LEZIONI SULLA TEORIA

DELLE

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

E

DELLE FUNZIONI ELLITTICHE

DI

LUIGI BIANCHI

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA

(ANNO 1898-99)

PARTE PRIMA

FUNZIONI MONODROME DI VARIABILE COMPLESSA

PISA

ENRICO SPOERRI

LIBRAIO-EDITORE

Parte prima

Teoria delle funzioni monodrome di variabile complessa

Capitolo 1°

Funzioni di variabile complessa secondo Cauchy - Riemann - Serie di potenze e loro proprietà - Rappresentazioni conformi

§ 1 Piano complesso - sfera complessa - La teoria delle funzioni di variabile complessa si può svolgere seguendo due metodi diversi; l'uno dovuto a Cauchy-Riemann, l'altro a Weierstrass.

Il primo metodo si fonda sulle proprietà degli integrali della così detta equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

l'altro costruisce l'intera teoria in modo puramente aritmetico operando con le serie di potenze (serie di Taylor) come elementi. I due metodi si completano a vicenda e, per non rinunziare ai particolari vantaggi dell'uno e dell'altro, conviene ormai in questi studî svolgerli parallelamente. Questo ci proponiamo appunto di fare nella prima parte del presente corso, ove partiremo dalle definizioni di Cauchy-Riemann per arrivare all'importantissimo concetto di *funzione analitica* secondo Weierstrass, e svilupparne le conseguenze.

Consideriamo una variabile complessa

$$z = x + iy$$

i cui valori distendiamo, secondo la consueta rappresentazione geometrica, sul piano complesso di Gauss, sicchè ad ogni valore di z corrisponde un punto del piano complesso, il suo indice, cioè il punto che ha le coordinate Cartesiane ortogonali (x, y), e, viceversa ad ogni punto del piano corrisponde un valore della variabile z. A causa di questa corrispondenza biunivoca fra il valore di z ed il punto rappresentativo, è lecito designare, come faremo, un punto qualsiasi del piano mediante il valore z_0 che vi ha la variabile z. E poichè riguardiamo il valore ∞ di z come un unico valore, così il piano complesso si riguarderà, in questi studî, come una superficie chiusa con un unico punto all'infinito. Questo modo di considerare i punti all'infinito del piano come raccolti in un unico punto, contrariamente alle *convenzioni* della geometrìa projettiva ed analitica, non può produrre difficoltà quando si pensi che quì il piano interviene soltanto come immagine geometrica della variabilità complessa e ci potremmo servire egualmente di qualunque altra superficie quando si possano sui punti di questa distribuire una, ed una sola volta, i valori della variabile complessa con legge di continuità. Ed appunto spesse volte ci converrà adoperare, in luogo del piano complesso, la *sfera complessa*, riportando i punti del piano sulla sfera, mediante la proiezione stereografica polare. Per fissare completamente il modo di rappresentazione, prendiamo la sfera di raggio = 1, col centro nell'origine O, sicchè indicando con ξ, η, ζ le coordinate correnti di punto, l'equazione della sfera sarà:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

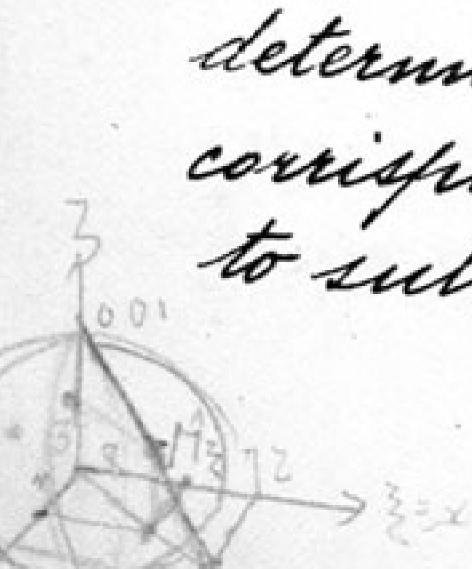
e dal punto $P \equiv (0, 0, 1)$ della sfera, (polo) proiettiamo ogni punto $M \equiv (x, y)$ del piano complesso (piano $\xi\eta$) in M' sulla sfera. Per le coordinate ξ, η, ζ di questo punto M' troviamo subito:

$$(1) \quad \xi = \frac{2x}{x^2+y^2+1}, \quad \eta = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \quad \zeta = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1},$$

formole che, note le coordinate di un punto (x, y) del piano, fanno conoscere le coordinate ξ, η, ζ del punto corrispondente sulla sfera. Inversamente, mediante le formole:

$$(2) \quad x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

determiniamo il punto del piano che corrisponde ad un punto assegnato sulla sfera. In ogni punto (ξ, η, ζ)



della sfera abbiamo così per la variabile complessa z il valore

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

I punti all'infinito del piano vengono a raccogliersi sulla sfera nell'unico punto $(0, 0, 1)$ e cioè nel polo, ove ha luogo il valore $z = \infty$ della variabile complessa.

Ricordiamo che la rappresentazione stereografica della sfera sul piano gode di due proprietà fondamentali, che si possono dimostrare elementarmente, od anche dedurre dalle formole (1), (2) di rappresentazione e cioè:

1° la rappresentazione conserva gli angoli; vale a dire ogni angolo di una figura sferica è uguale a quello della figura piana corrispondente. (rappresentazione conforme) –

2° ad ogni circolo (o retta) del piano corrisponde un circolo sulla sfera ed inversamente.

Diciamo ancora che, in seguito, per intorno di un punto z del piano com plesso (o della sfera complessa) intenderemo un campo comunque piccolo; ma di ampiezza diversa da zero, che contenga nel suo interno il punto. Per intorno del punto $z = \infty$ del piano complesso s'intenderà quindi la parte del piano esterna ad un campo finito comunque grande, ciò che equivale appunto, per la sfera complessa, a considerare un intorno, comunque piccolo, del polo.

2 § 2. Funzioni di variabile complessa - Consideriamo un campo $\mathcal{C}$, a due dimensioni, del piano o della sfera complessa, nel cui interno si muova l'indice della variabile complessa z.

Sia:

$$w = u + iv$$

una seconda variabile complessa dipendente da z in guisa che, per ogni valore di z appartenente a $\mathcal{C}$ la w abbia un valore perfettamente determinato, cioè la parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario in w siano, nel campo $\mathcal{C}$, funzioni, nel senso ordinario, delle due variabili reali

x, y. Ove, seguendo i concetti generali di Dirichlet, considerassimo $\underline{w}$ come funzione della variabile complessa $\underline{z}$, lo studio delle funzioni di variabile complessa non verrebbe a differire da quello delle ordinarie funzioni di due variabili reali. Ma nel concetto di funzione di variabile complessa, sono incluse alcune limitazioni riguardanti la continuità e l'esistenza della derivata, delle quali, ora appunto, andiamo a trattare.

In primo luogo supponiamo che la $\underline{w}$, considerata come funzione delle due variabili reali x, y, sia continua superficialmente nel campo C, cioè che tali siano le due funzioni reali u, v nell'intorno di ogni punto di C. Si vedrà subito che la continuità di $\underline{w}$ in un punto z_0 del campo si può anche definire dicendo che, preso un numero ε positivo, piccolo a piacere, deve esistere un intorno sufficientemente piccolo di z_0*, tale che, per

* S'intende che, se z_0 è interno al campo, l'in-

qualsiasi punto z appartenente a questo intorno si abbia:

$$|w_z - w_{z_0}| < \varepsilon ,$$

ove con w_z indichiamo il valore di w in z e il simbolo $|w_z - w_{z_0}|$ significa, secondo Weierstrass, il modulo di $w_z - w_{z_0}$**.

In secondo luogo supponiamo che la $\underline{w}$ possegga derivate parziali prime

$$\frac{\partial w}{\partial x} , \quad \frac{\partial w}{\partial y}$$

pure <u>finite</u> <u>e</u> <u>continue</u> in $\mathcal{C}$, onde segue che, se consideriamo una linea L qualunque del piano complesso, uscente da un suo punto $M_0 \equiv z_0$; (supponiamo che tale linea sia una curva ordinaria dotata di tangente che varia con continuità al variare in modo continuo del punto di contatto) e spostandoci lungo L da M_0 a un punto vicino $M \equiv z_0 + \Delta z$ calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} ;$$

questo, al convergere di M verso M_0, convergerà verso un limite determinato e

---

torno* $\underline{\sigma}$ deve contenere z_0 nel suo interno, laddove $\underline{\sigma}$ conterrà z_0 sul contorno, se z_0 è sul contorno di C.

** In generale, essendo A una quantità complessa, col simbolo $|A|$ denoteremo sempre, in seguito, il modulo di A finito. E invero indicando con s l'arco della curva L, quando z si muove lungo L, potremo riguardare z e w come funzioni di s ed avremo:

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim \frac{\left(\frac{\Delta w}{\Delta s}\right)}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta s}\right)}$$

e, però,

$$(3) \qquad \lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}} .$$

Questo limite, che dipende unicamente dalla direzione della tangente, in M_0, alla curva, dicesi la derivata di w, secondo quella direzione. In particolare le derivate di w prese nel senso dell'asse Ox e dell'asse Oy saranno:

$$(4) \qquad \frac{\partial w}{\partial x}, \; \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y} .$$

Ora l'ulteriore limitazione che dobbiamo porre per arrivare al concetto di variabile complessa, consiste in ciò che la derivata di w sia indipendente dalla direzione secondo cui è calcolata. In particolare le derivate (4) calcolate nel senso degli assi dovranno essere uguali; cioè dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}$$

Ma, viceversa, se questa condizione è soddisfatta, la (3) può scriversi:

$$\lim \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + i\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds}} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

e ci dimostra che la derivata sarà sempre la stessa in qualunque direzione si calcoli.

La condizione (I) si suole anche citare come condizione di monogeneità, giacchè, supposte soddisfatte tutte le condizioni precedenti, Cauchy chiamava w funzione monogena di z, mentre oggidì, quando si parla di una funzione w della variabile complessa z, s'intende senz'altro che tutte le indicate condizioni, compresa la condizione (I) di monogeneità, debbono essere soddisfatte, o per tutti i punti del campo o almeno generalmente, cioè fatta eccezione da un numero finito di punti o di linee del campo, dove qualcuna delle precedenti condizioni, od anche tutte, potranno cessare di verificarsi. E così dunque porremo la seguente definizione fondamentale:

Diremo w funzione della variabile complessa z, nel campo C, quando ad ogni valore di z, in C, corrisponde un valore determinato* per w; e w, considerata come funzione delle variabili reali x, y, sia continua e possegga derivate parziali del 1° ordine $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ pure generalmente finite e continue e legate dalla relazione di monogeneità:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

In questo corso noi ci occuperemo principalmente del caso in cui per ogni punto z in C si abbia un solo valore di w. In tal caso se, partendo da un punto qualunque M_0 in C, descriviamo una curva chiusa qualunque, σ, tutta compresa entro C incontreremo per w una catena continua di valori, che parte dal valore iniziale w_0 in M_0 e vi ritorna. Allora la funzione w di z si dice monodroma in C, per significare appunto che, descrivendo qualunque cammino chiuso in C si ristabilisce con continuità, per la funzione, il valore iniziale. Ma si possono egualmente considerare, e si considerano, funzioni

* e generalmente finito

di variabile complessa a più valori ed anche un numero infinito (discreto) di valori in ogni punto; soltanto quando si consideri un intorno sufficientemente piccolo di un punto generico di C deve esser possibile di scindere le diverse determinazioni di w in altrettante funzioni monodrome nell'intorno. Ma, quando si consideri il campo completo C e partendo da un punto M_0 si descriva una curva chiusa, scegliendo i valori di $\underline{w}$ con la legge di continuità, si ritornerà in M_0, o col valore w_0 scelto inizialmente, o con uno degli altri valori che w ha in M_0. E se, effettivamente, per certi cammini chiusi si ritornerà con un valore di w diverso dall'iniziale, la w si dirà funzione <u>polidroma</u> nel campo. Più tardi, quando parleremo delle funzioni <u>analitiche</u>, ritorneremo meglio sul concetto di monodromia e polidromia delle funzioni.

Se nella condizione (I) di monogeneità scindiamo la parte reale e l'immaginaria, ponendo:

$$w = u + iv,$$

vediamo che le funzioni reali u, v delle variabili reali x, y dovranno possedere derivate parziali prime generalmente finite e continue nel campo e legate dalle relazioni fondamentali:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

In seguito dimostreremo che, per una funzione di variabile complessa, l'ipotesi (inclusa nella definizione) di una derivata prima generalmente finita, continua e indipendente dalla direzione trae seco, come conseguenza, l'esistenza e la continuità di tutte le derivate degli ordini superiori. E così le due funzioni reali u, v ammetteranno pure le derivate parziali di tutti gli ordini generalmente finite e continue. Ammettendo, per un momento, la cosa in particolare per le derivate seconde, deduciamo subito dalle (I) le equazioni del 2° ordine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

Così adunque la parte reale u e il coefficiente v dell'immaginario di una funzione w di variabile complessa, sono soluzioni dell'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

che s'indica anche brevemente col simbolo

$$\Delta^2 \theta = 0$$

Viceversa ad ogni soluzione u di questa equazione ne corrisponde una coniugata v definita, a meno di una costante additiva, secondo le (II), dal suo differenziale totale

$$dv = \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

e in $w = u + iv$ si ha così una funzione della variabile complessa z. Lo studio delle funzioni di variabile complessa può riguardarsi quindi anche, da un punto di vista del tutto reale, come lo studio delle coppie coniugate (u, v) di soluzioni dell'equazione di Laplace.

§ 3 - Serie di potenze - Cerchio di convergenza.

Stabilito nel paragrafo precedente il concetto di funzione di variabile complessa, andiamo subito a considerare nel le serie di potenze il più importante esempio di tali funzioni. Per serie di potenze di una variabile complessa z intendiamo una serie:

$$(5) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots = \sum_0^\infty a_n z^n$$

che procede per le potenze ascendenti intere e positive di z. L'importanza delle serie di potenze nella nostra teoria è affatto fondamentale, poichè esse sono gli elementi coi quali può costruirsi ogni funzione di variabile complessa. (Cauchy - Weierstrass) Cominciamo dunque dal ricordare e precisare le proprietà riguardanti la convergenza delle serie di potenze. Innanzi tutto è chiaro che una serie (5) ha almeno un punto ove converge, il punto $z = 0$, ove si riduce al suo primo termine a_0, ma noi supponiamo che essa converga anche in qualche altro punto z_0 del piano. Allora dimostriamo il teorema fondamentale:

«Se in un punto z_0 del piano complesso, diverso dall'origine 0, la serie di potenze (5) converge e descriviamo col centro in 0 un cerchio che lasci il punto z_0 all'esterno, per quanto prossimo alla periferia, in tutta l'area del cerchio, e sul contorno, la serie (5) conver-

uniformemente
ge assolutamente ed in egual grado ».—
Il teorema sarà dimostrato se proviamo la convergenza in egual grado della serie dei moduli

$$(\alpha) \qquad \sum_0^\infty |a_n||z|^n,$$

cioè se dimostriamo che, dato un numero ε piccolo a piacere, possiamo trovare un numero m tanto grande che il resto della serie

$$R_m = |a_m||z|^m + |a_{m+1}||z|^{m+1} + \ldots\ldots$$

per tutti i valori di z i cui indici cadono nella detta area circolare sia $< \varepsilon$. Ora, poichè la serie

$$\sum a_n z_0^n$$

converge per ipotesi, avremo certamente:

$$\lim_{n=\infty} (a_n z_0^n) = 0$$

e quindi anche

$$\lim_{n=\infty} (|a_n||z_0|^n) = 0$$

Possiamo quindi fissare una quantità positiva finita g, tale che per tutti i valori di n si abbia

$$(b) \qquad |a_n||z_0|^n < g$$

Ora possiamo scrivere

$$R_m = |a_m||z_0|^m \cdot \zeta^m + |a_{m+1}||z_0|^{m+1} \zeta^{m+1} + \ldots\ldots$$

avendo posto:

$$\zeta = \frac{|z|}{|z_0|}$$

e però, a causa della diseguaglianza (6), abbiamo:

$$(7)\quad R_m < g(\xi^m + \xi^{m+1} + \xi^{m+2} + \dots\dots) .$$

Se indichiamo con r il raggio del nostro cerchio e poniamo

$$\frac{r}{|z_0|} = q$$

sarà evidentemente

$$\xi \leq q < 1$$

e la (7) ci darà:

$$R_m < g \frac{\xi^m}{1-\xi}$$

e, a più forte ragione

$$R_m < g \frac{q^m}{1-q} .$$

Basta dunque prendere m tanto grande che si abbia

$$g \frac{q^m}{1-q} \leq \varepsilon ,$$

ciò che è sempre possibile essendo $q<1$, ed avremo che, per tutti i punti dell'area circolare e della periferia, risulterà, come si voleva:

$$R_m < \varepsilon$$

Dal teorema dimostrato risulta come corollario che « se in un punto z_0 la serie di potenze (5) diverge, a più forte ragione divergerà in qualsiasi punto distante dall'o rigine più di z. »

Dalle considerazioni precedenti facilmente deduciamo l'esistenza del così detto *cerchio di convergenza* della serie di potenze. Per ciò distribuiamo tutti i circoli col centro in O (o i loro raggi) in due classi: A) B); diremo un cerchio della prima classe A) *se in tutto l'interno* del cerchio la serie converge; della seconda classe B) quando *in tutto l'esterno* del cerchio la serie diverge. Ogni cerchio apparterrà necessariamente all'una o all'altra classe, poichè se non è della classe A) ciò significa che in qualche punto interno al cerchio la serie diverge ed allora, pel corollario sopra notato, essa diverge, a più forte ragione, in tutto l'esterno del cerchio, il quale appartiene dunque a B). Similmente se un cerchio non è della classe B) esso appartiene necessariamente alla classe A). Di più è chiaro che se un cerchio è della classe A), qualunque cerchio concentrico, e più piccolo, vi *appartiene* egualmente, e se un cerchio appartiene a B) lo stesso succede di qualunque cerchio concentrico più grande. Infine non vi può essere al massimo che un solo cerchio appartenente insieme alle 2 classi:

La ripartizione dei circoli di centro O nelle due classi A), B) soddisfa quindi alle condizioni fondamentali che ci assicurano dell'esistenza di un cerchio C, limite delle due classi*, dotato cioè della proprietà che ogni circolo col centro in O appartiene alla classe A) se è interno a C; alla classe B) se è esterno. Così adunque: « In ogni punto interno a C la serie di potenze converge; in ogni punto esterno la serie diverge. » Quanto a ciò che accade sui punti della periferia di C nulla si può dire in generale potendosi avere, in tali punti, convergenza o divergenza secondo la natura particolare della serie. Il cerchio C di cui abbiamo così dimostrata l'esistenza e che può del resto estendersi talora a tutto il piano**

* v. Dini. Fondamenti ecc. - § 9 pag 11

** Ogni circolo appartiene allora alla classe A)

dicesi il cerchio di convergenza della serie.
Dalle nostre considerazioni risulta altresì l'importante risultato:
In qualunque campo tutto interno al cerchio C di convergenza la serie di potenze converge assolutamente ed in egual grado.
Per noti teoremi sulla convergenza in egual grado delle serie* si ha quindi anche:
La somma $w = \sum a_n z^n$ della serie di potenze in qualunque campo tutto interno al cerchio di convergenza rappresenta una funzione finita e continua delle due variabili reali x, y.
Che la w sia una funzione della variabile complessa $\underline{z}$ risulterà poi dai paragrafi seguenti.

