LEZIONI ELEMENTARI

DI CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

DEL SIG. AB. MARIE

TRADOTTE ED ILLUSTRATE

DAI PP. STAN. CANOVAI E GAET. DEL-RICCO

Pubb. PP. di Fisica-Matematica in Firenze,

ed in questa edizione accresciute oltre il doppio colle Lezioni sul Calcolo Infinitesimale, e sua applicazione alla Fisica

DEL

P. DON GREGORIO FONTANA

Pubb. Prof. di Analisi Sublime nella R. I. Università di Pavia.

PAVIA MDCCXCIII.

DALLE STAMPE DI BALDASSARE COMINO

Con Approvazione.

AVVISO DELL' EDITORE

Le preziose Lezioni di Calcolo Infinitesimale del Sig. Ab. Marie sono state dai Traduttori Fiorentini migliorate ed accresciute, e queste a norma della terza più copiosa edizione di Firenze si pubblicano ora per la prima volta in Pavia.

Valendosi di esse nella sua Scuola il Professore di questa Università, egli ha stimato opportuno, per risparmiare a' suoi Scolari il tempo e l' incomodo del trascrivere, di unire alle medesime parecchi Articoli delle Lezioni proprie relative alla Sublime Analisi, ed alla sua applicazione alla Fisica, colle quali viene ad accrescersi più del doppio il contenuto dell' edizione Fiorentina.

INDICE

DELLE MATERIE

FONDAMENTI DEI DUE CALCOLI

DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

REGOLE DEL CALCOLO INTEGRALE

ELEMENTI

DEL CALCOLO

DIFFERENZIALE ED INTEGRALE.

Fondamenti di questi due Calcoli.

1. Le quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c ec. non crescono nè scemano; le variabili che si esprimono con l'ultime lettere x, y, z ec. crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo è una quantità costante, mentre le sue ascisse e le sue ordinate son quantità variabili. La porzione finita di cui una variabile x o y cresce o scema, si chiama *differenza finita* e si scrive δx (*differenza di* x) o δy (*differenza di* y); cosicchè $x \pm \delta x$ è la variabile accresciuta o diminuita della sua differenza, e δ è il segno con cui si indica il cangiamento finito di essa, il quale avrà $+$ se ella cresce, e $-$ se scema; onde $\delta(x+y)$ non significa quì moltiplicazione, ma la differenza $\delta x + \delta y$ del binomio $x+y$.

Generalmente $\delta[\varphi(x)]$, $\delta[f(x,y)]$ ec. significano la differenza d'una funzione φ di x o di una funzione f di x, y ec.: ove per *funzione* si intende quì una quantità composta di x e di costanti o di x, y e di costanti, ma tanto generale che rappresenta tutte le infinite quantità particolari che posson formarsi con x o con x, y e con delle costanti.

FIG. 2. Sia la curva CMG con le coordinate AB e BC, AD e DE, AF ed FG ec.; se $AB = x$ e $BC = y$,
1. sarà $AD = AB + BD = x + \delta x = x'$, $DE = Da + aE = y + \delta y = y'$, $AF = AD + DF = x' + \delta x' = x''$, $FG = Fb + bG = y' + \delta y' = y''$ ec.; dunque $x' - x = \delta x$, $x'' - x' = \delta x'$, $\delta x' - \delta x = \delta(x' - x) = \delta(\delta x) = \delta\delta x = \delta^2 x$: del pari $y' - y = \delta y$, $y'' - y' = \delta y'$, $\delta y' - \delta y = \delta^2 y$. Ora le quantità $\delta^2 x$, $\delta^2 y$ ec diconsi *differenze seconde*, e $\delta^3 x$, $\delta^3 y$ sarebbero le *terze* ec., ove si osservi che $\delta^2 x$ è molto diverso da δx^2, perchè $\delta^2 x$ è la differenza seconda di x, mentre δx^2 è il quadrato della prima δx. Ordinariamente l'una delle due differenze prime δx, δy si riguarda come *costante*, supponendo per esempio $BD = \delta x = DF = FI$ ec.

3. Dall'equazioni $y' = y + \delta y$, $y'' = y' + \delta y'$, $y''' = y'' + \delta y''$ ec., $\delta y' = \delta y + \delta^2 y$, $\delta y'' = \delta y' + \delta^2 y'$, $\delta^2 y' = \delta^2 y + \delta^3 y$ ec., si ricava facilmente che presa δx costante, all'ascissa $x' = x + \delta x$ corrisponde l'ordinata $y' = y + \delta y$, all'ascissa $x'' = x + 2\delta x$ corrisponde l'ordinata $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$, all'ascissa $x''' = x + 3\delta x$ corrisponde l'ordinata $y''' = y + 3\delta y + 3\delta^2 y + \delta^3 y$ ec.; ove i coefficienti dei termini son quelli delle varie potenze d'un binomio; dunque in generale all'ascissa $x + n\delta x$ corrisponderà un'ordinata $Y = y + n\delta y + n.\frac{n-1}{2}\delta^2 y + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\delta^3 y +$ ec.; teorema di cui può farsi un buon uso per sommar le serie.

4. Che se sia ora $IH = y$, $FG = {}'y$; $DE = {}''y$, $BC = {}'''y$ ec. premettendo l'accento per indicare il progresso dell'ordinate all'indietro, avremo $Hc = \delta' y$, $Gb = \delta'' y$, $Ea = \delta''' y$ ec.; onde $y - \delta' y = {}'y$, ${}'y - \delta'' y = {}''y$, ${}''y - \delta''' y = {}'''y$ ec., e però $y = \delta' y + {}'y = \delta' y + \delta'' y + {}''y = \delta' y + \delta'' y$

 FIG.

$+ \delta^{VI} y + {}^{m}y$ ec. $= \delta\,('y + ''y + '''y$ ec. $)$, altro teorema importante da cui si ha che un'ordinata 1. y o in generale una *funzione* qualunque di y è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono. Dunque 1°. lo spazio Hi, l'arco Hh ec., tutte funzioni di y come vedremo, son la differenza della somma degli spazj GI, EF ec. o degli archi GH, EG ec., ovvero d'uno spazio qualunque CI o di un qualunque arco CH ec.: 2°. supposta costante $\delta y = \delta' y = \delta'' y$ ec. $= 1$, sarà $y = \delta\,(y - 1 + y - 2 + y - 3 +$ ec. $)$.

5. Come il cercar la differenza d'una variabile dicesi *differenziare*, così il risalir dalla differenza alla variabile stessa chiamasi *sommare* o *integrare*; e come la differenza si indica con δ, così la somma può indicarsi con σ; onde $\sigma \delta x$, $\sigma \delta^2 x$ ec. vuol dir la somma di cui δx o $\delta^2 x$ son la differenza. Ma qui si rifletta che δx tanto è differenza di x che di $x \pm a$, giacchè a essendo costante non ha differenza, cioè non cresce nè scema (1): onde poichè le costanti isolate spariscono differenziando, è forza supplirle sommando, e ciò si fa coll'aggiungere alla somma l'indeterminata C (*costante*) che si determina poi secondo le circostanze: così $\sigma \delta x = x + C$, $\sigma \delta^2 x = \delta x + C$ ec. Tra poco faremo sentire anche meglio la necessità e l'uso di quest' aggiunta: passiamo al calcolo delle differenze finite.

6. Vogliasi la differenza finita di $a^2 + bx + cy - fz = u$; avremo (1) $u + \delta u = a^2 + bx \pm b\delta x + cy \pm c\delta y - fz \mp f\delta z = u'$, onde $u' - u = \delta u = \pm b\delta x \pm c\delta y \mp f\delta z$. Dunque all'opposto $\sigma\,(b\delta x + c\delta y - f\delta z) = bx + cy - fz + C$.

7. Sia da differenziarsi $x^n = u$; avremo $u + \delta u = (x \pm \delta x)^n = u'$, ed $u' - u = \delta u = \pm n x^{n-1} \delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} x^{n-3} \delta x^3 \pm$

ec. Dunque $\sigma\,(\pm n x^{n-1} \delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2} \delta x^2 \pm$ ec. $) = x^n + C$. Sia δx costante e 1°. $n = 1$; dunque $\sigma \delta x = \delta x\, \sigma 1 = x$, e $\sigma 1 = \frac{x}{\delta x}$: 2°. $n = 2$; dunque $\sigma\,(2 x \delta x + \delta x^2) = 2 \delta x\, \sigma x + \delta x^2\, \sigma 1 = x^2$, e $\sigma x = \frac{x^2}{2 \delta x} - \frac{x}{2}$: 3°. $n = 3$; dunque $\sigma\,(3x^2 \delta x + 3 x \delta x^2 + \delta x^3) = 3 \delta x\, \sigma x^2 + 3 \delta x^2 \sigma x + \delta x^3 \sigma 1 = x^3$, e $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3 \delta x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x \delta x}{6}$ ec. ec.: onde se $\delta x = 1$, verrà $\sigma 1 = x$, $\sigma x = \frac{x^2 - x}{2}$, $\sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$, ec. ec. E nel modo stesso dalle seguenti differenze dei rotti, dei radicali, delle funzioni circolari ec. si otterranno le respettive somme che lasceremo ormai di notare, bastandoci di avvertire in generale che per aver le somme bisogna rifletter molto sulle differenze.

8. Si voglia la differenza di $\frac{x^2}{a + x} = u$; avremo $u + \delta u = \frac{(x \pm \delta x)^2}{a + x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \frac{\pm (2 a x + x^2)\, \delta x + (a + x)\, \delta x^2}{(a + x)^2 \pm (a + x)\, \delta x} = \frac{\pm (2 a x + x^2)\, \delta x}{(a + x)^2 \pm (a + x)\, \delta x} + \frac{\delta x^2}{a + x \pm \delta x}$, cioè riducendo in serie questi rotti e sommando le serie, $\delta u = \ldots\ldots\ldots \frac{\pm (2 a x + x^2)\, \delta x}{(a + x)^2} + \frac{a^2 \delta x^2}{(a + x)^3} \mp \frac{a^2 \delta x^3}{(a + x)^4}$ ec.

9. Sia da differenziarsi $\sqrt{(a + x)} = u$; avremo $u + \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} = u'$, onde $u' - u = \delta u = \sqrt{(a + x \pm \delta x)} - \sqrt{(a + x)}$: ma $\sqrt{(a + x \pm \delta x)} = (a + x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2 (a + x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8 (a + x)^{\frac{3}{2}}}$ ec.;

dunque $\delta u = -(a+x)^{\frac{1}{2}} + (a+x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \text{ec.} = \pm \frac{\delta x}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\delta x^2}{8(a+x)^{\frac{3}{2}}}$ ec. Del pari volendo la differenza di $\sqrt{\frac{a+x}{x}} = u$, si troverebbe $\delta u = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\sqrt{(ax+x^2 \pm x\delta x)} - \sqrt{(ax+x^2 \pm a\delta x \pm x\delta x)}}{\sqrt{(x^2 \mp x\delta x)}}$$ cioè

riducendo in serie i tre radicali e trattando al solito il rotto che ne risulta, $\delta u = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\mp a\delta x}{2x(ax+x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(3a^2+4ax)\delta x^2}{8x(ax+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \ldots\ldots \frac{(5a^3+12a^2x+8ax^2)\delta x^3}{16x(ax+x)^{\frac{5}{2}}} \text{ ec.}$$

10. Sia da differenziarsi $sen\, x$ e $cos\, x$. Supposto $x+\delta x = z$, $sen\, x + \delta(sen\, x) = sen\, z$ e $cos\, x + \delta(cos\, x) = cos\, z$, si avrà $\delta(sen\, x) = sen\, z - sen\, x = 2\, sen \frac{\delta x}{2} cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)$ e $\delta(cos\, x) = cos\, z - cos\, x = -2\, sen \frac{\delta x}{2} sen\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)$. Si troverà nel modo stesso $\delta(tang\, x) = \frac{sen\, \delta x}{cos\, x\, cos(x+\delta x)}$ e $\delta(cot\, x) = -\frac{sen\, \delta x}{sen\, x\, sen(x+\delta x)}$.

