PRINCIPJ ANALITICI

DELLE MATEMATICHE

DI

ANNIBALE GIORDANO, E CARLO LAUBBERG.

Tom. II.

GEOMETRIA.

IN NAPOLI MDCCXCII.

PRESSO GENNARO GIACCIO.

Con Licenza de' Superiori.

PRINCIPJ DI GEOMETRIA.

CAP.

ERRORI	CORREZIONI
Pag. 16. Ver. 12. C, B	B, C
27. EG	QG

C A P. I.

Dell' Estensione, e de' suoi limiti.

§. 1. NOi riceviamo dai corpi molte sensazioni simultanee per mezzo dei due sensi della vista cioè, e del tatto, le quali poi vengono in conseguenza della conformazione di questi sensi successivamente percorse. In tale stato di cose noi sentiamo, che i corpi sono estesi, e limitati da per tutto, e ci formiamo simultaneamente l' idea generale dell' *estensione* dei corpi, e del *limite* della medesima.

§. 2. Separiamo il rapportato fenomeno da tutti gli altri, che scorgiamo nei corpi, e prendiamolo a considerare isolatamente; noi stabiliremo nel medesimo il principio generale della *Geometria*, la quale perciò si raggirerà nello *svolgere l' idea dell' estensione, e de' suoi limiti*.

§. 3. Consideriamo adunque primieramente le sensazioni, che abbiamo ricevute dai limiti dell' estensione. In ogni corpo abbiamo conosciuto un limite, che da da per tutto lo cinge: abbiamo dato a questo limite il nome di *superficie*. In ogni superficie scorgiamo pure dei limiti, che noi diciamo *linee*, e ad ogni linea assegniamo per limiti due segni indivisibili, che chiamiamo *punti*.

§. 4. In questo stato medesimo di sensazioni, noi sentiamo la differenza della linea *retta*, e della *curva*: si concepisce la prima allorchè tendiamo da un punto ad un altro, o sia di due punti consideriamo la *distanza*, ch'è la linea più breve che tra i medesimi può intercedere. Qualunque altra linea si possa concepire fra i due punti medesimi si dice *curva*.

§. 5. Nel medesimo modo noi distinguiamo la superficie *piana* dalla superficie *curva*: la prima si può percorrere in linea retta per ogni verso, o sia è tale, che si può su di essa applicare per ogni verso la linea retta; ogni altra superficie si dice curva.

§. 6. Se l'idea del limite non entri affatto nella nostra considerazione, cioè ci fermiamo a considerare la sola estensione senza il limite, allora ci formiamo l'idea generale dell'*estensione de' corpi*, o sia dello *spazio*.

§. 7. Avendo noi percorso i limiti di ciascun corpo, e ciò, che fra questi limiti s'interpone, per formarci l'idea generale dell'estensione de' corpi, e del suo limite; questo movimento, che noi abbiamo fatto ci fa concepire, che col moto del punto si percorre, o pure si traccia la linea, col moto della linea si disegna la superficie, e con quello della superficie finalmente lo spazio.

§. 8. La considerazione del limite è inutile al concepimento dell'estensione; quindi per formarci l'idea generale dell'estensione di tutti i corpi, o sia dello spazio dell'universo, noi dovremo astenerci dal concepir limite alcuno. E' dunque lo spazio dell'universo in-

indeterminato, indefinito, immenso, ed i limiti si devono assegnare solamente ai corpi, che nel medesimo esistono a diverse distanze fra di loro.

CAP. II.

Dimensione delle parti dello spazio, loro sito, e posizione.

§. 9. MA in qual modo discernere la differenza, che intercede fra queste diverse distanze de' corpi, e generalmente fra le diverse parti dello spazio? Noi non abbiamo altro mezzo per discernere l'eguaglianza di due parti dello spazio, che di soprapporre l'una all'altra, per conoscere se si combaciano, perchè in tal caso è chiaro, che sieno eguali fra di loro. Da ciò rileviamo il seguente principio quanto semplice, altrettanto universale, cioè, che *due parti dello spazio, che si combaciano sono eguali fra di loro*.

§. 10. Quindi per paragonare le parti dello spazio, le soprapporremo l'una all'altra, e così ne conosceremo l'uguaglianza, o la differenza. Qualora sono ineguali, dobbiamo successivamente applicare la parte più piccola sull'altra, per conoscere quante volte in questa vien contenuta.

L'istituire questa successiva applicazione di una parte dello spazio sull'altra, si dice *misurare*.

§. 11. La dimensione adunque delle parti dello spazio dipende dall'applicare una sua parte sopra tutte le altre. Questa tale parte, la quale serve per misura, ed alla quale perciò tutte le altre si riferiscono, si dice *unità*. Da ciò si deduce, che l'unità è arbitraria, ma che fissata una volta non deve variare nella medesima dimensione.

§. 12. Le parti dello spazio, che si possono assegnare, cioè che sono misurate, o possonsi misurare, diconsi *date*; le altre, cioè quelle di cui si cerca il modo per misurarle, diconsi *ignote*.

§. 13. Dal conoscere, e dal misurare le diverse distanze dei corpi gli uni dagli altri, noi ci formiamo l'idea di *sito*, e di *posizione*. Conoscendo adunque alcuni corpi, noi diremo, che altri relativamente a questi sono dati di posizione, quando se ne possono assegnare le reciproche distanze.

§. 14. La posizione adunque dei corpi è sempre relativa ad altri, ai quali quelli da noi si riferiscono. La posizione assoluta dei corpi non può fissarsi, che relativamente alle parti medesime dello spazio indefinito di tutto l'universo.

Ora le parti di questo spazio assoluto essendo per noi indiscernibili, la posizione assoluta non si può da noi conoscere.

§. 15. Le parti adunque dello spazio si dicono *assolute*, o *relative*, secondochè appartengono allo spazio indefinito, o a quello occupato dai corpi. E lo spazio occupato da un corpo si dice *luogo*, che sarà *assoluto*, se si riferisce alle parti dello spazio assoluto, *relativo* se si riferisce soltanto agli altri corpi.

CAP.

CAP. III.

Principj per la soluzione delle questioni appartenenti alle parti dello spazio.

§. 16. Le diverse questioni sulle parti dello spazio si riducono o a conoscere il rapporto fra alcune parti date, o a determinare alcune parti dello spazio per eseguire diverse operazioni.

§. 17. Noi abbiamo veduto, che per paragonare le parti dello spazio, era necessario ricorrere al principio della *soprapposizione*. Per conoscere adunque l'eguaglianza fra due parti dello spazio non si deve meccanicamente eseguire una tale applicazione, ma è necessario determinare dalle condizioni della questione, se debba un tal combaciamento accadere.

§. 18. Per eseguir poi diverse operazioni sulle parti dello spazio, è necessario determinare le distanze diverse, alle quali queste tali operazioni si devono eseguire. Quindi noi incominciamo dal concepire tutti i diversi punti, che sono esistenti sopra di una superficie piana, e che sono alla medesima distanza da un' altro punto. Ed egli è di per se chiaro, che tutti questi diversi punti sono in una linea curva, che ritorna in se stessa, racchiudendo una certa porzione della superficie piana. Questa parte della superficie piana dicesi *circolo*, e la linea, che la termina *circonferenza*, o *periferita*. Il punto intermedio a cui tutti gli altri si riferiscono *centro*, e le distanze sudette dal centro alla circonferenza *raggi*. Si dice *diametro* qualunque retta, che attraversa il centro, e che perciò divide il circolo in due eguali porzioni dette *semicerchj*. Qualunque altra retta, che taglia la circonferenza

si

si dice *corda*, e le porzioni della circonferenza si dicono archi.

§. 19. Dalle cose esposte quì sopra (§.18.) apparisce, che si può concepire in altro modo la generazione del circolo supponendo, che una linea retta restando in un suo estremo immobile, compia una perfetta rivoluzione sopra una superficie piana. La linea retta col suo movimento descriverà il circolo, ed il suo estremo traccerà la circonferenza.

§. 20. L'intersezione dei circoli, e delle linee rette ci danno dei punti per eseguir le diverse operazioni sulle parti dello spazio.

C A P. IV.

Dell' inclinazione delle linee.

§. 21. AVendo esposti i principj generali per risolvere le diverse questioni geometriche, è ora necessario considerare le diverse posizioni delle linee.

§. 22. E primieramente si può considerare l'incontro di due linee diverse, qualunque queste si sieno.

Quando due linee diverse s'incontrano, o devono costituire una linea continuata, o non costituirla.

Allorchè due linee diverse incontrandosi non costituiscono una linea continuata, s'inclinano vicendevolmente. Questa vicendevole inclinazione si dice *angolo*, il punto d'incontro *vertice*, le linee *lati*.

L'angolo si dirà *piano*, se sopra di un piano esistono le linee, che lo costituiscono.

Secondochè i lati sieno linee rette ambedue, o una retta, e l'altra curva, o curve entrambi, l'angolo si dirà *rettilineo*, *mistilineo*, o *curvilineo*.

L'angolo si esprime con tre lettere, ponendo nel mezzo la lettera appartenente al vertice. Questa avvertenza è assolutamente necessaria, allorchè il medesimo vertice appartiene a più angoli.

§. 23. Lasciando di considerare gli angoli curvilinei, e mistilinei, osserviamo le diverse specie degli angoli rettilinei. E primieramente una retta AD (fig.1.) può cadere su di un'altra BC, sicchè non inclini più dall'una, che dall'altra parte; in tal caso AD si dice perpendicolare a BC, e ciascun'angolo DAB, DAC si dice *retto*.

§. 24. Da ciò io rilevo primieramente, che se una retta DAF è perpendicolare su di un'altra BC, questa viceversa sarà perpendicolare alla prima DF. Secondo, che dal medesimo punto A non si può condurre sopra BC altra perpendicolare diversa da AD, che sia nel medesimo piano BDCF, poichè è chiaro, che una retta può essere solo egualmente inclinata ad ABC, nel medesimo piano.

§. 25. Ogni angolo minore del retto, come EAC, si dice *acuto*; e qualunque angolo maggiore del retto, come EAB si dice *ottuso*.

§. 26. Vediamo ora qual rapporto vi è tra i due angoli retti DAB, DAC, ed i due EAB, EAC, de' quali l'uno è ottuso, e l'altro acuto. Or egli è di per se chiaro, che l'ottuso EAB supera il retto DAB per l'angolo EAD, il quale aggiunto all'acuto EAC forma l'altro angolo retto DAC. Dunque i due angoli EAB, EAC presi insieme combaciano con i due DAC, DAB, e perciò costituiscono due angoli retti. Quindi nasce il

Teor. *Se una retta cade su di un'altra, gli angoli, che con essa forma o sono retti, o costituiscono la somma di due retti.*

Questi due angoli EAB, EAC si dicono angoli con-

conseguenti, e perchè ambedue costituiscono due retti l' uno si dice *supplemento* dell' altro.

Da ciò si rileva facilmente, che tutti gli angoli intorno ad un punto sono eguali a quattro retti.

§. 27. Se le due rette BA, AC esistenti nella medesima direzione costituiscano con AE due angoli eguali a due retti; egli è di per se chiaro, che conducendosi un'altra retta AG, le due rette BA, AG non potranno costituire con AE gli angoli BAE, EAG similmente eguali a due retti, poichè dovrebbe essere EAG=EAC, il che è assurdo. Dunque le sole rette, che sono nella stessa direzione possono costituire con AD angoli retti, o eguali a due retti. Da ciò il

Teor. *Se dall' estremo di una linea retta si conducano a parti opposte due rette, che costituiscano colla prima due angoli la cui somma sia eguale a due retti, le seconde due rette devono essere nella medesima direzione.*

§. 28. Supponghiamo ora, che la retta obliqua EA (fig.2.) sia prodotta in H; è manifesto, che ancora BA costituirà con EH due angoli BAE, BAH eguali a due retti (§.26.), cioè eguali alla somma dei due primi EAB, EAC; onde tolto il comune EAB, resterà l' angolo EAC=BAH. Questi due angoli si dicono opposti al vertice, al pari degli altri BAE, CAH, che nel medesimo modo si mostrano essere fra loro eguali. Quindi

Teor. *Se due rette s' intersecano, gli angoli opposti al vertice sono uguali fra loro.*

§. 29. Riflettendo a ciò, che abbiamo fatto è di per se manifesto, che la sola BA al punto A può costituire colla AH un'angolo BAH=EAC. Quindi ne nasce l' inverso

Teor. *Se su di una retta al medesimo punto cadano due rette a parti opposte, sicchè gli angoli opposti al vertice sieno eguali fra di loro, tali rette costituiranno una retta continuata.*

CAP.

CAP. V.

De' Triangoli, loro proprietà, ed eguaglianza.

§. 30. NOn potendo due linee rette racchiudere spazio, consideriamone tre, che s' incontrino su di una superficie piana. Costituiranno allora un *Triangolo rettilineo*, di cui queste tre rette sono i *lati*. In ogni triangolo adunque si considerano tre angoli, tre lati, e lo spazio; e noi diremo, che due triangoli sono perfettamente eguali, quando queste sette cose sono respettivamente eguali.

§. 31. I triangoli adunque si possono considerare rispettivamente ai lati, o agli angoli. Relativamente ai lati o questi sono tutti e tre eguali, o lo sono solamente due di essi, o sono tutti e tre disseguali. Nel primo caso il triangolo si dirà *equilatero*, nel secondo *isoscele*, nel terzo *scaleno*. Rispetto poi agli angoli noi diremo *triangolo rettangolo* quello in cui troveremo un' angolo retto, *ottusangolo* quello in cui ci è un' angolo ottuso, e finalmente *acutangolo* quello i di cui angoli sono tutti acuti.

Atteso ciò, che abbiamo detto sulla natura della linea retta (§.4.), egli è chiaro, che due lati di un triangolo sono maggiori del terzo.

§. 32. Dopo ciò ci proponiamo il seguente

Probl. *Costruire un triangolo mediante tre rette delle quali due sieno maggiori della terza.*

Siano date le tre rette M, N, O (*fig.* 3.) che abbiano l' esposte condizioni, costruirne un triangolo.

Si prenda una retta AB, che sia eguale ad una delle proposte M; è manifesto, che sia necessario trovare un punto C, il quale disti dal punto A per l' altra data N, e sia lontano da B per una eguale alla ter-

terza retta O. Quindi il punto C dovendo distare dal punto A per una distanza eguale ad N, si dovrà ritrovare nella circonferenza del circolo CR, che ha per raggio N. Similmente si dimostra, che il medesimo punto C si debba ritrovare nella circonferenza CS, che ha per raggio la retta O. Dunque tal punto C si troverà nell' intersezione di queste due circonferenze di circolo. Onde condotte le rette CA, CB, il triangolo ACB sarà il richiesto.

§. 33. Quindi se le rette date fossero state tutte tre eguali, si sarebbe costrutto un triangolo equilatero. E perciò per costruire un triangolo equilatero su di una retta data, è necessario descrivere due circoli, che habbiano la medesima retta per raggio, e per centro rispettivamente le sue estremità, alle quali bisogna condurre due rette dall' incontro delle due circonferenze.

§. 34. Dalla rapportata costruzione del triangolo in generale si deduce, che dati i lati è dato il triangolo. Vi sia dunque un' altro triangolo PQR, che abbia i medesimi lati; ed esaminiamo se è possibile, che sia differente dal primo ABC. Si ponga dunque il triangolo PQR sull' altro ACB in modo, che PR combaci con AB; ed essendo PQ eguale al raggio del circolo CR, necessariamente il punto Q dovrà ritrovarsi in siffatta circonferenza CR. Similmente si dimostri, che il medesimo punto Q si debba ritrovare nella circonferenza CS. Dunque il punto Q caderà sul punto C, ed il triangolo PQR combaciando coll' altro ABC, gli sarà perfettamente eguale. Quindi il

Teor. *Se due triangoli sono fra loro equilateri, sono perfettamente eguali.*

§. 35. Or poichè i triangoli ACB, PQR sono perfettamente eguali, avranno oltre i lati, respettivamente eguali anche gli angoli che si combaciano; e perciò sarà A =

A = P, C = Q, B = R, cioè *saranno eguali gli angoli opposti ai lati eguali.*

§. 36. Quindi da questo principio si deduce la soluzione del seguente

Probl. *Dato un punto in una retta costruirvi un' angolo eguale ad un dato* (*Fig.* 3.).

Sia dato il punto A nella retta AB costruirvi un' angolo eguale a P.

Egli è di per se chiaro, che se fra i lati dell'angolo P si conduca comunque la retta QR, e si costuisca il triangolo ACB = PQR, talchè AB sia eguale PR, AC = PQ, CB = QR (§. 32.), si avrà l' angolo A = P (§. 35.).

§. 37. Colla medesima semplicità si può dal medesimo principio procedere alla soluzione di quest' altro

Probl. *Dato un punto in una retta elevarvi sopra una perpendicolare; e dato un punto fuori di una retta abbassarvi una perpendicolare.*

Si debba adunque innalzare sopra di PQ una perpendicolare, come AE (*fig.* 4.).

Per poter essere AE perpendicolare su di PQ; dovrebbe esser l' angolo EAP = EAQ, cioè si dovrebbero costruire i due triangoli EAC, EAD, che abbiano AC = AD, e CE = DE. Quindi per elevare dal punto A la perpendicolare, si prenda effettivamente AC = AD, e coi centri C, D si descrivano col medesimo raggio i due archi FG, IH, che si tagliano in E, ed uniti i punti A, E, sarà AE la perpendicolare richiesta.

Se coi medesimi centri, e con qualsivoglia raggio si descrivano due archi *fg*, *hi*, che s' incontrino nel punto *e*, la perpendicolare EA prolungata deve passare per questo punto (§. 24.).

Da questa costruzione si deduce, che se viceversa sa si abbia il punto E fuori della retta PQ, e si voglia sopra di PQ abbassare una perpendicolare, si debbano di siffatta retta ritrovare primieramente due punti C, D egualmente distanti da E, il che si esegue descrivendo col centro E un'arco CD, indi coi centri C, D si descrivano i due archi *gf*, *hi* col medesimo raggio, che s'interseghino in *e*, si unisca E*e*, che sarà perpendicolare su di PQ.

Quindi dovendo la perpendicolare passar necessariamente per i punti E, *e*, si rileva, che una sola perpendicolare si può innalzare, o abbassare da un punto su di una retta.

§. 38. Dalla costruzione del precedente problema si ravvisa, che CA = AD. Si deduce dunque facilmente il modo di risolverne un'altro, cioè

Probl. *Data una retta dividerla in due parti eguali.*

Sia da dividersi in due parti eguali la retta CD.

Si dovranno descrivere coi centri C, D, e col medesimo raggio quattro archi HI, FG, *hi*, *fg*, che s'incontrino nei punti E, *e*, ed unita E*e*, questa dividerà CD in due parti eguali nel punto A.

§. 39. Dall'eguaglianza de' triangoli EAC, EAD deducendosi l'angolo CEA = AED (§. 35.) si rileva altresì facilmente il modo di risolvere quest'altro

Probl. *Dato un' angolo dividerlo in due parti eguali.*

Sia dato l'angolo CED da dividersi in due parti eguali.

Egli è chiaro, che bisogna prendere i lati eguali EC, ED, ed unire CD, la quale se si divida in due parti eguali nel punto A (§. 38.), e si unisca AE, questa dovrà dividere l'angolo CED in due eguali parti, cioè sarà l'angolo CEA = AED.

§. 40. Or poichè nel triangolo isoscele CED, divisa CD in due parti eguali nel punto A, e condotta AE, si ha il triangolo CAE = DAE (§. 35.), si avrà altresì l'angolo ECA = EDA; onde

Teor. *Nel triangolo isoscele gli angoli alla base sono eguali.*

§. 41. Il triangolo equilatero adunque avrà tutti gli angoli eguali.

