510.8 F214

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

MONOGRAFIE DI MATEMATICA APPLICATA

GINO FANO

GEOMETRIA NON EUCLIDEA

INTRODUZIONE GEOMETRICA ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ

R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE * BIBLIOTECA *

LABORAVI FIDENTER

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

BOLOGNA 1935 - XIII

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1935 - XIII

CAPITOLO I.

Introduzione.

La teoria delle parallele fino alla metà del secolo XIX.

1. - **Introduzione.** — Col nome di geometria non euclidea si designano alcune (essenzialmente due) costruzioni scientifiche, che ebbero origine da ricerche di indole critica su proposizioni fondamentali della geometria ordinaria (euclidea), e si concretarono dapprima nel sopprimere o modificare qualcuna di queste proposizioni, particolarmente il postulato 5° di Euclide o postulato delle parallele, e nello svolgere le conseguenze logiche delle premesse così modificate. A queste stesse costruzioni si è poi pervenuti anche da altri punti di vista, riuscendo così a inquadrarle nel complesso della matematica moderna, a riconoscerne tutta l'importanza, e a gettare in pari tempo maggior luce sulle questioni critiche che vi avevano dato origine. Allo sviluppo della geometria non euclidea si connette inoltre l'affermarsi di nuove idee e nuove vedute scientifiche, che hanno profondamente modificato idee e vedute preesistenti sulla geometria, la fisica, e tutta la filosofia scientifica; da esse procede la considerazione della geometria come scienza sperimentale, parte della fisica; con esse, attraverso la teoria della relatività speciale e generale di A. Einstein, matura la veduta che le conoscenze geometriche, meccaniche, fisiche, non hanno un'esistenza e un significato di per sè, ma soltanto nella loro sintesi (1).

Nello svolgimento della geometria non euclidea, intimamente legata a tappe importanti del pensiero scientifico da circa un secolo in qua, può presentarsi qualche incertezza riguardo all'ordine

(1) ENRIQUES: *La Geometria non euclidea e i presupposti filosofici della teoria della relatività* (Atti Soc. Ital. Progresso delle Scienze, 18ª riunione, Firenze, 1929, vol. I, p. 411).

che nella trattazione conviene seguire. L'impulso allo svolgimento è venuto, successivamente, da tutti i punti di vista; per approfondire uno di questi occorre spesso prender contatto con altri; ciascun punto di vista è particolarmante atto, a preferenza di altri, a lumeggiare determinati concetti. Nonostante qualche inconveniente, mi sembra opportuno seguire, almeno nelle linee generali, lo sviluppo storico dell'argomento. Una certa conoscenza anche della preistoria della geometria non euclidea è indispensabile a comprendere come, perchè questa geometria sia sorta: mentre ad es. la trattazione metrico-proiettiva (Cap. V), ultima in ordine cronologico e concettualmente la più semplice e perfetta, non risponde in modo esauriente a questa necessità.

2. - Gli « Elementi » di Euclide. — Il punto di partenza delle ricerche critiche anzidette si trova in osservazioni e commenti sul più antico trattato di matematica a noi pervenuto: gli « Elementi » di EUCLIDE (300 circa a. C.) (1). Questi non sono opera di sola produzione originale, bensì esposizione in forma di trattato organico di quanto il genio greco aveva creato, nel campo matematico, in circa tre secoli di attività mirabile, fecondissima (quasi tutta l'odierna matematica elementare, salvo gli sviluppi formali dell'algebra); e per altri venti secoli essi hanno costituito un modello insuperato di chiarezza e precisione di linguaggio, di finezza di critica, di perfezione nell'ordinamento logico-deduttivo. Solo la critica moderna, più raffinata ancora, ha potuto metterne in luce alcune deficienze, soprattutto nella formulazione delle premesse (*ὅρον*, definizioni, termini, concetti; *κοιναὶ ἔννοιαι,* nozioni comuni od assiomi; *αἰτήματα,* postulati) (2). Più particolarmente:

---

(1) Euclide appartiene all'inizio del periodo Alessandrino (o ellenistico) della coltura greca; periodo immediatamente successivo alla morte di Alessandro, e che prese nome dalla nuova capitale da lui fondata. Nel più vasto mondo orientale, a cui la coltura greca si era estesa, Atene, che aveva già perduta l'importanza politica, andava perdendo anche la preminenza intellettuale; e per le scienze il primato passò ad Alessandria, dove il governo dei Tolomei assicurava agli studiosi vita tranquilla, mezzi di studio, e dove appunto Euclide fondò la sua scuola.

(2) Fra le edizioni moderne degli « Elementi », ricordiamo: *Gli elementi di Euclide*, per cura dei prof. BETTI e BRIOSCHI, per lunghi anni libro di

Le definizioni sono generalmente reali (anzichè *nominali*), cioè l'ente di cui trattasi è caratterizzato per mezzo di parole del linguaggio comune, il cui significato si suppone preventivamente noto; sono spesso semplici *descrizioni* di enti, che richiamano la genesi psicologica delle relative idee, e che talvolta occorre interpretare e completare tenendo presente qualche altra premessa (1).

Non tutte le proposizioni assunte come vere sono esplicitamente enunciate; soprattutto non lo sono quelle riguardanti le proprietà *lineari* della retta e del cerchio (ordine in cui si susseguono i punti della retta; concetto di segmento; continuità). P. es. nella dimostrazione della Prop. 1ª è ammesso tacitamente che due circonferenze di cui ognuna passa per il centro dell'altra debbano incontrarsi; nella Prop. 12ª, che, se una circonferenza ha il centro e un suo punto da parti opposte rispetto a una data retta, essa taglierà questa in due punti.

La critica moderna non fa distinzione fra assiomi, (p. es.: « Le cose eguali a una stessa sono eguali tra loro ») *e postulati*, ma chiama generalmente *postulati* tutte le proposizioni primitive che si assumono senza dimostrazione. Per Euclide invece i postulati hanno carattere di *proposizioni esistenziali* (*postulo*, cioè esigo, richiedo, che....) e anche *costruttive*; affermano l'esistenza di una figura soddisfacente a certe condizioni; la possibilità di una costruzione, elemento primo pei Greci per risolvere problemi. Ecco i 5 postulati euclidei: *Si domanda*:

1°) *Che da qualunque punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto.*

---

testo delle Scuole Medie; *Euclidis Opera Omnia*, ediz. critica di HEIBERG e MENGE, 5 vol., 1883-1888; HEATH: *The thirteen books of Euclid's Elements*, Cambridge, 1908; *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, editi da F. ENRIQUES col concorso di diversi collaboratori; libri I-IV (ENRIQUES-ZAPELLONI, Roma, 1925); libri V-IX (ZAPELLONI, 1930), costituenti i n.i 1 e 8 della Collezione: *Per la Storia e la Filosofia delle matematiche*, diretta da F. ENRIQUES. Nell'esaminare i dettagli degli « Elementi », va tenuto presente che quest'opera venne indubbiamente manipolata, specialmente nelle premesse, dai numerosi ricopiatori, traduttori e commentatori.

(1) V. le osservazioni ed esempi nel volume ENRIQUES cit. sui libri I-IV, nonchè l'articolo ENRIQUES: *L'evoluzione del pensiero geometrico....* nella 3ª ediz. delle *Questioni*, vol. I.

2°) *Che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per diritto.*

3°) *Che con ogni centro e ogni distanza si possa descrivere un cerchio.* Per questi tre postulati è evidente il carattere costruttivo; essi stabiliscono l'uso della *riga* e del *compasso*, cioè degli strumenti atti ad eseguire le due costruzioni geometriche fondamentali.

4°) *Che tutti gli angoli retti sono eguali.* Qui il lato costruttivo è meno evidente; forse Euclide ha inteso postulare qualcosa intorno al movimento (nel movimento, rette perpendicolari si mutano in rette perpendicolari); forse, essendo di conseguenza anche tutti gli angoli piatti eguali fra loro, esso vuole portare un complemento al post. 2°, nel senso che ogni retta può prolungarsi oltre un suo punto *in un solo modo.* Certo questo postulato è necessario per potere nel post. 5° parlare di « due retti » come di una grandezza determinata.

5°) *Che se una retta, incontrando due altre rette, forma con esse da una medesima parte angoli interni la cui somma sia minore di due retti, quelle due rette, prolungate indefinitamente, si incontrino dalla parte da cui stanno gli angoli la cui somma è minore di due retti.* Questo postulato (sul quale ritorneremo al n.° seg.) afferma pertanto l'esistenza di un punto, costruibile come intersezione di due rette, ogni qualvolta queste, con una terza, formino angoli quali è detto nell'enunciato (1).

Secondo le vedute odierne, la geometria riposa sopra un sistema di nozioni primitive, non definite, e di proposizioni primitive, enunciate senza dimostrazione (assiomi e postulati insieme), che, in quanto enunciano proprietà ammesse a priori degli enti assunti come primitivi, possono considerarsi come « definizioni implicite » di tali enti. Queste nozioni e proposizioni primitive sono tratte generalmente dall'intuizione e dall'esperienza, ma con un successivo processo di elaborazione mentale; di *astrazione*, perchè un punto, una linea, una superficie come li intende la geometria sono concetti astratti, che corrispondono solo per approssimazione a oggetti esistenti in

---

(1) Alcuni ricopiatori Greci collocarono tuttavia questa proposizione fra gli assiomi, come *assioma XI*; forse perchè non riconoscevano ad essa carattere esistenziale.

natura; di *semplificazione*, per assumere dati precisi, più semplici, maneggevoli, atti alla trattazione matematico-deduttiva (1). La geometria, quando la si consideri come parte della fisica, è anch'essa rappresentazione della natura esteriore attraverso concetti elaborati dalla nostra mente, conforme al principio della semplicità nella descrizione dei fenomeni naturali (2). E le successive definizioni devono essere puramente *nominali*, cioè soltanto *abbreviazioni di linguaggio*, senza introduzione di nuovi concetti; devono cioè risultare da un puro processo costruttivo del pensiero, inteso ad associare concetti precedenti per formarne altri più complessi. Un elenco completo di postulati sui quali può fondarsi la geometria elementare, conforme alle esigenze della critica moderna, è stato dato per la prima volta nelle *Vorlesungen über neuere Geometrie* di M. PASCH (Leipzig, 1882; 2ª ediz. Berlin, 1926) e successivamente da G. PEANO, *I principi di geometria logicamente esposti* (Torino, 1889) (3).

3. - Il postulato 5° di Euclide. I primi commentatori. — Il post. 5° di Euclide, quando sia preventivamente ammessa la proprietà della retta di avere lunghezza infinita (cioè il post. 2°), equivale all'affermazione che per un punto dato si può condurre a una retta data una e una sola parallela, cioè una e una sola retta che stia in un piano con essa e non l'incontri; esso viene perciò anche

---

(1) « Was in der Anschauung oder im Experiment nur approximativ gegeben ist, das formulieren wir in exakter Weise, weil wir andernfalls damit nichts anzufangen wissen.... Das Axiom ist die *Forderung*, vermöge deren wir in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlegen* » (F. KLEIN: *Zur nicht-euklidischen Geometrie*, Mathem. Ann., 37 (1890), pp. 571-572; Ges. Math.-Werke, vol. I, pp. 381-382).

(2) Per chi consideri invece la geometria come pura scienza astratta, le nozioni primitive sono soltanto produzioni del pensiero, perciò completamente arbitrarie, salvo la condizione della compatibilità delle proposizioni primitive.

(3) In seguito, G. VERONESE: *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee* (Padova, 1891); M. PIERI: *Della geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo* (Mem. Acc. Torino, ser. II, vol. 49, 1899). V. anche vari articoli nei volumi ENRIQUES: *Questioni*; nonchè D. HILBERT: *Grundlagen*; ENRIQUES: *Prinzipien*. Per la sistemazione nell'insegnamento, v. i testi di VERONESE, ENRIQUES-AMALDI, SEVERI.

designato come « postulato delle parallele » (1). Forse già Euclide vi aveva veduta un'imperfezione, che non gli riuscì di eliminare (2); esso contiene invero un'affermazione di evidenza assai meno immediata e completa degli altri postulati; un'affermazione che, più assai delle altre, trascende i dati direttamente fornitici dall'esperienza, i quali si riferiscono alla sola ragione di spazio a noi praticamente accessibile; vasta, ma pur limitata. In un piano, possiamo pensare *infinite* rette passanti per un punto assegnato e che *nel campo a noi accessibile* non incontrano una retta data r del piano stesso non passante per quel punto; e affermare che, fuori di questo campo, *tutte quelle rette meno una* incontrano la r va ben oltre i dati dell'osservazione. Dai post. 2° e 5° segue altresì che in un piano esistono *rette non incontrantisi e dovunque equidistanti*, e appunto questa proprietà della equidistanza trae con sè tutte le proprietà più notevoli ed eleganti delle parallele euclidee: in quest'ultimo concetto di « parallele euclidee » si trovano dunque associati elementi di natura qualitativa, provenienti da sensazioni ottiche (rette che non si incontrano), e elementi di natura quantitativa, provenienti da sensazioni tattili (rette equidistanti) (3), concorrendo così a formare un tutto alquanto complesso.

Fra i commentatori di Euclide, parecchi cercarono di togliere di mezzo la difficoltà contenuta nel post. 5° col modificare la definizione di rette parallele, oppure cercando di sostituire al post. 5° un altro più intuitivo e di più facile accettazione; o anche sforzandosi, ma invano, di convertirlo in un teorema, da dimostrarsi col sussidio dei postulati precedenti. PROCLO (410-435 d. C.) nel suo

---

(1) Invero, dal post. 5° segue immediatamente che per un punto dato P si può condurre a una retta r data *una parallela al più*: quell'una contenuta nel piano Pr, per la quale, rispetto a una trasversale condotta da P alla r, i due angoli interni dalla stessa parte sono supplementari. E questa retta effettivamente non incontra la r (EUCLIDE, lib. I, prop. 28).

(2) Ciò appare verosimile dall'ordine in cui sono disposte le proposizioni del libro I, nella prima parte del quale sono raggruppate quelle — fino alla 28a — indipendenti dal post. 5°; al punto da dimostrare per l'angolo esterno di un triangolo, prima (Prop. 16, senza uso del post. 5°) che esso è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti, e poi (Prop. 32) che è eguale alla loro somma.

(3) ENRIQUES: *Problemi della Scienza* (Bologna, 1906), pp. 344-345.

« Commento al libro I di Euclide » riferisce che già POSIDONIO (1° sec. d. C.) aveva proposto di chiamare *parallele* due rette complanari ed equidistanti: questo implica però l'affermazione dell'effettiva esistenza di coppie di rette che godano in pari tempo di entrambe le proprietà, e quindi un nuovo postulato. D'altra parte l'iperbole e la concoide di Nicomede fornivano esempi di linee, sia pure non rette, aventi un asintoto; che non incontrano cioè una certa retta, ma ad essa si avvicinano indefinitamente. Per i commentatori Arabi (fra i quali più importante il NASIR EDDIN, 1201-1274) e posteriori, fra questi gli Italiani P. A. CATALDI (m. 1626) e GIORDANO VITALE DA BITONTO (1633-1711), rinviamo a BONOLA, G. N. E., p. 2-19. Giordano Vitale riconobbe ad es. che il post. 5° poteva dimostrarsi, quando si ammettesse l'esistenza sopra una retta di tre punti equidistanti da un'altra e medesima retta.

4. - **Wallis.** — Nuova e originale è l'idea di JOHN WALLIS (1616-1703), esposta già nel 1663 in una lezione, e pubblicata nel 1693 (1); di sostituire cioè al post. 5° di Euclide l'affermazione seguente: *Per ogni figura ne esiste una ad essa simile e di grandezza arbitraria.* Di questa affermazione egli si vale anzi soltanto per i triangoli, ammettendo che « esiste sempre un triangolo avente gli angoli rispett. eguali a quelli di un altro triangolo dato, ed il cui lato compreso fra due determinati di questi angoli abbia lunghezza assegnata ad arbitrio ». Indicati con α e γ gli angoli interni da una stessa parte che le rette AB, CD (fig. 1) formano con la trasversale AC, e tali che $\alpha+\gamma<\pi$, si sposti con continuità il punto A sulla AC e la retta AB con esso, in modo che quest'ultima formi sempre colla AC il medesimo angolo. Quando A

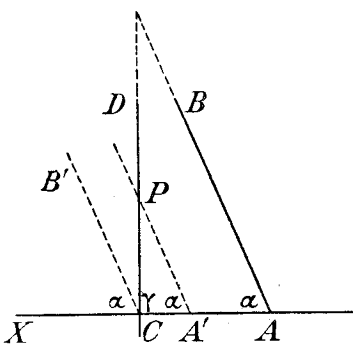


Fig. 1.

(1) *De postulato quinto et definitione quinta lib. 6. Euclidis disceptatio geometrica*, Operum Mathem. volumen alterum; p. 674. La lezione è riprodotta in lingua tedesca in ENGEL e STÄCKEL: *Parallellinien.*

cade in C, la AB assumerà una posizione CB' interna all'angolo XCD adiacente a γ; e perciò, in corrispondenza a una posizione di A intermedia fra la primitiva e C, e sia A', dovrà la AB stessa incontrare la CD in un punto P. Allora, se si suppone che esista un triangolo simile a $CA'P$ e avente CA come lato omologo a CA', dovranno AB e CD incontrarsi, come è richiesto dal post. 5° di Euclide.

Il postulato ammesso da Wallis appare a prima vista evidente; senza di esso non sarebbero possibili ad esempio disegni in una scala diversa dal vero. Wallis cerca anzi di giustificare la sua ipotesi, osservando che Euclide ammette l'esistenza di un cerchio di centro e raggio arbitrari (post. 3°), e non si comprenderebbe come mai un cerchio potesse diventare a piacere più grande o più piccolo con continuità, conservando la stessa forma, e non così un'altra figura. In realtà, il parlare della *forma* di una figura come qualcosa di indipendente alla sua grandezza implica un'ipotesi non più evidente del post. 5°, e forse più complessa, a cui non si adatta la veste di postulato. L'equivalenza dell'ipotesi di Wallis e del post. 5° di Euclide mostra però che, se è possibile un sistema geometrico in cui non valga il post. 5°, bensì però tutti gli altri postulati ammessi (anche tacitamente) da Euclide, *in esso non potranno esistere figure simili e non eguali*; la grandezza di una figura sarà legata a quella dei suoi angoli. Così avviene ad es. per la geometria sopra una sfera di raggio assegnato r, sostituendo alle rette del piano i cerchi massimi della sfera; poichè i tre angoli A, B, C di un triangolo sferico ne individuano già i lati, nonchè l'area $\Delta = r^2(A+B+C-\pi)$.

5. - Gerolamo Saccheri. — Vero precursore della geometria non euclidea fu il P. GEROLAMO SACCHERI (1667-1733), che insegnò grammatica, filosofia, teologia nei Collegi di Gesuiti di Milano, Torino, e (dal 1697) Pavia, dove insegnò pure matematica all'Università. Egli è autore dell'opera: *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae Geometriae principia* (Milano, 1733). Dei «nei» di Euclide, uno riguarda appunto la teoria delle parallele; altri due, la teoria delle proporzioni; e alla teoria delle parallele è dedicato il libro I dell'opera, contenente ben 39 proposizioni, con numerosi corollari e osservazioni. In realtà, il P. Saccheri vuole egli pure

« dimostrare » il post. 5° di Euclide; e all'uopo fa uso di una specie di ragionamento per assurdo, nel quale, assumendo come ipotesi la falsità della proposizione che si vuol dimostrare, si giunge egualmente a concludere che essa è vera. Prende pertanto come date le prime 28 proposizioni di Euclide, indipendenti dal post. 5°; e, assunta come ulteriore ipotesi la falsità di quest'ultimo, cerca, fra le conseguenze della nuova ipotesi, qualche proposizione da cui scaturisca la verità di esso. Così facendo, egli sottopone ad esame accurato, nella teoria delle parallele, due nuove ipotesi, di cui sviluppa parecchie conseguenze, in modo logicamente perfetto (e sono queste appunto le prime proposizioni di geometria non euclidea); sicchè la maggior parte del suo libro I è opera di retto e acuto senso geometrico, di gran lunga superiore alla bonarietà con cui nelle pagine residue (Prop. XIV, XXXIII, e dalla XXXVII in poi) egli si adopera a demolirla.

Saccheri parte dalla considerazione di un quadrangolo piano birettangolo isoscele $ABDC$ (fig. 2; A, B angoli retti; $AC=BD$); e riconosce (sostanzialmente) che la perpendicolare al lato AB nel suo punto medio E è asse di simmetria del quadrangolo, quindi perpendicolare anche al lato CD nel suo punto medio F; e che sono pure eguali gli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$. Se invece (essendo sempre A, B angoli retti) i lati AC, BD sono diseguali, dei due angoli C, D è maggiore quello adiacente al lato minore [1]; e viceversa. Tornando all'ipotesi $AC=BD$, $\widehat{C}=\widehat{D}$, Saccheri distingue 3 casi, secondo che questi due angoli eguali sono entrambi retti, ottusi, od acuti, e designa i casi stessi come *ipotesi dell'angolo retto, dell'angolo ottuso, e dell'angolo acuto*, considerandoli da principio tutti 3 come egualmente possibili. E stabilisce per essi le proprietà seguenti:

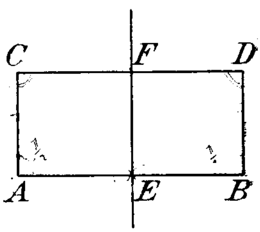


Fig. 2.

Il lato CD è uguale, minore, o maggiore della base AB secondo che gli angoli $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ sono retti, ottusi, od acuti; e viceversa (prop. III, IV).

[1] Se, p. es., $AC>BD$, prendiamo il punto K, fra A e C, per cui $AK=BD$; sarà $\widehat{CDB}>\widehat{KDB}=\widehat{DKA}$, il quale ultimo angolo, per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, è $>\widehat{ACD}$.

Ciascuna delle 3 ipotesi accennate, se è verificata in un solo caso particolare, lo sarà pure in ogni altro caso (prop. V, VI, VII).

La dimostrazione di quest'ultimo teorema, notevolissimo, non esce, come anche le altre dimostrazioni di Saccheri, dal campo dei procedimenti euclidei. Se per esempio in *un* particolare quadrangolo $ABDC$ gli angoli in $\widehat{C}$ e $\widehat{D}$ sono retti, essi saranno pure tali in ogni altro quadrangolo $ABD'C'$ costrutto sulla stessa base AB e con lati $AC' = n \cdot AC$, $BD' = n \cdot BD$ (n intero) equimultipli dei precedenti. Allora, in base al postulato di Archimede (1), ogni altro quadrangolo birettangolo isoscele ABD_0C_0 colla stessa base AB risulterà contenuto entro un quadrangolo $ABD'C'$ come sopra, per n intero abbastanza grande, con $AB = C'D'$; e, se gli angoli $\widehat{C_0}$, $\widehat{D_0}$ non fossero retti, sarebbe C_0D_0 maggiore di uno e minore dell'altro dei due segmenti eguali AB, $C'D'$. Dopo di ciò, anche la base AB finora mantenuta costante si può far variare ad arbitrio, come i lati AC, BD. Omettiamo la dimostrazione per il caso dell'angolo ottuso: quella per l'angolo acuto segue poi per assurdo.

In corrispondenza alle stesse tre ipotesi, Saccheri dimostra ancora che *la somma degli angoli di ogni triangolo è, nei 3 casi, rispett. eguale, maggiore o minore di due retti*; e così quella di un quadrangolo rispetto a quattro retti (prop. XV, XVI). Perciò *la conoscenza di questa somma in un solo caso particolare basta a decidere quale delle 3 ipotesi sia verificata.* A questo stesso risultato giunse più tardi Legendre (n.° 7), indipendentemente dal Saccheri, per i soli due casi dell'angolo retto e acuto.

Le tre ipotesi di Saccheri corrispondono a 3 sistemi geometrici distinti, tutti, come è oggi noto, logicamente possibili:

L'ipotesi dell'angolo retto, alla geometria euclidea;

---

(1) In queste dimostrazioni è fatto uso del postulato di Archimede (v. n.° 41), nonchè dell'ipotesi della continuità della retta sotto la forma seguente: « Un segmento che passa con continuità dalla lunghezza a ad una lunghezza diversa b assume durante la variazione qualsiasi lunghezza intermedia tra a e b »; ma DEHN (Mathem. Annalen, 53, 1900, p. 405) e BONOLA (Rend. Ist. Lomb., ser. 2a, vol. 38, 1905, p. 650) hanno dimostrato che il risultato è indipendente da queste ipotesi (cfr. n.° 45).

L'ipotesi dell'angolo acuto, a una geometria non euclidea (*geometria iperbolica*: n.° 13 e seg.), nella quale non è verificato il post. 5° di Euclide. Invero le rette AB e CD della fig. 2 formano in tal caso con AC angoli interni da una stessa parte (CAB retto, ACD acuto) aventi somma minore di due retti, e d'altra parte, essendo entrambe perpendicolari a EF, non possono incontrarsi (Euclide, Lib. I, prop. 27, 28).

Infine l'ipotesi dell'angolo ottuso risulta verificata in una regione opportunamente limitata della sfera, qualora alla parola « linea retta » si sostituisca « cerchio massimo »; e così pure nella stella propria, sostituendo alle parole punto, retta, segmento di retta, angolo, rispett. retta, piano (della stella), angolo di due rette, angolo diedro di due piani. P. es. la somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di due retti, e così anche la somma dei 3 angoli diedri di un triedro.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto, Saccheri studia altresì i diversi casi che può presentare il mutuo comportamento di due rette in un piano; e stabilisce che esse o si incontrano, oppure ammettono una perpendicolare comune, o infine, in un verso determinato, vanno sempre più accostandosi, e la loro distanza finisce col diventare minore di qualsiasi segmento piccolo a piacere (prop. XXIII, XXV). Quest'ultimo caso è quello delle *parallele non euclidee*, il cui concetto è stabilito con precisione nella prop. XXXII, pur senza il nome, ed è quello stesso che qui introdurremo ai n.i 13, 15.

Tuttavia il Saccheri, convinto a priori della verità della geometria euclidea, finisce col dimostrare — erroneamente — che sono assurde le altre due ipotesi. Quella dell'angolo ottuso, perchè in tal caso è verificato il post. 5° di Euclide, e con esso tutto ciò che se ne deduce; quindi anche la geometria euclidea: sicchè l'ipotesi dell'angolo ottuso « *distrugge sè stessa* ». Ma sbaglia; il suo ragionamento prova soltanto che l'ipotesi dell'angolo ottuso è incompatibile « col sistema complessivo di tutte le premesse della geometria euclidea », e richiede quindi che venga abbandonata una almeno di queste; essa è però ammissibile p. es. se si abbandona il post. 2°, cioè l'ipotesi dell'infinità della retta, come avviene nella geometria sferica. — Dell'ipotesi dell'angolo acuto Saccheri dà due diverse confutazioni. Anzitutto, coll'osservare che due rette parallele come la AY e la BX della fig. 3, essendo posizioni limiti in pari tempo di due rette che s'incontrano e di due rette aventi una perpendicolare comune, sulle quali il punto d'incontro o rispett. i piedi di questa perpendicolare comune si sono allontanati indefinitamente, dovrebbero avere nel loro punto comune e nel loro stesso piano una medesima perpendicolare; cioè toccarsi, pur essendo distinte: il che è « *repugnans naturae lineae rectae* ». Con ciò il Saccheri cade in uno dei facili equivoci che nascono dall'estendere all'infinito concetti e considerazioni validi per enti a distanza finita. — L'altra confutazione è fondata sulla considerazione della linea luogo dei punti di un piano che, rispetto a una retta assegnata AB di questo piano, si trovano da una determinta banda di essa e a una distanza assegnata. Questa « linea di egual distanza », nell'ipotesi dell'angolo acuto, *non* è una retta; e il Saccheri (che qui si avventura sul terreno infinitesimale, a lui poco familiare) sbaglia affermando (prop. XXXVII) che l'arco infinitesimo di curva CKD (fig. 4), potendo considerarsi p. es. nella posizione C come coincidente con un segmento di tangente a questa linea in C (tangente che è perpendicolare ad AC), deve essere eguale al segmento corrispondente pure infinitesimo della base AB; e pure eguali devono essere quindi l'arco CKD ed il segmento AB. E poichè d'altra parte arco $\widehat{CKD}>$corda $CD>AB$, il Saccheri ritiene (prop. XXXVIII) di aver così nuovamente eliminata l'ipotesi dell'angolo acuto « *quia se ipsam destruit* ».

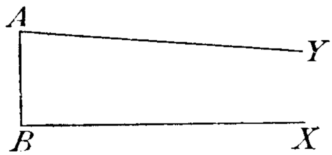


Fig. 3.

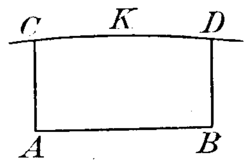


Fig. 4.

L'opera di Saccheri è tuttavia di grande importanza, perchè in essa, nonostante gli errori della conclusione ultima, *viene stabilita per la prima volta una serie di proposizioni che hanno luogo se si nega il post. 5° di Euclide.* Quale influenza essa abbia esercitato sui geometri posteriori, non possiamo oggi asserire con sicurezza (1); la si trova citata in alcune opere del se-

(1) V. all'uopo C. Segre: *Congetture intorno alla influenza di Gerolamo Saccheri sulla formazione della geometria non euclidea*, Atti Acc. Torino, 38 (1902-1903), p. 535.

colo XVIII [1] e del principio del XIX, ma ciò non implica che chi l'ha citata ne abbia sempre avuto conoscenza diretta. Certo nel secolo XIX l'opera di Saccheri finì coll'essere dimenticata, finchè nel 1889 E. BELTRAMI, che ne aveva avuto notizia dal Gesuita P. Manganotti, richiamò nuovamente su di essa l'attenzione dei geometri [2].

6. - **Lambert.** — JOHANN HEINRICH LAMBERT (1728-1777), di Mulhouse (oggi Alsazia, allora appartenente alla Confederazione Svizzera), è autore di una *Theorie der Parallellinien,* che si ritiene scritta fino dal 1766, ma fu pubblicata solo dopo la sua morte, nel 1786 [3], e ritrovata nel 1893 da Stäckel, che insieme a Engel ne curò la ristampa [4]. L'opera si divide in tre parti: la terza parte, la più importante, svolge una teoria delle parallele avviata in modo analogo a Saccheri, con qualche sviluppo di meno, ma trovando anche ulteriori proprietà caratteristiche delle due geometrie non euclidee.

Il punto di partenza di Lambert può avvalorare l'ipotesi che egli abbia avuta conoscenza dell'opera di Saccheri [5]. Lambert considera un quadrangolo piano avente 3 angoli retti; il quarto angolo potrà essere retto, ottuso, od acuto; e queste tre ipotesi, corrispondenti appunto alle tre di Saccheri e da Lambert chiamate *prima, seconda* e *terza,* egli considera anche tutte come possibili. Per la prima, cioè per il caso euclideo, dimostra che, se è vera in un solo caso particolare, lo è pure in ogni altro (§§ 42, 51).

La seconda ipotesi (§ 52 e seg.) viene dimostrata assurda con

---

(1) P. es. nelle due opere storiche di J. C. HEILBRONNER (*Historia Matheseos*, Leipzig, 1742, p. 162) e di MONTUCLA (*Histoire des Mathématiques*, Paris, 1758). Più minutamente essa è analizzata nella Dissertazione di G. S. KLÜGEL (*Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio*, Gottingae, 1763), opera contenente una pregevolissima storia della teoria delle parallele.

(2) *Un precursore italiano di Legendre e di Lobačewski*, Rend. Acc. dei Lincei (4), vol. 5, 1° sem. 1889, p. 441. L'opera di Saccheri fu poi tradotta in tedesco da STÄCKEL: *Parallellinien*, p. 45 e seg.; in italiano da G. BOCCARDINI (*Euclide emendato*, Milano, 1904); in inglese da G. B. HALSTED (Chicago-London, 1920).

(3) *Leipziger Magazin für die reine und angewandte Mathematik*, fasc. 2°, p. 137; fasc. 3°, p. 325; periodico durato 3 anni soltanto.

(4) *Parallellinien*, pp. 152-208.

(5) C. SEGRE, nota cit., n.° 4.

considerazioni relative a due rette perpendicolari a una terza e alle distanze dei punti di una delle prime due rette dall'altra. Ma la dimostrazione suppone tacitamente che, procedendo sopra una retta data sempre in un medesimo senso, si trovino punti tutti distinti dai precedenti; essa non è dunque applicabile se la retta è rientrante in sè stessa, come un cerchio.

Della terza ipotesi Lambert riconosce (§§ 79, 88) che non è facile eliminarla, nè egli sembra completamente persuaso di esservi riuscito; forse sentiva l'insufficienza della dimostrazione, e potrebbe darsi che appunto perciò avesse sospesa la pubblicazione della sua Memoria. Sono però importanti due risultati nuovi relativi alla terza ipotesi. Nei due quadrangoli $ABCD$, $AB'C'D'$ (fig. 5), trirettangoli, isosceli e non eguali ($AB=AD$, $AB'=AD'$, $AB<AB'$), per gli angoli acuti $\widehat{BCD}$, $\widehat{B'C'D'}$ si ha $\widehat{BCD}>\widehat{CED'}>\widehat{B'C'D'}$; sicchè $\widehat{BCD}$ e $\widehat{B'C'D'}$ non possono essere eguali senza che siano tali i due quadrangoli. L'angolo acuto $\widehat{BCD}$ individua dunque la grandezza del quadrangolo e quella delle basi: si potrà caratterizzare la lunghezza AB (p. es. « ein Pariser Fuss ») come base di un quadrangolo trirettangolo isoscele avente un angolo acuto $\widehat{BCD}$ assegnato, e attribuire al segmento AB la misura stessa dell'angolo $\widehat{BCD}$, riferito p. es. all'angolo retto come unità.

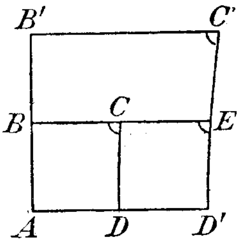


Fig. 5.

Questo farebbe cadere l'intera teoria delle figure simili; ogni figura non si potrebbe rappresentare che in vera grandezza....; risultati che all'A. appaiono seducenti (*reizend*), ma non compensano altri inconvenienti.... Osserva inoltre Lambert (§ 82), pur senza dimostrarlo completamente, che il *difetto* di un triangolo, cioè la differenza tra due retti e la somma dei tre angoli, è proporzionale all'area; al pari di ciò che avviene per l'*eccesso* del triangolo, nella seconda ipotesi, verificata per i triangoli sferici. E probabilmente dal confronto tra le formole $\Delta=r^2(A+B+C-\pi)$ pei triangoli sferici, e $\Delta=\varrho(\pi-A-B-C)$ con ϱ costante nella sua 3ª ipotesi, egli è condotto a dire: « Dovrei quasi trarne la conclusione che la terza ipotesi si verifichi sopra una sfera di raggio immaginario! » (e vedremo nel Cap. III che così avviene appunto sulle superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{r^2}$).

7. - La teoria delle parallele attorno al 1800. — La critica della teoria delle parallele ebbe nuovo impulso in Francia tra la fine del secolo XVIII e il principio del XIX. Alle ricerche sui fondamenti della geometria non potevano a meno di interessarsi i grandi matematici di quell'epoca, che però forse più meditarono di quanto, in questo campo, siano riusciti a concludere; così p. es. D'ALEMBERT (1), FOURIER, CARNOT, LAPLACE. Anche LAGRANGE sembra avesse riconosciuta l'indipendenza della trigonometria sferica dal post. 5°, e scritta sull'argomento una Memoria, che presentò all'Accademia di Parigi, ma della quale avrebbe interrotta la lettura, esclamando: « Il faut que j'y songe encore! ».

In Germania A. G. KAESTNER (1719-1800), professore a Gottinga, e G. S. KLÜGEL, suo allievo (cfr. la nota (1) a pag. 13), si rassegnavano ad ammettere l'ipotesi euclidea come postulato. Ad entrare in un nuovo ordine di idee, a riconoscere cioè la possibilità di un sistema geometrico, perfettamente logico, in cui si nega il post. 5°, si opponeva la concezione allora dominante della filosofia Kantiana, per la quale l'intuizione dei rapporti spaziali era considerata come aprioristica, di carattere puramente psicologico; e perciò meno che mai si pensava a ravvisare nei postulati della geometria dei dati sperimentali, pur sottoposti a un lavoro di idealizzazione, suscettibile di esplicarsi in più modi, tutti entro certi limiti soddisfacenti.

Grande notorietà ebbero, anche per la loro forma elegante, le pubblicazioni di ADRIANO MARIA LEGENDRE (1752-1833), cioè le 12 edizioni (1794-1823) dei suoi *Éléments de géométrie*, e la Memoria postuma: *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle* (2). I due teoremi: 1°) *La somma degli angoli di un triangolo è sempre minore o al più eguale a due retti*; 2°) *La somma stessa, se è uguale a due retti per*

---

(1) « La définition et les propriétés des lignes droites, ainsi que des lignes parallèles, sont l'écueil et pour ainsi dire le scandale des éléments de Géométrie » (Mélanges de Littér., d'Hist. et de Philos., t. V, § XI, 1759).

(2) Mém. de l'Acad. de Sciences, t. 12 (1833), pp. 367-410. Per Legendre la retta ha lunghezza infinita, e risulta perciò esclusa l'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri, escluso dunque che la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore di due retti.

un solo triangolo, lo sarà pure per ogni altro, benchè già dati da Saccheri circa un secolo prima, vengono generalmente citati come « teoremi di Legendre ». E l'influenza di Legendre, per la diffusione delle sue opere e per il vivo interesse destato in Francia ed in Germania, è stata ben più grande che quella dei suoi predecessori!

8. - Gauss. — Fu CARLO FEDERICO GAUSS (1777-1855) il primo ad avere chiara visione di una geometria nella quale si suppone non verificato il post. 5° di Euclide; e a ciò egli giunse non per improvvisa geniale intuizione, bensì con lungo faticoso lavoro, inteso a vincere l'antico contrario pregiudizio (1). Tale visione egli conservò tuttavia chiusa nella sua mente, e poi affidata a soli appunti e lettere a qualche altro scienziato: aveva per divisa: « Pauca sed matura », e temeva inoltre « gli strilli dei beoti » (lettera a Bessel, 27 gennaio 1829) se avesse esposto completamente le sue vedute (2). E ciò fino a quando vennero a sua conoscenza i lavori pubblicati da N. Lobačewski e da G. Bolyai (i quali pertanto, nella pubblicazione, lo hanno preceduto). Anzi questi stessi lavori rimasero ancora per parecchi anni sconosciuti alla maggior parte dei matematici, finchè, morto Gauss, la pubblicazione della sua necrologia, di SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN (3), e della corrispondenza GAUSS-SCHUMACHER (4) misero in luce che anche Gauss si era occupato dell'argo-

---

(1) Alcune notizie storiche su Gauss sono tolte dal mscr. C. SEGRE.

(2) A GERLING, il 28 agosto 1818, scriveva (Ges. Werke, vol. 8, p. 179): « Mi rallegro che Ella abbia il coraggio di esprimersi come se ammettesse la possibilità che l'ordinaria teoria delle parallele, e quindi tutta la nostra geometria fosse falsa. Ma le vespe, il cui nido Ella disturba, Le voleranno attorno al capo.... » E scrivendo a TAURINUS (8 novembre 1824), lo pregava di fare uso privato della comunicazione « evitando che qualcosa possa trapelarne in pubblico ». Sembra che Gauss, pur avendo in ben poco concetto il pubblico e anche la maggioranza dei matematici, si preoccupasse eccessivamente di ogni eventuale impressione a lui sgradevole (P. STÄCKEL: *C. F. Gauss als Geometer*, Materialien für eine wissensch. Biographie von Gauss, Heft V, 1918, pp. 35, 36).

(3) Prof. di mineralogia (*Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856).

(4) Corrispondenza pubblicata a cura di C. A. F. PETERS, Altona, 1860-1863; v. in part. vol. 2 (1860), pp. 255-262; 266-272; vol. 5 (1863), p. 246. SCHUMACHER, astronomo ad Altona, riferisce in un suo appunto ma-

mento, aveva altamente apprezzato quei due scienziati, e conseguito egli stesso analoghi risultati. — Oggi le ricerche di Gauss sulla teoria delle parallele si sono ricostruite in base ai documenti trovati, tutti anche pubblicati nei vol. VIII (1900) e X (parte I, 1917) delle sue Opere; vale a dire la sua corrispondenza con W. BOLYAI, OLBERS, SCHUMACHER, GERLING, BESSEL, TAURINUS, nel periodo 1799-1844; appunti manoscritti, fra altro il suo « Tagebuch » (1); più due brevi note, specie di recensioni, inserite nei « Göttinger Gelehrte Anzeige » (1816, 1822). Rimane però ignoto se Gauss abbia conosciute le opere di Saccheri e Lambert, che esistevano nella biblioteca di Gottinga, e quale influenza esse abbiano in tal caso esercitata su di lui. Poichè Gauss studiò a Gottinga nel periodo 1795-1798, è possibile, anzi verosimile che KAESTNER (n.° 7) e K. F. SEYFFER (professore di astronomia), entrambi conoscitori profondi della letteratura delle parallele, gliele abbiano segnalate (e così a W. BOLYAI, che fu a Gottinga nel periodo 1796-1799); ma mancano elementi che permettano di affermarlo con sicurezza. Da Gauss, nelle sue lettere, non si trovano mai citate; lo sono però, con lode, in un libro di J. W. H. LEHMANN (2) posseduto da Gauss, e che (in altri punti) ha sue note manoscritte in margine.

Le ricerche di Gauss sulla teoria delle parallele sembra siano cominciate nel 1792 (3). Nei primi anni esse si limitarono al lato critico, non esclusa nemmeno forse la ricerca di una dimostrazione del post. 5°: in una lettera a W. Bolyai del 16 dicembre 1799 egli

---

noscritto (v. GAUSS: *Opere*, vol. 8, p. 166) che Gauss aveva dichiarato essere la teoria delle parallele la « partie honteuse » della matematica, e che essa avrebbe dovuto ricevere, presto o tardi, altra forma.

(1) Nel quale Gauss per il periodo 1796-1801 (cominciando perciò a 19 anni!), e per qualche periodo posteriore, ha indicati i progressi del suo lavoro scientifico. Morto Gauss, il « Tagebuch » fu giudicato carta privata e rimase alla famiglia; P. STÄCKEL lo ritrovò nel 1898 presso un nipote di lui.

(2) *Mathematische Abhandlungen, betreffend die Begründung und Bearbeitung verschiedener mathematischen Theorien....* (Zerbst, 1829).

(3) Nella lettera 8 nov. 1824 a F. A. Taurinus, Gauss, presumendo che Taurinus non si sia ancora occupato molto dell'argomento, aggiunge: « *Bei mir ist es über 30 Jahre,* und ich glaube nicht dass jemand sich eben mit diesem Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals etwas darüber bekannt gemacht habe ». Nella lettera 28 nov. 1846 a Schumacher dice ancora « da 54 anni » (dunque dal 1792).

scrive che possedeva parecchie proposizioni equivalenti al post. 5°, tali che, ammessa una di queste (p. es. l'esistenza di un triangolo rettilineo la cui area fosse maggiore di un'area comunque data), ne discendeva senz'altro il post. 5° come conseguenza (¹); dimostrazioni che la maggior parte degli uomini avrebbero ritenute valide, ma che « *in meinen Augen, so gut wie nichts beweisen* ». Nel 1808 Gauss era tuttora esitante. Nel 1813, pur avendo proseguite le sue ricerche, trovava ancora davanti a sè degli scogli (*Klippen*), e sembra non avesse in proposito idee definitive. Nel 1816 aveva sviluppata la nuova geometria, da lui chiamata « anti-euclidea »; ma non possedeva forse ancora la certezza della sua incontestabilità logica, e perciò della impossibilità di dimostrare il post. 5° (²). Nella lettera già citata a Taurinus del 1824 (v. nota (²) a pag. 16) Gauss usa il nome di « Geometria non euclidea », e dice che sono rimasti vani tutti i suoi sforzi per trovare in essa una contraddizione. Finalmente nella lettera 17 maggio 1831 a Schumacher Gauss dice di avere cominciato a mettere per iscritto qualche risultato (« Vorrei che questo non scomparisse con me.... » (³)); e in una lettera successiva (12 luglio 1831) afferma esplicitamente che la geometria non euclidea *non ha in sè nulla di contraddi-*

(¹) Nell'ipotesi dell'angolo acuto di Saccheri (3ª di Lambert) l'area di un triangolo rettilineo di angoli A, B, C è $k^2(\pi - A - B - C)$, dove k è una costante; è dunque sempre $\leqq \pi k^2$.

(²) A Olbers scriveva infatti (28 aprile 1817): « *Vengo sempre più nell'idea* che la necessità della nostra geometria non si può dimostrare ». F. L. Wachter (1792-1817), allievo di Gauss a Gottinga (1809), poi professore al ginnasio di Danzica, dopo un colloquio avuto con Gauss nell'aprile 1816, scriveva a lui stesso (12 dic. 1816): « Dunque la geometria anti-euclidea, cioè *la Sua geometria, sarebbe vera....* »; e di questa ebbe anche una divinazione esatta: che sulla sfera di raggio infinito — la futura orisfera — doveva valere la geometria piana euclidea! (n.° 26). Egli pubblicava però in pari tempo un opuscolo: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi* (1817). Esitazioni e incertezze caratteristiche di quell'epoca!

(³) In questa redazione (Opere, vol. 8, pp. 202-209) è stabilito con precisione il concetto di parallele non euclidee (come qui, n.ⁱ 13, 15); vi si trovano la proprietà reciproca e transitiva del parallelismo; la nozione di « punti corrispondenti » rispetto a rette parallele, cioè punti di un oriciclo avente quelle rette per assi (qui, n.° 25). La redazione non fu proseguita, forse perchè nel 1832 Gauss conobbe la « Geometria assoluta » di G. Bolyai.

torio [1], benchè parecchi suoi risultati abbiano a prima vista l'aspetto di paradossi. E ne espone alcune proprietà: non vi sono figure simili e di grandezza diversa; p. es. gli angoli di un triangolo equilatero variano col lato, e tendono a zero quando il lato cresce indefinitamente. Esiste invece, per la misura dei segmenti, un'unità assoluta, che compare nelle formole come una costante speciale k; e la nuova geometria può mettersi sufficientemente d'accordo coll'esperienza, purchè k si supponga assai grande rispetto alla misura di ogni altra lunghezza che s'incontra in pratica (comprese le distanze astronomiche). La geometria euclidea corrisponde all'ipotesi $k = \pm\infty$.... Pertanto SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN nella sua necrologia citata (pag. 81) riassunse esattamente il punto di vista di Gauss: « Gauss considerava la geometria come un edifizio logico soltanto se vi si premetteva la teoria delle parallele come assioma; era però giunto alla convinzione che tale proposizione non si potesse dimostrare, quantunque si sappia dall'esperienza che è approssimativamente esatta. Se invece non si vuol ammettere quell'assioma, si ottiene un'altra geometria, del tutto indipendente, che egli una volta svolse e designò col nome di *anti-euclidea* ».

9. - Schweikart, Taurinus. — La teoria delle parallele destava allora interesse e trovò contributi anche fuori del campo matematico. FERDINAND KARL SCHWEIKART (1780-1857), professore di giurisprudenza, pubblicò nel 1807 una *Theorie der Parallellinien nebst dem Vorschlage ihrer Verbannung aus der Geometrie*, la quale non esce dal terreno euclideo: ma più tardi si occupò della nuova geometria, cui diede il nome di *astrale*, trovandone egli pure alcune proprietà; fra altro, che l'altezza di un triangolo rettangolo isoscele, pur crescendo col crescere dei cateti, non può superare un certo segmento, ch'egli chiama *la costante* (ed è $= k \log(1+\sqrt{2})$, dove k è la costante così designata da Gauss [2]).

---

[1] E a W. Bolyai, il 6 marzo 1832, scriveva: « Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ (cioè la geometria euclidea) und S (geometria non euclidea) a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung ».

[2] È la distanza per la quale *l'angolo di parallelismo* risulta di 45°. Ora la formula sen $\Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{x}{k}}$ (n.° 30), per $\Pi(x) = 45°$, dà $\operatorname{ch}\dfrac{x}{k} = \sqrt{2}$, da cui $x = k\log(1+\sqrt{2})$.

Schweikart richiamò sull'argomento anche l'attenzione del nipote Franz Adolph Taurinus (1794-1874), che aveva pure studiato giurisprudenza. Questi, pur continuando a credere nella verità assoluta del post. 5°, almeno in senso fisico, pubblicò una *Theorie der Parallellinien* (1825), e pochi mesi dopo i *Geometriae prima elementa* (1826), continuazione dell'opera precedente ([1]), i quali contengono sviluppi analoghi a quelli di Saccheri e Lambert ([2]). Nell'ipotesi dell'angolo acuto, Taurinus ritrova l'esistenza della costante k di Gauss, la quale secondo lui sarebbe *arbitraria*; e ritenendo che nello spazio dovrebbero valere ad un tempo *tutte* le geometrie corrispondenti agli infiniti valori di questo parametro, è condotto a rigettare quell'ipotesi. A un certo punto però (quando la stampa già era in corso) dichiara essergli venuto in mente un modo di ottenere una geometria (e precisamente un sistema analitico) in cui è verificata la detta ipotesi. Se nelle formole di trigonometria sferica si cambia il raggio R della sfera in $R\sqrt{-1}$, si ottengono fra lati e angoli del triangolo relazioni che assumono forma reale usando funzioni iperboliche, e che corrispondono appunto all'ipotesi dell'angolo acuto. Con questa geniale intuizione, egli trova d'un colpo le formole della trigonometria non euclidea, l'area del triangolo, la lunghezza della circonferenza, l'area del cerchio, area e volume della sfera; risultati a cui Lobačewski e G. Bolyai giunsero solo con lungo lavoro. E come l'ipotesi dell'angolo ottuso è verificata sulla sfera, così quella dell'angolo acuto non dà una geometria piana, ma una *geometria logaritmico-sferica* (che egli chiama così, perchè nelle formole di trigonometria faceva

---

([1]) L'importanza di Schweikart e Taurinus nella scoperta della geometria non euclidea fu messa in luce da Engel e Stäckel: *Parallellinien* (pp. 237-286). V. anche l'articolo di Stäckel su F. A. Taurinus in Abhandl. zur Gesch. der Math., IX (1899), p. 399.

([2]) Nella prefazione degli « Elementa » (datata 1° dicembre 1825; cfr. Engel e Stäckel: *Parallellinien*, p. 248) Taurinus dice di essere, senza saperlo, « auf Gedanken gekommen, welche denen, die man dem Italiener Saccheri und unserem Landesmanne Lambert *zuschreibt*, sehr ähnlich sind ». Di questi risultati aveva trovato cenno in Camerer e Hauber: *Euclidis Elementa graece et latine* (1824), opera contenente una storia dei tentativi di dimostrazione del post. 5°. Dal come Taurinus si esprime, si direbbe che non abbia però avuta conoscenza diretta delle opere di Saccheri e Lambert.

uso di logaritmi). Pur in mezzo a esitazioni (¹), Taurinus ebbe per primo chiara visione della geometria euclidea (per lui *geometria piana*) come intermedia fra la geometria sferica e quella logaritmico-sferica (*Sie liegt in der Mitte zwischen den sphärischen Geometrieen*; Elementa, pag. 68). E la somma degli angoli di un triangolo può variare con continuità, nelle tre geometrie complessivamente, da zero (triangolo logaritmico-sferico di area massima) a 3π (semisfera, come triangolo limite con 3 angoli piatti). Come avrebbe trionfato Taurinus se avesse conosciute le superficie pseudosferiche! (²)

Degli « Elementa », pubblicati a sue spese, Taurinus distribuì molte copie ad amici ed Autorità; ma l'opera passò inosservata, e l'A., disgustato, gettò sul fuoco il resto dell'edizione!

10. - **Lobačewski.** — Fondatori della geometria non euclidea furono, insieme con Gauss, NIKOLÁJ IWANOWITSCH LOBAČEWSKI e GIOVANNI BOLYAI.

N. J. LOBAČEWSKI (1793-1856) ebbe a maestro all'Università di Kazan, dal 1808, J. M. C. BARTELS, tedesco, che aveva studiato a Gottinga con Kaestner, e negli anni 1805-1807 si era trovato con Gauss a Braunschweig, restando anche in seguito con lui in corrispondenza. Ultimati gli studi, Lobačewski rimase a Kazan come assistente, e poi come professore di matematica, astronomia e fisica; dal 1827 al 1846 fu anche Rettore dell'Università. Sembra che le idee di Lobačewski si siano orientate nel periodo 1823-1825 verso una geometria indipendente dal postulato di Euclide (³); e ciò con tendenza empirista, nel senso che la questione contenuta nel detto

(¹) « La questione della vera essenza della geometria logaritmico-sferica, se contenga qualcosa di possibile, oppure se sia solo immaginaria, oltrepassa i limiti degli *Elementa* (ivi, p. 68). Ma presumo (*ich vermuthe*; *Parallellinien*, p. 97) che ciò non sarà senza importanza per la matematica! ».

(²) Mscr. C. SEGRE, p. 82.

(³) F. KLEIN (litogr., vol. I, p. 175) dice che l'orientamento di Lobačewski verso la geometria non euclidea è dovuto, almeno indirettamente, all'influenza di Gauss, a mezzo Bartels. L'affermazione lascia però molto incerti; Bartels, fino al 1807, non poteva avere appreso da Gauss molto di positivo; mentre viceversa manoscritti di Lobačewski degli anni 1815-1817 contengono tentativi di dimostrazione del post. 5° di Euclide.

postulato dovesse risolversi sperimentalmente, esaminando le conseguenze delle diverse ipotesi. Il 12 (24) febbraio 1826 Lobačewski presentò alla Sezione fisico-matematica dell'Università di Kazan una Memoria: *Exposition succincte des principes de la géométrie avec una démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, la quale fu letta, ma non pubblicata; nè se ne è mai ritrovato il manoscritto. Però dalla Memoria successiva: *Sui principî della geometria*, pubblicata in lingua russa nel Messaggero di Kazan (1) e che Lobačewski affermò essere un estratto della « Exposition », appare già l'esistenza, oltre alla geometria ordinaria (euclidea), di un'altra geometria, più generale, ch'egli chiama « immaginaria », nella quale la somma degli angoli di un triangolo è minore di due retti, e ch'egli svolgeva fino alla trigonometria e alle formole pel calcolo di lunghezze, aree, volumi. A queste Memorie seguirono altri lavori, qualcuno in lingua francese e tedesca (2); l'ultimo, la « Pangeometria », contenente lo svolgimento completo della nuova geometria, fu pubblicato nel 1855 quando Lobačewski era già cieco. Ma la nuova geometria non fu apprezzata durante la sua vita. Solo Gauss era in grado di apprezzarla; e infatti questi in varie lettere richiamò l'attenzione di altri scienziati sui lavori di lui (p. es. nella lettera 28 novembre 1846 a Schumacher), e fino dal 1842 aveva promosso la nomina di Lobačewski a corrispondente della Società delle Scienze di Gottinga.

11. - I due Bolyai. — Wolfango Bolyai de Bolya (1775-1856; Bolya era un possedimento della famiglia in Transilvania) studiò a Jena e a Gottinga, dove ebbe a maestro Kaestner e a compagno Gauss (1796-1798), col quale conservò sempre amicizia

(1) Fasc. 25, 1829, p. 178; 27, 1829, p. 227; 28, 1830, p. 251, 271. Questa Memoria, e l'altra: *Nuovi principi....*, di cui alla nota seg., furono tradotte in tedesco da F. Engel (*N. I. Lobačewski, Zwei geometrische Abhandlungen....*, vol. 1°, Leipzig, 1898; pp. 1-66; 67-236).

(2) *Geometria immaginaria* (in lingua russa; Scritti scient. Univ. Kazan, I, 1835, p. 3), coincidente all'incirca colla *Géométrie imaginaire* (Journ. für Mathem., 17, 1837, p. 295); *Nuovi principi della geometria, con una completa teoria delle parallele* (Scritti scient. Univ. Kazan, in varie puntate, 1835-1837); *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Berlin, 1840); *Pangeometria* (Kazan, 1855). Edizione completa russa delle opere geometriche

e relazione epistolare. Fu uomo di multiforme ingegno; matematico, filosofo, poeta, autore di tragedie, violinista, inventore di forni e camini [1]. Tentò in più modi di dimostrare il post. 5° di Euclide, riuscendo però soltanto a sostituirlo con altri (p. es. con questo: « Tre punti non allineati giacciono sempre sopra una sfera »), e giunse così a dubitare che *non* fosse dimostrabile. Opera sua principale è il: *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*; 2 vol. 1832-1833 [2]; al 1° vol. fa seguito l'*Appendix* del figlio Giovanni. Quest'ultimo (1802-1860) fu dal padre istruito nelle matematiche, e conobbe così le lacune e le difficoltà della teoria delle parallele [3]. Per qualche tempo fu dominato dall'idea di trovare una dimostrazione del post. 5° (e da questa ricerca il padre lo sconsigliava, avvertendolo che si sarebbe « avvelenata l'esistenza »). In seguito si orientò diversamente, proponendosi di costruire una *geometria assoluta* dello spazio, sul tipo di Euclide, senza decidere a priori sulla validità o meno del post. 5°; e ne scrisse al padre fino dal 1823, dicendo di avere creato « un nuovo mondo dal nulla ». La redazione si protrasse fino al 1829, e Wolfango non ne rimase del tutto persuaso; fu però pubblicata nel 1832, come appendice al 1° vol. del « Tentamen », col titolo: *Appendix scientiam spatii absolute*

---

di Lobačewski, 2 vol.; Kazan, 1883-1886. - W. K. CLIFFORD (*Lectures and Essays*, I, p. 298; riportato in Mathem. Papers, London 1882, prefaz. p. 44) giudica che l'importanza filosofica della scoperta di Lobačewski può trovare riscontro in quella di Copernico.

(1) Mscr. C. SEGRE, p. 87.

(2) In un'opera successiva, in lingua tedesca (*Kurzer Grundriss eines Versuches*, 1851) W. Bolyai riprende l'analisi critica dei fondamenti sia dell'aritmetica che della geometria.

(3) Nel 1817 entrò all'Accademia del Genio a Vienna, e fu ufficiale del Genio dal 1823 al 1833. Nel suo reggimento era il miglior matematico, il più valente violinista, il più abile schermitore. Sfidato a duello da 13 ufficiali di cavalleria, accettò le sfide, a patto che gli fosse permesso dopo ogni paio di duelli di suonare un pezzo per violino; suonò tutti questi pezzi.... e i 13 avversari. Dopo collocato a riposo (forse per eccessiva vivacità di carattere) condusse vita oziosa e sregolata; fu per qualche tempo in cattive relazioni anche col padre, al punto di sfidare lui pure a duello; morì in rotta col mondo e con sè stesso (mscr. C. SEGRE, p. 90).

veram exhibens, a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei, a priori haud unquam decidenda, indipendentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica (1). Gauss, cui Wolfango ne mandò copia, rispose (6 marzo 1832) che « lodare questo lavoro sarebbe come lodare sè stesso »; poichè il contenuto e i risultati di esso coincidevano quasi interamente con le sue proprie meditazioni sull'argomento, da 30-35 anni in qua. E si compiaceva « che proprio il figlio del suo vecchio amico lo avesse preceduto in modo così notevole » (2); risposta che *non* soddisfece G. Bolyai, il quale temeva Gauss volesse appropriarsi la priorità della scoperta, e conservò verso di lui una non giustificata avversione.

Anche G. Bolyai, come Lobačewski, non ebbe la soddisfazione di vedere apprezzata l'opera sua (tranne che da Gauss). Convinzioni e preconcetti da lungo tempo radicati nella mente umana non potevano cadere d'un tratto; i due innovatori avevano vissuto in paesi lontani, senza farsi conoscere con altra produzione scientifica; parecchi lavori di Lobačewski erano stati pubblicati solo in lingua russa. L'attenzione dei matematici cominciò a rivolgersi a loro solo dopo il 1860 (come è detto a p. 16-17). Alla divulgazione dei loro scritti contribuirono le traduzioni francesi di HOÜEL e italiane di BATTAGLINI (3); e dopo pubblicata (1868) la Memoria di Riemann sui fondamenti della geometria (letta in lezione nel 1854), gli scritti di E. BELTRAMI e H. v. HELMHOLTZ. D'allora in poi i nomi di Lobačewski e di G. Bolyai furono noti a tutti i matematici!

---

(1) *Geometria assoluta*, e *indipendente dall'assioma XI*, in quanto espone proprietà valide in ambo i casi, non euclideo e euclideo, corrispondenti rispett. a un valore finito arbitrario e al valore $+\infty$ del parametro. Inoltre, nell'ipotesi della falsità dell'assioma XI, la costruzione di figure rettilinee equivalenti a taluni particolari cerchi (non già a un cerchio qualunque, di dato raggio).

(2) Anche a Gerling Gauss aveva scritto che giudicava il giovane geometra G. Bolyai « ein Genie erster Grösse ».

(3) LOBAČEWSKI: *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, 1866; BOLYAI: *La science absolue de l'espace*, 1868. G. Battaglini pubblicò nel vol. 5 (1867) del Giorn. di Matem., da lui fondato, un articolo riassuntivo (*Sulla geometria immaginaria di Lobačewski*, l. c., p. 217) e la traduzione della *Pangeometria* (p. 273), nel vol. 6 (1868) la traduzione della *Geometria assoluta* di G. BOLYAI.

12. - I diversi indirizzi nello studio della geometria non euclidea. — La *geometria non euclidea* comprende oggi essenzialmente le due costruzioni scientifiche corrispondenti:

1°) All'*ipotesi dell'angolo acuto* di Saccheri-Lambert, cioè alla negazione del post. 5° di Euclide; teoria costruita da Gauss, Lobačewski e Giovanni Bolyai;

2°) All'*ipotesi dell'angolo ottuso*, nella quale è bensì verificato il post. 5° suddetto, ma non vale incondizionatamente il post. 2°, poichè il prolungamento di una retta non conduce, oltre un certo limite (la sua lunghezza totale finita), a nuovi punti (v. n.° 40).

A queste geometrie si può pervenire movendo da differenti punti di vista:

a) Per via elementare, cioè con sviluppi analoghi a quelli contenuti negli « Elementi » di Euclide, salvo le accennate modificazioni nei postulati (v. Cap. II). È ciò che hanno fatto GAUSS, LOBAČEWSKI, GIOVANNI BOLYAI, per la prima delle due teorie.

b) Per via differenziale, secondo il procedimento abbozzato per la prima volta da RIEMANN, coll'estendere a varietà a tre e più dimensioni la geometria differenziale delle superficie svolta da GAUSS [1], e particolarmente il concetto di « superficie a curvatura costante » (Cap. IV).

c) Movendo da considerazioni sul movimento dei corpi rigidi. L'osservazione ci dice che questi movimenti dipendono, nello spazio a 3 dimensioni, da 6 parametri, e formano un *gruppo* (cioè il prodotto di due di essi è ancora un movimento). Premettendo come postulati alcune delle proprietà che, in base alle nostre osservazioni, sogliamo attribuire al sistema dei movimenti, la geometria che ne consegue risulta essere o quella euclidea, o una delle due non euclidee (Cap. IV, n.° 58 e seg.).

d) Movendo dalla geometria proiettiva, supposta costruita senza far uso di concetti metrici (Cap. V). Come ad essa si può subordinare la geometria metrica euclidea, presentando le proprietà metriche delle figure (nel modo che verrà a suo tempo indicato; cfr. n.° 61) quali relazioni proiettive tra queste figure e il *cerchio assoluto* (cerchio immaginario all'infinito), così anche le geome-

---

[1] *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. Soc. regiae scient. Gottingensis recentiores, 6 (1828); Ges. Werke, 4 (Berlin, 1873), p. 217.

trie non euclidee possono subordinarsi alla geometria proiettiva sostituendo al cerchio assoluto una conveniente quadrica a discriminante non nullo. Ciò è stato messo in evidenza da F. Klein, collegandolo a precedenti considerazioni di A. Cayley (v. anche n.° 61). A Klein sono pure dovuti i nomi di *geometria iperbolica* e *geometria ellittica*, oggi generalmente adottati, e che noi pure adotteremo per le due geometrie non euclidee rispett. dell'*angolo acuto* e dell'*angolo ottuso*, e di *geometria parabolica* per la geometria euclidea.

La conoscenza completa delle geometrie non euclidee può risultare soltanto dalla sintesi dei vari modi nei quali esse si sono presentate nella scienza, e dei vari indirizzi secondo cui sono state oggetto di indagine.

Capitolo II.

Indirizzo elementare.

§ 1. - Parallele e non secanti in un piano.

13. - Rette parallele in un piano. Loro proprietà fondamentali. — In quanto segue, fino al n.° 39 incluso, supporremo premessi tutti i postulati della geometria euclidea all'infuori del post. 5° di Euclide, nella forma loro data comunemente dai trattati moderni di geometria elementare ([1]); o anche quale risulta dal complesso degli articoli geometrici contenuti in Enriques, *Questioni*. Rimangono valide, nella geometria piana, le proprietà fondamentali dell'eguaglianza delle figure, delle rette perpendicolari e oblique, e del cerchio (corde, tangenti,....); nello spazio, le relazioni di perpendicolarità, le proprietà fondamentali degli angoli diedri e loro rettilinei, i casi di eguaglianza dei triedri e triangoli sferici (Libro XI di Euclide).

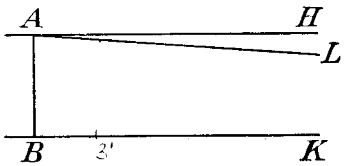


Fig. 6.

Se la retta AB è perpendicolare alle AH e BK (fig. 6) contenute in un medesimo piano per essa, fra le rette di questo piano passanti per A e di cui una semiretta cade nell'angolo retto BAH,

---

([1]) Nel sistema di postulati di Hilbert, *Grundlagen* va escluso il IV, e restano tutti gli altri (gruppo I, postulati di appartenenza; II, postulati lineari o di ordinamento; III, postulati di congruenza; V, postulati di continuità). Nel sistema dei postulati di F. Severi, *Elementi di geometria* (2 vol., Firenze, Vallecchi, 1926-1927) il postulato delle parallele, qui escluso, trovasi a p. 113 del 1° vol.; i capitoli indipendenti da questo postulato e che rimangono perciò validi sono i Cap. I-IV del 1° vol., VI-VIII del 2° vol. (esclusi i poliedri regolari), più la parte generale sulle grandezze e proporzioni.

inclusi i lati AB e AH, ve ne sono di quelle, come AB, che incontrano la BK, e di quelle, come AH, che non l'incontrano. La ripartizione della totalità delle rette stesse in due classi, secondo che incontrano o non incontrano la BK, soddisfa alle condizioni volute dal postulato della continuità sotto la forma di Dedekind, e conduce a definire una retta AL contenuta nell'angolo BAH, la quale separa le due classi anzidette; non incontra la BK, ma è tale che ogni semiretta passante per A e compresa nell'angolo BAL l'incontra. Chiameremo la retta AL *parallela condotta per A alla BK, nel verso BK*; lasciando per ora impregiudicato se essa sia o no distinta dalla AH, e perciò se l'angolo BAL sia acuto o retto. (In geometria euclidea quest'angolo è sempre retto). Naturalmente, indicato con B' qualunque altro punto della retta BK, questa retta sarà sempre incontrata da ogni semiretta condotta per A entro l'angolo $B'AL$.

Sussistono allora le proprietà seguenti:

1°) *La parallela a una retta data, in un verso assegnato, condotta per un punto dato è pure parallela alla prima e nello stesso verso in corrispondenza ad un altro qualsiasi suo punto* (conservazione del parallelismo).

Sia $a \equiv AM$ (fig. 7) la parallela condotta per A alla b nel verso BN; A' un altro punto

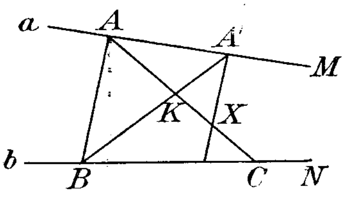


Fig. 7.

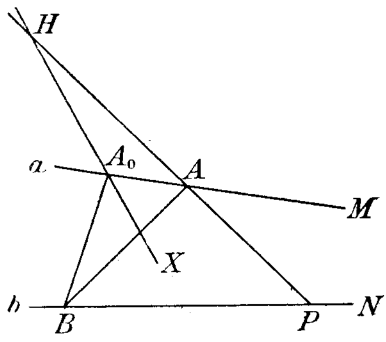


Fig. 8.

di a che, pel momento, supponiamo segua A nel verso AM; dico che ogni retta $A'X$ uscente da A' entro l'angolo $BA'M$ incontra la b. Poichè X (che possiamo supporre si trovi dalla stessa banda di b da cui si trova A') appartiene all'angolo BAM, la AX incontra b in un punto C; inoltre, lasciando essa A' e B da bande opposte, incontrerà pure $A'B$ in punto K. Allora $A'X$, incontrando il lato (segmento) KC del triangolo BKC e non il segmento finito BK, incontrerà il terzo lato BC, ossia la b, c. v. d. — Similmente (fig. 8), se A_0 sta su a, rispetto a A, da parte opposta di M, e X entro l'angolo BA_0M, prendiamo su XA_0 un nuovo punto H, rispetto a A_0 dal lato opposto di X. La HA cadrà entro l'angolo BAM e incontrerà perciò b in un punto P; e A_0X, incontrando il lato AB del triangolo ABP, e non il segmento AP (di cui incontra il prolungamento), incontrerà BP, cioè la b.

2°) *Se una retta è parallela ad un'altra, a sua volta quest'altra sarà parallela alla prima* (reciprocità della relazione di parallelismo, in un dato verso). Sia a parallela a b, nel verso BB' (fig. 9): la bisettrice dell'angolo BAA' incontra la b, e perciò anche la bisettrice di ABB'. L'intersezione M delle due bisettrici avrà da a e b distanze MA_0, MB_0 eguali; e rispetto alla bisettrice m dell'angolo A_0MB_0 saranno simmetrici A_0 e B_0, quindi a e b; donde la reciprocità del parallelismo.

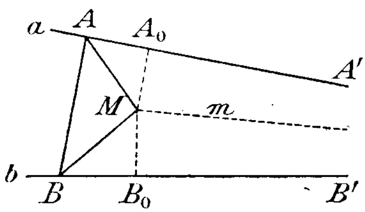


Fig. 9.

Le rette a, b sono anche parallele entrambe alla m; quindi: *Il luogo dei punti di un piano equidistanti da due rette parallele a, b è una terza retta, parallela a entrambe, che dicesi asse,* o *mediana* della *striscia* compresa tra le prime due. Esistono inoltre infinite rette che (come p. es. la A_0B_0 della fig. 9) incontrano due rette parallele assegnate sotto angoli eguali.

Se da più punti di a, succedentesi da A verso A', si conducono le perpendicolari alla b, queste non potranno a due a due incontrarsi, e perciò i loro piedi su b si seguiranno nello stesso ordine dei punti iniziali su a. Così al *senso* AA' sopra a rimane legato un senso determinato, in questo caso il senso BB', sopra b. Scambiando le rette a e b, si corrispondono ancora su di esse questi medesimi sensi. I due sensi AA', BB' rispett. su a, b possono considerarsi identici; e risulta così ben precisato cosa deve intendersi per *senso* o *verso comune di parallelismo di due rette parallele a, b.*

3°) *Due rette parallele ad una terza in un medesimo verso sono anche parallele fra loro* (transitività della relazione di parallelismo; per ora, limitatamente a rette contenute in uno stesso piano).

Siano a, c parallele entrambe alla b, nel verso BB'; indicati con AA', CC' i loro versi identici a BB', i punti A', B', C' staranno da una stessa parte della trasversale AC. Se a, c stanno da parti opposte di b (fig. 10), ogni retta AX uscente da A entro l'angolo CAA' deve incontrare b (parallela ad a) in un punto K; ed essendo contenuta nell'angolo CKB' (con b parallela a c), incontrerà pure c; perciò a è parallela a c. Se invece a e c stanno da una stessa banda di b (fig. 11), anzitutto esse non possono incontrarsi, perchè se no per la loro intersezione passerebbero due rette distinte, parallele a b nel verso BB'; perciò una fra esse, e sia a, lascerà b e c da una stessa parte. Allora c starà fra a e b; e ogni retta uscente da A entro l'angolo BAA' incontrerà b e quindi anche c.

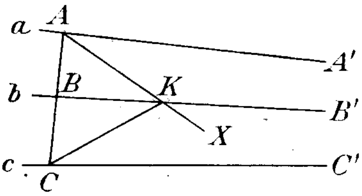


Fig. 10.

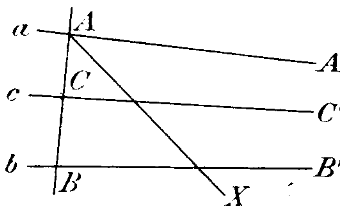


Fig. 11.

Date più rette tutte parallele in un dato verso, questo loro comune verso di parallelismo può chiamarsi *punto all'infinito* (comune alle stesse rette).

14. - Somma degli angoli di un triangolo. — *La somma degli angoli di un triangolo rettilineo non può superare due angoli retti.* Indichiamo con $\pi+\alpha$ questa somma per il triangolo ABC (fig. 12); dico che α non può essere positivo. Sia D il punto di mezzo di uno dei tre lati, p. es. di BC; e sul prolungamento di AD prendiamo $DE=AD$. I triangoli ABD, ECD sono eguali, avendo eguali gli angoli in D e i lati che li comprendono; perciò la somma degli angoli del triangolo ACE è eguale all'analoga somma del triangolo ABC, ossia $\pi+\alpha$. E poichè gli angoli in A e in E del primo hanno per somma l'angolo BAC, uno almeno di essi è non supe-

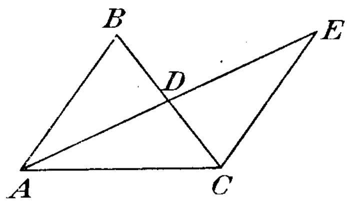


Fig. 12.

riore alla metà di quest'ultimo. Al triangolo proposto se ne è così sostituito un altro in cui la somma dei tre angoli è ancora $\pi+\alpha$, e nel quale vi è un angolo non superiore alla metà di un angolo del primo assegnato ad arbitrio. *Se la lunghezza della linea retta si suppone infinita* (e così la supponiamo ora), questo procedimento può applicarsi ad ogni triangolo, senza eccezione. Applicandolo al triangolo ACE, e così successivamente più volte, dopo un numero finito di operazioni giungeremo ad un triangolo nel quale la somma dei tre angoli sarà ancora $\pi+\alpha$, ma uno degli angoli sarà diventato piccolo a piacere, p. es. minore di α, se α è positivo; sarà perciò $>\pi$ la somma degli altri due angoli. Si avrebbero così due rette incontrantisi e formanti con una terza, dalla parte da cui si incontrano, angoli interni con somma $>\pi$; il che (nell'ipotesi della retta infinita) sarebbe già assurdo se la stessa somma fosse π (Euclide, lib. I, Prop. 28), e lo è *a fortiori* nel caso presente.

