

ANALISI COMPLESSA

GIUSEPPE TOMASSINI

INDICE

1. Introduzione	3
2. Funzioni olomorfe di una variabile complessa	4
2.1. Equazione di Cauchy-Riemann e formula di Cauchy	4
2.2. Singolarità isolate: poli e singolarità	8
2.3. Funzioni meromorfe e divisori	10
3. Funzioni olomorfe di più variabili complesse	11
3.1. I teoremi di Hartogs e Levi e i domini d'olomorfia	14
3.2. La convessità olomorfa	17
3.3. Il teorema di Poincaré e l'equivalenza biolomorfa. La condizione CR di Severi	18
4. Varietà e spazi complessi. La teoria di Oka, Cartan, Serre	19
4.1. La nozione di varietà	19
4.2. Fasci e coomologia	21
4.3. Gli spazi complessi e i teoremi A e B	29
4.4. Problematiche dominanti e risultati	32
4.5. Altri aspetti	36
5. Analisi complessa sulle varietà	37
5.1. Geometria Kähleriana	38
5.2. L'equazione $\bar{\partial}u = f$	43
5.3. Formule di rappresentazione	45
6. Sviluppi analitici e geometrici	46

1. INTRODUZIONE

Nata alla fine dell' 800 come studio delle funzioni olomorfe di più variabili complesse e, quindi, come prosecuzione naturale delle ricerche di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Bernhard Riemann (1826-1866) e Karl Weierstrass (1815-1897) sulle funzioni olomorfe di una variabile complessa, l'Analisi Complessa ha progressivamente acquisito una sempre maggiore autonomia e rilevanza. La stessa denominazione di "Analisi Complessa" - per definire e comprendere i vari filoni di ricerca - è di uso piuttosto "recente": solo a partire dal Congresso dell'IMU (International Mathematical Union), svoltosi nel 1974 a Vancouver, compare una sezione specificamente destinata a ricerche di *Complex Analysis*; fino ad allora gli interventi dedicati alla teoria delle funzioni di più variabili complesse (e, in un primissimo tempo, di una variabile) erano stati incasellati nell'ambito di sezioni a carattere più generale, secondo criteri che riflettevano la pluralità dei campi d'indagine (Geometria e Topologia, Analisi, ecc.). Per visualizzare le tappe di questo processo può dunque essere sufficiente sfogliare gli annali dei Congressi dell'IMU: si noterà, col trascorrere degli anni, un incremento quantitativo di studi sull'argomento cui, come vedremo nel corso della trattazione sistematica, fa riscontro l'affermazione e l'affinamento delle tecniche metodologiche, l'ampliamento delle direzioni di ricerca, la proliferazione dei risultati. Alla scansione cronologica che segna lo sviluppo di questa disciplina corrispondono profonde svolte logiche.

L'Analisi Complessa, nell'accezione ormai in uso, è dunque un vasto settore della ricerca matematica i cui campi di indagine sono costituiti dalla classica Teoria delle funzioni olomorfe di una o più variabili complesse e degli enti geometrici che si possono definire a partire da tali funzioni. Oggetto di questa trattazione saranno le problematiche che l'hanno ispirata, le idee prodotte, le tecniche impiegate, le metodologie seguite, i risultati ottenuti. Ci si riveleranno altresì, come vedremo, profondi legami con altri settori della

ricerca matematica e fisica. Nel darne conto ci atterremo, ovviamente, a un criterio di ordine sistematico che però - proprio per quanto si è venuti dicendo - risulterà abbastanza aderente alle linee dell'evoluzione storica.

La bibliografia posta alla fine del saggio fa riferimento a testi di carattere generale o di rassegna, con l'eccezione degli articoli di Hartogs, E. E Levi e Poincaré il cui contributo è risultato decisivo per lo sviluppo della teoria.

2. FUNZIONI OLOMORFE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

2.1. Equazione di Cauchy-Riemann e formula di Cauchy. . Ricordiamo che una funzione f a valori complessi, definita su un aperto D del piano complesso \mathbb{C} con la coordinata complessa $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si dice *olomorfa* o \mathbb{C} -*derivabile* o *olomorfa* in D se per ogni $z \in D$ esiste

$$\lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}.$$

Tale limite, designato con $f'(z)$, si chiama la *derivata (complessa)* di f in z . Una funzione olomorfa in D è ivi dotata delle derivate parziali f_x, f_y , ($z = x + iy$) ed è soluzione dell'equazione

$$(1) \quad f_x + if_y = 0.$$

Dalla definizione segue immediatamente che l'insieme $\mathcal{O}(D)$, delle funzioni olomorfe in D , costituisce una \mathbb{C} -algebra e se $f \in \mathcal{O}(D)$ e $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in D$, allora $1/f \in \mathcal{O}(D)$. Le funzioni olomorfe in \mathbb{C} si dicono *interi*. Un classico teorema di Goursat stabilisce che se $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa la sua derivata $f' = f'(z)$ è anch'essa olomorfa, pertanto f è di classe C^∞ . La (1), nota come *equazione di Cauchy-Riemann*, caratterizza, tra le funzioni derivabili, quelle che sono olomorfe. Posto $f = u + iv$, essa è equivalente a

$$(2) \quad \begin{cases} u_x = v_y, \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Le condizioni (2) si dicono *condizioni di monogeneità*. Esse mostrano in particolare che, se f è reale o immaginaria pura, allora è costante e che u, v sono funzioni armoniche (*coniugate*). Viceversa, se u è armonica, la forma $-u_y dx + u_x dy$ è localmente esatta, (cioè $dv = -u_y dx + u_x dy$) quindi $u + iv$ è olomorfa; pertanto ogni funzione armonica è la parte reale di una funzione olomorfa.

Seguendo una notazione universalmente adottata, per ogni funzione derivabile rispetto a x e y si definiscono gli operatori

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

e le forme differenziali a coefficienti complessi

$$dz = dx + i dy, \quad d\bar{z} = dx - i dy,$$

da cui

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$$

per ogni funzione $f = f(x, y)$ derivabile. In particolare, se $f \in \mathcal{O}(D)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z) = f_x = -i f_y.$$

Per le funzioni olomorfe valgono i due fondamentali risultati noti come *teoremi di Cauchy*.

Per il primo, se $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$ e bD , la frontiera del dominio D , è di classe C^1 (o più in generale C^1 a tratti), allora

$$(3) \quad \int_{bD} f(z) dz = 0.$$

Dalla (3) discende la *formula di rappresentazione di Cauchy*: per ogni $z \in D$,

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

dove bD è la frontiera di D con l'orientazione positiva. La funzione $1/(\zeta - z)$ si chiama il *nucleo* di Cauchy. Tenuto conto del teorema di Goursat le (2) e (3) seguono immediatamente dalla formula di Green-Stokes.

L'enunciato del primo teorema di Cauchy si può invertire col teorema di Morera: $f \in C^0(D)$ è olomorfa se e solo se vale la (2) (per ogni aperto $D' \subset D$, relativamente compatto in D , con frontiera di classe C^1).

La formula di Cauchy ha varie importanti conseguenze di natura qualitativa:

a) le derivate $f^{(k)} = \partial^k f / \partial z^k$, $k \in \mathbb{N}$, sono funzioni olomorfe e per ogni $D' \subset D$ vale la formula

$$(5) \quad f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{bD'} f(\zeta)(\zeta - z)^{-(k+1)} d\zeta;$$

se D' è il disco $\Delta(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ vale, per ogni $k \in \mathbb{N}$, la *diseguaglianza di Cauchy*

$$(6) \quad |f^{(k)}(z_0)| \leq k! \frac{\|f\|_{\Delta(z_0, r)}}{r^k}$$

dove $\|f\|_{\Delta(z_0, r)} = \max_{\Delta(z_0, r)} \|f\|$. Pertanto, se $\delta(z_0)$ è la distanza di z_0 da bD , sul disco $\Delta(z_0, \delta(z_0))$ la funzione f è la somma delle serie di potenze

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

, la *serie di Taylor* di f (i.e. f è *analitica*).

In particolare, ogni funzione intera f è la somma di una serie di potenze e se limitata in modulo le disequaglianze di Cauchy implicano che essa è costante (teorema di Liouville).

b) Se f, g sono olomorfe in un aperto $D \subset \mathbb{C}$ e in un punto $z_0 \in D$ risulta $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ per ogni $k \geq 0$ (in particolare, se $f = g$ su un aperto $U \ni z_0$), allora $f \equiv g$ sulla componente connessa di D che contiene z_0 *principio d'identità*.

- c) Se $f \in \mathcal{O}(D)$, $f \neq 0$, e $z_0 \in D$, nell'intorno di z_0 si ha $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ dove $n \geq 0$ e $g(z_0) \neq 0$; ne segue che gli zeri di f sono isolati.

La formula di Cauchy mostra che i valori di una funzione olomorfa in un aperto limitato D di \mathbb{C} , continua sulla chiusura \bar{D} , sono determinati dai valori assunti sulla frontiera bD di D . Ciò è ulteriormente precisato dalla proprietà di media

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

valida per una f olomorfa nel disco $\Delta(z_0, r)$ e continua su $\bar{\Delta}(z_0, r)$ e dal *principio del massimo*:

- d) se D è un dominio e $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(\bar{D})$ non è costante, allora, per ogni $z \in D$ si ha $|f(z)| < \max_{bD} |f|$.

Per lo spazio $\mathcal{O}(D)$ valgono i teoremi seguenti:

- e) una successione $\{f_n\}$ di funzioni olomorfe in D , convergente *normalmente* (cioè uniformemente e assolutamente) su ogni compatto di D , ha per limite una funzione olomorfa (Weierstrass);
- f) una successione $\{f_n\}$ di funzioni olomorfe, equilimitate su ogni compatto, ha sottosuccessioni $\{f_{n_k}\}$ convergenti normalmente su ogni compatto (Montel).

La traduzione di tali teoremi in proprietà topologiche dell'algebra $\mathcal{O}(D)$ è immediata: la e) afferma che $\mathcal{O}(D)$ è una sottoalgebra chiusa di $C^0(D)$ (dotato della topologia di Fréchet, quindi uno spazio completo. La f) ne caratterizza i sottoinsiemi compatti.

Concludiamo questa parte citando due risultati la cui dimostrazione è piuttosto laboriosa.

- i) se D è un dominio limitato e bD è di classe C^1 , le tracce su bD di funzioni $f \in \mathcal{O}(D) \cap C^0(D)$ non possono essere arbitrarie (cfr. (3)); esse sono caratterizzate

dalla *condizione dei momenti*

$$(7) \quad \int_{bD} f(z) z^n dz = 0$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$;

- ii) le soluzioni dell'equazione di Cauchy-Riemann nel senso delle distribuzioni sono funzioni olomorfe.

2.2. Singolarità isolate: poli e singolarità . Un punto z_0 si chiama una *singolarità isolata* per f , se f è olomorfa per $\Delta(z_0, r_1) \setminus \{z_0\}$ con r_1 opportuno. Dalla formula di Cauchy applicata ad una corona $z \in \mathbb{C} : 0 < \varepsilon|z| < r_1$ si può che nell'intorno di una singolarità isolata, f è la somma di una serie

$$(8) \quad \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k > 0} b_k (z - z_0)^{-k}$$

detta *serie (o sviluppo) di Laurent* di f ; i coefficienti a_k, b_k risultano dalle formule

$$(9) \quad \begin{cases} a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) (\zeta - z_0)^{-(k+1)} d\zeta, \\ b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) (\zeta - z_0)^{k-1} d\zeta \end{cases}$$

dove C è una qualunque curva semplice e chiusa, orientata positivamente, C^1 a tratti, contenuta in $\Delta(z_0, r_1)$ e contenente z_0 nel suo interno. Inoltre $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$, la "parte regolare" della serie, ha raggio di convergenza almeno r_1 mentre $\sum_{k \geq 1} b_k (z - z_0)^{-k}$, la "parte singolare", converge normalmente sui compatti di $C \setminus \{z_0\}$. Il coefficiente b_1 si chiama il *residuo* di f in z_0 . Se C_r è un qualunque cerchio di centro z_0 e raggio $r < r_1$, dalla (8) si ottiene la disuguaglianza $|b_k| \leq \|f\|_{C_r} r^k$. Pertanto, se $\|f\|_{C_r} \sim r^{-\alpha}$, $\alpha < 1$, per $r \rightarrow 0$, i coefficienti b_k sono nulli, dunque la parte regolare dello sviluppo di Laurent, che è olomorfa sul disco $\Delta(z_0, r)$, estende f . Per $\alpha = 0$, (i.e. f è limitata nell'intorno di z_0) si ottiene il teorema di Riemann sulle *singolarità eliminabili*: se $|f|$ è limitata nell'intorno di una singolarità isolata z_0 , f si estende olomorficamente in z_0 .

Se la parte singolare dello sviluppo di Laurent di f è un polinomio in $1/(z - z_0)$, z_0 si dice un *polo*, e il grado n (positivo) del polinomio è l'*ordine del polo*. Altrimenti z_0 si dice un punto *singolare essenziale*. Una singolarità polare z_0 è caratterizzata da una delle due proprietà

$\alpha)$ $f = g(z - z_0)^{-n}$ con g olomorfa nell'intorno di z_0 , $g(z_0) \neq 0$ e n un intero positivo;

$\beta)$ $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Per una singolarità essenziale z_0 vale la caratterizzazione

$\gamma)$ $\liminf_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = 0$, $\limsup_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$.

Le condizioni $\beta)$ e $\gamma)$ mostrano che il comportamento di una funzione olomorfa f nell'intorno di una singolarità isolata è nettamente diverso nell'uno e nell'altro caso. Un importante teorema di Picard afferma che se z_0 è una singolarità essenziale per f allora, dato un qualunque intorno U di z_0 , f assume su $U \setminus \{z_0\}$ tutti i valori escluso, al massimo, uno.

I risultati finora esposti sulle singolarità isolate sono di natura locale. Il *teorema dei residui* e il *teorema dell'indicatore logaritmico* forniscono risultati di natura globale: siano D un dominio limitato con bordo C^1 a tratti e f olomorfa in $D \setminus \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_k\}$, e continua in $\bar{D} \setminus \{z_1\} \cup \dots \cup \{z_k\}$; siano b_1, \dots, b_k i residui rispettivi di f in z_1, \dots, z_k , allora

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} f(z) dz = \sum_{j=1}^k b_j.$$

Se, nelle condizioni precedenti, i punti z_1, \dots, z_k sono poli di ordini rispettivi n_1, \dots, n_k e gli zeri z'_1, \dots, z'_h di f hanno ordini rispettivi, m_1, \dots, m_h , allora

$$(11) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{bD} \frac{f'}{f} dz = \sum_{j=1}^h m_j - \sum_{j=1}^k n_j.$$

2.3. Funzioni meromorfe e divisori. Nell'intorno di un polo una funzione olomorfa f è quoziente di funzioni olomorfe. Una funzione olomorfa che, in un dominio D , abbia, al massimo, singularità polari si dice *meromorfa*. Le funzioni meromorfe su D costituiscono un corpo $\mathcal{M}(D)$.

Ad ogni funzione meromorfa si associa la combinazione formale

$$(12) \quad (f) = \sum_{j=1}^{+\infty} m_j a_j - \sum_{j=1}^{+\infty} n_j b_j,$$

dove $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sono rispettivamente l'insieme degli zeri e quello dei poli f e $\{m_j\}$, $\{n_j\}$ gli insiemi dei rispettivi ordini. (f) si chiama il *divisore* di f . Un *divisore* su D è una combinazione formale

$$(13) \quad \sum_{j=1}^{+\infty} p_j w'_j - \sum_{j=1}^{+\infty} q_j w''_j,$$

dove $\{w'_j\}$, $\{w''_j\}$ sono insiemi discreti di punti di D e $\{p_j\}$, $\{q_j\}$ successioni di interi positivi: $\sum_{j=1}^{+\infty} q_j w''_j$ rappresenta la *parte polare* del divisore. L'insieme dei divisori su D costituisce un gruppo abeliano.