Anche in altro modo posson differenziarsi $sen\, x$ e $cos\, x$. Poichè fatto $sen\, x = u$, avremo $u + \delta u = sen(x \pm \delta x) = u'$, onde $u' - u = \delta u = sen(x \pm \delta x) - sen\, x$: ma $sen(x \pm \delta x) = sen\, x \,.\, cos\, \delta x \pm sen\, \delta x\, cos\, x$, e $sen\, \delta x = \delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} + \frac{\delta x^5}{2.3.4.5}$ ec., $cos\, \delta x = 1 - \frac{\delta x^2}{2} + \frac{\delta x^4}{2.3.4}$ ec.; dunque $\delta u = -sen\, x + sen\, x\left(1 - \frac{\delta x^2}{2} + \text{ec.}\right) \pm cos\, x\left(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} + \text{ec.}\right) = \pm \delta x\, cos\, x - \ldots \frac{\delta x^2\, sen\, x}{2} \mp \frac{\delta x^3\, cos\, x}{2.3.} + \frac{\delta x^4\, sen\, x}{2.3.4} \pm$ ec. Del pari volendo la differenza di $cos\, x = u$, verrebbe $\delta u = cos(x \pm \delta x) - cos\, x = -cos\, x + cos\, x \,.\, \left(1 - \frac{\delta x^2}{2} \text{ ec.}\right) \pm sen\, x\left(\delta x - \frac{\delta x^3}{2.3} \text{ ec.}\right) = \pm \delta x\, sen\, x - \frac{\delta x^2\, cos\, x}{2.} \pm \frac{\delta x^3\, sen\, x}{2.3}$ ec.

11. Sia da differenziarsi $lx = u$, intendendo per l il logaritmo naturale di x; avremo $u + \delta u = l(x \pm \delta x) = u'$, onde $u' - u = \delta u = l(x \pm \delta x) - lx = l\left(1 \pm \frac{\delta x}{x}\right) = \pm \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\delta x^3}{3x^3} -$ ec.

12. Vogliasi differenziare una quantità con esponente variabile o l'*esponenziale* $a^x = u$; avremo $u + \delta u = a^{x \pm \delta x} = u'$, onde $u' - u = \delta u = a^{x \pm \delta x} - a^x$: ma $a^{x \pm \delta x} = a^x \,.\, a^{\pm \delta x}$ ed $a^{\pm \delta x} = 1 \pm \delta x\, l a + \frac{\delta x^2\, l^2 a}{2} \pm$ ec.; dunque $\delta u = -a^x + a^x\left(1 \pm \delta x\, l a + \frac{\delta x^2\, l^2 a}{2} \pm \text{ec.}\right) = \pm a^x \delta x\, l a + \frac{a^x \delta x^2\, l^2 a}{2} \pm$ ec.

13. Con egual facilità si differenziano i prodotti di più variabili x, y ec. Ma si osservi che se x cresce mentre y scema, converrà sostituire all'uno $x + \delta x$ e all'altro $y - \delta y$; e se scemino ambedue nel tempo stesso, ad ambedue si sostituirà $x - \delta x$, $y - \delta y$ (1): noi supporremo per ora che nel tempo stesso crescano ambedue, Voglia differenziarsi $xy = u$; avremo $u + \delta u = (x+\delta x) \,.\, (y+\delta y) = xy + x\delta y + y\delta x + \delta x\delta y = u'$, on-

de $u' - u = \delta u = x\delta y + y\delta x + \delta x \delta y$. Così volendo la differenza di $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + my^3 + ex^2 + fxy + gy^2 + hx + ny + k = 0$, si troverà $(3ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + fy + h) . \delta x + (3ax + by + e)\delta x^2 + a\delta x^3 + (bx^2 + 2cxy + 3my^2 + fx + 2gy + n)\delta y + (cx + 3my + g) . \delta y^2 + m\delta y^3 + (2bx + 2cy + f)\delta x\delta y + b\delta y\delta x^2 + c\delta x\delta y^2 = 0$. Così anche $\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + \delta x}{y + \delta y} - \frac{x}{y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2 + y\delta y} = \frac{y\delta x - x\delta y}{y^2} - \ldots\ldots \frac{(y^2\delta x\delta y - xy\delta y^2)}{y^4}$ ec.

14. Infine vogliasi la differenza *seconda*, *terza* ec. di x^n supposta δx costante (2): la prima differenza è $nx^{n-1}\delta x + n . \frac{n-1}{2} x^{n-2}\delta x^2 + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} x^{n-3}\delta x^3$ ec. (7), e tutto si ridurrà a trovar le differenze di $x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}$ ec. Ora 1°. $\delta(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}\delta x + (n-1)\frac{n-2}{2} x^{n-3}\delta x^2 + (n-1)\frac{n-2}{2} . \frac{n-3}{3} x^{n-4}\delta x^3$ ec. che si moltiplicherà per $n\delta x$: 2°. $\delta(x^{n-2}) = (n-2)x^{n-3}\delta x + (n-2)\frac{n-3}{2} x^{n-4}\delta x^2$ ec. che si moltiplicherà per $n . \frac{n-1}{2}\delta x^2$: 3°. $\delta(x^{n-3}) = (n-3)x^{n-4}\delta x$ ec. che si moltiplicherà per $n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\delta x^3$ ec. Fatte l'operazioni, la differenza seconda sarà $n(n-1)x^{n-2}\delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3 + u . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{2} . \frac{n-3}{3} 7x^{n-4}\delta x^4$

ec., e col metodo stesso si avrà la terza, la quarta ec. Nella medesima ipotesi di δx costante, si troverà che la differenza seconda di xy (ricordandosi che δy diviene $\delta y + \delta^2 y$) è $2\delta x\delta y + x\delta^2 y + 2\delta x\delta^2 y$.

15. Riguardo alle differenziali delle funzioni $\varphi(x)$, $f(x, y)$ ec. (1), esse manifestamente si avranno se le differenze di x, di x, y ec. si moltiplichino per una nuova funzione φ' di x, f' di x, y ec. Così $\delta[\varphi(x)] = \delta x\varphi'(x)$, $\delta[f(x, y)] = \delta(x, y)f'(x, y)$ ec.; del pari $\delta^2[\varphi(x)] = \delta x^2\varphi''(x)$ presa δx costante ec.

Prime Regole de' due Calcoli.

16. Una grandezza variabile G ha per *limite* un'altra grandezza L quando G o sempre crescendo o sempre scemando può accostarsi al valor di L indefinitamente o ad arbitrio, senza poter mai eguagliarlo di fatto: così se G accostandosi ad Ω giunga a differirne della quautità ω, sarà $G = \Omega - \omega$, e tanto più si avvicinerà G al valor di Ω quanto più scemerà ω; cosicchè se divenisse $\omega = 0$, si avrebbe realmente $G = \Omega$; in tal caso Ω si chiama il limite di G.

Segue da ciò 1°. che *per avere il limite d'una grandezza bisogna fare zero la differenza tra essa e la grandezza a cui sempre si accosta*: 2°. che accostandosi G alle grandezze L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ, si avrà $G = L - l$, e $G = \Lambda - \lambda$, onde $L - l = \Lambda - \lambda$; e fatto $l = 0$, $\lambda = 0$, saranno L, Λ due limiti di G, e verrà $L = \Lambda$, cioè *i limiti d'una stessa grandezza* G *sono eguali*: 3°. che se le grandezze G, Γ conservando tra loro la stessa invariabil ragione $m : n$, si accostino ad L, Λ fino a differirne delle quantità l, λ. si avrà $G = L - l$, $\Gamma = \Lambda - \lambda$, ed $L - l : \Lambda - \lambda :: m : n$;

G : Γ, cioè *se* G, Γ *si accostino proporzionalmente ai limiti* L, Λ, *le grandezze e i limiti staranno tra loro nella stessa ragione*: 4°. *che una grandezza* G *continuamente accostandosi al limite* L, *può riguardarsi* (*se basti una certa approssimazione*) *come eguale ad* L *quando è giunta allo stato che o immediatamente precede l'eguaglianza perfetta o ne è anche un poco più remoto*. Quest' ultima conseguenza che talvolta ha luogo nelle stesse Scienze Matematiche, come nella somma delle serie convergenti, ne ha poi moltissimo in tutte le Scienze Fisiche.

17. Ora il *Calcolo differenziale* è il metodo di trovare i limiti della relazione tra le differenze delle quantità variabili: il metodo inverso che consiste nel risalire da questi limiti alla relazione stessa delle quantità, si chiama *Calcolo integrale*. Alcuni esempj renderanno chiare queste nozioni.

18. Vogliasi la trangente MT al punto M 2.
della curva concava AMm, o che è lo stesso, debba determinarsene la suttangente PT. Condotta un'altra ordinata mp e per m, M la corda mMS sino all'incontro della linea pS dell'ascisse, e di più Mr parallela ad Ap, sia $AP = x$, $PM = y$, $Pp = Mr = \delta x$, ed $mr = \delta y$. Ora attesi i triangoli simili MPS, mrM, si avrà $\frac{MP}{PS} = \frac{mr}{rM} = \frac{\delta y}{\delta x}$: ma $\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS}$; dunque $\frac{MP}{PT} > \frac{\delta y}{\delta x}$. Per altro quanto più m si accosta ad M, cioè quanto più scemeranno δy e δx, tanto più S si accosterà a T, e tanto meno differiranno tra loro le due relazioni o ragioni $\frac{MP}{PT}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$; dunque la ragione $\frac{MP}{PT}$ è il limite dell'altra $\frac{\delta y}{\delta x}$ (16); dunque per determinar la prima, basta trovare una nuova espressione del limite della seconda. Sia per esempio AMm

un circolo, la cui equazione è $y^2 = 2ax - x^2$; presa la differenza (7), si avrà $2y\delta y + \delta y^2 = 2a\delta x - 2x\delta x - \delta x^2$, cioè $\frac{\delta y}{\delta x} = \ldots \frac{2a - 2x - \delta x}{2y + \delta y}$, ove quanto più scemano δx, δy, tanto più la ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ si accosta a quella di $\frac{2a - 2x}{2y} = \frac{a - x}{y}$; dunque fatto $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ (7), sarà $\frac{a - x}{y}$ il limite di $\frac{\delta y}{\delta x}$: ma lo era
2. anche $\frac{MP}{PT}$; dunque (7) $\frac{MP}{PT} = \frac{a - x}{y} = \frac{y}{PT}$, e però $PT = \frac{y^2}{a - x}$, come già si sapeva. Dal che si vede con qual prontezza e generalità il calcolo differenziale risolve il problema delle tangenti da cui dipendono quasi tutte le proprietà delle curve.