Corollari: 1°) *Ogni angolo esterno di un triangolo è maggiore o al più eguale alla somma degli interni non adiacenti.*

2°) *Per un punto dato si può condurre a una data retta una trasversale che formi con essa un angolo piccolo a piacere.* Condotta infatti per O alla AA' (fig. 13) la trasversale OB formante con essa l'angolo (acuto) OBA, e preso $BC=OB$, risulterà isoscele il triangolo OBC, e perciò $OCB\leqq\frac{1}{2}OBA$. Ripetendo la costruzione per la trasversale OC, e così di seguito, si potrà rendere l'angolo di incidenza con AA' minore di ogni angolo assegnato. Inoltre, facendo allontanare indefinitamente il punto B nel verso AA', l'angolo OBA decresce con continuità [1] e indefinitamente, e tende a *zero*. Con frase espressiva, si può dire *convenzionalmente* che la parallela per O alla AA' nel verso AA', limite delle dette secanti, *incontra la AA' nel suo punto all'infinito*, nel verso AA', *sotto angolo nullo.*

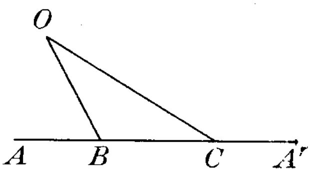


Fig. 13.

[1] Si dimostra facilmente che il detto angolo varia con continuità al variare di B. Ne segue che, dato un angolo acuto γ, si può sempre condurre per O alla AA' una retta di inclinazione γ assegnata; quella che nel fascio O separa le rette di inclinazione $\geqq\gamma$ da quelle di inclinazione $<\gamma$.

Inoltre: *Se in* **un** *triangolo la somma dei tre angoli è eguale a due retti, tale somma sarà pure eguale a due retti in* **ogni** *triangolo.*

Basta dimostrare questo teorema nel caso che i due triangoli considerati nell'enunciato (ipotesi e tesi) siano entrambi rettangoli. Infatti in ogni triangolo ABC due almeno dei 3 angoli, p. es. B e C, sono acuti; e l'altezza AD uscente dal terzo vertice A scompone questo triangolo in due triangoli rettangoli. Indicando con (ABC) la somma dei 3 angoli del triangolo dato, e analogamente pei due triangoli parziali, sarà $(ABC) = (ABD) + (ADC) - \pi$. Se la prima somma vale π, le altre, non potendo essere $> \pi$, saranno anche entrambe $= \pi$; e viceversa, se queste sono entrambe $= \pi$, lo sarà la prima.

Omettiamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato pel caso dei triangoli rettangoli, perchè essa si riconduce a dimostrare che la somma degli angoli di un quadrangolo birettangolo isoscele è sempre eguale a 4 retti, se è tale in un solo caso particolare, vale a dire a un teorema di Saccheri (n.° 7).

15. - Geometria non euclidea secondo Lobačewski. — La somma degli angoli di un triangolo è pertanto *o sempre eguale a due retti, oppure sempre minore di due retti.* Nella prima ipotesi due rette di uno stesso piano perpendicolari a una terza sono parallele (in entrambi i versi) nel senso del n.° 13, e perciò per un punto dato si può condurre a una retta data una e una sola parallela.

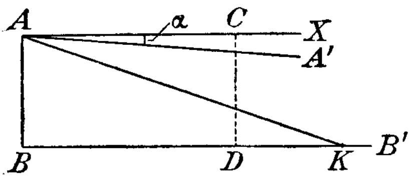


Fig. 14.

Invero, supposta AB perpendicolare a BB' (fig. 14), se la parallela AA' condotta per A alla BB' nel verso BB' formasse colla AX, perpendicolare ad AB, un angolo $a \neq 0$, conducendo per A alla BB' una trasversale AK ad angolo acuto $k < a$, il triangolo ABK, rettangolo in B, avrebbe un angolo acuto $\widehat{A} < \frac{\pi}{2} - a$, l'altro $< a$, quindi la somma dei tre $< \pi$. Viceversa, se anche in un solo caso (fig. 14) la parallela condotta per A alla BB' è la AX perpendicolare ad AB, essa deve risultare parallela a BB' anche in corrispondenza a ogni suo punto C (n.° 13), e in entrambi i versi. Supposta pertanto CD

perpendicolare a BB', gli angoli ACD, XCD saranno entrambi $\leqq \frac{\pi}{2}$, perciò entrambi retti; il quadrangolo $ABDC$ avrà i 4 angoli tutti retti, e sarà spezzato da una diagonale in 2 triangoli rettangoli aventi ciascuno la somma degli angoli $= \pi$.

Coi postulati ammessi al n.° 13 sono dunque compatibili le due ipotesi seguenti:

1°) *Per un punto dato si può condurre ad una retta data una e una sola parallela*; due rette parallele hanno infinite perpendicolari comuni; *la somma degli angoli di un qualsiasi triangolo rettilineo è eguale a due retti*. È il caso della *geometria euclidea*;

2°) *Per un punto dato si possono condurre ad una retta data, nei due versi opposti, due distinte parallele* (nel senso del n.° 13); *e la somma degli angoli di un triangolo rettilineo è sempre minore di due retti*. È l'ipotesi di Lobačewski; e *questa s'intenderà verificata d'ora in avanti*, in aggiunta a quelle del n.° 13, e pure fino a tutto il n.° 39 del presente capitolo. In questo caso (fig. 15), le due parallele condotte a una retta r per un punto A, nei due versi di r, formano colla perpendicolare AB alla r angoli BAA', BAA_0 eguali ed *acuti*. Quest'angolo, completamente individuato dalla distanza $AB = p$ (perchè le figure ottenute per distanze AB eguali sono sovrapponibili), è stato chiamato da Lobačewski *angolo di parallelismo corrispondente alla distanza* p, e indicato con $\Pi(p)$.

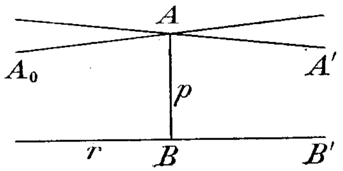


Fig. 15.

In quest'ipotesi, evidentemente, *non è verificato il post. 5° di Euclide*; p. es. le parallele AA', BB', pur formando colla AB angoli interni dalla parte del parallelismo di somma $< \pi$, tuttavia non s'incontrano.

Nella stessa ipotesi, *la somma degli angoli di un quadrangolo è minore di 4 retti*; e, più generalmente, la somma degli angoli di un *n-gono* piano semplice è $< (n-2)\pi$.

16. - **Angolo di parallelismo. La funzione $\Pi(p)$.** — Per ogni lunghezza p si ha un corrispondente *angolo di parallelismo*

$\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$. Inversamente, *per ogni angolo acuto a esiste una lunghezza determinata p tale che $\Pi(p) = a$.*

Sia $\widehat{A} = a$ (fig. 16); da un punto qualunque B' di uno dei lati di quest'angolo si conduca $B'A'$ perpendicolare all'altro lato, e si indichi con $\pi - \gamma$ la somma degli angoli del triangolo rettangolo $AA'B'$ (sicchè $\gamma > 0$). Si prenda poi $A'A'' = AA'$, e si conduca $A''B'$, nonchè la perpendicolare in A'' alla AA'', che supponiamo incontri AB' in B''. Nel triangolo $AB'A''$ la somma dei tre angoli vale $\pi - 2\gamma$; e nel triangolo $AB''A''$ essa sarà $< \pi - 2\gamma$. Operando su quest'ultimo triangolo come su $AB'A'$, e così di seguito, dopo n operazioni, se la perpendicolare ultima costruita incontra ancora la AB', essa limiterà un triangolo i cui angoli avranno somma $< \pi - 2^n\gamma$; e poichè questa quantità, per n abbastanza grande, risulta negativa, arriveremo certo per questa via a una retta CD perpendicolare ad AA' e che non incontra AB. Essendovi pertanto, fra le rette perpendicolari ad AA' in punti della semiretta AX, di quelle che incontrano la AB e altre che non l'incontrano, e poichè ogni retta della prima categoria è preceduta (nel senso da $A'B'$ a $A''B''$) da sole rette di questa stessa categoria, vi dovrà essere, pel postulato della continuità, una perpendicolare ad AX, e sia EF, che separa le due categorie; la quale non incontrerà AB', ma sarà tale che ogni perpendicolare ad AA' avente il piede nel segmento AE dovrà incontrarla. *La EF sarà allora parallela ad AB'* (in questo verso); di modo che, posto $p = AE$, sarà $\Pi(p) = a$. Infatti, condotta per E entro l'angolo FEA, una retta ad angolo comunque piccolo con EF, e da un suo punto H la perpendicolare HK ad AE, quest'ultima dovrà incontrare AB' in un punto B. La EH penetra dunque in H nell'interno del triangolo AKB; e, per uscirne, non potrà che incontrare il lato AB in un punto M.

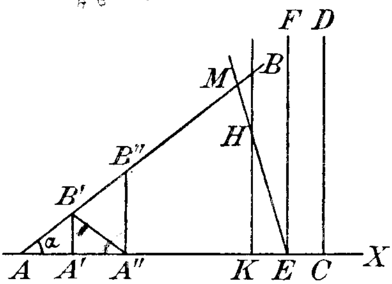


Fig. 16.

La funzione $\Pi(p)$ è dunque univocamente invertibile in tutto l'intervallo $0 < \Pi(p) < \frac{\pi}{2}$. Essa vi è inoltre sempre decrescente;

perchè, se a due distanze $p=AB$, $p'=A'B$ (fig. 17), tali che $p<p'$, corrispondessero angoli di parallelismo a, a' tali che $a<a'$, le rette AA_0, $A'A_1$, parallele entrambe a BB_0 nello stesso verso e perciò parallele fra loro, formerebbero colla $A'B$ angoli interni dalla stessa parte di somma $>\pi$, p. es. $=\pi+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$; e allora una nuova retta per A' entro l'angolo $BA'A_1$ e formante con $A'A_1$ un angolo $<\varepsilon$ dovrebbe incontrare AA_0 in un punto X, tale che il triangolo $A'AX$ avrebbe la somma degli angoli $>\pi$.

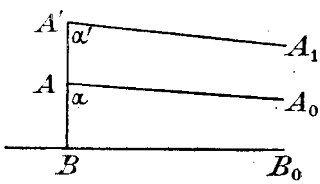


Fig. 17.

La funzione $\Pi(p)$ nell'intervallo da $p=0$ a $p=+\infty$ è dunque univoca, univocamente invertibile, e decrescente da $\frac{\pi}{2}$ a zero.

Date in un piano due rette qualunque, e fissati su di esse versi arbitrari secondo i quali esse *non* siano parallele, si conducano per un punto arbitrario O (fig. 18) le parallele OM, ON ad esse nei versi suddetti, e la bisettrice OK dell'angolo MON. Supponendo la lunghezza OK tale che il corrispondente angolo di parallelismo sia $=\frac{1}{2}MON=MOK$, la perpendicolare a OK in K sarà parallela, nei suoi opposti versi, a OM e ON, e perciò alle due rette date. Variando O nel piano, quest'ultima retta non potrà variare (perchè dovrebbe mantenersi parallela a sè stessa in *entrambi* i versi); vale a dire: *Esiste* **una** *retta parallela rispett. nei proprii due versi a rette complanari assegnate, secondo versi pure assegnati e distinti; ossia esiste* **una** *retta congiungente due punti all'infinito assegnati e distinti.*

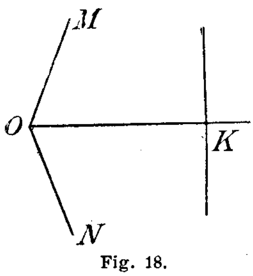


Fig. 18.

Date ad es. due rette parallele fra loro in un certo verso, esiste *una* retta parallela alle due precedenti nei versi rispett. opposti a quelli dianzi considerati; le tre rette formano un triangolo coi vertici tutti all'infinito.

17. - Rette non secanti. — Si dicono *non secanti* due rette complanari, le quali non s'incontrano, nè sono parallele. Le due parallele condotte a una retta data r, per un punto assegnato A, nei due opposti versi, spezzano il fascio di rette A in due angoli completi, uno luogo di rette incontranti la r, l'altro di rette non secanti la r (esclusi in ambo i casi i lati degli angoli stessi, paralleli a r).

Due rette complanari perpendicolari ad una terza sono non secanti. Viceversa, due rette non secanti ammettono sempre una perpendicolare comune. Supposte AP e BN (fig. 19) non secanti, AB perpendicolare a BN, $\widehat{BAP} < \frac{\pi}{2}$, si stabilisce anzitutto, per mezzo del postulato della continuità, l'esistenza di una trasversale AD, tale che risultino eguali i due angoli acuti $\widehat{ADB}$, $\widehat{DAP}$. Invero, supponendo AM parallela a BN in questo stesso verso, quando D si sposta da B verso N l'angolo $\widehat{ADB}$ decresce con continuità a partire da $\frac{\pi}{2}$, e può diventare piccolo a piacere; mentre $\widehat{DAP}$ decresce pure con continuità da $\widehat{BAP} < \frac{\pi}{2}$ a $\widehat{MAP} > 0$, perciò entro un intervallo compreso nel precedente. Vi è dunque *una* posizione di AD per la quale i due angoli $\widehat{ADB}$, $\widehat{DAP}$ risultano eguali. Il punto medio K del segmento AD così ottenuto sarà centro di simmetria della figura complessiva formata dalle rette AP, BN, AD; e la perpendicolare condotta da esso a una delle rette AP, BN sarà perpendicolare anche all'altra.

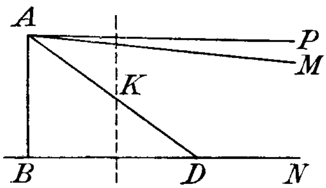


Fig. 19.

18. - **Distanze dei punti di una retta da un'altra retta.** — Date in un piano due rette AM, $A'M'$ (fig. 20), vogliamo indagare come variano le distanze dei successivi punti di una di esse dall'altra. Sia AA' perpendicolare a $A'M'$; e l'angolo $A'AM \geqq \frac{\pi}{2}$. Dai punti C, D, E,.... susseguentisi da A verso M si conducano a $A'M'$ le perpendicolari CC', DD', EE',.... In ciascuno dei quadrangoli birettangoli $AA'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$,.... la somma dei 4 angoli è $< 2\pi$; perciò i loro angoli $\widehat{C}$, $\widehat{D}$, $\widehat{E}$,.... dalla parte di M sono tutti *acuti*, e vanno diminuendo ($\widehat{C} > \widehat{D} > \widehat{E} > ....$); invece le ordinate CC', DD', EE',.... vanno crescendo. (P. es. nel quadrangolo $CC'D'D$ l'angolo in C, ottuso, è maggiore di quello in D, acuto,

onde $CC' < DD'$; cfr. n.° 5). In particolare, supposto $CD = DE$, CH e EK perpendicolari a DD', saranno eguali i triangoli rettangoli DHC, DKE, perciò $HD = DK$; inoltre (per la stessa proprietà del quadrangolo birettangolo) $CC' > HD'$, $EE' > KD'$; e sommando $CC' + EE' > HD' + KD' = 2 \cdot DD'$, ossia $EE' - DD' > DD' - CC'$. Pertanto:

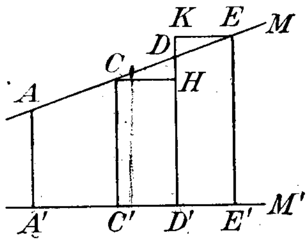


Fig. 20.

1°) Allontanandosi C da A nel verso AM, la sua ordinata CC' cresce indefinitamente;

2°) Variando C con continuità su AM, varia con continuità anche la sua ordinata; p. es. per un punto fra C e D a distanza $\frac{CD}{n}$ da C (n intero $\geqq 2$) l'ordinata differisce da CC' per meno di $\frac{DD' - CC'}{n}$; e meno ancora per un punto a distanza $\frac{CD}{n}$ da C verso A;

3°) Data una lunghezza arbitraria $l > AA'$, vi è sulla semiretta AM *un* punto a distanza l da $A'M'$. Indicato con P un punto qualunque di AM avente da $A'M'$ distanza $> l$, il punto dianzi richiesto costituirà infatti la separazione, entro il segmento AP, fra le due categorie dei punti aventi da $A'M'$ distanza $\leqq l$, e $> l$.

Da quanto sopra deduciamo:

Due rette che s'incontrano, a partire dalla loro intersezione comune si allontanano in ambo i sensi continuamente e indefinitamente.

Due rette non secanti, a partire dalla loro perpendicolare comune (che ne misura la minima distanza) *si allontanano in ambo i sensi continuamente e indefinitamente.*

Due rette parallele si allontanano anche continuamente e indefinitamente nel verso opposto a quello del parallelismo (verso di *divergenza*). Invece *nel verso del parallelismo la distanza di un punto di una di esse dall'altra va continuamente diminuendo, e tende a zero.* Che tenda a zero, segue da queste due osservazioni: 1°) *Due striscie di piano comprese fra coppie di parallele r, s; r', s' sono sempre sovrapponibili.* Infatti, presi ad arbitrio su r e r' due punti P, P' aventi da s, rispett. s' le distanze $PQ = a$, $P'Q' = a'$, e supposto p. es. $a > a'$, vi sarà su r' un punto P_1 avente da s' la distanza $P_1 Q_1 = a$; allora si otterrà il risultato voluto sovrapponendo i due segmenti eguali PQ e $P_1 Q_1$, nonchè i versi di parallelismo considerati sulle rette s e s' (tenendo presente che potrà all'uopo occorrere anche un ribaltamento del piano di una delle due figure); 2°) A una retta si può condurre una parallela per un punto avente da essa distanza piccola a piacere; pertanto, premessa l'osservazione precedente, sopra ogni retta esistono punti aventi da una sua parallela arbitraria distanze comunque piccole. Quindi: *Due rette parallele si comportano asintoticamente l'una rispetto all'altra nel verso del parallelismo.*

19. - Rapporto fra proiezione ortogonale di un segmento e segmento oggettivo. — Sia ABC (fig. 21) un triangolo rettangolo in C; e dal punto medio M dell'ipotenusa si conducano le perpendicolari ai cateti MH, MK. Sarà $A\widehat{M}H > M\widehat{B}K$, $B\widehat{M}K > M\widehat{A}H$; perciò, sovrapponendo i triangoli rettangoli AHM, MKB in modo che coincidano le ipotenuse AM, MB, fra loro eguali, e i vertici degli angoli retti stiano da una medesima parte di esse, il triangolo MKB assumerà rispetto al primo una posizione quale la $AK'M$ della fig. 22. Se ne trae $AH > AL > AK' = MK$. Inoltre nel quadrangolo $MKCH$ della fig. 21, trirettangolo e coll'angolo in M acuto, si ha (n.° 5) $MK > HC$; quindi anche $AH > HC$. E analogamente se sopra AMB si portassero più segmenti consecutivi eguali. *Se sopra un lato di un angolo acuto si portano, a partire dal vertice, più segmenti consecutivi eguali, le loro proiezioni ortogonali sull'altro lato vanno man mano diminuendo.* Inoltre $\frac{AH}{AM} > \frac{AC}{AB}$, perchè la seconda frazione ha il denominatore doppio della prima, e il numeratore inferiore al doppio; e più generalmente, prendendo su AB un segmento $= k \cdot AM$, dove k è intero o fratto (positivo) qualunque, il rapporto della proiezione ortogonale di questo segmento al segmento stesso diminuirà al crescere e crescerà al diminuire di k. E ciò, per ragioni di continuità, varrà altresì per k reale positivo qualunque. Vale a dire: *Dato un angolo acuto arbitrario, e un segmento qualsiasi sopra uno dei lati a partire dal vertice,*

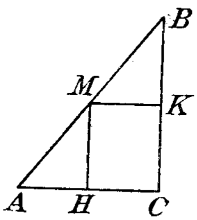


Fig. 21.

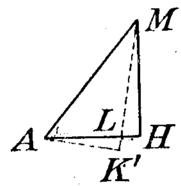


Fig. 22.

il rapporto fra la proiezione ortogonale di questo segmento sull'altro lato e il segmento oggettivo cresce (diminuisce) al diminuire (al crescere) del segmento stesso. Risulterà in seguito che, quando il segmento tende a zero, il rapporto tende al coseno di quell'angolo acuto (ossia dell'angolo acuto euclideo di egual misura circolare).

§ 2. - Geometria dello spazio. Elementi impropri e ideali.

20. - Rette parallele nello spazio. — *Se tre piani s'incontrano a 2 a 2 secondo 3 rette distinte, e due di queste sono parallele, anche la terza sarà parallela a queste, e nel medesimo verso.* Siano AM, BN le rette date, parallele nei versi indicati (fig. 23); e della terza retta considerata nell'enunciato sia CP la semiretta che giace rispetto ad AC dalla stessa banda di AM. Questa terza retta non potrà incontrare AM nè BN, se no l'intersezione sarebbe punto comune ai 3 piani dati, nonchè ad AM e BN.

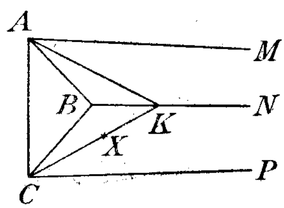


Fig. 23.

La CP sarà inoltre parallela p. es. a BN, se risulterà che quest'ultima è incontrata da ogni retta CX passante per C e contenuta nell'angolo BCP. Ora le rette CB, CP, CX sono proiettate dal punto A secondo piani, incontrati dal piano delle parallele AM, BN secondo le rette AB, AM e una terza contenuta nell'angolo BAM; e poichè quest'ultima deve incontrare BN in un punto K, anche CX passerà per K. In altri termini: *Se due piani distinti passanti rispett. per due rette parallele s'incontrano, la loro intersezione è parallela a queste in uno stesso suo verso.*

Corollari: 1°) *Due rette parallele in uno stesso verso a una terza, non contenuta nel loro piano, sono anche parallele.* Supposte (fig. 23) AM e BN parallele entrambe a CP, i piani $BN \cdot CP$ e AMB, distinti, dovranno incontrarsi secondo una retta passante per B e parallela a CP (in questo verso); dunque la BN.

2°) *Ogni piano contenente una retta parallela a una retta data r ne contiene anche infinite altre, parallele ad essa nello stesso verso*; per ogni punto del piano ne passa una e una sola.

Il piano e la retta si diranno allora *paralleli*, e non hanno nessun punto comune, a meno che r non stia nel piano stesso.

3°) *Tre rette, mutue intersezioni di 3 piani a due a due, o passano tutte per uno stesso punto, o sono tutte parallele in un medesimo verso, oppure sono* (per esclusione) a due a due non secanti, e *tutte e tre perpendicolari a un medesimo piano.* Invero, in quest'ultima ipotesi, due di esse ammettono nel loro piano σ una perpendicolare comune; e il piano passante per quest'ultima retta e perpendicolare a σ è perpendicolare anche ai tre piani dati e alla terza retta.

21. - Mutuo comportamento di due piani, e di un piano e una retta. — La reciproca posizione di due piani α, β dà luogo a tre casi diversi. Per un punto generico P passa *un* piano σ perpendicolare ai due piani dati: il piano delle due rette uscenti da P e perpendicolari rispett. a α, β. Esso incontrerà α, β secondo rette a, b, le quali possono essere incidenti, non secanti, o parallele. Nel primo caso α, β hanno a comune la retta passante per il punto ab e perpendicolare a σ; variando P, varia σ, mantenendosi perpendicolare alla retta $\alpha\beta$. Nel secondo caso a, b hanno una perpendicolare comune, che è pure perpendicolare ai due piani α, β; per essa passano tutti i piani σ di cui sopra, i quali tutti incontrano α, β secondo rette non secanti, colla stessa comune perpendicolare; i piani α, β si dicono allora *non secanti.* Infine, se a, b sono parallele, ogni altro piano σ incontrerà α, β secondo rette a', b' parallele alle precedenti [1] e fra loro. I piani α, β non si incontrano, ma contengono allora due sistemi di rette tutte mutuamente parallele, e si avvicinano indefinitamente nel (solo) verso comune di parallelismo di queste rette; essi si diranno anche *paralleli* (e tali sono pure in questo caso, a 2 a 2, i vari piani σ). Pertanto:

---

[1] Indicando con σ' il piano $a'b'$, saranno σ, σ' perpendicolari entrambi a α e β. Se a, a' avessero un punto comune, la perpendicolare ad α in questo punto starebbe in ambo i piani σ, σ', e sarebbe perpendicolare anche a β; se fossero non secanti, la loro perpendicolare comune sarebbe tale anche per σ, σ' e starebbe anche in β. Sempre si ricadrebbe dunque in una delle ipotesi precedenti.

Piani non secanti hanno una perpendicolare comune, che ne misura la minima distanza. Piani paralleli sono piani che non s'incontrano, nè hanno una perpendicolare comune; da ogni loro comune piano perpendicolare essi sono incontrati secondo rette parallele.

Dati una retta r e un piano π, si consideri la retta r' proiezione ortogonale di r su π. Se r e r' hanno un punto comune, questo apparterrà pure a π; se sono parallele, sono tali anche r e π; se sono non secanti, la loro perpendicolare comune p è pure perpendicolare a π, e anche r e π si diranno *non secanti*; per p passa inoltre un piano perpendicolare in pari tempo a r e π.

Sia ora π un piano arbitrario; A un punto non contenuto in π (fig. 24), AP perpendicolare a π; PP' una retta del fascio $P(\pi)$; AA' la parallela condotta per A alla PP' nel verso PP', parallela quindi a π. Variando la PP' nel fascio $P(\pi)$, nonchè il verso PP' su di essa, si hanno tutte le rette passanti per A e parallele al piano π; esse formano un cono rotondo, di semiapertura $\Pi(AP)$. Le rette passanti per A e interne a questo cono (contenute cioè nell'angolo PAA' o negli angoli analoghi entro gli altri semipiani del fascio AP) incontrano tutte il piano π; quelle esterne non l'incontrano, e sono non secanti rispetto a π. — I piani passanti per A incontrano π secondo una retta, oppure sono rispetto a π paralleli, o infine non secanti, secondo che rispetto al detto cono sono secanti, tangenti o esterni; nel primo caso contengono due generatrici del cono A anzidetto, e ciascuno di essi incontra π secondo una retta parallela, nei suoi opposti versi, a queste due generatrici (n.° 16). Per una retta non contenuta in π passano due piani paralleli a π, uno, o nessuno, secondo che questa retta è, rispetto a π, non secante, parallela, o secante. In particolare: *Per una retta parallela a un piano dato passa uno e un solo piano parallelo a questo* (ed è l'unico piano passante per questa retta che non incontra il primo).

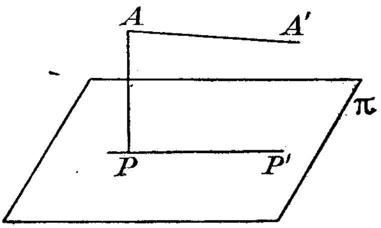


Fig. 24.

22. - **Elementi impropri e ideali.** — Chiameremo *stella propria* (o di 1ª specie) la totalità delle rette e dei piani passanti per un punto assegnato; *stella impropria* (o di 2ª specie) la totalità delle rette e piani paralleli a una retta fissa in un verso assegnato di essa; *stella ideale* (o di 3ª specie) la totalità delle rette e piani perpendicolari a un piano fisso. *Tre piani incontrantisi a due a due secondo rette distinte* (n.º 20) *individuano sempre una stella di uno dei tre tipi, della quale essi e le rette loro mutue intersezioni sono elementi.*

Chiameremo *fascio proprio, fascio improprio, fascio ideale* l'insieme delle rette di una stella rispett. dei tre tipi anzidetti, che sono contenute in uno stesso piano di questa stella. Un fascio ideale di rette è perciò anche l'insieme delle rette di un piano che sono perpendicolari a una retta fissa di questo piano. Questi tre tipi di fasci di rette sono fra loro equivalenti dal punto di vista proiettivo, in quanto un fascio qualsiasi può proiettarsi su un altro piano secondo un fascio di ciascuno degli altri due tipi. P. es. le rette di un fascio improprio sono proiettate da un punto P non appartenente al piano del fascio secondo piani passanti per la retta p, parallela comune condotta per P alle rette di quel fascio; e questi piani sono segati da un nuovo piano π (in quanto ne siano effettivamente incontrati) secondo rette anche di un fascio proprio, improprio, o ideale, secondo che π e p si incontrano, oppure sono paralleli o non secanti.

In geometria euclidea i punti di un piano o dello spazio (in senso elementare, cioè limitatamente ai punti proprî) formano un insieme continuo illimitato, che si può rendere limitato (o « chiuso ») coll'introduzione convenzionale dei punti impropri. E nel piano o nello spazio, completato con una retta o rispett. con un piano di punti impropri, vale la geometria proiettiva. — Analogamente nella geometria iperbolica, con opportune (ma differenti) convenzioni. La totalità delle stelle dei tre tipi è un insieme continuo limitato. Sostituendo alle stelle proprie i punti loro rispettivi centri (punti propri), ed alle stelle improprie e ideali rispett. il verso comune e il piano perpendicolare comune a tutte le rette ed a tutti i piani della stella, possiamo, per convenzione, chiamare quel verso *punto improprio* (o *all'infinito*), e questo piano, perpendicolare a tutti gli elementi della stella, *punto ideale*; l'uno e l'altro anche *centro* della stella; e sostituire all'insieme delle stelle l'insieme dei *punti*, propri, impropri o ideali, loro centri, nel senso più esteso dato ora a queste parole. In particolare un punto ideale è, per così dire, *rappresentato* da un piano perpendicolare a tutte le rette e a tutti i piani della stella che ha quel punto come centro.

Chiameremo ancora: *Piano ideale* l'insieme dei punti ideali rappresentati (nel senso stabilito) dai piani di una stella propria; *piano improprio* l'insieme dei punti ideali rappresentati dai piani di una stella impropria, nonchè del punto improprio centro di questa medesima stella; *retta ideale* l'insieme dei punti ideali rappresentati dai piani di un fascio (proprio); *retta impropria* l'insieme dei punti ideali rappresentati da tutti i piani paralleli a un piano fisso secondo un verso assegnato, nonchè di questo stesso verso (o punto improprio).

Per i punti, rette, e piani propri (cioè in senso elementare) e per gli ulteriori elementi dianzi definiti si possono completare le nozioni di mutua appartenenza in modo che per l'insieme dei punti, rette, piani, indifferentemente propri, impropri, o ideali, valgano tutti i consueti postulati di appartenenza. Chiameremo ad es. *fascio di piani improprio* o rispett. *ideale* l'insieme dei piani di qualunque tipo passanti per una retta rispett. impropria o ideale. Si possono inoltre definire gli ordini naturali sulla retta e in tutte le forme di prima specie (valendosi, per gli elementi impropri ed ideali, degli ordini naturali degli elementi propri che li rappresentano), in modo che risultino verificati i postulati consueti della geometria proiettiva relativi a questi ordini, cioè, sostanzialmente, i postulati lineari di Hilbert (gruppo II) modificati in relazione al fatto che la retta è ora forma chiusa. P. es. una retta propria contiene due punti impropri, rappresentati rispett. dai due versi di parallelismo su di essa, e infiniti punti ideali, rappresentati dai piani propri ad essa perpendicolari; i due punti impropri M_∞, N_∞ la spezzano in due segmenti complementari, uno di punti propri, l'altro di punti ideali, susseguendosi questi ultimi da M_∞ a N_∞ nell'ordine di un piano variabile perpendicolare alla retta stessa in un punto proprio che proceda anche da M_∞ a N_∞. Infine *nello spazio iperbolico così completato* vale altresì il postulato della continuità sotto la forma di Dedekind, e *vale quindi tutta la geometria proiettiva*. Possiamo quindi affermare con F. KLEIN [1] che *la geometria proiettiva è indipendente dal postulato delle parallele*; però nel caso attuale lo spazio degli elementi propri va completato con un diverso (e meno semplice) insieme di convenzioni.

Dal punto di vista della geometria proiettiva, l'insieme dei punti impropri contenuti in un piano iperbolico proprio è una conica. Invero [2] siano (fig. 25) M_∞ e N_∞ due qualunque, distinti, di questi punti impropri; r la retta da essi individuata; p, p' due rette appartenenti rispett. ai fasci M_∞, N_∞ e fra loro parallele nei versi residui. Le rette simmetriche di p, p' rispetto a una stessa (qualsiasi) perpendicolare alla r saranno rette q', q passanti rispett. per N_∞, M_∞ e anch'esse parallele nei versi residui. Tutte queste coppie q, q' si corrispondono in una proiettività tra i fasci M_∞, N_∞, definita dall'avere p, p' come raggi omologhi, e il punto ideale comune alle rette perpendicolari a r come centro di proiettività; e la conica generata da questa proiettività è appunto il luogo dei punti impropri del piano. Per la costruzione completa di questa conica (e più particolarmente dei punti impropri che, rispett. a r, si trovano dalla parte opposta di pp', qq') occorre tener conto anche delle rette ideali del piano proiettivo passanti per il detto centro di proiettività dei fasci M_∞ e N_∞: non si può allora parlare di simmetria in senso elementare rispetto a queste rette, ma i punti analoghi a pq', $p'q$, ora entrambi ideali, sono egualmente allineati su

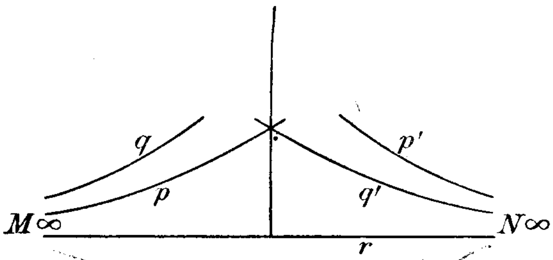


Fig. 25.

([1]) Nachr. der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, 30 agosto 1871; Mathem. Ann., vol. 4 (1871), 6 (1873); lavori tutti ristampati nelle « Ges. mathem. Abhandl. » di F. Klein, vol. I (1921).

([2]) V. il mio articolo: *Les cycles de la géométrie non euclidienne au point de vue projectif*, nella pubblicazione: *In memoriam N. J. Lobačewski* (Pubblicazione dell'Accademia delle Scienze di Kazan pel centenario della prima comunicazione di Lobačewski sulla geometria non euclidea; Kazan, 1926); vol. II, p. 17.

quel centro. La conica luogo di questi punti impropri si suole chiamare « conica assoluto » o brevemente « assoluto » del piano; i punti propri ed ideali del piano sono, dal punto di vista proiettivo, i punti interni e rispett. esterni alla conica assoluto; le rette proprie, improprie, ideali del piano sono rispett. secanti, tangenti, esterne all'assoluto. Il punto ideale centro del fascio formato dalle rette del piano perpendicolari a una retta propria fissa è il polo di quest'ultima retta rispetto all'assoluto; perciò rette perpendicolari sono altresì rette coniugate rispetto all'assoluto, e viceversa (cfr. n.° seg.).

Nello spazio, la totalità dei punti impropri costituisce, dal punto di vista proiettivo, una quadrica non rigata, detta quadrica assoluto. Invero nello spazio proiettivo di tutti i punti propri, impropri ed ideali, scelti comunque 3 piani propri incontrantisi a due a due secondo rette proprie distinte, per le 3 coniche assoluto di questi piani passa *una* quadrica, della quale si riconosce facilmente che coincide col luogo di tutti i punti impropri dello spazio (perchè si possono costruire infinite coniche loro comuni sezioni piane, in modo da assicurarsi che ogni punto di ciascuno dei due luoghi appartenga pure all'altro). I punti propri (ideali) sono i punti interni (esterni) alla quadrica assoluto, e questa distinzione mostra che si tratta di quadrica non rigata; i piani propri ne sono i piani secanti, e l'incontrano secondo la loro conica assoluto; i piani impropri ed ideali sono rispett. tangenti ed esterni alla quadrica assoluto. Ogni retta o piano proprio ha come elemento polare rispetto alla quadrica assoluto la retta o rispett. il punto ideale comune a tutti i piani perpendicolari al primo elemento (e la polarità in cui si corrispondono queste coppie di elementi può anzi servire a definire la quadrica assoluto).

I *movimenti* di un piano sopra sè stesso, come trasformazioni biunivoche che mutano punti in punti e rette in rette, e più particolarmente punti e rette propri, impropri, ideali in elementi dello stesso tipo, sono *omografie piane che mutano in sè la conica assoluto,* e (potendosi ricavare dall'identità con variazione continua) *subordinano sulla detta conica una proiettività concorde.* La proposizione è pure invertibile. Le omografie che mutano in sè la conica assoluto e vi subordinano proiettività discordi sono invece prodotti di movimenti per simmetrie rispetto a rette (incluse queste stesse simmetrie). Analogamente nello spazio rispetto alla quadrica assoluto, come verrà meglio precisato nel Cap. V, §§ 2, 3.

23. - Un teorema sui triangoli. — *Le perpendicolari ai lati di un triangolo* (a vertici tutti propri) *nei loro punti di mezzo e nel piano stesso del triangolo passano tutte per uno stesso punto,* proprio, improprio o ideale. (Si possono costruire facilmente esempi di tutti e tre i casi).

Sia ABC il triangolo; a, b, c le perpendicolari ai lati BC, CA, AB nei punti medi A_0, B_0, C_0. Se due di queste, p. es. b e c, hanno a comune un punto proprio, questo punto sarà equidistante da A e C, da A e B, quindi anche da B e C, e starà pure su a. Se b e c sono non secanti, avranno una perpendicolare comune p, rispetto alla quale A e C staranno da una stessa banda e a uguale distanza, A e B pure, quindi anche B e C; dal che si trae che anche a sarà perpendicolare a p, cioè apparterrà al fascio ideale bc. Infine, se due delle tre rette a, b, c sono parallele, anche la terza sarà parallela a queste (se no si ricadrebbe in uno dei due casi precedenti); occorre però ancora assicurarsi che questa terza retta sia parallela alle prime due *nel loro comune verso di parallelismo*, anzichè nei versi rispett. opposti (vale a dire che *non* sia abc un trilatero inscritto nella conica impropria del piano). Basterà a tal uopo mostrare che rispetto a una almeno delle tre rette a, b, c le altre due devono stare da bande opposte (il che non avviene per un triangolo inscritto nella conica impropria). Il teorema è ovvio nel caso del triangolo isoscele, le perpendicolari ai due lati eguali essendo simmetriche rispetto alla perpendicolare alla base. Siano perciò i tre angoli A, B, C tutti differenti, p. es. $A > B > C$ (fig. 26). La retta a, essendo $C < B$, avrà la sua seconda intersezione col perimetro del triangolo in un punto P del lato AC (anzichè su AB); e sarà $CP > CA_0 = \frac{CB}{2} > \frac{CA}{2} = CB_0$. Perciò rispetto alla a stanno da bande opposte B_0 e A, mentre dalla banda stessa di A sta anche B, quindi C_0; stanno dunque da bande opposte b e c, c. v. d.

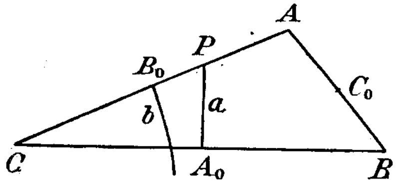


Fig. 26.

24. - Geometria della stella impropria. — *Nella stella impropria dello spazio iperbolico* (come in geometria euclidea) valgono le proprietà seguenti:

Due rette distinte della stella individuano un piano che le contiene.

Due piani della stella o s'incontrano secondo una retta di questa stella, oppure sono paralleli (n.° 20-21).

Dati nella stella un piano e un raggio che non si appartengono (perciò paralleli), *per questo raggio passa uno e un solo piano parallelo al primo* (n.° 21; per le rette e piani della stella impropria non euclidea vale dunque una proprietà analoga al post. 5° di Euclide).

Rispetto a una retta p della stella, ogni altra retta e piano di questa stella ha una retta o piano simmetrico, e questa simmetria è una *congruenza* nella stella; elementi simmetrici rispetto a p possono sovrapporsi con una rotazione di 180° intorno a p.

Due piani α, β della stella segati da un terzo γ (anche della stella) *in modo che risultino eguali i diedri alterni interni $\alpha'\gamma$, $\beta''\gamma$* (essendo α', β' semipiani di α, β da una stessa parte di γ; α'', β'' dall'altra parte; fig. 27) *sono paralleli* (cioè non s'incontrano). Infatti la rotazione della stella di 180° intorno alla retta mediana della striscia compresa fra le parallele $a = \alpha\gamma$, $b = \beta\gamma$ scambia a e b, nonchè i semipiani α' e β'', α'' e β'; perciò l'eventuale intersezione (unica) $\alpha\beta$, che sarebbe pur essa raggio della stella considerata, se stesse p. es. in α' (e β'), dovrebbe stare anche in β'' (e α''), il che non è possibile. Viceversa, *se due piani α, β sono paralleli, un terzo piano γ della medesima stella impropria che li incontri* (e li incontrerà secondo rette a, b parallele) *formerà con essi angoli diedri alterni interni eguali*; infatti per b ad es. passa un unico piano tale che esso e α formino con γ diedri alterni interni eguali; e quest'uno è appunto il piano β parallelo ad α (*unico* piano passante per b e che non incontra α).

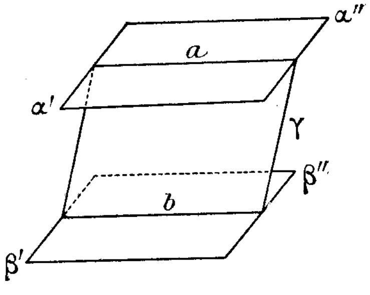


Fig. 27.

E ancora: *Se tre piani si incontrano a due a due secondo rette* *parallele, la somma dei tre diedri interni che ne risultano è eguale a due retti* (basta condurre per lo spigolo di uno dei tre diedri il piano parallelo alla faccia opposta....).

Pertanto: *La geometria della stella impropria dello spazio iperbolico coincide con quella della stella impropria euclidea, e quindi anche colla geometria piana euclidea, sostituendo in quest'ultima alle parole punto, retta, angolo, segmento di retta rispett. retta, piano* (della stella), *angolo diedro, striscia compresa fra due parallele* [1]. Vi è però una differenza fra il piano euclideo e la stella impropria euclidea da una parte, e la stella impropria dello spazio iperbolico: nello spazio iperbolico le striscie di piano comprese fra coppie di rette parallele sono tutte sovrapponibili (n.° 18), mentre così non avviene nello spazio euclideo, nè sono sovrapponibili, nel piano euclideo, due coppie di punti qualsiansi. In relazione a questo, le ∞^4 similitudini del piano o della stella impropria euclidea, nelle quali sono comprese ∞^3 congruenze, sono sostituite nella stella impropria dello spazio iperbolico da un egual numero ∞^4 di trasformazioni, che sono *tutte congruenze.* In questa stella ad es. *due prismi triangolari aventi i diedri rispett. eguali e di egual senso sono sempre sovrapponibili.*

La geometria della stella impropria di rette dello spazio iperbolico riesce più intuitiva riportandola sulla superficie traiettoria ortogonale delle rette di questa stella (sulla quale però le ∞^4 similitudini del piano euclideo ricompaiono come tali). Facendo questo, è utile includere nelle considerazioni relative anche le stelle proprie e ideali.

§ 3. - Ipersfere, orisfere, cicli.

25. - Ipersfere, orisfere, cicli. — Consideriamo una stella Σ, propria, impropria o ideale; un punto proprio P, distinto dal centro della stella, e il luogo dei punti Q simmetrici di P rispetto alle ∞^2 rette proprie, o anche (ed è lo stesso) rispetto agli ∞^2 piani propri

[1] Anche la geometria della stella propria euclidea rimane valida nello spazio iperbolico; in particolare rimane valida la trigonometria sferica. Questo fatto è spiegato — se pur ciò non ne costituisce quella dimostrazione completa che si avrà in seguito (n.° 29) dal ritrovarne, nelle attuali ipotesi, le for-

della stella. Variando con continuità questa retta o piano della stella, varia con continuità anche il punto Q, e il luogo da esso descritto risponde ai caratteri intuitivi di una *superficie* **F**: superficie passante per P, e ivi tangente al piano perpendicolare al raggio p della stella passante per P stesso ([1]). Rileviamo subito che, se nella costruzione si sostituisce al punto iniziale P un altro punto qualunque del luogo **F**, senza mutare la stella Σ, si ritrova lo stesso luogo iniziale (del quale pertanto P è punto affatto generico); e più particolarmente se P e Q, P e R sono simmetrici rispetto a certi piani γ, β (perpendicolari ai segmenti PQ, PR nei loro punti di mezzo), il piano α perpendicolare a QR nel suo punto di mezzo appartiene al fascio (proprio, improprio, ideale) $\beta\gamma$, e quindi a ogni stella che contenga i due piani β, γ. Invero, se i tre punti P, Q, R sono allineati, i piani α, β, γ appartengono a un fascio ideale (n.° 22); se non sono allineati, i detti piani sono tutti tre perpendicolari al piano PQR, hanno dunque a comune il centro (ideale) della stella degli elementi perpendicolari al piano PQR, e in più il punto di concorso (proprio, improprio, ideale; cfr. n.° 23) delle tre rette secondo cui essi segano il piano PQR.

La superficie **F** si può dunque costruire colla legge di simmetria indicata a partire da un suo punto P qualsiasi. I piani di Σ sono piani di simmetria ortogonale di **F**, e si dicono *piani meridiani*; le rette della stella Σ sono assi di simmetria di **F** (cioè **F** è sovrapposta a sè stessa da qualsiasi rotazione intorno a una di esse), e si dicono *assi* della superficie. Per ogni punto di **F** passa un asse, e il piano ivi tangente a **F** è perpendicolare a quest'asse; perciò **F** taglia ad angolo retto tutti gli assi e tutti i piani meridiani (questi ultimi lungo l'intera linea intersezione).

Conservando fissa la stella Σ e variando comunque nello spazio il punto P, si hanno infinite superficie **F**, cogli stessi assi e piani

---

mole — dall'osservazione che, per costruire la geometria della stella propria, basta tener conto dei raggi e piani della stella entro una regione di spazio contenente il centro della stella, ma piccola a piacere; e che, per questa regione limitata di spazio, i postulati euclidei non differiscono da quelli della geometria iperbolica.

([1]) Invero, quando Q tende a P con legge qualsiasi, la retta di Σ rispetto a cui P e Q sono simmetrici tende a coincidere con p, e la retta PQ tende a diventare perpendicolare alla p in P.

meridiani, due qualunque delle quali intercettano sugli ∞^2 assi segmenti di lunghezza costante (perchè sovrapponibili con una conveniente rotazione). Queste ∞^1 F si dicono perciò superficie *parallele.*

Una F è incontrata da ogni piano meridiano secondo una linea L, che ha come assi di simmetria tutti gli assi di F contenuti nel detto piano; assi che costituiscono un fascio, proprio, improprio, o ideale. La L taglia ad angolo retto questi assi, ossia ha per tangente in ogni suo punto la perpendicolare (nel suo stesso piano) all'asse passante per questo punto; ed è anche luogo dei simmetrici di un suo punto qualunque rispetto agli ∞^1 assi. Ruotando intorno a uno qualunque di questi assi, la L genera di nuovo la F. Le ∞^1 F parallele sono segate da un piano meridiano secondo L anche *parallele.*

Ogni corda di una F o di una L forma angoli eguali coi due assi passanti per i suoi estremi (1).

Se la stella Σ è propria, e se ne indica con O il centro, ogni superficie F si compone di punti equidistanti da O, ed è perciò una sfera di centro O, nel solito senso euclideo. E le linee L sono i cerchi massimi di queste sfere.

Se la stella Σ è ideale, cioè costituita da elementi perpendicolari a un piano fisso σ, questo stesso piano è una (particolare) fra le superficie F; le altre sono luoghi di punti che da σ (piano base) hanno una distanza assegnata in grandezza e senso. Ogni F è allora una delle due falde di una *superficie di egual distanza* dal piano σ; la superficie di egual distanza completa (luogo dei punti aventi dal piano σ una distanza assegnata, senza tener conto del senso di questa) comprende anche una seconda falda, simmetrica della precedente rispetto a σ, e che è pure una delle stesse F (2). Questa

---

(1) Si potrebbe quindi costruire una F partendo da una stella di rette e da un punto P distinto dal centro di questa, e costruendo su ogni retta della stella non passante per P il punto P' tale che PP' formi angoli eguali colle due rette della stella passanti per questi punti. Così appunto l'*orisfera* è definita da Lobačewski.

(2) Le simmetrie rispetto ai piani propri della stella Σ, le quali mutano in sè ciascuna delle F considerate, sono, nello spazio proiettivo, omologie armoniche, aventi quegli stessi piani come piani di omologia, e come centri i poli (ideali) di questi piani rispetto all'assoluto. Analogamente i punti di

superficie (completa), per analogia col caso precedente, si chiama *ipersfera*. Le L sono allora (rami di) *linee di egual distanza* da una retta (come tali già considerate da Saccheri, n.° 5), e le chiameremo *ipercicli* (nome già usato da Gauss).

Se infine la stella Σ è impropria, la superficie F può considerarsi come limite di una sfera di cui si è tenuto fisso un punto, mentre il centro si è allontanato indefinitamente sopra il diametro passante per questo punto; perciò essa si chiama, con Lobačewski, *sfera-limite*, o brevemente *orisfera*. Le linee L sono allora (in senso analogo) cerchi-limiti, e si chiamano *oricicli*. (Da Gauss e G. Bolyai fu proposto anche il nome di *paracicli*, perchè stanno fra cerchio e linea di egual distanza, come la parabola fra ellisse e iperbole).

In geometria euclidea, le orisfere e le singole falde di ipersfera sono piani; gli oricicli e rami di iperciclo sono rette. Nel nostro caso, come risulterà in seguito, le linee L e le superficie F sono tutte, nello spazio proiettivo, luoghi di 2° grado, cioè rispett. coniche e quadriche. In particolare l'iperciclo completo (come si può riconoscere elementarmente) è una conica bitangente alla conica assoluto del piano nelle sue intersezioni colla retta base [1]; l'ipersfera è tangente alla quadrica assoluto lungo la conica assoluto del piano base; l'oriciclo ha contatto quadripunto colla conica assoluto del suo piano nel punto improprio comune ai suoi ∞^1 assi.

Per tre punti A, B, C non allineati passa sempre o un cerchio, o un oriciclo, o un ramo di iperciclo [2]. *Per 4 punti non contenuti in un piano passa sempre una sfera, o una orisfera, o una falda di ipersfera* (indicati quei punti con A, B, C, D, la stella degli assi è determinata dai tre piani perpendicolari ai segmenti AB, AC, AD, nei loro punti medi).

Data una superficie F (sfera, ipersfera non piana, orisfera) *e un piano π non appartenente alla stella Σ dei suoi assi* (cioè

---

una delle due falde di una superficie di egual distanza completa si mutano nei punti dell'altra falda mediante omologie armoniche aventi piani di omologia ideali appartenenti alla medesima stella Σ, e come centri i poli (propri) di questi piani rispetto all'assoluto.

[1] V. il mio articolo già citato nella nota [2] a p. 44.

[2] Per essi passano inoltre tre ipercicli completi, sui quali A, B, C non stanno in uno stesso ramo: questi ipercicli hanno per rette basi le rette che congiungono a 2 a 2 i punti medi dei lati del triangolo ABC.

un piano non meridiano), *questo piano o non incontra affatto la* F, *o è tangente ad essa in un punto, oppure l'incontra secondo un cerchio.* Invero π sarà perpendicolare a *un* asse della F (quello che contiene il punto ideale rappresentato da π); e poichè F è superficie di rotazione rispetto a quest'asse, così π, se contiene un punto di F, incontra F secondo un cerchio col centro su quest'asse (e non ulteriormente).

Cerchi, ipercicli, oricicli vengono compresi sotto la denominazione comune di *cicli*. I punti del piano non appartenenti al ciclo si dicono *interni* od *esterni* al ciclo, secondo che per essi non passano o passano tangenti del ciclo. In un piano gli oricicli separano, in certo modo, i cerchi dagli ipercicli. Consideriamo infatti i cicli dei vari tipi tangenti in A alla retta a (fig. 28), e giacenti in prossimità di A da una determinata banda di a. Sia AB l'oriciclo; e perciò, supposte AM, BN parallele, $M\widehat{A}B=A\widehat{B}N$; inoltre B abbastanza prossimo ad A perchè la BN incontri a in un punto C. Per ogni punto P del segmento CB (esterno all'oriciclo) sarà $A\widehat{P}N<A\widehat{B}N=B\widehat{A}M<P\widehat{A}M$. Perciò quel ciclo del sistema considerato che passa per P avrà come asse passante per P una non secante di AM; esso è dunque un iperciclo. Sarebbe invece un cerchio (invertendosi le precedenti diseguaglianze) se P stesse sulla semiretta BN (fosse cioè interno all'oriciclo).

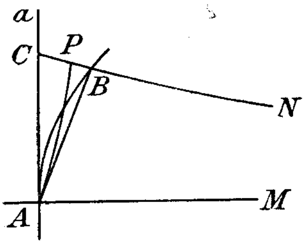


Fig. 28.

In un piano, per due punti dati A, B passano due oricicli, simmetrici rispetto alla retta AB e aventi entrambi come asse la perpendicolare al segmento AB nel suo punto medio; gli altri assi sono paralleli a questo, rispett. nei due versi opposti. Analogamente, *per un cerchio qualunque passano due orisfere*, aventi entrambe per asse la perpendicolare al piano di quel cerchio nel suo centro, rispett. nei suoi due opposti versi: tali orisfere sono simmetriche rispetto al piano di quel cerchio.

Tutte le orisfere sono congruenti. Due qualunque di esse si possano sovrapporre in ∞^3 *modi diversi*, portando a coincidere due loro punti arbitrari, gli assi passanti per questi punti nonchè i loro versi interni all'orisfera, e infine due semipiani arbitrari passanti per questi assi. *Due oricicli sono pure congruenti, in* ∞^1 *modi diversi.* In particolare ogni orisfera od oriciclo può sovrapporsi a sè stesso col grado di libertà indicato; e può anche scorrere sopra sè stesso con moto continuo, l'orisfera con tre gradi di libertà. Analogamente ogni ipersfera può sovrapporsi a sè stessa in ∞^3 modi, e ogni iperciclo in ∞^1 modi; ma non può sovrapporsi a un'altra ipersfera o iperciclo generico (avente distanza diversa dal piano o retta base).

Abbiamo già detto alla fine del n.° 22 che i movimenti di un piano sopra sè stesso sono omografie che mutano in sè la conica assoluto. I movimenti di un gruppo continuo ∞^1 determinano sulla conica assoluto un gruppo anche ∞^1 di proiettività (concordi); e secondo che queste ultime proiettività sono ellittiche, iperboliche o paraboliche, le traiettorie del gruppo ∞^1 sono cicli dell'uno o dell'altro tipo, ciascuno dei quali scorre sopra sè stesso. Nel primo caso vi è *un* punto unito interno all'assoluto, cioè proprio, e si tratta perciò di rotazioni intorno a questo punto; le traiettorie sono dunque cerchi concentrici. Nel secondo caso vi è una retta propria unita; si ha perciò uno scorrimento lungo questa retta, e le traiettorie sono rami di iperciclo con questa retta base; nel terzo caso le traiettorie sono oricicli paralleli.

26. - Sull'orisfera vale la geometria euclidea. — Per gli oricicli contenuti in una data orisfera valgono le proprietà seguenti: *Due punti individuano un oriciclo passante per essi* (intersezione dell'orisfera col piano degli assi passanti per quei punti). *Due oricicli hanno al più un punto a comune.* D'altra parte, sull'orisfera, due oricicli s'incontrano sempre e solo quando s'incontrano i loro piani, cioè se questi non sono paralleli; se i piani sono paralleli, si diranno *paralleli* anche i due oricicli. Chiameremo *angolo* di due oricicli di una stessa orisfera l'angolo delle loro tangenti nel punto comune; esso è il rettilineo del diedro formato dai piani degli oricicli stessi. Pertanto: *Sull'orisfera, per un punto dato passa uno e un solo oriciclo parallelo a un oriciclo dato. Due oricicli perpendicolari ad un terzo,* o anche *formanti con un terzo angoli alterni interni eguali, sono paralleli. Due oricicli incontrati da un terzo in modo da formare angoli interni da una stessa parte aventi somma* *minore di due retti si incontrano sempre da questa parte di esso.*

In un triangolo formato da tre oricicli di una stessa orisfera la somma dei tre angoli interni è eguale a due retti. Pertanto: *Sull'orisfera vale la geometria piana euclidea, quindi anche la trigonometria piana e l'ordinaria geometria analitica cartesiana,* purchè alla parola *retta* si sostituisca *oriciclo* (e ai *segmenti di retta* i *segmenti* o *archi di oriciclo* ([1])).

Riguardo alle funzioni goniometriche va però tenuto presente che le definizioni geometriche elementari di esse che si danno nelle ipotesi euclidee non sono applicabili, nel caso attuale, agli angoli rettilinei ([2]). Tuttavia, considerando l'orisfera come un piano e gli oricicli tracciati su di essa come rette, queste ultime definizioni potranno applicarsi agli *angoli formati da due oricicli contenuti in una stessa orisfera.* D'altra parte, dato un angolo rettilineo qualunque, vi sono due orisfere passanti per il suo vertice e ivi tangenti al piano di quell'angolo; e su ciascuna di queste (fra loro simmetriche rispetto al detto piano) sono individuati i due oricicli tangenti ai lati dell'angolo proposto. *Si possono quindi definire come funzioni goniometriche di quell'angolo rettilineo le funzioni omonime,* completamente determinate, *di quest'angolo oriciclico.* Per queste funzioni valgono tutte le proprietà e formole elementari, inclusi gli sviluppi in serie. Ciò equivale, d'altra parte, a misurare gli angoli rettilinei rispetto a quell'unità, ben definita, per la quale risulta eguale a $\frac{\pi}{2}$ la misura dell'angolo retto, e definire p. es. seno e coseno mediante i consueti sviluppi in serie.

Ricordiamo ancora (n.° prec.) che ogni cerchio è contenuto in

---

([1]) Poichè due oricicli qualunque possono sovrapporsi in modo da far coincidere due loro punti arbitrari, la misura degli archi di oriciclo può definirsi come pei segmenti di retta riferendosi a un arco arbitrario assunto come unità, pur senza possibilità, per il momento, di confrontare segmenti di retta con archi di oriciclo. Sull'orisfera si può anche considerare la simmetria rispetto a un oriciclo, che è simmetria nello spazio rispetto al piano di questo oriciclo; non si può tuttavia realizzarla, come sul piano euclideo, mediante una rotazione o ribaltamento dell'orisfera attorno a quell'oriciclo.

([2]) P. es. gli archi di cerchio aventi il centro nel vertice di un dato angolo rettilineo e compresi fra i lati *non* sono ora proporzionali ai rispettivi raggi rettilinei.

due orisfere, simmetriche rispetto al suo piano. Indicato con C il centro di questo cerchio, con O l'intersezione di una qualunque di queste orisfere coll'asse passante per C, il detto cerchio sarà anche luogo dei punti dell'orisfera che con O determinano archi oriciclici congruenti. In altri termini, quel cerchio è anche « cerchio nella geometria dell'orisfera », o « cerchio oriciclico » (in due modi diversi, simmetrici rispetto al suo piano); e gode in questa geometria delle proprietà del cerchio euclideo, essendo soltanto il raggio rettilineo sostituito dal « raggio oriciclico ». Viceversa, ogni cerchio oriciclico è anche cerchio nel senso ordinario.

27. - **Lunghezza di un arco di ciclo. Cicli paralleli.** — Dato un arco qualunque di ciclo AB, ogni spezzata in esso inscritta è convessa, e ha lunghezza compresa fra le lunghezze della corda AB e della spezzata ACB (fig. 29) formata dalla tangenti negli estremi. Chiameremo *lunghezza di un arco di ciclo* (cerchio, oriciclo, iperciclo) *il limite superiore*, certo esistente, *delle poligonali in esso inscritte.*

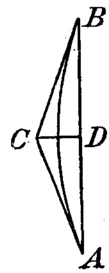


Fig. 29.

In ogni ciclo, il rapporto di un arco alla corda tende all'unità quando l'arco tende a zero. Si ha infatti (essendo D punto medio fra A e B):

$$2 \cdot AC = AC + CB > \text{arco}\, AB > AB = 2 \cdot AD;$$

quindi $\frac{AD}{AC} < 1$. Quando B, sul ciclo, tende ad A, nel triangolo rettangolo ADC tendono a zero sia i lati, sia l'angolo acuto in A; e ciascuna di queste variazioni, pensata isolatamente, implica un aumento del rapporto $\frac{AD}{AC}$: nel primo caso, restando costante l'angolo A, per il teorema del n.° 19; nel secondo caso, perchè supponendo rimanga costante il numeratore, diminuisce il denominatore e tende ad AD. In conclusione $\frac{AD}{AC}$ cresce sempre; e la seconda variazione, rendendo l'angolo A abbastanza piccolo, è già da sola sufficiente a rendere AD prossimo quanto si vuole ad AC, e perciò $\frac{AD}{AC}$ prossimo quanto si vuole all'unità.

Per avere la lunghezza di un arco di ciclo (o di ogni altra linea cui sia applicabile la definizione di lunghezza sopra indicata) si potrà perciò inscrivervi, anzichè una poligonale rettilinea, anche una poligonale di archi di ciclo (p. es. di oricicli), e considerare il limite superiore delle poligonali di questo secondo tipo: il risultato sarà lo stesso come operando con poligonali rettilinee. Considerando ad es. per una circonferenza le *poligonali oricicliche* in essa inscritte sopra una delle due orisfere che la contengono, se ne trae che *la lunghezza di una circonferenza è espressa da* $2\pi r$, *dove* r *è il raggio oriciclico*, a sensi del n.° prec.

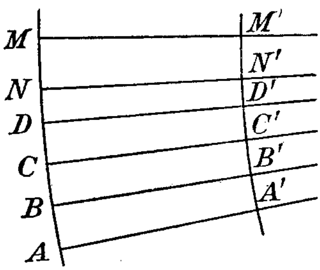


Fig. 30.

In due cicli paralleli (o coassiali) chiameremo *punti omologhi* punti appartenenti a un medesimo asse; *archi omologhi* (o corrispondenti) archi compresi fra una medesima coppia di assi. Ad archi di uno stesso ciclo fra loro eguali ($AB = BC = CD = ...$; fig. 30) corrispondono sopra un ciclo parallelo archi anche eguali ($A'B' = B'C' = C'D' = ...$). Se $AM = m \cdot AB$, $AN = n \cdot AB$ con m, n interi, sarà pure, per gli archi corrispondenti, $A'M' = m \cdot A'B'$, $A'N' = n \cdot A'B'$; quindi $\frac{AM}{AN} = \frac{A'M'}{A'N'} = \frac{m}{n}$. Se invece i rapporti $\frac{AM}{AN}$, $\frac{A'M'}{A'N'}$, non sono razionali, ogni qual volta sia $\frac{AM}{AN} \gtreqless \frac{m}{n}$, cioè $n \cdot AM \gtreqless m \cdot AN$, sarà pure $n \cdot A'M' \gtreqless m \cdot A'N'$, e perciò $\frac{A'M'}{A'N'} \gtreqless \frac{m}{n}$; in ogni caso dunque *archi omologhi di due cicli paralleli sono proporzionali.*

Riguardo al valore del rapporto costante fra archi omologhi di due cicli paralleli, vi è una differenza essenziale fra gli oricicli da un lato, e i cerchi ed ipercicli dall'altro. Due oricicli qualunque sono sempre sovrapponibili; e, quando si sovrappongono, anche gli oricicli paralleli ai primi e a eguale distanza da essi nel medesimo verso, p. es. nel verso del parallelismo degli assi, risulteranno sovrapposti. *Il rapporto costante* $\frac{AM}{A'M'}$ *degli archi omologhi di due oricicli paralleli non può dunque dipendere che dalla distanza costante* MM' *di queste linee, computata in grandezza e senso*; assunta p. es. positiva o negativa secondo che il verso MM' è quello del parallelismo degli assi, o quello opposto. Nel primo caso l'oriciclo cui appartiene l'arco AM (a numeratore) contiene l'altro nel proprio interno; e il detto rapporto è >1.

Invece due ipercicli paralleli a distanza costante d sono sovrapponibili ad un'altra coppia di ipercicli paralleli e di eguale distanza soltanto se essi hanno altresì le medesime distanze dalle rette basi, e se perciò si sovrappongono in pari tempo anche queste rette (e analogamente per cerchi concentrici, in relazione ai raggi e al centro comune). Però *il rapporto costante di un arco di iperciclo al segmento corrispondente di retta base dipende soltanto dalla distanza costante di queste due linee.*

28. - **Rapporto di archi omologhi di oricicli paralleli.** — Indichiamo con $f(x)$ il rapporto costante degli archi omologhi di due oricicli paralleli a distanza x; distanza misurata nel senso del parallelismo degli assi, in modo che per $x>0$ sia $f(x)>1$. (Questo rapporto non è conosciuto, ma è funzione, come si è detto, della sola x). Considerando più oricicli, tutti coassiali e dei quali due qualunque consecutivi abbiano distanza x, si avrà evidentemente per ogni intero positivo m:

$$f(mx)=[f(x)]^m \quad (^1).$$

Pensando invece la distanza x divisa in n parti uguali, sarà pure per valori interi di m, n (anche negativi, purchè $n \neq 0$):

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

Sia ora r irrazionale qualunque $\gtrless \frac{m}{n}$; essendo $f(x)$ manifestamente funzione crescente, sarà $f(rx) \gtrless f\left(\frac{m}{n}x\right)=[f(x)]^{\frac{m}{n}}$, ossia $f(rx)$ separa i valori di $[f(x)]^{\frac{m}{n}}$ per cui $\frac{m}{n}<r$ da quelli per cui $\frac{m}{n}>r$; onde, per la definizione stessa delle potenze irrazionali, $f(rx)=[f(x)]^r$. Infine, scambiando r e x e ponendo la nuova r eguale a 1, si ha $f(x)=[f(1)]^x$. Assumendo quindi come *unità lineare naturale*, fornita dalla geometria stessa, la distanza costante di due oricicli

---

(1) Più generalmente, per tre oricicli paralleli a mutue distanze x, y sarà $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$; ed è noto che la sola funzione continua o anche soltanto ovunque crescente, la quale soddisfa a questa equazione funzionale, è la funzione esponenziale $f(x)=a^x$. Ponendo $a=e^{\frac{1}{k}}$, si ha $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$, come risulta appunto sopra.

paralleli pei quali il rapporto di due archi omologhi sia eguale al numero e, base dei logaritmi naturali (ossia un'unità tale che risulti $f(1)=e$), si avrà $f(x)=e^x$. Si preferisce però riferirsi a un'unità lineare comunque scelta, e introdurre nelle formole, come *costante metrica assoluta*, il numero k che, rispetto a questa unità, misura la distanza di oricicli paralleli i cui archi omologhi abbiano rapporto e; numero che (come apparirà in seguito) ha funzione analoga a quella del raggio di una sfera per le misure lineari su questa sfera. Nelle dette ipotesi sarà pertanto $f(k)=e$, quindi $f(x)=e^{\frac{x}{k}}$.

Nella geometria euclidea, gli oricicli sono rette, e il rapporto suindicato deve risultare costantemente $=1$; il che richiede $k=\pm\infty$.

29. - Forma preliminare del teorema dei seni. Trigonometria sferica. — *In ogni triangolo rettilineo i seni degli angoli sono proporzionali alle circonferenze aventi come raggi i lati del triangolo rispett. opposti* (1). Sia ABC (fig. 31) un triangolo *rettangolo* in C. Per il vertice A conduciamo AA' perpendicolare al piano del triangolo, e per B e C le parallele ad essa BB', CC' in uno stesso verso. Consideriamo inoltre l'orisfera passante per B e avente queste parallele per assi, la quale incontrerà AA' e CC' in punti A_0 e C_0, determinanti con B un trilatero di oricicli. L'angolo $\widehat{BAC}$, rettilineo del diedro dei piani $AA' \cdot BB'$ ed $AA' \cdot CC'$, sarà eguale all'angolo oriciclico $B\widehat{A_0}C_0$; di più, essendo BC perpendicolare al piano $AA' \cdot CC'$, sarà retto il diedro formato da questo piano e da $BB' \cdot CC'$, e perciò l'angolo oriciclico BC_0A_0.

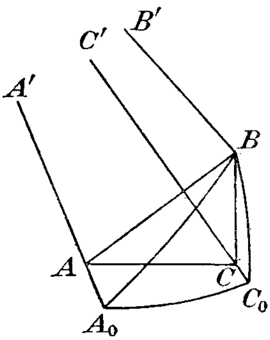


Fig. 31.

Avremo pertanto:

$$\widehat{BC_0} = \widehat{BA_0} \operatorname{sen} A ;$$

---

(1) Forma *preliminare* del teorema dei seni, dovuta a G. BOLYAI. Sotto questa forma, il teorema vale per ambo le geometrie, euclidea e non euclidea; è quindi teorema di *geometria assoluta*.

e moltiplicando per 2π, e indicando con $\bigcirc x$ la lunghezza della circonferenza di raggio (rettilineo) x:

$$\bigcirc BC = \bigcirc AB \cdot \operatorname{sen} A\,;$$

cioè il teorema dei seni pel triangolo rettangolo. Per un triangolo rettilineo qualunque, di cui a, b, c siano i lati e A, B, C gli angoli opposti, si ricava allora facilmente (considerando ABC come somma o differenza di due triangoli rettangoli):

$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C = \bigcirc a : \bigcirc b : \bigcirc c.$$

A queste circonferenze sostituiremo fra breve (n.° 33) dei seni iperbolici, ad esse proporzionali.

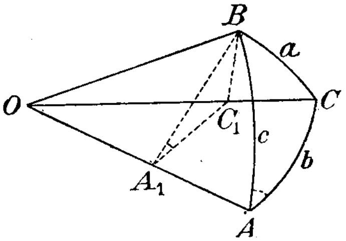


Fig. 32.

Si abbia ora un triangolo sferico ABC, rettangolo in C (fig. 32), sopra una sfera di centro O; a, b, c siano le misure dei lati rispetto a quell'unità per cui è $\frac{\pi}{2}$ la misura del quadrante. Per B si conducano BA_1 e BC_1 perpendicolari rispett. a OA e OC; la A_1C_1 risulterà pure perpendicolare ad OA, e saranno perciò eguali gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{A_1}$. Dai triangoli rettangoli BC_1A_1, BC_1O, BA_1O si ha:

$$\bigcirc BC_1 = \bigcirc BA_1 \operatorname{sen} A\,; \quad \bigcirc BC_1 = \bigcirc OB \operatorname{sen} a\,; \quad \bigcirc BA_1 = \bigcirc OB \operatorname{sen} c\,;$$

quindi:

$$(1) \qquad \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A, \quad \text{e analogamente:} \quad \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B.$$

Sopra una sfera di raggio R, e indicando con a, b, c le lunghezze lineari dei lati, nelle dette formole alle a, b, c, dovrebbe sostituirsi $\frac{2\pi a}{\bigcirc R}$, ecc.

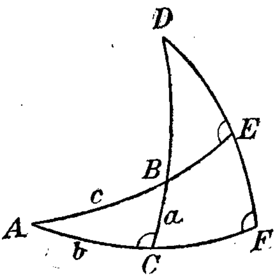


Fig. 33.

Da queste formole del triangolo rettangolo segue già tutta la trigonometria sferica. Supponendo nel triangolo sferico ABC (sempre rettangolo in C) i lati $< \frac{\pi}{2}$ (e in caso diverso si avrebbero solo lievi variazioni), si consideri il cerchio massimo di polo A, e sia DEF (fig. 33).

Sarà D il polo di ACF; e dal triangolo sferico BED, rettangolo in E, si ha:

$$(2)\qquad \text{sen}\, BE = \text{sen}\, BD\, \text{sen}\, D, \quad \text{ossia:} \quad \cos c = \cos a \cos b$$
$$\text{sen}\, DE = \cos A = \cos a\, \text{sen}\, B;$$

altre formole pel triangolo sferico rettangolo.

Considerando ora un triangolo sferico qualunque, e applicando le formole (1) ai due triangoli sferici rettangoli che se ne ricavano tracciando una delle altezze, si ha il teorema dei seni:

$$\text{sen}\, a : \text{sen}\, b : \text{sen}\, c = \text{sen}\, A : \text{sen}\, B : \text{sen}\, C.$$

Applicando invece le (2) con qualche trasformazione e riduzione, si ha il teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A$$

e quindi tutta la trigonometria sferica. Perciò (v. anche nota (1) a pag. 48): *La trigonometria sferica è indipendente dal postulato delle parallele.*

30. - Funzioni goniometriche dell'angolo di parallelismo $\Pi(p)$. — Il teorema dei seni ci dà modo di esprimere le funzioni goniometriche dell'angolo di parallelismo $\Pi(p)$ a distanza p per mezzo di funzioni esponenziali o iperboliche dell'argomento $\frac{p}{k}$ (dove k è la costante introdotta al n.° 28). — Siano AB, $A'B'$ due archi omologhi di oricicli paralleli, compresi fra gli assi AA', BB' (fig. 34); tracciamo $A'B$, nonchè BC e $A'D$, perpendicolari rispett. ad AA' e BB'. Dai triangoli BCA' e BDA', rettangoli in C e in D e coll'ipotenusa $A'B$ comune, si ricava

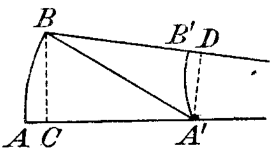


Fig. 34.

$$\bigcirc BC = \bigcirc A'B \cdot \text{sen}\, A\widehat{A'}B, \qquad \bigcirc A'D = \bigcirc A'B \cdot \text{sen}\, A'\widehat{B}B';$$

quindi:

$$\text{sen}\, A\widehat{A'}B : \text{sen}\, A'\widehat{B}B' = \bigcirc BC : \bigcirc A'D = \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{A'B'}$$

essendo gli archi $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ i raggi oriciclici dei cerchi di raggi rettilinei BC, $A'D$.

