente.

Due ellissi omofocali non hanno evidentemente punti comuni, anzi l' una di esse è tutta interna all' altra; e lo stesso dicasi di due iperboli. Se invece consideriamo un' ellisse ed un' iperbole omofocali, poichè i vertici dell' iperbole sono interni al segmento finito FF′, l' iperbole taglierà l' ellisse in 4 punti disposti simmetricamente rispetto agli assi comuni.

Le tangenti mandate da un punto P del piano ad una conica del sistema, che non passi per P, costituiscono una coppia dell'involuzione simmetrica individuata dalla coppia PF, PF′; cioè dell'involuzione simmetrica che ha per raggi doppi le tangenti alle due coniche passanti per P (§ 15, n° 4).

Ora questa proposizione non è altro che l'enunciato del teorema di DESARGUES-STURM (sotto la forma duale) per la particolare schiera costituita dalle coniche confocali; sicchè qua si presenta una nuova via metrica per stabilire questo teorema, per le schiere colla base immaginaria.

Data una schiera con la base immaginaria, basterà mostrare com'essa si proietti in una schiera di coniche omofocali; cioè basterà mostrare come si possa *proiettare una conica in guisa che due suoi punti interni si mutino nei fuochi (reali) della conica proiezione.*

Sia k_1 la conica data, F_1 F_1' i suoi punti interni dati, A_1 A_1' gli estremi della corda F_1 F_1' ed M_1 M_1' la coppia reale armonica con A_1 A_1' e F_1 F_1'. Sia inoltre u_1 la polare di M_1 rispetto a k_1 ed O un punto esterno al piano di k_1, da cui l'involuzione ellittica segata su u_1 dalle coppie di rette coniugate uscenti da F_1, venga proiettata secondo un' involuzione di angoli retti. Proiettiamo da O la k_1 sopra un piano parallelo ad Ou_1, e diciamo k la conica proiezione di k_1, ed F, F′, M, M′ le proiezioni rispettive dei punti F_1, F_1', M_1, M_1'. Il punto F risulterà un fuoco di k, il punto M risulterà il centro della stessa conica, il punto M′ andrà all'infinito sull'asse focale MF, e infine F′ risulterà il simmetrico di F rispetto ad M, e quindi sarà l'altro fuoco (reale) di k.

Dopo ciò le proprietà delle coniche omofocali si possono trasportare senz'altro alle coniche inscritte in un quadrilatero immaginario.

b) Le parabole che hanno per fuoco un punto F e per asse una retta *a* uscente da F, formano una schiera che ha due rette base immaginarie (le rette isotrope uscenti da F) e due rette base coincidenti colla retta all'infinito del piano.

Per un punto P del piano passano due parabole del sistema; l'una, k, ha per direttrice una delle due rette perpendicolari ad a che distano da P della lunghezza PF, e l'altra, k', ha per direttrice l'altra retta analoga. Poichè la striscia compresa tra queste due direttrici racchiude nel suo interno il fuoco F, gli assi delle due parabole saranno rivolti in senso contrario.

Si vede come in a) che le due parabole k, k' si segano ortogonalmente in P; che due parabole del sistema aventi gli assi rivolti nello stesso senso, non hanno punti propri a comune (anzi l'una è interna all'altra), mentre due parabole rivolte in senso contrario, hanno a comune due punti propri disposti simmetricamente rispetto ad a; che le tangenti mandate da P alle parabole del sistema, si accoppiano in un'involuzione simmetrica; ecc, ecc.

Osservazione. Le podarie dei fuochi F, F' rispetto ad un sistema di coniche confocali, col centro proprio in O, costituiscono un fascio di circoli aventi il centro in O.

Viceversa, se si sega un circolo di centro O con un fascio di raggi avente per centro un punto F, e si innalzano nei punti d'intersezione di quei raggi le perpendicolari ai raggi stessi, si ottengono le infinite tangenti di una conica avente uno dei fuochi in F, il centro in O, e l'altro fuoco F' nel punto simmetrico di F rispetto ad O. Variando il circolo nel sistema di quelli che hanno il centro in O, si ottengono in tal modo le infinite coniche di un sistema confocale. La conica generata sarà un'ellisse o un'iperbole secondochè il punto F è interno o esterno al circolo.

Sostituendo al fascio dei circoli concentrici, un fascio di rette parallele, si ottengono le infinite parabole di un sistema confocale: ognuna di quelle rette è tangente nel vertice ad una di queste parabole.

Le coniche confocali furono considerate per la prima volta da Mac-Laurin (1742). I sistemi confocali trovansi generati come nell'Oss. prec. in Reye. (Die Geometrie der Lage, 1899).

23. *I poli di una retta* u *rispetto alle coniche di un sistema omofocale, appartengono ad una retta* u′, *perpendicolare ad* u; *e le* u, u′ *son separate armonicamente dai faochi F, F′ del sistema.*

Questo teor. non è che un caso particolare metrico di quello dimostrato al n° 10 del § 12 (Oss.); tuttavia è utile esporne la dimostrazione diretta.

Sia P il punto di contatto della conica del sistema che tocca u, ed u' la perpendicolare ad u in P.

