510.8 A.815
RARI
~~Mat. B-90~~

PUBBLICAZIONI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

GUIDO ASCOLI – PIETRO BURGATTI
GEORGES GIRAUD

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

DEI TIPI ELLITTICO E PARABOLICO

R. SCUOLA NORMALE ★ BIBLIOTECA ★

FIRENZE
G. C. SANSONI – EDITORE
1936-XIV

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

337-1935 — Firenze – Tipografia E. Ariani, Via S. Gallo, 33

PREFAZIONE.

Nella primavera del 1933, gli « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche » misero a concorso un premio per una monografia su uno qualunque di due temi assegnati. Uno di questi temi era stato così formulato: « Riassumere in rapida sintesi la teoria delle equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico »; e ad esso furono dedicati i tre lavori che, nel Giugno 1934, vennero presentati al concorso. Autori di tali lavori risultarono i professori GUIDO ASCOLI, *dell'Università di Pisa (ora dell'Università di Milano),* PIETRO BURGATTI, *dell'Università di Bologna, e* GEORGES GIRAUD, *dell'Università di Clermont-Ferrand.*

La Commissione giudicatrice, composta dei professori Guido Fubini, Mauro Picone *e* Giovanni Sansone, *dopo accurato esame, giunse, con un'elaborata relazione, alle conclusioni seguenti:*

« La monografia ASCOLI *rende conto molto ordinatamente di « tutti gli indirizzi in cui si è svolta nell'ultimo trentennio la teoria « delle equazioni di tipo ellittico; da ricordarsi a titolo di esempio « come specialmente interessanti le esposizioni dei procedimenti dimo- « strativi del celebre teorema di Hilbert e le opportune osservazioni « critiche sulla riduzione delle equazioni del secondo ordine a forme « tipiche e sulla difficoltà dei problemi relativi alle equazioni di tipo « parabolico. Accurate le indicazioni bibliografiche.*

« La monografia BURGATTI *riguarda lo studio completo delle « equazioni ellittiche nel caso lineare. L'esposizione semplice, ele- « gante, espressiva, e in qualche punto originale, accompagnata sem- « pre da richiami bibliografici opportuni, è da considerarsi piena- « mente efficace per chi voglia prepararsi per studi ampi e profondi.*

« La monografia GIRAUD *è dovuta ad un appassionato cultore « della teoria delle equazioni alle derivate parziali del secondo or- « dine; è organicamente pensata e scritta e in più parti connessa « con gli studi originali dell'Autore. Meritano rilievo la precisa e*

« felice esposizione delle funzioni di E. E. Levi, e la riduzione dei « vari problemi sulle equazioni di tipo ellittico alle equazioni inte- « grali. Meno completo lo studio delle equazioni paraboliche.

« Con grande compiacimento la Commissione ha rilevato l'esito « felice del Concorso.

« Le tre Monografie, redatte da punti di vista differenti, si com- « pletano a vicenda; pubblicate in un unico volume arricchiranno « la letteratura matematica e potranno costituire guida sicura per « gli studiosi dell'argomento.

« In quanto al premio, la Commissione ritiene in linea assoluta « tutte e tre le monografie degne di essere vincitrici del Concorso e « pertanto, senza fare graduazioni di merito, propone che la somma « disponibile a titolo di premio sia ugualmente ripartita ».

Accogliendo completamente le conclusioni sopra riportate, la Direzione degli « Annali » assegnò un premio di lire duemila a ciascuno dei professori Ascoli, Burgatti *e* Giraud; *ed ora ne pubblica le monografie, riunendole nel presente volume. Il quale riuscirà assai utile sia a chi voglia rapidamente conoscere i concetti, i metodi ed i risultati fondamentali della teoria delle equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico, per poter poi passare a più ampi studi o alle applicazioni; sia a chi desideri rendersi conto — senza perdersi in lunghe e faticose ricerche bibliografiche — degli ultimi risultati a cui si è pervenuti nella teoria indicata, che è una delle più attraenti e importanti dell'Analisi Matematica.*

Leonida Tonelli.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DEL TIPO ELLITTICO

di PIETRO BURGATTI (Bologna).

Prefazione.

Oggi la teoria dell'equazione differenziale del 2º ordine di tipo ellittico è assai vasta, comprendendo ricerche di varia natura, e non potrebbe essere esposta in un breve scritto. Poichè riguardo alle applicazioni fisiche hanno maggiore importanza le equazioni lineari, ad esse esclusivamente è dedicata questa monografia, col fine d'insegnare al lettore, in una rapida ma sufficiente esposizione, i metodi per la risoluzione dei problemi d'integrazione, e dargli così modo d'intraprendere applicazioni e più ampi e profondi studi.

Con l'uso dell'analisi vettoriale, nella sua parte più elementare, ho potuto in maniera rapida e nuova introdurre il concetto di varietà caratteristica in uno spazio S_n partendo direttamente dalla fondamentale formula di GREEN generalizzata; evitando così quella teoria preliminare che si trova nei libri, importante per sè, ma lunga e pesante per chi desideri saperne quel tanto che occorre qui. Dal che segue la classificazione delle equazioni, e vien mostrato come diversamente si presenti per esse la soluzione dei problemi al contorno. Questa m'è parsa un'introduzione molto utile prima di passare alla considerazione dell'equazioni particolari di tipo ellittico.

Per queste si è dimostrato il teorema d'unicità relativo a certi dati al contorno in casi abbastanza generali, estendendo un artifizio di PICARD. E tutto ciò è esposto per gli spazi (S_n) senza complicazioni nè concettuali nè formali.

Segue la 2ª forma fondamentale di GREEN nel caso generale e la definizione di soluzione fondamentale. Dopo di che si procede, seguendo l'ordine storico, dall'equazioni più semplici alle più com-

plesse, sia perchè le più semplici hanno maggior interesse nelle applicazioni, e sia per veder meglio le difficoltà da superare e le cose da generalizzare.

Riguardo ai teoremi d'esistenza si è fatto qualche cenno opportuno; ma non si sono trattati in modo esplicito ed esteso, perchè ciò avrebbe richiesto ben altro spazio; a meno di sacrificare altre cose che riteniamo più interessanti ai fini che mi sono proposto.

Un paragrafo è dedicato alle funzioni armoniche in (S_n) e ai relativi problemi al contorno, ed un altro alle funzioni metaarmoniche.

Dopo ciò si mostra in due modi come i metodi e le proprietà trovate in quei casi particolari si possono estendere all'equazioni più generali. Tutto ciò in succinto; ma i punti fondamentali sono ben messi in evidenza.

Come si vede, qui è principalmente il metodo classico inaugurato da GREEN che si è voluto sviluppare ed esporre in un quadro generale. I principali soggetti sono indicati nell' indice.

§ 1.

1. — Formula generale di Green per l'equazioni lineari del 2° ordine.

Sia P un generico punto d'uno spazio euclideo S_n ad n dimensioni $(n > 1)$ e siano α, $\mathbf{a}$, c, U, rispettivamente una omografia vettoriale (precisamente una dilatazione) un vettore e due scalari tutte funzioni di P. La più generale espressione differenziale lineare del secondo ordine omogenea in U può scriversi vettorialmente nella forma comoda ed espressiva

$$E(U) = \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} U) + \mathbf{a} \times \operatorname{grad} U + cU, \tag{1}$$

ove $\alpha \operatorname{grad} U$ significa, com'è noto, l'omografia α applicata al vettore $\operatorname{grad} U$.

Si chiama *aggiunta* della (1) l'espressione

$$G(V) = \operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} V) - \mathbf{a} \times \operatorname{grad} V + (c - \operatorname{div} \mathbf{a})V, \tag{1'}$$

che diversifica da quella per il solo cambiamento di $\mathbf{a}$ in $-\mathbf{a}$ e di c in $c - div\, \mathbf{a}$. Facendo lo stesso cambiamento in (1′), si ritrova la (1); il che significa essere la (1) l'aggiunta della (1′).

L' insieme delle (1) e (1') gode della proprietà espressa dalla seguente identità :

$$VE(U) - UG(V) = \operatorname{div} \mathbf{w}, \tag{2}$$

ove

$$\mathbf{w} = V . \alpha \operatorname{grad} U - U . \alpha \operatorname{grad} V + UV\mathbf{a}. \tag{2'}$$

La si verifica subito tenendo presente la formula generale

$$\operatorname{div}(m\mathbf{v}) = m \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} m \times \mathbf{v},$$

e ricordando che α è dilatazione ($\alpha\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} \times \mathbf{u}$).

Qui supporremo finite e continue α, $\mathbf{a}$, c, U, V e le loro derivate del primo ordine, in più quelle del secondo ordine di U e V, nelle varie regioni di S_n che si dovranno considerare ; onde diremo (salvo dichiarazione contraria) che sono *funzioni regolari* di P. Ne segue che $\mathbf{w}$ è pure regolare.

Indicheremo con (S) una porzione finita di S_n tutta limitata da una ipersuperficie o varietà a $n - 1$ dimensioni che ammette in ogni suo punto P una normale unica e determinata ; il versore normale diretto verso l' interno sarà indicato con $\mathbf{n}$. Ricordando allora la formula

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{w} dS = -\int_\sigma \mathbf{w} \times \mathbf{n} d\sigma \tag{0}$$

che trasforma un integrale multiplo d'ordine n in un altro d'ordine $n - 1$, si ottiene in base alle (2) e (2')

$$\int_S [VE(U) - UG(V)] dS = -$$
$$= -\int_\sigma [V . \alpha \operatorname{grad} U \times \mathbf{n} - U . \alpha \operatorname{grad} V \times \mathbf{n} + UV\mathbf{a} \times \mathbf{n}] d\sigma,$$

ossia

$$\int_S [VE(U) - UG(V)] dS =$$
$$= -\int_\sigma [V \operatorname{grad} U \times \alpha\mathbf{n} - U \operatorname{grad} V \times \alpha\mathbf{n}] d\sigma - \int_\sigma UV\mathbf{a} \times \mathbf{n} d\sigma .$$

Ora $\alpha\mathbf{n}$ è in ogni punto il vettore trasformato di $\mathbf{n}$ mediante l'omografia α. Se diciamo q il suo modulo e $\mathbf{v}$ il suo versore, sarà $\alpha\mathbf{n} = q\mathbf{v}$, e alla direzione di $\mathbf{v}$ daremo con D'Adhémar il nome di *direzione conormale*, o diremo semplicemente *conormale* il versore $\mathbf{v}$. Poichè $\operatorname{grad} U \times \mathbf{v}$ è la derivata di U nella direzione $\mathbf{v}$, potrà chia-

marsi *derivata conormale* ed essere rappresentata con $\frac{\partial U}{\partial v}$. Scriveremo dunque più semplicemente

$$\int_S [VE(U) - UG(V)]dS = \tag{3}$$

$$= -\int_\sigma q\left(V\frac{\partial U}{\partial v} - U\frac{\partial V}{\partial v}\right)d\sigma - \int_\sigma UV\mathbf{a}\times\mathbf{n}d\sigma.$$

È la nota *formula di Green* generalizzata al caso d'una generica espressione (1), valida sotto le condizioni di regolarità accennate, e anche quando il campo finito (S) è limitato da parecchie ipersuperficie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_i$; nel qual caso si deve intendere $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 +$; ossia estendere l'integrale a tutte le σ.

Essendo questa formula il punto di partenza dei metodi più classici e generali per l'integrazione dell'equazioni $E(U) = 0$, occorre esaminarla un po' attentamente.

2. — Varietà caratteristiche e classificazione dell'equazioni.

Risulta anzitutto che per calcolare il valore dell'integrale esteso ad (S) non importa già di conoscere i valori di U e V in (S); ma solamente i valori di U e V e delle loro derivate conormali sopra la varietà (σ) di confine. Ed anzi si vede che per certe forme particolari di (σ), o porzioni di (σ), basta la conoscenza dei soli valori di U e V. Ed invero, se nei punti di una porzione di (σ) la conormale risulta tangenziale, le derivate $\frac{\partial U}{\partial v}$ e $\frac{\partial V}{\partial v}$ si calcolano senz'altro note U e V su quella porzione.

Bisogna dunque fare una distinzione. La condizione che sopra (σ) la $\mathbf{v}$ sia tangenziale è espressa da

$$\mathbf{v}\times\mathbf{n} \equiv \alpha\mathbf{n}\times\mathbf{n} = 0.$$

Se $f = 0$ è l'equazione di (σ), la normale $\mathbf{n}$ ha la direzione di grad f; talchè la precedente diventa

$$\alpha \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} f = 0. \tag{4}$$

Ne segue che la conormale risulterà tangenziale soltanto sulle superficie (σ) integrali dell'equazione differenziale (4).

Ora se in coordinate la α è rappresentata dalla matrice $\{a_{rs}\}$, la (4) ha la forma

$$\sum_{r,s} a_{rs}\frac{\partial f}{\partial x_r}\frac{\partial f}{\partial x_s} = 0; \tag{4'}$$

espressione quadratica omogenea nelle derivate prime; e perciò potrebbe non ammettere soluzioni reali. Chiamando, come si suol fare, *varietà caratteristiche* le $f = 0$ integrali della (4) o (4'), dobbiamo dunque distinguere i due casi seguenti:

1) La α è tale che le caratteristiche risultano *immaginarie*. Allora (stando nel campo reale) nessuna superficie racchiudente una porzione (S) di S_n potrà essere caratteristica; cosicchè per il calcolo del secondo membro della (3) si richiede sempre la conoscenza di U e V non solo, ma delle loro derivate conormali; a meno che non s'introducano altre condizioni speciali per U e V (cosa del resto che faremo in seguito).

2) La α è tale che le caratteristiche risultano *reali*. In questo caso esistono delle porzioni di S_n limitate in tutto o in parte da varietà caratteristiche; perciò l'integrale esteso a coteste (σ) si potrà calcolare in tutto o in parte conoscendo soltanto su (σ) (o una parte di (σ)) i valori di U e V.

Come si vede la distinzione è tutta fondata sulla sola omografia α. Ora questa dilatazione può essere *propria* o *degenere*, secondo che il suo invariante ennesimo è in tutti i punti della porzione di spazio che si considera diverso da zero o uguale a zero; ossia

se $I_n\alpha = |a_{rs}| \neq 0$; dilatazione propria,

se $I_n\alpha = |a_{rs}| = 0$, dilatazione degenere,

indicando con $|a_{rs}|$ il determinante della matrice $\{a_{rs}\}$.