In particolare, se C coincide con A' (fig. 35), e perciò $A'B$ è tangente in A' all'arco $\widehat{A'B'}$, l'angolo $A\widehat{A'}B$ risulta retto, e $A'\widehat{B}B'$ è l'angolo di parallelismo a distanza $A'B$; si ha allora:

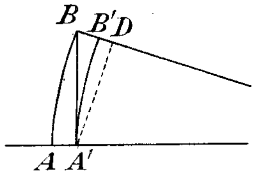


Fig. 35.

$$\widehat{A'B'} : \widehat{AB} = \text{sen}\, \Pi(A'B).$$

Dati due oricicli paralleli, le corde dell'oriciclo esterno tangenti a quello interno sono tutte sovrapponibili, e hanno perciò eguale lunghezza. *Il rapporto costante degli archi omologhi di questi oricicli* (già determinato al n.° 28), e precisamente dell'oriciclo interno a quello esterno, *è dunque eguale al seno dell'angolo di parallelismo per una distanza eguale a metà della corda suddetta.*

Siano ora (fig. 36) CC' perpendicolare al segmento AB nel suo punto di mezzo C; AA', BB' parallele entrambe a CC' in questo

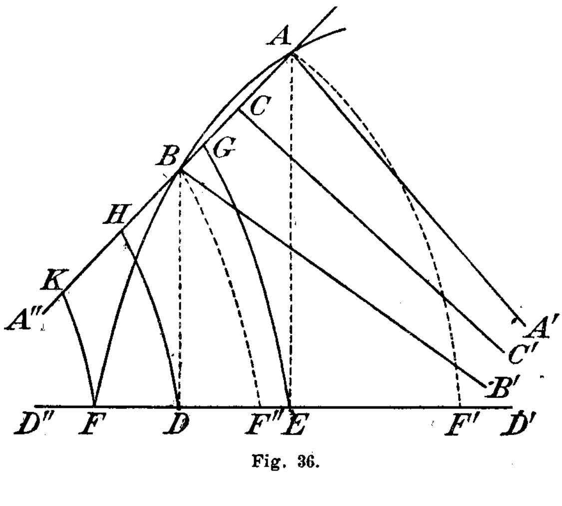


Fig. 36.

verso. Posto $BC = CA = p$, sarà $CAA' = \Pi(p)$. Sia AE bisettrice dell'angolo $C\widehat{A}A'$; e, fra le perpendicolari a questa retta, sia $D''ED'$ quella che è parallela ad AA' nel verso AA', e quindi (per simmetria) anche ad ABA'' nel verso AA''. Sia ancora BD perpendicolare a $D''D'$, quindi bisettrice dell'angolo $A''\widehat{B}B'$; e supponiamo costruiti l'oriciclo ABF, avente per assi AA', BB', $D''D'$, e gli oricicli FK, DH e EG aventi per assi ED'', AA''. Sarà:

$$KH = FD, \qquad KG = FE.$$

Inoltre, immaginando costruiti gli oricicli AF', BF'' simmetrici di ABF rispetto ad AE e BD, sarà pure (in valor assoluto):

$$GA = EF' = FE; \qquad HB = DF'' = FD;$$

quindi:

$$AB = AK - BK = 2(AG - BH); \qquad p = AC = AG - BH.$$

Ora AG è la distanza costante degli oricicli paralleli $F'A$, EG; il rapporto degli archi omologhi del primo e secondo vale dunque $e^{\frac{AG}{k}}$, ed è d'altra parte eguale al valore reciproco del seno dell'angolo $\widehat{BAE} = \frac{1}{2}\Pi(p)$. Dunque:

$$e^{\frac{AG}{k}} = 1 : \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Pi(p);$$

Per ragioni analoghe:

$$e^{\frac{BH}{k}} = 1 : \operatorname{sen}\frac{1}{2}\{\pi - \Pi(p)\} = 1 : \cos\frac{1}{2}\Pi(p);$$

quindi, dividendo membro a membro:

$$e^{\frac{p}{k}} = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(p)$$

relazione che fornisce l'angolo di parallelismo alla distanza p. Da questo risultato, e dalle formole che esprimono $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ per mezzo di $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, ricaviamo:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\Pi(p) &= \frac{2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(p)}{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(p)+1} = \frac{2e^{\frac{p}{k}}}{e^{2\frac{p}{k}}+1} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{p}{k}} \\ \cos\Pi(p) &= \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(p)-1}{\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(p)+1} = \frac{e^{2\frac{p}{k}}-1}{e^{2\frac{p}{k}}+1} = \operatorname{th}\frac{p}{k} \end{aligned}\right\}; \quad \operatorname{ctg}\Pi(p) = \operatorname{sh}\frac{p}{k}.$$

§ 4. - Rettificazione dei cicli. Trigonometria piana. Aree.

31. - Rettificazione di un iperciclo. — Sia $\widehat{AB}$ un arco di iperciclo, a distanza $p = A'A = B'B$ dalla retta base (fig. 37); $A'B'$ il segmento corrispondente di questa retta; e si indichi con $\varphi(p)$ il rapporto $\frac{\text{arco } AB}{A'B'}$, funzione della sola distanza p. Facendo ruotare la figura intorno alla retta CC', perpendicolare a entrambi i segmenti AB, $A'B'$ nei loro punti medi, i punti A, A' descriveranno due cerchi di centri C, C'. La lunghezza del secondo cerchio è limite superiore delle poligonali rettilinee inscrittevi; la lunghezza del primo è limite superiore delle poligonali ipercicliche in esso inscritte, contenute nell'ipersfera generata dalla rotazione dell'iperciclo $\widehat{AB}$; e queste ultime poligonali hanno le precedenti, rettilinee, come proiezioni ortogonali sul piano del cerchio $A'B'$. Lo stesso rapporto $\varphi(p)$ intercederà pure fra le dette coppie di poligonali una proiezione dell'altra, e quindi anche fra le lunghezze dei due cerchi che ne sono limiti superiori; ossia $\varphi(p) = \bigcirc CA : \bigcirc C'A'$.

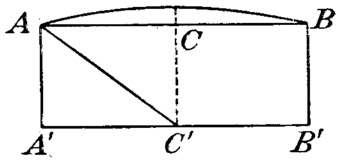


Fig. 37.

D'altra parte, dai triangoli ACC', $AA'C'$, rettangoli rispett. in C e A', si ha:

$$\bigcirc CA = \bigcirc C'A \cdot \operatorname{sen} A\widehat{C'}C; \qquad \bigcirc C'A' = \bigcirc C'A \cdot \operatorname{sen} A'\widehat{A}C';$$

quindi:

$$\varphi(p) = \frac{\operatorname{sen} A\widehat{C'}C}{\operatorname{sen} A'\widehat{A}C'} = \frac{\cos A\widehat{C'}A'}{\operatorname{sen} A'\widehat{A}C'}.$$

E ciò, tenendo fermi A, A', per ogni posizione di B' e quindi anche di C' sulla retta indefinita $A'B'$. Facendo allontanare indefinitamente C' nel verso $A'B'$, la AC' tenderà alla parallela condotta per A alla $A'B'$ nel detto verso; l'angolo $A\widehat{C'}A'$ tende a zero, e $A'\widehat{A}C'$ all'angolo di parallelismo $\Pi(p)$. Perciò:

$$\varphi(p) = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(p)} = \operatorname{ch} \frac{p}{k};$$

funzione che tende all'unità per $\lim p = 0$. *L'arco di iperciclo corrispondente a una base rettilinea di lunghezza l e avente distanza p da questa base ha dunque lunghezza* $l \cdot \operatorname{ch} \frac{p}{k}$.

32. - Rettificazione della circonferenza e dell'oriciclo. — Siano ABC, ABC' (fig. 38) due triangoli rettangoli in A col cateto AB comune; $\widehat{CD}$, $\widehat{C'D'}$ gli archi di oriciclo passanti per C, C' e aventi gli assi paralleli ad AB, nel verso AB. Avremo:

$$\widehat{CD} : \widehat{C'D'} = \bigcirc AC : \bigcirc AC' = \frac{\operatorname{sen} A\widehat{B}C}{\operatorname{sen} A\widehat{C}B} : \frac{\operatorname{sen} A\widehat{B}C'}{\operatorname{sen} A\widehat{C'}B}.$$

D'altra parte il rapporto $\cos \widehat{ACB} : \operatorname{sen} \widehat{ABC}$ rimane costante al variare di C sulla ACC' (v. n.° prec.; nella fig. 38 è il rapporto $\cos \widehat{AC'A'} : \operatorname{sen} \widehat{A'AC'} = \varphi(p)$); perciò:

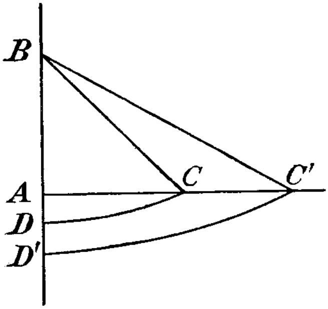


Fig. 38.

$$\cos \widehat{ACB} : \operatorname{sen} \widehat{ABC} = \cos \widehat{AC'B} : \operatorname{sen} \widehat{ABC'};$$

e per conseguenza:

$$\widehat{CD} : \widehat{C'D'} = \operatorname{ctg} \widehat{ACB} : \operatorname{ctg} \widehat{AC'B};$$

e facendo ancora allontanare indefinitamente B sulla AB:

$$\widehat{CD} : \widehat{C'D'} = \operatorname{ctg} \Pi(AC) : \operatorname{ctg} \Pi(AC').$$

Il rapporto $\widehat{CD} : \operatorname{ctg} \Pi(AC) = \varrho$ risulta dunque indipendente dalla posizione di C sulla retta ACC'; perciò scrivendo $\varrho = \frac{\widehat{CD}}{AC} \cdot \frac{AC}{\operatorname{sh} \frac{AC}{k}}$ e passando al limite quando AC tende a zero, si ha:

$$\varrho = \lim \left(\frac{\widehat{CD}}{AC}\right) \cdot \lim \frac{AC}{\operatorname{sh} \frac{AC}{k}} = 1 \cdot k = k; \qquad \widehat{CD} = k \cdot \operatorname{sh} \frac{AC}{k}.$$

La lunghezza della circonferenza di raggio rettilineo $AC = x$ è dunque:

$$\bigcirc x = 2\pi \cdot \widehat{CD} = 2\pi k \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{k} = \pi k \left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right);$$

espressione già nota a Gauss (lettera 12 luglio 1831 a Schumacher). *E l'arco di un oriciclo sotteso dalla corda di lunghezza $2x$, essendo diametro oriciclico del detto cerchio, avrà lunghezza* $\frac{\bigcirc x}{\pi} = 2k \cdot \operatorname{sh} \frac{x}{k} = k\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$. Sono così rettificate tutte le tre specie di cicli.

33. - Trigonometria piana. — Introducendo nella forma preliminare del teorema dei seni (p. 59) le espressioni ora trovate per le circonferenze di raggi a, b, c, si ha la forma definitiva di questo teorema:

(1) $$\operatorname{sh} \frac{a}{k} : \operatorname{sh} \frac{b}{k} : \operatorname{sh} \frac{c}{k} = \operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} C;$$

vale a dire: *In ogni triangolo rettilineo i seni iperbolici dei* *rapporti dei lati alla costante k sono proporzionali ai seni circolari degli angoli opposti.*

In particolare, per un triangolo ABC rettangolo in C si ha:

$$(2) \qquad \operatorname{sh}\frac{a}{k}=\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sen} A\ ; \qquad \operatorname{sh}\frac{b}{k}=\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sen} B$$

Ancora nell'ipotesi del triangolo rettangolo, la considerazione della linea di distanza BC rispetto al cateto CA dà (n.° 31):

$$\varphi(a)=\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\cos A:\operatorname{sen} B$$

ossia:

$$(3) \qquad \cos A=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{sen} B; \quad \text{e analogamente:} \quad \cos B=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sen} A.$$

Da queste formole si deducono facilmente tutte le altre relative al triangolo rettangolo; p. es.:

$$(4) \qquad \operatorname{ch}\frac{c}{k}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}; \qquad \begin{cases} \operatorname{th}\frac{a}{k}=\operatorname{th}\frac{c}{k}\cos B \\ \operatorname{th}\frac{b}{k}=\operatorname{th}\frac{c}{k}\cos A. \end{cases}$$

Le formole trovate pel triangolo rettilineo rettangolo si riducono a quelle del triangolo rettangolo sferico (n.° 29) quando si muti k in $k\sqrt{-1}$, e la nuova k si supponga essere il raggio della sfera euclidea. E poichè da queste formole si deducono tutte quelle relative a triangoli rettilinei qualunque, così la stessa relazione sussisterà fra l'intera trigonometria piana non euclidea e la trigonometria sferica; avremo cioè il risultato già intraveduto da LAMBERT (cfr. n.° 6):

La trigonometria piana non euclidea (iperbolica) *coincide colla trigonometria sferica sopra una sfera di raggio immaginario puro* $k\sqrt{-1}=ki$; ossia le formole di essa si deducono dalle formole di trigonometria sferica sostituendo ai lati a, b, c le espressioni $\frac{a}{ki}$, $\frac{b}{ki}$, $\frac{c}{ki}$. L'unità immaginaria sparisce dalle formole col cambiare le funzioni circolari dei lati in funzioni iperboliche (e cambiando in pari tempo qualche segno [1]); restano invece invariate le funzioni circolari degli angoli.

---

[1] Cos a va dunque mutato in $\cos\frac{a}{ki}=\operatorname{ch}\frac{a}{k}$; sen a, in $\operatorname{sen}\frac{a}{ki}=\frac{1}{i}\operatorname{sh}\frac{a}{k}$. Vanno perciò cambiati i segni dei termini che contengono il prodotto di due seni.

Fra gli elementi di un triangolo rettilineo si hanno pertanto le relazioni ulteriori:

$$(5)\qquad \begin{cases} \operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}-\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos A\,; \\ \operatorname{sh}\frac{a}{k}\cos B=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}-\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}\cos A\,; \\ \cos A=-\cos B\cos C+\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C\operatorname{ch}\frac{a}{k} \end{cases}$$ [1].

Osservazione. - Se nelle formole (1) e (5) di trigonometria piana si suppongono molto piccoli i rapporti $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$, introducendo gli sviluppi in serie delle funzioni iperboliche e tenendo conto dei soli termini di ordine minimo, si hanno le relazioni:

$$a:b:c=\operatorname{sen}A:\operatorname{sen}B:\operatorname{sen}C;$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\,;$$
$$c=a\cos B+b\cos A\,;$$
$$\cos A=-(\cos B\cos C-\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C)\,;$$

l'ultima delle quali può anche scriversi $\cos A=-\cos(B+C)$, e dice che gli angoli A e $B+C$, entrambi $<\pi$, sono supplementari, ossia $A+B+C=\pi$. Le formole di trigonometria piana euclidea seguono dunque come caso limite da quelle non euclidee, quando si suppongono molto piccoli i rapporti dei lati a, b, c alla costante k. In questo caso risulta altresì eguale ad un retto l'angolo di parallelismo corrispondente a una distanza qualunque dell'ordine di grandezza delle a, b, c.

E poichè i rapporti $\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}$ possono risultare piccoli sia perchè, per un dato valore finito di k, siano molto piccole le a, b, c, sia per essere molto grande la costante k, abbiamo questo doppio risultato:

1°) *Per i triangoli e in generale per tutte le figure infi-*

---

[1] Lobačewski, in luogo di $\operatorname{sh}\frac{a}{k}$, $\operatorname{ch}\frac{a}{k}$, $\operatorname{th}\frac{a}{k}$, usa le espressioni $\operatorname{ctg}\Pi(a)$, $\frac{1}{\operatorname{sen}\Pi(a)}$, $\cos\Pi(a)$; e scrive perciò ad es. la prima di queste formole così:

$$\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)+\frac{\operatorname{sen}\Pi(b)\operatorname{sen}\Pi(c)}{\operatorname{sen}\Pi(a)}=1$$

e il teorema dei seni: $\operatorname{sen}A\operatorname{tg}\Pi(a)=\operatorname{sen}B\operatorname{tg}\Pi(b)$.

nitesime vale la geometria euclidea, indipendentemente dal postulato delle parallele (1).

2°) *La geometria euclidea si può considerare come caso limite della geometria di Lobačewski-Bolyai, al crescere indefinitamente della costante k* (in pratica, come corrispondente a un valore di k talmente grande da render lecite le approssimazioni suindicate). Per tale motivo appunto Bolyai chiamò la nuova geometria *geometria assoluta*, intendendo così rilevare la sua indipendenza dal postulato delle parallele (il quale la limita al caso $k = \pm \infty$). — Nella geometria assoluta continuano a sussistere, fra le proprietà che presuppongono il postulato delle parallele, quelle che si riferiscono a figure anche finite ma che possono sostituirsi con altre infinitesime. Così ad es. per la stella di rette propria, dove basta considerare gli elementi lineari uscenti dal centro della stella (cfr. la nota (1) a p. 48); e anche nella stella impropria (n.° 24), perchè due rette parallele si avvicinano fra loro indefinitamente nel verso del parallelismo, sicchè le dimensioni di una figura formata con raggi di questa stella possono supporsi evanescenti in qualunque direzione diversa da quella dei raggi stessi.

34. - Costruzioni. — La costruzione della retta passante per un punto dato e parallela a una retta data in un verso assegnato, ossia dell'angolo di parallelismo corrispondente a una distanza assegnata, può eseguirsi colla riga e col compasso, in base a proprietà del quadrangolo trirettangolo che si deducono dalle formole di trigonometria piana (2).

---

(1) Viceversa, si può dimostrare che, in una regione di spazio nella quale le figure siano liberamente mobili in conformità dei dati dell'esperienza, e nella quale per i triangoli infinitesimi valga la geometria euclidea, deve valere, nel campo finito, una delle tre geometrie di Saccheri. V. i lavori di FLYE Ste MARIE e KILLING citati nella bibliografia; di Killing in particolare le prime pag. di *Die nicht euklidischen Raumformen....* e la *Einführung*, p. 80 e seg. L'argomento è trattato diffusamente anche nel mscr. C. SEGRE, p. 172 e seg.

(2) Le formole pel quadrangolo si trovano già in LOBAČEWSKI: *Sui principi della geometria*, v. nota (1) a p. 22. Per le costruzioni, cfr. G. BOLYAI: *Appendix....*, § 34; inoltre P. BARBARIN, *Mém. couronnés....* (v. Bibliografia), p. 5 e seg.; ENGEL, Leipz. Ber., 50 (1898), p. 181; BONOLA, Rend. Ist. Lomb. (2), 37 (1904), p. 254; mscr. C. SEGRE, p. 167. Volendo appoggiarsi sopra sole

Sia $ABCD$ (fig. 39) un quadrangolo trirettangolo, A il suo angolo acuto, a, b, a', b' i lati come in figura; e assumiamo per brevità $k=1$. Dai triangoli rettangoli ABC, ADC, applicando le (4) del n.° prec., si ha:

$$\text{ch}\, AC = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b' = \text{ch}\, a'\, \text{ch}\, b\,; \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\cos \widehat{BAC} = \frac{\text{th}\, a}{\text{th}\, AC}; \qquad \cos \widehat{ACB} = \frac{\text{th}\, b'}{\text{th}\, AC}; \\ &\text{sen}\, \widehat{ACB} = \cos \widehat{ACD} = \frac{\text{th}\, a'}{\text{th}\, AC}; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

quindi, dividendo membro a membro la prima delle (2) per la terza, e la terza per la seconda:

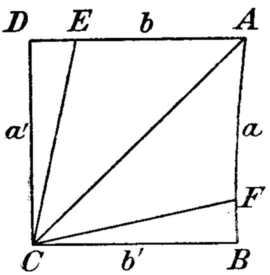


Fig. 39.

$$\frac{\cos \widehat{BAC}}{\text{sen}\, \widehat{ACB}} = \frac{\text{th}\, a}{\text{th}\, a'}; \qquad \text{tg}\, \widehat{ACB} = \frac{\text{th}\, a'}{\text{th}\, b'};$$

Il primo membro della prima è $=\text{ch}\, b'$; quindi:

$$\text{ch}\, b' = \frac{\text{th}\, a}{\text{th}\, a'};$$

e sostituendo nella (1):

$$\text{ch}\, b = \frac{\text{sh}\, a}{\text{sh}\, a'}.$$

Queste due relazioni, e le analoghe che si ottengono scambiando a e b, a' e b', permettono, conoscendo due qualunque dei 4 lati del quadrangolo $ABCD$, di trovare gli altri due.

Poichè la minima distanza delle rette DA, CB è misurata da a', e $a'<a<AC$, si può entro l'angolo DCA costruire $CE=a$ (coll'estremo E su DA). Allora dal triangolo rettangolo CDE si ha $\cos \widehat{DCE} = \frac{\text{th}\, a'}{\text{th}\, a} = \frac{1}{\text{ch}\, b'} = \text{sen}\, \Pi(b')$; quindi $\Pi(b') = BCE$ (complemento di DCE); e perciò CE è parallela a BA.

Volendo dunque la retta parallela a BA e passante per il punto C, a distanza $CB=b'$ da essa, si costruirà CD perpendicolare in C a CB, e poi la perpendicolare AD alla CD per il punto A (arbitrario) della BA; il cerchio di centro C e raggio BA incontrerà certo la AD, determinando su di essa i punti per cui passano le due parallele richieste. Analogamente, prendendo $CF=b$, sarà CF parallela a DA.

---

considerazioni di geometria piana, v. LIEBMANN, Math. Ann., 61 (1905), p. 185; Leipz. Ber., 62 (1910), p. 35; Jahresber. Deutsche Math.-Ver., 20 (1911), p. 56.

Viceversa, dato l'angolo $\Pi(b')$, si voglia trovare la distanza b'; cioè (fig. 40), posto $\widehat{XCY}=\Pi(b')$, si voglia costruire la retta perpendicolare a CX e parallela a CY (in questo verso). Conduciamo per C la perpendicolare CT a CX, e da un punto qualunque E di CY la ED perpendicolare a CT. Occorrerà determinare l'intersezione A della retta cercata con DE (intersezione certo esistente; perchè, indicato con E' un punto qualunque di DE entro l'angolo XCY, la CE' incontra certo la retta cercata, e determina con essa e con CX un triangolo, nel cui interno DE penetra in E'; e non può escire che in A).

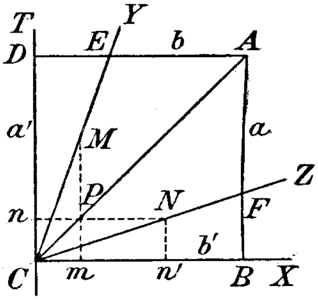


Fig. 40.

Sia ora CZ parallela a DE; su CY e CZ si prendano i segmenti uguali CM, CN, conducendo per M, N le perpendicolari Mm, Nn a CX, CT, le quali dovranno incontrarsi in un punto P. (Infatti, costruita ancora la Nn' perpendicolare a CX, la Mm incontra in m il perimetro del quadrangolo $Cn'Nn$, e non può incontrarlo ulteriormente che in un punto del segmento nN). La retta CP, cadendo entro l'angolo di DCZ, incontra certo DE; l'intersezione loro sarà il punto A cercato, ossia la perpendicolare AB condotta per A a CX è parallela a CY. Si hanno infatti le relazioni:

$$\operatorname{tg} \widehat{PCX}=\frac{\cos \widehat{PCD}}{\cos \widehat{PCX}}=\frac{\operatorname{th} Cn}{\operatorname{th} CP}:\frac{\operatorname{th} Cm}{\operatorname{th} CP}=\frac{\operatorname{th} Cn}{\operatorname{th} CN}:\frac{\operatorname{th} Cm}{\operatorname{th} CM}=\frac{\cos \widehat{ZCD}}{\cos \widehat{XCE}};$$

$$\operatorname{tg} A\widehat{CX}=\frac{\operatorname{th} a'}{\operatorname{th} b'}=\frac{\cos \Pi(a')}{\cos \Pi(b')}=\frac{\cos \widehat{ZCD}}{\cos \widehat{XCE}};$$

e perciò, essendo eguali gli angoli $\widehat{PCX}$ e $\widehat{ACX}$, il punto A sta sulla retta CP.

35. - **Aree poligonali.** — Come in geometria euclidea, chiameremo *equivalenti* due poligoni (non intrecciati) decomponibili in altri rispett. congruenti. Due poligoni equivalenti ad un terzo sono equivalenti fra loro (lo si dimostra come in geometria euclidea, scomponendo il terzo poligono in corrispondenza a entrambe le equivalenze); ossia la relazione di equivalenza è *transitiva*. Un poligono si dice *somma* di più altri, quando può scomporsi in poli-

goni equivalenti rispett. a questi; esso si dice pure *maggiore* di ciascuno di questi, e ciascuno di questi *minore* del primo.

In ogni n-gono piano la somma degli angoli è $<(n-2)\pi$ (n.º 15); la differenza (positiva) fra $(n-2)\pi$ e la detta somma dicesi *deficienza* del poligono, e si indicherà con « def. ». Quando un poligono si scompone in più altri, la sua deficienza è la somma delle deficienze di questi (lo si verifica sottraendo al poligono un triangolo per volta). Poligoni equivalenti hanno eguali deficienze. Dati due poligoni $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$, *se si ha* $\mathbf{P} \gtreqqless \mathbf{P}'$ (il segno $=$ significando equivalenza), *sarà pure* def. $\mathbf{P} \lesseqqgtr$ def. $\mathbf{P}'$. Poichè queste ultime relazioni si escludono a vicenda, altrettanto avverrà delle prime.

Dimostreremo ora che fra due poligoni qualunque $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ ha sempre luogo *una* delle relazioni $\mathbf{P} \gtreqqless \mathbf{P}'$; cioè che due poligoni qualunque sono grandezze omogenee, confrontabili. Cominciamo coi triangoli:

a) *Ogni triangolo è equivalente a un quadrangolo birettangolo isoscele, avente un lato arbitrario di quel triangolo come lato opposto alla propria base, e viceversa.* Sia ABC il triangolo (fig. 41); D, E i punti medi dei lati AB, AC; siano inoltre AA', BB', CC' perpendicolari a DE. Saranno eguali i triangoli rettangoli $AA'D$, $BB'D$; e così pure $AA'E$, $CC'E$, nonchè $AA'=BB'=CC'$. *Se A' cade nel segmento finito DE*, sicchè i triangoli $AA'D$, $AA'E$ siano entrambi parti di ABC (e anche se A' coincidesse con D od E), il triangolo ABC sarà senz'altro equivalente al quadrangolo $B'BCC'$, conforme all'enunciato. *Se invece A' cade fuori del segmento DE*, p. es. dalla parte di E (fig. 42), si prenda $EF=DE$; saranno eguali i triangoli DEA, FEC, perciò ABC equivalente a $DBCF$. Inoltre $BD=DA=CF$, e sono perciò eguali i triangoli rettangoli $BB'D$, $CC'F$, nonchè $B'D=C'F$. Se $B'D \leqq B'C'$, vale a dire se D fosse compreso fra B' e C' o coincidesse con C', l'equivalenza del quadrangolo $B'BCC'$ a $DBCF$ e quindi a ABC sarebbe di nuovo evidente. Se poi $B'D > B'C'$ (come è nella fig. 42), dividiamo i due segmenti eguali $B'D$, $C'F$ in uno stesso numero di parti eguali,

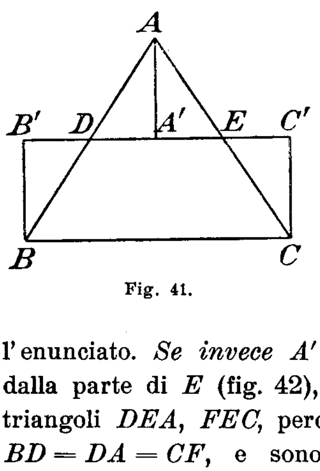


Fig. 41.

tali che ciascuna di esse sia $< B'C'$. Conducendo pei punti di divisione $B_1'B_2'$...., $C_1'C_2'$.... le perpendicolari a DE fino a incontrare BD e rispett. CF in B_1B_2...., C_1C_2...., i triangoli $B'BD$, $C'CF$ risulteranno scomposti in parti rispett. congruenti; e sarà perciò $B'BCC'$

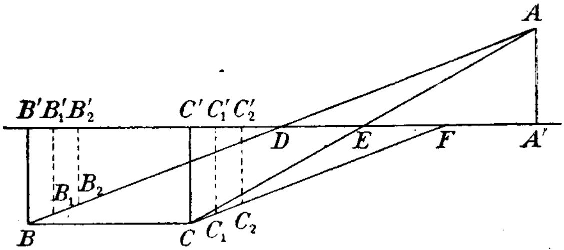


Fig. 42.

equivalente a $B_1'B_1BCC_1C_1'$, questo a $B_2'B_2BCC_2C_2'$, ecc. e quindi anche a $DBCF$, nonchè ad ABC. — Viceversa, dato il quadrangolo birettangolo isoscele $B'BCC'$, se si prende ad arbitrio sulla retta base $B'C'$ il punto D, e su BD il punto A per cui $DA = BD$, saranno equivalenti $B'BCC'$ e ABC.

b) *Per ogni triangolo ABC si può costruire un triangolo equivalente A_0BC avente il lato BC comune con esso e il lato A_0B di lunghezza arbitraria $l > AB$.* Basta costruire prima il quadrangolo $B'BCC'$ equivalente ad ABC, come dianzi; poi prendere sulla DE (congiungente i punti medi di AB, AC) un punto D_0 (certo esistente) tale che $BD_0 = \frac{l}{2} > BD$, e sulla BD_0 ancora $D_0A_0 = BD_0$.

c) *Due triangoli comunque dati sono sempre confrontabili.* I due triangoli (sostituendoli eventualmente con altri loro equivalenti, conforme a *b*)) possono supporsi avere un lato comune BC, e gli ulteriori vertici A, A_0 dalla stessa parte di BC (fig. 43). Siano ancora D, E i punti medi di AB, AC; D_0, E_0 i punti medi di A_0B, A_0C. Pensiamo trasformati entrambi i triangoli, come in *a*), in quadrangoli birettangoli isosceli aventi BC come lato opposto alla base, perciò come mediana la perpendicolare al segmento BC nel suo punto medio O,

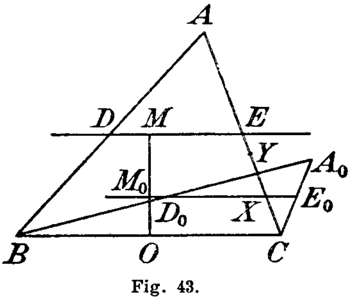


Fig. 43.

la quale certo incontrerà DE, D_0E_0 in punti M, M_0. Se M e M_0 coincidono, coincideranno i due quadrangoli, e i triangoli dati saranno equivalenti. In caso diverso, sia ad es. $OM_0 < OM$, perciò M_0 compreso fra O e M; sicchè rispetto a D_0E_0 staranno O e M da parti opposte, quindi C e E pure, sicchè CE e D_0E_0 certo si incontreranno in un punto X. Preso allora su CEA il segmento $XY = CX$, starà Y fra C e A, e il triangolo A_0BC sarà equivalente a YBC, che è parte di ABC; onde $ABC > A_0BC$.

d) *Due poligoni qualunque sono sempre confrontabili.* Scomponiamoli infatti in triangoli, p. es.

$$\mathrm{P} = a_1 + a_2 + \ldots, \qquad \mathrm{P}' = b_1 + b_2 + \ldots;$$

e confrontiamo i triangoli a_1, b_1. Se sono equivalenti, basterà confrontare le somme residue; in caso diverso, sia p. es. a_1 equivalente alla somma $b_1 + \varphi_1$ (essendo φ_1 un nuovo triangolo). Sopprimendo il termine b_1, basterà confrontare le somme $\varphi_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ e $b_2 + b_3 + \ldots$ Confrontiamo ora φ_1 e b_2; e così di seguito. Poichè si tratta di due somme di un numero finito di termini, e in ogni operazione risulta soppresso un termine di una almeno delle due, l'operazione avrà fine. O i due poligoni si esauriranno insieme, e sarà $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$; oppure si troverà ad es. $\mathrm{P} = \mathrm{P}' + \mathrm{P}''$ (essendo P'' un altro poligono), onde $\mathrm{P} > \mathrm{P}'$; o viceversa.

Abbiamo già detto che, secondo che $\mathrm{P} \gtreqless \mathrm{P}'$, è pure def. $\mathrm{P} \gtreqless$ def. P'. Ora anche viceversa, secondo che def. $\mathrm{P} \gtreqless$ def. P', sarà pure $\mathrm{P} \gtreqless \mathrm{P}'$. In particolare, *poligoni di eguale deficienza sono equivalenti.* Inoltre, *se un poligono ha deficienza somma delle deficienze di due o più altri, esso è la* (equivalente alla) *loro somma.* Se per es. def. $\mathrm{P} =$ def. $\mathrm{P}' +$ def. P'', sarà $\mathrm{P} > \mathrm{P}'$, quindi $\mathrm{P} = \mathrm{P}' + \mathrm{P}_0$, dove P_0 ha la stessa deficienza di P'', ed è perciò equivalente ad esso. *La deficienza di un poligono,* come funzione del poligono stesso, *è funzione additiva.*

Dati due poligoni P, P', se m, n sono interi positivi tali che $m\mathrm{P} \gtreqless n\mathrm{P}'$, sarà pure def. $(m\mathrm{P}) \gtreqless$ def. $(n\mathrm{P}')$, ossia m def. $\mathrm{P} \gtreqless n \cdot$ def. P'. *Due poligoni qualunque* P, P' *hanno dunque rapporto eguale al rapporto delle loro deficienze*; tali rapporti, se irrazionali, essendo definiti dalle stesse classi contigue di numeri razionali. *Possiamo dunque misurare i poligoni rispetto a un poligono fisso arbitrario assunto come unità,* e definire come *area* del poligono questa stessa misura. Assumendo p. es. come poligono unità (unità di area) il poligono di deficienza 1 (deficienza eguale all'angolo che sta all'angolo retto nel rapporto $1 : \frac{\pi}{2}\big)$, sarà sempre $\mathrm{P} = \text{def.}\,\mathrm{P}$. Porremo tuttavia, più generalmente, $\mathrm{P} = l\,\text{def.}\,\mathrm{P}$ (l costante); e poichè nel campo infinitesimo vale la geometria euclidea, sceglieremo l'unità di area, cioè la costante l, in modo da avere per i triangoli infinitesimi le stesse misure euclidee; per es. in modo che l'area di un triangolo rettangolo isoscele infinitesimo risulti eguale al semiquadrato del cateto. Per un triangolo rettangolo isoscele $\left(C = \frac{\pi}{2};\ A = B\right)$ da una delle formole (3) del n.° 33 si ha $\operatorname{ctg} A = \operatorname{ch}\frac{a}{k}$. D'altra parte per la deficienza $\varepsilon = \frac{\pi}{2} - 2A$ si ha:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{ctg} 2A = \frac{\operatorname{ctg}^2 A - 1}{2 \operatorname{ctg} A};$$

quindi:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{ch}^2 \frac{a}{k} - 1}{2 \operatorname{ch} \frac{a}{k}} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{a}{k}}{2 \operatorname{ch} \frac{a}{k}};$$

e per un triangolo infinitesimo $\varepsilon = \frac{a^2}{2k^2}$, perciò area $= l\varepsilon = \frac{la^2}{2k^2}$.

Assumeremo perciò $l = k^2$ (dove k è la costante definita al n.° 28); e quindi: *L'area di un poligono è espressa da* $\mathrm{P} = k^2 \cdot \text{def.}\,\mathrm{P}$. In particolare, *un triangolo di angoli A, B, C ha area $\Delta = k^2(\pi - A - B - C)$. L'area di qualsiasi triangolo è perciò non superiore a πk^2*, e raggiunge questo massimo solo quando sono nulli tutti tre gli angoli, cioè quando ciascuno dei lati è parallelo, nei suoi due versi opposti, agli altri due.

§ 5. - Coordinate. Applicazioni.

36. - Coordinate ipercicliche. — I punti del piano e dello spazio possono determinarsi anche in geometria non euclidea con coordinate; p. es. estendendo a questo caso, per quanto possibile, i sistemi di coordinate più comunemente usati in geometria euclidea, in particolare le coordinate cartesiane e polari. Nel piano ad es. potremo prendere come linee coordinate un fascio di rette (ideale, improprio, proprio) insieme coi cicli triettorie ortogonali di queste rette.

Fissata una retta Ox (fig. 44) e un suo punto O (origine), possiamo pensare condotta per ogni punto P del piano la PM perpendicolare a Ox, e determinare P mediante le lunghezze $OM=x$, $MP=y$, colle solite convenzioni pei segni. Sono linee coordinate $x=$cost. le rette perpendicolari a Ox, $y=$cost. gli ipercicli di base Ox (inclusa la retta Ox, cioè $y=0$). Siano $P(x,y)$, $P'(x+dx, y+dy)$ due punti infinitamente vicini qualsiansi. Indicato con $\widehat{PN}$ l'arco di iperciclo a distanza y dalla base Ox e compreso fra le ordinate MP, $M'P'$, si ha:

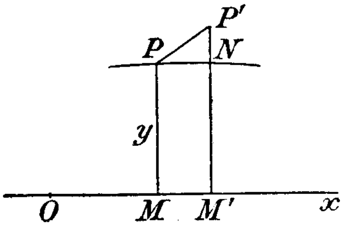


Fig. 44.

$$\widehat{PN}=\operatorname{ch}\frac{y}{k}\,dx, \qquad NP'=dy\,;$$

e dal triangolo rettangolo infinitesimo PNP' (al quale può applicarsi il teorema di Pitagora) si ricava *l'elemento lineare*:

$$\overline{PP'}^2=ds^2=\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\,dx^2+dy^2. \tag{1}$$

L'equazione della retta passante per due punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si può trovare scrivendo che l'integrale:

$$I=\int ds=\int\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\,dx^2+dy^2}$$

preso fra i limiti P_1 e P_2 deve essere minimo. Considerando x come funzione di y, e ponendo per brevità:

$$\frac{dx}{dy}=x'\,; \qquad \sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{y}{k}\cdot x'^2+1}=V$$

dovrà essere minimo l'integrale $\int_{y_1}^{y_2} Vdy$, e sarà perciò nulla la sua variazione rispetto a x'. Questa condizione puo scriversi:

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial V}{\partial x'}\,d(\delta x)=0.$$

E integrando per parti:

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial x'}\,\delta x\right\}_{y_1}^{y_2}-\int_{y_1}^{y_2}\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)\delta x dy=0.$$

Il primo termine sparisce, essendo nulla la variazione ai limiti ($\delta x_1 = \delta x_2 = 0$). Il secondo termine dà allora:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) = 0 \quad \text{e quindi:} \quad \frac{\partial V}{\partial x'} = C$$

dove C è una costante. Sostituendo a V la sua espressione, si ricava, con qualche trasformazione:

$$dx = C\frac{dy}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{k}} : \sqrt{1 - \frac{C^2}{\operatorname{ch}^2 \frac{y}{k}}} = \frac{kC \cdot d \operatorname{th} \frac{y}{k}}{\sqrt{1 - C^2 + C^2 \operatorname{th}^2 \frac{y}{k}}}$$

e integrando:

$$x = k \log\left\{ C \operatorname{th} \frac{y}{k} + \sqrt{1 - C^2 + C^2 \operatorname{th}^2 \frac{y}{k}} \right\} + \text{cost.}$$

Indicando questa nuova costante con $-D$, e ponendo:

$$e^{\frac{D}{k}} : C = 2A\,; \qquad 1 - \frac{1}{C^2} = 4AB$$

avremo:

$$2Ae^{\frac{x}{k}} = \operatorname{th} \frac{y}{k} + \sqrt{\operatorname{th}^2 \frac{y}{k} - 4AB}$$

ossia:

$$\operatorname{th} \frac{y}{k} = Ae^{\frac{x}{k}} + Be^{-\frac{x}{k}}$$

equazione contenente le due costanti arbitrarie A, B.

La distanza $P_0P = d$ *di due punti* $P_0(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$ si può trovare ricavando $\operatorname{ch} \frac{d}{k}$ dal triangolo OP_0P (fig. 45) in funzione degli altri due lati e dell'angolo compreso:

$$\operatorname{ch} \frac{d}{k} = \operatorname{ch} \frac{OP_0}{k} \cdot \operatorname{ch} \frac{OP}{k} - \operatorname{sh} \frac{OP_0}{k} \operatorname{sh} \frac{OP}{k} \cos P_0\widehat{O}P.$$

Sviluppando ora $\cos P_0\widehat{O}P = \cos(X\widehat{O}P - X\widehat{O}P_0)$ si hanno al 2° membro in tutto 3 termini, i quali, applicando le formole (2), (3), (4) del n.° 33 ai triangoli rettangoli OM_0P_0, OMP, si riducono rispett. ai 3 termini del 2° membro della formola:

$$\operatorname{ch} \frac{d}{k} = \operatorname{ch} \frac{y_0}{k} \operatorname{ch} \frac{y}{k} \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{k} - \operatorname{sh} \frac{y_0}{k} \operatorname{sh} \frac{y}{k}.$$

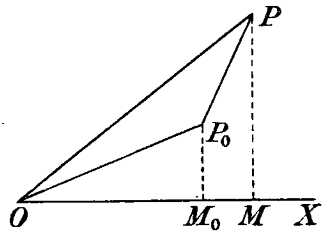


Fig. 45.

Supposto fisso P_0 e variabile P, questa è *l'equazione, nelle coordinate x, y, del cerchio di centro* $(x_0\ y_0)$ *e raggio d.* In particolare il cerchio di centro $(r, 0)$ e passante per l'origine, onde $d=r$, ha equazione:

$$\operatorname{ch}\frac{y}{k}\operatorname{ch}\frac{x-r}{k}=\operatorname{ch}\frac{r}{k}$$

Ponendo invece il centro del cerchio nel punto immaginario $x_0=0$, $y_0=-\frac{\pi}{2}ki$, si ha $\operatorname{ch}\frac{y_0}{k}=0$, $\operatorname{sh}\frac{y_0}{k}=-i$; e, indicando ancora con r il raggio, otteniamo l'equazione:

$$i\operatorname{sh}\frac{y}{k}=\operatorname{ch}\frac{r}{k}.$$

Diamo ora al raggio r la forma $a+\frac{\pi}{2}ki$, dove a si suppone reale; la stessa equazione potrà scriversi:

$$\operatorname{sh}\frac{y}{k}=\operatorname{sh}\frac{a}{k}$$

ed è soddisfatta per $y=a$. Vediamo così che *le linee di egual distanza* (a) *da una retta possono considerarsi come* (*archi di*) *cerchi di raggio immaginario* $\left(a+\frac{\pi}{2}ki\right)$ *e centro anche immaginario.* In particolare, *le rette* $(a=0)$ *possono considerarsi come cerchi di raggio immaginario puro* $\frac{\pi}{2}ki$.

37. - Coordinate oricicliche e polari. — Nel precedente sistema di coordinate possiamo sostituire all'asse rettilineo Ox un oriciclo (fig. 46), assumendo come ascisse x le lunghezze d'arco su questo oriciclo a partire da un'origine O, e misurando le ordinate y sopra le rette normali a questo oriciclo e fra loro parallele (p. es. con y positivo nel senso della divergenza). Queste rette sono allora le linee $x=\text{cost.}$, mentre le $y=\text{cost.}$ sono oricicli paralleli. Per l'elemento lineare $ds=PP'$ si ha $PP'^2=\widehat{PN}^2+NP'^2$, ossia:

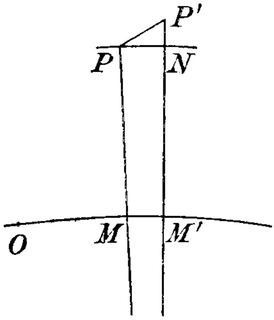


Fig. 46.

$$(1) \qquad ds^2=e^{2\frac{k}{y}}dx^2+dy^2.$$

Introducendo come nuova variabile (in luogo di y):

$$t = ke^{-\frac{y}{k}} \quad \text{da cui:} \quad \frac{dt}{t} = -\frac{dy}{k}$$

(sicchè t è il rapporto degli archi di oriciclo omologhi MM', PN, moltiplicato per k), si ha:

$$ds = \frac{k}{t}\sqrt{dx^2 + dt^2}. \tag{2}$$

Nello spazio, si può invece riferire un punto P a un'orisfera fissa, assumendo su questa coordinate oricicliche ortogonali x, y analoghe alle coordinate cartesiane nel piano euclideo, e in più, come z, la distanza di P dalla detta orisfera, contata sopra l'asse passante per P nel senso della divergenza degli assi. Si ha allora:

$$ds^2 = e^{2\frac{z}{k}}(dx^2 + dy^2) + dz^2;$$

e sostituendo a z la $t = ke^{-\frac{z}{k}}$:

$$ds = \frac{k}{t}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2}.$$

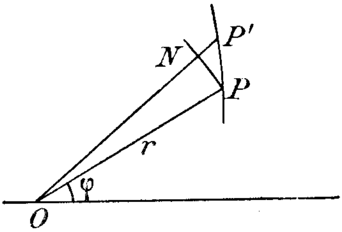


Fig. 47.

Nel piano, possiamo usare anche *coordinate polari* r, φ, definite come nel piano euclideo (fig. 47), p. es. con $r \geqq 0$; le linee coordinate sono allora cerchi col centro nel polo O (r = cost.) e semirette uscenti da O (φ = cost.). Sia PN l'arco di cerchio di raggio r compreso fra i vettori infinitamente vicini OP, OP'. Avremo:

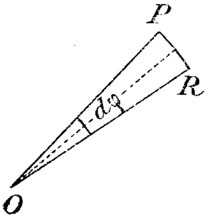


Fig. 48.

$$\widehat{NP} = k \operatorname{sh}\frac{r}{k} \cdot d\varphi; \qquad NP' = dr$$

quindi:

$$PP'^2 = ds^2 = k^2 \operatorname{sh}^2\frac{r}{k}\, d\varphi^2 + dr^2. \tag{3}$$

Determiniamo ad es. *l'area del cerchio di raggio* r. Considerando il settore infinitesimo POR (fig. 48) come un triangolo isoscele di angolo al vertice $d\varphi$ e angolo alla base P, si ha l'elemento d'area:

$$dS = k^2(\pi - 2P - d\varphi).$$

D'altra parte il detto settore è suddiviso dalla bisettrice dell'angolo in O in due triangoli rettangoli eguali; e per questi si ha:

$$\cos P = \mathrm{ch}\,\frac{r}{k}\,\mathrm{sen}\,\frac{d\varphi}{2}$$

E poichè $\cos P = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - P\right)$, tenendo conto dei soli termini del primo ordine:

$$\frac{\pi}{2} - P = \mathrm{ch}\,\frac{r}{k} \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

Per conseguenza:

$$dS = k^2 d\varphi\left(\mathrm{ch}\,\frac{r}{k} - 1\right) = 2k^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{r}{2k}\,d\varphi;$$

e integrando rispetto a φ, tra 0 e 2π:

$$\text{area cerchio} = S = 4\pi k^2\,\mathrm{sh}^2\,\frac{r}{2k}.$$

Per valori molto piccoli del rapporto $\frac{r}{2k}$ si può limitare lo sviluppo in serie di $\mathrm{sh}\,\frac{r}{2k}$ al primo termine $\frac{r}{2k}$; e si ritrova allora la formola euclidea $S = \pi r^2$.

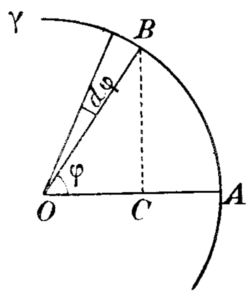


Fig. 49.

Area della sfera di raggio r. Indicando con γ la circonferenza massima (cerchio AB di centro O della fig. 49), con ds l'elemento d'arco su questa, e considerato ancora un parallelo generico di raggio BC, si ha l'elemento d'area:

$$d\sigma = \bigcirc BC \cdot ds$$

D'altra parte, pel teorema dei seni (forma preliminare):

$$\bigcirc BC = \bigcirc OB \cdot \mathrm{sen}\,\varphi = \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\varphi;$$

inoltre $ds = \frac{\gamma}{2\pi} \cdot d\varphi$; quindi:

$$\text{area sfera} = \sigma = \int_0^\pi \frac{\gamma^2}{2\pi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = \frac{\gamma^2}{2\pi}\Big|_0^\pi(-\cos\varphi) = \frac{\gamma^2}{\pi}.$$

Ragionamento e risultato sono validi anche per la geometria euclidea:

l'area della sfera è eguale al quadrato della circonferenza massima diviso per π. Nel caso presente:

$$\sigma = 4\pi k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{k} \quad (^1).$$

38. - La geometria iperbolica come nuovo sistema logico-deduttivo. Conseguenze per lo spazio fisico. — Gauss, Lobačewski, Bolyai, fondatori della geometria non euclidea, si distinguono nettamente dai loro predecessori, in quanto essi per primi, indipendentemente fra loro, si sono convinti della possibilità logica di un sistema geometrico, come quello qui esposto, fondato sulla negazione del post. 5° di Euclide; e lo hanno, in alcune parti, effettivamente costruito. Benchè nello svolgimento di questo sistema non si fossero incontrate contraddizioni, si poteva domandarsi se, proseguendo gli sviluppi deduttivi, si sarebbe potuto incontrarne qualcuna in seguito; ma la risposta negativa era data dalla trigonometria piana non euclidea. Considerando in un piano le coppie di numeri x, y come « punti analitici », e definendo la distanza di due punti mediante la trigonometria e la geometria analitica non euclidea, si costruisce infatti un sistema analitico, che, offrendo una traduzione della geometria non euclidea, ne dimostra la possibilità logica.

I risultati ottenuti consentirono anche ai fondatori della nuova geometria di affrontare la questione, quale delle due geometrie risultasse verificata nello spazio fisico; e, nell'ipotesi non euclidea, quale fosse il valore numerico spettante alla costante k. « L'infruttuosità dei tentativi fatti dal tempo di Euclide, per lo spazio di due millenni », scrive Lobačewski, « svegliò in me il sospetto che nei dati (cioè nei postulati precedenti il post. 5° di Euclide) non fosse contenuta ancora la verità che si voleva dimostrare (cioè il post. 5°), e che alla conferma sua potessero servire, come nel caso di altre leggi naturali, delle esperienze »; p. es. delle osservazioni astronomiche. — In teoria, la questione poteva risolversi coll'esame di un solo triangolo, osservando se in esso la somma dei tre angoli, singolar-

---

(1) Meno semplice è il volume della sfera di raggio r:

$$V = \pi k^3 \operatorname{sh} \frac{2r}{k} - 2\pi k^2 r = \pi k^3 \left(\operatorname{sh} \frac{2r}{k} - \frac{2r}{k} \right).$$

mente misurati, risultava eguale o minore di due retti. Ma è ovvio che si sarebbe avuta una risposta praticamente sicura soltanto se, dopo accurate misure, la detta somma fosse risultata *sensibilmente* minore di due retti, cioè con differenza decisamente superiore agli errori di osservazione. All'atto pratico *non* è stato così; non si è mai trovata nella somma in parola una differenza sensibile da due retti; e rimaneva pertanto dubbio se nello spazio fisico fosse verificata la geometria euclidea, oppure la nuova geometria, quest'ultima tuttavia in modo tale che la differenza fra due retti e la somma degli angoli di un triangolo fosse dello stesso ordine di grandezza degli errori di osservazione. In questa seconda ipotesi, dalla formola dell'area del triangolo (n.° 35) $\Delta = k^2(\pi - A - B - C)$ segue che, essendo il fattore $\pi - A - B - C$ sempre piccolissimo, anche per valori molto grandi di Δ, la lunghezza k sarà in ogni caso grandissima, molto superiore a tutte le lunghezze che ordinariamente si ha occasione di considerare; e in secondo luogo che l'eventuale divergenza della somma $A + B + C$ da due retti, essendo proporzionale all'area, avrebbe dovuto essere più facile a percepirsi nei triangoli di grande estensione. Appunto per questo Gauss rivolse l'attenzione alle più precise misure del triangolo *Brocken-Hohenagen-Inselberg*, avente lati di alcune diecine di chilometri, senza trovare per la somma dei tre angoli una differenza apprezzabile da due retti; e Lobačewski si rivolse ai triangoli astronomici, in particolare alle misure di parallasse delle stelle più lontane (1), trovando che fra queste molte sono inferiori al decimo di secondo, e quelle delle stelle più lontane assolutamente inapprezzabili. Di qui la conclusione che lo spazio fisico si può considerare come euclideo, in un ordine di approssimazione superiore alle misure fornite dagli strumenti più perfezionati..

Lobačewski aveva pertanto impostata rettamente la questione, assurgendo a una concezione empirista della geometria. E così G. Bolyai: « Non bisogna fare nessuna violenza alla natura,.... ma si deve invece in modo ragionevole e naturale guardare la natura stessa con la verità, e accontentarsi della rappresentazione meno imperfetta possibile ». I fondatori della geometria non euclidea furono

---

(1) Parallasse di una stella fissa è l'angolo sotto cui è veduto da essa il semiasse maggiore dell'orbita terrestre.

dunque filosofi positivisti nel miglior senso; poichè cercarono la risposta ai loro dubbi nei fatti, e questi valutarono con giudizio sereno.

Secondo le vedute più recenti (n.° 2), la conclusione di Lobačewski relativa allo spazio fisico va concretata in termini un po' diversi. I concetti geometrici, benchè acquisiti a mezzo di elementi sensibili, sono puramente astratti. Non esiste nel mondo fisico nulla che corrisponda con precisione ai concetti astratti di retta e di triangolo; non si possono quindi « misurare » gli angoli di un triangolo (astratto), nè affermare che nello spazio fisico sia *verificata* una determinata geometria (astratta) ([2]). Le proprietà di posizione e grandezza dei corpi possono essere rappresentate da una teoria astratta soltanto in modo più o meno approssimato. *La geometria euclidea ci dà questa rappresentazione con un'approssimazione ampiamente sufficiente per tutte le esigenze della pratica*; la geometria iperbolica, per valori grandissimi della lunghezza k (almeno 10^6 volte l'asse maggiore dell'orbita terrestre), ce ne dà un'altra, anche sufficiente; ma la prima *è più semplice*, e perciò preferibile.

39. - Ipotesi equivalenti al post. 5° di Euclide. — Le ricerche di geometria elementare non euclidea, incluse quelle di taluni precursori di essa (Wallis, Legendre,....), hanno portato alla conoscenza di varie proposizioni equivalenti al post. 5° di Euclide. Supposto di avere premessi tutti gli altri postulati della geometria elementare, al post. 5° di Euclide si può sostituire, per la costruzione della geometria euclidea, una qualunque delle proposizioni sottoindicate:

1°) Per un punto preso fuori di una retta, si può condurre a questa una e una sola parallela. Oppure: Se una retta contenuta nel piano di due parallele incontra una di queste, incontra anche l'altra. O anche: Due rette parallele a una terza sono sempre paral-

([2]) « Il concetto di *verità* non conviene alle asserzioni della pura geometria, perchè con la parola *vero* usiamo indicare la concordanza con un oggetto reale; la geometria non si occupa di mettere i propri concetti in relazione con gli oggetti dell'esperienza, ma soltanto di comporre i concetti stessi con nesso logico ». (A. Einstein: *Sulla teoria speciale e generale della relatività*, trad. di G. L. Calisse; Bologna, 1921, p. 2).

lele fra loro (quest' ultima proposizione, intesa senza restrizioni relative al verso, implica l' esclusione, sopra una retta, dei due differenti « versi » di parallelismo).

2°) Due rette parallele sono ovunque equidistanti.

3°) Esiste un triangolo simile a un triangolo dato e nel quale il lato corrispondente a un lato assegnato del primo ha una lunghezza assegnata ad arbitrio (Wallis; n.° 4).

4°) Per 3 punti non allineati passa sempre una sfera (e quindi il cerchio intersezione di questa col piano dei tre punti; cfr. n.° 25).

5°) Per un punto arbitrario preso nell'interno di un angolo passa sempre una retta che interseca entrambe le semirette lati di quest' angolo. (Nell'ipotesi non euclidea, posto $\Pi(p)=a$, non esiste una retta così fatta per un punto preso sulla bisettrice di un angolo $2a$, a distanza $>p$ dal vertice).

6°) Il luogo dei punti di un piano aventi da una retta data del piano distanza assegnata, in grandezza e senso, è anche una retta.

7°) La somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti. — Queste due ultime proposizioni, a differenza delle precedenti, non sono più equivalenti al post. 5° di Euclide, se dalle premesse indicate al n.° 13 si toglie il postulato della continuità, in particolare il postulato di Archimede. Per la proposizione 7) cfr. n.° 42.

§ 5. - Complementi.

40 - **Geometria ellittica.** — L'esistenza di una geometria non euclidea corrispondente all'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri — a prescindere dalle osservazioni di Lambert e Taurinus sulla geometria sferica — è stata affermata solamente da RIEMANN (indirizzo differenziale, Cap. IV); e la prima costruzione effettiva di essa è avvenuta per via metrico-proiettiva, secondo l'indirizzo di F. KLEIN (Cap. V). Perciò la sua costruzione per via elementare si trova bensì in alcune Memorie o trattati [1], ma non presenta l'interesse che, per ragioni storiche, spetta all'analoga trattazione della geometria iperbolica. Ci limitiamo a accennarne l'impostazione, rinviando per il rimanente alla costruzione metrico-proiettiva (Cap. V).

Rispetto alle premesse della geometria sia euclidea che iper-

---

[1] V., p. es., BONOLA: *Parallele*, §§ 40 e seg.

bolica, occorrono qui due modificazioni: 1°) Introdurre il nuovo postulato: *Due rette di uno stesso piano hanno sempre un punto comune*; 2°) Modificare i postulati dell'ordine in modo che la retta non risulti più una linea aperta, e sostituirli p. es. con quelli comunemente adottati in geometria proiettiva, sicchè la retta diventi una linea chiusa, sulla quale due punti distinti determinino non già *un* segmento, ma due segmenti complementari, e 4 punti possano distribuirsi in uno e un solo modo in due coppie che si separano. Tra una retta punteggiata e un fascio di rette, proiezione della prima da un punto non appartenente ad essa, resta così già stabilita una corrispondenza prospettiva, biunivoca senza eccezioni.

Per il postulato: « Due punti distinti individuano una retta passante per essi » si presentano ancora due possibilità. Se questo postulato si intende valido incondizionatamente, senza eccezioni, due rette distinte di un piano non possono avere a comune che un solo punto; e la geometria conseguente è la *geometria ellittica* (così chiamata da F. KLEIN). Invece sulla sfera, sostituendo alle rette i cerchi massimi, il postulato testè ricordato soffre eccezione per punti diametralmente opposti. Per due punti così fatti passano *infiniti* cerchi massimi; e viceversa due cerchi massimi hanno sempre a comune due punti diametralmente opposti. *Questa è la differenza* (rilevata solo da F. KLEIN) *fra la geometria ellittica e la geometria sferica*; le quali tuttavia coincidono quando ci riferiamo (come sarà meglio chiarito nei prossimi Capitoli) a una *regione limitata* del piano ellittico o della sfera, tale che, sulla sfera, non vi siano compresi in pari tempo due punti diametralmente opposti.

Qui ci riferiamo alla *geometria ellittica.* Un piano ellittico σ, punteggiato e rigato, è in corrispondenza prospettiva, perciò biunivoca e continua senza eccezioni, con ogni stella S di rette e di piani, il cui centro non appartenga a quel piano: questa stella può anch'essa concepirsi come immagine del piano ellittico σ, coll'intesa che i punti A e le rette r di σ siano rappresentati rispett. dalle rette SA e dai piani Sr della stella S; che i due segmenti complementari AB siano misurati rispett. dagli angoli supplementari delle rette SA, SB, e così ancora gli angoli di due rette del piano σ mediante i diedri dei piani loro proiezioni. La lunghezza dell'intera retta sarà data allora dalla misura dell'angolo piatto, π. Nel piano ellittico due rette qualunque, perciò anche due rette perpendicolari a una terza in punti distinti A, B, hanno a comune un punto P. (Nella stella S, il raggio SP è quello perpendicolare al piano SAB). Per ciascuno dei due segmenti complementari AB vi sono *due* triangoli isosceli ABP aventi questo segmento come base comune, e gli angoli adiacenti retti; triangoli perciò eguali, simmetrici rispetto alla retta AB; e saranno pure eguali, in lunghezza assoluta, i due segmenti complementari AP, ed eguali a questi e fra loro i due segmenti complementari BP. Le *infinite perpendicolari a una retta fissa concorrono in un medesimo punto, e sono spezzate da quella retta e da questo punto in segmenti complementari eguali.* La retta e il punto anzidetto si corrispondono in una polarità (Cap. V, n.° 69; nella stella, la polarità ortogonale). Nello spazio, tutte le rette perpendicolari a un piano fisso concorrono in un punto, e viceversa; punto e piano si corrispondono anche in una determinata polarità (n.° 78).

La somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti; proprietà ovvia ad es. per i triangoli birettangoli sopra considerati, e che facilmente si estende a ogni triangolo rettilineo. Più generalmente, la somma degli angoli di un n-gono piano semplice è maggiore di $(n-2)\pi$; la differenza tra questa somma e $(n-2)\pi$ si chiama *eccesso* del poligono. Anche gli eccessi (come le deficienze in geometria iperbolica) si sommano col sommarsi dei poligoni. Come misura dell'area di un poligono potremo assumere lo stesso numero che ne esprime l'eccesso; ciò equivale ad assumere il numero 2π come misura dell'area dell'intero piano ellittico (poichè tre rette mutuamente perpendicolari spezzano il piano ellittico in quattro triangoli trirettangoli, ciascuno di eccesso e area $\frac{\pi}{2}$).

Il piano ellittico (a differenza del piano euclideo, e di quello di Lobačewski) *non è da una sua retta spezzato in due parti.* Infatti, presi ad arbitrio in tale piano una retta r e due punti A, B non appartenenti ad essa, tra i due segmenti complementari di estremi A, B *uno* non incontra la r, e per esso si può passare con continuità da A a B senza incontrare la r. Questa possibilità di tagliare il piano ellittico lungo una retta (linea chiusa) senza spezzarlo in due parti denota una *connessione* diversa da quella del piano euclideo, e diversa anche ad es. dalla sfera.

Ritorneremo sull'argomento al n.° 71.

41. — Geometria non archimedea di Veronese. — Ricerche d'indole critica, analoghe a quelle che hanno condotto alla geometria non euclidea, sono state istituite intorno ad altre premesse della geometria ordinaria, fra altro sulla nozione della continuità della retta, e più particolarmente su quella parte di essa che è costituita dal postulato comunemente detto di ARCHIMEDE: « Dati due segmenti, esiste sempre un multiplo del più piccolo che è maggiore dell'altro » (1). Negli « Elementi » di Euclide, questo postulato si nasconde nella def. 4° del Libro V: « Hanno un rapporto quelle grandezze che sono tali che una qualunque di esse, moltiplicata, può superare una qualunque delle altre »: si tratta dunque di una proprietà presupposta per tutte le categorie di grandezze per le quali si parla di rapporto, quindi anche pei segmenti.

Si chiamano *geometrie non archimedee* quelle nelle quali interviene un sistema di grandezze non soddisfacenti al postulato testè enunciato; vale a dire geometrie comprendenti almeno *un infinitesimo attuale*, cioè una grandezza A di cui un multiplo qualsiasi non supera un'altra grandezza assegnata B omogenea alla prima, e perciò anche un *infinito attuale*, quale è B rispetto ad A. Di queste geometrie si hanno parecchi tipi, conformantisi spesso nel loro svolgimento alla geometria non euclidea come modello; esse non si sono però elevate al di là del campo critico elementare.

Sistemi di grandezze non archimedee si sono presentati già anti-

---

(1) Designato come postulato di Archimede da STOLZ (Innsbr. Ber., 12, 1882, p. 74; Math. Ann., 22, 1883, p. 504). Esso è infatti enunciato esplicitamente da ARCHIMEDE (v. p. es. Oeuvres complètes par P. Ver Eecke, Paris-Bruxelles, 1921) nell'opera *Della sfera e del cilindro*, p. 6; cfr. anche *Delle spirali*, alla fine dell'introduzione, p. 243, *La quadratura della parabola*, p. 378; e da lui sistematicamente adoperato. Esso risale probabilmente a Eudosso di Cnido (cui sembrano dovuti la teoria delle proporzioni e il metodo di esaustione, che ne fanno uso) e forse più in là. V. anche ENRIQUES: *Prinzipien*, n° 7; ENRIQUES: *Gli elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, libri I-IV (Roma, 1925), p. 216 (osservazioni alla prop. 16 del libro III); RUFINI: *Il metodo di Archimede e le origini dell'analisi infinitesimale nell'antichità* (Roma, 1926), pp. 35-61, e parte II; G. VITALI: *Sulle applicazioni del postulato della continuità nella geometria elementare* (ENRIQUES: *Questioni*). Questo postulato si distingue dagli altri della geometria elementare per il fatto di richiedere un numero di operazioni non determinato a priori, e costituisce perciò un'affermazione d'indole più elevata.

euclideo, come nella fig. 50, da considerarsi nell'ordine dall'alto al basso); e i punti di tutte queste rette disposti complessivamente in un ordine unico, come elementi di una sola forma, convenendo p. es. che i punti di ogni singola retta siano disposti da sinistra a destra nell'ordine consueto, e che tutti questi precedano o rispett. seguano quelli di ogni altra retta, che, nell'ordine prestabilito delle rette, segua o rispett. preceda la prima. Per questo insieme di punti si può definire opportunamente la congruenza dei segmenti, e l'insieme stesso gode ancora di molte — non però di tutte — le proprietà comprese nel concetto consueto della continuità: l'insieme è tuttavia non archimedeo, perchè qualunque multiplo di un segmento avente gli estremi sopra una stessa retta (in senso ordinario) è minore di un qualsiasi segmento avente gli estremi sopra rette diverse ([1]). Veronese costruisce poi il piano come insieme dei punti di tutte le le rette che congiungono i singoli punti di una retta data a un punto fisso non appartenente a questa; e con ulteriori proiezioni genera lo spazio a 3 o più dimensioni ([2]).

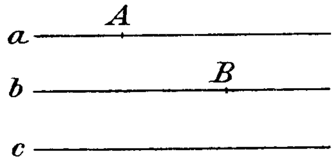


Fig. 50.

42. - Indirizzi ulteriori nella geometria non archimedea. — Altre ricerche di geometria non archimedea sono state rivolte ad accertare se determinate teorie geometriche sono o no indipendenti dal postulato di Archimede; e, in questa seconda ipotesi, a indagare come esse si modificano se il postulato di Archimede si elimina dalle premesse.

---

(1) È ancora soddisfatto il così detto postulato di Cantor (ENRIQUES: *Prinzipien*, n.° 7); ma, p. es., nel segmento AB della fig. 50 (definito come sopra) manca un punto che separi le due classi dei punti di questo stesso segmento che appartengono rispettivamente alla a e alla b.

(2) Alla forma a una dimensione di Veronese si può accompagnare un sistema di numeri non archimedei, pei quali permangono le ulteriori proprietà formali dell'algoritmo numerico, e che sono stati generalizzati e approfonditi da T. LEVI-CIVITA (Atti Ist. Veneto (7), 4 (1893), p. 1765) e A. SCHOENFLIES, Jahresber. Deutsche Math.-Verein., 15 (1906), p. 26. Cfr. anche SCHOENFLIES: *Notes sur la géométrie non archimédienne*, art. III, 1 *a*) nell'ediz. francese della « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften », appendice a ENRIQUES: *Prinzipien*; Paris-Leipzig, 1909. Nello spazio di Veronese la geometria

D. HILBERT, dal quale sono state compiute o promosse parecchie di queste ricerche (1), ha introdotto un sistema di grandezze non archimedee (2), usate ripetutamente come coordinate in queste geometrie: l'insieme $\Omega(t)$ di tutte quelle funzioni algebriche, reali ed univoche di una variabile t, che si ottengono da t stessa con operazioni razionali e coll'operazione $|\sqrt{1+\omega^2}|$, dove ω è una funzione di t già ottenuta precedentemente con queste operazioni. Una funzione qualsiasi del campo $\Omega(t)$ assume per valori positivi di t sufficientemente grandi un segno costante; e se a, b sono due distinte di tali funzioni, si dirà $a>b$ oppure $a<b$ secondo che la differenza $a-b$, per detti valori di t, è positiva o negativa. Per queste funzioni risulta così stabilito un ordine crescente di grandezza; e d'altra parte, essendo, per ogni numero n intero positivo, $n<t$ (perchè la funzione $t-n$ è positiva per valori positivi abbastanza grandi di t), le due quantità 1 e t del campo $\Omega(t)$ non soddisfano al postulato di Archimede.

I principali intenti perseguiti in queste ricerche sono stati i seguenti:

1°) Mettere in evidenza nella costruzione della geometria elementare, sia euclidea che non euclidea, quella parte che è indipendente dal postulato della continuità, e in particolare dal postulato di Archimede. D. HILBERT (3) ha costruita la geometria iperbolica piana in base ai soli postulati di appartenenza, limitati ai punti di un piano, a quelli dell'ordine e della congruenza, e a un altro da lui chiamato « delle rette secanti e non secanti », che equivale a un'*unica* particolare applicazione del postulato di Dedekind, intesa a ottenere le parallele non euclidee condotte per un punto a una retta data r come separatrici, nel fascio di rette di centro P e piano Pr, dei due angoli completi delle rette secanti e non secanti la r. A tal uopo

---

proiettiva vale limitatamente alle questioni lineari; la determinazione dei punti uniti di due punteggiate proiettive sovrapposte non trova sempre soluzioni nel campo di punti considerato. Altri interessanti continui non archimedei sono dovuti a P. PREDELLA, Giorn. di Matematiche, 49 (1911), p. 281, e F. PALATINI, Rassegna di matem. e fis., 2 (1922), p. 136.

(1) Oltre alle *Grundlagen* e ai lavori citati in seguito, cfr. l'articolo di A. SCHMIDT: *Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie*, in D. HILBERT: *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2 (Berlin, 1933), p. 404.

(2) *Grundlagen*, § 12.

(3) Math. Ann., 57 (1903), p. 137, riprodotto in *Grundlagen*, Anh. III.

egli considera le « *Enden* », cioè i versi, o punti all'infinito, comuni a più rette parallele; e, col definire, a mezzo di opportune costruzioni geometriche, il verso somma e prodotto di due altri, costruisce un « calcolo dei versi ». Perviene così a rappresentare le rette del piano mediante 2 coordinate (prodotto e semisomma dei relativi versi), e i punti, come inviluppi di rette, mediante equazioni lineari; costruisce pertanto la geometria proiettiva, dalla quale, con un'opportuna conica assoluto, segue la geometria iperbolica (1).

2°) Dimostrare, senza uso del postulato della continuità, ma valendosi tuttavia di quelli della congruenza, il teorema di Saccheri-Legendre: « Secondo che la somma degli angoli di un qualsiasi particolare triangolo è rispett. uguale, maggiore, o minore di due retti, altrettanto avverrà per ogni altro triangolo ». M. DEHN (v. nota (1) a pag. 10), dopo aver completato il piano elementare, quale risulta direttamente dai postulati (luogo cioè di elementi propri), coll'introduzione di punti ideali, considera una *pseudogeometria*, o geometria convenzionale, di cui sono elementi tutti i punti e le rette, proprii e ideali, all'infuori di un'unica retta e dei punti di essa. In questa pseudogeometria definisce un nuovo tipo di eguaglianze, le *pseudocongruenze*, per le quali sono verificate tutte le proprietà consuete; e a mezzo di un calcolo segmentario stabilisce relazioni fra pseudocongruenze e congruenze effettive. Di qui discendono i

---

(1) F. SCHUR (Math. Ann., 59, 1904, p. 314) fa qualche osservazione sui procedimenti di Hilbert, e vi porta complementi: rileva fra altro che il postulato delle rette secanti e non secanti implica p. es. che qualsiasi cerchio, potendosi considerare come linea omologica alla conica assoluto, luogo dei versi, sia incontrato in due punti da ogni retta che abbia dal centro di esso distanza minore del raggio; equivale dunque ad una già larga applicazione del postulato della continuità. G. HESSENBERG, Math. Ann., 61 (1905), p. 173, e Sitzungsber. der. Berl. Math. Ges. 4 (1905), p. 69, ha costruita la geometria ellittica senza uso di continuità. J. HIELMSLEV, Math. Ann., 64 (1907), p. 449, ha data la costruzione della geometria elementare piana, inclusa l'introduzione delle coordinate (dopo di che essa è ridotta a teoria analitica; è, per così dire, « algebrizzata ») senza alcuna ipotesi sull'incontrarsi o meno di due rette di un piano, nè sulla continuità; il suo risultato è qualificato da M. Dehn come il più importante conseguito nella costruzione della geometria elementare (M. DEHN: *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwickelung*, Bd. XXIII der « Grundlehren der Mathem. Wiss. », Berlin, 1926, p. 236).

tre casi del teorema di Saccheri. La dimostrazione di BONOLA (nota (1) a pag. 10) è meno artificiosa; egli si riferisce ai quadrangoli birettangoli isosceli considerati da Saccheri (n.° 5), dimostrando (proprietà equivalente) che in questi i due angoli ulteriori sono o sempre retti, o sempre ottusi, o sempre acuti.

3°) Risultato ulteriore, particolarmente notevole, dovuto pure a M. DEHN (v. nota cit.): Mentre, ammesso il postulato ordinario della continuità, perciò anche il postulato di Archimede, le tre ipotesi che possono farsi sulla somma degli angoli di un triangolo, che cioè essa sia costantemente maggiore, eguale, o minore di due retti, equivalgono rispett. alle altre tre, che in un dato fascio di rette vi siano nessuna, una, o infinite rette non incontranti una retta assegnata del piano di quel fascio ma non appartenente al fascio stesso, *questa equivalenza vien meno se non si ammette il postulato di Archimede.* L'ipotesi che due rette complanari sempre si incontrino implica ancora che la somma degli angoli di un triangolo sia maggiore di due retti, ma non viceversa; e similmente l'ipotesi della unicità della parallela condotta per un punto a una retta data implica che la somma degli angoli di un triangolo sia eguale a due retti, ma non viceversa. Invece l'ipotesi che in un piano passante per una data retta si possano condurre, per un punto fuori di questa, infinite rette non incontranti la prima, si dimostra compatibile con tutte tre le ipotesi sulla somma degli angoli di un triangolo. Ciò è dimostrato da Dehn mediante la costruzione di due nuove geometrie non archimedee: la geometria *non Legendriana* (meglio *non Saccheriana* [1], o *geometria non archimedea a metrica ellittica*) nella quale, in un piano, una retta ammette infinite non secanti passanti per un punto dato, e la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti; e la geometria *semi-euclidea* [2] (meglio *geometria non archimedea a metrica euclidea*), nella quale esistono pure infinite rette di un fascio non incontranti una retta assegnata del piano di questo fascio, mentre la somma degli angoli di un triangolo è eguale a due retti. Non esistono però in queste geometrie « parallele » nel senso di Loba-

---

(1) V. anche ENRIQUES: *Prinzipien*, quadro a p. 129.

