delle potenze simili):

$$z_1^r + z_2^r + \ldots\ldots\ldots + z_n^r \quad (r \text{ intero positivo}).$$

E invero la funzione

$$\frac{z^r f'(z)}{f(z)-w}$$

entro il cerchio C ha poli del 1° ordine in $z_1, z_2, \ldots z_n$ coi residui $z_1^r, z_2^r \ldots z_n^r$, onde risulta

$$z_1^r + z_2^r + \ldots + z_n^r = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{z^r f'(z)}{f(z)-w}\,dz.$$

Il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di w nell'intorno di $w=0$

Capitolo VI

Funzioni uniformi in tutto il piano complesso. Loro sviluppi in serie di frazioni parziali secondo Cauchy - Teorema di Mittäg-Leffler. Sviluppi in prodotti infiniti per le trascendenti intere.

§ 57. Trascendenti intere - Procediamo ora allo studio ed alla classificazione delle funzioni analitiche uniformi esistenti in tutto il piano (su tutta la sfera complessa) e dimostriamo in primo luogo il teorema fondamentale:

« Ogni funzione analitica uniforme e non costante su tutta la sfera complessa deve avere almeno un punto singolare».

Nel caso contrario il suo modulo si manterrebbe su tutta la sfera inferiore ad una quantità fissa M. Descriviamo nel piano complesso, col centro nell'origine, un cerchio C di raggio R grande ad arbitrio; la nostra funzione $w(z)$ è quivi finita, continua e monodroma e però sviluppabile in una serie di potenze

$$w(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots + a_n z^n + \dots\dots$$

convergente in tutto il piano. Il coefficiente a_n è dato per la formola (5) del § 41 dall'integrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

esteso al contorno s del cerchio. Ora, per ipotesi, si ha sempre $|w|_s < M$ ed applicando la formola di Darboux ne deduciamo

$$|a_n| < \frac{M}{R^n},$$

e siccome, se $n > 0$, all'ingrandire di R il secondo membro tende a zero mentre il 1° ha un valore fisso, ne deduciamo

$$a_n = 0 \quad \text{per } n = 1, 2, 3 \dots\dots$$

e però $w(z) = a_0$, cioè costante contro l'ipotesi. Le funzioni uniformi in tutto il piano, avendo necessariamente qualche singolarità, potranno classificarsi a seconda del numero e della specie delle loro singolarità. Il caso più semplice sarà quello in cui si abbia una sola singolarità e questa sia in $z=\infty$, talchè in qualunque campo finito del piano la funzione sarà sempre finita, continua e monodroma. Allora $w(z)$ è sviluppabile in una serie

$$w(z) = \sum a_n z^n$$

convergente in tutto il piano e la singolarità in $z=\infty$ sarà polare od essenziale secondochè la serie si arresterà o no ad un polinomio. Nel secondo caso la funzione dicesi una trascendente intera e si indica con Weierstrass col simbolo $G(z)$. Abbiamo dunque il risultato:

«Una funzione uniforme in tutto il piano con un solo punto singolare in $z=\infty$ è un polinomio razionale intero in z, ovvero una trascendente intera $G(z)$ secondochè la singolarità è polare od essenziale».

Notiamo che dalla dimostrazione data del teorema fondamentale risulta che, fissato un numero positivo M grande a piacere, in qualunque intorno di $z=\infty$ una trascendente intera $G(z)$ assume anche dei valori di modulo $>M$. Nel caso particolare di un polinomio si può fare anzi l'intorno in guisa che tutti i valori della funzione abbiano modulo $>M$.

Fra le trascendenti intere ve ne sono alcune come e^z, $e^{\operatorname{sen} z}$

che non solo non diventano mai infinite a distanza finita, ma nemmeno si annullano. È facile vedere che l'espressione generale di una siffatta trascendente intera $G(z)$ sarà:

$$(1) \qquad G(z) = e^{G_1(z)},$$

dove $G_1(z)$ è, essa stessa, una trascendente intera. E infatti se $G(z)$ non si annulla mai la sua derivata logaritmica

$$\frac{G'(z)}{G(z)}$$

è una trascendente intera $G_2(z)$ e però integrando si ha

$$\log G(z) \overset{*}{=} \int^e G_2(z)\,dz = G_1(z)$$

e passando dai logaritmi ai numeri si ha appunto la (1).

§ 58. Punti singolari essenziali. Se la funzione $w(z)$ uniforme (in una certa area) ha nel punto $z=a$ una singolarità essenziale isolata essa può porsi, come sappiamo, nell'intorno del punto sotto la forma

$$w(z) = P(z-a) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

La serie discendente converge in tutto il piano, salvo in $z=a$, ed è quindi una trascendente in=

* La polidromia proveniente dal segno logaritmico è qui soltanto apparente perchè $G(z)$ non diventa mai nè zero nè infinita.

tera dell'argomento $\frac{1}{z-a}$, che inoltre si annulla pel valore 0 dell'argomento cioè per $z=\infty$. Indicando una tale trascendente intera col simbolo

$$g\left(\frac{1}{z-a}\right),$$

avremo dunque

$$(2) \qquad w(z) = \mathfrak{P}(z-a) + g\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

Da questa osservazione e da quando abbiamo detto al § prec^{te} relativamente alle trascendenti intere facilmente possiamo trarre una dimostrazione del teorema di Weierstrass: « In vicinanza di un punto singolare essenziale isolato, e per quanto piccolo intorno si prenda di esso, la funzione assume valori di modulo tanto grande quanto si vuole ed anche valori prossimi di tanto poco quanto si vuole ad una quantità finita A prefissata ad arbitrio. »

Che la $w(z)$ assuma in qualunque prossimità di $z=a$ anche valori di modulo più grande di qualunque quantità assegnata risulta subito dall'osservare che nel secondo membro della (2) per z prossimo ad a il primo termine $\mathfrak{P}(z-a)$ assume valori prossimi al termine iniziale della serie mentre $g\left(\frac{1}{z-a}\right)$ assume (§ 57) anche valori di modulo grande quanto si vuole. Per dimostrare poi la cosa anche pei valori finiti A si considei la funzione

$$(3) \qquad \frac{1}{w(z)-A}$$

che avrà in $z=a$ certamente una singolarità essenziale, la quale sarà inoltre isolata, se in prossimità di $z=a$ non si annullerà infinite volte la differenza $w(z)-A$. Ma in questo secondo caso sarebbe già provata la nostra asserzione, anzi non solo $w(z)$ si approssimerebbe quanto si vuole ad A ma assumerebbe effettivamente infinite volte il valore A. Nel primo caso poi, la singolarità essenziale $z=a$ per la funzione (3) essendo isolata, la funzione stessa deve prendere in qualsiasi intorno di a valori di modulo grande ad arbitrio o, ciò che è lo stesso, deve $w(z)$ accostarsi ad A di tanto poco quanto si vuole.

Questo teorema di Weierstrass fa già comprendere la profonda differenza che esiste fra una singolarità polare ed una essenziale. Picard ha precisato vieppiù questo risultato dimostrando che: «In vicinanza di un punto singolare essenziale la funzione non solo si accosta ma prende effettivamente infinite volte tutti i valori possibili fatta eccezione da due speciali valori al massimo.* »

Ritorneremo più tardi su questo teorema che però

* Cfr. gli esempi discussi al § 50.

ra enunciamo soltanto. Qui osserviamo ancora che il teorema di Weierstrass sussiste non solo per singolarità essenziali isolate, ma anche (ed a più forte ragione) per singolarità limite di infinite altre singolarità. (cfr. § 50)

§ 59 Funzioni uniformi con un numero finito di singolarità. Continuando nella classificazione delle funzioni uniformi in tutto il piano, consideriamo ora quelle che hanno in tutto il piano complesso un numero finito di singolarità. Le singolarità a distanza finita siano nei punti

$$a_1, a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_n; \quad (\infty)$$

potrà aversi ancora eventualmente nella funzione $w(z)$ una singolarità all'infinito. Nell'intorno di $z = a_1$ la funzione $w(z)$ si pone sotto la forma

$$w(z) = \mathfrak{P}(z-a_1) + g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right),$$

$W(z) = W_1(z) + g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$

$W_1(z) = W(z) - g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right)$

$W(z) = W_2(z) + g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + \ldots$

la $g_1(t)$ indicando una trascendente intera di t annullantesi per $t = 0$, ovvero un polinomio, secondo che la singolarità in $z = a_1$ è essenziale, o polare. Se poniamo

$$w(z) - g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) = w_1(z),$$

la $w_1(z)$ sarà regolare in $z = a_1$ ed avrà le rimanenti singolarità di $w(z)$. Procedendo nel medesimo modo sopra $w_1(z)$ avremo:

$$w_1(z) = w_2(z) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right)$$

e la $w(z)$ non avrà singolarità che in

$$z = a_3\,,\ a_4 \dots\dots a_n\,,\ (\infty)$$

Così procedendo troveremo

$$w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + f(z)$$

dove la $f(z)$ non avrà altra singolarità che in $z=\infty$, se pure esisteva in $w(z)$. La $f(z)$ si ridurrà quindi ad una costante, ovvero ad un polinomio o infine ad una trascendente intera $G(z)$. Includendo in questo ultimo caso generale gli altri due, scriveremo

$$(4)\quad w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \dots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + G(z).$$

Se le singolarità ~~saranno~~ soltanto polari, le funzioni $g_1\, g_2 \dots g_n$, G saranno altrettanti polinomi interi nei loro argomenti. E poichè una funzione uniforme su tutta la sfera e che non ha singolarità essenziali non può avere un numero infinito di singolarità polari ne concludiamo:

«Una funzione uniforme su tutta la sfera complessa e dotata soltanto di singolarità polari è una funzione razionale di z.» L'inversa è evidente.*

* Si noti come sopra l'espressione effettiva di una funzione razionale come quoziente di due polinomi si verifichi subito il teorema già dimostrato al §54 che una tale funzione diventa tante volte zero quante volte infinita.

Si osservi poi che la formola (4), applicata al caso attuale, dà precisamente quella decomposizione di una funzione razionale in frazioni parziali che si considera nell'algebra e si utilizza nel calcolo per l'integrazione delle funzioni razionali.
È evidente che dati ad arbitrio i punti in numero finito $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ ed assegnate ad arbitrio le trascendenti intere

$$g_1, g_2 \ldots\ldots\ldots\ldots g_n$$

si può costruire con la (4) una funzione uniforme in tutto il piano coi soli punti singolari a_1, $a_2, \ldots a_n$, nei quali si comporterà rispettivamente come le trascendenti intere

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right), g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) \ldots\ldots g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right).$$

Osserviamo in fine che applicando i ragionamenti superiori ad una funzione $w(z)$ uniforme non in tutto il piano ma solo in un'area data A, con un numero finito di punti singolari

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

nell'interno dell'area la $w(z)$ potrà porsi nell'area A sotto la forma

$$(5)\quad w(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right) + \ldots\ldots + g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + f(z)$$

la $f(z)$ essendo una funzione uniforme e regolare in tutta l'area A.

§ 60 Metodo di Cauchy per gli sviluppi

in serie di funzioni con infinite singolarità.

Passiamo ora a considerare le funzioni unifor=mi in tutto il piano e con un numero <u>infinito</u> di singolarità, le quali abbiano però come unico punto limite il punto $z=\infty$, tali cioè che in qualunque campo tutto situato a distanza finita capiti soltanto un numero finito di punti singolari (essenziali o polari) e soltanto cresca all'infinito questo numero ingrandendo all'infinito il campo.

Consideriamo un tale campo finito C racchiuso da un solo contorno (semplicemente connesso) supponendo peraltro che <u>sul contorno non vi sia alcun punto singolare</u> della nostra funzione $w(z)$. Nell'interno di C cadrà un numero finito di punti singolari

$$a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$$

e in tutto C potremo porre, secondo la (5), la $w(z)$ sotto la forma

$$(6) \qquad w(z) = \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + f(z)$$

ove $f(z)$ è regolare nei punti di C (contorno incluso). Prendiamo un punto z' interno a C ma distante dai punti singolari e cerchiamo di calcolare il valor di $\underline{w}$ in z' per mezzo dei valori di $\underline{w}$ al contorno $\underline{s}$ del campo, estendendo così la formola di Cauchy al caso attuale, ove si hanno internamente al campo singolarità. Alla $f(z)$ che è regolare in C, possiamo applicare la formola di Cauchy

$$f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(z)dz}{z-z'},$$

che per la (6) diventa

$$w(z') - \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z'-a_r}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)dz}{z-z'} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{r=n}\int_s \frac{1}{z-z'}\, g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)dz$$

Ora facilmente vediamo che ciascun integrale della somma del secondo membro

$$\int_s \frac{1}{z-z'}\, g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) dz$$

è nullo, poichè nella regione del piano esterna ad s la funzione sotto il segno

$$\frac{1}{z-z'}\, g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

è dappertutto regolare e in $z=\infty$ è infinitesima del 2º ordine almeno* onde il suo residuo è nullo. La formula precedente diventa quindi semplicemente:

$$(7)\quad w(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(z)dz}{z-z'} + \sum_{r=1}^{r=n} g_r\left(\frac{1}{z'-a_r}\right)$$

e non differisce dall'ordinaria formola di Cauchy che per la parte relativa alle singolarità.