Poichè le u, u' segano l'asse FF′ secondo una coppia armonica con FF′, esse saranno coniugate rispetto a tutte le coniche del sistema omofocale, cioè i poli della u rispetto alle coniche stesse apparterranno ad u'.

Osservazione 1ª. Se diciamo T il punto ove la u sega l'asse focale FF′, la polare di T rispetto alla conica k del sistema, che tocca u in P, sarà perpendicolare ad FF′ nel punto coniugato armonico di T rispetto agli estremi AA′ dell'asse focale.

Questi vertici si costruiscono subito intersecando l'asse col circolo che ha per centro il punto O, medio tra F, F′, e che passa pel piede della perpendicolare abbassata da F (o da F′) sulla u.

Dopo ciò si costruisce facilmente la retta u'.

24. *Dati di una conica un fuoco F ed un triangolo autorecciproco ABC, costruire l'altro fuoco.*

Basta perciò considerare il punto F′, in cui concorrono le polari del fuoco F rispetto alle tre coppie di lati opposti del quadrangolo che ha per vertici A, B, C e l'ortocentro del dato triangolo autoreciproco.

È pur facile costruire la direttrice d corrispondente al fuoco F, la quale conterrà i punti in cui le perpendicolari per F alle rette FA, FB, FC, segano i lati risp. opposti. La coppia armonica con F, FF$'$. d ed avente lo stesso punto medio di questa, sarà la coppia VV$'$ dei vertici; e quindi si potrà *costruire per punti la conica di cui è dato il fuoco F ed il triangolo autoreciproco ABC*, intersecando le rette che proiettano da V, V$'$ le coppie di punti della d, vedute da F sotto angolo retto (*E.* § 60).

25. *Le polari di un punto P rispetto alle coniche di un sistema omofocale, inviluppano una parabola, che tocca gli assi comuni a tutte le coniche del sistema, ed ha per direttrice la retta che congiunge P col centro O di queste coniche.*

I poli di un raggio variabile del fascio P, rispetto a due coniche k, k_1 del sistema omofocale Σ, descrivono due punteggiate proiettive p, p_1, che sono anzi simili, perchè il raggio PO ha per poli, rispetto a k, k_1, i punti improprî delle p, p_1.

La polare u di P rispetto ad una terza conica di Σ, sega p, p_1 nei due poli, rispetto a k, k_1, della perpendicolare condotta da P ad u (n. 23); onde le polari di P rispetto alle coniche di Σ, inviluppano una parabola l (cfr. col n. 11 del § 12).

Quando il raggio mobile attorno a P, diviene parallelo ad un asse del sistema Σ, i poli di questo raggio rispetto a k, k_1, vanno a cadere sull'altro asse; sicchè la parabola l tocca i due assi di Σ. E inoltre, poichè essa tocca le tangenti alle due coniche del sistema che escono da P, si conclude che la retta PO è direttrice di l (*E.* § 79, 10° teor.).

Osservazione 1ª. Tenendo presente il n. 23, si vede che la parabola l può generarsi pure profittando di una sola conica k del sistema Σ; e ciò è ben naturale, dal momento che k individua completamente il sistema Σ.

Rispetto a k, la l si può definire come la conica inviluppata dalle rette coniugate e ortogonali, a quelle che escono da P. Se U è il punto comune ad una retta u uscente da P e alla sua coniugata ortogonale u', poichè le u, u' son coniugate rispetto a tutte le coniche di Σ, le due coniche omofocali uscenti da U, toccheranno le rette u, u'.

Viceversa, se una retta u per P è toccata da una conica di Σ nel punto U, la retta ortogonale ad u e coniugata rispetto a tutte le coniche di Σ, sarà la perpendicolare u' condotta per U alla u; cioè il punto U risulterà comune ad una retta per P e alla tangente di l ortogonale a quella retta.

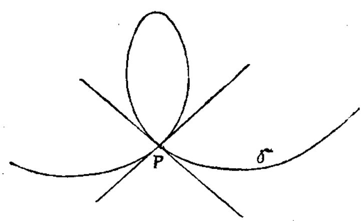
Il luogo γ del punto $U \equiv uu'$, si può dunque concepire come generato dall'intersezione dei raggi corrispondenti in una proiettività tra un fascio di raggi (quello descritto da u), ed un inviluppo di 2ª classe (quello descritto da u').

Se ne deduce facilmente che il luogo γ non incontra una retta del piano in più di tre punti (ma almeno in uno), e che esistono rette che incontrano γ effettivamente in tre punti.

Perciò la curva γ, e più in generale ogni curva che sia generata dalle intersezioni delle rette omologhe di un fascio di raggi e di un inviluppo di 2ª classe, tra loro proiettivi, dicesi *del 3° ordine*.

La γ si designa in modo particolare col nome di *strofoide*.

Variando il raggio u attorno a P, il punto $U \equiv uu'$ si muove descrivendo la γ, e durante questo movimento passa *due* volte per P, in corrispondenza alle due tangenti reali della parabola l, uscenti da P. Si dice perciò che P è un *punto doppio nodale* o *nodo* per la strofoide. Nell'intorno di P l'aspetto della curva γ, è quello disegnato nella figura.