§. 42. Tornando di nuovo al paragone dei triangoli, supponghiamo ora il lato BC = EF, (*fig.* 5.) e l'angolo B = E, l'altro C = F. Posto il lato BC sul lato EF, talchè l'angolo CBA si combaci con FED, e BCA con EFD, e BC con EF, il vertice A dovrà cadere sul vertice D, e perciò combaciandosi perfettamente i due triangoli, saranno eguali, e si eguaglieranno i lati AB, DE, e gli altri AC, DF posti incontro agli angoli eguali, non meno, che i due angoli rimanenti A, D. Perciò

Teor. *Se due triangoli abbiano un lato eguale ad un lato, e gli angoli sopra di questi lati respettivamente eguali, saranno siffatti triangoli perfettamente eguali.*

§. 43. Ma se due lai AB, AC sieno eguali ai due lati, DE, DF ed eguali altresì gli angoli da essi compresi A, D, posto similmente il triangolo BAC sull' altro EDF, talchè si combacino i lati, e gli angoli eguali, gl' interi triangoli si combaceranno, e saranno eguali gli angoli corrispondenti ai lati eguali, e le basi. Dunque

Teor. *Se due triangoli abbiano due lati respettivamente eguali a due lati, e l'angolo compreso eguale all' angolo compreso, saranno eguali.*

§. 44. Da ciò deduco che se avessi supposti eguali gli angoli alla base A, C (*fig.* 6.), divisa AC egualmente nel punto D, e condotta la perpendicolare DB, questa necessariamente passerà pel vertice B, perchè passando per un'altro punto qualunque E, sarebbe l'angolo C eguale al più piccolo EAC (§. 43.). Passando dunque per B la perpendicolare eretta dal punto D, sarà rà il lato BA=BC. Perciò

Teor. *Se un triangolo ha eguali gli angoli alla base sarà isoscele.*

§.45. Quindi il triangolo equiangolo sarà equilatero.

§. 46. Ma se l'angolo BAC sia maggiore dell'angolo C, fatto l'angolo EAC=C (§.36.), sarà il lato AE=EC, aggiuta EB, sarà AE+EB=CB. Ma AE+EB sono maggiori di AB; dunque AB è minore di CB.

Teor. *In ogni triangolo all'angolo maggiore si oppone il lato maggiore.*

§. 47. Sieno ora due lati di un triangolo AB, AC (*fig.* 7.) respettivamente eguali ai due lati DE, DF, e due angoli non compresi B, E; supponghiamo, che l'angolo A non sia eguale all'angolo EDF, ma sia eguale all'angolo EDG, i due triangoli ABC, DEG saranno perfettamente eguali (§. 42.), l'angolo C=DGE, ed AC=DG. Ma AC=DF; dunque DG=DF, l'angolo DGF=DFG (§. 44.), e la retta DG non potrà esser perpendicolare ad EF (§. 37). Quindi l'angolo DGE non può essere della stessa specie dell'angolo DGF o dell'altro DFF, talchè se il primo di essi è acuto, ciascun degli altri due esser dee necessariamente ottuso, e perciò neppure l'angolo ACB esser può della stessa specie dell'angolo DFE. Se dunque si fosse altresì supposto in sulle prime l'angolo C della stessa specie di F, suppondosi in seguito l'angolo A maggiore di D, si sarebbero avuti gli angoli C, F di specie diversa, il che essendo assurdo, sarà in tal caso l'angolo A=D, onde il

Teor. *Se due triangoli abbiano due lati respettivamente eguali a due lati, ed un'angolo non compreso eguale ad uno non compreso, e finalmente un secondo angolo della stessa specie di un secondo, dovranno questi due triangoli esser perfettamente eguali.*

§. 48. Consideriamo finalmente due triangoli, che abbiano due angoli eguali a due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi eguale al lato corrispondente nell'altro triangolo.

Sieno dunque i due triangoli ABC, DEF (*fig.*8.), che abbiano l'angolo B=E, l'angolo C=F, ed il lato AB=DE. Se l'angolo A fosse eguale all'angolo D, è chiaro, che il triangolo BAC sarebbe eguale ad EDF (§.42.); supponghiamo, che l'angolo D sia eguale BA*f*, saranno i due triangoli BA*f*, EDF perfettamente eguali (ibid.), e l'angolo A*f*B=DFF=ACB. Or vediamo se è possibile che l'angolo A*f*B=C.

Si produca la retta A*f* in L; ed egli è chiaro, che tanto sia paragonare l'angolo C con A*f*B, quanto con C*f*L. Si divida C*f* in due parti eguali nel punto O, e condotta AO, si produca fino ad M, onde OM=OA, essendo similmente O*f*=OC, ed eguali gli angoli AOC, *f*OM, (§.28.) saranno i due triangoli AOC, *f*OM eguali (§.43.), onde l'angolo C=O*f*M; il che è assurdo, per essersi supposto C=C*f*L. Essendo adunque così, si deduce il seguente

Teor. *Se due triangoli abbiano due angoli respettivamente eguali a due angoli, ed un lato opposto ad uno di essi in un triangolo eguale al lato corrispondente nell'altro, saranno perfettamente eguali.*

§. 49. Essendo l'angolo C*f*L maggiore di C, sarà pure A*f*B maggiore di C. L'angolo A*f*B si dice *angolo esterno* del triangolo A*f*C, cioè l'angolo esterno è quello che risulta prolungandosi un lato. Coll'istesso metodo si può dimostrare, formando una costruzione analoga, che l'angolo A*f*B sia maggiore di CA*f*. Quindi *in ogni triangolo prodotto un lato, l'angolo esterno è sempre maggiore di ciascuno interno ed opposto.*

CAP.

CAP. VI.

Formazione delle figure quadrilatere, e loro proprietà.

§. 50. DAlla risoluzione dei problemi precedenti noi possiamo costituire le *figure quadrilatere rettilinee* secondo alcune determinate condizioni, e ne possiamo ricercare le proprietà.

Ci propooghiamo adunque il seguente

Probl. *Date due rette, ed un' angolo, costruire una figura quadrilatera, che abbia un' angolo eguale al dato, ed i lati opposti eguali respettivamente alle date rette.*

Sieno date le due rette CA, AB (*fig.*9.), che si pongano in modo, talchè costituiscano l'angolo X. Se coi centri B, C, e coi raggi BA, CA si descrivano due archi, che s' interseghino in D, unite le rette CD, DB, sarà CD=AB, BD=CA, l'angolo A= X, e la figura ABCD sarà perçiò la figura richiesta.

§. 51. Esaminiamo ora le proprietà della costrutta figura. E primieramente congiunta CB, che dicesi *diagonale* della figura quadrilatera, il triangolo CDB risulterà perfettamente eguale all'altro CAB (§. 34.).

Onde sarà l'angolo D=A, DCB=CBA, DBC=BCA, e perciò l'angolo DCA=ABC. Quindi il

Teor. *Ogni figura quadrilatera in cui i lati opposti sono eguali, gli angoli opposti lo saranno altresì, e la diagonale divide la detta figura in due triangoli perfettamente eguali.*

§. 52. Si dividano ora in parti eguali ne'punti E, F i due lati opposti CD, AB della medesima figura, ed i due triangoli CEQ, QFB saranno perfettamente eguali, per avere il lato EC=FB, ed i due angoli ECQ, CQE respettivamente eguali agli angoli QBF, BQF. Onde si otterrà l'angolo CEQ=QFB, CQ=QB, ed EQ=QF. Similmente si può dimostrare, che l'altra diagonale resti bisecata da EF, e che vicendevolmente la bisechi. Passerà dunque pel punto Q, pel quale pure passerebbe la retta congiungente i punti di mezzo de' lati opposti CA, BD. Resta dunque dimostrato, *che in qualunque figura quadrilatera, che ha i lati opposti eguali, le diagonali, e le rette congiungenti i punti di mezzo de' lati opposti, si bisecano scambievolmente nel medesimo punto.*

§. 53. Similmente si conduca pel punto Q qualunque retta LI, ed i due triangoli CLQ, BIQ avendo CQ=QB, ed i due angoli LCQ, CQL, rispettivamente eguali ai due angoli QBI BQI, saranno perfettamente eguali, e si otterrà LQ=QI, CL=BI, e l'angolo CLQ=QIB. Quindi si deduce *che qualunque retta passi pel punto Q, incontrando i lati opposti resta divisa in due parti uguali.*

§. 54. Essendosi dimostrato, che tutte le rette, le quali passano pel punto Q restano divise in parti eguali, incontrando i lati opposti CD, AB, o gli altri AC, DB, non è possibile, che questi lati opposti s' incontrino mai comunque si producano dall' una, o dall' altra parte, perchè i loro punti corrispondenti sono egualmente distanti dal punto Q. L'istessa verità si dedurrebbe dall' essersi dimostrato l' angolo EFB, eguale all'altro FEC, perchè nel caso che le rette AB, CD s' incontrassero, costituirebbero un triangolo in cui l'angolo esterno sarebbe eguale all' interno, ed opposto, il che è assurdo (§. 49.). Dunque

In ogni figura quadrilatera i cui lati opposti sono eguali, comunque questi si producano non si possono mai incontrare,

§. 55. Quindi comunque si diminuisca la distanza tra AC, BD, non si potranno mai intersecare, ma soltanto si com-

combaceranno se quella distanza svanisca; cioè questi lati avvicinandosi, alla fine caderanno l'uno sull'altro.

§. 56. S'intenda ora la metà della figura EFBD rivoltarsi sull'altra metà CEFA, ed egli è di per se evidente, che quantunque in questa rivoluzione la BD si ravvicini ad AC, pure se non cade sopra di essa, non potrà intersecarla comunque entrambe si producano (§. 55.). L'istesso devesi rilevare nelle due figure CEFA, EFBD (*Fig.* 10.), dalle condizioni che si sono precedentemente determinate (§. 52, 53). Infatti se si supponga che l'angolo DEF sia maggiore di CEF, dovrà pure l'angolo EFA, dimostrato uguale a DEF, esser egualmente maggiore di EFB = FEC. E quindi supposto che la figura DEFB cada nel sito FEMN, il lato EM caderà fuori della figura CEFA, ed il lato FN dentro della medesima, e dovrà esser l'angolo MEC = NFA; onde unite le rette CM, AN saranno queste uguali fra loro, perchè sono perfettamente uguali i due triangoli MEC, AFN. Dunque nella figura CMNA i lati opposti sono uguali, e comunque prodotte le rette AC, NM non si possono incontrare (§. 54.); e qualora continuamente si ravvicinano mai s'intersegheranno, ma l'una caderà sull'altra.

§. 57 Resta dunque dimostrato evidentemente che rivoltata la figura EFBD sull'altra FECA, il lato BD deve o cadere sulla retta AC, o pure acquistare un sito tale, che comunque prodotti essi lati non si possano mai incontrare. Vediamo dunque quale delle due condizioni si debba realizzare. Or egli è di per se chiaro, che se i due lati AC, BD sono alla medesima distanza dal punto E, debba realizzarsi la prima condizione, cioè il lato BD debba cadere sull'altro AC. In effetto le rette AC, BD sono in tal caso alla medesima distanza dal punto G, perchè se si conduca GR perpendicolare ad AC, questa prodotta in S, sarà pure per-

perpendicolare a BD (§. 53), ed RG = GS. Dunque il lato BD non potrà cadere in MN, ma dovrà cadere su di AC, come in bc. Quindi la vera posizione della figura EFBD sarà EFbc.

§. 58. Il triangolo CEc è isoscele, e perciò l'angolo c = ECc; ma c = D, e l'angolo ECc costituisce due retti con DCA: dunque i due angoli D, ed DCA costituiscono due retti etc. Quindi il

Teor. *In ogni figura quadrilatera, in cui i lati opposti sono uguali, gli angoli posti dalla medesima parte sono uguali a due retti.*

§. 59. Quindi se in una figura quadrilatera in cui i lati opposti sono uguali vi sia un'angolo retto, tutti gli altri saranno retti, e la figura si dirà *rettangolo.* E se oltre agli angoli retti i lati siano tutti uguali fra loro, la figura si dirà *quadrato*. Se poi tutti i lati siano uguali fra di loro, e non già gli angoli la figura si dirà *rombo*; e qualora una figura abbia soltanto gli opposti lati uguali si dice *romboide*. Ogni altra figura quadrilatera si dice *trapezio*.

§. 60. Dalle cose dimostrate noi ne deduciamo, che l'esposte figure si possano anche costruire nel seguente modo. E primieramente per costruire un rettangolo conviene alzare alle estremità di una retta che ne dev'essere la base due perpendicolari uguali alla retta che ne deve costituire l'altezza, e dipoi unire l'estremità di queste due perpendicolari. Inoltre per costruire un quadrato si dev' eseguire la medesima operazione che pel rettangolo, ma l'altezza dev'essere uguale alla base.

Per costruire un romboide è necessario costituire sotto un dato angolo CAB le rette, che ne devono essere i lati CA, AB. Indi riflettendo che i due angoli posti dalla medesima parte devono adeguare due retti (§. 58.) si dovrà fare l'angolo DCc = CAB, e DC =

 AB,

AB, e di poi unire BD, sarà questa $=$ AC, ed ACDB il romboide richiesto.

Qualora finalmente si debba costruire un rombo, si devono prendere due lati uguali, ed eseguire la medesima operazione, che pel romboide.

CAPO VII.

Della posizione, che devono aver le rette per esser parallele. Loro proprietà.

§. 61. NOi abbiamo dimostrato nelle precedenti ricerche, che in qualunque figura in cui i lati opposti sono uguali, questi prodotti comunque da entrambe le parti non si possono mai incontrare (§.54.), e che in tali figure gli angoli posti dalla medesima parte costituiscono due retti (§.58.) Sicchè le linee rette possono avere una tale posizione, che prodotte comunque non s'incontrino giammai, sebene esistano sopra della medesima superficie piana; e per ritrovore una tale posizione non si deve far altro che costruire una figura quadrilatera, che abbia i lati opposti uguali (§.54), o pure condurre le due rette HL, IM (*fig.* 11.) in modo che i due angoli HAB, IBA costituiscano due retti, cioè che l'angolo IBQ sia $=$ HAB: perciocchè si è dimostrato che tali rette HL, IM non si debbano mai incontrare (§§. 54. 58).

§. 62. Proseguiamo dunque ad analizzare le Condizioni, che hanno siffatte rette. Noi sappiamo dal (§. 51.) che se si prendano le parti uguali AD, BC, e si unisca DC, sia ADCB una figura in cui i lati opposti sono uguali. Quindi l'angolo ABC costituirà due retti coll'angolo DCB, o sia l'angolo ABM sarà uguale all'angolo DCB. E perciò se dai punti D, A si abbassino le perpendicolari DS, AT, i due

i due triangoli rettangoli DCS ABT saranno equiangoli, ed inoltre uguali, perchè DC $=$ AB. Dunque la perpendicolare DS $=$ AT (§. 48.); ed il medesimo potendosi dimostrare di tutte le altre perpendicolari, ne risulta il seguente

Teor. *Due linee rette possono avere una tale posizione, che le perpendicolari che si abbassano dall'una sull'altra sono tutte uguali.*

Queste rette si dicono *equidistanti*, o *parallele*.

§.63. Determiniamo ora le condizioni di una retta che intersega le parallele, per esempio della retta DBR. Egli è dimostrato che l'angolo ADB sia $=$ DBC; questi due angoli si dicono *alterni*. Or l'angolo DBC è $=$ RBM, dunque sarà pure l'angolo RBM $=$ ADB: il primo di questi due angoli si dice *esterno*, e l'altro *interno ed opposto*. Inoltre costituendo l'angolo RBM col conseguente MBD due retti, saranno pure uguali a due retti gli angoli MBD, BDL: questi due angoli si dicono *interni posti dalla medesima parte*.

§. 64. Viceversa se i due angoli interni posti dalla medesima parte MBD, BDL sieno uguali a due retti, le rette MT, LH saranno parallele (§§.58, 51. 54.). Inoltre se si supponga che l'angolo esterno RBM sia uguale all'interno ed opposto RDL, saranno pure uguali a due retti i due interni ed opposti MBD, BDL, e le rette HL, TM parallele. E finalmente col medesimo raziocinio si può dimostrare, che se due rette intersegate da una terza, abbiano gli angoli alterni uguali debbano essere parallele. Dai §§. 63, 64 si deduce dunque il seguente

Teor. *Se due rette parallele vengono intersegate da una terza retta saranno 1. gli angoli alterni uguali, 2. l'angolo esterno adequerà l'interno ed opposto, 3. e gli angoli interni posti dalla medesima parte costituiranno due retti.*

E vi-

E viceversa qualora una di queste tre condizioni si realizzi in due rette intersegate da una terza, le sudette due rette dovranno essere parallele.

Queste proprietà adunque sono i caratteri per distinguere se due date rette siano parallele.

§. 65. Quindi se due rette siano parallele ad una terza, saranno parallele fra di loro: perchè i sudetti caratteri si realizzano nella prima retta, e nella terza che sono parallele, ed hanno similmente luogo nella seconda, e terza che si suppongono del pari parallele. Dunque la prima, e la seconda retta han pure i caratteri delle parallele.

Similmente se due rette sieno uguali, e parallele, le congiungenti lo saranno parimenti.

§. 66. Quindi se si voglia per un dato punto condurre una retta parallela ad una data, converrà tirare una qualunque retta, e di poi costituire l'angolo esterno uguale all'interno ed opposto, o pure gli angoli alterni uguali. Così pel punto D si condurrà DP parallela ad AQ, tirando comunque la retta DB e dipoi facendo l'angolo CDB uguale all'alterno DBA; o pure tirando DA, e facendo l'angolo esterno HDP uguale all'interno ed opposto DAB.

CAP. VIII.

Conseguenze che deduconsi dalla teoria delle parallele.

§. 67. Si deduce dalle proprietà che noi abbiamo dimostrato delle parallele, che abbia i lati opposti paralleli ogni figura che ha eguali i lati opposti, e viceversa. Questa figura si dice *parallelogrammo*. E perciò il rettangolo, il quadrato, il rombo, ed il romboide sono una specie di parallelogrammo.

§. 68. Quindi al parallelogrammo convengono tutte quelle proprietà che abbiamo dimostrato appartenere alle figure quadrilatere, nelle quali i lati opposti sono eguali. E perciò gli angoli interni posti dalla medesima parte saranno uguali a due retti, e quindi *in ogni parallelogrammo tutti gli angoli sono uguali a quattro retti.*

§. 69. Ogni parallelogrammo si divide in due triangoli perfettamente uguali: dunque tutti gli angoli del triangolo sono la metà degli angoli del parallelogrammo, cioè *sono uguali a due retti.* Inoltre prodotto un lato, l'angolo esterno costituisce parimenti due retti coll'angolo interno suo conseguente, dunque *l'angolo esterno dee essere uguale agli altri due angoli che sono gl' interni ed opposti.*

§. 70. Dalle verità stabilite nel prec. §. si deduce che due triangoli per essere equiangoli, è sufficiente che abbiano soltanto due angoli eguali. Onde due triangoli rettangoli saranno equiangoli, subito che si riconosce, che hanno un angolo uguale ad un angolo. Inoltre i triangoli isosceli sono equiangoli non solamente se l'angolo verticale sia uguale all'angolo verticale, ma pure quando un'angolo della base adequa un'angolo consimile. Finalmente tutti i triangoli equilateri sono equiangoli, e ciascun angolo dei medesimi adequa due terze parti del retto. E perciò per trisegare l'angolo retto non si deve far altro, che costruire al suo vertice l'angolo del triangolo equilatero, perchè l'eccesso del retto sopra siffatto angolo ne sarà la terza parte richiesta.