Immaginiamo ora che il campo C ingrandisca all'infinito, passando per una serie discreta

---

* Si ricordi che la trascendente intera $G_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$ si annulla in $z=\infty$

di configurazioni in guisa che per ogni speciale configurazione il contorno s di C non contenga mai alcun punto singolare, ma del resto con legge arbitraria.

La formola (7) rimarrà sempre applicabile, purchè z' ~~non~~ coincida con un punto singolare a; soltanto il numero dei punti a che cadranno entro il campo, cioè il numero dei termini nella somma del secondo membro della (7), andrà sempre più crescendo.

Ora se la legge d'accrescimento del contorno è tale che, mantenendo z' entro un'area A finita arbitraria, l'integrale

$$\int_s \frac{w(z)dz}{z-z'}$$

converga equabilmente (in egual grado) verso zero, dalla (7), con passaggio al limite, otterremo la formola

$$(8) \qquad \boxed{w(z') = \sum_1^\infty g_r\left(\frac{1}{z'-a_r}\right)}$$

e la serie del 2° membro sarà, in ogni area finita A, convergente in egual grado, quando ne siano esclusi con piccoli intorni i punti singolari a. Così otteniamo per la funzione $w(z)$ uno sviluppo che vale in tutto il piano, a qualunque distanza finita, e ne pone in evidenza le singolarità, analogamente alla decomposizione in frazioni parziali di una funzione razionale. Si noti però che la convergenza della serie (8) sarà in generale subordinata all'ordine dei termini i quali dovranno essere raggruppati al modo stesso come entrano i punti singolari nel campo C crescente secondo la legge assegnata].

§ 61. Due casi particolari

Per le applicazioni, che dovremo fare nel seguito, di questo ~~processo~~ generale sono particolarmente importanti due casi in cui si riscontra effettivamente che si ha

$$(10) \quad \lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z-z'} = 0 \; *$$

1° Supponiamo che l'ingrandimento del contorno s proceda in guisa che tutti i suoi punti si allontanino all'infinito dall'origine e sul contorno via via crescente si mantenga sempre

$$|w(z)|_s < l ,$$

essendo l una quantità finita. Diciamo che allora: "basterà dimostrare che si ha

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} = 0$$

per esser sicuri che sussisterà la (10) e varrà quindi lo

* Scrivendo questa formola sottintendiamo che, variando z' in un'area qualunque finita, il limite deve essere preso per l'ingrandire infinito del contorno s e la convergenza a zero dell'integrale deve aver luogo equabilmente].

sviluppo in serie (8)».

Prendiamo ora un'area A comunque grande ma finita nella quale manterremo z', talchè $|z'|$ si manterrà inferiore ad una quantità finita K:

$$|z'| < K.$$

Da un certo punto in poi, movendosi z sul contorno s, risulterà per le ipotesi fatte

$$|z| > |z'| \quad ; \text{ cioè } \frac{|z'|}{|z|} < 1,$$

onde potremo sviluppare in serie $\frac{w(z)}{z-z'}$ così:

$$\frac{w(z)}{z-z'} = \frac{w(z)}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \frac{w(z)}{z^{n+1}}$$

ed avremo, a causa della convergenza in egual grado:

$$\int_s \frac{w(z)dz}{z-z'} = \int_s \frac{w(z)dz}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}}$$

Se dimostriamo che ingrandendo il contorno s, possiamo rendere

$$(11) \quad \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}} \right| < \varepsilon,$$

essendo ε una quantità comunque piccola sarà provata la nostra asserzione.

Ora si ha

$$(12) \left| \sum_{n=1}^{n=\infty} z'^n \int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} \left| z'^n \int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=1}^{n=\infty} K^n \left| \int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}} \right|.$$

Calcoliamo un limite superiore del modulo dell'integrale

$$\int_s \frac{w(z)dz}{z^{n+1}}$$

riportando alla sostituzio

ne

$$z = \frac{1}{\zeta} \qquad dz = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

il contorno grandissimo s ad un contorno piccolissimo σ, attorno all'origine ed applicando la formola di Darboux. Abbiamo:

$$\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}} = -\int_\sigma w\left(\frac{1}{\zeta}\right)\zeta^{n-1}\,d\zeta$$

e indicando con ρ la massima distanza dell'origine dai punti di σ e con λ il perimetro di σ risulta

$$\left|\int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq Q\rho^{n-1}\lambda,$$

onde la (12) diventa

$$\left|\sum_{n=1}^{n=\infty} z^n \int_s \frac{w(z)\,dz}{z^{n+1}}\right| \leq KQ\lambda\,\frac{1}{1-K\rho}$$

Siccome tanto ρ quanto λ convergono verso zero risulterà, da un certo punto in poi, soddisfatta la (11) c. d. d.

2° Supponiamo che il contorno s ingrandisca per forme circolari, col centro nell'origine, e sul contorno crescente del cerchio non solo $|w(z)|$ si mantenga finito, ma diventi, da un certo punto in poi, minore di qualunque quantità assegnabile. Dico che sarà allora soddisfatta la (10).

Per quanto abbiamo visto sopra basta provare che si ha

$$\lim \int_s \frac{w(z)\,dz}{z} = 0,$$

ciò che è un'immediata conseguenza della formola di Darboux e della nostra ipotesi.

Quest'ultimo risultato conduce ad applicare con una conveniente modificazione, il processo di sviluppo in serie anche nel caso in cui il modulo di $w(z)$ nel contorno crescente del cerchio, anzichè diminuire cresce all'infinito comparabilmente ad una potenza del raggio R, in guisa che per un valore sufficientemente grande del numero intero n risulti da un certo punto in poi $\left|\frac{w(z)}{z^n}\right|$ piccolo a piacere. Potremo allora applicare lo sviluppo alla funzione $\frac{w(z)}{z^n}$ e risulterà

$$w(z) = z^n \sum_1^\infty g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

Se sviluppiamo

$$z^n = \left[(z-a_r) + a_r\right]^n$$

per potenze di $z-a_r$ col binomio di Newton, vediamo che il prodotto

$$z^n g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

si converte in una nuova trascendente intera

$$g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right)$$

aumentata di un polinomio $P_{a_r}(z)$ di grado $n-1$ in z, onde avremo per $w(z)$ lo sviluppo

$$(13) \qquad w(z) = \sum^\infty \left\{ g'_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + P_{a_r}(z) \right\}.$$

L'aggiunta dei polinomii $P_{a_r}(z)$ nei singoli termini della serie a destra ha per effetto di assicurarne la convergenza, artificio che ritroveremo fra breve per stabilire il teorema di Mittäg-Leffler (§63)

§62 - Sviluppi in serie delle funzioni $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$; $\operatorname{cotg} z$ -

Applichiamo il processo generale descritto alle due funzioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z}, \ \operatorname{cotg} z ;$$ i cui punti singolari sono i punti

$$z_i = n\pi ,$$

percorrendo $\underline{n}$ i numeri interi, positivi e negativi; per l'una e per l'altra funzione la singolarità è polare del 1° ordine ed ha il residuo

$(-1)^n$ per $\frac{1}{\operatorname{sen} z}$; $+1$ per $\operatorname{cotg} z$, come risulta dalla regola della fine del paragrafo 51.

il residuo è il valore del ... della funzione ... Cfr. anche pag 229

La trascendente intera g_i si riduce qui rispettivamente a

$$\frac{(-1)^n}{z - n\pi} , \quad \frac{1}{z - n\pi} .$$

Per campo C, che dovremo poi ingrandire all'infinito, prendiamo il rettangolo racchiuso dalle rette

$$x = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi \quad ; y = \pm k ,$$

dove $\underline{m}$ è un numero intero positivo e $\underline{k}$ una costante qualunque; facendo crescere all'infinito sia $\underline{m}$ che $\underline{k}$, il contorno $\underline{s}$ si allontanerà in ogni senso all'infinito.

D'altra parte, posto:

$$z = x + iy$$

si ha

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen} z}\right| = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}} \;;\; \left|\operatorname{cotg} z\right| = \frac{\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}}$$

e si vede subito che i moduli delle due funzioni rimangono sempre inferiori ad una quantità fissa sul contorno crescente. Basterà dunque verificare (§ 61) che gli integrali

$$\int \frac{dz}{z \operatorname{sen} z} \;;\; \int \frac{\operatorname{cotg} z \, dz}{z}$$

estesi al contorno del rettangolo hanno per limite lo zero. Ora questi due integrali, a causa della simmetria del contorno rispetto all'origine e delle formole $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, $\operatorname{cotg}(-z) = -\operatorname{cotg} z$, sono assolutamente nulli il che prova quanto volevamo.*
Sono quindi applicabili i risultati del 1.° caso discusso al § precedente e poichè all'ingrandire del contorno i poli entrano due a due, associandosi ad ogni polo il suo simmetrico, avremo le formule

$$\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{(-1)^r}{z - r\pi}$$

$$\operatorname{cotg} z = \lim_{n=\infty} \sum_{-n}^{n} \frac{1}{z - r\pi} \,,$$

ovvero

$$(14) \quad \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{z + n\pi} \right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

* Allo stesso risultato si arriva anche subito calcolando la somma dei residui delle due funzioni sotto il segno nell'interno del rettangolo.

$$(15)\quad \operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{z-n\pi} + \frac{1}{z+n\pi}\right\} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}$$

e le serie del secondo membro in qualunque campo a distanza finita, da cui siano esclusi i poli, sono convergenti in egual grado. Derivando la (15) termine a termine come è lecito (§ 45), abbiamo l'altro sviluppo per $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 z}$:

$$(16)\quad \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{(z-n\pi)^2} + \frac{1}{(z+n\pi)^2}\right\}$$

Dalla (16) facendo $z = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$$

che si può scrivere

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

formula che ci dà la somma delle inverse dei quadrati dei numeri dispari.

D'altronde si ha:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

e la precedente si può scrivere

$$(17)\quad \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

risultato che dovremo applicare in seguito. Questo non è del resto che un caso particolare delle formule che dimostrano come il valore della serie

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots + \frac{1}{m^{2n}} + \dots$$

sta in rapporto commensurabile con π^{2n}, dipendente dai così detti <u>numeri di Bernoulli</u>. Stabiliamo rapidamente queste formole ricorrendo alla (51), che scriviamo moltiplicando per z

$$z \cot g z = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{2z^2}{z^2 - n^2\pi^2} = 1 - \sum_1^{\infty} \frac{2z^2}{n^2\pi^2} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}}$$

Per $|z| < \pi$ possiamo sviluppare il secondo membro in serie di potenze per z applicando la formula

$$\frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}} = \sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{z^{2r}}{n^{2r}\pi^{2r}}$$

e ricordando i risultati generali del § 46 pag 205

Otteniamo così

$$z \cot g z = 1 - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{S_{2n}}{\pi^{2n}} z^{2n}$$

e ponendo

$$B_n = \frac{2 S_{2n} \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)}{(2\pi)^{2n}}$$

potremo scrivere

$$z \cot g z = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n (2z)^{2n}}{2 \cdot 3 \ldots (2n)} .$$

Dall'identità che ne deriva

$$z\left(1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) = \left(z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right) \cdot \left(1 - \frac{B_1 (2z)^2}{2} - \frac{B_2 (2z)^4}{2.3.4} - \ldots\right)$$

paragonando dall'una parte e dall'altra i coefficienti delle medesime potenze di z si calcolano per via ricorrente i numeri di Bernoulli

$$B_1 \;,\; B_2 \;,\; B_3 \ldots\ldots$$

che sono tutti numeri razionali; i primi valori sono

$$B_1 = \frac{1}{6} \;;\; B_2 = \frac{1}{30} \;;\; B_3 = \frac{1}{42} \;;\; B_4 = \frac{1}{30} \ldots$$

§ 63 Teorema di Mittag-Leffler. — Noi

paragrafi precedenti abbiamo supposto data la funzione $w(z)$, uniforme in tutto il piano e con un numero finito di singolarità in ogni campo finito, e ne abbiamo cercato uno sviluppo in serie, che ne ponesse in evidenza le singolarità. Ora ci proponiamo il problema inverso e cioè supponiamo dato un insieme di punti isolati nel piano complesso; un tale insieme, per un teorema di Cantor, è sempre numerabile, cioè si possono ordinare i punti distribuendo loro per indici i numeri interi $1, 2, 3, \ldots n \ldots$
Per ciascuno di questi punti

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

supponiamo inoltre assegnata una trascendente intera corrispondente

$$g_1\left(\frac{1}{z-a_1}\right);\ g_2\left(\frac{1}{z-a_2}\right);\ \ldots\ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right);\ \ldots$$

affatto ad arbitrio e domandiamo:
«Esisterà e si potrà costruire una funzione uniforme $w(z)$ in tutto il piano e che nell'intorno di ciascun punto a_n dell'insieme si comporti come la trascendente intera assegnata $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ * e non abbia alcun'altra singolarità, salvo nei punti dell'insieme derivato?»