Le *tangenti* a γ in P sono le due tangenti di l uscenti da P.

Conchiudendo possiamo enunciare che:

Il luogo dei punti di contatto delle tangenti (e dei piedi delle normali) tirate da un dato punto P alle coniche di un sistema omofocale, è una curva del 3° ordine (strofoide), che ha in P un nodo con le due tangenti ortogonali.

Aggiungeremo come notizia, che la strofoide si può ottenere trasformando per raggi vettori reciproci, un' iperbole equilatera passante pel centro dell' inversione (cfr. col n. 19 del § 8).

Osservazione 2ª. Quando il punto P appartiene ad uno dei lati del trilatero autopolare rispetto a tutte le coniche della schiera Σ, cioè appartiene ad uno degli assi o alla retta impropria del piano, l' inviluppo di 2ª classe generato dalle polari di P rispetto alle coniche di Σ, si scinde nel fascio che ha per centro il vertice opposto del trilatero, e nel fascio che ha per centro il coniugato armonico P' di P, rispetto alla coppia dei vertici opposti del quadrilatero base, allineati con P (cfr. col n. 20, *a*, del § 12). Se P appartiene ad un asse, il punto P' sarà dunque il coniugato di P nell' involuzione focale relativa a quell' asse (n. 3); mentre se P è all' infinito, il punto P' sarà il coniugato di P nell' involuzione assoluta.

La curva γ, luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da P alle polari del punto stesso rispetto alle coniche di Σ, si scinderà nel lato del trilatero autopolare passante per P, e nella conica generata dai fasci proiettivi P, P', ove si chiamino omologhi due raggi di questi fasci quando sieno coniugati rispetto a tutte le coniche di Σ, cioè quando sieno ortogonali tra loro. Si conchiude pertanto che:

Il luogo dei punti di contatto delle tangenti (e dei piedi delle normali) mandate da un punto P di un asse, alle coniche di un sistema omofocale, è un circolo, che ha per diametro il segmento intercetto tra P ed il punto coniugato nell' involuzione focale relativa a quell' asse. Se invece P è un punto della retta all' infinito, il luogo analogo al precedente, è un' iperbole equilatera, che passa per P e per i fuochi reali e immaginari del sistema omofocale.

Quest' ultima affermazione deriva dal fatto che, se due fasci impropri aventi direzioni ortogonali, si riferiscono chiamando omologhi due loro raggi, coniugati rispetto ad una data conica, essi segano sopra ciascun asse della conica, la relativa involuzione focale (§ 15, n. 3, e § 12, n. 5, Lemma).

La parabola l di cui parla il teor. 25, fu considerata da CHASLES (1838-65), in relazione ad una sola conica del sistema omofocale (come al principio dell'Oss. 1ª), e da STEINER (ved. le *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, pubblicate da SCHRÖTER, 1867).

La strofoide, come luogo dei punti di contatto delle tangenti mandate da P alle coniche di una schiera omofocale, si trova nelle *Vorlesungen* di STEINER; come luogo dei piedi delle perpendicolari abbassate da P alle polari del punto stesso, rispetto alle coniche della schiera, cioè come podaria di P rispetto alla parabola l, in CAZAMIAN (1893); ed infine come trasformata per raggi vettori reciproci, di un'iperbole equilatera passante per P, trovasi in DANDELIN (1822), che la chiamava « focale à noeud ». Una « focale » più generale era stata considerata prima da QUETELET (1819). La denominazione di strofoide (che deriva dalla parola greca corrispondente a « piegatura ») fu usata più tardi (nel 1846).

26. *Se i lati di un angolo retto variabile inviluppano due coniche a centro omofocali, il vertice dell'angolo descrive un circolo ad esse concentrico.*

Sieno m, n le distanze del centro di un'ellisse o di un'iperbole k, da una tangente t della conica e dalla parallela condotta a t da un fuoco F.

Se consideriamo l'altra tangente della conica, parallela a t, le distanze del fuoco F da queste due tangenti parallele, saranno (in valore e segno) $m + n$ ed $n - m$; onde (n. 19):

$$n^2 - m^2 = c^2 - a^2,$$

ove c è la semidistanza focale ed a la lunghezza del semiasse focale.

Denotando con m_1, n_1, a_1 i numeri analoghi ad m, n, a, considerati in relazione ad una conica k_1 omofocale a k, e ad una tangente t_1 della k_1, avremo similmente:

$$n_1^2 - m_1^2 = c^2 - a_1^2.$$

Dunque:

$$m^2 + m_1^2 = (a^2 + a_1^2) + (n^2 + n_1^2) - 2c^2.$$

Ora, se le tangenti t, t_1 sono perpendicolari, dalla applicazione del teorema di Pitagora a due convenienti triangoli rettangoli, si trae subito che $\sqrt{m^2 + m_1^2}$ misura la distanza del centro O dal punto T $\equiv tt_1$, e $\sqrt{n^2 + n_1^2}$ la distanza del centro dal fuoco F; onde la relazione precedente in tale ipotesi diverrà:

$$\overline{OT}^2 = a^2 + a_1^2 - c^2;$$

e questa dimostra il teorema.