19. Per convincersi poi che δy, δx anche divenendo zero, serban tra loro una ragione, sia $\delta y = a^2 - x^2$, $\delta x = a - x$, e si supponga $x = a$: in tal caso si avrà $\delta y = 0$ e $\delta x = 0$; eppure intanto $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - x^2}{a - x} = a + x = 2a$. Similmente
3. se nel triangolo PBE sia $PB = a$, $BE = b$, e sull'ascissa $BI = x$ si conduca l'ordinata $IG = y$ parallela a BE, si avrà $PB\ (a) : BE\ (b) :: PI\ (a - x) : IG\ (y)$, onde $ay = ab - bx$; e prese le differenze, osservando che l'una delle coordinate scema mentre l'altra cresce, sarà $\mp a\delta y = \mp b\delta x$, ovvero $a\delta y = b\delta x$, e però $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{b}{a} = \frac{y}{a - x}$, cioè le differenze δy, δx anche annullandosi, come avviene in GI, conservan tra loro la ragion costante $b : a$ delle quantità primitive y, $a - x$ a cui

appartengono. Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo differenziale.

20. Quanto all'integrale, egli è l'opposto del differenziale (17) ed ogni integrazione esige l'aggiunta d'una costante (5). Per dare anche di questo un esempio, sia OD una linea retta o curva 3.
con due coordinate, $HC = x$, $CD = y$ in angolo retto, e presa $Cc = \delta x$, si conduca l'ordinata $cd = cr + rd = y + \delta y$; è chiaro (4) che lo spazio Cd sarà la differenza di qualunque spazio corrispondente HD, l'arco Dd di qualunque arco corrispondente OD, la superficie descritta da Dd della descritta da OD nella rivoluzion della figura sull'asse HC, il solido generato da Cd del solido generato da HD ec.; cosicchè sommate secondo il bisogno queste differenze, il calcolo integrale determinerà la quadratura degli spazj, la lunghezza delle linee, la dimensione delle superficie curve, la cubatura dei solidi ec.

21. Supposta dunque per ora OD una retta, sia $PH = a$ e la normale $HO = b$; avremo perciò $a : b :: a + x : y = \frac{b(a+x)}{a}$, onde differenziando, $\delta y = \frac{b\,\delta x}{a}$, e lo spazio differenziale $Cd = Cr + Drd = \delta x \times y + \frac{\delta x \times \delta y}{2} = \frac{b}{a}\left(a\,\delta x + x\,\delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right)$; quindi per aver la quadratura d'uno spazio corrispondente HD o PCD, bisogna integrar quest' ultima equazione: ma $\sigma a\,\delta x = ax$ e $\sigma\left(x\,\delta x + \frac{\delta x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$ (7); dunque l'integrale completo con l'aggiunta della costante sarà $\sigma(Cd) = \frac{b}{a}\left(ax + \frac{x^2}{2}\right) + C$. Ora come l'area del trapezio HD è diversa da quella del triangolo PCD, così la costante

3. C avrà nei due casi un diverso valore: infatti il trapezio è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto H, cioè quando $x = 0$, ma il triangolo è nullo quando l'ascissa è ridotta al punto P, cioè quando $x + a = 0$ ovvero $x = -a$; dunque supposti nulli i due spazj e sostituito nell'integrale il doppio valore di x, verrà 1°. $0 + C = 0$, e però $C = 0$; 2°. $\frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) + C = 0$, e però $C = \frac{ab}{2}$; onde $\sigma(Cd) = HD = \frac{b}{a}\left(ax + \frac{x^2}{2}\right) = (b+y)\frac{x}{2}$, come ben si sapeva e $\sigma(Cd) = PCD = \frac{b}{a}\left(ax + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{ab}{2} = (a+x)\frac{y}{2}$, come pur si sapeva. Tale è l'idea che bisogna farsi del calcolo integrale.

22. Ciò supposto, si è convenuto di esprimere con $\frac{dy}{dx}$ il limite della relazione o ragione $\frac{\delta y}{\delta x}$ tra le differenze prime delle variabili y, x, con $\frac{d^2 y}{dx^2}$ o $\frac{d^2 x}{dx^2}$ i limiti delle ragioni $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 x}{\delta x^2}$ tra le lor differenze seconde ec.; e i termini dy, dx del limite $\frac{dy}{dx}$ si son chiamati *differenziali del prim' ordine*, i termini $d^2 y$, $d^2 x$, dx^2 dei limiti $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 x}{dx^2}$, *differenziali del second' ordine* ec.; onde *differenziar le quantità* significa ora cercare il limite della ragione tra le lor differenze, e dicesi *quantità* ed *equazione differenziale* quella che nasce dalla *differenziazione*. All'incontro il carattere o segno $\int$ posto avanti ad una differenziale, indica *somma* o *integrazione*. Del resto molti Geome-

tri a cui piace di abbracciare sotto il comun nome di *Calcolo Infinitesimale* i due Calcoli di cui trattiamo, concepiscono una variabile aumentata o diminuita d' una quantità infinitamente piccola dy o dx, e chiamano dy, dx *infinitamente piccoli* o *infinitesimi del prim' ordine*, d^2y, d^2x, dx^2 *infinitesimi del secondo* ec., riguardando intanto l' integrazione come il ritorno dagli infinitesimi ai finiti. Altri danno a dy, d^2y, d^3y ec. il nome di *flussioni del primo*, *secondo*, *terzo* ec. *ordine*, e chiamano *fluenti* le quantità che si ritrovano col calcolo integrale. Queste idee ed espressioni, benchè poco esatte, sono assai comuni, e noi non lascieremo di farne uso dopo aver derivate dai fondamenti già stabiliti le prime regole dei due calcoli, nelle quali supporremo tutte le variabili crescenti, giacchè in caso diverso si sa come bisogna condursi (13).

23. Abbiam veduto (16) che il limite d' una ragione si ottiene col fare zerò la diffe enza tra essa e quella a cui sempre si accosta. Dunque I°. per differenziar $b^2 + ax = u$, si avrà $\delta u = a\delta x$ (6), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = a$, ove non essendo differenza alcuna, sarà a il limite di $\frac{\delta u}{\delta x}$, e però anche $\frac{du}{dx} = a$, e $du = a\,dx$. Quindi per differenziare $a^2 + bx + cy - fz = u$, sarà (6) $\frac{\delta u}{\delta x} = b + \frac{c\,\delta y}{\delta x} - \frac{f\,\delta z}{\delta x}$: ma $\frac{\delta u}{\delta x}$ divenendo $\frac{du}{dx}$, anche $\frac{\delta y}{\delta x}$ e $\frac{\delta z}{\delta x}$ debbon divenire $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$; dunque $\frac{du}{dx} = b + \frac{c\,dy}{dx} - \frac{f\,dz}{dx}$, e però $du = b\,dx + c\,dy - f\,dz$, cioè *le variabili al primo grado si differenziano come nel calcolo delle differenze finite, sostituendo ad esse le lor differenziali e scancellando le costanti se vi sono.*

24. Dunque II°. per differenziare $x^n = u$, avremo prima $\delta u = nx^{n-1}\delta x + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x^2$ ec. (7), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = nx^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}x^{n-2}\delta x$ ec., e poi fatta $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = nx^{n-1}$ e $du = nx^{n-1}dx$, cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado diminuendone l' esponente d' un' unità e moltiplicandola per il prodotto dell' esponente primitivo nella sua differenziale*: così $d(x^2) = 2x\,dx$, $d(x^3) = 3x^2\,dx$ ec.

25. Da ciò si raccoglie che $d[\sqrt{(a+x)}] = d(a+x)^{\frac{1}{2}} = \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}}$, come può dedursi anche dalla dottrina dei limiti (9); $d[\sqrt{(ay+y^2)}] = d(ay+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{(a+2y)\,dy}{2\sqrt{(ay+y^2)}}$, e in generale $d[\sqrt[m]{(ax+x^2)}] = \frac{(a+2x)\,dx}{m\sqrt[m]{(ax+x^2)^{m-1}}}$, cioè *si differenzia un radicale del grado* m *dividendo la differenziale della quantità sotto il segno per il prodotto dell' esponente* m *nella radice* m *di questa quantità alzata alla potenza* m $-$ 1.

26. Dunque III°. per differenziare $xy = u$, si avrà prima $\delta u = x\,\delta y + y\,\delta x + \delta y\,\delta x$ (13), onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{x\,\delta y}{\delta x} + y + \delta y$, e poi fatto $\delta y = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \frac{x\,dy}{dx} + y$, e $du = x\,dy + y\,dx$, cioè *si differenzia un prodotto di variabili sommando i prodotti della differenziale di ciascuna variabile per tutte l' altre*: così $d(z\varphi\omega) = \varphi\omega\,dz + z\omega\,d\varphi + z\varphi\,d\omega$; $d(x^3y) = 3yx^2\,dx + x^3\,dy$, ec.

27. Dal che segue che volendo differenziare $\frac{x}{y} = u$, si avrà $x = uy$, $dx = \frac{x\,dy}{y} + y\,du$ e $du = \frac{dx}{y} - \frac{x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (13) cioè *si differenzia un rotto prendendo il prodotto del denominatore per la differenziale del numeratore, sottraendone quello del numeratore per la differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore:* così $d\left(\frac{1}{y}\right) = -\frac{dy}{y^2}$; $d\left(\frac{x^2}{a+x}\right) = \frac{(2ax+x^2)\,dx}{(a+x)^2}$, $d\left(\sqrt{\frac{a+x}{x}}\right) = \frac{-a\,dx}{2x\sqrt{(ax+x^2)}}$, come risulta ancora dalla consueta dottrina dei limiti (8. 9) ec.

28. Dunque IV°. per differenziar $sen\,x = u$, si avrà prima (10) $\delta u = \delta x \cos x - \frac{\delta x^2\, sen\, x}{2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \cos x - \frac{\delta x\, sen\, x}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \cos x$ e $du = d(sen\,x) = dx \cos x$, cioè *si differenzia il seno d'un arco moltiplicando la differenziale dell'arco nel suo coseno*. Del pari $d(\cos x) = -dx\,sen\,x$ (10), cioè *si differenzia il coseno d'un arco moltiplicando la differenziale negativa dell'arco per il suo seno*. Così $d(sen^m x) = m\,sen^{m-1} x\,dx \cos x$; $d(sen\,mx) = m\,dx \cos mx$; $d(\cos mx) = -m\,dx\,sen\,mx$; $d(sen\,x \cos x) = dx \cos^2 x - dx\,sen^2 x = dx \cos 2x$; $d\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right) = d\left(\cos\frac{x}{2}\right) = -\frac{dx}{2}\,sen\frac{x}{2}$; $d[\sqrt{(a^2 - b\,sen\,x)}] = d(a^2 - b\,sen\,x)^{\frac{1}{2}} = \frac{-b\,dx \cos x}{2\sqrt{(a^2 - b\,sen\,x)}}$; $d(x\,sen\,x) = dx\,sen\,x + x\,dx \cos x$, ec.: e si osservi che se il raggio non fosse 1 ma a, avrebbe sempre luogo la regola data altrove.