§. 71. Ora noi ci proponiamo il seguente

Probl. *Determinare a quanti retti sono uguali gli angoli interni di una qualunque figura rettilinea.*

Egli è di per se evidente, che convenga determinare in quanti triangoli si possa dividere una figura di un dato numero di lati, perchè sapendosi che gli angoli interni di ciascun triangolo sono uguali a due retti, si ritroverà che gli angoli della figura debbano essere uguali a tanti retti, quanto è il doppio numero de' triangoli. Or egli è chiaro che se dal vertice di un' angolo si conducano agli altri vertici delle rette, ne debbano risultare tanti triangoli, che avranno il medesimo comune vertice, e per basi i lati, eccetto quelli due lati, che sono intorno al sudetto vertice comune. Dunque il numero de' triangoli in cui si divide un poligono adegua il numero dei lati meno due, e perciò *la somma di tutti gli angoli della figura sarà uguale a tanti retti, quanto n'è il doppio numero dei lati meno quattro.*

§. 72. Per determinar poi a quanti retti siano uguali tutti gli angoli esterni di una figura, che risultano prolungandosi tutti i lati, egli è sufficiente riflettere, che ciascun angolo esterno costituisce due retti col suo conseguente interno, e perciò la somma di tutti gli angoli esterni, e degl' interni dev' essere uguale a tanti retti, quanto è il doppio numero de' lati; ma tutti gli angoli interni sono uguali a tanti retti, quanto è il doppio numero dei lati meno quattro, dunque *la somma di tutti gli angoli esterni è uguale a quattro retti.*

§. 73. Passiamo ora alle conseguenze che si riferiscono ai parallelogrammi. E primieramente considerando i due parallelogrammi ADCB, ADST, de' quali il primo è obbliquangolo è l'altro è rettangolo, si ravvisa che siano uguali di spazio, perchè lo spazio ADSB è comune ad entrambi, ed il triangolo DCS è perfettamente uguale all'altro ABT (§. 62.). Inoltre CS essendo uguale a BT, sarà la base del primo parallelogrammo CB uguale a quella del secondo ST. Ma la perpendicolare DS è *l' altezza* comune tanto del parallelogrammo rettangolo, che dell' obbliquangolo. Dunque *un parallelogrammo rettangolo adequa l' obbliquangolo se hanno uguali basi, ed uguali altezze, o pure se sieno tra le medesime parallele.*

§. 74. Sieno ora due parallelogrammi obbliquangoli posti sopra uguali basi, e tra le medesime parallele, o pure (il che si riduce allo stesso) abbiano uguali altezze, essendo ciascun di questi uguale ad un rettangolo, che abbia la loro base, ed altezza, saranno tra di loro eguali di spazio. Or divisi questi parallelogrammi eguali di spazio per metà per mezzo di diagonali, ne risultano de' triangoli uguali, che hanno altresì eguali basi, ed altezze, dunque

Teor. *I parallelogrammi, ed i triangoli, che hanno eguali basi, ed altezze, o sia sono posti fra le medesime parallele, sono eguali di spazio.*

Ed il parallelogrammo è doppio del triangolo qualora hanno la base, ed altezza medesima.

§. 75. Variando l'altezza di un triangolo restando la medesima base, deve necessariamente variar *l' aja*, o sia lo spazio. Quindi due triangoli, che hanno basi eguali non possono essere eguali nello spazio, che nel caso in cui le altezze sieno altresì eguali; e perciò è vero altresì, che *due triangoli eguali, che hanno basi eguali devono pure avere altezze eguali, e vicersa.*

Da ciò si deduce, che la retta congiungente i vertici di due triangoli eguali, che habbiano la medesima base deve esser parallela alla base istessa.

§. 76. Ora è facilissima la trasformazione del triangolo in parallelogrammo, e viceversa, perchè ogni triangolo è eguale ad un parallelogrammo, che ha la medesima sua altezza, e la metà della sua base, o pure la stessa base e la metà dell' altezza; e perciò ogni parallelogrammo è uguale ad un triangolo, che ha la medesima base, ed il doppio dell' altezza del triangolo, o la stessa altezza, e 'l doppio della sua base. Quindi un parallelogrammo si trasforma in quanti triangoli

goli si vogliono tutti diversi, ma della medesima altezza, e similmente il triangolo si trasforma in quanti parallelogrammi diversi si vuole.

§.77. Per fare un'applicazione di queste verità, nel quadrato ABCD (*fig.* 12.) si produca il lato AD in E comunque, ed il triangolo BEC sarà metà non solo del quadrato BD, ma puranche del rettangolo, che habbia per bese CE, e per altezza la sua altezza medesima, cioè BR, abbassata da B perpendicolarmente sopra di EC prolungata in R. Dunque sarà il quadrato BD eguale al rettangolo, che ha per lati CE, BR, cioè al rettangolo di CE in BR. *Dunque se data la retta M si voglia costruire un rettangolo, che habbia M per base, e sia eguale al dato quadrato*, non si deve far altro, che col centro C, e raggio M descrivere un' arco, che incontri AD in E, ed abbassata da B la perpendicolare BR, sarà questa l'altezza del rettangolo richiesto.

§. 78. Ora essendo retto l'angolo BCD, l'angolo BCR mancherà all'altro DCE per formare un retto (§.26.), cioè sarà *complemento* dell'altro DCE. Quindi abbasta la perpendicolare DG, sarà altresì l'angolo CDG complemento di DCG (§.69.), e perciò sarà l'angolo BCR = CDG; ma il lato BC = CD, ed inoltre i triangoli BRC, DGC sono rettangoli; dunque saranno perfettamente eguali, ed il lato BR = CG (§.42.), sarà dunque altresì il quadrato ABCD = al rettangolo di CE in CG, o sia al rettangolo CGQS, fatta CS = CE. Similmente compito l'altro rettangolo GEFQ si dimostra, che sia eguale al quadrato fatto sopra DE. Ma essendo CE = CS, e l'angolo CDE retto, CEFS è quadrato; dunque.

Teor. *Nel triangolo rettangolo il quadrato fatto sul lato posto incontro all'angolo retto, è eguale ai quadrati fatti su i lati rimanenti.*

Il lato posto incontro all' angolo retto si dice *ipotenusa*, e gli altri *cateti*.

§. 79. Si propone ora il seguente

Probl. *Dato un rettangolo formarli un quadrato uguale.*

Sia CSQG il rettangolo proposto. Egli è chiaro dalle cose precedentemente esposte, che se si faccia CE=CS, e si ritrovi in EG prolungata un punto D, sicchè unite le rette DC, DE sia l'angolo CDE retto, debba essere il quadrato formato su di CD uguale al rettangolo CQ. Tutta dunque la difficoltà consiste nel costruire il triangolo rettangolo da CDE. Ora nel triangolo rettangolo gli angoli DCE, CED sono uguali al retto CDE; se dunque si supponga che DCE sia = CDH, sarà HDE=DEH, ed essendo isosceli i triangoli DHC, DHE saranno le tre rette HD, HC, HE uguali fra di loro. Dunque se si divida CE in due parti uguali in H, e col centro H e col raggio HC si descriva un' arco che interseghi QG in D, sarà D il punto richiesto.

§. 80. Nel triangolo rettangolo CDE il quadrato di CE essendo eguale ai quadrati di CD, DE, sarà il quadrato di CD eguale alla differenza de' quadrati di CE, DE. Dunque è facile ritrovar la differenza di due quadrati. Tutto si riduce a descrivere sul lato CE del quadrato maggiore un semicircolo CDE, e di applicare in esso una retta DE eguale al lato del quadrato minore, la retta DC sarà il lato del quadrato richiesto.

§. 81. Veniamo ora alla generale trasformazione delle figure le une nelle altre: ed a tal uopo ci accorgiamo, che avendo esposto il metodo di formare un quadrato eguale alla somma di due altri (§.78.), si può facilmente ritrovare un quadrato eguale alla somma di quanti quadrati si vogliono. Infatti facendosi un'angolo retto, e prendendosi sopra i suoi lati indefiniti due parti rappresentanti i lati di due dati quadrati, l'ipotenusa rappresenterà il lato del quadrato, che ne costituisce la somma. Così procendo innanzi si troverà un quadrato eguale a tre, quattro ec. quadrati.

§. 82. Ora sapendosi che ogni triangolo è uguale al rettangolo, che ha la medesima base, e la metà dell' altezza sua (§.79.) si potrà costruire un quadrato eguale ad un triangolo; e potendosi ogni figura rettilinea dividere in triangoli, si potrà ella trasformare in quanto al suo spazio in un quadrato; cioè si può ogni poligono rettilineo *quadrare*.

C A P. IX.

Delle proprietà della linea circolare.

§. 83. NOi finora abbiamo esaminato le proprietà che derivano dalle posizioni delle linee rette, e dei spazj, che le medesime cingono; è necessario ora considerare le proprietà del circolo.

Egli è di per se chiaro, che tutte le proprietà del circolo devono essere uno sviluppo della sua primitiva proprietà, quale è quella, che tutti i raggi sono eguali. In fatti sia il circolo FAB (*fig.*13.), condotti i due raggi CA, CB, ed uniti i punti A, B sarà ACB un triangolo isoscele; e noi per isviluppare le proprietà del circolo altro non faremo, che svolgere quelle del triangolo isoscele.

§. 84. Infatti nel triangolo isoscele abbassata dal vertice una perpendicolare sulla sua base, questa cade nel punto di mezzo (§§.69.42.); e viceversa se dal punto di mezzo della base si elevi una perpendicolare, questa passerà pel vertice (§.44.). Dunque se dal centro C si abbassi CDE perpendicolare sulla corda AB, la dividerà in

in parti eguali; e viceversa se dal punto D di mezzo della corda AB si elevi una perpendicolare, questa passerà pel centro; onde il

Teor. *Nel circolo le corde sono divise in parti eguali dal diametro ad esse perpendicolare; e la perpendicolare alla corda nel suo punto di mezzo passerà per lo centro.*

§. 85. Quindi se non si sappia il centro di un circolo, e si voglia determinare, converrà dal punto di mezzo di una corda elevare una perpendicolare, che prodotta da entrambe le parti fino alla circonferenza sarà diametro, e perciò divisa in due parti eguali darà il centro richiesto.

§.86. Se poi si abbia un'arco, e *si voglia determinare il suo centro*, si dovrà riflettere, che il Teorema precedente avendo luogo per tutte le corde, si devono condurre due corde nell'arco medesimo, ed elevare dai loro punti di mezzo le perpendicolari, queste si dovranno incontrare nel centro dell'arco.

§. 87. Si vede inoltre, che il problema di determinare il centro di un'arco ci conduce a risolverne un'altro, cioè, *a far passare un circolo per tre dati punti*. Infatti uniti questi punti per mezzo di due rette, saranno queste le corde, e nel medesimo modo di prima si determina il centro del circolo a cui esse appartengono.

§. 88. Se ora si conduca un qualsivoglia altro raggio CF, e si uniscano pure le rette FA, FB, saranno altresì isosceli i triangoli FCA, FCB; ed essendo l'angolo CFA=CAF, sarà l'angolo esterno ACD che è eguale ad entrambi (§.69.) doppio di ciascuno di essi, per esempio di AFC. Similmente DCB è doppio di CFB. Dunque tutto ACB è doppio di AFB, e perciò

Teor. *Nel circolo l'angolo al centro è doppio dell' angolo alla circonferenza qualora poggiano sull' arco medesimo.*

Lo

§. 89. Lo spazio AFB, egualmente che l' altro AEB si dicono *porzione di circolo*, e l'angolo AFB si dice *angolo della porzione*, al pari di ogni altro in essa compreso.

Dunque potendosi sempre dimostrare nel modo medesimo, che l'angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza poggiante sul suo arco medesimo, sarà altresì vero il seguente

Teor. *Tutti gli angoli compresi nelle stesse porzioni di circolo sono eguali fra di loro.*

§. 90. Resta ora ad osservare che rapporto abbia coll' angolo retto quello della porzione di circolo. All' istante si ravvisa, che *se questa porzione sia semicircolo, l' angolo debba esser retto; se la porzione sia maggiore del semicircolo, sarà acuto; e finalmeute ottuso quando è minore del semicircolo medesimo.*

§. 91. Or poichè siccome abbiamo dimostrato, che l' angolo AFB sia la metà dei due ACE, ECB, potendosi dimostrare altresì, che l'angolo AEB sia la metà dei due ACF, BCF, si rileverà facilmente, che nel quadrilatero iscritto nel circolo AFBE i due angoli opposti AFB, AEB presi insieme sono eguali alla metà degli angoli costituiti intorno ad un punto, cioè sono eguali a due retti (§.26.). Dunque

Teor. *Gli angoli opposti del quadrilatero iscritto nel circolo costituiscono due retti.*

§. 92. Quindi allora un circolo passerà per quattro dati punti, quando il quadrilatero costituito dalle quattro rette congiungenti abbia l' accennata proprietà. E generalmente un circolo passerà per quanti punti si vogliono, se tutti i possibili quadrilateri nei quali il poligono che ne risulta, si potrà risolvere, hanno sempre gli angoli opposti eguali a due retti.

Dal

§. 93. Dal (§.90.) si deduce, che data una porzione di circolo si conosce l' angolo di cui è capace; viceversa ora si può proporre il

Probl. *Sopra una data retta costruire una porzione di circolo capace di un' angolo dato.*

Sia AB la retta, ed X l' angolo dato; egli è chiaro, che se AFB sia la richiesta porzione di circolo, sarà l' angolo AFB=X. In questo caso se il triangolo AFB fosse isoscele, divisa AB in due parti eguali nel punto D, sarà DF perpendicolare ad AB, e perciò il punto F sarà determinato dalla perpendicolare EF. Si costruisca adunque il triangolo isoscele XMN, e si avrà l' angolo M= FAB. Dunque se realmente si faccia il triangolo isoscele MXN, e l' angolo BAF=M, e per lo punto F determinato dalla perpendicolare innalzata dal punto di mezzo D, e per i due punti A, B à faccia passare un circolo, darà la porzione richiesta.

§. 94. Consideriamo ora le rette, che si possono tirare da un qualunque punto preso nella circonferenza; ed egli è chiaro, che queste rette possono tirarsi o perpendicolarmente al raggio, o obbliquamente. La retta XY (*fig.* 14.) sia tirata perpendicolarmente al raggio, ed AF sia tirata obbliquamente. Or poichè nel primo caso il punto A d' onde si è tirata XY è il più vicino al centro di ogni altro punto di questa medesima retta, tutta questa retta caderà fuori del circolo. Infatti preso il punto E, sarà CE maggiore di CA, maggiore di CD, onde se il punto D è nella circonferenza, il punto E deve cader fuori della medesima, e così degli altri. Questa retta XY, che incontra il circolo in un sol punto si dice *tangente*; onde

Teor. *Nel circolo la tangente è perpendicolare al raggio, e viceversa.*

Fi-

§. 95. Finalmente consideriamo le rette, che si possono tirare obbliquamante dal punto A. Qualunque sia la retta tirata obbliquamente da questo punto, è evidente che sopra la medesima si possa abbassare dal centro una perpendicolare; e che il punto dove questa l'incontra sia più vicino al centro del punto A. Caderà dunque dentro del circolo, e la retta obbliqua lo interseghera: perciò

Teor. *Tra la circonferenza, e la tangente non si può condurre alcuna retta, che non interseghi la circonferenza medesima.*

§. 96. Dal (§.94.) si rileva, che dato un punto nella circonferenza, si conduce la tangente con elevare al raggio la perpendicolare. Ora cerchiamo col principio medesimo come si possa risolvere il seguente

Probl. *Dato un punto fuori di un circolo tirare la tangente al circolo medesimo.*

Sia il punto A (*fig.*15.) fuori del circolo LS, da cui si debba tirare una tangente al circolo medesimo. Dal (§.94.) apparisce, che bisogni trovare il punto L, sicchè tirato il raggio CL, e condotta LA, l'angolo ALC sia retto. Ma noi sappiamo dal (§.90.), che l'angolo nel semicircolo è retto; dunque divisa AC in due parti eguali, e descritto il circolo ALCL, il medesimo interseghera il circolo dato nei punti L, L, talchè condotte le rette AL, AL queste saranno due tangenti, e saranno fra di loro eguali, per l'eguaglianza de' triangoli ACL, ACL (§.47.)

§. 97. Proseguiamo ora ad analizzare le proprietà delle tangenti. Noi sappiamo, che costituiscono angoli retti con i raggi (§.94.) e di più, che sono retti gli angoli nei semicircoli (§.90.); dunque se si produca AC in G. (Fig.14.) e si costituisca il semicircolo AFG, sarà l'angolo $GFA = GAY$, cioè $FGA + GAF = GAY$ (§.69.; onde tolto GAF, resterà $AGF = FAY$, come altresì ad ogni altro degli angoli costituiti nella porzione alterna del circolo ADGF (§.89.) Quindi

Teor. *L'angolo compreso dalla tangente, e dalla secante è eguale a quello costituito nell'alterna parte del circolo.*

§. 98. Se in ultimo consideriamo due cerchi, che si toccano, noi rileveremo, che allora hanno una comune tangente al punto di contatto. Ma noi abbiamo dimostrato, che la tangente è perpendicolare al diametro; dunque se dal punto di contatto della comune tangente si elevi una perpendicolare, questa passerà pei centri di entrambi i cerchi. Quindi

Teor. *Due circoli che si toccano al di dentro, o al di fuori, la linea retta congiungente i loro centri passa pel punto del contatto.*

CAP. X.

Universalizzazione de' principj precedenti. Delle Ragioni.

§. 99. Finora abbiamo esaminato le proprietà delle diverse parti dello spazio, e riducendo alla nostra memoria tutto ciò che abbiamo fatto, si scorgerà, che tutte le nostre ricerche si sono ridotte a determinare la loro eguaglianza, ed ineguaglianza. In questo esame noi abbiamo considerato simultaneamente le diverse parti dell'estensione, poichè senza questa simultanea considerazione non è possibile concepire la loro eguaglianza, o differenza.

§. 100. Egli è però di per se chiaro, che l'eguaglianza, o la differenza non può cadere su le parti dello spazio in generale. Così non si può richiedere se una linea sia eguale, o maggiore di una superficie, di-

di un solido, di un'angolo, ma soltanto se è eguale, o maggiore di un' altra linea, poichè il principio della soprapposizione non può aver luogo, che tra una linea ed un' altra, tra un'angolo ed un'altr'angolo ec. Dunque è convenuto distinguere queste grandezze tra le quali ha luogo l'eguaglianza, e l'ineguaglianza con un nome, e si son dette grandezze *omogenee*, dicendosi *eterogenee* quelle altre, che non hanno queste proprietà.

§. 101. Quindi le sole grandezze omogenee si possono simultaneamente considerare per concepirne l'eguaglianza, ed allora ci formiamo l'idea di ciò, che comunemente dicesi *paragone*, *rapporto*, *o ragione* di queste grandezze. Di questi rapporti, e di queste ragioni delle grandezze è necessario, che ora noi intraprendiamo un'esatta analisi; e siccome non è necessario limitare le nostre considerazioni alle sole grandezze appartenenti all'estensione, così esporremo la generale teoria delle ragioni delle quantità, qualunque queste si sieno, cioè indagheremo le proprietà de'rapporti di tutto ciò, che è capace di accrescimento, e di diminuzione.

§. 102. Incominciamo dal considerare una qualunque grandezza A. Una delle prime operazioni dello spirito si è quella di ripetere più volte siffatta grandezza A, sicchè eguagli l'altra B; e già noi abbiamo esposto (§. 10 che questo istesso mezzo ci si presenta allorchè vogliamo misurare qualunque grandezza. Ora si dirà, che B contiene A un certo numero di volte, ed in questo stato di cose altro non intenderemo di ciò, che dicesi *contenere*, *che la proprietà*, *che ha una grandezza di adequare un' altra ripetuta più volte*. La grandezza A si dice *misura*, o parte *aliquota* di B, e viceversa B, *moltiplice* di A.

§. 103.

§. 103. S' intenda ora la medesima quantità A ripetuta un' altro numero di volte talchè diventi C. In questo caso B, C sono entrambe misurate da A, che perciò dicesi *comune misura*, e le sudette quantità B, C sono dette fra di loro *commensurabili*. Ciò posto considerando simultaneamente le due grandezze B, C egli è chiaro, che una dovrà comprendere, o esser compresa nell'altra, e per avere un' idea distinta di questa *contenenza*, è necessario concepire quanto sieno le parti eguali ad A, che sono contenute in B, e quante sono le medesime parti contenute in C; poichè B tante volte comprenderà C, quante volte il primo numero di parti comprende il secondo numero. Quindi si va estendendo l'idea della contenenza delle quantità, poichè il primo numero può comprendere, o essere compreso nel secondo esattamente, o con frazione.

§. 104. Dando un nome a questo numero di volte, che la prima grandezza comprende la seconda, si è detto *quantità*, *o esponente* della ragione, che esprime quanto sia grande siffatta contenenza della seconda grandezza nella prima. Similmente per distinguere la prima grandezza che si paragona, dalla seconda, si è detta la prima *antecedente*, e la seconda *conseguente*, e ciascuna grandezza suol dirsi *termine* della ragione.

§. 105. La quantità adunque della ragione ci esprime qual numero di volte l'antecedente comprende il conseguente. Quindi il conseguente preso tante volte, quante esprime la quantità della ragione, ci dà l'antecedente; ed il medesimo antecedente diviso in tante parti, quante n' esprime la quantità della ragione, ciascuna di queste parti sarà eguale al conseguente.

