PRINCIPJ ANALITICI

DELLE MATEMATICHE

DI

ANNIBALE GIORDANO, E CARLO LAUBBERG.

Tom. I.

ARITMETICA.

IN NAPOLI MDCCXCII.

PRESSO GENNARO GIACCIO.

Con Licenze de' Superiori.

PRINCIPJ D'ARITMETICA.

ERRATA CODICE

ERRORI			CORREZIONI
Pag.	Ver.		
18.	23.	; ma	: Ma
31.	23.	o il	o accrescere il
ivi	27.	denominatore, o aumentando il numeratore	numeratore, o aumentando il denominatore
ivi	34.	dividessi nello	nello
55.	24.	residui non	residui
ibid.	25.	che non	che

A COLORO CHE LEGGERANNO

Lo stato delle umane cognizioni ha ricevuto miglioramento a proporzione, che le profonde ricerche dell' uomo lo hanno reso più semplice. Quindi è, che promossa felicemente in questi ultimi tempi la Filosofia, ne abbiam riguardate le parti come tante classi di fenomeni fra loro connessi con ordine analitico, talchè principiando dalle più semplici sensazioni, si riducono infine ad espressioni, e formole generalissime. Tante adunque riputar si devono le scienze rigorose ed esatte, quante sono queste primitive sensazioni, quanti sono questi fenomeni, o convenzioni, dalle quali per un necessario legame si possono dedurre tutti gli altri fenomeni dello stesso genere, che finalmente ci conducono per gradi alle più generali cognizioni. Le Matematiche essendo di questo numero, non sono in effetto, che lo sviluppo delle idee semplici costituenti l' idea delle diverse grandezze che noi conosciamo, e di alcune nostre primitive convenzioni sopra di esse. Sotto questo punto di veduta conviene altresì riguardar la Fisica, la quale si è pur conosciuto non esser altro, che la generalizzazione dei fenomeni, i quali risultano dall' attività della materia, e non già quella folla di sostanze, e di qualità che servivano solamente ad insegnarci dei vocaboli privi affatto d' idee. La Metafisica, che sembrava tanto lontana da questa perfezione, mercè gli sforzi combinati di uomini sommi, ha veduta dissiparsi quella folta caligine in cui l' avevano involta le scuole: Essa si può ridurre a due estesissimi rami, il primo de' quali avendo l' uomo per oggetto, comprende la storia delle nostre sensazioni; ed il secondo, che riguarda gli altri esseri, è la serie di quei pochi corollarj, che deduconsi dalle più generali leggi fisiche, conosciuti sotno il nome di leggi Cosmologiche. Finalmente la Morale vien riguardata come l' analisi delle affezioni sviluppate dal bisogno, e de' mezzi per dirigerle; e la Politica si ristringe al solo problema di trovare la soddisfazione de' nostri bisogni in quella dei bisogni pubblici. Quindi se la Fisica, se la Metafisica, la Morale, la Politica altro non sono, che l' analisi degli effetti dell' attività della materia, della sensibilità dell' uomo, e della direzione di questa sensibilità relativamente al bisogno del medesimo, come la matematica è l' analisi delle quantità; essendo questa una scienza esatta, dovranno altresì tali riguardarsi le prime, quando si vogliano considerar senza mistero, e nel giusto loro punto di veduta.

Da ciò noi deduciamo, che l' unica strada la quale conduce alla perfezione di una scienza qualunque, sia la ricerca del naturale sviluppo delle idee semplici costituenti il fenomeno primitivo, che è l' oggetto di essa; e che l' unico mezzo per promuovere la pubblica educazione, ed estirpare i vecchi pregiudizj consista nel ridurre ad effetto una tale semplificazione nelle scienze, onde ridotte all' analisi delle nostre sensazioni, non costituiscano più quella congerie di verità isolate, che ci presenta il metodo detto di Composizione.

Tali considerazioni ci han fatto riguardare come non degne dell' educazione, che devesi all' uomo, le Istituzioni di Matematica, e Filosofia compilate col metodo sintetico; esse formano piuttosto la storia delle verità, che l' esposizione de' metodi d' invenzione, che hanno contribuito allo sviluppo dello spirito umano. Ci siamo dunque determinati a formare le Istituzioni delle Matematiche secondo le vedute, che abbiamo esposte, ed osiamo già presentare al pubblico il primo Tomo, che comprende l' Aritmetica; e sebbene una degna esecuzione di questo piano sia molto superiore alle nostre forze, quai buoni cittadini ci siam determinati ad intraprenderla, pel solo desiderio di essere utili alla nostra Patria.

PRINCIPJ D'ARITMETICA

CAP. I.

Formazione del Linguaggio numerico.

§. 1. Quale era lo stato delle impressioni, che ricevevano i nostri sensi, allorchè abbiamo incominciato a sentire cosa sia *l' uno* e cosa *il più*?

Nel primo momento di nostra esistenza tutte le impressioni sono molto confuse, sì per la moltitudine degli oggetti, che per la debolezza de' nostri organi.

Tra queste impressioni quella ch' è più viva ci fissa; e da tale impressione isolata noi restiamo modificati.

Gradatamente i nostri sensi ci si assuefanno, noi incominciamo a sentire nell' istesso tempo diverse impressioni, ne sentiamo perciò la congruenza o la differenza, ed in questo stato discerniamo l' *uno* dal *più*.

Onde simultaneamente in noi nasce l' idea dell' *unità*, e della *pluralità*, *moltitudine*, o sia *numero*.

§. 2. Ma in questo stato l' idea del numero è confusa; quando dunque diviene determinata, e noi discerniamo i diversi numeri?

La congruenza, che noi sentiamo alcune volte nelle nostre impressioni, in noi altro non è, che il sentir ripetere la stessa sensazione. Ecco dunque come in noi nasce l'idea della ripetizione, indi di diverse ripetizioni, cioè di numeri diversi.

§. 3. Or l'idea di un determinato numero momentaneamente in noi resterebbe, se non procurassimo di rappresentarcelo con qualche segno materiale. L'Uomo fortunatamente ha questo mezzo, ch'è la base d'ogni sua cognizione. Egli incomincia a rappresentarsi queste ripetizioni per mezzo di qualche oggetto, come di un sassolino, delle dita ec. E così diventano permanenti e distinte le idee de'primi numeri, che sono pochissimi in tale limitato ſtato di nozioni (1).

L'Uomo allora conosce la proprietà del numero di poter esser più grande, o più piccolo; ma tuttocchè comprenda che i numeri possano sempre crescere, pure ha un'idea confusissima de' numeri superiori a que'che già conosce (2).

§. 4. Questo si è lo stato delle nostre nozioni sopra i numeri prima d'incominciare ad articolare i suoni della voce. I nostri bisogni già accresciuti richiedono un mezzo più agevole di comunicarli agli altri: noi allora sostituiamo i diversi suoni articolati ai segni materiali. Ecco l'inizio della lingua.

§. 5. Allora il modo di numerare subisce una rivoluzione. Volendo comunicare agli altri i pochi numeri da noi già concepiti, incominciamo a servirci di tante parole, quanti sono i medesimi; ma volendo un poco procedere innanzi, vedremo subito oppressa la nostra memoria.

§. 6. Non potendo dunque impiegar tanti vocaboli totalmente differenti, quanti sono i numeri che il nostro bisogno richiede d'esprimere, altro non potremo fare che in-

(1) Si ſono infatti conoſciuti de' ſelvaggi, che numeravano fino a 3, altri fino a 10, ed altri fino a 12. Queſt'ultimo numero fu riguardato come perfetto preſſo alcune antiche Nazioni, e fu quello delle loro Divinità maggiori.

(2) Molti ſelvaggi queſta idea indeterminata di un numero grande l'eſprimono coll'indicare i loro capelli.

indicar con pochi vocaboli i più piccoli numeri, e ricorrendo ad una continua ripetizione degli stessi vocaboli, servirci del valore combinato di questi per indicare tutti gli altri numeri.

§. 7. Secondo questo metodo, che il bisogno, e la debolezza della memoria ci suggeriscono, il primo numero che dobbiamo indicare è quello ch'eccede di un'unità i numeri già espressi; il secondo è quello, ch'eccede quest'ultimo pure di un'unità, e così in appresso. Dunque noi uniremo la parola ch'esprime il più gran numero a cui già abbiamo dato il nome, e l'unità, e così da questo nome composto formeremo il nome del numero seguente. Coll'istesso metodo uniremo l'istesso numero agli altri più piccioli già nominati, finchè esso non ritorni in se ſtesso. Allora ricominceremo la stessa operazione per seguitarla innanzi finchè vogliamo.

§. 8. Supponghiamo che oltre il nome di uno, si dia il nome di *due* alla sua prima ripetizione, e che quì finisca la nomenclatura. In questo caso con questi due vocaboli dobbiamo espsimere tutti i numeri, e saremo obbligati a dire, uno, due, due uno, due due, due due uno, due due due &c. &c.

Da ciò apparisce che in ogni due ripetizioni le parole ritornano in loro medesime. Questa convenzione si dice binaria, ed essa non è ricevuta, perchè il periodo troppo breve ci fa cadere nell'oscurità, e nella confusione (1).

§. 9. La convenzione trinaria avrebbe allontanato un poco questo inconveniente, ma senza toglierlo; e l'iſtesso difetto ha luogo nell'Aritmetica quaternaria (2). La pratica di numerare sulle dita può avere indotti gli uomini alla convenzione denaria. Facciamo adunque ancor noi la stessa convenzione, e formiamoci un linguaggio numerico fondato sul periodo denario, il quale senza introdurre una mol-

(1) Leibnitz ha dimoſtrato che l' Aritmetica binaria fu nota agli antitichi Cineſi.

(2) Ariſtotele fa menzione di una nazione che a' ſuoi tempi adoperava un tal ſiſtema numerico.

moltiplicità innumerabile di voci, non ha gl' inconvenienti del binario.

§. 10. Dando un nome ai primi numeri, chiamiamoli *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*, *dieci*. Per procedere oltre noi non dobbiamo far altro, che aggiugnere un' unità al più alto numero, e dire uno e dieci, o *undici*, due e dieci, ossia *dodici* &c. fino al dieci e nove: dopo di che ritornando al dieci diremo dieci e dieci; ma l'uso che si fa di questo linguaggio di numerazione, ci ha fatto convenire di abbreviar l'espressione, e di dir *venti*; e perciò proseguendo innanzi ventuno, ventidue, ec. trenta, quaranta ec. Ma non è piaciuto di ricevere l'espressione dieci dieci per indicar il decimo ritorno, e si è detto *cento*, e dieci cento si è detto *mille*, e 'l dieci cento mila *milione*, e 'l dieci cento mila milioni *bilione* ec. (1).

CAP. II.

Invenzione dei segni.

§. 11. IL linguaggio numerico è adunque il mezzo di distintamente rappresentarci i numeri, di comunicarli agli altri, e di eseguire sopra de' medesimi diverse operazioni, come unire più numeri insieme, ritrovare la differenza di due ec. Subito dunque che si è formato il linguaggio numerico, si hanno gli elementi della scienza de' numeri che noi diciamo *Aritmetica*.

§. 12. Ma quanto tale nomenclatura soddisfa ai due primi oggetti, di rappresentare distintamente, e di co-

(1) Il sistema dell'Aritmetica denaria è stato in uso presso le nazioni antiche, Indiana, Greca, Ebrea, Romana, e queste poco han differito nel modo di esprimere i numeri. Tanto gli Ebrei che i Greci servendosi delle loro lettere dell' alfabeto, le distinsero in tre classi, affinchè le lettere della prima esprimessero le unità, quelle della seconda le decine, e le altre le centinaja; di più colla loro combinazione esprimevano gli altri numeri. I Romani ebbero quasi il medesimo metodo, ma imperfetto

comunicare agli altri i differenti numeri, altrettanto è insufficiente pel terzo oggetto, ch' è il più esteso, quello cioè di eseguire differenti operazioni sopra i medesimi. Quando i numeri sono molti, ed alquanto grandi, la nostra immaginazione si smarrisce, e l' Uomo si ritrova ridotto di nuovo al bisogno di materialmente rappresentarseli. L'invenzione dunque de' segni si deve al bisogno delle operazioni da istituirsi sopra i numeri.

§. 13. Abbiamo veduto come l'Uomo dai segni passa alla lingua, è naturale ora che in un modo analogo dalla lingua passi ai segni. Or se i segni da stabilirsi devono esser destinati ad esprimere il linguaggio numerico, dovranno esser relativi alle leggi, sopra le quali siamo convenuti nella sua formazione; e se volessi stabilirli ad arbitrio, avrei de' caratteri senza lingua per leggerli, e viceversa una lingua senza caratteri per rappresentarla.

§. 14. Poichè dunque il linguaggio numerico è fondato sulla convenzione denaria, bisogna che io segua questa stessa convenzione nel metodo di segnare, destinando un segno che esprima l' unità, pochi altri segni che esprimano gli altri numeri, che ho stabilito d' indicare con segni particolari, e finalmente servendomi di tutti questi segni per esprimere le diecine, le diecine accompagnate dalle unità, le diecine di diecine ec. ec. (§. 10.). Vediamo come tutto ciò si può ridurre ad effetto.

§. 15. Supponghiamo che il seguente segno 1 rappresenti l' unità; a tenore delle convenzioni fatte nel linguaggio denario, dovrò stabilire degli altri segni fino al dieci (§. 10.); dunque esprimerò gli altri numeri intermedj così: *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *nove*
2 3 4 5 6 7 8 9

potrei altresì stabilire un segno, per lo dieci; ma riflettendo che il dieci esprime una sola diecina, mi servisò del segno, che esprime l'unità, a cui metterò a destra un segno, che per convenzione non esprima valore alcuno quando è solo, ma serva a farmi riguardare l'uno non come unità,

nità, ma come diecina. Questo segno è il seguente o, che io pronuncio *zero*; onde è, che scriverò il dieci così 10, due diecine 20, tre diecine 30, e così in appresso. Mi trovo dunque di aver fatta questa convenzione, cioè che ogni numero oltre le unità, può esprimere altresì le diecine, quando alla sua destra venga situato un zero. (1)

§. 16. Le centinaja non essendo altro che le diecine di diecine (§. 10.), si possono altresì esprimere per mezzo di quest' istessa semplice convenzione, situando a destra del zero, che dà alle unità il valore di diecine un'altro zero, convenendo similmente, che questo accresca il valore delle diecine dieci volte di più; ed attenendoci alla stessa convenzione, potremo collo stesso metodo esprimere le migliaja, le centinaja di migliaja ec.. Dunque cinquanta si scriverà così 50, seicento 600, settemila 7000, e quarantamila 40000.

§. 17. Ma se oltre le diecine un numero contenga altresì delle unità, come se io volessi esprimere oltre una diecina cinque unità, cioè quindici; si è convenuto di situare a destra del segno, che dinotar deve le unità delle diecine, il segno, che dinota il numero delle unità, che si vogliono aggiungere ad esse, talchè questo nell' atto, che fa le veci del zero (§. 15.), indica le unità che a queste diecine aggiunger si vogliono; scriverò dunque a destra del 1 il 5, cioè 15 per dinotar quindici: si è dunque convenuto, che un numero situato a destra di un' altro faccia le veci del zero, ed esprima di più le sue unità. Da ciò si rileva, che per iscrivere cento e tre, in vece dell' ultimo *o* del 100, metterò un 3, scrivendo 103..