Sia $I_n\alpha \neq 0$. Come si sa, la dilatazione α ha, in corrispondenza ad ogni punto P, n direzioni unite $i_1\, i_2 \ldots i_n$ ortogonali due a due, soddisfacenti cioè alle condizioni

$$\alpha\mathbf{i}_1 = p_1\mathbf{i}_1 \;,\; \alpha\mathbf{i}_2 = p_2\mathbf{i}_2 \ldots \alpha\mathbf{i}_n = p_n\mathbf{i}_n,$$

ove $p_1\, p_2 \ldots p_n$ sono le radici reali dell'equazione di grado n

$$I_n(\alpha - p) = |a_{rs} - p| = 0. \tag{5}$$

La p entra solo negli elementi principali del determinante. Posto in corrispondenza ad ogni P

$$\mathbf{n} = b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n,$$

l'equazione $\alpha\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$, da cui proviene la (4), diventa

$$p_1 b_1^2 + p_2 b_2^2 + \ldots p_n b_n^2 = 0, \tag{6}$$

che rappresenta un *cono* di vertice P. In questo punto la normale $\mathbf{n}$ alla varietà $f = 0$ dev'essere una generatrice di questo cono. Per conseguenza, se $p_1 p_2 \dots p_n$ sono tutte e sempre positive in ogni P del campo considerato, il cono risulta *sempre immaginario*; se qualcuna delle p è negativa, risulta *sempre reale*.

Si conclude pertanto che le caratteristiche sono immaginarie quando le radici della (5) sono tutte positive in ogni P, reali quando le radici non sono tutte positive. Nel primo caso si dice che l'espressione $E(U)$ è di *tipo ellittico*; nel secondo che è di *tipo iperbolico*. In corrispondenza si danno gli stessi nomi alla α.

Sia $I_n \alpha = 0$; allora almeno una delle radici p è nulla (la $I_n \alpha$ è il termine noto dell'equazione (5) in p). Siano precisamente in numero di $n - h$ le radici nulle. Allora in ogni punto P si soddisfa alla (6) prendendo $b_1 = b_2 \dots = b_h = 0$ e le altre $b_{h+1} \dots b_n$ ad arbitrio sotto la condizione $\mathbf{n}^2 = 1$.

Dunque esistono ancora delle caratteristiche reali. In questo caso si dice che la $E(U)$ è di *tipo parabolico*.

3. — Problema dell' integrazione; unicità di certe soluzioni.

La formulazione matematica dei problemi della fisica porta ad equazioni differenziali della forma $E(U) = f(P)$, appartenenti ad uno dei tre tipi considerati di sopra. E si tratta in massima di determinare una funzione $U(P)$ regolare in una certa regione (S) di S_n soddisfacente alla detta equazione e a certe date condizioni sopra a una varietà (σ) a $n - 1$ dimensioni appartenente ad S_n, dette *condizioni ai limiti*. Occorre vedere precisamente quali sono le condizioni ai limiti che rendono *univocamente* determinata la soluzione nell' ipotesi che esista.

Per stare dapprima nei casi più semplici e utili nella fisica supponiamo che l'equazione aggiunta coincida con la proposta, nel qual caso questa è detta *autoaggiunta* [1]. Basta perciò che sia $\mathbf{a} = 0$.

---

[1] Non sarà inutile osservare che se α è costante, l'equazione può ridursi alla forma autoaggiunta. Invero col moltiplicatore $e^{\mathbf{a} \times (P-0)}$ si ha

$$e^{\mathbf{a} \times (P-0)} \operatorname{div} (\alpha \operatorname{grad} U) = \operatorname{div} [e^{\mathbf{a} \times (P-0)} \alpha \operatorname{grad} U] - \operatorname{grad} e^{\mathbf{a} \times (P-0)} \times \alpha \operatorname{grad} U.$$

Ma il 2° termine è uguale a

$$e^{\mathbf{a} \times (P-0)} \mathbf{a} \times \alpha \operatorname{grad} U;$$

perciò l'equazione diventa

$$\operatorname{div} (\beta \operatorname{grad} U) + c e^{\mathbf{a} \times (P-0)} U = 0, \quad \text{con} \quad e^{\mathbf{a} \times (P-0)} \alpha = \beta,$$

che è autoaggiunta.

Avremo dunque

$$(7) \qquad E(U) = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} U) + cU = 0$$
$$G(V) = E(V) = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} V) + cV = 0.$$

Sia (σ) una varietà chiusa a $n-1$ dimensioni non caratteristica e (S) lo spazio a connessione semplice interno ad essa. Dalla identità

$$\operatorname{div}(Ua \operatorname{grad} U) = U \operatorname{div}(a \operatorname{grad} U) + \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U$$
$$= -cU^2 + \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U,$$

si deduce mediante l'applicazione della (0)

$$-\int_\sigma U . \operatorname{grad} U \times a\mathbf{n} d\sigma = \int_S [-cU^2 + \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U] dS,$$

ossia

$$(7') \qquad -\int_\sigma qU \frac{\partial U}{\partial v} d\sigma = \int_S \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U dS - \int_S cU^2 dS.$$

Ammettiamo che sopra a (σ) debba essere $U = 0$ oppure $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$; dovrà allora risultare

$$(8) \qquad \int_S \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} \mathrm{U} dS - \int_S cU^2 dS = 0.$$

Se la $E(U)$ è di tipo ellittico, e solo in questo caso, la quantità $\operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U$ sarà sempre positiva in (S), per le cose dette, qualunque sia U; perciò quando sia anche $c \leq 0$, questo integrale non potrà essere nullo se non è $U = 0$ in tutto (S) (nel caso $c = 0$ potrà essere $U = \text{cost}$ in corrispondenza al dato $\frac{\partial U}{\partial v} = 0$ su (σ)).

Ne segue che non possono esistere due soluzioni regolari distinte U_1 e U_2 della (7) che abbiano, esse o le loro derivate conormali, uguali valori su (σ); perchè la differenza $U = U_1 - U_2$, soluzione pure della (7), che sarebbe nulla su (σ) (o avrebbe la derivata conormale nulla), risulterebbe nulla in tutto (S), e perciò $U_1 = U_2$.

Concludiamo pertanto che *dell'equazioni* (7) *autoaggiunte soltanto quelle di tipo ellittico con* $c \leq 0$ *possono avere soluzioni regolari in ogni campo finito* (S) *univocamente determinate dai valori che si prescrivono alla soluzione o alla derivata conormale* (2) *sulla varietà* (σ) *racchiudente* (S).

E diciamo *soltanto*, perchè o sia $c > 0$, o sia l'equazione di tipo iperbolico, non solo la deduzione ottenuta dalla (8) non è più va-

(2) A meno d'una costante nel caso $c = 0$.

lida, ma ci si persuade subito con semplici esempi che possono effettivamente esistere in questi casi soluzioni nulle su certe varietà limite chiuse e non nulle nel campo interno.

L'equazione, ad esempio, di tipo ellittico autoaggiunta

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + kU = 0$$

ove $k > 0$ è un numero intero (dunque $c > 0$), ammette la soluzione

$$U = \operatorname{sen} \frac{kx}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{ky}{\sqrt{2}},$$

che s'annulla sul quadrato di lati $x = 0, x = \pi\sqrt{2}, y = 0, y = \pi\sqrt{2}$ e non è nulla nell' interno. E parimenti l'equazione autoaggiunta di tipo iperbolico

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

ammette la soluzione

$$U = (x - a^2 + (y - b)^2 - r^2$$

nulla sulla circonferenza di raggio r e centro (a, b) e non nulla nell' interno. Altrettanto si potrebbe dire delle paraboliche.

In base a ciò si potrebbe credere che bastasse per le dette equazioni (iperboliche o ellittiche con $c > 0$) aggiungere ai valori di U sulla varietà chiusa (σ) anche quelli di $\frac{\partial U}{\partial v}$, al fine di definire univocamente la soluzione in (S). Ma questo non è. Supponiamo infatti scelta una V regolare soddisfacente a $G(V) = 0$, e sia U una soluzione regolare di $E(U) = 0$. La (3) dà

$$(10') \qquad \int_\sigma q\left(V \frac{\partial U}{\partial v} - U \frac{\partial V}{\partial v}\right) d\sigma + \int_\sigma U V a \times \mathbf{n} d\sigma = 0,$$

la quale mostra che tra i valori di U e $\frac{\partial U}{\partial v}$ sopra a una (σ) chiusa c' è una relazione, e perciò non si possono assegnare entrambi ad arbitrio.

Si vede dunque che per queste equazioni il problema d'unicità della soluzione si presenta diverso da quello dell'equazioni di tipo ellittico con $c \leq 0$. E così è per l'equazioni di tipo iperbolico.

Per l'equazioni (7) c' è un'altra condizione al contorno che assicura l'unicità della soluzione. Se poniamo che sia su (σ)

$$\frac{\partial U}{\partial v} - h(P)U = 0,$$

il primo membro della (7') diventa

$$-\int_\sigma qh(P)U^2 d\sigma\,;$$

cosicchè nell' ipotesi $qh(P) > 0$ la (8) avrà in più un termine pure positivo, e le conclusioni fatte di sopra circa l'unicità della soluzione valgono ancora. Ma quando sia $qh < 0$, o in certe regioni di (σ) maggiore di zero e in altre minore, non si può concludere per questa via più nulla di preciso.

Osservazione. – I valori di U sulla varietà (σ) si possono dare ad arbitrio, purchè $U(P)$ sia finita e continua. Invece i valori di $\frac{\partial U}{\partial v}$ non si possono del tutto assegnare ad arbitrio. Infatti, essendo

$$\int_S \operatorname{div}(a \operatorname{grad} U)\, dS = -\int_\sigma a \operatorname{grad} U \times \mathbf{n} d\sigma = -\int_\sigma q \frac{\partial U}{\partial v} d\sigma,$$

risulta per la (7)

$$\int_\sigma q \frac{\partial U}{\partial v} d\sigma = \int_S cU dS\,;$$

relazione che dimostra l'asserto. In particolare, nel caso di $c = 0$, i valori di $\frac{\partial U}{\partial v}$ su (σ) devono soddisfare alla condizione, detta di *compatibilità*,

$$\int_\sigma q \frac{\partial U}{\partial v} d\sigma = 0.$$

4. — Caso generale dell'equazione di tipo ellittico.

Consideriamo ancora l'equazione $E(U) = 0$ di tipo ellittico nell' ipotesi più generale che *non sia autoaggiunta* $(a \neq 0)$. Si ha manifestamente

$$UE(U) = \operatorname{div}(a \operatorname{grad} U . U) -$$
$$- \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U + \frac{1}{2}\, \mathbf{a} \times \operatorname{grad} U^2 + cU^2 = 0.$$

od anche

$$\operatorname{div}(U . a \operatorname{grad} U + \frac{1}{2}\, \mathbf{a} U^2) = \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U + (\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c) U.$$

Di qui risulta in base al solito teorema (0)

$$(11) \qquad -\int_\sigma (U \frac{\partial U}{\partial v} q + \frac{1}{2} U^2 \mathbf{a} \times \mathbf{n})\, d\sigma =$$
$$= \int_S \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U dS + \int_S (\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c)\, U^2 dS\,;$$

cosicchè, se si suppone $U = 0$ su (σ), si ottiene

$$(11') \qquad \int_S \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U dS + \int_S (\tfrac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c)\, U^2 dS = 0.$$

Questa dimostra che quando sia $\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c \geq 0$ in tutto (S) la U sarà nulla nel campo (S). E da ciò si deduce al modo solito che i *valori di* U *sopra* (σ) *definiscono univocamente la soluzione regolare di un'equazione di tipo ellittico in cui sia* $\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c \geq 0$.

Picard ha dimostrato l'unicità in condizioni più generali mediante il seguente artifizio (qui notevolmente esteso). Sempre nel caso di $U = 0$ su (σ), oltre alla (11) si ha anche la relazione

$$\int_S \operatorname{div} (U^2 a \mathbf{w}) dS = - \int_\sigma U^2 a \mathbf{w} \times \mathbf{n} d\sigma = 0\,,$$

qualunque sia il vettore regolare $\mathbf{w}$; la quale sviluppata diventa

$$(11'') \qquad \int_S U^2 \operatorname{div} (a\mathbf{w}) dS + \int_S 2U \operatorname{grad} U \times a\mathbf{w} dS = 0.$$

Se ora si osserva che

$$(\operatorname{grad} U + U\mathbf{w}) \times a\, (\operatorname{grad} U + U\mathbf{w}) =$$
$$= \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U + 2U \operatorname{grad} U \times a\mathbf{w} + U^2 \mathbf{w} \times a\mathbf{w}\,;$$

sommando la (11) e la (11'') si ottiene

$$\int_S (\operatorname{grad} U + U\mathbf{w}) \times a (\operatorname{grad} U + U\mathbf{w}) dS +$$
$$+ \int_S [\tfrac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c - \mathbf{w} \times a\mathbf{w} + \operatorname{div} a\mathbf{w}]\, U^2 dS = 0.$$

Di qui segue che se si può scegliere un $\mathbf{w}$ in guisa che risulti in (S)

$$\frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} - c - \mathbf{w} \times a\mathbf{w} + \operatorname{div} a\mathbf{w} \geq 0,$$

dovrà essere $U = 0$ in (S). E poichè l'equazione differenziale

$$\operatorname{div} a\mathbf{w} = \mathbf{w} \times a\mathbf{w} + c - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{a} + \varphi^2$$

ha infinite soluzioni, e a, $\mathbf{a}$, c, φ sono regolari, nè esisterà qualcuna regolare almeno in particolari regioni di (S_n). Cosicchè si può concludere che, per *l'equazioni ellittiche generali qui considerate, l'unicità della soluzione è assicurata in corrispondenza ad assegnati va-*

lori al contorno, purchè questo si trovi nell' interno di certe regioni dello spazio da determinarsi caso per caso.

Per esempio, riprendiamo l'equazione

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0$$

considerata precedentemente. La condizione di cui sopra, fatto $\varphi = 0$, diventa

$$\operatorname{div} \mathbf{w} - \mathbf{w}^2 = k^2.$$

Poniamo $\mathbf{w} = f\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ versore parallelo all'asse Ox) ; viene

$$\frac{\partial f}{\partial x} - f^2 = k^2,$$

che è soddisfatta da $f = k \operatorname{tang} kx$. Questa funzione è regolare in una striscia di piano compresa fra due rette parallele all'asse Oy e distanti tra loro di π/k. Perciò per ogni contorno tutto situato in questa striscia si può affermare che la soluzione regolare dell'equazione data è univocamente determinata dai suoi valori al contorno.

Notiamo che precedentemente fu veduto che cotesta equazione ha una soluzione nulla sul quadrato di lati $x = y = 0$, $x = y = \frac{\pi\sqrt{2}}{k^2}$ e non nulla nell'interno. Orbene questo quadrato esce dalla striscia considerata di sopra, giacchè il suo lato è maggiore di π/k, supposto $k < \sqrt{2}$.