Si dimostra che

- (a) ogni funzione meromorfa su D è quoziente di funzioni olomorfe;
- (b) se $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di D , \mathcal{D}_j un divisore su U_j con la condizione che se $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, $\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_k$ non ha parte polare allora esiste un divisore \mathcal{D} tale che $\mathcal{D} - \mathcal{D}_j$ non abbia parte polare;
- (c) ogni divisore è il divisore di una funzione meromorfa.

Tali risultati rappresentano le soluzioni dei classici *problemi di Cousin*.

Considerate come applicazioni $D \rightarrow \mathbb{C}$, le funzioni olomorfe sono applicazioni aperte e caratterizzate dalla proprietà secondo cui, se C e C' sono curve regolari formanti in $z_0 \in D$

un angolo α e $f'(z_0) \neq 0$, allora le curve $f(C)$ e $f(C')$ formano in $f(z_0)$ lo stesso angolo. Da qui la denominazione di *applicazioni conformi* data alle funzioni olomorfe. Due domini D e D' si dicono *conformemente equivalenti* o *biolomorficamente equivalenti* se esiste un omeomorfismo f tra D e D' con f olomorfa (e in tal caso lo è anche f^{-1}). Lo studio delle funzioni olomorfe come applicazioni $(x, y) \mapsto (U(x, y), V(x, y))$ con U, V funzioni armoniche coniugate, riflette il punto di vista di Riemann il quale, nella sua "Inaugural Dissertation" tenuta a Göttingen nel 1851, enunciava, tra l'altro, il fondamentale *Teorema di uniformizzazione*: ogni dominio $D \neq \mathbb{C}$ semplicemente connesso è conformemente equivalente al disco unitario $\Delta(0, 1)$; tematica risultato che si completa con l'altro va

Ricordiamo, infine, il contributo dato dalla *teoria delle funzioni analitiche* di Weierstrass, che ha ispirato la teoria dei rivestimenti e quella dei fasci. Di questa ultima avremo modo di parlare ancora trattando della nozione di *spazio complesso*.

3. FUNZIONI OLMORFE DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE

La nozione di funzione olomorfa nelle variabili complesse z_1, \dots, z_n si dà richiedendo che la sua derivabilità parziale in senso complesso rispetto alle variabili z_1, \dots, z_n in ogni punto del dominio di definizione. Quindi una funzione f definita nel dominio D di \mathbb{C}^n se per ogni $z \in D$ esistono le derivate parziali complesse $f_{z_\alpha} = \partial f / \partial z_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$ i.e. se è separatamente olomorfa rispetto alle singole variabili. Le condizioni di Cauchy-Riemann (3) divengono

$$(14) \quad f_{x_\alpha} + i f_{y_\alpha} = 0.$$

dal teorema di Goursat segue allora che f è analitica rispetto alle singole variabili (e, a priori, potrebbe non essere nemmeno continua). Nel primo dei due fondamentali lavori citati in bibliografia Hartogs dimostra che in tali condizioni f è continua. Ciò porta facilmente alla formula di Cauchy (4) per i polidischi. Infatti, se $\Delta_n(z^0)$ è il polidisco $\Delta(z_1^0, r_1) \times \dots \times \Delta(z_n^0, r_n)$ di centro z^0 e raggi r_1, \dots, r_n e $f \in \mathcal{O}(\Delta_n(z^0)) \cap C^0(\overline{\Delta_n(z^0)})$,

applicando la (4) variabile per variabile e utilizzando la continuità di f si dimostra la formula di Cauchy

$$(15) \quad f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T^n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{\alpha=1}^n (\zeta_\alpha - z_\alpha)^{-1} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

dove T_n è il (toro) prodotto delle n circonferenze $b\Delta(z_1^0, r_1), \dots, b\Delta(z_n^0, r_n)$.

Molte delle proprietà enunciate per le funzioni olomorfe di una variabile valgono allora (con identica dimostrazione) per le funzioni olomorfe f di più variabili. Il principio del massimo e il teorema di Liouville seguono direttamente dagli omologhi risultati in una variabile. La sviluppabilità in serie di Taylor

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k (z - z^0)^k$$

(dove $(z - z^0)^k = (z_1 - z_1^0)^{k_1} \dots (z_n - z_n^0)^{k_n}$) in ogni polidisco $\Delta(z^0) \subset D$ sviluppando in serie multipla di potenze il nucleo di Cauchy $\prod_{\alpha=1}^n (\zeta_\alpha - z_\alpha)^{-1}$ e le diseguaglianze di Cauchy

$$(16) \quad \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} f(z^0) \leq k_1! \dots k_n! \frac{\|f\|_{\Delta(z^0)}}{r_1^{k_1} \dots r_n^{k_n}}$$

stimando le derivate dell'integrale di Cauchy nella formula (15). Ne seguono il principio d'identità e i teoremi di Weirstrass e Montel per $\mathcal{O}(D)$.

Le equazioni di monogeneità per la parti reale e immaginaria non sono più del primo ordine. Infatti, indicati con $\partial, \bar{\partial}$ gli operatori

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial z^\alpha} dz^\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} d\bar{z}^\alpha,$$

si ha, per ogni funzione derivabile $df = \partial f + \bar{\partial} f$. Inoltre, poichè $d^2 = 0$ si ha $\partial \bar{\partial} = -\bar{\partial} \partial$.

Le funzioni olomorfe sono caratterizzate dalla proprietà $\bar{\partial} f = 0$, pertanto se $f = u + iv$ è olomorfa u e v sono soluzioni del sistema

$$(17) \quad \bar{\partial} u = -i \bar{\partial} v.$$

Dalla (17) si ottiene

$$(18) \quad \partial \bar{\partial} u + i \partial \bar{\partial} v = 0$$

e coniugando

$$(19) \quad \bar{\partial}\partial u - i\bar{\partial}\partial v = 0.$$

Sommando (18) e (19) e tenendo conto che $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$ si ottiene $\partial\bar{\partial}u = 0$ e $\partial\bar{\partial}v = 0$. Le soluzioni dell'equazione $\partial\bar{\partial}h = 0$ si chiamano *funzioni pluriarmoniche*. Esse sono in particolare armoniche poiché $\sum_{\alpha=1}^n h_{z_{\alpha}z_{\alpha}} = (1/4)\Delta h$, il Laplaciano reale di h . La parte reale e la immaginaria di una funzione olomorfa f sono dunque funzioni pluriarmoniche *coniugate*.

Ogni funzione u pluriarmonica reale su un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ è localmente la parte reale di una funzione olomorfa. Supponiamo per semplicità $n = 2$. La condizione $\partial\bar{\partial}u = 0$ esprime il fatto che la forma differenziale

$$\phi = u_{x_1}dy_1 - u_{y_1}dx_1 + u_{x_2}dy_2 - u_{y_2}dx_2$$

è chiusa quindi localmente esatta su ogni dominio B semplicemente connesso contenuto in D . Fissato z_0 in B la funzione v definita da

$$v(z) = \int_{z_0}^z \phi$$

è pluriarmonica e $f = u + iv$ è olomorfa.

Si osservi che nella formula di rappresentazione (15) la varietà d'integrazione è una sottovarietà propria del bordo di $\Delta(z^0)$. Una formula di rappresentazione integrale per un dominio limitato D , con bordo $\text{b}D$ di classe C^1 , è stata dimostrata da Martinelli nel 1938 e, indipendentemente, da Bochner qualche anno più tardi. Contrariamente al nucleo di Cauchy, non è olomorfo. Qualche discussione c'è stata riguardo alla priorità della formula, problema che la comunità matematica ha salomonicamente risolto attribuendola ad entrambi, chiamando il nucleo $K = K(z, \zeta)$ che ivi appare *nucleo di Bochner-Martinelli* e designandolo con K^{BM} .

L'esistenza di formule di rappresentazione con "nucleo olomorfo" (in cui la varietà d'integrazione sia il bordo) è un problema molto più complicato che sarà risolto alla fine degli anni '60 (cfr. 5.3) e costituirà un'autentica svolta per l'Analisi Complessa.

3.1. I teoremi di Hartogs e Levi e i domini d'olomorfia. Luoghi singolari delle funzioni olomorfe di più variabili e applicazioni conformi tra domini di \mathbb{C}^n influenzano le prime ricerche sistematiche nella teoria e nel giro di pochissimi anni portano alla dimostrazione di risultati che, come si è detto, costituiscono le basi della teoria. Dopo quello sull'olomorfia delle funzioni separatamente olomorfe, in un secondo lavoro, pubblicato nello stesso anno, Hartogs dimostra il seguente teorema:

se $K \subset D$ è un compatto e $D \setminus K$ è connesso, allora ogni funzione olomorfa su $D \setminus K$ è restrizione di una funzione olomorfa su D ; vale a dire che per $n \geq 2$ i compatti non possono essere (secondo una terminologia classica) "insiemi di singolarità" o insiemi di zeri per una funzione olomorfa; in particolare l'insieme degli zeri di una funzione olomorfa non ha punti isolati. (Quest'ultimo fatto era già stato osservato nel 1896 da Hurwitz.)

Del teorema di Hartogs, oltre quella originale, esistono diverse altre dimostrazioni, a cominciare da quelle basate sulle formule di rappresentazione, per le quali rimandiamo al testo di Severi citato nei riferimenti bibliografici.

Altre, più moderne, sono basate sulla coomologia a supporti compatti e inquadrano il teorema di estensione di Hartogs nel contesto più generale degli oggetti analitici"

Il teorema di Hartogs-menzionato da Osgood nel suo libro come "uno dei fatti più stupefacenti della teoria- dimostra che, contrariamente al caso di una variabile, esistono domini D di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ che non sono "massimali" rispetto all'algebra $\mathcal{O}(D)$. Ad esso è legata la nozione di dominio d'olomorfia che si fonda su quella di $\mathcal{O}(D)$ -completamento: siano D un dominio di \mathbb{C}^n e D' un dominio contenuto in D ; un $\mathcal{O}(D)$ -completamento di D' è un dominio

\widehat{D}' dotato della proprietà secondo cui, per ogni $f \in \mathcal{O}(D)$, esiste $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\widehat{D}')$ tale che $\widehat{f}|_{D'} = f|_{D'}$. (D stesso è un $\mathcal{O}(D)$ -completamento di ogni $D' \subset D$.)

Un dominio D si chiama un *dominio d'olomorfia* se gli $\mathcal{O}(D)$ -completamenti dei domini D' di D sono contenuti in D . \mathbb{C}^n è, per definizione, un dominio d'olomorfia.

È facile vedere, inoltre, che se, per ogni $z^0 \in \text{b}D$ e per ogni successione $\{z^{(\nu)}\} \subset D$ convergente a z^0 , esiste $f \in \mathcal{O}(D)$ tale che $\limsup_{\nu \rightarrow +\infty} |f(z^{(\nu)})| = +\infty$, allora D è un dominio d'olomorfia: quindi tutti i domini di \mathbb{C} sono d'olomorfia.

I domini convessi D di \mathbb{C}^n sono domini d'olomorfia (se $z^0 \in \text{b}D$ e $l = 0$ è l'equazione d'un iperpiano reale che contiene z^0 e non tocca D allora, poichè l è la parte reale di una forma lineare olomorfa \widehat{l} nulla in z^0 , la funzione $f = 1/\widehat{l}$ è olomorfa in D e $|f|(z) \rightarrow +\infty$ per $z \rightarrow +\infty$).

Se K è un compatto di un dominio D , $D \setminus K$ non è d'olomorfia (come segue dal teorema di Hartogs).

Sul problema della caratterizzazione dei domini d'olomorfia i due teoremi di Levi menzionati nell'introduzione forniscono i primi fondamentali contributi. Essi riguardano i domini D con bordo di classe C^2 ed esplicitano una condizione per $\text{b}D$ necessaria (e che parecchi anni più si rivelerà anche sufficiente) affinché il dominio D sia d'olomorfia.

Siano $z^0 \in \text{b}D$, U un intorno di z^0 , $\rho \in C^2(U)$ tale che $d\rho(z^0) \neq 0$ e $U \cap D = \{\rho < 0\}$. Consideriamo l'iperpiano complesso $HT_{z^0}(\text{b}D)$ di equazione

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z^0) w^j = 0$$

l'iperpiano complesso tangente a $\text{b}D$ in z^0 , la forma hermitiana nelle variabili w^1, \dots, w^n ,

$$L(\rho; z^0)(w) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(z^0) w^\alpha \bar{w}^\beta,$$

la *forma di Levi* di ρ in z^0 , e la sua restrizione $L_H(z^0)$ all'iperpiano $H(z^0)$, la *forma di Levi di $\text{b}D$ in z^0* .

Il teorema di Levi afferma che, se D è un dominio d'olomorfia, $L_H(z^0) \geq 0$ è semidefinita positiva (≥ 0) per ogni $z^0 \in \text{b}D$. $\text{b}D$ si dice in tal caso *debolmente pseudoconvesso*; se $L_H(z^0) > 0$ (per ogni $z^0 \in \text{b}D$) $\text{b}D$ e D si dicono *strettamente pseudoconvessi*. Entrambe le condizioni dipendono da $\text{b}D$ e non dalla funzione ρ . (Non è difficile dimostrare che, se $\text{b}D$ è strettamente pseudoconvesso, ogni punto $z^0 \in \text{b}D$ ha un intorno U tale che $U \cap D$ sia biolomorfo ad un convesso.)

I teoremi di Levi hanno motivato numerose ricerche che hanno avuto per oggetto le seguenti questioni, note in letteratura come *Problema di Levi*:

- i) un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ a bordo differenziabile e debolmente pseudoconvesso è d'olomorfia ?
- ii) un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ che sia localmente d'olomorfia nei punti di $\text{b}D$ (i.e. per ogni $z^0 \in \text{b}D$ esista un intorno $U = U(z^0)$ tale che $U \cap D$ sia d'olomorfia) è un dominio d'olomorfia?

Entrambe hanno avuto risposta positiva, la prima, all'inizio degli anni '50, grazie ai lavori di Oka, Bremermann, Norguet che hanno messo in evidenza il ruolo sempre più preminente delle funzioni plurisubarmoniche, introdotte in Analisi complessa da Lelong e Oka, la seconda, nel '58, ad opera di Grauert (si noti che la pseudoconvessità debole del bordo non implica a priori che il dominio sia localmente d'olomorfia nei punti del bordo).

Ricordiamo che una funzione continua $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{C}^n$ aperto, si dice *plurisubarmonica* (p.s.a.), rispettivamente *strettamente plurisubarmonica*, se, per ogni $z^0 \in D$ e ogni retta complessa l per z^0 , $\varphi|_l$ è subarmonica, rispettivamente strettamente subarmonica. Se φ è di classe C^k , $k \geq 2$, le condizioni precedenti equivalgono rispettivamente a $L(\varphi)(z^0) \geq 0$, $L(\varphi)(z^0) > 0$ per ogni $z^0 \in D$.

Accennando al lavoro di Grauert, si dimostra che se $\text{b}D$ è di classe C^2 e debolmente pseudoconvesso allora che esiste una funzione differenziabile $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$, strettamente

plurisubarmonica e tale che, per ogni $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{\varphi < c\}$ sia relativamente compatto (φ si chiama in tal caso una *funzione d'esauzione* per D). In particolare, D è unione crescente e numerabile di domini D_k strettamente pseudoconvessi. Utilizzando i teoremi A e B della teoria degli spazi complessi (cfr. 4.3), Grauert dimostra allora che ogni D_k è un dominio d'olomorfia e conclude, mediante un risultato di Benke e Stein, che D è un dominio d'olomorfia.