(2) ENRIQUES: *Prinzipien*, l. c.

čewski, cioè rette separatrici, nel fascio P, delle due zone delle rette che incontrano e che non incontrano la r: per ogni retta del fascio P non incontrante r, esistono nel fascio altre rette che non incontrano r e cadono entro l'angolo acuto formato dalla prima e dalla perpendicolare condotta da P alla r.

4°) D. HILBERT (1) è stato condotto ad una geometria non archimedea anche dall'esame critico del postulato relativo all'eguaglianza di due triangoli, nei quali siano eguali due angoli e le coppie di lati che li comprendono (*Grundlagen*, post. III, 6; 7ª ediz., III, 5). Si può richiedere che questo postulato valga *in senso largo*, cioè ogni qualvolta, per i due angoli eguali, i due lati adiacenti all'uno siano, in ordine qualsiasi, rispett. eguali ai due lati adiacenti all'altro; oppure *in senso ristretto*, cioè limitatamente al caso che, indicati i due angoli eguali con BAC, $B'A'C'$, i lati eguali AC, $A'C'$ risultino entrambi a destra, oppure entrambi a sinistra, delle rette AB, rispett. $A'B'$ percorse nel senso da A verso B, e da A' verso B'. Inteso il postulato in questo secondo senso, e se non si ammette il postulato di Archimede, nasce una geometria, nella quale *in due figure piane simmetriche rispetto ad una retta, segmenti corrispondenti non sempre sono uguali*; p. es. *triangoli rettangoli aventi un cateto comune e simmetrici rispetto a questo*, pur avendo gli angoli corrispondenti rispett. eguali, *hanno tuttavia ipotenuse non eguali.* E in un triangolo isoscele i due angoli alla base non sono eguali. — In questa geometria cade il concetto di area di un poligono, e rimangono validi soltanto quelli di poligoni equicomposti (*zerlegungsgleich*), e di poligoni equivalenti per differenza (*ergänzungsgleich*). Entrambe sono relazioni transitive; ma dalla seconda *non* segue la prima. *Triangoli aventi basi ed altezze rispett. eguali sono*, in generale, *equivalenti solo per differenza* (2); *se due triangoli sono equivalenti per differenza, ed hanno basi eguali, non hanno necessariamente altezze pure eguali. In un triangolo rettangolo la somma dei*

(1) Proc. of the London Math. Soc., 35 (1903), p. 50, riprodotto in « *Grundlagen* », Anhang. II.

(2) La dimostrazione consueta del teorema, che triangoli (o parallelogrammi) aventi basi e altezze rispettivamente eguali sono equivalenti, fa uso infatti del postulato di Archimede. Cfr. anche qui, n.° 35, *a*).

quadrati dei cateti è soltanto equivalente per differenza al quadrato dell'ipotenusa (geometria « non pitagorica »).

5°) Ricerche ulteriori, sulle quali non possiamo qui entrare in dettagli, si riferiscono ad alcuni teoremi di geometria proiettiva, e particolarmente:

1°) Il teorema di DESARGUES sui triangoli omologici;

2°) Il teorema fondamentale della proiettività tra forme di 1ª specie;

3°) Il teorema di PAPPO sull'esagono inscritto in una coppia di rette, caso particolare e limite del teorema di Pascal sull'esagono inscritto in una conica, e che viene talora designato esso pure come teorema di PASCAL [1].

Per ciascuno di questi teoremi viene indagato a fondo, quali premesse occorrono per stabilirli. Un risultato essenziale ottenuto da HILBERT [2] afferma che, per stabilire il teorema di Pappo, oltre ai postulati di appartenenza (compresi quelli dello spazio), ai postulati dell'ordine, e a quello delle parallele, occorrono *o i postulati della congruenza, oppure il postulato di Archimede.* Egli ha costruita infatti una geometria non archimedea, da lui chiamata *non pascaliana,* fondata sui postulati dei gruppi I, II, IV delle « Grundlagen », ma nella quale non sono verificati nè il postulato di Archimede nè il teorema di Pappo. A questa geometria egli perviene per via analitica, introducendo come « punto » la terna di numeri di un sistema non archimedeo, dipendente da due parametri, nel quale la moltiplicazione dei parametri, e quindi la moltiplicazione in genere, *non* gode della proprietà commutativa. Interpretando i due parametri come « coefficienti di dilatazione » (*Dehnungsgrössen*), cioè come caratteristiche di omotetie aventi un dato centro, il teorema di Pappo-Pascal appare equivalente alla proprietà commutativa della moltiplicazione di quelle grandezze, cioè alla permutabilità di queste omotetie (ossia delle omologie aventi asse e centro assegnati) [3].

---

(1) Sulla possibilità di dimostrare questi teoremi senza far uso del postulato della continuità, v. anche la recente dissertazione di M. STECK: *Das Zeuthen'sche Postulat und das Prinzip der Vertauschung zur Begründung der projectiven Geometrie,* Univ. Heildelberg, 1932.

(2) *Grundlagen,* Cap. V e VI.

(3) M. DEHN, op. cit. nella nota (1) a p. 89; p. 226.

CAPITOLO III.

Interpretazione della geometria iperbolica sulle superficie a curvatura costante negativa.

43. - Geometria intrinseca di una superficie secondo l'indirizzo di Gauss. — Nel 1868, quando la conoscenza della geometria non euclidea svolta da Lobačewski e G. Bolyai appena cominciava a diffondersi nel mondo scientifico, una geniale osservazione di EUGENIO BELTRAMI ([1]) la avvalorava da un nuovo punto di vista, e ne preparava la connessione coll'indirizzo differenziale, abbozzato da Riemann fino dal 1854 nella lezione per la sua abilitazione, pubblicata anch'essa soltanto nel 1868 (cfr. n.° 49 e seg.). Si inizia così il periodo in cui la geometria non euclidea, uscendo dal campo critico-elementare, prende contatto con importanti teorie matematiche moderne: la *geometria differenziale* delle superficie, e successivamente degli spazi a più dimensioni comunque curvi (Cap. IV); la *teoria dei gruppi*, in relazione ai gruppi dei movimenti del piano e dello spazio, che sono diversamente costituiti nello spazio euclideo e negli spazi non euclidei (n.i 58-59); la *geometria proiettiva*, alla quale le metriche euclidea e non euclidee vengono subordinate (Cap. V).

Nello spazio ordinario, una superficie si può rappresentare analiticamente esprimendo le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z di un suo punto variabile come funzioni di due parametri indipendenti u, v ([2]):

$$x=f_1(u, v), \qquad y=f_2(u, v), \qquad z=f_3(u, v);$$

funzioni definite in un certo campo di variabilità delle u, v, e, per

---

([1]) *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giorn. di matem., 6 (1868), p. 284; Opere matem., vol. I, p. 374.

([2]) Questi parametri sono indipendenti, se non sono identicamente nulli tutti tre i determinati di 2° ordine estratti dalla matrice Jacobiana delle $f_i(u, v)$.

valori generici di queste, finite, continue e derivabili finchè occorre. Vi è allora corrispondenza biunivoca senza eccezione fra i punti della superficie, limitatamente a una certa regione, e un conveniente campo di variabilità delle u, v; le u, v si chiamano *coordinate curvilinee* sulla superficie, e *linee coordinate* le linee $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ La distanza ds di due punti infinitamente vicini della superficie (x, y, z) e $(x+dx, y+dy, z+dz)$, di coordinate curvilinee (u, v), $(u+du, v+dv)$, detta *elemento lineare* della superficie, è data da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Esprimendo dx, dy, dz mediante u, v e loro differenziali, e ponendo:

$$E = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

dove ciascuna somma va estesa ai termini analoghi ottenuti cambiando x in y e z, si ha:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Il ds^2 è dunque espresso da una forma differenziale quadratica nelle u, v, i cui coefficienti dipendono dalle sole (derivate prime delle) funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. In questa forma, i coefficienti E e G sono essenzialmente positivi, e si annullano solo per punti particolari della superficie; altrettanto dicasi del discriminante $EG-F^2$, quadrato della matrice Jacobiana delle x, y, z, che porremo $=H^2$; le funzioni $\sqrt{E}$, $\sqrt{G}$, H si assumeranno sempre positive. Si può allora calcolare la lunghezza di un arco qualunque di linea sulla superficie, ricavandola per integrazione da quella dei suoi elementi infinitesimi. L'angolo θ di due linee, ossia di due direzioni (du, dv), $(\delta u, \delta v)$ uscenti da un punto generico, si esprime mediante le E, F, G e gli incrementi d, δ, colla formola:

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

In particolare per l'angolo ω, compreso fra 0 e π, dei versi positivi delle linee coordinate si ha $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, $\operatorname{sen}\omega = \frac{H}{\sqrt{EG}}$; e $F=0$ è la condizione perchè le linee coordinate $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ passanti per il punto (u, v) siano ortogonali. L'elemento d'area è dato da

$d\sigma = \sqrt{E}du \cdot \sqrt{G}dv \cdot \operatorname{sen} \omega = Hdudv$, e di qui si può ricavare l'area di una figura qualunque sulla superficie, decomponendola in quadrangoli (maglie) elementari. — Se noi pertanto, seguendo il concetto di Gauss, materializziamo la superficie, considerandola come un velo sottilissimo, che si possa deformare a piacere per semplice flessione, senza lacerazioni nè estensioni, le figure tracciate sulla superficie assumeranno, in conseguenza delle dette deformazioni, configurazioni spaziali diverse, ma la lunghezza di ogni arco di linea, l'angolo sotto cui due linee s'incontrano, l'area di una figura sulla superficie rimarranno invariati; e così più generalmente per tutte le proprietà che dipendono geometricamente dai soli elementi suddetti, e analiticamente dalle sole funzioni E, F, G, cioè dall'espressione dell'elemento lineare ds^2. Così p. es., deformando una superficie nel modo indicato, le sue *linee geodetiche* rimarranno tali; in particolare distendendo una regione di cono o cilindro sopra un piano euclideo, le geodetiche del cono o cilindro si sovrapporranno alle rette, geodetiche del piano. Le proprietà geometriche di una superficie che sono indipendenti dalle deformazioni di questa, nelle quali non intervengono elementi estranei a questa, che si possono studiare senza escire dalla superficie (come la geometria piana senza escire dal piano), costituiscono la *geometria intrinseca* della superficie: in questo senso la geometria intrinseca del cilindro o del cono coincide appunto, limitatamente a regioni opportune (il che in tali questioni è sempre presupposto), colla geometria del piano euclideo. Due superficie sulle quali il ds^2, rispetto a parametri u, v opportuni, si esprime colla stessa formola, si possono, limitatamente a regioni convenienti, *applicare* l'una sull'altra (cioè sovrapporre materialmente, solo deformandole), in quanto vi risultano eguali tutte le lunghezze corrispondenti, gli angoli, le aree; esse si dicono *applicabili* o *isometriche*; hanno *la stessa geometria intrinseca.* Da ciò l'interesse che presentano tutti quei teoremi di geometria su una superficie di cui può darsi espressione analitica mediante i soli coefficienti del ds^2, incluse le loro derivate rispetto alle u, v; essi esprimono proprietà pertinenti alla geometria intrinseca della superficie.

Introducendo in luogo dei parametri u, v altri due u', v', funzioni univoche, continue ed univocamente invertibili dei primi, l'espressione del ds^2 nelle nuove variabili sarà dello stesso tipo della precedente, ma con funzioni E, F, G in generale diverse; perciò la superficie e la sua geometria intrinseca sono legate non tanto alla singola forma differenziale quadratica $Edu^2 + ...$, quanto *all'intera classe delle forme differenziali equivalenti a questa*. E criterio analitico dell'applicabilità o meno di due superficie è la possibilità di trasformare l'una nell'altra le espressioni del loro elemento lineare, mediante un cambiamento di coordinate curvilinee su una di esse.

44. - **Curvatura totale di una superficie in un punto. Superficie a curvatura costante.** — GAUSS per primo ha messo in evidenza che elemento importantissimo della geometria intrinseca di una superficie è la *curvatura totale* (o brevemente *curvatura*) di essa nei singoli suoi punti. Questa può definirsi in vari modi:

1°) Come estensione del concetto di curvatura di una linea piana o sghemba in un punto assegnato. Consideriamo un punto generico P di una superficie F non sviluppabile, un'area σ di questa che comprenda P, e una sfera di centro arbitrario O e raggio unità; e riferiamo F a questa sfera « per parallelismo di normali », orientando la normale a F in P in modo arbitrario, variabile con continuità entro σ, e facendo corrispondere ai punti di σ i punti intersezioni della sfera coi raggi paralleli a quelle normali nel senso positivo convenuto (rappresentazione sferica di Gauss). All'area σ su F corrisponderà sulla sfera un'area τ; assunta come positiva la misura della prima, assumeremo la seconda come positiva o negativa, secondo che a un cammino che circuisca l'area σ p. es. in senso positivo e stando rispetto a F dalla banda delle normali positive, corrisponde sulla sfera un cammino che, stando dal loro esterno di questa, cioè delle normali positive, circuisce τ in senso anche positivo, o negativo. Questo secondo caso si presenta quando le sezioni normali di F in P non volgono tutte la convessità dalla stessa parte, sicchè F ha in P forma concavo-convessa, cioè forma di sella; così p. es. per le superficie rotonde, nelle zone in cui la linea meridiana volge la convessità verso l'asse. In ogni caso si chiama *curvatura totale* (K) della superficie F nel punto P il limite (in valore e segno) del rapporto $\frac{\tau}{\sigma}$ quando l'area σ tende a zero concentrandosi nel punto P. Questa curvatura, che ha dimensione inversa di un'area, è una misura del modo in cui (a seconda del suo segno) e di quanto rapidamente la F in prossimità di P si discosta dal suo piano tangente.

— Per una superficie sviluppabile (ad es. per il piano) l'area τ è sempre nulla, e così anche la curvatura in ogni punto.

2°) Le ∞^1 sezioni normali della superficie **F** in P hanno in P stesso un raggio di curvatura generalmente variabile; e questo raggio, considerato in valore e segno rispetto al verso positivo (comunque fissato) della normale, assume valori stazionari R_1, R_2 per due sezioni normali, determinate da piani perpendicolari fra loro (sezioni normali principali, raggi principali di curvatura): si ha allora $K=\frac{1}{R_1 R_2}$. Se le sezioni normali in P hanno raggio di curvatura costante R, si ha $K=\frac{1}{R^2}$; ed è ciò che avviene per tutti i punti di una sfera di raggio R.

3°) Per un triangolo geodetico sopra una superficie arbitraria, la somma dei tre angoli interni è in generale diversa da π; e la differenza $A+B+C-\pi$, positiva o negativa, si chiama *eccesso geodetico* del triangolo. La curvatura totale di una superficie nel punto P è il limite del rapporto dell'eccesso geodetico all'area (presa in valor assoluto) in ogni triangolo geodetico che tenda a concentrarsi nel punto P.

Gauss ha appunto dimostrato che la curvatura totale di una superficie in un punto può esprimersi per mezzo delle sole funzioni E, F, G e loro derivate, ed è perciò invariante rispetto a deformazioni arbitrarie della superficie ([1]). L'espressione di essa, nella forma più concisa data da Liouville, è la seguente:

$$K=-\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{H}\left(\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{F}{E}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{H}\left(\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{F}{E}\cdot\frac{\partial E}{\partial u}\right).$$

Sopra una superficie qualunque, assumiamo come linea $u=0$ una geodetica arbitraria ([2]); come linee $v=\text{cost.}$ le geodetiche orto-

---

([1]) La si chiama perciò anche una *funzione assoluta* della superficie, o un *invariante differenziale* della forma quadratica $Edu^2+\ldots$. L'invarianza di K risulta manifesta in base alla 3ª definizione suindicata; anzi la determinazione della curvatura e tutta la geometria intrinseca di una superficie seguono già da misure eseguibili sopra questa. Si può rendersi conto ad es. che la terra non è piana per mezzo di sole misure su di essa, in regioni abbastanza grandi. Per Gauss, i lavori geodetici dell'Hannover furono precisamente il punto di partenza delle ricerche sulle superficie.

([2]) Per le ulteriori nozioni di geometria differenziale delle superficie che qui occorrono, rinviamo ai trattati di geometria differenziale; p. es. L. Bianchi:

gonali a questa; come coordinata v l'arco di geodetica $u=0$ contato da una certa origine, come coordinata u l'arco contato sulle geodetiche $v=\text{cost.}$ a partire dalla $u=0$, colle solite convenzioni pei segni. Le linee $u=\text{cost.}$ saranno geodeticamente parallele alla $u=0$, e traiettorie ortogonali delle $v=\text{cost.}$ Si dimostra allora che l'elemento lineare ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 \tag{1}$$

dove la funzione $G(u, v)$ soddisfa alle due condizioni:

$$G(0, v) = 1, \qquad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0 \quad (^1); \tag{2}$$

mentre la curvatura K è espressa da:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

Sia ora $K=\text{cost.}$ Se $K=0$, $\sqrt{G}$ è funzione lineare di u, con coefficienti in generale funzioni di v; ma in forza delle (2) essa si riduce alla costante 1, perciò $ds^2 = du^2 + dv^2$. Invece per $K = \text{cost.} \neq 0$, e sia $K = \pm \frac{1}{R^2}$ ($R = \text{cost.}$), in corrispondenza al doppio segno e tenuto pure conto delle (2) si ha $\sqrt{G} = \cos\frac{u}{R}$, rispett. $\sqrt{G} = \text{ch}\frac{u}{R}$; quindi:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{R}\, dv^2 \quad \text{rispett.} \quad ds^2 = du^2 + \text{ch}^2\frac{u}{R}\, dv^2; \tag{3}$$

Trattandosi di forme completamente determinate, ne segue che *due superficie qualunque aventi una stessa curvatura costante possono applicarsi* (limitatamente a regioni opportune) *in modo da sovrapporre due loro punti arbitrari* (le origini, $u=v=0$) *e due direzioni pure arbitrarie uscenti da questi punti* (quelle delle geodetiche $u=0$). In particolare, *ogni superficie a curvatura costante può applicarsi sopra sè stessa negli stessi modi suindicati*; perciò, come pel piano, con *tre* gradi di libertà.

Lezioni di geometria differenziale, 2 vol., 1922-1923. Per questo n.°, v. vol. 1°, § 124 e seg.

(1) La seconda relazione esprime che per la linea $u=0$ è nulla in tutti i punti la «curvatura geodetica», vale a dire che questa linea (come si è supposto) è una geodetica.

Le superficie a curvatura costante nulla possono tutte applicarsi sul piano; quelle a curvatura positiva $\frac{1}{R^2}$, sulla sfera di raggio R; alle superficie a curvatura costante negativa si dà comunemente il nome di *superficie pseudosferiche.*

Fino dal 1840 F. MINDING aveva riconosciuto (Journ. für matem., vol. 20) che sulle superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ valgono pei triangoli geodetici le formole della trigonometria sferica, nelle quali alle funzioni circolari dei lati si sostituiscano funzioni iperboliche, ossia al raggio della sfera la quantità immaginaria $R\sqrt{-1}$; e queste formole coincidono, salvo la notazione diversa, con quelle di trigonometria piana non euclidea, che Lobačewski aveva pubblicate nella *Géométrie imaginaire*, nel vol. 17 dello stesso periodico (1837). Inoltre Gauss aveva dimostrato che, sopra una superficie qualsiasi, anche a curvatura K variabile, l'eccesso di un triangolo geodetico è dato da:

$$A+B+C-\pi=\int Kd\sigma$$

dove $d\sigma$ è l'elemento d'area, e l'integrale va esteso all'intero triangolo; perciò sopra una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ l'area di un triangolo geodetico è eguale a $R^2(\pi-A-B-C)$, come pel triangolo rettilineo non euclideo (n.° 35, supposto ivi $k=R$) [1]. Doveva quindi venire il momento in cui qualcuno cogliesse il legame intimo fra la geometria di una superficie a curvatura costante negativa e la geometria piana non euclidea; e fu merito di BELTRAMI aver mostrato che *la geometria sulle superficie a curvatura costante negativa coincide* (limitatamente a regioni opportune) *colla geometria piana non euclidea di Lobačewski-Bolyai.*

45. - Geometria di una superficie a curvatura costante negativa. Interpretazione che ne risulta per la geometria piana non euclidea. — Partendo dalla forma (3) dell'elemento lineare di una super-

---

[1] E l'elemento lineare dato qui dalla seconda delle (3) coincide (scrivendo u, v, R in luogo di y, x, k) con quello dato dalla (1) di p. 74 pel piano non euclideo!

ficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ (che scriviamo in coordinate u_1, v_1):

$$(1) \qquad ds^2 = du_1^2 + \mathrm{ch}^2 \frac{u_1}{R}\, dv_1^2$$

e introducendo come nuove coordinate le u, v legate alle u_1, v_1 dalle relazioni:

$$(2) \qquad u_1 = \frac{R}{2} \log \frac{\sqrt{a^2-u^2}+v}{\sqrt{a^2-u^2}-v}; \qquad v_1 = \frac{R}{2} \log \frac{a+u}{a-u}$$

dove a è una costante arbitraria, si trova come espressione del ds^2 nelle nuove coordinate:

$$(3) \qquad ds^2 = R^2 \frac{(a^2-v^2)du^2 + 2uv\, du\, dv + (a^2-u^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2}$$

che può anche scriversi:

$$(4) \qquad ds^2 = R^2 \frac{a^2(du^2+dv^2) - (vdu - udv)^2}{(a^2-u^2-v^2)^2}.$$

Queste espressioni sono meno semplici della (1); ma presentano il vantaggio che le geodetiche sono rappresentate nelle attuali coordinate u, v da equazioni lineari ([1]). Infatti, se alle equazioni delle geodetiche nelle coordinate u_1, v_1, determinate come lo furono da noi (con diversa notazione) al n.° 36, cioè:

$$\mathrm{th} \frac{u_1}{R} = Ae^{\frac{v_1}{R}} + Be^{-\frac{v_1}{R}}$$

(con A, B costanti arbitrarie) si applica la sostituzione (2), l'equazione ultima si muta nell'equazione lineare generale:

$$v = \frac{A-B}{2} u + \frac{A+B}{2} a.$$

Sono perciò geodetiche, fra altre, tutte le linee coordinate $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ Chiamando ω l'angolo delle linee coordinate uscenti da un punto generico (u, v), si ha:

$$\cos\omega = \frac{uv}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}; \qquad \mathrm{sen}\,\omega = \frac{a\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{\sqrt{(a^2-u^2)(a^2-v^2)}}.$$

([1]) La forma (3) era stata incontrata già prima da Beltrami (Annali di Matem., ser. 1ª, vol. 7, 1866) nella determinazione delle superficie — e sono

Perciò la geodetica $u=0$ è perpendicolare a tutte le $v=\text{cost}$; la $v=0$ a tutte le $u=\text{cost}$; e sono fra altro perpendicolari la $u=0$ e la $v=0$ uscenti dal punto $(0, 0)$, lo stesso per cui $u_1=v_1=0$, e punto affatto generico della superficie. Dall'espressione di sen ω appare inoltre che le coordinate u, v assumono in punti reali della superficie soltanto valori pei quali $u^2+v^2<a^2$. — Interpretando u, v in pari tempo come coordinate cartesiane ortogonali in un piano, la nostra superficie si rappresenta biunivocamente sulla regione di piano interna al cerchio $u^2+v^2=a^2$ (cerchio limite), in modo che alle geodetiche della superficie corrispondono le corde di questo cerchio (esclusi i loro prolungamenti). Ponendo $u=r\cos\varphi$, $v=r\,\text{sen}\,\varphi$, (sicchè r, φ sono coordinate polari nel piano rappresentativo), le geodetiche uscenti dal punto $u=v=0$ saranno le linee $\varphi=\text{cost.}$; l'elemento lineare $d\varrho$ sopra di esse sarà dato da:

$$d\varrho=R\,\frac{a\,dr}{a^2-r^2};$$

e l'arco ϱ a partire dal punto $u=v=0$ sarà (integrando):

$$\varrho=\frac{R}{2}\log\frac{a+r}{a-r}=\frac{R}{2}\log\frac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Quest'arco, nullo per $r=0$, va dunque crescendo con r fino a diventare infinito per $r=a$, ossia $u^2+v^2=a^2$ (al di là, diventa immaginario). La linea $u^2+v^2=a^2$, contorno della porzione di superficie considerata e rappresentata sul piano dal cerchio limite, è dunque *il luogo dei punti all'infinito della superficie*, cioè dei punti a distanza geodetica infinitamente grande dal punto $u=v=0$, che è un punto al finito assolutamente arbitrario; al di là di essa non esistono regioni reali della superficie. Sulla porzione di piano interna al cerchio limite viene dunque a rappresentarsi *tutta la regione reale della nostra superficie.*

Avvertiamo però esplicitamente che la superficie qui considerata è soltanto *la moltiplicità analitica a due dimensioni delle coppie di numeri* u, v *tali che* $u^2+v^2<a^2$, *e per la quale la* (3) *assegna la distanza di due elementi* (*punti*) *infi-*

quelle a curvatura costante — che si possono rappresentare sul piano in modo che le loro geodetiche vengano rappresentate da linee rette.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE ★ BIBLIOTECA ★

nitamente vicini, conferendole la curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$; indipendentemente dall'esistenza o meno nello spazio ordinario di una superficie che realizzi geometricamente la detta moltiplicità in tutta la sua estensione. Anzi, tutte le superficie a curvatura costante negativa conosciute, p. es. quelle rotonde di cui diremo al n.° seg., hanno nelle loro linee e punti singolari delle limitazioni naturali che consentono di dare la loro forma solo a regioni opportunamente limitate di quella moltiplicità analitica (come la forma di cono e cilindro rotondo si può dare solo a convenienti regioni di un piano). Appunto per questo, la coincidenza della geometria intrinseca su due superficie applicabili non sussiste generalmente, come già avvertito, che « entro regioni convenienti » (1).

Poichè a due punti reali della superficie corrispondono nel piano rappresentativo punti interni al cerchio limite, i quali individuano una corda di questo cerchio, così: *In tutta la regione reale della nostra superficie, due punti qualunque individuano sempre una (sola) geodetica passante per essi.* A corde incontrantisi nell'interno del cerchio limite corrispondono sulla superficie linee geodetiche aventi un punto comune; a corde incontrantisi fuori di quel cerchio, geodetiche non aventi alcun punto comune in tutta l'estensione (reale) della superficie; per un punto preso fuori di una data geodetica passano dunque infinite geodetiche non incontranti la prima.

Determiniamo l'angolo ϑ sotto cui s'incontrano due geodetiche delle superficie, ad es.:

$$V-v=m(U-u)\,; \qquad V-v=n(U-u)$$

passanti per il punto (u, v). I differenziali dU, dV relativi a spostamenti su di esse sono proporzionali a $1, m$ e $1, n$; sarà perciò:

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{(n-m)\sqrt{EG-F^2}}{E+(n+m)F+mnG}.$$

---

(1) E non porta affatto di conseguenza la coincidenza delle geometrie intrinseche per le due superficie intere. Non coincidono queste ad es. pel piano euclideo e pel cilindro rotondo; su quest'ultimo vi sono geodetiche chiuse (i cerchi sezioni rette), e coppie di geodetiche che si incontrano in infiniti punti (generatrici ed eliche).

Sostituendo a E, F, G le loro espressioni che risultano dalla (3), e ponendo $a^2-u^2-v^2=w^2$, si ha:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{a(n-m)w}{(1+mn)a^2-(v-mu)(v-nu)} \quad (^1).$$

Indicando con ϑ' l'angolo formato, nel piano rappresentativo, dalle corde immagini di queste geodetiche, e con μ, ν gli angoli loro colla retta $v=0$, si ha pure:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{aw \operatorname{sen}\vartheta'}{a^2\cos\vartheta'-(v\cos\mu-u\operatorname{sen}\mu)(v\cos\nu-u\operatorname{sen}\nu)}.$$

Il denominatore rimane reale e finito per valori reali finiti qualunque di u, v e dei vari angoli; nel numeratore, a è costante, e sen ϑ' anche reale e diverso da zero per ogni coppia di corde distinte non parallele del cerchio limite. Perciò a due corde distinte incontrantisi nell'interno del cerchio limite ($u^2+v^2<a^2$, $w^2>0$) corrispondono geodetiche incontrantisi in un punto della superficie a distanza finita, e *sotto un angolo reale, diverso da* 0 *e da* π. Ma se, tenendo ferma una delle due corde, spostiamo l'altra, p. e. facendola ruotare intorno ad un suo punto, in modo che l'intersezione loro tenda a portarsi sul cerchio limite, tenderà a zero w, e con esso tg ϑ; quindi, sulla superficie, *il punto d'intersezione delle due geodetiche si allontanerà indefinitamente, e uno dei loro angoli tende a zero.* E, corrispondentemente alle due corde che congiungono un punto interno al cerchio limite cogli estremi di una corda non passante per esso, vediamo che: *Dati sulla superficie una geodetica e un punto fuori di essa, si potranno condurre per questo punto due diverse geodetiche che dovranno ritenersi incontranti la prima a distanza infinita e sotto angolo nullo*; saranno cioè posizioni limiti di una geodetica la cui intersezione colla prima si faccia allontanare indefinitamente nell'uno o nell'altro verso. Infine, se il punto di intersezione delle due corde è esterno al cerchio limite, w e con

---

(1) La condizione di ortogonalità delle due geodetiche considerate, cioè:

$$(1+mn)a^2-(v-mu)(v-nu)=0$$

coincide colla condizione perchè le rette loro immagini siano reciproche rispetto al cerchio limite $u^2+v^2=a^2$. La ragione di ciò apparirà in seguito (Cap. V, § 2).

esso tg ϑ divengono immaginari, e si hanno geodetiche *non secanti*, le quali hanno una perpendicolare comune, rappresentata dalla corda polare del punto d'incontro delle due prime corde rispetto al cerchio limite (n.° 17; nonchè nota (1) a p. 103).

Queste proprietà coincidono appunto con quelle della geometria di Lobačewski-Bolyai. E siccome tutti gli altri postulati della geometria piana all'infuori di quello delle parallele sono pure verificati sulle superficie a curvatura costante, quando alla parola *retta* si sostituisca *linea geodetica*, possiamo concludere: *La geometria piana non euclidea di Lobačewski-Bolyai coincide colla geometria sopra una superficie a curvatura costante negativa,* intendendo sostituita alla parola *retta* quella di *linea geodetica*, e prescindendo dalle eventuali limitazioni dovute a particolari proprietà di connessione della superficie considerata.

Questo brillante risultato aggiunse al valore scientifico, già indiscutibile, della geometria di Lobačewski-Bolyai anche un'importanza pratica, mostrando ch'essa era suscettibile di interpretazione concreta sopra superficie non piane dello spazio euclideo. Questa stessa interpretazione toglieva altresì ogni dubbio sull'impossibilità di dimostrare il post. 5° di Euclide, deducendolo, con ragionamenti nel piano, dagli altri postulati relativi alla retta e al piano; poichè questi ultimi risultano anche verificati per una superficie a curvatura costante negativa e per le linee geodetiche su di essa, ma non così il post. 5°.

46. - Superficie pseudosferiche rotonde. — In una superficie di rotazione, assumendo come coordinate u, v l'arco di meridiano (contato a partire da un parallelo arbitrario) e la longitudine, e indicando con r il raggio del parallelo, che è funzione della sola u, l'elemento lineare è dato da:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

ed ha la forma (1) di p. 98, con $G = r^2$, senza però che sussistano in generale le condizioni (2). La curvatura è $K = -\frac{1}{r}\cdot\frac{d^2r}{du^2}$. Supponendola costante e negativa $\left(K = -\frac{1}{R^2}\right)$, si ha:

$$\frac{d^2r}{du^2} = \frac{r}{R^2} \quad \text{e integrando:} \quad r = \gamma_1 e^{\frac{u}{R}} + \gamma_2 e^{-\frac{u}{R}}$$

con γ_1, γ_2 costanti arbitrarie. Quest'ultima equazione, nelle variabili r, u, rappresenta *la linea meridiana più generale di una superficie pseudosferica rotonda*; e si hanno *tre* tipi di linea meridiana, e quindi di superficie pseudosferiche rotonde, secondo che γ_1 e γ_2 sono dello stesso segno, o di segno contrario, oppure una di esse è nulla.

Nel primo e secondo caso (γ_1, $\gamma_2 \neq 0$), cambiando il parallelo origine degli archi u, perciò u in $u+c$ dove c è una nuova costante, si introducono nei due termini di r fattori $e^{\pm\frac{c}{R}}$ fra loro reciproci, dei quali possiamo valerci per rendere γ_1 e γ_2 eguali in valore assoluto; così, nei due casi, avremo rispett. $r=\lambda \operatorname{ch} \frac{u}{R}$, $r=\lambda \operatorname{sh} \frac{u}{R}$, e quindi gli elementi lineari:

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{R}\, dv^2; \qquad ds^2 = du^2 + \lambda^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

dove λ è una costante. Per $u=0$, si ha nel primo caso un parallelo di raggio minimo (λ), perciò linea geodetica (cfr. la nota (¹) di p. 98); la superficie corrispondente è indicata nella fig. 52 *a*, e è detta di tipo *iperbolico*, o *anulare*. Nel secondo caso, sempre per $u=0$, si ha $r=0$, e più precisamente un punto doppio conico della superficie (fig. 53 *a*, tipo *ellittico*, o *conico*).

Nel terzo caso, supponendo $\gamma_2=0$ (se fosse $\gamma_1=0$, basterebbe invertire il senso positivo degli archi u) e scrivendo γ in luogo di γ_1, si ha $r=\gamma e^{\frac{u}{R}}$, e perciò l'elemento lineare:

$$ds^2 = du^2 + \gamma^2 e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

La linea meridiana $r=\gamma e^{\frac{u}{R}}$ di questa superficie (fig. 54 *a*, tipo parabolico, o *pseudosfera*) è la così detta *trattrice*; linea che si può definire mediante la proprietà di avere costante la *lunghezza della tangente*, ossia il segmento di tangente compreso fra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa, asintoto della curva e asse di rotazione della pseudosfera (nella fig. 51, l'asse Oz) (¹).

(¹) Di questa linea, e della pseudosfera che ne nasce per rotazione, si è trovato cenno in un appunto manoscritto di Gauss (*Ges. Werke*, vol. 8, p. 265) dove la pseudosfera è designata come « Gegenstück der Kugel ».

Indicata infatti con r l'ascissa, con u l'arco di curva contato a partire da una posizione qualunque, la lunghezza MT della tangente (fig. 51) è espressa, in valore assoluto, da $r\frac{du}{dr}$; ponendola eguale a R, si ha:

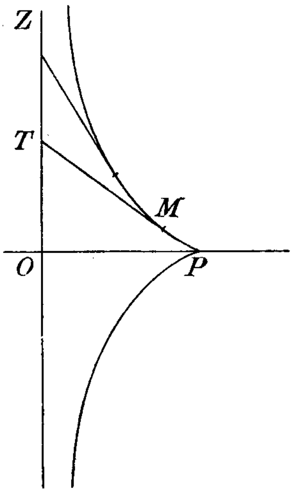


Fig. 51.

$$\frac{dr}{r}=\frac{du}{R},$$

e integrando:

$$\log r=\frac{u}{R}+\log\gamma \quad \text{ossia:} \quad r=\gamma e^{\frac{u}{R}}$$

dove la costante γ è il valore di r per $u=0$.

Gli elementi lineari (1) del n.° 36 e (3), (1) del n.° 37 trovati pel piano iperbolico nei vari sistemi di coordinate coincidono appunto coi tre tipi ora trovati per le superficie pseudosferiche rotonde (ponendo in questi ultimi $R=k$, nonchè rispett. $\lambda=1$, $\lambda=k$, $\gamma=1$). Dal confronto fra i sistemi di coordinate adottati emerge che: *Il piano iperbolico può applicarsi, limitatamente a una regione conveniente, su una superficie rotonda a curvatura costante negativa di ciascuno dei tre tipi* 52 *a*, 53 *a*, 54 *a*, *in modo che ai meridiani di questa si sovrappongano sempre rette di un fascio, rispett. ideale, proprio e improprio, e ai paralleli i cicli* (ipercicli, cerchi, oricicli) *ortogonali a queste rette.* Più particolarmente, sopra ogni superficie rotonda gli incrementi dr, du del raggio del parallelo e dell'arco di meridiano devono soddisfare alla condizione $\left|\frac{dr}{du}\right|\leqq 1$ [1], e quindi per i tre tipi delle fig. 52 *a*, 53 *a*, 54 *a* rispett.:

$$\left|\lambda \operatorname{sh}\frac{u}{R}\right|\leqq R; \qquad \left|\lambda \operatorname{ch}\frac{u}{R}\right|\leqq R; \qquad r\leqq R.$$

I valori estremi di u e di r che risultano da queste relazioni

---

[1] $\left|\frac{dr}{du}\right|$ è il valor assoluto del seno dell'angolo che la tangente alla curva meridiana forma coll'asse della superficie.

corrispondono a punti singolari (cuspidi) della linea meridiana, oltre i quali viene meno la validità della rappresentazione analitica adottata

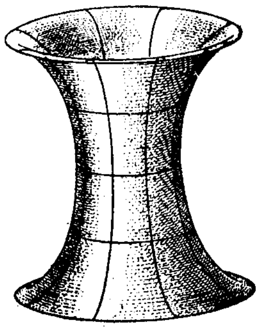


Fig. 52 *a*.

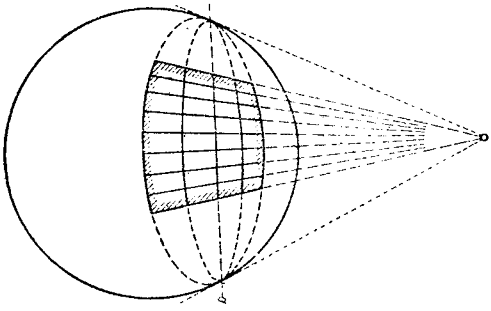


Fig. 52 *b*.

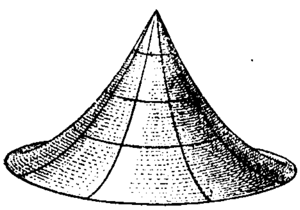


Fig. 53 *a*.

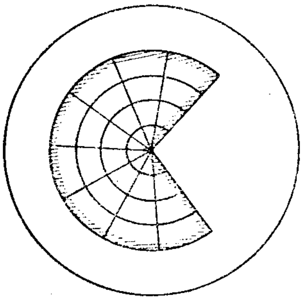


Fig. 53 *b*.

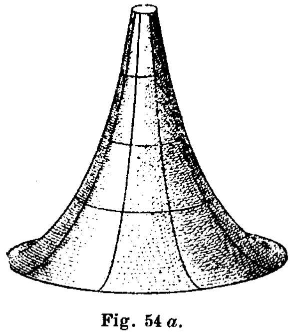


Fig. 54 *a*.

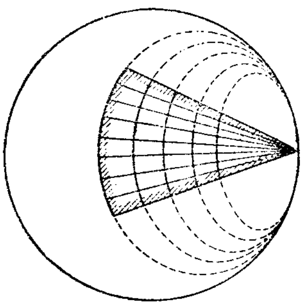


Fig. 54 *b*.

per questa; e portano corrispondenti limitazioni alla zona di piano iperbolico che può deformarsi a superficie di rotazione dello spazio euclideo. Così p. es. la forma della fig. 52 *a* (tipo anulare) può darsi a una zona di piano iperbolico compresa fra due ipercicli simmetrici rispetto alla retta base — retta che si sovrappone al parallelo di gola — e fra due convenienti perpendicolari a quest'ultima retta (fig. 52 *b*); per un dato valore della curvatura K (o di R), aumentando la distanza dei due ipercicli, cioè il valore massimo di u, diminuisce la distanza delle ultime due rette ($2\pi\lambda$), e viceversa; cioè aumentando l'altezza della zona che si vuole deformare a superficie anulare, ne diminuisce la larghezza, e viceversa. La striscia infinita di piano iperbolico compresa fra gli stessi due ipercicli potrebbe avvolgersi infinite volte sopra una superficie di tipo anulare. La forma della fig. 53 *a* (tipo conico) può darsi a un conveniente settore circolare (fig. 53 *b*), la cui ampiezza (per un dato R) diminuisce al crescere del raggio; la forma della fig. 54 *a* (pseudosfera) può darsi alla zona limitata da un arco di oriciclo di lunghezza $2\pi\gamma$ e dagli assi passanti per i suoi estremi (fig. 54 *b*).

I risultati di Beltrami, qui ulteriormente sviluppati, lasciavano ancora aperta la questione dell'esistenza o meno di una superficie dello spazio euclideo che realizzasse geometricamente l'intera varietà analitica ∞^2 a curvatura costante negativa, e la cui geometria coincidesse perciò con quella dell'intero piano di Lobačeswki-Bolyai. A tale questione ha risposto negativamente D. Hilbert:

Nello spazio euclideo non esiste nessuna superficie analitica a curvatura costante negativa e ovunque regolare (*cioè priva di singolarità*); e in particolare *nemmeno una superficie così fatta sulla quale valga nella sua integrità la geometria piana di Lobačewski-Bolyai* ([1]). La dimostrazione di Hilbert è fondata sullo studio del sistema delle asintotiche di una superficie del tipo indicato, supposta esistente, deducendo per due vie diverse,

---

([1]) Superficie *ovunque regolari* sono quelle rappresentabili nell'intorno di un punto qualsiasi, senza eccezioni, qualora si assuma il punto stesso come origine e il relativo piano tangente come piano xy, con uno sviluppo in serie $z = ax^2 + by^2 + ...$, dove i termini non scritti sono di grado > 2, e, se la curvatura è negativa, $ab < 0$. Non sono tali i punti delle linee cuspidali delle superficie rotonde dianzi considerate. V. Hilbert, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 2 (1901), p. 86; *Grundlagen*, p. 251. Il carattere analitico della superficie, ammesso da Hilbert, fu poi dimostrato superfluo: v. G. Lütkemeyer, una prima volta che l'area totale di questa superficie dovrebbe finita, un'altra volta che dovrebbe essere infinita.

Analogamente, la geometria piana ellittica è verificata, limitatamente a zone opportune, sulla sfera (n.° 40) e quindi su tutte le superficie a curvatura costante positiva. La sfera è anzi l'unica superficie chiusa, priva di singolarità, a curvatura costante positiva (1); ma su di essa (come già detto) non vale *nella sua integrità* la geometria piana ellittica, nè questo potrebbe verificarsi su di una superficie non chiusa. *Nello spazio ordinario non esistono nemmeno superficie prive di singolarità, sulle quali valga nella sua integrità la geometria piana ellittica.*

47. - Rappresentazioni conformi del piano iperbolico sul piano euclideo (2). — Dalla rappresentazione di una superficie pseudosferica, e quindi del piano iperbolico, sulla zona di piano euclideo interna al cerchio $u^2+v^2=a^2$ (n.° 45) si deducono facilmente altre rappresentazioni notevoli delle dette superficie sopra zone di superficie elementari dello spazio ordinario.

Considerando la zona piana interna al cerchio $u^2+v^2=a^2$ come proiezione ortogonale di una semisfera, pure di raggio a (fig. 55), si ha una rappresentazione del piano non euclideo su questa semisfera. L'equazione della sfera, in coordinate cartesiane ortogonali ξ, η, ζ, e riferita al centro come origine, è:

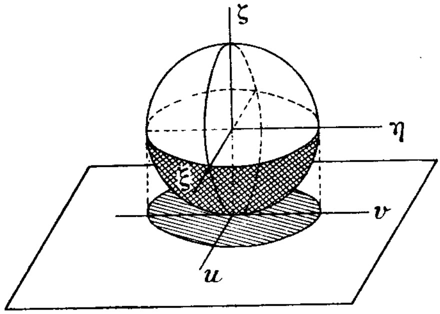


Fig. 55.

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2;$$

Diss. Gottingen, 1902; E. HOLMGREN, Compt. Rend. Acad. d. Sc., 134 (1° sem 1902), p. 840. V. Anche BONOLA: *G. N. E.*, p. 136, dove è detto che questo risultato era già stato previsto come molto probabile da HELMHOLTZ e da A. GENOCCHI.

(1) LIEBMANN, Gött. Nachr., 1899, p. 44; HILBERT, *Grundlagen*, p. 255. Le superficie a curvatura costante positiva sono necessariamente analitiche: LÜTKEMEYER, Diss. cit.; HOLMGREN, Math. Ann., 57 (1903), p. 409.

(2) Per questo n.° e il successivo, v. anche BIANCHI, op. cit., vol. I, Cap. XIV. V. pure F. SCHILLING: *Die Pseudosphäre und die nicht-euklidische Geometrie*, Leipzig-Berlin, 1931.

e la detta proiezione ortogonale è rappresentata dalle equazioni:

$$(1) \qquad \xi = u, \qquad \eta = v, \qquad \zeta = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2}$$

dove al radicale s'intende dato un segno costante. L'elemento lineare $d\sigma$ sulla sfera è dato da $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$, cioè:

$$d\sigma^2 = du^2 + dv^2 + \frac{(udu + vdv)^2}{a^2 - u^2 - v^2} = \frac{a^2(du^2 + dv^2) - (vdu - udv)^2}{a^2 - u^2 - v^2}.$$

Confrontando con l'elemento lineare ds della superficie data a curvatura costante negativa, espresso dalla (4) del n.° 45 (p. 100), si ha:

$$(2) \qquad ds^2 = \frac{R^2}{a^2 - u^2 - v^2} d\sigma^2.$$

Il rapporto degli elementi lineari omologhi $ds : d\sigma$ è perciò funzione delle sole coordinate u, v; proprietà caratteristica delle rappresentazioni conformi [1].

Alle geodetiche della superficie proposta corrispondono sulla semisfera i semicerchi ortogonali al cerchio massimo che limita quest'ultima; a geodetiche parallele, semicerchi incontrantisi sopra questo cerchio massimo, e perciò *tangenti* in un punto di questo cerchio, quindi appunto *incontrantisi ad angolo zero*; a un triangolo geodetico avente tutti tre gli angoli nulli, la sezione determinata nella semisfera da un prisma triangolare avente gli spigoli perpendicolari al piano del cerchio limite e tangenti alla sfera in punti di questo cerchio.

Proiettando ora stereograficamente l'anzidetta semisfera sopra un piano, si hanno rappresentazioni conformi del piano iperbolico sopra convenienti zone di piano euclideo, in modo che alle rette del primo corrispondano cerchi ovvero rette del secondo.

1°) Proiettiamo ad es. la semisfera dal punto $(0, 0, a)$ ($a > 0$, se la semisfera si suppone essere quella delle ζ negative) sul piano $\zeta = -a$, tangente alla sfera nel punto diametralmente opposto al centro di proiezione (fig. 56); perciò nella zona di piano xy interna al cerchio $x^2 + y^2 = 4a^2$. Fra le coordinate di due punti omologhi

---

[1] Infatti, limitatamente agli intorni infinitesimi di due punti omologhi, ds e $d\sigma$ sono proporzionali, e la rappresentazione ottenuta è perciò una similitudine.

$P(\xi, \eta, \zeta)$ della sfera e $P'(x, y)$ del nuovo piano si avranno le relazioni:

(3) $$x = 2a\frac{\xi}{a-\zeta}, \qquad y = 2a\frac{\eta}{a-\zeta}.$$

Indicando pertanto con $ds_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ l'elemento lineare del piano xy, introducendo in luogo di x, y le loro espressioni (3), e valendosi della relazione $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$, si trova facilmente:

$$ds_1^2 = \frac{4a^2}{(a-\zeta)^2}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) = \frac{4a^2}{(a-\zeta)^2}d\sigma^2.$$

Fra l'elemento lineare ds della data superficie pseudosferica e l'elemento ds_1 del piano xy si ha la relazione:

$$ds^2 = \frac{R^2}{a^2 - u^2 - v^2}d\sigma^2 =$$
$$= \frac{R^2}{4a^2}\cdot\frac{(a-\zeta)^2}{\zeta^2}ds_1^2.$$

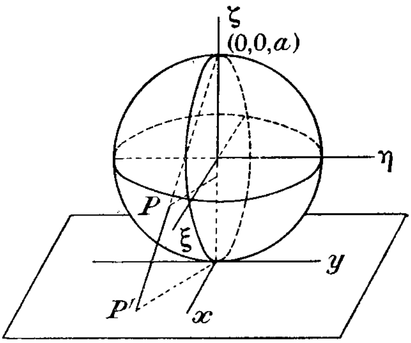


Fig. 56.

Ed esprimendo la frazione $\frac{(a-\zeta)^2}{\zeta^2}$ mediante le coordinate x, y [1]:

(5) $$ds = \frac{R}{a}\cdot\frac{ds_1}{1 - \frac{x^2+y^2}{a^2}} = \frac{R}{a}\cdot\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1 - \frac{x^2+y^2}{4a^2}} \quad [2].$$

Alle geodetiche della superficie corrispondono nel piano xy i cerchi ortogonali al cerchio limite $x^2 + y^2 = 4a^2$ (o, più esat-

---

[1] Si ha $\frac{x^2+y^2}{4a^2} = \frac{\xi^2+\eta^2}{(a-\zeta)^2} = \frac{a+\zeta}{a-\zeta}$, quindi $1 - \frac{x^2+y^2}{4a^2} = -\frac{2\zeta}{a-\zeta}$.

[2] Supponendo la costante a, finora arbitraria, eguale a R, perciò la curvatura della superficie data eguale a $-\frac{1}{a^2}$, si vede che: *Sopra una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{a^2}$ si possono introdurre coordinate curvilinee x, y tali che l'elemento lineare assuma la forma* $ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{1 - \frac{x^2+y^2}{4a^2}}$. È questa forma appunto che, generalizzata, compare in RIEMANN come *forma normale* dell'elemento lineare di una varietà qualunque a curvatura costante $-\frac{1}{a^2}$ (cfr. Cap. IV, n.° 51).

tamente, quegli archi di tali cerchi che sono interni al cerchio limite).

2°) Proiettando ora la stessa semisfera della fig. 55 da un punto del cerchio massimo che la limita, p. es. dal punto $(a, 0, 0)$, sul piano $\xi = -a$, essa si proietta in un semipiano. La nuova proiezione stereografica potrà rappresentarsi colle equazioni:

$$x_0 = 2a \frac{\eta}{a-\xi}, \qquad y_0 = -2a \frac{\zeta}{a-\xi} \quad (^1)$$

e per l'elemento lineare ds_0 del piano x_0, y_0 si ha:

$$ds_0^2 = \frac{4a^2}{(a-\xi)^2} d\sigma^2$$

e quindi:

$$(6) \qquad ds^2 = \frac{R^2}{4a^2} \cdot \frac{(a-\xi)^2}{\zeta^2} ds_0^2 = R^2 \frac{dx_0^2 + dy_0^2}{y_0^2} \quad (^2).$$

La superficie proposta a curvatura costante negativa è ora rappresentata conformemente sul semipiano delle y_0 positive; ai suoi punti all'infinito corrispondono i punti dell'asse x_0; alle geodetiche i (semi)cerchi ortogonali a quest'asse, ossia aventi il centro sull'asse medesimo. Tra questi semicerchi vi sono in particolare le semirette $x_0 = \text{cost.}$, le quali devono considerarsi come particolari semicerchi incontranti l'asse x_0, oltre che in un punto variabile, anche nell'*unico* punto all'infinito che qui si attribuisce al semipiano (ed è immagine del centro di proiezione ([3])). Le semirette $x_0 = \text{cost.}$ sono immagini di un sistema di geodetiche parallele, mentre le rette $y_0 = \text{cost.}$, loro traiettorie ortogonali, sono immagini di oricicli paralleli. La pseudosfera si rappresenta in tal modo conformemente sopra una zona di piano euclideo limitata da due rette parallele ($x_0 = \text{cost.}$) e da una loro perpendicolare comune (ossia sopra un rettangolo di cui un lato si sia allontanato indefinitamente).

([1]) Diamo a quest'ultima frazione il segno negativo perchè, essendosi supposto ζ negativo per tutti i punti della nostra semisfera, risulti positivo il segno (costante) di y_0.

([2]) Questa rappresentazione è studiata diffusamente in BIANCHI, l. c.

([3]) Per $a = R$, si trova per l'elemento lineare ds della superficie primitiva, nelle attuali coordinate, l'espressione $ds = \frac{a}{y_0}\sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}$, che è la (2) del n.° 37 (p. 77).

In queste rappresentazioni conformi di una superficie pseudosferica (o del piano iperbolico) sopra una zona di piano euclideo, quali trasformazioni puntuali di questo piano corrispondono agli ∞^3 movimenti della superficie data (o piano iperbolico) sopra sè stessa? Alle geodetiche della superficie corrispondono cerchi ortogonali a un cerchio fisso, o a una retta, costituenti una rete; e nel piano euclideo si avranno perciò trasformazioni puntuali che mutano in sè questa rete di cerchi, e operano proiettivamente su di essa (poichè mutano fasci in fasci), lasciando fisso il cerchio o la retta ortogonale della rete medesima. Tali trasformazioni sono dunque le ∞^3 affinità circolari dirette che mutano in sè la rete considerata, nonchè il suo cerchio ortogonale. Diremo pertanto [1]:

La geometria metrica piana non euclidea secondo Lobačewski-Bolyai coincide colla geometria del piano euclideo in relazione al gruppo ∞^3 *delle affinità circolari che lasciano fisso un dato cerchio reale, e limitatamente alla regione di piano interna a questo cerchio.* Fra le dette ∞^3 affinità circolari, quelle dirette (che conservano cioè il verso degli angoli) corrispondono ai movimenti del piano non euclideo; quelle inverse ai prodotti di movimenti per simmetrie.

Nel semipiano x_0, y_0 delle y_0 positive (v. sopra), facendo uso della variabile complessa $z_0 = x_0 + iy_0$, queste ∞^3 affinità circolari muteranno in sè l'asse reale x_0. Le affinità dirette possono rappresentarsi analiticamente mediante sostituzioni lineari, in generale fratte, $z_0' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$, a coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *reali* e tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. (Essendo $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, ciascuno dei due semipiani $y_0 \gtrless 0$ è mutato in sè stesso). Le ∞^3 affinità circolari inverse sono invece rappresentate dalle sostituzioni $z_0' = \frac{\alpha \bar{z}_0 + \beta}{\gamma \bar{z}_0 + \delta}$, dove $\bar{z}_0$ è il numero complesso coniugato di z_0, e $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono pure reali, con $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$.

48. - Espressioni di distanze e angoli nella metrica iperbolica. — Vediamo come si esprima, facendo uso della detta rappre-

---

[1] Applicando i concetti del *Programma* di F. Klein: *Vergleichende Betrachtungen....*, Erlangen, 1872; ristampato nei Mathem. Ann., vol. 43 (1893), p. 63. Traduz. italiana di G. Fano negli Annali di Matem., ser. 2ª, vol. 17° (1890), p. 307.

sentazione sul semipiano x_0, y_0, la distanza geodetica δ di due punti della data superficie pseudosferica (o moltiplicità ∞^2 a curvatura costante negativa) aventi immagini piane assegnate P, Q (fig. 57). Ricordando la (6) del n.° prec., bisognerà calcolare l'integrale:

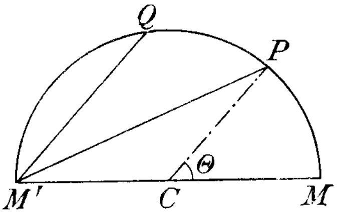


Fig. 57.

$$\int ds = R \int \frac{\sqrt{dx_0^2 + dy_0^2}}{y_0}$$

lungo il cerchio passante per P, Q e avente il centro $C(c, 0)$ sull'asse x_0. L'èquazione di questo cerchio, indicandone con r il raggio, è:

$$(x_0 - c)^2 + y_0^2 = r^2;$$

da cui le equazioni parametriche

$$x_0 - c = r \cos\theta; \qquad y_0 = r \operatorname{sen}\theta,$$

e perciò:

$$dx_0 = -r \operatorname{sen}\theta\, d\theta; \qquad dy = r \cos\theta\, d\theta.$$

$$\int_P^Q ds = R \int_P^Q \frac{r d\theta}{r \operatorname{sen}\theta} = R \left[\log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right]_P^Q.$$

E poichè, pensando P come punto generico del cerchio, $\frac{\theta}{2} = \widehat{MM'P}$, e la differenza di due logaritmi può esprimersi come logaritmo di rapporto:

$$(1) \qquad \delta = \int_P^Q ds = R \log \frac{\operatorname{tg} MM'Q}{\operatorname{tg} MM'P} = R \log M'(MM'QP),$$

ovvero anche

$$\delta = R \log M'(M'MPQ),$$

vale a dire: *La distanza geodetica di due punti della superficie pseudosferica* (o piano iperbolico) *di immagini P, Q è data dal prodotto della costante R per il logaritmo del birapporto $(M'MPQ)$ preso sul cerchio immagine della geodetica che congiunge quei punti.* Poichè sul cerchio P, Q non separano M, M' (estremi del semicerchio contenuto nel semipiano $y_0 > 0$), il detto birapporto è positivo, e il suo logaritmo ha *un* valore reale (che appunto intendiamo prendere). È ovvio che la distanza trovata gode, sopra una stessa geodetica, della proprietà additiva; cambia soltanto di segno scambiando i due punti dati; è nulla quando questi coincidono; cresce indefinitamente in valor assoluto (e tende a un infinito logaritmico) quando P o Q tendono a M o M', cioè tendono a portarsi sulla linea immagine dei punti all'infinito della data moltiplicità.

Poichè nella proiezione stereografica della sfera i cerchi si mutano in cerchi o rette, e si conservano tutti i birapporti su di essi (perchè definiti come birapporti di quaderne di raggi, a loro volta ottenibili l'una dall'altra per proiezioni), il risultato vale per tutte le precedenti rappresentazioni conformi del piano iperbolico.

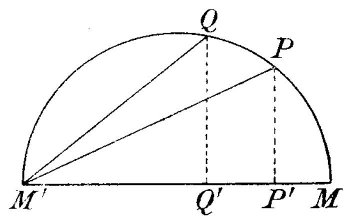


Fig. 58.

La stessa proprietà, salvo un cambiamento inessenziale, vale anche per la rappresentazione (non conforme) di Beltrami, esposta al n.° 45. Riprendiamo il birapporto $(M'MPQ)$ dianzi considerato sopra un semicerchio, semicerchio che pensiamo ora appartenente alla semisfera della fig. 55 ([1]); e indichiamo con P', Q' (fig. 58) le proiezioni ortogonali di P, Q sul piano u, v di Beltrami, che pensiamo perpendicolare al piano della figura secondo la $M'M$. Si ha:

$$(M'MPQ) = \frac{\operatorname{tg} MM'Q}{\operatorname{tg} MM'P} = \frac{Q'Q}{M'Q'} : \frac{P'P}{M'P'}.$$

Elevando a quadrato:

$$(M'MPQ)^2 = \frac{M'Q' \cdot Q'M}{\overline{M'Q'^2}} : \frac{M'P' \cdot P'M}{\overline{M'P'^2}} = \frac{MQ' \cdot M'P'}{M'Q' \cdot MP'} =$$
$$= (MM'Q'P') = (M'MP'Q').$$

E per la distanza geodetica δ dianzi considerata:

$$\text{(2)} \qquad \delta = R \log (M'MPQ) = \frac{R}{2} \log (M'MP'Q').$$

Nella rappresentazione di Beltrami della moltiplicità ∞^2 a curva-

---

([1]) Quindi ortogonale al cerchio limite di essa. Tali birapporti sopra cerchi sono anch'essi invarianti per proiezioni.

tura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$ sulla zona di piano interna al cerchio $u^2+v^2=a^2$, *la distanza geodetica di due punti della moltiplicità* ∞^2 *è eguale al prodotto di* $\frac{R}{2}$ *per il logaritmo naturale del birapporto formato dai due punti immagini sul piano e dalle intersezioni della loro congiungente col detto cerchio* (1).

Una proprietà analoga sussiste, nelle rappresentazioni considerate, per gli angoli. Nel piano euclideo, indichiamo con ω l'angolo di due rette, che possiamo supporre passanti per l'origine e aventi equazioni $y=mx$, $y=m'x$; il birapporto di esse e delle rette isotrope del loro fascio $x\mp iy=0$ è quello dei loro coefficienti angolari, cioè:

$$\varrho=(m, m', -i, i)=\frac{m+i}{m'+i}:\frac{m-i}{m'-i}=\frac{(m+i)^2(m'-i)^2}{(1+m^2)(1+m'^2)}$$
$$=\frac{\{(1+mm')+i(m'-m)\}^2}{(1+m^2)(1+m'^2)}=(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)^2=e^{2i\omega}.$$

Si ha quindi:

$$\omega=\frac{1}{2i}\log\varrho.$$

Nella proiezione stereografica del piano sulla sfera, alle rette $y=mx$, $y=m'x$ del piano corrispondono cerchi della sfera, e alle rette isotrope del piano corrispondono le rette, anche isotrope, giacenti sulla sfera. Nella proiezione ortogonale della sfera sul piano u, v di Beltrami, queste ultime rette si proiettano nelle tangenti del cerchio limite $u^2+v^2=a^2$. Perciò *l'angolo di due geodetiche della moltiplicità* ∞^2 *è dato da* $\frac{1}{2i}$ *nel logaritmo del birapporto formato dalle corde loro immagini nel piano* u, v *e dalle tangenti al cerchio limite appartenenti al fascio di queste.* Tale angolo ha pertanto infiniti valori, congrui rispetto al mod. π (2).

Ora il gruppo ∞^3 delle omografie del piano u, v che mutano in sè il cerchio limite $u^2+v^2=a^2$ lascia invariati tutti i birapporti testè considerati in questo piano. Ad esso corrisponderà perciò sulla

---

(1) La costante a è inessenziale; al variare di essa le rappresentazioni considerate variano solo per similitudine.

(2) Scambiando fra loro i due raggi del fascio tangenti al cerchio limite, si hanno per l'angolo i valori precedenti cambiati di segno; lo scambio equivale quindi a invertire nel fascio il senso positivo di rotazione.

moltiplicità ∞^2 a curvatura costante negativa (o sul piano iperbolico) un gruppo ∞^3 di trasformazioni puntuali che mutano geodetiche in geodetiche, e lasciano invariate distanze ed angoli; quelle trasformazioni dunque che risultano dalle ∞^3 applicazioni della detta moltiplicità su sè stessa: movimenti, e prodotti di questi per simmetrie rispetto a geodetiche (rette), secondo che il senso degli angoli viene conservato o invertito, ossia secondo che l'omografia del piano u, v subordina sul cerchio limite una proiettività concorde o discorde.

Pertanto: *La geometria metrica del piano iperbolico coincide colla geometria proiettiva del piano con un cerchio, o più generalmente con una conica fissa, reale, irriducibile,* e limitatamente alla regione di piano interna a questo cerchio o conica: risultato già virtualmente contenuto in un precedente lavoro di A. CAYLEY (1859; v. n.° 61), ma che solo F. KLEIN doveva più tardi mettere in piena luce (1872).

CAPITOLO IV.

Indirizzi differenziale e gruppale. (Riemann e i suoi continuatori).

49. - **Posizione del problema in Riemann.** — L'indirizzo differenziale nella geometria non euclidea trae origine dalla Memoria di B. RIEMANN: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (¹), nella quale il problema dei fondamenti della geometria è impostato con vedute nuove, originali e profonde, segnando una tappa importante nella storia del pensiero scientifico.

Riemann rileva l'oscurità che involge i fondamenti della geometria, nei quali le proposizioni primitive si considerano date a priori, senza investigarne in alcun modo il contenuto, l'indipendenza, la compatibilità. Egli si propone invece di prender le mosse da nozioni

(¹) Questa Memoria, letta da Riemann nella lezione di prova per la libera docenza (1854), fu pubblicata solo dopo la sua morte, nelle Abhandl. der K. Gesell. d. Wissenschaften zu Göttingen, vol. 13, 1867-1868; e poi compresa nelle « Gesammelte mathematische Werke » di Riemann (Leipzig, 1876; 2ª ediz. 1892). Riemann, nato nel 1826, laureato a Göttingen nel 1851 (dissertazione di laurea, la Memoria classica sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa), aveva presentato due anni dopo come « Habilitationsschrift » la Memoria sulla rappresentazione di una funzione mediante una serie trigonometrica. Dovendo proporre alla Facoltà per la lezione di prova della libera docenza *tre* temi, aveva presentato quello sui fondamenti della geometria come terzo, senza nemmeno averne preparato lo svolgimento, tranquillo che, conforme alla consuetudine, sarebbe stato scelto uno dei due primi. Ora Gauss, che aveva 76 anni compiuti, si era occupato per lungo tempo, come sappiamo (n.° 8), dei fondamenti della geometria, in particolare del postulato delle parallele; e, pur non avendone mai pubblicato nulla, aveva trovate molte proposizioni di geometria non euclidea, e conosceva i risultati pubblicati da Lobačewski e da Giovanni Bolyai, ancora poco noti nel mondo scientifico. Egli ebbe pertanto curiosità di vedere come un giovane se la cavava con un argomento, del quale egli stesso già aveva puramente analitiche, e da proprietà differenziali dello spazio. Nella geometria differenziale delle superficie secondo l'indirizzo di Gauss (n.° 43) una (regione di) superficie si considera semplicemente come una moltiplicità ∞^2, in corrispondenza biunivoca continua colle coppie di numeri (u, v) di un certo campo: si può dire anzi che si considera come superficie questa stessa ∞^2 di « coppie di numeri », entro la quale la formola dell'elemento lineare $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ definisce la distanza ds di due elementi infinitamente vicini, e la lunghezza di un arco finito si deduce dalla precedente per integrazione. Angoli e aree si determinano pure mediante certe formole, nelle quali entrano le funzioni E, F, G e loro derivate. Variando l'espressione dell'elemento lineare, varia la *determinazione metrica* (*Massbestimmung*), o brevemente la *metrica* della superficie. — Questo può farsi anche partendo da gruppi di tre, o più generalmente di n numeri; e si avranno così spazi a tre o ad n dimensioni, suscettibili essi pure di infinite diverse metriche.

Riemann si riferisce senz'altro a uno *spazio* o *varietà a n dimensioni*, ossia a un insieme di elementi, o punti, in corrispondenza biunivoca continua coi gruppi di n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabili in un certo campo. In questa varietà V_n, in base a considerazioni su cui non ci dilunghiamo ([1]), pone — postula come data — una metrica, mediante una forma differenziale quadratica $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$, dove

---

misurate tutte le difficoltà; e scelse il terzo tema. Da ciò la necessità per Riemann di prepararne in fretta lo svolgimento, al quale non aveva gran che pensato. La lezione (che ebbe luogo il 10 giugno 1854) superò notevolmente l'aspettativa di Gauss, il quale, parlandone poi con Guglielmo Weber, si dichiarò, con vivacità e insistenza in lui insolite, molto colpito della profondità del pensiero di Riemann. La lezione non era però destinata ad essere pubblicata; così di essa, fino alla pubblicazione postuma, avvenuta nel 1868, fu pressochè perduto ogni ricordo; tanto più che Gauss, il solo forse che era stato in grado di apprezzarla, morì pochi mesi dopo (23 febbraio 1855).

([1]) Riemann suppone fra altro che la lunghezza ds dell'elemento lineare non varii quando i differenziali dx_i cambiano tutti (soltanto) di segno; e che essa varii solo per infinitesimi di ordine superiore, quando tutti i punti dell'elemento subiscono un eguale spostamento infinitesimo, ossia le loro coordinate omonime x_i ricevono eguali incrementi infinitesimi. Si potrebbe anche supporre ad es. che ds fosse la radice quarta di una forma biquadratica nelle dx_i, e più in generale la radice $2n$-esima di una forma di grado $2n$; ipotesi però le $a_{ik}=a_{ki}$ sono funzioni assegnate delle x_i, univoche, continue e derivabili finchè occorre; e considera questo ds, o *distanza* dei due punti infinitamente vicini (x) e $(x+dx)$, come invariante rispetto a tutti i cambiamenti di coordinate risultanti dal sostituire le x_i con altre n variabili x_i', funzioni univoche delle prime, derivabili finchè occorre, e univocamente invertibili (quindi con determinante Jacobiano non nullo). La forma quadratica che esprime il ds^2 viene assunta con determinante $A=|a_{ik}|$ non identicamente nullo, e inoltre *definita positiva*, tale cioè da risultare sempre positiva, in particolare non mai nulla, per valori reali delle dx_i non tutti nulli. Ciò ad evitare che punti reali distinti possano avere distanza nulla o immaginaria; questo richiede soltanto che le funzioni a_{ik} soddisfacciano nel campo considerato a certe diseguaglianze (per $n=2$, $E>0$, $EG-F^2>0$; cfr. n.° 43). A una varietà V_n (a n dimensioni) così fatta, spesso anche prescindendo dalla condizione che il ds^2 sia forma definita positiva, si dà il nome di *spazio di Riemann.* E *geometria Riemanniana* è la geometria intrinseca di questo spazio, cioè lo studio di tutte le proprietà di questo spazio (o varietà V_n) e delle figure in esso contenute che si conservano nelle anzidette trasformazioni di variabili $x_i'=x_i'(x)$; proprietà comuni allo spazio proposto e a tutti quelli ad esso *applicabili* (o suoi deformati, in senso analogo al n.° 43); geometria dipendente essenzialmente dalla classe di forme quadratiche equivalenti cui appartiene il dato ds^2 (¹). La metrica di questo spazio dipende, apparentemente, dalla scelta arbitraria di tutte quante le funzioni $a_{ik}(x)$, in numero di $\binom{n+1}{2}$; in realtà, potendosi ancora operare sull'espressione del ds^2 una trasformazione arbitraria delle variabili x_i, assumendo come nuove variabili n loro funzioni indipendenti come dianzi accennato, quel numero va diminuito di n; *la determinazione metrica dipende dunque da* $\binom{n}{2}$ *funzioni del*

---

più complessa, e che egli non ha creduto di adottare. Di fatto queste determinazioni metriche più complesse si sono presentate spontaneamente in seguito, in estensioni delle ricerche di Gauss e di Riemann. Vedi E. BOMPIANI: *Invarianti e covarianti metrici nelle deformazioni di specie superiore delle superficie* (Rend. Accad. Lincei, 1919) e *Geometrie Riemanniane di specie superiore* (Mem. Accad. d'Italia, 1935).

(¹) Per la geometria Riemanniana, v. anche L. BIANCHI: *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª ed. (1922-1923), vol. II, Cap. XXV e seg.

luogo (la condizione che la forma ds^2 sia definita positiva implicando per le a_{ik}, come si è detto, soltanto delle diseguaglianze).

Riemann dunque per primo, sciogliendosi da vincoli tradizionali bimillenari, parla della possibilità di *infinite geometrie*, in corrispondenza all'arbitrarietà della scelta dei coefficienti $a_{ik}(x)$ del ds^2. Per lo spazio ordinario, a 3 dimensioni, l'espressione $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ossia la classe delle forme differenziali quadratiche riducibili a questa con trasformazione di coordinate curvilinee, conduce a una metrica, quella solita, che è solo *una* fra le infinite altre possibili; quella che ragioni di semplicità e concordanza coi dati sperimentali ci inducono a preferire.

La limitazione posta da Riemann, che il ds^2 sia una forma definita positiva, viene oggi generalmente abbandonata; soprattutto dopo che la teoria della relatività speciale di A. Einstein (n.° 88 e seg.) ha fornito col suo spazio-tempo (o cronotopo) un esempio importante di spazio (a 4 dimensioni) a elemento lineare *indefinito*. In essa, l'intervallo fra due eventi infinitamente vicini (x, y, z, t) e $(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)$, che è appunto invariante, quando gli si dia la dimensione di intervallo temporale, è espresso da $ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$, dove c è la velocità della luce nel vuoto. Vi sono perciò elementi lineari e archi finiti reali, a estremi distinti, e di lunghezza nulla; tutti gli elementi pei quali $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = c^2$, e le linee composte con elementi così fatti, vale a dire le linee orarie di quei fenomeni che si propagano colla velocità della luce nel vuoto.

50. - Prime conseguenze. Varietà piane. — L'insieme ∞^n dei gruppi di n numeri $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, o spazio analitico, può considerarsi come uno *spazio amorfo*, nel quale l'espressione del ds^2 introduce un *principio di organizzazione geometrica*. Invero, posta così nella varietà la nozione di distanza elementare, ne segue, per integrazione, quella di lunghezza di un arco finito di linea (pensando quest'arco definito col dare le x_i come funzioni di un parametro t, in un certo intervallo, e riducendo l'integrale $\int ds$ in questo intervallo a un integrale nella sola t). Si hanno pure criteri spontanei, analoghi a quelli della geometria delle superficie, per definire le altre proprietà e misure di estensione, angoli, aree, volumi,....; p. es.

l'angolo ω di due direzioni (dx), (δx) uscenti da uno stesso punto mediante la formola $\cos\omega = \frac{\Sigma a_{ik}(dx_i\delta x_k + \delta x_i dx_k)}{ds \cdot \delta s}$. Pensando gli elementi lineari ds, δs come vettori dP, δP uscenti da un punto generico P, la formola di $\cos\omega$ può anche scriversi

$$\text{mod. } dP \text{ mod. } \delta P \cos\omega = \sum a_{ik}(dx_i\delta x_k + dx_k\delta x_i);$$

e perciò dare l'espressione di ds^2 come forma differenziale quadratica nelle coordinate equivale a dare la legge della moltiplicazione interna (scalare) dei vettori uscenti da uno stesso punto.