Riguardo al caso che nei punti di (σ) siano assegnati i valori di $\frac{\partial U}{\partial v}$, si può notare che il primo membro della (11) rimane negativo (e perciò positivo passato al secondo membro) nel solo caso che in tutti i punti di (σ) sia $\mathbf{a} \times \mathbf{n} \geq 0$; il che accadrà al più per particolarissime (σ). Il ragionamento precedente non è più valido. E parimenti nel caso che su (σ) siano assegnati i valori di $\frac{\partial U}{\partial v} - hU$.

§ 2.

5. — Equazioni di tipo ellittico; seconda formula di Green.

Considerando ora queste equazioni, cerchiamo di determinare la soluzione regolare, supposta esistente, che è univocamente determinata nel campo finito (S) dai suoi valori o da quelli della derivata conormale assegnati sul contorno (σ) del campo.

Un metodo classico di ricerca è fondato sopra una formula che si deduce dalla (3) togliendo a una delle funzioni, per esempio alla V, la proprietà d'essere regolare in tutti i punti di (S); formula detta *la seconda formula di Green generalizzata.*

Supponiamo che la V diventi infinita in un solo punto Q di (S) di tal ordine che l'applicazione della (0) per giungere alla (3) non sia più valida. In questo caso possiamo togliere dal campo (S) la piccolissima regione interna all'ipersfera (σ') di centro Q e raggio ε; per modo che nel campo (S) compreso fra (σ) e (σ') le U e V siano regolari. Allora sussisterà la (3) nella forma

$$\int_{S'} [VE(U) - UG(V)]\, dS' = -\int_{\sigma} (V)\frac{\partial U}{\partial v} - U\frac{\partial V}{\partial v})\, q d\sigma -$$

$$-\int_{\sigma} UV\mathbf{a}\times\mathbf{n} d\sigma - \int_{\sigma'} (V\frac{\partial U}{\partial v'} - U\frac{\partial V}{\partial v'})\, q d\sigma' - \int_{\sigma'} UV\mathbf{a}\times\mathbf{n}' d\sigma'.$$

Ammettiamo che la U debba soddisfare all'equazione $E(U) = 0$. Se esiste una $V(P, Q)$ soluzione rispetto a P dell'aggiunta $G(V) = 0$, tale che per il suo modo di diventare infinita in Q risulti

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} V\frac{\partial U}{\partial v'}\, q d\sigma' = 0, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} UV\mathbf{a}\times\mathbf{n}' d\sigma' = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} U\frac{\partial U}{\partial v'}\, q d\sigma' = kU(Q),$$

dove k è costante (si abbiano cioè questi limiti quando il contorno (σ') s' impicciolisse indefinitamente e svanisce in Q); la precedente diventa

$$KU(Q) = \int_{\sigma} (V\frac{\partial U}{\partial v} - U\frac{\partial V}{\partial v})\, q d\alpha + \int_{\sigma} UV\mathbf{a}\times\mathbf{n} d\sigma, \tag{13}$$

che è *la formula cercata.* Essa fornirà la soluzione del problema proposto quando si riesca anzitutto a eliminare la $\frac{\partial U}{\partial v}$ nel caso che siano assegnati i valori di U su (σ), o ad eliminare la U se sono assegnati i valori di $\frac{\partial U}{\partial v}$; e poi a verificare che effettivamente la $U(Q)$ così definita assume su (σ), essa o la sua derivata conormale, i valori dati.

Riguardo alla $V(P, Q)$ considerata di sopra è da notare che detta (ω) l' ipersuperficie sferica di centro Q e raggio uno, si ha

$$d\sigma' = \varepsilon^{n-1} d\omega;$$

talchè se $\lim_{\varepsilon=0} V\varepsilon = 0$, le prime due condizioni (12) risultano soddisfatte, data la regolarità di U e di a. Basta perciò che quando P va a coincidere con Q la $V(P, Q)$ diventi infinita come $1/r^{n-2}$, essendo $r = PQ$ $(n > 2)$. Allora la $\frac{\partial V}{\partial v'}$ diventerà infinita in Q come $1/r^{n-1}$, e si avrà

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} U \frac{\partial U}{\partial v'} q d\sigma' = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega} Uq \frac{\partial U}{\partial v'} \varepsilon^{n-1} d\sigma' ;$$

talchè posto

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial U}{\partial v'} \varepsilon^{n-1} = h(\text{cost}),$$

risulta

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} U \frac{\partial U}{\partial v'} q d\sigma' = \Omega h U(Q) q(Q) ;$$

ove Ω è l'area dell' ipersfera di raggio uno. Osserviamo inoltre che se $V(P, Q)$ è rispetto a P soluzione di $G(V) = 0$, è pure soluzione $V/cq(Q)$ con c costante ; cosicchè scegliendo per V questa soluzione con una opportuna costante c, invece di $\Omega h U(Q) q(Q)$ si potrà scrivere $(n-2)\,\Omega U(Q)$.

La soluzione $V(P, Q)$ dell'aggiunta che diventa infinita per $P = Q$ come $\frac{1}{r^{n-2}}$, e tale che sia

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} U \frac{\partial V}{\partial v'} q d\sigma' = -(n-2)\,\Omega U(Q),$$

ove (σ') indica l' ipersfera di centro Q e raggio ε, si chiama *la soluzione fondamentale* (da alcuni autori *elementare*). La sua esistenza è indispensabile per poter scrivere la (13), la quale per le precedenti considerazioni diventa

$$(14) \quad (n-2)\Omega U(Q) = \int_{\sigma} \left(V \frac{\partial U}{\partial v} - U \frac{\partial V}{\partial v}\right) q d\sigma - \int_{\sigma} U V \mathbf{a} \times \mathbf{n} d\sigma.$$

Nel caso di $n = 2$, affinchè sia $\lim_{\varepsilon=0} V\varepsilon = 0$ occorre che la V diventi infinita in Q logaritmicamente, cioè come $\log \frac{1}{r}$. La (σ) diventa una curva, e l' ipersfera un cerchio ; il fattore $(n-2)\Omega$ va sostituito con 2π.

6. — Problema interno e problema esterno.

Il problema proposto nel numero precedente relativo a un campo finito (S) interno a (σ) si distingue col nome di *problema interno*. Nelle applicazioni si ha spesso da considerare anche campi infiniti; in particolare il campo esterno a una o più ipersuperficie chiuse (σ).

È chiaro che in questo caso si dovranno porre delle condizioni circa il comportamento delle funzioni all' infinito, affinchè sia ancora valida la (13). E anzitutto bisognerà che il vettore w considerato nel § 1 soddisfi alle cosiddette *condizioni di convergenza all'infinito*, affinchè la formula (0), che è servita per dedurre la formula di Green, sia ancora valida. Dopo ciò, se centro in O descriviamo un' ipersfera (Ω) di grandissimo raggio R, e consideriamo lo spazio finito (S') compreso fra (σ) e (Ω), potremo ancora scrivere la (13), purchè si aggiungano al secondo membro i termini

$$\int_{\Omega} (V \frac{\partial U}{\partial v} - U \frac{\partial V}{\partial v}) q d\Omega + \int_{\Omega} U V \mathbf{a} \times \mathbf{n} d\Omega.$$

Detta (ω) l'ipersfera unitaria di centro O, si ha $d\Omega = R^{n-1} d\omega$, perciò questo integrale può scriversi nella forma

$$\int_{\omega} (U \frac{\partial U}{\partial v} - U \frac{\partial U}{\partial v}) q R^{n-1} d\omega + \int_{\omega} U V R^{n-1} \mathbf{a} \times \mathbf{n} d\omega$$

Di qui risulta che se

$$\lim_{R \to \infty} R^{n-1} U = 0$$

e si suppone che $\frac{\partial U}{\partial v}$ ω e $V\mathbf{a} \times \mathbf{n}$ non diventino infiniti all' infinito, i due ultimi termini dell' integrale tenderanno a zero per $R = \infty$. Questa esprime che U tende a zero come $1/R^{n-2}$ (cioè infinitesimo dello stesso ordine). Se questo accade, il gradiente di U diventerà nullo all' infinito come $1/R^{n-1}$; e allora essendo

$$\int_{\Omega} V \frac{\partial U}{\partial v} q d\Omega = \int_{\omega} q V R^{n-1} \operatorname{grad} U \times \mathbf{v} d\omega$$

$$\text{e} \lim_{R \to \infty} R^{n-1} \operatorname{grad} U = \text{quant. finita.}$$

questo integrale si annullerà all' infinito quando sia $\lim_{R \to \infty} qV = 0$.

Così con queste ipotesi torna a valere la (13). Il problema di determinare la soluzione regolare U nel campo (S) esterno a (σ) e che s'annulla all' infinito nel modo detto, dati che siano i valori di U o di $\frac{\partial U}{\partial v}$ su (σ), si chiama *problema esterno*.

E torna a valere anche la formula (8) e le conseguenti deduzioni circa l'unicità della soluzione, purchè

$$\int_{S\infty} \operatorname{grad} U \times a \operatorname{grad} U dS\,, \quad \int_{S\infty} cU^2 dS \quad \text{ecc.}$$

abbiano un senso. Riguardo al caso $n = 2$ sarà detto più avanti.

7. — Equazione di Laplace e risoluzione dei problemi al contorno.

Ora conviene seguire un po' l'evoluzione storica della teoria; cominciare cioè ad approfondire i casi più semplici, sia per meglio intendere le difficoltà da superare a mano a mano, e sia perchè, essendo questi i casi più frequenti nei problemi della fisica, hanno maggior interesse e meritano più dettagliato sviluppo.

Supponiamo che sia $a = 0$, $c = 0$ e a costante. Per quanto fu detto, l'equazione si potrà ridurre alla forma canonica [3]

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = 0,$$

detta *l'equazione di Laplace*. Essa è autoaggiunta. Cerchiamo la soluzione fondamentale. Data la simmetria dell'equazione, si può pensare che essa sia funzione soltanto di $r = PQ$. In questa ipotesi si ha manifestamente

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V(r) = \operatorname{div}(V' \operatorname{grad} r) = V'\Delta r + V''$$

giacchè $\operatorname{grad} r$ è vettore unitario $(\operatorname{grad} r)^2 = 1$. Essendo poi [4] $\Delta r = \frac{n-1}{r}$ l'equazione diventa

$$\frac{n-1}{r} V' + V'' = 0,$$

---

[3] In verità non è stato detto; ma si comprende subito che quando a è costante, prendendo per assi le direzioni unite di a, si ha $a_{rs} = 0$, $a_{rs} = 1$.

[4] Si ha $P - Q = r \operatorname{grad} r$; $\operatorname{div}(P - Q) = n$, e quindi

$$\Delta r = \operatorname{div} \frac{P-Q}{r} = \frac{n}{r} - \frac{(P-Q) \times \operatorname{grad} r}{r^2} = \frac{n-1}{r}.$$

Sarà utile per il seguito osservare che se l'equazione fosse sotto la forma non ca-

che integrata dà (con opportuna scelta delle costanti)

$$V = \frac{1}{r^{n-2}} \text{ per } n > 2 \quad , \quad V = \log \frac{1}{r} \text{ per } n = 2.$$

È *la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace.* Infatti, considerando ora $n > 2$, essa diventa infinita per $P = Q$ nel modo voluto, e inoltre (n. 5)

$$\lim_{r=0} \int_{\sigma'} U \frac{\partial U}{\partial n'} d\sigma' = -(n-2)\,\Omega U(Q),$$

perchè

$$\frac{\partial V}{\partial n'} = -(n-2)\frac{1}{r^{n-1}} \operatorname{grad} r \times \mathbf{n}',$$

(qui è $\mathbf{v} = \mathbf{n}'$). Si ha dunque per la (13)

$$(13) \qquad (n-2)\Omega U(Q) = \int_{\sigma} \left(U \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} - \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma.$$

Quanto a Ω si sa che è

$$\Omega = \frac{2}{\frac{n-2}{2}} \pi^{n-2} \ (n \text{ pari}) \ , \ \Omega = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{1, 3, 5 \ldots (n-2)} \pi^{\frac{n-1}{2}} \ (n \text{ dispari}).$$

Nel caso di $n = 2$ vale un analogo ragionamento ; l' ipersfera diventa un cerchio (s), e si trova

$$2\pi U(Q) = \int_{s} \left(U \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - \log \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial n}\right) ds.$$

Queste formule permettono di calcolare il valore di U in un punto generico Q di (S) quante volte siano noti al contorno i va-

---

nonica $\operatorname{div}(a \operatorname{grad} V) = 0$, con a costante; posto $R^2 = a^{-1}(P-Q) \times (P-Q)$ ove a^{-1} è l'inversa di a $(aa^{-1} = 1)$, si avrebbe

$$R \operatorname{grad} R = a^{-1}(P-Q), \quad R\, a \operatorname{grad} R = P - Q, \quad \operatorname{grad} R \times a \operatorname{grad} R = 1\,;$$

dalla quale si trae

$$R \operatorname{div}(a \operatorname{grad} R) + \operatorname{grad} R \times a \operatorname{grad} R = \operatorname{div}(P-Q) = n,$$

ossia

$$\operatorname{div}(a \operatorname{grad} R) = \frac{n-1}{R}.$$

E allora subito si verifica che

$$V = \frac{1}{R^{n-2}}$$

sarebbe la soluzione fondamentale.

lori di U o della sua derivata normale, se si riesce ad eliminare sotto il segno d' integrazione nel primo caso i valori di $\frac{\partial U}{\partial n}$, nel secondo i valori di U. A tal fine occorre servirsi della relazione (9) già mentovata al n. 3 :

$$\int_\sigma (U \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial U}{\partial n})\, d\sigma = 0,$$

ove W è una soluzione regolare qualunque dell'equazione di Laplace. Sottraendo questa dalla (13') si ottiene

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = -\int_\sigma [U(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n}) - \frac{\partial U}{\partial n}(W - \frac{1}{r^{n-2}})]\, d\sigma.$$

Di qui risulta che se esiste una $W(P, Q)$ soddisfacente rispetto a P a $\Delta W = 0$, regolare anche su (σ) e tale che nei punti P di (σ) sia $W = \frac{1}{r^{n-2}}$, il secondo termine dell' integrale sparisce e risulta

$$(15) \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = -\int_\sigma U(\frac{\partial W}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n})\, d\sigma,$$

con che lo scopo è ottenuto, giacchè nell' integrale esteso a (σ) vi comparisce soltanto U.