* In modo cioè che la differenza $w(z) - g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ sia regolare in a_n.

Dire che $W(z)$ si comporti nei punti a_n come G_n si precisa che la differenza $W(z) - g_n\left(\frac{1}{z-\ldots}\right)$ regolare nel punto a_n

La soluzione generale di questo problema è stata data da Mittäg-Leffler, il quale l'ha risoluto affermativamente per ogni insieme isolato*, costruendo effettivamente la funzione domandata. Questo risultato porta il nome di teorema di Mittäg-Leffler. Noi non ne studieremo qui che un caso particolare, il caso cioè che vi sia un unico punto limite del gruppo delle singolarità assegnate, e, senza alterare la generalità, potremo senz'altro supporre che quest'unico punto limite sia il punto $z=\infty$, cioè che in ogni campo finito cada un numero finito di punti $\underline{a}$, ma questo numero vada crescendo oltre ogni limite all'ingrandire del campo. Numereremo allora i punti $\underline{a}$ distribuendoli per ordine di modulo crescente e quelli che abbiano eventualmente lo stesso modulo per ordine di argomento crescente, talchè

$$|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \ldots\ldots$$

Supponiamo dapprima $|a_1| > 0$, cioè che il primo punto non cada nell'origine e quindi anche nessuno dei seguenti. La trascendente intera $g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$ dell'argomento $\frac{1}{z-a_n}$, nell'interno del cerchio C_n con centro nell'origine e di

---

* Sur la représentation analytique des fonctions uniformes - Acta Mathem. T. 4

raggio $= |a_n|$, è finita, continua e monodroma e però sviluppabile in serie di Taylor

$$(18)\quad g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) = \sum_{r=0}^{r=\infty} B_{n,r} z^r,$$

avente il cerchio C_n per cerchio di convergenza.
Ora prendiamo ad arbitrio una serie di numeri reali e positivi

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n \ldots\ldots$$

che assoggettiamo alla sola condizione di dar luogo ad una serie convergente

$$\sum \varepsilon_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n + \ldots\ldots$$

e fissiamo inoltre arbitrariamente una quantità positiva $\delta < |a_1|$. Nel cerchio C'_n concentrico ed interno a C_n e distante da C_n di δ la serie del secondo membro in (18) è convergente in ugual grado e però si può trovare un numero intero m_n tanto grande che per tutti i punti z in C'_n risulti

$$\left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) - \sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,r} z^r \right| < \varepsilon_n$$

Se poniamo

$$-\sum_{r=0}^{r=m_n} B_{n,r} z^r = P_{m_n}(z),$$

sarà $P_{m_n}(z)$ un polinomio di grado m_n in z e per ogni z interno a C'_n avremo:

$$(19)\quad \left| g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right| < \varepsilon_n .$$

Fissati così i numeri interi $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n \ldots,$

m_1 si ottiene considerando la trascendente intera g_1 che converge [illegible] tutto il piano tranne in a_1, [illegible] prendiamo a considerare la serie

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\}$$

e dimostriamo che in qualunque campo a distanza finita, dal quale siano esclusi i punti $\underline{a}$ che vi capitano, essa è convergente in egual grado e rappresenta la funzione cercata. Basta evidentemente considerare il caso di un campo circolare, grande quanto si vuole, col centro nell'origine. Sia C un tale cerchio di raggio R e siano

$$a_1, \ a_2, \ \ldots\ldots \ a_r$$

quei punti $\underline{a}$ (in numero finito) che distano dall'origine meno di $R+\delta$; scindiamo allora la nostra serie nella somma dei primi $\underline{r}$ termini e nella parte residua

$$(20) \sum_{n=r+1}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

della quale basterà mostrare la convergenza in egual grado in C. Poichè i punti

$$a_{r+1}, \ a_{r+2}, \ \ldots . \ a_n, \ \ldots\ldots$$

distano esternamente da C almeno di $\underline{\delta}$ a tutti i termini della (20) è applicabile la disuguaglianza (19) e quindi la serie dei moduli della (20) ha i termini inferiori a quelli della serie

$$\sum_{r+1}^{\infty} \varepsilon_n ,$$

che, per ipotesi, è convergente. Così è provata la convergenza in egual grado della serie (a) in qualunque campo finito (esclusi i punti $\underline{a}$).
Se poniamo

$$(21) \qquad w(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

sarà dunque $w(z)$ funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa $\underline{z}$ in tutto il piano, esclusi i punti $\underline{a}$. (cfr. §45). In questi punti si comporterà nel modo voluto poichè, se dalla serie del secondo membro in (21) togliamo il termine corrispondente a $z = a_r$, la serie rimanente è una funzione regolare nell'intorno di a_r ed in questo intorno si ha perciò:

$$w(z) = g_r\left(\frac{1}{z-a_r}\right) + \mathcal{P}(z-a_r).$$

Osserviamo poi che se avesse luogo il caso escluso, che cioè fra i punti singolari figurasse l'origine colla trascendente $g\left(\frac{1}{z}\right)$, basterebbe aggiungere questo termine alla (21), la quale possiamo dunque ritenere valga in tutti i casi.
Abbiamo così dimostrato il teorema di Mittag-Leffler costruendo <u>una</u> funzione uniforme $w(z)$ con tutte e sole le singolarità volute.
Ma evidentemente di tali funzioni ne esistono infinite differenti fra loro per trascendenti intere dell'argomento $\underline{z}$. L'espressione più gene

rale della funzione richiesta sarà dunque:

$$(22) \quad w(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ g_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right) + P_{m_n}(z) \right\},$$

designando $G(z)$ una trascendente intera arbitraria.

§ 64 Costruzione di una trascendente intera per prodotti infiniti

_ Una questione che si collega a quella risoluta nel § prec.te col teorema di Mittäg-Leffler, è di nommino re importanza, è quella di costruire una trascendente intera, noti che ne siano i punti e gli ordini d'infinitesimo. Ci proponiamo di stabilire il teorema fondamentale dovuto a Weierstrass.

« Dati ad arbitrio nel piano un numero infinito* di punti, che abbiano per punto limite il punto $z=\infty$, si può sempre costruire una trascendente intera che si annulli soltanto nei punti dati

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\ldots$$

con ordini corrispondenti assegnati pure ad arbitrio:

$$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n, \ldots\ldots\ »$$

Ricondurremo la costruzione della trascenden

* Il caso di un numero finito offre immediata risoluzione per mezzo di una ~~funzione~~ razionale intera.

te intera cercata al problema già risoluto nel paragrafo precedente mediante le seguenti considerazioni. Supponiamo che $G(z)$ sia una trascendente intera che soddisfi alle condizioni volute. La sua derivata logaritmica

$$w(z) = \frac{G'(z)}{G(z)}$$

sarà una funzione uniforme in tutto il piano che in tutti e soli i punti a_n avrà singolarità e precisamente poli del 1° ordine coi termini corrispondenti d'infinito

Vedi teorema dell' indicatore logaritmico

$$\frac{p_n}{z-a_n}.$$

$G(z) = e$ ... $G_1(z)$

Una tale funzione $w(z)$ esiste, pel teorema di Mittäg-Leffler, ed ha per espressione analitica

$$(23) \qquad w(z) = G_1(z) + \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{p_n}{z-a_n} + P_{m_n}(z) \right\},$$

dove $P_{m_n}(z)$ è un polinomio in z di grado conveniente m_n. La trascendente intera cercata, se esiste, dovrà dedursi per integrazione da $w(z)$. Moltiplicando i due membri della (23) per dz e integrando da 0 a z per un medesimo cammino che eviti i punti a_n, potremo eseguire nel secondo membro, a causa della convergenza in egual grado, l'integrazione termine a termine e otterremo:

$G_2(z)$ è la derivata logaritmica di $G(z)$ cioè l'integrale $G_1(z) \int G_2(z)dz$

$$\int_0^z w(z)\,dz = G_2(z) + \sum_1^\infty \left\{ p_n \log\left(1-\frac{z}{a_n}\right) + Q_{m_n}(z)\right\},$$

dove $Q_{m_n}(z)$ è il polinomio di grado m_n+1 in z che nasce integrando $P_{m_n}(z)$. Passando dai logaritmi ai numeri si ottiene:

$$e^{\int_0^z w(z)dz} = e^{G_2(z)} \cdot e^{\sum_1^\infty \left\{\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} + Q_{m_n}(z)\right\}},$$

ovvero

$$e^{\int_0^z w(z)dz} = e^{G_2(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} e^{Q_{m_n}(z)}\right\}.$$

La polidromia è sparita dai due membri e il prodotto infinito essendo convergente in egual grado in qualunque campo a distanza finita, inclusi ora anche i punti a_n dove si annulla dell'ordine p_n, vediamo che la trascendente cercata esiste ed è data dalla formula

$$(24) \quad G(z) = e^{G_1(z)} \cdot \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \cdot e^{Q_{m_n}(z)}\right\},$$

restando la trascendente intera $G_1(z)$ affatto arbitraria. Inversamente ogni trascendente intera che abbia gli infinitesimi dei punti a_n cogli ordini p_n è data dalla (24). Questo importantissimo risultato è dovuto a Weierstrass, il quale dette il nome di <u>fattori primari</u> ai fattori

$$\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{p_n} \cdot e^{Q_{m_n}(z)},$$

l'aggiunta dell'esponenziale $e^{Q_{m_n}(z)}$ avendo per effetto di assicurare la convergenza assoluta ed in egual grado del prodotto infinito.

Nella formula (24) è supposto che l'origine non debba essere un infinitesimo per $G(z)$, ma evidentemente, se vogliamo che $G(z)$ abbia in $z=0$ un infinitesimo d'ordine r, basterà far precedere nella (24) al prodotto infinito il fattore z^r.

Dall'esistenza di una trascendente intera con infinitesimi assegnati ad arbitrio si può trarre con Weierstrass un'importante conseguenza.

Sia $w(z)$ una funzione uniforme in tutto il piano e senza singolarità essenziali a distanza finita. Le sue singolarità polari formeranno un gruppo di punti coll'unico punto limite $z=\infty$; siano:

$$a_1\,,\ a_2 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

questi poli e

$$p_1\,,\ p_2 \ldots\ldots p_n \ldots\ldots$$

i loro rispettivi ordini. Costruiamo la trascendente intera $G(z)$ che diviene infinitesima nei punti a_i dei medesimi ordini p_i. Il prodotto $w(z).G(z)$ è uniforme e senza singolarità nè essenziali nè polari a distanza finita e però è una trascendente intera. Abbiamo dunque il teorema:

« Ogni funzione uniforme in tutto il piano, che non abbia singolarità essenziali a distanza finita, è il quoziente di due trascendenti intere. »

Come corollario ne segue che una tale funzione può sempre esprimersi analiticamente come quoziente di due prodotti infiniti della forma (24).

§ 65 Forma degli esponenti $Q_{m_n}(z)$ – Consideriamo ora più da vicino il modo di formazione dei polinomii $Q_{m_n}(z)$, che figurano come esponenti nei fattori della (24). Il polinomio derivato $P_{m_n}(z)$ consta, secondo il § 63, dei primi m_n+1 termini dello sviluppo per potenze di $\underline{z}$ dell'espressione

$$-\frac{p_n}{z-a_n}=p_n\left\{\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\frac{z^2}{a_n^3}+\cdots\right\};$$

si ha cioè

$$P_{m_n}(z)=p_n\left\{\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\frac{z^2}{a_n^3}+\cdots+\frac{z^{m_n}}{a_n^{m_n+1}}\right\}$$

dove i numeri m_n debbono esser fissati in guisa che la serie

$$\sum\left\{\frac{p_n}{z-a_n}+P_{m_n}(z)\right\}=\sum_n\frac{p_n z^{m_n+1}}{a_n^{m_n+2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a_n}}$$

in ogni campo finito, dal quale siano esclusi i punti a, converga in egual grado.