Il Problema di Levi per gli spazi di Stein con singolarità (cfr. 3.2, 4.3) è tuttora aperto. L'ultimo risultato significativo è contenuto in un lavoro di Andreotti e Narasimhan apparso nel '64 in cui gli autori danno risposta affermativa al problema nel caso per gli spazi di Stein con singolarità isolate.

3.2. La convessità olomorfa. I domini d'olomorfia possono caratterizzati mediante l'algebra delle funzioni olomorfe, come hanno dimostrato Cartan e Thullen nel 1932.

Dato un dominio D di \mathbb{C}^n , per ogni suo compatto K si definisce l' $\mathcal{O}(D)$ -*inviluppo*, \widehat{K} , di K mediante

$$\widehat{K} = \{z \in D : |f(z)| \leq \|f\|_K, \forall f \in \mathcal{O}(D)\}.$$

D si dice *olomorficamente convesso* se, per ogni suo compatto K , \widehat{K} è pure compatto. L'elegante formulazione di Cartan e Thullen è allora: D è un dominio d'olomorfia se e solo se è olomorficamente convesso.

La nozione di convessità olomorfa fa uso soltanto di proprietà dell'algebra $\mathcal{O}(D)$, quindi si può dare per una qualunque varietà complessa. Ciò ha condotto Stein nel 1951 a introdurre le varietà complesse X , olomorficamente convesse, per le quali l'algebra $\mathcal{O}(X)$ *separa i punti* di X (cioè. se $z, z' \in X$, $z \neq z'$, allora, per qualche $f \in \mathcal{O}(X)$, risulta $f(z) \neq f(z')$) e fornisce *coordinate locali* su X (cioè se $z \in X$, esistono $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, la dimensione complessa di X , che sono coordinate complesse nell'intorno di z ; in realtà questa proprietà segue dalle altre due - come ha poi mostrato Grauert).

Le *varietà di Stein* costituiscono la generalizzazione naturale dei domini d'olomorfia. Una generalizzazione, del resto, era già presente nel lavoro di Cartan-Thullen dove la nozione di dominio d'olomorfia è data per *domini di Riemann su \mathbb{C}^n* , cioè per varietà complesse, connesse, X , di dimensione n , munite di una applicazione olomorfa $p : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ di rango massimo (e quindi localmente invertibile). I domini d'olomorfia costituiscono l'ambito naturale in cui poter generalizzare alcuni dei risultati classici della teoria delle funzioni in una variabile. Ne deriveranno, lungo l'arco di una decina d'anni, una serie di lavori (soprattutto per merito di Oka e Cartan), ricchi di idee innovative, che culmineranno e troveranno la loro corretta sistemazione all'inizio degli anni '50 con i teoremi fondamentali della teoria dei degli spazi complessi (cfr. 4.3).

3.3. Il teorema di Poincaré e l'equivalenza biolomorfa. La condizione CR di Severi. Accanto ai risultati di Hartogs e Levi assume notevole rilievo un teorema di Poincaré del 1907 che dimostra che in \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, la palla e il bidisco non sono biolomorficamente equivalenti. Dunque, per $n \geq 2$ il problema della classificazione" dei domini di \mathbb{C}^n rispetto alle trasformazioni biolomorfe è tutt'altro che un problema topologico.

Alla luce del teorema di estensione di Hartogs l'equivalenza biolomorfa di domini limitati di \mathbb{C}^n si può anche considerare come problema di equivalenza (biolomorfa) dei loro bordi. Ciò ha condotto Poincaré, in un lavoro del '27, a formulare il seguente problema: trovare condizioni necessarie e sufficienti affinché due assegnate ipersuperficie analitiche reali S, S' di \mathbb{C}^n siano localmente equivalenti. Per $n = 2$, dopo i contributi di Benke, Carathéodory, Segre il problema è stato risolto da Elie Cartan nel '31. La risoluzione, per $n > 2$, è venuta molto più tardi ('74) per merito Chern e Moser (cfr.6).

Nell'ambito dei problemi di estensione si situa un risultato dimostrato da Severi nel '31: una funzione f , analitica reale su un'ipersuperficie analitica reale S di \mathbb{C}^n è restrizione

di una funzione olomorfa su un intorno se e solo se

$$(20) \quad df \wedge dz_1 \cdots \wedge dz_{n|S} = 0.$$

Se f ed S sono differenziabili, la (20) fornisce una condizione necessaria per l'estensione locale unilatera" di f . In particolare, se $S = \text{b}D$, il bordo regolare di un dominio limitato D di \mathbb{C}^n , essa è necessaria affinché il problema di Dirichlet

$$(21) \quad \begin{cases} \bar{\partial}u = 0 \text{ in } D, \\ u = f \text{ su } \text{b}D \end{cases}$$

La sua sufficienza è stata provata parecchi anni dopo da Fichera nel '56 e Martinelli '60.

La condizione di Severi è nota *condizione di Cauchy-Riemann tangenziale* e le funzioni che la soddisfano, *funzioni CR*.

La condizione di Severi verrà ripresa da H. Lewy in un lavoro del '56 (cfr. 4.5) nell'ambito del problema dell'estensione olomorfa delle funzioni CR differenziabili e a lui attribuita¹.

4. VARIETÀ E SPAZI COMPLESSI. LA TEORIA DI OKA, CARTAN, SERRE

4.1. La nozione di varietà . A partire dalla nozione di funzione e di applicazione olomorfa si definiscono le *varietà complesse* di dimensione (complessa) n , cioè le varietà differenziabili di dimensione reale $2n$ in cui esistono atlanti con cambiamenti di carte olomorfi, le *sottovarietà complesse*, i *fibrati olomorfi*. Una varietà complessa di dimensione 1 si dice una *curva complessa* o una *superficie di Riemann*. Il teorema di uniformizzazione si completa, allora, nella forma seguente: una superficie di Riemann semplicemente connessa è biolomorfa alla retta proiettiva complessa $\mathbb{C}P^1$, a \mathbb{C} oppure al disco $\Delta(0, 1)$.

¹Dall'articolo di H. Lewy: "Severi proved [5], [2] that if S is analytic in x_1, x_2, y_1, y_2 , and if U on $S = 0$ is likewise analytic in three of these four variables and satisfies (2) [la condizione di Severi], then necessarily U equals an analytic function of the complex variables x and y . But if the hypotheses concerning analyticity are dropped, the conclusion becomes faulty. Severi's result established, however, an interesting link between the theory of functions of two complex variables and the analytic solutions of (2)."

L'operazione algebrica di prodotto esterno di spazi vettoriali su \mathbb{C} si estende ai fibrati vettoriali. In particolare, se $T = T(X)$ designa il fibrato olomorfo tangente alla varietà complessa X , T^* il suo duale, si definiscono i fibrati $\Lambda^p(X) = \Lambda^p T^*$ e $\Lambda^q(X) = \Lambda^q \overline{T^*}$ (dove Λ^r designa il prodotto esterno r volte e "—" il coniugio) e il loro prodotto esterno $\Lambda^{p,q}(X)$. $\Lambda^{p,0}(X) (= \Lambda^p T^*(X))$ è un fibrato vettoriale olomorfo, e, per $q > 0$, $\Lambda^{p,q}(X)$ è un fibrato differenziabile. Il fibrato $\Lambda^{p,0}(X)$ si chiama il *fibrato canonico* di X e si designa con K_X . Le sezioni differenziabili di $\Lambda^{p,q}(X)$ su un aperto U sono le (p, q) -*forme differenziali* su U e le sezioni olomorfe di $\Lambda^{p,0}(X)$ le p -*forme olomorfe* su U .

Se z^1, \dots, z^n sono coordinate locali, posto

$$dz^I = dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}, \quad d\bar{z}^J = d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

, $I = (i_1, \dots, i_p)$, $J = (j_1, \dots, j_q)$, una (p, q) -forma differenziale è data localmente da

$$\sum_{I,J} a_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J$$

con le a_{IJ} differenziabili e una p -forma olomorfa da $\sum_I a_I dz^I$ con le a_I olomorfe.

Su una varietà complessa X , accanto alle sottovarietà complesse si considerano i *sottoinsiemi analitici*, sottoinsiemi Y localmente definiti come luoghi di zeri $\{g_1 = \dots = g_n = 0\}$ di funzioni olomorfe. Si dimostra che su Y esiste un sottoinsieme analitico chiuso S , proprio (in particolare $S = \emptyset$) con la proprietà che $Y \setminus S$ è una varietà complessa (eventualmente non connessa). S è l'insieme dei *punti singolari* di Y . Se $Y \setminus S$ è connessa, Y si dice *irriducibile* (nel caso contrario *riducibile*). La *dimensione* (complessa) di Y è, per definizione, la dimensione della varietà complessa $Y \setminus S$. Mentre su ogni varietà differenziabile di dimensione 2, orientabile, esistono sempre strutture complesse, ci sono esempi di varietà differenziabili, topologicamente molto semplici (diffeomorfe alla palla di R^{2n}), che non ammettono strutture complesse (Calabi, Eckmann).

Strutture più deboli delle strutture complesse sono le strutture *quasi complesse*, che si introducono su una varietà differenziabile X di dimensione $2n$ assegnando per ogni

$x \in X$ una struttura complessa su $T_x(X)$ (cioè un endomorfismo $J_x \in \text{End}(T_x(X))$) tale che $J_x^2 = -id$) che dipenda differenziabilmente da x . Ciò equivale a assegnare una sezione differenziabile, J , del fibrato $\text{End}(T(X))$ tale che $J^2 = -id$. Si constata subito che X è, in tal caso, orientabile. Le sezioni differenziabili del fibrato $\Lambda^{p,q}(X)$ sono per definizione le (p, q) -forme. La struttura J si dice *integrabile* se, per ogni (p, q) -forma ω , $d\omega$ ha solo componenti dei tipi $(p+1, q)$ e $(p, q+1)$. Un teorema dimostrato da Newlander e Nirenberg nel '57 afferma che una struttura quasi complessa è integrabile se e solo se è indotta da una struttura complessa.

Naturalmente la formalizzazione di questi concetti viene più tardi, nell'ambito dell'opera di sistemazione che si realizza nella geometria e nella topologia differenziale.

Gli spazi complessi hanno per modelli i sottoinsiemi analitici. Le prime formulazioni della teoria, che segna la nascita della Geometria Analitica, risalgono agli inizi degli anni '50, nell'ambito della teoria degli spazi anellati. L'idea di base è quella di considerare gli enti geometrici come coppie (X, \mathcal{A}) , dove X è uno spazio topologico e \mathcal{A} un "fascio" di funzioni su X . La scelta del fascio \mathcal{A} determina il tipo di geometria che si vuole studiare su X . Questa impostazione, che risulterà decisiva per lo sviluppo non solo della Geometria Analitica, ma anche della Geometria Algebrica, si avvale in modo sistematico sia dei risultati ottenuti in Algebra commutativa (a partire dalla fondamentale memoria di Krull del 1938), sia delle tecniche coomologiche (lo strumento idoneo a collegare proprietà di natura locale con proprietà di natura globale).

I fondamenti della teoria dei fasci e della coomologia a valori in un fascio e alcuni teoremi cardine sono stati posti nel 1946 da Leray. Dal momento che essi segnano un'autentica rivoluzione nei metodi dell'Analisi Complessa, ne richiamiamo almeno i tratti essenziali.

4.2. Fasci e coomologia. . Consideriamo uno spazio topologico X , paracompatto, e supponiamo assegnati, per ogni aperto $U \subset X$, un insieme $\mathcal{F}(U)$ e, per ogni aperto

$V \subset U$, un'applicazione $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, detta *restrizione*, in modo che:

- 1) se $W \subset V \subset U$ sono aperti, $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$;
- 2) se $\{U_j\}_{j \in I}$ è una famiglia di aperti, $U = \bigcup_{j \in I} U_j$ e $s_1, s_2 \in \mathcal{F}(U)$ sono tali che $\rho_{U_j}^U s_1 = \rho_{U_j}^U s_2$, per ogni $j \in I$, allora $s_1 = s_2$;
- 3) se $s_j \in \mathcal{F}(U_j)$ e per ogni $i, j \in I$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si ha $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i} s_i = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j} s_j$ allora esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $\rho_{U_j}^U s = s_j$ per ogni $j \in I$.

Il dato $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U), \rho_V^U\}$, al variare degli aperti U, V prende il nome di *fascio (di insiemi)* su X . Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono le *sezioni* di \mathcal{F} su U . Se vale solo la condizione

1) si parla di *prefascio*.

Le condizioni 1), 2), 3) consentono di trattare le sezioni di \mathcal{F} come "funzioni" su X . Se, nella definizione precedente, gli $\mathcal{F}(U)$ sono gruppi abeliani, anelli... e le applicazioni ρ_V^U sono omomorfismi, \mathcal{F} si dice un *fascio di gruppi abeliani, di anelli...* Per comodità, si utilizza la notazione $s|_V$, in luogo di $\rho_V^U s$, per indicare la restrizione a V di una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$.

Diciamo che due sezioni s, s' di \mathcal{F} nell'intorno di $x \in X$ hanno lo *stesso germe* in x , e allora si scrive $s_x = s'_x$, se esse coincidono su un intorno di x ; $s_x = s'_x$ è una relazione d'equivalenza \sim sull'insieme $\Sigma_x(\mathcal{F})$ delle sezioni di \mathcal{F} su un intorno di x e lo spazio quoziente $\mathcal{F}_x = \Sigma_x(\mathcal{F}) / \sim$ viene definito la *spiga* di \mathcal{F} in x . Se \mathcal{F} è un fascio di gruppi abeliani, di anelli ..., per ogni x , \mathcal{F}_x è un gruppo abeliano, un anello

Alcuni esempi

- a) il *fascio costante* G , G gruppo abeliano, definito da $G(U) = G$; il fascio $\mathcal{F}(X, G)$ dei *germi di funzioni* a valori in G definito da $\mathcal{F}(X, G)(U) = \{f : U \rightarrow G\}$ (le restrizioni sono quelle naturali);

- b) il fascio \mathcal{C}_X^0 dei *germi di funzioni continue* a valori complessi definito da $\mathcal{C}_X^0(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ continua}\}$;
- c) il fascio $\mathcal{E}_X^r, r \geq 0$ dei *germi di r -forme differenziali* su una varietà differenziabile X ; il fascio $\mathcal{E}_X^{p,q}$ dei germi di (p, q) -forme differenziali su una varietà complessa X ;
- d) il fascio \mathcal{O}_X dei *germi di funzioni olomorfe* su una varietà complessa X e il fascio \mathcal{I}_Y degli ideali di un sottoinsieme analitico Y di X definiti rispettivamente da $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(U)$,

$$U \rightsquigarrow \mathcal{I}_Y(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) : f_{U \cap Y} = 0\};$$

$\mathcal{O}_{X,x}$ è l'anello locale delle serie convergenti $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$ e $\mathcal{I}_{Y,x}$ un ideale di $\mathcal{O}_{X,x}$;

- e) il fascio $\mathcal{O}_X(E)$ dei *germi di sezioni olomorfe* di un fibrato vettoriale olomorfo E su una varietà complessa X .
- f) si considerino \mathbb{C}^n con la *topologia di Zariski* (cioè la topologia per cui i chiusi sono gli insiemi algebrici di \mathbb{C}^n) e, per ogni aperto U , l'anello $\mathcal{O}'(U)$ delle funzioni razionali P/Q per cui $Q(z) \neq 0$; si definisce così un fascio \mathcal{O}' , il fascio dei *germi di funzioni regolari* su \mathbb{C}^n . Se A è un sottoinsieme algebrico si definiscono il fascio degli *ideali* di A , \mathcal{I}'_A , e il fascio *strutturale* \mathcal{O}'_A .