Si possono anche determinare le equazioni differenziali delle *linee geodetiche*, come linee di cui ogni arco abbia lunghezza stazionaria (nel caso del ds^2 forma definita positiva, lunghezza minima) rispetto a deformazioni infinitesime che non ne spostino gli estremi. Indicando con A_{hk} il complemento algebrico dell'elemento a_{hk} nella matrice $|a_{hk}| = A$, e ponendo $a^{hk} = \frac{A_{hk}}{A}$ (elementi della matrice *reciproca* di $|a_{hk}|$), si possono introdurre i così detti *simboli di Christoffel di 2ª specie:*

$$\left\{ {il \atop k} \right\} = \left\{ {li \atop k} \right\} = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} a^{hk}\left(\frac{\partial a_{ih}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{il}}{\partial x_h}\right),$$

(in numero di $n\binom{n+1}{2}$); e allora le equazioni differenziali delle geodetiche sono:

$$\frac{d^2x_k}{ds^2} + \sum_{il} \left\{ {il \atop k} \right\} \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_l}{ds} = 0$$

ovvero

$$x_k'' + \sum_{il} \left\{ {il \atop k} \right\} x_i' x_l' = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Tali geodetiche dipendono da $2(n-1)$ costanti arbitrarie, e si può individuarne una assegnandone ad arbitrio un punto, e la direzione di essa (cioè i mutui rapporti $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n$) in questo punto.

Ponendo $2T = \sum a_{ik}x_i'x_k'$ (dove gli apici indicano derivazione rispetto all'arco s), le equazioni differenziali delle geodetiche possono anche ricevere la forma equivalente $\frac{d}{ds}\frac{\partial T}{\partial x_i'} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$; coincidono cioè colle ben note equazioni generali di Lagrange del moto di un sistema con n gradi di libertà, di cui T rappresenta la forza viva, nel caso che il sistema non sia sollecitato da forze (moto spontaneo) e che il tempo coincida colla variabile s, lunghezza d'arco. In altri termini, nelle dette ipotesi le posizioni successive del sistema al variare del tempo sono rappresentate dalle successive posizioni di un punto sopra una geodetica della V_n, nella quale si considerino come coordinate le n coordinate Lagrangiane del sistema (fatto ben noto per $n=2$, cioè nel caso del moto di un punto sopra una superficie). E come le proprietà meccaniche essenziali di un sistema in movimento sono virtualmente contenute nell'espressione analitica della sua forza viva, così la geometria intrinseca di uno spazio di Riemann è virtualmente contenuta nell'espressione del suo elemento lineare.

Nell'ipotesi di un ds^2 definito positivo, Riemann chiama *varietà piana* o *spazio euclideo* ogni V_n nella quale il ds^2, in coordinate opportune, si riduce alla somma dei quadrati di queste coordinate: $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$. Tale è appunto lo spazio ordinario, quando in esso si assuma valida la metrica euclidea. Noi chiameremo *varietà piane*, più generalmente, tutte quelle nelle quali il ds^2, in coordinate opportune, può ricevere una delle forme $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \pm dx_i^2$ con termini anche non tutti positivi, distinguendo come *spazi euclidei* quelli con ds^2 a termini tutti positivi, *pseudoeuclidei* gli altri, come p. es. lo spazio-tempo della relatività speciale. (Ma anche per questi ultimi, qualora si faccia uso di immaginari, il ds^2 può ricevere la forma $\sum_{i=1}^{n} dx_i^2$). Si tratta dunque di una categoria molto particolare di spazi. Sono tali, in base a note proprietà di algebra, tutti quelli in cui il ds^2 è espresso da una forma differenziale a coefficienti a_{ik} costanti (riducibile perciò al tipo $\sum \pm dx_i^2 = 0$ con una trasformazione lineare delle variabili). Gli spazi non piani si dicono *curvi* (o anche *non euclidei*) [1]. In ogni spazio Riemanniano le a_{ik} assumono però, in ogni singolo punto, determinati valori numerici, e il ds^2 può quindi ridursi, limitatamente a questo punto, ad una

---

[1] In una V_n piana si chiamano talvolta *coordinate cartesiane* quelle rispetto alle quali il ds^2 è espresso da una forma a coefficienti costanti; sono allora ovunque nulle tutte le derivate di questi coefficienti, e quindi tutti i simboli di Christoffel. Per una V_n comunque curva esiste però *per ogni*

somma di quadrati affetti da segni convenienti; e ciò, naturalmente, per ogni punto, ma con coordinate x_i generalmente diverse da un punto all'altro. *Uno spazio di Riemann può dunque considerarsi come piano in ogni sua parte infinitesima* (e se il ds^2 è definito positivo, sicchè in coordinate opportune $ds^2 = \sum_i dx_i^2$, si può dire che in esso, nel campo infinitesimo, vale il teorema di Pitagora, esteso a n dimensioni); esso è come *un insieme di tanti pezzetti piani* (analogamente ad una superficie, che può considerarsi come insieme di pezzetti dei piani euclidei ad essa tangenti), *senza però che questi pezzetti siano in alcun modo tra loro legati* (d'accordo col fatto che la superficie, o lo spazio, si pensano deformabili a piacere; v. n.° 57, *c*).

51. - Curvatura. Varietà a curvatura costante. — Il concetto di curvatura totale di una superficie dello spazio ordinario in un punto si può estendere a uno spazio di Riemann a n dimensioni. Nella stella ∞^{n-1} delle direzioni uscenti da un punto P della V_n, Riemann considera un *fascio* qualsiasi di direzioni (ossia una *orientazione*, o *giacitura* uscente da P). Analiticamente, pensando ogni direzione entro la stella suddetta determinata dagli n *parametri* $u_i = \frac{dx_i}{ds}$ (legati dalla relazione $\sum a_{ik} u_i u_k = 1$), il fascio contenente le due direzioni $u_i = \frac{dx_i}{ds}$, $v_i = \frac{\delta x_i}{\delta s}$ sarà composto delle direzioni aventi parametri $\lambda u_i + \mu v_i$ normalizzati in modo che

$$\sum a_{ik}(\lambda u_i + \mu v_i)(\lambda u_k + \mu v_k) = 1.$$

Risulteranno così individuate le ∞^1 geodetiche di V_n uscenti da P secondo le ∞^1 direzioni del fascio suddetto, e la superficie (V_2) luogo di queste linee. A questa superficie, come luogo ∞^2 di punti, rappresentabili in funzione di due parametri, spetta un certo elemento lineare, in due variabili, e quindi una certa curvatura totale nel punto P (nel senso di Gauss, n.° 44); questa si chiamerà la *curvatura Rie-*

---

singolo punto P comunque assegnato un sistema di coordinate (dette *localmente cartesiane*, o *geodetiche*) tali che i coefficienti a_{ik} del ds^2 abbiano in quel punto tutte le derivate prime nulle, e siano perciò ivi nulli anche tutti i simboli di Christoffel.

manniana della V_n in P, secondo la giacitura considerata. È, come per le superficie, una specie di misura del quanto la varietà, nelle vicinanze di P e secondo la detta giacitura, si discosta dall'essere piana. Indicando ancora con ds, δs due qualunque elementi lineari uscenti dal punto $P(x_i)$ e contenuti in questa giacitura, potranno assumersi come coordinate omogenee sovrabbondanti della giacitura stessa, analoghe alle coordinate Grassmanniane di retta in uno spazio lineare a tre o più dimensioni [1], i determinanti di 2° ordine della matrice $\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \ldots & dx_n \\ \delta x_1 & \delta x_2 \ldots & \delta x_n \end{vmatrix}$; e la curvatura Riemanniana in P secondo questa giacitura può allora esprimersi come rapporto di due polinomi omogenei di 2° grado nei deteterminanti $dx_i\, \delta x_k - dx_k\, \delta x_i$ [2]. Questa curvatura è (come per le superficie) un invariante della geometria intrinseca della V_n, funzione del punto e della giacitura in esso. Spazi applicabili hanno in punti e giaciture corrispondenti eguali curvature.

Riemann ha considerato in particolare gli spazi da lui detti *a curvatura costante*, nei quali cioè la curvatura in un punto e secondo una giacitura assegnata ha un valore costante, qualunque siano questo punto e la giacitura. Sono gli analoghi delle ordinarie superficie a curvatura costante (piano, sfera, superficie pseudosferiche). Anzi, per $n \geqq 3$ è stato dimostrato in seguito [3] che, se la curvatura dello

---

(1) Da H. GRASSMANN, a cui sostanzialmente ne risale il concetto (*Die Ausdehnungslehre*, Berlin, 1862; Ges. Werke, 1, 2ter Theil; Leipzig, 1896; n.° 65).

(2) Qualche maggiore dettaglio è dato da Riemann nella sua Memoria, supponendo di adottare un conveniente sistema di coordinate (una specie di coordinate polari). Per coordinate qualunque, l'espressione della curvatura si trova nella « Pariser Preisaufgabe » di Riemann (*Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiensi propositae*:...., 1861) pubblicata soltanto nel 1876, a cura di H. WEBER, nel volume delle « Ges. math. Werke », op. XXII; 2a ediz., p. 391, v. in part. p. 403. Ivi Riemann, trattando una questione di propagazione del calore, venne condotto allo studio di alcune forme differenziali quadratiche a tre variabili, e abbozzò una teoria generale di queste forme, senza sviluppare i calcoli relativi (e per questo la sua « Commentatio » non venne premiata dall'Accademia). Lo sviluppo fu poi ricostruito da H. WEBER, in base a manoscritti lasciati da Riemann, nella prima delle « Anmerkungen » da lui aggiunte a quest'ultimo lavoro (vol. cit., p. 405).

(3) SCHUR, Math. Ann., 27 (1886), p. 537. In uno spazio a curvatura

spazio *in ogni singolo punto* si mantiene costante al variare della giacitura, essa non varia nemmeno da punto a punto, ossia lo spazio è a curvatura costante; in altri termini, uno spazio isotropo in ogni suo punto è pure omogeneo in tutta la sua estensione. In questo caso, se il ds^2 è definito positivo, indicando con K il valore costante della curvatura, già Riemann ha rilevato che si possono introdurre coordinate x_i tali che l'elemento lineare assuma la forma tipica $ds^2 = \dfrac{\sum dx_i^2}{\left(1 + \frac{K}{4}\sum x_i^2\right)^2}$ [1]. Gli spazi a curvatura costante nulla ($K=0$) sono gli spazi *piani* (euclidei e pseudoeuclidei). — Uno spazio a curvatura costante può essere applicato su sè stesso in modo analogo a ciò che avviene per il piano euclideo, la sfera, e le superficie pseudosferiche; e precisamente in guisa da sovrapporre due suoi punti arbitrari P, P' e due qualunque n^{ple} di direzioni mutuamente ortogonali e di egual senso uscenti da essi. In altri termini, in questo spazio vi è libera movibilità delle figure, dipendentemente da $\binom{n+1}{2}$ parametri: mentre invece in uno spazio di Riemann del tipo più generale un corpo rigido è legato alla posizione che occupa, e non se ne potrebbe nemmeno concepire l'esistenza in altra posizione. La metrica degli spazi a curvatura costante $\gtrless 0$ è (come già si è veduto per $n=2$) la geometria non euclidea, rispett. ellittica e iperbolica; Riemann ha così poste le basi della geometria non euclidea anche a più dimensioni.

52. - Applicazione allo spazio ordinario. — Nell'ultima parte della sua Memoria, Riemann considera lo spazio ordinario, fisico; e, in base alla rappresentazione (postulata) dell'elemento lineare mediante la radice quadrata di una forma differenziale quadratica,

costante, ogni *superficie geodetica*, luogo cioè delle ∞^1 geodetiche dello spazio uscenti da un punto assegnato secondo direzioni di un fascio (v. sopra), contiene una doppia infinità di geodetiche dello spazio, cioè è pure superficie geodetica rispetto a ogni suo punto. Il lavoro cit. di Schur (che contiene anche altri risultati importanti) parte dalla considerazione degli spazi in cui la proprietà suddetta sussiste solo per una parte delle superficie geodetiche, quelle p. es. che escono da un punto particolare fissato.

(1) Forma compresa nel tipo $ds^2 = U(x) \sum dx_i^2$, dove U è funzione delle sole coordinate x_i.

nonchè all'esistenza nello spazio stesso (secondo i dati dell'osservazione) di un sistema sei volte infinito di movimenti (esistenza delle linee e dei corpi indipendentemente dalla rispettiva posizione), egli ravvisa nello spazio *una varietà a tre dimensioni a curvatura costante.* In essa perciò ad es. la somma degli angoli di un triangolo risulta determinata per ogni triangolo, quando sia nota anche in uno solo particolare. Dalle misure astronomiche su triangoli di grande estensione risulta che il valore assoluto della curvatura costante K non può essere sensibilmente diverso da zero; e se fosse precisamente eguale a zero, lo spazio potrebbe caratterizzarsi come una varietà a tre dimensioni *piana* (a curvatura nulla). Ma anche le ipotesi $K \gtrless 0$, con valore assoluto molto piccolo di K, conducono a geometrie che, entro regioni convenientemente limitate, si dimostrano, con sufficiente approssimazione, concordanti coi dati sperimentali. Riemann conclude pertanto che, fra le tre possibilità, l'esperienza non ha permesso sinora di escluderne alcuna con sicurezza.

Riemann osserva inoltre che, nello studio di una varietà, bisogna distinguere le sue *proprietà di estensione* (*Ausdehnungsverhältnisse*) dalle *proprietà di misura*, o metriche (*Massverhältnisse*). Le prime (come ad es. il numero delle dimensioni di una varietà) non possono dar luogo che a una serie discreta di casi; sicchè i dati dell'esperienza che vi si riferiscono, benchè non sicuri, non possono essere *imprecisi* (*ungenau*). Invece per le proprietà metriche si ha tutta una serie continua di casi possibili (tutti quelli che si ottengono facendo variare con continuità i coefficienti della forma differenziale ds^2); sicchè ogni determinazione sperimentale che vi si riferisca, per quanto grande possa essere la probabilità della sua esattezza, non può darci che valori approssimati. E questa circostanza diventa ancora più importante quando cerchiamo di estendere i dati dell'esperienza al di là dei limiti dell'osservazione diretta, potendo in tal caso le determinazioni metriche, già imprecise, diventarlo sempre di più. *L'esser lo spazio illimitato* (cioè senza frontiere) *è una proprietà di estensione*; *l'esser lo spazio infinito è invece una proprietà metrica.* Che lo spazio ordinario sia una varietà a tre dimensioni *illimitata*, è per noi una premessa costante, che riposa sopra una sicurezza empirica superiore a ogni dato sperimentale. Ma di qui non segue ch'esso sia pure *infinito*; anzi, se lo spazio avesse una curvatura costante positiva, pur comunque prossima a zero, esso sarebbe certamente finito, perchè, come si dimostra col calcolo, sarebbe finita la lunghezza delle geodetiche, cioè queste sarebbero rientranti, come sulla sfera (sia pure, data la curvatura piccolissima, dopo un percorso assai lungo). Lo spazio stesso potrebbe allora concepirsi come una varietà a 3 dimensioni analoga alla sfera; le geodetiche uscenti da un suo punto secondo direzioni contenute in un fascio ricoprirebbero una superficie applicabile sulla sfera, illimitata, ma finita. *È appunto merito di Riemann di avere,* in seguito alla profonda sua analisi, *rilevato per primo* (a prescindere dalle considerazioni di Saccheri, Lambert, Taurinus) *la possibilità di questo terzo caso* ($K > 0$), *che conduce a una geometria non euclidea nella quale la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti.*

53. - Osservazioni ulteriori sulla Memoria di Riemann. — La geometria di Riemann, partendo da premesse differenziali, relative cioè a un campo infinitamente piccolo, si domanda quali proprietà ne seguono per lo spazio intero. Essa si distingue perciò nettamente dall'ordinaria geometria elementare, che fa intervenire lo spazio intero già nei primi postulati, p. es. nei postulati di appartenenza e in quello delle parallele. — È appunto concetto filosofico fondamentale, riconoscibile in tutta l'opera di Riemann, lo studio delle proprietà dei varii enti, qui dello spazio, acquisito dal loro comportamento nell'infinitamente piccolo (1); come, altro esempio classico, la teoria delle funzioni di una variabile complessa $w(z)$, costruita a partire dall'ipotesi che la derivata $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente, in ogni punto, dall'incremento (ossia dalla direzione) dz; il che equivale a dire che la corrispondenza risultante fra i due piani della z e della w sia simile nelle parti infinitesime. È l'analogo di ciò che, in fisica, si è verificato coll'abbandono delle *azioni a distanza*, e colla tendenza a spiegare i fenomeni mediante una graduale propagazione attraverso un mezzo continuo. F. KLEIN (2) afferma anzi che idee consimili erano

(1) F. KLEIN: *Riemann und seine Bedeutung für die Entwickelung der modernen Mathematik*, Vorh. d. Ges. Deutscher Naturf. u. Aerzte, allg. Theil, 1894. Trad. ital. di E. PASCAL, Ann. di Matem. (2), 23, 1896, p. 222.

(2) *Vorlesung über die Entwickelung der Mathematik im XIX Jahrhundert*, vol. I (1926), p. 251.

allora, a Göttingen, per così dire, sparse nell'aria stessa che si respirava, almeno da parte degli « spiriti sensibili »; diffuse soprattutto tra coloro che, come Riemann, erano cresciuti all'ombra del binomio matematico-fisico Gauss-Guglielmo Weber. E queste idee precorrevano lo svolgimento ulteriore che ha ricevuto la fisica; precorrevano Maxwell, e forse anche Einstein per quanto concerne la gravitazione. — Già Gauss in una lettera a G. Weber del 19 Marzo 1845 (Opere, vol. 5°, p. 629) aveva accennato alla trasmissione delle azioni elettriche a distanza col tempo « auf ähnliche Weise wie beim Licht », senza però essere ancora riuscito a formarsi « eine construierbare Vorstellung » del modo in cui essa avviene (il che, secondo lui, avrebbe costituito la chiave di volta di tutta l'elettrodinamica); e Riemann, in una lettera 28 Dic. 1853 al fratello (1), conferma che Gauss aveva pensato da anni a questo argomento, e a qualcuno, fra altri a G. Weber, aveva comunicato le proprie idee, confidenzialmente e con promessa di assoluto segreto. — Riemann stesso, nella Memoria « Ein Beitrag zur Elektrodynamik » (2), parla dell'azione di una massa elettrica che si trasmette con velocità costante, ed eguale nei limiti degli errori di osservazione alla velocità della luce, sicchè la propagazione della luce, calore, energia elettrica sarebbe retta dalle stesse equazioni differenziali. Nella lettera al fratello già cit. parla di ulteriori ricerche « über den Zuzammenhang zwischen Elektricität, Galvanysmus, Licht, und Schwere »; e alla fine della Memoria sui fondamenti della geometria scrive: « Bei einer stetigen Mannigfaltikeit muss das Prinzip der Massverhältnisse von anders her hinzukommen. Der Grund der Massverhältnisse muss ausserhalb des Raumes, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden ». Con ciò egli sembra davvero preconizzare l'avvento di una fisica teorica in cui la metrica dello spazio, almeno nelle immediate vicinanze della materia, avrebbe dovuto dipendere dai fenomeni che ivi si svolgono; fenomeni dei quali essa sarebbe stata indice, ed avrebbe potuto divenire interpretazione.

---

(1) *Riemanns Lebenlauf*, Ges. mathem. Werke, p. 547.

(2) Ges. math. Werke, XIV. Questa Memoria, presentata nel 1858 alla Società delle Scienze di Göttingen, fu poi ritirata dall'A., e pubblicata solo dopo la sua morte.

54. - Ricerche che fanno seguito alla Memoria di Riemann. — La Memoria di Riemann, come appare evidente dall'analisi sommaria che ne abbiamo fatta, conteneva in sè elementi profondamente innovatori nel campo matematico, critico, e filosofico. E infatti, appena pubblicata (1868), per quanto la lettura, allora soprattutto, ne riuscisse non facile, essa destò profonda impressione ([1]), e fu origine di nuove correnti di idee, affermatesi in più modi.

Come continuatori immediati di Riemann, secondo diversi indirizzi, vanno segnalati:

1°) EUGENIO BELTRAMI, per la teoria generale degli spazi a curvatura costante;

2°) E. B. CHRISTOFFEL e R. LIPSCHITZ, e particolarmente il primo, per la teoria analitica generale delle forme differenziali quadratiche a n variabili, e la ricerca delle loro condizioni di equivalenza rispetto a trasformazioni qualsiansi delle variabili. A seguito di questi lavori di Christoffel si è sviluppato, dal 1885 circa in poi, il *calcolo differenziale assoluto* (o calcolo di RICCI), cioè la trattazione analitica della geometria intrinseca di una V_n Riemanniana, nella quale A. EINSTEIN ha trovato lo strumento matematico della sua teoria della relatività generale (1915) ([2]).

3°) H. von HELMHOLTZ, per quanto concerne più specialmente il problema dei fondamenti della geometria; di qui ebbe origine l'indirizzo gruppale della geometria non euclidea, o « *Problema di Riemann-Helmholtz* » (n.i 58-59).

55. - Spazi a curvatura costante. Beltrami. — Nella Memoria: *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante* ([3]) Beltrami si propone di estendere a un numero qualunque di variabili

---

([1]) Si è già detto al n.° 11 (p. 24) che questa pubblicazione avvenne circa contemporaneamente a quella delle traduzioni italiane e francesi delle opere di Lobačewski e G. Bolyai.

([2]) Einstein stesso scrisse che questa teoria costituisce « *einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls* ».

([3]) Porta la data dell'agosto 1868: Annali di Matem. (2), vol. 2, 1868, p. 232; Opere mat., vol. 1 (1902), p. 406. L'importanza di questa Memoria è anche provata dal fatto che a un anno di distanza ne fu già pubblicata una traduzione francese, di Hoüel (Ann. Ec. Norm. Sup., vol. 6 (1869), p. 345).

quel complesso di sviluppi analitici che, nel caso di due sole variabili, costituisce la teoria delle superficie a curvatura costante, della quale egli si era già occupato ripetutamente negli ultimi anni ([1]). Vengono estesi, fra altro, alcuni sistemi di coordinate curvilinee; le relative espressioni dell'elemento lineare; la rappresentazione delle geodetiche, in coordinate opportune, con equazioni lineari; il tutto coordinato ai concetti della Memoria di Riemann.

L'espressione differenziale:

$$(1) \qquad ds = R \frac{\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}}{x}$$

dove $x, x_1, x_2, \dots x_n$ sono $n+1$ variabili legate dalla relazione:

$$(2) \qquad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2$$

e R, a sono costanti reali arbitrarie, rappresenta l'elemento lineare di uno *spazio* o *varietà* V_n *a* n *dimensioni*, i cui punti possono considerarsi individuati mediante le n coordinate $x_1, x_2, \dots x_n$, mentre x è coordinata sopranumeraria legata alle precedenti dalla (2). Essa è manifestamente generalizzazione della (2) del n.° 47, la quale può scriversi $ds = R \frac{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}}{\zeta}$, con $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$.

Introduciamo come angolo di due elementi lineari $(dx, dx_1, \dots)$ e $(\delta x, \delta x_1, \dots)$ uscenti da uno stesso punto l'angolo θ definito da:

$$dx\,\delta x + dx_1\,\delta x_1 + \dots + dx_n\,\delta x_n = \frac{x^2 ds\,\delta s}{R^2} \cos\theta,$$

sicchè i due elementi si diranno ortogonali quando:

$$dx\,\delta x + dx_1\,\delta x_1 + \dots + dx_n\,\delta x_n = 0.$$

La varietà V_n risulta così rappresentata conformemente sulla sfera di equazione (2), nello spazio euclideo S_{n+1} delle $n+1$ coordinate $x, x_1, \dots x_n$ con elemento lineare $\sqrt{dx^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2}$ (più precisamente, sulla semisfera per cui $x > 0$, oppure $x < 0$); e risulta pure rappresentata, ma non più conformemente, sulla regione di spazio S_n (iperpiano) $x = 0$ interna alla sfera $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2$, proiezione

---

([1]) Annali di Matem. (1), vol. 7, 1865, p. 185 = Opere mat., vol. 1, p. 262; nonchè la Memoria sull'interpretazione della geometria non euclidea, di cui qui al n. 45.

ortogonale della precedente (tutte generalizzazioni delle rappresentazioni vedute ai n.[i] 45, 47).

In base all'elemento lineare della V_n, Beltrami determina le equazioni delle geodetiche, che trova sotto la forma finita:

$$(3) \quad x_1 = b_1 x_n + b_1'; \qquad x_2 = b_2 x_n + b_2'; \dots \qquad x_{n-1} = b_{n-1} x_n + b'_{n-1}$$

colle $2(n-1)$ costanti arbitrarie b, b'. *Le geodetiche della nostra varietà o spazio a n dimensioni sono dunque rappresentate da $n-1$ equazioni lineari nelle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$.* Viceversa, ogni sistema di $n-1$ equazioni lineari distinte nelle x_i rappresenta una linea geodetica, e può mettersi in generale sotto la forma (3). Saranno pertanto geodetiche anche tutte le linee che si rappresentano uguagliando $n-1$ delle coordinate x_i a costanti arbitrarie.

Chiamando *assi coordinati* le n geodetiche le cui equazioni si ottengono eguagliando a zero tutte le coordinate x_i meno una, geodetiche che passano tutte per il punto *origine* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ e sono a due a due ortogonali, si trova che l'espressione dell'elemento lineare (1) rimane inalterata per tutte le trasformazioni che si rappresentano analiticamente con sostituzioni lineari delle coordinate x_i e che conducono ad assumere come nuovi assi coordinati un sistema qualunque di geodetiche uscenti da uno stesso punto e a due a due ortogonali. La varietà proposta è dunque *applicabile sopra sè stessa* (in senso analogo a una superficie), in modo che si possono sovrapporre due punti arbitrari e due gruppi qualunque di n direzioni mutuamente ortogonali uscenti da questi punti (complessivamente dunque in un numero di modi dipendente da $\binom{n+1}{2}$ parametri). E questo basta per concludere che il nostro spazio è, secondo la denominazione di Riemann, uno *spazio a curvatura costante.* Questa curvatura costante, calcolata da Beltrami mediante la formola in coordinate polari data da Riemann (v. le prime linee della nota ([2]) a pag. 126), risulta negativa e $= -\frac{1}{R^2}$.

La lunghezza ϱ dell'arco di geodetica compreso fra l'origine e un punto generico $(x_1, x_2, \dots x_n)$ è data da:

$$\operatorname{ch} \frac{\varrho}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2}};$$

e cresce indefinitamente in valor assoluto quando il punto (x) tende a portarsi sulla *varietà limite* $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=a^2$. Sono perciò a distanza reale finita dall'origine, e anche fra loro a due a due (l'origine essendo arbitraria), i soli punti per cui $\sum_i x_i^2<a^2$.

Altri due sistemi di coordinate (analoghi pur questi a sistemi usati al n.° 47) si introducono mediante sostituzioni che possono interpretarsi come *proiezioni stereografiche della sfera* $x^2+x_1^2+\dots+x_n^2=a^2$ *di uno spazio a* $n+1$ *dimensioni sopra uno spazio a* n *dimensioni.*

Ponendo:

$$\xi_i=\frac{2Rx_i}{a+\sqrt{a^2-\sum x_i^2}}=2R\lambda_i \operatorname{th}\frac{\varrho}{2R}$$

si ricava:

$$ds=\frac{\sqrt{d\xi_1^2+d\xi_2^2+\dots+d\xi_n^2}}{1-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}{4R^2}}$$

che è la forma data (benchè non dimostrata) da Riemann come caratteristica per gli spazi di curvatura costante $K=-\frac{1}{R^2}$ (estensione della (5) del n.° 47, per $a=R$).

Introducendo invece le variabili $\eta, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ (analoghe alle y_0, x_0 dei n.i 47-48) definite dalle relazioni:

$$\eta=\frac{Rx}{a-x_n},\quad \eta_1=\frac{Rx_1}{a-x_n},\dots\quad \eta_{n-1}=\frac{Rx_{n-1}}{a-x_n}$$

si ha:

$$ds=R\frac{\sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+\dots+d\eta_{n-1}^2}}{\eta}.$$

Da quest'ultima formola ricaviamo due conseguenze importanti:

1°) *La formola* (1) *del presente n.°* — essendo dello stesso tipo di quest'ultima — *rappresenta l'elemento lineare di uno spazio a curvatura costante* $\left(=-\frac{1}{R^2}\right)$ *anche quando le* $n+1$ *variabili* $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ *siano indipendenti.* In questo spazio, di dimensione $n+1$, le geodetiche non saranno però rappresentate da equazioni lineari;

2°) *Gli spazi* $\eta=$cost. *del nuovo sistema di coordinate sono varietà piane* (*a curvatura costante nulla*) *di dimen-*

sione $n-1$: infatti entro di essi (essendo $d\eta=0$) l'elemento lineare ha la forma:

$$ds = \frac{R}{\eta}\sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + \dots + d\eta_{n-1}^2}$$

dove il fattore costante $\frac{R}{\eta}$ può facilmente ridursi all'unità. — Inoltre le geodetiche concorrenti nel punto all'infinito $x_1 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = a$ possono rappresentarsi colle equazioni differenziali:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{dx_n}{x_n - a} = \frac{-x dx}{a^2 - x^2 - a x_n}$$

l'ultima delle quali è una conseguenza delle precedenti. Di qui, e dalla data definizione dell'ortogonalità, si deduce che le varietà (di dimensione $n-1$) traiettorie ortogonali di queste geodetiche dovranno soddisfare all'equazione differenziale:

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + \dots + x_{n-1} dx_{n-1} + (x_n - a) dx_n - \frac{a^2 - x^2 - a x_n}{x} dx = 0$$

ossia (poichè $x dx + x_1 dx_1 + \dots = 0$):

$$\frac{dx_n}{a - x_n} + \frac{dx}{x} = 0$$

e sono quindi le varietà $x = \text{cost.}\,(a - x_n)$, ossia appunto le $\eta = \text{cost.}$ Pertanto: *Le varietà V_{n-1} traiettorie ortogonali di un sistema di geodetiche parallele* (ossia concorrenti in uno stesso punto all'infinito) *sono varietà piane* (le analoghe delle orisfere).

Riconosce pure Beltrami che *la geometria solida non euclidea* (di Lobačewski) *coincide colla geometria di uno spazio a tre dimensioni a curvatura costante negativa* (il che, secondo le vedute di allora, poteva avere soltanto il valore di rappresentazione analitica).

La teoria degli spazi a curvatura costante *positiva* si ricava dalla precedente cambiando R, a, x rispett. in $R\sqrt{-1}$, $a\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$. La distanza geodetica di due punti risulta allora determinata soltanto a meno di multipli di πR; la lunghezza delle geodetiche è perciò finita, e non esistono punti reali all'infinito.

Il risultato di Beltrami, che le geodetiche di uno spazio a curvatura costante possono rappresentarsi con equazioni lineari, è stato invertito da SCHLÄFLY nella sua *Nota alla Memoria del Signor*

Beltrami: « *Sugli spazi di curvatura costante* » (1), dimostrando che ogni spazio le cui geodetiche possono rappresentarsi con equazioni lineari è uno spazio a curvatura costante; e che le coordinate più generali che conducono a questa rappresentazione si ottengono operando una sostituzione lineare sopra quelle adoperate da Beltrami. Ciò equivale a sostituire alla funzione $a^2 - \sum x_i^2$ che, eguagliata a zero, rappresentava lo *spazio limite* di Beltrami, un'altra funzione quadratica a discriminante non nullo.

Beltrami stesso, nella successiva *Risposta alle osservazioni del Signor Schläfly* (2), ha messi in relazione questi risultati colle *determinazioni metrico-proiettive* che traevano origine da ricerche di A. CAYLEY, delle quali egli era nel frattempo venuto a conoscenza: ricerche proseguite poi da F. KLEIN (3), e colle quali le sue Memorie avevano molti punti di contatto. — Il fatto che le geodetiche di una varietà a curvatura costante possono rappresentarsi con equazioni lineari, e viceversa, può enunciarsi dicendo che: *Fra gli spazi Riemanniani, quelli a curvatura costante hanno la proprietà caratteristica di potersi considerare*, limitatamente a regioni opportune, *come spazi proiettivi, di cui le linee geodetiche dei primi costituiscono le rette.* Anzi, avendo Beltrami dimostrato che le applicazioni, o *movimenti* della varietà sopra sè stessa si rappresentano analiticamente con sostituzioni lineari di quelle stesse coordinate, possiamo aggiungere: *La geometria* (*metrica*) *di una varietà a n dimensioni e di curvatura costante* (*positiva, negativa, o nulla*) *è sempre contenuta nella geometria proiettiva di uno spazio a n dimensioni* (poichè, dei relativi *gruppi fondamentali*, il primo è contenuto nel secondo). Questa conclusione apparirà nel modo più chiaro e luminoso dal prossimo Cap. V.

56. - Christoffel, Ricci. La geometria intrinseca di uno spazio Riemanniano. — CHRISTOFFEL (4), muovendo dall'idea di estendere al caso di un numero qualunque di variabili la trattazione analitica

(1) Annali di Matem. (2), vol. 5° (1871-1873), p. 178.

(2) Annali di Matem., ser. e vol. cit., p. 194; Opere mat., vol. 2° (1904), p. 385.

(3) Cfr. qui pure, Cap. V.

(4) Journ. f. Mathem., vol. 70 (1869), p. 46, 241.

del problema delle superficie applicabili, si occupò della possibilità di riconoscere con soli mezzi elementari (cioè con procedimenti di algebra e di calcolo differenziale) se due date forme differenziali quadratiche a uno stesso numero n di variabili potevano essere trasformate l'una nell'altra; e giunse a risolvere la questione per le varietà che *non* possono muoversi sopra sè stesse in modo continuo. Restavano così esclusi casi particolari interessanti, ma meno facili da indagare (analoghi p. es. alle superficie di rotazione, sovrapponibili a sè stesse in ∞^1 modi diversi), che solo più tardi furono determinati, per $n=3$ da L. BIANCHI (1), e altri da suoi allievi (2). R. LIPSCHITZ (3) ha affrontata in vari modi la teoria invariantiva delle forme differenziali a n variabili, anche di grado >2; cercando in quali casi queste forme possono trasformarsi in altre a coefficienti costanti; determinandone forme covarianti, dalle quali nasce come caso particolare l'espressione della curvatura di Riemann; e prendendo contatto con problemi di calcolo delle variazioni e di meccanica (legame già rilevato nel problema delle geodetiche di uno spazio di Riemann, n.° 50).

Da questi lavori procede gradualmente la *geometria intrinseca* di una varietà o spazio Riemanniano V_n (detta anche *geometria Riemanniana*). In questa si fa uso di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ affatto qualunque, vincolate soltanto alla condizione che in ogni loro trasformazione le nuove coordinate x_i' siano funzioni univoche, continue, derivabili finchè occorre, e univocamente invertibili delle x_i; e si suppone imposta come invariante la forma differenziale quadratica $ds^2 = \sum_{i,k} a_{ik}(x) dx_i dx_k$, di modo che la trasformazione nota delle x_i e quindi dei loro differenziali primi implica di conseguenza (perchè sia invariante il ds^2) un comportamento determinato per i coefficienti $a_{ik}(x)$. La detta geometria intrinseca ha per iscopo di mettere in evidenza, entro V_n, tutto ciò (proprietà, formole, leggi matematiche,....) che è indipendente dalla scelta delle variabili (coordinate), nonchè tutti

(1) Mem. soc. Ital. d. Scienze (3), vol. 11 (1897).

(2) Principalmente G. FUBINI, in vari lavori degli anni 1902-1905.

(3) Journ. f. Mathem., vol. 70 (1869), p. 71; vol. 71 (1870), p. 274, 288; vol. 72 (1870), p. 1, e altri successivi. Riassunto nel Bull. des Sc. Mathém. et Astr. (1), t. 4 (1873), p. 97.

gli enti legati invariantivamente al dato ds^2, cioè alla metrica della V_n (linee geodetiche, curvatura,....), e dare procedimenti per ricavarli l'uno dall'altro; di vedere come si comportano nelle trasformazioni delle x_i i parametri che determinano quei varii enti, e quali parametri convenga scegliere perchè ne risultino più semplici le trasformazioni. — Geometricamente, interpretando le trasformazioni $x_i' = x_i(x)$ come trasformazioni puntuali della V_n che ne lasciano invariato l'elemento lineare, la geometria intrinseca di una V_n ha per *gruppo fondamentale* (nel senso di F. Klein) l'insieme di quelle trasformazioni puntuali di essa che conservano invariata la lunghezza di ogni elemento lineare, e perciò anche inalterata la lunghezza di ogni arco finito di linea; che mutano quindi geodetiche in geodetiche, in particolare geodetiche di lunghezza nulla (reali o immaginarie, secondo che l'elemento lineare non è oppure è definito) in geodetiche anche così fatte, e il cono quadrico (reale o no) degli elementi di lunghezza nulla uscente da un punto arbitrario di V_n nell'analogo cono quadrico uscente dal punto omologo. Per spazi a curvatura costante, negativa o positiva, la geometria Riemanniana si riduce alla geometria non euclidea, iperbolica od ellittica; per spazi di Riemann generici (a curvatura variabile) è una generalizzazione delle precedenti, una *geometria non euclidea in senso più generale di quello consueto.*

L'algoritmo di calcolo rispondente a questo intento, cioè a tradurre in forma analitica proprietà geometriche intrinseche della V_n e della sua metrica, è stato fornito da G. Ricci col suo *Calcolo differenziale assoluto* (oggi anche designato come « Calcolo di Ricci »), avviato verso il 1885 in alcuni lavori sulle forme differenziali quadratiche [1], e poi ulteriormente svolto e perfezionato [2]. Ma soltanto l'applicazione fattane da A. Einstein alla teoria della relatività

---

[1] Annali di Matem. (2), vol. 12 (1884), p. 135, vol. 14 (1886), p. 1, e altri lavori successivi nei Rend. Acc. d. Lincei e Atti Ist. Veneto.

[2] Prima esposizione riassuntiva nel Bull. des sc. mathém., vol. 16 (1892), p. 167; più tardi nella Memoria sua e di T. Levi-Civita: *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann., 54 (1900), p. 125. Oggi, dopo che il calcolo differenziale assoluto è diventato strumento matematico della teoria della relatività generale, sono numerosi i trattati ad esso dedicati in tutto o in parte. V. p. es. quelli di Schouten (1924) e Levi-Civita (1925).

generale (1915) assicurò ai metodi di Ricci l'attenzione dei cultori più insigni della matematica e della fisica. — Un'esposizione anche sommaria di questi procedimenti esorbita dall'intento del presente volume. Ci limiteremo a accennarne qualcuno dei concetti fondamentali.

57. - Cenni sul calcolo differenziale assoluto. — *a*) Il calcolo differenziale assoluto estende a ogni V_n Riemanniana i concetti di scalare, vettore, tensore, e il calcolo relativo. Per la parte algebrica si è modellato sulla teoria delle forme algebriche, quindi delle espressioni e proprietà invarianti rispetto a sostituzioni lineari omogenee delle variabili, a coefficienti costanti: in una trasformazione generale di variabili $x_i'=x_i'(x)$ i differenziali dx_i si sostituiscono infatti secondo lo schema $dx_i'=\sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} dx_k$; sicchè la trasformazione $x_i'=x_i'(x)$ può dirsi lineare nel campo infinitesimo.

Si chiama « *sistema semplice contravariante* » un insieme di n funzioni del luogo A^i $(i=1, 2,\ldots, n)$, le quali in ogni trasformazione $x_i'=x_i'(x)$ si sostituiscano come i differenziali dx_i, vale a dire:

$$A^{i'}=\sum_k \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} A^k. \tag{1}$$

« *Sistema semplice covariante* » è ogni insieme di n funzioni del luogo A_i le quali si sostituiscano come le derivate prime di una funzione invariante:

$$A_i'=\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} A_k. \tag{2}$$

I differenziali dx_i e le derivate prime $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ di una funzione del luogo φ forniscono gli esempi più semplici di un sistema rispett. dell'uno e dell'altro tipo. I differenziali si scrivono perciò spesso cogli indici in alto (dx^i), come le A^i.

Pensando la V_n come contenuta in uno spazio euclideo a un numero conveniente N di dimensioni (il che è sempre possibile per un valore $N\leqslant\binom{n+1}{2}$), e in un punto qualunque di V_n, entro S_N, un vettore tangenziale R di grandezza R e direzione $dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n$, si dicono *componenti contravarianti* di questo vettore le quantità $R^i=R\frac{dx^i}{ds}$, *componenti covarianti* le $R_i=\sum_k a_{ik}R^k$ (le a_{ik} essendo i coefficienti del ds^2). Queste componenti sono appunto sistemi semplici rispett. dei due tipi; viceversa ogni sistema semplice dell'uno o dell'altro tipo può considerarsi come un vettore, del quale gli elementi del sistema, A^i o A_i, siano le componenti rispett. contravarianti o covarianti. Nel primo caso la grandezza del vettore è $R = \sqrt{\sum a_{ik} A^i A^k}$. — Un vettore R è però definito dalla grandezza R e dalla direzione, anche senza che occorra pensare la V_n contenuta in uno spazio euclideo a un maggior numero di dimensioni.

Moltiplicando fra loro, in tutti i modi possibili, le componenti di p sistemi semplici, dei quali p' contravarianti, $p-p'$ covarianti, si ha un sistema di n^p quantità, le quali in un qualsiasi cambiamento di coordinate si sostituiscono in un modo che si deduce facilmente dalle (1) e (2). L'insieme di queste n^p quantità è un sistema p^{plo} o *tensore* p^{plo} (o di *rango* p), a p' indici di contravarianza e $p-p'$ indici di covarianza; *contravariante* se $p-p'=0$, *covariante* se $p'=0$, *misto* negli altri casi. Più generalmente, *tensore* p^{plo} a p', rispett. $p-p'$ indici dei due tipi è un qualsiasi sistema di n^p quantità (funzioni del luogo) $A^{r_1 r_2 \dots r_{p'}}_{s_1 s_2 \dots s_{p-p'}}$ che in ogni cambiamento di variabili si sostituiscano nel modo ultimo indicato. Gli indici di contravarianza $r_1 \dots$ si mettono in alto, quelli di covarianza $s_1 \dots$ in basso. Scalari e sistemi semplici (vettori) sono tensori di rango *zero* e *uno*. Ogni scalare che sia funzione plurilineare di p sistemi semplici covarianti e di q sistemi semplici contravarianti (non necessariamente distinti) fornisce coi suoi coefficienti un tensore di rango $p+q$, a p indici di contravarianza e q indici di covarianza. P. es., essendo invariante la forma quadratica $ds^2 = \sum a_{ik} dx^i dx^k$, ne segue che le a_{ik} formano un *tensore doppio covariante* (tensore *fondamentale*, e *simmetrico* perchè $a_{ik} = a_{ki}$).

Tensori di egual rango e di egual numero di indici di ciascun tipo possono sommarsi, sommando le loro componenti di eguali indici. Possono moltiplicarsi, moltiplicando ogni componente dell'uno per ogni componente dell'altro; in quest'operazione i ranghi e i quantitativi di indici dei due tipi si sommano. — Altra operazione importante sui tensori è la *contrazione* o *saturazione degli indici*. Se in un tensore misto $A^{\dots r}_{\dots s}$, dove i puntini denotano indici qualunque, in numero pure qualsiasi, zero incluso, si sommano tutte le n componenti per le quali $r = s = 1, 2, \dots, n$, conservando costanti in ogni somma gli altri indici, queste somme $\sum_{r=1}^{n} A^{\cdots r}_{\cdots\, r} = B^{\cdots}_{\cdots}$ sono a loro volta le componenti di un nuovo tensore, *tensore contratto*, con *un* indice di contravarianza e *un* indice di covarianza in meno (questi due indici essendosi mutuamente *saturati*). E così anche più volte, semprechè nelle $B^{\cdots}_{\cdots}$ rimangano ancora indici di entrambi i tipi. — P. es., dati due sistemi semplici, uno contravariante A^i e uno covariante B_k, dal loro prodotto, tensore doppio misto $R^i_k = A^i B_k$, si ha per contrazione lo scalare $\sum_i A^i B_i$. Se le A^i e le B_k sono rispett. le componenti contravarianti e covarianti di due vettori **A**, **B**, lo scalare $\sum_i A^i B_i = \sum_{i,k} a_{ik} A^i B^k$ è il prodotto interno (scalare) di questi vettori.

Le *proprietà intrinseche di una V_n Riemanniana si esprimono mediante equazioni fra tensori* (ad. es. l'annullarsi identico di un tensore); queste equazioni valgono, in una data metrica, per qualunque sistema di coordinate curvilinee, e hanno quindi, al pari delle operazioni su tensori sopra definite, carattere *assoluto*.

L'estensione agli spazi Riemanniani dei metodi vettoriali (¹) ha permesso di eliminare dalla trattazione gli elementi dipendenti dal sistema di coordinate, sostituendo p. es. al tensore doppio, le cui componenti, costituenti una matrice quadrata, variano col sistema di coordinate, la considerazione di un'omografia vettoriale, funzione del luogo, indipendente dal sistema di riferimento; e ai tensori di rango >2 delle « iperomografie ».

b) Altro strumento essenziale del calcolo differenziale assoluto è la così detta *derivata covariante.* Mentre le derivate di una funzione invariante (del luogo) costituiscono un sistema semplice covariante (ossia da un sistema invariante di rango zero si ricava, per derivazione, un sistema covariante di rango uno), il sistema delle derivate di un sistema semplice, in numero di n^2, non è in generale un tensore doppio. Indicando però con A_i gli elementi di un sistema semplice covariante, la somma $\sum_i A_i \frac{dx^i}{ds}$ è un invariante, funzione del luogo;

(¹) Burali Forti-Boggio: *Espaces courbes, critique de la relativité* (Torino, 1924), parte II; Burgatti-Boggio-Burali Forti: *Analisi vettoriale generale e applicazioni*, vol. II (Bologna, 1930), parte II.

e la *velocità di variazione* di questa funzione lungo una linea qualsiasi, purchè individuata in modo intrinseco, sarà perciò anche un invariante. Derivando rispetto all'arco s e sopra la geodetica uscente da (x) nella direzione dx^i, e tenendo conto delle equazioni differenziali delle geodetiche (n.° 50), quest'ultimo invariante assume la forma $\sum_{ik}\left[\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \sum_h \left\{ {ik \atop h} \right\} A_h\right] \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$; e poichè $\frac{dx^i}{ds}$, $\frac{dx^k}{ds}$ sono sistemi semplici contravarianti, l'insieme delle quantità in parentesi quadre è un tensore covariante doppio $A_{i|k}$ (o anche brevemente A_{ik}, quando non sia possibile equivoco), che si dice tensore *derivato covariante* di A_i. Questa derivazione covariante è dunque qualcosa di inerente alla metrica di V_n, e cambia con questa metrica. La derivazione covariante si riduce a quella ordinaria nel caso delle varietà piane e se si fa uso di coordinate cartesiane, essendo allora le a_{ik} tutte costanti e perciò nulli i simboli di Christoffel. Il procedimento si può estendere, per induzione completa, a tensori sia con più indici di covarianza, sia aventi anche indici di contravarianza.

Nella derivazione covariante si conservano la maggior parte delle proprietà e regole di derivazione del calcolo differenziale ordinario (derivata di una somma, di un prodotto,....); però l'ordine di due derivazioni successive *non* è in generale invertibile. Se consideriamo p. es. un sistema semplice A_i e i due sistemi A_{ikl}, A_{ilk} ottenuti da esso con doppia derivazione covariante, la differenza $A_{ikl}-A_{ilk}$ non è identicamente nulla, ma è a sua volta un tensore triplo, e può ricevere la forma $\sum_m B^m_{ikl}A_m$, dove B^m_{ikl} è un nuovo tensore, il *tensore di Riemann-Christoffel*, cui spetta la proprietà caratteristica di essere identicamente nullo per tutte le varietà piane, e per esse soltanto; in questo caso l'ordine della derivazione covariante è invertibile (usando coordinate cartesiane, essa si riduce infatti alla derivazione ordinaria). Il tensore di Riemann-Christoffel (le cui componenti distinte sono in numero di $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$) ha un tensore *associato* puramente covariante $B_{hikl}=\sum_m a_{im}B^m_{hkl}$. La curvatura di uno spazio di Riemann in un punto e secondo una giacitura comunque assegnati può esprimersi mediante una frazione i cui termini sono entrambi forme di 2° grado nei binomi $dx_h\delta x_i - dx_i\delta x_h$, che possono pensarsi come coordinate della giacitura; i coefficienti del numeratore sono le B_{hikl} anzidette, mentre quelli del denominatore sono minori di 2° grado estratti dal determinante $|a_{ik}| = A$:

$$K = \frac{\sum B_{hikl}(dx^h \delta x^i - dx^i \delta x^h)(dx^k \delta x^l - dx^l \delta x^k)}{\sum (a_{hk}a_{il} - a_{hl}a_{ik})(dx^h \delta x^i - dx^i \delta x^h)(dx^k \delta x^l - dx^l \delta x^k)}.$$

Dal tensore di Riemann-Christoffel, con successive contrazioni, si ricavano gli altri due tensori $R_{hk} = \sum_m B^m_{hkm}$, e $\mathrm{R} = \sum a^{hk} R_{hk}$, l'ultimo dei quali, a meno di un fattore numerico, è la così detta *curvatura scalare* della V_n nel punto considerato. Questa e le R_{hk} compaiono nelle equazioni gravitazionali di Einstein.

c) Altro concetto essenziale della geometria Riemanniana, dovuto a T. LEVI-CIVITA ([1]) (posteriore alla teoria della relatività generale di Einstein), è quello di una legge, inerente alla metrica dello spazio, che consente di *orientare*, rispetto all'intorno di un punto P comunque assegnato, l'intorno di ogni altro punto P' infinitamente vicino al primo (intorni, fino a questo momento, fra loro *disgregati*); e ciò assegnando per ogni direzione a uscente da P nella V_n una determinata direzione a' uscente da P', da considerarsi come *parallela* alla prima; quindi per ogni vettore uscente da P un vettore equipollente uscente da P'. Per uno spazio euclideo, direzioni parallele e vettori equipollenti si riducono a quelli abitualmente così chiamati; se la V_n è curva e contenuta in un S_N euclideo, la direzione a' si costruisce prendendo in P' la direzione parallela ad a entro S_N e proiettando questa ortogonalmente sullo spazio S_n tangente a V_n in P'. — Una direzione (o un vettore) può *trasportarsi per parallelismo*, di punto in punto, *lungo una linea assegnata*; però questo trasporto da un punto P a un altro punto Q a distanza finita da esso è vincolato alla linea PQ considerata entro V_n; cambiando questa linea, la direzione uscente da Q e parallela alla a per trasporto lungo questa nuova linea non sarà in generale la stessa di prima. Se il parallelismo è indipendente dalla linea PQ lungo la quale si è effettuato lo spostamento, la varietà è uno spazio euclideo. In ogni caso, per una linea geodetica, le direzioni di essa in due punti qualunque P, Q sono parallele per spostamento lungo la geo-

---

([1]) Rend. Circ. Mat. di Palermo, 42 (1917), p. 173.

detica stessa; cioè le geodetiche sono linee *autoparallele*, ed è questa una loro proprietà caratteristica.

Il parallelismo di Levi-Civita consente anche di presentare in altra forma, semplice e intuitiva, il concetto della derivazione covariante. Dato un tensore qualsiasi, valendoci delle sue componenti come coefficienti e inoltre (come variabili) delle componenti covarianti o rispett. contravarianti di vettori **u**, ξ (in numero opportuno, secondo gli indici di quel tensore) possiamo formare una funzione plurilineare Φ invariante. Calcoliamo l'incremento $\delta\Phi$ di questa nel passaggio da un punto generico $P(x)$ a un punto infinitamente vicino $P'(x+\delta x)$, e introducendo in luogo di **u**, ξ i vettori uscenti dal punto $(x+\delta x)$ e rispett. equipollenti a questi (trattandosi di trasporto infinitesimo, non occorre precisare ulteriormente la curva relativa). Nascerà un'espressione ancora plurineare rispetto alle componenti dei detti vettori e alle δx^i (contravarianti), anch'essa invariante (perchè dotata di significato intrinseco), e i cui coefficienti avranno un indice di covarianza in più del tensore proposto: essi formano il tensore derivato covariante del primo.

d) Fra gli argomenti di cui il calcolo differenziale assoluto ha facilitato o suggerito lo studio segnaliamo il passaggio dai simboli di Christoffel ai « simboli di Riemann », costituenti (a differenza dei primi) un tensore; l'espressione della curvatura della V_n, in un punto e secondo una giacitura assegnati, mediante tensori, oppure mediante la variazione angolare di una direzione trasportata per parallelismo lungo un circuito infinitesimo uscente dal punto dato e contenuto nella giacitura data; lo studio delle congruenze di linee entro V_n, in particolare di congruenze di geodetiche, di sistemi di n congruenze mutuamente ortogonali; di congruenze *normali*, cioè traiettorie ortogonali di una famiglia ∞^1 di V_{n-1} ([1]).

([1]) Dopo l'applicazione del calcolo differenziale assoluto alla teoria della relatività generale (Cap. VI, n.° 91), a opera di Weyl, Cartan, Eddington, Schouten, Eisenhardt, Veblen e altri, sono stati studiati anche spazi più generali di quelli di Riemann, e le relative geometrie « non Riemanniane ». Nella geometria di Weyl ad es. la metrica dipende da un maggior numero di funzioni arbitrarie, venendo l'elemento lineare affetto in più da un fattore positivo, funzione del luogo, cioè da una « taratura » diversa da punto a punto, accompagnata da una legge di congruenza per elementi lineari uscenti da punti infinitamente vicini. In altre geometrie si rinuncia alla

58. - Helmholtz. — Un altro indirizzo della geometria non euclidea, sorto in seguito alla Memoria di Riemann, trae origine da una ricerca di H. v. HELMHOLTZ, approfondita in seguito (1884-1890) da S. LIE.

Ricerche fisiologiche sul modo in cui si effettua la localizzazione di un'immagine nel campo visivo condussero Helmholtz a studiare l'origine delle nozioni inerenti allo spazio, e quindi alla geometria non euclidea ([1]). Nell'indirizzo differenziale di questa, abbozzato da Riemann, un punto non molto chiaro era costituito da quel complesso di proprietà che occorre attribuire allo spazio, definito analiticamente, perchè l'elemento lineare risulti espresso dalla radice quadrata di una forma differenziale quadratica nelle coordinate. Una volta presa quest'espressione come punto di partenza, Riemann considera in particolare le varietà a curvatura costante K, che riconosce potersi muovere o applicare sopra sè stesse con quel certo grado di libertà; e ottiene così (se $K \neq 0$) gli spazi non euclidei.

Helmholtz invece, muovendo anch'egli dalla nozione analitica di spazio a n dimensioni, cerca subito di sfruttare, per quanto possibile, questa « libera mobilità delle figure », cioè l'esistenza nello spazio di particolari trasformazioni puntuali, i *movimenti*, nelle quali si conservano inalterate tutte le distanze (il che può considerarsi come un dato sperimentale); e si propone di dimostrare che l'esistenza di quelle trasformazioni porta già come conseguenza l'accennata rappresentazione analitica dell'elemento lineare ds. Egli introduce perciò una serie di ipotesi, intese a definire la schiera dei movimenti in una varietà a un numero qualunque n di dimensioni; e di queste ipotesi sviluppa le conseguenze nel caso $n=3$. L'impostazione del problema è fatta con profonda originalità e genialità;

---

metrica, ponendo fra gli intorni di punti infinitamente vicini connessioni di tipo più generale (affini, proiettive,....). Tutte queste geometrie si riattaccano, come origine prima, alla geometria non euclidea.

([1]) Nella conferenza: *Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (Heidelberg, 1870; ristampata in « Vorträge und Reden », vol. II, p. 1, Braunschweig, 1896) Helmholtz parla delle impressioni che riceverebbe il nostro senso della vista se nello spazio fosse verificata la geometria non euclidea, pseudosferica o sferica, e delle illusioni a cui andrebbe soggetto un occhio, conformato ed abituato come il nostro, nello stimare la grandezza e la distanza dei vari oggetti.

nè il risultato è infirmato da qualche imperfezione nella formulazione nelle premesse e in una delle successive deduzioni [1].

Riportiamo qui le ipotesi introdotte da Helmholtz:

1°) Esistenza e proprietà fondamentali di una varietà a n dimensioni, definita analiticamente come da Riemann.

2°) Esistenza, per ogni coppia di punti, di una relazione fra le $2n$ coordinate di questi due punti, la quale è indipendente dai *movimenti*, definiti come qui appresso; in altri termini, di una funzione delle dette $2n$ coordinate, che ha sempre lo stesso valore per tutte le coppie di punti *sovrapponibili* o *congruenti*, cioè trasformabili l'una nell'altra per mezzo delle operazioni analitiche che rappresentano i movimenti.

3°) Libera mobilità delle figure nello spazio, cioè esistenza di particolari trasformazioni puntuali (movimenti), per mezzo delle quali si possono sovrapporre gruppi di punti qualsiansi, colla sola limitazione imposta per questi, a due a due, dalla condizione precedente. Pertanto, la nuova posizione di un primo punto qualsiasi sarà completamente arbitraria, e dipenderà da n parametri; quella di un secondo punto dipenderà, dopo di ciò, da altri $n-1$ parametri, e così di seguito; sicchè in tutto la posizione di un sistema rigido dipenderà da $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri; per lo spazio a 3 dimensioni, da 6 parametri.

4°) Un movimento il quale lasci fissi $n-1$ punti di un sistema rigido, tali che la posizione di questo sistema non dipenda più che da un solo parametro, riconduce il sistema, se il movimento è eseguito sempre per lo stesso verso, alla posizione iniziale. Quest'ultima condizione — la così detta *monodromia* del sistema dei movimenti — è stata aggiunta da Helmholtz alle altre per un valore qualunque di n, poichè si era accorto che per $n=2$ essa non era conseguenza

---

[1] *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen*, Göttinger Nachr., Vol. 15, 3 Giugno 1868, p. 193, « Wissenschaftliche Abhaudlungen » (Leipzig, 1883), vol. 11, p. 618 e seg. Un breve riassunto: *Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie* (Verhandl. des naturhist. med. Vereins zu Heidelberg, vol. 4 (1868), p. 197; vol. 5, p. 31; Wissensch. Abhandl., II, p. 610) era stato oggetto di una conferenza fino dal 1866. Una lieve aggiunta si rese necessaria in seguito, poichè a Helmholtz era sfuggita da principio la possibilità che la curvatura costante dello spazio potesse esssere negativa; la lettura dei lavori di Beltrami richiamò poi la sua attenzione su tale omissione.

di queste altre; essa è tuttavia superflua per $n>2$ (salvo quanto al n.° seg.).

Riassumiamo il ragionamento di Helmholtz, in veste più geometrica ([1]), e per $n=3$. Per giungere all'espressione del ds^2 data da Riemann, le dette ipotesi vengono applicate soltanto nel caso di punti infinitamente vicini; cosa già questa non incondizionatamente lecita, perchè, come LIE ha poi mostrato ([2]), dalla validità di quelle ipotesi per punti a distanza finita non segue che esse debbano anche sussistere per punti infinitamente vicini. Nel caso di due punti infinitamente vicini (x) e $(x+dx)$, la funzione invariante delle coordinate $F(x, x+dx)$ sarà omogenea rispetto ai differenziali dx_1, dx_2, dx_3, ed esprimerà quella che possiamo chiamare *distanza* dei punti (x) e $(x+dx)$, ossia *l'elemento lineare* ds della nostra varietà. Fra gli ∞^6 movimenti dello spazio, ve ne sono ∞^3 che lasciano fisso il punto generico (x), e trasformano linearmente i differenziali relativi, secondo equazioni $dx_i' = \sum_k \lambda_{ik} dx_k$, dove le λ_{ik} dipendono da tre parametri. Queste trasformazioni lineari dei differenziali dovranno mutare in sè la forma differenziale $F(x, x+dx)$ nella quale alle variabili x_i si siano sostituite le coordinate del punto (x) considerato (restando perciò variabili i soli differenziali); perciò, geometricamente, le ∞^3 trasformazioni che lasciano fisso il punto (x) dovranno mutare in sè stesso il *cono elementare* $F(x, x+dx)=0$ uscente da quel punto. Secondo Helmholtz, queste trasformazioni dovranno operare sulla stella delle direzioni (elementi lineari) uscenti dal punto (x) anche in ∞^3 modi diversi; il che, nel caso speciale di cui qui trattasi, è vero; ma in altri casi potrebbero queste trasformazioni degli elementi lineari uscenti da (x) dipendere da meno di 3 parametri ([3]). Si tratta dunque di determinare un cono invariante

---

([1]) V. anche F. KLEIN: *Litografie*, vol. I, pp. 258-75; *Einleitung in die höhere Geometrie* (litogr. 1893), vol. II, pp. 215-245, dove è pure accennata la questione della monodromia (ipotesi 4ª del testo).

([2]) V. n.° seg.

([3]) Cfr. S. LIE: *Theorie der Transormationsgruppen*, vol. III (1893), § 94. F. KLEIN (*Zur ersten Verteilung des Lobačewski-Preises*, Kazan, 1897, p. 12) osserva a questo proposito che nel ragionamento di Helmholtz il concetto di differenziale, come è generalmente inteso nelle applicazioni, cioè di quantità piccolissima ma non proprio evanescente, prende il sopravvento sul concetto limite rigoroso del calcolo infinitesimale.

rispetto a ∞^3 trasformazioni proiettive della stella cui esso appartiene (cioè una linea piana invariante rispetto a ∞^3 omografie piane). Da ciò si trae facilmente che quel cono non potrà essere che di 1° o di 2° ordine. D'altra parte il detto cono non può contenere elementi (generatrici) reali, se no non sarebbe soddisfatta l'ipotesi della monodromia. Deve perciò trattarsi di un cono quadrico (elementare) immaginario $\sum a_{ik} dx_i dx_k = 0$, dove il primo membro è forma quadratica definita, che può supporsi positiva, e le a_{ik} sono funzioni del luogo, determinate a meno di un fattore comune, non mai nullo. Volendo che l'elemento lineare $ds = F(x, x + dx)$ sia quantità dello stesso ordine dei differenziali dx_i, dovremo porre $F^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$, ossia:

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k.$$

La varietà proposta è dunque uno spazio di Riemann; e, per l'esistenza in essa di un sistema ∞^6 di movimenti, è una varietà a curvatura costante.

59. - **Critica e più precisi risultati di S. Lie.** — Per la trattazione di Helmholtz, è fondamentale la nozione di *gruppo* di operazioni (per quanto essa non vi compaia esplicitamente; nè, a quell'epoca, ne era stata riconosciuta l'importanza che ha poi acquistata in tutta la matematica). Figure congruenti sono figure trasformabili l'una nell'altra per mezzo di certe operazioni; e la proprietà transitiva della congruenza, che cioè due figure congruenti a una terza sono congruenti fra loro, è inerente al fatto che quelle operazioni formano un gruppo. Anche i movimenti che lasciano fisso un punto, e le operazioni subordinate da questi movimenti entro la stella delle direzioni uscenti dal punto fisso, costituiscono altrettanti gruppi. Dopo che S. Lie, dal 1870 in poi, aveva avviata e gradatamente costruita la teoria generale dei gruppi continui (1), egli stesso, spinto anche da F. Klein (2), riprese in esame (dal 1884 (3)) la questione trattata

(1) Oggetto di numerosi lavori, dal 1873 in poi; esposta poi sistematicamente nell'opera: *Theorie der Transformationsgruppen*, in collaborazione con F. Engel, 3 vol., Lepzig, 1888-1893.

(2) S. Lie, op. cit., vol. 3°, p. 397.

(3) Leipz. Ber., 38 (1886), p. 337; ibid., 42 (1890), p. 284, 355; ibid., 44 (1892), p. 106; Compt. Rend. de l'Acad. d. Sciences, 114 (1892), p. 461. Tutta la questione è poi svolta molto ampiamente nella *Theorie der Trans-*

da Helmholtz, ponendo il problema, da lui chiamato *problema di Riemann-Helmholtz*, in termini precisi: *Trovare per i gruppi* ∞^6 *dei movimenti della geometria euclidea e delle due geometrie non euclidee, e così negli spazi a più dimensioni, un insieme di proprietà che siano sufficienti a caratterizzarli*; cioè a distinguerli degli altri gruppi continui di trasformazioni di una V_3 o rispett. di una V_n numerica. In altri termini: *Caratterizzare le geometrie euclidea e non euclidee per mezzo di proprietà, cioè di postulati, concernenti i loro gruppi di movimenti.*

Di questo problema Lie ha date due soluzioni, delle quali una fa uso soltanto di postulati concernenti il comportamento del gruppo in parola nel campo infinitesimo (e, in tal caso, senza modificare sostanzialmente il ragionamento di Helmholtz), l'altra solamente di postulati riguardanti un campo finito (e allora occorre modificare l'intero ragionamento). Ci limitiamo a enunciare il duplice risultato per uno spazio a 3 dimensioni, avvertendo che la questione si estende senz'altro a spazi di dimensione maggiore, ma è invece un po' meno semplice nel piano. In ambo i casi ci riferiamo a un gruppo di trasformazioni analitiche reali dello spazio, che chiamiamo *movimenti*, e che devono soddisfare alle proprietà di cui in appresso:

1°) Si richieda che, se si impongono come fissi un punto generico dello spazio e inoltre un elemento lineare qualunque uscente da esso, sia ancora sempre possibile un sistema continuo ∞^1 di movimenti; mentre, se si impone ulteriormente come fisso un qualsiasi elemento di superficie (od orientazione) passante per quell'elemento lineare, non risulti più possibile alcun movimento continuo. Queste condizioni equivalgono a ciò che Lie chiama la « libera mobilità nell'infinitesimo »; e sono sufficienti a caratterizzare i gruppi dei movimenti della geometria euclidea e delle due geometrie non euclidee; vale a dire ogni gruppo soddisfacente alle condizioni imposte deve coincidere con uno di questi tre gruppi, oppure ridursi ad uno di essi con una trasformazione di variabili.

2°) Allo stesso risultato si perviene pure nelle ipotesi seguenti:

---

formationsgruppen, vol. III (Leipzig, 1893), Abth. 5, pp. 393-543. Per queste ricerche fu conferito a Lie il premio Lobačewski pel 1897 (cfr. la relazione cit. di F. Klein: *Zur ersten Verteilung....*, Kazan, 1897; Ges. Math. Abh., I (Berlin, 1921), p. 384).

Si richieda che, se si impone come fisso un punto generico (y_0), i punti (x) nei quali può portarsi con operazioni del gruppo un altro punto assegnato (x_0) soddisfacciano ad un'equazione $W(y_0, x_0, x) = 0$, rappresentante una superficie che passa per il punto (x_0) e non per (y_0); inoltre sia possibile fissare nell'intorno di (y_0) una regione finita a tre dimensioni tale che, imposto come fisso il punto (y_0), ogni altro punto (x_0) di questa regione possa portarsi con continuità in qualunque punto (x) della regione stessa che insieme ai suddetti punti (y_0) e (x_0) verifichi la relazione $W=0$.

Aggiungiamo ancora due osservazioni.

1°) Particolarmente notevole è il seguente risultato, a cui è pure giunto Lie per lo spazio a 3 dimensioni: *L'ipotesi della monodromia (4ª) introdotta da Helmholtz non è necessaria per caratterizzare le schiere di movimenti da lui considerate, qualora si ponga esplicitamente la condizione che le ipotesi 2ª e 3ª siano verificate per qualsiasi punto o gruppo di punti* (limitatamente a una certa regione) **senza eccezioni.** — *Se invece si richiede soltanto che queste condizioni siano verificate* **in generale**, e si ammette ad es. che vi siano particolari coppie di punti le quali risultino invarianti per almeno ∞^2 trasformazioni della schiera, anzichè per sole ∞^1, *l'ipotesi della monodromia diventa necessaria, ma non è ancora sufficiente, insieme alle precedenti, per caratterizzare le schiere (gruppi) di movimenti di uno spazio a tre dimensioni a curvatura costante.* Le ipotesi di Helmholtz sono dunque sovrabbondanti o insufficienti, secondo la portata che si intende darvi [1].

2°) In questa ricerca, la libera mobilità delle figure con quel certo grado di libertà, e i postulati nei quali si è tradotto questo dato sperimentale, perciò anche i risultati che ne conseguono, si riferiscono sempre a *una regione limitata dello spazio.* È pertanto solo la geometria di una regione limitata che risulta possibile in tre e non più modi diversi; per ciascuna di queste tre geometrie rimangono ancora impregiudicate le proprietà di connessione dello spazio complessivo, cioè quella che volgarmente si potrebbe chiamare la « forma » di questo spazio. — Supporre invece che *l'in-*

---

[1] *Theorie der Transformationsgruppen*, vol. III, p. 470-471.

tero spazio possa muoversi sopra sè stesso col medesimo precedente grado di libertà, è un'ipotesi ulteriore; ed è allora un nuovo problema il determinare, per ciascuna delle tre geometrie sopra accennate, quali diverse proprietà di connessione, cioè quali « forme » dello spazio sono ancora possibili. P. es. la geometria piana euclidea vale, limitatamente a una regione opportuna, anche sul cilindro; una regione conveniente di cilindro può applicarsi sopra un'altra in ∞^3 modi; ma *l'intero cilindro* non può muoversi con continuità sopra sè stesso, anche se rotondo, che in soli ∞^2 modi; e ha, rispetto al piano, una diversa connessione (può aprirsi p. es. lungo una generatrice senza risultarne spezzato) ([1]).

60. - **Ricerche di Hilbert.** — Nelle ricerche di Lie sono tacitamente presupposte tutte le premesse della sua teoria generale dei gruppi; derivabilità finchè occorre delle funzioni che s'incontrano, generabilità del gruppo con trasformazioni infinitesime.... ipotesi non facili a tradursi geometricamente, e inerenti forse più ai procedimenti analitici usati da Lie che al problema in sè. — Queste considerazioni hanno spinto D. HILBERT ([2]) a stabilire, limitatamente alla

---

([1]) Contemporaneamente a Lie, ma indipendentemente da lui, anche H. POINCARÉ ha dato un sistema di postulati atti a caratterizzare, *nel piano*, le geometrie euclidea e non euclidee (*Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, Bull. Soc. Mathém. de France, vol. 15 (1887), p. 203). — Fino dal 1878 J. DE TILLY (*Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique*, Mém. Bordeau (2), vol. 3, 1879, p. 1; v. anche: *Essais de géométrie analytique générale*, Bruxelles Mém. couronnés, vol. 47, 1892-1893) aveva rilevato che scopo della geometria è la ricerca delle relazioni fra le distanze delle coppie di punti, e aveva cercato di costruire la geometria muovendo da queste considerazioni. Nello spazio a tre dimensioni ad es. le 10 mutue distanze di 5 punti sono legate da *una* relazione; date 9 fra esse, con certe limitazioni, è determinata la rimanente (e così, nel caso di n dimensioni, per le $\binom{n+2}{2}$ mutue distanze di $n+2$ punti). Dando a questa relazione certe due forme determinate (distinte) e una loro comune forma limite (lav. cit. del 1892), ne derivano le due geometrie non euclidee, e la geometria euclidea; egli non dimostra però che quelle forme siano le sole possibili. Per altri casi possibili, v. H. F. BLICHFELDT: *On the determination of the distance between two points in S_n*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 3°, 1902, p. 467.

([2]) Math. Ann., 56 (1903), p. 381; *Grundlagen*, p. 177. Per ulteriori osservazioni e complementi, v. R. L. MOORE, Amer. Journ. of Mathem., 41 (1919), geometria piana, un sistema di postulati puramente geometrici, basati egualmente sul concetto di gruppo, ed atti a caratterizzare la geometria euclidea o non euclidea senza che si richiedano le ulteriori consuete ipotesi di Lie per le funzioni che compaiono nella rappresentazione analitica dei movimenti. Egli si vale all'uopo di concetti inerenti alla teoria degli insiemi, e del teorema di C. JORDAN, secondo il quale una linea piana chiusa non intrecciata, nel senso dato da Jordan a quest'espressione (1), divide il piano in due regioni, una interna e l'altra esterna.

Chiamisi « piano » un sistema di enti riferibili biunivocamente all'insieme delle coppie di numeri finiti di una certa regione (con qualche ulteriore condizione, su cui non entriamo in dettagli). Chiamisi « movimento » una trasformazione biunivoca e continua del piano, che non alteri il senso di percorrenza di una curva di Jordan. E si postuli che: 1°) I movimenti del piano formano un gruppo; 2°) I movimenti che lasciano fisso un punto assegnato M (rotazioni di centro M) portano ogni altro punto del piano distinto da M in infinite posizioni diverse; 3°) I movimenti formano un « sistema chiuso »; cioè, se ABC, $A'B'C'$ sono terne di punti tali che esistano movimenti i quali trasformino terne prossime quanto si vuole ad ABC in terne prossime quanto si vuole ad $A'B'C'$, esisterà anche un movimento che muta la terna ABC nella $A'B'C'$. — Si dimostra allora: *Ogni geometria piana nella quale valgano i suddetti postulati è la geometria euclidea, o la geometria iperbolica.* Rimane esclusa la geometria ellittica, non potendosi il piano ellittico riferire biunivocamente, come qui occorre, a un sistema di sole coppie di numeri finiti. La dimostrazione è però lunga e complessa. Occorre anzitutto studiare la figura, che è una linea di Jordan, luogo delle posizioni in cui si porta un punto $P \neq M$ nelle infinite rotazioni di centro M. Poi si introduce il concetto della retta individuata da due punti dati A, B, come luogo di tutti quei punti a cui si giunge progressivamente, applicando ai punti stessi e agli altri man mano costruiti le operazioni seguenti: a) ricerca di un centro di rotazione che scambia fra loro due punti del sistema (*punto di*

p. 299; W. Süss, Japan. Journ. of. Math., 2 (1925), p. 91; Tokohu math. Journ., 26 (1926), p. 365; 27 (1926-1927), p. 213.

(1) C. JORDAN: *Cours d'Analyse*, 2ª ediz., 1 (Paris, 1893), p. 91.

mezzo di questi); *b*) rotazione involutoria avente il centro in un punto del sistema; e aggregandovi ancora tutte le posizioni di addensamento (*Häufungsstellen*) dei punti così ottenuti. Infine, dopo dimostrate varie proprietà della retta e di figure tra loro congruenti, si distinguono due casi, secondo che nel piano, per un punto dato, si può condurre un'unica retta non incontrante una retta data, oppure più d'una; e si riconosce che queste due ipotesi conducono rispett. alla geometria euclidea e alla geometria iperbolica.

Capitolo V.

Indirizzo metrico-proiettivo.

§ 1. - Generalità. Forme di 1ª specie.

61. - Subordinazione della geometria metrica alla geometria proiettiva. — Un'altra via per giungere alle geometrie non euclidee riposa sulla subordinazione della geometria metrica, sia euclidea che non euclidea, alla geometria proiettiva.