29. Dal che si ha 1°. $d(tang\,x) = d\,\frac{sen\,x}{\cos x} = (25)\,\frac{dx \cos^2 x + dx\,sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$: 2°. $d(\cot x) = d\,\frac{1}{tang\,x} = \frac{-dx}{\cos^2 x\,.\,tang^2 x} = \frac{-dx}{sen^2 x}$: 3°. $d(\sec x) = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{dx\,tang\,x}{\cos x}$: 4°. $d(cosec\,x) = d\left(\frac{1}{sen\,x}\right) = \frac{-dx \cot x}{sen\,x}$: 5°. $d(sen\,v.\,x) = d(1 - \cos x) = dx\,sen\,x$: 6°. $d(cos\,v\,x) = d(1 - sen\,x) = -dx \cos x$.

30. Onde se x è un arco qualunque, sarà la sua differenziale $dx = \frac{d(sen\,x)}{\cos x} = \frac{-d(\cos x)}{sen\,x} = \cos^2 x \times d(tang\,x) = \frac{d(tang\,x)}{\sec^2 x} = \frac{d(tang\,x)}{1 + tang^2 x} = -sen^2 x \times d(\cot x) = \frac{-d(\cot x)}{cosec^2 x} = \frac{-d(\cot x)}{1 + \cot^2 x}$, ec; ciò risulta dai varj valori che possono aversi per dx. (28. 29)

31. Dunque V°. per differenziare $lx = u$, si avrà prima (11) $\delta u = \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta x^2}{2x^2}$ ec., onde $\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\delta x}{2x^2}$ ec., e poi fatto $\delta x = 0$, verrà $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, e $du = d(lx) = \frac{dx}{x}$, cioè *si differenzia il logaritmo d'una variabile dividendo per essa la sua differenziale*, e si noti che per un sistema del modulo m, si avrebbe $d(lx) = \frac{m\,dx}{x}$, ma noi parleremo dei soli logaritmi naturali il cui modulo è 1: così $d(lx^n) = d(n\,lx) = \frac{n\,dx}{x}$; $d(lxy) = \ldots \frac{y\,dx + x\,dy}{xy}$; $d\left(l\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}$; $d[l(a^2 - x^2)] =$

$\frac{-2xdx}{a^2-x^2}$; $d\left(l\frac{a+x}{a-x}\right)=\frac{2adx}{a^2-x^2}$; $d[l\sqrt[m]{(a+bx^n)^r}]=\frac{r}{m}d[l(a+bx^n)]=\frac{bnrx^{n-1}dx}{m(a+bx^n)}$; $d\left(l\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}\right)=(27)\frac{dx}{x(1+x^2)}$; $d(\cos lx)=(26)-dlx\,sen\,lx=-\frac{dx}{x}sen\,lx$ ec. Del pari volendo differenziar potenze di logaritmi, si troverebbe $d(l^m x)=(24)\,ml^{m-1}x\frac{dx}{x}$; $d(x^m l^n x)=(26)\,mx^{m-1}dx\,l^n x+nx^{m-1}dx\,l^{n-1}x=x^{m-1}dx\,l^{n-1}x(n+mlx)$. In fine la differenziale d' un logaritmo di logaritmo come $llx=u$, si avrà col mezzo d' una sostituzione; poichè fatto $lx=t$, sarà $llx=lt=u$, onde $dx=\frac{dt}{t}=\frac{d(lx)}{lx}=\frac{dx}{xlx}$, ec.

Dall' equazione $d(lx)=\frac{dx}{x}$ si ha $dx=xd(lx)$, cioè *si differenzia una quantità qualunque* x *prendendo il prodotto di essa nella differenziale del suo logaritmo*, il che offre un nuovo metodo di differenziare o di verificar la differenziazione già fatta: non vi ci fermeremo.

32. Dunque VI°. per differenziare $a^x=u$, si avrà prima (12) $\delta u=a^x\delta x\,la+\frac{a^x\delta x^2 l^2 a}{2}$ ec, onde $\frac{\delta u}{\delta x}=a^x la+\frac{a^x\delta x\, l^2 a}{2}$ ec., e poi fatto $\delta x=0$, verrà $\frac{du}{dx}=a^x la$ e $du=a^x dx\,la$: così $d(x^y)=x^y d(ylx)=(26)x^y\left(dy\,lx+\frac{ydx}{x}\right)$; onde se sia $1=l2,7182818=le$, cioè se si chiami e il numero il cui logaritmo naturale è 1, sarà $d(e^x)=e^x dx\,le=e^x dx$; $d(e^{-mx})=-me^{-mx}dx$; e $d(e^{lx})=dx$. Del pari la differenziale degli *espo-*

nenziali di second' ordine, come $x^{y^z}=u$, si avrà col mezzo d' una sostituzione; poichè fatto $y^z=t$ sarà $x^{y^z}=x^t=u$, onde $x^t d(tlx)=x^{y^z}d(y^z lx)=x^{y^z}\left[y^z\left(dz\,ly\,lx+\frac{zdy\,lx}{y}\right)+\frac{y^z dx}{x}\right]=\ldots$ $x^{y^z}y^z\left(dz\,lx\,ly+\frac{zdy\,lx}{y}+\frac{dx}{x}\right)$, e se $x=y=e$, sarà $d(e^{e^z})=e^{e^z}e^z dz$, perchè in tal caso x,y sono costanti.

33. Dunque VII°. la differenziale delle funzioni $\varphi(x)$, $f(x,y)$, $F(ay+x^2)$, ec. sarà $dx\varphi'(x)$, $d(x,y)f'(x,y)$, $(ady+2xdx)F'(ay+x^2)$, ec. (15).

34. Dunque VIII°. per differenziare la seconda volta $x^n=u$, o per trovarne, presa dx costante, la differenziale seconda, si avrà primieramente (14) $\delta^2 u=n(n-1)x^{n-2}\delta x^2+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x^3$ ec. onde $\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}=n(n-1)x^{n-2}+n(n-1)(n-2)x^{n-3}\delta x$ ec., e poi fatto $\delta x=0$, verrà $\frac{d^2u}{dx^2}=n(n-1)x^{n-2}$ e $d^2u=n(n-1)x^{n-2}dx^2$: così $d^2(x^2)=2dx^2$; $d^2(x^3)=6xdx^2$ ec. Ma se dx non sia costante, siccome $d(x^2)=2xdx$ (24), avremo $d^2(x^2)=d(2xdx)=(26)\,2dx^2+2xd^2x$; in generale, poichè $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, sarà $d^2(x^n)=d(nx^{n-1}dx)=n(n-1)x^{n-2}dx^2+nx^{n-1}d^2x$. Similmente essendo $d(xy)=xdy+ydx$, sarà $d^2(xy)=xd^2y+2dxdy+yd^2x$, e presa dx costante, $d^2(xy)=$

$x\,d^2y + 2\,dx\,dy$: così nella stessa ipotesi di dx costante, si troverà $d\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = dx - \frac{y\,dx\,d^2y}{dy^2}$; ma se sia costante piuttosto dy, si avrà $d\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = dx + \frac{y\,d^2x}{dy^2}$; e se nulla sia costante, verrà $d\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = dx + \frac{y\,d^2x}{dy} - \frac{y\,dx\,d^2y}{dy^2}$.

E presa pur costante dx, sarà $d^2\,[\varphi(x)] = dx^2\,\varphi''(x)$ ec.

Il metodo stesso farà trovar le differenziali terze, quarte ec.

35. Da quanto si è detto fin qui, facilmente si comprenderanno le prime regole del calcolo integrale: così $\int a\,dx = ax + C$ (23); $\int n\,x^{n-1}\,dx = x^n + C$ (24), e quindi $\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} + C$; dunque fatto $n - 1 = m$, sarà $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$, cioè *si integra una differenziale monomia accrescendo d'un' unità l'esponente della variabile, e dividendola per la sua differenziale moltiplicata nell'esponente accresciuto*: così $\int \frac{dx}{2\sqrt{(a+x)}} = \int \frac{dx\,(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} = \ldots \frac{dx\,(a+x)^{\frac{1}{2}}}{2\,.\,\frac{1}{2}\,dx} = \sqrt{(a+x)} + C$ (25) ec.

36. Nel caso però di $m = -1$ la regola non ha luogo, poichè allora $\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{0}$: per altro essendo $m = -1$, si avrà $x^m\,dx = x^{-1}\,dx = \frac{dx}{x}$, e si sa che $\int \frac{dx}{x} = lx + C$ (31).

37. Talora si integra più facilmente per mezzo d'una sostituzione: così volendo $a\int x^{n-1} \times dx\,(b + x^n)^m$, fatto $b + x^n = z$ e però $n\,x^{n-1}\,dx = dz$ ed $x^{n-1}\,dx = \frac{dz}{n}$, verrà $a\int \frac{z^m\,dz}{n} = \frac{a\,z^{m+1}}{n(m+1)} = \frac{a\,(b+x^n)^{m+1}}{n\,(m+1)} + C$ ec. Bisogna però preparar, se occorra, tali sostituzioni: così $dx\,\sqrt{(a^2x^2 + x^4)}$ e $(3ax^3 + 4x^4)\,dx\,\sqrt{(ax + x^2)}$ si ridurranno prima a $x\,dx\,\sqrt{(a^2 + x^2)}$ e a $(3ax^2 + 4x^3)\,dx\,\sqrt{(ax^3 + x^4)}$, e poi fatto $\sqrt{(a^2 + x^2)} = z$ e $\sqrt{(ax^3 + x^4)} = z$, si integrerà facilmente.

Se $m = -1$, si avrà nel primo esempio di sopra $a\int \frac{x^{n-1}\,dx}{b + x^n} = \frac{a\,l\,(b + x^n)}{n} + C$.

38. In generale $\int x^n\,dx\,(a + b\,x^m)$ può aversi in due casi: I.° se $n = m - 1$; poichè fatto $z = a + b\,x^m$, sarà $dz = m\,b\,x^{m-1}\,dx = m\,b\,x^n\,dx$, onde $\int x^n\,dx\,(a + b\,x^m)^r = \int \frac{z^r\,dz}{b\,m} = \frac{(a + b\,x^m)^{r+1}}{(r+1)\,b\,m}$ (35): II.° se r sia numero intero e positivo; poichè sviluppando la differenziale e integrandone ciascun termine separatamente, si ha $\int (a^r\,x^n\,dx + r\,a^{r-1}\,b\,x^{m+n}\,dx + r.\frac{r-1}{2}\,a^{r-2}\,b^2\,x^{2m+n}\,dx$ ec.$) = C + \ldots\ldots \frac{a^r x^{n+1}}{n+1} + \frac{r\,a^{r-1}\,b\,x^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{r\,(r-1)\,a^{r-2}\,b^2\,x^{2m+n+1}}{2\,(2m+n+1)}$ ec., espressione finita nel nostro caso.

Se l'espressione sviluppata abbia dei termini della forma $\frac{dx}{x}$, si integrerà coi logaritmi come sopra.