§. 18. Con questo metodo è facile esprimere per mezzo di segni ogni numero qualunque. Ma qual'è l'ordine, che si

(1) Questi caratteri indiani furono adottati dagli Arabi verso il secolo nono; sul principio erano alquanto differenti ma hanno successivamente acquistata la forma odierna. Si sono incominciati a praticare in Europa verso il decimoquarto secolo.

si deve tenere nella disposizione di questi segni medesimi? Affinchè questi esprimano bene il linguaggio numerico., bisogna, prima situar le più alte decine, e scender gradatamente fino alle unità (§. 10.). Dopo ciò è facile convenire doversi scrivere questi caratteri coll' ordine istesso con cui si leggono i caratteri alfabetici, onde non s' introduca una inutile novità. Disporremo adunque i segni situando a sinistra all' ultimo luogo quello, che indica le più alte diecine, poi successivamente verso destra quelli di un' ordine dieci volte più piccolo, fino alle unità. E questo è il motivo per cui nello scrivere 425. mettiamo a sinistra primo le quattro centinaja, cioè le quattro diecine di diecine, poi le due diecine, e finalmente le cinque unità.

I numeri espressi da un sol segno si chiamano *semplici*, gli altri *composti*.

§. 19. Ciò posto è facile dedurne, che tutta l' Aritmetica denaria è appoggiata alle seguenti generali convenzioni:

1. I numeri son composti di unità minori di dieci, di diecine, di centinaja, di migliaja, di diecine di migliaja ec.

2. Volendo esprimere un numero qualunque, si proceda da sinistra a destra, scrivendo prima il più alto, e scendendo fino alle unità.

3, Finalmente impiegheremo nove segni per esprimere un qualunque numero, indicando ciascun segno unità, se è solo; diecine, se tiene a destra un' altro segno, il quale nell' atto, che dà a quello il valor decuplo, esprimerà altresì le sue proprie unità; centinaja se ne ha due ec.; e situando una cifra, o zero alla sua destra onde il segno istesso possa esprimere le sole diecine, due per le centinaja ec.

Ecco le convenzioni sulle quali è fondata l'arte della scrittura numerica nella convenzione denaria.

§. 20. Per universalizzare ciò, che abbiamo detto relativamente all' Aritmetica denaria, non si deve far altro, che

che applicare i stessi principj a qualunque altro sistema di Aritmetica.

Così nell' Aritmetica binaria (§. 8), servendoci de' due segni 1, 0, esporremo i diversi numeri nel seguente modo, cioè:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ec. (1)

Nell' Aritmetica trinaria (§. 9), servendoci dei tre segni 1, 2, 0, avremo

1, 2, 10, 11, 12, 20, 21 22 100, ec.

Nella quaternaria i segni saranno 1, 2, 3, 0, e perciò avremo

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, ec. (2)

e così in tutte le altre Aritmetiche, le quali però per non corrispondere alla lingua, ci riescono inutili. (3)

CAP. III.

Operazioni da farsi su i numeri.

§. 21. LA proprietà essenziale del numero essendo quella di essere suscettibile di aumento, e di diminuzione (§. 3), tutte le operazioni, che sul medesimo si possono istituire ad altro non possono esser dirette, che ad accrescerlo, o a diminuirlo.

§. 22. Or poichè un numero è composto di unità, diecine, centinaja ec. (§. 19), qualunque aumento, o diminuzione voglia farsi per rapporto ad esso, dovrà cadere

(1) Questo sistema di Aritmetica è stato sviluppato da Leibnitz, il quale dimostrò che i Cinesi possedevano tale Aritmetica binaria fin dai tempi di Foe, rappresentando l' unità colla linea intera, ed il zero con una linea spezzata.

(2) Il sistema di Aritmetica quaternaria fu messo in uso nel 1687. da Weigel, forse prese motivo da ciò che dice Aristotele, che ci era ai suoi tempi una nazione che avea tale sistema di numerazione.

(3) Noi non abbiamo quì parlato delle convenzioni superiori al dieci, perchè il loro inconveniente si rileverà meglio, quando parleremo della moltiplicazione.

re sulle sue unità, diecine, centinaja ec. Da ciò ne deduco la seguente nozione generale, che da ora innanzi diremo *Teorema*, cioè

Teorema. Per fare un' operazione su di un numero qualunque, bisogna istituirla sulle sue unità, diecine, centinaja ec.

§. 23. Or siccome ogni aumento da farsi su di un numero deve cadere sulle sue parti (§. 22.); così può accadere, che le unità si aumentino in maniera, che superino il nove: in questo caso producendosi con questo aumento delle diecine, secondo la convenzione stabilita precedentemente (§. 18), converrà passar le diecine al loro luogo, cioè al secondo segno contando da destra a sinistra, e lasciare le unità se ci restano al luogo delle unità. Così avendosi, per esempio, una diecina, e cinque unità, cioè 15, e volendo aumentar questo numero di sei unità, non dirò una diecina, ed undici unità, ma bensì due diecine, ed un' unità, cioè 21., espressione molto più semplice, e più conducente al calcolo. Da ciò ne nasce il seguente

Teorema. Se mediante una qualunque operazione le unità si accrescano più del nove, bisogna passar le diecine al luogo delle diecine, e così opereremo sulle diecine per rapporto alle centinaja ec.

§. 24. Al contrario volendosi togliere un numero qualunque di unità da un numero di unità minore, il quale contenga altresì delle diecine, io osservo, che non si può ciò eseguire sulle unità, ma bensì si può accrescere il loro numero senza alterare il valore del numero intero, considerando le diecine come composte di una diecina di meno, e passando le unità, che formano questa diecina al luogo delle unità; così volendo togliere sei unità da un numero composto di due diecine, e di una unità, cioè da 21, non potendosi togliere sei unità da un' unità, considero questo numero come composto di una diecina, ed undici unità, ed allora si potranno togliere le sei unità delle undici, e resteranno una diecina,

 e cine cinque unità, cioè 15. (§. 24). Lo ſtesso si dica per rapporto alle centinaja ec. Dopo ciò noi ſtabiliremo il seguente

Teorema. Se una operazione non si può eseguire su di un numero di unità, bisogna ricorrere alle diecine; se non si può eseguir sulle diecine, bisogna ricorrere alle centinaja ec.

§. 25. Stabiliti queſti principj generali è necessario, che più particolarmente si venga a trattare della maniera onde ridurre ad effetto le due operazioni, che si possono far su i numeri, l'aggiunzione, e la diminuzione (§. 3.). E quì osservo, che volendo io aumentare, o diminuire un numero, io non devo far altro, che accrescere le sue unità, diecine ec. di altre unità, diecine ec. o togliere dalle unità, diecine ec. di un numero dato una loro porzione. Aumentare un numero di uno, o più altri numeri, o trovare un numero eguale al valore di più numeri dati, dicesi *somma*; e togliere una parte di un numero dal numero intero si dice *sottrazione*.

§. 26. Queste operazioni si possono eseguire su i numeri; ma vedo che è molto meglio farsi su dei segni, che li rappresentano, poichè esibendoci questi dettagliamente, e con distinzione le unità, le diecine, le centinaja ec. facilmente si vedono quelle, che si vogliono aggiungere, e togliere, e si vedono altresì facilmente le unità, le diecine ec. a cui si vogliono aggiungere, o da cui si cerca di toglierle. Nella somma si badi di riunir le unità alle unità, e se queste contengano una, o più diecine, unire queste alle altre (§. 23), scrivendo da parte le sole unità: lo stesso si dica delle diecine per rapporto alle centinaja ec., avvertendo di scrivere le diecine, se ci sono a siniſtra delle unità, e così a siniſtra delle diecine le centinaja, supplendo con un *o* alla loro mancanza, per non togliere il valore ai numeri, che debbono situarsi alla loro siniſtra (§. 19.), e proseguendo coll'ordine medesimo l'operazione. Nella sottrazione convien togliere le unità dalle unità, le diecine dalle diecine, ed accrescere il numero del-

delle unità, di una diecina presa dalle diecine, se bisogna, e quello delle diecine, di una diecina di decine presa dalle centinaja, se ciò sia necessario ec. (§. 24). Dopo ciò è facile risolvere i seguenti *problemi* (1).

§. 27. *Problema* 1. *Sommare più numeri.*

Sieno i numeri da sommarsi 24, 43, 176, 5. Io osservo in conseguenza di ciò, che si è detto, che per unire insieme più numeri altro non si deve fare, che unire le loro unità, diecine, centinaja ec. Dunque dovrò disporre queſti numeri in maniera, che l'occhio possa facilmente percorrere il numero delle unità, delle diecine ec. Or io veggo, che qualunque disposizione si voglia dare ai numeri per ottener queſto intento, la più semplice è di scrivere le unità sotto le unità, le diecine sotto le diecine ec.; allora l'occhio andando dall'alto al basso facilmente percorre il numero delle unità, diecine ec. l'una dopo l'altra, e senza confusione. Scriverò dunque, i numeri coll'ordine che quì si vede, indi raccogliendo tutte le unità, dirò: 5 più 4 eguale 9, più tre eguale 12, più 6 eguale 18; metterò le 8 unità sotto la colonna delle unità, dopo di aver tirata una linea, per diſtinguere i numeri che si vogliono sommare dal loro risultato, e proseguirò l'operazione dicendo: una diecina portata dalla collezione antecedente più 2 diecine eguale 3, più 4 diecine eguale 7, più 7 diecine eguale 14; scriverò sotto la colonna delle diecine le quattro diecine, e le dieci diecine, o 'l centinajo l'unirò alle centinaja dicendo: 1 centinajo più 1 cent. eguale 2 centinaja, che scriverò al luogo proprio. Ciò fatto avrò riunito le unità, le diecine, ec. in una sola espressione, onde avrò risoluto il problema, e la somma sarà duecento quarant'otto, cioè 248.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 43 \\ 176 \\ 5 \\ \hline 248 \end{array}$$

In vece di dire più, scriverò in appresso il seguente

(1) Per nome di *Problema* intendiamo la ricerca delle regole generali per eſeguire una data operazione.

te segno +, ed in vece di dire eguale scriverò =.

§. 28 *Probl. 2. Sottrarre da un numero dato una sua parte.*

Siccome le operazioni, che si fanno sulle parti di un numero vengono ad effettuirsi sul numero intero, così converrà togliere le unità dalle unità, le diecine dalle diecine ec: e scrivere i numeri in maniera, che le unità, le diecine ec. si corrispondano, per vederne agevolmente la differenza come nel §. prec. Così se da 247 voglia sottrarne la parte 56, scriverò questi due numeri uno sotto l' altro, come quì appresso, e prendendo la differenza fra 7, e 6, dirò: 7 meno 6 = 1, che scriverò al luogo delle unità, dopo di aver tirata una linea per togliere ogni confusione; quindi non potendo togliere 5 diecine, da 4 diecine perchè più piccole, prenderò un centinajo, che risolvendolo in dieci diecine, ed unendolo alle precedenti mi darà 14 diecine (§. 24), da cui tolte le 5 diecine, resteranno 9 diecine, che scriverò al luogo delle diecine; e finalmente non avendo alcun centinajo da togliere, scriverò il centinajo residuo al luogo suo, come apparisce dall' esempio. Il residuo adunque sarà 191.

$$\begin{array}{r} 247 \\ 56 \\ \hline 191 \end{array}$$

In vece della parola meno si è pensato di servirsi del seguente segno —.

Osservando però, che non solamente posso sottrarre una parte di un numero da un numero dato, ma più parti, dovendo ciò eseguire incomincerò prima a sottrarne una parte, e quindi un'altra fino all' ultimo. Ma poichè mi ricordo, che tutte queste parti si possono facilmente riunire in una sola, la quale equivalga a tutte prese insieme (§.27.); riunirò queste parti in una sola somma, la quale in seguito sottrarrò dal numero dato, e l' operazione sarà molto più breve, ed elegante.

Supponghiamo ora che voglia togliere da un numero senza centinaja, un' altro minore, ma cui le centinaja non manchino, come, per esempio, da 6078 la sua parte 3487

3487, scrivendo questi due numeri come sopra, dirò: 8 — 7 = 1, che scriverò sotto la colonna delle unità; in seguito non potendo sottrarre 8 diecine da 7 diecine, e mancando le centinaja, prenderò un migliajo dal 6, il quale riducendosi a 9 centinaja, ed a dieci diecine (§.10), unirò le dieci diecine alle sette, e farò 17 — 8 = 9, che scriverò alla colonna delle diecine, e togliendo dalle 9 centinaja le 4 centinaja, scriverò il residuo 5 al luogo suo: finalmente tolte da 5 migliaja 3, resteranno due migliaja, come apparisce. Il residuo sarà dunque 2591. Da ciò si deduce, che bisogna supplire coi numeri più alti alla mancanza dei più bassi, svolgendoli in unità, diecine ec. secondo il bisogno, come abbiamo eseguito.

$$\begin{array}{r} 6078 \\ 3487 \\ \hline 2591 \end{array}$$

§. 29 Il numero, che si ottiene per mezzo della sottrazione si chiama *differenza*, o *residuo*. Questo residuo non esprimendo, che ciò che resta ad un numero qualunque tolta una sua parte, apparisce, che questa parte insieme colla differenza è eguale al numero intero. Quindi *la somma del residuo, e del sottraendo è sempre eguale al numero intero*. La somma dunque, e la sottrazione sono due operazioni inverse.

CAP. IV.

Universalizzazione di queste operazioni.

§. 30 NEll' istituirsi la somma accade alcune volte, che tutti i numeri da sommarsi sieno fra di loro eguali, cioè che sieno la ripetizione di uno stesso numero. In sulle prime ad altro partito non mi appiglio, che ad istituire l'ordinaria operazione (§.28). Ma nell'eseguirla mi avveggo, che altro io effettivamente non fo, che ripetere le unità, diecine, centinaja ec. di un numero tante volte, quante è stato esso stesso ripetuto. Così mi avveggo, che

che eseguendo la somma di 24 + 24 + 24, io ripeto tre volte le unità, e le diecine di 24. Dunque senza scrivere 3 volte di seguito il numero 24, prenderò le sue unità, e diecine tre volte, separando dalle unità le diecine, da queste le centinaja se ci sono, e scrivendo ciascun numero al luogo suo. Avrei ottenuto lo stesso risultato, se in vece di prendere 24 le volte 3, avessi preso il numero 3 le volte 24.

Deduco adunque da tutto questo, che quando si vogliono sommare dei numeri eguali, in vece di operare col metodo ordinario della somma, basterà prendere le unità, diecine ec. di uno di essi tante volte, quante vien ripetuto.

L' operazione, che insegna ad abbreviare la somma di numeri eguali dicesi *moltiplicazione*, il numero che si deve ripetere dicesi *moltiplicando*, il numero delle volte, che si deve ripetere *moltiplicatore*, questi due si chiamano altresì *fattori*, e quello, che ne risulta *prodotto*. Per indicare la moltiplicazione di due numeri mi servo di questo segno $\times$.