§ 4 Serie derivata - Il termine generale $a_n z^n$ della serie di potenze è una funzione della variabile complessa $\underline{z}$ ed ha per derivata

$$n a_n z^{n-1}$$

Consideriamo la serie delle derivate

$$\sum_{0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

e dimostriamo che questa serie di potenze ha il medesimo cerchio C di convergenza

* Dini - Fondamenti - pag 109 (§ 97)

della serie primitiva. Perciò basterà provare:

1° che in qualunque punto **interno** a C la serie dei moduli

$$(8)\quad \sum n |a_n| |z|^{n-1}$$

è convergente.

2° che in qualunque punto esterno è divergente.

Sia z_0 un punto interno a C sicchè, detto R il raggio di C sarà

$$|z_0| < R\ ;$$

dimostriamo la convergenza della serie de' moduli

$$\sum n |a_n| |z_0|^{n-1}.$$

Prendiamo un punto z_1 interno a C, ma più prossimo alla periferia di z_0, sicchè

$$|z_1| > |z_0|$$

e scriviamo

$$\sum n |a_n| |z_0|^{n-1} = \sum n |a_n| |z_1|^{n-1} \left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1}$$

Posto

$$q = \frac{|z_0|}{|z_1|}\ ,$$ è $q < 1$, e i termini della serie:

$$\sum n |a_n| |z_0|^{n-1} = \sum n |a_n| |z_1|^{n-1} \cdot q^{n-1}$$

si deducono da quelli della serie convergente

$$\sum n\, q^{n-1}\ *$$

* v. nota pag. seg.

moltiplicandoli per quantità positive

$$|a_n||z_1|^{n-1}$$

che, non solo si mantengono finite, ma vanno indefinitamente decrescendo, a causa della convergenza in z_1 della serie primitiva. Dunque anche la serie $\sum n|a_n||z_0|^{n-1}$ è convergente - c. d. d.

Sia ora z_1 un punto esterno a C; dico che la serie $\sum n|a_n||z_1|^{n-1}$ è divergente. E invero, se fosse convergente, tale sarebbe pure la serie

$$\sum n|a_n||z_1|^n$$

e, a più forte ragione, l'altra

$$\sum |a_n||z_1|^n,$$

ciò che è assurdo essendo z_1 esterno al cerchio di convergenza della serie primitiva.

Dunque: La serie derivata $\sum n a_n z^{n-1}$ ha lo stesso cerchio di convergenza della serie primitiva.

Ne segue che, in qualunque campo tutto in-

* Per vederlo basta applicare il primo criterio di convergenza delle serie à termini positivi. Qui abbiamo:

$$u_n = n q^{n-1}, \quad u_{n+1} = (n+1) q^n$$

indi

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{q} > 1$$

terno al cerchio C la serie derivata conver-
ge in egual grado. In tale campo è adunque legittima la derivazione per serie*, e posto:

$$w = \sum a_n z_1^n$$

la w ammetterà derivate parziali prime finite e continue date dalle formole

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \sum n\, a_n z^{n-1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \sum n\, a_n z^{n-1}$$

onde sarà soddisfatta la condizione di monogeneità

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Abbiamo dunque il teorema:

« Una serie di potenze $w = \sum a_n z^n$ rappresenta nell'interno del cerchio di convergenza una funzione finita, continua e monodroma della variabile complessa z.

È chiaro poi che una tale funzione possiede non solo la derivata prima, ma anche derivate di tutti gli ordini, rappresentate dalle serie delle corrispondenti derivate prime, seconde ecc., le quali tutte hanno il medesimo cerchio di convergenza della primitiva, e perciò le successive

* Dini - Fondamenti - pag 115, § 105

derivate di w sono tutte funzioni finite continue e monodrome della variabile complessa $\underline{z}$ entro il cerchio di convergenza.

§ 5. Teorema di Hadamard. Le considerazioni del paragrafo 3 ci hanno dimostrata l'esistenza del cerchio di convergenza per una serie di potenze. Ora andiamo a dimostrare un teorema, dovuto ad Hadamard, col quale si riesce a precisare il valore del raggio R del cerchio di convergenza.

Partiamo dall'ipotesi che la serie:

$$\sum a_n z^n$$

converga in qualche punto z_0 fuori dell'origine; allora, poichè:

$$\lim_{n=\infty} |a_n| |z_0|^n = 0$$

potremo prendere $\underline{m}$ tanto grande che si abbia sempre

$$|a_n| |z_0|^n < 1 \quad \text{per } n \geq m$$

cioè

$$|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n} \quad (n \geq m)$$

Ne risulta che, per una serie di potenze convergente in qualche punto fuori dell'origine $z=0$, nella serie dei numeri positivi:

(9) $|a_1|, \sqrt{|a_2|}, \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots\ldots\ldots, \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots$

tutti i termini si debbono mantenere inferiori di una quantità finita g. Ora ripartiamo i numeri positivi g in due classi A), B) ponendo nella prima classe A) ogni numero $\underline{a}$ tale che nella serie (9) <u>in-là</u> <u>quanto</u> <u>si</u> <u>vuole</u> vi siano sempre dei termini $> a$ e attribuendo un numero $\underline{b}$ alla seconda classe B) quando nella serie (9) <u>da</u> <u>un</u> <u>certo</u> <u>punto</u> <u>in</u> <u>poi</u> tutti i termini sono $\leq b$. Questa ripartizione dei numeri, fra $\underline{0}$ e g, in due classi soddisfa, come subito si vede, alle condizioni fondamentali già citate al paragrafo 3.° * che assicurano l'esistenza di un numero limite α che separa le due classi, tale cioè che qualunque numero $< \alpha$ appartiene alla classe A), qualunque numero $> \alpha$ <u>appartiene</u> a B).

Ciò posto, il teorema di Hadamard consiste nella proposizione seguente:

«Il raggio R del cerchio di convergenza è precisamente uguale <u>all'inversa di questo numero α</u>: $R = \frac{1}{\alpha}$ »

* Dini - Fondamenti - pag 19

E, infatti, sia dapprima
$$|z| < \frac{1}{\alpha}$$
e prendiamo ε positivo e così piccolo che sia
$$(\alpha+\varepsilon)|z| = q < 1$$
Poichè il numero $\alpha+\varepsilon$ appartiene a $B)$, da un certo valore di n in poi, è sempre
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha+\varepsilon$$
indi:
$$\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|z| \leq q$$
$$|a_n||z|^n \leq q^n;$$
dunque la serie
$$\Sigma\, |a_n|\cdot|z|^n$$
ha, da un certo punto in poi, i suoi termini minori di quelli della progressione $\Sigma\, q^n$ di ragione $q<1$ ed è perciò convergente.

Sia ora invece
$$|z| > \frac{1}{\alpha}$$
e poniamo
$$\varepsilon = \alpha - \frac{1}{|z|}$$
Il numero
$$\alpha-\varepsilon = \frac{1}{|z|}$$
appartiene alla classe $A)$, quindi vi sono sempre dei valori di n tanto grandi quanto si vuole e tali che
$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|}$$
cioè
$$|a_n||z|^n > 1,$$

onde deduciamo che la serie $\sum |a_n||x|^n$ è, in tal caso, divergente.

Dal teorema di Hadamard seguono diversi corollari. In primo luogo che il raggio del cerchio di convergenza di una serie di potenze dipende unicamente dai moduli dei coefficienti, ciò che del resto segue anche subito dal fatto che la serie dei moduli è convergente nell'interno, divergente all'esterno del cerchio. In secondo luogo si vede che la serie sarà convergente in tutto il piano quando sia $\alpha = 0$, ossia quando

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

E, infatti, se $\alpha = 0$, un numero positivo ε comunque piccolo appartiene alla classe B) e perciò, da un certo valore di n in poi si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \varepsilon$$

Viceversa se $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ sarà $\alpha = 0$; dunque: La condizione necessaria e sufficiente perchè la serie di potenze $\sum a_n z^n$ sia convergente in tutto il piano, è che si abbia

$$\boxed{\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0}$$

§ 6 Funzioni elementari e^z, sen z, cos z, log z, z^a - Esempi di serie convergenti in tutto il piano si hanno nelle serie

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{\Pi(n)!} = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \cdots,$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\Pi(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \cdots$$

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\Pi(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} \cdots$$

che per z reale, $z = x$, rappresentano rispettivamente le funzioni esponenziale e circolari: e^x $\operatorname{sen} x$, $\cos x$. Ma anche per valori complessi di z le serie hanno un significato e rappresentano funzioni finite e continue e monodrome della variabile complessa z che s'indicano ancora co' simboli:

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\Pi(n)!}$$

$$\operatorname{sen} z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{\Pi(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{\Pi(2n)!}$$

e queste formole, per z qualunque, servono appunto di definizione alle funzioni stesse. In sostanza queste funzioni si riducono unicamente alla funzione esponenziale mediante le formole d'Eulero

$$\begin{cases} e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z \\ e^{-iz} = \cos z - i \operatorname{sen} z \end{cases}$$

La proprietà fondamentale della funzione esponenziale è espressa dal teorema d'addizione

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

che si verifica facilmente eseguendo la moltiplicazione delle due serie. Ne segue che in $e^z = e^{x+iy}$ si può facilmente separare la parte reale ed immaginaria con la formola:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Di qui si trae che $e^{z_1} = e^{z_2}$ allora soltanto quando la differenza $z_1 - z_2$ eguaglia un multiplo intero di $2\pi i$ ossia

La funzione esponenziale e^z è una funzione semplicemente periodica col periodo fondamentale $2\pi i$

Dalle formole d'Eulero segue poi che <u>$\operatorname{sen} z$, $\cos z$ sono egualmente periodiche col periodo fondamentale 2π.</u>

Infine notiamo che il teorema d'addizione della funzione esponenziale porta ad estendere i teoremi d'addizione delle funzioni circolari a valori complessi dell'argomento con le formole

$$\operatorname{sen}(z_1+z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$$
$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 .$$

Oltre le funzioni elementari precedenti consideriamo anche le funzioni

$$\log z \quad , \quad z^a \quad (a \text{ costante qualunque})$$

le quali, benchè in certi campi non siano più monodrome, sono di natura così elementare che conviene osservarne subito le proprietà.

Per definire la funzione $\log z$ ricordiamo che (a causa delle citate formole di Eulero) si può esprimere z per mezzo del suo modulo r e dell'argomento θ con la formola:

$$z = r e^{i\theta};$$

ma ricordiamo altresì che mentre il modulo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ è perfettamente determinato l'argomento $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$ lo è soltanto a meno di multipli di 2π.

Prendiamo allora come definizione di $\log z$ la formola

$$\log z = \log r + i\theta$$

Prescindendo da ciò che $\log z$ ha in ogni punto infiniti valori, differenti per multipli di $2\pi i$, vediamo che le parti reali ed immaginarie di $\log z$:

$$u = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) \;;\; v = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

soddisfano alla condizione di monogeneità

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Ora osserviamo che, se in un punto del piano scegliamo per l'argomento θ uno dei suoi valori, e facciamo descrivere a z partendo dal punto, una linea qualunque continua, in ogni punto del cammino sarà fissato dalla legge di continuità il valore che dovremo prendere per θ e in particolare se descriveremo una linea chiusa σ che non giri attorno all'origine ritorneremo al punto di partenza col medesimo valore di θ. Se consideriamo adunque, per esempio, un circolo di raggio grande quanto si vuole, ma che non contenga nell'interno il punto $z=0$, basterà fissare il valore di $\log z$ in un punto del campo e la funzione $\log z$ sarà, in quel campo circolare, finita, continua e monodroma. Così potremo dire (§2) che in qualunque campo la funzione $\log z$ sarà funzione della variabile complessa z e soltanto se il campo sarà tale che si possano de=

scriversi curve chiuse avvolgenti l'origi=
ne la funzione $\log z$ sarà polidroma (infinitiforme) ed avrà in ogni punto infiniti valori differenti per multipli di $2\pi i$

Descritte così le proprietà della funzione $\log z$, definiremo la potenza z^a di z con a costante complessa qualunque assumendo

$$z^a = e^{a \log z}$$

Essa sarà anche una funzione della va=
riabile complessa z e i suoi valori in un punto risulteranno da uno di essi; mol=
tiplicando per potenze di $e^{2\pi i a}$. Il nu=
mero di questi valori sarà finito soltan=
to quando a sia un numero reale frazio=
nario; in tutti gli altri casi infinito. La polidromia di z^a come quella di $\log z$ dipende dal poter girare intorno al pun=
to (singolare) $z = 0$; ma le varie determi=
nazioni di z^a costituiscono altrettante fun=
zioni monodrome in ogni campo ove tali giri attorno all'origine siano impossibili.

§ 7. Esempi di serie di potenze conside=
rate sulla periferia del cerchio di convergenza

Vediamo ora in effettivi esempî come una serie di potenze possa offrire sulla periferia del cerchio di convergenza le circostanze più svariate. Per cominciare da un esempio semplicissimo consideriamo la progressione geometrica

$$\sum_0^\infty z^n = \frac{1}{1-z}$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio = 1. Sulla circonferenza essa non converge in alcun punto; e, invero, per

$$z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

essa si riduce a

$$\sum (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

e non converge perchè il modulo del termine generale, anzichè convergere a zero, è sempre uguale ad 1. Eguali circostanze offrirà la serie

$$\sum a_n z^n$$

quando i moduli dei coefficienti a_n non tendano a zero e si abbia:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = 1;$$

il cerchio di convergenza della serie è di raggio = 1 e la serie non converge in nessun punto della periferia.

Al contrario consideriamo una serie:

$$\sum \alpha_n z^n$$

i cui coefficienti α_n siano quantità tutte positive decrescenti (da un certo punto in poi) e tali che

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0 \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = 1$$

Sulla circonferenza del cerchio di convergenza, di raggio $=1$, la serie convergerà dappertutto salvo eventualmente nel punto $z=1$, le condizioni imposte alle α non assicurando la convergenza della serie $\sum \alpha_n$.
Proveremo la nostra asserzione dimostrando che le serie

$$\sum \alpha_n \cos n\theta \quad ; \quad \sum \alpha_n \operatorname{sen} n\theta$$

convergono ogni qualvolta θ non è multiplo di 2π. Consideriamo, p.e., la somma

$$S_n = \alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \cos 2\theta + \dots\dots + \alpha_n \cos n\theta$$

dei primi n termini della prima serie.
Ne deduciamo

$$2S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \alpha_1\left(\operatorname{sen}\frac{3\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) + \alpha_2\left(\operatorname{sen}\frac{5\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}\right) + \dots\dots + \alpha_n\left(\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)$$

che possiamo scrivere

$$2S_n \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}\frac{3\theta}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \operatorname{sen}\frac{5\theta}{2}(\alpha_2 - \alpha_3) + \dots \dots + \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\theta}{2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\theta}{2}$$

Poichè $\lim \alpha_n = 0$ e la serie a termini positivi (da un certo punto in poi)

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \cdots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \cdots$$

converge, convergerà pure verso un limite determinato e finito

$$2 S_n \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

quindi anche S_n, poichè $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \neq 0$. Considerazioni analoghe valgono per la seconda serie

$$\sum \alpha_n \operatorname{sen} n\theta .$$

Come esempio del caso ora considerato adduciamo la serie logaritmica

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots$$

che converge su tutta la periferia del cerchio di convergenza salvo che in $z = 1$.

Infine, essendo m un numero intero qualunque > 1, consideriamo la serie

$$z + z^m + z^{m^2} + \cdots + z^{m^n} + \cdots$$

che ha un cerchio di convergenza di raggio $= 1$. Se consideriamo un punto della periferia ove un termine z^{m^r} della serie sia eguale all'unità; anche tutti i termini seguenti saranno $= 1$ e la serie sarà ivi <u>divergente</u>. Questi punti della periferia corrispondono ad a=

nomali θ date da

$$\theta = \frac{2k\pi}{m^r} \quad (k,\ r,\ \text{interi qualunque})$$

e formano sulla circonferenza un gruppo di punti dovunque condensato.