39. In due altri casi è integrabile la formula $x^n dx(a+bx^m)^r$. Sia $\frac{n+1}{m}=s$, e fatto $a+bx^m = z$ onde $mbx^{m-1}dx=dz$ ed $x=\sqrt[m]{\frac{z-a}{b}}$, si avrà $x^{n+1}=\frac{(z-a)^s}{b^s}$, $x^n=\frac{(z-a)^s}{b^s x}$, $x^n dx = \ldots\ldots$ $\frac{dz(z-a)^{s-1}}{mb^s}$, ed $x^n dx(a+bx^m)^r = \ldots\ldots$ $\frac{z^r dz(z-a)^{s-1}}{mb^s}$, quantità integrabile se $s=\frac{n+1}{m}$ sia numero intero e positivo (38): così $x^3 dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}}$ ove $n=3$, $m=2$ ed $\frac{n+1}{m}=2$, è integrabile; poichè $\int x^3 dx(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}} = \ldots\ldots$

$$\int\frac{z^{\frac{1}{3}}dz(z-a^2)}{2} = \int\left(\frac{z^{\frac{4}{3}}dz}{2}-\frac{a^2 z^{\frac{1}{3}}dz}{2}\right) = \ldots\ldots$$

$$3z^{\frac{4}{3}}\left(\frac{z}{14}-\frac{a^2}{8}\right) = \frac{3}{56}\left(4x^2-3a^2\right)\sqrt[3]{\left(a^2+x^2\right)^4}+C.$$

40. II°. $x^n dx(a+bx^m)^r = x^n x^{mr} dx\left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r = x^{n+mr}dx(b+ax^{-m})^r$, differenziale integrabile se $\frac{n+mr+1}{-m}(=s)$ è numero intero e positivo (39), nel qual caso l'operazione di sopra lo riduce a $\frac{z^r dz(z-b)^{s-1}}{-ma^s}$: così $x^{-2}dx(a+x^3)^{-\frac{5}{3}}$ ove $n=-2$, $b=1$, $m=3$, $r=-\frac{5}{3}$ ed $\frac{n+mr+1}{-m}=2$, può integrarsi; poichè $\int x^{n+mr}dx(b+ax^{-m})^r = \int x^{-7}dx(1+ax^{-3})^{-\frac{5}{3}} = \int\frac{z^{-\frac{5}{3}}dz(z-1)}{-3a^2} = \int\left(\frac{-z^{-\frac{2}{3}}dz}{3a^2}+\frac{z^{-\frac{5}{3}}dz}{3a^2}\right) =$

FIG.

$$\frac{-z^{\frac{1}{3}}}{a^2}-\frac{z^{-\frac{2}{3}}}{2a^2} = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{a^2}\left(1+\frac{1}{2z}\right) = -\frac{1}{a^2}\left(1+\frac{a}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{2(1+ax^{-3})}\right)+C.$$

41. Infine è manifesto che $\int dx\cos x = \mathrm{sen}\,x + C$, $\int dx\,\mathrm{sen}\,x = -\cos x + C$ (28), $\int\frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tang}\,x + C$, $\int\frac{dx}{\mathrm{sen}^2 x} = -\cot x + C$ (29), ec.

42. E' chiaro egualmente che $\int\frac{dx\,l^n x}{x} = \frac{l^{n+1}x}{n+1}+C$, $\int\frac{dx}{x\,lx} = llx+C$, $\int\frac{dx}{x\,lx\,llx} = lllx+C$ (31) ec.; come pure $\int a^x dx\,la = a^x + C, \ldots$ $\int x^y\left(dy\,lx+\frac{y\,dx}{x}\right) = x^y + C$ (32) ec.; e parimente $\int dx\,\varphi'(x) = \varphi(x)$, $\int d(x,y)f'(x,y) = f(x,y)$ ec. (33). Tra poco daremo altre regole del calcolo integrale.

Applicazioni del Calcolo Differenziale alla Teorìa delle Curve

43. Dei problemi da sciogliersi sopra una curva, il più semplice è di condurre una tangente a un punto della medesima. Ora abbiamo già trovato
4. che se sia $AP=x$, $PM=y$, la ragione $\frac{PM}{PT}$ è il limite di $\frac{\delta y}{\delta x}$ (18); dunque $\frac{MP}{PT}=\frac{dy}{dx}$ (22), e la suttangente $PT=\frac{y\,dx}{dy}$; l'elemento

FIG. 4.

della curva AMm o l'arco infinitesimo $Mm = \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$; la tangente $MT = \sqrt{(PM^2 + PT^2)} = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2dx^2}{dy^2}\right)} = \frac{y\,ds}{dy} = t$; la sunnormale $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{y\,dy}{dx}$; la normale $MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{y\,ds}{dx} = n$; e se per A si conduca AQ parallela a MP, si avrà $\frac{y\,dx}{dy} : \frac{y\,dx}{dy} - x\,(= AT) :: y : AQ = y - \frac{x\,dy}{dx}$. Con ciò si trovano i valori di queste varie linee in ciascuna curva: poichè sostituito nelle formule il valor di dx, dy ricavato dall'equazioni delle curve, si determineranno quelle linee. purchè per avere gli asintoti si faccia di più x infinita. Diamo alcuni esempj.

L'equazione al circolo è $y^2 = a^2 - x^2$; dunque $y\,dy = -x\,dx$, e $\frac{y\,dx}{dy} = -\frac{y^2}{x} = - \ldots \frac{(a^2 - x^2)}{x} = PT$ (il segno $-$ indica che la suttangente dev' esser presa nel senso stesso dell' ascissa, perchè nella costruzion della formula si è presa in senso contrario, e dall' equazione $y^2 = 2ax - x^2$ si è avuto un risultato positivo (18)): la sunnormale $\frac{y\,dy}{dx} = -x$; la normale $\sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2dy^2}{dx^2}\right)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} = a =$ al raggio, come dev' essere; l'arco $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{a\,dx}{y} = -\frac{a\,dy}{x}$.

Nella parabola, $y^2 = px$; dunque $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{p}{2}$, e $\frac{y\,dx}{dy} = 2x$.

Nell' ellisse, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; dunque $y\,dy = \frac{b^2}{a^2}(-x\,dx)$, $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{-b^2x}{a^2}$, ed $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-(a^2 - x^2)}{x}$.

Nell' iperbola, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + xx)$; dunque $\frac{y\,dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}(a + x)$, e $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{2ax + xx}{a + x}$. Si ha ancora $AT = \frac{ax}{a + x}$, espressione $= a$ quando x è infinita; come $AQ = y - \frac{x\,dy}{dx} = y - \frac{b^2x}{a^2y}(a + x) = \frac{b^2x}{ay} = \sqrt{\left(\frac{b^2x}{2a + x}\right)}$, si riduce a $\pm b$. Questi valori di AT e di AQ danno la posizione degli asintoti.

44. Sia $y^m = x^n a^{m-n}$; si avrà $n\,lx + (m - n)\,la = m\,ly$, onde (31) $\frac{n\,dx}{x} = \frac{m\,dy}{y}$, e la suttangente $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{mx}{n}$. Tutte le curve rappresentate dall' equazion generale $y^m = x^n \times a^{m-n}$ si chiaman parabole quando m, n son positive: se $m = 2$, $n = 1$, si ha $y^2 = ax$, equazione alla parabola ordinaria detta *Apolloniana*, da Apollonio antico Geometra; se $m = 3$, $n = 1$, si ha $y^3 = a^2x$, e la curva che ne risulta è la *prima parabola cubica* a cagion di $n = 1$, se $m = 3$, $n = 2$, la curva è la *seconda parabola cubica*, la cui equazione è $y^3 = ax^2$.

45. Se n è negativa, le parabole divengono iperbole, la cui equazione è $y^m = x^{-n} a^{m+n} = \frac{a^{m+n}}{x^n}$, cioè $x^n y^m = a^{m+n}$; onde la suttangente di queste curve è in generale $-\frac{m x}{n}$, cioè dee prendersi nel senso stesso delle x. Se $m = n = 1$, si ha l'iperbola ordinaria la cui suttangente $= -x$.

Nella logaritmica, $x = A \log y$ e $dx = \frac{A\,dy}{y}$; onde $\frac{y\,dx}{dy} = A$, e però *la suttangente è sempre eguale al modulo*.

46. Siano due curve $BIOC$, BMA tali che
prolungando l'ordinate OP della prima fino alla 5.
seconda, la linea MO sia una funzione qualunque dell'arco BIO, e debba condursi per M la tangente MT. Immagino l'ordinata mp infinitamente vicina ad MP, ed Mr parallela alla tangente TO: fatto $BIO = z$, $MO = u$, sarà (22) $mr = du$, $rM = Oo = dz$, e $du : dz :: u : OT = \frac{u\,dz}{du}$, con che si determina il punto T.

Sia per esempio $u = \frac{b z}{a}$, sarà $du = \frac{b\,dz}{a}$, ed $OT = \frac{u\,dz}{du} = z = BIO$. Se $BIOC$ è un arco di circolo, AMB è una cicloide, e questa costruzione è nota.

Nella quadratrice, presi l'ascisse dal centro si 6.
ha $y = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$; dunque ricordandosi che il raggio è quì a, avremo $dy = \frac{dx}{a} \cot \frac{cx}{a} - \ldots$

$\frac{cx\,dx}{sen^2 \frac{cx}{a}}$ ed $\frac{x\,dy}{dx} = \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a} - \frac{cx^2}{sen^2 \frac{cx}{a}}$. Ma condotta un'ordinata infinitamente vicina ad MP,
6. si trova $-\frac{x\,dy}{dx} = OT$ (presa $-dy$ perchè y diminuisce mentre x cresce); dunque $OT = \frac{cx^2}{sen^2 \frac{cx}{a}} - \frac{x}{a} \cot \frac{cx}{a}$, e $CT = OT + y = \ldots$

$\frac{cx^2}{sen^2 \frac{cx}{a}} = \frac{c}{a^2} CM^2$ perchè $CB(a) : sen\, BE\left(sen \frac{cx}{a}\right) :: CM : MO(x)$; ma quando CM è nel punto D, si ha $CM = CT = CD = \frac{a^2}{c}$; dunque $CT = \frac{CM^2}{CD}$; onde presa CT terza proporzionale dopo la base CD e la retta CM, si avrà il punto T della tangente cercata.

47. Con un raggio CA sia descritto un cir-
7. colo, e sia una curva CKM tale che condotto il raggio CMN, la linea CM sia una funzione dell' arco $ADBN$; condurre una tangente MT al dato punto M. Immagino due raggi infinitamente vicini CMN, Cmn, e il piccolo arco Mr descritto dal centro C col raggio CM, e conduco CT perpendicolare a CM. Sia ora $CM = y$, $ADBN = x$, $CA = a$, e si avrà $a : y :: Nn(dx) : Mr = \frac{y\,dx}{a}$, e $rm(dy) : \frac{y\,dx}{a} :: y : CT = \frac{y^2\,dx}{a\,dy}$. Sia per esempio $y = \frac{ax}{\pi}$, la curva CKM sarà la spi-

rale d' Archimede, e si avrà $\frac{dx}{dy} = \frac{\pi}{a}$, $CT = \frac{y^2 \pi}{a^2} = \frac{axy}{a^2} = \frac{xy}{a} = MQO$.

Sia la spirale iperbolica, in cui $xy = ab$; si 8.
avrà $xdy + ydx = 0$, $ydx = -xdy$, $CT = -\frac{xydy}{ady} = -\frac{xy}{a} = -b$.