§. 31. Ciò posto risolviamo il seguente

Probl. Moltiplicare un numero per un' altro.

Richiamando alla memoria ciò, che ho detto su i numeri, cioè che altri sono semplici, altri composti (§. 18), mi aveggo, che nella loro moltiplicazione possono darsi tre casi, cioè che un numero semplice si bebba moltiplicare per un semplice, un semplice per un composto, e finalmente un composto per un composto.

Caso I. Relativamente alla moltiplicazione de' numeri semplici incomincerò dal riflettere:

1. Che non esprimendo il zero unità alcuna, non va soggetto a moltiplicazione.

2. Che ogni numero moltiplicato per l' unità, cioè preso una volta, non muta il suo valore: così $8\times 1 = 8$ &c.

3. Che ripetendo ogni moltiplicando semplice tante volte, quan-

quante unità contiene ogni semplice moltiplicatore, si otterrano tutti i prodotti dei numeri semplici. Noi conosciamo tutti questi prodotti per mezzo della ripetizione di ciascun numero semplice, e bisogna assolutamente, ritenerli a memoria per la ragione, che or ora diremo; onde si sappia, che $7\times 7 = 49$, che $7\times 8 = 56$, ec. (1).

Nel far queste ripetizioni mi avveggo, che lo stesso prodotto si ottiene, o che si moltiplichi il moltiplicando per lo moltiplicatore, o questo per quello.

Siccome però i numeri semplici non solo esprimono unità, ma altresì diecine, centinaja, migliaja ec. (§.5) apparisce, che per moltiplicare i numeri composti, bisogna prima saper bene moltiplicare i semplici, ed allora riusciranno facili gli altri due casi della moltiplicazione.

Caso II. Volendo in secondo luogo moltiplicare un numero composto per un semplice, incominciando dai casi più semplici osservo:

1. Che volendo moltiplicare un numero semplice per dieci, in conseguenza della nostra Aritmetica decimale, basta mettere un *o* alla sua destra, per renderlo dieci volte più grande (§.15). Così $6\times 10 = 60$. Se dunque avessi voluto moltiplicarlo per un numero decuplo di dieci, avrei aggiunti due zeri; se per mille tre ec.

2. Che se mentre uno de' fattori è semplice, l' altro contenga più decine, allora osservo, che io devo prendere le unità di diecine tante volte, per quante unità sono nel semplice: moltiplico dunque il numero delle diecine per quello delle unità, e poi aggiungo un zero al loro prodotto, o più, se più ne contenga il fattore composto. Così $6\times 20 = 120$. $6\times 200 = 1200$. ec.

3 Finalmente, che se il fattore composto contenga delle unità, delle diecine ec. allora per l' indole della moltipli-

Tom. I. C ca-

(1) E qui anche si conosce il vantaggio dell' Aritmetica denaria, perchè in un'altra di maggiori segni, e. g. di 100, si sperimenterebbe una difficoltà di gran lunga maggiore di quella, che provano i principianti nel fare la moltiplicazione de' numeri semplici in questo sistema.

cazione apparisce, che io debba prendere le unità, le diecine ec. tante volte, quante sono le unità dell'altro fattore, separando sempre le diecine dalle unità, le centinaja dalle diecine ec. (§.23). Si debba moltiplicare $A = 347$ per $B = 4$. scrivo i due numeri secondo l'ordine, che gli conviene, e poi per distinguerli dal prodotto, tiro sotto al moltiplicatore una linea, ed incomincio l' operazione dalle unità, onde le diecine, le centinaja ec. si possano passare ai luoghi rispettivi. Dirò dunque $4\times7 = 28$; scriverò le 8 unità sotto al 4, ed unirò le diecine alle seguenti, dicendo $4\times4 = 16, + 2 = 18$ diecine; scriverò le otto diecine sotto le 4 diecine di A, e propriamente a siniſtra delle 8 unità, e la diecina di diecine, cioè il centinajo lo passerò alle centinaja. Finalmente dirò $4\times3 = 12, + 1 = 13$ centinaja; scriverò le tre centinaja, ed il migliajo lo passerò al luogo conveniente. Avrò dunque il prodotto $C = 1388$.

A... 347
B.... 4
C...1388

Caso III. Volendo moltiplicare in fine un numero composto per un composto, incomincio dal prendere le unità diecine ec. del moltiplicando tante volte, quante sono le unità del moltiplicatore; poi svolgo le diecine di questo in unità, e prosieguo l'operazione nel modo medesimo; ma riflettendo, che come ho moltiplicate le unità, diecine ec. per le unità, così posso moltiplicare le diecine per le diecine, basta che scriva il prodotto al luogo delle centinaja, e passi le migliaja al luogo conveniente, e così in appresso; mi risparmio di svolgere le diecine in unità, le centinaja in diecine; lascio i numeri come si trovano, e scrivo i prodotti ove gli spetta.

Debbasi moltiplicare $A = 468$, per $B = 302$: scritto il 302 sotto al 468, e tirata una linea, come apparisce, dirò $2\times8 = 16$ unità, serberò la diecina per le diecine, e scrivendo le unità, dirò 6, e portiamo 1: die-

A. 468
B. 302
936
14040
C. 141336

dirò quindi $2\times6 = 12, + 1 = 13$, scrivo 3 diecine, e riporto il centinajo: $2\times4 = 8 + 1 = 9$, scriverò queste 9 centinaja. Passando poi alle diecine di B, vedo, che sono $= 0$. Ma il *o* non andando soggetto a moltiplicazione (cas. 1.) passerò alle centinaja di B, dicendo $3\times8 = 24$ centinaja; e poichè queste occupano la terza figura, scriverò il 4 sotto al 9, supplendo con un *o* alla mancanza delle diecine, come ho eseguito, e porterò le due diecine di centinaja, cioè le due migliaja per unirle colle altre; proseguirò adunque dicendo $3\times6 = 18$ migliaja, perchè 3 centinaja cioè $300 \times$ per 6 diecine, cioè $60 = 18000$. migliaja (cas. prec.) + 2 migliaja $= 20$, cioè $=$ due diecine di migliaja. Mancando dunque le migliaja, scriverò *o* al loro luogo, e le due diecine di migliaja le unirò alle altre, dicendo $3\times4 = 12$ diecine di migliaja, $+2 = 14$, scriverò al luogo loro le 4 diecine di migliaja, e le dieci diecine, cioè le centinaja di migliaja le passerò al seſto luogo. Sommando adunque avrò $C = 141336$ prodotto richieſto. Collo ſteſſo metodo si moltiplicano tutti gli altri numeri compoſti, come i due fattori C, D, e tutti gli altri possibili qualunque sia il valore loro.

Se uno dei fattori, o tutti e due venissero terminati da zeri, io li trascurerò nell'operazione, ed alla fine ne aggiungerò al prodotto tanti, che eguaglino la loro somma. Queſto si deduce dalla natura della noſtra Aritmetica. (Vedi cas. prec.)

231 . . . C
137 . . . D
1617
693
231
31647 . . E

§. 32. Accade similmente, che un numero si debba sottrarre da un' altro quante volte si può. Col metodo ordinario della sottrazione mi avveggo, che la mia operazione diventa così lunga, che riesce penosissima a chiunque voglia eseguirla; così se io volessi sottrarre il 5 da 500, siccome $5\times100 = 500$ (§. 31. cas. 2.); co-

così contenendosi 100 volte nel 500, dovrei eseguire 100 volte la sottrazione.

Si è dunque pensato di rispasmiar questa pena, e si è detta *divisione* quella sottrazione abbreviata, che insegna a vedere quante volte un numero è contenuto in un'altro; di più si è detto *divisore* il numero, che si vuol sottrarre, *dividendo* quello da cui vuol sottrarsi, e finalmente *quoziente* quello, che esprime il numero delle volte, che la sottrazione si è fatta, e *resto* quel numero, che potrebbe rimanere dopo la sottrazione.

Volendosi dividere un numero per un'altro, o i due numeri saranno semplici, o lo sarà il solo divisore, o saranno composti ambedue. Incominciamo dal primo caso.

Cas..I. Volendo dividere un numero semplice per un simile, osservo, che in tal caso non mi costa fatica alcuna sottrarre un numero dall'altro quante volte si può; dunque ricorro al metodo ordinario della sottrazione, e vedrò facilmente il numero delle volte, che l'uno entra nell'altro, scrivendo da parte il resto se ci è. Così dividendo 9 per 2, vedo, che il due si può sottrarre dal 9 le volte 4, cioè che il quoziente è 4, e che il resto$=1$. Questo caso adunque non ammette alcuna difficoltà.

Riflettendo su di quanto si è eseguito osservo, che siccome il quoziente esprime il numero di volte, che il divisore entra nel dividendo; così preso il divisore precisamente questo stesso numero di volte, deve riprodurre il dividendo, se la divisione si è effettuita senza resto; e se ci è stato, qualche resto, si avrà lo stesso dividendo, purchè al prodotto del quoziente per lo divisore si aggiunga il resto. Per trovare il resto quando ci è, bisogna dunque, che io moltiplichi il divisore per lo quoziente, ed il prodotto lo

sot-

sottragga dal dividendo. Così nel proposto esempio $2\times4=8$, che sottratto da 9, da 1 per resto.

Da ciò apparisce, che siccome la sottrazione è un'operazione inversa della somma (§.29), così la divisione è inversa della moltiplicazione.

Cas.II. Volendo dividere poi un numero composto per un semplice, osservo, che nella sottrazione io incomincio dal sottarre le unità dalle unità, affinchè i numeri inferiori trovandosi maggiori dei corrispondenti superiori, si possa supplire a questa mancanza (§.28). Ciò posto riducendosi la divisione a sottrazione, incomincerò ad operare in un modo analogo a quello con cui ho sottratto, togliendo le unità del divisore da quelle del dividendo, poi svolgendo le decine in unità, e sottraendo nel modo medesimo, quindi le centinaja in diecine, ed unità, scrivendo i quozienti coll'ordine corrispondente. Così volendo dividere $135=A$ per $3=B$, scriverò l'uno, e l'altro come nella sottrazione, ed opererò nella guisa medesima, dicendo: 3 entra nel 5 una volta, scrivo l'uno sotto le unità, e svolgendo le 3 diecine in unità, le unirò alle due residue. Quindi dirò 3 in 32 entra 10 volte, scrivo il 10 come conviene, e mi riserbo ad unire le unità residue alle altre 100 unità; finalmente dirò: 3 in 102 entra le volte 34, scriverò sotto gli altri due questo nuovo quoziente, e sommando avrò il quoziente richiesto $C=45$. Ma quì osservo:

$$\begin{array}{r} 135=A \\ 3=B \\ \hline 1 \\ 10 \\ 34 \\ \hline 45\ \ldots\ C \end{array}$$

1. Che questa operazione sebbene renda più semplice la sottrazione, ciò non ostante non lascia di esser molto penosa, specialmente trattandosi di divisione di centinaja, di migliaja ec.

2. Che sottraendosi i numeri semplici dalle centinaja, dalle migliaja ec. si va incontro a quelle stesse diffi-

difficoltà, che presenta la sottrazione, e che si vorrebbero evitare per mezzo della divisione. Bisogna dunque tentare altra strada per rendere più semplice questa operazione, e dirigerci a risolvere il seguente

Problema. Indagare un metodo semplice per eseguir la divisione.

Considerando attentamente l' indole di ogni numero, io vedo, che contiene delle unità, o delle unità unite a diecine, centinaja ec. Or lo stesso è vedere quante volte un numero entra nelle unità, diecine, centinaja ec. di un'altro, che vedere quante volte è contenuto nelle sue centinaja, diecine, ed unità. Dunque non avendo trovata commoda la prima di queste due strade, tenterò la seconda, vedendo prima quante volte le unità del divisore entrano, p. e. nelle unità di centinaja del dividendo, e così ritroverò con un metodo più breve le centinaja di volte, che il divisore entra nel dividendo. Se in questa operazione nel dividendo vi è qualche centinajo residuo, mi avveggo subito, che per proseguirla si deve svolgere in diecine, ed unendo queste alle seguenti, vedrò semplicemente le diecine di volte, che l' uno entra nell' altro. Finalmente svolte le diecine in unità, avrò il quoziente delle unità. Scrivendo adunqne questi quozienti l'uno accanto all'altro, e secondo l'ordine loro, onde il quoziente delle unità non si confonda con quello delle decine ec. avrò in una maniera semplicissima il quoziente desiderato. Così volendo dividere 135=A per 3=B, scriverò il divisore B a sinistra del dividendo A, giacchè devo incominciar l'operazione dalla sinistra verso la destra, dicendo 3 unità da 1 unità di centinaja non si può sottrarre, senza svolgere questa unità di centinaja in diecine: ciò fatto unirò queste dieci diecine alle due seguenti, ed avrò 13 diecine; allora vedrò, che il 3 en-

135 . . A
3 . . . B
45 . . C

entra in 13 le volte 4, cioè 4 diecine di volte in 13 diecine. Scriverò dunque il 4 sotto le diecine, e svolta la rimanente diecina in unità, avrò 15 unità, ed il quoziente dellé unità sarà 5, che scriverò a destra del 4. Dunque il quoziente desiderato sarà C=45, come sopra: ed ecco il metodo generale per dividere un numero composto per qualunque numero semplice.

Quindi apparisce, che se il moltiplicatore sia altresì composto, tutto il divario fra questa operazione, e la precedente consiste in questo, cioè che si cerca di sapere quante volte un numero di unità, che supera il 9 è contenuto in un numero composto. Non differendo adunque questa operazione dalla precedente, bisognerà procedere coll' ordine medesimo; ma le sottrazioni parziali, che si son fatte in quella accadendo tra numeri semplici, si potevano facilmente eseguire a mente, e qui trattandosi di numeri composti, bisogna eseguirle col metodo ordinario della sottrazione. Converrà dunque, che il divisore non si scriva sotto del dividendo, perchè altrimente non si potranno eseguire queste sottrazioni, ma da parte, come nel seguente esempio, separandolo per per distinguerlo con un segno. Similmente il numero di volte, che il divisore si contiene nelle parti del dividendo si rileva molto facilmente nel precedente esempio; in questo riesce un poco più difficile, perchè fra i numeri complessi le sottrari sono più difficili che fra i semplici. Rilevati questi piccoli divarj, passiamo all' operazione.

Si debba dividere 83947 =A per 79=B. non potendo dividere le unità di diecine di migliaja di A per le 79 unità di B senza svolgerle, le ridurrò a migliaja, ed unendole alle tre migliaja di A, dividerò 83 per 79, ed il quoziente che espri-

B. .. 79) 83947 .. A
1062
79
494
474
207
158
49

esprime diecine di migliaja lo scriverò sotto a B. Per trovare la differenza, se ci è, io farò $1 \times 79 = 79$, che scriverò sotto 83 (cas. 1.) indi sottraendo al modo ordinario, vedrò, che la differenza è 4. Or poichè questo io non l'ho potuto dividere, lo svolgerò in migliaja, che unirò al 9, trasportandolo per maggior commodo, e scrivendolo, come conviene a destra del 4. Ma quì osservo, che io non posso dividere le 49 migliaja per 79, senza ridurle a centinaja, che unirò alle altre 4, abbassandole come sopra. Intanto se io scrivo questo nuovo quoziente, il quale esprimerà le centinaja a destra di 1, questo non istarà più al luogo delle diecine di migliaja; dunque tra il nuovo quoziente e 'l primo io ci dovrò mettere un zero, e poi passerò alla nuova divisione, come infatti ho eseguito. Per vedere ora quante volte il 79 entra in 494, io osservo, che le diecine 7 entrano in 49 le volte 7, ma che il 9 non entra in 4 questo stesso numero di volte; dunque non convenendo al tutto quello, che non conviene a tutte le parti, dirò, che il 79 entra in 494 solamente 6 volte.