Poniamo per abbreviare:

$$m_n + 2 = r_n$$

e risulterà

$$Q_{m_n}(z) = p_n \left\{ \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \frac{z^3}{3a_n^3} + \cdots + \frac{z^{r_n-1}}{(r_n-1)a_n^{r_n-1}} \right\}$$

dove i numeri r_n debbono essere determinati in guisa da assicurare la convergenza in egual grado della serie

$$(25) \qquad \sum \frac{p_n z^{r_n-1}}{a_n^{r_n}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{a_n}}$$

e la formula (24) si scrive allora così:

$$(26) \qquad G(z) = e^{G_1(z)} \cdot \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^{r_n-1}}{(r_n-1)a_n^{r_n-1}}} \right\}^{p_n}.$$

Che i numeri r_n siano sempre determinabili nel modo richiesto risulta dalla dimostrazione, data al § 63, del teorema di Mittäg-Leffler. Questi numeri r_n saranno in generale variabili coll'indice n e nulla sappiamo in generale della loro determinazione effettiva. Però si ha un caso molto importante e ancora di grande generalità, nel quale si possono prendere tutti i numeri r_n eguali ad un numero fisso r, talchè l'esponente di e nei fattori primari (26) ha il grado fisso $r-1$. Ciò avviene quando sono sodisfatte le condizioni seguenti:

1° Gli ordini $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n \ldots\ldots$ d'infinitesimo rimangano tutti inferiori ad un numero fisso

2° La serie $\sum \frac{1}{|a_n|^r}$ risulti convergente.*
In tal caso infatti se prendiamo $r_n = r$ e facciamo variare z in un campo finito dal quale siano esclusi i punti a_n, la serie dei moduli della (25):

$$\sum \frac{p_n |z|^{r-1}}{\left|1 - \frac{z}{a_n}\right|} \cdot \frac{1}{|a_n|^r}$$

si ottiene dalla serie convergente (per ipotesi) $\sum \frac{1}{|a_n|^r}$ moltiplicando i termini di questa per quantità che si mantengono inferiori ad una quantità fissa.
Abbiamo dunque il teorema:
«Se la trascendente intera $G(z)$ ha gli infinitesimi

$$a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$$

di ordini

$$p_1, p_2, \ldots p_n \ldots$$

non crescenti all'infinito, e la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r},$$

per un conveniente valore intero positivo di r, converge, la $G(z)$ si può sviluppare in prodotto infinito, convergente assolutamente ed in ugual grado, con la formula

$$(27) \quad G(z) = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2a_n^2} + \cdots + \frac{z^{r-1}}{(r-1)a_n^{r-1}}} \right\}^{p_n}$$

§ 66. Genere delle trascendenti inte=

* Si noti che la prima condizione necessaria per la convergenza: $\lim \frac{1}{|a_n|^r} = 0$ è soddisfatta (con qualunque r positivo)

re - Esempî - Γ Euleriana - Le trascendenti intere che soddisfano alle condizioni del teorema precedente si classificano, secondo Laguerre, in generi dipendentemente dal minimo esponente intero r che rende la serie

$$\sum \frac{1}{|a_n|^r}$$

convergente; una tale trascendente intera si dice di genere $r-1$.

Prendiamo p.e. la funzione

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}$$

che ha infinitesimi del prim' ordine nei punti $x = \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \pm 3\,;\ \ldots\ldots$

Siccome la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente qui abbiamo $r = 2$ e la trascendente intera è quindi di primo genere. Il suo sviluppo in prodotto infinito sarà dato per la (27) da:

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

dove nel prodotto infinito n percorre tutti gli interi positivi e negativi, zero escluso.

Riunendo i fattori corrispondenti a valori opposti di n si può scrivere

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = e^{G_1(z)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Per trovare qui l'effettivo valore di $G_1(z)$, basta derivare logaritmicamente questa formula e confrontarla con la (15) (§62) ove si cangi z in πz; si ottiene così $G_1' = 0$ cioè $G_1 = \text{cost}^{te}$ e la formula precedente dimostra subito che $G_1 = 0$. Si ottiene così la formula di Eulero:

$$(27^*) \quad \operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Come esempio di costruzione di una nuova trascendente intera, cerchiamo una tale trascendente che abbia i suoi infinitesimi del 1° ordine nei punti

$$z = 0, -1, -2, -3, \ldots -n, \ldots$$

Poichè la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente avremo immediatamente l'espressione analitica di una tale funzione nel prodotto infinito

$$G(z) = e^{G_1(z)} z \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Prendiamo $G_1(z) = cz$, dove c indica una costante, ed avremo:

$$G(z) = e^{cz} z \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

Fissiamo anche la costante c determinandola in guisa che sia reale e renda $G(1) = 1$. L'inversa della funzione $G(z)$ è la funzione gamma Euleriana $\Gamma(z)$ sicchè

$$(28) \quad \frac{1}{\Gamma(z)} = e^{cz} z \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}};$$

essa è uniforme in tutto il piano ed ha soltanto singolarità polari del 1° ordine nei punti

$$z = 0, -1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$$

La costante c prende il nome di <u>costante di Ma</u>

scheroni. Dalla condizione

$$e^{-C} = \prod_1^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}$$

risulta per C anche la definizione:

$$C = \lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right),$$

il valore approssimato di C è

$$C = 0,5772156649 01 \ldots\ldots$$

Possiamo scrivere la (28) così:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n=\infty} \left\{ e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)} z . \prod_{k=1}^{k=n} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right\} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{n^z} \right\}$$

e si ha la formola di Gauss

$$(29) \quad \Gamma(z) = \lim_{n=\infty} \frac{n^z}{z(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)} \quad *$$

Da questa espressione di $\Gamma(z)$ risulta subito dimostrata la 1.ª proprietà fondamentale di $\Gamma(z)$ espressa dalla formula

$$(30) \quad \Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z).$$

Da questa, e dall'essere $\Gamma(1) = 1$ segue che per un valore intero e positivo m dell'argomento la Γ euleriana assume il valore

$$\Gamma(m) = 1.2.3\dots(m-1).$$

Dalla (30) e dalla (28) risulta

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod_1 \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

e, cangiando z in $-z$:

---

* Pel simbolo n^z s'intende, senza ambiguità $e^{z \log n}$, ($\log n$ in senso aritmetico)

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = e^{-Cz}\prod_1^\infty \left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}},$$

da cui moltiplicando si ottiene per la formola (27*) d'Eulero:

$$\Gamma(1+z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\operatorname{sen}\pi z},$$

ossia per la (30)

$$(31)\quad \Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi z},$$

formola che ci esprime la seconda proprietà fondamentale della Γ euleriana.

§ 67. Caso in cui le distanze fra i punti d'infinitesimo si mantengono superiori a una quantità fissa. Ritorniamo ora al Teorema in fine al § 65 per segnalarne un caso particolare notevole, il caso in cui la distanza fra due punti qualunque d'infinitesimo

$$a_1,\ a_2, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$$

si mantiene sempre superiore ad una quantità fissa d. In tal caso dimostriamo che la serie

$$(32)\quad \sum \frac{1}{|a_n|^3}$$

è convergente.

Se sarà quindi soddisfatta l'altra condizione che gli ordini d'infinitesimo non vadano crescendo oltre ogni limite, il prodotto infinito

$$\prod_1^\infty \left\{\left(1+\frac{z}{a_n}\right)e^{-\frac{z}{a_n}+\frac{z^2}{2a_n^2}}\right\}^{p_n}$$

convergerà e rappresenterà la funzione cercata

La convergenza della serie (32) si prova facilmente colle considerazioni seguenti.
Mediante le rette parallele agli assi di equazioni

$$x = m\frac{d}{\sqrt{2}}\,;\quad y = n\frac{d}{\sqrt{2}}\,,$$

dove m; n percorrono tutti i valori interi positivi e negativi dividiamo il piano in una rete di quadrati di diagonale $= d$; di modo che in uno dei quadrati cadrà al massimo uno dei punti a. Dalla serie (32) togliamo quei termini, in numero di quattro al più, che corrispondono a punti a situati in uno dei quattro quadrati attorno all'origine e cangiamo tutti gli altri termini in termini più grandi sostituendo ad ogni punto a, il vertice più prossimo all'origine del quadrato in cui si trova a. Provata la convergenza della nuova serie sarà, a più forte ragione, dimostrata per la (32). Tutto si riduce quindi a dimostrare la convergenza della serie doppia

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{1}{\left\{(m^2+n^2)\frac{d^2}{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

ossia la convergenza della serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}\,,$$

dove nella sommazione s'intende esclusa la combinazione $m=0, n=0$. Ora in questa serie la somma dei termini in cui $m=\pm n$ forma la serie convergente

$$4\sum_1^\infty \frac{1}{(2n^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$$

e gli altri si riuniscono nella serie doppia

$$S = 4\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

escluse le combinazioni $m=n$. Ma questa può scriversi anche

$$S = 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e poichè, essendo

$$\frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^3} \quad (n=1,2,\dots m-1),$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{1}{(m^2+n^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{m^2},$$

risulterà

$$S < 8\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Dunque S è convergente come si era asserito.

Capitolo VII°

Funzioni analitiche di più variabili complesse. Funzioni implicite. Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche.

§68. Funzioni regolari di due variabili complesse.

I principî della teoria delle funzioni di una variabile complessa, in particolare il concetto di funzione analitica si possono estendere al caso di funzioni di più variabili complesse, come ci proponiamo ora di dimostrare in tutta brevità. Per semplicità di linguaggio ci limitiamo al caso di due variabili complesse; ma si vedrà immediatamente che le considerazioni si applicano al caso generale di n variabili complesse.

Siano

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 \quad ; \; z_2 = x_2 + i\, y_2$$

due variabili complesse i cui indici si muovono nel rispettivo piano complesso illimitatamente, ovvero entro campi finiti corrispondenti $C_1\, C_2$. Supponiamo che la variabile complessa w dipenda da z_1, z_2 in guisa che per qualsiasi coppia di valori (z_1, z_2) appartenente ai campi (C_1, C_2) la w ammetta un valore e, considerata come funzione delle quattro variabili reali

$$x_1, y_1 \; ; \; x_2, y_2 \, ,$$

sia una funzione finita, continua (o ad un sol valore) e possegga derivate prime pure finite e continue e soddisfacenti alle condizioni di monogeneità:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y_1} \; ; \; \frac{\partial w}{\partial x_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y_2} \qquad (*)$$

(*) v. nota pag. seg.

In tal caso diremo che la $\underline{w}$ è nel campo $(C_1\, C_2)$ una funzione regolare delle due variabili complesse z_1, z_2 e scriveremo

$$w = f(z_1, z_2).$$

È chiaro che per ogni valore fissato di z_2 interno a C_2 la $\underline{w}$ sarà in C_1 una funzione dappertutto regolare di $\underline{z}_1$ e analogamente scambiando z_1 con z_2. Sia ora (z_1', z_2') una coppia di valori per z_1, z_2 interna al campo $(C_1\, C_2)$. Col centro in z_1' descriviamo nel piano complesso $\underline{z}$ un cerchio Γ_1 tutto interno a C_1 e similmente nel piano complesso $\underline{z}_2$, col centro in z_2', un cerchio Γ_2 interno a C_2. Se con $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ indichiamo una coppia di valori variabile entro $(\Gamma_1\, \Gamma_2)$ la funzione

$$f(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$$

tenendo fisso $\bar{z}_2$ e variabile $\bar{z}_1$ è dentro Γ_1 una funzione finita, continua e monodroma e però scindendo w nella sua parte reale ed immaginaria: $w = u + iv$, si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial v}{\partial y_1} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y_1} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{\partial v}{\partial y_2} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y_2} = -\dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{cases}$$

dalle quali si trae che $\underline{u}$ deve verificare simultaneamente le quattro equazioni

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial y_2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0 .$$

* v. pag. preced.

luppabile in serie di potenze di $\bar{z}_1 - z_1'$; si avrà:

$$(1) \qquad f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b_n (\bar{z}_1 - z_1')^n,$$

dove v. pag. 185

$$(2) \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_1} \frac{f(z_1, \bar{z}_2)\, dz_1}{(z_1 - z_1')^{n+1}},$$

avendo indicato con s_1 il contorno di Γ_1.

D'altronde, pel modo in cui $\bar{z}_2$ figura in b_n, si vede che b_n è funzione finita, continua e monodroma di $\bar{z}_2$ entro Γ_2 e però si potrà sviluppare in serie di potenze di $\bar{z}_2 - z_2'$ con la formula:

$$(3) \qquad b_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} a_{m,n} (\bar{z}_2 - z_2')^m$$

dove sarà

$$(4) \qquad a_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_2} \frac{b_n\, dz_2}{(z_2 - z_2')^{m+1}}$$

s_2 contorno di Γ_2'

e quindi, per la (2):

$$(5) \qquad a_{m,n} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{s_2} \frac{dz_2}{(z_2 - z_2')^{m+1}} \int_{s_1} \frac{dz_1}{(z_1 - z_1')^{n+1}}.$$

Sostituendo nella (1) per b_n il valore dato dalla (3) e osservando che, la convergenza delle nostre serie essendo assoluta, si possono ordinare i termini della serie doppia risultante come si vuole, si potrà scrivere:

$$(6) \qquad f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) = \sum_m \sum_n a_{m,n} (\bar{z}_1 - z_1')^n (\bar{z}_2 - z_2')^m$$

Abbiamo dunque il teorema: « Se, variando z_1, z_2 entro rispettivi cerchi Γ_1, Γ_2 di centri z_1', z_2', la funzione $f(z_1, z_2)$ è funzione finita continua e ad un sol valore delle variabili complesse z_1, z_2, essa è sviluppabile in una serie doppia di potenze intere e positive dei binomî

$$z_1 - z_1' \,,\ z_2 - z_2'$$

convergente assolutamente in tutto il campo ».