48. Nella spirale logaritmica, ove l' angolo 9.
CMT è costante, immagino i raggi infinitamente vicini CM, Cm e descritto dal centro C con un raggio CN un circolo, faccio $CM = z$, $CN = a$, e segnato sulla circonferenza del circolo un punto fisso A, suppongo l' ascissa $AN = x$, il che mi dà $a : dx :: z : Mr = \frac{zdx}{a}$. Sia $t = tang\, Mmr$, e sarà $t = \frac{sen\, Mmr}{cos\, Mmr} = \frac{Mr}{mr} = \frac{zdx}{adz}$ onde $\frac{dx}{at} = \frac{dz}{z} = d(lz)$ (31), dunque $lz = \frac{x}{at} + C$. Ora quest' equazione fa vedere 1°. che la spirale fa un' infinità di rivoluzioni intorno al suo centro tanto per accostarsene quanto per allontanarsene; poichè in luogo di x può sostituirsi successivamente $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 3\pi$ ec. $-\pi + x$, $-2\pi + x$, ec. essendo π la circonferenza ANB: 2°. che facendo $C = lC'$, si avrà $l\frac{z}{C'} = \frac{x}{at} = \frac{x}{at} le$ (32) ovvero $\frac{z}{C'} = e^{\frac{x}{at}}$ e $z = C' e^{\frac{x}{at}}$; dunque nel punto A ove $x = 0$, si ha $CD = z = C'$: 3°. che l' ascisse AN crescendo in progressione aritmetica x, $2x$, $3x$ ec., l' ordinate formano la progressione geometrica, $C' e^{\frac{x}{at}}$, $C' e^{\frac{2x}{at}}$, $C' e^{\frac{3x}{at}}$ ec.: 4°. che se

$t = \infty$, si ha $z = C'$, proprietà del circolo che taglia ad angoli retti tutti i suoi raggi, come si sa.

Questi esempj bastano per condur le tangenti a ogni sorta di curve o meccaniche o geometriche. Vedete l' *Analisi degli infinitesimi* di De l' Hôpital.

Dell' Evolute.

10. 49. Immagino un filo ABC applicato sopra una curva BC, la cui origine è in B ove AB è tangente: se si sviluppa questo filo tenendolo sempre egualmente teso, la sua estremità A descriverà una curva AM che avrà le seguenti proprietà: 1°. la tangente MC della curva BC sarà sempre perpendicolare alla curva AM: 2°. MC sarà eguale ad $AB +$ l' arco BC: 3°. l' arco infinitesimo Mm potrà riguardarsi come un arco di circolo descritto dal centro C col raggio CM; 4°. onde nel punto C si riuniranno le due normali infinitamente vicine MN, mn. Ora la curva BC dicesi l' *Evoluta* della curva AM, ed MC è il *Raggio Osculatore*, o *Raggio di Curvatura*, che si tratta di determinare, supposta nota la curva AM.

50. Sieno MP, mp due perpendicolari all' asse AQ infinitamente vicine, e CO, Mr parallele allo stesso asse: fatta $MO = u$, $AP = x$, $PM = y$, $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ e .... $dxddx + dyddy = dsdds$, sarà $dx : ds :: u : MC = \frac{uds}{dx}$: ma mentre AP, PM, MO variano, MC non varia (49); dunque differenziando l' equazione $MC = \frac{uds}{dx}$, verrà . . . . . .

$\frac{(u\,dds + ds\,du)\,dx - u\,ds\,ddx}{dx^2} = 0$, cioè $(u\,dds +$ 10.
$ds\,du)\,dx = u\,ds\,ddx$; e poichè $du = mr = dy$, si troverà $u = \frac{ds\,dx\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds}$ onde $MC = \ldots$

$$\frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = \frac{ds^3\,dy}{ds^2\,ddx - dx(dx\,ddx + dy\,ddy)} = \frac{ds^3}{dy\,ddx - dx\,ddy} = \frac{ds^3}{-dx^2\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Suppongo per compendio che una di queste differenziali sia costante, per esempio ds, ed ho $MC = \frac{ds\,dy}{ddx} = \frac{dy\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{ddx}$. Supposta costante dy, si ha $MC = \frac{ds^3}{dy\,ddx} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddx}$. Ma supposta, come si fa d'ordinario, costante dx, allora $MC = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, cioè dividendo tutto per dx^3, $MC = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{-ddy}{dx^2}$.

51. Siccome le curvature dei circoli sono in ragione inversa dei loro raggi, così in due punti diversi d'una curva le curvature sono in ragione inversa dei raggi dell'evoluta: onde per sapere in qual punto sia la massima curvatura, si cerca il *minimo* raggio dell'evoluta. Inoltre se la tangente in A è normale all'asse, allora per determinar la retta BA o la distanza del vertice A dall'origine B dell'evoluta, si farà $x = 0$ nell'espressione del raggio MC, e si avrà il valor di BA. Finalmente per trovar l'equazione dell'evoluta, si conduca CQ perpendicolare all'asse e sia $AB = a$, $BQ = t$, $CQ = z$; avremo primieramente, presa dx costan-

10. te, $MO = u = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ (50) e $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} - y$; poi $Mr\,(dx) : rm\,(dy) :: MO : CO = PQ = \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dx\,ddy}$. Dunque $AP + PQ - AB = t = x - a + \frac{dy(dx^2 + dy^2)}{-dx\,ddy}$: valori che coll'equazion della curva determinano l'equazion dell'evoluta.

11. 52. Fin quì le ordinate eran parallele fra loro. Partendo da un punto medesimo, ecco come si determinerebbe il raggio MC. Immagino due ordinate infinitamente vicine BM, Bm, e CO, Co perpendicolari ad esse: quindi descritto col centro B l'arco Mr, sia $BM = y$, $Mr = dx$, $mr = dy$, $Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, $MO = u$; per i triangoli simili Mrm, CMO, si ha $dx : u :: dy : CO \left(= \frac{u\,dy}{dx}\right) :: ds : MC = \frac{u\,ds}{dx}$. Differenziando quest'ultima equazione, presa dx costante, si avrà $d(MC) = 0$ (50) e $du = -\frac{u\,dds}{ds}$, e $\ldots$

$$d(CO) = Co - CO = -OQ = \frac{du\,dy + u\,ddy}{dx}$$

$$= \frac{u\,ddy - \frac{u\,dy\,dds}{ds}}{dx} = \frac{u\,ddy}{dx} - \frac{u\,dy^2\,ddy}{ds^2\,dx} = \ldots \frac{+u\,dx\,ddy}{ds^2}.$$

Dunque $OQ = -\frac{u\,dx\,ddy}{ds^2}$, e $BM\,(y) : Mr\,(dx) :: BO\,(y - u) : \frac{-u\,dx\,ddy}{ds^2}$; onde $u = \frac{y\,ds^2}{ds^2 - y\,ddy}$, ed $MC = \frac{y\,ds^3}{ds^2\,dx - y\,dx\,ddy} = \frac{y(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}$, che si riduce a $\frac{ds^3}{-dx\,ddy}$

FIG. 11.

quando $y = \infty$ (poichè allora $ds^2 dx$ del denominatore diventa o) cioè quando l'ordinate son parallele, come già abbiamo trovato. E se nei valori di CO, MC non si fosse presa dx costante, si sarebbe avuto $MC = \frac{y ds^3}{ds^2 dx - y dx ddy + y dy ddx}$. Ecco alcuni esempj.

53. Sia l'equazione alle sezioni coniche $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$ che fatto $2a = \infty$ si cangia in quella della parabola, e fatto $2a = p$ diventa quella dell' iperbola equilatera e del circolo. Differenziando due volte, presa dx costante, si ha $2y dy = p dx \pm \frac{px dx}{a}$ onde $dy = \frac{p dx (a \pm x)}{2ay}$, e $2y ddy + 2dy^2 = \pm \frac{p dx^2}{a}$; onde $ddy = -\frac{p^2 dx^2}{4y^3}$, sostituito il valor di dy e poi di y^2. Dunque $MC \left(= \frac{ds^3}{-dx ddy} \right) = \frac{4y^3 ds^3}{p^2 dx^3}$: ma $\frac{y^3 ds^3}{dx^3} = n^3$ (43); dunque $MC = \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$, cioè *il raggio osculatore in tutte le sezioni coniche è uguale al cubo della normale diviso per il quadrato della metà del parametro*. Onde nel circolo, dove $n = \frac{p}{2}$, il raggio osculatore eguaglia la normale, come è evidente.

54. Poichè $n = \frac{y}{dx} \surd (dx^2 + dy^2) = \frac{1}{2a} \surd [4a^2 y^2 + p^2 (a \pm x)^2]$, al vertice ove $x = o$ e perciò $y = o$, sarà $n = \frac{p}{2} = AB$.

Nell' ellisse l'evoluta ha quattro rami BD, Db, bd, dB eguali che fanno tra loro quattro punti di regresso. La distanza $CB = Cb = a - \frac{p}{2}$, ed 12.

FIG.

$ED = ed =$ alla metà del parametro dell' asse minore.

Nella parabola, poichè $MN^2 = TN \times PN$ e
13. $PN = \frac{p}{2}$, sarà il raggio $MC \left(= \frac{4MN^3}{p^2} \right) = NT \times \frac{MN}{PN}$, ed $MN : NP :: MC : NT = CO = PQ = 2x + \frac{p}{2}$; dunque $QN = 2x$, $AQ = 3x + \frac{p}{2} = 3x + AB$, onde $BQ = 3x$, il che dà una costruzione assai semplice per determinare il centro C del circolo osculatore. Prendete $BQ = 3AP$, e condotta CQ perpendicolare ad AQ, il punto di concorso C delle due MC, CQ sarà il centro cercato.

Per trovar l'equazione dell' evoluta, sia $BQ = t$, $CQ = z$, si avrà $x = \frac{t}{3}$, e $\frac{p}{2} : y :: QN : CQ :: 2x : z = \frac{4xy}{p} = \frac{4x \surd px}{p}$; onde $\frac{pz^2}{16} = x^3 = \frac{t^3}{27}$, e $t^3 = \frac{27pz^2}{16}$; cioè *l'evoluta della parabola ordinaria è una seconda parabola cubica il cui parametro è $\frac{27}{16}$ di quello della data*. Ora nell' evolute, $AB + BC = MC$; dunque $BC = MC - \frac{p}{2} = \frac{4MN^3}{p^2} - \frac{p}{2}$: ma $MN = \surd (px + \frac{p^2}{4})$ (54) $= \frac{p}{2} \surd (\frac{4x}{p} + 1)$; dunque facendo $\frac{27}{16} p = a$ e perciò $MN = \frac{p}{2} \surd (\frac{9t}{4a} + 1)$, si ha $BC = \ldots\ldots \frac{8a}{27} \left[\left(1 + \frac{9t}{4a} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$, espressione d'un arco qualunque della seconda parabola cubica la cui equazione è $t^3 = a z^2$.