Osservazione 1ª. Se le due coniche omofocali coincidono, si ritrova il teor. del n. 19, Oss.

Osservazione 2ª. Allorquando l'altro fuoco F', comune alle due coniche omofocali, si allontana indefinitamente, le due coniche tendono a divenire due parabole omofocali, e il circolo luogo del punto T, tende a divenire una retta ortogonale all'asse. Dunque:

Se i lati di un angolo retto variabile inviluppano due parabole omofocali, il vertice descrive una retta perpendicolare al loro asse.

Del resto questa proprietà si può stabilire direttamente in modo rigoroso.

Il teor. 26 è dovuto a Chasles. La dimostrazione è tratta dal Reye (Die Geo. der Lage, 1899).

27. *Le quattro tangenti di una conica* k, *che escono da due punti A, B di una conica omofocale* k_1, *toccano un medesimo circolo, che ha per centro il polo della corda AB rispetto a* k_1.

Diciamo p, q le tangenti a k uscenti da A, r, s le tangenti che escono da B; C, D le ulteriori intersezioni di k_1 colle rette p, r, ed a, b, le tangenti a k_1 nei punti A, B.

Poichè la retta che congiunge il punto P $\equiv ab$ col punto E $\equiv$ AC . BD, è la polare del punto G $\equiv$ AB . CD rispetto alla conica k_1, le due rette PE, EG saranno coniugate rispetto a k_1. Siccome inoltre esse separano armonicamente la coppia pr, risulteranno coniugate anche rispetto a k. Da ciò, ricordando il teor. 23 di questo §, si trae che le PE, EG sono ortogonali e quindi che bisecano gli angoli formati dalle rette p, r.

Analogamente si prova che la retta P . qs biseca uno degli angoli qs.

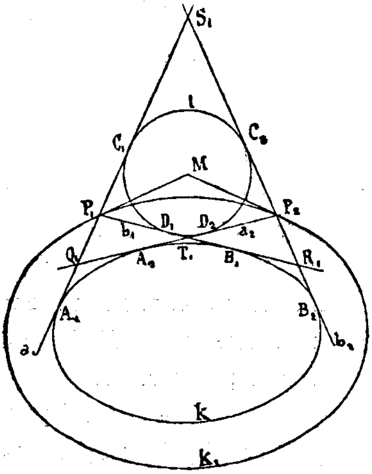
Ora si osservi che la retta a, essendo tangente a k_1, è una delle due rette ortogonali, uscenti da A e coniugate rispetto a tutte le coniche della schiera omofocale definita dalle k, k_1; e quindi la a biseca uno degli angoli pq (n. 4). Similmente la retta b è bisettrice di uno degli angoli rs.

Ne deriva che il punto P è equidistante dalle rette $pqrs$, cioè che queste rette toccano un circolo di centro P.

Osservazione. Se la conica k degenera come inviluppo nella coppia dei fuochi della conica k_1, si ottiene il teor. 9.

Il teor. 27 è dovuto a Chasles (1843).

28. *Allorquando due punti A, B variano sopra un' ellisse* k, *in modo che il polo P della corda AB descriva un' ellisse omofocale* k_1, *la differenza tra la somma dei segmenti PA, PB e l' arco minore* $\widehat{AB}$, *si mantiene costante.*



Sieno A_1B_1, A_2B_2 due posizioni della corda variabile AB; P_1, P_2 i corrispondenti poli, cioè le intersezioni delle tangenti a_1, b_1, a_2, b_2 negli estremi di quelle corde; e C_1D_1, D_2C_2 i punti di contatto delle rette $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$ col circolo l che esse toccano (n.° prec.). Poniamo inoltre:

$$Q_1 \equiv a_1\, a_2,\ R_1 \equiv b_1\, b_2,\ S_1 \equiv a_1\, b_2,\ T_1 \equiv a_2\, b_1,$$

e facciamo l'ipotesi che i due angoli $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$ abbiano lo stesso verso.

Quando P_2 tende a P_1 muovendosi sulla k_1, i punti $Q_1\, R_1$ tendono risp. ai punti $A_1\, B_1$, ed i punti $S_1 T_1$, insieme al centro M del cerchio l, tendono al punto P_1; cioè i segmenti finiti S_1P_1, P_1T_1, T_1P_2, P_2S_1 ed il circolo l, impiccoliscono indefinitamente. Ne deriva che, quando P_2 è abbastanza prossimo a P_1, i punti di contatto delle rette $a_1\, b_1\, a_2\, b_2$ col circolo l, risultano interni ai segmenti finiti suddetti, mentre i punti $Q_1\, R_1$ risultano esterni ai segmenti finiti S_1P_1, S_1P_2. Onde avremo:

$$\begin{aligned} P_1Q_1 + P_1R_1 &= (C_1Q_1 - C_1P_1) + (P_1D_1 + D_1R_1) = \\ &= C_1Q_1 + D_1R_1 = D_2Q_1 + C_2R_1 = P_2Q_1 + P_2R_1, \end{aligned}$$

ossia:

$$(P_1A_1 - Q_1A_1) + (P_1B_1 + B_1R_1) = (P_2A_2 + A_2Q_1) + (P_2B_2 - R_1B_2),$$

della quale si rileva:

$$(1)\quad (P_1A_1 + P_1B_1) - (A_1Q_1 + Q_1A_2) = (P_2A_2 + P_2B_2) - (B_1R_1 + R_1B_2).$$