Parimenti, se esiste una $W = W_1(Q, P)$ tale che nei punti di (σ) sia

$$\frac{\partial W_1}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n},$$

il primo termine dell' integrale scompare e resta

$$(16) \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial n}(W_1 - \frac{1}{r^{n-2}})\, d\sigma,$$

che contiene nel secondo membro soltanto i valori di $\frac{\partial U}{\partial n}$ su (σ); e perciò permette il calcolo di $U(Q)$ quando siano assegnati i valori di $\frac{\partial U}{\partial n}$ nei punti di (σ) (riguardo a questi valori ricordare l'osservazione alla fine del n. 3, cioè la condizione di compatibilità).

Infine se esiste una funzione regolare $V = W_2(Q, P)$ armonica in (S) e tale che nei punti di (σ) risulti

$$\frac{\partial W_2}{\partial n} - h(P)\, W_2 = \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} - h(P)\frac{1}{r^{n-2}},$$

ossia

$$\frac{\partial W_2}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} = h(P)\,(W_2 - \frac{1}{r^{n-2}}),$$

si ha manifestamente

$$(17) \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma (W_2 - \frac{1}{r^{n-2}})\,(\frac{\partial U}{\partial n} - hU)\,d\sigma,$$

la quale permette il calcolo di $U\,(Q)$ quando nei punti di (σ) siano assegnati i valori di $\frac{\partial U}{\partial n} - hU$ (qui non si conosce una precisa condizione di compatibilità).

8. — Problemi di Dirichlet e di Neumann. - Problema misto.

Le funzioni U soddisfacenti all'equazione di LAPLACE $\Delta U = 0$ si chiamano in generale *funzioni armoniche in* (S). Il problema di determinare in un campo finito di (S) una funzione regolare armonica che assuma dati valori sul contorno (σ) del campo chiamasi *problema di Dirichlet interno*; mentre prende il nome di *problema di Neumann interno* quando sono assegnati sul contorno i valori di $\frac{\partial U}{\partial n}$, e di *problema misto interno* quando sono assegnati i valori dell'espressione $\frac{\partial U}{\partial n} - hU$, oppure su parte di (σ) i valori di U e sull'altra parte i valori della derivata normale.

Posto

$$G = W - \frac{1}{r^{n-2}}, \quad G_1 = W_1 - \frac{1}{r^{n-2}}, \quad G_2 = W_2 = \frac{1}{r^{n-2}},$$

le (15), (16) e (17) si scrivono più semplicemente

$$(15') \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = -\int_\sigma U(P)\,\frac{\partial G}{\partial n}\,d\sigma$$

$$(16') \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma G_1\,\frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma$$

$$(17') \qquad (n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma G_2\,(\frac{\partial U}{\partial n} - hU)\,d\sigma.$$

Queste particolari funzioni armoniche G, G_1, G_2 che hanno una singolarità in $P = Q$ e nei punti di (σ) soddisfano alle condizioni

$$G = 0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial G_2}{\partial n} - hG = 0,$$

sono dette *funzioni di Green* relative al campo considerato. Come si vede, esse pure sono definite in modo che la loro determinazione dipende dalla risoluzione di un particolare problema di DIRICHLET, o di NEUMANN, o misto; ma dipendono soltanto dalla forma del contorno.

Orbene, i ragionamenti e le formule precedenti non assicurano affatto l'esistenza delle soluzioni di cotesti problemi; ed anzi alla base di quelli è stata posta esplicitamente l' ipotesi dell'esistenza. In alcuni casi semplici (cioè per particolari forme di (σ)) le funzioni di GREEN si sanno determinare direttamente, con che la loro esistenza è assicurata; e allora si verifica che le (15′), (16′), (17′) risolvono i problemi proposti. Questo può bastare al fisico per ritenere esistente la soluzione nel caso generale; spinto a ciò anche dall' intuizione dei fenomeni che si traducono analiticamente in cotesti problemi; ma al matematico occorre una dimostrazione diretta dell'esistenza, anche per indagare quali siano le necessarie restrizioni da farsi circa la forma del contorno.

RIEMANN (5), in base ai lavori di GAUSS, W. THOMSON e DIRICHLET, trasformando la questione in un'altra equivalente relativa all'esistenza del minimo di un certo integrale, ne diede una dimostrazione assai semplice, che fu per molti anni generalmente accettata. Ma poi riconosciuta non rigorosa da WEIERSTRASS, s'imposero ricerche nuove. HILBERT (6) fu il primo in quello stesso indirizzo a darne la dimostrazione rigorosa. Essa fu in seguito perfezionata ed estesa con ipotesi assai larghe circa la forma del contorno da altri autori; e più di recente, con considerazioni nuove molto importanti, da L. TONELLI nella sua opera magistrale sul calcolo delle variazioni.

Per regioni di (S) sufficientemente piccole si può anche dimostrare il teorema d'esistenza col metodo delle approssimazioni successive ingegnosamente applicato da PICARD (7) e da altri autori; ma nei problemi concreti della fisica, avendosi da fare con regioni finite, cotesta dimostrazione non è in massima sufficiente.

Oggi il metodo migliore per cotesta dimostrazione consiste nel trasformare il problema in altri relativi a equazioni integrali del

---

(5) Dissertazione inaugurale (vedi *Opere*).

(6) « Kgl. Ges. Wiss. zu Gottingen » (1900-1901) e « Math. Ann. » (59), (1905).

(7) Vedi per esempio *Leçons sur quelques types simples d'équations...*, G. VILLARS, 1927.

tipo FREDHOLM [8]. Ad esempio, supponendo $n = 3$, per stare in un caso più noto, si sa che il potenziale newtoniano di doppio strato

$$W(P) = \int_\sigma \mu(M) \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{n} d\sigma,$$

ove μ è funzione continua dei punti M di (σ), $r = PM$, e $\mathbf{n}$ la normale interna, è funzione armonica regolare nello spazio (S) racchiuso da (σ), ma discontinua attraverso a (σ). Detti W_i e W_e i suoi valori sulle facce interne e esterne nel punto Q di (σ), si ha

$$\frac{1}{2}(W_i - W_e) = 4\pi\mu(Q), \quad \frac{1}{2}(W_i + W_e) = W(Q).$$

Allora per risolvere il problema di DIRICHLET basta cercare una $\mu(M)$ tale che su (σ) si abbia $W_i = f(Q)$, funzione data [9]. Dalle precedenti si ricava

$$W_i = 4\pi\mu(Q) + W(Q),$$

ossia

$$f(Q) = 4\pi\mu(Q) + \int_\sigma \mu(M) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma \quad , \quad (r = MQ)$$

che è appunto un'equazione di tipo FREDHOLM per determinare la $\mu(Q)$.

Basta allora ricorrere alla nota teoria di queste equazioni per dedurre l'esistenza della soluzione e anche per calcolarla. Però si constata che la soluzione non esiste sempre per qualsiasi contorno, anche soddisfacente alle ipotesi che abbiamo ammesse.

Qui, data la ristrettezza dello spazio, non entriamo in maggiori particolari su questo punto; e seguiremo il metodo già tracciato nei numeri precedenti, ammettendo senz'altro l'esistenza delle soluzioni che si cercano, le quali saranno in questa ipotesi rappresentate dalle formule già trovate, salvo nei singoli casi pratici a verificare ch'esse soddisfano effettivamente alle condizioni volute.

---

(8) « Acta Math. », T. XXVII.

(9) PICARD, *Sur quelques applications de l'équation de Fredholm*, « Rend. Circ. Palermo », 1906.

9. — Teorema di Thomson e problema esterno.

Sussiste il seguente teorema dovuto a W. Thomson (Lord Kelwin), qui esteso allo spazio S_n : se $U(P) = U\ (x_1 \dots x_n)$ *è funzione armonica in* (S), *anche*

$$V = \frac{1}{r_1^{n-2}} U(P_1) = \frac{1}{(x_1^2 + \dots x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}} U\left(\frac{a^2 x_1^2}{r^2}, \dots \frac{a^2 x_n^2}{r_n}\right)$$

è armonica [10]. Esso fa vedere che *risoluto il problema di Dirichlet per lo spazio* (S) *interno od esterno al contorno chiuso* (σ), si saprà risolvere *lo stesso problema per lo spazio* (S_1) *esterno ed interno al contorno* (σ_1) *che è il trasformato di* (σ) *per inversione.*

Infatti, siano M_1 i punti di (σ_1) e M quelli di (σ) ; $V\ (M_1)$ i valori che la funzione deve assumere su (σ_1) ; cerchiamo la funzione regolare armonica $U\ (P)$ nel campo finito (S) tale che sopra a (σ) sia

$$U(M) = \left(\frac{a^2}{\varrho^2}\right)^{n-2} V(M_1)\ ; \quad (\varrho = OM,\ \varrho_1 = OM_1)$$

Poi costruiamo la funzione

$$V = \frac{1}{r_1^{n-2}} U(P_1)$$

secondo le norme del teorema di Thomson. Essa è armonica all'esterno di (σ_1), e quando P_1 va in M_1, P va in M ; cosicchè, essendo $\varrho\varrho_1 = a^2$, il valore che acquista in M è

$$\frac{1}{\varrho_1^{n-2}} U(M) = \left(\frac{a^2}{\varrho\varrho_1}\right)^{n-2} V(M_1) = V(M_1)\ ;$$

ossia il valore dato. Inoltre all' infinito questa funzione diventa infinita come U_0/r^{n-2} ; essendo U_0 il valore di U nell'origine O. Dunque V è la funzione che risolve il problema di Dirichlet nello spazio (S_1) esterno a (σ_1) corrispondente per inversione allo spazio (S) interno a (σ). Il ragionamento vale ancora scambiando i due aggettivi interno ed esterno.

Nel caso di $n = 2$, fatta la trasformazione, si vede che il $\Delta U(P_1)$ rimane lo stesso del $\Delta U(P)$; talchè anche $U(P_1)$ è armonica se tale è $U(P)$. Ebbene, si voglia risolvere il problema di Dirichlet esterno al contorno (σ) (che è qui una curva). Mediante l' inversione fatta rispetto a un punto O intorno a (σ), questo contorno si trasformerà

---

[10] Lasciamo la verificazione al lettore.

in (σ_1) e l'armonica $U(P)$ che si cerca diventerà una $U(P_1)$ continua entro (σ_1), purchè il punto O non sia per essa un punto singolare. Quando ciò accade la corrispondente $U(P)$ all'esterno è detta essere *regolare all' infinito*. Perciò nel caso di $n = 2$ il problema esterno consiste nel trovare la funzione armonica che assume sul contorno i valori dati, e che è regolare anche all' infinito nel senso ora spiegato.

10. — Problema di Dirichlet per l' ipersfera. Formula di Poisson.

Considerando un' ipersfera (σ) di centro O e raggio a, siano P e M due punti interni, P_1 il coniugato di P nell' inversione definita dall' ipersfera stessa.

Ponendo

$$PO = l,\ P_1O = l_1,\ MP = r,\ MP_1 = r_1,$$

si ha $ll_1 = a^2$. È noto inoltre che quando M è sulla ipersfera sussiste la proporzione

$$r : r_1 = l : a, \quad \text{da cui} \quad \frac{a}{l}\,\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}.$$

Questa dimostra che la funzione

$$W = \left(\frac{a}{l}\,\frac{1}{r}\right)^{n-2}$$

acquista su (σ) i valori di $1/r^{n-2}$; perciò

$$G = \left(\frac{a}{l}\,\frac{1}{r_1}\right)^{n-2} - \frac{1}{r^{n-2}}$$

è la *funzione di Green* relativa al problema in discorso. Facendo il calcolo di $\frac{\partial G}{\partial n}$ e applicando la formula (15') si ottiene (cambiando Q in P e P in M)

$$U(P) = \frac{a^2 - l^2}{a\Omega}\int_\sigma \frac{U(M)}{r^n}\,d\sigma = \frac{a^2 - l^2}{a\Omega}\int_\sigma \frac{U(M)}{(l^2 + a^2 - 2al\cos\theta)^{\frac{n}{2}}}\,d\sigma,$$

essendo θ l'angolo che OM fa con OP; e questa *è la formula di Poisson.*

Nel caso di $n = 2$ la W è $\log\frac{a}{l}\,\frac{1}{r_1}$, e allora si ha

$$U(P) = \frac{a^2 - l^2}{2\pi a}\int_\sigma \frac{U(M)}{l^2 + a^2 - 2al\cos(\psi - \varphi)}\,d\psi,$$

essendo ψ e φ gli angoli che OM e OP fanno con una retta fissa Ox (quindi $\theta = \psi - \varphi$). Queste formule valgono anche per il problema esterno. Basta manifestamente cambiare P in P_1, l in l_1 e cambiare il segno (n diventa la normale esterna). Come si vede, la funzione si comporta all' infinito nel modo richiesto.

11. — Proprietà delle funzioni di Green.

Qui considereremo soltanto la prima funzione G di GREEN. Siano P e Q due punti del campo (S) che si considera. *Se $G(P, Q)$ è il valore della funzione di Green in Q fissato P, e $G(Q, P)$ il valore dall'analoga funzione in P fissato Q, si ha $G(P, Q) = G(Q, P)$.*

Centro in P e Q si tracciano due piccole ipersfere (ω) e (ω_1) di raggi ε e ε_1, e sia (S') la regione di (S), limitata da (σ), esterna a (ω) e (ω_1). Diciamo M un punto di (S'), e consideriamo l' integrale

$$J = \int_{S'} \operatorname{grad}_M G(P, M) \times \operatorname{grad}_M G(Q, M)\, dS',$$

che è anche uguale a

$$\int_{S'} \operatorname{div}_M [G(P, M) \operatorname{grad}_M G(Q, M)]\, dS'$$

e perciò, essendo le G regolari in (S'), può essere trasformato col solito teorema (0). Risulta

$$J = -\int_{\sigma} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\sigma -$$

$$-\int_{\omega} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\omega - \int_{\omega_1} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\omega .$$

Il primo integrale è nullo, perchè $G(P, M)$ è nullo in superficie. Inoltre, se (Ω) è l' ipersfera di raggio uno con centro in P, si ha

$$\int_{\omega} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\omega = \int_{\Omega} \varepsilon^{n-1} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\Omega,$$

che è nullo al limite, perchè $\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon^{n-1} G(P, M) = 0$. Se invece (Ω_1) è l' ipersfera unitaria di centro Q, risulta

$$\int_{\omega_1} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\omega_1 = \int_{\Omega_1} \varepsilon_1^{\,n-1} G(P, M) \frac{\partial G(Q, M)}{\partial n}\, d\Omega_1 ;$$

ed essendo (n. 6)

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial W}{\partial n} + \frac{n-2}{r^{n-2}},$$

si vede che

$$\lim_{\varepsilon_1 = 0} \varepsilon_1^{\,n-1} \frac{\partial G}{\partial n} = n - 2;$$

cosicchè questo integrale ha per limite $-(n-2)\,\Omega G(P, Q)$. Dunque

$$J = -(n-2)\,\Omega G(P, Q).$$

Ma siccome l' J di partenza è simmetrico rispetto a P e Q (cioè nei calcoli fatti si può scambiare $G(P, M)$ con $G(Q, M)$), risulta anche

$$J = -(n-2)\,\Omega G(Q, P);$$

dunque $G(P, Q) = G(Q, P)$.