§ 8 Rappresentazioni conformi

Della teoria delle funzioni di variabile complessa si può dare un'interpetrazione geometrica <u>reale</u> che importa conoscere. Supponiamo che sia <u>w</u> funzione della variabile complessa <u>z</u> in un certo campo C. Scindendo <u>w</u> nella sua parte reale ed immaginaria

$$w = u + iv,$$

distendiamo i valori di <u>w</u> in un altro piano complesso π' ove gli assi delle quantità reali ed immaginarie si diranno gli assi O'u, O'v. Ad ogni punto z di C corrisponderà un punto w di π' e mentre <u>z</u> percorre tutta l'area C, w percorrerà nel suo piano un campo C', che sarà finito se w è dovunque finita. Si avrà così una <u>rappresentazione</u> dell'area piana C sull'area piana C' tale che ad ogni punto di C corrisponderà un sol punto di C', e ad ogni punto di C' uno o più punti di C con legge di continuità. Se z descrive in C una curva ordinaria γ, w descriverà in C' una curva corrispondente γ' e, in generale, ogni figura in C avrà in C' la sua corrispondente figura (immagine). Ora la proprietà essenziale di siffatta rappresentazione è data dal teorema: « Ogni angolo di una figura nel piano z eguaglia l'angolo corrispondente della figura immagine nel piano w (salvo in punti eccezionali)* ». Una rappresentazione che goda della proprietà di conservare gli angoli dicesi conforme, talchè ogni funzione di variabile complessa dà luogo ad una rappresentazione conforme. Ora noi dimostreremo, insieme al teorema enunciato anche il suo inverso che, cioè, ogni rappresentazione conforme di un'area piana sopra un'altra area piana si ottiene in siffatta guisa e preciseremo inoltre se vi ha conservazione diretta o inversa degli angoli.

Consideriamo dunque due piani π, π',

* I punti eccezionali sono, come si vedrà, quelli ove la derivata $\frac{dw}{dz}$ è zero o infinita

sui quali scegliamo due rispettivi sistemi di assi cartesiani ortogonali Ox, Oy; $O'x'$, $O'y'$ e fissando le pagine positive dei due piani supponiamo le coppie di assi egualmente orientate.* Consideriamo poi una rappresentazione del piano π sul piano π' analiticamente espressa dalle formole:

$$x' = x'(x,y) \; ; \; y' = y'(x,y)$$

le funzioni $x'(x,y)$; $y'(x,y)$ di x, y essendo supposte, entro un certo campo C, ad un sol valore, finite e continue insieme alle derivate parziali prime. Se consideriamo un punto $P \equiv (x,y)$ ed una curva γ uscente da esso, indicando con θ l'angolo di cui deve rotare nel verso positivo (da destra verso sinistra) la direzione positiva dell'asse delle x per assumere la direzione della tangente a γ in P, avremo:

$$tg\, \theta = \frac{dy}{dx}$$

I differenziali essendo presi lungo la curva**

* Fissiamo, p.e., che per un osservatore collocato sulla pagina positiva e che guardi verso la direzione positiva Ox ($O'x'$) la direzione positiva Oy ($O'y'$) giaccia alla sinistra –

** Quale delle due direzioni della tangente si assuma come positiva è evidentemente indifferente per la formola del testo.

Al punto $P \equiv (x, y)$ corrisponderà in π' il punto $P' \equiv (x', y')$ e alla curva γ una curva γ' uscente da P' con una direzione corrispondente alla formola

$$\tan\theta' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy}{\frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy}$$

Ne risulta la formola

$$(10) \qquad \tan\vartheta' = \frac{\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y}\tan\theta}{\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\tan\theta}$$

la quale mostra come ad ogni direzione uscente da P ne corrisponde, biunivocamente, una uscente da P' ed anzi i due fasci di direzioni corrispondenti sono sempre fra loro projettivi, qualunque sia la corrispondenza fra i due piani.

Ma supponiamo ora che la rappresentazione sia conforme cioè gli angoli siano conservati e distinguiamo due casi secondo chè anche il senso degli angoli viene conservato ovvero invertito.

Nel primo caso se facciamo ruotare la direzione uscente da P in un certo senso, p. e., nel senso positivo, di altrettanto dovrà ruotare e nel medesimo verso la direzione corrispondente per P', cioè la diffe=

renza $\theta'-\theta$ dovrà rimanere costante al variare di θ. Nel secondo caso invece rimarrà costante la somma $\theta'+\theta$. Avremo quindi

$$\theta' = \pm\,\theta + \alpha\,,$$

il doppio segno corrispondendo ai due casi ed α essendo costante al variare di θ ma, in generale, funzione di x, y.
Ponendo

$$tg\,\alpha = m$$

ne deduciamo

$$tg\,\theta' = \frac{m \pm tg\,\theta}{1 \mp m\,tg\,\theta}$$

e, paragonando con la (10), ne deduciamo

$$(11)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \pm\,\frac{\partial y'}{\partial y} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} &= \mp\,\frac{\partial y'}{\partial x} \end{aligned}\right.$$

Viceversa se le condizioni (11) sono soddisfatte vediamo subito che sarà $\theta'-\theta$ o $\theta'+\theta$ costante e la rappresentazione sarà conforme diretta o conforme inversa.
Nel 1° caso le (11) mostrano che $x'+iy'$ deve esser funzione della variabile complessa $(x+iy)$, nel secondo caso invece della coniugata $(x-iy)$. Per altro qui è supposto implicitamente che non siano simultanea-

mente zero le derivate parziali di x', y' cioè che non sia nulla la derivata $\frac{dz'}{dz}$. Dunque: La più generale rappresentazione conforme diretta o inversa di un piano sopra un altro si ottiene ponendo la variabile complessa dell'un piano eguale ad una funzione della variabile complessa dell'altro o della coniugata. Punti eccezionali della rappresentazione sono quelli ove la derivata è nulla (od infinita).

Spesso si dice di una rappresentazione conforme che essa conserva la similitudine delle parti infinitesime, ciò che è una conseguenza geometrica della conservazione degli angoli. Analiticamente constatiamo il fatto osservando che se ds è l'elemento d'arco di una curva γ, ds' quello corrispondente della curva γ', abbiamo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy\right)^2$$

indi, per le ((11), pag 40)

$$ds'^2 = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2\right] ds^2$$

Se valgono nelle (11) pag 40) i segni superio=ri abbiamo dunque

$$\frac{ds'}{ds} = \left|\frac{dz'}{dz}\right|$$

Ciò dimostra che tutti gli elementi linea=ri spiccati da un punto P subiscono nella rappresentazione il medesimo allungamento la cui grandezza è mi=surata dal modulo della derivata.

§ 9 Esempi diversi.

a) Consideriamo la rappresentazione conforme stabilita fra i due piani complessi z, z' assumendo

$$z' = z^n$$

ove n è un numero intero positivo. Qui abbiamo $\frac{dz'}{dz} = n z^{n-1}$ e perciò la rap=presentazione riuscirà conforme in tut=ti i punti salvo che in $z=0$. E se intro=duciamo coordinate polari ponendo

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad z' = \rho' e^{i\theta'},$$

avremo le formole di rappresentazione

$$\rho' = \rho^n \qquad \theta' = n\theta$$

Queste dimostrano che nell'intorno dell'o=rigine $z=0$ gli angoli non sono conser=vati nella rappresentazione, ma invece n-uplicati. Così, p.e., se consideriamo nel piano z il settore OAB del circolo di raggio $=1$ racchiuso dalle rette $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{n}$, la figura immagine in z' sarà un semicerchio pure di raggio $=1$, ai due raggi estremi OA OB corrispondendo i raggi per diritto $O'A'$, $O'B'$.

b) Se prendiamo

$$z' = \frac{z-i}{z+i}$$

vediamo che per z reale il modulo di z' è $=1$ e percorrendo z tutto l'asse reale da $-\infty$ a $+\infty$ z' percorre la circonferenza

$$x'^2+y'^2=1$$

in verso positivo cominciando da $z'=1$ e ritornandovi. Ai punti del semipiano positivo $\underline{z}$ (del semipiano in cui $y>0$) corrispondono biunivocamente i punti interni al detto cerchio. La formola precedente fornisce quindi la rappresentazione conforme del semipiano sul cerchio. Non vi ha alcun punto eccezionale perchè l'unico punto $z=-i$ ove diventano infinite z' e $\frac{dz'}{dz}$ non appartiene al semipiano positivo.

c) Consideriamo la funzione

$$z' = z^2-1 = (z-1)(z+1).$$

Poichè i moduli di $z-1$, $z+1$ sono rispettivamente le distanze di z dai punti $+1$, -1, alla circonferenza di centro $z'=0$ e di raggio $=1$ corrisponderà una lemniscata di Bernoulli coi fuochi in $z=1$, $z=-1$ e più in generale ad ogni circonferenza concentrica in z' una cassinoide coi fuochi nei detti punti. L'interno della foglia a destra della lemniscata verrà rappresentato nell'interno del detto cerchio, al fuoco della lemniscata corrispondendo il centro del cerchio - e la rappresentazione sarà dappertutto biunivoca e conforme tranne al nodo $z=0$ della lemniscata, ove

$$\frac{dz'}{dz} = 0 \, *$$

Notiamo che alle circonferenze di centro $0'$ corrispondendo cassinoidi confocali, alle rette uscenti da $0'$ corrisponderanno curve che taglieranno ad angolo retto tutte le cassinoidi.

Scrivendo che lungo queste curve l'argomento di z' è costante troviamo subi=

* Ivi, in effetto, l'angolo piatto alla circonferenza viene trasformato in un angolo metà -

to che esse hanno per equazione

$$x^2 - y^2 - 1 - 2kxy = 0 \quad (k \text{ paramet.})$$

e sono dunque iperbole equilatere col centro in $z = 0$ e passanti pei due punti fissi $x = +1$; $x = -1$ sull'asse delle x **

d) Prendiamo la funzione

$$z' = \cos z$$

cioè

$$x' + iy' = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

da cui

$$x' = \cos x \cosh y; \quad y' = -\operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$$

e però

$$\begin{cases} \dfrac{x'^2}{\cosh^2 y} + \dfrac{y'^2}{\operatorname{senh}^2 y} = 1 \\[2ex] \dfrac{x'^2}{\cos^2 x} - \dfrac{y'^2}{\operatorname{sen}^2 x} = 1 \end{cases}$$

Vediamo quindi che alle rette $y = \text{cost}^{te}$ corrispondono le ellissi coi fuochi in $x' = \pm 1$ $y' = 0$ e alle rette $x = \text{cost}^{te}$ le iperbole confocali. Segue di qui che ellissi ed iperbole confocali formano un doppio sistema ortogonale (isotermo).

e) Consideriamo ancora il seguente esempio di Schwarz. La funzione:

** Evidentemente si può anche dire che si ha un fascio di coniche i cui punti base oltre i due ora detti sono i punti immaginari

$$x = 0 \quad ; \quad y = \pm i$$

$$z' = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{z}\right)$$

fornisce la rappresentazione conforme della parte del piano z interna alla parabola col fuoco in $z=0$ e col vertice in $z=1$ sul cerchio del piano z', col centro nell'origine, di raggio unitario.

E invero l'equazione polare della detta parabola è

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

talchè quando z percorre la sua periferia si ha

$$\sqrt{z} = 1 + i \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{e però}$$

$$z' = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right) = \left\{\frac{1 + i \operatorname{tgh}\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}{1 - i\operatorname{tgh}\left(\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)}\right\}^2,$$

quindi $|z'| = 1$. Ai punti interni alla parabola corrispondono i punti interni al circolo (biunivocamente); al fuoco della parabola corrisponde il centro del circolo. Similmente si vedrà che la parte esterna alla detta parabola è rappresentata sul circolo stesso dalla formola

$$z' = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1,$$

dove è da notarsi che, il punto $z=0$ essendo esterno all'area ora considerata, la funzione del secondo membro è nel l'area monodroma.

f) Infine per addurre un semplicissimo esempio di rappresentazione conforme inversa assumiamo

$$z' = \frac{1}{z_0} = \frac{1}{x - iy},$$

onde

$$x' = \frac{x}{x^2+y^2} \quad y' = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Queste sono le formole d'inversione per raggi vettori reciproci rispetto al cerchio:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Capitolo 2°*

Sostituzioni lineari - Gruppi discontinui di sostituzioni lineari e loro rappresentazione geometrica

§.10. Sostituzioni lineari come rappresentanti affinità circolari - Consideriamo la rap-

* N. B. Alle teorie del presente capitolo è stata data una estensione maggiore di quella che comporterebbe il luogo qui loro assegnato in vista delle applicazioni che ne faremo nella seconda parte (teoria delle funzioni ellittiche modulari) e della importanza che hanno nella moderna teoria delle funzioni automorfe (Fuchsiane - Kleiniane)

presentazione conforme che si stabilisce fra due piani ponendo la variabile complessa z' dell'un piano eguale ad una funzione lineare della variabile complessa z dell'altro:

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sono costanti complesse qualunque, purchè però sia il determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \ *$$

Moltiplicando simultaneamente i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per un fattore k, potremo dare al determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, della sostituzione lineare (1), un valore arbitrario e noi fisseremo di assumere sempre

$$(2) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

e diremo unimodulari le sostituzioni per le quali questa condizione è verificata.

La rappresentazione conforme data dalla (1) gode della seguente importante proprietà: Essa trasforma i circoli (o rette)

* Altrimenti il secondo membro sarebbe indipendente da z.

del piano z in circoli (o rette) del piano z'. La corrispondenza (quadratica) in tal guisa stabilita fra i punti dei due piani è la così detta «affinità circolare (diretta) di Möbius.

Per dimostrare l'enunciata proprietà osserviamo che indicando con z_0, come faremo costantemente in seguito, la quantità coniugata di z:

$$z_0 = x - iy,$$

l'equazione di ogni circolo (o retta) del piano si potrà scrivere

$$Azz_0 + Bz + B_0 z_0 + C = 0$$

i coefficienti A, C essendo reali e B, B_0, complessi coniugati. Precisamente avremo un circolo od una retta secondo che $A \neq 0$ ovvero $A = 0$. Il circolo sarà reale od immaginario secondo che $BB_0 - AC > 0$, o $BB_0 - AC < 0$ e si ridurrà alla coppia di rette cicliche pel centro se $BB_0 - AC = 0$

Basterà dimostrare che se z' descrive un circolo anche z descrive un circolo, poichè z si esprime pure linearmente per z' con la sostituzione (inversa)

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}.$$

Ora prendiamo un circolo (o retta) nel piano z'; la sua equazione sarà

$$A z' z'_0 + B z' + B_0 z'_0 + C = 0$$

e la linea corrispondente nel piano $\underline{z}$ avrà l'equazione

$$A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) + \\ + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0$$

ovvero

$$(3) \quad A' z z_0 + B' z + B'_0 z_0 + C' = 0 \,,$$

dove si ponga

$$\begin{cases} A' = A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0 \\ B' = A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0 \\ B'_0 = A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta \\ C' = A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0 \end{cases}$$

Si vede dunque che A', C' sono reali e B', B'_0 coniugati e però la linea (3) è un circolo (o una retta se $A' = 0$).

Insieme alle rappresentazioni conformi dirette dalle (1) ci converrà considerare anche quelle <u>inverse</u> date dalla formola

$$(1^*) \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

Anche in questa rappresentazione i circoli si trasformano in circoli: e gli angoli si conservano; ma viene invertito il senso degli angoli. La corrispondenza fra i due piani è un' <u>affinità circolare inversa</u> di Möbius. Distingueremo le sostituzioni lineari corrispondenti ((1) pag 47), ((1)* pag 50) dicendo le (1) di prima specie, le (1*) di seconda specie.

Notiamo che con una conveniente sostituzione lineare di 1ª specie si possono portare tre punti arbitrari del piano

$$z_1, z_2, z_3$$

in altri tre punti arbitrari

$$z_1', z_2', z_3'$$

e la corrispondente sostituzione è determinata univocamente dalla formola:

$$\frac{z'-z_1'}{z'-z_2'} \cdot \frac{z_3'-z_2'}{z_3'-z_1'} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$$

Ma se si vuole che un quarto punto del piano, z_4, sia trasportato nel punto z_4' sarà necessaria (e sufficiente) l'eguaglianza dei rapporti anarmonici:

$$(z_1' z_2' z_3' z_4') = (z_1 z_2 z_3 z_4).$$

Di qui si può dedurre facilmente:
Condizione necessaria e <u>sufficiente</u> perchè i quattro punti $z_1 z_2 z_3 z_4$ siano sopra un circolo, è che il rapporto anarmonico

$$(z_1 z_2 z_3 z_4)$$

sia reale*.

§ 11 Composizione delle sostituzioni - Se eseguiamo successivamente due sostituzioni lineari (di 1ª specie)

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\ ; \quad z'' = \frac{\alpha' z' + \beta'}{\gamma' z' + \delta'}$$

il risultato è una nuova sostituzione lineare

$$(4) \qquad z'' = \frac{(\alpha\alpha' + \gamma\beta')z + (\beta\alpha' + \delta\beta')}{(\alpha\gamma' + \gamma\delta')z + (\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

Spesso indicheremo la sostituzione lineare ((1) pag 47) scrivendo i coefficienti nel quadro

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix},$$

la denominazione data alle variabili essendo naturalmente indifferente. La sostituzione ((3) pag 50) che risulta dalle due successive

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$$

si dice la sostituzione composta o il prodotto delle due nell'ordine assegnato e scriveremo simbolicamente

$$(5) \qquad \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta', & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta', & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

---

* Per vederlo basta trasportare con una sostituzione lineare tre dei punti sull'asse reale dove dovrà quindi trasportarsi anche il quarto, se i quattro punti sono sopra un circolo.
La reciproca è pur chiara.

ponendo a sinistra la sostituzione eseguita prima*. La designazione dell'ordine è evidentemente necessaria perchè, invertendo l'ordine delle sostituzioni componenti, cambia (in generale) la sostituzione composta.