Ciò posto, se $P_1P_2P_3 \ldots P_n$ son n punti *successivi* della k_1 e A_1B_1, A_2B_2, $A_3B_3, \ldots$, A_nB_n i punti di contatto delle tangenti a_1b_1, a_2b_2, $a_3b_3, \ldots$, a_nb_n mandate da quei punti alla conica k; e se poniamo:

$$Q_i \equiv a_i a_{i+1},\ R_i \equiv b_i b_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

accanto alla relazione (1) sussisteranno le analoghe:

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} (P_2A_2 + P_2B_2) - (A_2Q_2 + Q_2A_3) = (P_3A_3 + P_3B_3) - (B_2R_2 + R_2B_3) \\ (P_3A_3 + P_3B_3) - (A_3Q_3 + Q_3A_4) = (P_4A_4 + P_4B_4) - (B_3R_3 + B_3B_4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Le (1), (2) sommate membro a membro, dànno:

$$(3)\quad (P_1A_1+P_1B_1)-(A_1Q_1+Q_1A_2+A_2Q_2+ \\ +Q_2A_3+A_3Q_3+Q_3A_4+\ldots+Q_{n-1}A_n)= \\ =(P_nA_n+P_nB_n)-(B_1R_1+R_1B_2+B_2R_2+ \\ +R_2B_3+B_3R_3+R_3B_4+\ldots+R_{n-1}B_n).$$

Si tengano ora fissi i punti estremi $P_1\,P_n$, e si faccia crescere indefinitamente il numero dei punti $P_2P_3P_4\ldots$ intercalati tra P_1, P_n, in guisa che tutti i lati delle spezzate

$$A_1Q_1+Q_1A_2+A_2Q_2+Q_2A_3+\ldots,\ B_1R_1+R_1B_2+B_2R_2+R_2B_3+\ldots,$$

circoscritte a k, decrescano indefinitamente: allora i perimetri di queste spezzate hanno per limiti rispettivi le lunghezze degli archi $\widehat{A_1A_n}$, $\widehat{B_1B_n}$; sicchè al limite la (3) diviene:

$$(P_1A_1+P_1B_1)-\widehat{A_1A_n}=(P_nA_n+P_nB_n)-\widehat{B_1B_n},$$

e togliendo dai due membri $\widehat{A_nB_1}$:

$$(P_1A_1+P_1B_1)-\widehat{A_1B_1}=(P_nA_n+P_nB_n)-\widehat{A_nB_n},\qquad \text{c. d. d.}$$

Osservazione 1ª. Questo teorema, con opportune cautele, si può estendere anche a due iperbole o a due parabole confocali; ma su ciò non ci arrestiamo.

Osservazione 2ª. Se due ellissi omofocali k, k_1 son così situate che esista un n-gono $P_1P_2\ldots P_n$ inscritto in k_1 e circoscritto a k, esisteranno infiniti n-goni analoghi, ed ogni punto di k_1 si potrà prendere come primo vertice di un tale n-gono (§ 10, nº 13). Ciò posto, diciamo $Q_1Q_2\ldots Q_n$ i punti di contatto con k dei lati P_1P_2, $P_2P_3, \ldots, P_nP_1$. Applicando il teor. 28, avremo:

$$P_1Q_n+P_1Q_1-\widehat{Q_nQ_1}=x,$$
$$P_2Q_1+P_2Q_2-\widehat{Q_1Q_2}=x,\ldots,\ P_nQ_{n-1}+P_nQ_n-\widehat{Q_{n-1}Q_n}=x,$$

ove x è una costante indipendente dalla posizione del primo vertice P_1 sulla conica k_1. Sommando membro a membro le relazioni precedenti, si ottiene:

$$(Q_nP_1 + P_1Q_1 + Q_1P_2 + P_2Q_2 + \ldots + P_nQ_n) -$$
$$-(\widehat{Q_nQ_1} + \widehat{Q_1Q_2} + \ldots + \widehat{Q_{n-1}Q_n}) = nx,$$

cioè:

$$p = s + nx,$$

ove p è il perimetro del poligono $P_1P_2 \ldots P_n$, ed s il perimetro della ellisse k.

Dunque: *Se due ellissi omofocali ammettono uno, e quindi infiniti* n*-goni di* PONCELET, *i perimetri di questi* n*-goni sono tutti uguali.*

A titolo di notizia aggiungeremo che, fra tutti gli n-goni inscritti nella conica k_1, gli n-goni analoghi a $P_1P_2 \ldots P_n$ hanno il perimetro massimo: mentre hanno il perimetro minimo, fra tutti gli n-goni circoscritti a k.