Se io avessi scritto 7 volte, siccome il quoziente sarebbe maggiore del vero, così il prodotto sarebbe maggiore di 494. Incontrando adunque de' simili prodotti, io sarò avvisato di diminuire il quoziente di un' unità. Scritto il quoziente 6 accanto al *o*, moltiplicherò di nuovo, e poi sottraendo il prodotto 474 da 494, unirò il resto 20 alle 7 unità, e proseguendo la divisione, scriverò il quoziente 2 accanto al 6, e moltiplicando, e sottraendo, avrò il residuo 49.

Da ciò, che abbiamo fatto si rileva

1. Che bisogna pigliar tante figure nel dividendo, quante son quelle del divisore, e quando la somma delle loro unità è minore, prenderne anche un' altra. Segnando con un puntino le cifre, che ho prese la prima

ma

ma volta nel dividendo, onde si eviti ogni confusione, e segnando successivamente ogni cifra che si abbassa, con un simile puntino.

2. Che in questo caso il divisore non può entrare nel suo corrispondente dividendo più di 9 volte, perchè siccome non ci entrava neppure una volta nel primo caso, non ci potrà entrar dieci volte, or che il dividendo è diventato dieci volte maggiore coll' aumento di una figura.

3. Che la divisione è un' operazione inversa della moltiplicazione; se avrò ben diviso, moltiplicando il divisore per lo quoziente, ed aggiunto il resto, se v'è, avrò il dividendo; e se avrò ben moltiplicato, dividendo il prodotto per lo moltiplicatore, avrò il moltiplicando.

4. Che perciò il divisore entra nel dividendo quelle volte, che vengono espresse dal quoziente; onde il quoziente entra similmente nel dividendo il numero di volte che indica il divisore, supponendo che la divisione sia esatta, in altro caso vi sarà un resto nel dividendo.

5. Che se un dividendo termini in *o*, volendosi dividere per 10, basta togliere il zero finale; e se non termina in zero, basta togliere l' ultimo numero per farlo dieci volte più piccolo, e questo corrisponderà al residuo. Ecco quanto di più importante ci presenta la generalizzazione della somma, e della sottrazione.

C A P. V.

Invenzione dei rotti, e loro espressione.

§. 33. NElle operazioni precedenti non abbiamo fatto altro, che accrescere, e diminuire un numero. Prendendo a considerare il suo aumento, io mi assicuro, che non vi è ragione alcuna, onde ad un un' aumento già fatto non possa succederne un' altro. Dunque io conchiudo, che l' aumento di un numero non ha limiti. Vediamo se accade lo stesso per rapporto alla sua diminuzione.

§. 34. L'idea di un numero determinato essendo nata in me dalla ripetizione della stessa sensazione (§. 2.), suppongo, che osservando l' ordine delle mie sensazioni, sappia di aver numerato fino a 50. Esaminando allora ciò, che è in me accaduto, mi avveggo, che prima di giungere a 50. sono passato per diversi numeri minori di sensazioni; onde per me è chiaro, che questo numero avrebbe potuto esser minore, come 23, 10, 2, 1. Ma mi avveggo altresì, che non posso proseguir oltre la mia diminuzione, perchè essendo nate le mie idee dei numeri dalle mie sensazioni, non potendo aver meno di una sensazione, non posso conoscer meno dell' unità. Dunque relativamente al numero delle sensazioni, la diminuzione non può proseguirsi oltre dell' unità.

Lo stesso risultato avrei numerando gli uomini da me veduti, non potendone vedere meno di uno, e così di molti altri oggetti.

Ci sono adunque delle collezioni, o numeri di oggetti la cui diminuzione non può oltrepassar l' unità, e questo vuol dire semplicemente, che la loro unità è indivisibile.

§. 35. Prosieguo ora su di altri oggetti la mia ricerca, per vedere se questa conseguenza sia generale, e rifletto, per esempio, sul numero de' giorni scorsi da qualunque avvenimento; io vedo allora che giunto ad un sol giorno per mezzo della diminuzione, questo mi presenta degli istanti diversi gli uni dagli altri, nella diversità delle mie sensazioni. Allora mi accorgo, che il giorno è divisibile in parti, e che io posso considerarle più grandi, o più piccole senza arrestarmi in questa continua diminuzione.

Da ciò conchiudo, che mentre ci sono delle unità indivisibili, ce ne sono delle altre, che soffrono una diminuzione continua. L' idea di divisibilità, e quella d' indivisibilità nell'istessa unità essendo dunque relativa agli oggetti, incomincio a separare i numeri da questi oggetti medesimi, o sia astraggo la loro idea dalla materia, ed allora ne formerò nella mia mente un' essere isolato, che ha per proprietà il potersi accrescere, o diminuire quanto mi piace.

§. 36. Ciò fatto siccome io ho trovata la maniera di esprimere l' aumento possibile dei numeri, bisogna, che mi rappresenti le diminuzioni, che può soffrire l'unità, e mi formi un linguaggio per esprimerle. Potendo concepir delle parti nell'unità, incomincio dal concepircene il numero possibile minore, cioè due; ma perchè la diminuzione, che può soffrir l'unità non ha limite (§. 35); posso concepircene altresì tre, quattro, cinque ec. cioè quanti sono i numeri maggiori dell' unità, di cui mi son formata l' espressione. Chiamerò chiascuna delle due parti dell' unità *un mezzo*, *un terzo* ciascuna delle tre parti, e così *un quarto &c.*

Or nell' atto, che io rappresento a me stesso il numero di parti, che posso concepir nell' unità, rifletto, che sono io padrone di prendere di queste parti quel numero, che mi piace; così supponendo cinque parti nell' unità, sono io padrone di prenderne due, tre, quattro ec. Dunque chiamando *un quinto* ogni parte dell' unità divisa per cinque, sono necessitato a dir *due quinti* la sua ripetizione, e così *tre quinti*, *quattro quinti &c.*

Lo stesso si dica di tutte le altre divisioni dell' unità, e delle ripetizioni delle parti di queste divisioni medesime.

§. 37. Vediamo ora in qual modo si possono rappresentare questi nuovi concepimenti del mio spirito per mezzo di segni. E' naturale, che per esprimere l'unità, io faccia uso dello stesso segno di cui mi son servito fino al presente; dunque non potendo fare dell'unità, che due, tre, quattro ec. divisioni, avendo già stabiliti i segni per esprimere il due, il tre ec., mi servirò di quest' istessi per esprimere le divisioni dell' unità. Il metodo più semplice, che io possa trovare è quello di mettere l'unità accanto al numero, che indica le parti in cui la voglio dividere, e stabilire un segno di convenzione per indicar questa divisione. I Matematici son convenuti di scrivere l'unità su di una lineetta, e situare sotto di essa il numero, che indica le parti in cui la vogliono dividere, convenzione semplice, che ci guida facilmente ad esprimere qualunque parte dell'unità. Così mezzo si scriverà nel seguente modo $\frac{1}{2}$; e così un terzo $\frac{1}{3}$ ec.; e poichè questi rotti dinotano una parte dell'unità divisa in due, in tre parti ec. queste espressioni non solo indicano la divisione dell'unità, ma altresì la parte, che ne ho presa, la quale viene espressa dal numero, che sta situato sulla linea,

§. 38. Or siccome io mi servo dei numeri ordinarj per esprimere il numero di parti in cui ho divisa l'unità (§ prec.), così mi servirò dei stessi numeri per dichiarare qual numero di parti io voglia prendere di questa medesima unità; in vece adunque di scrivere sulla linea l'uno indicante precisamente la parte, che si prendeva dell'unità divisa (§.37.), scriverò il nuovo numero di parti, che io prendo, come 2, 3, 4 ec. Dunque se dell'unità divisa in tre parti io ne prenda due, cioè *due terzi* dell'unità, per esprimere questo mio concepimento scriverò $\frac{2}{3}$, e così *tre quarti* $\frac{3}{4}$, *cinque sesti* $\frac{5}{6}$ *&c.*

Con

Converrà pertanto distinguere due parti in questa espressione, quella che è sulla linea detta *numeratore*, perchè numera quante parti si son prese eguali a quelle dell'unità divisa; e quella, che è sotto la linea chiamata *denominatore*, perchè denomina in quante parti vien divisa l'unità: l'espressione poi in generale dinotando parti dell'unità, si dirà *rotto*, *fratto*, o *frazione*.

§. 39. Da ciò, che ho detto finora si deduce facilmente che due terze parti di una essendo lo stesso che la terza parte di due, l'espressione $\frac{2}{3}$ sarà equivalente all'altra 2: 3., cioè a dire, che il residuo della divisione non potendosi più dividere per lo divisore, si potrà ridurre ad una frazione, che habbia per denominatore lo stesso divisore. I due punti indicano divisione.

§. 40. Prima della considerazione, che abbiamo fatta sulla divisibilità dell'unità, l'idea del numero si limitava solamente agl'interi; ora si estenderà altresì ai fratti, e perciò diventa molto più generale.

C A P. VI.

Ricerche sulla maniera di aumentare, o diminuire i rotti.

§. 41. LA divisione dell'unità non avendo limite, di ogni rotto se ne può concepir sempre uno minore, supponendo l'unità divisa in maggior numero di parti. La scienza de' rotti adunque, egualmente, che quella degl' interi si riduce al loro aumento, o diminuzione, e poichè l'idea del rotto non è così semplice, come quella dell'intero, io non vedo a colpo d'occhio quale mezzo debba impiegare per aumentarlo, o per diminuirlo.

Per venirne adunque in cognizione, mi propongo prima il seguente.

Pro-

Problema. Rirtovare il modo di aumentare un rotto:

Il rotto essendo composto di numeratore, e di denominatore, nel volerlo aumentare o potrò accrescere il numeratore, o il denominatore. Se io aumento il solo numeratore, prenderò allora un maggior numero di parti eguali a quelle in cui ho diviso prima l' unità (§.38.).

Dunque aumentando il numeratore, accresco il valore della frazione.

Or poichè quanto è minore il numero delle parti in cui divido l' unità, tanto è maggiore il valor di ciascuna di esse; apparisce, che se io minoro il solo denominatore, prenderò lo stesso numero di parti dell' unità divisa in parti maggiori. Dunque in questo caso la frazione diventerà maggiore.

Teor. *Il valore di una frazione cresce o aumentando il suo numeratore, o diminuendo il suo denominatore.*

§. 42. Da ciò, che ho detto deduco

1. Che aumentando il valor del numeratore finchè diventi eguale al denominatore, io prenderò tutte le parti in cui ho divisa la frazione, cioè la frazione intera. Un numero dunque diviso per se stesso non è, che un'espressione dell'unità. $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = 1$.

2. Che se il numeratore superi il denominatore, allora la frazione esprimerà un numero di parti maggiore di quello in cui ho divisa l'unità, ed indicherà, che si son prese delle parti eguali a quelle in cui si è divisa l'unità, ma in numero maggiore; cioè conterrà un rotto unito ad uno, o più interi, i quali si potranno per mezzo della divisione facilmente separare (§.32.*cas.*1.). Queste frazioni si dicono *improprie*, o *spurie*.

3. Che se il numeratore è eguale al denominatore, volendo sostituire l' uno all' altro, lo che dicesi *inversione* del rotto, si ha il rotto medesimo senza che soffra al-

alterazione; in altro caso la frazione, che ne risulta detta *inversa* sarà differente dalla prima.

4. Che se il numeratore diventi doppio, triplo ec. cioè si moltiplichi per 2, per 3 ec. allora prenderò un doppio, un triplo ec. numero di parti eguali a quelle in cui ho divisa l'unità; raddoppierò adunque, o triplicherò in questo caso la frazione, onde ne deduco, che per moltiplicare una frazione basta moltiplicare il solo numeratore.

5. Che dividendo altresì il denominatore per 2, per 3, ec. si moltiplica per 2, per 3 ec. la frazione medesima. Ma siccome per l' indole dei numeri tutti possono essere moltiplicati, ma non tutti possono esser divisi senza resto; nel moltiplicare un rotto sarà più comodo moltiplicare il numeratore, che dividere il denominatore.

§. 43. Trovato il metodo di aumentare una frazione, quanto si vuole, risolviamo il problema inverso, cioè

Problema. Ritrovare il metodo di diminuire un rotto.

Essendo la diminuzione un'operazione inversa dell' aumento, io penserò altresì a diminuire il numeratore, o il denominatore. Or diminuendo il numeratore, si diminuisce visibilmente il valore della frazione, e diminuendo il denominatore si aumenta; dunque sarà facile dedurne il seguente

Teor. *Un rotto si diminuisce o diminuendo il denominatore, o aumentando il numeratore.*

Da ciò deduco similmente

1. Che per dividere un rotto per due, per tre ec. bisogna dividere per 2, per 3 ec. il numeratore, o moltiplicare per lo stesso numero il denominatore, lo che sempre si può eseguire.

2. Che se io moltiplicassi, e dividessi nello stesso tempo per lo stesso numero tanto il numeratore, quanto

to il denominatore, moltiplicherei, e dividerei nello ſtesso tempo per lo ſtesso numero la frazione. Trasformerei dunque la frazione in un'altra eguale.

3. Che viceversa dividendo il numeratore, e 'l denominatore per lo numero medesimo, dividerei, e moltiplicherei nel tempo ſtesso la frazione; dunque una frazione si può trasformare in un'altra eguale, dividendo il numeratore, e denominatore per lo numero medesimo.

4. Che potendo variar senza limiti il moltiplicatore dei due termini di una frazione, si potrà trasformare in un numero infinito di frazioni eguali. Ma crescendo i termini di una frazione, più difficilmente si vede qual'è il numero delle parti, che si son prese per rapporto a quelle in cui si è divisa l'unità.

5. Finalmente osservo, che volendo ridurre un numero intero in un rotto, che habbia un denominatore qualunque, dividerò, e moltiplicherò il dato numero per lo dato denominatore.

C A P. VII.

Operazioni aritmetiche sulle frazioni.

§. 44. AVendo trovata la maniera di aumentare, o diminuire i rotti, è ben giuſto, che portando più oltre le mie ricerche, mi proponga d'inveſtigare come si possa aggiungere una frazione ad un'altra data, o come da una se ne possa sottrarre un'altra, giacchè queſte iſtesse ricerche si sono fatte sugl'interi. Incominciando dalla prima operazione, propongo il seguente

Problema. Aggiungere insieme più frazioni.