Talora indicheremo anche simbolicamente una sostituzione lineare con una sola lettera e così indicando con S_1, S_2 le due successive sostituzioni componenti, con S_3 la composta scriveremo

$$S_1 S_2 = S_3$$

Definito il prodotto di due sostituzioni, riesce altresì definito il prodotto di tre o più sostituzioni

$$S_1 S_2 \ldots\ldots S_n$$

intendendo con ciò la sostituzione che nasce

---

* Si osservi che la legge ((5) pag. preced.) di composizione di due sostituzioni è quella stessa della moltiplicazione dei determinanti $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ e precisamente, nella notazione adottata il 1° e 2° coefficiente della sostituzione composta si ottengono moltiplicando successivamente le due colonne di $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ per la prima linea di $\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ \gamma' & \delta'\end{pmatrix}$ e il secondo e il quarto moltiplicando le colonne della prima per la seconda linea della seconda.

Componendo prima S_1 con S_2 la sostituzione composta con S_3 e così via fino ad S_n*.
È importante osservare che, mentre in un prodotto di due sostituzioni non è lecito invertire l'ordine dei fattori, non vale cioè la legge <u>commutativa</u> vale però la legge <u>associativa</u>. Per vederlo basta dimostrarlo pel caso elementare di tre fattori, cioè provare che si ha:

$$(S_1 S_2) S_3 = S_1 (S_2 S_3),$$

ciò che si può constatare direttamente con la formola ((5) pag 52) di composizione o dedurre anche a priori dal significato della composizione**.
Se in un prodotto di <u>n</u> sostituzioni i singoli fattori sono tutti eguali fra loro e ad una medesima sostituzione S, il prodotto stesso si dice la potenza n^{ma} di S e s'indica con S^n. A causa della legge associa-

---

* Dovremmo scrivere propriamente: $(\ldots((S_1 S_2) S_3)\ldots) S_n)$

** La S_1 porti z in z', la S_2 z' in z'', la S_3 z'' in z'''. La sostituzione $S_1 S_2$ porta z in z'' e la $S_2 S_3$ porta z' in z'''; quindi ambedue le sostituzioni $(S_1 S_2) S_3$, $S_1 (S_2 S_3)$ portano z in z''' e sono identiche.

tiva vale evidentemente la formola

$$(6) \qquad S^m . S^n = S^{m+n},$$

essendo m, n numeri interi positivi.
Insieme ad una sostituzione

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

si può considerare la sua inversa

$$\begin{pmatrix} \delta, -\beta \\ -\gamma, \alpha \end{pmatrix},$$

che composta con S produce la sostituzione identica $\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta, -\beta \\ -\gamma, \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{pmatrix}.$$

Questa sostituzione inversa s'indica con

$$S^{-1};$$

la sua introduzione ci permette di definire le potenze di S con esponente negativo, convenendo che sia

$$S^{-n} = (S^{-1})^n.$$

Dopo ciò si vedrà subito che la formola (6) vale per esponenti interi qualunque positivi o negativi. E perchè la formola (6) valga senza eccezione converremo di considerare anche la potenza S^0 di S, con esponente zero, ponendo $S^0 = 1$.
Essendo S, T due qualunque sostituzioni, la sostituzione: $S_1 = T^{-1} S T$, dicesi la

trasformata della S per mezzo della T e si ha inversamente

$$S = TS_1T^{-1} = (T^{-1})^{-1}S_1T^{-1};$$

talchè S è la trasformata della S_1 per mezzo della T^{-1}. Due tali sostituzioni S, S_1 si diranno simili. E' importante osservare il teorema: «In due sostituzioni simili la somma $\alpha+\delta$ del 1° e 4° coefficiente è la stessa». Il calcolo effettivo dimostra subito la proprietà enunciata che potremo anche esprimere sotto altra forma dicendo: «La somma $f=\alpha+\delta$ non cangia trasformando comunque la sostituzione.» Per ciò diremo $f=\alpha+\delta$ l'invariante della sostituzione.

Può darsi che una sostituzione lineare S ripetuta un numero sufficiente n di volte, riproduca l'identità, in simboli

$$S^n = 1;$$

allora la sostituzione si dice periodica ed il più piccolo esponente positivo n pel quale $S^n = 1$ dicesi il suo periodo*

* Si vedrà subito che in tal caso, essendo α, β due numeri interi qualunque sarà: $S^\alpha = S^\beta$, quando e solo quando $\alpha \equiv \beta \pmod n$.

Ma può anche accadere che nella serie indefinita (nei due sensi) delle potenze di S : ...... $S^{-3}, S^{-2}, S^{-1}, 1, S, S^2, S^3$ ......

i termini non si riproducano mai e allora la sostituzione si dirà aperiodica. Due sostituzioni simili sono sempre insieme aperiodiche o periodiche ed, in quest'ultimo caso, hanno il medesimo periodo*

§12. Classificazione delle sostituzioni di 1ª specie. Interpreteremo d'ora innanzi la variabile z e la sua trasformata lineare z' nel medesimo piano complesso.

Per ogni sostituzione lineare ((1) pag 47) vi sono allora due punti, distinti o coincidenti, che rimangono fissi, quelli che corrispondono alle radici dell'equazione

$$(7) \qquad \gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0$$

Ora osserviamo che se la sostituzione S lascia fissi i punti A, B e la T trasporta A, B rispettivamente in A', B' la trasformata $T^{-1} S T$ avrà per punti fissi A', B'.

* Ciò risulta facilmente dall'osservare che

$$(T^{-1} S T)(T^{-1} U T) = T^{-1}(SU)T$$

quindi

$$(T^{-1} S T)^n = T^{-1} S^n T$$

Il discriminante della ((7) pag. preced.) essendo:
$$(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=(\alpha+\delta)^2-4(\alpha\delta-\beta\gamma)=(\alpha+\delta)^2-4,$$
i due punti coincideranno quando
$$\alpha+\delta=\pm 2.$$
In tal caso la sostituzione dicesi parabolica. Ad ogni sostituzione parabolica possiamo sostituirne una simile che lasci fisso il punto $z=\infty$; questa avrà necessariamente la forma
$$z'=z+\beta \; *$$
e rappresenterà nel piano complesso una traslazione. Una sostituzione parabolica è quindi sempre necessariamente aperiodica.

Supponiamo ora che la sostituzione S lasci fissi due punti distinti. Potremo sostituirvi una trasformata che lasci fissi i due punti $z=0$, $z=\infty$, che avrà quindi la forma
$$z'=\frac{\alpha}{\delta}z \qquad \alpha\delta=1$$
e la scriveremo semplicemente
$$z'=kz;$$

---

* Propriamente otteniamo dapprima
$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\delta};$$
ma siccome $\alpha\delta=1$ e inoltre (§ 11 pag 52 e segg) $\alpha+\delta=\pm 2$ ne risulta $\alpha=\delta=\pm 1$

per l'invariante $j = \alpha + \delta$ avremo

$$j = \frac{k+1}{\sqrt{k}}$$

Ora distinguiamo tre casi:

1°. k reale positivo; la sostituzione in tal caso si dice iperbolica e l'invariante j è reale ed in valore assoluto > 2.

2°. k immaginario di modulo $= 1$

$$k = e^{i\varphi}\ ;\ j = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$

La sostituzione si dice ellittica e l'invariante j è reale < 2

3°. k immaginario ovvero reale e negativo. Allora l'invariante j è immaginario e la sostituzione si dice lossodromica.

Una sostituzione normale iperbolica

$$z' = kz \quad (k \text{ reale positivo})$$

è un'omotetia diretta del piano. Per essa tutte le rette uscenti dall'origine restano fisse.

Una sostituzione <u>normale</u> ellittica

$$z' = e^{i\varphi} z$$

è una rotazione del piano complesso attorno all'origine d'ampiezza φ. Per essa rimangono fissi tutti i circoli col <u>centro nell'origine</u>.*

* V. nota alla pagina seguente.

In fine una sostituzione lossodromica è una combinazione di una ellittica e di una iperbolica coi medesimi punti fissi.

Riepilogando abbiamo il risultato:

La specie di una sostituzione:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

dipende dall'invariante $j = \alpha + \delta$. Se questo è reale la sostituzione è ellittica, parabolica od iperbolica secondo che $|j| \lesseqgtr 2$. Quando l'invariante j è immaginario la sostituzione è lossodromica.

È chiaro che fra le sostituzioni lineari solo quelle ellittiche possono essere periodiche e ciò avviene quando l'ampiezza φ (che dipende unicamente dall'invariante j) è in rapporto commensurabile con 2π.

§ 13. Sostituzioni di 2ª specie. Riflessioni. Una sostituzione S di 2ª specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

---

* (Nota della pag. preced.) In generale in una sostituzione iperbolica qualunque rimangono fissi tutti i circoli di un fascio coi due punti base reali; in una ellittica quelli di un fascio coi punti base immaginari.

da luogo, ripetuta, alla sostituzione di 1.ª specie

$$(8)\quad S^2 = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_0+\beta\gamma_0\ , & \alpha\beta_0+\beta\delta_0 \\ \gamma\alpha_0+\delta\gamma_0\ , & \gamma\beta_0+\delta\delta_0 \end{pmatrix}$$

che può anche ridursi all'identità. Consideriamo dapprima il caso generale in cui S^2 non è l'identità. Poichè il suo invariante

$$j = \alpha\alpha_0+\beta\gamma_0+\beta_0\gamma+\delta\delta_0$$

è reale, essa non può essere lossodromica, ma è necessariamente ellittica, parabolica, od iperbolica. Ricerchiamo quali punti fissi può avere la S. Essi debbono pure rimaner fissi per S^2 e saranno quindi, al massimo, due, quelli della S^2. D'altra parte se z_1, z_2 sono i due punti fissi di S^2 la S dovrà o lasciarli singolarmente invariati o permutarli fra loro.* Dunque intanto se la S^2 è parabolica anche la S avrà un unico punto fisso. Nel caso ellittico od iperbolico pren

* Invero se z_1 per S va in z'_1, ciò che indichiamo simbolicamente con

$$z'_1 \equiv S(z_1)\,,$$

avremo

$$S^2(z'_1) = S^3(z_1) = S\left(S^2(z_1)\right) =$$

$$= S(z_1) = z'_1\,,$$ cioè z'_1 sarà anche un punto fisso di S^2 e però coinciderà o con z_1 o con z_2

dendo per punti fissi di S^2: $z=0$, $z=\infty$, daremo ad S la forma

$$z' = k z_0 \,, \quad o \quad z' = \frac{k}{z_0}$$

secondo che lascia fissi singolarmente i due punti 0, ∞, o li scambia fra loro. La S^2 sarà rispettivamente nei due casi

$$z' = k k_0 z \qquad o \quad z' = \frac{k}{k_0} z \,,$$

quindi iperbolica nel primo, ellittica nel secondo caso. Dopo di ciò possiamo classificare le sostituzioni S di 2ª specie, che non sono a periodo 2, come paraboliche, iperboliche od ellittiche secondo la specie di S^2. Le sostituzioni di 2ª specie ellittiche non hanno alcun punto fisso, quelle paraboliche uno, le iperboliche due.

Veniamo ora al caso particolarmente interessante che la S sia a periodo 2. Osservando i coefficienti di S^2 nella ((8) pag. preced.) vediamo che, essendo il determinante della $S^2 = 1$, dovranno aver luogo o le formole

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = 1 & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0 & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = 1 \end{cases}$$

o le altre

$$\begin{cases} \alpha\alpha_0 + \beta\gamma_0 = -1 & \alpha\beta_0 + \beta\delta_0 = 0 \\ \gamma\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0 & \gamma\beta_0 + \delta\delta_0 = -1 \end{cases}$$

Poichè $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ciò equivale a dire che nel 1° caso sarà

$$\alpha_0 = \delta \qquad \gamma_0 = -\gamma \qquad \beta_0 = -\beta \qquad \delta_0 = \alpha$$

e nel 2°:

$$\alpha_0 = -\delta \qquad \gamma_0 = \gamma \qquad \beta_0 = \beta \qquad \delta_0 = -\alpha$$

Ponendo in evidenza le parti reali ed immaginarie dei coefficienti avremo quindi nel primo caso

$$(9) \quad z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)z_0 + i\beta_1}{i\gamma_1 z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)} \quad \text{con } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1$$

indicando $\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \gamma_1$ quantità reali; e nel 2° caso:

$$(9^*) \quad z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (\alpha_1 - i\alpha_2)} \quad \text{con } \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = -1$$

Domandiamo ora se qualche punto del piano rimane fisso per la nostra sostituzione. Ponendo $z' = z$ vediamo che nel caso attuale restano fissi tutti i punti di un circolo che ha rispettivamente per equazione

$$(10) \quad \gamma_1(x^2 + y^2) - 2\alpha_2 x + 2\alpha_1 y - \beta_1 = 0 \quad , \text{nel caso } (9)$$

e invece

$$(10^*) \quad \gamma_1(x^2 + y^2) - 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y - \beta_1 = 0 \quad \text{nel caso } (9^*)$$

Il primo circolo è reale a causa di

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1$$

e la sostituzione è un'inversione per rag=

gi vettori reciproci rispetto a questo cerchio; si dirà brevemente una riflessione su questo circolo. Nel secondo caso il circolo di riflessione ((10*) pag. prec.) è immaginario e la sostituzione si dirà una riflessione impropria. È facile vedere che una riflessione impropria si può comporre con una riflessione propria ed una rotazione di π attorno al centro del circolo di riflessione.*

§ 14 Gruppi discontinui di sostituzioni lineari. Le sostituzioni lineari sopra una variabile sono, come si è visto al § 11 (pag 52 e segg), operazioni suscettibili di composizione e vale per la loro composizione la legge associativa. Ai sistemi di sostituzioni lineari sono quindi applicabili i concetti generali della teoria dei gruppi. Diremo perciò che

---

* Ad ogni riflessione si può sostituire una riflessione simile che scambi fra loro i punti $0, \infty$ ed ha allora la forma normale

$$z' = \frac{k}{z_0}$$

con k reale. Essa è propria od impropria secondo che k è positivo o negativo. Ne risulta subito dimostrata l'asserzione del testo.

Un sistema di un numero finito od infinito di sostituzioni lineari forma un gruppo quando componendo fra loro due sostituzioni qualunque, differenti od eguali, del sistema la sostituzione composta appartiene pure al sistema.

In particolare quindi, per la definizione stessa, insieme ad una sostituzione S figurano sempre nel gruppo anche tutte le sue potenze con esponente intero e positivo. Se il gruppo è finito* vi figurano altresì le potenze negative di S e l'identità, ciò che, stando alla data definizione, non accade sempre necessariamente nel caso di un gruppo infinito. Ma in questo caso noi aggiungiamo esplicitamente come condizione che il gruppo debba contenere insieme ad ogni sostituzione S anche la sua inversa S^{-1} e però anche tutte le potenze positive e negative di S e l'identità.

I gruppi di sostituzioni lineari

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$$

si dividono in due classi: nella classe

---

* I gruppi finiti di sostituzioni lineari sopra una variabile sono tutti noti e si riducono a 5 tipi distinti che portano il nome di gruppi dei poliedri regolari.

dei gruppi continui e in quella dei gruppi discontinui. Il gruppo dicesi continuo (gruppi di Lie) se nei coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ delle sue sostituzioni entrano parametri suscettibili di prendere una serie continua di valori; discontinuo, invece, quando i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ variano solo per valori discreti. Un'altra importante distinzione è da farsi pei gruppi discontinui in quanto consideriamo l'effetto delle loro operazioni sui punti del piano complesso. Applicando ad un punto z_1 del piano le sostituzioni di un gruppo discontinuo si otterrà una serie infinita di punti che diciamo equivalenti rispetto al gruppo. Un gruppo si dirà propriamente discontinuo in una regione del piano quando sia possibile separare in questa regione un campo parziale dotato della proprietà che ogni punto della regione abbia uno ed un sol punto equivalente nel detto campo (campo fondamentale - Fundamentalbereich). Se ciò non è possibile il gruppo si dirà impropriamente discontinuo.

Naturalmente può darsi che il gruppo sia propriamente continuo in certe regioni del piano e impropriamente in altre. Per la teoria delle funzioni (automorfe) hanno importanza soltanto i gruppi propriamente discontinui ed è di questi soltanto che ci occuperemo brevemente.