§69. **Serie di potenze.** L'inversione del teorema precedente si fa con somma facilità ricorrendo alle proprietà delle serie ~~di potenze~~ di più variabili, che sono affatto analoghe a quelle dimostrate nel Cap I (§§ 3,4 pagg. 14. ss) per le serie di potenze di una variabile. Per semplicità facendo $z_1' = z_2' = 0$, consideriamo una serie di potenze di due variabili z_1, z_2

$$(7) \quad P(z_1, z_2) = \sum\sum a_{m,n} z_1^m z_2^n$$

e supponiamo che per una coppia di valori

$$z_1 = z_1^{(0)} \,,\ z_2 = z_2^{(0)},$$

nessuno dei quali sia nullo, la serie converga. Fissiamo due valori positivi r_1, r_2 tali che

$$r_1 < |z_1^{(0)}| \ ; \ r_2 < |z_2^{(0)}|,$$

ma che siano del resto prossimi a $|z_1^{(0)}|, |z_1^{(0)}|$ rispettivamente tanto ~~poco~~ quanto si vuole. Sussiste allora il teorema fondamentale (cfr. pag 15): « La serie $\sum\sum a_{m,n} z_1^m z_2^n$ per tutti i valori di z_1, z_2 che soddisfano le condizioni

$$|z_1| \leq r_1 \,,\ |z_2| \leq r_2$$

è convergente assolutamente ed in egual grado »

Per ipotesi la serie

$$\sum\sum a_{m,n} z_1^{(0)^m} z_2^{(0)^n}$$

è convergente e però

$$\lim_{m,n=\infty} |a_{m,n}|\,|z_1^{(0)}|^m\,|z_2^{(0)}|^n = 0,$$

onde segue che possiamo fissare una quantità positiva g abbastanza grande perchè si abbia per ogni coppia di valori di m, n

$$|a_{m,n}|\,|z_1^{(0)}|^m\,|z_2^{(0)}|^n < g$$

Prendiamo la serie dei moduli della proposta (7):

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} |a_{m,n} z_1^m z_2^n|$$

e consideriamo il resto a partire da valori

$$m \geq m_1 \;,\; n \geq n_1$$

abbastanza elevati

$$R_{m_1,n_1} = \sum_{m=m_1}^{m=\infty}\sum_{n=n_1}^{n=\infty} |a_{m,n}|\,|z_1|^m\,|z_2|^n.$$

Scrivendo

$$|a_{m,n}|\,|z_1|^m\,|z_2|^n = |a_{m,n}|\,|z_1^{(0)}|^m\,|z_2^{(0)}|^n \left|\frac{z_1}{z_1^{(0)}}\right|^m \left|\frac{z_2}{z_2^{(0)}}\right|^n,$$

e posto

$$\frac{r_1}{|z_1^{(0)}|} = \zeta_1 \quad , \quad \frac{r_2}{|z_2^{(0)}|} = \zeta_2 \,,$$

avremo

$$|a_{m,n}|\,|z_1|^m\,|z_2|^n < g\,\zeta_1^m \zeta_2^n$$

e però

$$R_{m_1,n_1} < g\,\zeta_1^{m_1}\zeta_2^{n_1} \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty} \zeta_1^m \zeta_2^n.$$

Siccome ζ_1, ζ_2 sono quantità positive < 1, potremo scrivere:

$$R_{m_1,n_1} < g\,\zeta_1^{m_1}\zeta_2^{n_1+1}\,\frac{1}{1-\zeta_1}\cdot\frac{1}{1-\zeta_2},$$

onde si vede che, presi m_1, n_1 sufficientemente grandi, il resto R_{m_1,n_1} si potrà rendere minore di qualunque quantità prefissata ε, per tutti i valori

$$|z_1| \leqq r_1, \quad |z_2| \leqq r_2,$$

ciò che dimostra il teorema.

Da questo teorema fondamentale si traggono, come è chiaro, conseguenze affatto simili a quelle del Cap. I per le funzioni di una sola variabile, in particolare il teorema:

« Se la serie di potenze $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ converge per una coppia di valori $z_1^{(0)}\, z_2^{(0)}$ delle variabili di moduli $|z_1^{(0)}|>0$, $|z_2^{(0)}|>0$, tracciando nei rispettivi piani z_1, z_2 due circoli C_1, C_2 coi centri in $z_1=0$, $z_2=0$ in guisa che lascino all'esterno i punti $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)}$, la serie $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$, muovendosi z_1, z_2 entro C_1, C_2, convergerà in egual grado e rappresenterà nel campo (C_1, C_2) una funzione finita, continua e monodroma delle due variabili complesse z_1, z_2 »

§ 70. Campo ristretto di convergenza - Prolungamento analitico.

La delimitazione del <u>vero</u> campo di convergenza di una serie di potenze a più variabili dipende, come Weierstrass ha dimostrato*, da una disuguaglianza:

---

* Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen. (Lezioni manoscritte)

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) < 0,$$

cui debbono soddisfare i moduli

$$\rho_1 = |z_1| \ , \ \rho_2 = |z_2|$$

delle variabili. Senza entrare in queste ricerche generali, che non occorrono al nostro scopo, ci basterà qui definire quello che Weierstrass chiama <u>il campo ristretto</u> di convergenza di una serie di potenze $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$, nel modo seguente. Distinguiamo i numeri positivi ρ in due classi e diciamo della 1ª classe A) ogni numero ρ tale che per

$$|z_1| < \rho \ , \ |z_2| < \rho$$

la serie converga; della seconda classe B) ogni numero tale che per

$$|z_1| > \rho, \ |z_2| > \rho$$

la serie diverga. Come al § 3 (pag 18) risulta che esiste un numero limite R, che separa le due classi, sicchè la serie $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ converge per tutti i valori z_1, z_2 che siano <u>simultaneamente</u> di modulo $< R$ e diverge per valori i cui moduli superino <u>simultaneamente</u> R. Ma naturalmente può la serie convergere anche per valori z_1, z_2 tali che $|z_1| > R$, $|z_2| < R$ e divergere per $|z_1| < R$ con $|z_2| > R$. Allora se nei piani z_1, z_2, coi centri nelle origini, tracciamo due circoli C_1, C_2 di raggio R, per ogni coppia (z_1, z_2) i cui indici cadano simultaneamente nel l'interno dei circoli la serie converge, e diverge invece se tutti due gl'indici cadono all'esterno. Il campo (C_1, C_2) è quello che Weierstrass chiama il campo ristretto di convergenza.

Diciamo ora brevemente del prolungamento analitico di una serie di potenze $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$. Prendiamo una coppia di punti (a_1, a_2) nell'interno del campo di convergenza e sia $\underline{r}$ la più piccola delle due distanze di a_1, a_2 dal rispettivo contorno. Le descriviamo coi centri in a_1, a_2 due circoli $\Gamma_1\ \Gamma_2$ di raggio $= r$ questi rimangono nell'interno rispettivamente di (C_1, C_2) e possiamo quindi (§ 68) convertire la serie $\mathfrak{P}(z_1, z_2)$ in una nuova serie:

$$\mathfrak{P}(z_1 - a_1,\ z_2 - a_2);$$

il raggio del campo ristretto di convergenza per questa nuova serie è <u>almeno</u> $= r$; ma può anche essere maggiore. In quest'ultimo caso la funzione è prolungata analiticamente al di là del primitivo campo di convergenza. Dopo ciò s'intende subito come il concetto di <u>funzione analitica</u>, che abbiamo ~~br~~ sviluppato al § 43 pel caso di una sola variabile, sia estendibile anche nel campo di più variabili complesse.

§ 71. Radici di un'equazione $f(w, z) = 0$.

Sia:

$$f(w,z) = \sum\sum a_{m,n} w^m z^n$$

una serie di potenze delle due variabili w, z, di cui indichiamo con R il raggio del campo ristretto C di convergenza. Poniamo fra w e z la relazione

$$(8) \qquad f(w,z) = 0,$$

e domandiamo se ed in quale senso potremo dire che $\underline{w}$ viene così definita come funzione analitica implicita della z. Un caso particolare è già stato risoluto al § 56 coll'inversione delle serie, e con un metodo analogo possiamo ora risolvere la questione generale.

Supponiamo di conoscere una coppia particolare di valori w_0, z_0, che soddisfano la (8), e facciamo, senz'altro, come è lecito

$$w_0 = 0, \quad z_0 = 0,$$

sicchè, per ipotesi: $f(0,0) = 0$.

La funzione $f(w,0)$ è una funzione regolare di w entro C e s'annulla per $w=0$; ma noi supponiamo naturalmente che non sia identicamente $f(w,0)=0$*. Questa funzione

$$R(w) = f(w,0)$$

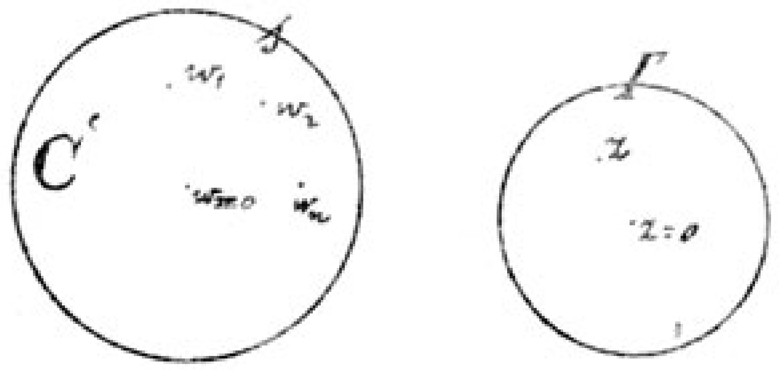
avrà dunque in $w=0$ un infinitesimo il cui ordine diciamo $\underline{n}$; allora per $z=0$ l'equazione

* In tal caso in tutti i termini di $f(w,z)$ comparirebbe una potenza di $\underline{z}$ che si potrebbe sopprimere in precedenza

$f(w,z)=0$ ha una radice nulla $w=0$ multipla dell'ordine n. Ora ci proponiamo di dimostrare che: «per z prossimo a zero l'equazione $f(w,0)$ avrà n radici

$$w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$$

prossime a zero».
Dimostreremo il nostro teorema e ne preciseremo il senso con le considerazioni seguenti.



Cominciamo dal descrivere nel piano w un cerchio C' di raggio ρ concentrico a C e più piccolo in guisa che $F(w)=f(w,0)$ non si annulli nell'area circolare C' nè sul suo contorno s, eccetto naturalmente che in $w=0$. Su tutto il contorno s la funzione $f(w_s,0)$ avrà il modulo discosto da zero e supponiamo che sia sempre

$$(9) \qquad |f(w_s,0)| > g$$

essendo g una quantità finita. Mostriamo in primo luogo che si può descrivere nel piano z col centro in $z=0$ un cerchio Γ di raggio r abbastanza piccolo perchè si abbia sempre

$$(10) \qquad |f(w_s,z)-f(w_s,0)| < g$$

per $|z| \le r$ e w_s essendo dovunque sul contorno s.

Variando w, z colle limitazioni

$$|w| \leq \rho\ ,\quad |z| \leq \rho$$

la serie $f(w, z)$ è convergente in egual grado e però possiamo decomporla in una parte finita $P(w, z)$ (un polinomio) ed un resto $R(w, z)$:

$$f(w, z) = P(w, z) + R(w, z)\ ,$$

tale che sia per tutti i valori di w, z di modulo non superiore a ρ

$$|R(w, z)| < \frac{1}{3} g$$

Ora

$$\begin{cases} f(w_1, z) = P(w_1, z) + R(w_1, z) \\ f(w_1, 0) = P(w_1, 0) + R(w_1, 0)\ , \end{cases}$$

e perciò

$$\left| f(w_1, z) - f(w_1, 0) \right| < \left| P(w_1, z) - P(w_1, 0) \right| + \frac{2}{3} g$$

La differenza

$$P(w_1, z) - P(w_1, 0)$$

è un polinomio in z che si annulla per $z = 0$ e i cui coefficienti pur variando w_1 sul contorno di C' non superano col modulo una quantità fissa. Possiamo dunque prendere z così piccolo che sia sempre

$$\left| P(w_1, z) - P(w_1, 0) \right| < \frac{1}{3} g \quad \text{per } |z| \leq r$$

e troveremo così sempre verificata la (10) come si voleva.