Ogni frazione esprime le parti, che si sono prese di un'unità comunque divisa (§.36.). Queſte parti dell'unità in diverse frazioni o sono uguali, o ineguali. Quando uguali sono le parti dell'unità delle due frazioni, bisogna che in entrambe l'unità sia ſtata divisa in ugual numero di parti, cioè che i denominatori delle due frazioni sieno eguali; in altro caso i denominatori saranno inuguali. Dunque volendo sommare due frazioni, che hanno lo ſtesso denominatore, si devono unire diverse porzioni uguali della ſtessa unità. Ma queſte porzioni vengono espresse dai numeratori; dunque baſterà sommare i numeratori, e darli per denominatore quello stesso delle frazioni, affinchè si sommino le frazioni medesime.

Passando ora alle frazioni che hanno diverso denominatore, conviene osservare, ch'esprimendo le medesime disseguali parti dell'unità, non se ne possa risolutamente ritrovare la somma, se prima non si riducano a parti uguali dell'unità medesima. Ma da ciò che superiormente si è detto allora diverse frazioni esprimono uguali parti dell'unità, quando hanno il medesimo denominatore; adunque converrà trasformare le proposte frazioni in altre dello stesso valore, ma che tutte abbiano il medesimo denominatore.

Per la somma delle frazioni adunque stabilisco il seguente

§. 45. *Teor. Volendo la somma di due frazioni, che hanno lo stesso denominatore, basta sommare i numeratori, e dare al risultato per denominatore quello delle frazioni. Quando le frazioni non hanno lo stesso denominatore, conviene prima ridurvele.*

Quindi il problema della somma delle frazioni nel caso che inuguali sieno i denominatori, sarà ridotto al seguente

§. 46. *Probl. Date più frazioni ridurle al comune denominatore.*

Le frazioni che devono ridursi in altre, che abbiabiano tutte lo stesso denominatore, non devono cambiar valore.

Or questo in altro modo non si può eseguire, che col moltiplicare, o col dividere il numeratore ed il denominatore d'ogni frazione per lo stesso numero, o per li stessi numeri (§.43.); dunque si moltiplichino tutti i denominatori delle frazioni, e questi sarà il comune denominatore. E poichè in questa operazione il denominatore d'ogni frazione si è moltiplicato pei denominatori delle altre; converrà, per non turbare pure il valore d'ogni frazione moltiplicare il numeratore suo pei denominatori delle altre. Quindi il

§. 47. *Teor. Per ridurre più frazioni al comune denominatore, conviene moltiplicare il numeratore d'ognuna pe' denominatori delle altre, per ottenere il corrispondente numeratore della frazione ridotta; ed il comune denominatore sarà il prodotto di tutti i denominatori.*

Così $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, si riducono a $\frac{60}{90}$, $\frac{72}{90}$, $\frac{75}{90}$.

§. 48. Or se nel voler istituire tra più frazioni questa operazione, che alcune volte riesce tediosa, si osservi, che il denominatore di una frazione comprende esattamente i denominatori dell'altre, si ravviserà, che si può istituire la riduzione al comun denominatore, col moltiplicare i numeratori, ed i denominatori delle frazioni pei numeri ch'esprimono le volte, che il primo numeratore contiene gli altri. Così

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$ si riducono a $\frac{4}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{3}{8}$.

§. 49. Nel ridurre i rotti allo stesso denominatore può accadere, che si ottengano eguali numeratori. Questo indica che ciascuna delle frazioni esprime lo stesso numero di parti dell'unità divisa egualmente. Saranno dunque eguali le frazioni; e perchè in queste riduzioni i denominatori risultano sempre eguali, apparisce, che quando moltiplicati alternativamente ciascun numeratore per gli altri denominatori si ottengo-

no

no prodotti uguali, saranno eguali le frazioni. Così $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, perchè $1 \times 6 = 2 \times 3$.

Al contrario acquistando in tal riduzione i rotti maggiori maggior numeratore, perchè devono esprimere maggior numero di parti dell'unità divisa in parti eguali, dai numeratori si dovrà rilevare il maggior valore della frazione. Dunque se moltiplicando alternativamente ciascun numeratore per gli altri denominatori, si ottengano prodotti disseguali, quella frazione sarà maggiore, il di cui numeratore diventa maggiore. Quindi esprimendo la maggioranza col seguente segno $>$, avremo $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$, perchè $3 \times 5 > 2 \times 4$.

Or poichè un'intero si può facilmente cambiare in rotto di un dato denominatore (§.43.5.); dovendosi sommare dei rotti con degl'interi, non s'incontrerà difficoltà alcuna per rinvenirne la somma.

§. 50. In conseguenza di ciò, che si è detto sulla maniera di sommare i rotti (§.44.), è facile rilevarne, che una frazione non si può sottrarre da un'altra, o da un'intero, se prima non si riducano allo stesso denominatore: fatta questa riduzione basterà togliere dal maggior numeratore il più piccolo; e perciò

Teor. Volendo sottrarre una frazione da un'altra, o da un'intero, si ridurranno le due frazioni, o la frazione, e l'intero allo stesso denominatore, e poi presa la differenza dei due numeratori per numeratore, e dandogli per denominatore il denominator comune, si avrà la differenza richiesta.

§. 51. Oltre le operazioni già fatte sulle frazioni, si può di una frazione prendere una parte espressa da un'altra frazione; per esempio di $\frac{2}{3}$ posso pigliarne $\frac{4}{5}$, cioè posso dividere la frazione $\frac{2}{3}$ in 5 parti, e prenderne 4. Quest'operazione è simile a quella, che si fa sull'unità, allorchè se ne vuol prendere qualche par-

E 2

parte. Noi la chiameremo moltiplicazione, e per eseguirla istituiremo il seguente

Probl. Moltiplicare una frazione per un' altra.

Dalla definizione, che abbiamo data della moltiplicazione delle frazioni si rileva, che bisogna prima dividere la frazione moltiplicanda in tante parti, quante sono le unità del denominatore dell' altra, e poi prendere questo quoziente tante volte, quante sono le unità del numeratore. Ma dividere una frazione per un' intero è moltiplicare l' intero per lo denominatore della frazione (§.43.1.), e moltiplicare per un'intero una frazione è lo stesso, che moltiplicar per questo intero il suo numeratore (§.42.4.); dunque

Teor. Per moltiplicare una frazione per un' altra, conviene moltiplicare numeratore per numeratore, e denominatore per denominatore.

Il prodotto di $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$ è $\frac{8}{15}$.

§. 52. Il numero che si ottiene moltiplicando una frazione per un'altra si dice prodotto, e dall' enunciato Teorema si comprende, che tanto sia moltiplicare una frazione per un' altra, quanto questa per quella.

Con quest' operazione sulle frazioni siam venuti ad universalizzare l'idea, che abbiamo data della moltiplicazione parlando de' numeri interi, poichè da quì innanzi intenderemo per moltiplicazione quell' operazione, colla quale si prende di un numero tanto, quanto viene espresso da un' altro, cioè quante sono le unità, o le parti dell'unità esprimenti il moltiplicatore.

Quindi si ravvisa, che il prodotto di due frazioni sia lo stesso, che una *frazione di frazione*; ed in conseguenza questo prodotto nelle frazioni genuine deve esser minore di ciascuna delle frazioni medesime.

Finalmente moltiplicando una frazione per l' inversa si ottiene per prodotto l' unità; e perciò se il prodotto di due frazioni si moltiplichi per una di queste inversa si ottiene l' altra.

§. 53. Volendo estendere la moltiplicazione a più di due frazioni, si comprende, che bisogna moltiplicare tutti i numeratori insieme, e tutti i denominatori fra di loro. Qualora fra i numeri che si vogliano moltiplicare vi sieno degl' interi uniti a frazioni, prima d' istituir l' operazione converrà ridurre ogni intero colla corrispondente frazione ad una frazione spuria.

§. 54. Paragonando ciascuna delle frazioni al prodotto, si ravvisa, che della medesima si è dovuto fare un certo numero di parti, e prenderne alcune a queste eguali per ottenere il prodotto. Dunque viceversa se si abbia una frazione, è naturale il ricercare in quante parti bisogna dividerla, e quante prenderne eguali a queste, per ottenere un' altra data frazione, che si può considerare come un prodotto. Quest' operazione la quale è diretta a ritrovare in quante parti si debba dividere una frazione, e quante prenderne eguali a queste onde si abbia una data frazione, dicesi divisione. Così dividere $\frac{1}{2}$ per $\frac{3}{4}$ è lo stesso, che ritrovare in quante parti convenga dividere $\frac{3}{4}$, e quante di queste se ne debbano prendere per aver $\frac{1}{2}$. La frazione, che si vuol dividere in un certo numero di parti, per prenderne alquante eguali, dicesi divisore, e l'altra dividendo: così $\frac{1}{2}$ è il dividendo, e $\frac{3}{4}$ è il divisore.

Finalmente il numero, che esprime in quante parti si è diviso il divisore, e quante se ne son prese; si dice quoziente.

Probl. Data una frazione dividerla per un' altra.

Essendo il quoziente il numero, che esprime quante parti si son fatte del divisore, e quante eguali ad esse se ne sono prese, si potrà il medesimo rappresentare sotto la forma di una frazione, il dicui denomiminatore sia il numero delle parti della divisione, ed il numeratore esprima il numero delle parti, che si son prese. Quindi per ottenere il dividendo bisogna del divisore farne tante parti, quante ne esprime il denominatore del quoto, e prenderne tante, quante vengono espresse dal suo numeratore, cioè bisogna moltiplicar fra di loro il divisore, e 'l quoto. Dunque il dividendo si considererà come un prodotto, i di cui fattori sono il divisore, e 'l quoto. Ma per ottenere un fattore bisogna moltiplicare il prodotto per l' altro fattore inverso (§.52.). Dunque

Teor. Bisogna moltiplicare il dividendo per lo divisore inverso per ottenere il quoto.

§. 55. Nella divisione di una frazione per un' altra siam pervenuti ad universalizzare l'idea della divisione data negli interi. In fatti in questa operazione abbiamo voluto ricercare quante volte bisognava ripetere un dato numero per averne un' altro; ma ora generalmente ricerchiamo quante volte bisogna ripetere una qualunque parte di un numero per ottenerne un' altro.

§. 56. Dal superiore Teorema si deduce, che se il dividendo si cambia in divisore, e viceversa, si otterrà un quoziente inverso; e perciò nella divisione non si possono commutare i termini, come nella moltiplicazione.

Inoltre che nelle frazioni genuine il quoziente è maggiore del dividendo.

Finalmente se ne' termini della divisione s' incontrino degl' interi insieme coi rotti, si osservi la regola generale stabilita (§.49.).

CAP.

CAP. VIII.

Maniera di ridurre i rotti ad espressione più semplice.

§. 57. Riflettendo a ciò, che ho detto precedentemente (§. 45.) apparisce, che volendo semplificare l' espressione di un rotto, devo dividere i suoi termini per lo medesimo numero. Ora osservo

1. Che essendoci dei numeri divisibili solo dall' unità, come 3, 5, 7 ec. ci sono dei rotti, i quali non sono riducibili ad espressione più semplice. I numeri divisibili dalla sola unità si dicono *primi*. Dunque un rotto, che ha in uno de' suoi termini un numero primo, non è riducibile ad espressione più semplice; $\frac{2}{11}$ è irriducibile.

2. Che ci sono al contrario de' numeri, i quali hanno più di un divisore; così 16 è divibile per 2, per 4, per 8. Dunque si potranno incontrare altresì due numeri, i quali abbiano più di un divisore. Ma quanto è maggiore il divisore, tanto è minore il quoziente; dunque per ridurre una frazione alla più semplice espressione, bisogna dividere i suoi termini per lo massimo comune divisore, che noi diremo *massima comune misura*. Or non vedendosi a colpo d' occhio quale sia la massima comune misura di due numeri, noi ci proporremo il seguente.

§. 58. *Probl. Ritrovare la massima comune misura di due dati numeri.*

Fra i due numeri A, B si debba ritrovare la massima comune misura.

Per

Per vedere quale sia il massimo divisore di questi due numeri osservo, che se B dividesse esattamente A, per questi due numeri non ci sarebbe divisor maggiore di B. Divido dunque A per B, ma osservo che B non è divisore esatto, perchè mi da per quoto 4, e per resto C=69; dunque bisogna conchiudere, che il divisore non è B, ma che debba essere un divisore, che divida esattamente anche C,

	A ...	713
	1. quoto	4
	B	161
	2. quoto	2
1. resto	C. . .	69
	3. quoto	3
2. resto	D ...	23

perchè altrimenti non dividerebbe $A = B \times 4 + C$, cioè $=$ B preso un certo numero di volte + C. Ora essendo A composto dalle due parti B preso un certo numero di volte, e C; il divisore di A dovendo prima dividere B esattamente, dovrà pure entrare esattamente nell'altra parte C. Dunque ogni divisore di B, e di A deve essere altresì divisore di C; onde sono indotto a proseguire l'operazione dividendo B per C. Se questa divisione si facesse senza resto, sarebbe C il massimo divisore, perchè dividendo B, dividerebbe B preso un certo numero di volte + C, cioè A; ma qui avendo per resto D, veggo chiaramente per la medesima ragione, che ogni divisore fa A, e B debba essere altresì divisore di C, e D. Se dunque io sia pervenuto ad un residuo D tale, che divida esattamente C, sarà D il massimo comun divisore; perchè fra i divisori di C, e D non può esserci divisore comune maggiore di D. Da ciò ne deduciamo che

De' due termini fra i quali si vuol trovare la massima comune misura, si divida il più grande per lo più piccolo; se non vi è resto, questo più piccolo termine è il più gran comune divisore. Se vi è un resto, bisogna dividere il più piccolo termine per questo resto, e

se

se la divisione si fa esattamente, sarà questo primo resto il massimo comun divisore.

Se questa seconda divisione dà un resto, dividete il primo resto pel secondo, e continuate sempre a dividere il resto precedente per l' ultimo, finchè si pervenga ad una divisione esatta. L' ultimo divisore, che si sarà impiegato, è la massima comune misura.

Se i numeri non hanno altro divisore, fuorchè l'unità, saranno fra loro primi (1).

§. 59. Ritrovata la massima comune misura è facile ridurre i rotti alla più semplice espressione, perchè avendo ritrovato il massimo comune divisore, avremo il minimo quoziente, e perciò i rotti prenderanno la più semplice forma.

Così se si fosse proposta la frazione $\frac{713}{161}$, sapendo, che 23 è il massimo comune divisore di 713, e di 161, dividerò l' uno, e l' altro termine per 23, e formando de' rispettivi quozienti il numeratore, e 'l denominatore, si avrà la trasformata $\frac{31}{7} = 4\frac{3}{7}$.