Vi ha un caso in cui dalla natura stessa delle sostituzioni del gruppo si può concludere immediatamente la sua <u>discontinuità impropria</u>; ciò accade quando il gruppo contiene sostituzioni infinitesimali cioè infinitamente poco diverse dall'identità. Per definire senza ambiguità il concetto di sostituzione infinitesimale in un gruppo discontinuo G di sostituzioni diciamo che: Un gruppo discontinuo G di sostituzioni lineari $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ contiene sostituzioni infinitesimali quando, preso un numero ε positivo, piccolo a piacere, esistono nel gruppo sostituzioni diverse dall'identità, per le quali i moduli dei coefficienti β, γ e della differenza $\alpha - \delta$ siano minori di ε.* Allora per quanto piccola <u>regione</u> si prenda nel piano, la discontinui-

* Se supponiamo la sostituzione unimodulare si può anche dire che

$$\alpha \mp 1, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta \mp 1$$

debbono potere acquistare moduli piccoli quanto si vuole.

tà del gruppo è sempre impropria.
Suppongasi, invero, al contrario, che si possa trovare, ad es., un'area circolare di raggio R entro la quale non vi siano punti equivalenti. Variando z comunque in quest'area possiamo, scegliendo convenientemente la sostituzione $\left(\begin{matrix}\alpha \\ \gamma\end{matrix}; \begin{matrix}\beta \\ \delta\end{matrix}\right)$, far sì che la differenza

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - z$$

abbia un modulo inferiore ad $\frac{R}{2}$ ed allora ogni punto che disti dal centro meno di $\frac{R}{2}$, (e non coincida eventualmente con uno dei punti fissi della sostituzione) ha almeno un punto equivalente nell'area circolare, contro l'ipotesi.
Così adunque: Un gruppo discontinuo contenente sostituzioni infinitesimali è sempre impropriamente discontinuo in ogni regione del piano.
Per dare subito un esempio consideriamo una sostituzione S ellittica aperiodica, che possiamo ridurre alla forma normale

$$z' = e^{i\varphi} z,$$

dove φ sarà incommensurabile con π.
Le potenze di S formano, come subito si vede, un gruppo con sostituzioni infi-

nitesimali e perciò dovunque impropriamente discontinui). Ne segue come corollario: Tutte le sostituzioni ellittiche di un gruppo propriamente discontinuo debbono possedere un periodo finito.

Perchè un gruppo sia in qualche regione del piano propriamente discontinuo è necessario, come si è visto, che non contenga sostituzioni infinitesimali. Ma sarebbe erroneo il credere che tale condizione necessaria sia anche sufficiente e l'esempio che studieremo alla fine del presente capitolo (§ 23) lo dimostrerà chiaramente. Però si ha un caso importante in cui la detta condizione è anche sufficiente, come risulta dal teorema di Poincaré * che qui ci limitiamo a citare: Un gruppo di sostituzioni lineari a coefficienti reali e privo di sostituzioni infinitesimali è sempre propriamente discontinuo nel piano complesso.

Prima di procedere allo studio dei gruppi particolari, che incontreremo poi nella seconda parte del corso (teoria delle funzioni ellittiche e modulari) facciamo an-

* "Acta Math." Bd 3 - V. anche Fricke Automorphe Functionen. Bd I pag 99.

con alcune osservazioni d'indole generale. I concetti e la terminologia dei gruppi finiti di operazioni si trasporteranno senz'altro alla teoria dei gruppi discontinui infiniti (di sostituzioni lineari) e così parleremo di sottogruppi di un gruppo di sottogruppi invarianti d'isomorfismo di gruppi ecc* Se G è un gruppo (infinito) e Γ un suo sottogruppo si può ancora, come nella teoria dei gruppi finiti, distribuire le sostituzioni di G rispetto a Γ in un quadro

$$\begin{array}{l} \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots\dots \\ t\gamma_1, t\gamma_2, t\gamma_3 \dots\dots \\ t'\gamma_1, t'\gamma_2, t'\gamma_3 \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

che contiene una ed una sola volta le sostituzioni di G ponendo nella prima orizzontale le infinite sostituzioni di γ e indicando con $t, t' \dots\dots$ sostituzioni di G che

---

* Un gruppo Γ di sostituzioni lineari sarà dunque un sottogruppo di un gruppo G se ogni sostituzione di Γ appartiene a G. Si dirà invariante in G se trasformando qualsiasi sostituzione di Γ con una qualunque di G la trasformata è ancora in Γ o, come si dice se Γ è permutabile con ogni sostituzione di G.

non appartengano rispettivamente alla prima orizzontale, alle prime due ecc. Ora può darsi che il numero delle orizzontali sia finito e questo numero dicesi allora l'<u>indice</u> del sottogruppo Γ in G; ma può darsi ancora che Γ sia sottogruppo <u>d'indice infinito</u> in G.

Notiamo infine che si possono considerare gruppi G contenenti sostituzioni lineari di ambedue le specie, in tal caso le sostituzioni di 1ª specie di G formano un gruppo Γ invariante in G e d'indice finito = 2.*

§ 15. Gruppi di sostituzioni paraboliche col medesimo punto fisso. I gruppi che andiamo in primo luogo a studiare sono importanti per la teoria delle funzioni semplicemente o doppiamente periodiche e nel loro studio troveremo una facile illustrazione

---

* Ciò risulta facilmente dall'osservare che se g è una sostituzione qualunque di G, γ una qualunque di Γ (di 1ª specie) la $g^{-1}\gamma g$ è sempre di 1ª specie quindi in Γ, onde Γ è invariante in G. Che abbia poi l'indice 2 segue da ciò che, se <u>t</u> è una sostituzione fissa di 2ª specie ed <u>u</u> un'altra qualunque, la $t^{-1}u$ è una γ, cioè:

$$t^{-1}u = \gamma \;;\; u = t\gamma .$$

delle considerazioni generali esposte al § precedente. Ci proponiamo di trattare i gruppi discontinui di sostituzioni parabo-liche aventi a comune il punto fisso e fra questi di riconoscere quelli che non hanno so-stituzioni infinitesimali. Possiamo sempli-cizzare la ricerca prendendo per punto fis-so il punto $z=\infty$, ciò che è lecito sostituendo al gruppo un suo trasformato; allora le sosti-tuzioni del gruppo assumeranno tutte la forma normale

$$(11) \qquad z' = z + \beta$$

e rappresenteranno traslazioni del piano complesso. Per abbreviare chiameremo β l'amplitudine della sostituzione. Nella formola (11) si legge subito la proprietà, che rende molto facile lo studio di questi gruppi e cioè: i gruppi in discorso constano di sostituzioni due a due permutabili. Se scegliamo nel nostro grup-po G, ad arbitrio, un certo numero $\underline{n}$ di so-stituzioni

$$S_1, S_2, \ldots\ldots S_n,$$

combinando fra loro queste sostituzioni e le loro potenze si ottiene un sottogruppo Γ di G (che può anche coincidere con G) e tutte le sostituzioni, a causa della permutabilità delle S, sono date dalla formula:

$$\gamma = S_1^{m_1} S_2^{m_2} \ldots\ldots S_n^{m_n},$$

dove gli esponenti $\underline{m}$ percorrono tutti i valori interi positivi e negativi, compreso lo zero. Indicheremo anche questo sottogruppo Γ colla notazione

$$\Gamma = [S_1, S_2, \ldots\ldots S_n]$$

Se è possibile determinare degli esponenti r interi, positivi o negativi, ma non tutti nulli tali che sia

$$(12) \qquad S_1^{r_1} S_2^{r_2} \ldots\ldots S_n^{r_n} = 1 \; *$$

le $\underline{n}$ sostituzioni $S_1 \ldots\ldots S_n$ si diranno fra loro dipendenti, altrimenti indipendenti. Ora è facile vedere che, se ha luogo fra $S_1, S_2, \ldots S_n$ una relazione (12) è possibile generare il gruppo Γ con un numero minore di sostituzioni

$$s_1, s_2, \ldots s_m \quad (m < n).$$

Per semplificare la dimostrazione suppo-

* Rispetto alle amplitudini $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ delle sostituzioni ciò significa che sussiste fra di esse una relazione lineare omogenea a coefficienti interi: $r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots\ldots + r_n\beta_n = 0$
e i numeri $\underline{r}$ si possono supporre primi fra loro.

niamo che gli esponenti r nella (12) siano già tutti positivi (o nulli) ciò che è lecito, bastando nel caso opposto sostituire a quelle S che figurano nella (12) con esponente negativo le loro inverse. Due almeno degli esponenti r, saranno diversi da zero*; poniamo

$$r_1 \quad r_2$$

e supponiamo p.e. $r_1 \leq r_2$. Ponendo $S'_1 = S_1 S_2^{q}$ (q intero qualunque) possiamo prendere come generatrici di Γ

$$S'_1, S_2 \ldots\ldots S_n$$

e per questa la (12) diventa

$$(12^*) \quad S_1'^{r_1} S_2^{r_2 - q r_1} S_3^{r_3} \ldots\ldots S_n^{r_n} = 1,$$

indi determiniamo q in guisa che

$$0 \leq r_2 - q r_1 < r_1.$$

Così abbiamo il medesimo numero di sostituzioni generatrici del gruppo, ma abbiamo impiccolito uno degli esponenti r lasciando inalterati gli altri. Possiamo applicare ripetutamente il processo fino ad ottenere un sistema di n sostituzioni generatrici

$$S_1 \quad S_2 \ldots\ldots S_n$$

---

* La (12) non può contenere una sola S perchè una sostituzione parabolica è aperiodica.

per le quali la relazione (12) - pag. preced.) contenga un solo esponente non nullo, e allora la corrispondente sostituzione S è l'identità, talchè possiamo prendere per sostituzioni generatrici di Γ le rimanenti $n-1$ - c.d.d.

Dimostriamo ora l'altro teorema:

Se le amplitudini $\beta_1\ \beta_2$ di due sostituzioni S_1, S_2 del gruppo hanno un rapporto reale, o le due sostituzioni saranno fra loro dipendenti, o il gruppo conterrà sostituzioni infinitesimali.

E invero se il rapporto $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è reale e commensurabile,

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{p}{q}$$

essendo p, q numeri interi primi fra loro, ~~avremo!~~ $q\beta_1 = p\beta_2$, cioè

$$S_1^{\,q} = S_2^{\,p},$$

che è appunto una relazione fra $S_1\ S_2$.

Se poi $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ è un numero reale incommensurabile α avremo $\beta_1 = \alpha\beta_2$ ed, essendo r, s numeri interi qualunque, il gruppo conterrà la sostituzione

$$S_1^{\,r}\ S_2^{\,s}$$

d'amplitudine $(r\alpha + s)\beta_2$. Ma poichè α è incommensurabile potremo prendere

r, s in guisa che $r\alpha + s$, che non è mai nullo sia piccolo quanto si vuole, onde avremo nel gruppo sostituzioni infinitesimali.

Ciò premesso consideriamo dapprima un gruppo Γ generato da una sola sostituzione S: $z' = z + \beta$.

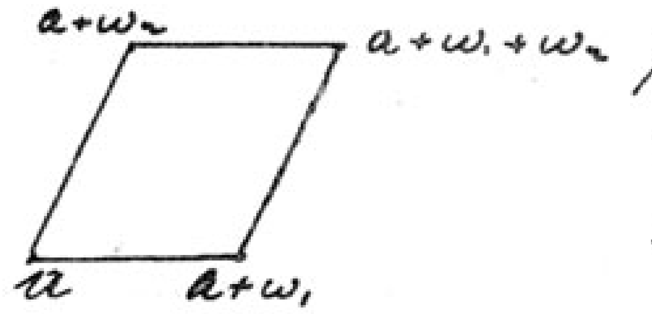
Se per due punti del piano complesso, che nascono l'uno dall'altro per la traslazione S, conduciamo due rette parallele in direzione qualunque (non coincidenti) e consideriamo la striscia compresa fra queste due parallele, è chiaro che qualunque punto del piano sarà equivalente ad un punto della striscia e ad uno solo, salvo che il punto equivalente della striscia trovisi sul contorno, chè allora ne avremo un secondo equivalente sull'altra parallela. Ne segue che la striscia considerata, ove i punti di una delle due parallele non si computino come appartenenti al campo, può assumersi come campo fondamentale del gruppo, che è dunque propriamente discontinuo in tutto il piano.

Si abbia ora un gruppo $\Gamma = [S_1, S_2]$ generato da due sostituzioni indipendenti

$$S_1)\ z' = z + \omega_1 ; \qquad S_2)\ z' = z + \omega_2$$

e privo di sostituzioni infinitesimali.

Le amplitudini ω_1, ω_2 delle due sostituzioni fondamentali saranno quindi in rapporto complesso. Preso un punto qualunque $\underline{a}$ del piano, consideriamo i 4



punti a, $a+\omega_1$, $a+\omega_2$, $a+\omega_1+\omega_2$, che sono i vertici di un parallelogrammo. Qualunque punto del piano complesso è equivalente, rispetto a Γ, ad un punto dell'area parallelogrammica e ad uno solo eccetto pei punti del contorno, due a due equivalenti. Possiamo quindi assumere questo parallelogrammo come campo fondamentale del gruppo. Applicando a questo campo le infinite sostituzioni del gruppo, il piano, ne risulta diviso in una rete di parallelogrammi congruenti che ricuopre una ed una sola volta tutto il piano. Il nostro gruppo è ancora propriamente discontinuo.

Si osservi però che nella scelta del parallelogrammo fondamentale sussiste ancora molta arbitrarietà, non solo perchè uno dei vertici si può collocare dovunque nel piano, ma anche perchè in luogo di S_1, S_2 potremmo egualmente assumere due altre sostituzioni fondamentali

$$s_1 = S_1^{\alpha} S_2^{\beta} \quad ; \quad s_2 = S_1^{\gamma} S_2^{\delta}$$

del gruppo. Queste due nuove sostituzioni s_1, s_2 saranno fondamentali, cioè genereranno tutto il gruppo solo quando il determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma$$

dei numeri interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sia $= \pm 1$ *
Coi due esempi ora trattati sono esauriti tutti i casi in cui un gruppo di traslazioni del piano è propriamente discontinuo. In ogni altro caso, infatti, il gruppo contie-

* E invero perchè s_1, s_2 siano fondamentali occorre che si possano trovare quattro interi $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$ tali che sia inversamente

$$S_1 = s_1^{\alpha'} s_2^{\beta'} \quad ; \quad S_2 = s_1^{\gamma'} s_2^{\delta'}$$

onde:

$$\begin{matrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta' = 1 \\ \beta\alpha' + \delta\beta' = 0 \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \alpha\gamma' + \gamma\delta' = 0 \\ \beta\gamma' + \delta\delta' = 1 \end{matrix}$$

e però

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix} = 1$$

ne, come ora dimostreremo, traslazioni infinitesimali. Supponiamo in effetto che un gruppo Γ possieda tre (o più) traslazioni indipendenti

$$S_1, S_2, S_3$$

di amplitudini

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3.$$

Se p. e. ω_1, ω_2 fossero in rapporto reale, questo rapporto sarebbe incommensurabile (poichè $S_1 S_2$ sono indipendenti per ipotesi) e Γ conterrebbe appunto sostituzioni infinitesimali. Supponiamo ora che $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sia complesso e costruiamo il parallelogrammo fondamentale $[a, a+\omega_1, a+\omega_2, a+\omega_1+\omega_2)$ del sottogruppo

$$\Gamma' = [S_1, S_2],$$

indi considerando un sistema di punti

$$z, \quad z+\omega_3, \quad z+2\omega_3, \ldots\ldots$$

equivalenti rispetto ad S_3 e alle sue potenze troviamo nel parallelogrammo i loro punti equivalenti

$$(13) \qquad z_1', z_2', z_3', \ldots\ldots$$

rispetto a Γ'. Tutti questi punti saranno distinti perchè, altrimenti, fra ω_1, ω_2

ω_3 sussisterebbe una relazione lineare omogenea a coefficienti interi contro l'ipotesi. Il gruppo infinito di punti ((13) pag prec.), addensandosi in un'area finita, avrà almeno un punto limite, nell'intorno del quale le differenze $z'_i - z'_k$ risulteranno di modulo piccolo quanto si vuole, e, poichè ciascuna di queste differenze rappresenta l'amplitudine di una traslazione di Γ, vediamo che Γ contiene traslazioni infinitesime. c. d. d.

Notiamo come dalle ricerche del presente paragrafo risulti il corollario:

«Ogni gruppo di traslazioni nel piano che non contenga traslazione infinitesime, è propriamente discontinuo»

Per questi gruppi vale cioè come pei gruppi di sostituzioni lineari a coefficienti reali la proprietà enunciata al § 14 (pag 69) col teorema di Poincaré. In fine osserviamo che il processo tenuto nel presente paragrafo è pure applicabile allo studio dei gruppi discontinui di traslazioni nello spazio a tre dimensioni o ad un numero qualunque di dimensioni. In particolare tutti i gruppi di traslazioni dello spazio a n dimensioni, che contengono più di n traslazioni indipendenti, hanno traslazioni infinitesime. Ogni altro gruppo di traslazioni è propriamente discontinuo nel rispettivo spazio.