Ciò premesso, dimostriamo che: « fissato un valone $\bar{z}$ di modulo $|\bar{z}| \leq r$ l'equazione $f(w, \bar{z}) = 0$ avrà precisamente n radici w_1 w_2 ...... w_n entro il circolo C', cioè di modulo $< \rho$

Intanto la $f(w, \bar{z})$ non si annulla certo sul contorno γ di C' poichè se fosse

$$f(w_1, \bar{z}) = 0$$

per la (90) ne risulterebbe $|f(w_1, 0)| < g$ che contraddice la (91). Se indichiamo adunque con N il numero delle radici di

$$f(w, \bar{z}) = 0$$

entro C', avremo secondo la formola dell'indicatore logaritmico:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'_w(w_1, \bar{z})}{f(w_1, \bar{z})} dw.$$

L'integrale del secondo membro, se facciamo variare $\bar{z}$ entro Γ, è una funzione continua di $\bar{z}$ e dalla considerazione stessa fatta al § 56 risulta che esso serberà sempre lo stesso valore. Ma poichè per $\bar{z} = 0$ si ha $N = n$ avremo sempre:

$$N = n \quad \text{c. d. d.}$$

§ 72 Teorema di Weierstrass - Siano

$$w_1, w_2, w_3 \dots w_n$$

i valori di w entro C' radici dell'equazione

$$f(w, z) = 0 \quad \text{per } z \leq r$$

Se consideriamo l'integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_s w^k \frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}\, dw,$$

essendo k un intero positivo qualunque) il suo valore sarà la somma dei residui nell'interno di C'; [illegible] della funzione [illegible] residui di $\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}$ nei punti $w_1, \ldots w_n$ tutti $= 1$ (cfr. pag. 231)*: e note a pag 240
onde:

$$w_1^k + w_2^k + \ldots\ldots + w_n^k = \frac{1}{2\pi i}\int_s w^k \frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}\, dw$$

ed il secondo membro è evidentemente una funzione regolare di z entro Γ, che di più si annulla per $z=0$. Se poniamo

$$\varphi(w,z) = (w-w_1)(w-w_2)\ldots\ldots(w-w_n)$$

$$\varphi(w,z) = w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \alpha_2 w^{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_n$$

saranno quindi le (α) serie di potenze di z convergenti entro Γ.

Preso ora un punto qualunque z entro Γ ed un punto $\bar{w}$ entro C' distinto da $w_1, w_2, \ldots w_n$ si consideri la funzione di w

$$\frac{1}{w-\bar{w}}\;\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}.$$

Questa ha entro C' solo singolarità in

$$w_1, w_2 \ldots\ldots w_n \text{ e in } \bar{w}$$

e precisamente singolarità polari del 1° ordine coi residui

$$\frac{1}{w_1-\bar{w}},\ \frac{1}{w_2-\bar{w}},\ \ldots\ldots \frac{1}{w_2-\bar{w}}$$

nei primi punti e col residuo

$$\left(\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}\right)_{w=\bar{w}}$$

cfr. nota a pag 240 e cor. p. 225 (il residuo di $\frac{1}{w-\bar{w}}$ è 1).

in $\bar{w}$. Avremo quindi

$$\frac{1}{w_1-\bar{w}} + \frac{1}{w_2-\bar{w}} + \ldots\ldots + \frac{1}{w_n-\bar{w}} + \left(\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}\right)_{\bar{w}} = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{1}{w-\bar{w}}\,\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w}\, dw$$

Il secondo membro è una funzione regolare di z e w, diciamo $P(w, z)$ e cangiando w in w potremo scrivere la formula precedente anche così:

$$\frac{\partial \log f(w,z)}{\partial w} - \frac{\partial \log \varphi(w,z)}{\partial w} = P(w,z),$$

da cui integrando rispetto a w e passando dai logaritmi ai numeri otteniamo:

$$f(w,z) = \psi(z) \cdot \varphi(w,z) e^{P_1(w,z)}$$

ove $\psi(z)$ è una funzione regolare di z che non s'annulla per $z=0$ (altrimenti si annullerebbe identicamente $f(w,0)$) e però si può includere nell'esponenziale.

Otteniamo così la formula:

$$f(w,z) = \varphi(w,z) e^{P_1(w,z)} = \{w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \dots + \alpha_n\} e^{P_1(w,z)}$$

che ci esprime il teorema di Weierstrass:

« Se la funzione regolare $f(w,z)$ delle due variabili complesse w, z si annulla per $w=0$, $z=0$ e non è identicamente $f(w,0)=0$, in un intorno sufficientemente piccolo di $w=0$, $z=0$ si può porre sotto la forma

$$f(w,z) = (w^n + \alpha_1 w^{n-1} + \dots + \alpha_n) e^{P_1(w,z)}$$

dove il primo fattore, che pone in evidenza il modo di annullarsi della funzione, è un polinomio di grado finito in w con coefficienti funzioni regolari di z e nulle per $z=0$, mentre il secondo fattore (esponenziale) non si annulla più nell'intorno »

§ 73. Funzioni implicite - Il teorema di Weierstrass dimostra che volendo studiare come dipendono da z nell'intorno di $z=0$ le radici w_1 w_2 … w_n prossime a zero dell'equazione

$$f(w,z)=0$$

si può sostituire a questa l'altra più semplice

$$\varphi(w,z)=w^n+\alpha_1 w^{n-1}+\dots\dots+\alpha_n=0,$$

che è del grado n in w. Se supponiamo dapprima $n=1$ l'equazione precedente ci dà senz'altro w in serie di potenze per z e ci dimostra il teorema fondamentale:

« Se l'equazione $f(w,z)=0$ è soddisfatta per $z=a$ $w=b$ ed è $\left(\frac{\partial f(w,z)}{\partial w}\right)_{a,b}\neq 0$, per ogni valore di z prossimo ad a l'equazione ha una sola radice w prossima a b e questo valore w è una funzione regolare di z nell'intorno di $z=a$ »

Quando invece si annulli, per $z=a$, $w=b$, un certo numero di derivate

$$\frac{\partial f}{\partial w}\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\dots\dots\frac{\partial^{n-1} f}{\partial w^{n-1}}$$

ma sia

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial w^n}\right)_{a,b}\neq 0,$$

allora, per ogni z prossimo ad a, avremo n valori $w_1, w_2, \dots\, w_n$ prossimi a b dati da un'equazione della forma: (11) $\varphi(w,z)=(w-b)^n+\alpha_1(w-b)^{n-1}+\dots+\alpha_n=0$

dove le α sono funzioni regolari di z nell'intorno di $z=a$ e quivi nulle. Questi n valori di w, restringendo convenientemente l'intorno di $z=a$, si potranno supporre tutti distinti, altrimenti dovrebbe annullarsi anche il discriminante $\Pi(z)$ della (11) rispetto a w; ma questo discriminante è regolare nell'intorno di a e restringendo l'intorno si può far sì che non abbia altra radice che in $z=a$. Se z_0 è un punto di questo intorno distinto da a ciascuno degli n valori $w_1\, w_2 \dots w_n$ p. e. w_1, sarà sviluppabile in serie di potenze di $z-z_0$ essendo

$$\left(\frac{\partial f(w,z)}{\partial w}\right)_{w=w_1,\, z=z_0} \neq 0$$

Vediamo dunque che in ogni caso ponendo fra w, z il legame espresso dall'equazione

$$f(w,z)=0$$

veniamo a definire una o più funzioni analitiche w della variabile complessa z.

§ 74. Funzioni algebriche. - Applichiamo questi risultati generali al caso importante in cui la $f(w,z)$ sia una funzione razionale intera degli argomenti w, z e si abbia quindi l'equazione:

$$(12)\quad f(w,z)=\varphi_0(z)w^n+\varphi_1(z)w^{n-1}+\dots+\varphi_{n-1}(z)w+\varphi_n(z)=0,$$

i cui coefficienti $\varphi_i(z)$ sono polinomî razionali interi in $\underline{z}$. La $\underline{w}$ definita da una tale equazione come funzione implicita di z dicesi una funzione algebrica di $\underline{z}$.

Per ogni valore di $\underline{z}$ abbiamo $\underline{n}$ valori di w:

$$w_1 \quad w_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad w_n$$

che sono in generale distinti e finiti. Eccezione si ha soltanto per un numero finito di valori di $\underline{z}$ i cui indici diconsi i __punti__ __critici__. Questi punti critici sono di due specie; essi provengono in primo luogo da quei valori di $\underline{z}$ che annullano il primo coefficiente $\varphi_0(z)$. Per questi valori di $\underline{z}$ uno o più dei valori di $\underline{w}$ diventano infiniti, uno solo se quel valore di z annulla il primo coefficiente $\varphi_0(z)$ e nessuno dei seguenti, più se accade il contrario.

In secondo luogo per valori speciali di $\underline{z}$ possono due o più valori di $\underline{w}$ coincidere; ciò avviene quando insieme a $f(w,z)$ si annulla anche $\dfrac{\partial f(w,z)}{\partial w}$ e però il discriminante $D(z)$ della (12) rispetto a $\underline{w}$. Gl'indici delle radici delle due equazioni

$$\varphi_0(z) = 0 \qquad\qquad D(z) = 0$$

sono dunque i punti critici della (12).

Se $z = a$ è un punto __non__ critico le radici:

$$w_1\ w_2 \ldots\ldots\ldots w_n$$

sono finiti e tutti disuguali per $z=a$, onde

$$f(w_i, a)=0 \quad \left(\frac{\partial f(w,a)}{\partial w}\right)_{w_i} \neq 0$$

e dal teorema fondamentale del § prec.te risulta „Ciascuno degli n rami

$$w_1, w_2, \ldots\ldots\ldots w_n$$

è nell'intorno di un punto non critico $z=a$ una funzione regolare di z, cioè sviluppabile in serie di potenze

$$(13) \qquad w_i = \mathfrak{P}_i(z-a).\text{"}$$

È facile vedere che se prolunghiamo analiticamente un ramo $w_1 = \mathfrak{P}_1(z-a)$, il suo prolungamento soddisferà sempre alla (12) e sarà quindi sempre uno degli n rami.

E invero se $\mathfrak{P}_1(z-b)$ è un prolungamento analitico immediato di $\mathfrak{P}_1(z-a)$, nel campo comune di convergenza si ha

$$f(\mathfrak{P}_1(z-b), z)=0$$

e questa relazione vale quindi anche in tutto il campo di convergenza di $\mathfrak{P}_1(z-b)$.

Importa ora osservare che: „Il raggio del cerchio di convergenza di ciascuna di queste serie di potenze (13) sarà, per lo meno, eguale alla minima distanza del centro a dai punti critici."

Consideriamo infatti un determinato ramo p.e.

$$w_1 = \mathfrak{P}_1(z-a)$$

e la serie del 2° membro converga in un cerchio C che non contenga alcun punto critico nè all'interno, nè sulla periferia; dimostriamo che il vero cerchio di convergenza sarà più grande di C. Invero nell'intorno di qualunque punto b del disco circolare C o del suo contorno qualunque degli n rami è sviluppabile in una serie di potenze $\mathfrak{P}(z-b)$ il cui raggio R del cerchio di convergenza è certamente >0; onde, per un teorema di Weierstrass, sul limite inferiore*, potremo prendere un valore abbastanza piccolo r che serva come raggio del cerchio di convergenza per tutti i punti dell'area C.

Descriviamo allora un cerchio C' concentrico a C e di raggio $=\rho + \frac{r}{2}$, avendo indicato con ρ il rag-

* Esiste certamente un limite inferiore per R: sia r; basta provare che $r>0$. Pel citato teorema di Weierstrass esiste nel cerchio C almeno un punto L tale che in qualunque intorno di esso comunque piccolo il limite inferiore dei valori di R è ancora r e siccome per questo punto limite R ha un valore $R_0>0$ in un intorno sufficientemente piccolo di L tutti i valori di R saranno p.e. superiori a $\frac{R_0}{2}$, onde è certamente $r>0$

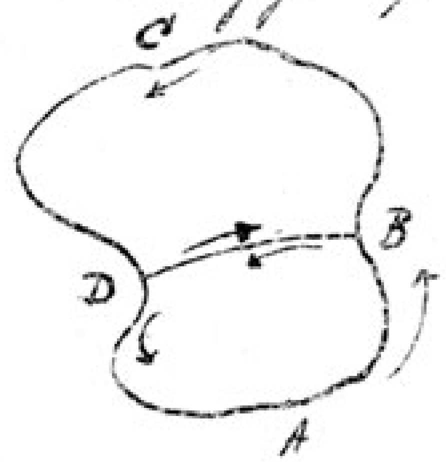
gio di C. Ogni cerchio Γ col centro in un punto c della periferia di C' e di raggio $= r$ può valere come cerchio di sviluppo in serie di potenze $\mathfrak{P}(z-c)$ per ogni ramo di w; esso ci dà in particolare per w_1 un prolungamento analitico oltre il cerchio primitivo C. L'inviluppo dei circoli Γ è un cerchio C'' concentrico a C e di raggio $= \rho + r$ e la nostra funzione w_1 è dunque in tutto il cerchio C'' finita, continua e monodroma, dunque la serie $\mathfrak{P}_1(z-a)$ converge nel cerchio C'' più ampio di C, ciò che dimostra l'asserzione fatta.