La $G(P, Q)$, che è manifestamente continua così rispetto a P come a Q, è negativa nel punto P del campo considerato (escluso $P = Q$). Infatti nel campo (S') compreso tra (σ) e l' ipersfera (ω) di raggio piccolissimo ε essa è regolare armonica, negativa su (ω) e nulla su (σ); perciò, non potendo avere dei minimi in (S'), come si vedrà nel numero che segue, sarà sempre negativa.

Inoltre facilmente si vede che, detta δ la distanza massima di due punti di (S), sussiste la disuguaglianza

$$|G| < \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{\delta^{n-2}}.$$

Tutto ciò che si è detto vale anche nel caso di $n = 2$; salvo quest'ultima disuguaglianza che diventa $|G| < \log \frac{\delta}{r}$. È importante osservare che per l'esistenza della formula fondamentale (14) occorre che la funzione di Green ammetta in ogni punto di (σ) una derivata lungo la normale. La questione è alquanto delicata e la si risolve con la teoria di Fredholm. Ragionamenti analoghi si possono fare per le altre funzioni di Green; ma qui non ne diremo altro.

12. — Alcune proprietà delle funzioni armoniche.

a). Nel campo (S) ove la funzione è armonica tracciamo un' ipersfera (σ) di centro Q e raggio R tutta in (S), e applichiamo, allo spazio (S_1) ch'essa racchiude, la formula (14). Osservando che

$$\int_\sigma \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = \frac{1}{R^{n-2}} \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = -\frac{1}{R^{n-2}} \int_{S'} \Delta U dS_1 = 0,$$

risulta

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma U \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} d\sigma = \frac{n-2}{R^{n-1}} \int_\sigma U d\sigma,$$

da cui

$$U(Q) = \frac{1}{R^{n-1}\,\Omega} \int_\sigma U d\sigma. \tag{18}$$

Poichè $R^{n-1}\,\Omega$ è l'area dell'ipersfera di raggio R (essendo Ω quella dell'ipersfera unitaria), questa esprime il *teorema di Gauss*: *il valore di una funzione regolare armonica nel centro di un' ipersfera uguaglia la media dei valori ch'essa acquista sull' ipersfera stessa.*

b) Ne segue che *una funzione regolare armonica non può avere nè massimi nè minimi dentro al campo dove è definita* (*li avrà sul contorno*).

Se infatti avesse un massimo o un minimo in Q, esisterebbe per la definizione stessa di massimo e minimo una sferetta (ε) di centro Q abbastanza piccola e tale da ottenere

$$\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_\varepsilon U d\varepsilon < U(Q), \quad \text{oppure} \quad > U(Q).$$

in contraddizione con la (18).

Come corollario si deduce che *una funzione regolare armonica in tutto* (S_n) *e nulla all' infinito è nulla dappertutto.* Invero i suoi massimi e minimi non possono essere che all' infinito, e questi corrispondono per ipotesi al valor zero. Dunque essa è identicamente nulla. Questi teoremi valgono manifestamente anche per $n = 2$.

Di qui si può anche dedurre subito l'unicità della funzione regolare e armonica in (S) che assume sopra il contorno (σ) valori assegnati. Se infatti ne esistessero due U_1 e U_2, la differenza $U = U_1 - U_2$ sarebbe regolare armonica in (S) e nulla al contorno. Ma i suoi massimi e minimi sono sul contorno; dunque $U_1 - U_2$ è nulla in ogni punto di (S); ossia $U_1 = U_2$.

c) La proprietà enunciata in *a*) è caratteristica delle funzioni armoniche; ossia, *se U è regolare nel campo chiuso* (S), *e in ogni punto interno a* (S) *ha come valore la media dei suoi valori sopra ad ogni ipersfera col centro in quel punto e giacente in* (S), *essa è armonica in* (S).

Osserviamo anzitutto che il valore di un'armonica U nel centro Q di un' ipersfera (σ) è anche uguale alla media dei suoi valori in tutto lo spazio (S) racchiuso da (σ). Infatti, per l' ipersfera (σ_r) di raggio r e centro Q, si ha

$$r^{n-1}\, U(Q) = \frac{1}{\Omega} \int_{\sigma_r} U d\sigma\,;$$

talchè facendo variare r da 0 a R, si deduce integrando rispetto ad r

$$\frac{R^n}{n}\, U(Q) = \frac{1}{\Omega} \int_{\sigma}^{R} dr \int_{\sigma_r} U d\sigma = \frac{1}{\Omega} \int_{S} U dS,$$

da cui appunto

$$U(Q) = \frac{1}{V} \int_{S} U d\varsigma,$$

essendo V il volume dell' ipersfera di raggio R.

Ciò posto, essendo i punti P di (S) definiti da $P = Q + r \operatorname{grad} r$, scriviamo in modo più esplicito

$$U(Q) = \frac{1}{V} \int_{S} U(Q + r \operatorname{grad} r)\, dS\,,$$

e allora vediamo che, tenendo fisso R, si può applicare l'operatore grad_Q sotto il segno d' integrazione. Ne consegue

$$\operatorname{grad} U = \frac{1}{V} \int_{S_R} \operatorname{grad}_Q U dS\,;$$

che trasformata col noto teorema del gradiente dà

$$\operatorname{grad} U = -\frac{1}{V} \int_{\sigma_R} U(Q + R \operatorname{grad} R)\, \mathbf{n} dS,$$

essendo $\mathbf{n} = -\operatorname{grad} R$. Per la stessa ragione detta di sopra, possiamo anche qui applicare l'operatore div_Q sotto il segno d' integrazione ; con che si ottiene

$$\Delta U = -\frac{1}{V} \int_{\sigma_R} \operatorname{div}_Q (U\mathbf{n}) d\sigma = -\frac{1}{V} \int_{\sigma_R} \operatorname{grad}_P u \times \mathbf{n} d\sigma,$$

giacchè $\mathbf{n}$ non dipende dal punto Q esplicitamente considerato, e le derivate di $U(Q + R \operatorname{grad} R) = U(P)$ rispetto alle coordinate di Q sono uguali alle derivate rispetto a quelle di P (che qui sono

i punti dell'ipersfera (σ_R)). Notando poi che $d\sigma = R^{n-1} d\Omega$ (con simboli già noti) e $\mathbf{n} = -\operatorname{grad} R$, si può anche scrivere

$$\Delta U = \frac{1}{V} \int_{\sigma_R} \frac{\partial U}{\partial R} d\sigma = \frac{R^{n-1}}{V} \int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial R} d\Omega = \frac{R^{n-1}}{V} \int_{\Omega} U d\Omega,$$

o infine

$$\Delta U = \frac{n}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U d\Omega \right],$$

perchè il campo d'integrazione non dipende da R. Ma per il teorema della media si ha

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} U d\Omega = U(Q),$$

ossia essa è una funzione indipendente da R; perciò risulta $\Delta U = 0$, che dimostra il teorema enunciato, dovuto a E. Levi [11].

d) Ricordiamo che una funzione $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ è detta essere analitica nel campo (S), ove è definita, quando in ogni punto $Q(x_1^0 x_2^0 \dots x_n^0)$ di (S) può essere sviluppata in serie di Taylor (ossia per le potenze di $x_i - x_i^0$) convergente per ogni posizione di P entro una certa piccola ipersfera di entro Q. In base a ciò la formula (14) (o la (14′) nel caso di $n = 2$) mostra che *una funzione regolare armonica è analitica nel campo dov'è definita*. Infatti

$$\frac{1}{r^{n-2}} = \frac{1}{[(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2]^{\frac{n-2}{2}}}$$

è manifestamente analitica rispetto a Q, poichè P è un punto di (σ); e così anche le sue derivate prime, e quindi anche la derivata normale. Tutti gli elementi dell'integrale (13′) sono analitici, perciò è analitica la $U(Q)$ in tutto (S) (escluso al più il contorno).

e) È anche importante il seguente *teorema di Harnack*: *Se $U_1, U_2, U_3, \dots$ è una successione infinita di funzioni regolari armoniche in (S), e se la serie*

$$U_\sigma = (U_1)_\sigma + (U_2)_\sigma + \dots + (U_n)_\sigma + \dots$$

---

[11] Quest'Autore lo ha dimostrato in ipotesi meno restrittive. Vedi in proposito nei « Rend. Acc. Lincei », 1909, 1° sem., le Note di E. Levi, L. Tonelli e V. Volterra.

formata coi valori che le funzioni assumono sul contorno (σ) *di* (S) *è uniformemente convergente; anche la serie*

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots$$

è uniformemente convergente nei punti di (S) *e rappresenta una funzione* U *regolare armonica.*

Infatti per l'ipotesi fatta, fissato ε piccolo a piacere, si può prendere n tanto grande che sia in ogni punto di (σ)

$$\Phi_m = |(U_n)_\sigma + (U_{n-1})_\sigma + \dots + (U_{n+m})_\sigma| < \varepsilon$$

per qualunque m. D'altra parte la funzione regolare armonica

$$|U_n + U_{n+1} + \dots + U_{n+m}|$$

dovendo avere il suo massimo sul contorno, come si è visto, sarà sempre inferiore a Φ_m, cioè ad ε; perciò la serie

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$$

è uniformemente convergente in (σ). Ora se G è la prima funzione di Green relativa al contorno (σ), la funzione

$$(n-2)\,\Omega U_i = \int_\sigma (U_i)_\sigma \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma$$

coincide con la U_i indicata di sopra, ammesso, come già fu detto, che questa formula risolva il problema di Dirichlet. E allora, poichè si ha l'uguaglianza

$$\int_\sigma U_\sigma \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma = \int_\sigma [(U_1)_\sigma + (U_2)_\sigma + \dots] \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma =$$
$$= U_1 + U_2 + \dots + U_n + \int_\sigma (R)_\sigma \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma,$$

ove $(R)_\sigma$ è il resto della serie, e questo tende a zero al crescere di n, la serie $U_1 + U_2 + U_3 + \dots$ rappresenta la funzione

$$(n-2)\Omega U = \int_\sigma U_\sigma \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma,$$

che è appunto armonica.

13. — Integrazione di $\Delta U = f(P)$.

Per questa equazione in cui $f(P)$ è una nota funzione continua e derivabile di P, e la cui aggiunta è $\Delta V = 0$, valgono le cose dette dal n. 6 in poi, con la sola differenza che quando si applica la for-

mula (3), come si è fatto al n.º 6, il primo membro non s'annulla, perchè non è $E(U) = 0$; cosicchè nel secondo membro della (12) bisogna aggiungere l' integrale di campo

$$-\int_S Vf(P)dS,$$

e quindi nel caso di $E(U) = \Delta U$ completare la (13) col termine

$$-\int_S \frac{f(P)}{r^{n-2}}\, dS, \text{ e la (13') con } -\int_S f.\log\frac{1}{r}\, dS.$$

E allora si vede che anche le formule (15'), (16'), (17') vanno parimenti completate. Nella (15'), ad esempio, va aggiunto il termine

$$-\int_S G(P, Q)f(P)\, dS,$$

ove G è la funzione di Green.

Ne segue che questo integrale rappresenta la soluzione regolare di $\Delta U = f$ che s'annulla sul contorno.

14. — Potenziali.

Nelle formule precedenti entrano gl' integrali del tipo

$$\int_S \frac{f(P)}{r^{n-2}}\, dS\ ,\ \int_\sigma \frac{\mu(P)}{r^{n-2}}\, d\sigma\ ,\ \int_\sigma \pi(P)\frac{\partial\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n}\, d\sigma,$$

che son detti *potenziali di campo, di semplice strato* e *di doppio strato*.

Per $n = 3$ si riducono ai ben noti *potenziali newtoniani*. Nel caso di $n = 2$ bisogna sostituire $\log\frac{1}{r}$ a $1/r^{n-2}$, e si hanno i così detti *potenziali logaritmici*. Le proprietà di cotesti potenziali più generali sono identiche, *mutatis mutandis*, a quelle degli ordinari potenziali newtoniani. Tra l'altro sussiste l'equazione di Poisson (pei potenziali di campo)

$$\Delta U = -(n-2)\Omega f(P).$$

Ma qui non diremo altro.

§ 3.

15. — L'equazione del tipo $\Delta U + cU = 0$.

Consideriamo ora l'equazioni autoaggiunte ellittiche in S_n $(n > 2)$

$$\Delta U + cU = 0. \tag{20}$$

Le funzioni U che vi soddisfano sono chiamate da alcuni autori *metaarmoniche*. Per estendere ad esse il metodo precedentemente usato per l'equazione di LAPLACE bisogna, in base alle cose esposte al n. 6, cercare della (20) una soluzione fondamentale V, tale cioè che per $P = Q$ diventi infinita come $1/r^{n-2}$. A questo fine poniamo

$$V = \frac{F(r)}{r^{n-2}}\,. \tag{21}$$

Si ha [12]

$$\Delta V = \frac{1}{r^{n-2}}\Delta F - \frac{2(n-2)}{r^{n-1}}F' \quad \left(\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0\right)$$

ove gli accenti significano le derivate rispetto all'unica variabile r.

Ma

$$\Delta F(r) = \operatorname{div}(F' \operatorname{grad} r) = F'' + \frac{n-1}{r}F', \quad \left(\Delta r = \frac{n-1}{r}\right)$$

perciò

$$\Delta V = \frac{1}{r^{n-2}}\left[F'' - \frac{n-3}{r}F'\right],$$

e quindi

$$\Delta V + cV = \frac{1}{r^{n-2}}\left[F'' - \frac{n-3}{r}F' + cF\right] = 0.$$

Per trovare un integrale regolare di questa equazione poniamo

$$F = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_s r^s.$$

Sostituendo ed uguagliando a zero i coefficienti delle successive potenze di r, si trova facilmente

$$b_{2s} = \frac{c^s}{2\,.\,s\,!\,(n-4)\,(n-6)\,\ldots\,(n-2(s+1))}$$

---

[12] Si ricordi la formula

$$\Delta(\varphi.\psi) = \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2 \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\psi.$$

essendo nulle le b con gl' indici dispari. Scriveremo perciò

$$F(r) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} b_{2s} r^{2s}; \tag{22}$$

serie convergente per ogni valore di r, rappresentante una funzione regolare. La (21) con questa espressione di $F(r)$ è la cercata soluzione fondamentale.