L'insieme $E(\mathcal{F}) = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ delle spighe di \mathcal{F} è dotato di una proiezione naturale $p : E(\mathcal{F}) \rightarrow X, (s_x \mapsto x)$ e di una topologia così definita: se $s \in \mathcal{F}(U)$ poniamo $E(\mathcal{F})(s, U) = \{s_x : x \in U\}$. Al variare dell'aperto U e di s in $\mathcal{F}(U)$ si ottiene una base per una topologia su $E(\mathcal{F})$ per cui p è un omeomorfismo locale. In generale questa topologia non

è di Hausdorff (lo è, ad esempio, per il fascio \mathcal{O}_X). La terna $(E(\mathcal{F}), p, X)$ si chiama il *dominio su X* associato a \mathcal{F} .

Indicato con $\tilde{\mathcal{F}}(U)$ l'insieme $\Gamma(U, E(\mathcal{F}))$ delle *sezioni* di $E(\mathcal{F})$ su U (cioè l'insieme delle applicazioni continue $s : U \rightarrow E(\mathcal{F})$ tali che $p \circ s = id_U$), si constata facilmente che l'applicazione naturale $j_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(U)$ definita da $s \mapsto \bigcup_{x \in U} s_x$ è biunivoca (un isomorfismo se le spighe \mathcal{F}_x sono gruppi abeliani,...); in particolare $U \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{F}}(U)$ definisce un fascio $\tilde{\mathcal{F}}$, il *fascio dei germi di sezioni* di $E(\mathcal{F})$.

Se \mathcal{F} è solo un prefascio, si costruisce ancora il fascio $\tilde{\mathcal{F}}$, il fascio *generato* da \mathcal{F} , ma le applicazioni j_U non sono biunivoche. Viceversa, ad ogni dominio (E, p, X) si associa un fascio, quello dei germi di sezioni di E . Può succedere che le spighe \mathcal{F}_x di un fascio abbiano, rispetto agli $\mathcal{F}(U)$, proprietà algebriche ulteriori, ad esempio siano anelli locali (come nel caso di $\mathcal{C}_X^0, \mathcal{O}_X$): la costruzione giustifica la locuzione secondo cui \mathcal{F} è un fascio di *anelli locali*.

Sia \mathcal{A} un fascio di anelli (commutativi con unità) su X e \mathcal{F} un fascio su X . \mathcal{F} si dice un *\mathcal{A} -modulo* se, per ogni aperto U , $\mathcal{F}(U)$ è un $\mathcal{A}(U)$ -modulo (e allora le spighe \mathcal{F}_x sono \mathcal{A}_x -moduli). Un *sotto \mathcal{A} -modulo* di \mathcal{F} è un \mathcal{A} -modulo \mathcal{G} tale che $\mathcal{G}(U)$ sia un sotto $\mathcal{A}(U)$ -modulo di $\mathcal{F}(U)$. Nell'esempio d), \mathcal{I}_Y è un sotto \mathcal{O}_X -modulo di \mathcal{O}_X . In particolare, un fascio di gruppi abeliani è un fascio di \mathbb{Z} -moduli. D'ora in avanti considereremo fasci di \mathcal{A} -moduli a cui si possono estendere, con alcune cautele, le operazioni usuali dell'algebra commutativa.

Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono \mathcal{A} -moduli, un *morfismo* $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste nel dare degli omomorfismi di $\mathcal{A}(U)$ -moduli $\phi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$, $U \subset X$ aperto, che commutino con le restrizioni: se $V \subset U$ è un aperto, $s \in \mathcal{F}(U)$ allora $\phi_U(s)|_V = \phi_V(s|_V)$. Il *nucleo* $\text{Ker } \phi$ e l'*immagine* $\text{Im } \phi$ di ϕ sono allora definiti ponendo $\text{Ker } \phi(U) = \text{Ker } \phi_U$ e $\text{Im } \phi(U) = \text{Im } \phi_U$. Un morfismo $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ individua, per ogni $x \in X$, un omomorfismo $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$; ϕ si dice *iniettivo*, rispettivamente *suriettivo*, se $\text{Ker } \phi_x = 0$ rispettivamente $\text{Im } \phi_x = \mathcal{G}_x$, per ogni $x \in X$; se

ϕ_x è un isomorfismo per ogni x , ϕ si dice un *isomorfismo* di \mathcal{A} -moduli. Mentre si verifica subito che ϕ è iniettivo se e solo se ϕ_U è iniettivo per ogni U , la suriettività di ϕ non implica la suriettività di ϕ_U per ogni U . Come esempio si considerino $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ e il fascio \mathcal{O}^* degli *elementi invertibili di \mathcal{O}* (i.e. \mathcal{O}_z^* è il gruppo degli elementi invertibili di \mathcal{O}_z) e il morfismo suriettivo $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ dato da $f \mapsto \exp 2\pi i f$.

La definizione di \mathcal{A} -modulo quoziente \mathcal{F}/\mathcal{G} è meno immediata. Si considera il prefascio $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$: \mathcal{F}/\mathcal{G} è per definizione il fascio associato al dominio $(E(\mathcal{Q}), p, X)$ su X . In particolare $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$. Con considerazioni analoghe si definiscono la *somma diretta* $\mathcal{F}' \oplus \mathcal{F}''$ e il *prodotto tensoriale* $\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}''$ di \mathcal{A} -moduli. Posto $\mathcal{A}^r = \mathcal{A} \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}$ (r volte), un \mathcal{A} -modulo L si dice *localmente libero* se è localmente isomorfo a \mathcal{A}^r : il fascio $\mathcal{O}_X(E)$ dell'esempio e) è localmente libero ed in questo modo si ottiene qualsiasi fascio di \mathcal{O}_X -moduli localmente libero. Il prodotto tensoriale di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(1)$ per se stesso k volte è localmente libero e si designa con $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(k)$; le sue sezioni globali sono in corrispondenza biunivoca con i polinomi omogenei di grado k nelle coordinate z_0, \dots, z_n .

Spesso ci si serve di una successione $\{\mathcal{F}_i\}$ di \mathcal{A} -moduli e di morfismi $\phi_j : \mathcal{F}_j \rightarrow \mathcal{F}_{j+1}$ per descrivere una situazione geometrica. La notazione universalmente usata è

$$(22) \quad (11) \quad \cdots \rightarrow \mathcal{F}_{j-1} \xrightarrow{\phi_{j-1}} \mathcal{F}_j \xrightarrow{\phi_j} \mathcal{F}_{j+1} \rightarrow \cdots .$$

La (22) si chiama un *complesso (di fasci)* se $\text{Im } \phi_{j-1} \subset \text{Ker } \phi_j$ per ogni j , e una *successione esatta*, se vale l'uguaglianza $\text{Im } \phi_{j-1} = \text{Ker } \phi_j$.

Il linguaggio e la tecnica delle successioni esatte, che traggono origine dalla Topologia Algebrica, si usano anche in altri contesti (ad esempio in Algebra Commutativa, nella Teoria dei gruppi, ...). La loro codificazione è avvenuta per opera dell'Algebra Omologica. Osserviamo che, anche se la è esatta, la successione di $\mathcal{A}(U)$ -moduli corrispondente ad un aperto $U \subset X$ è, in generale, solo un "complesso di $\mathcal{A}(U)$ -moduli". Descrivere l'ostruzione all'esattezza di questo complesso è compito della coomologia.

Tra le successioni esatte, importanti si rivelano le *risoluzioni* di un fascio \mathcal{F}

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{F}_k \rightarrow \cdots$$

e le *successioni esatte corte*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0.$$

Due risoluzioni sono celebri: quella di De Rham del fascio costante \mathbb{R} su una varietà differenziabile X di dimensione n

$$(23) \quad 0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_X^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_X^n \rightarrow 0$$

e quella di Dolbeault del fascio Ω_X^p dei germi di p -forme olomorfe su una varietà complessa X di dimensione n

$$(24) \quad 0 \rightarrow \Omega_X^p \rightarrow \mathcal{E}_X^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}_X^{n,0} \rightarrow 0.$$

L'esattezza delle due successioni deriva rispettivamente dal Lemma di Poincaré sulla risolubilità locale dell'equazione $du = v$, dove v è una r -forma d -chiusa e dal Lemma di Dolbeault-Grothendieck sulla risolubilità locale dell'equazione $\bar{\partial}u = f$, dove f è una (p, q) -forma $\bar{\partial}$ -chiusa. La coomologia di uno spazio paracompatto X a valori in un fascio \mathcal{F} di gruppi abeliani può essere introdotta usando particolari risoluzioni o in un modo ispirato dalla teoria dell'omologia simpliciale. Nel primo caso si utilizza l'esistenza di risoluzioni con "fasci fiacchi": un fascio \mathcal{F} si dice *fiacco* se, per ogni aperto U , $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ è un omomorfismo suriettivo. Ogni fascio \mathcal{F} (di gruppi abeliani) ha una risoluzione

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \cdots$$

con fasci fiacchi e, posto $\mathcal{F}_1 = 0$, per ogni $q \neq 0$ i gruppi

$$\frac{\text{Ker} : \mathcal{F}_q(X) \rightarrow \mathcal{F}_{q+1}(X)}{\text{Im} : \mathcal{F}_{q-1}(X) \rightarrow \mathcal{F}_q(X)}$$

non dipendono dalla particolare risoluzione con fasci fiacchi. Essi si designano rispettivamente con $H^q(X, \mathcal{F})$ e si chiamano i *gruppi di coomologia* di X a valori in \mathcal{F} e i loro

elementi, *classi di coomologia*. Per definizione si ha $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, e, se \mathcal{F} è fiacco, $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 1$. Un fascio \mathcal{F} si dice *aciclico* se $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ per $q \geq 1$.

Fondamentali, per il calcolo della coomologia, risultano i teoremi

a) ogni successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

dà luogo ad una successione esatta di gruppi di coomologia

$$\cdots \rightarrow H^j(X, \mathcal{F}') \rightarrow H^j(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^j(X, \mathcal{F}'') \rightarrow H^{j+1}(X, \mathcal{F}') \rightarrow \cdots,$$

in particolare, il gruppo $H^1(X, \mathcal{F}')$ descrive quanto il gruppo $\mathcal{F}''(X)$ delle sezioni globali del fascio quoziente $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ differisce dal gruppo quoziente $\mathcal{F}(X)/\mathcal{F}'(X)$;

b) per il calcolo dei gruppi $H^q(X, \mathcal{F})$ ci si può servire di una qualunque *risoluzione aciclica* di \mathcal{F} (fatta, cioè, con fasci aciclici) (Leray).

Nel secondo caso, si fa ricorso alla nozione di coomologia di un ricoprimento. Si considerano un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ e, per ogni fissato intero $q \geq 0$, l'insieme delle $q + 1$ -ple (j_0, \dots, j_q) di indici di I per cui $U_{j_0 \dots j_q} = U_{j_0} \cap \cdots \cap U_{j_q} \neq \emptyset$. Il gruppo abeliano

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(j_0, \dots, j_q)} \mathcal{F}(U_{j_0 \dots j_q})$$

costituisce il *gruppo delle q -cocatene di \mathcal{U} a valori in \mathcal{F}* . Si definisce un omomorfismo

$\delta_q : \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ponendo per $c = \{s_{j_0 \dots j_q}\} \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$,

$$(\delta_q c)_{j_0 \dots j_{q+1}} = \sum_{r=0}^{q+1} (-1)^{r+1} s_{j_0 \dots j_{r-1} j_{r+1} \dots j_{q+1}};$$

δ_q si chiama l'*operatore cobordo* e verifica, per ogni $q \geq 0$, $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$. $\mathcal{Z}_q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker} \delta_q$

è il gruppo dei *q -cocicli (di \mathcal{U} a valori in \mathcal{F})* e $\mathcal{B}_q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Im} \delta_{q-1}$ quello dei *q -cobordi*, e si

pone $\mathcal{B}_0 = 0$. Il gruppo quoziente

$$H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{Z}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \mathcal{B}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

è il q -mo gruppo di coomologia di \mathcal{U} a valori in \mathcal{F} . In particolare, $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$.

Si pone

$$H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{q \geq 0} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

Per ottenere dei gruppi che dipendano solo da X e da \mathcal{F} si osserva che nell'insieme dei ricoprimenti aperti di X , parzialmente ordinato mediante la relazione di raffinamento \succ , il sottoinsieme di quelli localmente finiti è filtrante e che, se $\mathcal{U} \succ \mathcal{V}$, c'è un omomorfismo naturale $H^*(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \rightarrow H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Questi due fatti permettono di "passare al limite" sull'insieme dei ricoprimenti aperti e di definire, per ogni $q \geq 0$, il gruppo

$$\check{H}^q(X, \mathcal{F}) = \lim_{\mathcal{U}} H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

il q -mo gruppo di coomologia di Čech di X a valori in \mathcal{F} .

Vale così il teorema: i gruppi $\check{H}^*(X, \mathcal{F})$ e $H^*(X, \mathcal{F})$ sono isomorfi. È opportuno osservare che la nullità di $H^q(X, \mathcal{F})$ per un certo $q > 0$ non implica quella di un dato $H^q(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Ciò è vero per $q = 1$ perché $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è, per ogni \mathcal{U} , un sottogruppo di $H^1(X, \mathcal{F})$.

Alla relazione tra $H^*(X, \mathcal{F})$ e $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ provvede il risultato chiave di Leray: se \mathcal{U} ha la proprietà che $H^q(U_{j_0 \dots j_p}, \mathcal{F}) = 0$, per ogni $p \geq 0$ e $q \geq 1$, allora i gruppi $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $H^*(X, \mathcal{F})$ sono isomorfi. Infine, per i fasci costanti, la coomologia di Čech coincide con la coomologia singolare.

Usando la partizione dell'unità si vede facilmente che se X è una varietà differenziabile (o complessa) i fasci \mathcal{E}_X^r (rispettivamente $\mathcal{E}_X^{p,q}$) sono aciclici. Ne segue che le risoluzioni di De Rham e di Dolbeault permettono, nei rispettivi casi, il calcolo della coomologia a valori in \mathbb{R} oppure \mathbb{C} e a valori in Ω_X^p , $p \geq 0$.

Più in generale, si può dare la nozione di coomologia di uno spazio X a valori in un fascio \mathcal{F} e a *supporti* in una famiglia Φ di chiusi di X per la quale si usa la notazione

$H_{\Phi}^*(X, \mathcal{F})$. Risultano importanti in Analisi Complessa e Geometria Analitica, per i teoremi di estensione di "oggetti analitici", i casi in cui Φ sia la famiglia dei compatti di uno spazio complesso X e $\Phi = \{A\}$ dove A è un sottoinsieme analitico chiuso di X .

4.3. Gli spazi complessi e i teoremi A e B. Uno *spazio anellato* è una coppia (X, \mathcal{A}_X) dove X è uno spazio topologico, \mathcal{A}_X un fascio di anelli locali con unità: \mathcal{A}_X si chiama il *fascio strutturale*. Ogni aperto U di X è anche uno spazio anellato con fascio strutturale $\mathcal{A}_U = \mathcal{A}_X|_U$, la *restrizione* di \mathcal{A}_X a U . Un *morfismo* $(X, \mathcal{A}_X) \rightarrow (X', \mathcal{A}_{X'})$ di spazi anellati è una coppia $F = (f, \phi)$ dove $f : X \rightarrow X'$ è un'applicazione continua e ϕ un morfismo $\mathcal{A}_{X'} \rightarrow f_*\mathcal{A}_X$: $f_*\mathcal{A}_X$ è il fascio su X' definito da $f_*\mathcal{A}_X(U') = \mathcal{A}_X(f^{-1}(U'))$. F si dice un *isomorfismo* se f è un omeomorfismo e ϕ_0 un isomorfismo.