§. 106. Avendo sino al presente considerato la ragione delle quantità B, C, che sono nate dalla ripetitizione della stessa quantità A, nasce ora immediatamente la ricerca di determinare, se le stesse proprietà debbano convenire alla ragione di due quantità C, D prese ad arbitrio. Or egli è di per se evidente, che essendo omogenee queste due grandezze, deve fra di loro intercederci rapporto, cioè l' una deve un certo numero di volte comprender l' altra. Ma quale è il mezzo onde avere un' idea distinta di siffatta contenenza? Dalle cose dette precedentemente si rileva, che convenga misurare queste due quantità, perchè stabilita una qualunque unità, si saprà allora quante parti eguali a siffatta unità l' una contiene, e quante ne comprende l' altra. Ma se è sempre possibile di stabilire un' unità, che misùri esattamenee una quantità, non sempre riesce, che questa stessa unità esattamenentri nell' altra senza alcun residuo; cioè non è sempre possibile di trovare fra le due proposte quantità una comune misura. Nel caso in cui è impossibile dalla natura delle quantità di trovare una comune misura, le sudette grandezze si dicono *incommensurabili*; ed in tal caso sebbene abbiamo un' idea diftinta della contenenza delle grandezze incommensurabili, pure non possiamo formarci un' idea distinta della quantità di siffatta contenenza in numeri, perchè non possiamo determinare quante parti eguali all' unità comprenda l' antecedente, e quante di queste medesime parti vengano contenute dal conseguente.

§. 107. Quì è necessasio avvertire che quanto più piccola si considera l' unità relativamente ad uno dei temini della ragione, tanto più diventerà piccolo il residuo che si ottiene nell' istituir la misura dell' altro termine. *Quindi quanto più piccola si prenda la parte aliquota di uno dei termini, tanto più approssimante sa-*

rà l' idea, che noi acquistiamo della contenenza delle grandenze incommensurabili espressa in numeri.

§. 108. Si richiede ora se questa parte aliquota abbia, o no termine nella diminuzione? Essendo arbitraria l' unità, e siffatta parte aliquota, *si può prendere la medesima minore di qualunque grandezza data*. E perciò ci possiamo approssimare per quanto vogliamo, per aver in numeri la quantità incommensurabile della ragione.

§. 109. Ma in qual modo si esprime generalmente la quantità delle ragioni sieno commensurabili, sieno incommensurabili i termini? La quantità della ragione dovendo esprimere la contenenza del conseguente nell' antecedente, deve così contener l' unità, come l' antecedente contiene il conseguente. Per determinar dunque la quantità di una data ragione, conviene stabilire un' unità, e dipoi ritrovare una grandezza, che così comprenda siffatta unità, come l' antecedente comprende il conseguente. Tutta la difficoltà consiste adunque nel ritrovare siffatta quarta quantità.

CAPO XI.

Delle proporzioni.

§. 110. Consideriamo adunque le condizioni affinchè una quantità comprenda un' altra nel modo medesimo, che una siffatta contenenza intercede fra due altre quantità. In questo caso adunque due ragioni sono eguali fra di loro, e fiffatta eguaglianza di ragioni si dice *proporzione*. Quindi nella proporzione i due conseguenti sono contenuti, o contengono gli antecedenti nel medesimo modo.

§. 111. Quattro adunque sono i termini della proporzione due antecedenti, e due conseguenti. Può però avvenire, che l' antecedente della seconda ragione sia eguale al conseguente della prima, ed in questo caso essendo due termini eguali, si può dire, che nella proporzione ci sieno tre termini. In questo caso le proporzioni si dicono *continue*, per distinguerle dalle *discete* composte di quattro termini.

§. 112. Siccome si è convenuto che la ragione di A a B si esprima A : B, così l' eguaglianza di due ragioni di A : B, e di C : D, cioè la proporzione si esprime per A : B = C : D. La proporzione poi continua fra le tre grandezze A, B, C si esprimerà così A: B: C ∺, o pure A : B = B : C.

§. 113. Dall' esposta idea della proporzione egli è chiaro di per se, che se due grandezze sieno eguali, debbano serbare eguali ragioni ad una terza; e viceversa se mai due quantità serbano eguali ragioni ad una terza dovranno essere fra di loro eguali.

§. 114. Inoltre se la quantità A (fig. 16.) si replichi un dato numero di volte, e diventi E F, sarà E F moltiplice di A; e se l' altra quantità B si replichi lo stesso numero di volte, e diventi G H, sarà G H similmente moltiplice di B. Ora in tale caso A, e B si dicono *aliquote simili* di FE, e di GH; ed egli è di per se chiaro, *che i moltiplici serbano eguali ragioni alle loro aliquote simili*.

§. 115. Riflettendo ora che E F altro non è, che la somma di un dato numero di parti eguali ad A, e GH la somma del medesimo numero di parti eguali a B, è manifesto, che come A comprende B, così il suo moltiplice EF deve comprendere l' altro moltiplice GH; cioè *una grandezza sta all' altra, come il moltiplice dell' una al moltiplice simile dell' altra*. §. 116

§. 116. Si ripeta ora A un' altro numero di volte, e diventi A T, come B si ripeta pur lo stesso numero di volte, e diventi CO. In questo caso le quantità A, B non solo sono aliquote simili di EF, e di GH, ma pure di AT, e di CO. Ora AT sta ad EF, come il numero di parti eguali ad A, che comprende AT, al numero medesimo di parti, che comprende EF. Similmente come il numero di parti eguali a B, che comprende CO, sta al numero delle medesime parti comprese da GH, così sta CO a GH. Dunque AT : EF = CO : GH; e perciò *se le aliquote simili de' conseguenti sono pure aliquote simili degli antecedenti, esiste la proporzione*.

§. 117. Ora essendo AT, CO egualmente moltiplici di A, e B, se queste quantità sono omogenee, saranno fra di loro come siffatti moltiplici (§. 115); e perciò essendo per la medesima ragione A : B = EF : GH, sarà AT : CO = EF : GH, e perciò

Teor. *Se le aliquote simili dei conseguenti sono aliquote simili degli antecedenti, e tutte le quantità sono omogenee, il primo antecedente sarà al secondo antecedente, come il primo conseguente all' altro*.

§. 118. Ma avendosi due ragioni non sempre avviene, che le aliquote simili dei conseguenti sieno pure aliquote simili degli antecedenti. In questo caso o le aliquote simili dei conseguenti entrano ugual numero di volte negli antecedenti, tuttocchè vi restino dei residui, o l'aliquota di un conseguente entra nel suo antecedente più volte, che l' altra aliquota del conseguente nell' antecedente suo. In quest' ultimo caso non vi è dubbio che la prima ragione debba esser maggiore della seconda, e che non vi sia proporzione. Dunque solamente resta ad esaminare se vi sia proporzione, allora ra quando sempre le aliquote simili de' conseguenti entrano egual numero di volte negli altecedenti, che loro corrispondono nel caso che si abbiano dei residui.

§. 119. Sieno le due ragioni di AB: EF, e di CD: GH tali, che le aliquote simili de' conseguenti, qualunque si sieno, entrino sempre egual numero di volte negli antecedenti. Incominciamo dal supporre, se è possibile, che la prima ragione sia maggiore della seconda. Dunque essendo la ragione di AB : EF maggiore di quella di CD : GH; si potrà immaginare una parte di AB, che contenga EF nel medesimo modo, che CD contiene GH. Sia questa parte AT, e sarà AT : EF = CD : GH. Or egli è di per se chiaro, che si possa prendere di EF una parte aliquota minore di qualunque data, e perciò minore di TB. Siffatta aliquota sia A, e si prenda B aliquota di GH simile ad A; e si tolgano sifatte aliquote simili quante volte si possono dagli antecedenti, ed il residuo del primo antecedente sia BQ, necessariamente minore di BT, ed il residuo che si ottiene dal secondo antecedente sia DO. Essendo dunque le aliquote simili A, B dei conseguenti pure aliquote simili degli antecedenti AQ, CO, dovrà essere AQ: EF = CO: GH (§.116). Ma di quest'ultima ragione di CO: GH è maggiore quella di CD: GH; dunque sarà pure la ragione di CD: GH maggiore di quella di AQ: EF, e molto maggiore dell'altra di AT: EF, il che è assurdo, perchè abbiamo supposto essere CD: GG = AT : EF. Dunque non è la ragione di AB: EF maggiore della ragione di CD:GH; e nel medesimo modo si dimostra, che la ragione di CD: GH non possa esser maggiore di quella di AB: EF. Dunque dovranno essere eguali tali ragioni, ed AB: EF = CD: GH. Quindi il

Teor.

Teor. *Se tutte le aliquote simili dei conseguenti entrino egual numero di volte negli antecedenti, le due ragioni sono eguali fra di loro.*

§.120. Esaminiamo ora, se poste le medesime condizioni debbano essere gli antecedenti fra loro nella stessa ragione de' conseguenti. Si supponga primieramente che la ragione di CD: AB sia minore dell' altra di GH:EF. Dunque si può immaginare, che CD contenga una parte di AB, come GH contiene EF. Sia tale parte AT, e sarà CD: AT = GH: EF. Facendo la stessa costruzione di prima si otterrà CO: AQ = GH: EF. Dunque sarà CD: AT = CO: AQ, il che è assurdo, perchè mentre l' antecedente CD è maggiore dell' antecedente CO, il conseguente AT è minore di AQ. Dunque non può esser la ragione di CD : AB minore di quella di GH : EF. E nel medesimo modo dimostrandosi, che la ragione di CD : AB non può esser maggiore di quella di GH : EF, deve essere necessariamente CD : AB = GH : EF. Dunque

Teorema *Se le aliquote simili dei conseguenti entrino negli antecedenti egual numero di volte, dovrà essere l' antecedente all' antecedente, come il conseguente al conseguente.*

§. 121. Noi abbiamo riflettuto (§.118.), che non sempre le aliquote simili de' conseguenti potevano pure essere aliquote degli antecedenti. Ora è necessario determinare in quale caso riesca assolutamente impossibile trovare tali aliquote simili dei conseguenti, che siano pure aliquote simili degli antecedenti proporzionali. Egli è di per se chiaro che se gli antecedenti siano commensurabili con i loro conseguenti, e si prenda per parte aliquota del conseguente della prima ragione la sua comune misura col suo antecedente, deb-

 ba

ba pure l'aliquota simile dell'altro conseguente essere aliquota simile del corrispondente antecedente, perchè altrimenti non potrebbe sussistere la proporzione. Dunque *quando due ragioni sono uguali, e commensurabili, vi sono delle aliquote simili de' conseguenti, che sono pure aliquote simili degli antecedenti*. In questo caso se la comune misura si esprima per l'unità, le due ragioni si potranno esprimere in numeri. E perciò ragione commensurabile, o esprimibile in numeri si è la medesima cosa. Siccome pel contrario qualora le ragioni sono incommensurabili, non è possibile di trovare aliquote simili de' conseguenti, che lo siano pure degli antecedenti, e le ragioni sono inesprimibili in numeri.

§. 122. Quindi nelle ragioni incommensurabili non vi è altro mezzo più semplice, e naturale per acquistare l'idea adequata dell'uguaglianza della contenenza di due quantità in due altre, o sia della proporzione, che il concepire, che per aver luogo la proporzione tutte le aliquote simili dei conseguenti devono entrar ugual numero di volte nei rispettivi antecedenti. Ed egli è evidente per le cose dimostrate, che gli antecedenti debbono contenere i loro conseguenti nel medesimo modo, qualora le parti aliquote di questi entrano sempre in quelli uguale numero di volte.

CAP. XII.

Della trasformazione delle proporzioni.

§. 123. AVendo stabilito i criterj per conoscere la proporzione, è necessario determinare in quante maniere si possano combinare i suoi

suoi termini, senza che siffatta proporzione si alteri. Or egli è evidente, che l'antecedente dovendo contenere, o esser contenuto nel conseguente nel medesimo modo che l'altro antecedente contiene, o è contenuto nel conseguente suo, si potrà l'antecedente cambiare in conseguente, e viceversa. Questo modo di trasformar la proporzione si dice *invertere*. Così se sia A: B = C: D; sarà B: A = D: C.

Se in una ragione si cambino i termini, cioè l'antecedente si passi a conseguente, ed il conseguente ad antecedente, questa ragione si dirà *inversa* della prima.

§. 124. Inoltre perchè quando ha luogo la proporzione le aliquote simili de' conseguenti devono entrare egual numero di volte negli antecedenti, le medesime aliquote simili entreranno ancora egual numero di volte nei rispettivi antecedenti, e conseguenti presi insieme. Questo modo di trasformar la ragione si dice *comporre la proporzione*. Così se sia A : B = C : D, sarà *componendo* A+B : B = C+D : D.

§. 125. Coll'istesso metodo si dimostra, che l'eccesso dell'antecedente sul conseguente dev' essere al conseguente nella medesima ragione, che l'eccesso dell' altro antecedente sul suo conseguente sta al conseguente medesimo. Questo modo si dice *dividere* la proporzione. Così se sia A: B = C: D, sarà dividendo A—B: B = C—D : D.

§. 126. Ora essendo A : B = C : D, sarà invertendo B : A = D : C; (§. 123.) e dividendo B— A: A = D— C : C (§. 125.); cioè sarà la differenza dell' antecedente, e del conseguente all'antecedente in una ragione, come questa medesima differenza all' antecedente nell'altra; questo modo si dice *convertere* la ragione.

§. 127. Finalmente essendo gli antecedenti proporzionali ai conseguenti quando le aliquote simili de' conseguenti entrino negli antecedenti egual numero di volte (§. 119.); in ogni proporzione in cui tutti i termini sieno omogenei si potrà paragonare antecedente ad antecedente, e conseguente a conseguente, e si avranno de' termini proporzionali. Questa maniera di trasformar la proporzione dicesi *permutazione*. Se dunque sia A: B= C: D, sarà permutando A: C= B: D.

§. 128. In tutte queste diverse trasformazioni non si è cambiato il valore di alcun termine della proporzione; esaminiamo ora in qual modo si debbano siffatti termini alterare affinchè la proporzione sussista. Sia A: B= C: D, e si prendano degli antecedenti A, C i moltiplici simili, o le aliquote simili a, c, è evidente che siffatte quantità a, c dovranno essere ai loro conseguenti B, D nella medesima proporzione; cioè a: B = c: D. Similmente se si alterino pure i conseguenti B, D prendendo dei medesimi le aliquote simili, o i moltiplici simili b, d resterà pure la proporzione, e sarà a: b= c: d. Quindi il

Teor. *Se in una proporzione si prendano le aliquote simili, o i moltiplici simili degli antecedenti, e qualsivogliano altri moltiplici, o aliquote simili de' conseguenti, resterà pure la proporzione.*

§. 129. Nel precedente teorema si è veduto, che alterando i termini in modo, che si prendano le loro aliquote, o i loro moltiplici simili debba restare la proporzione. Vediamo ora di generalizzare questa verità, determinando se resti la proporzione alterando comunque proporzionalmente i termini. Sia dunque (*fig.* 17.) C F: M= GH: N, ed inoltre si prendano le quantità AB, CD che sieno proporzionali a CF, GH; si richiede se debba pure essere AB: M = CD: N.

Se sia possibile non sia CD: N= AB: M, ma, come AT: M; si prendano di CF, GH le aliquote simili A, B delle quali sia la prima A minore di TB, e tolte quante volte si possono dagli antecedenti, diano per residui QB, OD. Or essendo A, B aliquote simili degli antecedenti CF, GH, sarà A: M = B: N (§.128.). Ma di A, B sono moltiplici simili AQ, CO; sarà dunque per la ragione medesima AQ: M=CO: N. Ma la ragione di AQ: M è maggiore di quella di AT: M; dovrà adunque altresì esser maggiore della ragione di' CD: N; e molto maggiore della ragione di CO: N, il che è assurdo, perchè si è già dimostrato essere AQ: M= CO: N. Dunque è vero, che AB sia ad M, come CD ad N. E nell'istesso modo si dimostra, che se si alterino pure proporzionalmente i conseguenti, debba altresì sussistere la proporzione; perciò il

Teor. *Se in una proporzione comunque proporzionalmente si alterino i termini, sussisterà la proporzione.*

§. 130. Nel precedente §. si è dimoſtrato, che se le tre quantità AB, CF, M sieno rispettivamente in proporzione con CD, GH, N, sarà AB: M = CD: N. Queſto modo di argomentare in proporzione si dice *ordinare*. Lo ſtesso raziocinio si può eſtendere a qualunque numero di quantità rispettivamente proporzionali.

§. 131. Supponghiamo ora, che sia A: B= C: D, e B: E = F: C, si richiede se sia A: E = F: D. S' intenda esservi un'altra quantità L, sicchè sia B: E= D: L; ed essendo le quantità A, B, E in ordinata ragione delle altre C, D, L, sarà A: E= C: L. Ma per essere F: C= B: E, e B: E = D: L, sarà rà F : C = D : L, e permutando F: D = C: L. Ma C : L = A : E; dunque A : E = F : D. Quindi se la prima quantità A sia alla seconda B, come la terza C alla quarta D, e la seconda B alla quinta E, come la sesta F alla terza C, sarà la prima A alla quarta E, come la sesta F alla quarta D. Questa si dice *proporzione perturbata*.

C A P. XIII.

Paragone delle diverse ragioni fra di loro.

§. 132. Noi abbiamo osservato (§. 106.), che per esprimere generalmente la contenenza del conseguente nel suo antecedente, conveniva stabilire una qualunque grandezza per unità, e di poi determinare un'altra grandezza, la quale contenesse siffatta unità nel medesimo modo, che l'antecedente contiene il suo conseguente. Questa grandezza che si determina si è chiamata esponente, o quantità della ragione. Onde è chiaro che sia l'antecedente al conseguente, come la quantità dalla ragione all'unità.

§. 133. Nelle ragioni commensurabili, o esprimibili in numeri egli è di per se evidente, che la quantità della ragione è il quoto che nasce dividendo l'antecedente pel conseguente. Dunque noi per universalizzare questa verità, ed estenderla a qualunque genere di grandezze, e di ragioni, chiameremo *divisione* l'operazione colla quale si determina una grandezza la quale così contenga l'unità stabilita, come una data quantità contiene un'altra. Così dividere A per B significa trovare la quantità M, che contenga l'unità V nel medesimo modo, che A contiene B. Si dice A dividendo, B divisore, M quoto, ed è sempre A : B = M : V, cioè il

il dividendo al divisore, come il quoto all'unità.

§. 134. Viceversa se date due quantità M, B si determini una terza A, sicchè sia l'unità V alla prima M, come l'altra B ad A, quest'operazione si dice *moltiplicazione*. A si dice prodotto, B, M fattori. Ed è sempre il prodotto ad uno dei fattori, come l'altro all'unità.

Se i due fattori M, B siano tra loro uguali, il prodotto A si dice *quadrato* di uno di essi.

§. 135. Dalla stessa definizione della moltiplicazione, e della divisione si osserva che sono due operazioni inverse. Infatti se si voglia dividere A per B sarà A : B = M : V, ed invertendo V : M = B : A, cioè l'unità al quoto, come il divisore al dividendo. Dunque il dividendo è il prodotto del divisore nel quoto. E nel medesimo modo è chiaro che se il prodotto sidivida per uno de fattoti, ne debba nascere l'altro.

§. 136. Quindi apparisce, che la quantità della ragione si determina generalmente dividendo l'antecedente pel conseguente, e che il conseguente moltiplicato per la quantità della ragione dia l'antecedente.

Si ravvisa inoltre che per sapere se sono uguali le ragioni convenga determinare se lo siano le loro quantità, e generalmente per paragonare fra loro le ragioni inuguali sia sufficiente istituire il paragone fra le quantità medesime.

§. 137. Incominciamo dal paragonare due ragioni che hanno il medesimo conseguente, come le ragioni A : C, B : C. Sia l'esponente della prima ragione M, e quello della seconda N, ed V l'unità. Sarà dunque (§. 133.) A : C = M : V, e purmutando A : M = C : V. Or nel medesimo modo si dimostra essere B : N = C : V, dunque A : M = B : N, e permutando di nuovo A :

A : B=M : N, cioè saranno gli esponenti nella ragione degli antecedenti. Onde

Teor. *Gli esponenti delle ragioni che hanno il medesimo conseguente sono nella ragione degli antecedenti.*

§. 138. Essendo (§: *prec.*) M : N= A : B, se si supponga essere P l'esponente di A : B, sarà pure A : B = P : V, ed M : N = P : V. Dunque M si è il prodotto di N, e P. E perciò avendosi tre quantità qualunque A, B, C, l'esponente della ragione della prima A all'ultima C è il prodotto degli esponenti delle ragioni intermedie di A : B, e di B : C.