§.60. Non essendo riducibili i rotti i termini de' quali sieno fra di loro primi, converrà trascurare ne' medesimi qualchè piccola parte, affinchè si ottenga la riduzione delle frazioni in altre più semplici con qualche approssimazione. Questo però non deve aver luogo, che ne' termini grandi, perchè ne' piccoli non si può trascurare una parte della frazione, senza un'error considerabile. Infatti se nel proposto esempio avessi trascurato un' unità del numeratore, avrei trascurato $\frac{1}{161}$ dell'unità; ma se nella frazione $\frac{31}{7}$ io trascuro un' unità del numeratore, trascurerò $\frac{1}{7}$ dell' unità. Quindi il

Tom. I. F Pro-

(1) Conviene distinguere i numeri fra loro primi da quei che lo sono assolutamente, cioè che hanno l' unità sola per divisore. Di quest' ultimi diversi Autori ne hanno dato le tavole, ma le più complete sono quelle pubblicate da Lambert.

Probl. Ridurre per approssimazione una frazione ad altre più semplici, qualora i suoi termini sieno fra loro primi, e grandi.

E' chiaro, che di una data frazione dividendo il numeratore, e 'l denominatore per lo numeratore medesimo, si otterrà una frazione, il di cui numeratore sia l' unità, ed il denominatore un' intero insieme con una frazione. Se dunque si trascuri questa frazione, si avrà pel primo valore della proposta una frazione semplice un poco troppo grande, perchè trascura una parte considerabile del denominatore (§.41.).

Così la frazione $\frac{35426}{82651}$, dividendo il numeratore, e 'l denominatore per lo numeratore, sarà eguale ad

$$\frac{1}{2+\frac{11799}{35426}}$$

; e trascurando questa frazione nel denominatore, sarà il denominatore 2 minore del vero, e la frazione $\frac{1}{2}$ sarà maggiore della proposta. Eseguendosi la stessa operazione sulla seconda frazione, cioè dividendo per lo numeratore i suoi due termini, si trasformerà in

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{29}{11799}}}$$

; e trascurando l'ultima frazione $\frac{29}{11799}$, si otterrà $\frac{1}{2+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{7}{3}}$ (§.43.5.) $= \frac{3}{7}$, (§.43.2.). Or qui avverto, che essendosi trascurata la frazione $\frac{29}{11799}$,

sarà $2+\frac{1}{3}$ maggiore del vero denominatore, ed il valore di $\frac{3}{7}$ alquanto più piccolo della data frazione (§43) Fo dunque la stessa operazione sul fratto $\frac{29}{11799}$, e avrò ....

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{406+\frac{25}{29}}}}$$

, che trascurando l'ultima frazione, diventerà prossimamente eguale ad ....

$$\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{406}}} =$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1219}{406}}} = \frac{1}{2+\frac{406}{1219}} = \frac{1}{\frac{2844}{1219}} = \frac{1219}{2844}$$

; espressione più grande della proposta frazione; e così alternativamente,

CAP. IX.

Operazioni sopra alcune specie di frazioni.

§. 61. ABbiamo fino a questo momento considerata l'unità divisibile in tante parti, quanti sono i numeri, che noi possiamo concepire. Si potrebbe però stabilire un'altra convenzione, e considerar l'unità divisa in un certo numero di parti, e poi per continuare la divisione supporre ogni sua parte divisa in un'altro numero di parti determinato, ed ogn'una di queste nuove parti divisa altresì in un altro numero, e proseguire questa divisione fino a che piace. Questo produrrà moltissime specie di rotti, i quali considerati attentamente non ammettono altra difficoltà, che quella, la quale nasce dal dover ricordarsi che parte sono dell'intera unità quelle, su cui si vuole operare; ed è inutile avvertire che per facilitar l'operazione, le parti dello stesso nome si debbano corrispondere.

§. 62. Supponghiamo, che io divida l'unità in 24 parti, ed ogni ventiquattresima parte in 60 altre parti, ed ogni sessantesima parte di una ventiquattresima in altre sessanta, e così in appresso; io avrei eseguito quella medesima convenzione, che hanno stabilita gli uomini nel dividere il *giorno* in *ore* 24, ogni ora in 60', cioè 60 *minuti primi*, ogni minuto primo in 60", cioè in 60 *secondi* ec.

In questo caso un'ora sarebbe $\frac{1}{24}$ di un giorno, un minuto $\frac{1}{60}$ di un'ora, cioè $\frac{1}{60}$ di $\frac{1}{24} = \frac{1}{60} \times \frac{1}{24}$ (§.51.) $= \frac{1}{1440}$ parte di un giorno; e così un minuto secondo $= \frac{1}{60} \times \frac{1}{60} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{86400}$ parte di un giorno ec. Perciò 3 ore saranno $\frac{3}{24} = \frac{1}{8}$ di un giorno; 6 primi saranno $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ di un ora, cioè $\frac{1}{240}$ parte di un giorno ec. ec.

§. 63. Supponghiamo inoltre, che l'unità si divida in dieci parti, e ciascuna di queste in altre dieci, e finalmente ciascuna di queste in altre dodici. Questa convenzione si è fatta fra di noi per rapporto alle monete, essendo diviso il *ducato* in dieci *carlini*, il carlino in dieci *grana*, e finalmente il grano in dodici *cavalli*. Dunque un carlino $= \frac{1}{10}$ di un ducato, un grano $= \frac{1}{10}$ di un carlino, cioè $\frac{1}{100}$ di un ducato, e finalmente un cavallo $= \frac{1}{12}$ di un grano, cioè $\frac{1}{120}$ di un carlino, o $\frac{1}{1200}$ di un ducato. E così ancora due cavalli saranno $\frac{1}{6}$ di un grano; tre cavalli $= \frac{1}{4}$ ec.; due grana saranno $\frac{1}{5}$ di un carlino, e tre carlini $\frac{3}{10}$ di un ducato ec.

§. 64. Finalmente supponghiamo, che le parti in cui si supponga divisa l'unità sieno 12, che ogn'una di queste si divida in altre 24, ed ogn'una di queste in altre 24; si avrà quella stessa divisione, che ha avuto luogo per la *libbra*, la quale si è divisa in dodici parti dette *once*, mentre ogni oncia si divide in 24 *denari*, ed ogni denaro in 24 *grani*. L'oncia adunque $= \frac{1}{12}$ di una libbra, il denaro $\frac{1}{288}$ di una libbra, ed un grano $\frac{1}{6912}$ parte. E' inutile portar quì esempj di altre divisioni, le quali possono variare a mio arbitrio, giacchè basta di esporre la maniera di calcolare queste frazioni, per vedere come si debbano trattar tutte le altre.

§. 65. Da ciò, che ho detto rilevo, che volendo operare su di queste, o altre simili specie di rotti, io posso scriverli in due modi, cioè o relativamente alle parti, dell'unità che esprimono, o semplicemente accennando i nomi delle diverse divisioni, e 'l numero di parti che si son prese in ciascuna divisione. Così per rapporto alle monete posso scriverle ne'due seguenti modi

doc.

duc. car. gran. cav. duc. gran. cav.

3, 5, 6, 8 overo 3, 56, 8

$3, \frac{1}{2}, \frac{3}{50}, \frac{1}{150}$ cioè $3, \frac{56}{100}, \frac{8}{1200}$

il primo è relativo ai nomi, che ha ricevuto in commercio ciascuna divisione; e'l secondo esprime il numero delle parti, onde in ciascun fratto è divisa l'unità.

§. 66. Premesse queste considerazioni, son' io convinto della facilità di eseguire la somma, e la sottrazione; onde non incontreranno difficoltà i seguenti

Esempj per la somma

duc.	gran.	cav.				
31,	48,	10		31,	$\frac{48}{100}$,	$\frac{10}{1200}$
347,	04,	2	overo	347,	$\frac{4}{100}$,	$\frac{2}{1200}$
8,	99,	7		8,	$\frac{99}{100}$	$\frac{7}{1200}$
387,	52,	7		387,	$\frac{52}{100}$,	$\frac{7}{1200}$

Esempj per la sottrazione

13,	48,	10	overo	13,	$\frac{48}{100}$,	$\frac{10}{1200}$
8,	99,	7		8,	$\frac{99}{100}$,	$\frac{7}{1200}$
4,	49,	3		4,	$\frac{49}{100}$,	$\frac{3}{1200}$

In

In questo caso io vedo, che le prime operazioni riescono molto più comode delle seconde; dunque mi appiglierò a quelle nell' uso della vita.

§. 67. Volendo poi moltiplicare, o dividere dei rotti di questa sorte, mi accorgo, che tutti questi rotti non esprimono in realtà che parti diverse della medesima unità, sia che le parti di diversa specie sieno contenute in uno dei termini dell' operazione, o che lo sieno in ambedue.

Tutta la pena adunque consiste a ridurre tutte le parti diverse contenute in ciascuno dei termini allo stesso denominatore, per quindi moltiplicare, o dividere le frazioni risultanti nel modo ordinario. Vediamo adunque come si può eseguire questa riduzione. Io so in primo luogo, che per moltiplicare o dividere i fratti non è necessario ridurli allo stesso denominatore; dunque prendo a considerare ciascun termine separatamente, riducendo solo allo stesso denominatore tutte le sue frazioni. Inoltre la frazione più piccola indica col suo denominatore la più gran divisione dell' unità, e tutte le altre frazioni possono al denominatore di questa più piccola ridursi, perchè il denominatore di questa più piccola comprende il denominatore delle altre un certo numero di volte (§. 48.); dunque moltiplicando ciascun denominatore delle frazioni contenute in un termine per lo numero di volte che esso entra nel denominatore maggiore del termine medesimo, avrò ridotte queste frazioni appartenenti a ciascun termine allo stesso denominatore. Sommerò allora le frazioni dello stesso denominatore separatamente, e moltiplicando, o dividendo fra di loro le frazioni risultanti, avrò il prodotto, o il quoziente richiesto. Semplificherò quindi questo prodotto, o quoziente, separandone prima le unità, quando ci sono (§.42.7.), e poi operando in una maniera inversa a ciò, che si

è fatè fatto per separarne le altre parti dell' unità corrispondenti a quelle, che appartengono ai termini rispettivi.

§. 68. Con questo metodo volendo moltiplicare ducati 3, grana 46, e cavalli 7 per 8, tutta l'operazione si ridurrà a moltiplicare $3 + \frac{46}{100} + \frac{7}{1200}$ per 8, cioè $8 \times \frac{4159}{1200}$, cioè bisogna moltiplicare per 8 cavalli 4159, che danno per prodotto cavalli 33272. Ora per ridurre questo numero alle diverse specie di frazioni, bisogna prima dividerlo per 1200, perchè tal numero di cavalli costituisce un ducato; e si otterranno ducati 27, e cavalli 872, che poi divisi per 12, danno grana 72, e cavalli 8.

Avrei potuto moltiplicare per 8 i cavalli, le grana, ed i ducati, riunendo tutte le parti dello stesso nome, e separando quelle di nome diverso; ed allora il risultato sarebbe stato lo stesso.

§. 69. Similmente volendo dividere ducati 3, grana 46, e cavalli 7 pel numero 8, dovrò dividere il fratto $\frac{4159}{1200}$ per 8, cioè devo dividere per 8 cavalli 4159 che danno per quoto $519\frac{7}{8}$, che costituiscono grana 43, cavalli 3, e $\frac{7}{8}$ di un cavallo.

§. 70. Lo stesso metodo avrei tenuto se non solo nel moltiplicando, ma nel moltiplicatore altresì ci fossero parti di diverso nome. Supponghiamo che io voglia moltiplicare 4 canne, 6 palmi per 12 docati e grana 65, cioè che io voglia sapere il valore di canne 4, palmi 6 di una stoffa, la quale si paga docati 12 e grana 65 la canna. Sapendo che 1 canna contiene 8 palmi, saprò che 6 palmi sono uguali a $\frac{6}{8}$ di una canna. Dunque tutta l' operazione si ridurrà a moltiplicare $4 + \frac{6}{8}$ per $12 + \frac{65}{100}$, cioè $\frac{38}{8} \times \frac{1265}{400}$ Dunque moltiplicheremo 1265 per 38, ed il prodotto lo

lo divideremo per 8, ed otterremo grana $6008\frac{3}{4}$, cioè ducati 60, grana 8 e cavalli 9.

§. 70. Finalmente se volessi dividere ducati 12, e grana 65 per canne 4, e palmi 6; cioè se io richiedessi quanto costa la canna di una stoffa, di cui canne 4 e palmi 6 costano docati 12 e grana 65, dovrei dividere $\frac{1265}{100}$ per $\frac{38}{8}$, cioè dovrei moltiplicare 1265 per 8, ed il prodotto dividerlo per 38; d'onde si ottengono grana 266, e $\frac{6}{19}$ di un grano, cioè ducati 2, grana 66, $\frac{12}{19}$ di un grano.

CAP. IX.

Delle Frazioni Decimali.

§. 71. Riuscendo molto incomode le operazioni su i rotti; si è pensato d' indagare un metodo per renderle più facili, e meno penose. La facilità, che presentano nelle operazioni aritmetiche gl' interi terminati da uno, o più zeri ha fatto ricercare, se intendendosi l' unità divisa in parti decime, centesime, millesime ec. le frazioni che si ottenghono presentassero i vantaggi medesimi, che si hanno nel maneggiar le diecine, le centinaja, le migliaja ec.

§. 72. Supponendosi una tal divisione nell' unità, si conosce a prima vista, che coll' istess' ordine con cui crescono i numeri, decrescono questi fratti. Si conchiuse adunque giustamente, che tali frazioni dovessero esser soggette allo stesso calcolo degli interi, e goderne i vantaggi medesimi, ma che i loro risultati fossero inversi a quelli degli interi, poichè ove in questi è aumento, in quelli è diminuzione. Subito adunque si passò ad un modo compendioso per esprimere tali frazioni.

§. 73. I primi tentativi non sono sempre i più semplici, ed i più felici; si pensò in sulle prime di esprimere i decimi situando un' apice sopra i numeri, i centesimi situandocene due, i millesimi tre ec. cioè di mettere sul numero tanti apici, quanti zeri dovrebbero mettersi a destra dell' unità del suo denominatore. Così 4 decine, 61 centesimi, 241 millesimi si esprimevano così 4', 61'', 241''' ec. Ma questa maniera fu sperimentata incomoda (1).

§. 74. Si pensò adunque di esprimere i decimali al modo istesso dei numeri, e colle leggi dell' Aritmetica denaria. E poichè per le leggi di questa Aritmetica un numero posto a destra di un'altro esprime unità dieci volte più piccole; si pensò adunque primieramente di situare le parti decime alla destra de' numeri interi, e per non confonderli, d' interporci una virgola. Così dodici unità, e tre decimi si scrivono 12, 3.

Similmente si pensò di situare alla destra delle parti decime le centesime, e così in appresso. Dunque tre unità, e cencinquantaquattro millesimi si scrivono 3, 154.

E qualora non esista numero alcuno intero, in sua vece si porrà un zero; così tre decimi si esprimeranno 0, 3.

Mancando similmente i decimi, si supplirà alla loro mancanza con un zero, mettendone anche un' altro, che esprima la mancanza delle unità; e generalmente in luogo de' decimali che mancano si pongano dei zeri, onde ogni decimale resterà al luogo conveniente alle parti dell' unità divisa, che deve esprimere.

§. Dal-

(1) I decimali furono ritrovati nel 1460 da Gio: Muller di Keniberg nella Franconia, conosciuto sotto il nome di Regiomontano.