§.16 Gruppo modulare - Circoli e rette di riflessione del gruppo ampliato - Passiamo ora a studiare il gruppo di sostituzioni lineari unimodulari

$$(14) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

con coefficienti interi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Questo gruppo è evidentemente infinito, discontinuo e privo di sostituzioni infinitesimali. Esso prende il nome di <u>gruppo modulare</u>. Noi ne stabiliremo direttamente la discontinuità propria (che risulta anche dal teorema di Poincaré), assegnando il campo fondamentale del gruppo. Ponendo

$$z = x + iy \qquad z' = x' + iy'$$

e separando in $\frac{\alpha(x+iy)+\beta}{\gamma(x+iy)+\delta}$ il reale dall'immaginario, troviamo subito:

$$y' = \frac{y}{(\gamma x + \delta)^2 + y^2},$$

il che dimostra che y, y' hanno sempre

lo stesso segno. Il gruppo opera quindi sepa=ratamente sulle due parti in cui l'asse reale divide il piano e noi ci limiteremo a considerare il <u>semipiano</u> <u>positivo</u> $y > 0$.
Osserviamo subito che tutti i punti razionali dell'asse reale sono fra loro equivalenti rispetto al gruppo modulare Γ ed equivalenti p.e. a $z=0$. Per $z=0$, infatti, la (14) (pag. preced.) dà $z' = \frac{\beta}{\delta}$ e i numeri β, δ possono essere due numeri interi <u>qualunque</u> primi fra loro. Si vede quindi che, nell'intorno di qualsiasi punto dell'asse reale il gruppo modulare Γ è impropriamente discontinuo. Al contrario nell'intorno di ogni punto del semipiano positivo esso è, come si vedrà, propriamente discontinuo.
Per lo studio del gruppo modulare Γ è importantissimo ampliare il gruppo, associando alle sostituzioni del gruppo la riflessione sull'asse immaginario

$$z' = -z_0$$

che trasforma ancora il semipiano positivo in sè medesimo.
Il nuovo gruppo, che così risulta, contiene

oltre le sostituzioni di prima specie (14) (pag 81), le altre di 2ª specie

$$(14^*) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

lo diremo il gruppo modulare ampliato e lo indicheremo con Γ_0. Esso contiene il gruppo modulare Γ come sottogruppo invariante d'indice 2 (Cf. § 14 alla pag. 71). Particolarmente importante per lo studio di Γ_0 è il determinare le riflessioni (§13, pag 61 e sgg.) in esso contenute. Esse si otterranno secondo la formola (9) del § 13 (a pag 63), sempre e solo quando $\delta = \alpha^*$, cioè avranno la forma

$$z' = \frac{\alpha z_0 - \beta}{\gamma z_0 - \alpha}, \quad (\alpha^2 - \beta\gamma = 1)$$

e saranno per ciò sempre riflessioni proprie (con circolo reale). Distinguiamo per altro secondo che $\gamma = 0$ ovvero $\gamma \neq 0$. Se $\gamma = 0$, allora è $\alpha = \pm 1$ e si ha una retta di riflessione di equazione

$$2x = \beta,$$

essendo β un intero qualunque. Abbia

---

* Per fare il confronto colle formole del §13 bisogna dare alla (14*) il determinante +1 scrivendo:

$$z' = \frac{i\alpha z_0 - i\beta}{i\gamma z_0 - i\delta}.$$

mo dunque nel gruppo infinite rette di riflessione

$$x=0\ ;\quad x=\pm\tfrac{1}{2}\ ;\quad x=\pm 1\ ;\quad x=\pm\tfrac{3}{2}\ \ldots\ldots$$

tutte parallele all'asse immaginario e distanti ciascuna dalla successiva di $\frac{1}{2}$. Quando poi $\gamma\neq 0$ abbiamo il circolo di riflessione

$$\gamma(x^2+y^2)-2\alpha x+\beta=0,$$

ovvero

$$\left(x-\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+y^2=\frac{\alpha^2-\beta\gamma}{\gamma^2}=\frac{1}{\gamma^2}.$$

Vi sono dunque infiniti circoli di riflessione di raggio eguale all'inversa $\frac{1}{\gamma}$ di un numero intero qualunque e coi centri in tutti quei punti razionali dell'asse reale $\frac{\alpha}{\gamma}$ pei quali il numeratore α soddisfa alla condizione

$$\alpha^2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \gamma)$$

e così, p.e. circoli di raggio $=1$ col centro in tutti i punti interi dell'asse reale, circoli di raggio $\frac{1}{2}$ coi centri nei punti

$$\pm\tfrac{1}{2}\ ,\quad \pm\tfrac{3}{2}\ ,\quad \pm\tfrac{5}{2}\ ;\ \ldots\ldots$$

circoli di raggio $\frac{1}{3}$ coi centri nei punti

$$\pm\tfrac{1}{3}\ ;\quad \pm\tfrac{2}{3}\ ;\quad \pm\tfrac{4}{3}\ ;\ \ldots\ldots \text{ecc.}$$

Per il seguito delle nostre considerazioni è necessario premettere le due osservazioni seguenti:

1° L'area indefinita racchiusa nel semipiano positivo da due rette $x = a$, $x = b$ parallele all'asse immaginario e da una retta $y = k$ ($k > 0$) parallela all'asse reale, non è solcata che da un numero finito di rette e circoli di riflessione.

Per le rette è evidente poichè si succedono coll'intervallo costante di $\frac{1}{2}$. Quanto ai circoli potranno solcare l'area solo quelli che hanno un raggio $\frac{1}{\gamma} > k$, ciò che dà un numero finito di valori per γ; ma per ogni valore di γ i centri dei circoli si succedono sull'asse reale ad intervalli finiti e però solo un numero finito di questi circoli solcherà la striscia compresa fra le parallele $x = a$; $x = b$.

2° Applicando alla totalità dei circoli e delle rette di riflessione un'operazione qualunque del gruppo Γ_0 i circoli e le rette si scambieranno fra loro. _ Ciò risulta subito dall'osservare che se U è una riflessione del gruppo sul circolo C, e T una sostituzione di Γ_0 che porti il circolo C nel circolo C_1 la trasformata $T^{-1}UT$ sarà una riflessione sul circolo C_1

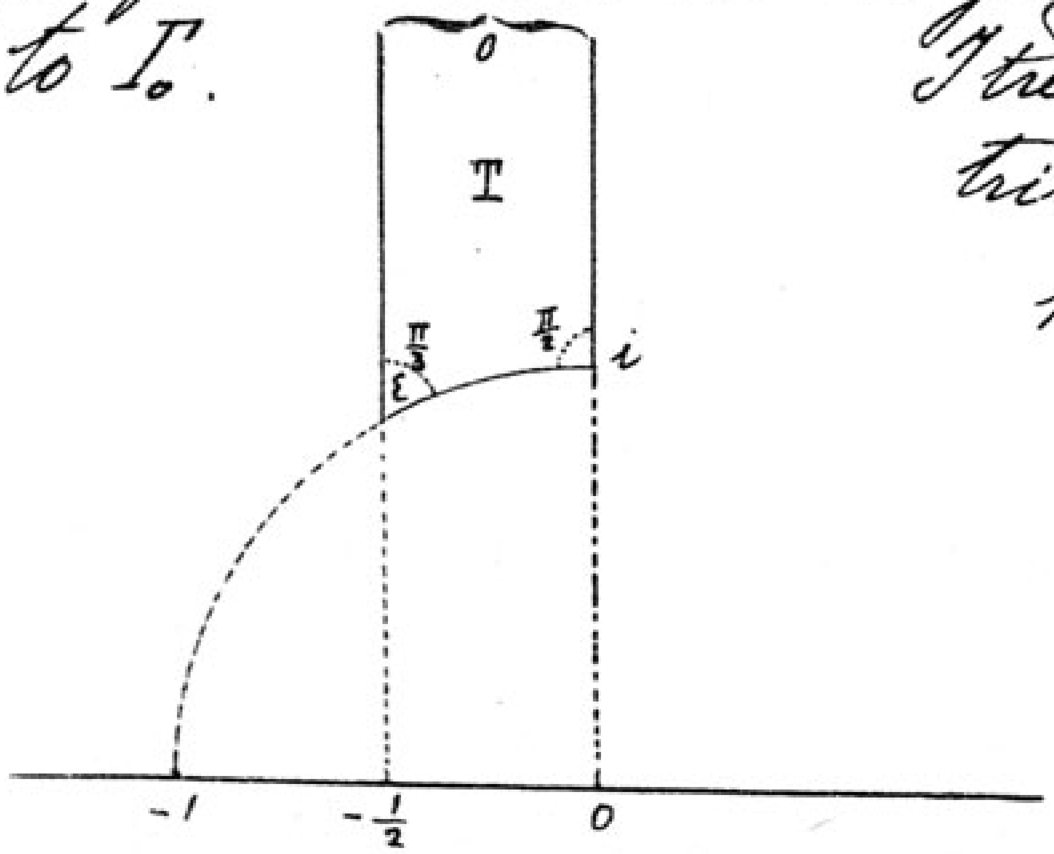
§ 17. Il triangolo fondamentale del gruppo ampliato –. Consideriamo nel piano complesso le due rette successive di riflessione

$$x=0 \quad , \quad x=-\frac{1}{2}$$

ed il circolo di riflessione

$$x^2+y^2=1 .$$

La regione indefinita del semipiano positivo compresa entro la striscia limitata da quelle due rette, all'esterno del circolo, si dirà il triangolo fondamentale T e in effetto, come ora dimostreremo, nel triangolo T abbiamo il campo fondamentale del gruppo ampliato Γ_0.



I tre vertici di questo triangolo sono nei punti:

$$z=e^{\frac{\pi i}{2}}=i \, , \, z=e^{\frac{2\pi i}{3}}=\varepsilon , \, z=\infty$$

e i rispettivi angoli a questi vertici hanno le ampiezze:

$$\frac{\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{3} \; ; \; 0 .$$

Osserviamo poi che il nostro triangolo T non è attraversato da alcun altro circolo o retta di riflessione.

Se applichiamo al triangolo T una sostituzione qualunque di Γ_0, avremo un nuovo triangolo T', limitato da tre archi di circoli di riflessione (o rette), coi medesimi angoli di $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, 0; e il triangolo T', come T, da cui deriva, non sarà attraversato da alcun circolo di riflessione. Vogliamo ora dimostrare che tutti questi triangoli formano una rete la quale ricopre una ed una sola volta tutto il semipiano positivo. E, infatti, prendiamo dovunque nel semipiano positivo (l'asse reale escluso) un punto A e prendiamo anche un punto qualsiasi B nell'interno di T, indi descriviamo una linea continua L che vada nel semipiano positivo da B ad A senza mai toccare l'asse reale (p.e. il segmento rettilineo BA). La nostra linea L, mantenendosi i suoi punti sempre a distanza finita dall'asse reale, non potrà traversare che un numero finito di rette o di circoli di riflessione (§ 16 pag 81

segg.) e risulterà quindi divisa in un numero finito di tratti $l_1, l_2, \ldots l_\nu$ avendo luogo ogni volta fra un tratto e l'altro l'attraversamento di un circolo di riflessione. Il primo tratto l_1 è nel triangolo T e nell'estremo fra l_1 e l_2 la linea L traversa un lato di T sicchè, se consideriamo quel triangolo T_1 della rete che nasce da T per riflessione su quel lato, il secondo tratto l_2 resterà entro T_1. Poi la linea L traversa un lato di T_1 ed entra per il tratto l_3 in un terzo triangolo T_2 aderente a T_1 pel detto lato. Così continuando è chiaro che costruiremo una serie successiva di ν triangoli della rete:

$$T, T_1, T_2, \ldots\ldots\ldots T_{\nu-1},$$

ciascuno aderente al precedente per un lato e nel triangolo $T_{\nu-1}$ sarà il punto A. <u>Dunque la rete si estende in qualunque regione del semipiano positivo</u>.

In secondo luogo due triangoli T_r, T_s della rete non possono mai in parte sovrapposti (avere una regione a comune), altrimenti p.e. T_r sarebbe attraversato da qual=

che circolo di riflessione (un lato di T_3)
Così è dimostrato quanto volevamo e possiamo ora facilmente vedere che:
Ogni punto del semipiano positivo è equivalente, rispetto al gruppo ampliato Γ_0, ad uno e ad un solo punto del triangolo T, il quale è adunque il triangolo fondamentale di Γ_0.
E invero se A è un punto qualunque del semipiano positivo esiste, come si è visto, un triangolo T' della rete che contiene A e la sostituzione di Γ_0 che porta T' in T porterà A in un punto di T.
Osserviamo poi che la sostituzione di Γ_0 che porta T in T' è unica e determinata perchè, se ve ne fossero due differenti S_1, S_2, la sostituzione (non identica) $S_1 S_2^{-1}$ trasformerebbe T in sè stesso. Ora ciò è impossibile; e invero il triangolo T avendo i tre angoli disegnali, non esiste non solo in Γ_0 ma nemmeno fuori di Γ_0 alcuna sostituzione nè di 1ª nè di 2ª specie che trasformi T in sè stesso essendo che ciascuno dei tre vertici dovrebbe rimaner fisso.*
Risulta di qui che due punti P, Q del trian=

* Vedi nota alla pagina seguente.

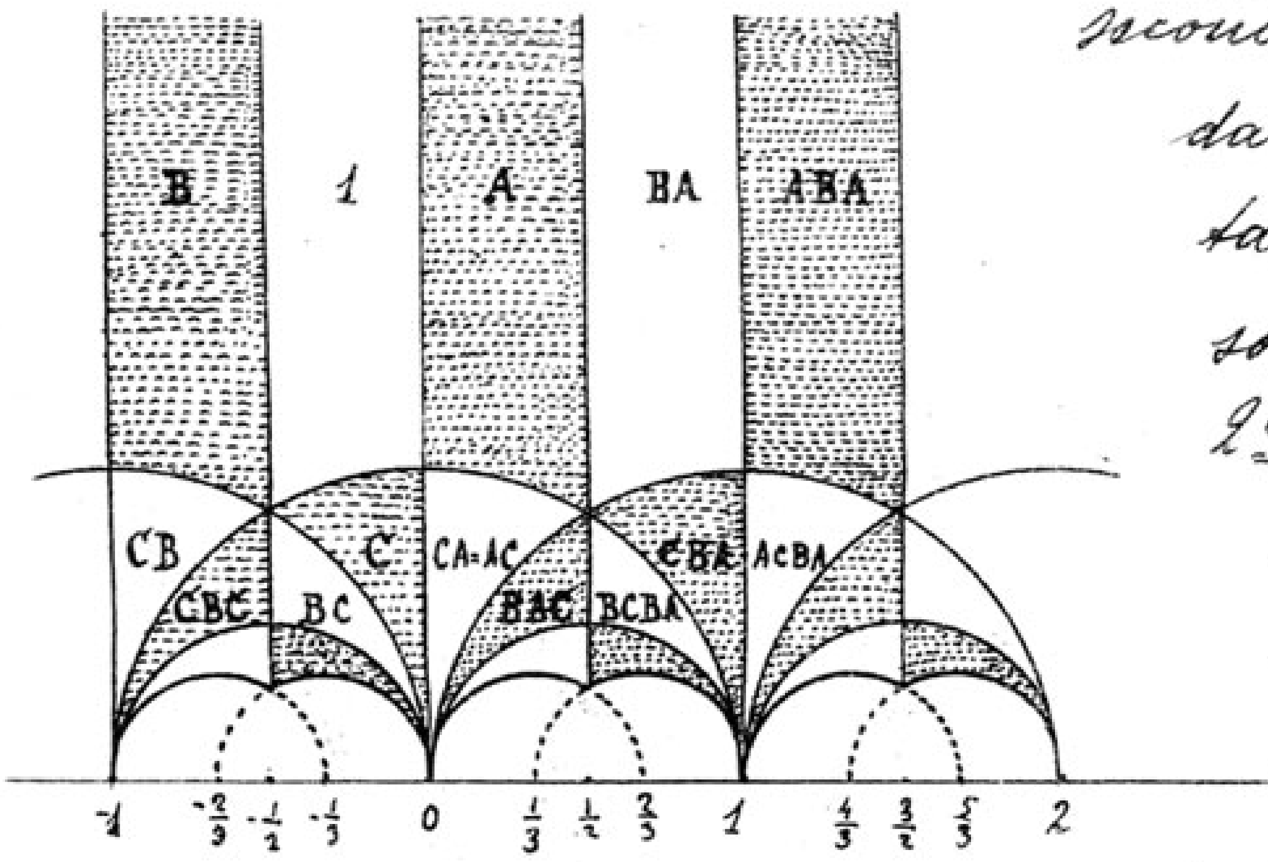
golo T **non possono** essere equivalenti.
E, infatti, se P, Q sono ambedue interni a T la sostituzione che cangia P in Q dovrebbe trasformare T in sè medesimo. Se P è sul contorno e Q nell'interno quella sostituzione cangierebbe il lato su cui si trova P in un circolo di riflessione attraversante T. Se poi P e Q sono sul contorno quella sostituzione dovrebbe cangiare T in un triangolo aderente e sarebbe quindi una riflessione sopra il lato contenente Q e lascierebbe fisso Q nè potrebbe trasportarvi P.

§ 18 - La rete modulare e le riflessioni generatrici A, B, C — Tutta la rete dei triangoli T, che ricuopre una ed una sola volta il semipiano positivo si può generare riflettendo il triangolo fondamentale sui suoi tre lati; i nuovi triangoli ottenuti sui loro lati li

*) (V. nota pag. preced.) Questa considerazione dimostra che: Non vi ha alcun gruppo più ampio di Γ_0 che contenga Γ_0 come sottogruppo invariante. Le sostituzioni U di un tale gruppo dovrebbero infatti trasformare le riflessioni di Γ_0 in nuove riflessioni di Γ_0 e però il triangolo T in un altro T' della rete. Se con γ indichiamo la sostituzione di Γ_0 che porta T in T', la $U\gamma^{-1}$ lascia fisso T e però $U\gamma^{-1} = 1$ cioè $U = \gamma$.

beri e così via di seguito. Per figurare con chiarezza la rete tratteggiamo tutti i triangoli della rete che nascono da T nel modo descritto, con un numero dispari di riflessioni lasciando gli altri non tratteggiati; otteniamo così la figura 2ª che ci rappresenta la rete modulare. Ogni triangolo della

.Fig. 2ª



rete sarà quindi tratteggiato o no secondo che nasce dal fondamentale per una sostituzione di 2ª o di 1ª specie. Possiamo indicare senza ambiguità ogni triangolo della rete per mezzo della sostituzione V che lo fa derivare dal triangolo fondamentale il quale sarà adunque indicato col simbolo 1. Indichiamo rispettivamente con

$$A,\ B,\ C$$

le tre riflessioni sui lati

$$x=0\ ;\quad x=-\tfrac{1}{2}\ ;\quad x^2+y^2=1$$

del triangolo fondamentale I e cogli stessi simboli dovremo indicare i tre triangoli aderenti al fondamentale 1 pei rispettivi lati. Ora osserviamo che, se V è una sostituzione qualunque di Γ_0, applicandola p.e. ai due triangoli aderenti

$$1\ ,\ A$$

otterremo due triangoli pure aderenti

$$V\ ,\ AV.$$

Così adunque al triangolo V saranno aderenti i tre triangoli

$$AV\ ,\ BV\ ,\ CV$$

e precisamente AV lungo il lato che sottende gli angoli di $\frac{\pi}{2}$, 0 ecc. E poichè si può passare dal triangolo fondamentale ad uno qualunque della rete per una serie di triangoli aderenti ne deduciamo:

L'intero gruppo modulare ampliato Γ_0 si genera colle tre riflessioni elementari A, B, C. L'espressione analitica di queste tre riflessioni è data rispettivamente da

$$A)\quad z' = -z_0$$

$$B)\quad z' = -z_0 - 1$$

$$C)\quad z' = \frac{1}{z_0}.$$

I vertici della rete modulare si distinguono in tre specie secondo che gli angoli corrispondenti sono 0, $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{\pi}{3}$. In ciascuna specie tutti i vertici sono equivalenti e non solo rispetto al gruppo ampliato Γ_0, ma anche rispetto al gruppo modulare Γ, come si rileva dall'osservare che per ciascuno dei tre vertici di un triangolo della rete esiste una sostituzione di 2ª specie che lo lascia fisso (una riflessione). I vertici della prima specie sono tutti equivalenti al vertice $z=\infty$ e sono i punti razionali dell'asse reale; quelli della seconda specie sono equivalenti al vertice $z=i$ e quelli della terza specie al vertice $z=\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Intorno a ciascun vertice della prima specie si distribuiscono infiniti triangoli della rete che diventano sempre più piccoli avvicinandosi all'asse reale. Intorno a ciascun vertice equivalente a $z=i$ si riuniscono quattro triangoli della rete alternativamente tratteggiati o no e similmente intorno ai vertici equivalenti a $z=\varepsilon$ sei triangoli.