§. 139. Si è voluto dare un nome alla ragione il di cui esponente si è il prodotto di altre ragioni, e si è detta *ragione composta*. Le ragioni gli esponenti delle quali sono i fattori si dicono *semplici*, o *componenti*. Quindi se vi *siano tre grandezze omogenee la ragione della prima all'ultima vien composta dalle ragioni intermedie.*

§. 140. Per universalizzare la verità, che abbiamo ritrovata si suppongano quattro o più grandezze A, B, C, D ec. Ed essendo per le cose dimostrate la ragione di A : D composta da quelle di A : C, e di C : D, ed essendo pure la ragione di A : C composta dalle intermedie di A : B, e di B : D, sarà la ragione di A : D composta da tutte le ragioni intermedie di A : B, B : C, C : D. Quindi il

Teor. *Se si abbiano molte grandezze omogenee, sarà sempre la ragione della prima all'ultima composta dalle ragioni intermedie.*

§. 141. Avendo paragonate le ragioni (§. 137.) che hanno il medesimo conseguente, passiamo ora a quelle che hanno il medesimo antecedente. Siano dunque M, N gli esponenti delle ragioni di A : B, e di A : C; Sarà A : B = M : V, ed V : N = C : A. Onde per uguaglianza perturbata sarà M : N = C : B (§. 31.) Ma essendo B, C i conseguenti delle date ragioni, dev'essere C : B la ragione inversa dei conseguenti. Quindi

Teor. *Gli esponenti delle ragioni che hanno uguali antecedenti, sono nella ragione inversa dei conseguenti.*

§. 142. Esaminiamo finalmente il rapporto degli esponenti di due qualsivogliano ragioni A : B, C : D, che siano M, N. Egli è chiaro che la ragione di C : B abbia l'istesso conseguente della prima ragione, e l'istesso antecedente della seconda. Quindi se della sudetta ragione di C : B si supponga essere P l'esponente, sarà M : N in ragion composta di M : P, e di P : N (§. 139.): ma M : P= A : C (§. 137.), e P : N= D : B (§. 141.); dunque sarà M : N in ragion composta di A : C, e di D : B. Quindi

Teor. *Gli esponenti di due ragioni sono in ragion composta della diretta degli antecedenti, e dell'inversa dei conseguenti.*

§. 143. Se le due date ragioni siano fra di loro eguali, cioè se sia A : B= C : D, gli esponenti saranno fra loro uguali. Ma tali esponenti sono nella ragione composta da A : C, e di D : B, e la ragione di A : C è inversa di quella di D : B. *Dunque due ragioni una diretta e l'altra inversa compongono il rapporto di uguaglianza.*

§. 144. Finora abbiamo determinato il rapporto fra gli esponenti delle ragioni, cioè le ragioni fra i quoti, che nascono dividendo una quantità per un'altra; ora passiamo ad esaminare le ragioni che intercedono fra i prodotti. E primieramente esaminiano la ragione dei due prodotti M, N, che nascono moltiplicandosi l'istessa quantità A per B, C. Supposto dunque che V sia l'unità, sarà M : A= B : V, (§. 134.), ed A : N= V : C, onde per uguaglianza ordinata sarà M : N=B : C

 (§. 130.)

(§.130.), cioè i *prodotti che hanno un fattore comune sono nella ragione degli altri fattori*.

§. 145. Quindi è facile determinare il rapporto di due qualsivogliano prodotti, il primo de' quali nasca moltiplicandosi A per C, e l'altro B per D. Imperciocchè il prodotto di A per C sta a quello di C per B, come A: B, e l'istesso prodotto di C per B sta a quello di B per D, come C: D (§.144.), Dunque sarà il prodotto di A per C al prodotto di B per D in ragion composta di A: B, e di C: D (§.139.), o sia *i prodotti sono in ragion composta dei fattori*.

§. 146. Dunque se si vogliono comporre le due ragioni di A: B, e di C:D, la ragione composta verrà espressa dal prodotto degli antecedenti A, C al prodotto dei conseguenti B, D. Dunque.

Teor. *La ragione che si compone da due altre viene espressa dal prodotto degli antecedenti, al prodotto dei conseguenti*.

§. 147. Se ora delle due ragioni componenti una sia inversa dell'altra, la composta dev'essere d'uguaglianza (§. 143.), ed uguali dovranno essere i due prodotti; e viceversa se i prodotti sono uguali, i fattori dovranno esser fra loro in ragione inversa. Quindi se sia A: B= C: D, sarà A: B in ragion inversa di D: C, e il prodotto dei termini estremi A per D dovrà uguagliare quello dei medii B, C; e viceversa. E perciò

Teor. *In qualunque proporzione il prodotto dei termini estremi adequa il prodotto dei medii, e viceversa*.

§. 148. Se si abbia la proporzione A: B=C: D, e gli antecedenti A, C si moltiplichino per qualunque grandezza, ed i conseguenti B, D per qualunque altra, è chiaro che debba sussistere la proporzione (§. 129.) onde se il primo prodotto è maggiore, uguale, o minore del terzo, il secondo prodotto sarà parimenti maggiore, uguale, o minore del quarto. Resta ora a con-

considerare se sia vera la proposizione inversa, cioè se questa proprietà sia una caratteristica della proporzione di quattro grandezze.

§. 149. Siano dunque le due ragioni di A: B, e di C: D tali, che moltiplicati gli antecedenti per qualunque grandezza, ed i conseguenti per un'altra, si ottengano sempre i prodotti che nascono dagli antecedenti maggiori, uguali, o minori dei prodotti nati dai conseguenti; si richiede se debba aver luogo l'uguaglianza fra queste due ragioni.

Riflettendo sopra di questi dati, facilmente si ravvisa, che se gli antecedenti A, C si moltiplichino per B, ed i consequenti B, D per la quantità A, si ottiene il primo prodotto di A in B uguale al terzo prodotto cioè a quello di B in A: onde dovrà essere per le condizioni della questione il secondo prodotto cioè quello di C in B uguale al quarto ch'è quello di D in A. Quindi essendo il prodotto dei termini medii uguale al prodotto degli estremi, dovrà aver luogo la proporzione.

Teor. *Se moltiplicandosi gli antecedenti di due ragioni per qualunque grandezza, ed i conseguenti per un' altra, siano sempre i prodotti nascenti dagli antecedenti maggiori, uguali, o minori dei prodotti dei conseguenti, le due ragioni saranno fra loro uguali*.

Gli antichi Geometri si sono serviti di questo principio per dimostrare le diverse proprietà delle proporzioni; ma in luogo di moltiplicare i termini della proporzione per qualunque grandezza, ne hanno preso solamente gli ugualmente moltiplici.

§. 150. Se si compongono due ragioni uguali, la composta si dice *duplicata*, se se ne compongono tre, *triplicata &c.*. Il prodotto nascente da due grandezze uguali, o da una grandezza per se stessa si dice *quadrato*, o *seconda potenza*, e la grandezza, che si moltiplica per se stes-

stessa, *radice*; il prodotto di tre grandezze uguali *terza potenza*, o *cubo*, e la sua radice si chiama *radice cuba*, e così successivamente. Quindi la ragione dei quadrati è duplicata di quella delle radici; quella de'cubi triplicata ec. Onde se vi siano tre quantità continuamente proporzionali, la ragione della prima all'ultima è duplicata di quella della prima alla seconda, o della seconda alla terza; o pure la prima si è all'ultima come i quadrati delle due prime, o come i quadrati della seconda, e della terza.

C A P. XIV.

Della misura delle figure geometriche, e delle loro ragioni.

§. 151. PEr determinare le ragioni che intercedono fra le parti dello spazio, è necessario istituire la loro misura, cioè osservare quante volte una determinata unità entra nelle sudette parti. Questa unità è interamente arbitraria: così si può stabilire per unità lineare qualunque linea sia retta, o curva. Similmente per la misura delle superficie si può stabilire per unità qualunque figura geometrica. Ma siccome per l'unità lineare si è prescelta la linea retta, così per l'unità superficiale si è stabilito il quadrato. Dunque noi per istituire la misura delle superfice dovremo determinare quale rapporto intercede fra il quadrato, e le diverse figure.

§. 152. E primieramente egli è di per se chiaro, che se si abbia il rettangolo L S (fig. 18.) che abbia i lati commensurabili, si possa il medesimo dividere in quadrati, supponendo divisi questi lati in parti uguali alla comune aliquota M, e tirando per i punti delle divisioni le rette parallele ai lati opposti. Osserviamo in questo caso in quanti quadrati resta diviso il rettangolo LS. E' evidente che primieramente sopra il lato OS esistono tanti quadrati, quanto è il numero delle volte, che OS comprende l' unità M. Inoltre i sudetti quadrati ripetuti tante volte, quante il lato OS comprende la medesima unità M, costituiscono tutti i quadrati ne' quali resta diviso il rettangolo LS. Dunque il numero di questi quadrati viene espresso dal prodotto delle unità lineari della base per le unità lineari dell' altezza. *Quindi nel rettangolo i di cui lati sono proporzionali, il prodotto di questi esprime la sua aja.*

§. 153. Supponghiamo ora il rettangolo PS i di cui lati sono incommensurabili. E se sia possibile l'aja del medesimo non venga espressa dal prodotto di PO in OS, ma di OS in OQ. Si prenda M parte aliquota di OS, che sia minore di PQ, e sottratta da PO quante volte si può, il residuo sia PF. Si compia il rettangolo FS, che si misurerà dal prodotto di FO in OS (§. prec.) Ma per ipotesi il rettangolo maggiore PS si misura dal prodotto di QO in OS. Dunque il rettangolo maggiore si esprime da un prodotto minore, il che è assurdo. Similmente si dimostra che sia ugualmente assurdo, che il rettangolo PS venga misurato dal prodotto di OS in una retta maggiore di PO. Dunque il rettangolo PS si misura dal prodotto di PO in OS.

Teorema *L'aja del rettangolo si esprime pel prodotto dei lati.*

§. 154. Essendo il parallelogrammo obbliquangolo uguale al rettangolo, che ha la medesima bese, e la medesima altezza, si dovrà pure ogni parallelogrammo misurare pel prodotto della base per l'altezza. Ed il triangolo che è metà del parallelogrammo si misurerà moltiplicando la metà della base per l'altezza.

Teor. *Il prodotto della base per l' altezza esprime qua-*

qualunque parallelogrammo, e la sua metà il triangolo.

§. 155. Da questo Teorema si deducono le seguenti conseguenze: 1. *I parallelogrammi, ed i triangoli sono in ragion composta delle basi, e delle altezze.* 2. *Se le basi sono eguali sono in ragion delle altezze, e viceversa.* 3. *Per essere eguali due parallelogrammi o le basi, e le altezze devono essere eguali, o le prime devono essere in ragion reciproca delle seconde.* (§. 147.). 4. *Un parallelogrammo per essere uguale ad un quadrato bisogna che la radice di questo sia media proporzionale fra la base, e l'altezza di quello.* 5. *Un parallelogrammo sta al triangolo in ragion composta della base del primo alla base del secondo, e dell'altezza del primo alla metà dell'altezza del secondo.* 6. *Finalmente per essere un parallelogrammo eguale ad un triangolo, deve essere la base del parallelogrammo alla base del triangolo, come la metà dell'altezza di questo all'altezza di quello.*

§. 156. Potendosi ogni figura rettilinea dividere in triangoli, non solamente si può istituire la misura di qualunque figura, ma pure si può determinare il rapporto fra le diverse figure.

CAP. XV.

Delle proprietà delle linee proporzionali, e della somiglianza delle figure.

§. 157. SE si abbiano le due linee BD, DC (*fig.* 19.) proporzionali alle altre BA, AE, e si uniscano le rette AD, AC, DE, CE. Sarà BD : DC = il triangolo BAD all'altro ADC (§. 155.); e similmente BA : AE, come lo stesso triangolo BDA all'altro ADE; onde essendo BD : DC = BA : AE, sarà pure BAD : ADC = BAD : DAE; e perciò AED = ADC (§. 113.), ed AD parallela ad EC (§. 75.). In una maniera inversa si dimostra similmente, che se AD sia parallela ad EC, debbano essere i lati proporzionali. Dunque

Teor. *Se in un triangolo si conduca una parallela ad un lato, gli altri due saranno divisi proporzionalmente, e viceversa.*

§. 158. Essendo BD : DC = BA : AE, sarà pure BC : CD = BE : EA (§. 124.); e BC : BD = BE : BA (§. 126.) e se si conduca AL parallela a BC, si otterrà pure BE : BA = CE : CL, onde essendo CL = AD, sarà EB : BA = EC : AD.

§. 159. Quindi tutti i lati del triangolo BAD sono proporzionali a tutti i lati del triangolo BEC. Inoltre questi due triangoli hanno l'angolo B comune, e gli altri due angoli respettivamente eguali; dunque sono pure equiangoli. Si è voluto dare un nome alle figure, che sono equiangole, ed hanno i lati proporzionali, e si sono dette *simili*. Dunque il triangolo BAD è simile al triangolo BEC.

§. 160. Or poichè BA : AE = BD : DC, sarà la retta DC quarta proporzionale dopo le tre precedenti. Quindi se si cerchi la quarta proporzionale dopo tre date rette, fatto un'angolo qualunque, si prenda BA = alla prima, AE alla seconda, BD alla terza, e condotta la retta AD, e quindi la parallela EC, sarà DC la quarta proporzionale richiesta.

E se dopo due rette si domandi la terza proporzionale, allora si faccia BD eguale alla seconda AE, e DC sarà la terza proporzionale dopo le due date rette.

§. 161. Esaminiamo ora se nei triangoli queste due condizioni della simiglianza sieno così fra loro connesse, che per l'eguaglianza degli angoli necessiti la simiglianza dai lati, e viceversa. Si supponga il triangolo *abd* equiangolo ad EBC, e prese le parti BA, BD respettivamente eguali ad *ab*, *bd* condotta AD, sarà BAD

BAD = *bad*, ed equiangolo a BEC; onde sarà l'angolo BAD = E, ed AD parallela ad EC. Quindi il triangolo BEC sarà simile al triangolo BAD (§.159.), o al suo eguale *bad*.

Teor. *I triangoli equiangoli sono simili.*

§. 162. Dalla proporzione BD : DC = BA : AE essendosi dimostrato, che AD debba essere parallela ad EC (§. 157.), ed i due triangoli EBC, ABD simili (§. 159.), se ne dedurrà che se due triangoli abbiano l'angolo B = *b*, ed i lati *ba*, *bd* proporzionali ai lati BE, BC dovranno essere simili.

Teor. *Se due triangoli abbiano un' angolo eguale ad un' angolo, ed i lati intorno agli angoli eguali porporzionali, saranno eguali, e simili.*

§. 163. Esaminiamo ora se due triangoli ABC, *abc* (*fig.* 20.) che abbiano i lati proporzionali, sieno simili.

Egli è chiaro, che se sulla base BC si formi il triangolo ALC equiangolo ad *abc*, questi due triangoli debbano esser simili (§.161.); onde *ab* : *bc* = LB : BC. Ma *ab* : *bc* = AB : BC; dunque AB : BC = LB : BC, ed AB = BL.

Similmente si dimostra essere CL = GA. I triangoli adunque ABC, LBC saranno eguali; onde siccome BLC è simile ad *abc*, lo sarà altresì ABC. Quindi

Teor. *Se due triangoli abbiano i lati proporzionali saranno simili.*

§. 164. Siano finalmente due triangoli ABC, DEF, (*fig.*21.) che abbiano i lati AB, AC proporzionali ai lati DE, DF, l'angolo B = E, ed i due C, F della medesima specie. Se sia possibile che questi due triangoli non sieno simili, si supponga l'angolo D = BAL, sarà BA : AL = DE : DF (§.161.) = BA : AC; onde AC = AL, e l'angolo ALC = C. Ma C è della stessa specie di F, o sia di ALB; dunque i due angoli conseguen-

guenti ALB ALC sono della stessa specie, il che è assurdo. Dunque i due triangoli BAC, DEF sono simili.

Teor. *Se due triangoli abbiano due lati proporzionali a due lati, ed un' angolo non compreso eguale ad un' angolo non compreso, e due altri angoli della stessa specie, sono simili.*

§. 165. Ritornando di nuovo alla proprietà dei triangoli esposta (§. 161.), che dalla sola uguaglianza degli angoli si deduce la loro somiglianza, si rileva che due triangoli rettangoli sono simili, se abbiano un angolo acuto uguale, o comune. Quindi se (*fig.*22.) dal vertice A del triangolo rettangolo BAC si abbassi sull' ipotenusa BC la perpendicolare AD, ne risulteranno i due triangoli rettangoli BAD, ADC, che saranno simili all' intero BAC, perchè ciascuno de' due primi ha un' angolo acuto comune con quest' ultimo. Quindi

Teor. *Il triangolo rettangolo resta diviso in due triangoli a se simili, se dal vertice dell' angolo retto si cali una perpendicolare sull' ipotenusa.*

§. 166. Poichè il triangolo BAD è simile all'intero BAC, saranno i lati proporzionali, onde BC : BA = BA : BD, cioè *il cateto BA è media proporzionale tra l' ipotenusa ed il suo segmento BD; ed il quadrato di BA sarà uguale al rettangolo di CB in BD.* Similmente essendo simili i due triangoli BDA, DAC, sarà pure *la perpendicolare AD media proporzionale fra i segmenti dell' ipotenusa BD, DC; ed il suo quadrato uguale al rettangolo costituito da questi.*

§. 167. Quindi se *date due rette BD, DC si voglia determinare la media proporzionale*, si dovrà riflettere che l' angolo compreso nel semicircolo è retto (§. 90.): onde descritto un semicircolo BAC sopra la somma delle due date rette, se dal punto D si elevi

 da

la perpendicolare DA, sarà questa la media proporzionale richiesta.

§. 168. Veniamo ora alle figure simili, ed incominciamo dal determinare se le medesime si dividono in triangoli simili. Sieno dunque le due figure simili ABCED, *abced* (*fig.*23.), e condotte le rette AC, AE, *ac*, *ae* dagli angoli uguali, sieno divise in triangoli. E poichè AB : BC = *ab* : *bc*, e l'angolo B = b, i due triangoli ABC, *abc* sono simili, onde l'angolo BCA = *bca*; ma BCE = *bce*; dunque ACE = *ace*. Inoltre essendo EC : CB = *ec* : *cb*, e BC : CA = *bc* : *ca*, sarà EC : CA = *ec* : *ca* (§. 130.); onde il triangolo ACE sarà simile al triangolo *ace*, e così in appresso. Dunque

Teorema *Le figure simili si risolvono in triangoli simili*.

§. 169. Vediamo finalmente d'indagare il rapporto tra le figure simili. E primieramente sieno i due triangoli simili ABC, *abc* (*fig.* 24.), la di cui altezza sia AM, *am*; saranno pure simili i triangoli AMC, *amc*, onde sarà AM : *am* = AC : *ac* = BC : *bc*; dunque le altezze sono in ragione delle basi, e perciò i triangoli essendo in ragion composta delle basi, e delle altezze, se sono simili saranno in ragion duplicata delle basi, o delle altezze, o dei lati opposti agli angoli eguali, cioè delle *omologhe dimensioni*. E siccome le figure simili si dividono in triangoli simili, saranno altresì le medesime nella sudetta ragione. Dunque

Teor. *Le figure simili sono in duplicata ragione dei lati omologhi*.

§. 170. Da ciò è facile rilevare, che essendo eguali al quadrato dell'ipotenusa i quadrati fatti su i cateti nel triangolo rettangolo (§. 78.); le figure simili fatte su i tre lati di questo triangolo seguendo la ragione di questi quadrati, dovrà altresì la figura fatta sull'ipotenusa essere eguale alle figure simili fatte su i cateti.

CAP.

CAPO XVI.

Delle linee proporzionali considerate nel circolo.

§. 171. AVendo noi dimostrato (§. 166.), che la perpendicolare abbassata dal vertice del triangolo rettangolo sull'ipotenusa è media proporzionale tra i suoi segmenti; essendo vero similmente, che l'angolo del semicircolo è sempre retto, sarà generalmente vero, che *la perpendicolare abbassata da qualunque punto della circonferenza sul diametro è media proporzionale tra i suoi segmenti, e'l quadrato fatto su di essa sarà eguale al rettangolo formato dai segmenti del diametro medesimo*.