Usualmente si indicano con lo stesso simbolo uno spazio anellato e lo spazio topologico soggiacente, un morfismo di spazi anellati e l'applicazione tra gli spazi topologici soggiacenti. Se $f : X \rightarrow X'$ è un morfismo di spazi anellati e \mathcal{F} è un \mathcal{A}_X -modulo, per ogni $q \geq 0$, $U \rightsquigarrow H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$ è un prefascio di \mathcal{A}'_X -moduli il cui fascio generato si indica con $R^q f_*(\mathcal{F})$: $R^q f_*(\mathcal{F})$ chiama la *q-ma immagine diretta* di \mathcal{F} (mediante f).

Spazi anellati sono, ad esempio: le varietà differenziabili X col fascio \mathcal{E}_X^0 dei germi di funzioni C^∞ ; le varietà complesse X col fascio \mathcal{O}_X e, più generalmente, i sottoinsiemi analitici Y di aperti U di \mathbb{C}^n col fascio strutturale $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_Y$: \mathcal{O}_Y è un fascio nullo su $U \setminus Y$ le cui sezioni determinano funzioni continue su (aperti di) Y , olomorfe nei punti regolari. Per definizione \mathcal{O}_Y è il fascio dei *germi di funzioni olomorfe su Y* . Un altro importante esempio di spazio anellato si ottiene prendendo un sottoinsieme algebrico A di \mathbb{C}^n col fascio strutturale \mathcal{O}'_A . A volte occorre considerare come fascio strutturale su un insieme analitico Y il fascio $\mathcal{O}'_Y = \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_Y^r$, $r > 1$: in tal caso si dice che \mathcal{O}'_Y ha elementi *nilpotenti* (i germi di \mathcal{I}_Y).

Uno *spazio complesso* è uno spazio anellato (X, \mathcal{O}_X) localmente isomorfo a un insieme

analitico (Y, \mathcal{O}_Y) : in particolare \mathcal{O}_X è un fascio di anelli locali noetheriani.

La nozione di spazio complesso è stata enunciata per la prima volta in questa forma da Cartan e Serre portando a conclusione idee presenti anche in lavori di Oka, Benke, Stein. Se si considerano come modelli locali gli insiemi algebrici si ottiene la nozione di *varietà algebrica* sul corpo \mathbb{C} . Immediata è l'estensione agli spazi complessi delle nozioni algebriche di natura locale date per gli insiemi analitici (punto singolare, regolare, locale irreducibilità ...) così come la definizione di *sottospazio complesso*.

Uno spazio complesso (X, \mathcal{O}_X) si dice *di Stein* se l'algebra $\mathcal{O}(X)$ delle funzioni olo-morfe su X separa i punti e X è $\mathcal{O}(X)$ -convesso. I sottospazi complessi, chiusi, di uno spazio di Stein sono spazi di Stein.

Insieme col fascio strutturale \mathcal{O}_X rivestono notevole importanza il fascio \mathcal{O}_X^* , il fascio \mathcal{M}_X , che ha per spiga l'anello totale dei quozienti di $\mathcal{O}_{X,x}$ e i fasci $\mathcal{P}_X = \mathcal{M}_X/\mathcal{O}_X$, $\mathcal{D}_X = \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. \mathcal{M}_X è il fascio dei germi di *funzioni meromorfe*, \mathcal{P}_X quello dei germi di *parti principali*, \mathcal{D}_X il fascio dei germi di *divisori*. Questi fasci sono collegati tra loro mediante le tre successioni esatte

$$(25) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$$

$$(26) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{P}_X \rightarrow 0$$

$$(27) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{M}_X^* \rightarrow \mathcal{D}_X \rightarrow 0$$

dove \exp è l'omomorfismo $f \rightarrow 2\pi i$. La suriettività degli omomorfismi

$$(28) \quad \mathcal{M}_X(X) \rightarrow \mathcal{P}_X(X) \text{ e } \mathcal{M}_X^*(X) \rightarrow \mathcal{D}_X(X)$$

rappresenta l'equivalente, per gli spazi complessi, dei problemi di Cousin per le funzioni olo-morfe di una variabile.

Le proprietà di finitezza e quella di coerenza che ora evidenziamo, permettono di passare da proprietà puntuali a proprietà valide su un intorno e sono stabili rispetto alle usuali operazioni di somma diretta finita, prodotto tensoriale, quoziente.

Un \mathcal{O}_X -modulo \mathcal{F} si dice di *tipo finito* se per ogni $x \in X$ esistono sezioni s_1, \dots, s_k di \mathcal{F} , su un intorno di x , i cui germi generano (la spiga di) \mathcal{F} nell'intorno di x . Se \mathcal{F} è di tipo finito e s_1, \dots, s_k generano \mathcal{F}_x , allora esse generano \mathcal{F} nell'intorno di x .

Siano poi $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sezioni di \mathcal{F} sull'aperto U . Il *fascio delle relazioni* tra $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ è il fascio $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ su U la cui spiga è

$$\mathcal{R}_x = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathcal{O}_{X,x}^r : \sum_{j=1}^r \lambda_j \sigma_{j,x} = 0\}.$$

Un \mathcal{O}_X -modulo \mathcal{F} si dice *coerente* se è di tipo finito e se il fascio delle relazioni tra un numero finito di sezioni di \mathcal{F} è di tipo finito. Se \mathcal{F} è un fascio coerente e s_1, \dots, s_k sono sezioni su U , il sottofascio $\mathcal{O}_U s_1 + \dots + \mathcal{O}_U s_k$, generato da s_1, \dots, s_k , è coerente; se, in una successione esatta corta di fasci coerenti, due termini sono coerenti anche il terzo lo è.

Il fascio \mathcal{O}_X di una varietà complessa X è coerente: è il fondamentale risultato dimostrato da Oka nel '50 su cui poggia tutta la teoria dei fasci coerenti. Contemporaneamente Cartan, a completamento del teorema di Oka, dimostrava che il fascio degli ideali di un insieme analitico è coerente da cui segue che il fascio strutturale di uno spazio complesso è coerente.

I due teoremi che seguono, basilari per la teoria degli spazi complessi, nella letteratura matematica sono significativamente chiamati "teoremi A e B":

Teorema A. Siano X uno spazio di Stein e \mathcal{F} un fascio coerente su X . Per ogni compatto $K \subset X$ esistono sezioni $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{F}(X)$, $n = n(K, \mathcal{F})$, che generano \mathcal{F} su K .

Teorema B. Siano X uno spazio di Stein e \mathcal{F} un fascio coerente su X . I gruppi di

coomologia $H^q(X, \mathcal{F})$ sono nulli per $q \geq 1$.

I teoremi A e B caratterizzano gli spazi di Stein. La loro dimostrazione completa e i fondamenti della teoria degli spazi complessi, sono apparsi per la prima volta nelle note del Séminaire Cartan svoltosi a Parigi nel 1951-52.

Come applicazione ad esempio, dalle successioni esatte (25), (26), (27) otteniamo che ogni sottoinsieme analitico chiuso Y di uno spazio di Stein X è luogo di zeri $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$, con f_1, \dots, f_k olomorfe su X e che ogni funzione olomorfa su Y è restrizione di una funzione olomorfa su X ; che i problemi di Cousin sono risolubili e, in particolare, che ogni funzione meromorfa f su X è quoziente h/g con h, g olomorfe (in generale non "localmente prime tra loro").

Per lo spazio proiettivo complesso valgono due teoremi analoghi dimostrati da Serre nel '55.

Se \mathcal{F} è un fascio coerente su $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ si consideri il fascio $\mathcal{F}(k)$; allora esiste $k_0 = k_0(\mathcal{F})$ tale che, per ogni $k \geq k_0$,

$A')$ $\mathcal{F}(k)$ sia generato da un numero finito di sezioni globali;

$B')$ $H^q(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(k)) = 0$ per $q \geq 1$.

Osserviamo che, per ogni spazio complesso compatto X e ogni fascio coerente \mathcal{F} , i gruppi $H^q(X, \mathcal{F})$, hanno dimensione finita (Cartan, Serre).

4.4. Problematiche dominanti e risultati. I metodi elaborati nell'ambito della teoria dei fasci coerenti e della coomologia, si sono rivelati uno strumento potente e hanno permesso di tradurre e risolvere alcuni fondamentali problemi della teoria delle funzioni olomorfe sugli spazi complessi e hanno decisamente influenzando così la ricerca per oltre un decennio.

a) Teoria analitica e geometrica delle funzioni sugli spazi di Stein.

Oltre ai lavori ispirati dal problema di Levi (cfr. 3.1) menzioniamo il teorema di Bishop dell'esistenza dell' "involuppo d'olomorfia" per i domini di Riemann (ogni dominio di Riemann X su \mathbb{C}^n si immerge come aperto di una varietà di Stein X , in modo che le funzioni olomorfe su X si estendano olomorficamente su X); il teorema d'immersione di Narasimhan (ogni spazio di Stein X , localmente immergibile in \mathbb{C}^N , si immerge come sottoinsieme analitico chiuso di \mathbb{C}^{n+N} , $n = \dim_{\mathbb{C}} X$); il teorema di Grauert sui fibrati olomorfi (su uno spazio di Stein due fibrati olomorfi sono equivalenti se e solo se lo sono topologicamente; in particolare un fibrato topologico ha, al massimo, una struttura di fibrato olomorfo).

b) Teoria locale ed estensione di oggetti analitici.

Per la teoria locale ricordiamo il teorema di Loiasiewicz di triangolabilità locale dei sottinsiemi analitici; il teorema di Malgrange sulla piatezza dell'anello dei germi di funzioni differenziabili sull'anello dei germi di funzioni olomorfe e, anche se è maturato in un contesto diverso, l'elegante teorema di M. Artin sull'esistenza di soluzioni di un sistema di equazioni analitiche $F_1 = \dots = F_m = 0$ che ha costituito un risultato chiave per la teoria degli spazi algebrici e la teoria delle deformazioni.

In Analisi Complessa il problema generale dell'estensione consiste nel dare condizioni affinché un oggetto analitico (una funzione olomorfa, un morfismo, un sottoinsieme analitico, un fascio coerente ecc...), definito su un aperto U di uno spazio complesso X , si estenda con un oggetto analitico definito su X . Di solito $X \setminus U$ è un compatto, un sottoinsieme analitico o un chiuso con proprietà di "convessità". All'origine della problematica sono il teorema di Hartogs di estensione delle funzioni olomorfe e uno di Levi per le funzioni

meromorfe. Per i sottoinsiemi analitici il primo risultato, che risale al 1935, è un teorema di Thullen sull'estensione delle curve complesse di \mathbb{C}^2 , che è stato successivamente generalizzato ai sottoinsiemi analitici da Remmert e Stein.

c) Spazi complessi compatti.

Tralasciando le varietà complesse, è almeno il caso di accennare ai teoremi di Serre, di "confronto" tra la Geometria Algebrica e la Geometria Analitica, ai risultati di Siegel, Thimm, Remmert, riguardanti il corpo $\mathcal{M}(X)$ delle funzioni meromorfe su uno spazio complesso compatto X , ai teoremi di Grauert d'immersione proiettiva e di esistenza delle deformazioni, al contributo di Douady sul problema dei moduli per i sottospazi complessi compatti di un spazio complesso, ai lavori di Andreotti e Norguet sullo spazio dei cicli, e infine ai lavori di Moisëzon sugli spazi complessi compatti irriducibili X per cui $\text{trasc } \mathcal{M}(X)/\mathbb{C} = \dim_{\mathbb{C}} X$ (che da lui prendono il nome).

d) Morfismi ed applicazioni meromorfe di spazi complessi.

I contributi alla teoria delle applicazioni meromorfe sviluppano e generalizzano quella classica delle applicazioni razionali tra varietà algebriche. Sui morfismi propri si devono ricordare tre risultati basilari: il teorema di Remmert, secondo cui l'immagine di un sottoinsieme analitico mediante un morfismo proprio è un sottoinsieme analitico, il teorema di finitezza di Grauert e Remmert, che generalizza agli spazi $X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ i teoremi di Serre e il teorema di Grauert sulla coerenza delle immagini dirette $\mathcal{R}^q f_*(\mathcal{F})$. Nell'ambito della problematica sui morfismi propri occupa un ruolo rilevante il capitolo delle "modificazioni".

Un morfismo proprio di spazi complessi $f : X' \rightarrow X$ si dice una *modificazione* se esistono due sottoinsiemi analitici $Y' \subset X'$, $Y \subset X$ tali che f sia un isomorfismo tra $X' \setminus Y'$ e $X \setminus Y$; Y' in tal caso si dice che Y' è *contraibile* in X' e che (Y, X) è una

contrazione di (Y', X') .

Le modificazioni sono un tema classico della Geometria algebrica dove furono introdotte nel 1901 da Castelnuovo e Enriques con lo studio dei modelli minimi delle superficie algebriche. Uno dei problemi centrali della teoria è quello di stabilire le condizioni sufficienti perché un sottospazio complesso Y' di X' sia contraibile. A tale problema risponde il criterio di "contraibilità a un punto" ($Y = \{y\}$) di Grauert, che interpreta la condizione di Castelnuovo ed Enriques in termini di *negatività debole* di un fibrato ed è alla base dei lavori successivi.

Ricordiamo infine il celebre teorema di Hironaka sulla "risoluzione delle singolarità": per ogni spazio complesso X con luogo singolare S esistono una varietà complessa X' e una modificazione $f : X' \rightarrow X$ che è un isomorfismo tra $X' \setminus f^{-1}(S)$ e $X \setminus S$.

e) Teoremi di finitezza per la coomologia degli spazi complessi.

Il tema prende il nome dal lavoro di Andreotti e Grauert che costituisce l'atto di nascita della teoria degli spazi *fortemente q-pseudoconvessi* e degli spazi *fortemente q-pseudoconcavi*, una categoria di spazi intermedi tra gli spazi complessi compatti e gli spazi di Stein. La definizione di questi spazi trae origine da un teorema di Narasimhan che estende, appunto agli spazi complessi, il fondamentale teorema con cui Grauert caratterizza le varietà di Stein mediante le funzioni strettamente p.s.a.. Uno spazio complesso X si dice *fortemente q-pseudoconvesso* se ammette una funzione d'esaustione φ , strettamente *q-plurisubarmonica* fuori di un compatto K . (Per definizione, una funzione su un sottoinsieme analitico di \mathbb{C}^n si dice *strettamente q-plurisubarmonica* se è, localmente, la restrizione di una funzione φ strettamente q-plurisubarmonica i.e. tale che la sua forma di Levi $L(\varphi)(z^0)$ abbia, per ogni z^0 , almeno $n - q + 1$ autovalori positivi.) Se $K = \emptyset$ lo spazio si dice *q-completo*. Nel lavoro di Andreotti e Grauert si dimostrano, per questi spazi, teoremi di finitezza e di nullità per la coomologia a valori in un fascio coerente.