55. Sia la cicloide ordinaria $AMBa$ col cir- 14.
colo genitore BOD del diametro $BD = 2a$, con l'ordinata $MP = y$ e con l'ascissa $PB = x$: si avrà per la nota analogìa $mq\,(dy) : qM\,(dx) :: OP\,(\sqrt{(2ax - x^2)}) : PB\,(x)$; dunque $dy = dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, equazion differenziale della cicloide: e se si faccia piuttosto $MP = x$, $PD = y$ onde $PB = 2a - y$, verrà $dx : dy :: \sqrt{(2ay - y^2)} : 2a - y$, e però $dy = dx\sqrt{\frac{2a - y}{y}}$, altra equazion differenziale della cicloide. Stando alla prima e posta dx costante, avremo differenziando, $ddy = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{(2ax - x^2)}}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{2a\,dx^2}{x}$. Dunque $MC = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy} = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2\,OD$: ora MNC è parallela a OD poichè la tangente MT è parallela a OB; dunque $OD = MN = NC$; quindi 1° nel punto A si ha $x = 2a$ ed $MC = 0$, onde il raggio osculatore in A è zero; e perciò l'evoluta passa per A: 2° questo raggio nel punto B è la linea BE doppia di BD.

56. Per determinar l'evoluta ACE, compito il rettangolo AE, sul lato $AB' = DE = BD$ come diametro si descriva un semicircolo AQB', si conduca AQ parallela a CM e si unisca C e Q; posto ciò, l'angolo $NAQ = NDO$; dunque $OD = AQ$ e l'arco OID (o la retta AN) = all'arco ALQ. Ora $OD = CN$; dunque $CN = AQ$, e però $CQ = AN$ = all'arco ALQ, proprietà distintiva della cicloide ordinaria; onde l'evoluta ACE è una semicicloide eguale ad AMB. Si sarebbe trovato lo stesso cercando direttamente

l'equazione dell'evoluta come abbiamo spiegato (51).

L'arco $AC = MC = 2AQ$; dunque *un arco*
14. *qualunque di cicloide è doppio della corda corrispondente del circolo genitore*. Così $MB = 2OB$, $AMB = 2BD$, e la cicloide intera ABa è quadrupla del diametro BD.

57. Sia la spirale logaritmica ADM, il cui
15. centro è A; si avrà $cot\,MmA = \frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx}$, e differenziando, supposta dx costante, si avrà $ddy = 0$, e il raggio osculatore $MC = \frac{y\,ds}{dx}$ (52): onde condotte AC, CM normali ad MA e alla tangente in M, il loro punto d'incontro C sarà all'evoluta, perchè $Mr\,(dx) : Mm\,(ds) :: AM\,(y) : MC$.

58. L'angolo $ACM = AMT$; onde l'evoluta ABC è la medesima spirale logaritmica ADM. Quindi (49) la tangente MC è eguale alla spirale ABC, benchè questa faccia un'infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT = all'arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime*.

Del Metodo dei Massimi e dei Minimi, e dei punti di flesso contrario e di regresso.

59. L'ordinata MP d'una curva BM essendo
16. maggiore o minore di quelle che la precedono ($p'm$) e la seguono ($p'm'$), si chiama *Massima* o *Minima*, e il metodo che insegna a determinar queste sorte di quantità dicesi *Metodo dei massimi e dei minimi*.

60. Se CM è il raggio del circolo osculatore

nel punto M, l'ordinata MP sarà maggiore o minore di ogn' altra ordinata corrispondente a qualche punto dell' arco KMD descritto col raggio CM; onde MP (prolungata nel caso del *minimo*) passa per il centro del circolo osculatore; e però la tangente in M è parallela all' asse AP, e quindi la suttangente $\frac{y\,dx}{dy} = \infty$; dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\infty} = 0$.
Può anche succedere che l'ordinata PM sia un massimo o un minimo quando la tangente in M è normale all' asse; allora $\frac{y\,dx}{dy} = 0$ e però $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{0} = \infty$. Ora y può riguardarsi come una funzione dell' ascissa $AP = x$; e però per sapere in qual caso ella diventa un massimo o un minimo, si differenzierà l'equazione tra y ed x, e si eguaglierà a zero o all' infinito il rotto $\frac{dy}{dx}$; l'equazione che ne risulterà combinata con la prima, darà dei valori di y, x i quali se non sieno assurdi, determineranno il massimo o il minimo.

17. 16.

61. Ma per distinguer l'un dall' altro osservate che *il raggio osculatore nel punto del massimo è positivo, e nel punto del minimo è negativo*. Ora l'espressione di esso presa dx costante, è $\left(1 + \ldots \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : -\frac{ddy}{dx^2}$ (50); e poichè $\frac{dy}{dx} = 0$, si ha $CM = \frac{-dx^2}{ddy}$; dunque se y è un massimo, $\frac{ddy}{dx^2}$ dee esser negativo, e se è un minimo, $\frac{ddy}{dx^2}$ dee esser positivo. Accadendo che $\frac{ddy}{dx^2}$ sia infinito o zero, M sarà forse un punto di flesso con- 18.

18. trario o di regresso, o la tangente in M sarà parallela all' asse: ma non ne seguirà che MP sia un massimo o un minimo se non quando oltre $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ fosse anche $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$; poichè allora se.... $\frac{d^4y}{dx^4}$ sia negativo, avremo un massimo come prima, e se sia positivo, un minimo, e così sempre; dovendo in generale essere impari il numero dei rotti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ec. che divengono zero. Ciò si deduce dal n°. 3. Ecco degli esempj.

62. I°. Dividere una retta a in due parti il cui rettangolo sia un massimo o un minimo. Chiamata x una parte, l'altra $a - x$, l'espression del massimo o del minimo sarà $ax - x^2$. Sia dunque $y = ax - x^2$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = a - 2x = 0$, e però $x = \frac{1}{2}a$. Per saper se la soluzione dà un massimo o un minimo, differenzio l'equazione $\frac{dy}{dx} = a - 2x$, ed ho $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, quantità negativa, onde il valore $x = \frac{1}{2}a$ dà un *massimo* $y = \frac{a^2}{4}$. In generale, se $y = x^m(a - x)^n$, affinchè questa quantità sia un massimo o un minimo bisogna che $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a - x)^n - nx^m(a - \ldots x)^{n-1} = 0 = m(a - x) - nx$. Allora $x = \frac{am}{m+n}$, e questo valore dà un massimo per y, perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -m - n$.

II°. Trovar due diametri conjugati dell' ellisse che faccian tra loro il minimo angolo. Sieno m, n i diametri, p l' angolo che fanno tra loro, e si avrà $mn \; sen \; p = ab$, ed $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, onde $sen\, p = \frac{ab}{n(a^2+b^2-n^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d\, sen\, p}{dn} = \ldots\ldots$ $\frac{-ab(a^2+b^2-2n^2)}{n^2(a^2+b^2-n^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, ed $n = \ldots\ldots$ $\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)} = m$. Il denominatore eguagliato a zero, cioè il rotto $\frac{d\, sen\, p}{dn}$ eguagliato all' infinito (60), darebbe $n^2 = a^2 + b^2$ ed $m = 0$, valori che non servono. Sicchè i diametri conjugati ed eguali dell' ellisse forman con la loro intersezione il minimo angolo cercato, il cui seno è $\frac{2ab}{a^2+b^2} = \frac{2}{a:b + b:a}$. Perciò se $a : b = tang\, u = tang\, CaB$, 19.
sarà $sen\, p = \frac{2\, tang\, u}{1 + tang^2 u} = \frac{2\, tang\, u}{sec^2 u} = 2\, sen\, u \; cos\, u = sen\, 2u$; onde l' angolo p è quello di due rette condotte dalle estremità dell' asse minore a una del maggiore.

III°. Di tutte le parabole che posson tagliarsi
nel cono retto DCB, determinar la massima in su- 20.
perficie. Sia $BD = a$, $CD = b$, $PB = x$, e sarà $a : b :: x : AP = \frac{bx}{a}$, $PM = \sqrt{(ax - x^2)}$, la superficie $mAMPm = \frac{4bx}{3a}\sqrt{(ax - x^2)} = y$; dunque $\frac{dy}{dx} = \frac{4b}{3a}\sqrt{(ax - x^2)} + \frac{4bx}{3a}\left(\frac{a}{2} - x\right)$: $\sqrt{(ax - x^2)} = 0 = ax - x^2 + x\left(\frac{a}{2} - x\right) =$

$\frac{3ax}{2} - 2xx$; onde $x = \frac{3a}{4}$, che è un *massimo*, perchè $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{3a}{2}$. Il denominatore eguagliato a zero darebbe due *minimi*, riducendo la parabola ad un punto o ad una linea retta coi due valori $x = 0$, $x = a$ (60).

21. IV°. Di tutti i triangoli della stessa base AB e dello stesso perimetro, qual è quello della massima superficie? Sia q il semiperimetro, la base $AB = a$, il lato $AM = x$, sarà $MB = 2q - a - x$. Dunque chiamando y la superficie, si avrà $y = \sqrt{[q \cdot q - a \cdot q - x \cdot (a + x - q)]} \ldots 2\, ly = lq + l(q - a) + l(q - x) + l(a + x - q)$, $\frac{2dy}{y} = \frac{-dx}{q-x} + \frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots$ $\frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q} - \frac{1}{q-x}\right) = 0$; dunque $a + x - q = q - x$, $2q - a - x = x$; perciò il triangolo cercato è isoscele.

63. Fin qui abbiamo considerato il *massimo* o il *minimo* delle funzioni d' una sola variabile x. Per trovare in quali casi una funzione Y di due variabili x, y divenga un *massimo* o un *minimo*, supponghiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione Y un *massimo* o un *minimo*; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziar la funzione Y facendo variare x sola, ed eguagliare a zero il coefficiente di dx. Così per aver y si differenzierà la funzione Y facendo variare y sola, ed eguagliando il coefficiente di dy a zero. Onde se $dY = Pdx + Qdy$, si deve aver $P = 0$, $Q = 0$, equazioni che daranno i valori di x e di y proprj a render la fuzione Y un *massimo* o un *minimo*. Per distinguer l' uno dall' altro, posto $dY = Pdx + Qdy$ e prese dx, dy costanti, sarà $d^2 Y = dPdx + dQdy$; onde fatto

$dP = A\,dx + B\,dy$, $dQ = B\,dx + C\,dy$ (34), verrà $d^2Y = (A\,dx + B\,dy)\,dx + (B\,dx + C\,dy)\,dy$: ma si è visto che dee aversi $P = 0$ è però $dP = A\,dx + B\,dy = 0$; dunque $dx = \frac{-B\,dy}{A}$ e $d^2Y = dQ\,dy = (B\,dx + C\,dy)\,dy = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right)dy^2$ ovvero $\frac{d^2Y}{dy^2} = C - \frac{B^2}{A}$. Ora quando si ha una sola variabile x o y, e però $y = 0$ ovvero $x = 0$, viene $dY = P\,dx$, $d^2Y = dP\,dx = A\,dx^2$ ovvero $dY = Q\,dy$, $d^2Y = dQ\,dy = C\,dy^2$, e si è detto che Y è *minimo* o *massimo* se $A > 0$ e $C > 0$ ovvero $A < 0$ e $C < 0$ (61); dunque se si abbiano x, y insieme, sarà Y un *minimo* quando $A > 0$, $C > 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} > 0$, ovvero $AC > B^2$: e sarà un *massimo* quando $A < 0$, $C < 0$ ed inoltre $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ovvero (fatto $A = -A'$, $C = -C'$ giacchè ora A, C son negativi) $-C' + \frac{B^2}{A'} < 0$ cioè $B^2 < A'C' (= AC)$ ed $AC > B^2$ come nel caso del *minimo*. Questa teorìa facilmente si estende alle funzioni di tre, quattro ec. variabili.