Invero, se (σ') è una piccola ipersfera di raggio ε, vediamo che sono soddisfatte le condizioni del n. 6. Si ha cioè

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} V \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma' = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\Omega} \varepsilon F(\varepsilon) \frac{\partial U}{\partial n} d\Omega = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma'} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma' = \lim_{\varepsilon=0} -(n-2) \int_{\Omega} U F(\varepsilon) d\Omega = -(n-2)\, \Omega U(Q),$$

essendo $F(0) = 1$. Sussiste dunque la seconda formula di Green (la (13)), che diventa nel caso presente

$$(n-2)\, \Omega U(Q) = \int_{\sigma} \left(U \frac{\partial \frac{F}{r^{n-2}}}{\partial n} - \frac{F}{r^{n-2}} \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma .$$

Sappiamo che nel caso di $c = -k^2$ la soluzione della (20), che acquista valori assegnati sul contorno, è unica in generale. Stiamo in questo caso. Indicando con H un'altra soluzione regolare della (20), si ha per la prima formula di Green

$$\int_{\sigma} \left(U \frac{\partial H}{\partial n} - H \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma = 0,$$

che sottratta dalla precedente dà

$$(n-2)\, \Omega U(Q) = -\int_{\sigma} \left[U \frac{\partial (H - \frac{F}{r^{n-2}})}{\partial n} - (H - \frac{F}{r^{n-2}}) \frac{\partial U}{\partial n} \right] d\sigma .$$

Di qui risulta che se si può trovare una funzione H metaarmonica regolare entro (σ) e tale che sul contorno sia $H = \frac{F}{r^{n-2}}$, posto $G = H - \frac{F}{r^{n-2}}$, la formula

$$(n-2)\, \Omega U(Q) - = \int_{\sigma} U \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \tag{23}$$

risolve il problema di Dirichlet.

Parimenti si vede che la formula

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = \int_\sigma G_1 \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$$

risolve il problema di NEUMANN, se $G_1 = H_1 - \frac{F}{r^{n-2}}$, ove H_1 è metaarmonica regolare e tale che sul contorno risulti

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{F}{r^{n-2}}\right).$$

Tutto dunque è analogo a ciò che si disse per le funzioni armoniche riguardo agli stessi problemi (anche al problema misto). Ma la determinazione effettiva delle funzioni di GREEN G e G_1 è qui più difficile anche per i contorni più semplici.

Quando sia $n = 3$ e $c = -k^2$, l'equazione in F diventa semplicemente $F'' = k^2 F$; perciò si deduce

$$F = \frac{1}{2}\left(e^{kr} + e^{-kr}\right) = \cosh(kr),$$

se si vuole che sia $F = 1$ per $r = 0$. La (22) diventa

$$4\pi U(Q) = \int_\sigma \left[U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\cosh(kr)}{r}\right) - \left(\frac{\cosh kr}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial n}\right] d\sigma$$

(per $c = k^2$, basta sostituire al coseno iperbolico il coseno circolare).

Quanto al caso di $n = 2$, bisogna determinare una $V = F(r)$ mediante l'equazione

$$\Delta F + cF = F'' + \frac{1}{r}F' + cF = 0.$$

Questa ammette la soluzione regolare

$$F_0(\sqrt{c}r) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2}\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right)^{2s} \qquad (F_0(0) = 1)$$

come si verifica immediatamente; e un'altra che per $r = 0$ diventa infinita logaritmicamente. Questa è la soluzione fondamentale. Per trovarla poniamo

$$K_0(r) = F_0(\sqrt{c}r)\log r + H_0(r), \tag{24}$$

e sostituiamo nell'equazione. Si ottiene (tenendo presente che F è soluzione)

$$rH_0'' + H_0' + crH_0 = -2\sqrt{c}F_0'.$$

Essa permette di determinare uno sviluppo per le potenze di r che è convergente e rappresenta una funzione $H(r)$ regolare.

La (24) è dunque la soluzione fondamentale. Infatti con l'uso di essa si trova una formula analoga alla (22) (*mutatis mutandis*), cioè

$$(24') \qquad 2\pi U(Q) = \int_\sigma \left(U \frac{\partial K_0}{\partial n} - K_0 \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma .$$

Nel caso di $c < 0$ non si possono dedurre, come sappiamo, conseguenze analoghe ; vale però sempre la (22). Poichè le proprietà delle metaarmoniche sono diverse in corrispondenza ai due casi di $c < 0$ e $c > 0$, sarà bene distinguerle e chiamarle *metaarmoniche di 1ª specie e di 2ª specie* secondo che soddisfano all'una o all'altra dell'equazioni $\Delta U - k^2 U = 0$, $\Delta U + k^2 U = 0$.

16. — Alcune proprietà delle funzioni metaarmoniche.

a) Osserviamo anzitutto che esiste una soluzione regolare $\varphi(r)$ della (20). Infatti, posto $U = \varphi(r)$ si ottiene per i calcoli precedenti

$$\Delta\Phi + c\Phi \equiv \Phi'' + \frac{n-1}{r}\Phi' + c\Phi = 0 ;$$

e se si cerca per Φ una serie di potenze, si trova facilmente

$$\Phi(r) = 1 + \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{c^s r^{2s}}{s!\, 2^s n\,(n+2) \ldots (n+2s-2)} ,$$

che è convergente per ogni valore di r. Ne segue che se anche $U(P)$ è metaarmonica regolare, si ha per la prima formula di Green

$$\int_\sigma \left(U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma = 0 .$$

Insieme a questa riprendiamo ora la (22), e supponiamo che (σ) sia l'ipersfera di centro Q e raggio R. Avremo manifestamente (scrivendo $V(r)$ al posto di F/r^{n-2}) e ricordando che su (σ) è $n = -\operatorname{grad} r$

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = -V'(r) \int_\sigma U d\sigma + V(r) \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial r} d\sigma$$

$$\Phi'(R) \int_\sigma U d\sigma = \Phi(R) \int_\sigma \frac{\partial U}{\partial r} d\sigma ;$$

dalle quali si deduce

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = [-V'(R) + \frac{V(R)\,\Phi'(R)}{\Phi(R)} \int_\sigma U d\sigma].$$

Ma la (23) stessa, sostituito Φ a U, fornisce la relazione

$$(n-2)\,\Omega\Phi(0) = -\int_\sigma [\Phi(R)V'(R) - V(R)]\,d\sigma =$$
$$= [-\Phi(R)V'(R) + V(R)\Phi'(R)]\,\Omega_R$$

essendo Ω_R l'area dell' ipersfera di raggio R; per conseguenza si ha

$$(n-2)\,\Omega U(Q) = \frac{(n-2)\,\Omega\Phi(0)}{\Omega_R\Phi(R)} \int_\sigma U d\sigma,$$

ossia

$$\Phi(R)U(Q) = \frac{1}{\Omega_R} \int_\sigma U d\sigma. \tag{25}$$

È *il teorema della media per le funzioni metaarmoniche* (13).

Nel caso che più c' interessa di $c = -k^2$, la $\Phi(R)$ è sempre positiva e maggior d'uno.

Se la U nel campo ove è definita avesse un massimo positivo, per esempio, in Q, si potrebbe descrivere con centro in questo punto un' ipersfera (σ) di raggio R abbastanza piccolo onde avere

$$U(Q) > \frac{1}{\Omega_R} \int_\sigma U d\sigma.$$

Ma questo è in contraddizione con la (25), che darebbe in questo caso

$$U(Q) = \frac{1}{\Omega_R\Phi(R)} \int_\sigma U d\sigma < \frac{1}{\Omega_R} \int_\sigma U d\sigma.$$

Parimenti, se la U avesse in Q un minimo negativo, riguardo all' ipersfera sopraddetta si avrebbe

$$U(Q) < \frac{1}{\Omega_R} \int_\sigma U d\sigma;$$

mentre la (25) darebbe

$$U(Q) > \frac{1}{\Omega_R} \int_\sigma U d\sigma.$$

---

(13) F. Sbrana, *Sulle funzioni metaarmoniche*, in « Rend. Circ. Palermo », 1929.

Dunque *una funzione regolare metaarmonica di 1ª specie nel campo* (S) *ove è definita non può avere massimi positivi e minimi negativi; li avrà al contorno.*

Segue anche di qui il teorema già noto dell'unicità della funzione regolare metaarmonica di 1ª specie che assume dati valori sul contorno. E invero, se tale funzione fosse nulla sul contorno (σ) e non nulla nello spazio (S) interno a (σ), dovrebbe avere in (S) dei massimi positivi o dei minimi negativi, contrariamente al teorema dimostrato.

b) Sussiste il teorema inverso: *se U è regolare nel campo (S), e in ogni punto interno a (S) e per ogni ipersfera che ha il centro in quel punto e giace in (S) ha luogo la* (25), *la funzione U è metaarmonica in (S).*

La dimostrazione è simile a quella svolta per le funzioni armoniche; perciò qui non la ripeteremo.

c) La (23) mostra che le *funzioni metaarmoniche regolari sono analitiche*. Le ragioni sono quelle stesse indicate nel caso delle funzioni armoniche.

d) Infine sussiste per le metaarmoniche di 1ª specie un teorema analogo a quello di Harnack: *Se $U_1, U_2, U_3, \ldots U_n, \ldots$ è una successione infinita di funzioni regolari metaarmoniche di 1ª specie, e se la serie*

$$U_\sigma = (U_1)_\sigma + (U_2)_\sigma + \ldots + (U_n)_\sigma + \ldots$$

formata coi valori che le dette funzioni assumono sul contorno (σ) di (S) è uniformemente convergente, tale risulterà pure la serie

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n \ldots,$$

e rappresenterà una funzione metaarmonica regolare di 1ª specie in (σ). Basta ripetere la dimostrazione già data per le funzioni armoniche.

17. — Funzioni metaarmoniche di 2ª specie.

Abbiamo veduto, come esempio, che l'equazione

$$\Delta U + k^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0,$$

ammette una soluzione nulla sopra a un certo quadrato e non nulla nell' interno. Questo fatto suggerisce la questione seguente:

dato un contorno regolare qualunque, e fissato k, esiste sopra una funzione regolare metaarmonica di 2ª specie che s'annulla sopra a quel contorno senza esser nulla nell' interno? Oppure esiste solo in corrispondenza a particolari valori di k dipendenti dal dato contorno? Illustriamola con qualche esempio. La funzione

$$U = \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qy$$

soddisfa manifestamente alla data equazione quando sia $p^2 + q^2 = k^2$. Consideriamo il rettangolo definito da $x = 0$, $y = 0$, $x = a$, $y = b$. Cotesta soluzione s'annulla sui primi due lati $x = y = 0$; affinchè s'annulli sugli altri occorre che risulti $p = \frac{m\pi}{a}$, $q = \frac{n\pi}{b}$ con m e n interi; con che la precedente condizione diventa

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = \frac{k^2}{\pi^2}.$$

Ora fissato k, non è detto che esistano sempre due interi m e n che soddisfano a queste condizioni. Invece ad ogni coppia (m, n) di numeri interi corrisponde un valore di k; cosicchè esistono infinite metaarmoniche di 2ª specie corrispondenti a diversi valori di k che s'annullano su quel rettangolo senza esser nulle nell' interno; e sono precisamente le funzioni

$$U_{m,n} = A_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b},$$

essendo $A_{m,n}$ una costante. Le funzioni metaarmoniche regolari che s'annullano sopra a un contorno senza esser nulle nell' interno di esso (e sono perciò di 2ª specie) si dicono *fondamentali* rispetto a quel contorno.

Come secondo esempio, consideriamo il contorno circolare di raggio a; e indicando con r e φ le coordinate polari col polo nel centro, cerchiamo le soluzioni della forma $U = R(r) \,.\, \Phi(\varphi)$. Essendo

$$\operatorname{grad}(R\varphi) = R'\Phi \operatorname{grad} r + R\Phi' \operatorname{grad} \varphi,$$

e ricordando che in S_2

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} r = \frac{1}{r}, \quad \Delta\varphi = 0, \quad \operatorname{mod}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{1}{r},$$

si ha

$$\Delta(R\Phi) = \frac{1}{r^2} R\Phi'' + R''\Phi + \frac{R'\Phi}{r};$$

perciò l'equazione diventa (dividendo per Φ)

$$R'' + \frac{R'}{r} + \frac{R}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi} + k^2 R = 0 .$$

Chiamando m un numero positivo, possiamo soddisfarla ponendo

$$\frac{\Phi''}{\Phi} - = m^2 \ , \ R'' + \frac{R'}{r} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2}) R = 0 .$$

La prima dà

$$\Phi = A \operatorname{sen} m\varphi + B \cos m\varphi .$$

La seconda è un tipo già incontrato ; ammette una soluzione sviluppabile per le potenze di kr, che si suole indicare con $J_m(kr)$, e si chiama *funzione di Bessel* (*o cilindrica*) *d'ordine m*. Si dimostra nella teoria di queste funzioni che l'equazione trascendente $J_m(h) = 0$ ha infinite radici reali distinte h_{m_1}, h_{m_2} .... E allora si vede che le funzioni

$$J_m\left(\frac{h_{m_i} r}{a}\right) \operatorname{sen} m\varphi \quad , \quad J_m\left(\frac{h_{m_i} r}{a}\right) \cos m\varphi \quad (i = 1, 2, 3 \ldots.)$$

sono *metaarmoniche fondamentali* rispetto al contorno dato, perchè si annullano per $r = a$, ossia sul cerchio. Esse corrispondono ai valori seguenti di k:

$$k_i = \frac{h_{m_i} r}{a} \quad (i = 1, 2, 3 \ldots.) .$$

Orbene questo fatto è generale : *dato un contorno chiuso* (*a parte certe ipotesi su questo*), *esistono infiniti valori di k a cui corrispondono funzioni metaarmoniche fondamentali*. Questi valori di k si chiamano gli *autovalori* relativi al contorno dato.

18. — **Ricerca delle funzioni metaarmoniche fondamentali.**

Al risultato precedente si può arrivare in vari modi. Il più semplice e rigoroso è fondato sulla teoria delle equazioni integrali dovuta a Freedholm, e perfezionata da altri Autori. Stiamo, per fissar le idee, al caso più importante delle tre variabili (spazio a tre dimensioni). Il lettore poi comprenderà che il procedimento è estendibile al caso di un S_n qualunque.