§. 172. Or riflettendo noi, che il triangolo rettangolo costruito su di una retta ha sempre il vertice nella circonferenza del circolo di cui questa retta è diametro, sarà altresì vera generalmente la proposizione inversa, cioè, *che se il quadrato di una perpendicolare ad una retta sia eguale al rettangolo delle parti di questa, l'estremo della perpendicolare giacerà nella circonferenza del circolo esistente su di tale retta*.

§. 173. Per rendere vieppiù generale questa verità si supponga, che due rette qualunque AB, CD (fig. 25.) si taglino comunque tra la circonferenza di un circolo; egli è chiaro, che condotte le rette AD, CB, l'angolo A sarà eguale all'angolo C, ed i due triangoli AED, CEB saranno equiangoli, e simili; sarà dunque AE : ED = EC : EB; ed il rettangolo di AE in EB sarà eguale al rettangolo di CE in ED (§. 174). Dunque

Teor. *Le parti di due rette, che si tagliano comunque in un circolo sono reciprocamente proporzionali fra di loro, ed il rettangolo compreso tra le parti di una retta sarà eguale a quello formato tra le parti dell'altra*.

§. 174.

§. 174. Proseguendo l'analisi della posizione delle secanti, supponghiamo, che questa sia tale, che partano da un punto A (*fig.* 26.) fuori della circonferenza; condotte le rette BD, CG, sarà similmente l'angolo C=D, ad essendo l'angolo A comune ai due triangoli ABD, AGC, sarà AB: AG=AD : AC, ed il rettangolo di AB in AC, sarà eguale al rettangolo di AG in AD.

Teor. *Le parti esterne delle secanti sono reciprocamente come le secanti intere; ed il rettangolo di una secante nella sua parte esterna, è eguale al rettangolo dell' altra nella sua parte corrispondente.*

§. 175. Ma se la secante AD diventi tangente, in tal caso tirate le rette GE, ED, l'angolo AEG sarà eguale all'angolo ADE (§. 97.), onde per l'angolo comune A, sarà AD: AE=AE: AG, ed il quadrato di AE sarà eguale al rettangolo di DA in AG. Dunque

Teor. *La tangente è media proporzionale tra la secante tirata dal medesimo punto, e la sua parte fuori del circolo; ed il quadrato della tangente sarà eguale al rettangolo della secante intera in questa parte medesima*

§. 176. Essendo BD: BA=BA : BE (*fig.* 27.), sarà dividendo BD—BA: BA=BA—BE: BE. Dunque se si supponga la tangente AB eguale al diametro DE, sarà BD — BA=BE; e se si prenda BF= BE, sarà BA — BE=AF: onde la precedente proporzione diviene BF: BA=AF: FB. Dunque la retta AB resta in F divisa in modo tale, che la parte BF è media proporzionale fra AF, ed AB, e si dice essèr divisa *in estrema, e media ragione.*

§. 177. Quindi riflettendo, che per essere AB eguale al diametro, la perpendicolare AC è eguale alla metà di AB. Da ciò si deduce, che per dividere la retta AB in estrema, e media ragione, conviene elevare la perpendicolare AC eguale alla sua metà, ed unita CB, se si descriva col centro C, e raggio CA il circolo ADE, e si prenda BF= BE, si avrà divisa la retta AB in estrema, e media ragione nel punto F.

§. 178. S'incontrino ora la tangente DC, (fig. 28.) e la secante DA, in modo che CD sia eguale ad AB; e se si supponga, che il triangolo ACD sia isoscele, lo sarà ancora il suo simile BCD, come anchè il terzo triangolo ABC; onde per l'angolo BCD=A (§. 97.), dovrà essere ciascun angolo alla base doppio dell'angolo verticale A. Quindi riflettendo, che DA: AB=AB: DB; se si voglia costruire un triangolo isoscele, che abbia ciascuno degli angoli alla base doppio dell'angolo al vertice, converrà prendere una retta AD, dividerla in estrema e media ragione in B, e sarà AB= CD la base del triangolo isoscele.

§. 179. Dovendo essere nel triangolo isoscele, che ha ciascuno degli angoli alla base doppio del verticale, quest' angolo verticale la quinta parte di due retti, sarà la sua metà la quinta parte di un retto. Si può dunque l'angolo retto dividere in cinque parti eguali.

§. 180. Ci resta finalmente ad esaminare se nel circolo interceda proporzione fra gli angoli compresi al centro, e gli archi corrispondenti, giacchè nella generazione del circolo nel mentre che il raggio colla sua rotazione disegna l'angolo, il suo estremo traccia l'arco. Sieno dunque i due archi AB, BD (fig. 29.), ed i due angoli corrispondenti ACB, BCD; egli è di per se chiaro, che per conoscere se interceda proporzione fra gli archi, e gli angoli convenga prendere le aliquote simili de' conseguenti, e vedere se entrano sempre egual numero di volte negli antecedenti. Dell' arco adunque BD s'intenda, che l'archetto ED sia una qualunque aliquota; e poichè ad archi eguali corrispondono angoli eguali, l'angolo al centro ECD entrerà tante te volte esattamente nell' angolo BCD, quante volte l' arco ED entra nell' arco BD; e perciò l' arco ED, e l' angolo ECD saranno aliquote simili respettivamente dell' arco BD, e dell' angolo BCD. Ora se l' arco ED si tolga quante volte si può dall' arco BA, ed il residuo sia AF, insisteranno sull' arco FB tanti angoli al centro uguali ad ECD, quante parti uguali ad ED contiene BF. Quindi le aliquote simili dei conseguenti sono contenute egual numero di volte negli antecedenti, e sarà l' arco AB all' altro BD, come l' angolo ACB all' altro BCD. E poichè gli angoli alla circonferenza sono metà degli angoli al centro, saranno pure gli angoli alla circonferenza nella ragione degli archi su de' quali insistono.

Teor. *Nel circolo gli angoli al centro, e quelli alla circonferenza sono nella ragione degli archi corrispondenti; ma l' angolo al centro sta a quello alla circonferenza, come l' arco corrispondente al primo alla metà dell' arco corrispondente al secondo.*

§. 181 Essendo dunque l' arco misura dell' angolo, si è divisa la circonferenza intera in 360° gradi, ciascun grado in 60′ minuti primi, ciascun primo in 60″ secondi ec. Quindi poichè tutti gli angoli, che si possono applicare ad un punto sono eguali a quattro retti, l' angolo retto avrà per misura 90° gradi.

§. 182. Una tal divisione del circolo in 360° è impossibile ad eseguirsi geometricamente. Col mezzo della geometria piana non sono dunque costruibili gli angoli di tutti i gradi. Alcuni però lo sono geometricamente, e la loro costruzione si deduce dall' esser l' angolo retto divisibile in due, in tre, in cinque parti eguali; e perciò sono costruibili gli angoli di 45°, 30° 18°, e quindi gli angoli, che sono le metà di questi, le differenze loro, e la metà di queste differenze: è dunque costruibile l' angolo di 3°, e perciò

Teor.

Teor. *Sono costruibili per la geometria piana tutti gli angoli moltipli di 3°, o la metà, la quarta parte ec. dei moltiplici di 3°.*

§. 183. Quindi la circonferenza del circolo è divisibile in tante parti, quante sono o moltiplici di 3°, o metà, quarte parti ec. di questi moltiplici. Si può dunque dividere in tre parti, o sia nella medesima è iscrittibile il triangolo equilatero, in quattro parti, in cinque, in sei, in dieci, in quindeci, e perciò si può iscrivere in lei il quadrato, il pentagono, l' esagono, il decagono, il quindecagono.

CAPO XVII.

Della scambievole posizione de' piani, e delle rette.

§. 184. Egli è di per se chiaro, che non solo si può concepire, che per un dato punto passino quanti piani si vogliono, ma che ciò abbia luogo altresì per due punti, cioè per una linea retta. Ma per tre punti vi passa un sol piano, cioè tre punti dati di posizione determinano la posizione di un piano. Da ciò si rileva 1. *che due rette, le quali s' intersecano sono in un sol piano*; 2. *che due rette per essere nel medesimo piano, è necessario assolutamente o che s' incontrino, o sieno parallele*; 3. *che l' intersezione de' piani fra di loro non può essere, che una linea retta.*

§. 185. Quando una retta non giace su di un piano può serbare diverse posizioni. Può in primo luogo essergli parallela, il che avviene quando è parallela ad una qualunque retta esistente in quel piano. Da ciò si deduce, che comunque si produca non incontrerà mai il piano, e che per un dato punto si possono condurre ad un piano quante parallele si vogliono.

§. 186. Secondariamente una retta può cadere su

di

di un piano in modo, che non inclini sul medesimo più da una parte, che da un'altra qualunque. In tal caso è evidente, che se dal punto d' incontro si tirino sul piano quante rette si vogliano, tutte queste debbano essere perpendicolari alla sudetta retta perpendicolare al dato piano. Così la letra AB (fig. 30.) per dirsi perpendicolare al piano MN dovrà essere perpendicolare a tutte le rette BD, BC ec. che si tirano dal punto B nel piano medesimo.

§. 187. Si richiede ora viceversa se ogni retta tirata dal punto B, che sia perpendicolare alla perpendicolare AB debba essere nel piano medesimo MN. Se sia possibile, che la retta BD perpendicolare ad AB non sia nel piano MN, si faccia passare per BA, BD un piano, questo dovrà in contrare l'altro MN, e la loro intersezione comune BE sarà perpendicolare ad AB. Dunque nel medesimo piano si saranno condotte ad AB le due normali BD, BE dal punto medesimo, il che è assurdo. Dunque

Teor. *Se dall' estremo di una retta si conducano quante perpendicolari si vogliano alla medesima, saranno tutte nel medesimo piano.*

§. 188. Due linee rette che s' intersecano devono essere nel medesimo piano, cioè bastano due tali rette per determinare la posizione di un piano. Dunque se due rette sieno perpendicolari ad una terza, il piano, che passa per le prime sarà altresì perpendicolare a questa terza retta; e perciò

Teor. *Una retta sarà perpendicolare ad un piano, se lo sarà a due rette esistenti nel piano medesimo.*

§. 189. Cada ora su di un piano obbliquamente la retta AC. Egli è certo, che la medesima non può costituir angoli eguali con tutte le rette, che si conducono dal punto d' incontro A sul piano: si faccia AD=AB, e si uniscano i loro estremi col punto C per mezzo delle rette DC, CB (fig. 31.). I due triangoli DAC, ACB avendo i due lati DA, AC eguali ai due lati BA, AC, sarà l' angolo compreso dai due primi eguale, maggiore, o minore dell' angolo compreso dai secondi, se la base DC è eguale, maggiore, o minore dell' altra CB. Or se CB sia perpendicolare al piano, essendo essa la minima retta, che dal punto C si può condurre al piano medesimo, sarà l' angolo CAB il minimo. Si è convenuto, che *l' angolo minimo CAB esprima l' inclinazione della retta AC sul piano.*

§. 190. Quindi se DE sia perpendicolare ad FB, ed AD=AE, sarà pure BD=BE, e perciò perfettamente eguali i due triangoli rettangoli CBD, CBE, ed il lato CD sarà altresì eguale al lato CE; essendo pertanto anche l' angolo CAD=CAE, sarà CA perpendicolare a DE. Dunque *la retta obbliqua ad un piano è perpendicolare alla retta, che si conduce perpendicolarmente a quella che congiunge i due punti ne' quali cadono l' obbliqua, e la perpendicolare al piano abbassata dal punto medesimo da cui parte l' obbliqua.*

§. 191. Viceversa se sul piano si conduca la retta DE comunque, e sulla medesima da qualsivoglia punto C esistente fuori del piano si abbiasi la perpendicolare CA, e dipoi nel medesimo piano si elevi a DE la perpendicolare AB, e di nuovo si abbassi su di questa la perpendicolare CB, sarà questa perpendicolare al piano sottoposto. Quindi è facile risolvere il seguente

Probl. *Dato un punto fuori di un piano, abbassare su di esso una perpendicolare.*

§. 192. Se un piano PQ (fig. 32.) sia inclinato all' altro MN, e la loro intersezione sia la retta PBD; si è convenuto, che la loro scambievole inclinazione si misuri dall' angolo ABS costituito dalle rette AB, BS, che si conducono perpendicolari alla comune seziozione PB, e delle quali una esiste in un piano, ed una in un'altro. Se l'angolo dell'inclinazione ABS sia retto, cioè se AB sia perpendicolare al piano MN, si dirà il piano PQ perpendicolare all'altro MN. Perciò *un piano sarà perpendicolare ad un'altro, se passi per una retta perpendicolare al medesimo.*

§. 193. Quindi si deduce, che se da un punto preso nella comune sezione di due piani perpendicolari fra di loro si elevi una perpendicolare ad uno di essi, debba questa giacere nell'altro; e perciò *due perpendicolari al medesimo piano sono fra di loro parallele*, e viceversa *se di due parallele una sia perpendicolare ad un piano, l'altra sarà altresì perpendicolare al piano medesimo*. Da ciò si deduce la soluzione del seguente

Problema. *Dato un punto in un piano innalzare da questo punto una perpendicolare al piano medesimo.*

E' chiaro, che se da un qualunque punto preso fuori del piano si abbassi al piano istesso una perpendicolare, non si debba far altro, che tirargli una parallela dal punto dato, affichè questa sia perpendicolare al dato piano.

§.194. Poichè una retta, che si eleva perpendicolarmente ad un piano da un punto esistente nella sua sezione con un'altro piano perpendicolare deve giacere in quest'ultimo (§. 193.), apparisce, che se due piani perpendicolari ad un terzo s'interseghino fra di loro, la perpendicolare, che si eleva al piano sottoposto dal punto della loro comune intersezione debba giacere in entrambi i piani, e perciò essere la comune loro intersezione. Dunque *se due piani sieno perpendicolari ad un terzo, lo sarà pure la loro comune intersezione.*

§. 195. Se due piani sieno perpendicolari ad una medesima retta si diranno fra loro paralleli, e non si potranno mai incontrare; poichè se s'incontrassero, da un punto della loro sezione condotte due rette ai pun-

punti nei quali vien tagliata da essi la comune perpendicolare, ne risulterebbe un triangolo avente due angoli retti (§. 184.) il che è assurdo.

§. 196. Or poichè è manifesto, che le comuni sezioni di piani paralleli con un terzo non si possono mai incontrare comunque prodotte, essendo pure queste intersezioni nel piano stesso secante, (§. 194.) devono essere fra di loro parallele. Quindi *le sezioni di piani paralleli prodotte da qualunque piano sono fra di loro parallele.*

§. 197. Similmente se due piani interseghino due altri piani paralleli, le intersezioni saranno fra di loro parallele. Ma la posizione di due rette determina quella del piano; dunque *se due rette sono parallele a due altre, il piano che passa per le prime deve esserlo altresì a quello, che passa per le seconde.*

§. 198. Quindi il problema *di condurre per un dato punto un piano parallelo ad un'altro dato*, si risolve nel seguente modo. Pel dato punto si conducano due rette parallele a due altre comunque condotte nel piano dato, e che fra loro s'interseghino, il piano che passa per le sudette parallele sarà il richiesto.

§. 199. Sieno ora le due rette AC, DF (fig.33.) intersegate da' piani paralleli MN, PQ, RS ne' punti A, B, C, D, E, F, e si unisca la retta AF. Se s'intenda, che per le due rette AC, AF passi un piano ACF, le comuni intersezioni di questo piano coi due PQ, RS cioè le rette BO, CF saranno fra di loro parallele (§. 196.) Si avrà dunque AB: BC=AO: OF. Dimostrandosi similmente, che AO: OF=DE: EF, sarà AB: BC=DE: EF. Quindi

Teorema. *Se due rette comunque poste vengano intersegate da piani paralleli, saran divise in parti proporzionali.*

§. 200. Se più di due superficie concorrano in un pun-

punto in modo, che le scambievoli intersezioni non sieno tutte in un sol piano; in questo caso la scambievole loro inclinazione si dice *angolo solido*, e 'l punto dell'incontro di tutte queste superficie *vertice*. Soglionsi ordinariamente considerare le superficie piane, ed in tal caso l'angolo solido viene cinto da angoli piani, i quali non possono esser meno di tre. Così se i tre piani BAC, BAE, EAC (fig. 34.) s'interseghino in A in modo, che le loro intersezioni AB, AC, AE non sieno in un piano, costituiranno tali piani nel punto A un'angolo solido, ed è chiaro, che l'angolo solido cinto da superficie piane non possa esser formato da meno di tre angoli piani.

§. 201. Egli è chiaro similmente, che per determinare l'angolo solido sia necessario conoscere ciascuno di quegli angoli, che lo cingono. Consideriamo in primo luogo nell'angolo solido A costituito da tre angoli piani BAC, CAE, EAB il rapporto di due di essi al terzo: si supponga esser di questi tre angoli BAC il massimo, e dal medesimo si tagli l'angolo BAD eguale ad uno degli altri due BAE, e si faccia AD=AE, e si tirino le rette BDC, CE, EB; si avrà per l'eguaglianza de' due triangoli BAE, BAD la base BE=BD. Ma BE insieme con EC sono maggiori di BC; dunque anche EC è maggiore di CD. Quindi i due triangoli DAC, CAE avendo la base DC minore di CE, sarà l'angolo EAC maggiore di CAD; onde i due angoli BAE, EAC saranno maggiori del terzo BAC.

Teorema. *Di tre angoli piani, che comprendono un' angolo solido due insieme sono maggiori del terzo.*

§. 202. Or tutti gli angoli de' triangoli ABE, BAE, AEB, AEC ec. sono eguali a tanti retti, quanto si è il doppio numero dei lati degli angoli costituenti l'angolo solido, o sia il doppio numero dei lati. Ma tutti gli angoli della figura BEC sono eguali a tanti retti, quanti corrispondono a quest'istesso doppio numero di lati meno quattro (§.71.); dunque gli angoli dei triangoli superano quelli della figura per quattro retti. Ma gli angoli alle basi dei triangoli superano quelli della figura (§. prec.); dunque se insieme cogli angoli al vertice, che comprendono l'angolo solido li superano di quattro retti, *gli angoli che comprendono l'angolo solido saranno minori di quattro retti.*

E' facile però osservare, che se l'angolo solido A sia formato dagli angoli piani BAE, EAL, LAC, CAD, DAB in modo, che intersegati da un piano, ne nasca la figura BELCB coll'angolo *rientrante* ELC, in questo caso gli angoli sulle basi ALE, ALC sono maggiori dell'angolo rientrante esterno ELC, ma non già dell' interno; onde non ha luogo il Teorema.

CAPO XVIII.

Genesi dei diversi solidi, loro proprietà, e misura.

§. 203. Si concepisce la genesi delle figure solide determinando le superficie piane, o curve che devono cingerle. Incominciamo dai solidi cinti da poligoni rettilinei regolari, che diconsi solidi regolari. La più semplice delle figure regolari si è il triangolo equilatero; determiniamo adunque in primo luogo quai solidi regolari possono esser cinti da triangoli equilateri. Osservando che l'angolo del triangolo equilatero sia di 60°, che tre angoli di questo triangolo costituiscono 180°, apparisce che si può formare angolo solido da tre angoli del triangolo equilatero, e quattro di questi triangoli costituiranno il solido detto *Tetraedro*. Similmente da quattro angoli del triangolo equilatero si formano 240°; e per-e perciò con otto di tali triangoli si costituisce un solido detto *Ottaedro*. Cinque triangoli equilateri formano un'angolo di 300°; si può dunque formare un solido da venti triangoli equilateri detto *Icosaedro*. Ma sei angoli del triangolo equilatero eguagliando 360°, non possono formare angolo solido; dunque tre soli solidi regolari possono nascere dal triangolo equilatero.

L'angolo del quadrato essendo retto, tre di questi angoli fanno 270°; onde se ne può costituire un solido regolare di sei facce detto *Cubo*, che potrebbe altresì dirsi *Esaedro*. Ma quattro angoli del quadrato formando 360°, non si può da essi formare angolo solido.

L'angolo del pentagono regolare essendo di 108°, tre di questi angoli faranno 324°, e potrà formarsi perciò un solido regolare avendo dodici facce pentagone denominato *Dodecaedro*; ma quattro di questi angoli formerebbero 432°, dunque per mezzo del pentagono un solo solido regolare può costruirsi. Infine l'angolo dell'esagono è di 120°, e tre angoli formando 360°, dall'esagono non si può formare alcun solido regolare, e molto meno dall'ettagono, dall'ottagono ec.