§. 75. Dalla maniera con cui siam convenuti di esprimere i decimali si scorge adunque, che tutte le cifre sono disposte colle leggi dell' Aritmetica denaria, onde si ottengono i seguenti risultati:

1. I decimali di un' ordine passano ad esser decimali dei seguenti, aggiungendosi alla loro destra uno o più zeri, senza che se ne alteri il valore. Così 0, 3, è eguale 0, 30 = 0, 300, = 0, 3000.

2. Se in vece di un zero si aggiunga un numero a destra di un decimale, questo numero farà le veci del zero, ed esprimerà altresì il suo valore. Lo stesso si dica se s' aggiungano due numeri, tre ec.

3. Se la virgola si trasferisca a sinistra, onde comprenda tra i diecimali un numero di più, si diminuisce il valoro di una decima parte, se da sinistra passi verso la destra, escludendo un numero dai decimali, il valore si accresce di una decima parte ec. Così nel decimale 1, 340, portando la virgola a sinistra, si avrà 0, 1340 valore dieci volte più più piccolo, e portatasi verso la destra dopo il tre, si avrà 13, 40 valore dieci volte più grande. Se si fosse posta dopo il 4, scrivendosi 134, 0, sarebbe diventato 100 volte più grande ec.

4. Le leggi dell' Aritmetica denaria convengono al calcolo de' decimali; faremo adunque le medesime operazioni, e ci serviremo della medesima convenzione di cui ci siamo serviti per i numeri interi, cioè non confonderemo i decimi coi centesimi, coi millesimi ec. e suppliremo coi decimi ai centesimi, ai millesimi ec.

CAP. X.

Operazioni da farsi su i Decimali.

§. 76. LA somma dei decimali eseguendosi nel modo medesimo, che nei numeri interi, non ammette alcuna difficoltà.

Si scrivono dunque i numeri in modo, che le unità, diecine, se ci sono, si corrispondano, e che si corrispondano altresì i decimali dell'ordine medesimo. Ciò fatto tirata una linea, si sommino al modo ordinario degli interi. Così volendo sommare A = 0, 04; B = 4, 303; C = 65, 6830; D = 844, 3066: scrivo questi numeri come quì si vede, e la loro somma sarà E = 914, 3326.

A . . . 0, 04

B . . . 4, 303

C . . 65, 6830

D . 844, 3066

E . . . 914, 3326

§. 77. Similmente volendo sottrarre un decimale B = 9, 47657 da A = 45, 302, si avrà per C = resto 35, 82543.

A 45, 302

B 9, 47657

C 35, 82543

§. I

§. 78. I decimali si moltiplicano altresì come gl' interi; onde se io volessi moltiplicare A = 18, 70 per B = 5, 63, avrei per prodotto C = 195, 2810.

A 18, 70

B 5, 63

C . . . 95, 2810.

Ma se la moltiplicazione si fa come negli interi; come ritroverò io il numero di decimali, che competono al prodotto? Richiamando alla mia memoria la convenzione di sopra stabilita (§.37.), io scorgo, che i decimali del moltiplicando esprimono un rotto, che ha per denominatore l' unità con tanti zeri a destra, quanto è il loro numero, e che lo stesso sia dei decimali del moltiplicatore. Dunque al prodotto dei decimali bisogna dare per denominatore l' unità con tanti zeri, per quanto è il loro numero (§.31.*cas.*1.); e perciò a tenore della convenzione *separeremo nel prodotto tante cifre quanto è il numero dei decimali dei fattori*.

§. 79. Finalmente per la divisione dei decimali si seguiranno le leggi medesime, che per gl' interi. Così dividendo A = 49, 328 per B = 16, si avrà per quoziente C = 30, 83.

B ... 1, 6) 49, 328 ... A

C .. 30, 83

Volendosi poi determinare quanti decimali convengano al quoziente, si osservi, che dividendo un'unità con più zeri, per un' unità che habbia similmente dei zeri, si avrà per quoziente l' unità con tanti zeri, quanta è la differenza dei zeri del dividendo, e del divisore. Dunque si separeranno nel quoziente tante ci-

cifre, quant' è la differenza dei decimali del dividendo, e del divisore, come abbiamo eseguito. Se prima dell'operazione nel dividendo non ci fossero dei decimali, o non fossero sufficienti per la divisione, se ne potranno aggiungere quanti si vuole, senza che venga alterato il suo valore (§.75.)

§.80. Avendo veduto, che i decimali agevolano le operazioni aritmetiche, si è pensato di risolvere il seguente

Probl. Ridurre una data frazione ordinaria a decimale o esattamente, o per approssimazione.

Se noi aggiungiamo a destra di un qualunque numeratore un zero, renderemo decuplo il suo valore, e perciò se lo dividiamo per lo suo denominatore, il quoziente sarà dieci volte maggiore della data frazione. Supponendo adunque, che in questa divisione non si ottenga residuo, potremo di nuovo rendere il quoziente dieci volte minore, con separarne l' ultima sua figura a destra mediante una virgola, se il quoziente ha più figure, o con porre a sinistra dell' unica figura un zero seguito da una virgola. Secondo le regole de' decimali (§.75.), otterremo il valore della data frazione espresso in decimali. Così $\frac{3}{2} = 1, 5$; $\frac{3}{5} = 0, 6$.

Qualora coll' aggiunzione di un zero il quoziente non è esatto, si dovrà eseguire l'operazione con due, o più zeri, secondo il bisogno, ed allora converrà separare tante figure a destra, quanti sono i zeri aggiunti. Così $\frac{1}{4} = 0, 25$.

Qualora poi la divisione necessariamente non riesca mai esatta, per quanti zeri si vogliano aggiungere, non si potrà avere il valore della frazione espresso in decimale esattamente, poichè il residuo diviso pel denominatore della proposta frazione con tanti zeri appresso, quanti sono gli aggiunti, è sempre la parte, che resta a ridurre in decimali. Si vede adunque, che se si voglia trascurare questa parte della frazione, si avrà

avrà un rotto decimale prossimo al vero. Dunque essendo questa parte della frazione tanto più piccola, quanto è maggiore il numero dei zeri, che si aggiungono, si deduce, che l'applicazione si potrà estendere quanto si vuole, e che il decimale ritrovato si potrà far differire dalla proposta frazione, per una frazione minore di qualunque data. Così riducendo $\frac{1}{3}$ al decimale 0, 3 col moltiplicare il numeratore 1 solamente per dieci, questo decimale differirà da $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{30}$; e se a destra del numeratore 1 avessi situati due zeri, avrei avuto per decimale 0, 33, il quale differisce dal vero valore di $\frac{1}{3}$ per $\frac{1}{300}$, onde 0, 333 ne avrebbe differito per $\frac{1}{3000}$, e 0, 3333 per $\frac{1}{30000}$ ec.

In questo caso lo osservo, che le cifre ritrovate sono sempre le stesse, perchè è sempre lo stesso il residuo. Talora però accade, che non ritornano le stesse cifre, se non se dopo un dato periodo, come volendo ridurre $\frac{1}{7}$ a decimale si ottiene 0, 142857 142857 ec. ritornando sempre dopo sei cifre il periodo medesimo. Questi rotti diconsi *periodici* (1), ed è facile continuare l'approssimazione quanto si vuole.

E' chiaro, che i residui, che continuamente quì si ottengono, devono esser minori del dato denominatore, e perciò questi residui non ritorneranno ad esser gli stessi prima che non si sieno fatte tante divisioni, quante sono le unità del denominatore.

Dunque il denominatore fa conoscere il limite più lontano del periodo, il quale nel caso nostro non può ricomparire più tardi del settimo luogo. Quando dunque le cifre del quoziente ritornano collo stess'ordine, è segno evidente, che è impossibile ridurre esattamente il rotto a decimale.

CAP.

(1) Sulle frazioni periodiche si possono proporre i due seguenti problemi, cioè *data una frazione determinarne il periodo*, e viceversa *dato il periodo dedurne la frazione*. La risoluzione di questi problemi appartiene all' algebra.

CAP. XI.

Operazioni compendiose, ed approssimanti su i decimali.

§.81. IL gran numero de'decimali rende spesso molto lunghe queste operazioni, e ci porta ad una esattezza di cui non abbiamo bisogno; per esempio possiamo spesso trascurare nelle nostre operazioni qualche millesimo, o qualche dieci millesimo. In questo caso noi non dobbiamo eseguire le operazioni, come nel metodo ordinario, poichè limitandoci nei fattori ai dieci millesimi, o ai millesimi, si producono dei decimali di un' ordine molto superiore (§.78.): Per evitare questi inconvenienti, ci proporremo il seguente

Probl. Semplificare la moltiplicazione dei decimali, quando si vuol limitare il prodotto a decimali di un dato ordine.

Sarebbe certamente impossibile di ritrovare in astratto una regola generale su di quest'oggetto, se non si avesse presente un'esempio per soddisfare l' immaginazione.

Si debba dunque moltiplicare A per B. Egli è naturale, che tanto sia moltiplicare nel modo ordinario, che moltiplicare prima per le decine di B, poi per le unità, indi per i decimi, per i centesimi ec. Dunque se nel prodotto io non voglio i decimali di tutti gli ordini, ma dei decimali fino ad un dato grado, per esempio, fino al terzo, egli è chiaro, che io non devo moltiplicar per le decine i decimali di tutti gli ordini. Or se io incominciassi la

```
A . . . 23, 4568529
B . .   68, 64
    ---------------
      A . . . 23, 4568529
      D . . . . . . . 4686
          ---------------
             140741112
              18765480
               1407408
                 93824
      -------------------
C . . . . . . . . 1610,07824
```


moltiplicazione dal decimale del terz' ordine, potrebbe allora avvenire, che dalla trascurata moltiplicazione de' decimali di grado superiore potessero ottenersi dei decimali del terz' ordine; dunque per togliere ogni dubbio incomincio la moltiplicazione dai decimali del sest' ordine, cioè di un' ordine distante per tre cifre da quello, a cui voglio limitarmi. Perciò scrivo le 6 decine di B sotto i 2 milionesimi di A, e moltiplico al solito per le 6 diecine di B i due milionesimi, e tutte le altre cifre a sinistra del due. Ma io ho osservato, che volendo moltiplicar per dieci i decimali, io non devo far altro, che escludere dai decimali la prima figura, che rappresentava i decimi, e metter questi al luogo dell' unità, passando dopo di essa la virgola, cioè diminuire i decimali di una figura sulla destra (§.75.); dunque essendo sei i decimali prima della moltiplicazione, il grado dei decimali del prodotto sarà il quinto.

Convien' ora, che io istituisca la moltiplicazione per le unità del moltiplicatore, cioè per 8; ma rifletto, che quivi la moltiplicazione deve incominciare dai decimali del quinto grado, per le ragioni esposte di sopra; dunque scriverò le 8 unità sotto al decimale del quinto grado, cioè sotto del 5, ed il prodotto, che ottengo dal moltiplicar questo con tutte le cifre a sinistra, lo scrivo sotto del primo prodotto, perchè contiene decimali del medesimo ordine.

Nell' istesso modo scrivo il 6 sotto del numero 8, ed il 4 sotto del 6, come in D, ed eseguo le altre due moltiplicazioni, e sommando avrò il prodotto C; in fine casso le due ultime figure, la prima delle quali esprime decimali dell' ordine quinto, e la seconda dell' ordine quarto, e dopo le tre figure decimali seguenti pongo la vingola, restando tre figure a sinistra della vingola, come conviene. Egli è chiaro, che se le ul-

ultime figure cassate superino 50, allora si toglierebbe più della metà appartenente alla figura immediatamente ad esse accanto; dunque affinchè lo sbaglio sia meno sensibile, si aumenterà in questo caso di un'unità a figura, ch'è accanto a quelle, che si tolgono. Così se nel presente esempio il 24 fosse stato maggiore di 50, si sarebbe aggiunta un' unità al numero 8.

Da quest' operazione si deduce, che convenga roversciare l'ordine delle cifre del moltiplicatore, situando nella parte destra la prima, che esisteva a sinistra, sotto il decimale inferiore di tre gradi a quello a cui voglio limitare il mio prodotto; ed eseguire la moltiplicazione per tutte le cifre del moltiplicando a sinistra, incominciando sempre dalla cifra, che gli è superiormente insistente, e situando i prodotti, in guisa che le figure a destra corrispondano le une sotto le altre. Di questi prodotti indi si prenderà la somma, la quale rappresenterà il prodotto richiesto, cassatene le cifre che superano il numero dei decimali desiderato.

Se nel moltiplicatore mancassero le decine, ma vi fossero solamente unità, allora incominciando pure la moltiplicazione dal decimale di sest' ordine, non si sarebbero i decimali diminuiti di un grado, come abbiamo veduto accadere per le decine; ed in conseguenza si avrebbero dovuto cassare a destra le tre cifre, la prima esprimente i decimali di 6 ordine, la seconda di 5, la terza di 4. E perciò in vece di situare la prima cifra del moltiplicatore, sotto il decimale di sesto grado, avrebbe potuto situarsi sotto al quinto, cioè di due gradi inferiore a quello, a cui voglio limitarmi.

Facendo lo stesso raziocinio si rileverà facilmente, che se nel moltiplicatore non ci fossero unità, ma questo cominciasse dai decimi, converrebbe cassare quattro cifre; e quindi la prima cifra del moltiplicatore avrebbe potuto situarsi sotto il decimale di un grado inferiore a quello, a cui voglio limitare il prodotto, e così in appresso.

Vi-

Viceversa se nel moltiplicatore vi fossero state centinaja, sarebbe stato necessario trascurar nel prodotto una sola cifra; e perciò potendo cadere errore nel prodotto, si avrebbe dovuto situare la prima cifra del moltiplicatore sotto il decimale di quattro gradi inferiore a quello, a cui voglio limitarmi; e così in appresso se nel moltiplicatore vi sieno migliaja ec. (1).

§. 82. *Probl. Istituire per approssimazione la divisione troppo lunga pel gran numero di decimali.*

Egli è chiaro, che i decimali del dividendo, e del divisore ridotti allo stesso grado coll'aggiunzione dei zeri, se bisogna, (§. 75.) la loro divisione si riduce a quella degli interi; e che per l'indole della divisione, qualora si vogliono de' decimali nel quoto, convenga porre tanti zeri nel dividendo, quanti decimali si vogliono nel quoto medesimo. Disposto tutto questo, si debba dividere 0, 568327 per 0, 000452, che in conseguenza di ciò che si è detto riducesi a dividere il numero intero A per l' altro B.

Se in A si sopprimano le due ultime cifre, cioè una di meno delle cifre componenti il divisore, egli è chiaro, che la divisione delle altre cifre darà le stesse cifre nel quoto, che se si fosse istituita l'operazione senza tale soppressione di cifre; e che per ora si saranno solamente trascurati $\frac{27}{452}$, potendosi intendere sopstituiti due zeri in luogo delle due ultime figure sopresse, giacchè $\frac{568327}{452} = \frac{565300}{452} \times \frac{27}{452}$. Fatta questa prima divisione, ottengo le due prime cifre nel quoto C,

 cioè

(1) Era necessario fare tutte queste riflessioni per rendere esatta questa ingegnosa regola.