Riprendiamo la formula di Green, cioè

$$\int_S (V\Delta U - U\Delta V)\, dS = -\int_\sigma (V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n})\, d\sigma ,$$

dove (S) è il campo di (S_n) luogo dei punti P limitato dalla superficie (σ). Applichiamola al caso di $V = G(Q, P)$, essendo $G(Q, P)$ la prima funzione di GREEN relativa al contorno dato e all'equazione di LAPLACE $\Delta U = 0$. Per far ciò occorre isolare il punto Q, ove la G diventa infinita come $1 : r$ (si ricordi che $r = PQ$) con una sferetta (ω) di centro Q e raggio ε, e scrivere

$$\int_{S'} (G\Delta U - U\Delta G)\, dS' = -\int_{\sigma} (G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n})\, d\sigma -$$
$$-\int_{\omega} (G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n})\, d\omega\,,$$

essendo (S') lo spazio compreso fra (σ) e (ω). Ora supponendo che la U sia metaarmonica fondamentale, cioè $\Delta U + k^2 U = 0$ e $U = 0$ su (σ); e ricordando che è $\Delta G = 0$ e $G = 0$ su (σ); si ottiene

$$k^2 \int_S GU dS' = \int_{\omega} (G\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial G}{\partial n})\, d\omega\,.$$

Ma sappiamo già che è

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega} G\frac{\partial U}{\partial n}\, d\omega = 0\ ,\ \lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega} U\frac{\partial G}{\partial n}\, d\omega = -4\pi U(Q)\,;$$

perciò segue

$$U(Q) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_S G(Q, P) U(P) dS\,.$$

La U deve dunque soddisfare a questa equazione funzionale, che è appunto *un'equazione integrale di tipo Fredholm*. La funzione $G(Q, P)$ sotto il segno d' integrazione dicesi il *nucleo* di questa equazione. Esso è simmetrico, nel senso che $G(Q, P) = G(P, Q)$, come sappiamo. Orbene la teoria di coteste equazioni dimostra che non esiste una soluzione U per qualunque valore di k; ma soltanto per certi particolari valori di k. Se k_i è uno di questi, l'equazione può ammettere in corrispondenza anche parecchie soluzioni, ma in numero finito. I valori k_i di k, detti *autovalori*, sono in numero infinito e si possono ordinare in una successione crescente

$$k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \ldots.$$

Abbiamo messo anche il segno uguale per indicare che ogni k_i va ripetuto in questa successione tante volte quante sono le solu-

zioni U_i distinte che gli corrispondono. Queste corrispondenti soluzioni saranno indicate con

$$U_1, \; U_2, \; \ldots \; U_n, \; \ldots,$$

Su questo argomento rimandiamo il lettore ai libri speciali ([14]).

Poichè queste U_i sono manifestamente definite a meno d'un fattor costante, così per definirle in modo univoco si aggiunge la condizione

$$\int_S U_i^2 dS = 1, \tag{26}$$

la quale impedisce anche che possa essere $U_i = 0$. Queste funzioni metaarmoniche fondamentali soddisfano alla così detta *condizione d'ortogonalità* espressa da

$$\int_S U_i U_s dS = 0, \tag{27}$$

per $k_i \neq k_s$. Infatti, facendo nella precedente formula di GREEN $V = U_i$, $U = U_s$; e notando che sono metaarmoniche, e che $U_i = U_s = 0$ su (σ) (sono cioè fondamentali), risulta

$$(k_1^2 - k_s^2) \int_S U_i U_s dS = 0,$$

che per $k_i \neq k_s$ dà appunto la (27).

È facile vedere che le U_i soddisfacenti alle (26) e (27) sono linearmente indipendenti; ossia che non può esistere una identità della forma

$$\sum c_s U_s = 0,$$

sia essa una somma finita o una serie uniformemente convergente. E infatti, moltiplicando per U_s e integrando in (S), si ha

$$\sum c_s \int_S U_i U_s dS = 0,$$

che per le (26) e (27) si riduce a $c_i = 0$.

Segue anche dalle cose dette che ogni funzione $f(Q)$ regolare in (S) e nulla su (σ) è sviluppabile nella serie

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i U_i. \tag{28}$$

([14]) Per esempio, VIVANTI, *Equaz. integrali*, Manuali Hoepli; A. KNESER, *Die Differentialgleichungen etc.*, 1922; HEYWOD et FRECHET, *L'équation de Fredholm etc.*, Paris, 1912.

Infatti, moltiplicando per U_s e integrando in (S), si ottiene

$$a_i = \int_S f U_i dS \,, \tag{29}$$

giacchè per le (26) e (27) il solo termine in cui $s = i$ è diverso da zero ed uguale ad uno. Si ottengono così i coefficienti della serie; e si può dimostrare che la serie risulta uniformemente convergente.

Si vede anche che se φ è un'altra funzione per la quale si abbia

$$\varphi = \sum b_i U_i$$

risulta

$$\int_S f\varphi dS = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int f U_i dS \,,$$

e quindi

$$\int_S f\varphi dS = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \,. \tag{30}$$

19. — **Proprietà di minimo.**

Sussiste l' importante proprietà espressa dal teorema seguente: *l'ennesimo autovalore k_n è il più piccolo valore che può prendere l' integrale*

$$I(\varphi) = \int_S (\text{grad}\, \varphi)^2 \, dS \tag{31}$$

rispetto a tutte le funzioni φ nulle sul contorno (σ), regolari in (S) e soddisfacenti per $i = 1, 2, \ldots. n - 1$ alle condizioni

$$\int_S \varphi^2 dS = 1 \quad , \quad \int_S \varphi U_i dS = 0 \,. \tag{32}$$

Il minimo è raggiunto da $\varphi = U_n$.

Essendo

$$\text{grad}\, \varphi \times \text{grad}\, \varphi = \text{div}\, (\varphi\, \text{grad}\, \varphi) - \varphi \Delta \varphi \,,$$

si deduce

$$I(\varphi) = -\int_S \varphi \Delta \varphi dS - \int_\sigma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\sigma \,;$$

e per le φ nulle al contorno

$$I(\varphi) = -\int_S \varphi \Delta \varphi dS \,.$$

Allora ricorrendo alla (30), fatto $f = \Delta\varphi$, si ottiene

$$I(\varphi) = -\sum_i a_i b_i ,$$

ove

$$a_i = \int_S U_i \Delta\varphi dS \ , \ b_i = \int_S U_i \varphi dS .$$

Ma dalla formula di GREEN

$$\int_S (U_i \Delta\varphi - \varphi \Delta U_i)\, dS = -\int_\sigma (U_i \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial U_i}{\partial n})\, d\sigma ,$$

si trae nel caso presente

$$\int_S [U_i \Delta\varphi + k^2 \varphi U_i]\, dS = 0 ,$$

ossia $a_i = -k^2 b_i$. Ne risulta

$$I(\varphi) = \sum_{i=n}^{\infty} k_i^2 b_i^2 ,$$

giacchè $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$. La (30) dà ancora per $f = \varphi$

$$\int_S \varphi^2 dS = \sum b_i^2 ,$$

perciò a causa della condizione imposta, è $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2 = 1$. Si ha dunque

$$I(\varphi) = k_n^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} (k_i^2 - k_n^2) b_i^2 ;$$

da cui, essendo $k_i^2 \geq k_n^2$ per $i = n+1,\ n+2, \ldots$, si deduce $I(\varphi) \geq k_n^2$.

Inoltre per $\varphi = U_n$, si ha $b_{n+1} = 0$, $b_{n+2} = 0$ ecc.; perciò risulta

$$I(U_n) = k_n^2 ,$$

e il teorema è dimostrato.

20. — **Funzioni metaarmoniche corrispondenti ad altri problemi.**

Abbiamo cercato finora le funzioni regolari metaarmoniche in un campo (S) e nulle sul contorno (σ) di (S). Si possono anche cercare le metaarmoniche che hanno sul contorno la derivata normale

nulla. Per esempio, sul quadrato di lati $x = \frac{\pi}{k\sqrt{2}}$, $x = -\frac{\pi}{k\sqrt{2}}$, $y = \frac{\pi}{k\sqrt{2}}$, $y = -\frac{\pi}{k\sqrt{2}}$ la funzione metaarmonica già nota

$$\operatorname{sen}\frac{kx}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{ky}{\sqrt{2}}$$

non s'annulla; mentre s'annullano le derivate

$$\frac{k}{\sqrt{2}}\cos\frac{kx}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{ky}{\sqrt{2}}\ ,\quad \frac{k}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\frac{kx}{\sqrt{2}}\cos\frac{ky}{\sqrt{2}}\ ,$$

che sono le derivate normali.

A cotesto fine basta ripetere il ragionamento fatto al n. 1, sostituendo alla prima funzione di GREEN la seconda funzione G_1 relativa al contorno dato e all'equazione integrale

$$U(Q) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_S G_1(Q, P)\, U(P)\, dS\,;$$

dalla quale nascono tutte le conseguenze dette nei numeri precedenti.

Parimenti si possono cercare le metaarmoniche fondamentali che al contorno soddisfano alla condizione

$$\frac{\partial U}{\partial n} - pU = 0\,.$$

Per esse valgono proprietà analoghe a quelle dette di sopra; ma qui non ne diremo altro.

OSSERVAZIONE. – L'equazione $\Delta U + cU = 0$ è anche importante perchè ad essa si riduce l'equazione di tipo iperbolico della teoria delle onde

$$\Delta W - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0\,,$$

quando si cercano soluzioni del tipo

$$W = e^{-kt}\, U(P)\,.$$

Infatti, sostituendo si trova per U l'equazione

$$\Delta U - k^2 U = 0\,,$$

che è quella delle funzioni metaarmoniche di 1ª e 2ª specie, secondo che k è reale o immaginaria.

§ 4.

21. — Equazioni ellittiche lineari di forma generale.

L'estensione dei risultati precedenti all'equazioni di tipo ellittico più generali è stata oggetto di molto studio nell'ultimo quarantennio da parte di parecchi Autori e secondo diversi indirizzi. L' interesse di queste ricerche è grande per il matematico, ma assai minore per il fisico, che quasi sempre ha da fare nelle applicazioni con equazioni a coefficienti costanti.

I primi progressi nel senso indicato furono realizzati da E. Picard con le sue belle ricerche del 1890 (*Journal de Matematique*) fondate sul metodo delle approssimazioni successive. Ma l'impulso a più ampie e precise indagini avvenne intorno al 1903, quando Fredholm espose la sua importante teoria dell'equazioni integrali ([15]). In questa gli analisti trovarono uno strumento possente per lo studio dei problemi in discorso. L'articolo di L. Lichenstein nella *Enciclopedia Matematica* tedesca dà un'ampia bibliografia sull'argomento ([16]).

Qui ci occuperemo soltanto dell'estensione all'equazioni lineari più generali del metodo classico che abbiamo esposto nei paragrafi precedenti per l'equazione di Laplace.

A tal fine, ricordando quanto si è detto, occorre:

a) determinare una soluzione fondamentale come fu definita al n. 6;

b) determinare per ciascun problema al contorno la funzione di Green (analogamente a quanto si è fatto precedentemente);

c) verificare dopo ciò che la seconda formula di Green generalizzata dà effettivamente la soluzione richiesta.

In questo modo l'esistenza della soluzione risulta dalla sua stessa ricerca, qualora si riesca almeno a tracciare la via sicura per calcolarla.

22. — Equazione di Laplace con l'aggiunta di termini di primo grado.

Per semplicità e chiarezza d'esposizione conviene cominciare a considerare l'equazione

$$L(U) = \Delta U + \mathbf{a} \times \operatorname{grad} U + cU = 0\,, \tag{33}$$

([15]) « Acta Mat. », t. XXVII.

([16]) « Encyklopädie der Math. Wissenschaften », Bd. II, Heft 8, 1924.

che è l'equazione di LAPLACE con l'aggiunta di termini del primo ordine. Cerchiamo la soluzione fondamentale (tanto vale considerare questa in luogo della sua aggiunta). Si occuparono di questo problema PICARD, HILBERT, HEDRIK, HOLMGREN, HADAMARD, E. E. LEVI, FUBINI ed altri. Noi qui seguiremo il metodo indicato da E. LEVI [17], applicandolo opportunamente alla (33).

Ponendo

$$r = \mathrm{mod}\,(P - Q) \quad , \quad \varrho = \mathrm{mod}\,(M - P)\,,$$

cerchiamo se esiste una soluzione della forma

$$V(P, Q) = \frac{1}{r^{n-2}} + \int_{S'} \frac{1}{\varrho^{n-2}} \varphi(M, Q)\, dS' \qquad (n > 2)$$

essendo (S') un campo n-dimensionale comprendente P e Q, e luogo dei punti M, la quale diventi infinita per $P = Q$ dell'ordine $n - 2$. Sostituendola nell'equazione, ed osservando che

$$\mathbf{a} \times \mathrm{grad}_P \int_{S'} \frac{\varphi(M, Q)}{\varrho^{n-2}}\, dS' = \int_{S'} \varphi(M, Q)\, \mathbf{a} \times \mathrm{grad}_P \frac{1}{\varrho^{n-2}}\, dS',$$

$$\Delta_P \Big[\int_{S'} \frac{\varphi(M, Q)}{\varrho^{n-2}}\, dS' \Big] = -(n-2)\, \Omega \varphi(P, Q) \quad \text{(teor. di POISSON)}$$

$$\Delta_P \frac{1}{\varrho^{n-2}} = 0\,;$$

si ottiene facilmente

$$-(n-2)\, \Omega \varphi(P, Q) + \int_{S'} \Big[\mathbf{a} \times \mathrm{grad}_P \frac{1}{\varrho^{n-2}} + \frac{c}{\varrho^{n-2}} \Big] \varphi(M, Q)\, dS' +$$

$$+ \Big[\mathbf{a} \times \mathrm{grad}_P \frac{1}{r^{n-2}} + \frac{c}{r^{n-2}} \Big] = 0\,,$$

cosicchè ponendo

$$\mathbf{a} \times \mathrm{grad}_P \frac{1}{r^{n-2}} + \frac{c}{r^{n-2}} = -(n-2)\, \Omega K(P, Q)\,,$$

risulta

$$\varphi(P, Q) + \int_{S'} K(P, M) \varphi(M, Q) dS' + K(P, Q) = 0\,,$$

equazione integrale alla quale deve soddisfare la funzione φ. E poichè la funzione K ha un polo d'ordine $n - 1$, come subito si vede, questa equazione rientra in quelle studiate da FREDHOLM; onde si può stabilire l'esistenza della soluzione e determinarla. Ma qui non possiamo dirne altro.