Col *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet (1822) fu stabilita la distinzione fra le proprietà proiettive delle figure, che si conservano nelle proiezioni e sezioni, e le proprietà che non si conservano in queste operazioni, cioè la quasi totalità delle proprietà metriche. Era una specie di suddivisione della geometria in due parti, rimasta fondamentale per quasi mezzo secolo. Ma già la considerazione che tutti i cerchi di un piano, quali linee a due a due simili e similmente poste, contengono gli stessi punti immaginari all'infinito (i *punti ciclici*), e cerchi concentrici hanno la retta all'infinito come corda ideale di contatto (1), conduceva a dare forma proiettiva alla proprietà di una conica di essere un cerchio (essa è tale quando passa per i punti ciclici) o che due cerchi siano concentrici (sono tali quando sono tangenti nei punti ciclici). M. Chasles osservò più tardi (2) che i punti ciclici sono doppi per la proiettività determinata sulla retta all'infinito di un piano da due fasci propri di raggi sovrapposti direttamente eguali; quindi anche per l'involuzione delle coppie di direzioni ortogonali su di essa (o *involuzione assoluta*): direzioni ortogonali sono dunque quelle coniugate armoniche rispetto ai punti ciclici. Più innanzi ancora si spinse E. Laguerre (3), ponendosi il problema: Dato in un piano un sistema

(1) Poncelet, Op. cit., vol. I, n.° 94.

(2) *Traité de Géométrie supérieure* (1852; 2ª ediz. 1880), n. 178, 660.

(3) *Sur la théorie des foyers*, Nouv. Ann. de Mathém., vol. 12 (1853), p. 57 e seg.; *Oeuvres de Laguerre*, vol. II (1905), p. 6-15; v. in part. n.° 4. In

di angoli, misurati (in unità radianti) dai numeri A, B, C,.... e legati da una relazione $F(A, B, C,....)=0$, quale relazione intercederà fra gli angoli corrispondenti a questi in una trasformazione omografica della figura proposta? Egli giunse così alla relazione seguente, che dà forma proiettiva alla prima:

$$F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, ...\right)=0$$

dove a, b,.... sono i birapporti formati dai lati degli angoli trasformati di A, B,.... colle coppie di rette dei rispettivi fasci omologhe alle rette isotrope (ossia dirette ai punti ciclici) della prima figura. *L'angolo di due rette* (nella metrica euclidea) *è appunto uguale a* $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ *nel logaritmo del birapporto che le rette stesse formano coi raggi isotropi del loro fascio* (cfr. n.° 48).

Questi sono esempi di proprietà metriche (euclidee) di figure piane concepite come *relazioni proiettive tra queste figure e la coppia dei punti ciclici*, ossia tra le dette figure e l'involuzione assoluta, inclusa la retta all'infinito come sostegno di questa involuzione [1]. Analogamente nello spazio, introducendo la nozione di *cerchio assoluto*, la linea all'infinito cioè del cono di equazione, in assi ortogonali, $x^2+y^2+z^2=0$, la quale è comune a tutte le sfere. Così p. es. la relazione di perpendicolarità fra piani e rette si traduce nella proprietà che i loro elementi impropri si corrispondono nella polarità rispetto al cerchio assoluto.

La stessa questione compare con maggiore generalità in una Memoria di A. CAYLEY [2]. Ricordiamo che sopra una punteggiata

---

questa Nota vengono considerate alcune proprietà focali delle coniche come contenute in teoremi più generali di geometria proiettiva. — Cfr. anche, sullo stesso argomento, alcune Note di FAURE: *Transformation des propriétés métriques des figures* (Nouv. Ann. de Mathém., vol. 18; 1859. In particolare la 3ª Nota, p. 381 e seg.).

(1) Altro esempio: Due figure di uno stesso piano direttamente eguali (e la congruenza è la base prima di ogni relazione metrica) sono sovrapponibili o per mezzo di una traslazione, che è un'omologia avente per asse la retta congiungente i due punti ciclici e per centro un punto di questa stessa retta, oppure per mezzo di una rotazione, omografia che fa scorrere sopra sè stessi (cioè ammette come uniti) ∞^1 cerchi, cioè tutte le ∞^1 coniche di un fascio, bitangenti nei punti ciclici.

(2) *Sixth Memoir upon quantics* (sesta, in una successione di lavori dedi-

propria euclidea due coppie di punti AB, $A'B'$ aventi eguale distanza in grandezza e senso ($AB = A'B'$) sono trasformate l'una nell'altra da una proiettività parabolica avente come unico elemento unito il punto all'infinito della retta sostegno; e variando questa proiettività nel gruppo ∞^1 delle proiettività paraboliche con questo elemento unito, si hanno da AB tutte le coppie di punti di quella retta direttamente congruenti ad AB stessa. E così per gli angoli nel fascio proprio di rette, mediante le proiettività ellittiche che hanno come raggi uniti (immaginari) le rette isotrope del fascio. Più generalmente, fissata in una qualsiasi forma di 1ª specie una coppia di elementi U, V, distinti o coincidenti, che Cayley chiama *coppia assoluto*, potremo dire che due coppie di elementi della forma AB, $A'B'$ hanno eguale distanza quando esiste una proiettività di elementi uniti U, V che le trasforma l'una nell'altra (¹); il che, se U, V sono distinti, equivale all'eguaglianza di birapporti $(UVAB) = (UVA'B')$; se $U \equiv V$, equivale a richiedere che la proiettività $UAB \barwedge UA'B'$ sia parabolica. Allora, presi ad arbitrio sulla forma due punti P_0, P_1, si possono determinare P_2, P_3,.... P_n,.... P_{-1}, P_{-2},.... in modo che siano eguali, per i intero qualunque, tutte le distanze P_iP_{i+1} (ossia, se $U \not\equiv V$, tutti i birapporti (UVP_iP_{i+1})). Se (dice Cayley) P_0, P_1 sono infinitamente vicini, avremo divisa la retta (o il fascio) in elementi infinitesimi eguali, e si potrà chiamare *distanza* AB il numero di questi elementi compresi fra A e B. Precisando ulteriormente e traducendo analiticamente questa definizione, Cayley trova per *dist* AB, se $U \not\equiv V$, un'espressione che equivale, a meno di una costante moltiplicativa (inessenziale), al logaritmo del birapporto $(UVAB)$ (v. n.° 63) (²).

---

cati alla teoria delle forme algebriche (*quantics*) e loro invarianti rispetto a sostituzioni lineari), Phil. Trans., 149 (1859), p. 61; cfr. in part. i n. 209-230 « On the Theory of Distance »; o anche: Collected Math. Papers, vol. II (Cambridge, 1889), p. 561.

(¹) L'espressione usata da Cayley è diversa, e un po' involuta; ma equivale a quella qui usata.

(²) In Cayley non figura però esplicitamente il birapporto, introdotto nella questione solo più tardi da F. Klein. In una breve aggiunta alla ristampa del lavoro cit. nelle Coll. Math. Papers (vol. II, p. 604), Cayley riconosce che l'uso del birapporto da parte di Klein è stato per la questione « a great improvement »; ma, poichè i birapporti si definiscono abitualmente per via

Nel piano, Cayley prende come assoluto una conica, in generale a discriminante non nullo; con che in ogni forma di 1ª specie contenuta nel piano risulta determinata come coppia UV la coppia degli elementi della forma che appartengono alla conica data, luogo o inviluppo (e analogamente nello spazio con una quadrica assoluto). Allora tutte le proprietà metriche, che sono relazioni fra distanze e angoli, si esprimono a mezzo di formole — sostanzialmente, di birapporti — in cui entrano gli elementi della figura considerata e l'assoluto; acquistano dunque forma proiettiva, costituendo la così detta *metrica proiettiva*, o *geometria metrico-proiettiva*. Facendo degenerare la conica assoluto, come inviluppo, nella coppia dei punti ciclici (o rispett. la quadrica nel cerchio assoluto), si hanno con un passaggio al limite le formole della geometria euclidea. Giustamente quindi concludeva Cayley alla fine della Sua Memoria: «Metrical properties of a figure are not the properties of the figure considered per se apart from everything else, but its properties when considered in connexion with another figure termed the Absolute.... *Metrical geometry is thus a part of descriptive geometry, and descriptive geometry is all geometry....*»: da quest'ultima, ossia dalla geometria proiettiva, passiamo alla geometria metrica fissando l'assoluto come « *a standard of reference* ».

Ora le due geometre non euclidee possono subordinarsi in modo analogo alla geometria proiettiva, mediante una diversa scelta della conica o quadrica assoluto; e il passo decisivo che ha collegato le ricerche di Cayley con quelle precedenti di geometria non euclidea è dovuto F. KLEIN [1]. Questi ha ripresa e svolta più ampiamenta

---

metrica, e quindi presupponendo la geometria euclidea, egli sospetta che, mettendo a base la geometria proiettiva come Klein propone (n.° seg.), si commetta un circolo vizioso (il che non è, potendosi dare dei birapporti, come vedremo, una definizione puramente grafica). Klein stesso (Ges. Mathem. Werke, vol. I, p. 242) conferma che Cayley (e così Sir R. Ball) non hanno mai potuto vincere questo sospetto del circolo vizioso! — Lavori ulteriori di Cayley sullo stesso argomento, in Mathem. Ann., 5 (1872), p. 630; Proceed. R. S., 37 (1884), p. 82; Proceed. Cambridge Philos. Soc., 15 (1894), pag. 37=Coll. Math. Papers, vol. 8 (1895), p. 409; vol. 12 (1897), p. 220; vol. 13 (1897), p. 480.

[1] V. le due Memorie: *Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*, Mathem. Ann., vol. 4 (1871), p. 573; vol. 6 (1873), p. 112, e alcuni parti del « Programma di Erlangen »: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geo-*

la metrica proiettiva generale; e ha mostrato che, scegliendo opportunamente la conica o quadrica fondamentale (reale, immaginaria,....) e le costanti moltiplicative, le formole di questa metrica generale coincidono con quelle della geometria non euclidea, iperbolica od ellittica: sicchè *tutta la geometria metrica euclidea e non euclidea è contenuta nella geometria proiettiva.*

62. - **Costruzione della geometria proiettiva indipendentemente da nozioni metriche.** — Poichè nella metrica proiettiva le relazioni metriche, sia euclidee che non euclidee, appaiono come particolari applicazioni di relazioni proiettive, il punto di partenza di questa teoria deve essere dato dalla geometria proiettiva *costruita senza fare uso di nozioni metriche.* Il procedimento classico all'uopo seguito da V. STAUDT (1) viene meno a questa condizione nelle convenzioni sugli elementi impropri, che, come da lui introdotti, presuppongono la nozione euclidea di rette parallele, e quindi il relativo postulato; esse non sono però parte essenziale del procedimento. F. KLEIN ha mostrato infatti (2) che questo procedimento può conservarsi nella sua parte sostanziale, limitandone il campo di applicazione, in modo da evitare qualsiasi particolare ipotesi sulle parallele. Basta a tal uopo ammettere che *in una regione finita di spazio esistano un sistema di superficie F e di linee K*, che si possono chiamare rispett. *piani* e *rette*, tali che:

Per tre punti qualunque della regione non appartenenti ad una stessa K passi una ed una sola F;

---

metrische Forschungen, Erlangen 1872 (trad. italiana in Annali dì Matem. (2), vol. 17, 1890, p. 307); più qualche altra Nota, lavori tutti raccolti con osservazioni e commenti nelle Ges. Mathem. Abhandl. di Klein stesso, vol. I (1921), p. 242 e seg. — W. FIEDLER (*Analytische Theorie der Kegelschnitte nach Georg Salmon*, 5ª ediz., vol. II (1888), nota (154)) afferma che la relazione fra la metrica generale di Cayley e la geometria non euclidea era stata riconosciuta da lui stesso e da Beltrami anche prima dei lavori di Klein.

(1) *Geometrie der Lage*, Nürnberg 1847; trad. ital. di M. PIERI, Torino 1889. Per l'introduzione di coordinate, v. *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2 (Nürnberg 1857); in part. §§ 19-21, 27-29. Qui, come ha osservato F. KLEIN (Ges. Maih. Abh., vol. 1, p. 241-242), in realtà Staudt ricorre a considerazioni metriche, per quanto vi siano esposti tutti gli elementi necessari per farne a meno.

(2) Note cit. dei Math. Ann., 4 (in part. § 17), 6 (2ter Abschn.).

Due F aventi un punto comune abbiamo a comune una K; e tutte le F passanti per due punti distinti contengano una medesima K (che sarà individuata da questi due punti).

Rimane così impregiudicata la questione dell'esistenza o meno di punti ulteriori, fuori della regione considerata, e della eventuale condizione perchè due rette complanari (due K di una stessa F) si incontrino. — Ritenuto che per Klein, nel 1872, nel concetto di linea erano già implicite le proprietà degli ordinamenti naturali dei punti di questa, nonchè la continuità della linea, che oggi si sogliono enunciare in appositi postulati, questi sono, sostanzialmente, gli attuali postulati della geometria proiettiva, limitati a una regione finita di spazio. Il continuo dei punti, rette e piani contemplati da queste proposizioni si può allora completare con ulteriori elementi (impropri, ideali) opportunamente definiti, in modo che anche nel continuo così completato valgano i primitivi postulati, e quindi tutta la geometria proiettiva. P. es., date in un piano due rette a, b, queste, insieme a uno stesso punto arbitrario P non contenuto in quel piano, determineranno due nuovi piani aventi a comune il punto P e perciò una retta: l'insieme di tutte le rette così ottenute al variare di P, incluse le a, b, si chiamerà *stella*, attribuendole per convenzione un *centro*, comune a tutte queste rette; ecc. (¹). — D'altronde oggi la costruzione della geometria proiettiva muovendo da postulati puramente grafici è esposta in parecchi trattati (²), e stabilmente acquisita alla scienza.

Costruita la geometria proiettiva sintetica, rimane a introdurre per i punti opportune coordinate, tali che il piano nello spazio e la retta nel piano siano rappresentati da equazioni lineari, cioè le *coordinate proiettive*. Nei *Beiträge* cit. di Staudt (fasc. 2, 1857) vi sono già tutti gli elementi necessari per far corrispondere, *con*

(¹) V. anche PASCH: *Vorlesungen über neuere Geometrie* (Leipzig 1882; 2ª ediz. 1926); CLEBSCH-LINDEMANN: *Vorlesungen über Geometrie*, vol. 2° (Leipzig 1891), 3te Abtheil., Kap. I e II; SCHUR: *Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie* (Math. Ann., 39, 1891, p. 113); KILLING: *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Padeborn, 1892-1893). V. pure questo stesso vol., Cap. II, n.° 22.

(²) P. es. ENRIQUES: *Lezioni di geometria proiettiva*, 1898; 4ª ediz. 1920; ristamp. 1926; SEVERI: *Geometria proiettiva*, Firenze 1921; 2° ediz. 1925. Il procedimento si estende facilmente a spazi a più dimensioni.

pure considerazioni grafiche, a ogni *quaderna* (*Wurf*, *tetrade*) di elementi di una forma di 1ª specie, considerati in ordine determinato, un *numero*, lo stesso per tutte le quaderne fra loro proiettive, che si può definire come comune birapporto di queste, e che coincide col birapporto definito metricamente nei casi in cui è applicabile una di queste definizioni; ed è precisamente quanto occorre per introdurre le coordinate proiettive nelle forme di 1ª specie ([1]), e successivamente, nel modo consueto, in quelle di 2ª e 3ª specie ([2]).

Acquisita così, per via puramente grafica, la rappresentazione analitica degli elementi a mezzo di coordinate proiettive, si può far entrare in campo la metrica generale di Cayley (senza pericolo di circolo vizioso!), definendo nella forma di 1ª, 2ª o 3ª specie un luogo di 2° grado, o assoluto, per mezzo della sua equazione, e successivamente, come vedremo, distanze e angoli per mezzo di birapporti e loro logaritmi.

63. - Metrica proiettiva generale in una forma di 1ª specie. — In una forma di 1ª specie comunque complessa si supponga introdotto un sistema di coordinate proiettive. Consideriamo nella forma due elementi fissi ξ, η, distinti o coincidenti, il cui insieme chiameremo *coppia assoluto* (o fondamentale), mentre chiameremo *movimenti* sulla forma le ∞^1 trasformazioni proiettive di questa aventi ξ, η come uniti (perciò paraboliche, se $\xi \equiv \eta$). La metrica riferita a questa coppia assoluto si dirà *generale* o *speciale*, secondo che ξ, η sono distinti o coincidono.

Supposti per ora ξ, η distinti, la *distanza* di due elementi qua-

---

([1]) Nella trattazione di Staudt intervengono bensì, a un certo punto, considerazioni metriche (l. c., § 27, n. 393; v. anche KLEIN, Ges. Mathem. Werke, I, p. 241-242); ma queste possono facilmente evitarsi.

([2]) V. ancora le opere e Memorie di KLEIN, PASCH, CLEBSCH-LINDEMANN, SCHUR, KILLING già citate nel presente n.°; come pure A. COMESSATTI: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, vol. II (Padova, 1931), cap. IV, § 2. F. ENRIQUES, (lez. cit., 4ª ediz., Appendice, p. 431) introduce anche direttamente le coordinate proiettive nelle forme di 3ª specie mediante un'omografia tra lo spazio considerato, in cui vale la geometria proiettiva sintetica, e lo *spazio analitico*, insieme delle quaderne di numeri omogenei (cioè non tutti nulli, e definiti a meno di un comune fattore di proporzionalità), nel quale si chiamino *piano*, *retta* l'insieme delle quaderne (punti analitici) soddisfacenti una o rispett. due distinte equazioni lineari omogenee.

lunque x, y della forma (o *misura* dell'intervallo xy) dovrà essere un invariante proiettivo della quaderna ξ, η, x, y. Tale è il *birapporto* di questi quattro elementi. D'altra parte, indicato con z un elemento ulteriore della forma, i birapporti determinati dalla coppia ξ, η colle tre coppie xy, yz, xz sono legati dalla relazioni:

$$(\xi\eta xy)\cdot(\xi\eta yz)=(\xi\eta xz)$$

la quale si converte in relazione additiva, come a noi occorre, quando ai birapporti si sostituiscano i logaritmi:

$$\log(\xi\eta xy)+\log(\xi\eta yz)=\log(\xi\eta xz)$$

moltiplicati anche, volendo, per una medesima costante arbitraria k. — Pertanto: *Come* **distanza** *di due elementi di una forma di prima specie definiamo il logaritmo (neperiano) del birapporto formato dagli elementi stessi colla coppia assoluto della forma, moltiplicato per una costante k* (arbitraria, ma sempre la stessa per ogni coppia di elementi sulla forma) (1). In altri termini, per

---

(1) Questa definizione di distanza si presenta abbastanza naturale anche in base alla sola ipotesi che le distanze si conservino invariate nelle trasformazioni proiettive di elementi uniti ξ, η; trasformazioni che, assumendo questi elementi come fondamentali pel sistema di coordinate, si rappresentano in coordinate proiettive con equazioni $z'=\lambda z$. Sia $z'=\lambda z$ una particolare, arbitraria ma non identica, di queste proiettività; P_0, di coordinata z_0, P_1, di coordinata λz_0, due elementi distinti in essa omologhi; e la distanza P_0P_1 si assuma come unità. Costruendo allora la scala di elementi $\ldots P_{-1}P_0P_1P_2\ldots P_n\ldots$ a 2 a 2 equidistanti, per ogni valore intero di n sarà $\lambda^n z_0$ la coordinata di P_n, e n la distanza P_0P_n. Indichiamo con φ quel valore dell'argomento di λ per cui $0\leqslant\varphi<2\pi$, e attribuiamo convenzionalmente, per m intero, al simbolo $\lambda^{\frac{1}{m}}$ (suscettibile di m valori) quel valore determinato che ha per argomento $\frac{\varphi}{m}$; allora, per ogni valore razionale di δ, il punto $z=\lambda^\delta z_0$ avrà da P_0 la distanza δ; e tutti questi punti formeranno, nel piano complesso, un insieme ovunque denso sulla linea $z=\lambda^k z_0$ (λ, z_0 costanti; k reale variabile). Questo risultato, che il punto di coordinata $\lambda^\delta z_0$ ha da P_0 la distanza δ, si estende per continuità a tutti i valori reali di δ, cioè a tutti i punti reali della detta linea. E per due punti qualunque di questa linea $P_1(z_1=\lambda^{\delta_1}z)$, $P_2(z_2=\lambda^{\delta_2}z)$ avremo:

$$\text{dist}\, P_1P_2=\delta_2-\delta_1=\frac{1}{\log\lambda}\log\frac{z_2}{z_1}=\frac{1}{\log\lambda}(\xi\eta P_1P_2)$$

dove $\frac{1}{\log\lambda}$ è una costante. E questa espressione si può estendere per definizione a distanze complesse.

ogni metrica *generale*:

$$(xy) = k \log (\xi \eta x y) \quad [1].$$

La distanza (xy) così definita non è funzione univoca delle coordinate degli elementi x, y; bensì *funzione a infiniti valori, dotata del modulo di periodicità* $2k\pi i$ (essendo $2\pi i$ il modulo di periodicità del logaritmo). Inoltre lo scambio dei due elementi fondamentali ξ, η fa assumere a (xy) i valori eguali ed opposti ai precedenti, costituenti una seconda progressione aritmetica di ragione $2k\pi i$: le due progressioni coincidono se le coppie ξ, η e x, y sono armoniche.

Poichè il logaritmo di un numero diviene infinitamente grande in valor assoluto quando questo numero è anche infinito, oppure nullo, e il birapporto $(\xi\eta xy)$ assume uno di questi valori quando uno degli elementi x, y coincide con uno dei due ξ, η, diremo: *La nostra determinazione metrica* (*generale*) *attribuisce alla forma due elementi all'infinito*: i due elementi della *coppia assoluto*, o *elementi fondamentali.* La lorò distanza da ogni altro elemento della forma è un infinito logaritmico.

Supponendo la coppia assoluto ξ, η rappresentata dall'equazione (a coefficienti comunque complessi):

$$(1) \qquad \Omega \equiv az^2 + 2bz + c = 0$$

ovvero in coordinate omogenee:

$$az_1^2 + 2bz_1z_2 + cz_2^2 = 0$$

e indicando con Ω_{xy} la forma polare $ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2$, si ha:

$$(\xi\eta xy) = \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}} \quad [2].$$

---

[1] Abbiamo veduto al n. 48 che in geometria euclidea l'angolo di due rette di un fascio è appunto suscettibile di una definizione di questo tipo.

[2] Infatti, posto $\xi = \lambda x + y$, $\eta = \lambda' x + y$, saranno λ e λ' le radici dell'equazione di 2° grado:

$$\Omega_{xx}\lambda^2 + 2\Omega_{xy}\lambda + \Omega_{yy} = 0.$$

E si ha $(\xi\eta xy) = (\lambda, \lambda', \infty, 0) = \dfrac{\lambda'}{\lambda}$.

Perciò:

$$(xy) = k \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

La relazione identica:

$$\cos\left[\frac{1}{2i}\log a\right] = \frac{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}{2} = \frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

permette di sostituire al logaritmo un arco coseno, e scrivere:

$$(2) \qquad (xy) = 2ki \text{ ar cos} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = 2k \text{ arg ch} \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

espressione che lascia ancora indeterminato il segno della distanza (xy), dipendente dal verso positivo sulla forma, cioè dall'ordine in cui si considerano i due elementi della coppia assoluto. Si ha pure, indicando con $\varDelta$ il discriminante $ac - b^2$ della forma Ω:

$$(3) \qquad (xy) = 2ki \text{ ar sen} \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = 2k \text{ arg sh} \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

$$= 2ki \text{ ar sen} \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{\varDelta}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}} = 2k \text{ arg sh} \frac{(x_1y_2 - x_2y_1)\sqrt{-\varDelta}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

In particolare, ponendo $k = \frac{1}{2i}$, si hanno le formole date da CAYLEY nella Memoria citata al n.° 61; ad es., colle notazioni della teoria delle forme algebriche da lui usate, e avvertendo che l'esponente -1 indica la funzione inversa (ar cos):

$$(xy) \equiv d = \cos^{-1} \frac{(abc)(x_1x_2)(y_1y_2)}{\sqrt{(abc)(x_1x_2)^2(abc)(y_1y_2)^2}}.$$

64. - Metrica ellittica. — Quando si vogliano considerare soltanto forme reali, e si voglia che su queste i movimenti siano costituiti da proiettività reali, cioè rappresentate in coordinate reali da equazioni anche reali, la coppia assoluto dovrà essere rappresentata da un'equazione di 2° grado a coefficienti reali, e gli elementi di questa coppia nella metrica generale saranno anche reali (metrica *iperbolica*), oppure immaginari coniugati (metrica *ellittica*); nella metrica speciale (*parabolica*) l'unico elemento unito sarà reale. Sono questi appunto i casi che si presentano per la metrica della punteggiata propria nelle tre geometrie non euclidee ed euclidea.

Cominciamo colla metrica ellittica, perciò ξ, η immaginari coniugati. In questo caso, per una coppia di elementi reali x, y il birapporto $(\xi\eta xy)=\lambda$ sarà in generale complesso, e il suo reciproco $(\eta\xi xy)$ sarà eguale al numero complesso $\bar{\lambda}$ coniugato del precedente; perciò, essendo $\lambda\bar{\lambda}=1$, λ avrà per modulo l'unità, e il suo logaritmo sarà immaginario puro. Perchè la distanza dei due elementi reali x, y sia reale, bisognerà dunque dare alla costante k un valore immaginario puro ($=k_1 i$, con k_1 reale); e sarà allora reale la distanza di due elementi reali qualunque. Anzi la distanza $(xy)=k \log(\xi\eta xy)$ sarà *funzione a infiniti valori reali, dotata del modulo di periodicità* $2k_1\pi$; e questo valore $2k_1\pi$ è l'*ampiezza totale* della forma (lunghezza della linea retta). Due elementi reali distinti spezzano la forma in due segmenti complementari, le cui lunghezze hanno somma $2k_1\pi$. E la distanza di due elementi è determinata a meno di multipli di $2k_1\pi$ soltanto quando sia stabilito, insieme con l'elemento iniziale x, a quale dei due segmenti xy ci riferiamo (ossia il senso sulla forma, equivalente all'ordine in cui si considerano nel birapporto $(\xi\eta xy)$ i due elementi fondamentali). *Non vi sono in questo caso elementi reali a distanza infinita.*

Gli ∞^1 movimenti reali sulla forma (congruenze dirette) sono le proiettività ellittiche cogli elementi uniti ξ, η; le proiettività reali che scambiano ξ, η sono eguaglianze inverse, e hanno due elementi doppi reali, armonici rispetto a ξ, η (elementi *ortogonali*, a distanza $k_1\pi$ in ambo i sensi).

Di questo tipo è appunto la metrica euclidea nel fascio proprio di rette. I due raggi fondamentali ξ, η sono le rette isotrope del fascio, e la costante $|k_1|$ vi è supposta $=\frac{1}{2}$ (1). Immaginando segato questo fascio con una trasversale, si avrà sopra questa retta una metrica ellittica quando vi si definisca come lunghezza di un segmento l'ampiezza dell'angolo del fascio che proietta questo segmento, moltiplicata (volendo) per una costante.

---

(1) Nel piano euclideo, siano $ax+by=0$, $a'x+b'y=0$ due rette passanti per l'origine; perciò a, b coordinate omogenee in questo fascio, $\Omega\equiv a^2+b^2=0$ la coppia assoluto. L'angolo delle due rette è allora espresso dalla formola (2) del n.° prec. per $k=\frac{1}{2i}$, e vale $\arccos\frac{aa'+bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}$, come appunto nella metrica ordinaria.

65. - Metrica iperbolica. — Si suppongano ora i due elementi ξ, η reali e distinti; allora per ogni coppia di elementi reali x, y il birapporto $(\xi\eta xy)$ sarà pure reale, positivo o negativo secondo che la coppia x, y non separa oppure separa ξ, η. In quest'ultimo caso il suo logaritmo è perciò sempre immaginario; mentre nel primo caso esso ammette *un* valore reale. Conviene pertanto attribuire alla costante k un valore reale; allora la distanza di due elementi reali qualunque i quali non separino la copia ξ, η avrà bensì infiniti valori, con modulo di periodicità $2k\pi i$, ma di questi valori sempre uno ed uno solo sarà reale; sicchè potremo definire quest'uno come distanza dei due elementi considerati, ossia $(xy) = k \times$ valore reale di $\log(\xi\eta xy)$.

In questo caso i due elementi (reali) ξ, η hanno distanza infinita da ogni altro elemento. Una scala a unità lineare costante, che muova da un elemento arbitrario della forma interno a uno determinato dei due segmenti $\xi\eta$, e nei due versi opposti, potrà raggiungere e oltrepassare qualsiasi altro elemento interno a questo medesimo segmento $\xi\eta$, ma non mai uno dei due estremi ξ, η (elementi all'infinito); e tanto meno potrà penetrare nel segmento $\xi\eta$ complementare del primo. Per la metrica attuale (reale) questo secondo segmento $\xi\eta$ è puramente ipotetico, ideale; la metrica ha nei punti all'infinito ξ, η dei «limiti naturali». I movimenti sulla forma sono ora proiettività iperboliche; ma le eguaglianze inverse, che scambiano ξ, η, hanno un unico elemento unito effettivo (proprio), l'altro è ideale.

Di questo tipo è la metrica della punteggiata secondo la geometria iperbolica (cfr. anche n.° 48). In questa metrica, la distanza di due punti reali separanti la coppia ξ, η è espressa da un numero reale aumentato di un multiplo impari di $k\pi i$ (essendo π argomento di qualsiasi numero reale negativo); in particolare per punti coniugati armonici rispetto a ξ, η il birapporto $(\xi\eta xy)$ vale -1 e ha logaritmo $(2n+1)\pi i$, sicchè la distanza di questi punti risulta $= k\pi i$, a meno del modulo di periodicità

66. - Metrica parabolica (speciale). — Se la coppia assoluto ξ, η si compone di due elementi coincidenti, la definizione generale di distanza (xy) (n.° 63) viene a cadere. Infatti il birapporto $(\xi\eta xy)$ si riduce all'unità, e si annulla quindi il suo logaritmo (a meno di multipli di $2\pi i$); salvo diventare entrambi indeterminati quando uno dei due elementi x, y coincide con $\xi \equiv \eta$.

La definizione di distanza può tuttavia estendersi a questo caso con un passaggio al limite. Partiamo, per fissare le idee, da una metrica iperbolica, indicando con $p, p+\varepsilon$ le coordinate non omogenee dei due elementi (distinti, ma prossimi fra loro) costituenti la coppia assoluto. Per due elementi di coordinate z, z' (non comprese fra p e $p+\varepsilon$) avremo:

$$(zz') = k \log (p+\varepsilon, p, z, z')$$

dove k è costante reale, e pel logaritmo si è assunto il valore reale. Facciamo ora tendere a zero ε (e quindi il logaritmo), e crescere indefinitamente la costante k, in modo che il prodotto $k\varepsilon$ rimanga finito ed eguale a una costante assegnata l, reale, non nulla. Assumiamo cioè come definizione della distanza (zz') nella metrica parabolica (speciale) la seguente:

$$(zz') = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{l}{\varepsilon} \log (p+\varepsilon, p, z, z') \right\}.$$

Ora, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, è:

$$\log (p+\varepsilon, p, z, z') \equiv \log \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon}{z-p}\right) : \left(1 - \frac{\varepsilon}{z'-p}\right) \right\} = \frac{\varepsilon}{z'-p} - \frac{\varepsilon}{z-p};$$

e perciò:

$$(zz') = l\left(\frac{1}{z'-p} - \frac{1}{z-p}\right) \quad (1)$$

funzione algebrica, anzi *razionale*, perciò a un sol valore, *delle coordinate proiettive dei due elementi*, mentre nella metrica generale si era trovata una funzione trascendente, a infiniti valori. La distanza (zz') è anzi *differenza di due birapporti*; infatti:

$$\frac{l}{z-p} = (p+l, z, p, \infty) = (p, \infty, p+l, z),$$

e colla sostituzione lineare $x = \dfrac{l}{z-p}$ la distanza stessa risulta espressa da $(xx') = x' - x$, come in coordinate ascisse. La scelta della costante (arbitraria) l equivale a quella dell'unità di misura.

---

(1) Questo breve calcolo trovasi nel mscr. C. SEGRE. Nella Memoria KLEIN, Mathem. Ann., 4, il calcolo è un po' diverso, analogo a quello di cui qui ci varremo al n.° 74 per la metrica parabolica del piano.

Vi è ora un solo elemento avente da ogni altro distanza infinita (data da un infinito non più logaritmico, ma algebrico): ed è l'unico elemento fondamentale $z = p$ (ossia $x = \pm\infty$). La forma può concepirsi chiusa attraverso quest'unico elemento, senza che occorra un segmento ideale. I movimenti sulla forma sono le ∞^1 proiettività paraboliche aventi questo *unico* elemento doppio ($x' = x + \text{cost.}$).

Un analogo passaggio al limite può applicarsi partendo da una metrica ellittica. Le coordinate dei due elementi fondamentali di quest'ultima, immaginari coniugati, potranno indicarsi con $p \pm \varepsilon$, ove p è reale e ε immaginario puro; e, essendo la costante k anche immaginaria pura, si passerà al limite mantenendo costante e reale il prodotto $k\varepsilon = l$ (1).

§ 2. - Metrica proiettiva nelle forme di 2ª specie.

67. - Nozioni fondamentali. — In un piano introduciamo come varietà fondamentale una conica, che chiameremo « assoluto », per ora irriducibile e con equazione a coefficienti comunque complessi. Ogni forma di 1ª specie contenuta nel piano, punteggiata o fascio di rette, avrà a comune colla conica assoluto, luogo o inviluppo, *due*

---

(1) *Metrica speciale tangente in un punto a una data metrica generale.* — In una forma di 1ª specie, usando coordinate proiettive reali non omogenee, si istituisca una metrica generale rispetto alla coppia assoluto di equazioni $z^2 + a = 0$ $(a \neq 0)$; metrica ellittica o iperbolica, secondo che $a \gtrless 0$. Esprimendo la distanza δ di un elemento qualunque z dall'elemento $z = 0$ mediante un ar tg, quale si ricava dalle (2) e (3) del n.° 63, si ha:

$$\delta = 2ki \operatorname{ar\,tg} \frac{z}{\sqrt{a}} = \frac{2ki}{\sqrt{a}} \cdot z - \frac{2ki}{3\sqrt{a^3}} \cdot z^3 + \frac{2ki}{5\sqrt{a^5}} \cdot z^5 - \dots$$

dove la costante k s'intende reale o immaginaria pura secondo che la metrica è iperbolica o ellittica, ossia $a \lesseqgtr 0$. Istituiamo poi sulla stessa forma una metrica parabolica avente come unico elemento fondamentale quello di coordinata $\pm\infty$ (ossia il coniugato armonico di $z = 0$ rispetto alla coppia $z^2 + a = 0$). Assumendo come elemento unità quello di coordinata $\frac{\sqrt{a}}{2ki}$, la distanza $\delta_1 = 0z$, misurata nella nuova metrica, sarà data da $\frac{2ki}{\sqrt{a}} \cdot z$, ossia dal primo termine dello sviluppo di δ. Nelle vicinanze dell'elemento $z = 0$ essa è pertanto un valore approssimato di δ, e la nostra metrica parabolica è una approssimazione della precedente, completamente individuata dalla metrica generale elementi (reali o immaginari, distinti o coincidenti); e questa coppia si assumerà come assoluto della forma stessa. Alla costante moltiplicativa che entra nell'espressione delle distanze e degli angoli attribuiremo uno stesso valore k per tutte le punteggiate, e uno stesso valore k' per tutti i fasci di rette.

Definiremo quindi come *distanza di due punti* x, y l'espressione:

$$(xy) = k \log (\xi\eta xy)$$

dove ξ, η sono le intersezioni della retta xy colla conica fondamentale; e così *l'angolo di due rette* u, v:

$$\widehat{uv} = k' \log (\varrho\sigma uv)$$

essendo ϱ, σ le tangenti condotte dal punto uv alla stessa conica. Distanze e angoli sono determinati a meno di multipli di $2k\pi i$, o rispett. di $2k'\pi i$; essendo essi definiti in modo duale fra loro, *la dualità piana risulta ora applicabile anche alle proprietà metriche.*

Sulle rette tangenti alla conica assoluto e nei fasci di rette che hanno il centro su questa conica i due elementi fondamentali coincidono; ma anche in questi casi conviene conservare alle costanti k, k' i valori finiti sopra indicati, se no le misure ottenute in queste forme non sarebbero confrontabili colle altre. *La distanza di due punti appartenenti a una stessa tangente della conica fondamentale è perciò nulla*, oppure *indeterminata se uno dei due è il punto di contatto della tangente colla conica* (precisamente come, in geometria euclidea, per punti di una retta isotropa); e dualmente *l'angolo di due rette che si incontrano sulla conica fonda-*

---

data e dall'elemento $z = 0$. Da F. Klein (Mem. cit. dei Math. Ann., 4, § 7) questa metrica speciale è chiamata *tangente* alla prima nell'elemento $z = 0$, poichè nelle vicinanze di questo elemento le due metriche coincidono a meno di infinitesimi di ordine superiore. Le distanze δ_1 date dalla metrica parabolica sono maggiori o minori delle corrispondenti δ secondo che $a \gtrless 0$, ossia secondo che la prima metrica è ellittica o iperbolica. Nel primo caso la metrica tangente allunga le distanze (*eilt voran*; e infatti l'ampiezza totale della forma da finita deve diventare infinita); nel secondo caso le accorcia (*bleibt zurück*). — Il numero $4k$ esprime la distanza dei due elementi fondamentali della metrica generale, misurata nella nostra metrica speciale, tangente alla prima nell'elemento $z = 0$ medio fra essi: infatti per $z = \pm\sqrt{-a}$ si ha $\delta_1 = \pm 2k$.

mentale è nullo, oppure *indeterminato se una delle due è tangente alla conica.*

Indicata con $\Omega=0$ l'equazione luogo della conica assoluto, le sue intersezioni $(\lambda x+y)$ colla retta xy sono determinate dall'equazione:

$$\Omega_{xx}\lambda^2+2\Omega_{xy}\lambda+\Omega_{yy}=0$$

dove Ω_{xx}.... hanno significato analogo a quello del n.° 63. Sarà pertanto:

$$(1)\quad (xy)=k\log\frac{\Omega_{xy}+\sqrt{\Omega_{xy}^2-\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy}-\sqrt{\Omega_{xy}^2-\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}=2ki\text{ ar cos}\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$
$$=2ki\text{ ar sen}\frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

e saranno pure valide, colla nuova Ω, le altre espressioni date al n.° 63. — Analogamente, se $\Phi=0$ è l'equazione inviluppo della stessa conica:

$$(2)\qquad \widehat{uv}=k'\log\frac{\Phi_{uv}+\sqrt{\Phi_{uv}^2-\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv}-\sqrt{\Phi_{uv}^2-\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}=2k'i\text{ ar cos}\frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}.$$

La costante k' si assumerà d'ora in poi sempre $=\frac{1}{2i}$; gli angoli nel fascio saranno perciò determinati a meno di multipli di π, e sarà π la misura totale (ampiezza) di ogni fascio; si ha dunque la metrica ordinaria di un fascio proprio di rette, comune alla geometria euclidea e alle due non euclidee. — Per rette u, v reciproche rispetto all'assoluto si ha $(\varrho\sigma uv)=-1$, numero il cui logaritmo ha fra i propri valori πi; si può quindi assumere $\widehat{uv}=\frac{\pi}{2}$, chiamando tali rette *perpendicolari* (¹) (²). Pertanto: *Rette coniugate rispetto all'assoluto sono perpendicolari, e viceversa.* Simil-

---

(¹) Così appunto, in geometria euclidea, rette perpendicolari sono rette coniugate armoniche rispetto ai due punti ciclici, cioè coniugate rispetto alla conica inviluppo spezzata in questi due punti.

(²) Il teorema di geometria proiettiva: « Due triangoli corrispondenti in una polarità piana sono omologici e prospettivi » (teorema sempre vero, ma illusorio se 2 elementi di uno dei due triangoli sono reciproci), applicato alla polarità rispetto alla conica assoluto, dà il seguente teorema dell'attuale metrica generale: *Le altezze di un triangolo* (ossia le congiungenti i singoli vertici coi poli dei lati opposti) *passano per uno stesso punto.*

mente: *Punti coniugati rispetto all'assoluto hanno distanza* $k\pi i$ (a meno del modulo di periodicità $2k\pi i$).

A valori eguali della distanza xy corrisponderanno valori pure eguali della quantità $\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$; e perciò il luogo dei punti x aventi da un punto dato y distanza costante sarà rappresentato da un'equazione (nelle variabili x) del tipo:

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\lambda\Omega_{xy}^2=0.$$

Questo luogo è dunque una conica bitangente alla conica assoluto nelle sue intersezioni colla retta $\Omega_{xy}=0$, polare del punto y.

Conservando alle espressioni *cerchio*, e *centro* di questo cerchio, lo stesso significato della geometria euclidea, diremo: *Gli infiniti cerchi aventi un dato centro sono le coniche bitangenti all'assoluto nelle sue intersezioni colla polare del centro comune.*

Il raggio del cerchio $\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\lambda\Omega_{xy}^2=0$ vale $2ki \operatorname{ar}\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$. Per $\lambda=\infty$ (raggio $=k\pi i$) si ha la polare del punto y contata due volte. *Le rette* (contate due volte) *sono dunque particolari cerchi*, di raggio $k\pi i$, col centro nel proprio polo [1]. Per $\lambda=1$ il raggio si annulla, e si ha la coppia delle tangenti condotte da y alla conica assoluto (v. sopra). Infine per $\lambda=0$ si ha la stessa conica assoluto, che appare come *cerchio di raggio infinito col centro in un punto arbitrario del piano*, e quindi come *luogo dei punti all'infinito del piano.* La quantità $\log(\xi\eta xy)$ diviene infatti infinita quando x o y coincide con ξ o η.

Rileviamo ancora qualche altra proprietà dei cerchi, nell'attuale metrica generale:

1°) *I cerchi di dato centro sono traiettorie ortogonali dei loro comuni raggi.* Essi sono infatti coniche bitangenti, rispetto alle quali ognuno di questi raggi ha il medesimo polo, e quindi le stesse rette coniugate. Ora una tangente qualunque di uno di questi cerchi

[1] V. anche n.° 36. Il fattore $\frac{1}{2}$ che compare in più al n.° 36 è dovuto al fatto che la costante indicata con k al n.° 36 e in tutto il Cap. II è doppia di quella così indicata nelle formole di questo Cap.; ad es. la curvatura $-\frac{1}{k^2}$ è qui (n.° 72) $-\frac{1}{4k^2}$. Analogamente, nella formola (2) del n.° 48 l'attuale k è $\frac{R}{2}$.

e il raggio che passa pel punto di contatto sono coniugati rispetto a questo stesso cerchio, quindi anche rispetto all'assoluto (cerchio concentrico al primo), e perciò perpendicolari.

2°) *Essi sono anche le linee di egual distanza dalla retta polare del centro comune rispetto all'assoluto* (questa retta essendo a sua volta uno di quei cerchi). — Nella trattazione elementare della geometria iperbolica (Cap. II, v. in particolare n.i 25, 36) si è infatti rilevata l'analogia fra le linee di egual distanza da una retta, o ipercicli, e i cerchi; l'assoluta identità loro era tuttavia mascherata, nel campo reale, dal fatto che ipercicli aventi da una retta reale distanza costante reale erano cerchi di raggio complesso.

3°) *I cerchi* (generici) *di dato centro y sono anche inviluppi di rette che con una retta fissa*, la polare di y, *formano angolo costante.* Questi inviluppi sono infatti, per dualità, coniche anch'esse bitangenti all'assoluto, nei suoi punti d'intersezione colla polare di y. Sono inviluppi degeneri del sistema il fascio y contato due volte (per il quale quell'angolo costante è retto), e la coppia di fasci aventi i centri nelle intersezioni dell'assoluto colla polare y (angolo costante nullo).

68. - Movimenti nella metrica proiettiva. — La conica assoluto è invariante rispetto a un gruppo ∞^3 di trasformazioni proiettive del piano (dipendenti, nel caso presente, da tre parametri complessi); queste conservano inalterate distanze e angoli, e sono perciò le analoghe dei *movimenti* e delle trasformazioni (dette *di 2ª specie*), prodotti di movimenti per simmetrie. Viceversa ogni trasformazione puntuale del piano la quale conservi distanze ed angoli (e basterebbe anche le prime) deve mutare le rette, come cerchi di raggio $k\pi i$, in rette, e la conica fondamentale (luogo dei punti all'infinito) in sè stessa: è dunque una collineazione che muta in sè quest'ultima conica. Ritorneremo sull'argomento (e la cosa presenterà allora maggior interesse) quando ne faremo applicazione alla metrica piana ellittica (n.° 70) od iperbolica (n.° 73).

69. - Metrica piana con conica assoluto immaginaria. Geometria ellittica. — Ci limiteremo d'ora in poi alla considerazione di un piano reale e degli elementi reali di esso; e distingueremo i due casi in cui la conica assoluto, irriducibile e rappresentata ora da un'equazione a coefficienti reali, ha altresì, oppure non ha punti (soluzioni) reali. Cominceremo da quest' ultimo caso (conica immaginaria ([1]); fondamentale per una polarità uniforme); si ha allora la metrica ellittica.

In questo caso risulta pure ellittica la metrica subordinata in ogni forma di 1ª specie reale (punteggiata, o fascio di rette). La costante k delle distanze si assumerà anch' essa immaginaria pura e $=\frac{1}{2i}$ (come la k' degli angoli). Perciò: *Ogni retta reale ha lunghezza finita,* eguale a π. *Non vi sono elementi reali* (*punti o rette*) *a distanza infinita,* e quindi nemmeno rette parallele (reali). — Tutte le rette perpendicolari a una retta fissa concorrono in un punto (effettivo), che è il polo di quet'ultima retta rispetto all'assoluto; due rette qualunque hanno sempre *una* perpendicolare comune, la polare del punto loro intersezione. La distanza di due punti è eguale all'angolo (opportunamente misurato) delle loro polari rispetto all'assoluto. Come un triangolo ha in tutto 6 bisettrici (fra interne ed esterne) che a 3 a 3 concorrono in 4 punti, centri dei 4 cerchi tangenti ai tre lati, così (dualmente) i lati ammettono nei loro punti medi *interni* ed *esterni* (punti medi nel senso ordinario, e punti medi dei segmenti complementari) 6 perpendicolari, che concorrono a 3 a 3 nei centri dei *quattro* cerchi circoscritti al triangolo ([2]).

L' equazione luogo della conica assoluto può supporsi ridotta (in coordinate reali) alla forma:

$$\Omega \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2=0;$$

e la sua equazione inviluppo è allora:

$$\Phi \equiv u_1^2+u_2^2+u_3^2=0.$$

Perciò la distanza di due punti x, y e l' angolo di due rette u, v sono dati da:

$$(xy)=\text{ar}\cos\frac{x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}};$$

$$\widehat{uv}=\text{ar}\cos\frac{u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

([1]) Per F. Klein, *nulltheiliger Kegelschnitt,* cioè conica « a nessun ramo », sottintendendo « reale »; le coniche reali sono invece *eintheilig,* cioè « a un ramo (reale) » (in senso proiettivo).

([2]) Cfr., per la geometria iperbolica, la nota (2) a p. 51, insieme coll' enunciato a cui essa è complemento.

Quando le x_i, y_i e le u_i, v_i si suppongano rispett. coordinate cartesiane e plückeriane ortogonali nello spazio euclideo, e quindi (particolari) coordinate proiettive omogenee di rette e piani nella stella avente per centro l'origine, le due frazioni a 2° membro esprimono appunto i coseni degli angoli $\widehat{xy}$ e $\widehat{uv}$ secondo la metrica euclidea. *La metrica ellittica del piano coincide dunque colla metrica euclidea di una stella propria, qualora in essa alle parole* **punto** *e* **retta** *si sostituiscano rispett.* **retta** *e* **piano** (*della stella*), *e la* **distanza** *di due punti sia sostituita dall'***angolo** *di due raggi della stella.* La conica assoluto $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$ della metrica ellittica è sostituita dal cono isotropo. Si ha quindi nel piano una metrica ellittica, pensando il piano come prospettivo a una stella propria, e misurando in esso distanze di punti e angoli di rette mediante gli angoli delle rette e dei piani della stella che proiettano questi elementi. Ai cerchi del piano ellittico corrispondono nella stella i *coni di rotazione*, ciascuno dei quali è appunto tangente al cono isotropo lungo una coppia di generatrici (immaginarie coniugate). Le proprietà generali dei cerchi enunciate alla fine del n.° 67 trovano nell'applicazione alla stella l'interpretazione più intuitiva, poichè le distanze ivi considerate sono ora tutte reali; p. es., nella stella, i coni rotondi aventi un dato asse sono luoghi di rette e inviluppi di piani che formano angolo costante sia con quest'asse, sia col piano della stella perpendicolare all'asse; e quest'ultimo piano è a sua volta uno particolare (limite) fra quei coni.

Sostituendo alla stella propria una sfera col centro nel centro stesso della stella, si può anche dire: *La metrica ellittica del piano coincide colla geometria sopra una sfera di raggio unità* (oppure di raggio R, se la costante k delle distanze si assume $=\frac{R}{2i}$), *cambiando soltanto la parola* **retta** (del piano) *in* **cerchio massimo** (sulla sfera). Questa seconda interpretazione vale però soltanto per regioni della sfera opportunamente limitate; in quei limiti (non mai eccedenti la semisfera) nei quali una regione di sfera può mettersi in corrispondenza prospettiva biunivoca con una stella di rette avente lo stesso centro della sfera. P. es. sulla sfera cerchi di egual centro (centro « sferico »; cioè contenuti in piani paralleli) sono linee di egual distanza da un cerchio massimo.

La trigonometria piana secondo la metrica ellittica coincide coll'ordinaria trigonometria sferica. Indicati con α, β, γ i tre angoli di un triangolo, si ha $\alpha+\beta+\gamma>\pi$, e l'area del triangolo è data dalla formola $\Delta=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$. L'area di un triangolo trirettangolo è $\frac{\pi}{2}$, e l'area dell'intero piano ellittico (quadrupla della precedente) è 2π. Mantenendo per le distanze una costante moltiplicativa generica $k=k_1 i$ (dove k_1 è reale), queste aree sarebbero rispett. $2k_1^2\pi$ e $8k_1^2\pi$.

La metrica ellittica coincide pure colla geometria delle superficie a curvatura costante positiva. Partiamo dalla formola della distanza di due punti, espressa mediante un arco seno:

$$(xy)=2ki \text{ ar sen } \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}};$$

assumiamo la costante $k=\frac{R}{2i}$, e l'equazione della conica assoluto in coordinate omogenee di punto x, y, z sotto la forma $\Omega\equiv x^2+y^2+R^2z^2=0$, in coordinate di retta $R^2(u^2+v^2)+w^2=0$. Ricordiamo inoltre che la funzione $\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2$ coincide con l'espressione che si ottiene dal 1° membro dell'equazione della conica inviluppo, opportunamente normalizzata, sostituendo alle coordinate di retta i determinati di 2° ordine della matrice $\begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \end{vmatrix}$ (1). La distanza di due punti $(x, y, 1)$, $(x', y', 1)$ sarà allora:

$$R \text{ ar sen } \frac{\sqrt{R^2(x-x')^2+R^2(y-y')^2+(xy'-x'y)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+R^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+R^2}}.$$

Ponendo $x'=x+dx$, $y'=y+dy$, e limitandoci ai termini di 1° ordine, avremo dunque l'*elemento lineare*:

$$ds=R\frac{\sqrt{R^2(dx^2+dy^2)+(xdy-ydx)^2}}{x^2+y^2+R^2}=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+\frac{(xdy-ydx)^2}{R^2}}}{1+\frac{x^2+y^2}{R^2}};$$

formola che coincide colla (4) del n.° 45, quando in essa si ponga $a=R$, e si muti successivamente R^2 in $-R^2$. Essa è caratteristica per le superficie a curvatura costante positiva $\frac{1}{R^2}$; su queste può dunque applicarsi il piano ellittico qualora $k=\frac{R}{2i}$.

---

(1) V. p. es. D'Ovidio: *Geometria Analitica*, 3ª ediz. (1903), p. 260.

70. - **Movimenti nella geometria ellittica.** — I movimenti del piano ellittico sono collineazioni reali trasformanti in sè la polarità rispetto alla conica fondamentale. Ciascuna di queste collineazioni lascia fissi un punto e una retta reali, mutuamente polari rispetto alla detta conica; appunto come, nella stella propria, ogni movimento è rotazione intorno a una retta (asse), e lascia fisso anche il piano della stella perpendicolare a quest'asse. Perciò: *Ogni movimento del piano ellittico può considerarsi in pari tempo come una rotazione intorno a un punto, e come uno scorrimento* (*traslazione*) *secondo una retta* (polare di quel punto rispetto all'assoluto). I vari punti del piano si spostano sopra cerchi, che hanno il centro nel punto fisso e sono in pari tempo linee di egual distanza dalla retta fissa.

Nel piano ellittico non esistono trasformazioni distinte dai movimenti, e analoghe alle operazioni di 2^a specie del piano euclideo. La simmetria rispetto a una retta, che è la più semplice di queste trasformazioni, coincide ora colla rotazione di ampiezza π intorno al polo di questa retta, cioè coll'omologia armonica che ha questi elementi come asse e centro. Così anche nella stella propria euclidea la rotazione di ampiezza π intorno a una retta della stella coincide colla simmetria rispetto al piano della stella perpendicolare a quella retta [1].

Rappresentata la conica assoluto coll'equazione $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$, gli ∞^3 movimenti del piano ellittico potranno rappresentarsi con quelle sostituzioni lineari omogenee:

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ \varrho x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad (A \equiv |a_{ik}| \neq 0) \\ \varrho x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}$$

che mutano in sè la detta conica; e anzi i 9 coefficienti reali a_{ik} potranno normalizzarsi in modo che, assunto $\varrho=1$, risulti precisamente $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Si hanno allora le *sostituzioni*

---

(1) La circostanza che, nelle dette operazioni, sopra ogni retta della stella risultino scambiati i due opposti versi di movimento non ha importanza alcuna, considerandosi ora nella stella soltanto queste rette, indipendentemente dai versi su di esse.

ortogonali delle 3 variabili x_1, x_2, x_3 [1], dipendenti appunto da 3 parametri reali. In particolare, gli ∞^1 movimenti che lasciano fissi il punto $x_1=x_2=0$ e la sua polare $x_3=0$ possono rappresentarsi colle sostituzioni (dipendenti dall'unico parametro a):

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_1 \cos a - x_2 \operatorname{sen} a \\
x_2' &= x_1 \operatorname{sen} a + x_2 \cos a \qquad (1) \\
x_3' &= x_3
\end{aligned}
$$

che mutano in sè la somma $x_1^2+x_2^2$, quindi tutte le coniche (cerchi) del fascio $x_1^2+x_2^2+\lambda x_3^2=0$, fra loro bitangenti, e reali per valori negativi di λ.

71. - Il piano ellittico come superficie unilatera. — Abbiamo già detto al n.° 40, che la geometria metrica del piano ellittico e la geometria sferica coincidono finchè di queste superficie si considerino solo regioni convenientemente limitate, ma non più se queste superficie si considerano nella loro integrità. Un fatto analogo, per altre superficie, ci si è anche presentato nel Cap. III: *la geometria di una regione limitata di una superficie non determina sempre in modo unico questa stessa geometria nella sua integrità*, potendo quest'ultima dipendere fra altro da *proprietà di connessione* della superficie [2].

Fra le proprietà di connessione delle superficie (il cui studio è di pertinenza della *Analysis situs*) ve n'è una, notevolissima, rilevata per la prima volta da A. F. MÖBIUS, e che qui interessa per quanto concerne il piano ellittico. — Data ad es. una striscia di carta rettangolare $ABB'A'$ (fig. 59), noi possiamo ridurla a superficie cilindrica saldandone gli estremi A e A', B e B'; ma se invece la striscia si torce una volta sopra sè stessa in modo che

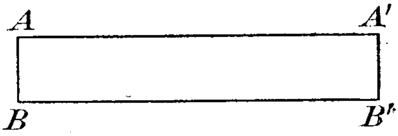


Fig. 59.

[1] V. p. es. FANO-TERRACINI: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*; Torino, Paravia, 1930; n.° 104, 111. Il determinante $|a_{ik}|$ si dice allora *determinante ortogonale*.

[2] V. anche F. KLEIN, Math. Ann., vol. VI, p. 125-126; vol. 37, p. 554 e seg. = Ges. Mathem. Werke, vol. I, pp. 285, 324, 363 e seg; nonchè qui più avanti, n.° 85.

il lato $A'B'$ ruoti di 180° intorno al suo punto medio, e se saldiamo poi A con B' e B con A', otteniamo una superficie essenzialmente diversa, alla quale è stato dato il nome di *nastro di Möbius* (¹).

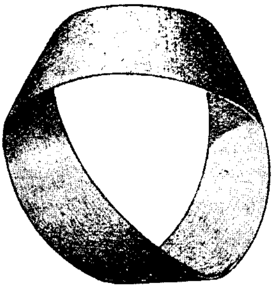


Fig. 60.

Quest'ultima superficie (fig. 60), a differenza della precedente, *non ammette due facce distinte l'una dall'altra* (tanto che non sarebbe possibile, come ad es. sulla sfera, di colorirle diversamente l'una dall'altra). Partendo da una posizione qualunque sopra questa superficie, e supponendo di trovarci da una determinata banda di essa, se descriviamo tutto un giro sulla striscia fino a tornare alla posizione iniziale, verremo a trovarci dalla banda opposta alla primitiva; e non ritorneremo sulla stessa banda primitiva che dopo un secondo giro analogo al primo. Piegando la striscia a cilindro, essa ha due orli, risultanti dal chiudersi dei singoli lati AA' e BB'; il nastro di Möbius ha invece un orlo unico, formato dai lati anzidetti che ora (essendo $B \equiv A'$, $B' \equiv A$) si trovano uno sul prolungamento dell'altro.

Le superficie si distinguono in *bilatere* ed *unilatere*, secondo che hanno (come la sfera) o non hanno due facce distinte; vale a dire secondo che un punto, il quale si sposti sulla superficie a partire da una certa posizione iniziale e trovandosi alla partenza da una determinata banda della superficie, e faccia ritorno alla posizione iniziale dopo un cammino qualsiasi (naturalmente, senza girare intorno agli eventuali orli), si trova sempre ancora dalla medesima banda della superficie, oppure può, dopo un cammino opportuno, trovarsi dalla banda opposta. Se la normale alla superficie segue il punto nel suo movimento, nel primo caso essa tornerà alla posizione iniziale in modo che ciascuno dei due opposti versi su di essa

(¹) A. F. Möbius: *Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyëders*, Leipz. Ber, 17, 1865; Ges. Werke, Bd. II: in part. § 11; come pure la parte I del successivo « Nachlass »: *Einseitige Polyëder*. Möbius è giunto al concetto di *superficie unilatera*, di cui qui si tratta, cercando di estendere il concetto di volume di un poliedro dai casi elementari a poliedri comunque intrecciati; e ha trovato che esistono poliedri, quelli a superficie unilatera, ai quali il concetto di volume non è assolutamente estendibile.

si sovrapporrà a sè stesso; nel secondo caso tali versi risulteranno scambiati. O, meglio ancora (il che mette in evidenza la proprietà *intrinseca* di questo carattere delle superficie), consideriamo sulla superficie una linea chiusa qualsiasi, una specie di piccolo cerchio che circondi il punto iniziale, e su di essa un determinato (arbitrario) senso di rotazione; il che complessivamente costituisce una così detta *indicatrice* del punto sulla superficie. La superficie sarà bilatera o unilatera, secondo che in seguito al cammino chiuso di cui sopra il senso dell'indicatrice, che si suppone segua il punto con continuità, non risulta mai, oppure può risultare invertito. Il nastro di Möbius è superficie unilatera con contorno; ma può rendersi chiusa aggregandovi un'ulteriore qualsiasi zona superficiale limitata dallo stesso contorno, p. es. una zona di superficie conica proiettante questo contorno da un punto arbitrario. La superficie complessiva così ottenuta risulterà intrecciata; ma per la geometria intrinseca della superficie, se si pensano le due falde intrecciate come distinte, cioè senza possibilità di passare dall'una all'altra attraverso la linea loro intersezione, ciò non ha importanza. D'altronde, nello spazio euclideo le superficie chiuse non intrecciate sono tutte bilatere; ossia ogni superficie chiusa unilatera è intrecciata. Un altro esempio semplice di superficie unilatera chiusa si ha prendendo un cilindro chiuso di lunghezza finita (tubo a spessore trascurabile), e immaginando di introdurre una delle sue estremità nell'interno di esso, attraverso la parete, fino a saldarla coll'altra estremità rivoltata in dentro (fig. 61).

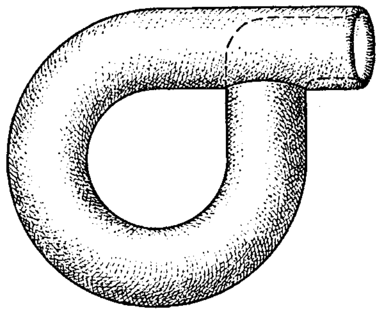


Fig. 61.

Or bene, *la differenza fra il piano ellittico e la sfera*, per quanto concerne la loro connessione, *consiste in ciò, che la sfera è superficie bilatera, mentre il piano ellittico è superficie unilatera.* Le geometrie *integrali* di queste due superficie non possono perciò a meno di differire profondamente. Il piano ellittico (come il piano proiettivo) è in corrispondenza biunivoca continua *senza eccezioni* con una qualsiasi stella propria di rette ad esso prospettiva; la sfera invece colla stella di «semirette» che la proietta dal suo centro. Perciò, analogamente: *La stella di semirette, concepita come superficie* (varietà ∞^2), *è superficie bilatera; invece la stella di rette è superficie unilatera.* Invero in una stella di semirette, facendo muovere comunque un elemento fino a riprendere la sua posizione iniziale, sempre ciascuno dei due versi di rotazione intorno ad esso viene a sovrapporsi a sè medesimo. Invece in una stella di (intere) rette questi due versi possono scambiarsi; e si scambiano ogni qualvolta la retta muovendosi nella stella ritorna alla posizione iniziale in modo che risultino invertiti i due opposti sensi di movimento su di essa, p. es. in seguito alla rotazione di 180° intorno a una retta della stella perpendicolare alla prima. Similmente, nel piano ellittico il senso dell'indicatrice si inverte quando un punto percorre un'intera retta, ritornando (per la prima volta) al punto di partenza ([1]).

72. - **Metrica piana con conica reale. Geometria iperbolica.** — Se la conica fondamentale si suppone reale (e sempre irriducibile), le metriche subordinate nelle forme di prima specie reali del piano presenteranno vari casi, secondo che si tratta di una retta non incontrante la conica fondamentale, oppure secante o tangente ad essa, e di un fascio il cui centro sia interno o esterno alla conica, oppure giaccia su di essa. Volendo avere metriche reali (n.° 64, 65) e conservare per tutte le distanze e per tutti gli angoli le medesime costanti k e k' $\left(\text{quest' ultima } = \frac{1}{2i}\right)$, ci limiteremo a considerare la zona di piano *interna* alla conica fondamentale, o regione dei *punti propri*, compresi, come caso limite, i punti della conica stessa (punti all'infinito), e le sole rette contenenti punti propri, cioè secanti questa conica (*rette proprie*). Avremo perciò una metrica iperbolica sopra ogni punteggiata propria, e una metrica ellittica in ogni fascio di rette proprio. Daremo alla costante k un valore reale (arbitrario); la distanza di due punti qualunque, limitatamente alla regione considerata, ammetterà allora *un* valore reale, e sarà perciò, colla condizione della realtà, completamente individuata; e sarà pure reale, e determinato a meno di multipli di π, l'angolo di due rette che si

([1]) V. p. es. KLEIN-ROSEMANN, p. 14; il piano proiettivo ivi considerato è identico al piano ellittico.

incontrano in un punto proprio. La conica fondamentale sarà luogo dei *punti all'infinito* (reali), e l'angolo di due rette proprie che s'incontrano su di essa sarà nullo. L'angolo di due rette secanti questa conica e incontrantisi in un punto esterno ad essa è immaginario.

Tutto questo concorda appunto colla geometria di Lobačewsky-Bolyai, quando si chiamino *parallele* due rette che si incontrano in un punto della conica fondamentale, e *non secanti* due rette che si incontrano in un punto esterno a questa. Per ogni punto proprio si possono condurre a una retta propria *due* parallele, formanti con essa angolo nullo. Queste parallele spezzano il loro fascio in due angoli completi, uno dei quali è luogo di rette incontranti la prima (in punti propri), l'altro di rette non secanti rispetto a questa. Anche qui, rette *perpendicolari* $\left(\text{ad angolo } \frac{\pi}{2}\right)$ sono reciproche rispetto alla conica assoluto. Quando un punto P (fig. 62) si allontana indefinitamente sopra una retta PS_∞ parallela a r e nel verso del parallelismo (tende cioè a S_∞), la sua distanza da r (PP', misurata sulla perpendicolare a r, cioè sulla reciproca di r passante per P) tende a zero: infatti nel birapporto $S_\infty(MNPP')$, eguale a $(MNPP')$, i primi due elementi SM, SN tendono a coincidere colla tangente SR alla conica fondamentale e fra loro, mentre gli altri due SP, SP' rimangono fissi e distinti, sicchè il birapporto tende all'unità e il suo logaritmo a zero. La perpendicolare comune a due rette non secanti è la polare del loro punto d'incontro (la quale è appunto secante rispetto alla conica fondamentale quando questo punto è esterno ad essa). Le infinite perpendicolari a una retta data passano tutte pel polo di questa retta, il quale può concepirsi come un *punto ideale* (n.° 22); l'insieme dei punti ideali completa il piano iperbolico, e ne fa un piano proiettivo.

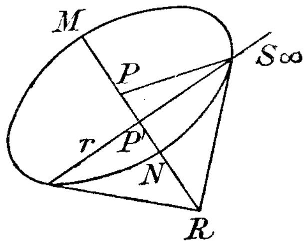


Fig. 62.

Nella metrica iperbolica i cerchi (coniche bitangenti all'assoluto) possono distinguersi in *tre* specie, secondo che il centro è un punto proprio (interno alla conica assoluto), all'infinito (posto su quella conica) ovvero ideale (esterno alla conica). Nel primo caso si hanno *cerchi propriamente detti* (di raggio reale), ossia linee chiuse, tangenti all'assoluto nelle sue intersezioni, immaginarie coniugate, colla polare del centro. Nel secondo caso si hanno curve aperte, a un solo ramo, tendenti a chiudersi verso un determinato punto all'infinito, nel quale hanno coll'assoluto contatto quadripunto; sono gli *oricicli* di Lobačewsky. Nel terzo caso avremo cerchi di raggio immaginario (perchè a centro ideale), ma bitangenti all'assoluto in punti reali e distinti; composti, dal punto di vista metrico, di due rami distinti aventi a comune questi due punti all'infinito. Fra queste linee, per ogni dato centro (ideale) ve n'è una costituita da una retta propria: la polare del centro contata due volte; le altre sono *linee di egual distanza* da questa retta.

Introducendo nel piano un sistema di coordinate proiettive non omogenee tali che sia $x^2+y^2-R^2=0$ l'equazione della conica assoluto, l'espressione dell'elemento lineare ds sarà (in analogia con quella del n.° 69):

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2-\frac{(xdy-ydx)^2}{R^2}}}{1-\frac{x^2+y^2}{R^2}}.$$

Più particolarmente, se x, y si suppongono coordinate cartesiane in un piano euclideo, la conica $x^2+y^2-R^2=0$ è un cerchio di raggio R; e la metrica proiettiva iperbolica rispetto a questo cerchio come fondamentale coincide colla geometria di una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{R^2}$, quale risulta dalla rappresentazione piana di Beltrami (n.° 45) di questa stessa superficie sulla regione di piano interna al detto cerchio (v. anche le espressioni di distanze ed angoli date al n.° 48). Ciò che a Beltrami era parso soltanto una rappresentazione, un'interpretazione, d'altronde genialissima, della geometria non euclidea risulta ora essere la vera base, l'essenza stessa di questa geometria.

73. - Movimenti nella geometria iperbolica. — I *movimenti* del piano iperbolico sono collineazioni reali trasformanti in sè la conica assoluto, e che (potendosi ottenere dall'identità con variazione continua) subordinano sopra questa una proiettività *concorde*. Invece le collineazioni che mutano in sè la conica assoluto e subordinano su di essa proiettività discordi danno luogo a *operazioni di 2ª specie* (simmetrie, e prodotti di movimenti per simmetrie). Ai tre tipi di proiettività concorde sull'assoluto (ellittica, parabolica, iperbolica) corrispondono movimenti e loro gruppi ∞^1 aventi per traiettorie cerchi rispett. dei tre tipi di cui al n.° prec.

Se la proiettività subordinata sulla conica assoluto è ellittica, è unita la retta reale (esterna a questa conica) congiungente i due punti doppi immaginari coniugati della detta proiettività, e unito quindi il polo di essa. *Si ha perciò una rotazione intorno a questo punto.* Assunta l'equazione dell'assoluto sotto la forma $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$, le ∞^1 rotazioni di centro (0, 0, 1) sono rappresentate ancora dalle equazioni (1) del n.° 70, e mutano in sè ciascuno degli ∞^1 cerchi $x_1^2+x_2^2-\lambda x_3^2=0$, reali e propri per valori di λ compresi fra *zero* e *uno*.

Se la proiettività subordinata sulla conica fondamentale è parabolica, risulta invariante un unico punto improprio. *Il movimento può allora concepirsi come una rotazione intorno a questo punto all'infinito*; ma questo movimento non riconduce le figure alla loro posizione iniziale. Supponendo che l'equazione della conica assoluto sia $x_2^2-x_1x_3=0$, e $x_1=x_2=0$ l'unico punto unito, si ha il gruppo ∞^1 dei movimenti di equazioni:

$$x_1'=x_1\,; \qquad x_2'=x_2+\varrho x_1\,; \qquad x_3'=x_3+2\varrho x_2+\varrho^2 x_1$$

dove ϱ è il parametro. Sono invarianti e traiettorie del gruppo ∞^1 le ∞^1 coniche (oricicli) di equazione $x_2^2-x_1x_3+\lambda x_1^2=0$; esse sono interne alla conica assoluto se $\lambda>0$.

Se la proiettività subordinata sulla conica assoluto è iperbolica, sarà unita la retta propria congiungente i due punti uniti dell'assoluto; e il movimento potrà concepirsi come una *traslazione secondo questa* (unica) *retta unita.* Questa retta scorre sopra sè stessa, e gli altri punti del piano descrivono (rami di) linee di egual distanza da essa.

Se invece sull'assoluto viene subordinata una proiettività discorde (certamente iperbolica), si avrà un'operazione di 2ª specie, ancora con una retta propria unita, prodotto di una traslazione secondo questa retta per la simmetria rispetto ad essa. — Assunti come punti uniti sulla conica assoluto $x_2^2-x_1x_3=0$ i due punti (1, 0, 0) e (0, 0, 1), queste trasformazioni, inclusi i movimenti del 3° caso, sono rappresentate dalle equazioni:

$$x_1'=x_1\,; \qquad x_2'=\varrho x_2\,; \qquad x_3'=\varrho^2 x_3$$

col parametro $\varrho \gtrless 0$ secondo che si tratta di movimenti o operazioni di 2ª specie. Per tutte queste operazioni sono unite le ∞^1 coniche (ipercicli) $x_2^2 - \lambda x_1 x_3 = 0$, interne all'assoluto quando λ è compreso fra *zero* e *uno* [1]

74. - Metrica piana speciale. Geometria parabolica (o euclidea). — Nella metrica piana ellittica e iperbolica la conica assoluto, irriducibile e rispett. immaginaria o reale, può supporsi rappresentata dall'equazione luogo $x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 = 0$ e dall'equazione inviluppo $\lambda(u_1^2 + u_2^2) + u_3^2 = 0$, con λ reale e rispett. $\gtrless 0$. Il passaggio dall'uno all'altro di questi due casi può effettuarsi attraverso una qualsiasi delle due coniche riducibili $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm\infty$; la prima composta come luogo ($x_1^2 + x_2^2 = 0$) di due rette immaginarie coniugate uscenti dal punto reale (0, 0, 1), e come inviluppo ($u_3^2 = 0$) di questo stesso punto contato due volte; la seconda, di tipo duale, spezzata come inviluppo ($u_1^2 + u_2^2 = 0$) nei due punti immaginari coniugati $(1, \pm i, 0)$ e composta come luogo della loro congiungente contata due volte ($x_3^2 = 0$). Delle due metriche piane speciali corrispondenti a queste coniche fondamentali riducibili considereremo qui solo la seconda, la quale, nell'ipotesi che le coordinate x_1, x_2, x_3 siano cartesiane ortogonali omogenee, e che perciò i punti $(1, \pm i, 0)$ siano gli ordinari punti ciclici I, J, è la metrica euclidea.

In ogni fascio di rette il cui centro P non appartenga alla retta $x_3 = 0$ (retta all'infinito) viene subordinata una metrica ellittica coi due raggi fondamentali PI, PJ; e l'angolo di due rette a, b di questo fascio, misurato secondo questa metrica, è appunto il loro angolo euclideo $\widehat{ab} = \frac{1}{2i} \log (PI, PJ, a, b)$ (n.° 48, 61),

Sopra ogni punteggiata (distinta dalla $x_3 = 0$) verrà invece subordinata una metrica parabolica, coll'unico punto fondamentale sulla $x_3 = 0$; perciò la distanza di due punti potrà definirsi (come al n.° 66) con un passaggio al limite, nel quale la costante k si faccia crescere indefinitamente in valor assoluto. E come conseguenza dell'avere specializzata la conica assoluto in modo non duale di sè stesso, si

---

[1] Infatti per punti interni all'assoluto è $x_2^2 - x_1 x_3 < 0$; quindi anche $x_1 x_3 > x_2^2 \geqslant 0$, e $\lambda = \dfrac{x_2^2}{x_1 x_3} < 1$, ma $\geqslant 0$.

perderà, nel campo metrico, la dualità che anche in questo campo si era finora conservata.