Il teor. 28, che si collega a certe proprietà degli integrali ellittici, fu dato prima da GRAVES (1841), eppoi fu ritrovato da CHASLES (1843). La dimostrazione da noi esposta è dovuta a REYE (1895) e trovasi riprodotta nella sua *Geometrie der Lage* (1899). Il teorema relativo ai poligoni di perimetro massimo (o minimo) inscritti (o circoscritti) ad una ellisse, fu enunciato da CHASLES (1843). Esso trovasi dedotto, come caso particolare di teoremi più generali, in STEINER (1847).

29. *Sui coni circolari retti (rotondi) che passano per una data conica.*

a) Proponiamoci anzitutto di costruire i fuochi e le direttrici di una conica k, la quale appartenga ad un cono rotondo Γ, di vertice V.

A tal uopo fissiamo un piano π tangente a Γ e non parallelo al piano α di k; e consideriamo i piani bisettori dei diedri $\pi\alpha$. Questi due piani bisettori segano l'asse di rotazione r del cono Γ, in due punti O, O', ciascuno dei quali si potrà assumere come centro di una sfera inscritta in Γ e tangente ad α. Ed è chiaro che le due sfere S, S' che così si ottengono, sono le sole che godano delle proprietà suddette.

Se uno dei punti O, O′, p. e. O′, è improprio, non vi sarà che una sfera S, propriamente detta, tangente ad α e inscritta in Γ. Il piano bisettore che segna il punto O′ sarà parallelo ad r, onde i piani α, π formeranno con r angoli uguali. Ne deriva che α riuscirà parallelo ad un pian tangente di Γ; cioè k sarà una parabola.

Dunque, se k è una conica a centro, i punti O, O′ son ambedue propri. In tale ipotesi, diciamo F, F′ i punti di contatto con α delle sfere S, S′; ed M, M′ le intersezioni della generatrice PV, uscente da un punto arbitrario P di k, coi circoli c, c' lungo i quali le sfere S, S′ toccano Γ. Poichè le tangenti ad una sfera che escono da un medesimo punto sono uguali, avremo:

$$PF = PM, \quad PF' = PM'.$$

Ora, se P è interno al segmento finito MM′, risulterà, in valore assoluto:

$$MM' = PM + PM',$$

sicchè:

$$PF + PF' = MM';$$

mentre se P è esterno allo stesso segmento, avremo, in valore assoluto:

$$PM - PM' = MM',$$

e quindi:

$$PF - PF' = MM'.$$

Poichè il segmento MM′ resta costante al variare di P sulla k, si conclude in ogni caso che F, F′ sono i fuochi di k: il punto P risulterà interno ad MM′ quando k sia un' ellisse, esterno quando k sia un' iperbole.

Ciò posto, osserviamo che il piano VFF′ è perpendicolare ad α, perchè F, F′ sono i piedi delle perpendicolari tirate dai punti O, O′ dell' asse r, sul piano α. Ne deriva che i piani perpendicolari ad r segano su α rette perpendicolari all' asse focale FF′, ed in particolare che sono perpendicolari ad FF′, le rette d, d', ove α vien tagliato dai piani dei circoli c, c'.

Diciamo ora A, A′ gli estremi dell' asse focale e poniamo $D \equiv FF'.d$, $D' \equiv FF'.d'$. Segando il cono Γ e la sfera S col piano VFF′, si vede subito che la retta VF è la polare del punto D rispetto al circolo meridiano di S, e quindi che il gruppo AA′FD è armonico. Da ciò si trae che la retta d è la polare di F rispetto a k; e analogamente che d' è la polare di F′.

Si conclude pertanto che:

Se sopra un cono rotondo Γ *è tracciata un' ellisse o un' iperbole* k, *essa ha per fuochi i punti di contatto delle due sfere inscritte nel cono e tangenti al piano* α *di* k; *per direttrici le intersezioni di* α *coi piani dei circoli lungo i quali le sfere toccano* Γ; *e per lunghezza dell' asse focale, il segmento intercetto da questi piani sopra una generatrice del cono.*

Gioverà pure tener presente nelle considerazioni che si svolgeranno in *b*), che l' asse focale è la proiezione ortogonale su α dell' asse r del cono.

Esaminiamo ora più da vicino il caso in cui O′ è all' infinito, cioè k è una parabola.

Diciamo ancora d la retta comune al piano α e al piano β del circolo c, lungo il quale la sfera S è toccata da Γ. Poichè il piano α ed i piani tangenti di Γ, o ciò che è lo stesso, le sue generatrici, formano con β angoli uguali, se da un punto P di k si abbassa la perpendicolare PN al piano β, la perpendicolare PQ alla d e s' interseca β in M colla retta PV, i due triangoli rettangoli QNP, MNP risulteranno uguali, perchè hanno in comune il cateto PN ed uguali gli angoli opposti a questo cateto.