4.5. **Altri aspetti.** Agli sviluppi suaccennati e "dominanti" della teoria, se ne affiancano altri ugualmente importanti come lo studio topologico delle singolarità dei sottoinsiemi analitici, la geometria dei domini classici e la teoria delle funzioni automorfe, i gruppi di trasformazioni olomorfe e le varietà omogenee, le varietà iperboliche, la teoria delle algebre di Banach di funzioni olomorfe. È qui opportuno richiamare tre risultati di rilievo che saranno ripresi e ampiamente sviluppati negli anni '70. Il primo, del '57, con cui Lelong dimostrava come ogni sottoinsieme analitico X di dimensione p di una varietà complessa, mediante l'integrazione sull'insieme $\text{Reg } X$ dei punti regolari di X , determini una corrente $[X]$. È il punto di partenza della teoria delle correnti positive in Analisi Complessa.

Il secondo risultato è un teorema di estensione olomorfa "unilatera" per le funzioni CR su un'ipersuperficie regolare S di \mathbb{C}^2 dimostrato da Hans Lewy nel '56. Egli era venuto a occuparsi di quest'ordine di problemi, spinto dai suoi interessi per la teoria dei sistemi di equazioni differenziali del I ordine, sovradeterminati, di cui l'equazione tangenziale di Cauchy-Riemann gli si era rivelata un test importante.

È opportuno accennare al metodo seguito da Hans Lewy, con cui si ricollegherà il successivo lavoro di Bishop. Supponendo che S sia strettamente pseudoconvessa, per ogni punto $z^0 \in S$ esiste una famiglia $\{D_\epsilon\}$ di "dischi analitici", cioè immagini del disco $\Delta(0, 1)$ mediante applicazioni olomorfe iniettive in $\Delta(0, 1)$ e continue su $\overline{\Delta}(0, 1)$, tali che $\text{bd}D_\epsilon \subset S$, $U = \bigcup_\epsilon D_\epsilon$ sia aperto e U contenga un intorno di z^0 in S . Poiché f è CR , $f|_{\text{bd}D_\epsilon}$ si estende olomorficamente su D_ϵ con \tilde{f}_ϵ e, al variare di ϵ , $\{\tilde{f}_\epsilon\}$ definisce una funzione olomorfa su U che estende f . L'esistenza della famiglia $\{D_\epsilon\}$ deriva dal fatto che localmente S è biolomorfa ad un'ipersuperficie convessa.

Nel suo lavoro del '64, infine, Bishop affronta il tema dell'esistenza di famiglie di dischi analitici: ricordiamo almeno uno dei risultati da lui conseguiti. Siano $\Sigma \subset \mathbb{C}^2$ una superficie differenziabile e z^0 un punto *isolato a tangenza complessa* (cioè $T_{z^0}(\Sigma)$ è una retta complessa e z^0 è isolato nell'insieme dei punti di Σ dotati di questa proprietà).

In un opportuno sistema di coordinate complesse z_1, z_2 , l'equazione locale di Σ diventa $z_2 = z_1^2 + c(z_1^2 + \bar{z}_1^2) + O(|z_1|^3)$ e z^0 si dice *ellittico* se $c < \frac{1}{2}$. Si dimostra, quindi, che esiste una famiglia $\{D_\epsilon\}$ di dischi analitici tali che $bD_\epsilon \subset \Sigma$, $\bigcup_\epsilon bD_\epsilon$ contenga un intorno Σ_0 di z^0 in Σ e $M =: \bigcup_\epsilon D_\epsilon$ sia una ipersuperficie con bordo Σ_0 . Inoltre $M\Sigma_0$ è l'*inviluppo d'olomorfa* di Σ_0 (vale a dire ogni funzione olomorfa su un intorno di Σ_0 si estende olomorficamente su un intorno di M).

Se $\rho = 0$ è un'equazione locale di $\Sigma' = \tilde{\Sigma}_0 \setminus \Sigma_0$, per ogni $z \in \Sigma'$ la forma $L(\rho)(z)$ ristretta alla retta complessa tangente a Σ' in z^0 è nulla. Questa proprietà caratterizza le ipersuperficie "fogliate" con curve complesse che si dicono *Levi piatte*.

5. ANALISI COMPLESSA SULLE VARIETÀ

Su una varietà complessa X di dimensione n , a norma del teorema di Dolbeault (cfr. (24), il calcolo della coomologia a valori in Ω_X^p è ricondotto allo studio dell'equazione $\bar{\partial}u = f$, dove f è una (p, q) -forma C^∞ su X , $\bar{\partial}$ -chiusa. In particolare, come conseguenza del teorema B, sulle varietà l'equazione è sempre risolvibile. Osserviamo anche che tensorizzando la risoluzione di Dolbeault (cfr. (24) di \mathcal{O}_X per un \mathcal{O}_X -modulo \mathcal{F} si ottiene, per il teorema di piattezza di Malgrange una risoluzione di \mathcal{F} con fasci aciclici; pertanto per ogni varietà complessa X e per ogni \mathcal{O}_X -modulo \mathcal{F} , i gruppi di coomologia $H^r(X, \mathcal{F})$ sono nulli per $r > n$.

Lo studio diretto dell'equazione $\bar{\partial}u = f$ con i metodi della teoria degli operatori differenziali, ha permesso di stabilire strette connessioni tra proprietà topologico-differenziali e proprietà inerenti alla struttura complessa. Seguiamolo nei suoi punti essenziali tenendo presente lo scenario che si è venuto delineando: due categorie estreme, quella delle varietà complesse compatte e quella delle varietà di Stein, e le categorie intermedie delle varietà fortemente q -pseudoconvesse e fortemente q -pseudoconcave di Andreotti e Grauert.

5.1. Geometria Kähleriana. Supponiamo X compatta e sia $E \rightarrow X$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango r . Tensorizzando i fasci $\Omega_X^p, \mathcal{E}_X^{p,q}$ per $\mathcal{O}_X(E)$ si ottengono dei fasci che indichiamo rispettivamente con $\Omega_X^p(E), \mathcal{E}_X^{p,q}(E)$ le cui sezioni sono, per definizione, le *'forme a valori in E* . Poiché E è un fibrato olomorfo, l'operatore $\bar{\partial}$ si estende alle (p,q) -forme a valori in E e, dalla risoluzione di Dolbeault per il fascio Ω_X^p , si ottiene, per tensorizzazione, una risoluzione aciclica di $\Omega_X^p(E)$. Indicando con E^* il fibrato duale di E , un primo risultato basilare è il *teorema di dualità* di Serre (1955) che stabilisce l'isomorfismo

$$H^q(X, \Omega_X^p(E)) \simeq H^{n-q}(X, \Omega_X^{n-q}(E^*)).$$

Un altro risultato è costituito dal *teorema di decomposizione* di Kodaira del 1953.

Per inquadrare quest'ultimo teorema sono necessarie alcune considerazioni preliminari. Indicato con $F^{p,q}(X)$ lo spazio delle (p,q) -forme su X introduciamo su assegnando una metrica hermitiana su X ,

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha, \bar{\beta}} dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta$$

e definiamo l'*operatore di Hodge*

$$* : F^{p,q} \rightarrow F^{n-p, n-q}$$

mediante la relazione

$$u \wedge *u = \omega^n / n!$$

$u \in F^{p,q}(X)$, dove ω è la $(1,1)$ -forma

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha, \bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

detta *forma di Kähler* della metrica. Allora

$$(u, v) = \int_X u \wedge *v$$

è un prodotto hermitiano su $F^{p,q}(X)$.

La definizione si può estendere alle forme a valori in un fibrato vettoriale olomorfo E assegnando anche una metrica hermitiana sulle fibre di E . Se E è il fibrato banale $X \times \mathbb{C}^r$ una metrica sulle fibre è semplicemente una forma hermitiana

$$H(z) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n h_{\alpha, \bar{\beta}}(z) \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta$$

su \mathbb{C}^r a coefficienti funzioni C^∞ su X e tale che $H(z) > 0$ per ogni $z \in X$. Nel caso generale si considera un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X tale che $E|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C}^r$ e, per ogni i , si assegna una metrica H_i su U_i con la condizione che, se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, H_i e H_j coincidano su $U_i \cap U_j$. Ogni H_i è determinato da una matrice h_i di funzioni C^∞ e la condizione precedente equivale a $h_j = g_{ij}^t h_i \bar{g}_{ij}$ dove g_{ij} è la matrice del fibrato e g_{ij}^t la sua trasposta. Per $r = 1$, le h_i sono funzioni positive e la condizione è $h_j = |g_{ij}|^2 h_i$ dove $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$.

Un fibrato (vettoriale olomorfo) con una metrica siffatta si dice *hermitiano*. Si verifica facilmente che le $(1, 1)$ -forme locali

$$\eta_j = -\frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log h_j$$

definiscono una $(1, 1)$ -forma globale η , detta *forma di curvatura* di E . Se $r > 1$ la forma di curvatura è una matrice di $(1, 1)$ -forme. L'*aggiunto* di $\bar{\partial}$ è l'operatore $\theta = *\bar{\partial}*$ e il *Laplaciano complesso* è l'operatore $\square = \bar{\partial}\theta + \theta\bar{\partial}$; θ è un operatore $F^{p,q}(X) \rightarrow F^{p,q-1}(X)$, \square è un operatore $F^{p,q}(X) \rightarrow F^{p,q}(X)$, *autoaggiunto* ($(u, \square v) = (\square u, v)$) e ellittico.

Posto $\mathcal{H}^{p,q}(X) = \text{Ker } \square$ dalla teoria degli operatori ellittici si ha che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{p,q} < +\infty$ e vale il teorema di *decomposizione ortogonale* di Kodaira

$$F^{p,q}(X) = \bar{\partial}F^{p,q-1}(X) \oplus \theta F^{p,q+1}(X) \oplus \mathcal{H}^{p,q}.$$

Ne seguono l'isomorfismo $H^q(X, \Omega_X^p(E)) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X)$ e, in particolare, che $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \Omega_X^p(E)) < \infty$. Questo teorema si presenta come l'analogo del teorema di Hodge secondo cui su una varietà riemanniana $H^r(X, \mathbb{C})$ è isomorfo allo spazio delle r -forme armoniche.

Una delle applicazioni principali della teoria di Kodaira riguarda la teoria delle deformazioni. Una *deformazione* di una varietà complessa (connessa) compatta X_0 è un morfismo proprio e suriettivo $\pi : X \rightarrow S$ di varietà complesse, di rango massimo, e tale che $\pi^{-1}(s_0)$ sia biomorfa a X_0 . (Se X_0, S sono spazi complessi, la condizione sul rango si sostituisce con quella che \mathcal{O}_X sia piatto su \mathcal{O}_S .) Una deformazione $\pi : X \rightarrow S$ si dice *localmente completa* se, per ogni altra deformazione $\pi' : X' \rightarrow S'$ di $X_0 = \pi'^{-1}(s'_0)$, esistono un aperto $U' \subset S'$, un morfismo $j : U' \rightarrow S$, $j(s'_0) = s_0$ e un morfismo $f : \pi'^{-1}(U') \rightarrow X$ tali che $\pi \circ f = j \circ \pi'$. Nell'ipotesi che $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(T_0)) = 0$ ($T_0 = T(X_0)$) Kodaira, Spencer e Nirenberg nel '58 hanno dimostrato l'esistenza di una deformazione localmente completa e che inoltre S è una palla B di \mathbb{C}^r , $r = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}(T_0))$. Nel caso generale, cioè quando $H^2(X_0, \mathcal{O}(T_0)) \neq 0$, il teorema di esistenza è stato dimostrato da Kuranishi: in tali condizioni S è un sottoinsieme analitico di B . Per gli spazi complessi compatti con singolarità isolate il teorema di esistenza si deve a Grauert.

Agendo sulle metriche, si possono ottenere informazioni sulla coomologia di X e anche stabilire condizioni di natura geometrico-differenziale sufficienti per la nullità degli spazi $\mathcal{H}^{p,q}(X)$, dati opportuni valori di p e q . Particolarmente significativo è il caso in cui la metrica è *Kähleriana* i.e. $d\omega = 0$; X si dice allora una *varietà Kähleriana*. Le superficie di Riemann, lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con la classica metrica di Fubini-Study e le sue sottovarietà sono esempi di varietà Kähleriane.

Per una varietà Kähleriana si ha $\square = \bar{\square}$ e $2\square = \Delta$, il Laplaciano reale. Dalla prima eguaglianza segue l'isomorfismo $H^q(X, \Omega_X^p) \simeq H^p(X, \Omega_X^q)$, dalla seconda (tenuto conto del teorema di Hodge) l'isomorfismo

$$H^r(X, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=r} H^p(X, \Omega_X^q).$$

Quest'ultimo risultato è di particolare interesse perché mette in relazione la struttura complessa di X con quella topologica. Ad esempio, si può vedere che, per i numeri di

Betti $b_r(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^r(X, \mathbb{C})$ di X , si ha: $b_{2k}(X) \geq 1$ e $b_{2k+1}(X)$ è pari. Le nozioni di connessione, derivazione covariante e curvatura si definiscono in modo analogo a quello della geometria riemanniana. Successivamente si definisce il *tensore di Ricci* $R_{\alpha\bar{\beta}}$ che, nel caso Kähleriano, ha l'espressione $R_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 \log g}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}$ dove $g = \det(g_{\alpha,\bar{\beta}})$.

Mediante il tensore di Ricci e la forma di curvatura η si possono dare condizioni sufficienti per la nullità dei gruppi di coomologia: supponiamo, per semplicità, che X sia Kähleriana e che E sia hermitiano di rango 1. Utilizzando un procedimento di Bochner, si dimostra che, se in ogni punto di X la matrice $(\eta_{\alpha\bar{\beta}} - R_{\beta\bar{\alpha}})$ è (strettamente) positiva, allora $\mathcal{H}^{0,q} = H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) = 0$ per ogni $q \geq 1$.

La forma di curvatura e la $(1,1)$ -forma $-\frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta=1}^n R_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$, associata al tensore di Ricci, assumono un profondo significato geometrico. Consideriamo infatti l'omomorfismo $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ determinato dalla successione esatta di coomologia associata alla successione esatta (12); E individua una classe di $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ e quindi una classe $c(E)$ di $H^2(X, \mathbb{Z})$, detta la *prima classe di Chern* di E . D'altra parte $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ quindi $c(E)$ determina una classe $c_{\mathbb{C}}(E)$ di $H^2(X, \mathbb{C})$: la forma di curvatura η rappresenta $c_{\mathbb{C}}(E)$ nell'isomorfismo di De Rham (cfr. 23). Viceversa, se X è Kähleriana e se $c_{\mathbb{C}}(E)$ è rappresentata da una $(1,1)$ -forma reale η , allora η è la forma di curvatura di una metrica sulle fibre di E . Analogamente si vede che la forma associata al tensore di Ricci rappresenta la classe $-c_{\mathbb{C}}(K_X) = c_{\mathbb{C}}(K_X^*)$; $c_{\mathbb{C}}(K_X^*) = -c_{\mathbb{C}}(K_X)$ si chiama la *prima classe di Chern* di X e si nota con $c_1(X)$.

Più in generale si definiscono le *classi di Chern* $c_q(E) \in H^{2q}(X, \mathbb{Z})$, $q = 1, \dots, n$ per un fibrato vettoriale olomorfo E . Esse sono invarianti topologici e, quando E è hermitiano, possono essere calcolate mediante il tensore di curvatura della metrica. L'intero

$$\chi(X, E) = \sum_{q=1}^n (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, E)$$

si chiama la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di E e si può esprimere come polinomio

nelle classi $c_1(X, E), \dots, c_{2n}(X, E)$ mediante la formula di Riemann-Roch, dimostrata da Hirzebruch per le varietà proiettive e da Atiyah e Singer per le varietà complesse compatte. Si evidenzia, in tal modo, la natura topologica di $\chi(X, E)$.