§ 75. Teorema fondamentale - Consideriamo nel piano complesso z una curva chiusa σ che parta da un punto non critico A e vi ritorni senza passare per alcun punto critico. Per ogni punto b di σ gli n rami saranno sviluppabili in serie di potenze $\mathfrak{P}(z-b)$ e vi sarà un raggio r, abbastanza piccolo, che potrà servire come raggio di convergenza per tutti i punti di σ (§ 74). Fissiamo in A un ramo di partenza w_i e prolunghiamolo analiticamente lungo il cammino σ per mezzo di cerchi di convergenza di raggio r ciascuno dei quali abbia una parte superficiale a comune col precedente. Al ritorno in A il ramo w_i o ritornerà col valore iniziale o con uno degli altri $n-1$ valori che w ha in A. Se si osserva che due rami diversi w_i w_k, descritto il cammino chiuso, si mutano necessariamente in due rami diversi si vede che l'effetto prodotto sugli n rami w_1 w_2 .... w_n dal descrivere il cammino chiuso σ sarà di permutarli fra loro in un certo modo, di produrre cioè una corrispondente <u>sostituzione</u> sui rami

$$S = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} & \dots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix}$$

gli indici $i_1, i_2, \dots i_n$ coincidendo, salvo l'ordine, con $1, 2, \dots n$. Si vede poi subito che la sostituzione S sugli indici rimane la stessa spostando sopra σ il punto A di partenza. Questa sostituzione S può anche essere l'identità, cioè può ogni ramo ritornare col proprio valore.

Ciò avviene effettivamente se il cammino chiuso σ è tutto contenuto in un'area <u>semplicemente</u> <u>connessa</u> e priva di punti critici. Per dimostrarlo supponiamo dapprima che σ non intersechi sè stessa, nel qual caso formerà il contorno di un'area semplice priva nell'interno e sul contorno di punti critici e perciò ogni punto z_0 dell'area (contorno incluso) potremo servirci per le corrispondenti serie $\mathfrak{P}(z-z_0)$ di un raggio fisso r di cerchio di convergenza.



Descriviamo il cammino chiuso

$$\sigma = ABCDA$$

della figura partendo da A col ramo w_1 e supponiamo si ritorni in A con un valore diverso w_2, sicchè la sostituzione prodotta sui rami dal cammino chiuso ABCDA non è l'identità. Per mezzo di una linea semplice BD che riunisca due punti del contorno σ dividiamo l'area in due regioni coi contorni ABDA, BCDB. Dico che uno almeno di questi due cammini chiusi deve produrre sui rami una sostituzione non identica.

E invero se invece di descrivere σ descriviamo l'altro cammino chiuso

$$ABCDBDA,$$

inserendo due volte il tratto DB, percorso in versi contrari, l'effetto prodotto sui rami è evidentemente lo stesso. Se dunque il cammino chiuso BCDB non produce sostituzione sui rami l'effetto prodotto da σ sarà il medesimo che quello del cammino chiuso ABDA, il quale produrrà un'effettiva sostituzione. Possiamo ora ragionare sul cammino chiuso ABDA come prima sopra ABCDA spezzando l'area racchiusa in due aree parziali più piccole. Così procedendo arriveremo ad un contorno chiuso, producente sostituzione sui rami, tutto contenuto in un cerchio del raggio fissato r, ciò che è assurdo. È chiaro poi che, se il cammino chiuso σ interseca sè stesso basterà applicare considerazioni analoghe a quelle del § 29 per arrivare alla medesima conclusione.

Abbiamo cioè dimostrato il teorema:

« In qualunque area semplicemente connessa priva di punti critici ogni ramo della funzione algebrica è una funzione finita, continua e monodroma di z ».

§ 76. Punti di diramazione.

Andiamo ora a studiare il modo di comportarsi di una funzione algebrica nell'intorno di un punto critico $z = b$ (a distanza finita) e supponiamo dapprima che in b coincidano due o più rami senza che alcun ramo diventi infinito, supponiamo cioè che b sia una radice del discriminante $D(z)$ e non del primo coefficiente $\varphi_0(z)$ (§ 74). Prendiamo un intorno p.e. circolare, del punto critico b così piccolo che non contenga alcun altro punto critico. Per un giro attorno a $z=b$ gli n rami $w_1, w_2 \dots w_n$ subiranno una sostituzione S (che potrà anche eventualmente ridursi all'identità); decomponiamo questa sostituzione in cicli. Sia

$$(w_1, w_2 \dots w_p)$$

uno dei cicli contenente il ramo w_1. Per vedere la specie di singolarità che hanno in $z=b$ i p rami $w_1, w_2 \dots w_p$ che si permutano ciclicamente fra loro girando attorno a b facciamo la sostituzione

$$(14) \quad z-b=t^p$$

e consideriamo $w_1, w_2 \dots w_p$ come funzioni di t. Se nell'intorno considerato di $z=b$ prendiamo un punto z_0 e col centro in z_0 descriviamo un cerchio che escluda b i rami $w_1\ w_2 \dots w_p$ sono sviluppabili in serie di potenze di $z-z_0$. Considerati come funzioni di t in un intorno $t=0$ essi sono quindi funzioni regolari in ogni punto, salvo al massimo in $t=0$. Ma ora vediamo subito che essi sono regolari anche in t, per la qual cosa basta dimostrare che facendo compiere a t un giro attorno a $t=0$ ciascun ramo, p.e. w_i, ritorna col proprio valore. E invero per la (14) se t gira una volta attorno a $t=0$, la z gira p volte attorno a $z=b$ e sui rami di w producendosi la sostituzione S^p si vede appunto che $w_1, w_2, \ldots w_p$ ritornano col medesimo valore. Avremo dunque

$$w_1 = \mathfrak{P}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots\ldots,$$

cioè

$$(15) \quad w_1 = \alpha_0 + \alpha_1 (z-b)^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 (z-b)^{\frac{2}{p}} + \ldots$$

È chiaro che gli sviluppi per $w_2, w_3, \ldots w_p$ si ottengono da quello di w_1 cangiando t in εt, $\varepsilon^2 t, \ldots \varepsilon^{p-1} t$ ove si ponga

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}},$$

giacchè per un giro di z attorno a b, che muta w_1 in w_2, w_2 in w_3 ecc. la $(z-b)^{\frac{1}{p}}$ acquista appunto il fattore ε.

Come si vede, nell'intorno di un punto critico $z=b$, ove più rami coincidano, questi si sviluppano in generale per potenze frazionarie di $z-b$ i cui esponenti hanno il medesimo denominatore.

Può anche darsi che il punto critico sia soltanto apparente e ciò avviene se la sostituzione S è l'identità. Allora nell'intorno di esso tutti i rami si comportano regolarmente. Se la S non è l'identità il punto $z=b$ si dice un punto critico algebrico o di diramazione per significare che girando ad uno tale punto i rami si permutano fra loro.

§77 Singolarità polari.

Supponiamo ora che il valore critico $z=b$ annulli il primo coefficiente $\varphi_0(z)$. Se facciamo la sostituzione

$$w = \frac{1}{w'}$$

l'equazione (12)(pag) diventa

$$(16) \quad \varphi_n(z) w'^n + \varphi_{n-1}(z) w'^{n-1} + \dots + \varphi_1(z) w' + \varphi_0(z) = 0$$

Se il valore $z=b$ annulla φ_0 senza annullare $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ la (16) ha per $z=b$ una sola radice nulla $w_1'=0$ talchè w_1' è una serie di potenze di $z-b$ annullantesi per $z=b$. Supposto che vi si annulli dell'ordine n avremo

$$w_1' = (z-b)^n \left\{ a_1 + a_2(z-b) + \dots \right\} \quad a_1 \neq 0$$

e quindi pel ramo corrispondente w_1 della primitiva

$$w_1 = \frac{A_1}{(z-b)^n} + \frac{A_2}{(z-b)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{z-b} + P(z-b).$$

Quel ramo w_1 che diventa ∞ per $z=b$ ha dunque

que semplicemente in $z=b$ una singolarità polare.

Supponiamo ora che per $z=b$ siano nulli oltre φ_0 anche $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_{r-1}$ e sia

$$\varphi_r(b) \neq 0$$

Allora la (16) ha per $z=b$ precisamente r radici nulle. Una di esse, p. e, w_1' si svilupperà nell'intorno di $z=b$ per potenze intere e positive di $(z-b)^{\frac{1}{p}}$ supposto che il ciclo contenente w_1' consti di p rami. Se lo sviluppo comincia con la potenza $(z-b)^{\frac{q}{p}}$ avremo:

$$w_1' = (z-b)^{\frac{q}{p}}\left\{a_1 + a_2(z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots\right\} \quad a_1 \neq 0$$

indi

$$w_1 = (z-b)^{-\frac{q}{p}}\left\{\alpha_1 + \alpha_2(z-b)^{\frac{1}{p}} + \ldots\right\} \qquad \alpha_1 \neq 0$$

$$(17)\quad w_1 = \frac{\alpha_1}{(z-b)^{\frac{q}{p}}} + \frac{\alpha_2}{(z-b)^{\frac{q-1}{p}}} + \ldots + \frac{\alpha_r}{(z-b)^{\frac{1}{p}}} + \mathfrak{P}\left((z-b)^{\frac{1}{p}}\right)$$

In tal caso w_1 si sviluppa adunque per potenze intere positive e negative di

$$(z-b)^{\frac{1}{p}},$$

ma la parte che contiene potenze negative è sempre finita. È evidente che una tale singolarità si può riguardare come proveniente dal sovrapporsi di una singolarità polare e di un punto di diramazione.

Abbiamo così esaminato il modo di comportassi dei rami di una funzione algebrica nell'intorno di ogni punto $z = b$ a distanza finita - Resta soltanto che esaminiamo ciò che accade nell'intorno di $z = \infty$. Con la sostituzione $z = \frac{1}{z'}$ riporteremo l'esame all'intorno del punto $z' = 0$ e diremo quindi che in $z = \infty$ si ha pel ramo in considerazione un punto regolare, un punto di diramazione ovvero un polo corrispondentemente a quello che accade per w, in $z' = 0$.

Gli sviluppi dei rami nell'intorno di $z = \infty$, nel caso che questo punto sia singolare pel ramo, si otterranno quindi semplicemente dagli sviluppi (15) a (17) cangiandovi $z - b$ in $\frac{1}{z}$.

Riepilogando, abbiamo il risultato: « Una funzione algebrica ha su tutta la sfera complessa un numero finito di punti singolari che possono essere, o poli, o punti di diramazione, o singolarità composte di queste due specie ».

§ 78 Le funzioni algebriche come funzioni analitiche - Ciascun ramo di una funzione algebrica di z è altresì un ramo di una funzione analitica e, come si è detto già al § 74, la funzione analitica prolungata dà sempre un ramo della funzione algebrica. Ci rimane da risolvere l'importante questione: «Gli n rami $w_1, w_2, \dots w_n$ della funzione algebrica w costituiscono una sola funzione analitica ovvero l'insieme di più funzioni analitiche?»

La risposta è molto semplice: avviene il primo caso se l'equazione $f(w,z)=0$ è irriducibile, il secondo se è invece riducibile».

Se la $f(w,z)$ è riducibile, cioè si spezza nel prodotto di due fattori razionali interi

$$f(w,z) = \varphi(w,z) \cdot \psi(w,z),$$

è ben chiaro che le due equazioni

$$\varphi(w,z)=0 \; ; \; \psi(w,z)=0$$

definiscono due funzioni algebriche distinte.

Ma supponiamo invece che

$$f(w,z)$$

sia irriducibile; per provare che in tal caso gli $\underline{n}$ rami costituiscono un'unica funzione analitica basterà dimostrare che da un ramo w_1 si può passare, per prolungamento analitico, descrivendo convenienti cammini chiusi, ad uno qualunque degli altri. Supponiamo al contrario che da w_1 si possa con passare soltanto a:

$w_1, w_2 \dots\dots w_p$ con $p < n$.

Si vede subito che i p rami $w_1, w_2 \dots\dots w_p$ formano un ciclo chiuso in guisa che da uno qualunque di essi si può passare per prolungamento analitico soltanto ad uno degli altri. Consideriamo allora le funzioni simmetriche elementari dei p rami del ciclo

$$E_k(z) = w_1^k + w_2^k + \dots + w_p^k$$

ove k è un numero intero positivo. Questa funzione analitica di z è uniforme su tutta la sfera complessa, poichè per ogni cammino chiuso descritto da z i p rami $w_1, w_2 \dots w_p$ si permutano fra loro ed $E_k(z)$ ritorna col medesimo valore. Inoltre la $E_k(z)$ possiede soltanto un numero finito di singolarità polari; infatti applicando ai singoli termini w_i^k gli sviluppi (15), (17) le potenze frazionarie debbono necessariamente sparire nella somma monodroma $E_k(z)$.

Questa funzione $E_k(z)$ è dunque una <u>funzione</u> <u>razionale</u> di z (§ 59). Ne risulta che il prodotto

$$(w-w_1)(w-w_2)\dots\dots(w-w_p) = w^p + \alpha_1 w^{p-1} + \alpha_2 w^{p-2} + \dots + \alpha_p$$

ha i suoi coefficienti funzioni razionali di z. Questo polinomio è d'altronde un fattore di

$$f(w,z) = \varphi_0(z)(w-w_1)(w-w_2)\dots\dots(w-w_n),$$

onde concludiamo appunto che $f(w,z)$ è allora riducibile.

Abbiamo così dimostrato il teorema:

« Un'equazione algebrica irriducibile

$$f(w,z)=0,$$

di grado n in w, definisce un'unica funzione analitica di z con n rami ».