Dunque sarà PQ = PM; ma PM = PF, sicchè si conclude che:

Se sopra un cono rotondo Γ *è tracciata una parabola* k, *essa ha per fuoco il punto di contatto del suo piano* *α, con una sfera inscritta in Γ, e per direttrice la intersezione di α col piano del circolo lungo il quale la sfera tocca Γ.*

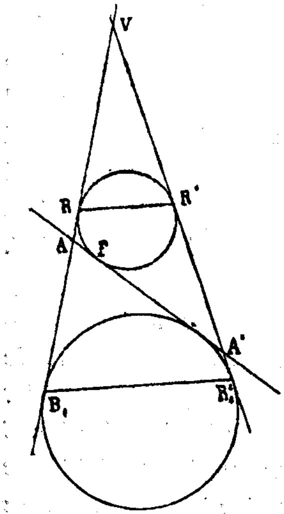


Fig. 1.

Si noti che anche in tal caso, l'asse della parabola è la proiezione ortogonale dell'asse di Γ.

Osservazione. Ritorniamo all'ipotesi che k sia una conica a centro.

Poichè un punto P di k è interno o esterno al relativo segmento finito MM', secondo che k è un'ellisse o un'iperbole, il vertice V di Γ sarà il *centro di similitudine diretta* o *inversa* delle sfere stesse (*), secondo che k è un'ellisse o un'iperbole: sicchè, segando cono e sfere col piano VFF', nel caso di un'ellisse avremo la fig. 1, nel caso di un'iperbole la fig. 2. In ambedue i casi, RR_1, $R'R'_1$ denotano le intersezioni coi circoli c, c', delle generatrici uscenti risp. dai vertici A, A'.

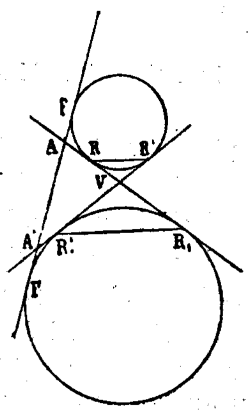


Fig. 2.

Tenendo conto del fatto che le tangenti mandate da un punto ad un circolo sono uguali, si ha nel caso dell'ellisse:

$$AV - AF = RV = R'V = A'V - A'F,$$

e nel caso dell'iperbole:

$$AV - AF = RV = R'V = A'F - A'V;$$

cioè nel 1° caso:

$$AV - A'V = AF - A'F,$$

(*) I piani che toccano due sfere S, S' di centri O, O', inviluppano generalmente due coni di rotazione aventi per vertici due e quindi, in valore assoluto:

$$AV - A'V = FF';$$

e nel 2° caso:

$$AV + A'V = AF + A'F,$$

e quindi:

$$AV + A'V = FF'.$$

Dunque: « Se k è un' ellisse (o un' iperbole), il vertice V del cono rotondo su cui k è tracciata, appartiene ad un' iperbole (o ad un' ellisse) situata in un piano VFF' perpendicolare ad α, e avente per vertici i punti FF' e per fuochi i punti AA' ».

Supponiamo ora che k sia una parabola di vertice A e fuoco F. Il piano VAF dà per sezione col cono Γ e colla sfera S la fig. 3, ove R è la traccia della generatrice VA sul circolo c, ed R' la traccia sullo stesso circolo, della generatrice che va al punto all' infinito di k. Se ne rileva subito:

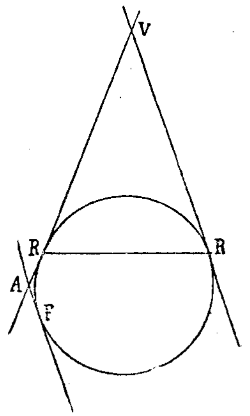


Fig. 3.

$$AV - RV = AF, \quad \text{ossia:} \quad AV - R'V = AF.$$

Dunque « in tal caso V appartiene ad una parabola, situata « in un piano VAF perpendicolare ad α, avente per vertice F « e per fuoco A (e per tangente nel vertice la FR') ».

b) Data in un piano α una *qualunque* conica a centro k, che abbia per fuochi F, F' e per estremi dell' asse focale A, A', in un piano α_1 condotto per la retta AA' perpendicolarmente

---

punti V, V' della retta centrale OO'. Uno di questi punti è esterno al segmento finito OO', e dicesi *centro di similitudine diretta*, e l' altro è interno ad OO', e dicesi *centro di similitudine inversa*. Tutto ciò si stabilisce ad es., facendo ruotare un piano attorno alla retta centrale e ricordando la teoria dei centri di similitudine di due circoli (§ 8, n° 17).

ad α, si costruisca la conica k_1 che ha per fuochi i vertici, e per vertici i fuochi della k.

Sia V un punto di k_1 non appartenente ad α, e sia Γ il cono rotondo che ha per vertice V, per generatrici le rette $g \equiv$ VA, $g' \equiv$ V'A', e per asse la bisettrice r dell'angolo gg' che proietta il segmento finito AA', se k è un'ellisse, o dell'angolo gg' che proietta il segmento infinito AA', se k è un'iperbole.

Nel 1° caso il cono Γ sega il piano α secondo un'ellisse k', la quale, come vedemmo in a), ha per vertici i punti A, A'. Poichè in tal caso k_1 è un'iperbole, sarà in valore assoluto:

$$\mathrm{AV} - \mathrm{A'V} = \mathrm{FF'};$$

dalla quale, ricordando l'Oss. prec., si trae che l'ellisse k' ha in comune con k anche i fuochi, cioè che k e k' coincidono.