Un fibrato lineare hermitiano si dice *positivo* (nel senso di Kodaira) se la classe $c_{\mathbb{C}}(F)$ è rappresentata da una forma reale $\gamma = -\frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \gamma_{\alpha, \bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ la cui matrice $(\gamma_{\alpha, \bar{\beta}})$ sia positiva in ogni punto di X ; ovvero se la forma di curvatura è coomologa ad una "forma positiva". In tali condizioni X è Kähleriana. Il teorema di annullamento di Kodaira si può, quindi, riformulare in questo modo: se $F \otimes K_X^*$ è positivo, allora $H^q(X, \mathcal{O}_X(E)) = 0$ per $q \geq 1$.

La nozione di positività (che si estende ai fibrati di qualunque rango) è determinante per lo studio della coomologia dei fibrati hermitiani, in particolare per i teoremi di annullamento.

Trattando delle modificazioni, Grauert ha dato la nozione di *positività debole* per un fibrato vettoriale olomorfo (e per un fascio coerente) e la dimostrazione di un criterio di positività.

Fra le tante applicazioni della positività vi sono i teoremi di immersione proiettiva, a cominciare da quello di Kodaira del 1954: una varietà complessa compatta X è (isomorfa a) una sottovarietà di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ se e solo se ammette un fibrato lineare positivo. Alla luce del teorema che ogni spazio di Moisèzon (connesso) è una contrazione di una varietà proiettiva, Grauert e Riemenschneider hanno formulato, nel '70, la congettura che una varietà complessa (connessa e) compatta che ammetta un fibrato hermitiano positivo su un aperto denso sia una varietà di Moisèzon. Siu e Demailly, a metà degli anni '80, ne hanno dimostrato la validità.

Le varietà Kähleriane costituiscono un capitolo affascinante della teoria delle varietà complesse e una delle estensioni naturali della categoria delle varietà proiettive. Gli studi in questo campo hanno portato a numerosi e notevoli risultati che mettono in relazione

la struttura hermitiano-riemanniana con quella complessa e topologica. Ne citiamo almeno due: una varietà Kähleriana non compatta, semplicemente connessa, con curvatura sezionale riemanniana non positiva, è di Stein (Green-Wu); una varietà Kähleriana compatta, con curvatura di Ricci positiva, è semplicemente connessa (Kobayashi).

Alle varietà Kähleriane è legata la famosa congettura formulata da Calabi nel '54 secondo cui, data una varietà Kähleriana X , con forma di Kahler ω , e una $(1, 1)$ -forma chiusa $\sigma = \sum_{\alpha, \beta=1}^n R_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ che rappresenti $c_1(X)$, esiste una metrica Kähleriana con forma di Kähler σ , coomologa a ω , di cui $R_{\alpha\bar{\beta}}$ sia il tensore di Ricci. La sua validità è stata dimostrata da Yau nel '76. La congettura ha importanti implicazioni come, ad esempio, che la sola struttura Kähleriana su $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ è quella standard e che una varietà complessa di dimensione 2, omotopa a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ è biolomorfa a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (risultato congetturato da Severi).

5.2. L'equazione $\bar{\partial}u = f$. Lo studio diretto della equazione $\bar{\partial}u = f$ su varietà complesse non compatte risale agli inizi degli anni '60 da parte di Hörmander, Andreotti e Vesentini, Kohn con metodi ispirati alla teoria degli operatori differenziali e alla teoria di Kodaira. Ci limitiamo a brevi cenni sui lavori, iniziando con quello di Hörmander.

Dato un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$ si introducono gli spazi di Hilbert $L_{(p,q)}(D, \varphi)$ delle (p, q) -forme L^2 rispetto a $e^{-\varphi}d\lambda$, dove $\varphi \in C^0(D)$ e $d\lambda$ è la misura di Lebesgue e si considera $\bar{\partial}$ come operatore $L_{(p,q-1)}^2(D, \varphi_1) \rightarrow L_{(p,q)}^2(D, \varphi_2)$, densamente definito e chiuso nel senso della teoria degli spazi di Hilbert. Ne discende che, per la risolubilità in $L_{(p,q-1)}^2(D, \varphi_1)$ dell'equazione $\bar{\partial}u = f$, $f \in L_{(p,q)}^2(D, \varphi_2)$, $\bar{\partial}f = 0$, è necessario e sufficiente, che valga la stima

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq C^2(\|\bar{\partial}^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|\bar{\partial}f\|_{\varphi_3}^2)$$

(per ogni f nei domini di $\bar{\partial}$ e $\bar{\partial}^*$) con $\varphi_3 \in C^0(D)$ opportuna (dove $\|\cdot\|_\varphi$ è la norma in $L_{(p,q)}^2(D, \varphi)$ e $\bar{\partial}^*$ è l'aggiunto hilbertiano di $\bar{\partial}$). Nel caso in cui D abbia una funzione di esaustione φ strettamente plurisubarmonica, data una (p,q) -forma f , L_{loc}^2 e $\bar{\partial}$ -chiusa,

esistono $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^0(D)$ tali che $f \in L^2(p, q)(D, \varphi_2)$ e valga la stima precedente. Ne consegue che l'equazione di $\bar{\partial}u = f$ ha una soluzione in L^2_{loc} . Se f è C^∞ esiste una soluzione C^∞ .

Il metodo si applica più in generale all'equazione $\bar{\partial}u = f$ per le forme a valori in un fibrato vettoriale olomorfo su una varietà di Stein. Utilizzando funzioni plurisubarmoniche φ opportune si ottengono stime in L^2 per le soluzioni e in particolare, se $f \in L^2(D)$, la stima $\|u\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}$, dove C è una costante che dipende solo dal diametro di D . Altre applicazioni si hanno nella teoria delle funzioni plurisubarmoniche.

Andreotti e Vesentini partono dall'equazione di Laplace-Beltrami $\square u = f$, ($\square = \bar{\partial}\theta + \theta\bar{\partial}$) per un fibrato hermitiano E su una varietà hermitiana X . Dopo aver introdotto per E la nozione di *W-ellitticità* (che riveste il ruolo di positività), essi dimostrano un teorema generale di esistenza di soluzioni C^∞ a supporto compatto per l'equazione di $\bar{\partial}u = f$ da cui, se X è q -completa, si riottengono i teoremi di annullamento di Andreotti e Grauert. In particolare, questo metodo permette di limitare il supporto della soluzione u in dipendenza del supporto di f e della funzione d'esaustione che dà la q -completezza di X .

Kohn considera l'equazione $\bar{\partial}u = f$, dove f è $\bar{\partial}$ -chiusa e C^∞ sulla chiusura di un aperto D di una varietà complessa M , limitato e con bordo C^∞ . Uno dei risultati principali è un teorema di regolarità: se M è di Stein e D è strettamente pseudoconvesso, esiste una soluzione u , C^∞ su \bar{D} . Nel '73 il teorema è stato esteso, sempre da Kohn, ai domini con bordo pseudoconvesso. La dimostrazione, tecnicamente molto complessa è basata sullo studio della equazione di Laplace-Beltrami. Dalla teoria di Kohn discendono nuove dimostrazioni del teorema di Newlander-Nirenberg e del teorema di Grauert secondo cui ogni aperto limitato di una varietà complessa, strettamente pseudoconvesso, è di Stein.

In seguito, nel lavoro scritto congiuntamente da Kohn e Rossi, una volta definite le p, q -forme C^∞ su ipersuperficie differenziabile S di \mathbb{C}^n , l'*operatore tangenziale* $\bar{\partial}_b$ (indotto su S

dall'operatore di $\bar{\partial}$) e il *complesso tangenziale* (indotto su S dal complesso di Dolbeault), il teorema di regolarità viene applicato nello studio del problema dell'estensione delle (p, q) -forme $\bar{\partial}_b$ -chiuse su S . In particolare viene fornita una generalizzazione del teorema di estensione di Hans Lewy nel caso in cui la forma di Levi di S abbia almeno un autovalore non nullo. A differenza dell'operatore $\bar{\partial}$, $\bar{\partial}_b$ non è localmente esatto per ogni (p, q) , fenomeno questo che per $n = 2$ va messo in relazione con un famoso esempio di Hans Lewy di un'equazione differenziale a coefficienti C^∞ senza soluzioni.

L'esempio di Hans Lewy è all'origine della teoria geometrica dei sistemi differenziali sovradeterminati sviluppata da Andreotti, Hill e Nacinovich. Dal teorema di estensione segue inoltre che, se $n \geq 3$ e la forma di Levi di S ha due autovalori di segno opposto, allora ogni funzione f , CR e regolare si estende bilateralmente e quindi è la traccia d'una funzione olomorfa; in particolare essa ha la regolarità di S .

I risultati relativi all'equazione $\bar{\partial}u = f$ che abbiamo fin qui riassunti riguardano essenzialmente la regolarità C^∞ . Il problema della regolarità in altri spazi funzionali, che ne consegue naturalmente, riceverà un impulso decisivo sul finire degli anni '60 con i lavori sulle formule di rappresentazione di Ramirez de Arellano e Henkin.

5.3. Formule di rappresentazione. Le formule di rappresentazione di Ramirez de Arellano e Henkin riguardano le funzioni olomorfe o, più generalmente, C^1 su un dominio D di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ (o di una varietà di Stein), limitato, con bordo C^∞ e strettamente pseudoconvesso. Se $u \in \mathcal{O}(D) \cap C^1(\bar{D})$ si ha, per ogni $z \in D$, la rappresentazione integrale,

$$u(z) = \int_{bD} u(\zeta) H(z, \zeta) d\sigma(\zeta)$$

dove per ogni $\zeta \in bD$, $H(\cdot, \zeta)$ è olomorfa in $D \setminus \{\zeta\}$, e per ogni $z \in D$, $H(z, \cdot)$ è C^∞ su bD ($d\sigma(\zeta)$ è la forma di volume di bD). La formula è stata dimostrata indipendentemente da Henkin e da Ramirez de Arellano e successivamente estesa da Henkin alle

funzioni $u \in C^1(\overline{D})$ (generalizzando così la classica formula di Cauchy-Green per $n = 1$): $u = u_1 + u_2$ dove u_1 è la parte olomorfa di u e u_2 dipende da $\bar{\partial}u$. Di Aronov e Dautov è la successiva estensione alle $(0, q)$ -forme. Le formule di rappresentazione si rivelano subito uno strumento essenziale nello studio dei problemi di regolarità, con stima delle soluzioni, per gli operatori $\bar{\partial}$ e $\bar{\partial}_b$ e mostrano, attraverso la scelta dei nuclei, un alto grado di adattabilità ai diversi problemi. In un breve arco di tempo esse danno luogo, principalmente per merito di Henkin e della scuola russa, ad una serie di risultati cruciali e spostano progressivamente l'attenzione verso tematiche e metodi che coinvolgono "proprietà quantitative" degli enti considerati. Nel corso dei primi anni '70 si verifica così un sostanziale mutamento nelle ricerche che risulta particolarmente rilevante per la teoria analitica e geometrica delle funzioni. Fra i nuovi oggetti di studio sono gli spazi di funzioni olomorfe su un dominio D di \mathbb{C}^n che soddisfano condizioni di crescita o di regolarità alla frontiera come, ad esempio, l'algebra $A^k(D) = \mathcal{O}(D) \cap C^k(\overline{D})$, $-\infty \leq k \leq +\infty$, gli spazi $LH^p(D) = L^p(D) \cap \mathcal{O}(D)$, $1 \leq p \leq +\infty$, gli spazi di Hardy $H^p(D)$, la classe $N(D)$ di Nevanlinna. Alcuni problemi classici (approssimazione, estensione di funzioni olomorfe definite su sottovarietà complesse, estensione di oggetti analitici,...) vengono dunque riformulati nell'ambito di questi spazi e conducono a risultati di grande rilievo come il teorema di caratterizzazione dell'insieme degli zeri di una funzione della classe $N(D)$, su un aperto limitato e strettamente pseudoconvesso di \mathbb{C}^n , dimostrato da Henkin e Skoda nel '75.

6. SVILUPPI ANALITICI E GEOMETRICI

Un interesse particolare riveste l'algebra delle funzioni intere su \mathbb{C}^n , per la possibilità di sviluppare una geometria complessa con "ordine di crescita". In quest'ottica, ha un ruolo di importanza cruciale il problema di stabilire un legame fra l'ordine (di crescita $M_r(f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$) di un'applicazione olomorfa $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^k$ e quello, $\nu(r)$, dell'insieme

analitico $X = f^{-1}(0)$ ($\nu(r) = \pi^{-p} p! r^{-2p} \sigma(r)$, dove $p = \dim_{\mathbb{C}} X$ e $\sigma(r)$ è il volume di $X \cap \{|z| \leq r\}$). (Bishop e Stoll nel '66 e, successivamente, Skoda hanno dimostrato che la limitatezza della funzione $\nu(r)$ caratterizza i sottoinsiemi algebrici di \mathbb{C}^n .)

Altro punto di rilievo, noto come "problema di Bezout trascendente" è quello del controllo dell'ordine di $X \cap Y$ mediante gli ordini dei sottoinsiemi analitici X e Y di \mathbb{C}^n .

Strumenti idonei allo studio di questi problemi si rivelano la teoria delle correnti positive di Lelong e la teoria di L^2 di Hörmander. Ai metodi della teoria geometrica delle correnti si ispirano anche i lavori di Harvey e Lawson dedicati (a metà degli anni '70) al *cobordismo complesso* in una varietà di Stein X . Dopo avere definite le *p-catene olomorfe* come correnti del tipo $\sum_{j \in J} n_j Y_j$, dove $\{Y_j\}_{j \in J}$ è una famiglia localmente finita di sottoinsiemi analitici chiusi di X , irriducibili, di dimensione p e ogni n_j è un intero, si dimostra che la corrente $[M]$ associata a una sottovarietà compatta, di classe C^2 , orientabile e di dimensione $2p - 1$, $p > 1$, è bordo di una *p-catena olomorfa* $T, dT = [M]$, se e solo se M è *massimalmente complessa* (cioè per ogni $x \in M$, $\dim_{\mathbb{R}} T_x(M) \cap JT_x(M) = 2p - 2$, dove J è la moltiplicazione per i in $T_x(X)$). Inoltre, se M è connessa, esiste un (unico) sottoinsieme analitico irriducibile Y di $X \setminus M$ di dimensione p tale che $d[Y] = \pm[M]$ e ogni funzione *CR* di classe C^2 si estende con una funzione *debolmente olomorfa* i.e. olomorfa nei punti regolari di Y e localmente limitata nei punti singolari. Nel caso in cui M sia una curva γ , la condizione puntuale viene sostituita dalla *condizione dei momenti*:

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

per ogni $(1, 0)$ -forma olomorfa su X .

Questi risultati hanno dato luogo a vari sviluppi tra cui quelli relativi allo spazio proiettivo, ad opera di Dolbeault e Henkin.

Un problema di cobordismo di natura diversa, connesso con la determinazione dell'involuppo d'olomorfia di una superficie compatta Σ di \mathbb{C}^2 , è quello studiato da Bedford

e Gaveau. Designate con $z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + ix_4$ le coordinate di \mathbb{C}^2 e con Ω un dominio limitato di $\{x_4 = 0\}$ con bordo differenziabile, Σ è il luogo dei punti $(z_1, x_3 + ig)$ dove g è una funzione regolare su $b\Omega$. Nelle ipotesi che Σ sia (omeomorfa a) una sfera e possenga solo due punti z', z'' , a tangenza complessa, ellittici, e che $\Omega \times \mathbb{R}$ sia strettamente pseudoconvesso, si dimostra che Σ è il bordo del grafico $\Gamma(u)$ di una funzione $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, lipschitziana in $\bar{\Omega}$ e regolare in Ω . Inoltre $\Gamma(u)$ è Levi piatta e $\Gamma(u) \cup \Sigma$ è l'involuppo olomorfo di Σ . La dimostrazione, consiste nel prolungare le ipersuperficie piatte definite (a norma del teorema di Bishop) in due intorni rispettivamente di z' e z'' . Questa problematica è stata variamente ripresa e sviluppata.