Teorema. *Non vi sono che cinque corpi regolari, cioè il Tetraedro, il Cubo, l'Ottaedro, il Dodecaedro, l'Icosaedro.*

§. 204. Se si supponga un punto qualunque fuori del piano di una figura piana rettilinea, e si concepiscano dei triangoli, che abbiano i lati di tale figura per base, e questo punto per vertice comune, il solido che da essi vien cinto si dice *Piramide*, il punto *vertice*, e la figura rettilinea *base* della piramide. La piramide si dirà *triangolare*, *quadrangolare*, o *poligona* secondocchè la base è un triangolo, un quadrilatero, o un qualunque poligono. La perpendicolare che si abbassa dal vertice sulla base si dice *altezza*, e quella

che

che si abbassa su di uno dei lati della base *apotema*.

§. 205. La superficie piramidale essendo costituita dai triangoli, che cingono la piramide, si può intendere generata dal moto di una retta, la quale avendo un suo estremo immobile, si raggiri lungo il perimetro della data figura. E nell'istesso modo se in luogo di una figura rettilinea si prenda una curva qualunque, lungo la quale si aggiri una retta, restando un suo estremo immobile, si genererà una superficie curva, che si dice *conica*.

§. 206. Il solido terminato dalla superficie conica, e dalla figura, che li serve di base si dice *cono*. Se la base sia un circolo, si dirà *cono circolare*, o semplicemente *cono*, perchè ordinariamente di questo si parla nella geometria. *Asse* del cono si dice la retta congiungente il suo vertice col centro della base; e se l'asse sia perpendicolare alla base, il cono si dirà *retto*, in altro caso *obbliquo*.

§. 207. Tutti quei solidi che sono cinti da due figure eguali, simili, e parallele, e similmente poste e da parallelogrammi si dicono *prismi*. Si prende per base del prisma una delle due figure parallele, e l'altezza si è la distanza de' piani di tali figure. Si può intendere generato il prisma col moto di una figura che si mantenga sempre parallela a se stessa. Da ciò è facile rilevare, che i prismi sono quadrangolari se hanno per base un parallelogrammo, ed allora prendono il nome di *parallelepipedi*, i quali perciò sono figure solide cinte da sei parallelogrammi. Il parallelepipedo è retto, o obbliquo secondocchè i parallelogrammi sono fra loro perpendicolari, o non lo sono; perciò i parallelogrammi che cingono il prisma retto sono rettangoli; e qualora tale figura solida venga cinta da sei quadrati si dice *cubo*.

§. 208. La superficie prismatica si può intendere ge-

generata dal moto di una retta, che giri sempre a se parallela lungo il perimetro delle figure rettilinee. Nell'istesso modo se la linea intorno a cui la retta si muova sempre a se parallela sia una curva, la superficie prenderà il nome di superficie *cilindrica*, ed il solido che ne vien chiuso *cilindro*. Egli è facile ravvisare, che la genesi del cilindro si può concepire col moto progressivo di una curva, che si mantenga sempre a se ſtessa parallela. Ordinariamente sotto il nome di cilindro s'intende il circolare.

§. 209. Non solo col moto delle figure che si mantengono sempre a se parallele si possono intendere generati i solidi, ma con qualunque movimento. Così se si supponga, che una figura si rivolga intorno ad una data retta, che si considera come *asse di rivoluzione*, ne nascerà un solido, che si dice perciò *solido di rivoluzione*. Se un semicircolo si rivolga intorno al diametro, ne nasce una figura solida detta *sfera*, le di cui proprietà sono, che tutte le rette che dal centro si conducono alla superficie sferica sono eguali, e che le sue sezioni fatte per mezzo di un piano sono circolari.

§. 210. Incominciamo dal considerare le proprietà dei parallelepipedi. E primieramente egli è chiaro, che le diagonali dei parallelogrammi opposti debbano essere eguali, e parallele fra di loro. Dunque il piano, che intersega il parallelepipedo per le diagonali genererà un parallelogrammo, e dividerà il solido in due prismi triangolari perfettamente eguali fra di loro, perchè cinti da uguali figure. Quindi il

Teorema. *Il parallelepipedo intersegato da un piano, che passi per le diagonali de' parallelogrammi opposti resta diviso in due prismi triangolari perfettamente uguali.*

§. 211. La misura della superficie de' solidi cinti da superficie piane è facilissima. Infatti non si deve far

far altro, che misurare ciascuna figura rettilinea, che cinge il solido, e poi prendere la somma di tutte. Così nel prisma retto si trova, che *la superficie prismatica sia eguale al prodotto del perimetro della base per l'altezza*. Inoltre siccome ogni parallelogrammo si misura pel prodotto della base per l'altezza (§. 154.), così egli è chiaro, che per misurare la superficie del prisma obbliquo sia necessario prima di tutto ritrovare le altezze di tutti i parallelogrammi costituenti la superficie prismatica. Or egli è evidente, che se si tagli il prisma con un piano perpendicolare ad un lato, sarà tale piano perpendicolare a tutti i lati del prisma, perchè son fra loro paralleli, e le sezioni fatte dal piano nella superficie prismatica saranno le altezze rispettive di tutti i parallelolagrammi. Dunque *la superficie prismatica si misura dal prodotto di un lato per la sezione perpendicolare ai lati del prisma medesimo*. Quindi per le proporzioni delle superficie prismatiche, e dei loro lati, si avranno tutte quelle proprietà, che si sono dimostrate relativamente alle proporzioni fra i prodotti, ed i fattori. Vedi §. 55.

§. 212. La superficie piramidale si misura prendendo la somma di tutti i prodotti delle metà delle basi per i loro apotemi rispettivi. Dunque *se tutti i triangoli abbiano eguali apotemi, sarà la superficie piramidale eguale al prodotto del semiperimetro della base per un' apotema*.

§. 213. Sia ora la piramide la di cui base sia ABC, (*fig.* 35.), ed il vertice D, e si tagli tale piramide con un piano abc parallelo alla base, saranno le sezioni ab, ac, bc rispettivamente parallele ad AB, AC, BC (§. 196.), onde si avrà $AB : ab = BD : bD = BC : bc$, ed $AC : ac = CD : cD = DB : Db$; e perciò i tre lati del triangolo ABC sono proporzionali ai tre lati del triangolo abc, ed il primo sarà simile al secondo (§. 163.). Or poi-

poichè la piramide poligona si può dividere in piramidi triangolari, saranno nello stesso modo tutti i triangoli ne' quali può dividersi la base simili respettivamente a tutti i triangoli ne' quali si può risolvere la sezione parallela alla base medesima. Dunque sarà la base simile alla sezione (§. 168.), e perciò

Teor. *Se una piramide qualunque si tagli con un piano parallelo alla base, ne nascerà una sezione simile alla base medesima.*

§. 214. Or poichè divisa la piramide per mezzo di un piano parallelo alla base, si ottiene la piramide troncata ABC*cba*, cerchiamo di misurare la superficie di questo tronco di piramide. Egli è chiaro, che la misura di questa superficie dipenda dalla misura de' trapezj, che la cingono; ma poichè noi scorgiamo, che in tali trapezj due lati sono paralleli, ricerchiamo se la loro misura ordinaria si possa semplificare. Consideriamo il trapezio AC*ca*, e si abbassino su di AC le perpendicolari DP, *a*Q, *c*R, sarà il trapezio eguale al prodotto di OP per QR insieme colla metà di AQ, RC; ma tanto è dire QR colle metà di AQ, ed RC, quanto è dire la metà della somma di AC e di *ac*; dunque *se la piramide sia tale, che tutti gli apotemi sieno fra loro eguali, sarà la superficie della piramide troncata eguale al prodotto della porzione dell' apotema intercetto tra la base, e la sezione, moltiplicata per i semiperimetri della base, e della sezione.*

§. 215. Tralasciando tutte le altre considerazioni relativamente alle superficie de' solidi, osserviamo soltanto, che le superficie de' solidi simili, cioè de' solidi cinti da figure simili, debbano essere in duplicata ragione dei lati omologhi.

§. 216. Veniamo adunque alla misura della solidità; e siccome si è istituita la misura delle superficie mediante il quadrato, così si è stimato conveniente da' Geometri misurare i solidi col cubo. Incominciando dal parallelepido retto, e presa la comune aliquota delle tre sue dimensioni cioè della larghezza della base, della sua lunghezza, e dell' altezza del parallelepipedo, s' intendano tali sue dimensioni divise in parti eguali a quest' aliquota comune. Quindi la base si può intendere divisa in tanti quadrati, quanto si è il prodotto della sua lunghezza, e larghezza, e sopra tali quadrati si possono intendere elevati altrettanti parallelepipedi retti costituenti l' intero parallelepipedo. Ora pei punti delle divisioni dell' altezza s' intendano condotti de' piani paralleli alla base, sarà ciascuno di tali parallelepipedi diviso in tanti cubi, quante sono le parti dell' altezza, e periò nell' intero parallelepipedo ci saranno tanti cubi, quanto si è il prodotto del numero de' quadrati della base pel numero delle parti dell' altezza. Dunque il parallepipedo retto i di cui lati sieno commensurabili si misurerà pel prodotto delle unità superficiali della base per le unità lineari dell' altezza. Qualora i lati sono o tutti e tre incommensurabili, o due solamente, si dimostrerà, che il parallepipedo retto sia ancora eguale al prodotto della base per l' altezza col medesimo raziocinio di cui ci siamo serviti pel rettangolo (§. 153.)

Teor. *Il parallelepipedo retto si misura moltiplicando la base per l' altezza.*

§. 217. Cerchiamo ora di misurare la solidità del parallelepipedo obbliquo. Essendo noi convenuti di misurare la solidità per mezzo di un cubo, che si riguardi come unità di misura, apparisce che il parallelepipedo obbliquo non potendosi risolvere, che in solidi simili, la sua misura non si può istituire per mezzo del cubo. Vediamo adunque di trasformarlo in un parallelepipedo retto, per lo che cerchiamo d' indagare se due parallelepipedi, che abbiano eguali basi, ed alteztezze sieno fra di loro eguali. Sieno sulla medesima base AC (*fig.* 36.) due parallelepipedi uno che termini in MQ, e l'altro in RV, e sia il piano MV parallelo ad AC. Si supponga per maggior facilità, che tali parallelepipedi sieno tra i medesimi piani laterali CDVN, ABSM.

Considerando i triangoli DNT, AMR si ravvisa, che sono perfettamente eguali, e paralleli. Dunque si può concepire, che su del primo insista un prisma triangolare, che termini nel secondo. Similmente si concepisce sul triangolo CQV un prisma, che termini nell' altro triangolo BPS.

Or riflettendo, che le figure solide sono fra loro perfettamente eguali, quando lo sono respettivamente le figure che le cingono, saranno perfettamente eguali tali prismi triangolari. Ma a tali prismi triangolari è comune il prisma triangolare, che insiste sul triangolo QLT, e termina nel triangolo PHR; dunque tolto tale prisma comune, ed aggiunto il prisma triangolare, che insiste sopra LDC, e termina in AHB, risulterà l'intero parallelepipedo ABCDNMPQ eguale all' altro ABCDTRSV.

Teor. *I parallelepipedi, che sono posti sulla medesima base, e fra i medesimi piani paralleli, e di più fra i medesimi piani laterali sono eguali fra di loro.*

§. 218. Sieno ora i parallelepipedi sulla medesima base AC (*fig.* 37.), e che terminino respettivamente ne' parallelogrammi MQ, RV posti nel medesimo piano MHV parallelo alla base. Prodotti i lati di tali parallelogrammi, nascerà il parallelogrammo FI uguale ai medesimi; onde sulla base AC si potrà concepire, che vi sia un terzo parallelepipedo che termini in GH, il quale per le condizioni del Teorema precedente sarà eguale a ciascuno dei due primi; saranno adunque altresì questi eguali fra di loro, e perciò

Teor.

Teor. *Generalmente due parallelepipedi che hanno eguali basi, ed eguali altezze sono eguali fra di loro.*

§. 219. Poichè il parallelepipedo si divide in due prismi triangolari eguali fra di loro, ciascuno di questi si dovrà misurare moltiplicando l' altezza per la metà della base del parallelepipedo; ma la metà della base del parallelepipedo si è il triangolo; dunque *il prisma triangolare si misura moltiplicando la base per la altezza.*

Or potendosi ogni prisma poligono dividere in prismi triangolari, ne siegue il

Teorema. *Qualunque prisma si misura moltiplicando la base per l'altezza.*

§. 220. Passiamo ora alla misura della piramide, e primieramente è manifesto, che considerando il punto di mezzo del cubo per vertice di sei piramidi, le di cui basi vengano costituite dalle sei facce rispettivi del cubo, queste sei piramidi saranno fra di loro eguali, e perciò ciascuna dev' essere la sesta parte del cubo, onde si musurerà moltiplicando la sua base per la sesta parte dell' altezza del cubo, che è la terza parte dell' altezza della piramide. Dunque *ciascuna di queste piramidi si misura moltiplicando la base per la terza parte dell' altezza.* Ma questa misura si è un caso particolare, il quale però si estenderebbe ad ogni genere di piramidi, se si dimostrasse, che le piramidi di eguali basi, ed altezze sono fra loro eguali di spazio. Cerchiamo adunque il rapporto fra le piramidi aventi basi ed altezze eguali.

§. 221. Per determinare il rapporto delle piramidi di eguali basi, ed altezze in generale cerchiamo prima di determinare il rapporto di una piramide qualunque col prisma la di cui misura ci è già nota. Ma poichè è difficile ritrovare immediatamente quale sia questo rapporto, incominciamo dal dividere l' altezza della la piramide in qualunque numero di parti eguali, e pei punti della divisione conduciamo dei piani EFG, HLI, PKQ (*fig.*38.) paralleli alla base, che genereranno figure simili, per essere la sezione EF ad AC, ed FG parallela a CB ec. (§. 196.) Ciò fatto è chiaro, che su di queste figure si potranno iscrivere, e circoscrivere de' prismi alle porzio-piramidali tra esse comprese, cioè alla porzione della piramide ABCEGF si potrà iscrivere il prisma EGF*egf*, e circoscrivere l'altro ACB*acb*, e così in appresso. Or esaminando la differenza fra il prisma circoscritto, e l'iscritto, apparisce (§. 219.) che sia eguale al prodotto dell'altezza comune, e della differenza delle figure ABC, *egf*, o sia EFG, e per la ragione istessa la differenza fra il prisma iscritto, e'l circoscritto nella seconda porzione della piramide sarà eguale alla stessa altezza moltiplicata per la differenza delle figure EFG, HLI; dunque poichè quest' ultima figura HIL moltiplicata per l'accennata altezza dà il prisma HILPKQ, al quale non corrispondendo alcun prisma iscritto, la somma di tutti i prismi circoscritti meno la somma degli iscritti sarà eguale al prodotto dell' altezza comune di ogni prisma moltiplicata per ABC + EFG + HLI meno il prodotto della medesima altezza moltiplicato per EFG + HLI, cioè sarà eguale semplicemente al prodotto della base della piramide ABC moltiplicata per la comune altezza di ciascuno di questi prismi. Crescendo pertanto il numero di essi prismi, si diminuisce la comune altezza, e perciò può divenir minore di qualunque dato solido la differenza fra la somma de' prismi iscritti, e circoscritti, e molto più potrà divenir minore di qualunque dato la differenza fra tutti solidi circoscritti, e la piramide.

Ciò posto se vi siono due piramidi di eguali basi, e di eguali altezze, ed in entrambe si circoscriva un' egual

egual numero di prismi colle condizioni esposte di sopra, saranno eguali tali somme di prismi circoscritti, e perciò fra le due piramidi la differenza può divenir minore di qualunque data. Dunque queste due piramidi non possono supporsi disseguali, perchè allora la loro differenza non potrebbe diminuire, o dimostrarsi esser minore di quella, che è. Dunque

Teor. *Le piramidi di eguali basi, e di eguali altezze sono eguali di spazio.*

§. 222. Or poichè le piramidi di eguali basi, e di eguali altezze sono eguali, facilmente si dimostra, che di due piramidi che abbiano eguali altezze, ed inuguali basi, le aliquote simili de' conseguenti debbano entrare egual numero di volte negli antecedenti, onde si deduce, che *le piramidi di eguali altezze debbano essere in ragione delle basi, e viceversa.*

§. 223. Dunque se si supponga la dimensione di una sola piramide si sapranno misurare tutte le altre. Or noi abbiamo già osservato (§. 220.) che il punto di mezzo del cubo si può prendere come vertice di sei piramidi eguali, che hanno per rispettive basi i sei quadrati del cubo; dunque ciascuna di queste piramidi essendo eguale al prodotto della sua base per la terza parte della sua altezza, ed essendo eguale ad ogni altra piramide della medesima base, ed altezza, si avrà il seguente

Teor. *Qualunque piramide si misura moltiplicando la base per la terza parte dell' altezza.*

§. 224. Potendosi dividere in piramidi tutti i solidi terminati da figure piane, si potrà determinare la loro misura, e 'l loro rapporto.

CAP.

CAPO XIX.

Della misura delle figure curvilinee, e del metodo di Esaustione.

§. 225. NEl ricercare la misura delle piramidi (§. 221.) noi siamo ricorsi ad un principio semplicissimo, ed universale, cioè, che di due quantità inuguali la differenza è data, e che *non possano non esser eguali quelle quantità di cui si può dimostrare, che la differenza possa diventar minore di qualunque assegnabile.*

§. 226. Per dimostsare, che il sudetto principio abbia luogo nelle piramidi di eguali basi, ed altezze, noi ci siamo serviti del principio dell'iscrizione, e circoscrizione de'prismi, cioè di figure di nota dimensione. Quindi è, che nel voler determinar la dimensione delle figure curvilinee tanto piane, che solide, noi ci serviremo dell'iscrizione, e circoscrizione delle figure di nota dimensione, e del principio esposto nel precedente paragrafo. Questo metodo ritrovato dagli antichi Geometri fu detto *Metodo di Esaustione*, e dai moderni suol dirsi *Metodo de' Limiti*.

§. 227. Incominciamo dalla misura del circolo, e circoscriviamogli una figura di un qualunque numero di lati. Egli è di per se chiaro, che questo numero di lati si possa sempre accrescere, e perciò sempre diminuirsi non solo la differenza fra la figura circoscritta, ed il circolo, ma altresì fra il perimetro della figura circoscritta, e la circonferenza. Ora la figura circoscritta potendosi intendere divisa in triangoli, che abbiano tutti per altezza il raggio, e per comun vertice il centro del circolo, sarà eguale al prodotto della metà del raggio per lo perimetro. Dunque il prodotto della

la metà del raggio per la circonferenza potrà differire dal prodotto della metà del raggio per lo perimetro del poligono per una quantità minore di qualunque data, cioè sempre può diminuirsi la differenza fra la figura circoscritta, ed il prodotto della metà del raggio nella circonferenza; e perciò l'istessa condizione avrà luogo fra il circolo, ed il prodotto della circonferenza nella metà del raggio. Dunque

Teorema. *Il circolo è eguale al prodotto della circonferenza nella metà del raggio.*

§. 228. Poichè la dimensione del circolo dipende dalla circonferenza, ricerchiamo la ragione che intercede fra le circonferenze de' diversi circoli. Se s'intendano circoscritte a due circoli due figure simili, saranno i perimetri di queste nella ragione dei raggi.