Le proprietà caratteristiche delle funzioni analitiche algebriche consistono in ciò:

1° che hanno un numero finito di determinazioni o rami;

2° su tutta la sfera complessa non hanno che un numero finito di singolarità che sono, o poli, o punti di diramazione. E invero se w è una funzione analitica di z con n rami

$$w_1, w_2 \dots\dots w_n$$

ed ha un numero finito di punti singolari nell'intorno dei quali possiede sviluppi della forma (15), (17), il ragionamento testè applicato dimostra che nel polinomio

$$w^n + a_1 w^{n-1} \dots + a_n = (w-w_1)(w-w_2)\dots(w-w_n)$$

i coefficienti a sono funzioni razionali di z.

§79. Gruppo di monodromia. — Considériamo un'equazione algebrica

$$\varphi_0(z)w^n + \varphi_1(z)w^{n-1} \dots + \varphi_n(z) = 0$$

Fissando un punto non critico A nel piano ad ogni cammino chiuso σ descritto da z che parta da A e vi ritorni senza passare per alcun punto critico corrisponde (§75) una sostituzione S sugli n rami. Se consideriamo due cammini chiusi σ_1, σ_2 che producano rispettivamente le sostituzioni S_1, S_2; il cammino chiuso $\sigma_1 \sigma_2$ che risulta dal percorrere prima σ_1 poi σ_2 produce evidentemente la sostituzione prodotto:

$$S_1 S_2.$$

In particolare il cammino σ_1^{-1}, che si ottiene percorrendo σ_1 in senso inverso, produrrà la sostituzione inversa S_1^{-1}.

Ciò premesso consideriamo la totalità dei cammini chiusi; avremo corrispondentemente un insieme di sostituzioni sui rami, che saranno necessariamente in numero finito, al massimo $\pi(n)$. Queste sostituzioni

$$(18) \quad S_1, S_2, \dots S_m,$$

fra le quali si trova certamente l'identità, formano un gruppo poichè, per le osserva-

zioni precedenti, se S_i, S_k sono due sostituzioni qualunque della serie (18) anche il prodotto $S_i\, S_k$ trovasi nella serie stessa.
Questo gruppo Γ dicesi il gruppo di monodromia dell'equazione. Facilmente si vede che il gruppo stesso è indipendente dal punto iniziale A. Se l'equazione è irriducibile vi sono in Γ sostituzioni che portano un ramo qualunque in un altro qualunque cioè il gruppo di monodromia Γ è transitivo. È invece Γ è intransitivo se la proposta è riducibile.
Il gruppo di monodromia Γ possiede le proprietà caratteristiche date dai teoremi seguenti:
1.° «Se una funzione razionale
$$y = F(w_1, w_2, \dots w_n, z)$$
degli n rami della funzione algebrica e di z rimane invariata eseguendo sugli n rami una sostituzione qualunque del gruppo Γ di monodromia, essa è una funzione razionale di z.»
È infatti, pei principî della teoria delle equazioni, la y è certamente legata a z da un'equazione algebrica (risolvente della data) cioè è una funzione algebrica di z:

$$(19) \qquad F(w_1, w_2 \ldots w_n, z) = \Psi(z)$$

Ma descrivendo un qualunque cammino chiuso $\Psi(z)$ ritorna, per ipotesi, col medesimo valore ed è perciò una funzione razionale di z.

2°. Inversamente se una funzione razionale $F(w_1, w_2 \ldots w_n, z)$ si può esprimere razionalmente per z essa deve rimanere invariata per qualunque sostituzione del gruppo di monodromia.

E infatti nella (19), ove si supponga $\Psi(z)$ razionale in z, facciamo percorrere a z il cammino chiuso σ_i che produce la sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} w_{i_1} & w_{i_2} & \ldots & w_{i_n} \\ w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{pmatrix}$$

del gruppo di monodromia. Per le proprietà del prolungamento analitico, la (19) rimarrà sempre soddisfatta e, poichè $\Psi(z)$ ritorna col proprio valore, avremo

$$F(w_{i_1}, w_{i_2} \ldots w_{i_n}, z) = F(w_1, w_2 \ldots w_n, z)$$

c. d. d.

In generale distinto dal gruppo di monodromia è il gruppo algebrico G dell'equazione, pel quale intendiamo il gruppo di Galois per l'equazione nel campo di razionalità formato dalle quantità costanti (coefficienti) che vi figurano, aggiunto al campo stesso il parametro indeterminato $\underline{z}$. Pel gruppo algebrico dell'equazione valgono i due teoremi sopra enunciati pel gruppo di monodromia soltanto modificati in questo che le funzioni razionali di $\underline{z}$ ivi considerate hanno di più coefficienti razionali. Si dimostra che in ogni caso:

«Il gruppo di monodromia Γ è un sottogruppo invariante del gruppo algebrico G; l'aggiunta di una sola irrazionalità numerica abbassa il gruppo di Galois per l'equazione da G a Γ.»*

§ 80. Sostituzioni elementari del gruppo di monodromia.

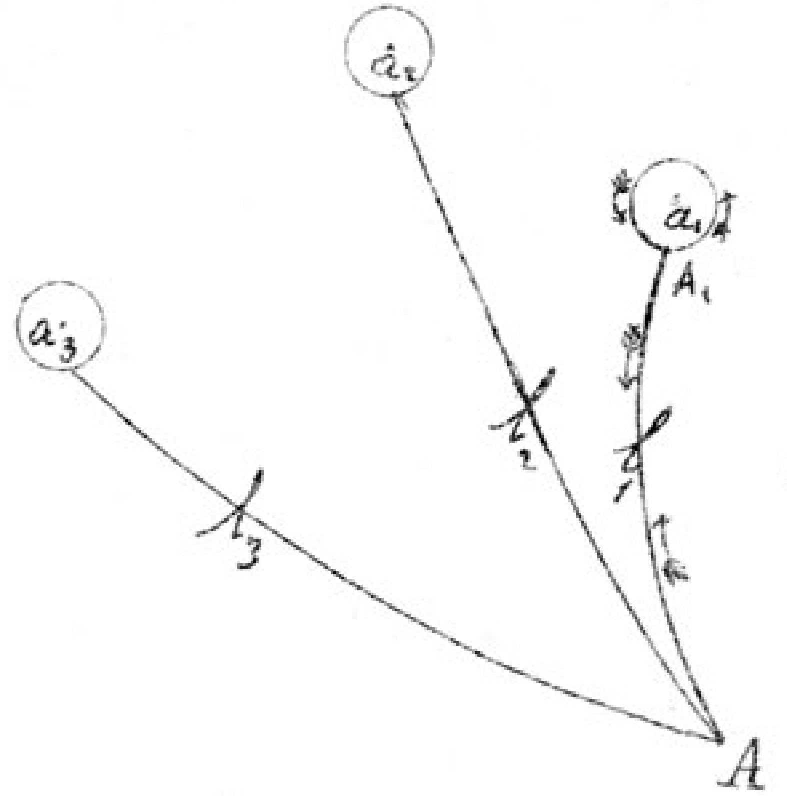
Consideriamo sulla sfera complessa i punti di diramazione in numero finito

$$a_1, a_2 \dots a_\nu,$$

incluso il punto ∞ se è di diramazione e fissiamo il punto A origine dei cammini chiusi che descriviamo per calcolare le sostituzioni del gruppo di monodromia. Diciamo cammino elementare o cappio un cammino chiuso foggiato nel modo seguente. Andiamo da A ad un punto A_1 (v. fig. pag. seg.) vicinissimo al punto

* V. Teoria dei gruppi e delle equazioni algebriche

critico a_1 per un arco l_1 di curva semplice, giriamo poi intorno ad a_1 nel verso positivo, sopra una piccola circonferenza σ_1 avente il centro in a_1 indi percorrendo l_1 in senso inverso torniamo in A. Il cammino chiuso



$$l_1 \sigma_1 l_1^{-1}$$

sarà il cappio relativo ad a_1. Così per ciascun punto critico a_i costruiamo un cappio corrispondente $l_i \sigma_i l_i^{-1}$ in guisa che i tratti $l_1, l_2 \dots l_n$ non s'intersechino fra loro. Corrispondentemente ad ogni cappio $l_i \sigma_i l_i^{-1}$ avremo una sostituzione s_i del gruppo di monodromia e facilmente vediamo che: «L'intero gruppo di monodromia si genera componendo le sostituzioni elementari

$$s_1\,, s_2 \dots\dots s_N$$

e le loro potenze fra loro».

E invero qualunque cammino chiuso si può ridurre deformazione continua, senza attraversare punti critici, ad una successione di cappi.

Naturalmente fra le sostituzioni generatrici s_1, $s_2, \dots\dots s_N$ può esservene un certo numero di superflue, che risultino cioè da combinazione delle altre. Anzi ciò avviene necessariamente se nella serie

$$a_1 , a_2 \ldots\ldots a_N$$

sono inclusi tutti i punti di diramazione, giacchè un cammino chiuso che avvolga tutti i punti critici produce la sostituzione identica.
Per calcolare le sostituzioni elementari S_i prodotte dai cappi, la ricerca fondamentale da farsi consiste nell'esaminare come si permutano fra loro i rami girando sul piccolo contorno σ_i, avvolgente il punto critico a_i. Questo insegna il metodo di Puiseux, che permette di calcolare dello sviluppo in serie di potenze frazionarie di $z - a_i$ per ogni ramo tanti termini quanti occorrono per differenziare il ramo stesso da tutti gli altri.
Ma noi non ci addentreremo qui in tali studi e solo faremo l'osservazione seguente che, calcolato il discriminante $D(z)$, permette di riconoscere se una sostituzione elementare S_i è pari o dispari, se cioè consta di un numero pari o dispari di trasposizioni.
Diciamo che:
«La sostituzione elementare S_i sarà pari o dispa=

ri secondo che il punto critico $z = a_i$ sarà pel discriminante $D(z)$ un infinitesimo (od un polo) di ordine pari o dispari ».

E infatti la radice quadrata del discriminante

$$\sqrt{D(z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\ w_1 & w_2 & \ldots\ldots & w_n \\ w_1^2 & w_2^2 & \ldots\ldots & w_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \ldots\ldots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

per il cammino chiuso σ_i non cangia se s_i è pari e muta invece di segno se s_i è dispari. Ma se l'infinitesimo (o polo) è dell'ordine r l'argomento di $D(z)$ aumenta dopo il giro σ_i di $2\pi r$ e quello di $\sqrt{D(z)}$ di πr; onde avverrà il 1° caso se r è pari, il secondo se r è dispari.

Fine della parte prima

Errata Corrige

Pagina 9 linea 8ª dal basso in luogo di <u>al concetto di</u>
leggi <u>al concetto di funzione di</u>

pag. ~~7~~9 riga penultima da cancellarsi il 6

pag. 17 linea 3ª d. a in luogo di $\varepsilon^n+\varepsilon^{m'}$ leggi $z^n+z^{m'}+\dots$

„ 17 „ 8ª d. a „ „ $z<q$ „ $z\leq q$

„ 37 „ 8ª d. b. in luogo di <u>insieme teorema</u>
leggi <u>insieme al teorema</u>

„ 41 linea quartultima in luogo di $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\left(\frac{\partial x}{\partial y}dy\right)^2\right.$
leggi $\left(\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\frac{\partial x'}{\partial y}dy\right)^2$

„ 67 nota a piè di pagina in luogo di $\underline{d}-1$, $\underline{\delta-1}$
leggi $d\mp 1$, $\delta\mp 1$

„ 96 linea 4ª d. b. in luogo di (§12) (pag. . . .)
leggi (§12) (pag 59)

„ 98 all'intestazione del §11 leggi Forme binarie quadra-
tiche a determinante negativo.

„ 107 linea 7ª d. a. numerare la formola $\xi'=\dots$ con (19*)

„ 112 „ 11ª d.b. in luogo di $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ leggi $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

„ 116 ultima linea leggi $z^2+\zeta^2+1\equiv 0 \pmod{m}$

– Indice dei Capitoli –

Cap. I.

Cap. II.

(Sostituzioni lineari - Gruppi discontinui di sostitu= zioni lineari e loro rappresen= tazione geometrica)

– Cap III –

(Trasformazione di integrali doppî in integrali semplici – Funzioni armoniche e loro proprietà fondamentali – Problema di Dirichlet e sua risoluzione pel caso del campo circolare)

Cap. IV°

(Integrali di funzioni di variabile complessa Teorema fondamentale di Cauchy e sue conseguenze - Sviluppo di una funzione in serie di Taylor - Sviluppo di Laurent - Concetto di funzione analitica secondo Weierstrass - Serie di funzioni analitiche

Cap. V

(Punti singolari delle funzioni monodrome - Poli e punti singolari essenziali - Residui - Indicatore logaritmico - Inversione delle serie.)

Cap VII

(Funzioni analitiche di più variabili complesse Funzioni implicite - Proprietà fondamentali delle funzioni algebriche -)

— Fine —