---

[17] « Circ. Mat. Palermo », 1907.

Recentemente M. GEVREY ha sviluppato un metodo analogo per la ricerca delle funzioni di GREEN ([18]). Stando, per esempio, al caso del problema di DIRICHLET riguardo alla (33), si consideri la funzione

$$F(P, Q) = \frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{r_1^{n-2}},$$

ove $r_1 = \sqrt{r^2 + 4d\delta}$, essendo d e δ le minime distanze di P e Q dal contorno (σ) di (S). Si vede ch'essa ha un polo d'ordine $n - 2$ e che s'annulla quando P e Q va su (σ). Allora si cerchi una soluzione di $L(U) = 0$ della forma

$$G(P, Q) = F(P, Q) + \int_{S(M)} F(P, M)\varphi(M, Q)dS .$$

Procedendo come sopra, si trova l'equazione integrale

$$-(n-2)\,\Omega\varphi(P, Q) + \int_S L[F(P, M)]\,\varphi(M, Q)dS + L[F(P, Q)] = 0 ,$$

a cui deve soddisfare la φ. E poichè si dimostra che $L(F)$ è d'ordine $n - 1$ in $1 : r$, questa equazione rientra in quelle di tipo FREDHOLM, la cui teoria permette di stabilire l'esistenza della G e di determinarla. Questa G è manifestamente la prima funzione di GREEN (qui si è considerata la $L(U) = 0$ in luogo dell'aggiunta, ma il discorso è lo stesso).

Trovate così la soluzione fondamentale e la funzione di Green, la seconda formula di GREEN, come si è visto già nei casi particolari, permette di calcolare la cercata funzione che risolve per la (33) il problema di DIRICHLET, salvo poi a fare le debite verificazioni.

23. — Equazioni autoaggiunte con termini generali del secondo ordine.

Per procedere nella generalizzazione consideriamo l'equazioni autoaggiunte della forma

$$\text{div}\,(\alpha\,\text{grad}\,U) = 0 , \tag{34}$$

ove l'omografia α non è costante (e perciò non riducibile all'equazione di LAPLACE). Essa può interpretarsi in due modi formalmente

---

([18]) *Determination et emploi des fonctions de Green etc.*, « I. d. Math. », 1930.

diversi. O la si considera in uno spazio euclideo (S_n) come un tipo d'equazione più generale di quella di LAPLACE (come abbiamo già fatto nei primi paragrafi); o la si interpreta come la generalizzazione diretta della stessa equazione di LAPLACE in una opportuna *varietà di Riemann*; nella stessa guisa che il BELTRAMI interpretò l'equazione

$$\Delta_\sigma U = \frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{G\frac{\partial U}{\partial q_1} - F\frac{\partial U}{\partial q_2}}{\sqrt{EG-F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{G\frac{\partial U}{\partial q_2} - F\frac{\partial U}{\partial q_1}}{\sqrt{EG-F^2}}\right] = 0$$

come l'equazione di LAPLACE sulla superficie (σ) il cui elemento lineare è definito da

$$ds^2 = Edq_1^2 + 2Fdq_1dq_2 + Gdq_2^2 .$$

Sostanzialmente i due modi sono identici, nel senso che l'uno non supera l'altro per potenza d' indagine; ma differiscono riguardo alla maggiore o minore semplicità dei calcoli; all'aderenza più o meno stretta con quanto è stato svolto per l'equazioni di tipo più semplice; e infine all'aiuto che una diversa interpretazione può porgere all'intuizione, onde scorgere più facilmente la via da seguire per la desiderata estensione dei metodi.

Per veder ciò chiaramente occupiamoci della ricerca della soluzione fondamentale. Se si considerano le cose nel primo modo, bisogna cercare di estendere i concetti svolti nel numero precedente. Poniamo

$$R^2 = \alpha^{-1}(P-Q)\times(P-Q) \quad , \quad \varrho^2 = \alpha^{-1}(M-P)\times(M-P) ,$$

ove α^{-1} è l'omografia inversa di α ($\alpha\alpha^{-1} = 1$), e P e Q due punti della regione S' (M) di S_n; e vediamo se esiste una soluzione della (34) avente la forma

$$V(P,Q) = \frac{1}{R^{n-2}} + \int_{S'} \frac{1}{\varrho^{n-2}}\varphi(M,Q)\,dS' . \tag{35}$$

Poichè al tendere di P a Q (tenendo fisso Q e variando P) R e $r = PQ$ diventano infinitesimi dello stesso ordine (si suppone α regolare, come si è sempre fatto), si vede che V diventa per $P = Q$ infinita dell'ordine $n-2$. Sostituendola poi nell'equazione, e sviluppando in modo analogo a quanto si è fatto di sopra, si perviene per la determinazione di φ ad una equazione integrale, alla quale è pure applicabile la teoria di FREDHOLM, perchè si dimostra (e

l'analogia col caso precedente lo fa prevedere) che div $(\alpha \operatorname{grad} \frac{1}{R^{n-2}})$ ha per $R = 0$ un infinito dell'ordine $n - 1$ ([19]). Così si può stabilire l'esistenza della cercata soluzione e determinarla. Su questo soggetto il lettore può vedere la Memoria di W. STENBERG ([20]).

Per trattare le cose secondo l'altro punto di vista, consideriamo una varietà Riemanniana (V_n) ad n dimensioni lungo dei punti $Q(x_1 x_2 \dots x_n)$. Il suo elemento lineare sarà

$$ds^2 = dQ \times dQ = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s \quad , \quad (a_{rs} = \frac{\partial Q}{\partial x_r} \frac{\partial Q}{\partial x_r})$$

il prodotto scalare essendo definito in un certo spazio euclideo, nel quale la (V_n) può sempre considerarsi immersa. In (V_n) si possono definire gli operatori grad_Q e div_Q e quindi anche l'operatore di LAPLACE

$$\Delta_Q = \operatorname{div}_Q \operatorname{grad}_Q .$$

([19]) Il calcolo procede così: applicando la nota formula

$$\operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} + K \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u}$$

si trova

$$2R \operatorname{grad} R = \alpha^{-1}(P - Q) + K \frac{d\alpha^{-1}(P - Q)}{dP}(P - Q);$$

e sviluppando questa derivata risulta

$$\operatorname{grad} R = \frac{\alpha^{-1}(P - Q)}{R} + \frac{1}{2} \frac{\beta(P - Q)}{R}$$

dove β è un'omografia dipendente da $P - Q$ in guisa che il limite di $\frac{\beta(P - Q)}{R}$ per $R = 0$ è finito. Dopo ciò si ha

$$\operatorname{grad} \frac{1}{R^{n-2}} = -\frac{n-2}{R^{n-2}} \operatorname{grad} R,$$

e perciò

$$\alpha \operatorname{grad} \frac{1}{R^{n-2}} = -\frac{n-2}{R^n}(P - Q) - \frac{n-2}{r} \frac{\alpha\beta(P - Q)}{R^n}.$$

Segue dopo noti sviluppi e qualche riduzione

$$\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} \frac{1}{R^{n-2}}) =$$
$$\frac{n(n-2)}{R^{n-2}} \beta(P - Q) \times (P - Q) + \frac{n(n-2)}{4R^{n-2}} \alpha\beta(P - Q) \times (P - Q) - \frac{n-2}{2R^n} \operatorname{div} \alpha(P - Q).$$

Ma per le cose dette

$$\frac{\beta(P - Q) \times (P - Q)}{R^3} \quad , \quad \frac{\alpha\beta(P - Q) \times \beta(P - Q)}{R^4} \quad , \quad \frac{\operatorname{div} \alpha(P - Q)}{R} ,$$

sono finite per $P = Q$, perciò il 2° membro ha per $R = 0$ un polo dell'ordine $n - 1$.

([20]) « Math. Leits. », 1924, Bd. 21; per casi particolari vedi ROTHE, in « Math. Ann. », 1931, Bd. 105.

Applicandolo alla funzione $U(Q)$, e introducendo le coordinate, si trova [21]

$$\Delta_Q U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_s \frac{\partial U}{\partial x_s} \left[\sum_r a^{rs} \sqrt{a} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right], \tag{36}$$

ove $a = |a_{rs}|$ (determinante), e a^{rs} è il reciproco di a_{rs} nella matrice $\{a_{rs}\}$, chiamato dal BELTRAMI *parametro differenziale secondo*. Orbene, si vede facilmente che l'equazione autoaggiunta (34) si può sempre identificare con

$$\Delta_Q U = 0 . \tag{36'}$$

Infatti, interpretando le $x_1 \dots x_n$ come le coordinate cartesiane d'uno spazio (S_n) euclideo, possiamo far corrispondere ai punti Q di (V_n) i punti $P(x_1 x_2 \dots x_n)$ di (S_n). Allora in (S_n) la matrice $\{a_{rs}\}$ rappresenta una omografia β, e si ha

$$\sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s = dP \times \beta dP .$$

Notando poi che la matrice $\{a^{rs}\}$ rappresenta l'omografia inversa β^{-1}, si vede che ponendo $\sqrt{a}\beta^{-1} = \alpha$, l'espressione (36) diventa precisamente

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{div} (\alpha \operatorname{grad} U) ,$$

che uguagliata a zero dà un'equazione del tipo (34).

Sostituendo dunque alla (34) di S_n la (36') in (V_n), l'analogia con l'ordinaria equazione di LAPLACE è subito manifesta. E riguardo alle cose dette nel § 2 l'analogia si completa quando si mostri l'esistenza di una soluzione fondamentale della forma $1 : \varrho^{n-2}$, ove ϱ, funzione dei punti P e Q di (V_n), s'annulla solo per $P = Q$. Invero, mettendo in evidenza nella (35) il termine $1 : R^{n-2}$ si ha

$$V(P, Q) = \frac{V_1}{R^{n-2}}$$

ove V_1 è regolare; e questa può essere scritta appunto nella forma $1 : \varrho^{n-2}$. Inoltre è facile persuadersi che, data l'ipersuperficie (σ) definita da

$$x_i = x_i (p_1 p_2 \dots p_{n-1}) \quad , \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

---

[21] L. BIANCHI, *Geometria differenziale*.

e detta $\mathbf{n}'$ la normale in un suo punto generico quando è considerata nel sopradetto (S_n), e $\mathbf{n}$ quando è pensata in (V_n), si ha

$$\operatorname{grad} U \times a\mathbf{n}' d\sigma = \operatorname{grad}_Q U \times \mathbf{n} d\sigma ,$$

interpretando il primo membro in (S_n), il secondo in (V_n).

Infatti, indicando con D_s il determinante che si ottiene dalla matrice $\left\{\frac{\partial x_s}{\partial q_r}\right\}$ quando si cancella la s^{esma} colonna (col segno che gli compete), si ha, come è noto, per le componenti X_s di $\mathbf{n}'$ in (S_n)

$$X_s = \mu D_s \ , \ \mu = \frac{1}{\sqrt{\sum_i D_i^2}} ,$$

perciò dalla relazione

$$\operatorname{grad} \varphi \times a\mathbf{n}' = \sqrt{a} \operatorname{grad} \varphi \times \beta^{-1} \mathbf{n}' = \sqrt{a} \sum_r X_s \sum_s a^{rs} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} ,$$

si deduce

$$\operatorname{grad} \varphi \times a\mathbf{n}' = \mu \sqrt{a} \sum_{r,s} a^{rs} D_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} .$$

Considerando invece la (σ) in (V_n) si ottiene per cose note [22]

$$\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{n} = k \sum_{r,s} a^{rs} D_s \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \quad \text{con } k = \frac{1}{\sqrt{\sum_{r,s} a^{ir} D_r D_i}} ,$$

Daltra parte in (S_n) è

$$d\sigma = \frac{1}{\mu} dp_1 dp_2 \dots dp_{n-1} ,$$

e in (V_n)

$$d\sigma = \frac{\sqrt{a}}{k} dp_1 dp_2 \dots dp_{n-1} ,$$

perciò risulta l'uguaglianza scritta di sopra.

---

[22] Posto $\mathbf{n} = \sum_i X_i \frac{\partial M}{\partial x_i}$ (M è un punto di σ), si ricava facilmente dalla condizione di ortogonalità $\mathbf{n} \times dM = 0$,

$$\sum_i a_{is} X_i = k D_s \ \text{ da cui } \ X_r = k \sum_s a_{si} D_s .$$

Segue allora

$$\operatorname{grad}_Q \varphi \times \mathbf{n} = \sum_r \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \operatorname{grad} x_r \times \sum_s X_s \frac{\partial M}{\partial x_s} = \sum_r \frac{\partial \varphi}{dx_r} X_r ,$$

giacchè

$$\frac{\partial M_s}{\partial x_r} \times \operatorname{grad} x_r = 0 \ (r \neq s) \ , \ = 1 \ (r = s) ;$$

e da ciò la formula del testo.

Dopo ciò è subito visto che la 1ª formula di GREEN diventa identica di forma a quella relativa all'ordinario operatore di LAPLACE, e precisamente

$$\int_S (V\Delta_Q U - U\Delta_Q V)\, dS = -\int_\sigma \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma .$$

Così pure la 2ª formula di GREEN diventa come la (13'), ossia

$$(n-2)\, H(Q)U(Q) = \int_\sigma \left(U\frac{\partial \frac{1}{\varrho^{n-2}}}{\partial n} - \frac{1}{\varrho^{n-2}}\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma \qquad (n>2)$$

salvo che il fattore del 1º membro $H(Q)$ non è più uguale a Ω, ma si ha

$$H(Q)U(Q) = \lim_{\varrho=\varepsilon=0} \int_{\sigma'} \frac{1}{\varrho^{n-1}} \operatorname{grad} \varrho \times \mathbf{n}' d\sigma' ,$$

ove (σ') è una ipersuperficie circondante Q d'equazione $\varrho = \varepsilon$ (23).

Questa quasi perfetta identità fa vedere che le cose dette al § 2 circa l'equazione di LAPLACE e le sue soluzioni si possono facilmente estendere al caso più generale delle $\Delta_Q U = 0$, ossia dell'equazioni (34). Per maggiori dettagli il lettore può consultare una Memoria del Sig. W. FELLER (24).

Infine all'equazione lineare più generale che si ottiene aggiungendo a $\Delta_Q U$ termini del 1º ordine, si possono estendere le considerazioni già fatte al n. 22, come facilmente si comprende. Troppo spazio occorrerebbe per ulteriori sviluppi ; ma gli accenni qui dati sono sufficienti al lettore per orientarsi in questi studi.

---

(23) Le superficie ϱ = cost, in una piccola regione almeno circondante Q, sono chiuse, come è facile persuadersi.

(24) « Math. Ann. », 1930, Bd. 102.