Ma le circonferenze differiscono dai perimetri per quantità minori di qualsivoglia data; dunque la ragione delle circonferenze differirà da quella de' perimetri delle figure circostritte, o sia da quella de' raggi per una quantità minore di qualunque data. Dunque

Teorema. *Le circonferenze dei circoli sono nella ragione dei raggi, ed i circoli nella loro ragione duplicata*

§. 229. Adoperando i medesimi principj per la misura de' solidi prismatici, noi iscriveremo un cilindro ad un qualunque prisma poligono, e ne rileveremo il

Teorema. *La solidità di qualunque cilindro adequa il prodotto della base per l'altezza, e la superficie cilindrica è eguale al prodotto di un lato per la periferia della sezione fatta perpendicolarmente ai lati.*

§. 230. Quindi le solidità dei cilindri sono in ragion composta delle basi, e delle altezze. *E perciò se i cilindri hanno le basi circolari saranno in ragion composta della duplicata dei raggi, e della semplice delle altezze. E le superficie dei cilindri retti circolari saranno in ragion composta dei raggi, e delle altezze.*

§. 231. Dunque le solidità di due cilindri retti circolari sono in ragion composta delle superficie cilindriche, e dei raggi. *Onde per esser due cilindri di uguali superficie, le solidità devono essere nella ragione dei raggi. E per essere due cilindri uguali devono essere le loro superficie in ragione inversa dei raggi.*

§. 232. Nel medesimo modo coll' iscrizione, e colla circoscrizione delle piramidi poligone nei coni, ne dedurremo, *che la solidità di qualunque cono è uguale al prodotto della base per la terza parte dell' altezza.* Quindi potendosi facilmente determinare il rapporto tra le piramidi, ed i prismi (§§. 219, 223), sarà altresì facile ritrovare non solo la ragione che intercede fra i diversi coni, ma pure fra i cilindri, ed i coni.

§. 233. Ma relativamente alla determinazione della superficie conica, ci dovremo limitare ai soli coni retti circolari, perchè questi soli hanno tutti i lati fra loro uguali. Ora intendendosi iscritta in questo cono una piramide poligona, nella quale tutti gli apotemi essendo uguali, sarà la superficie di questa eguale al prodotto di un' apotema per la metà del perimetro del poligono. Dal che si rileva, che la superficie piramidale può differire dal prodotto dell' apotema nel mezzo perimetro circolare della base per una quantità minore di qualunque data, giacchè siccome il perimetro del poligono iscritto può differire dalla periferia per una quantità minore di ogni altra data, così pure può differire l' apotema dal lato del cono: dunque anche la superficie piramidale, ed il prodotto del lato del cono per la semicirconferenza della base potranno differire per una quantità minore di qualunque data; e l' istesso dovendosi pur dire della superficie conica tanto relativamente alla superficie piramidale iscritta, quanto relativamente al prodotto del lato per la semiperiferia della base, si avrà il

Teorema *La superficie del cono retto è eguale al prodotto di un lato per la metà della periferia della base.*

§. 234. Quindi potremo determinare nel medesimo modo le superficie dei coni retti troncati da piani paralleli alla base, iscrivendo in tali porzioni di coni delle porzioni di piramidi. E se ne dedurrà *che la superficie del cono retto troncato da un piano parallelo alla base, sia uguale al prodotto della porzione del lato intercetta fra la sezione e la base, moltiplicata per la mezza somma dei perimetri della base, e della sezione.*

§. 235. Si consideri il triangolo rettangolo IHD (fig. 39.), ed il medesimo s' intenda compiere una intera rivoluzione intorno al cateto DH, l' ipotenusa DI genererà la superficie del cono retto, che sarà uguale al prodotto della periferia del raggio IH per DK metà di DI (§. 233). Ora se nella misura della superficie conica non si voglia far entrare il lato del cono, ma bensì l' altezza DH, si dovrà ritrovare una periferia, il di cui raggio stia al raggio della periferia della base, o sia ad IH, come KD : DH. Ma immediatamente si ravvisa, che se dal punto K si elevi KC perpendicolare su di ID, debba essere CK il raggio di tale circolo, perchè ne risultano simili i due triangoli rettangoli IDH, DKC; dunque sarà la periferia di CK a quella di IK, come DK : DH, ed il prodotto di DK nella periferia di IH, o sia la superficie conica sarà uguale al prodotto dell' altezza DH nella periferia di CK.

§. 236. Se ora dal punto I si tiri qualunque retta IN, ed abbassate su di DC le perpendicolari IH, NO, s' intenda rivolgersi il quadrilatero INOH intorno ad HO, il lato IN genererà una porzione di cono retto, del quale si può considerare come base il circolo descritto da NO, e come sezione l' altro circolo descritto da IH. Dunque la porzione di superficie conica sarà uguale (§. 234.) ad NI moltiplicata per la mezza somma delle due periferie di NO, e di IH. Ora per ri-

riferire questa misura ad una sola periferia circolare si abbassi dal punto di mezzo M della retta NI la retta ML perpendicolare su di DB, e tirata a quest'ultima la parallela IS, sarà MV la metà di NS; onde la metà della somma di NS, SO, IH, dev' essere MV + VL cioè ML, cioè la metà della somma di NO, ed IH, e perciò pure la periferia di ML si è la metà della somma delle periferie di IH ed NO, essendo le circonferenze nella ragione de' raggi.

Ciò posto la superficie generata dalla retta IN è eguale al prodotto di IN nella periferia di ML. Ed innalzando su di NI la perpendicolare MC, si ottiene il triangolo MCL simile all'altro NSI, e la periferia di MC a quella di ML, come NI ad IS, ossia HO, e perciò sarà la porzione di superficie conica uguale al prodotto di HO nella periferia dalla perpendicolare MC.

§. 237. Ora se s'intenda che il semipoligono regolare DINPQE circoscritto al semicircolo AMB si rivolga intorno alla sua diagonale D*q*, sarà la somma di tutte le superficie descritte dai soli lati, uguale alla sua diagonale moltiplicata per la periferia del circolo iscritto, e perciò

Teorema. *Se un semipoligono regolare si rivolga intorno alla sua diagonale, sarà la superficie descritta uguale al prodotto della diagonale, e della circonferenza del circolo iscritto.*

§. 238. Si consideri ora la superficie sferica generata dalla rivoluzione del semicircolo AMB (*fig.* 39.) relativamente a quella, che vien descritta dal semipoligono circoscritto. Egli è chiaro, che la superficie formata dalla rivoluzione del semipoligono sia circoscritta alla sfera, e che crescendo il numero dei lati del poligono, la sudetta superficie si accosti alla superficie sferica. Dunque il prodotto della diagonale D*q* nel-

nella circonferenza del circolo AMB, che è un circolo massimo della sfera si può accostare alla superficie riferita, talchè ne differisca in fine per una quantità minore di qualunque data. Ma crescendo il numero de' lati del poligono circoscritto si diminuisce la differenza della diagonale D*q*, e del diametro AB; dunque altresì il prodotto della periferia del circolo massimo nel suo diametro può differire dalla superficie sferica per una differenza minore di qualunque data, e perciò la superficie sferica deve essere eguale al sudetto prodotto della periferia del circolo massimo nel diametro. Ma il prodotto della periferia nel diametro è eguale al quadruplo del circolo massimo; dunque

Teorema *La superficie sferica è quadrupla del circolo massimo.*

§. 239. Coll' istesso raziocinio si dimostra, che la superficie descritta da qualunque arco AM, cioè la superficie di una porzione sferica sia eguale al prodotto della periferia del circolo massimo moltiplicata per AL altezza della porzione medesima; *e perciò se una sfera si tagli con piani paralleli, le superficie delle porzioni sferiche saranno come le parti del diametro.*

§. 240. Dall' essere la superficie sferica eguale al quadruplo del circolo massimo, si deduce, *che il circolo, che ha per raggio il diametro della sfera sia eguale alla superficie sferica* (§. 228.). Ora se si voglia determinare il raggio del circolo che è eguale alla superficie della porzione sferica generata dall' arco AM, è da riflettersi, che il circolo che ha per raggio il diametro AB, deve essere al circolo che adequa la sudetta superficie della porzione sferica generata da AM, come AB: AL (§. 239.); dunque la ragione di AB: AL è duplicata di quella della stessa AB al raggio del circolo eguale alla superficie della porzione sferica; e perciò il raggio di tale circolo dovendo essere media pro-

proporzionale tra queste due rette, è la coda dell'arco AM (§.166.) che va dal vertice della porzione alla periferia della base; dunque

Teor. *La superficie di una porzione sferica è eguale al circolo, il di cui raggio è la retta condotta dal vertice della porzione alla periferia della base.*

§. 241. Ricerchiamo ora la misura della solidità della sfera. A tal uopo concepiamo che quanti piani si vogliano tocchino la sfera, ciascuno di questi piani toccando la sfera sarà perpendicolare al raggio della medesima al punto di contatto, poichè essendo la perpendicolare la minima delle rette, che da un punto si possono condurre su di un piano, tutti gli altri punti di ciascuno di questi piani devono essere fuori della sfera, ed il punto di contatto sarà il più vicino. Ciò posto tutti i piani toccanti la sfera intersecandosi fra di loro costituiscono delle figure piane, che terminano una figura solida circoscritta alla sfera. Or egli è facile rilevare, che questo solido circoscritto è un composto di tante piramidi che hanno per comun vertice il centro della sfera, e per altezza il raggio; dunque il sudetto solido è eguale alla sua superficie moltiplicata per la terza parte del raggio. Seguendo pertanto lo stesso raziocinio degli altri teoremi, si deduce il

Teor. *La solidità della sfera, o di qualunque settore sferico ha per misura il prodotto della sua superficie nella terza parte del raggio.*

§. 242. Sia ora da misurarsi qualunque porzione di sfera generata dal moto della porzione di circolo (*fig.* 39.) DML intorno al suo diametro AB. Se il settore circolare AMC si fosse rivolto intorno ad AC, avrebbe generato un settore sferico, il quale risulta dalla porzione sferica generata da AML, e dal cono formato dal triangolo MCL. Dunque la porzione sferica generata da MAL è eguale alla differenza del settore, e del

del cono: e poichè si sa misurare sì il settore sferico, che il cono, si saprà pure misurare la porzione sferica.

§. 243. Egli è facile altresì determinar le ragioni sì delle superficie, che delle solidità delle sfere, e delle porzioni sferiche. Le superficie delle sfere, o delle loro porzioni simili sono in duplicata ragione de' raggi. Le solidità poi essendo in ragion composta delle superficie sferiche, e dei raggi sono in triplicata ragione de' raggi medesimi.

Teor. *Le solidità delle sfere, o delle loro porzioni simili sono in triplicata ragione de' raggi; le superficie poi sono nella loro ragione duplicata.*

§. 244. Vediamo ora qual' è il rapporto tra la sfera, e 'l cilindro, o il cono circoscritto. E primieramente incominciando dalla sfera, e dal cilindro si ravvisa, che l' altezza del cilindro circoscritto alla sfera è eguale al diametro della sfera medesima, e la sua base è eguale al circolo massimo della sfera; dunque la superficie di questo cilindro è eguale alla periferia del circolo massimo moltiplicata pel diametro, cioè è quadrupla del circolo massimo (§.238.). Sicchè la superficie cilindrica senza le basi è eguale alla superficie sferica (§.230.); aggiunte alla superficie cilindrica le sue basi, sarà insieme con queste eguale a sei circoli massimi; e perciò l' intera superficie cilindrica sarà alla superficie sferica iscritta come $6:4$, o come $3:2$.

Nel modo medesimo la solidità del cilindro circoscritto è eguale al circolo massimo moltiplicato per lo diametro, (§.229), o sia al quadruplo circolo massimo moltiplicato per la metà del raggio. Ma la sfera è eguale al quadruplo circolo massimo moltiplicato per la terza parte del raggio; dunque il cilindro circoscritto sta alla sfera come $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$, o come $3:2$ (§.141).

Teor. *Il cilindro circoscritto alla sfera sta alla sfera medesima e nella solidità, e nella superficie intera* $=3:2$.

CAP.

CAP. XX.

Conclusione delle precedenti ricerche geometriche.

§. 245. DA tuttociò che si è finora dimostrato si deduce, *che la teoria dell' eguaglianza delle parti dello spazio comprende tutte le verità geometriche, che sull' estensione si possono dimostrare*. Il principio poi generale per discernere siffatta eguaglianza si è il principio di soprapposizione.

§. 246. Infatti con questo principio abbiamo rinvenute le proprietà de' triangoli, e delle figure quadrilatere, e di poi abbiamo determinato le proprietà delle linee rette per essere parallele. Dopo di aver dedotto da queste verità tutte le conseguenze relativamente agli angoli delle diverse figure, abbiamo coi medesimi principj rinvenuto la dimensione dell' aja delle figure rettilinee.

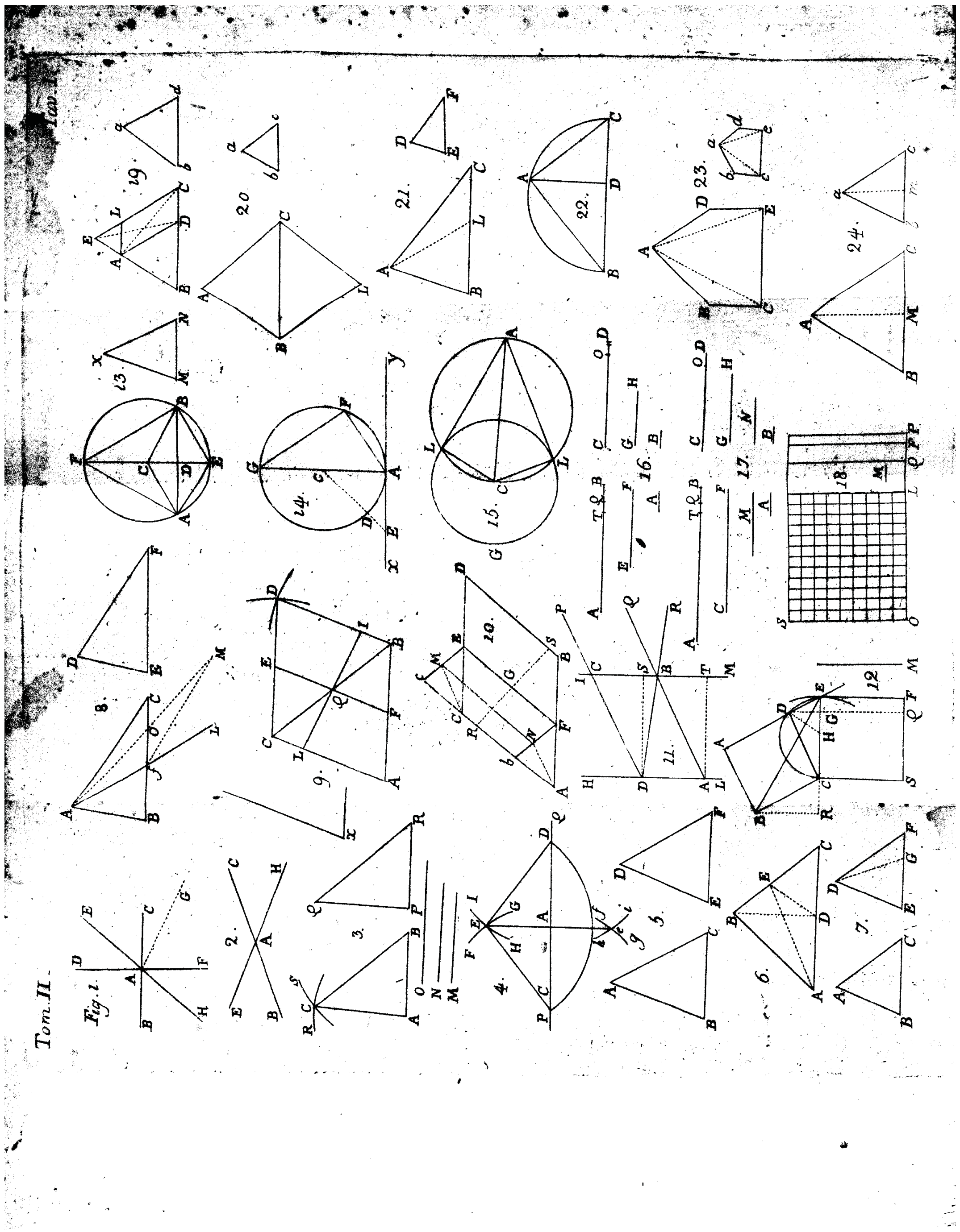
Similmente dall' eguaglianza dei raggi del circolo ne abbiamo dedotto le proprietà della linea circolare.

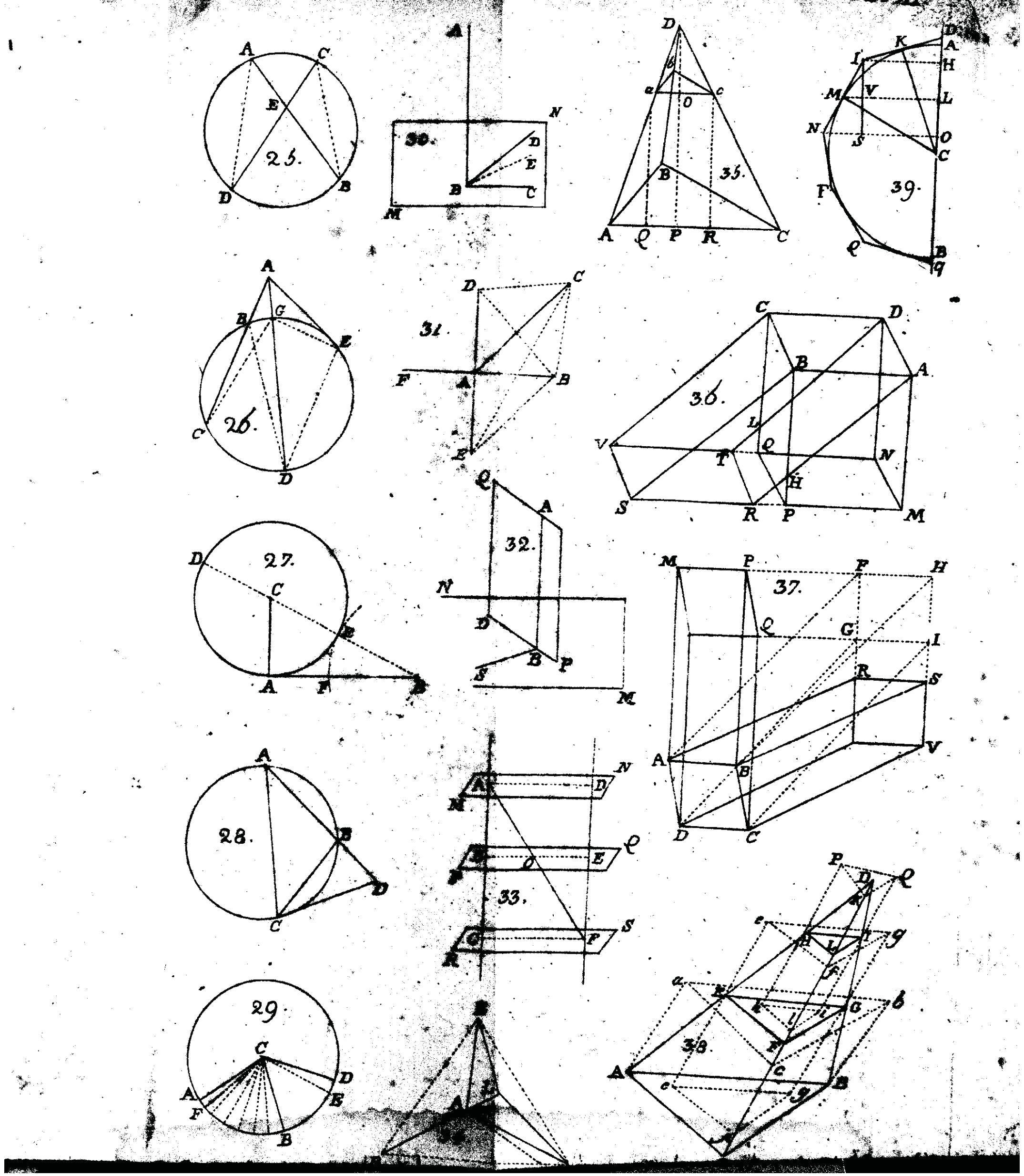
§. 247. Per universalizzare gli esposti principj noi abbiamo dall' istessa idea di eguaglianza dedotta quella della ragione, e della proporzione. Ne abbiamo dipoi fatto l'applicazione ai principj geometrici, e tutte le verità, che abbiamo ritrovato, non sono state che un semplicissimo sviluppo.

§. 248. Abbiamo inoltre voluto fare l'applicazione dei stessi principj alla posizione delle linee, e dei piani, ed abbiamo dimostrato le proprietà delle figure solide.

§. 249. Finalmente per rinvenire la dimensione di alcune figure curvilinee piane, o solide, abbiamo dovuto ricorrere all' iscrizione delle figure di cognita dimensione, e lo stesso principio di esaustione non è altro, che una proprietà dell' eguaglianza delle quantità.

FINE.




25.
30.
35.
39.
26.
31.
36.
27.
32.
37.
28.
33.
29.
38.