§ 19 Il triangolo fondamentale del gruppo modulare, e le sostituzioni generatrici S, T.

Per ottenere il campo fondamentale del gruppo modulare Γ basta che associamo due triangoli aderenti della rete modulare p.e. il fondamentale 1 e il suo simmetrico A rispetto all'asse immaginario. Otteniamo così il triangolo che indicheremo con $\mathfrak{T}$, limitato fra le due parallele

$$x = -\tfrac{1}{2} \qquad x = +\tfrac{1}{2}$$

all'esterno del circolo $x^2+y^2=1$ con angoli eguali a $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0$; le ricerche precedenti ci fanno subito riconoscere che: Ogni punto del semipiano è equivalente rispetto a Γ ad un punto di questo triangolo; due punti di esso triangolo non sono mai equivalenti a meno che non si trovino sul contorno simmetricamente disposti rispetto all'asse immaginario.

E invero un punto P qualunque del semipiano positivo si può portare con una sostituzione V di Γ_0 nella metà a sinistra del detto triangolo. Se V è di 1^a specie lo scopo è raggiunto; altrimenti eseguendo dopo V la riflessione A la sostituzione VA di Γ porterà P nella seconda metà del nostro triangolo $\mathfrak{T}$. In secondo luogo se due punti P, Q di $\mathfrak{T}$ sono equivalenti rispetto a Γ lo saranno, a più forte ragione, rispetto a Γ_0 e dovranno quindi trovarsi l'uno nella prima metà l'altro nella seconda metà di $\mathfrak{T}$, ed essere simmetrici rispetto all'asse immaginario. Ora se V è la supposta sostituzione di 1^a specie che porta P in

Q la VA di seconda specie lascerà fermo P che dovrà dunque essere sul contorno rettilineo o circolare. Nel 1.° caso la VA dovrà coincidere con la riflessione B, nel secondo con la C e la sostituzione supposta sarà o la

$$S = BA$$

o la:
$$T = CA$$

Effettivamente la sostituzione

$$S = BA = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}; \quad z' = z+1$$

porta un punto della retta $x = -\frac{1}{2}$ nel simmetrico dell'altra $x = +\frac{1}{2}$ e la sostituzione:

$$T = CA = \begin{pmatrix} 0 & ; 1 \\ -1 & ; 0 \end{pmatrix} \quad z' = -\frac{1}{z}$$

porta un punto del circolo $x^2 + y^2 = 1$ nel simmetrico (rispetto all'asse immaginario).

Dimostriamo ora che: Le due sostituzioni:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & , 1 \\ 0 & , 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & ; 1 \\ -1 & ; 0 \end{pmatrix}$$

bastano già a generare l'intero gruppo modulare.

Cominciamo dall'osservare che se applichiamo al triangolo $\mathcal{E}$ tutte le sostituzioni di Γ otteniamo una rete di triangoli (con angoli di $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, 0) ciascuno dei quali non è che l'insieme di due triangoli adiacenti della rete primitiva. Potremo indicare questi triangoli con la sostituzione stessa che li fa derivare dal triangolo fon=

damentale T. Ma al triangolo T che ora in=

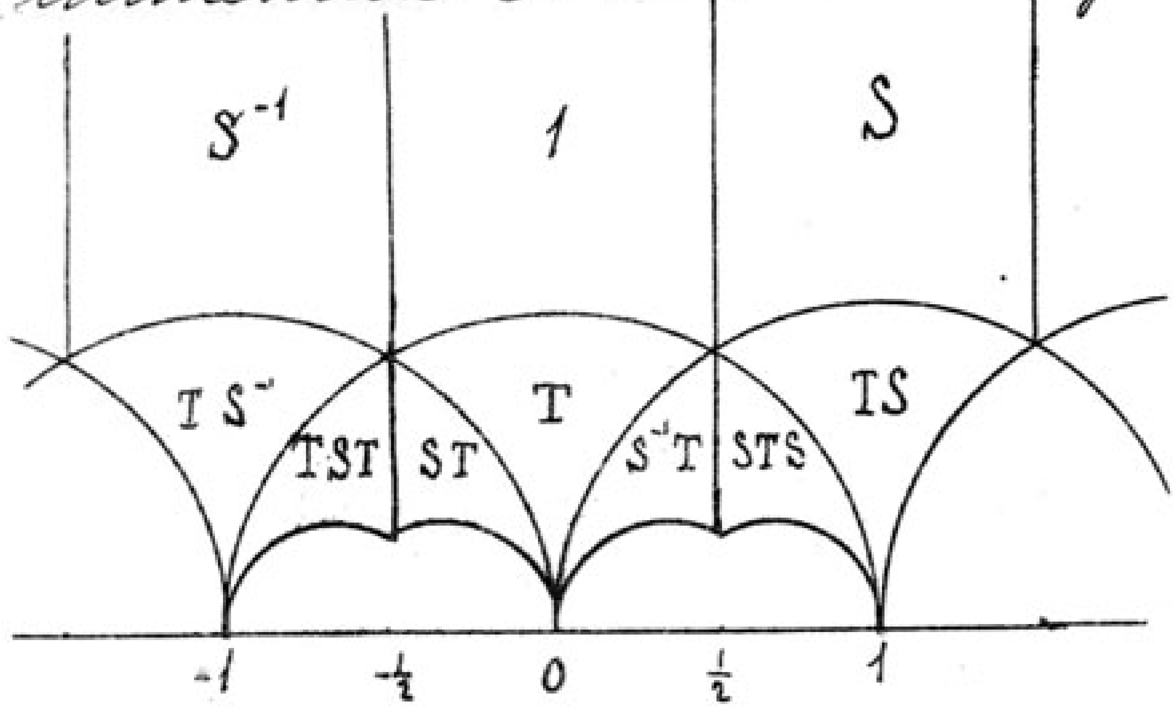


Fig 3ª

dicheremo con 1 (v. fig.) sono aderen= ti i triango= li S, S^{-1}, T e però ogni altro trian= golo V della nuova rete ha per triangoli aderenti SV, $S^{-1}V$, TV.
Se ne conclude, come al § 18 (pag 90 e segg), che com= binando le sostituzioni S, T e le loro potenze si genera tutto il gruppo modulare.

§ 20 Sostituzioni ellittiche del grup= po modulare. Le sostituzioni $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ del grup= po modulare sono ellittiche quando l'invarian= te $j = \alpha + \delta$ non supera in valore assoluto il 2 e poichè nel caso attuale j è un numero intero doremo avere

$$\alpha + \delta = 0 \quad o \quad \alpha + \delta = \pm 1$$

A causa della formola (§ 12) (pag 59)

$$j = 2 \cos \frac{\varphi}{2}$$

avremo nel 1° caso $\cos \frac{\varphi}{2} = 0$ e nel secondo caso $\cos \frac{\varphi}{2} = \pm \frac{1}{2}$, onde vediamo intanto che le sosti=

-tuzioni ellittiche del nostro gruppo sono a periodo 2 o a periodo 3. Al medesimo risultato possiamo arrivare con le considerazioni geometriche seguenti che ci faranno inoltre conoscere quali sono le sostituzioni ellittiche <u>affini</u>.* Ogni sostituzione ellittica deve lasciar fisso un punto del semipiano positivo (fuori dell' asse reale) che deve essere dunque un vertice della rete modulare e però (§18 pag 90 e segg) o equivalente al vertice $z = i$ o all' altro $z = \varepsilon$. Qualunque sostituzione ellittica del gruppo modulare sarà dunque affine ad una sostituzione (ellittica) che lasci fisso il punto $z = i$ o il punto $z = \varepsilon$. Ma le prime si determinano subito dalla relazione

$$i = \frac{\alpha i + \beta}{\gamma i + \delta}$$

da cui

$$\gamma = -\beta \qquad \alpha = \delta$$

onde, a causa di $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, cioè $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ otteniamo (escludendo l'identità) l'unica sostituzione

$$T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$$

Nel secondo caso troviamo le due sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix},$$

---

* In generale chiamiamo affini due sostituzioni in un gruppo quando l'una si ottiene dall'altra trasformando questa con una sostituzione del gruppo stesso.

ossia: $z' = -\frac{z+1}{z}$, $z' = -\frac{1}{z+1}$;
delle quali la seconda è il quadrato della prima e che, nell'intorno del punto $z = \varepsilon$, producono una rotazione del piano di $\frac{2\pi}{3}$, la prima nel senso positivo, la seconda nel negativo. Dunque:
«Le sostituzioni ellittiche del gruppo modulare sono a periodo 2, ovvero a periodo 3; le prime sono tutte affini alla sostituzione elementare $\begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -1 & ; & 0 \end{pmatrix}$ quelle a periodo 3 si ripartiscono in due classi di sostituzioni affini rispettivamente alle due $\begin{pmatrix} 1 & ; & 1 \\ -1 & ; & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & ; & -1 \\ 1 & ; & 1 \end{pmatrix}$»

§. 21 Forme binarie quadratiche a determinante negativo. Mediante la rappresentazione geometrica del gruppo modulare, stabilita nei §§ precedenti, si può dare un'elegante interpretazione a quel capitolo della teoria dei numeri che tratta delle forme binarie quadratiche, della loro riduzione, della risoluzione dell'equazione di Pell ecc, come si può vedere diffusamente esposto nel 1° volume della Theorie der elliptischen Modulfunctionen di Klein-Fricke (3^{es} kap. - pag. 243 s. s.) -

Noi qui ci limiteremo al caso che ha maggior interesse per la teoria delle funzioni ellittiche (moltiplicazione complessa), al caso cioè di una forma quadratica

(15) $ax^2 + 2bxy + cy^2$

a determinante $D = b^2 - ac$ negativo, i coefficienti a, b, c essendo supposti numeri interi.

Manifestamente i coefficienti estremi a, c hanno lo stesso segno e li supporremo sempre positivi, bastando nel caso opposto cangiar di segno a tutti i coefficienti. Ricordiamo che la forma (15) si dice equivalente alla forma

(15*) $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$

quando la prima si traduce nella seconda mediante una sostituzione lineare sulle variabili

$$(16) \quad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{cases}$$

a coefficienti interi e a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Le infinite forme equivalenti ad una data costituiscono ciò che si dice una classe di forme, e ne hanno tutte ugual determinante. Tutte le forme di egual determinante si distribuiscono in altrettante classi ed uno dei principali risultati della teoria consiste in questo che il numero delle classi corrispondenti ad un dato determinante, è sempre un numero finito.

Si dicono radici della forma (15) le due radici della equazione

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0$$

che nel caso nostro, essendo $D = -\Delta = b^2 - ac$ negativo, sono coniugate immaginarie ed hanno i valori

$$\omega_1 = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{a} \quad ; \quad \omega_2 = \frac{-b \pm i\sqrt{\Delta}}{a}$$

L'indice della prima radice ω_1 è situato nel semipiano positivo e si dirà l'indice della forma. E' importante osservare che una forma (a, b, c) a determinante negativo è pienamente determinata quando sia dato il suo determinante ed il suo indice.

Ciò posto, considieriamo due forme (15) (15*) (pag prec.) equivalenti e il loro rispettivi indici ω_1, ω_1' che per le (16) (pag prec) e per essere $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ saranno legati dalla relazione

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega_1' + \beta}{\gamma\omega_1' + \delta},$$

onde vediamo che due forme equivalenti hanno indici equivalenti rispetto al gruppo modulare. Viceversa dall'osservazione fatta sopra risulta che due forme di egual determinante saranno equivalenti se hanno indici equivalenti. Ora con una sostituzione del gruppo modulare possiamo trasportare l'indice di una forma nel triangolo fondamentale:

(17) $-\frac{1}{2} \leq x \leq +\frac{1}{2} \qquad x^2+y^2 \geq 1$

Se chiamiamo dunque ridotta una forma quando il suo indice giace nel triangolo fondamentale, abbiamo il teorema:

«Ogni forma a determinante negativo è equivalente ad una forma ridotta».

A quali condizioni debbono soddisfare i coefficienti di una forma ridotta (a, b, c)? Poichè l'indice è dato da

$\omega_1 = x + iy = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{a}$, le disuguaglianze (17) si traducono nelle altre pei coefficienti

$$(17^*) \quad 2|b| \leq a \leq c$$

Queste sono appunto le condizioni cui deve soddisfare una forma ridotta secondo Gauss. Dalle disuguaglianze (17*) segue subito che esiste soltanto un numero finito di forme ridotte di assegnato determinante poichè dalle (17*) abbiamo

$$4b^2 \leq ac \;, \quad 3b^2 \leq \Delta \,,$$

quindi $|b| \leq \sqrt{\frac{\Delta}{3}}$. Il coefficiente medio b, assegnato Δ, non può dunque avere che un numero finito di valori, e per ciascuno di essi, a causa di $\Delta = ac - b^2$, i coefficienti estremi a, c debbono corrispondere ad una decomposizione del numero: $\Delta + b^2 = ac$, nel prodotto di due fattori. Poichè adunque ogni forma è equivalente ad una ridotta e le forme ridotte di egual determinante sono in numero finito risulta dimostrato il teorema fondamentale:

«Le forme di egual determinante negativo si distribuiscono in un numero finito di classi».

Per risolvere il problema fondamentale della teoria dell'equivalenza, che consiste nel riconoscere se due forme di egual determinante appartengono o no alla medesima classe, resta a vedersi se due forme ridotte possono essere equivalenti. Poichè i loro indici appartengono al triangolo fondamentale, ciò avverrà soltanto quando si trovino sul contorno, simmetricamente disposti rispetto all'asse immaginario. Se appartengono al contorno rettilineo le due forme ridotte equivalenti presenteranno i coefficienti

$$(a, \tfrac{1}{2}a, c)\ (a, -\tfrac{1}{2}a, c),$$

e se appartengono al contorno circolare saranno

$$(a, b, a)\ (a, -b, a).$$

§ 22 L'affinità circolare trasportata nello spazio e le formole di Poincaré. — Il metodo dell'ampliamento per riflessione, che abbiamo adoperato per lo studio del gruppo mo=

dulare, riene per molte altre classi di gruppi propriamente discontinui nel piano complesso. Ma vi sono come già abbiamo detto al § 14 (pag. 69), dei gruppi che, senza contenere sostituzioni infinitesimali sono in tutto il piano impropriamente discontinui. Nonostante possiamo estendere anche a questi gruppi ~~la~~ nozione di campo fondamentale, passando, con un ingegnoso artifizio dovuto a Poincaré (Acta Math. Bd 3) dalla rappresentazione geometrica nel piano ad una rappresentazione nello spazio. Per intendere come si effettua questo passaggio ricordiamo che la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

cangia i circoli in circoli ed aggiungiamo che essa cangia, secondo le formole del § 10 (pag 47 e segg), un fascio od una rete circoli equalmente in un fascio od una rete cioè un sistema lineare ∞^1 o ∞^2 di circoli ancora in un tale sistema lineare. Ora se consideriamo una rete di circoli, essa è determinata da tre dei suoi circoli, e consta di tutti i circoli normali ad un cerchio fisso che ha per centro il centro radicale dei tre circoli ed ha quadrato del raggio la potenza di questo centro rispetto a ciascun circolo della rete. Il cerchio fisso è quindi reale o immaginario secondo che questa potenza è positiva o negativa. Nel secondo caso, che è quello ora importante per noi, possiamo anche dire che la rete consta dei circoli che tagliano in punti diametralmente opposti un cerchio reale fisso.

Ora noi osserviamo che tutte le sfere descritte sopra i circoli di una tale rete come circoli massimi passano per due punti fissi reali simmetrici rispetto al piano della rete), che sono i due estremi di quel diametro della sfera, avente per cerchio massimo il cerchio fisso che è perpendicolare nel centro al piano della figura*.

* Tutte le proprietà qui accennate possono dimostrarsi elementarmente o dedursi analiticamente così. Prendiamo per origine delle coordinate il centro radicale dei circoli della rete; tre circoli qualunque della rete avranno le equazioni

$$x^2+y^2+2a_1x+2b_1y+c=0$$
$$x^2+y^2+2a_2x+2b_2y+c=0$$
$$x^2+y^2+2a_3x+2b_3y+c=0$$

e taglieranno ortogonalmente il circolo

$$x^2+y^2=c$$

che è però immaginario se $c<0$. In tal caso si considera

(segue pag. seg.)