Partiamo dall'equazione generale della conica fondamentale, pel momento ancora irriducibile, in coordinate di retta:

$$\Phi(u) \equiv \sum a_{ih} u_i u_h = 0$$

perchè, dovendosi tale conica spezzare come inviluppo in una coppia di punti distinti, è di questa che dovremo annullare il discriminante (Δ). Indicando con A_{ih} il complemento algebrico di a_{ih} entro Δ, sarà in coordinate di punti $\Omega \equiv \sum A_{ih} x_i x_h$, e quindi (nota [1] a pag. 175):

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 \equiv \Delta \sum a_{ih} u_i u_h \tag{1}$$

dove in luogo delle coordinate di retta u_i si suppongono introdotti i determinanti $x_h y_l - x_l y_h = (xy)_i$. Allora l'espressione della distanza (xy) mediante l'*arco seno* sarà:

$$(xy) = 2ki \text{ ar sen } \frac{\sqrt{\Delta} \cdot \sqrt{\sum a_{ih}(xy)_i(xy)_h}}{\sqrt{\sum A_{ih} x_i x_h \cdot \sum A_{ih} y_i y_h}}.$$

Facendo tendere Δ a zero, possiamo al limite sostituire la stessa frazione al suo *arco seno*; e se in pari tempo facciamo crescere indefinitamente il valore assoluto di k in modo che $2ki\sqrt{\Delta}$ si conservi eguale a una data costante l [1], avremo al limite:

$$(xy) = l \frac{\sqrt{\sum a_{ih}(xy)_i(xy)_h}}{\sqrt{\sum A_{ih} x_i x_h \cdot \sum A_{ih} y_i y_h}};$$

funzione algebrica delle coordinate, in cui la costante l dipende dalla scelta dell'unità di misura.

---

[1] Cambiando eventualmente di segno tutte le a_{ih}, possiamo rendere Δ negativo, perciò l reale. Per una conica reale e punti x, y di una sua secante il primo membro della (1) è negativo (v. p. es. D'Ovidio: *Geometria Analitica*, 3ª ediz. 1903, p. 260); e perciò, nelle dette ipotesi, $\sqrt{\sum a_{ih}(xy)_i(xy)_h}$ è reale. È pure reale, nell'espressione di (xy), il denominatore, perchè le due somme che vi compaiono hanno egual segno.

In particolare ponendo, come in geometria euclidea per la coppia dei punti ciclici:

$$\Phi \equiv u^2 + v^2 \quad \text{quindi:} \quad \Omega = z^2$$

la distanza di due punti (x, y, z) e (x', y', z') sarà data dalla formola:

$$d = l \frac{\sqrt{(yz' - y'z)^2 + (xz' - x'z)^2}}{zz'};$$

e in coordinate non omogenee ($z = z' = 1$), assumendo come unità la distanza dei punti $(0, 0)$ e $(0, 1)$:

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

La geometria piana euclidea coincide dunque colla metrica proiettiva istituita rispetto alla coppia dei punti ciclici come conica fondamentale.

I cerchi del caso generale sono ora coniche passanti per i due punti ciclici; e cerchi concentrici si toccano in questi punti. La retta che contiene questi punti è il luogo dei punti all'infinito. Gli oricicli, dovendo avere contatto quadripunto coll'assoluto, cioè colla retta all'infinito, contengono quest'ultima come parte; e, prescindendo da essa, si riducono a rette.

Corrispondentemente al fatto che la conica fondamentale si è spezzata in una coppia di punti, vi sono non soltanto ∞^3, ma ∞^4 trasformazioni proiettive del piano che mutano tale conica (coppia di punti) in sè stessa. Però queste trasformazioni, pur conservando inalterati gli angoli, non conservano in generale le distanze (nella cui espressione compare la costante l, dipendente dall'unità di misura). Perchè rimangano inalterate anche le distanze, occorre una condizione ulteriore, la quale riduce le ∞^4 trasformazioni anzidette a sole ∞^3. Le prime (∞^4) sono le *similitudini*; e possono distinguersi in *dirette* e *inverse*, secondo che mutano in sè ciascuno dei due punti ciclici, ovvero li scambiano. Aggiungendo la condizione dell'invariabilità delle distanze, si staccano dai due sistemi di similitudini il gruppo ∞^3 dei *movimenti* e la schiera ∞^3 delle *operazioni di 2ª specie* (1).

---

(1) Anche nel piano, per ogni metrica proiettiva generale (n.º 69, 72) possiamo costruire una *metrica speciale tangente a questa in un punto dato P*, ossia coincidente con essa nell'intorno di *P*, a meno di infinitesimi di ordine

§ 3. - Metrica proiettiva dello spazio.

75. - Nozioni fondamentali. — Nello spazio, assumiamo come assoluto una quadrica a discriminante non nullo, per ora con equazione a coefficienti comunque complessi. Entro ogni forma sia di 1ª che di 2ª specie, il cui sostegno non appartenga a tale quadrica, luogo o inviluppo (se retta, intendiamo non vi appartenga totalmente), assumeremo come assoluto la figura degli elementi comuni a questa forma e alla data quadrica. Definiremo pertanto come *distanza di due punti* x, y, il numero:

$$(xy) = k \log (\xi\eta xy)$$

dove ξ, η sono i punti intersezioni della retta xy colla quadrica assoluto, e k è una costante arbitraria. E l'angolo di due piani u, v mediante la formola:

$$\widehat{uv} = k' \log (\varrho\sigma uv)$$

essendo ϱ, σ i piani tangenti alla quadrica assoluto che appartengono al fascio uv, e k' una nuova costante, che supporremo come nel piano $= \frac{1}{2i}$. L'angolo di due rette che si incontrano può definirsi in modo analogo mediante il birapporto di esse e delle due tangenti alla quadrica che appartengono al loro fascio. Due piani reciproci rispetto all'assoluto formano angolo $\frac{\pi}{2}$, e si diranno *perpendicolari*. Si diranno pure perpendicolari due rette che si incontrano

---

superiore. A tal uopo assumeremo come retta fondamentale della metrica speciale la polare p di P rispetto alla conica assoluto γ della metrica generale proposta, e come punti fondamentali di essa le intersezioni, immaginarie coniugate, di p e γ. Per il fascio P, questa metrica speciale coincide colla metrica data. Per questa metrica speciale la conica γ risulta un cerchio di centro P e raggio $2k$ (essendo k la costante moltiplicativa generale delle distanze); cerchio reale o immaginario secondo che la metrica proposta è iperbolica o ellittica. La quantità $-\frac{1}{4k^2}$, negativa o positiva, può chiamarsi *curvatura* della metrica proposta; ed è una misura del quanto quest'ultima, nell'intorno del punto P, si discosta dalla metrica speciale tangente. *La geometria piana corrispondente a una metrica di curvatura* $-\frac{1}{4k^2}$ *coincide colla geometria sopra una superficie di curvatura costante ed eguale a* $-\frac{1}{4k^2}$.

formando angolo $\frac{\pi}{2}$; e perpendicolari a un piano tutte le rette che passano per il suo polo rispetto alla quadrica assoluto, e sono perciò assi di fasci di piani tutti perpendicolari al primo. L'angolo di due piani u, v è pure eguale all'angolo delle rette a, b loro intersezioni con un piano perpendicolare a entrambi (cioè al rettilineo del loro diedro, nel senso ordinario); invero quest'ultimo piano, passando per la retta reciproca della uv rispetto all'assoluto, quindi per i punti di contatto della quadrica assoluto coi piani ϱ, σ del fascio uv, incontra ϱ, σ secondo le rette del fascio ab tangenti all'assoluto.

Indicando con $\Omega=0$ e $\Phi=0$ le equazioni rispett. luogo e inviluppo della quadrica fondamentale, la distanza di due punti e l'angolo di due piani saranno espressi dalle stesse formole (1) e (2) del n.° 67.

Chiamando *sfere* le superficie luoghi di punti equidistanti da un punto dato (*centro*), si vede (sempre in analogia al n.° 67) che le *sfere di dato centro sono le quadriche tangenti alla quadrica assoluto lungo la conica sua intersezione col piano polare del centro comune.* Esse formano un fascio; vi è fra esse lo stesso piano polare anzidetto, contato due volte (sfera di raggio πki); le altre sfere del sistema sono in pari tempo superficie di egual distanza da questo piano, e inviluppi di piani formanti col precedente angolo costante. La quadrica assoluto appartiene al detto fascio, e può considerarsi come sfera di raggio infinito avente il centro in un punto qualsiasi; perciò come luogo dei « punti all'infinito » dello spazio.

La distanza di due punti appartenenti ad una stessa tangente della quadrica assoluto è nulla, e indeterminata se uno dei due è il punto di contatto di questa tangente. Così pure l'angolo di due rette incontrantisi in un punto dell'assoluto, o di due piani la cui intersezione è tangente all'assoluto, è in generale nullo; e indeterminato se uno dei due elementi è tangente all'assoluto. La distanza di due punti appartenenti alla quadrica fondamentale è in generale infinita, e indeterminata quando i due punti appartengono a una stessa generatrice [1].

---

[1] La metrica proiettiva è suscettibile di parecchie applicazioni ed estensioni. Ogni qualvolta in un sistema di enti rappresentati con coordinate, anche in numero >3, si devono considerare quegli enti che verificano

76. - Omografie sopra una quadrica. — Le omografie dello spazio che mutano sè la quadrica assoluto conservano distanze e angoli, e sono le sole che godono di questa proprietà. Esse dipendono da 6 parametri (complessi, nelle attuali ipotesi); e si suddividono in due schiere continue, una composta di omografie trasformanti in sè ciascuno dei due sistemi di generatrici dell'assoluto (omografie di 1^a specie), l'altra di omografie (di 2^a specie) che scambiano questi sistemi fra loro. Chiameremo *movimenti* le prime (formanti un gruppo), *operazioni di 2^a specie* le altre, prodotti di movimenti per simmetrie rispetto a piani.

I punti (comunque immaginari) di una quadrica dipendono da 2 parametri complessi, perciò da 4 parametri reali; e le generatrici di ciascuno dei due sistemi da un parametro complesso, ossia 2 reali. P. es. sull'ellissoide reale dello spazio euclideo le generatrici di ciascun sistema, tutte immaginarie, corrispondono biunivocamente agli ∞^2 punti reali. I due sistemi di rette (regoli) sopra una quadrica sono forme elementari (come le coniche punteggiate, loro sezioni piane) che godono di tutte le proprietà proiettive delle forme di 1^a specie; ad essi possono applicarsi le nozioni di gruppo armonico, birapporto, corrispondenza proiettiva. Entro ciascun sistema, ogni generatrice può individuarsi con una coordinata proiettiva (complessa) λ, rispett. μ. Ogni omografia che muti in sè la quadrica e ciascuno dei due regoli opera proiettivamente su questi ultimi; in essa le coordinate λ, μ subiscono sostituzioni lineari generalmente fratte, fra loro indipendenti, a coefficienti complessi:

$$(1) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}; \qquad \mu' = \frac{\alpha_0\mu + \beta_0}{\gamma_0\mu + \delta_0}$$

con determinanti $\alpha\delta - \beta\gamma$, $\alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0$ non nulli, e che possono supporsi eguali all'unità. Viceversa, da queste due sostituzioni comunque

---

un'equazione quadratica, può riuscire utile interpretare la questione nella metrica relativa a questa quadrica (eventualmente a più dimensioni) come assoluto. Alle funzioni metriche elementari, distanze ed angoli, se ne possono aggiungere altre (momento di due rette, ecc.). V. p. es. i lavori di E. D'Ovidio degli anni 1873-1877, e specialmente la Memoria: *Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante* (Mem. Acc. Lincei (3), vol. 1°, 1877; riassunto in Mathem. Ann. 12 (1877), p. 403).

assegnate è individuata un'omografia che muta in sè la quadrica e ciascuno dei suoi regoli, e che dipende appunto complessivamente da 6 parametri complessi ([1]). In queste omografie sono generalmente unite due rette di ciascun regolo, spigoli opposti del tetraedro unito. — Nelle omografie di 2ª specie λ' e μ' sono invece funzioni lineari rispett. di μ e di λ ([2]).

Nel gruppo ∞^6 delle omografie di 1ª specie sono contenuti due sottogruppi ∞^3 composti delle operazioni che mutano in sè *tutte* le generatrici di uno dei due regoli, operando in modo arbitrario sull'altro (analiticamente $\lambda'=\lambda$, o rispett. $\mu'=\mu$, restando arbitraria l'altra delle sostituzioni lineari (1)). In ciascuna di queste omografie sono perciò uniti tutti i punti e tutti i piani appartenenti alle due generatrici unite, eventualmente coincidenti, di questo secondo regolo; si tratta perciò di un'omografia biassiale, eventualmente parabolica. Chiameremo *scorrimenti* queste particolari omografie, che sono anche movimenti; *ogni movimento è il prodotto di due scorrimenti di sistemi opposti, fra loro permutabili.*

Nei due casi che qui più interessano, della metrica ellittica ed iperbolica, la quadrica assoluto è rappresentata, in coordinate reali, da un'equazione a coefficienti anche reali; tale quadrica nel primo caso è priva di punti reali (ellissoide immaginario), nel secondo caso contiene punti reali, ma non rette reali (quadrica a punti ellittici). Per parlare delle rette contenute in queste quadriche, occorre premettere qualche nozione sulle rette immaginarie.

77. - Rette immaginarie di 1ª e 2ª specie. Applicazione alle generatrici di una quadrica ad equazione reale. — Le rette immaginarie dello spazio (concetto che si suppone qui introdotto analiticamente ([3])) dipendono da 4 parametri complessi, perciò 8 reali; e si possono rappresentare mediante le solite 6 coordi-

---

([1]) V. p. es. FANO-TERRACINI: *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*, n.° 305.

([2]) Sono tali p. es. le ∞^3 omologie armoniche sulla quadrica; in esse $\lambda' = \dfrac{\alpha\mu+\beta}{\gamma\mu+\delta}$, $\mu' = \dfrac{-\delta\lambda+\beta}{\gamma\lambda-\alpha}$.

([3]) V. p. es. FANO-TERRACINI, op. cit. n.° 50 e seg.; nello spazio, n.° 125; per le coordinate di retta, n.° 313 e seg.

nate proiettive omogenee $r_{hk}=p_{hk}+iq_{hk}$ (colle p, q reali), legate dall'identità:

$$R(r)\equiv r_{12}r_{34}+r_{13}r_{42}+r_{14}r_{23}=0$$

la quale, insieme coll'omogeneità, le riduce a sole 4 distinte.

Una retta immaginaria si dirà *di 1ª specie* o *di 2ª specie* secondo che è incidente o sghemba alla retta immaginaria coniugata. A ogni retta immaginaria di 1ª specie appartengono perciò *un* punto e *un* piano reale, comuni alla sua coniugata; a una retta immaginaria di 2ª specie appartengono soltanto punti e piani immaginari [1].

Separando nell'espressione di $R(r)$ la parte reale da quella immaginaria, ed eguagliandole separatamente a zero, abbiamo fra le p e le q le due relazioni:

$$(1)\qquad R(p)=R(q)\,;\qquad R\binom{p}{q}=0$$

$\left(\text{dove } R\binom{p}{q}\right.$ è la forma bilineare polare della $\left.R(r)\right)$. *Per rette immaginarie di 1ª specie* si ha in più la condizione d'incidenza delle due rette coniugate $(p\pm iq)$; la quale, sviluppata, si riduce a $R(p)+R(q)=0$; perciò complessivamente:

$$(2)\qquad R(p)=R(q)=0\,;\qquad R\binom{p}{q}=0.$$

Le rette immaginarie di 1ª specie dipendono perciò da 7 parametri reali.

Le rette reali s incidenti a una retta immaginaria $(p+iq)$ incontrano anche la sua coniugata, perchè dalla condizione di incidenza $R\binom{p+iq}{s}=0$ si trae $R\binom{p}{s}=R\binom{q}{s}=0$, quindi $R\binom{p-iq}{s}=0$. Esse formano una congruenza lineare, che nel caso di rette immaginarie di 1ª specie si spezza in un piano e una stella (reali). Invece per rette immaginarie di 2ª specie questa congruenza è irriducibile, e ad ogni punto o piano reale dello spazio, *senza eccezioni*,

---

[1] Le rette immaginarie contenute in un piano reale o in una stella reale sono perciò tutte di 1ª specie. Quelle di 2ª specie, non appartenendo ad alcun elemento reale, sono immaginarie in un senso (per così dire) ancora più profondo delle prime (F. KLEIN le chiama rispett. *niederimaginär* e *hochimaginär*). La distinzione risale a v. STAUDT, a cui è dovuta la teoria sintetica degli elementi immaginari (*Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürnberg 1856-60).

appartiene *una* retta della congruenza; due rette reali della congruenza sono sempre sghembe. Perciò due rette reali generiche a, b della congruenza, abbastanza prossime, possono sempre spostarsi con continuità entro la congruenza, mantenendole prossime e non mai ortogonali, fino a coincidere con ogni altra coppia generica a', b' di rette assegnate della stessa congruenza, anche abbastanza prossime: basta all'uopo spostare convenientemente le loro tracce su un piano reale arbitrario (1). Le due coppie a, b e a', b' avranno dunque lo stesso *verso* (2); e questo comune verso si potrà attribuire per convenzione a entrambe le direttrici (immaginarie) della congruenza. *Una retta immaginaria di* 2ª *specie si dirà* **destra** *o* **sinistra** *secondo il mutuo verso* (costante) *di due qualunque rette reali abbastanza prossime, ad essa incidenti.*

Ora, l'equazione di una quadrica a coefficienti reali e discriminante non nullo, quando si riferisca a un tetraedo autopolare e a un conveniente punto unità, assume una delle 3 forme:

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2=0$$
$$z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_4^2=0$$
$$z_1^2+z_2^2-z_3^2-z_4^2=0;$$

e le quadriche di questi tre tipi si dicono rispett. *quadriche immaginarie* (o ellissoidi immaginari), *quadriche reali non rigate* (a punti ellittici), e *quadriche rigate* (a punti iperbolici) (3).

---

(1) L'ortogonalità può riferirsi a qualunque metrica; e la designazione di rette « generiche » della conguenza vuole soltanto escludere le rette autoortogonali, cioè contenute nell'assoluto (nella metrica euclidea non esistono rette reali così fatte). Per ottenere quanto richiesto, basta portare con continuità, entro la congruenza, a in a', evitando ogni eventuale retta autoortogonale, e mantenendo così la a sempre a distanza finita dalle rette ad essa ortogonali; poi prendere e mantenere b, in ogni posizione, abbastanza prossima alla corrispondente a, tanto da evitare le rette ortogonali a questa.

(2) FANO-TERRACINI, op. cit. n.° 118. La coppia si dice *destra* o *sinistra* secondo che, per un osservatore disposto comunque lungo una delle due rette, il piano che lo congiunge a un punto che vada inalzandosi sull'altra retta ruota in senso positivo (antiorario) o negativo.

(3) F. KLEIN (*Klein-Rosemann*, Cap. II e III; V. anche *litogr.*, vol. II, Cap. V e seg.) chiama questi tre tipi di quadriche risp. *nulltheilig* (senza alcuna falda, sottinteso « reale »), *oval* (nello spazio euclideo l'ellissoide e, prescindendo dal passaggio per l'infinito, fatto puramente contingente dal

Sopra una quadrica immaginaria, non essendovi punti reali, *tutte le generatrici sono immaginarie di 2ª specie; due generatrici coniugate,* non potendo incontrarsi, *appartengono sempre allo stesso sistema*; inoltre *le generatrici di uno dei due sistemi sono destre, quelle dell'altro sistema sono sinistre.* Infatti le generatrici di uno stesso sistema devono appartenere tutte, per ragioni di continuità, alla stessa categoria; e d'altra parte ogni quadrica è trasformata in sè dalla simmetria rispetto a uno qualunque dei piani principali, simmetria che scambia fra loro i due regoli, e scambia pure rette immaginarie destre e sinistre.

Sopra una quadrica reale a punti ellittici (p. es. sulla sfera euclidea) *per ogni punto reale passano due generatrici immaginarie, di 1ª specie e fra loro coniugate.* Risultano così esaurite tutte le generatrici della quadrica.

Infine *sopra ogni quadrica rigata ciascun sistema di generatrici comprende* ∞^1 *rette reali* (dipendenti da un parametro reale), *le quali esauriscono l'insieme dei punti reali della superficie. Le altre rette sono immaginarie di 2ª specie: destre quelle dell'un sistema, sinistre quelle dell'altro; due rette immaginarie coniugate appartengono al medesimo sistema.*

La metrica proiettiva con quadrica assoluto immaginaria, oppure reale non rigata, conduce rispett. alla geometria ellittica e alla geometria iperbolica. Invece la metrica relativa a una quadrica reale rigata conduce a una geometria che differisce dalla geometria ordinaria ancora più profondamente delle due geometrie non euclidee. Rispetto a una quadrica rigata, non esistono punti interni; per ogni punto reale dello spazio passano infiniti piani tangenti reali (i piani che proiettano le generatrici reali) e quindi infinite rette tangenti reali: queste sono *rette reali di lunghezza nulla,* sulle quali cioè è nulla, nell'attuale metrica, la distanza di due punti qualsiansi non appartenenti alla quadrica assoluto. Per ogni retta reale secante la quadrica assoluto passano due piani tangenti reali di questa; nel fascio di piani che ha per asse una di queste rette viene dunque

---

punto di vista proiettivo, il paraboloide ellittico e l'iperboloide a due falde), e *ringförmig* (anulari; il che per l'iperboloide rigato è anche intuitivamente chiaro).

subordinata una metrica iperbolica, sicchè una rotazione di ampiezza finita arbitraria avente questa retta per asse, ripetuta più volte, non conduce mai a raggiungere, e tanto meno a oltrepassare uno dei due piani assoluti del fascio. È questa una geometria a elemento lineare *indefinito* (n.° 49); di essa non ci occuperemo, ma alcune di queste proprietà s'incontreranno nella « teoria della relatività speciale » (n.° 89-90), particolare metrica proiettiva dello spazio a 4 dimensioni.

78. - **Metrica ellittica. Perpendicolari comuni a due rette date.** — Supponiamo che la quadrica assoluto della metrica generale (n.° 75) sia immaginaria, a equazione reale. Allora in ogni forma di 1ª o 2ª specie reale (senza eccezioni) viene subordinata una metrica ellittica, e non esistono punti reali all'infinito. Assumendo la costante k delle distanze eguale a $\frac{1}{2i}$, sarà π la lunghezza (finita) di ogni retta (come l'ampiezza di ogni fascio). Si ha così la *geometria ellittica dello spazio.* Il piano polare di un punto P rispett. all'assoluto è luogo dei punti aventi da P distanza $\frac{\pi}{2}$; le altre sfere di centro P sono superficie di egual distanza (reale) da questo piano.

Due rette reali reciproche rispetto all'assoluto sono sempre distinte e sghembe. Le ∞^2 rette che si appoggiano ad esse sono perpendicolari a entrambe, e costituiscono una congruenza lineare; viceversa, le rette perpendicolari a una retta data si appoggiano e sono perpendicolari anche alla sua reciproca rispetto all'assoluto. Due rette reciproche incontrano l'assoluto complessivamente in 4 punti immaginari, tutti distinti, a 2 a 2 coniugati, costituenti un tetraedro Σ, di cui le stesse rette sono spigoli opposti (reali); ciascuna delle altre due coppie di spigoli opposti è costituita da rette immaginarie coniugate, e tali coppie sono contenute rispett. nei due regoli dell'assoluto. *Due rette reali reciproche si appoggiano sempre a una stessa coppia di generatrici immaginarie coniugate dell'assoluto, sia dell'uno che dell'altro sistema* (e viceversa).

Proponiamoci ora, date due rette sghembe (reali) a, b, di costruire le loro perpendicolari comuni (escluso il caso precedente che a, b siano reciproche rispetto all'assoluto, nel qual caso le perpendicolari comuni sono in numero di ∞^2). — Le perpendicolari comuni ad a, b saranno le rette incidenti in pari tempo a queste e alle loro reciproche a', b' rispetto all'assoluto; si tratta quindi di un problema di 2° grado (rette incidenti a 4 rette date), avente in generale due soluzioni, in questo caso reciproche rispetto all'assoluto. Le due soluzioni non possono coincidere, perchè quest'unica retta non potrebbe essere in pari tempo reale e autoreciproca, quindi generatrice dell'assoluto; e non possono nemmeno essere immaginarie coniugate, perchè le loro intersezioni coll'assoluto sarebbero punti anche a 2 a 2 coniugati, vertici perciò di un tetraedro del tipo Σ di poc'anzi, nel quale ora dovrebbero essere reali due spigoli giacenti sull'assoluto (il che va escluso).

Il problema avrà dunque certo soluzioni reali e distinte; ma esso può anche avere ∞^1 soluzioni (senza arrivare alle ∞^2 del caso di a, b reciproche). Ciò avviene quando a, b, a', b' stanno in uno stesso regolo; la polarità rispetto all'assoluto (scambiando a e a', b e b') muterà allora in sè questo regolo, subordinandovi una involuzione, le cui rette doppie staranno sull'assoluto. La quadrica Q contenente il regolo incontrerà l'assoluto secondo 4 generatrici, 2 per sistema, e le due di ciascun sistema immaginarie-coniugate; e a, b, a', b' dovranno appoggiarsi tutte a *una* di queste coppie. Viceversa, se a, b incontrano una stessa coppia di generatrici sghembe r, s dell'assoluto, necessariamente immaginarie coniugate, anche le loro reciproche a', b' si appoggeranno a r, s, e tutte 4 saranno generatrici di una medesima quadrica Q: invero il birapporto dei 4 punti $r(aba'b')$ è eguale a quello dei loro piani polari rispetto all'assoluto, cioè $r(a'b'ab)$, e perciò a quello dei 4 punti $s(a'b'ab)=s(aba'b')$. La quadrica Q è autopolare rispetto all'assoluto; le sue rette di ciascun regolo sono a 2 a 2 reciproche rispetto all'assoluto, e tutte perpendicolari a quelle dell'altro regolo (¹).

Pertanto: *Due rette reali sghembe ammettono in generale due perpendicolari comuni*, mutuamente reciproche rispetto all'assoluto. *Ne ammettono* ∞^1 *se esse tagliano una stessa coppia di generatrici sghembe* (immaginarie coniugate) *dell'assoluto*; queste ∞^1 formano un regolo, e sono perpendicolari a tutte le ∞^1 rette del regolo coniugato. *Ne ammettono* ∞^2 *se sono reciproche*

(¹) E due rette di uno stesso regolo intercettano su tutte quelle del regolo coniugato segmenti eguali. La quadrica Q è una (particolare) « quadrica di Clifford » (n.° 81).

rispetto all'assoluto (nel qual caso tagliano le stesse generatrici dell'assoluto di ambo i sistemi).

79. - **Movimenti. Loro rappresentazione analitica.** — Ogni movimento (reale) dello spazio ellittico, operando proiettivamente su ciascuno dei due regoli dell'assoluto, ammette entro ciascuno di questi due rette unite, distinte, immaginarie coniugate (e generalmente non altre); sono perciò uniti anche gli ulteriori due spigoli opposti del tetraedro così determinato, questi ultimi fra loro reciproci e reali. *Un movimento dello spazio ellittico fa scorrere sopra sè stessa ciascuna di queste due rette*; può quindi ottenersi mediante uno strisciamento lungo una di esse, seguito (o preceduto) da una rotazione intorno alla stessa; è, in altri termini, un *movimento elicoidale, con due diversi assi*, i quali, rispetto al movimento, non appaiono in alcun modo fra loro distinti. Lo strisciamento lungo uno dei due equivale a una rotazione intorno all'altro. Il movimento elicoidale può anche limitarsi a uno strisciamento secondo uno dei due assi, cioè a una rotazione intorno all'altro (omografia assiale).

Fra gli ∞^6 movimenti, vi sono due sottogruppi ∞^3 di *scorrimenti* (reali), omografie biassiali a direttrici immaginarie coniugate contenute nell'assoluto, *destri* o *sinistri* secondo il verso delle direttrici (n.° 77). Gli scorrimenti di ciascun sistema si distribuiscono in ∞^2 gruppi ∞^1, ciascuno dei quali ha per traiettorie rette di una congruenza lineare; rette mutuamente sghembe, ma tali che due qualunque fisse fra esse sono ovunque equidistanti, perciò analoghe in certo modo alle parallele euclidee (n.° 80). Ogni scorrimento è moto elicoidale a infiniti assi; e sono tali tutte le traiettorie del gruppo continuo ∞^1 a cui quello scorrimento appartiene. Dati due punti A, A', vi sono due scorrimenti di sistemi opposti che portano A in A'; le direttrici di questi scorrimenti sono le rette dei due regoli dell'assoluto appoggiate alla AA'. — *Ogni movimento può ottenersi come prodotto di due scorrimenti*, uno destro l'altro sinistro, fra loro permutabili; le congruenze lineari delle traiettorie di questi scorrimenti (ossia dei gruppi ∞^1 che li contengono) hanno a comune due rette, che sono gli assi del movimento (elicoidale) proposto.

A differenza della geometria ellittica piana (n.° 69-70), la simmetria rispetto a un piano (scambiando i due regoli sull'assoluto) *non* è ottenibile mediante un movimento; nello spazio ellittico esiste perciò, a fianco dei movimenti, una distinta schiera ∞^6 di operazioni di 2ª specie.

Analiticamente, la determinazione dei movimenti e operazioni di 2ª specie dello spazio ellittico equivale a quella delle sostituzioni lineari (reali) che mutano in sè l'equazione:

$$\Omega \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

e possiamo anche richiedere che venga trasformata in sè la forma quadratica Ω, bastando all'uopo che il determinante A della sostituzione valga ± 1. E questo può ottenersi dividendo tutti i coefficienti della sostituzione per uno stesso dei valori reali di $\sqrt[4]{\pm A}$, secondo che A è positivo o negativo. Le sostituzioni di determinante $+1$ (formanti gruppo continuo) e -1 corrispondono rispett. ai movimenti e operazioni di 2ª specie. Complessivamente, sono le sostituzioni ortogonali (cfr. n.° 70) su 4 variabili, che dipendono da 6 parametri. Perciò *la determinazione dei movimenti e operazioni di 2ª specie dello spazio ellittico coincide con quella delle sostituzioni ortogonali di quattro variabili.*

Scrivendo l'equazione della quadrica assoluto Ω sotto la forma:

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0$$

si vede che le due coppie di equazioni lineari:

$$(1) \qquad \lambda = -\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{x_3 - ix_4}{x_1 - ix_2}; \qquad \mu = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 - ix_4} = -\frac{x_3 + ix_4}{x_1 - ix_2}$$

rappresentano, al variare dei parametri (complessi) λ, μ, le generatrici dei due sistemi. Se ne ricava:

$$(x_1 + ix_2) : (x_1 - ix_2) : (x_3 + ix_4) : (x_3 - ix_4) = \lambda\mu : 1 : -\mu : \lambda,$$

e quindi le equazioni parametriche di Ω:

$$(2) \qquad x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\lambda\mu + 1) : i(-\lambda\mu + 1) : (\lambda - \mu) : i(\lambda + \mu).$$

Per rappresentare le trasformazioni proiettive di Ω, ad es. di 1ª specie, basta ricordare che in esse λ, μ subiscono sostituzioni lineari fratte (n.° 76), e determinare in qual modo si sostituiscono corrispondentemente le x_i. Scrivendo le equazioni analoghe alle (2) in coordinate x_i' e nuovi parametri λ', μ', le sostituzioni $\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$, $\mu'=\frac{\alpha_0\mu+\beta_0}{\gamma_0\mu+\delta_0}$ forniranno le espressioni (lineari) dei termini a 2° membro $\lambda'\mu'+1$, $i(-\lambda'\mu'+1)$, $\lambda'-\mu'$, $i(\lambda'+\mu')$ mediante i termini $\lambda\mu+1$ ecc. a 2° membro delle (2), e quindi le espressioni pure lineari delle x_i' mediante le x_i.

Per avere proiettività reali occorre però (e basta) che generatrici di Ω immaginarie coniugate siano sempre mutate in generatrici così fatte. Ora le generatrici rispett. coniugate alle (1) sono rappresentate da equazioni anche coniugate delle (1), ossia (indicando con $\bar\lambda$, $\bar\mu$ i numeri rispett. coniugati di λ, μ):

$$\bar\lambda=-\frac{x_1-ix_2}{x_3-ix_4}=\frac{x_3+ix_4}{x_1+ix_2}; \qquad \bar\mu=\frac{x_1-ix_2}{x_3+ix_4}=-\frac{x_3-ix_4}{x_1+ix_2};$$

e queste possono scriversi:

$$-\frac{1}{\bar\lambda}=\frac{x_3-ix_4}{x_1-ix_2}=-\frac{x_1+ix_2}{x_3+ix_4}; \qquad -\frac{1}{\bar\mu}=-\frac{x_3+ix_4}{x_1-ix_2}=\frac{x_1+ix_2}{x_3-ix_4}.$$

Confrontando queste ultime equazioni colle (1), si vede che le generatrici coniugate delle (1) corrispondono ai valori $-\frac{1}{\bar\lambda}$, $-\frac{1}{\bar\mu}$ dei parametri λ, μ; valori abitualmente chiamati *diametrali* di questi ultimi ([1]). Dobbiamo perciò sottoporre λ e μ a quelle sole sostituzioni lineari fratte che mutano valori diametrali in valori diametrali (interpretabili perciò sulla sfera complessa considerata nella nota ([1]) come rotazioni intorno al centro); e queste, nella variabile z, possono ricevere la forma:

$$z'=\frac{(a+ib)z-(c+id)}{(c-id)z+(a-ib)} \quad ([2]) \tag{3}$$

con a, b, c, d reali, e determinante $a^2+b^2+c^2+d^2$; forma dipendente (per l'omogeneità di a, b, c, d) da *tre* parametri reali.

([1]) Ciò perchè i punti immagini dei numeri complessi λ, $-\frac{1}{\bar\lambda}$ $\left(\text{in forma esponenziale } \varrho e^{i\varphi}, -\frac{1}{\varrho}e^{i\varphi}\right)$ nel piano xy, proiettati stereograficamente sulla sfera $x^2+y^2+z^2=1$ dal polo $(0,0,1)$, danno punti diametralmente opposti.

([2]) Formola data per la prima volta da Cayley, Math. Ann., 15 (1879). V. anche F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder....* (Leipzig, 1884) Cap. II, § 2; *Zur nicht-euklidischen Geometrie*, Math. Ann., 37 (1890), p. 549 = Ges. Mathem. werke, I, p. 359.

Ora il più generale movimento reale dello spazio ellittico si può ottenere come prodotto di due scorrimenti reali di sistemi opposti. Gli ∞^3 scorrimenti reali che lasciano fisse ad es. le generatrici di parametro λ operano secondo le sostituzioni

$$\lambda' = \lambda, \qquad \mu' = \frac{(a+ib)\mu - (c+id)}{(c-id)\mu + (a-ib)};$$

e la sostituzione lineare corrispondente sulle x_i, in base alle indicazioni date poc'anzi per determinarla, è la seguente:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_1' = ax_1 - bx_2 - cx_3 - dx_4 \\ x_2' = bx_1 + ax_2 - dx_3 + cx_4 \\ x_3' = cx_1 + dx_2 + ax_3 - bx_4 \\ x_4' = dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4 \end{cases}$$ (1)

che è appunto *ortogonale* quando $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, oppure quando si dia il radicale $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ come divisore comune ai secondi membri.

Per gli scorrimenti dell'altro sistema basta scambiare λ e μ, e quindi (come appare dalle (2)) cambiare x_3 in $-x_3$.

Queste sostituzioni possono ricevere espressione sintetica molto semplice per mezzo dei *quaternioni* di W. R. HAMILTON (2). Sono questi numeri complessi a quattro unità:

$$p = p_0 + ip_1 + jp_2 + kp_3$$

dove le p_i sono numeri reali, e i, j, k unità immaginarie (distinte) soddisfacenti alle relazioni:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$jk = i, \qquad ki = j, \qquad ij = k;$$

e quindi, ammettendo per la moltiplicazione di queste unità la proprietà associativa, e scrivendo $-i$ in luogo di $-1 \cdot i$ o anche di $i \cdot -1$, e analogamente per j, k:

$$kj = -i, \qquad ik = -j, \qquad ji = -k.$$

---

(1) Per queste formole, v. anche BIANCHI: *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II (1923), p. 517.

(2) *Lectures on quaternions*, Dublin 1853; *Elements of quaternions*, London 1866; 2a ediz., New-York 1899-1901. Le prime comunicazioni sui quaternioni fatte da Hamilton all'Accademia Irlandese risalgono al 1843.

La moltiplicazione *non* è dunque commutativa. Dopo di ciò, il prodotto di due quaternioni può definirsi come prodotto dei quadrinomi che li esprimono, calcolato colle solite regole dell'algebra, tenendo conto delle relazioni stabilite fra le diverse unità; tale prodotto è evidentemente ancora un quaternione.

La sostituzione (4), col radicale $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ a divisore nei secondi membri, potrà allora scriversi:

$$x_1'+ix_2'+jx_3'+kx_4'=\frac{a+ib+jc+kd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}(x_1+ix_2+jx_3+kx_4).$$

In modo analogo, l'altro gruppo ∞^3 di scorrimenti può rappresentarsi ponendo:

$$x_1'+ix_2'+jx_3'+kx_4'=(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)\frac{a'+ib'+jc'+kd'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}}.$$

E perciò gli ∞^6 movimenti dello spazio ellittico — ossia le sostituzioni ortogonali di 1^a specie delle quattro variabili x_i — potranno tutte rappresentarsi colla relazione unica:

$$x_1'+ix_2'+jx_3'+kx_4' \\ =\frac{a+ib+jc+kd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}(x_1+ix_2+jx_3+kx_4)\frac{a'+ib'+jc'+kd'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+d'^2}} \quad (^1)$$

dove a, b, c, d e a', b', c', d' sono due gruppi di parametri omogenei, equivalenti complessivamente a 6 parametri reali distinti. Il quaternione $x_1+ix_2+jx_3+kx_4$ viene dunque moltiplicato, a sinistra e a destra, per quaternioni di modulo unità, affatto generali.

Supponendo scelte a, b, c, d in modo che $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, possiamo porre:

$$a=\cos\varphi,\qquad b=\xi \operatorname{sen}\varphi,\qquad c=\eta\operatorname{sen}\varphi,\qquad d=\zeta\operatorname{sen}\varphi,$$

con $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$. Allora gli scorrimenti ad es. del primo gruppo ∞^3 si potranno rappresentare scrivendo:

$$(5)\quad x_1'+ix_2'+jx_3'+kx_4' \\ =[\cos\varphi+(i\xi+j\eta+k\zeta)\operatorname{sen}\varphi][x_1+ix_2+jx_3+kx_4].$$

---

[1] Questa formola, per esprimere con notazione abbreviata le sostituzioni ortogonali su 4 variabili, si trova già in CAYLEY, Journ. f. Mathem., 50 (1855), p. 312 = Coll. Math. Papers, 2 (Cambridge 1889), p. 214.

D'altra parte la distanza di due punti omologhi (x), (x'):

$$(xx') = \text{ar cos} \frac{\sum x_i x_i'}{\sqrt{\sum x_i^2 \cdot \sum x_i'^2}}$$

esprimendovi le x_i' mediante la (5), si trova eguale a φ; ed è pure similmente $= \varphi$ l'angolo di due qualunque piani omologhi. Pertanto:

Lo scorrimento rappresentato simbolicamente dall'equazione (5) *lascia fisse tutte le rette di una determinata congruenza lineare, e subordina sopra ciascuna di queste una traslazione di ampiezza* φ, *e in ciascuno dei fasci di piani che hanno queste rette per assi una rotazione anche di ampiezza* φ. Per $\varphi = \pi$ le x_i cambiano soltanto di segno, e ogni punto e ogni piano ritorna alla posizione iniziale.

80. - **Parallele di Clifford.** — Della geometria ellittica si è occupato, a partire dal 1873, W. K. CLIFFORD, che vi ha introdotto un nuovo concetto di *parallele* [1]. In geometria euclidea, due rette parallele godono delle proprietà seguenti, caratteristiche nel loro insieme: 1° stanno in un piano; 2° non si incontrano; 3° sono ovunque equidistanti. Nella geometria iperbolica, le parallele godono ancora delle prime due proprietà, non della terza, che è quella da cui discendono le proprietà ulteriori e più interessanti delle parallele euclidee. In geometria ellittica non esistono coppie di rette che godano delle prime due proprietà; bensì rette sghembe che godono della 2ª e 3ª proprietà: le traiettorie dei gruppi continui ∞^1 di scorrimenti dei due sistemi. Chiameremo (seguendo Clifford) *rette parallele*, o **parallele di Clifford**, *le rette traiettorie di un medesimo gruppo continuo* ∞^1 *di scorrimenti*, vale a dire *tutte*

---

(1) Proc. London Math. Soc., 4 (1873), p. 381 = Math. Papers, London 1882, p. 181; F. KLEIN, Math. Ann., 37 (1890), p. 544 = Ges. Math. Abh., I, p. 351. V. anche i lavori successivi di CLIFFORD citati da Klein. Queste *parallele di Clifford* sono state oggetto di numerosi lavori di vari geometri. — Scorrimenti analoghi, e parallele di Clifford reali, esistono pure nella geometria ellittica di ogni spazio di dimensioni dispari (cfr. B. SEGRE: *Gli scorrimenti nella geometria non euclidea degli iperspazi....*, Ann. di Matem. (4), vol. 12, 1933-1934, p. 327).

le rette che si appoggiano a una medesima coppia di generatrici dell'assoluto appartenenti a uno stesso regolo; generatrici immaginarie coniugate, quando si vogliano parallele reali [1]. — In corrispondenza ai due diversi regoli dell'assoluto, vi sono *parallele destre* e *sinistre.* Due rette parallele a una terza nel medesimo verso sono parallele fra loro. Gli scorrimenti destri (sinistri) mutano una retta qualunque nelle ∞^2 sue parallele sinistre (destre). *Per un punto dato si possono condurre a una retta data, in generale, due distinte parallele; una destra e una sinistra.* Esse coincidono se il punto sta sulla retta reciproca della data rispetto all'assoluto; *due rette reciproche rispetto all'assoluto sono parallele in ambo i versi* [2].

Due rette parallele formano con una loro secante comune angoli corrispondenti (secondo la denominazione usuale) eguali, perchè sovrapponibili con uno scorrimento. Se su due rette parallele si prendono segmenti AA', BB' eguali di lunghezza e senso [3], saranno pure eguali e paralleli i segmenti AB, $A'B'$; e il quadrangolo $ABB'A'$ sarà una specie di *parallelogrammo*, sghembo, ma a lati opposti eguali, angoli opposti eguali, angoli adiacenti supplementari; in particolare un *rettangolo* (sghembo), se uno degli angoli e quindi anche gli altri sono retti. In quest'ultimo caso due lati opposti hanno ∞^1 perpendicolari comuni (n.° 78).

Si chiamano *rigate di Clifford* le rigate contenute in una congruenza di parallele di Clifford (assimilabili perciò a cilindri euclidei).

---

(1) La geometria euclidea dello spazio (n.° 84) è caso limite della geometria ellittica, nell'ipotesi che la quadrica assoluto si riduca come inviluppo al cerchio assoluto; perciò le sue generatrici di ambo i sistemi alle tangenti di questo cerchio. Rette parallele secondo Clifford si riducono allora a rette incontranti una medesima coppia di queste tangenti, cioè (se proprie) passanti per il loro punto d'incontro; dunque appunto parallele euclidee.

(2) L'angolo delle due parallele condotte a una retta per un punto a distanza d da questa è misurato dal numero doppio $2d$, se la costante moltiplicativa delle distanze si assume $=\frac{1}{2i}$; e $\frac{2d}{R}$ se $\frac{1}{R^2}$ è la curvatura costante dello spazio: BIANCHI: *Lezioni* e vol. cit., p. 525. Quest'angolo si annulla perciò se $d=0$, oppure $d=\frac{\pi}{2}$ o rispett. $d=\frac{\pi R}{2}$, cioè eguale a una semiretta.

(3) Tali cioè che con uno stesso scorrimento del quale quelle due rette siano traiettorie A si porti in A' e B in B'.

Ciascuna di queste rigate è sovrapposta a sè stessa dal gruppo ∞^1 di scorrimenti che ha le sue generatrici come traiettorie; questi scorrimenti mutano anche l'una nell'altra le ∞^1 direttrici della rigata, traiettorie ortogonali delle generatrici; gli archi di queste direttrici compresi fra una stessa coppia di generatrici sono tutti congruenti, e così pure i segmenti di generatrici compresi fra due traiettorie ortogonali fisse. Assumendo come coordinate u, v sulla superficie i segmenti di generatrici e gli archi di traiettorie ortogonali contati (in lunghezza e segno) a partire da linee arbitrarie del secondo e primo sistema, l'elemento lineare della superficie avrà la forma $ds^2 = du^2 + dv^2$; la superficie ha dunque curvatura (assoluta) costante nulla ([1]), cioè è applicabile su un piano euclideo. *Ogni rigata di Clifford è una superficie a curvatura (assoluta) costante nulla.* Viceversa, BIANCHI ha dimostrato che sono queste le sole rigate a curvatura nulla dello spazio ellittico ([2]).

81. - **Quadriche di Clifford.** — Più particolarmente, una rigata di Clifford può avere una direttrice rettilinea, e ne ha allora infinite: tutte quelle che si ottengono applicando alla prima gli ∞^1 scorrimenti che hanno come traiettorie le generatrici della rigata. Questa è allora una *quadrica di Clifford*, rigata di Clifford in doppio modo; entrambi i suoi regoli si compongono di rette parallele, destre le une, sinistre le altre; le une traiettorie isogonali delle altre, formando così sulla superficie un reticolato di parallelogrammi sghembi. — Le quadriche di Clifford incontrano l'assoluto secondo quadrangoli sghembi (proprietà per esse caratteristica). Ogni quadrica di Clifford è sovrapposta a sè stessa da un gruppo continuo transitivo ∞^2 di movimenti permutabili, risultanti dalla moltiplicazione

([1]) Curvatura *assoluta* di una superficie in un punto è quella che compete al suo ds^2. Se la superficie è contenuta in uno spazio curvo a tre dimensioni, la differenza fra la sua curvatura assoluta e la curvatura Riemanniana di questo spazio in quel punto e secondo l'orientazione della superficie fornisce la *curvatura relativa* di questa, eguale a $\frac{1}{R_1 R_2}$ dove R_1, R_2 sono i valori stazionari dei raggi di curvatura delle sezioni normali in quel punto.

([2]) *Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica*, Annali di Matem. (2) 24 (1896), § 7; *Sulle superficie a curvatura nulla negli spazi di curvatura costante*, Atti R. Accad. di Torino, 30 (1895); *Lezioni* cit., vol. II, p. 526, 591.

dei due gruppi ∞^1 di scorrimenti che hanno come traiettorie le generatrici dei due sistemi. Riconosciamo così per altra via che questa superficie ha curvatura costante (potendo sovrapporsi a sè stessa in modo da far coincidere due suoi punti arbitrari) e che questa curvatura è nulla; infatti le generatrici della quadrica sono su di essa particolari geodetiche, e due coppie di esse di opposti sistemi formano un quadrangolo geodetico (parallelogrammo sghembo) nel quale la somma dei 4 angoli è eguale a 2π.

Gli ∞^2 movimenti, in generale elicoidali, che sovrappongono a sè stessa una quadrica di Clifford ammettono come rette unite fisse le diagonali p, q del quadrangolo semplice sghembo intersezione di questa quadrica coll'assoluto; rette reali, reciproche rispetto all'assoluto, e assi comuni dei detti movimenti elicoidali, a sensi del n.° 79. Le rette p, q si dicono anche *assi* della quadrica di Clifford, e sono tali per l'intero fascio determinato da questa coll'assoluto, il quale si compone per intero di quadriche di Clifford (v. l'equazione (1) qui appresso). Gli assi sono paralleli alle generatrici di tali quadriche di entrambi i sistemi; e ogni quadrica di Clifford è luogo di punti equidistanti sia dall'uno che dall'altro asse. Fra gli ∞^2 movimenti suindicati vi sono anche le ∞^1 rotazioni di asse p, e quelle di asse q; la quadrica è perciò segata dai piani perpendicolari a uno degli assi, cioè passanti per l'altro asse, secondo cerchi congruenti aventi il centro sul primo asse. *Una quadrica di Clifford contiene due diversi fasci di cerchi* $\left(\text{di raggi } r,\ \frac{\pi}{2}-r\right)$ *in piani passanti rispett. per i due assi, e mutuamente perpendicolari. Essa può generarsi mediante rotazione di uno qualunque di questi cerchi intorno all'asse che sta nel suo piano*; e anche *mediante rotazione di una generatrice intorno a uno arbitrario degli assi* (ad essa parallelo). È dunque in pari tempo *cilindro rotondo* (superficie canale ad asse rettilineo), *toro, e iperboloide rotondo* (1). Tutti i piani degli ∞^1 cerchi di entrambi i sistemi sono piani di simmetria della quadrica; perciò in ogni punto di questa i due cerchi che ne escono bisecano gli angoli delle generatrici.

---

(1) Il meridiano di questa superficie, rispetto a p o q come asse, è sempre un cerchio, per il quale (grazie alle speciali proprietà della geometria ellittica) quell'asse (polare del centro) è asse di simmetria, pur senza esserne diametro.

Le ∞^1 quadriche di Clifford aventi una data coppia di assi p, q hanno a comune coll'assoluto gli ∞^2 tetraedri autopolari di questo, dei quali p, q (rette reciproche) sono spigoli opposti. Assumendo uno di questi come tetraedro fondamentale delle coordinate, e p, q come spigoli $x_1=x_2=0$, $x_3=x_4=0$, potremo rappresentare l'assoluto coll'equazione $\sum x_i^2=0$, e il fascio di quadriche di Clifford di assi p, q con:

$$(1) \qquad x_1^2+x_2^2-\lambda(x_3^2+x_4^2)=0$$

dove λ è positivo per quadriche a punti reali. Indicando con ϑ l'angolo (costante) di due generatrici di sistemi opposti sopra una di queste quadriche, si ha $\lambda=\mathrm{ctg}^2\frac{\vartheta}{2}$ (²). La polarità rispetto all'assoluto scambia fra loro, a coppie, le quadriche (1) corrispondenti a valori reciproci di λ (perciò a valori complementari di $\frac{\vartheta}{2}$, e a valori di ϑ supplementari, cioè, sostanzialmente, eguali), e muta in sè stessa, oltre l'assoluto, la quadrica $\lambda=1$, l'unica a generatrici mutuamente perpendicolari (n.° 79) e sulla quale i cerchi dei due fasci hanno egual raggio $\left(\frac{\pi}{4}\right)$. — Per gli ∞^2 movimenti di assi p, q che sovrappongono a sè stessa ciascuna delle quadriche (1) sono uniti i 4 piani $x_1\pm ix_2=0$, $x_3\pm ix_4=0$, e le 4 rette basi del fascio (1) mutue intersezioni di quei piani. Il detto gruppo ∞^2 può rappresentarsi colle equazioni:

$$(x_1+ix_2):(x_1-ix_2):(x_3+ix_4):(x_3-ix_4)=$$
$$=\varrho(x_1+ix_2):\sigma(x_1-ix_2):\varrho\sigma(x_3+ix_4):(x_3-ix_4)$$

dove ϱ, σ sono i due parametri. Per $\varrho=\sigma$ si hanno le rotazioni di asse $x_3=x_4=0$, per $\varrho\sigma=1$ quelle di asse $x_1=x_2=0$; per $\varrho=1$, rispett. $\sigma=1$ i due sottogruppi ∞^1 di scorrimenti.

La quadrica di Clifford, pur avendo curvatura costante nulla (v. sopra), *ha area finita.* Assumiamo infatti su di essa come linee $u=\text{cost.}$, $v=\text{cost.}$ le generatrici dei due sistemi, e le coordinate u, v siano ascisse sopra generatrici fisse arbitrarie del secondo e primo sistema, coll'intersezione di queste quale origine comune. L'elemento d'area potrà considerarsi come un parallelogrammo elementare di angolo costante α e lati du, dv,

---

(²) KLEIN-ROSEMANN, p. 241.

mentre u, v variano entrambi da 0 a π; l'area cercata è perciò data da
$$\iint du\, dv \operatorname{sen} \alpha = \pi^2 \operatorname{sen} \alpha.$$

La quadrica di Clifford è dunque un esempio di superficie a curvatura costante nulla (come il piano euclideo), *ma di estensione finita.* Vediamo così ancora una volta che dall'elemento lineare di una varietà (Cap. III, IV) non è ancora determinata la forma della varietà stessa, anzi nemmeno se questa sia finita o infinita; inoltre, per una varietà a curvatura costante l'avere estensione finita non implica (contrariamente a quello che prima si era creduto) che la curvatura sia positiva.

L'elemento lineare sulla quadrica di Clifford, nelle coordinate u, v sopra accennate, è dato da $ds^2 = du^2 + dv^2 + 2du dv \cos \alpha$; quello stesso del piano euclideo, quando u, v si suppongano coordinate cartesiane, e α l'angolo degli assi. L'applicazione della quadrica di Clifford sul piano euclideo, limitatamente a zone opportune, può dunque ottenersi tra un parallelogrammo sghembo della quadrica compreso tra coppie di generatrici parallele e un parallelogrammo piano; le ∞^1 generatrici della quadrica dei due sistemi si disporranno secondo rette parallele alle due coppie di lati opposti di quest'ultimo parallelogrammo. — In particolare, l'intera quadrica di Clifford, tagliata lungo due generatrici a, b di sistemi opposti, potrà distendersi secondo un rombo $ABB'A'$ di lato π (lunghezza delle rette dello spazio ellittico) del piano euclideo (fig. 63), coll'intesa che punti di due lati opposti di questo rombo la cui congiungente sia parallela alla residua coppia di lati (quali ad es. C e C', M e N,....) sono immagini di un unico punto della quadrica, appartenente alla generatrice a o b. Viceversa, la quadrica di Clifford può pensarsi ottenuta da un rombo piano euclideo di lato π, saldandone le coppie di lati opposti in modo da farne una superficie anulare (coll'intesa che per lunghezze e angoli si conservino le misure del piano).

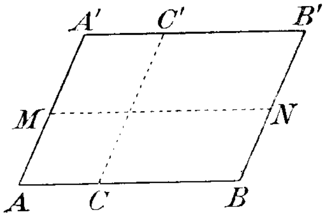


Fig. 63.

Ai due scorrimenti di lunghezza π della quadrica su sè stessa, che riconducono ogni punto di questa alla posizione iniziale facendogli descrivere un'intera generatrice, corrispondono nel piano traslazioni equipollenti ai lati di quel rombo e che, ripetute e alternate fra loro, danno origine a una rete di rombi come nella fig. 64, ciascuno immagine della quadrica proposta. Quei punti dei diversi rombi che si ottengono l'uno dall'altro mediante le traslazioni suaccennate sono corrispondenti di uno stesso punto della quadrica, e si dicono *equivalenti*; così p. es. tutti i vertici della rete, tutti i centri dei vari rombi. — Alle geodetiche della quadrica corrisponderanno anche linee geodetiche, ossia le rette del piano; e una data geodetica della quadrica sarà o no rientrante, secondo che la retta corrispondente nel piano contiene o no una e quindi infinite coppie di punti equivalenti; ossia secondo che la parallela condotta a questa retta per un vertice qualunque della rete di rombi contiene o no altri vertici di questa rete. È ovvio che le rette del piano immagini di geodetiche rientranti sono quelle che, rispetto ad assi cartesiani aventi le direzioni dei lati dei rombi, hanno coefficiente angolare razionale; di queste ne passano per ogni punto infinite, formanti un insieme numerabile. Tutte le geodetiche di una quadrica di Clifford sono traiettorie isogonali delle generatrici di ambo i sistemi, nonchè traiettorie di gruppi continui ∞^1 di movimenti della quadrica in sè. Fra le geodetiche rientranti vi sono ad es. i cerchi dei due fasci, i quali hanno per immagini le diagonali dei rombi; quelle non rientranti sono una specie di eliche (sulla quadrica considerata come cilindro).

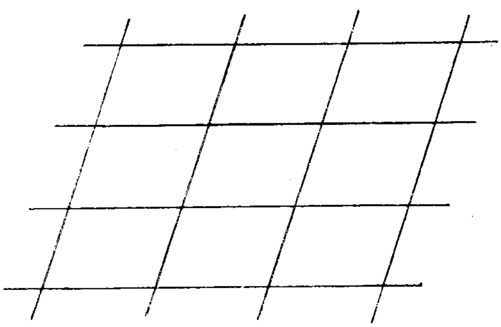


Fig. 64.

82. - Metrica proiettiva con quadrica reale non rigata. Geometria iperbolica. — Assumiamo ora come assoluto una quadrica reale non rigata Ω, considerando come punti effettivi (*propri*) i soli punti della regione interna a Ω, come rette e piani propri quelli secanti Ω. Su ogni retta propria e in ogni piano proprio verrà subordinata una metrica iperbolica (con una stessa costante reale k per le distanze); nei fasci e stelle proprie, una metrica ellittica. I punti di Ω appaiono come punti reali all'infinito. Chiamando *parallele* le rette proprie, nonchè rette e piani che si incontrano in un punto di Ω (punto *improprio*), *paralleli* i piani propri la cui retta intersezione è tangente a Ω (retta *impropria*), *non secanti* le rette complanari e le rette e piani la cui intersezione è esterna a Ω (punto, retta *ideale*), si ha la *geometria iperbolica.* Due rette non secanti hanno come piano perpendicolare comune il piano polare, rispetto a Ω, del punto ideale loro intersezione (che è piano proprio); piani non secanti hanno come perpendicolare comune la retta (propria) polare della loro intersezione (ideale). *Due rette proprie sghembe hanno* una *perpendicolare comune, che misura la loro minima distanza*; poichè delle due rette che si costruiscono nel modo indicato al n.° 78 una soltanto è propria, l'altra esterna a Ω (perciò ideale). E nel campo degli elementi propri questa costruzione non dà ora luogo a casi di indeterminazione.

Le *sfere* della metrica proiettiva generale danno luogo a tre casi: *sfere in senso elementare,* a centro proprio, tangenti all'assoluto lungo una conica immaginaria; *iperfere,* a centro ideale, tangenti a Ω lungo la conica intersezione col piano proprio polare di questo centro, e in pari tempo *superficie* (a due falde) *di egual distanza* (reale) *da questo stesso piano proprio*; infine *orisfere,* a centro improprio, traiettorie ortogonali delle rette proprie passanti per questo punto, e tangenti a Ω lungo una coppia di rette immaginarie coniugate.

Un *movimento,* come omografia reale di 1ª specie (n.° 76) che muta in sè l'assoluto, lascerà fisse due generatrici (immaginarie), in generale distinte, g, h di uno dei due regoli contenuti in Ω, e le loro coniugate g', h' appartenenti all'altro regolo; perciò i *due punti reali* gg', hh', generalmente distinti, nonchè la retta propria che li congiunge. *Un movimento dello spazio iperbolico ammette in generale un'unica retta unita* (propria), *e può quindi concepirsi come movimento elicoidale avente tale retta come asse* [1]; *può scomporsi perciò in una traslazione secondo questa retta,* nella quale i punti dello spazio si spostano sopra ipercicli

---

[1] L'altro asse che il movimento elicoidale ha dal punto di vista proiettivo (n.° 79) è reciproco del primo rispetto all'assoluto, e ora ideale.

aventi questa retta per base, *e in una rotazione attorno alla stessa retta.* — Se invece g, h coincidono, quindi anche g', h', vi sarà su Ω un unico punto unito P, reale, loro intersezione; e per P passerà pure (per una nota proprietà delle omografie) una retta reale unita, in questo caso tangente a Ω (se no essa incontrerebbe Ω in un secondo punto unito reale). Complessivamente, nel fascio delle rette tangenti a Ω in P, avremo *tre* rette unite, quest'ultima e le due generatrici coniugate $g \equiv h$, $g' \equiv h'$; e saranno perciò unite tutte le rette di questo fascio $P(\pi)$. Nel piano π vi sarà anche una retta di punti uniti, passante per P; e la polare di questa rispetto a Ω, appartenente del pari al fascio $P(\pi)$, sarà asse di un fascio di piani uniti. *Questo particolare movimento ha perciò come piani uniti tutto un sistema* ∞^1 *di piani paralleli*; *e subordina entro ciascuno di questi piani un movimento oriciclico di centro* P_∞. Non esistono altri movimenti all'infuori dei due tipi (generale e speciale) testè indicati. Nello spazio iperbolico non esistono scorrimenti reali: se sono unite tutte le generatrici di Ω di uno dei due sistemi, lo sono anche quelle dell'altro sistema, loro coniugate; e il movimento si riduce all'identità.

83. - Rappresentazione analitica dei movimenti iperbolici. — L'assoluto (proiettivamente equivalente a una sfera euclidea) sia rappresentato, in coordinate non omogenee, dall'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,; \tag{1}$$

e i due sistemi di generatrici (immaginarie) su di esso (in analogia al n.° 79) dalle coppie di equazioni:

$$\lambda = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{x-iy}{1-z} = \frac{1+z}{x+iy} \tag{2}$$

dove λ, μ sono parametri complessi che individuano le singole generatrici dei due sistemi, e assumono valori immaginari coniugati per generatrici coniugate, uscenti cioè da uno stesso punto reale. Una trasformazione proiettiva *reale* della quadrica in sè muterà valori coniugati di λ e μ in valori anche coniugati, e si rappresenterà perciò assoggettando λ a una certa sostituzione lineare a coefficienti complessi, e μ alla sostituzione coniugata:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}\,; \qquad \mu' = \frac{\bar{\alpha}\mu + \bar{\beta}}{\bar{\gamma}\mu + \bar{\delta}} \tag{3}$$

dove $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, e può supporsi eguale all'unità. Viceversa, ogni coppia di equazioni (3) determina sulla quadrica (1) una proiettività reale; le (3) contengono tre parametri complessi, ossia sei parametri reali indipendenti, e si hanno così tutte le ∞^6 proiettività reali di 1ª specie sulla quadrica assoluto. Quelle di 2ª specie si hanno scambiando λ e μ nei secondi membri delle (3).

Ponendo $\lambda = a + ib$ (a, b reali), dalla prima della (2) si ha:

$$a = \frac{x}{1-z}, \qquad b = \frac{y}{1-z}. \tag{4}$$

Pensando la quadrica (1) come sfera euclidea, e interpretando a, b come coordinate cartesiane x, y nel piano $z=0$, le (4) (che possono scriversi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z-1}{-1}$) esprimono che i 3 punti $(0, 0, 1)$, (x, y, z), $(a, b, 0)$ sono allineati; esse rappresentano perciò la proiezione stereografica della sfera (1) dal punto reale $(0, 0, 1)$, corrispondente al valore $\lambda = \infty$, sul piano (equatoriale) $z=0$. Vale a dire:

Facendo corrispondere ad ogni punto reale della sfera (1) *il valore complesso $a+ib$ assunto dal parametro λ per la generatrice* (*immaginaria*) *di un determinato sistema che ne esce, veniamo a distendere sulla sfera la detta variabile complessa in un modo che coincide con quello che si ricava per proiezione stereografica dal piano di Gauss.* La sfera (e più generalmente ogni quadrica reale a punti ellittici) appare così la più naturale immagine reale di una forma elementare immaginaria (una specie di sezione di uno qualsiasi dei due regoli immaginari sulla sfera ([1])); e ciò dà ragione dell'applicazione che la rappresentazione della variabile complessa sulla sfera ha ricevuto nella teoria delle funzioni.

Le ∞^6 proiettività reali di 1ª specie della sfera (ossia i movimenti dello spazio iperbolico) *vengono così rappresentate analiticamente dal gruppo delle sostituzioni lineari fratte a coefficienti complessi della variabile $\lambda = a+ib$ distesa nella sfera.* Secondo il Programma di Erlangen di F. KLEIN (§ 6): *Il gruppo dei movimenti dello spazio iperbolico coincide col gruppo delle sostituzioni lineari di una variabile complessa,* nel senso che queste sostituzioni sono atte a rappresentare analiticamente

---

([1]) V. anche C. SEGRE: *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* (Mathem. Ann., vol. 40 (1892), p. 413, § 1).

le trasformazioni subordinate dal primo gruppo sulla quadrica assoluto.

Ogni sostituzione lineare $\lambda'=\frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}$ lascia invariati i due valori di λ, radici dell'equazione:

$$\gamma\lambda^2+(\delta-\alpha)\lambda-\beta=0,$$

i quali possono eventualmente coincidere. Ritroviamo così che ogni proiettività reale di prima specie sopra una sfera (quadrica assoluto di uno spazio iperbolico) lascia fissi due punti reali di questa, distinti o coincidenti, e quindi la retta reale, secante o tangente (cioè propria o impropria) che li congiunge. La sostituzione può ridursi in questi due casi rispett. alle forme canoniche $\lambda'=\varrho\lambda$ e $\lambda'=\lambda+\sigma$ (ϱ, σ costanti complesse) cogli elementi uniti $\lambda=0$, ∞, rispett. $\lambda=\infty$ (unico). — *La sostituzione parabolica $\lambda'=\lambda+\sigma$ rappresenta un movimento dello spazio iperbolico secondo oricicli*, e ammette un fascio di piani paralleli uniti. *Invece la sostituzione $\lambda'=\varrho\lambda$ rappresenta un movimento elicoidale dello spazio iperbolico avente per asse la congiungente dei punti* 0, ∞ *della sfera fondamentale.* Questo movimento si riduce ad una traslazione secondo l'asse, se sulla sfera sono fissi tutti i cerchi passanti per i punti 0, ∞, e quindi nel piano proiezione le rette uscenti dall'origine; ciò avviene quando ϱ è reale, e la trasformazione piana è allora un'omotetia col centro nell'origine. Si ha invece una rotazione intorno all'asse 0, ∞ (nel senso della geometria iperbolica) se sono uniti tutti i piani passanti per la polare di quell'asse, ossia tutti i cerchi che incontrano ortogonalmente i precedenti. Proiettando allora la sfera dal punto $\lambda=\infty$, risulteranno fissi, per la trasformazione piana, i cerchi aventi il centro nell'origine; si avrà dunque una rotazione intorno all'origine, e per questo è necessario e sufficiente che sia $|\varrho|=1$.

Al fatto geometrico che ogni movimento elicoidale può scomporsi nel prodotto di una traslazione secondo l'asse e di una rotazione intorno a quest'asse corrisponde il fatto analitico che nella sostituzione $\lambda'=\varrho\lambda$ il parametro complesso $\varrho=|\varrho|e^{i\varphi}$ può scomporsi in due fattori, uno reale, l'altro di modulo 1. Si riconosce anzi facilmente che, scomposto in tal guisa il parametro ϱ, la traslazione sopra l'asse e la rotazione intorno a quest'asse, necessarie a comporre il proposto movimento elicoidale, hanno rispett. le ampiezze $2k \log \varrho$ (dove k è la solita costante) e φ. Ponendo $k = \frac{1}{2}$, $\varrho = e^{p+iq}$, queste ampiezze sono date rispett. da p e q (1).

Entro il gruppo totale ∞^6 dei movimenti dello spazio iperbolico, quelle operazioni che lasciano fisso un punto assegnato, proprio, improprio o ideale (interno alla sfera assoluto, appartenente a questa, o esterno) formano sottogruppi ∞^3 (il primo e terzo) o ∞^4 (il secondo). — Se il punto fisso è interno alla sfera, possiamo supporre che esso coincida col centro, riducendoci a questo caso con un'ulteriore proiettività reale trasformante la sfera in sè stessa. Il gruppo ∞^3 si compone allora delle *rotazioni intorno al centro della sfera*; e al n.° 79 abbiamo già detto che queste rotazioni possono rappresentarsi colle sostituzioni lineari *diametrali*:

$$\lambda' = \frac{(a+ib)\lambda - (c+id)}{(c-id)\lambda + (a-ib)}$$

dove a, b, c, d sono parametri reali omogenei, e si può supporre $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ (sostituzione *del tipo dei quaternioni*, poichè nella loro moltiplicazione i parametri si compongono secondo la legge di moltiplicazione dei quaternioni).

Se è fisso un punto della sfera, possiamo farlo coincidere col punto $\lambda = \infty$, e abbiamo il gruppo delle sostituzioni lineari intere:

$$\lambda' = \alpha\lambda + \beta$$

con α e β parametri complessi.

Infine, se è fisso un punto esterno alla sfera, e quindi il cerchio *reale* intersezione della sfera col piano polare di questo punto, possiamo far coincidere quest'ultimo cerchio con quello che è sostegno dei valori reali di λ (nel piano, coll'asse dei numeri reali), e avremo il gruppo ∞^3 delle sostituzioni lineari:

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \qquad (ad - bc = 1)$$

---

(1) F. KLEIN chiama sostituzioni *ellittiche* quelle per cui $|\varrho| = 1$, ossia $p = 0$ (rotazioni non euclidee); *iperboliche* quelle per cui ϱ è reale, ossia $q = 0$ (traslazioni secondo l'asse); *lossodromiche* quelle più generali (perchè in un gruppo continuo ∞^1 di tali trasformazioni i punti della sfera descrivono lossodromie, cioè traiettorie isogonali dei meridiani). Le sostituzioni ellittiche, iperboliche e paraboliche danno tutte, sulla sfera, omografie *assiali*.

con parametri a, b, c, d reali, le quali mutano valori reali di λ in valori anche reali di λ'.

Analiticamente, ci si presentano dunque i tre sottogruppi delle sostituzioni del tipo dei quaternioni, delle sostituzioni lineari intere complesse, e delle sostituzioni lineari fratte reali.

Ciascuno dei tre sottogruppi considerati trasforma in sè la stella di rette col centro nel punto fisso (proprio, improprio, ideale), e entro questa stella viene subordinata una metrica proiettiva avente per assoluto il cono della stella che è tangente alla sfera proposta; metrica, nei tre casi, rispett. ellittica, parabolica e iperbolica. Dalla stella considerata questa metrica può anche trasportarsi alla sfera (limitatamente a una regione opportuna), sostituendo ai raggi e piani della stella i punti e i cerchi loro intersezioni colla sfera (e cambiando qualche altra espressione): anzi l'angolo di due piani della stella misurato secondo la geometria iperbolica avente la sfera per assoluto è eguale all'angolo euclideo dei cerchi secondo cui questi piani incontrano la sfera, perchè le quaderne di piani e di raggi dai cui birapporti dipendono le misure di questi angoli sono in posizione prospettiva.

La geometria metrica dello spazio istituita rispetto a una quadrica come assoluto non dà ancora nessuna metrica per la geometria sopra tale quadrica. P. es. la distanza di due punti dell'assoluto è in generale infinita, e indeterminata se questi punti stanno su una stessa generatrice; v. n.° 75. *Si ha però sulla quadrica una metrica a curvatura costante, positiva, nulla o negativa, quando si imponga come fisso un punto interno a questa quadrica, o un punto di essa, ovvero un punto esterno.*

E passando per proiezione stereografica dalla sfera al piano:

Nel piano rappresentativo della variabile complessa $\zeta=\xi+i\eta$, *i tre gruppi di sostituzioni lineari*:

$$\text{(I)} \qquad \zeta'=\frac{(a+ib)\zeta-(c+id)}{(c-id)\zeta+(a-ib)}, \qquad (a^2+b^2+c^2+d^2=1)$$

$$\text{(II)} \qquad \zeta'=(a+ib)\zeta+(c+id)$$

$$\text{(III)} \qquad \zeta'=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}, \qquad (ad-bc=1)$$

dove a, b, c, d *sono parametri reali, nel secondo caso tutti indipendenti, si possono considerare come gruppi fondamentali di una geometria metrica piana rispett. ellittica, parabolica e iperbolica.* — Nel secondo caso si ha infatti il gruppo ∞^4

delle similitudini dirette del piano euclideo; il sottogruppo ∞^3 dei movimenti si ha ponendo mod. $(a+ib)=1$ [1] [2].

84. - Metrica speciale. Geometria parabolica. — La geometria euclidea (o parabolica) dello spazio può ottenersi come caso particolare della metrica proiettiva generale, facendo degenerare opportunamente la quadrica assoluto.

L'equazione di questa quadrica in coordinate di piani sia:

$$\Phi \equiv \sum a_{ik} u_i u_k = 0$$

e in coordinate di punti:

$$\Omega \equiv \sum A_{ik} x_i x_k \equiv \sum b_{ik} x_i x_k = 0.$$

---

(1) Poichè i movimenti dello spazio iperbolico si rappresentano analiticamente con sostituzioni lineari di una variabile complessa, quei movimenti, perciò la geometria non euclidea, potranno trovare applicazione dovunque intervengano queste ultime sostituzioni. Ciò è avvenuto in particolar modo nella teoria delle *funzioni automorfe*; cioè di quelle funzioni $f(\varrho)$ di una variabile complessa ϱ, che si conservano invariate rispetto a un gruppo, necessariamente discontinuo, di sostituzioni lineari di questa variabile; sicchè potrà scriversi:

$$f(\varrho) = f\left(\frac{\alpha_k \varrho + \beta_k}{\gamma_k \varrho + \delta_k}\right)$$

dove l'indice k può assumere una successione finita o infinita (numerabile) di valori $k=0, 1, 2, \ldots$, e ad ogni valore di esso corrispondono coefficienti α_k, β_k, γ_k, δ_k costanti, tali che $\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k \neq 0$ (e, volendo, può supporsi $\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k = 1$). Qualora tutte le sostituzioni $\varrho' = \dfrac{\alpha_k\varrho + \beta_k}{\gamma_k\varrho + \delta_k}$ del gruppo siano contenute in uno dei gruppi continui I, II, III suindicati, esse potranno anche rappresentarsi con gruppi di movimenti piani, euclidei o non euclidei. V. F. Klein: *Vorlesungen uber das Ikosaeder....* (Leipzig, 1876), per i così detti *gruppi* e *funzioni dei poliedri regolari*; per la teoria generale, i lavori fondamentali di H. Poincarè negli Acta Math., vol. I (1882), p. 1-62, 193-294; vol. 3 (1883), p. 49-92; nonchè la Nota nei Mathem. Ann. 19 (1882), p. 553. V. inoltre: Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, 2 vol., 1890-1892; *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, 2 vol., 1897-1900.