1258 C

B = 452) 568327 ..... A

259 .... D

34 .... E

cioè 12, e per resto D, cioè 259, a cui dovrei aggiungere un zero, se volessi proseguir l' operazione col metodo ordinario. Ma io rifletto, che ordinariamente tanto è il quoto, che nasce dividendo 2590 per 452, quanto quello, che si ha dividendo 259 per 45; dunque supprimerò una cifra a destra del divisore, e dividerò il primo resto ottenuto dalla divisione, cioè D, per le due prime cifre di B, cioè per 45, e così ottengo la terza cifra 5 del quoto.

Similmente il residuo 34, vale a dire E lo divido per 4, ed otterrò l' ultima cifra 8 del quoto. Da ciò ne deduco la seguente regola generale.

Volendosi abbreviare la divisione, si sopprimano a destra del dividendo tante figure meno una, quante ve ne sono nel divisore. Si faccia indi la divisione secondo il metodo ordinario: se non ci è resto, si mettano dopo il quoto tante cifre, quante sono le figure soppresse. Ma se vi è un resto, si continua a dividere per lo primo divisore, sopprimendo però la sua prima figura a destra, e segnandola con un puntino. Dopo questa divisione, si dividerà il nuovo resto pel divisore precedente, sopprimendo similmente la sua ultima figura, e segnandola con un puntino. Si continua con questo metodo la divisione, sopprimendo in ciascuna divisione una figura del divisore sulla sua dritta.

Ab-

§. 83. Abbiamo detto nella soluzione del problema, che in queste continue divisioni ordinariamente non si ottengono i quoti medesimi, che colle regole ordinarie, perchè può alcune volte accadere, che differiscano di qualche unità. Così non è lo stesso dividere 270 per 94, che 27 per 9. Dunque si possono aver degli errori in siffatte operazioni, ma di poca conseguenza per chi richiede approssimazione. Per diminuire altresì siffatti errori, stabiliremo le due seguenti regole.

I. Ogni qual volta la figura, che si sopprime alla destra del divisore è eguale o maggiore di 5, converrà accrescere di un' unità la figura precedente del medesimo divisore.

II. Si separino per maggiore esattezza sulla destra del dividendo non già tante cifre, quante son quelle del divisore meno una, ma meno due, o anche meno tre. Di più nel quoto si sopprima l' ultima figura nel primo caso, e le due ultime nel secondo: avvertendo di accrescere di un' unità la precedente figura, se l' ultima sia maggiore di 5, e le due ultime nel secondo caso sieno maggiori di 50.

C A P. XII.

Delle applicazioni di cui l' Aritmetica è suscettibile.

§. 84. L' Investigazione di tutte le precedenti operazioni si deve al bisogno di applicar l' aritmetica a diversi usi. Si potrebbe adunque ricercare a quali applicazioni si possa estendere una tale scienza, e quale sia la generale classificazione di queste operazioni.

§. 85. Partendo dal principio generale, che tutte le operazioni su de' numeri non possono essere, che tanti diversi accrescimenti, o diminuzioni di quelli, si

rav-

ravvisa, che tutte le applicazioni dell'Aritmetica consistano nell' istituire le sue quattro principali operazioni. Dunque l'ordine, con cui esse si devono istituire, è di per se cognito, o è necessario far delle ricerche per conoscerlo.

§. 86. Nel primo caso in cui l'ordine delle operazioni aritmetiche è di per se cognito, o dato, non si deve far altro, che eseguirlo. Il numero di somiglianti applicazioni è indefinito, e sulle medesime non può cadere classificazione alcuna.

§. 87. Se poi l'ordine delle operazioni da istituirsi non sia dato, ma convenga intraprender delle ricerche per determinarlo; in questo caso come dare in tale limitato stato di cognizioni una generale classificazione, e delle regole per determinare siffatto ordine di operazioni?

§. 87. Bisogna adunque assolutamente limitarci a quelle applicazioni, nelle quali riesce di per se facilissimo il ritrovare quali sieno le operazioni da istituirsi, e quale l'ordine; poichè quando una tale ricerca riesce complicata, dovremo rimetterla alla sagacità di chi l'istituisce, o ricorrere ad una scienza superiore (1). Quali dunque sono quelle questioni in cui facilmente si perviene a determinar l'ordine delle operazioni? Noi quì classificheremo le principali.

§. 89. Una gran classe di questioni aritmetiche si riduce a questo semplicissimo principio: *Se ad un numero corrisponda un' altro dato, all' unità dal primo quall' altro numero corrisponderà?*

Questa domanda darà la soluzione di moltissime questioni in tutti que' casi, ne' quali non solamente al primo numero corrisponde il secondo, ma pure alle parti del primo corrispondono sempre altri numeri.

(1) Il bisogno di determinare con regole generali l'ordine, con cui si devono eseguire le operazioni aritmetiche, ha fatto nascere l'*Algebra*.

§. 90. Due casi possono accadere, che o diminuendosi il primo numero si diminuisca pure il secondo, cioè che quella frazione che si prende del primo numero, convenga altresì prendere del secondo; o che diminuendosi il primo numero il secondo cresca. Ed egli è di per se chiaro che nel primo caso per trovare qual numero corrisponda all' unità del primo numero, convenga dividere il secondo pel primo, e nel secondo caso sia necessario moltiplicarli insieme. Così se si chiede *un naviglio che ha percorso sempre col medesimo vento 96 miglia in 24 ore, che tempo ha impiegato per correrne uno?* Si ravvisa immediatamente che ci ha impiegato $\frac{24}{96} = \frac{1}{4}$ d'ora. E se si domanda *quale è l'interesse di un ducato al 3 per 100*, si vede che sia $\frac{3}{100}$ d'un ducato. E se si ricerca *il valore di una canna di stoffa di cui canne $31\frac{2}{3}$ han costato ducati 80, 25*, si vedrà subito che costi $\frac{80,\,25}{31\frac{2}{3}}$.

In tutti i rapportati esempj crescendo, o diminuendo il primo numero si accresce o si diminuisce il secondo; ma ne' seguenti avverrà il contrario. Così se si domanda *un uomo che tempo impiegherà a fare un certo lavoro, per eseguire il quale 30 uomini hanno impiegato 10 giorni*, si vede che v'impiegherà giorni $30 \times 10 = 300$. E similmente se si chiede *un uomo in che tempo finirà i viveri che sarebbero sufficienti per 4 persone in 10 giorni*? Si risponderà che tali viveri li basteranno 40 giorni.

§. 91. Alle questioni precedenti si riducono tutte quelle in cui si richiede, se ad numero corrisponde un' altro, ad un terzo numero quell' altro corrisponderà? Imperocchè al primo numero corrispondendo il secondo, si vedrà pe' casi precedenti qual numero corririsponda all'unità; ed indi corrispondendo un solo numero all'unità si ritroverà subito al terzo numero qual' altro corrisponde. Questa regola perciò dicesi *del tre*, dovendosi da tre numeri dati determinare il valore del quarto e dicesi *diretta*, se diminuendosi il primo numero si diminuisca parimenti il secondo, e si dice *regola del tre inversa* se diminuendosi il primo numero cresca viceversa il secondo.

§. 92. Le seguenti questioni appartengono alla regola del tre diretta. *Se un naviglio ha percorso 96 miglia in 24 ore, si richiede che tempo impiegherà coll' istesso vento per 265 miglia?* E subito si vede (§.90.) che v'impiegherà $\frac{24}{96}$ d'un ora per un miglio, e per miglia 265, vi metterà $\frac{24}{96} \times 265 =$ ore 66 $\frac{1}{4}$. Dunque per ottenere il numero incognito delle ore conviene o dividere 24 per 96, ed il quoto moltiplicarlo per 265, o dividere 265 per 96 e poi moltiplicare 5 quoto per 24, o finalmente moltiplicare 265 per 24, e dividere il prodotto per 96. Queste operazioni danno necessasiamente il medesimo risultato.

Similmente se si richiede *l'interesse del 3 per 100 di un capitale di 2460 ducati*, si troverà col medesimo raziocinio $= \frac{3 \times 2460}{100} = 85, 50$.

E qualora si voglia sapere *quanto costano 300 canne di stoffa, di cui canne 31 $\frac{2}{3}$ sono costate ducati 80, 25*; si tsoverà un tal valore $= \frac{300 \times 80, 25}{31 \frac{2}{3}} =$ ducati 760, 26 $\frac{6}{19}$.

§. Le segnenti questioni si appartengono alla regola inversa del tre. Si domanda *che tempo impiegheranno 25 uomini a compiere un lavoro, in cui 30 uomini hanno impiegato 10 giorni?* Ed è chiaro che un uomo

mo

mo v'impiegherebbe giorni 300, (§.90.); onde uomini 25 v'impiegheranno $\frac{300}{25} = 12$ giorni.

Nell'istesso modo se si vuol sapere *il tempo, che impiegherebbero 6 persone a consumare i viveri sufficienti per 4 persone in 10 giorni*, si ritroverà, che quel tempo sarebbe $= \frac{40}{6}$, cioè = giorni 6 $\frac{2}{3}$.

§. 94. La regola del tre si dirà *composta* se vi sieno più di tre numeri. Le questioni che le appartengono si risolvono replicando il medesimo metodo. Così se si voglia sapere *che tempo impiegano 30 uomini per compiere un lavoro di 100 canne, se 25 uomini han fatto un somigliante lavoro di 75 canne in 8 giorni*, la questione si risolverà nel seguente modo.

Un Uomo porrebbe, per fare 75 canne, giorni 8×25 (§.90.) $= 200$. Dunque se per 75 canne di lavoro impiegherebbe 200 giorni, è chiaro che il medesimo Uomo per 100 canne vi porrà giorni $\frac{100 \times 200}{75} = \frac{20000}{75}$.

[illegible] E quindi Uomini 30 v'impiegheranno (§.93.) giorni $\frac{20000}{75 \times 30} = 8, \frac{8}{9}$. Dal che si vede che per risolvere tali questioni bisogna ricorrere al medesimo metodo.

§. 95. Vi sono delle questioni, che diconsi di *società*, le quali riduconsi alla regola del tre. In queste questioni altro effettivamente non si ricerca, che di un numero farne un dato numero di parti, e di queste poi prenderne quante da altri numeri vengono espresse. Così se si proponga la seguente questione *tre persone han posto in società la prima 200 docati, la seconda 350, e la terza 420; e si richiede quanto ciascuno deve conseguire nel guadagno di 1000 ducati*. Ognun vede, che essendo stata l'intera società di ducati 970, per ri-

ritrovare il guadagno di ciascun socio bisogna fare parti 970 dell' intero guadagno di 1000, e poi di queste parti prenderne pel primo socio 200, pel secondo 350, e pel terzo 420; o pure dire se 970 danno 1000, quanto daran 200, e così in appresso. Sarà dunque il guadagno del primo $= \frac{1000}{970} \times 200 = 206$, 1, $\frac{83}{97}$. Il guadagno del secondo $= \frac{1000}{970} \times 350 = 360$, 8, $\frac{24}{97}$. Finalmente il guadagno del terzo $= \frac{1000}{979} \times 420 = 432$, 9, $\frac{87}{97}$ (1).

§.96. Finalmente si può senza difficoltà risolvere pei principj precedenti ogni questione aritmetica, in cui si tratta di determinare il valore medio di molti generi di cose, delle quali il numero ed il valore sono dati. Soglionsi queste regole chiamare di *allegazione*. Così se in un lavoro s'impieghino 400 operarj, de'quali 120 sono pagati a ragione di 20 grana al giorno, 80 a ragione di 25 grana al giorno, 150 a ragione di 30 grana, e finalmente 50 a 35 grana, si richiede ciascun operajo l' un per l' altro quanto viene al giorno. E' chiaro che l'intera spesa è $= 120 \times 20 + 80 \times 25 + 150 \times 30 + 50 \times 35 = 106$, 50. Dunque dividendo 106, 50 per 400, si troverà, che ciascun operajo riviene a grana 26 $\frac{5}{8}$.

Tralascio tutte le altre infinite questioni, che dai principj stabiliti si potrebbero dedurre, riserbandomele per l' introduzione all' algebra.

CAP.

(1) Tralascio quì le questioni di società, nelle quali si mette a calcolo anche il tempo, perchè non sarebbe esatta la soluzione, che quì si potrebbe intraprendere. Molti autori han creduto, che tali questioni si possono ridurre a questioni di semplice società col moltiplicare pel tempo. Ma ciò è falso.

CAP. XII.

Conseguenze che deduconsi dalle precedenti ricerche.

§. 97. E necessario ora considerare la successione, e 'l ligame delle verità costituenti la scienza de' numeri, e sotto qual veduta generale si possano le medesime ridurre.

Primieramente si è descritto lo stato delle impressioni che ricevono i nostri sensi, allorchè si discerne l' unità dalle pluralità (§.1.) (1). Avendo indi dimostrato il bisogno dei segni (§.3.) per vedere permanenti le idee dei numeri, siamo pervenuti a formarci un linguaggio numerico, ch' è la base di tutta l' Aritmetica (§.4., e seguenti).

§.98. Or poichè il linguaggio numerico ha alcune costanti leggi, non era difficile stabilire sulle medesime una generale convenzione per rappresentarci i numeri con segni materiali, che agevolano sommamente le operazioni sopra di quelli (§.13., e seg.) Tutte le diverse operazioni sono accrescimenti, o diminuzioni de' numeri eseguiti con diverse leggi (§.21.)

§.99. Io non ritrovo alcun limite negli accrescimenti del numero, ma nella diminuzione sul principio mi arresto all' unità (§.34.). Fissando le leggi della divisibilità dell' unità, io prevengo alle diverse frazioni (§.35.).

§.100. Mi trovo adunque aver generalizzato l' idea del numero, e concepisco esser egli suscettibile di qualunque variazione tanto in aumento, che in diminuzione (§.40.).

Pri-

(1) Essendo indefinibil le idee semplici, conviene mostrare lo stato delle nostre sensazioni allorchè tali idee percepiamo.

§.101. Prima di questa generalizzazione tutti i numeri mi sembravano differire o per l'unità, o per qualche numero intero. E' perciò i numeri si dicevano *qualità* discrete, per la loro proprietà di aver le parti separate o distinte.

Ora che io posso concepire queste parti picciole o grandi quanto voglio, e che non ritrovo limitazione alcuna in questi accrescimenti o diminuzioni, comprendo, che fra un numero ed un altro ci possono essere quanti numeri intermedj io voglio, o pure, lo che si riduce all'istesso, posso concepire in un numero quante parti si vogliono.

§.102. Quando io rifletto a questa proprietà generale del numero, che non si ritrova limite nel numero delle sue parti, io mi formo l' idea di un tutto *continuo*, in cui ogni parte è connessa coll' altre parti intermedie, e così in appresso.

§.103. Eccomi dunque pervenuto all' idea della *continuità* del numero. Una limitazione ma lo facea concepire come formato da parti discrete.

Così dunque tutte le questioni particolari dell' aritmetica, come ognuno di per se rileva hanno implicitamente la loro soluzione in questa generalissima proprietà. *E' il numero divisibile in quante parti si vuole, e di queste se ne possono prendere quante se ne vogliono.*

FINE.