Ciò premesso, consideriamo l'intero spazio o meglio il semispazio $\zeta > 0$, associando ai due assi ortogonali $O\xi$, $O\eta$ nel piano z un terzo asse $O\zeta$ ortogonale ad ambedue. Prendiamo un punto qualunque P in questo semispazio (di ordinata $\zeta > 0$); le sfere che passano per P ed hanno il centro sul piano $\zeta = 0$ tagliano questo piano in una rete di circoli della specie ora considerata. Questa è cangiata dalla sostituzione lineare $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ in una rete omologa che definisce nel ~~semispazio~~ un punto P' pel quale vengono a passare tutte le sfere descritte sui circoli della nuova rete come circoli massimi. Così rispetto alla detta sostituzione lineare, ogni punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ del semispazio ne individua un altro $P' \equiv (\xi', \eta', \zeta')$ e noi estendiamo con Poincaré la trasformazione a tutto il semispazio facendo corrispondere al punto P il punto P'.

---

ri invece il circolo

$$x^2 + y^2 + c = 0$$

che i tre circoli fondamentali (e tutti quelli della rete) taglieranno in punti diametralmente opposti. In fine la sfera che ha per circolo massimo p.e. il primo di quei tre circoli ha per equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2a_1 x + 2b_1 y + c = 0$$

e taglia l'asse z nei due punti $z = \pm\sqrt{-c}$

Quali saranno le formole di trasformazione? Per trovarle basta tradurre analiticamente la definizione geometrica della trasformazione.
Sia (§ 10) (pag 47 e segg)

$$(18) \qquad A z' z_0' + B z' + B_0 z_0' + C = 0$$

l'equazione di un circolo della 2ª rete, dove A, B, C sono parametri arbitrarî (i due estremi reali). Ponendo

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2,$$

sarà

$$(18^*) \quad A \rho'^2 + B z' + B_0 z_0' + C = 0$$

l'equazione della sfera corrispondente.
Il circolo (18) si muta per la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

nell'altro:

$$(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) z z_0 + (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) z +$$
$$+ (A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta) z_0 + A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + \beta_0 B_0 \delta + C\delta\delta_0 = 0$$

e la sfera che lo ha per circolo massimo ha quindi per equazione:

$$A(\alpha\alpha_0\rho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0) + B(\alpha\gamma_0\rho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0) +$$
$$+ B_0(\alpha_0\gamma\rho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta) + C(\gamma\gamma_0\rho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0) = 0$$

e deve contenere il punto $P \equiv (\xi, \eta, \zeta)$. Paragonando quest'ultima equazione con la (18*) ne deduciamo per le formole richieste:

(v. pag. seg.)

$$(19)\begin{cases} \rho'^2 = \dfrac{\alpha\alpha_0\rho^2+\alpha\beta_0 z+\alpha_0\beta z_0+\beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0} \\ z' = \dfrac{\alpha\gamma_0\rho^2+\alpha\delta_0 z+\beta\gamma_0 z_0+\beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0} \\ z'_0 = \dfrac{\alpha_0\gamma\rho^2+\alpha_0\delta z_0+\beta_0\gamma z+\beta_0\delta}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0} \end{cases}$$

Se calcoliamo da queste $\zeta'^2=\rho'^2-z'z'_0$, supponendo come al solito

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \text{ troviamo}$$

$$(19)^* \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0}$$

Questa trasformazione dello spazio conserva gli angoli e cangia le sfere in sfere e di più il piano $\eta\zeta$ in sè stesso; quindi i circoli normali a questo piano in altrettanti circoli.*

Se consideriamo la totalità delle sostituzioni lineari esse formano un gruppo continuo, al quale con le formule (19)(19*)(pag preced) facciamo corrispondere un gruppo isomorfo di trasformazioni conformi dello spazio.

Osserviamo che se la sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

non è parabolica avrà sul piano $\xi\eta$ due punti distinti fissi

---

* Si può dimostrare facilmente la cosa osservando che ciò ha luogo per le trasformazioni corrispondenti alle sostituzioni lineari elementari

$$z'=z+a\ ;\ z'=kz\ ;\ z'=\frac{1}{z}$$

con le quali ogni altra può comporsi.

A, B ed il circolo condotto per A, B normalmente al piano si cangierà in sè medesimo. In particolare quando la sostituzione è ellittica, tutti i punti del circolo rimarranno fissi.*

È manifesto che le nostre deduzioni restano invariate se in luogo di una sostituzione di 1ª specie ne consideriamo una di 2ª

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta};$$

soltanto dovremo nelle formole di Poincaré cambiare z con z_0. In particolare se consideriamo una riflessione e sul circolo di riflessione come circolo massimo descriviamo una sfera, la trasformazione corrispondente nello spazio sarà un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto a questa sfera. Noi la diremo una riflessione su questa sfera che si dirà perciò <u>sfera di riflessione</u>. Considerią

* Ciò si vede nel modo più semplice riducendo la sostituzione (ellittica) alla forma normale

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z$$

con $\alpha\delta = 1$, $|\alpha| = |\delta|$, dopo di che le formole di Poincaré danno

$$z' = \frac{\alpha}{\delta} z \qquad \zeta' = \zeta$$

e rappresentano semplicemente una rotazione dello spazio attorno all' asse $O\zeta$.

mo ora un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari ed il gruppo corrispondente di trasformazioni conformi dello spazio. Possiamo trasportare nello spazio la nozione di punti equivalenti rispetto al gruppo e di campo fondamentale, che sarà ora un campo a tre dimensioni. Diremo dunque che un gruppo discontinuo di sostituzioni lineari è propriamente discontinuo nello spazio se tale è il gruppo corrispondente. È chiaro che un gruppo con sostituzioni infinitesimali è sempre impropriamente discontinuo anche nello spazio; ma nel caso ~~opposto~~ abbiamo l'importante teorema di Poincaré:

«Ogni gruppo discontinuo di sostituzioni lineari, privo di sostituzioni infinitesimali, è sempre propriamente discontinuo nello spazio».

§ 23 Il gruppo delle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi complessi.

Come applicazione del metodo di Poincaré esposto nel § precedente tratteremo il gruppo delle sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \; ; \; \alpha\delta - \beta\gamma = 1 ,$$

i cui coefficienti sono numeri interi complessi di Gauss, cioè della forma

$$a + bi \; , \quad \text{essendo } a, b \text{ interi}$$

reali. Questo gruppo è impropriamente discontinuo in tutto il piano come risulta subito dall'osservare che rispetto al gruppo attuale sono equivalenti al punto $z=0$ e fra loro tutti i punti

$$z = \frac{a+bi}{c+di}$$ e questi formano un gruppo di punti ovunque condensato nel piano*. Ma se passiamo dal piano allo spazio

* Questa proposizione, che risulta dalle proprietà elementari degli interi complessi di Gauss, può dimostrarsi anche così. Prendasi per δ uno degli infiniti numeri primi reali p della forma $4n+3$ e per β_1, β_2 due numeri qualunque (reali) non simultaneamente divisibili per p. Possiamo sempre trovare due interi complessi

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

tali che sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (\alpha_1 + i\alpha_2)p - (\beta_1 + i\beta_2)(\gamma_1 + i\gamma_2) = 1$$

Basta perciò determinare due interi reali γ_1, γ_2 che sodisfino le congruenze

$$\left.\begin{array}{l} \beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1 \equiv 1 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{p},$$

ciò che è sempre possibile, il determinante del sistema $\begin{vmatrix} \beta_2 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \beta_1^2 + \beta_2^2$ non essendo divisibile per p. Dunque tutti i punti razionali di coordinate $\frac{\beta_1}{p}$, $\frac{\beta_2}{p}$ sono equivalenti e poichè p può essere grande quanto si vuole ne risulta il teorema.

Osservaz.e Che vi siano infiniti numeri primi della forma $4n+3$, risulta da un teorema generale di Dirichlet, ma si può dimostrare elementarmente, seguendo un procedimento di Euclide, così: Consideriamo i numeri primi della forma $4n+3$ fino ad uno qualunque di essi, p.e. siano: $3, 7, 11, \ldots p$. Il numero: $N = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \ldots p^2 + 2$ è $\equiv 3 \pmod 4$ ed ammette quindi qualche fattore primo della forma $4n+3$ che è al di là di quelli considerati —

il gruppo sarà propriamente discontinuo e noi ci proponiamo di determinarne il campo (poliedro) fondamentale.

In luogo però di considerare solo le sostituzioni con $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ qui ammettiamo che il determinante possa essere una qualunque delle quattro unità del campo complesso

$$1\,,\ -1\,,\ i\,,\ -i$$

e poichè, moltiplicando i quattro coefficienti per i il determinante cambia segno, possiamo limitarci a considerare le sostituzioni

$$(20)\qquad z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

con coefficienti interi complessi e determinante

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1 \quad o \quad =i.$$

Questo gruppo che indicheremo con G contiene il precedente come sottogruppo invariante d'indice 2.

Per lo studio del nostro gruppo G è importante un ampliamento per riflessione che si ottiene associando alle sostituzioni (20) di 1ª specie le altre di 2ª specie

$$(20^*)\qquad z'=\frac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1, i\,.$$

Le (20) (20*) insieme formano un gruppo G_0 in cui G è invariante d'indice 2. Per lo studio del gruppo ampliato G_0 seguiremo un metodo perfettamente analogo a quello tenuto pel gruppo modulare e cominceremo dal trovare le riflessioni (proprie) contenute in G_0. Queste ci saranno date dalla formola (9) (§ 13, pag 63) quando sia reso $=1$ il determinante della sostituzione. Fra le sostituzioni di 1ª specie (20*) (pag prec) a determinante $=1$ le riflessioni saranno quindi date dalla formola

$$(21) \qquad z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2) z_0 + i\beta_1}{i\gamma_1 z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)}$$

i numeri interi $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ soddisfacendo l'equazione

$$(22) \qquad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1$$

Le sostituzioni (20*) a determinante i si riducono a determinante 1 moltiplicando i quattro coefficienti per $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$; e se applichiamo ancora la citata formola (9) troviamo le nuove riflessioni

$$(21^*) \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1-i) b_1}{(1-i) c_1 z_0 + (a_2 + i a_1)},$$

i numeri interi reali a_1, a_2, b_1, c_1 essendo assoggettati alla condizione:

$$(22^*) \qquad a_1^2 + a_2^2 + 2b_1 c_1 = 1.$$

Fra le riflessioni (21) (21*) ve ne hanno di quelle che avvengono sopra piani e sono quelle che corrispondono rispettivamente a $\gamma_1 = 0$, $c_1 = 0$. Otteniamo così i piani di riflessione:

$$(A)\quad 2\xi = b\ ;\ 2\eta = b\ ;\ \xi - \eta = b\ ;\ \xi + \eta = b$$

essendo b un intero reale qualunque.
Per γ_1 o c_1 differenti da zero abbiamo poi le due specie di sfere di riflessione

$$(B)\begin{cases} \left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2} \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \equiv 1 \pmod{\gamma_1} \end{cases}$$

$$(B^*)\begin{cases} \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_1^2} \\ a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \pmod{2c_1} \end{cases}$$

Le formole (A) (B) (B*) danno tutte le sfere di riflessione di G_0
Come al § 16, così ora si vede che se si considera nel semispazio positivo la regione compresa fra quattro piani paralleli ai piani coordinati $\xi\zeta\ ;\ \eta\zeta$:

$$\xi = A\ ;\ \xi = B\ ;\ \eta = C\ ;\ \eta = D$$

al disopra del piano

$$\zeta = k \quad (k > 0)$$

questa non è solcata che da un numero finito di sfere e di piani di riflessione. In secondo luogo ogni sostituzione di G_0, applicata alle sfere di riflessione, le scambierà fra loro.
Ciò premesso possiamo facilmente determinare un poliedro fondamentale pel gruppo G_0. Si considerino invero i tre piani di riflessione

$$\xi = \frac{1}{2}\,, \quad \eta = 0\,, \quad \xi - \eta = 0\,;$$

questi limitano nel semispazio positivo un prisma triangolare (isoscele) aperto che non è più attraversato da alcun piano di riflessione. Consideriamo poi la sfera di riflessione del tipo

(B) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

che taglia tutte e tre le faccie del prisma.
La regione del prisma esterna a questa sfera è una piramide con un vertice all'infinito e coi tre vertici al finito

$$V_1 \equiv (0, 0, 1)\,; \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\,; \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Dimostreremo che questa è una <u>piramide fondamentale di G_0</u>. Per ciò basta osservare: 1° che nessuna sfera di riflessione attraversa la piramide, 2° che nessuna sostituzione di G_0 trasforma la piramide in sè stessa. La prima cosa risulta da ciò che nessuna sfera di riflessione può contenere nel suo interno un vertice V_1 o V_2 o V_3. E invero il raggio di una tale sfera dovrebbe essere $> \frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi $= 1$; ma le sfere di raggio uguale ad 1 hanno i centri nei punti interi del piano $z = a_1 + i a_2$ e non attraversano il poliedro. In secondo luogo una sostituzione di G_0 che cangiasse la piramide in sè stessa dovrebbe lasciar fisso il vertice $\zeta = \infty$ quindi anche gli altri tre, di cui lascerebbe fissa l'ordinata. Dopo queste osservazioni il ragionamento procederà come pel gruppo modulare e si vedrà che applicando alla piramide tutte le sostituzioni di G_0 si riempirà il semispazio positivo con altrettante piramidi equivalenti. Ne risulta: Ogni punto del semispazio positivo è equivalente, rispetto a G_0, ad uno ed a un solo punto della piramide fondamentale.

Per avere il poliedro fondamentale del gruppo G, basterà, p. e., associare alla piramide la sua simmetrica rispetto al piano $\xi - \eta = 0$. I punti di questo poliedro sono caratterizzati dalle disuguaglianze

$$(23) \begin{cases} 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1 \end{cases}$$

Osservazione. Il metodo che qui abbiamo tenuto per lo studio del gruppo G potrebbe egualmente applicarsi ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

nelle quali i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono gli interi della forma

$$a + ib\sqrt{D},$$

dove D indica un numero intero positivo ed a, b, interi ordinari.*

---

* Cf. le mie memorie nei Vol. 38, 40 dei Mathematische Annalen

§ 24. Decomposizione di un numero nella somma di quattro quadrati. – I risultati ottenuti nel § precedente consentono importanti applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme quadratiche, per le quali rimandiamo al 1° volume delle Automorphe Functionen del Fricke. Qui ci limiteremo a dedurre il teorema: Ogni numero intero è la somma di quattro quadrati (interi)

Se $\underline{m}$ è un numero intero qualunque possiamo sempre trovare (e in diversi modi) due numeri interi r, s, tali che r^2+s^2+1 sia divisibile per m, cioè

$$r^2+s^2+1 \equiv 0 \pmod m) \; *$$

. Conside-

---

* Nel caso di m numero primo si dimostra subito l'asserzione osservando che se $\underline{r}$ percorre un sistema completo di resti $(\mathrm{mod}\ m)$ non può il numero $-(r^2+1)$ essere sempre non residuo $(\mathrm{mod}\ m)$ altrimenti per tutti i valori di r sarebbe

$$[-(r^2+1)]^{\frac{m-1}{2}} \equiv -1 \pmod m$$

, e la congruenza che è di grado $\underline{m-1}$ avrebbe $\underline{m}$ radici, ciò che è assurdo. Dal caso di un modulo primo si risale al caso di un modulo composto in modo noto.

E del resto basta dimostrare il teorema del testo per un numero primo ricordando che per l'identità (d'Eulero)

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p+iq & r+is \\ -r+is & p-iq \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a+ib)(p+iq)+(c+id)(r+is) \, , & (a+ib)(r+is)+(c+id)(p-iq) \\ (a-ib)(r+is)+(-c+id)(p+iq) \, , & (a-ib)(p-iq)+(c-id)(r-is) \end{vmatrix}$$

un prodotto di due somme di 4 quadrati è ancora la somma di 4 quadrati.

riamo ora il punto

$$\left(\frac{r}{m}\,,\ \frac{s}{m}\,,\ \frac{1}{m}\right)$$

dello spazio e troviamo, rispetto al gruppo del § precedente, il suo equivalente nella piramide fondamentale. Applicando le formole di Poincaré (19) (19*) (pag) col fare

$$z=\frac{r+is}{m}\qquad \rho^2=\frac{r^2+s^2+1}{m^2}$$

vediamo subito che le coordinate del punto equivalente saranno della forma

$$\frac{r'}{m'}\,,\ \frac{s'}{m'}\,,\ \frac{1}{m'}\,.$$

Ma dalle disuguaglianze (23) deduciamo che si avrà

$$r'=0\qquad s'=0\qquad m'=1$$

cioè il punto $\left(\frac{r}{m}\,,\frac{s}{m}\,,\frac{1}{m}\right)$ sarà equivalente al vertice $(0,0,1)$ della piramide fondamentale. Sia ora $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ la sostituzione che porta $(0,0,1)$ in $\frac{r}{m}\,,\frac{s}{m}\,,\frac{1}{m}$. La formola (19*) ci dà subito

$$m=\gamma\gamma_0+\delta\delta_0$$

cioè

$$m=\gamma_1^2+\gamma_2^2+\delta_1^2+\delta_2^2,$$

il che dimostra il teorema enunciato.

Capitolo 3°

Trasformazioni di integrali doppi in integrali semplici. Funzioni armoniche e loro proprietà fondamentali. Problema di Dirichlet e sua risoluzione nel caso del campo circolare.