Il metodo dei dischi analitici di Bishop viene utilizzato con successo nei problemi di estensione delle funzioni CR . In questa direzione uno dei risultati più interessanti è il teorema di Boggess e Polking (1982): se M è una sottovarietà differenziabile di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, $\dim_{\mathbb{R}} M \geq n + 1$, generica e "fortemente pseudoconvessa" (nel senso di Levi), ogni funzione CR su M si estende olomorficamente su un aperto U di \mathbb{C}^n la cui chiusura \bar{U} contiene M .

Un rilevante progresso si ha nello studio delle applicazioni olomorfe tra domini limitati di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, dove un'attenzione particolare è rivolta alla palla unitaria B , dominio campione di due classi importanti, quella dei domini strettamente pseudoconvessi e quella dei domini *simmetrici* (per i quali, cioè, il gruppo $\text{Aut}(D)$, dei biolomorfismi $D \rightarrow D$, è transitivo). Tra i risultati più eleganti conseguiti alla fine degli anni '70, i teoremi di Alexander, secondo i quali non esistono applicazioni olomorfe, proprie, tra la palla e il polidisco e un'applicazione olomorfa e propria $f : B \rightarrow B$ è un biolomorfismo, e il teorema di caratterizzazione di Burns-Shnider e Wong: un dominio limitato D , strettamente pseudoconvesso, è biolomorfo a B se e solo se il gruppo $\text{Aut}(D)$ non è compatto. (Il gruppo $\text{Aut}(D)$ è munito della topologia della convergenza uniforme sui compatti e, per un teorema di Cartan, è un gruppo di Lie.)

Una questione cruciale è la regolarità al bordo; in accordo con i risultati classici di Carathéodory e Kellogg in una variabile si formula la congettura secondo cui, se D_1 e D_2 sono domini limitati di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$ con bordo differenziabile, ogni applicazione $D_1 \rightarrow D_2$, olomorfa e propria, si estende con un'applicazione differenziabile tra \bar{D}_1 e \bar{D}_2 . Nell'ipotesi che D_1 e D_2 siano strettamente pseudoconvessi, dopo che nel '73 Henkin, Margulis, Vor-moor e Pinchuk dimostrarono la regolarità hölderiana di ordine $1/2$ di f su \bar{D}_1 , il primo rilevante contributo è stato fornito da Fefferman nel '74 con la dimostrazione della validità della congettura, se f è biolomorfa. Tale dimostrazione, basata sullo studio del comportamento al bordo delle geodetiche della metrica di Bergman, è stata successivamente semplificata da Webster, Ligocka e, soprattutto, da Bell. Altri contributi significativi sullo stesso tema sono stati portati da Diederick e Fornaess.

Il risultato di Fefferman riconduce il problema dell'equivalenza biolomorfa di due domini strettamente pseudoconvessi di \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, a un problema di "equivalenza CR " dei bordi e, quindi, si collega naturalmente col lavoro di Chern e Moser (dello stesso periodo) sul problema di Poincaré, più generalmente, sulla "equivalenza CR " di due "varietà CR ". Una *struttura CR* (di *codimensione 1*) su una varietà differenziabile M di dimensione $2n-1$ è un sottofibrato $H(M)$ di $T(M)$ di codimensione 1 con un endomorfismo $J : H(M) \rightarrow H(M)$ tale che $J^2 = -1$ che soddisfi una naturale condizione di integrabilità (se $M \subset \mathbb{C}^n$, J è la moltiplicazione per i e per ogni $z \in M$, $H_z(M) = T_z(M) \cap JT_z(M)$). Un'applicazione $f : M \rightarrow M'$ (tra varietà CR) si dice CR se l'applicazione tangente manda $H(M)$ in $H(M')$. Utilizzando e sviluppando il formalismo di Elie Cartan (fibrato dei riferimenti, equazioni di struttura, ecc...) e alcune idee presenti in precedenti lavori di Tanaka sullo stesso argomento, gli autori pervengono infine a stabilire le condizioni necessarie e sufficienti affinché due varietà CR , analitiche reali e "non degeneri", siano (localmente) equivalenti dando così soluzione al problema di Poincaré.

La teoria geometrica delle varietà CR è stata ampiamente sviluppata soprattutto da

Burns, Faran, Snider e Webster. Tra i problemi più interessanti, si pone quello dell'immersione in \mathbb{C}^n se, cioè, una varietà differenziabile M con struttura CR (di codimensione 1), "strettamente pseudoconvessa", possa localmente immergersi come ipersuperficie (strettamente pseudoconvessa) di \mathbb{C}^n . Ciò è sempre possibile se M è analitica reale e (in accordo con un teorema di Kuranishi del 1983) se M è differenziabile strettamente pseudoconvessa e $\dim_{\mathbb{R}} M \geq 5$. A Nirenberg si deve l'esempio di una varietà CR , di dimensione 3, strettamente pseudoconvessa, che non è localmente immergibile in \mathbb{C}^2 .

Anche la teoria delle varietà complesse (in cui si manifesta una sempre maggiore interazione con la Geometria algebrica) viene influenzata e stimolata dall'affermarsi dei nuovi punti di vista. Accanto alla congettura di Calabi, di cui si è già detto, viene studiato, con i metodi della Geometria differenziale globale (che utilizzano in modo decisivo la teoria L^2 per il $\bar{\partial}$), il problema dell'uniformizzazione in più variabili: ci si chiede, in altri termini, come caratterizzare in termini di curvatura, le varietà Kähleriane biolomorfe a \mathbb{C}^n o a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$. Un risultato chiave è il teorema dimostrato da Siu e Yau nel '77 secondo cui una varietà Kähleriana, semplicemente connessa, con curvatura sezionale limitata da $-A/(1+r^2+\epsilon)$ e 0 (dove A, ϵ sono positivi e r è la distanza da un punto fissato) è biolomorfa a \mathbb{C}^n . Risultati analoghi si hanno per $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Le tecniche di Bochner-Kodaira vengono applicate nel caso non Kähleriano per lo studio della coomologia dei fibrati hermitiani e portano alla soluzione della congettura di Grauert-Riemenschneider (cfr. 5.1). Altri sviluppi geometrici sono collegati con il cosiddetto "programma di Penrose" alla cui base è una "corrispondenza" stabilita da Penrose tra lo spazio proiettivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ e una complessificazione dello spazio di Minkowski compattificato. Questa corrispondenza permette di interpretare alcuni capitoli della Fisica Matematica (quelli, ad esempio, relativi alle equazioni di Maxwell e di Yang-Mills) in termini di "oggetti olomorfi". Al di là delle considerazioni emotive che talvolta lo hanno accompagnato, il programma di Penrose ha stimolato ricerche in Geometria differenziale e in Analisi Complessa che costituiscono forse

uno degli elementi di maggiore "novità" di quegli anni.

Il quadro che abbiamo sinteticamente delineato dà un'idea abbastanza chiara delle tematiche e dei metodi sviluppati nel corso degli anni '70-'80. Volendo almeno accennare alle prospettive, tra i temi che in anni recenti hanno proposto importanti linee di ricerca riguardano da un lato il legame tra le struttura complesse o, più generalmente, quasi complessa su una varietà e la sua topologia², dall'altro la teoria dei sistemi dinamici olomorfi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Abate M., Bedford E., Brunella M., Dinh T., Schleicher D., and Sibony N., *Holomorphic dynamical systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010. Edited by Graziano Gentili, Jacques Guenot and Giorgio Patrizio.
- [2] Ancona V. and Tomassini G., *Modifications Analytiques*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 943, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [3] Atiyah M. F., *Geometry of Yang-Mills Fields*, Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei e Scuola Normale Superiore, Pisa, 1979.
- [4] H. Behnke and P. Thullen, *Theorie der Funktionen Mehrerer Komplexer Veränderlichen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. Band 51, Springer-Verlag, Berlin, 1970 (German). Zweite, erweiterte Auflage. Herausgegeben von R. Remmert. Unter Mitarbeit von W. Barth, O. Forster, H. Holmann, W. Kaup, H. Kerner, H.-J. Reiffen, G. Scheja und K. Spallek (eds.)
- [5] D. Bennequin, *Topologie symplectique, convexité holomorphe et structures de contact (d'après Y. Eliashberg, D. McDuff et al.)*, Astérisque **189-190** (1990), Exp. No. 725, 285–323. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.
- [6] Besse A. L., *Einstein Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [7] Bochner S. and Martin W. T., *Several Complex Variables*, Princeton Mathematical Series, vol. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.
- [8] A. Boggess, *CR manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.
- [9] Cartan H., *Séminaire 1951-52, Exposés XV à XX*.
- [10] Cartan H., *Faisceaux Analytiques Cohérents*. Corso C.I.M.E., Funzioni e varietà complesse, Varenna, Villa Monastero, 25 Giugno-5 Luglio 1963 Como.
- [11] Cerveau D., Ghys É., Sibony N., and Yoccoz J.-C., *Complex dynamics and geometry*, SMF/AMS Texts and Monographs, vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2003. With the collaboration of Marguerite Flexor. Papers from the Meeting State of the Art of the Research of the Société

²Fondamentale, in quest'ambito, appare il lavoro di Gromov dell' 85 sulle curve pseudolomorfe di una varietà quasi complessa che ha reso possibile, anche attraverso i lavori di Eliashberg e McDuff, una geometria globale delle strutture simplettiche e di contatto.

Mathématique de France” held at the École Normale Supérieure de Lyon, Lyon, January 1997. Translated from the French by Leslie Kay.

- [12] Della Sala G., Saracco A., Simioniuc A., and Tomassini G., *Lectures on complex analysis and analytic geometry*, Appunti, vol. 3, Edizioni della Normale, Pisa, 2006.
- [13] Demailly J. P., *Complex Analytic and Differential Geometry*, 1997. Univ. Grenoble I, Institut Fourier.
- [14] Dolbeault P., *Analyse Complexe*, Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1990.
- [15] Dragomir S. and Tomassini G., *Differential geometry and analysis on CR manifolds*, Progress in Mathematics, vol. 246, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2006.
- [16] Folland G. and J.J. Kohn, *The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex*, Princeton, NJ, Annals of mathematics studies, vol. 75, Princeton, NJ, 1972.
- [17] T. W. Gamelin, *Uniform Algebras*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.
- [18] Forsyth A. R., *Theory of functions of two complex variables*, Cambridge, 1914.
- [19] Franzoni T. and Vesentini E., *Holomorphic maps and invariant distances*, Mathematical Notes, vol. 69, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.
- [20] R. Godement, Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux, Actualités Sci. Ind. No. 1252. Publ. Math. Univ. Strasbourg, vol. 13, Hermann, Paris, 1958.
- [21] Grauert H. and Remmert R., *Theory of Stein spaces*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 236, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. Translated from the German by Alan Huckleberry.
- [22] ———, *Coherent analytic sheaves*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 265, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [23] Gunning R. C., *Introduction to holomorphic functions of several variables*, Pacific Grove, Cal, 1990.
- [24] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [25] Hartogs F., *Einige Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel bei Funktionen mehrerer Veränderlichen*, München Sitzungsber **36** (1906), 223–241.
- [26] ———, *Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabh ängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten*, Math. Ann. **62** (1906), no. 1, 1–88.
- [27] Henkin G. M. and Leiterer J., *Theory of functions on Complex Manifolds*, Boston, 1984.
- [28] K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall Series in Modern Analysis, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [29] Hörmander L., *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1966.
- [30] Huang X., *On some problems in several complex variables and CR geometry.*, Stud. Adv. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001. First International Congress of Chinese Mathematicians (Beijing, 1998).
- [31] Kobayashi S., *Differential geometry of complex vector bundles*, Publications of the Mathematical Society of Japan, vol. 15, Princeton University Press, Princeton, NJ; Iwanami Shoten, Tokyo, 1987. Kanô Memorial Lectures, 5.
- [32] ———, *Hyperbolic Complex Spaces*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 318, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
- [33] Levi E. E., *Sudii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*, Ann. di Mat. pura e applicata **17** (1909), 61–88.

- [34] ———, *Sulle ipersuperficie dello spazio a 4 dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse*, Ann. di Mat. pura e applicata **18** (1911), 69–80.
- [35] McDuff D. and Salamon D., *Introduction to symplectic topology*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998. Second edition.
- [36] Milnor J., *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, vol. 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006.
- [37] Morrow J. and Kodaira K., *Complex manifolds*, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006. Reprint of the 1971 edition with errata.
- [38] Nakahara M., *Geometry, Topology and Physics*, Graduate student series in physics, Institute of physics publishing, Bristol and Philadelphia, 1990.
- [39] Narasimhan R., *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, No. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [40] ———, *Several Complex Variables*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1971.
- [41] Osgood W. F., *Lehrbuch der Funktionentheorie II.1*, B. G. Teubner, Leipzig, 1924.
- [42] Poincaré H., *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907), 185-220.
- [43] Rudin W., *Function Theory in unit Ball of \mathbb{C}^n* , Grundlehren Math. Wiss., vol. 241, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1980.
- [44] Segre B., *Some properties of differentiable varieties and transformations: with special reference to the analytic and algebraic cases. Second edition. With an additional part written in collaboration with J. W. P. Hirschfeld*, Ergeb. Math. Grenzgeb., Springer-Verlag, New York Heidelberg, 1971.
- [45] Severi F., *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, Cedam-Casa editrice dott. Antonio Milani, Padova, 1958. Tenute nel 1956-1957 all'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma.
- [46] Wells R. O. Jr, *Complex manifolds and mathematical physics*, Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.) n°2, pp. 296-336. **Vol. 1, no. 2** (1979), 296-336.
- [47] Whitney H., *Complex analytic varieties.*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1972.
- [48] *Several complex variables. I*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 1990. Introduction to complex analysis; A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 7, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985 Translation by P. M. Gauthier Translation edited by A. G. Vitushkin.
- [49] *Several complex variables. II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 8, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Function theory in classical domains. Complex potential theory; A translation of *Current problems in mathematics. Fundamental directions, Vol. 8 (Russian)*, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1985 Translation by P. M. Gauthier and J. R. King Translation edited by G. M. Khenkin and A. G. Vitushkin.
- [50] *Several complex variables. III*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 9, Springer-Verlag, Berlin, 1989. Geometric function theory; A translation of Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya, Tom 9, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 Translation by J. Peetre Translation edited by G. M. Khenkin.

- [51] *Several complex variables. IV*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 1990. Algebraic aspects of complex analysis; A translation of *Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*, Tom 10, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1986 Translation by J. Leiterer and J. Nunemacher Translation edited by S. G. Gindikin and G. M. Khenkin.
- [52] *Several complex variables. V*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 54, Springer-Verlag, Berlin, 1993. Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics; A translation of *Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol. 54* (Russian), Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989 Translation edited by G. M. Khenkin.
- [53] *Several complex variables. VI*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 69, Springer-Verlag, Berlin, 1990. Complex manifolds; A translation of *Sovremennye problemy matematiki. Fundamentalnye napravleniya*, Tom 69, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow.
- [54] *Several complex variables. VII*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 74, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Sheaf-theoretical methods in complex analysis; A reprint of *Current problems in mathematics. Fundamental directions. Vol. 74* (Russian), Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. (VINITI), Moscow.