Alla stessa conclusione si giunge in modo analogo quando k è un'iperbole.

Consideriamo infine sul piano α una *qualunque* parabola k di vertice A e fuoco F, e sul piano α_1 condotto per AF perpendicolarmente ad α, costruiamo la parabola k_1 di vertice F e fuoco A.

Sia V un punto di k_1 non appartenente ad α, e Γ il cono rotondo che ha per vertice V, per generatrici la retta $g \equiv$ VA e la parallela g' da V all'asse di k, e per asse la bisettrice r di quell'angolo gg', che contiene il raggio VF. Segando il cono Γ col piano gg', e ricordando l'ultima parte dell'Oss. prec., si vede che il cono Γ dà per traccia su α una parabola di vertice A e fuoco F, cioè la parabola k.

Resta così dimostrato che:

Vi sono infiniti coni rotondi che proiettano una data conica k. *Il luogo dei loro vertici è un'altra conica* k_1, *situata in un piano perpendicolare a quello di* k.

Se k *è un'ellisse (o un'iperbole) di cui sieno F, F' i fuochi ed A, A' gli estremi dell'asse focale, la conica* k_1 *è* *un' iperbole (o un' ellisse) avente per fuochi A, A' e per vertici F, F'. Se* k *è una parabola di vertice A e fuoco F,* k_1 *è una parabola di vertice F e fuoco A. In ogni caso le due coniche* k, k_1 *sono in condizione reciproca.*

APOLLONIO, che, primo, considerò le coniche tracciate sopra un cono circolare *obliquo*, diede pure la costruzione dei vertici dei coni rotondi, cui appartiene una data conica.

Le due coniche ciascuna delle quali è luogo dei vertici dei coni rotondi che proiettano l'altra, furono scoperte da DUPIN (1804-13), come luogo dei centri delle sfere tangenti a tre sfere date. La costruzione dei fuochi di una conica tracciata sopra un cono rotondo, è di DANDELIN (1822).

BOBILLIER (1827) estese i risultati di DANDELIN ai *circoli focali* di una conica k, cioè ai circoli bitangenti a k in due punti reali o immaginari. Se k è una conica a centro, vi sono due sistemi di tali circoli: gli uni hanno per centri i punti di un asse e gli altri quelli dell'altro. BOBILLIER considerò questi circoli, come sezioni del piano di k colle sfere inscritte in un cono rotondo contenente k; e stabilì in tal modo per i due sistemi di circoli, proprietà analoghe alle proprietà focali. Così egli dimostrò che la somma o la differenza delle tangenti condotte da un punto variabile di k a due circoli focali dello stesso sistema, è costante; che le corde di contatto di quei circoli godono di proprietà analoghe a quelle delle direttrici; ecc., ecc.

I sistemi di circoli focali furono più tardi studiati anche da STEINER (1847).

ELENCO DEGLI AUTORI CITATI

INDICE-SOMMARIO

CAPITOLO SECONDO

Proiettività tra forme di 1ª specie.

§ 4. Applicazioni del teorema e delle costruzioni fondamentali della proiettività.

§ 5. Elementi uniti di una proiettività. Problemi di 2° grado.

CAPITOLO SESTO

Proiettività tra forme elementari e intersezioni di due coniche.

CAPITOLO SETTIMO

Proprietà focali.

§ 15. **Problemi sui fuochi delle coniche.**

ERRATA-CORRIGE

PAGINA	RIGO	INVECE DI	LEGGERE
2	18 dal basso	punto del	del punto
8	13 » »	vert'ci	vertici
10	9 e 10 dall' alto	le rette che congiungono punti diagonali omologhi....	le coppie di lati omologhi dei due poligoni diagonali....
37	9 dall' alto	qer	per
47	16 » »	*bisapporti*	*birapporti*
54	15 » »	n° 9	n° 8
56	11 » »	Entwicklung	Entwickelung
75	15 » »	,	.
130	15 » »	$n \leq 3$	$n \geq 3$
160	12 » »	MAGUS	MAGNUS
163	18 » »	prop. 7	prop. 8
215	4 dal basso	*complelo*	*completo*
218	9 » »	*alle*	*alla*
219	10 dall' alto	ennunciato	enunciato
269	5 dal basso	definitivi	definiti
271	11 » »	*centri di un fascio....*	*centri delle coniche di un fascio....*
280	12 dall' alto	della coppia	dalle coppie

N.B. In varie figure, specialmente delle prime, alcune lettere, nella riproduzione zincotipica, hanno perduto gli apici o gl' indici o sono addirittura scomparse; ma questi casi, del resto infrequenti, non nuocciono affatto alla chiarezza, perchè il testo suggerisce da sè le relative correzioni.

FINITO DI STAMPARE

IL DÍ X SETTEMBRE MCMV

NELLA TIPOGRAFIA DELLA DITTA NICOLA ZANICHELLI

IN BOLOGNA

LABORAVI FIDENTER