(2) *Coniche e quadriche in geometria non euclidea.* Poichè la geometria proiettiva conserva la sua validità anche nel piano e nello spazio iperbolico od ellittico, altrettanto avverrà di tutta la teoria proiettiva delle coniche e quadriche, le quali possono ancora definirsi ad es. analiticamente come luoghi di 2° grado in coordinate proiettive di punti, oppure sinteticamente me-

Si ha allora identicamente ([1]):

$$\Omega_{xx}\Omega_{yy}-\Omega_{xy}^2=\frac{1}{B}\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \dots & x_4 \\ 0 & 0 & y_1 \dots & y_4 \\ x_1 & y_1 & B_{11} \dots & B_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_4 & y_4 & B_{41} \dots & B_{44} \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \dots & x_4 \\ 0 & 0 & y_1 \dots & y_4 \\ x_1 & y_1 & a_{11} \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_4 & y_4 & a_{41} \dots & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Perciò se nella formola della distanza (xy) espressa mediante un *ar sen* (n.° 63, 74), dopo sostituita al numeratore la sua espressione trovata, passiamo al limite per $A=0$, facendo in pari tempo crescere indefinitamente il valor assoluto della costante k, in guisa che $2ki \cdot \sqrt{A}$ si mantenga eguale a una costante finita l, al limite potremo assumere come nuova definizione della distanza:

$$(xy)=l\begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 \dots & x_4 \\ 0 & 0 & y_1 \dots & y_4 \\ x_1 & y_1 & a_{11} \dots & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_4 & y_4 & a_{41} \dots & a_{44} \end{vmatrix} : \sqrt{\sum A_{ik}x_ix_k \cdot \sum A_{ik}y_iy_k}.$$

In particolare, se poniamo $\Phi=u_1^2+u_2^2+u_3^2$ e quindi $\Omega=x_4^2$, e se assumiamo come unità di misura la distanza dei due punti (0, 0, 0, 1) e (0, 0, 1, 1), sarà:

$$(xy)=\frac{\sqrt{(x_1y_4-x_4y_1)^2+(x_2y_4-x_4y_2)^2+(x_3y_4-x_4y_3)^2}}{x_4y_4}$$

che è la solita formola della distanza di due punti $(x)(y)$ in coordinate cartesiane ortogonali omogenee.

---

diante una polarità piana o spaziale, o mediante la generazione proiettiva. Risultano invece notevolmente modificate la loro classificazione dal punto di vista metrico e la maggior parte delle loro proprietà metriche, in quanto vi interviene l'assoluto del piano o dello spazio, che è appunto mutato. P. es. nel piano iperbolico una conica reale ha *quattro* punti all'infinito, fra reali e immaginari, distinti e coincidenti; e questi possono anche essere tutti 4 reali e distinti. *Centri* e *assi* (per le quadriche, *piani centrali* o *principali*) sono gli elementi uniti dell'omografia prodotto delle due polarità rispetto alla conica o quadrica data e all'assoluto. V. in particolare COOLIDGE: *The elements of non-euclidean Geometry*, Oxford 1909, Cap. 12 e 13; KLEIN-ROSEMANN, p. 227. Nell'opera di Coolidge sono citate parecchie Memorie precedenti su quest'argomento, alle quali devesi aggiungere: R. BONOLA: *Proprietà metriche delle quadriche in geometria non euclidea*, Rend. Ist. Lomb. (2), vol. 36 (1902-1903), p. 113, 669.

[1] D'OVIDIO: *Geometria euclidea*, 3ª ediz. (Torino, 1903); Cap. 18°, § 21.

Nelle stesse ipotesi, l'angolo ω di due piani (u), (v) è dato da:

$$\cos\omega = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\pm\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}.$$

Le formole della geometria spaziale euclidea si deducono da quelle della metrica proiettiva generale facendo coincidere la quadrica-inviluppo fondamentale col cerchio assoluto (rappresentato in coordinate ortogonali di piani dall'equazione $u_1^2+u_2^2+u_3^2=0$). Le *sfere* sono in questo caso le quadriche passanti per il cerchio assoluto; sfere concentriche, quelle che si toccano lungo questo cerchio. Il cerchio assoluto è invariante rispetto a ∞^7 trasformazioni proiettive, le quali conservano inalterati gli angoli, ma alterano per uno stesso fattore, in generale diverso dall'unità, tutte le distanze (xy); e sono le ∞^7 *similitudini.* Fra esse ve ne sono ∞^6 che conservano anche le distanze, e si suddividono in due schiere continue: *movimenti,* e *trasformazioni di* 2^a *specie.*

85. - Forme e problema di Clifford-Klein. — Già più volte abbiamo osservato che il fatto che le geometrie di due superficie coincidono limitatamente a regioni opportune *non* implica di conseguenza che ciò si verifichi anche per le superficie intere. P. es. la geometria di una regione convenientemente limitata di piano euclideo coincide con quella di una regione di cilindro rotondo (euclideo) o anche di una quadrica di Clifford, pensando sostituite le linee geodetiche del cilindro o della quadrica alle rette del piano; ma mentre nel cilindro rotondo vi sono geodetiche rientranti (le sezioni normali), e coppie di geodetiche aventi infinite intersezioni (un'elica e una generatrice, oppure due eliche di verso opposto), e sulla quadrica di Clifford da ogni punto escono anzi infinite geodetiche rientranti, ciò non avviene nel piano euclideo. E così la libera mobilità delle figure entro determinate regioni di spazi, assunta a base da Helmholtz (n.° 58), non implica analoga mobilità con egual grado di libertà degli interi spazi sopra sè stessi. In altri termini, la metrica di una regione limitata può eventualmente « proseguirsi » in più modi fuori di questa regione, e dimostrarsi compatibile con forme diverse e diverse proprietà di connessione dello spazio completo.

Ci limiteremo a considerare varietà a curvatura costante *omogenee* (o regolari), ossia prive di punti singolari; tali cioè che l'intorno completo di un punto qualsiasi, concepito p. es. in forma di sfera a n dimensioni avente il centro in questo punto e raggio r convenientemente piccolo, possa applicarsi sull'analogo intorno completo (sfera di raggio r) di ogni altro punto. Restano con ciò esclusi punti singolari quali ad es. il vertice di un cono, nel quale, se $n=2$, la somma degli angoli che ne escono tutto all'intorno sulla superficie *non* è eguale a 2π, sicchè l'intorno di questo punto non può rappresentarsi isometricamente sull'intorno completo di un punto generico del cono stesso (o del piano euclideo). Poniamo inoltre la condizione che in queste varietà, a partire da un punto qualunque, si possa portare su ogni geodetica passante per questo punto, in ambo i sensi, una lunghezza comunque assegnata a; pur senza richiedere che lunghezze a distinte debbano condurre a punti anche distinti di questa geodetica (varietà senza frontiera, ma con geodetiche eventualmente rientranti). Per varietà di questo tipo e di data dimensione, si può richiedere di determinare tutte le forme topologicamente distinte di cui esse sono suscettibili; problema particolarmente interessante, in quanto dal fatto che queste varietà hanno curvatura costante, proprietà differenziale, si vuole assurgere a conseguenze sulla forma, più precisamente sulle proprietà topologiche della varietà intera. Questo problema è stato posto per la prima volta da F. KLEIN [1], a ciò indotto dalla proprietà della quadrica di Clifford di avere la stessa geometria di una regione di piano euclideo, e tuttavia estensione finita (n.° 81). I vari tipi topologicamente distinti delle varietà in parola sono stati designati da W. KILLING col nome di *Forme di Clifford-Klein*, e da lui stesso determinati in molti casi [2]; donde il nome dato alla loro ricerca di *Problema di Clifford-Klein*, problema complesso e sul quale dobbiamo qui

---

[1] Mathem. Ann. 37 (1890), p. 544 = Ges. Math. Abh. I, p. 353.

[2] Mathem. Ann. 39 (1891), p. 259; *Einführung* I, in partic. Abschn. 4. Le limitazioni poste qui sopra pel concetto di forme di Clifford-Klein si trovano anche in KLEIN-ROSEMANN, p. 256. H. HOPF (Mathem. Ann. 95 (1926), p. (313), con più rigorosa impostazione, chiama *forme di Killing* quelle (sempre a curvatura costante) che soddisfanno alla condizione di omogeneità di cui sopra, anche senza la condizione ulteriore relativa alle geodetiche; e *forme di Clifford-Klein* quelle che soddisfanno alla seconda condizione, indipendentemente dalla prima. Dalla sua analisi ulteriore risulta che la prima condizione implica la seconda, ma non viceversa.

limitarci a pochi cenni. In altri termini, si tratta di determinare tutte le varietà topologicamente distinte, entro le quali si verifica la libera mobilità delle figure come in una delle tre geometrie euclidea e non euclidee, e perciò, nel caso di n dimensioni, con $\frac{n(n+1)}{2}$ gradi di libertà.

Come problema ulteriore, più ristretto, si può domandare che *l'intero spazio* possa muoversi sopra sè stesso con egual grado di libertà. Se si impone anche quest'ultima condizione, i casi possibili, in numero molto più limitato, sono stati determinati tutti da KILLING (l. cit.): *Per qualunque dimensione $n \geqslant 2$ si trovano solamente i 4 casi ben noti dello spazio euclîdeo, iperbolico, ellittico, sferico.* La distinzione fra gli ultimi due consiste principalmente in questo: nello spazio sferico a $n \geqq 2$ dimensioni (come nella sfera ordinaria) tutte le geodetiche uscenti da un punto arbitrario passano per uno stesso punto ulteriore, diametralmente opposto al primo; inoltre, in analogia a quanto si è veduto al n.° 71 per la sfera e il piano ellittico, *mentre lo spazio sferico è sempre bilatero, lo spazio ellittico è unilatero o bilatero secondo che il numero delle sue dimensioni è pari o dispari.*

KILLING ha pure dimostrato che, *nel caso di un numero pari di dimensioni*, in particolare dunque per $n = 2$, *le sole forme di Clifford-Klein a curvatura positiva sono lo spazio ellittico e lo spazio sferico.* In altri termini, per n pari e curvatura positiva, la libera mobilità di una regione limitata porta di conseguenza la corrispondente sovrapponibilità dell'intera varietà a sè stessa.

Negli altri casi si hanno anche forme ulteriori ([1]), a volte numerose, soprattutto nel caso della curvatura negativa.

Come la striscia di piano euclideo compresa fra due parallele si può identificare con un cilindro rotondo, convenendo di considerare come un unico elemento ogni coppia di punti di quelle parallele posti sopra una loro perpendicolare comune (sì che una linea compresa entro quella striscia e che pervenga a uno di questi due punti abbia la sua naturale continuazione in una linea uscente dall'altro), e similmente un rombo euclideo può identificarsi con una quadrica di Clifford dello spazio ellittico, considerando come elemento

---

([1]) Per $n = 3$ e curvatura positiva, v. HOPF, Mem. cit., § 2.

unico l'insieme di due punti di due suoi lati opposti la cui congiugente è parallela alla coppia di lati residua (fig. 63); così, più generalmente [1]: *Nel piano euclideo od iperbolico, ogni gruppo propriamente discontinuo di movimenti e operazioni di 2^a specie, purchè privi di punti fissi* (e ciò ad evitare punti singolari [2]), *definisce una forma di Clifford-Klein a due dimensioni, quando ogni insieme di punti del piano equivalenti rispetto al gruppo si consideri come un elemento unico.* La determinazione di queste forme dipende perciò da quella dei gruppi anzidetti euclidei e non euclidei, e quindi dalla suddivisione del piano in poligoni (in senso lato) equivalenti che si è incontrata nella teoria delle funzioni automorfe (lavori cit. nella nota [1], p. 214).

Le forme di Clifford-Klein a 2 dimensioni e di curvatura nulla sono di 4 tipi diversi [3], corrispondenti rispett. ai gruppi rappresentati in coordinate cartesiane ortogonali dalle equazioni sotto indicate, nelle quali m, n descrivono l'intera successione dei numeri interi, e a, b sono costanti arbitrarie, la prima non nulla:

1°) $x'=x+m$, $y'=y$. Come campo fondamentale del gruppo (regione che, di ogni insieme di punti equivalenti rispetto al gruppo, contiene un punto e uno solo) si può assumere la striscia di piano compresa fra l'asse y e la sua parallela $x=1$ (inclusa una delle due rette e esclusa l'altra). Si trova così il cilindro rotondo (bilatero).

2°) $x'=x+nb+m$, $y'=y+na$. Il campo fondamentale è un parallelogrammo; e la forma corrispondente è la *quadrica di Clifford*, topologicamente equivalente al toro dello spazio euclideo (anello bilatero).

3°) $x'=x+m, y'=(-1)^m y$. I campi fondamentali sono ancora striscie, come nel 1° caso, ma sottoposte alternativamente, una si

---

(1) Klein-Rosemann, p. 258.

(2) Sulla sfera, ogni movimento ha almeno un punto unito; un gruppo discontinuo come qui occorre non può risultare dunque che dalla sola identità, oppure dall'identità congiunta a un'unica operazione involutoria di 2^a specie, priva di punti uniti, quale è la corrispondenza fra le coppie di punti diametralmente opposti. Le sole forme di Clifford-Klein a curvatura positiva sono dunque la sfera stessa, e il piano ellittico (che è in corrispondenza biunivoca coll'insieme delle coppie di punti diametralmente opposti di una sfera).

(3) All'infuori, ben inteso, dello stesso piano euclideo, che corrisponde al gruppo costituito dalla sola identita. V. i lav. cit. di Killing e Hopf.

e una no, a una trasformazione per simmetria rispetto all'asse x. Sono perciò equivalenti, sul contorno di una striscia, le coppie di punti AA', BB',.... della fig. 65 congiunte da segmenti punteggiati (coppie simmetriche rispetto ad M). Come forma corrispondente si ha una superficie unilatera, che HOPF per analogia col nastro di Möbius (n.° 71) ha chiamata *nastro di Möbius senza contorno* o *di larghezza infinita* (e si può anche chiamare *cilindro unilatero*).

4°) $x' = x + m$, $y' = (-1)^m y + na$. Si trova una superficie chiamata da Hopf *anello unilatero*, topologicamente equivalente a quella della fig. 61, p. 179. L'esistenza di questa forma è stata rilevata da F. KLEIN ([1]), al quale era però sfuggito il caso 3°).

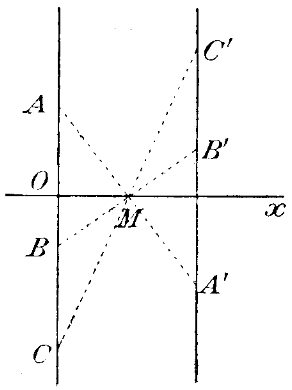
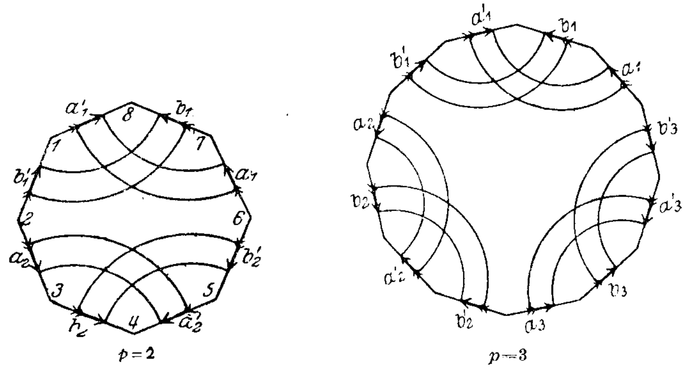


Fig. 65.

Il piano iperbolico conduce invece a infinite forme di Clifford-Klein, fra cui le seguenti, corrispondenti ai valori di un intero arbi-



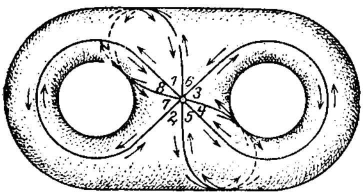
$p = 2$ $p = 3$

Fig. 66.

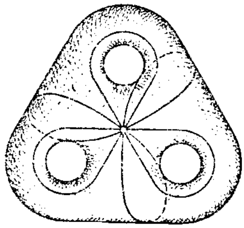
trario $p \geqq 2$. Consideriamo nel piano iperbolico un poligono regolare di $4p$ lati; variando con continuità il raggio r del cerchio circoscritto a questo poligono, la somma dei $4p$ angoli interni varierà pure con continuità, a partire da $2\pi(2p-1)$ (valore $> 2\pi$, se $p \geqq 2$)

([1]) Math. Ann. 37 (1890), p. 562 = Ges. Math. Abh. I, p. 371.

quando r è infinitesimo, e tendendo a zero quando r cresce indefinitamente. Esiste pertanto un raggio r pel quale la detta somma di angoli vale 2π, e ogni angolo interno $\frac{\pi}{2p}$. Con poligoni di questo tipo si può formare una rete che ricopre semplicemente l'intero piano, e nella quale ogni vertice è comune a $4p$ fra i detti poligoni. Accoppiando i lati di questo poligono nel modo indicato dalla fig. 66 per $p=2$ e $p=3$ e in modo analogo se $p>3$, e considerando come identici punti corrispondenti nella congruenza fra due lati così accoppiati, si viene a chiudere idealmente la zona piana poligonale, in modo che i $4p$ vertici vengono a coincidere in un unico punto,



$p=2$



$p=3$

Fig. 67.

non singolare perchè nel suo intorno la somma dei vari angoli saldati insieme è $4p\frac{\pi}{2p}=2\pi$. Questa superficie chiusa, in forma di ciambella a p buchi (fig. 67), quando per essa si conservi la precedente metrica iperbolica, è una forma di Clifford-Klein.

86. - Indimostrabilità del postulato 5° di Euclide. — La costruzione della geometria iperbolica secondo uno qualunque degli indirizzi indicati costituisce una prova della impossibilità di dimostrare il post. 5° di Euclide, facendolo discendere come conseguenza dagli altri postulati fondamentali della geometria elementare (p. es. dagli altri postulati di Hilbert indicati al n.° 13).

La costruzione della geometria elementare di Lobačewski-Bolyai, col fatto di non aver condotto ad alcuna contraddizione, non forniva ancora questa prova in modo completo, non potendosi escludere che, proseguendo nello sviluppo, qualche contraddizione si avesse ad incontrare in seguito (v. n. 38). Tale prova era data però dalla trigonometria non euclidea, la quale, pensata come sistema di formole che legano punti analitici (x, y, z), cioè terne di numeri, e danno fra altro, come conseguenza di quelle formole, l'espressione della distanza di 2 punti, conduce ad un sistema analitico più generale di quello corrispondente alla geometria ordinaria, nel quale non è verificato il post. 5° se alla costante k si attribuisce un qualsiasi valore finito.

L'interpretazione della geometria iperbolica sulle superficie a curvatura costante negativa, data da Beltrami (n.° 45), mostra anche essa che il post. 5° non può dedursi dagli altri « supposti validi in una regione limitata del piano ». Riferendoci alla varietà numerica a due dimensioni colla formola dell'elemento lineare a suo tempo veduta, oppure alla rappresentazione di questa varietà sulla regione di piano cartesiano u, v interna al cerchio $u^2+v^2=a^2$, si può anche concluderne la indimostrabilità del post. 5° « nell'ambito della geometria piana », rimanendo tuttavia la possibilità di una diversa conclusione quando sia ammesso di far uso di ragionamenti nello spazio.

Più esaurienti sono le dimostrazioni che conseguono dagli altri indirizzi, le quali provano altresì la indimostrabilità del post. 5° per mezzo di ragionamenti nello spazio. Quella che scaturisce dalla geometria di Riemann, e più particolarmente dalla teoria delle varietà a 3 dimensioni a curvatura costante positiva, è puramente analitica. Più geometrica è quella che deriva da Helmholtz-Lie. Più semplice e più luminosa di tutte è la prova geometrica che discende dalla metrica proiettiva, in quanto, dopo costruita la geometria proiettiva in base a soli postulati grafici (n.° 62), possono darsi definizioni di distanze e angoli tali che la geometria della regione interna a una quadrica a punti ellittici coincida colla geometria elementare dello spazio iperbolico. Si ha anzi così ben più che una interpretazione convenzionale della geometria non euclidea; è messa in luce la perfetta equiparazione della metrica euclidea e delle due metriche non euclidee, iperbolica ed ellittica, e il fatto che la prima è caso intermedio e limite comune di queste ultime.

CAPITOLO VI.

Applicazione alla teoria della relatività [1].

87. - La cinematica classica dal punto di vista metrico-proiettivo. — La metrica proiettiva si estende facilmente a spazi a più dimensioni, sia riferendosi a elementi comunque complessi, sia con speciale riferimento agli elementi reali; e distinguendo inoltre i vari casi che può presentare la quadrica fondamentale, sia per la caratteristica del discriminante e le conseguenti sue specializzazioni come luogo o come inviluppo, sia, nel caso di un'equazione a coefficienti reali, riguardo ai segni dei vari termini di quest'equazione, ridotta a forma canonica ($\sum \pm x_i^2 = 0$). Una di queste metriche proiettive ha trovato un'applicazione importante nella « teoria della relatività speciale » di A. EINSTEIN. Scopo del presente Capitolo è appunto di mettere in evidenza il lato geometrico di questa teoria; e di mostrare come alcune vedute, che nel campo fisico hanno profondamente modificato idee e vedute precedenti, abbiano trovato invece, per quanto concerne le nozioni matematiche che vi occorrono, il loro

---

(1) La prima Memoria di A. EINSTEIN su quest'argomento ha il titolo: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. d. Phys. (4), vol. 17, 1905, p. 891. Fra le numerose pubblicazioni successive sulla relatività ricordiamo H. MINKOWSKI: *Das Relativitätsprinzip*, Conferenza tenuta il 5 novembre 1907 alla Soc. Matem. di Gottinga, ma pubblicata solo nel 1915, Jahresber. Deutsche Math.-Ver., 24 (1915), p. 372; *Raum und Zeit,* Conferenza tenuta il 21 settembre 1908 a Colonia alla 80ª riunione dei naturalisti tedeschi, Jahresber. Deutsche Math.-Ver., 18 (1909), p. 75 = Ges. Abh., II (1911), p. 431; F. KLEIN: *Ueber die geometrischen Grundlagen der Lorentz-Gruppe*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver., vol. 19 (1910), p. 281 = Ges. Math. Werke, I, p. 533; A. EINSTEIN: *Ueber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie* (1917), trad. italiana di G. L. Calisse (Bologna 1921); G. CASTELNUOVO: *Spazio e tempo secondo le vedute di A. Einstein* (Bologna, 1922).

posto naturale in un sistema di concetti generali preesistenti e già familiari agli scienziati.

La cinematica classica è una teoria analitica in quattro variabili indipendenti, le coordinate cartesiane x, y, z, che supporremo ortogonali, e il tempo t. Il punto analitico di questo spazio (x, y, z, t), ossia ciò che avviene in un determinato luogo e in un determinato istante, può chiamarsi *evento*; l'insieme di tutti gli eventi è uno spazio a 4 dimensioni, che può chiamarsi *universo* o *cronotopo* (in quanto riassume spazio e tempo). Il movimento di un punto vi è rappresentato da una *linea oraria* $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, che ne costituisce la storia, e di cui quella che noi chiamiamo *traiettoria* (in S_3) è la proiezione ortogonale sopra uno spazio $t=\text{cost}$. Le equazioni della cinematica classica godono della proprietà di mantenersi invariate:

1°) rispetto a tutti i cambiamenti del sistema di coordinate ortogonali x, y, z, i quali dipendono da *sei* parametri: le antiche coordinate a, b, c della nuova origine, e altri tre parametri che determinano le direzioni dei nuovi assi rispetto agli antichi;

2°) rispetto ai cambiamenti dell'origine del tempo, rappresentati analiticamente da $t'=t+t_0$;

3°) rispetto alla trasformazione $x'=x-vt$, colla quale si rappresenta analiticamente il passaggio da un sistema di coordinate x, y, z a un sistema x', y, z animato rispetto al primo da un movimento uniforme di velocità v in direzione parallela all'asse x; nonchè rispetto alle trasformazioni analoghe per movimenti paralleli agli assi y e z (tutte chiamate generalmente trasformazioni di Galileo). È quest'ultima proprietà (tenuto conto della proprietà 2ª)) la consueta traduzione analitica del « principio di relatività » della cinematica: *Nessun fenomeno, nessuna esperienza meccanica eseguita nell'interno di un sistema* (p. es. di un treno ferroviario, di una nave) *permette di distinguere se questo sistema sia in quiete o in moto rettilineo uniforme.* I due stati di *quiete* e *moto rettilineo uniforme* sono, sotto questo riguardo, equivalenti; chiamare l'uno quiete, l'altro moto rettilineo uniforme, dipende soltanto dal sistema di riferimento, il quale può essere scelto ad arbitrio fra un insieme di sistemi, ciascuno in moto rettilineo uniforme rispetto agli altri; è soltanto una *convenzione.*

Complessivamente, le equazioni della meccanica classica si conservano invariate rispetto al gruppo ∞^{10} di trasformazioni lineari:

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z - v_x t + a \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z - v_y t + b \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z - v_z t + c \\ t' = \qquad\qquad\qquad\qquad t + t_0 \end{cases}$$

dove le a_{ik} sono i 9 coefficienti di una sostituzione *ortogonale* su 3 variabili, e dipendono perciò da soli 3 parametri; e gli altri sette parametri sono le a, b, c, t_0 già nominate, e v_x, v_y, v_z, componenti della velocità costante del sistema nuovo rispetto all'antico.

Queste equazioni, applicate a due eventi qualunque (x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2), lasciano invariata la differenza $t_2 - t_1$, cioè la distanza dei due eventi nel tempo; e *per eventi contemporanei* $(t_1 = t_2)$ anche la loro distanza spaziale $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ (1). Nello spazio S_4 delle cinque coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, dove $x = \frac{x_1}{x_5}$, $y = \frac{x_2}{x_5}$, $z = \frac{x_3}{x_5}$, $t = \frac{x_4}{x_5}$, esse possono caratterizzarsi come le trasformazioni lineari con determinanti $[a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}] = 1$, $[a_{11}a_{22}a_{33}] = 1$ che lasciano invariato lo spazio $x_5 = 0$ (spazio S_3 all'infinito), in esso il piano $x_4 = x_5 = 0$, e in questo piano la conica (cerchio assoluto) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$; perciò, complessivamente, la quadrica inviluppo due volte specializzata di equazione $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, cioè il sistema degli S_3 tangenti alla detta conica. Questo gruppo ∞^{10} si ricava dalla metrica proiettiva generale di S_4, che ha pur essa un gruppo fondamentale ∞^{10}, con un passaggio al limite nel quale l'assoluto si specializza due volte come inviluppo. *La cinematica classica coincide dunque colla metrica proiettiva dello spazio S_4, quando vi si prenda come assoluto una quadrica opportuna, specializzata due volte come inviluppo.*

88. - **La teoria della relatività speciale di A. Einstein.** — I fenomeni contemplati dal principio di relatività della meccanica

(1) Per eventi che si verificano in istanti diversi, la coincidenza spaziale non può avere che significato *relativo* (cioè rispetto al sistema di riferimento). P. es. due lezioni fatte in una stessa aula in istanti diversi sono eventi spazialmente coincidenti rispetto ad un osservatore rigidamente connesso con la terra in movimento, ma non sarebbero tali per un osservatore connesso al sole.

classica sono quelli che si rivelano direttamente ai nostri sensi come fenomeni di movimento; non sono pertanto compresi fra essi i fenomeni ottici e elettromagnetici. La teoria di questi ultimi è stata riassunta da J. C. MAXWELL in alcune equazioni differenziali tra l'intensità di ciascuno dei due campi, elettrico e magnetico, e la variazione d'intensità dell'altro nel tempo; equazioni valide nell'ipotesi di un sistema di assi in quiete rispetto all'etere, considerato come sede di quei fenomeni. Ma queste equazioni *non* si mantengono invariate rispetto alle trasformazioni (1), in particolare rispetto alla $x' = x - v_x t$ e alle analoghe nelle y e z. Da ciò la necessità di adottare una delle due soluzioni seguenti:

1°) Ammettere che pei fenomeni elettromagnetici (ossia di energia raggiante) non valga più il principio di relatività; che debba quindi essere possibile, per mezzo di tali fenomeni, di mettere in evidenza ad es. il movimento traslatorio della terra rispetto all'etere (ipotesi del *non trascinamento* dell'etere). A questo non si è però mai riesciti con sicurezza; e anzi oggi tutti i fisici sono d'accordo nell'ammettere come grande legge di natura *l'impossibilità di rivelare e misurare, per qualunque via, con lo studio di qualsiasi «fatto fisico», un movimento traslatorio della materia rispetto all'etere.* Ciò porta dunque ad escludere la detta prima ipotesi.

2°) Oppure rendere «relativistica» tutta la fisica (e così si è fatto). Questo porta anzitutto ad affermare *la costanza della velocità della luce nel vuoto rispetto ad un osservatore che è in quiete rispetto alla sorgente*; in altri termini, *entro il sistema rigido sorgente-osservatore la propagazione della luce deve farsi con legge costante*; perchè, se così non fosse, l'eventuale movimento rettilineo uniforme del detto sistema rispetto ad un altro potrebbe essere rivelato da una diversità della legge suddetta. Questo non esclude che ad un osservatore *non* rigidamente connesso alla sorgente la luce possa giungere con una velocità risultante dalla composizione della velocità suindicata con quella che la sorgente ha rispetto all'osservatore (*ipotesi balistica* di WALTER RITZ); ma osservazioni astronomiche accurate sulle stelle doppie hanno resa anche quest'ultima ipotesi, almeno per la grande maggioranza dei fisici, poco verosimile. Invece A. EINSTEIN ha enunciato il principio di relatività in un senso ancora più spinto, affermando *la indipendenza della velocità della luce nel vuoto anche dalla velocità che la sorgente che la emette ha rispetto all'osservatore* (1). È questo il vero postulato fondamentale della *teoria della relatività speciale* (o dell'antica maniera), grandiosa nella sua concezione, in quanto consente alla fisica maggiore unità di vedute, facendo rientrare la meccanica classica nella elettrodinamica; ma che deforma la prima, modificandone essenzialmente i due concetti primitivi di «spazio» e «tempo», e incorporandoli, per così dire, l'uno nell'altro (2). Tuttavia per le velocità con cui si compiono i fenomeni di movimento che noi percepiamo come tali, velocità di gran lunga inferiori alla velocità della luce, le modificazioni che ne conseguono non superano i limiti degli errori di osservazione; sicchè la discrepanza teorica risulta in pratica insensibile.

89. - Il gruppo di Lorentz. La relatività speciale come metrica proiettiva. — Le formole (1) vanno ora sostituite con altre, facendo sì che ancora un movimento rettilineo uniforme rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento (x, y, z, t) risulti pure tale rispetto ad ogni altro sistema in moto rettilineo uniforme rispetto al primo; e, di più, un moto rettilineo uniforme, il quale rispetto ad uno di questi sistemi abbia velocità eguale a quella della luce nel vuoto, abbia questa stessa velocità rispetto ad ogni altro di quei sistemi. In particolare, nel caso di movimenti uniformi paralleli all'asse x, indicando con x, t; x', t' le antiche e le nuove variabili, con v la velocità del sistema nuovo rispetto all'antico, e con c la velocità della luce nel vuoto (costante universale), il moto uniforme di equazione $x-ct=0$ dovrà rappresentarsi nelle nuove variabili colla analoga equazione $x'-ct'=0$. Di qui si trae che le nuove

(1) Un enunciato meno restrittivo, ma sufficiente per giungere alle stesse conseguenze, è stato dato da ENEA BORTOLOTTI (Rend. Seminario Facoltà di Scienze di Cagliari, anno I (1931), p. 70).

(2) «Von Stund an sollen Raum und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbstständigkeit bewahren» (H. MINKOWSKI: *Raum und Zeit*, v. nota (1) a p. 223). D'altronde ogni sensazione, verificandosi in un dato luogo e in un dato tempo, lega l'elemento locale all'elemento temporale; e questa unità non può essere sciolta che da un atto di astrazione.

variabili x', t' si esprimono mediante le antiche nel modo seguente [1]:

$$(2) \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

equazioni che sostituiscono le $x' = x - vt$, $t' = t$ del caso Galileiano, e si riducono a queste per movimenti che si effettuino con velocità molto piccole, tali da poter trascurare il rapporto $\frac{v^2}{c^2}$ [2]. *Non sono ora possibili movimenti con velocità $v > c$* (se no il radicando a denominatore delle (2) risulterebbe negativo). Due velocità v, w di egual direzione si compongono nella velocità $\frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}}$, molto prossima a $v + w$ se c è molto grande rispetto alle prime. *La trasformazione* (2) *altera però gli intervalli spaziali e temporali.* Considerata nel sistema mobile (con apici), sull'asse x', un'asta rigida di estremi x'_0, x'

---

[1] V. p. es. CASTELNUOVO, op. cit., p. 27 e seg.; EINSTEIN-CALISSE, op. cit., p. 28 e seg., 113 e seg.

[2] Introducendo come variabile, in luogo di t, la $y = ct$ (omogenea alla x), e ponendo $\frac{v}{c} = u$ (coefficiente numerico), le (2) assumono la forma:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}x + \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}y; \qquad y' = \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}x + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}y.$$

Essendo $u < 1$, esisterà un numero reale α tale che Th $\alpha = u$, quindi Ch $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, Sh $\alpha = \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$; sicchè le stesse (2) potranno anche scriversi sotto la forma:

$$(2') \qquad \begin{cases} x' = x \,\mathrm{Ch}\,\alpha - y \,\mathrm{Sh}\,\alpha \\ y' = -x \,\mathrm{Sh}\,\alpha + y \,\mathrm{Ch}\,\alpha \end{cases}$$

analoga alla sostituzione ortogonale $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \,\mathrm{sen}\, \alpha \\ y' = x \,\mathrm{sen}\, \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$, salvo un segno, in quanto le (2′) mutano in sè la differenza $x^2 - y^2$ (ossia $x^2 - c^2t^2$) anzichè la somma $x^2 + y^2$. Le (2) o (2′) formano un gruppo ∞^1 (e anzi le (2′), al variare del parametro α, si compongono sommando i relativi parametri); esse sono le trasformazioni fondamentali — che, per ora, non mutano l'origine — di una *geometria piana pseudoeuclidea*, nella quale i cerchi euclidei $x^2 + y^2 = \text{cost.}$, invarianti per sostituzioni ortogonali, sono sostituiti dalle iperboli anche concentriche $x^2 - y^2 = \text{cost.}$ (fig. 68); e, nel caso di più dimensioni, le sfere da opportune quadriche. Le rette reali $x \pm y = \text{cost.}$ sostituiscono le rette isotrope euclidee.

e perciò di lunghezza $d = x' - x'_0$, per un osservatore rigidamente collegato al sistema senza apici tale lunghezza, in un istante arbitrario t di quest'ultimo sistema, apparirà eguale a $x - x_0 = d$, dove, in base alle (2):

$$x'_0 = \frac{x_0 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

e quindi :

$$d = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \text{perciò:} \quad d < d'.$$

Un' asta rigida (e più generalmente un corpo qualunque) *mobile rispetto a un osservatore appare dunque a questi accorciata*

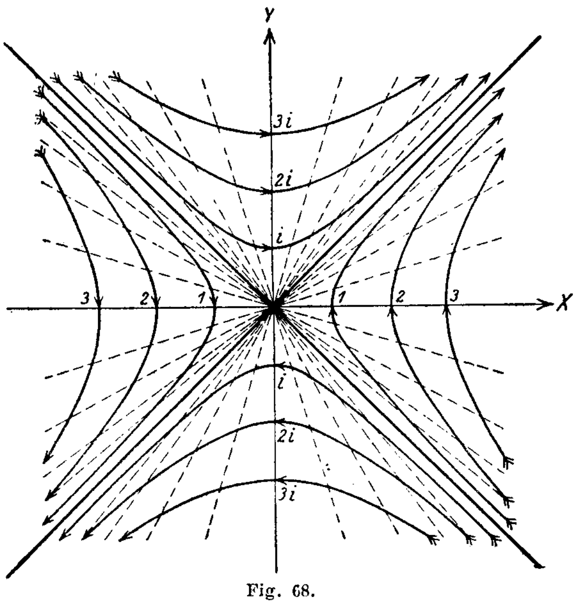


Fig. 68.

nella direzione del movimento; e tanto più accorciata, quanto più rapidamente è mossa (per $v = c$ la sua lunghezza apparirebbe nulla). È la così detta *contrazione Lorentziana*; e le trasformazioni (2) si chiamano appunto *trasformazioni di Lorentz* ([1]).

([1]) Erano però state considerate già prima da W. Voigt (*Ueber das Döpplersche Prinzip*, Gött. Nachr., 1887) nello studio della propagazione delle onde emesse da sorgenti in movimento.

Viceversa, se un orologio situato p. es. nel punto origine del sistema con apici ($x'=0$) batte due colpi nei due istanti $t'=0$, $t'=1$, lo stesso osservatore precedente del sistema senza apici li percepirà negli istanti $t=0$, $t=\left(1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$ (come si ricava risolvendo le (2) per $x'=0$, $t'=0$, risp. $t'=1$), perciò con intervallo maggiore. *L'orologio, per un osservatore rispetto a cui esso è in moto, batte i colpi più lentamente: i tempi risultano allungati* (¹).

Lorentz, fino dal 1895, aveva osservato che le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, mentre vengono alterate delle trasformazioni di Galileo, sono invece invarianti rispetto alle (2) e alle trasformazioni analoghe per movimenti paralleli agli assi y e z. Combinando queste colle rotazioni del triedro $Oxyz$ (cioè colle sostituzioni ortogonali di determinante $+1$ delle x, y, z), si ha un sistema ∞^6 di sostituzioni lineari omogenee sulle quattro variabili x, y, z, t, le quali mutano in sè la forma quadratica $c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)$, o anche $t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)$ (²). Aggiungendo infine alle espressioni di x', y', z', t' così risultanti 4 costanti additive arbitrarie, si hanno equazioni del tipo:

$$
(3) \qquad \begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t+a_{15} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t+a_{25} \\ z'=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t+a_{35} \\ t'=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t+a_{45} \end{cases}
$$

dipendenti complessivamente da 10 parametri (³). Esse rappresentano un gruppo lineare (affine) ∞^{10}, chiamato comunemente

---

(¹) Illustrazioni geometriche concernenti queste due ultime proposizioni si possono trovare in A. S. EDDINGTON: *Espace, temps, et gravitation* (traduz. francese di J. Rossignol, Paris 1921), Cap. III, in particolare pp. 65-69.

(²) Lo si deduce facilmente dall'osservazione che le (2) mutano in sè la forma $c^2t^2-x^2$.

(³) Le a_{i5}, in numero di *quattro*, e i *sei* parametri dai quali dipendono le rotazioni del triedro $Oxyz$ e le equazioni (2) relative ai tre assi coordinati, quindi gli elementi del determinante $[a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}]$. Questo determinante deve essere $=+1$; e inoltre, per avere un gruppo continuo, occorre sia $a_{44}>0$ (KLEIN, l. c. nella nota (¹) a p. 223). Questo equivale a dire che nell'intorno di un punto fisso (x, y, z), dove perciò $dx=dy=dz=0$, gli incrementi dt e dt' hanno sempre lo stesso segno, cioè è tenuta ferma per *gruppo di Lorentz*, le cui operazioni lasciano invariate le equazioni di Maxwell, e lasciano pure invariata l'espressione:

$$(4)\qquad (t_2-t_1)^2-\frac{1}{c^2}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)+(z_2-z_1)^2]$$

formata colle coordinate x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 di due eventi (punti) arbitrari, e la cui radice quadrata, avente dimensione di tempo, si chiama *intervallo* dei due eventi. Il gruppo Galileiano, o della cinematica classica, anch'esso ∞^{10}, lascia invariata la differenza t_2-t_1, e nel caso particolare $t_1=t_2$ anche l'espressione $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$; a questi due invarianti il gruppo di Lorentz sostituisce la loro combinazione (4). Perciò, nella nuova cinematica, l'intervallo di tempo fra due eventi non ha un valore assoluto; cambia col sistema di riferimento, cioè coll'osservatore. La contemporaneità può sussistere in relazione ad uno tra infiniti sistemi di coordinate equivalenti, e non per gli altri.

Le (3), come trasformazioni affini dello spazio S_4 delle coordinate x, y, z, t, lasciano invariato lo spazio S_3 all'infinito del detto S_4, e entro di esso la quadrica (ordinaria, reale, a punti ellittici) sua intersezione col cono $c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0$. In coordinate omogenee di punto $x_1,\ldots, x_5$ $\left(\text{ove } x=\frac{x_1}{x_5},\ldots,\ t=\frac{x_4}{x_5}\right)$ e di spazi $u_1,\ldots, u_5$, questa quadrica di S_3 è rappresentata come inviluppo dall'equazione unica $u_1^2+u_2^2+u_3^2-\frac{1}{c^2}u_4^2=0$, semplicemente specializzata. *Il gruppo di Lorentz è dunque anch'esso un caso limite della metrica proiettiva generale dello spazio S_4, corrispondente ad una specializzazione semplice della quadrica assoluto come inviluppo.* Però ora la quadrica assoluto non è più immaginaria (come il cerchio assoluto dell'S_3 euclideo), ma reale a punti ellittici. *Cinematica classica e teoria della relatività speciale sono dunque entrambe metriche proiettive del cronotopo delle quattro coordinate x, y, z, t, corrispondenti a due diverse specializzazioni della quadrica assoluto*; i loro gruppi G_{10} sono *il gruppo di Galileo* e *il gruppo di Lorentz*. Per i matematici, la teoria della relatività speciale non è altro che

---

quell'intorno la distinzione tra «passato» e «futuro». — Si tenga presente che nelle (3) i coefficienti a_{ik} non hanno tutti eguale dimensione; p. es. a_{14}, a_{24}, a_{34} hanno dimensione di velocità; a_{41}, a_{42}, a_{43} di inversi di velocità.

una delle geometrie corrispondenti a certi gruppi fondamentali, un caso particolare di metrica proiettiva; essa trova collocamento in un quadro dove già aveva il posto preparato, come ad es. un nuovo elemento chimico preveduto dalla serie periodica di Mendeleev ([1]).

In particolare, per eventi infinitamente vicini, è invariante l'intervallo elementare $ds = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, o *elemento lineare del cronotopo.* Poichè questo ds^2, a differenza dei casi precedenti, è forma quadratica *indefinita* (n°. 49), esistono *elementi lineari reali di lunghezza nulla,* ossia eventi infinitamente vicini, distinti, di intervallo nullo: quelli per cui $c^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$; e anche archi finiti di lunghezza nulla: gli archi di tutte le linee composte di elementi del tipo anzidetto, ossia le linee orarie della propagazione luminosa; più generalmente, *le linee rappresentanti quei movimenti che si compiono con la velocità della luce nel vuoto.* Geometricamente, sono le rette incidenti alla quadrica assoluto, cioè aventi coseni direttori x, y, z, t soddisfacenti all'equazione della quadrica stessa, nonchè le linee inviluppi di tali rette; analoghe rispett. alle rette e alle linee isotrope, puramente immaginarie, dello spazio euclideo. Si tratta dunque di una geometria *pseudoeuclidea* (n.° 50).

90. - Il cono isotropo. Applicazioni. — Il cono

$$t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

che dall'origine O (evento del tutto arbitrario) proietta la quadrica assoluto si suol chiamare *cono isotropo.* Quando si adottino le consuete unità del sistema c. g. s., la costante universale c ha un valore numerico molto grande, e perciò questo cono è assai schiacciato nella direzione dell'asse dei tempi, cioè prossimo allo spazio $t = 0$ contato due volte (la quarta dimensione del cronotopo, quella temporale, è poco sviluppata in confronto alle altre tre). Lo spazio

([1]) Non sembra però molto opportuno, dal punto di vista matematico, il nome *Teoria della relatività*; ogni geometria è, in certo senso, teoria della relatività rispetto al suo gruppo fondamentale. Nel caso presente, il nome è dovuto a ragioni storiche, poichè la teoria di Einstein nacque come contrapposta a quella precedente di Lorentz, che supponeva l'etere immobile, e nella quale pertanto il movimento rispetto all'etere era *moto assoluto.*

$t=0$ è esterno rispetto al detto cono, e lo divide in due semiconi (opposti al vertice); semicono «del passato» o «anteriore» (ted. *Vorkegel*) dalla banda delle t negative, semicono «dell'avvenire» o «posteriore» (ted. *Nachkegel*) dalla banda della t positive. — L'intervallo fra l'origine e un altro evento qualunque $P(x, y, z, t)$, cioè $d=\sqrt{t^2-\frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)}$, è reale o immaginario secondo che $d^2 \gtrless 0$, ossia secondo che il punto P e con esso la retta OP sono interni o esterni al cono isotropo, e perciò il punto all'infinito di OP è interno o esterno alla quadrica assoluto; ed è ancora reale e nullo quando P sta sul cono isotropo. Se il detto intervallo è immaginario, si modifica da parte di molti la definizione di intervallo, dando questo nome alla quantità reale $\sqrt{x^2+y^2+z^2-c^2t^2}$, avente dimensione di lunghezza. — Se P è interno al cono, la retta OP può assumersi come asse dei tempi $(x=y=z=0)$; rispetto a uno qualunque dei sistemi di coordinate che hanno quest'asse, i due eventi O e P risultano *coincidenti nel luogo*, e l'intervallo d, ora puramente temporale, si chiama *tempo proprio* di quel sistema; esso è, in confronto ad altri sistemi, la minima differenza di tempo fra i due eventi. Se invece P è esterno al cono isotropo, si potrà assumere come nuovo spazio $t=0$ uno qualunque degli infiniti S_3 passanti per la retta OP e esterni al cono isotropo; rispetto a uno qualunque di questi sistemi di riferimento gli eventi O, P appariranno *coincidenti nel tempo*, e la quantità $icd=\sqrt{x^2+y^2+z^2-c^2t^2}$ è la loro *distanza propria* (spaziale). Il vettore OP si chiama anch'esso nel primo caso *vettore temporale*, nel secondo *vettore spaziale*; e se P sta sul cono isotropo, *vettore nullo* o *vettore luce*. Nel primo caso l'evento P costituisce rispetto a O un *deciso* passato, o un *deciso* avvenire (è tale, cioè, rispetto a qualsiasi sistema di coordinate), secondo il semicono entro cui P si trova; nel secondo caso l'evento P, a seconda del sistema di riferimento, può apparire successivo, contemporaneo, o anteriore a O (sicchè, tenendo fermo il solito concetto di causalità, da nessuno dei due eventi può pensarsi emani azione sull'altro).

Un fenomeno qualunque, che si svolga da un evento iniziale $(x_1y_1z_1t_1)$ a un evento finale $(x_2y_2z_2t_2)$ secondo una certa linea oraria, può pensarsi decomposto in una successione di fenomeni elementari (archetti infinitesimi della linea oraria); la somma (l'integrale) dei tempi propri, supposti tutti reali, relativi a questi fenomeni elementari si dirà *tempo proprio* del fenomeno (sarebbe il tempo segnato da un orologio legato a un sistema variabile, rispetto al quale ogni variazione fosse puramente temporale). Fissati i due eventi estremi $(x_1 y_1 z_1 t_1)$ e $(x_2 y_2 z_2 t_2)$, *il fenomeno impiegherà tempo proprio massimo quando la sua linea oraria è retta*; ossia, fra estremi assegnati, il moto rettilineo uniforme è quello che impiega tempo proprio massimo. Infatti in questo caso il tempo proprio è somma di intervalli elementari, tutti anche tempi propri; mentre variando la traiettoria (ossia la linea oraria), questa potrà sempre suddividersi in egual numero di elementi, a cui corrispondono tempi propri minori dei precedenti, perchè radici quadrati di differenze in cui il quadrato del precedente tempo proprio costituisce il minuendo. Si ha invece il *tempo proprio minimo, nullo*, quando la linea oraria è isotropa; l'onda luminosa si propaga con tempo proprio zero. Queste apparenti anormalità dipendono dal fatto che l'unità di misura del tempo proprio OP varia colla direzione del vettore OP, ed è data dal corrispondente semidiametro della quadrica $t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2)=1$ [1]; cresce perciò indefinitamente, e il tempo proprio tende a zero, quando P tende a portarsi sul cono isotropo [2].

91. - Cenno sulla Teoria della relatività generale. — La teoria della relatività generale (o della seconda maniera) [3] è stata promossa dalle considerazioni seguenti:

1°) Desiderio e opportunità di far entrare in un unico schema generale della fisica, insieme coi fenomeni di movimento e elettromagnetici, anche quelli gravitazionali; tanto più che lo studio dei fenomeni elettromagnetici ha condotto a ritenere che nessuna azione

---

(1) Quadrica rispetto alla quale lo spazio $t=0$ è esterno, e che da ogni spazio (a 3 dimensioni) passante per l'asse $x=y=z=0$ (asse dei tempi) è incontrata secondo un iperboloide a due falde. Nell'attuale spazio a 4 dimensioni le quadriche $t^2 - \frac{1}{c^2}(x^2+y^2+z^2) = \text{cost.}$ sono le figure analoghe alle iperboli $x^2 - y^2 = \text{cost.}$ della fig. 68.

(2) V. anche CASTELNUOVO, l. c., §§ VII-IX.

(3) La Memoria fondamentale di A. EINSTEIN: *Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, è nei Berliner Ber., 1914, p. 1030.

possa propagarsi istantaneamente a distanza, e che per la propagazione occorra sempre un mezzo intermedio;

2°) Poca verosimiglianza che le leggi fisiche si esprimano con le medesime formole soltanto se riferite a sistemi, l'uno rispetto all'altro, in movimento rettilineo uniforme, e non in moto accelerato o di rotazione; che vi siano cioè sistemi di coordinate privilegiati rispetto alle leggi naturali. È invece più verosimile che queste leggi debbano avere forma invariante rispetto a trasformazioni qualsiansi del sistema di riferimento, dove cioè x', y', z', t' siano funzioni qualunque delle x, y, z, t, purchè univoche, univocamente invertibili, e derivabili finchè occorre; abbiano dunque il carattere di *equazioni intrinseche* (n.i 56, 57) rispetto a sistemi di coordinate Gaussiane comunque curvilinee.

I sensi ci dicono che la Terra produce intorno a sè un *campo di gravitazione*, e che i corpi che si muovono in questo campo sotto l'azione esclusiva di esso acquistano una accelerazione indipendente dalla loro natura, stato fisico, massa, velocità iniziale; in altri termini questa accelerazione ha carattere puramente geometrico. — Immaginiamo un ambiente chiuso, una specie di cabina, che cada liberamente nel vuoto: un grave abbandonato entro di esso, senza impulso, a una qualsiasi altezza dal pavimento discenderebbe colla stessa velocità, e apparirebbe quindi immobile a chi sta nella cabina; lanciato orizzontalmente, descriverebbe per un osservatore interno una retta anche orizzontale, con moto uniforme. Siamo così condotti ad ammettere che per un campo molto piccolo, in cui le variazioni della gravità siano trascurabili (in teoria, per un campo infinitamente piccolo), esista un sistema di coordinate K_0 — la cabina —, entro il quale la gravità non influisca sul movimento di un punto materiale nè su altri fenomeni fisici: nell'infinitamente piccolo, il campo di gravitazione si lascia eliminare con un cambiamento del sistema di riferimento. — Ammettiamo ora che, entro K_0, per il movimento di un punto materiale soggetto alla sola gravitazione valga la teoria della relatività speciale, onde $ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, con dt, dx,.... convenientemente misurati; e ciò per tutte le posizioni nel cronotopo, variando tuttavia il sistema K_0 da luogo a luogo. Adottando nel cronotopo un sistema di coordinate unico, risulterà ds^2 ancora eguale a una forma differenziale quadratica nelle nuove coordinate $ds^2 = \sum_1^4 g_{ik} dx_i dx_k$, ma con coefficienti g_{ik} variabili, funzioni del luogo; quindi il cronotopo stesso sarà uno spazio Riemanniano (n.° 49), pseudoeuclideo nelle sue parti infinitesime. La presenza di materia (e con essa la gravitazione) modifica dunque il ds^2 della relatività speciale, in modo che i suoi coefficienti, prima costanti, sono ora funzioni del luogo; il che, in linguaggio geometrico, equivale a dire che essa *incurva* lo spazio-tempo (prima piano, ora curvo). Un fenomeno fisico, la gravitazione, viene così « geometrizzato » (riceve interpretazione geometrica); la geometria dell'universo è ora anche espressione matematica delle proprietà e della distribuzione della materia (1); dipende, sia pure in pratica molto tenuamente, dai fenomeni che vi si svolgono. A distanza grandissima da ogni materia, l'azione di quest'ultima è pressochè nulla, e il ds^2 può supporsi con grande approssimazione a coefficienti costanti. — In questo cronotopo le linee orarie del moto per inerzia, cioè del movimento di un punto materiale non soggetto a forze, devono avere carattere intrinseco; e d'altra parte le loro equazioni, nell'intorno di un punto generico e riferite al corrispondente sistema locale di coordinate K_0, devono risultare lineari: ciò induce a ritenere — ed assumere come postulato — ch'esse siano le *linee geodetiche* del cronotopo. Il principio d'inerzia di Galileo viene pertanto così generalizzato: *Un punto materiale non soggetto a forze si muove secondo una geodetica dello spazio-tempo (Riemanniano)*: geodetica che tra due punti (eventi) determinati segna sempre un percorso estremale, in questo caso (elemento lineare indefinito) un percorso massimo. E l'ordinario principio di relatività: « Le leggi naturali devono essere indipendenti dal sistema di riferimento » va ora precisato così: *Le leggi naturali devono tradursi in proprietà intrinseche dello spazio-tempo Riemanniano di elemento lineare* $ds^2 = \sum g_{ik} dx_i dx_k$ (2); quindi, generalmente parlando, in *equazioni fra tensori* (n.° 57). E questo

(1) Cfr. quanto è detto di Riemann alla fine del n.° 53. Anche W. K. CLIFFORD scrisse, fino dal 1875 (*The unseen Universe*, Essays and lectures, 2ª ediz., 1866, p. 161): « The theory of space curvature hints at a possibility of describing matter and motion in terms of extension only ».

(2) La determinazione delle g_{ik} può farsi, almeno concettualmente, per via sperimentale, per mezzo di osservazioni opportunamente condotte (CA-

appunto è avvenuto, per la gravitazione, colla generalizzazione data da A. Einstein dell'equazione di Poisson $\Delta_2\varphi = -4\pi\varrho$ fra i due scalari φ (energia potenziale riferita all'unità di massa) e ϱ (densità di massa), sostituendo a φ il tensore fondamentale metrico g_{ik} (donde appunto il nome di *potenziali gravitazionali* dato alle g_{ik}), alla ϱ un « tensore energetico » T_{ik} [1], e all'equazione unica di Poisson il sistema di 10 equazioni differenziali (di cui 4 sole distinte):

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

dove $\varkappa$ è una costante, e le R_{ik} (contenenti le derivate prime e seconde delle g_{ik}, queste ultime linearmente) e R sono tensori ricavati per contrazione di indici dal tensore di Riemann-Christoffel (n.° 57). Poichè i fenomeni gravitazionali richiedono che l'universo sia curvo, e pertanto la legge $B^m_{ikl} = 0$ che caratterizza l'universo piano può valere solo a distanza grandissima da ogni materia, Einstein è stato naturalmente condotto a considerare i tensori contratti R_{ik}, R, e quindi le combinazioni $R_{ik} + \mu R g_{ik}$ (μ costante), una delle quali è appunto identificata con T_{ik}.

Alla legge generale di inerzia sopra enunciata obbediscono in pari tempo il corpuscolo materiale che a grande distanza da ogni materia (salvo che tenuissima) prosegue il suo movimento rettilineo uniforme; il pianeta che gira intorno al sole, considerato come centro unico di attrazione [2]; il raggio luminoso che segue pur esso una geodetica dello spazio-tempo, e si incurva passando in vicinanza del sole, come si è constatato nelle ecclissi. Viene così conseguita nella descrizione dei fenomeni naturali una notevole unità, per un campo già abbastanza vasto (e che le recenti teorie unitarie vorrebbero ancora estendere). Il vecchio detto di Platone: « Dio eternamente geometrizza » non è stato mai tanto vero come adesso, poichè un numero sempre maggiore di fatti fisici tendono a descriversi come modificazioni intrinseche della metrica spaziale.

STELNUOVO, l. c., p. 85 e seg.; LEVI-CIVITA, art. pubblicato in appendice al volume di KOPFF: *I fondamenti della relatività Einsteiniana*; Milano, 1923, pag. 306).

(1) Tensore a divergenza nulla, e che rappresenta perciò qualcosa di « permanente ».

(2) V. p. es. CASTELNUOVO, l. c., p. 109 e seg.

92. - L' Universo di De Sitter. — A. EINSTEIN ha studiato fino dal 1917 anche l' ipotesi che lo spazio ordinario a 3 dimensioni sia finito (chiuso), e più precisamente ellittico [1]; e che perciò, a grande distanza da ogni materia, l' elemento lineare, anzichè avere la forma della relatività speciale (n.i 89-90), sia del tipo:

$$(1) \qquad ds^2 = dx_4^2 - [d\varrho^2 + \operatorname{sen}^2\varrho\,(d\varphi^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta^2)]$$

dove la parentesi quadra contiene l' elemento lineare, in coordinate polari ϱ, φ, θ, di uno spazio a 3 dimensioni a curvatura costante positiva, il cui raggio di curvatura è assunto come unità, e x_4 è la coordinata temporale. Quest' ipotesi ha resa necessaria una conseguente modificazione nelle equazioni gravitazionali (n.o 91), che assumono allora la forma:

$$(2) \qquad R_{ik} - \lambda g_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik} T\right)$$

con un termine in più (termine cosmologico), quello a coefficiente λ (costante universale, molto piccola) [2], il che non ne altera il carattere di equazioni tensoriali.

Moltiplicando le (2) per le g^{ik}, elementi del determinante reciproco di $|g_{ik}|$, contraendo, e ricordando che $\sum g_{ik} g^{ik} = 4$, $\sum g^{ik} T_{ik} = T$, si ha:

$$R - 4\lambda = -\varkappa(T - 2T) = \varkappa T; \quad \text{perciò:} \quad R - 2\lambda = 2\left(\lambda + \frac{\varkappa}{2}\, T\right)$$

e le (2) possono scriversi:

$$(2') \qquad R_{ik} - \frac{1}{2}\,(R - 2\lambda) g_{ik} = -\varkappa T_{ik}$$

L' astronomo DE SITTER [3] ha data una soluzione di questo sistema di equazioni differenziali (2'), nell' ipotesi che nello spazio, all' infuori della materia condensata, non vi sia affatto materia. In queste regioni saranno nulle tutte le T_{ik} e T; perciò $R = 4\lambda$ (costante)

[1] *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Berliner Ber., 1917, p. 142. V. anche L. SILBERSTEIN: *The theory of general relativity and gravitation*, Toronto 1922, App. B, C; *The size of the Universe*, Oxford Univ. Press., 1930, Part II.

[2] In analogia al potenziale Newtoniano modificato $\varphi = \dfrac{e^{-r\sqrt{\lambda}}}{r}$ che conduce all' equazione di LAPLACE-POISSON $\Delta_2\varphi - \lambda\varphi = -4\pi\varrho$.

[3] Monthly Notice of R. A. S., Nov. 1917.

$R_{ik} = \lambda g_{ik} = \frac{R}{4} g_{ik}$, cioè il tensore di curvatura contratto e il tensore metrico fondamentale sono proporzionali: sono anzi queste $\left(R_{ik} = \frac{R}{4} g_{ik}\right)$ le attuali equazioni differenziali per la determinazione delle g_{ik}. Considerando allora l'universo di elemento lineare:

$$ds^2 = g_4 dx_4^2 - [d\varrho^2 + \operatorname{sen}^2\varrho\,(d\varphi^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta^2)] \tag{3}$$

il quale differisce dall'elemento (1) nel solo coefficiente g_4, che si suppone qui funzione della sola distanza ϱ, si trova che l'ipotesi $R = \text{cost.}$ conduce, oltre alla soluzione $g_4 = 1$ cioè all'elemento lineare (1), anche alla soluzione $g_4 = \cos^2\varrho$; cioè, scrivendo τ in luogo di x_4, all'elemento lineare:

$$ds^2 = \cos^2\varrho\, d\tau^2 - [d\varrho^2 + \operatorname{sen}^2\varrho\,(d\varphi^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, d\theta^2] \tag{3'}$$

La varietà V_4 delle 4 coordinate $\varrho, \varphi, \theta, \tau$ definita da questo elemento lineare (che è appunto quello di De Sitter) ha curvatura costante negativa -1. Istituiamo ora in uno spazio lineare S_4 colle coordinate cartesiane x, y, z, t una metrica proiettiva rispetto alla quadrica assoluto (a discriminante non nullo, reale, non rigata):

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \tag{4}$$

e riferiamoci alla regione di S_4 *esterna* a questa quadrica, siccome quella che contiene spazi S_3 non incontranti la (4) nel campo reale, cioè con metrica ellittica (p. es. gli spazi $t = \text{cost.}$, per $|t| < 1$). In questa regione vi saranno rette non incontranti l'assoluto (rette *spaziali*, tutte quelle p. es. contenute nello spazio $t = 0$), e rette incontranti l'assoluto in punti reali (rette *temporali*, p. es. l'asse t). Definiamo la distanza di due punti A, B la cui congiungente incontri l'assoluto nei punti M, N, rispett. immaginari coniugati e e reali, nel primo caso mediante la relazione:

$$(AB) = \frac{1}{2i} \log (MNAB), \tag{5}$$

sicchè le rette spaziali avranno lunghezza totale finita π; nel secondo caso invece ponendo:

$$(AB) = \frac{1}{2} \log (MNAB); \tag{5'}$$

e sarà questo (conforme al n.° 90) il *tempo proprio* che intercede fra i due eventi A, B, rispetto a un osservatore di cui la retta AB

sia la linea oraria, e coll'intesa di assumere l'unità di tempo in modo che sia 1 la velocità della luce nell'intorno dell'osservatore. Supposti in particolare A, B infinitamente vicini sopra una retta temporale, la loro distanza è data dall'elemento lineare:

$$(3'') \quad ds^2 = \frac{(tdt - xdx - ydy - zdz)^2 - (t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 1)(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{(t^2 - x^2 - y^2 - z^2 - 1)^2}.$$

E questo elemento si riduce appunto alla forma (3') di De Sitter colla trasformazione:

$$\mathrm{Th}\, \tau = t; \qquad \mathrm{tg}\, \theta = \frac{z}{y}; \qquad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \qquad \mathrm{tg}\, \varrho = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Per una retta spaziale, dovendo sostituire alla (5') la (5), il ds^2 è dato invece dal 2° membro della (3'') cambiato di segno: questo porta con sè che il ds e tutte le lunghezze finite su queste rette, perciò tutte le lunghezze finchè stiamo in un S_3 esterno all'assoluto, assumono in più un fattore $\sqrt{-1}$, e cambia perciò di segno, da -1 a $+1$, la curvatura che l'elemento lineare modificato impone alla V_4. Ora l'elemento lineare (3'') coincide, salvo il maggior numero di variabili e cambiamenti inessenziali nelle costanti, coll'elemento (3) o (4) del n.° 45 (Beltrami); vediamo così che l'Universo di De Sitter può rappresentarsi sulla regione di spazio S_4 euclideo esterna alla quadrica (4) in modo che le sue geodetiche abbiano per immagini punti di una retta di S_4. Punti di una retta spaziale rappresentano eventi contemporanei rispetto a un osservatore conveniente; le rette temporali sono linee orarie di punti in quiete, o che si muovono di moto libero. Il gruppo delle omografie che mutano in sè la quadrica (4) è ∞^{10}, e le leggi fisiche devono ora avere carattere invariante rispetto ad esso. Il sottogruppo ∞^6 che muta in sè, oltre la quadrica (4), anche un punto esterno ad essa (gruppo delle *rotazioni* intorno a questo punto) lascia pure invariato il cono (*isotropo*, reale) circoscritto da questo punto alla quadrica (se questo punto è l'origine, il cono $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$), e coincide col gruppo ∞^6 che si ha dal gruppo di Lorentz (n.° 89) fissando un punto proprio dell'S_4.

La particolarità essenziale dell'elemento lineare (3'') di De Sitter consiste in ciò: che il *tempo proprio* di un fenomeno (n.° 90), cioè, per un intervallo infinitesimo, il ds calcolato in un sistema di coordinate nel quale i due eventi estremi dell'intervallo siano coincidenti nello spazio, è $=\cos\varrho\cdot d\tau=dt$; perciò, rispetto al tempo proprio di un osservatore che possiamo supporre situato nel polo $\varrho=0$ (tempo proprio perciò $=d\tau$), il dt, cioè il tempo segnato da un orologio lontano connesso al fenomeno, appare rallentato, e tanto più rallentato quanto maggiore ne è la distanza ϱ dall'osservatore; al punto che l'orologio apparirebbe fermo per $\varrho=\frac{\pi}{2}$, cioè quando osservatore e orologio si trovino in punti reciproci rispetto all'assoluto. Si è creduto così, in un primo tempo, di poter spiegare mediante la forma stessa dell'Universo, cioè mediante un fatto geometrico, il fenomeno dello spostamento delle righe dello spettro verso il rosso, che presentano (in media) le stelle più lontane e specialmente le nebulose extragalattiche. E si è cercato a tale scopo come si presenti nell'Universo di De Sitter la formola dell'effetto Döppler (1).

Nella fisica classica, e anche nella teoria della relatività speciale, la velocità *radiale* (cioe di allontanamento o avvicinamento alla Terra) di una stella si valuta appunto mediante l'effetto Döppler. Invece secondo l'ipotesi di De Sitter lo spostamento osservato nelle righe dello spettro $\left(D=\frac{d\lambda}{\lambda}\right.$, dove λ è la lunghezza d'onda$\left.\right)$ dipende non soltanto dalla velocità radiale $\left(v_r=\frac{d\sigma}{d\tau}\right.$, dove σ è la distanza, in questo caso non euclidea, fra osservatore e stella, e τ il tempo proprio dell'osservatore$\left.\right)$ ma anche da σ. Calstelnuovo l. c. trova un'espressione di D, che egli semplifica in base a considerazioni sull'ordine di grandezza delle quantità che vi compaiono, e precisa ulteriormente in seguito alla riscontrata necessità di introdurre qualche ipotesi relativa al moto sistematico delle nebulose rispetto alla regione galattica, perchè il semplice effetto geometrico dovuto alla curvatura dello spazio non basta a spiegare che in minima parte il detto moto. Precisamente se, in conformità alle osservazioni, si introduce l'ipotesi che la velocità di allontanamento delle nebulose

(1) V. ancora SILBERSTEIN: *The size of the Universe*, Parts IV e V. Allo stesso argomento sono dedicati anche due lavori recenti di G. CASTELNUOVO: *L'Universo di De Sitter*, Rend. R. Acc. dei Lincei (6), vol. 12, 2° sem. 1930, p. 263; *De Sitter's Universe and the motion of Nebulae*, Monthly Notice of R. A. S., vol. XCI, June 1931, p. 829. Nel seguito mi riferisco principalmente a quest' ultimo lavoro.

sia proporzionale, presso a poco, alla distanza di queste dal sole, il Castelnuovo trova per l'effetto Döppler la formola:

$$D=\frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{\sigma}{R}+\frac{\sigma^2}{R^2},$$

dove σ è la distanza della nebulosa ed R il raggio di curvatura di uno spazio a tre dimensioni (ad es. $t=0$) esterno all'assoluto. Poichè per le nebulose a distanze dell'ordine di grandezza di 10^6 anni luce si trova D dell'ordine di $\frac{1}{2000}$, si ricava:

$$R=2\cdot 10^9 \text{ anni luce},$$

trascurando il termine $\frac{\sigma^2}{R^2}$ che risulta inferiore alla millesima parte del precedente. Si conclude perciò che, se nell'Universo di De Sitter con raggio di curvatura di $2\cdot 10^9$ anni luce la galassia e le nebulose extragalattiche si fossero staccate in epoca molto remota da un nucleo centrale, procedendo poi di moto libero attraverso lo spazio, noi riceveremmo dai loro movimenti le stesse impressioni che l'analisi spettrale ora ci rivela.

Si trova inoltre $\frac{\sigma}{R}=Ce^{\tau}$, dove C è una costante; e da questa relazione appare che σ si raddoppia quando τ, tempo dell'osservatore, aumenta di $\log \text{nat}\, 2=0{,}7$ circa (il tempo unità essendo ora quello che impiegherebbe la luce a percorrere una lunghezza eguale al raggio di curvatura R, supposto ch'essa si propaghi sempre colla velocità che ha in prossimità dell'osservatore). Il tempo all'uopo necessario risulta così $T=1{,}4\times 10^9$ anni.

Queste valutazioni numeriche di R e T coincidono con quelle che furono dedotte (da De Sitter, Eddington, Tolman) per i valori attuali di questi elementi nell'ipotesi di Friedmann-Lemaître, più conforme allo spirito della relatività generale, secondo la quale il raggio di curvatura dello spazio a 3 dimensioni sarebbe funzione crescente del tempo (1): cosa non priva d'importanza, in quanto quest'ultima ipotesi fa dipendere R da τ, quindi forma e dimensioni dell'Universo eventualmente anche dalla distribuzione della materia ivi contenuta.

---

(1) V. anche DE SITTER: *Kosmos, A course of six Lectures....*, Cambridge Mass., 1932, VI, p. 112 e seg.

BIBLIOGRAFIA

ELENCO DI ALCUNE MONOGRAFIE DI GEOMETRIA NON EUCLIDEA E DI ALTRE OPERE O ARTICOLI RIPETUTAMENTE CITATI

BARBARIN P. - *Études de géométrie analytique non euclidienne* (Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique, vol. LX, Bruxelles, 1900).

—— *La géométrie non euclidienne* (Collection « Scientia », n.° 15, Paris 1902; 3ª ediz., 1928).

BONOLA R. - *Sulla teoria delle parallele e sulle geometrie non euclidee* (Questioni riguardanti la geometria elementare, raccolte e coordinate da F. ENRIQUES, Bologna, 1900, pp. 143-222. Le edizioni successive delle « Questioni », più ampie, portano il titolo: « Questioni riguardanti le matematiche elementari »; 2ª ediz. in 2 vol., 1912; 3ª ediz. in 3 parti e 4 vol., 1923-1927. L'articolo Bonola si trova nella parte I di quest'ultima ediz., vol. 2° (1925), pp. 309-427. Verrà citato con « Parallele »).

—— *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo* (Bologna, 1906). Verrà citato con « GNE ».

COOLIDGE J. L. - *The elements of non euclidian geometry* (Oxford, 1909).

ENRIQUES F. - *Prinzipien der Geometrie* (Articolo III AB 1 in « Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen », Leipzig, 1907. Edizione francese con complementi, Paris-Leipzig, 1909). Verrà citato colla parola « Prinzipien ».

—— *Conferenze di geometria non euclidea*, per cura del Dott. O. FERNANDEZ (Bologna, 1918).

—— *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (v. sopra: BONOLA, Parallele). Verrà citato con « Questioni ».

FLYE S.te MARIE C. - *Études analytique sur la théorie des parallèles* (Paris, 1871).

FRISCHAUF J. - *Elemente der absoluten Geometrie* (Leipzig, 1876).

GÉRARD L. - *Sur la géométrie non euclidienne* (Thèse, Paris 1892).

HILBERT D. - *Grundlagen der Geometrie* (Berlin, 1899). Le edizioni successive (7ª ediz., 1930) contengono come appendici articoli vari sui fondamenti della geometria e della matematica in genere. Verrà citato con « Grundlagen ».

KILLING W. - *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig, 1885).

—— *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*, 2 vol. (Padeborn, 1893-1898).

KLEIN F. - *Nicht-euklidische Geometrie*, 2 vol. Vorlesungen 1889-1890, ausgearbeitet von F. Schilling; litogr., 2ter Abdruck, Göttingen, 1893. Verrà citato con « litogr. ».

—— *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, neu bearteitet von W. ROSEMANN (Berlin, 1928). Verrà citato con KLEIN-ROSEMANN.

LIEBMANN H. - *Nicht-euklidische Geometrie* (Sammlung Schubert, XLIX; Leipzig, 1905).

MOHRMANN H. - *Einführung in die nicht-euklidische Geometrie* (Leipzig, 1930).

SOMMERVILLE D. M. Y. - *The elements of non euclidian geometry* (London, 1918).

SCHILLING F. - *Projective und nicht-euklidische Geometrie*, 2 vol. (Leipzig, 1931).

—— *Die Pseudosphäre und die nicht-euklidische Geometrie*, I (ibid.), II (*Die geodetischen Kreise der Pseudosphäre und deren Umwelt*, 1935).

STÄCKEL P. u. ENGEL F. - *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss* (Leipzig, 1895). Verrà citato colla parola « Parallellinien ».

OPERE BIBLIOGRAFICHE SULLE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

BONOLA R. - *Bibliografia sui fondamenti della geometria, in relazione alla geometria non euclidea* (Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, 2 (1899), p. 1, 33, 81; 3 (1900), p. 2, 33, 70; 5 (1902), p. 33, 65).

—— *Index operum ad geometriam absolutam spectantium*, nel volume « Joannis Bolyai in Memoriam » (Claudiopoli, 1902).

HALSTED G. B. - *Bibliography of Hiperspace and non-euclidian geometry* (Amer. Journ. of. Math. 1 (1878), p. 261, 384; 2 (1879), p. 65).

SOMMERVILLE D. M. Y. - *Bibliography of non euclidian geometry* (inclusi fondamenti della geometria e iperspazi; London, 1911).

WOLFING E. - *Mathematischer Bücherschatz* (Leipzig, 1903), 1ter Teil, n.o 140-141, pp. 186-191.

INDICE

Capitolo I.

Introduzione. La teoria delle parallele fino alla metà del secolo XIX.

Capitolo II.

Indirizzo elementare.

§ 1. - Parallele e non secanti in un piano.

§ 2. - Geometria dello spazio. Elementi impropri e ideali.

Capitolo III.

Interpretazione della geometria iperbolica sulle superficie a curvatura costante negativa.

CAPITOLO IV.

Indirizzi differenziale e gruppale (Riemann e i suoi continuatori).

CAPITOLO V.

Indirizzo metrico-proiettivo.

§ 1. - Generalità. Forme di 1ª specie.

§ 2. - Metrica proiettiva nelle forme di 2ª specie.

§ 3. - **Metrica proiettiva dello spazio.**

CAPITOLO VI.

Applicazione alla teoria della relatività.

17702

BIBLIOTECA ★ R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE ★

Le figure 52 *a*, 52 *b*, 53 *a*, 53 *b*, 54 *a*, 54 *b*, 61, 66, 67 e 68 sono tolte da « KLEIN - ROSEMANN : *Vorlesungen über nicht - euklidische Geometrie* », Springer, 1928.

196688

BIBLIOTECA
Scuola Normale Superiore

LEGATORIA GENNARI
X 24 GEN. 2003 PI
P.S.SILVESTRO 6