Si voglia dividere il numero dato a in tre parti il cui prodotto sia un *massimo*. Chiamando x, y due di queste parti, la terza sarà $a - x - y$, ed avremo $xy(a - x - y)$, la cui differenziale è $(a - 2x - y)y\,dx + (a - 2y - x)x\,dy$. Eguagliando a zero separatamente i coefficienti di dx, dy, si avrà $a - 2x - y = 0 = a - 2y - x$, onde $y = x = \frac{a}{3}$; e poichè $P = (a - 2x - y)y$, $dP = -2y\,dx + (a - 2x - 2y)\,dy$, $A\left(= -2y = -\frac{2a}{3}\right) < 0$, $B = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3}$,

e poi $Q = (a - 2y - x)x$, $dQ = -2x\,dy + (a - 2x - 2y)\,dx$, $C\left(= -2x = -\frac{2a}{3}\right) < 0$, sarà $AC\left(= \frac{4a^2}{9}\right) > B^2\left(= \frac{a^2}{9}\right)$, e perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un *massimo*.

Tra tutti i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha maggior superficie. Sieno x, y due de' suoi lati, $2q$ il perimetro, $2q - x - y$ sarà l'altro lato, e la superficie $\sqrt{[q \cdot q - x \cdot q - y \cdot (x + y - q)]}$ dovendo essere un *massimo*, se si chiama Y, si avrà $2lY - lq = l(q - x) + l(q - y) + l(x + y - q)$. Dunque $dY = \frac{Y\,dx}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - x}\right) + \frac{Y\,dy}{2}\left(\frac{1}{x + y - q} - \frac{1}{q - y}\right)$; eguagliando a zero i coefficienti di dy, dx, si ha $x + y - q = q - y = q - x$; onde $x = y = \frac{2q}{3} = 2q - x - y$. Dunque il triangolo ricercato è equilatero.

64. Serve questo metodo a determinare ancora
22. i punti di *flesso contrario* e di *regresso*; poichè la
e differenza dy dell'ordinata che da A scorre in PM,
18. e da PM o procede avanti o torna indietro, scema sempre nella concavità della curva, e sempre cresce nella sua convessità, come può vedersi in due triangoli rettangoli infinitesimi d'una stessa base dx, terminati da una stessa tangente e descritti di quà e di là dall'ordinata nel punto di contatto. Dunque nel punto M di flesso contrario o di regresso, la differenza dy diviene un minimo o un massimo, cioè fatta $z = dy$, si ha (60) $dz = ddy = 0$ ovvero ∞: ma il raggio osculatore MC, presa dx costante, diviene infinito se $ddy = 0$, e diviene zero se $ddy = \infty$ (50. 52); dunque *nel punto di*

flesso contrario o di regresso il raggio osculatore è sempre infinito o nullo, e perciò $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : -\frac{ddy}{dx^2} = \infty$ ovvero $=0$, e $\frac{-ddy}{dx^2} = 0$ ovvero ∞. Si differenzierà dunque due volte l'equazion della curva, posta dx costante, e il valor finito di $\frac{-ddy}{dx^2}$ si eguaglierà a zero o all'infinito; e combinando quest'equazione con quella della curva, si avranno i valori di x, y convenienti ad uno o più punti di flesso contrario o di regresso. Che se l'ordinate partano da un punto fisso, si avrà ... $\frac{dx^2+dy^2-yddy}{dx^2} = 0$ ovvero ∞ (52).

Esemp. I. Sia la prima parabola cubica dell'equazione $y^3 = a^2x$; si avrà $y = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, $dy = \frac{a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}dx}{3}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{2a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{5}{3}}}{9} = 0$ nel punto di flesso contrario o di regresso; dunque $x=0$, onde questo punto è nell'origine.

II. Sia la concoide dell'equazione $y = \frac{b+x}{x}\sqrt{(a^2-x^2)}$; si avrà $dy = \frac{-dx(a^2b+x^3)}{x^2\sqrt{(a^2-x^2)}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \frac{a^2x^3+3a^2bx^2-2a^4b}{(a^2x^3-x^5)\sqrt{(a^2-x^2)}} = 0$; onde $x^3+3bx^2-2a^2b=0$, equazione che risoluta darà per x il valor conveniente al punto di flesso contrario o di regresso.

III. Sia la curva dell'equazione $y-a=(x-a)^{\frac{3}{5}}$; si avrà $dy = \frac{3dx}{5\sqrt[5]{(x-a)^2}}$, $\frac{-ddy}{dx^2} = \dots$

$\frac{6}{25(x-a)^{\frac{7}{5}}}$, che eguagliato a zero, nulla fa conoscere; ma eguagliato all'infinito dà $x=a=y$, valori corrispondenti al punto di flesso contrario o di regresso.

65. E quì pure si osservi che dall'aversi un certo valor di x per mezzo di $\frac{ddy}{dx^2}=0$, non segue che al corrispondente punto della curva si trovi un'inflessione se non nel caso che questo valor di x non annulli $\frac{d^3y}{dx^3}$ o che annullandolo sparisca anche $\frac{d^4y}{dx^4}$ senza che sparisca $\frac{d^5y}{dx^5}$ ec., come per i massimi e minimi notammo di sopra (61). Del resto il metodo dà confusamente i flessi contrarj ed i regressi; una regola per distinguergli può vedersi nel *Corso di Matematiche di Sauri*.

Dei rotti il cui Numeratore e Denominatore si riducono a zero in certi casi.

66. Si trovan talvolta dell'espressioni algebriche in forma di rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$, come $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x=a$. Questi risultati apparentemente indeterminati, son suscettibili di valori determinati; ed ecco un metodo per trovarli.

Sia $\frac{P}{Q}$ un rotto il cui numeratore e denominatore siano funzioni di x che si riducono ambedue a zero quando $x=a$. Per trovarne il valore si sostituisca $x \pm dx$ ad x in P ed in Q (si prende $-$, se $+$ guida ad assurdo) e trascurati i termini ove è dx^2, dx^3 ec. come infinitesimi rispetto a dx, si avrà $\frac{P+dP}{Q+dQ}$: quindi fatto $x=a$ in questo rotto, egli si ridurrà a $\frac{dP}{dQ}$, valore della frazione proposta nella supposizione di $x=a$, se però i termini del rotto $\frac{dP}{dQ}$ non si annullassero ancora facendo $x=a$.

Es. Si cerca il valore di $\frac{x^2-a^2}{x-a}$ quando $x=a$. Quì $P=x^2-a^2$, e $Q=x-a$; dunque $\frac{dP}{dQ}=\frac{2adx}{dx}=2a$.

Sia la progression geometrica $\div\, x : x^2 : x^3 \ldots x^n$, la cui somma è $\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$; si cerca il valor di questa somma quando $x=1$. Si troverà $\frac{dP}{dQ}=n$.

Sia la quantità $\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$ che diviene $\frac{0}{0}$ quando $x=a$. Sostituito $a+dx$ ad x, si avrà $\sqrt{(2a^3x-x^4)}=a\sqrt{(a^2-2adx)}=a(a-\frac{2adx}{2a}$ ec.$)$, $-a\sqrt[3]{a^2x}=-a\sqrt[3]{(a^3+a^2dx)}=-a(a+\frac{a^2dx}{3a^2}$ ec.$)$, $a-\sqrt[4]{ax^3}=a-\sqrt[4]{(a^4+3a^3dx)}=a-(a+\frac{3a^3dx}{4a^3}$ ec.$)$; riducendo, si troverà $\frac{dP}{dQ}=\frac{-4adx}{3\times-\frac{3dx}{4}}=\frac{16a}{9}$.

67. Ma se succeda che sostituendo a ad x in $\frac{dP}{dQ}$, questo rotto anch' esso divenga $\frac{0}{0}$, si passerà a considerare i termini ove si trova dx^2, e così di

seguito, finchè non si abbia un valore tale che uno almeno dei suoi termini sia finito.

Es. Differenziata l'equazione $x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$, si divida per $\frac{dx}{x}$, e verrà $x+2x^2+3x^3\ldots+nx^n=\frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$, che si riduce a $\frac{0}{0}$ quando $x=1$. Sostituendo dunque $1+dx$ ad x, avremo nuovamente $\frac{dP}{dQ}=\frac{0}{0}$: ma se non si trascuri dx^2, come si era fatto in principio (66), si troverà $\frac{dP}{dQ}=\ldots\ldots$

$$\frac{n(n+2)\frac{n+1}{2}dx^2-(n+1)^2\frac{ndx^2}{2}}{dx^2}=$$

$\frac{n(n+1)}{2}$, somma della progressione $1, 2, 3 \ldots n$.

68. Con questi principj posson trovarsi in ogni caso particolare i valori indeterminati di $0\times\infty$ e di $\infty-\infty$; poichè $0\times\infty=0\times\frac{a}{0}=\frac{0}{0}$; ed $\infty-\infty=\frac{a}{0}-\frac{b}{0}=\frac{0}{0}$: così se $x=1$, si ha $\frac{1}{lx}-\frac{x}{lx}=\infty-\infty$, onde sostituendo $1+dx$ ad x, verrà $\frac{-dx}{l(1+dx)}=\frac{-dx}{dx \text{ ec.}}=-1$. Possono anche determinarsi i punti multipli delle curve e la loro moltiplicità; poichè come l'esser $\frac{dy}{dx}=0$ significa che la tangente è parallela all' asse (60), così il trovar $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$ esprime moltiplicità di tangenti in un punto stesso della curva e perciò un punto multiplo. Infatti differenziando l'equazione $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$, si trova

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x-a)+(x-a)^2}{2a(y-b)} = \frac{0}{0}$ quando $x = a$, $y = b$: sostituendo dunque $a + dx$ ad x, e $b + dy$ ad y, trascurato dx^2, verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2adx}{2ady}$, cioè $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$, e $\frac{dy}{dx} = \pm 1$: ma $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente dell' angolo che la curva (o la sua tangente) forma con l' asse; dunque se questa tangente ha più valori, apparterrà a più rami di curva che passano per uno stesso punto; e nel nostro caso all' ascissa $x = a$ corrisponderà un' ordinata $y = b$ che incontra la curva in un punto multiplo, ove son due tangenti eguali al raggio 1, e che fanno perciò un angolo di 45° con la linea condotta per il punto multiplo parallelamente all' asse ec.

69. Questo metodo per valutare $\frac{0}{0}$ è generale; quello di Bernoulli che prescrive di differenziar separatamente quante volte occorre il numeratore e il denominatore del rotto, non sempre riesce: così dato $\sqrt{\left(\frac{2a^2 - 3ax + x^2}{a - x}\right)}$ e supposto $x = a$, dal nostro metodo se ne avrà subito il valore $\sqrt{a}$ che da quello di Bernoulli non si otterrà giammai.

Alcune altre Applicazioni del Calcolo Differenziale.

70. Sia $x = ly$ sarà $dx = l\left(1 + \frac{dy}{y}\right)$ (11) $= l(1 + dx) = dx\,le = le^{dx}$; dunque $e^{dx} = 1 + dx$, ed $e^x = (1 + dx)^{\frac{x}{dx}}$. Sia dunque $\frac{x}{dx} = \omega$; la quantità ω sarà infinita e si avrà $e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$. Sviluppando questa espressione ed osservando che

$\omega - 1$, $\omega - 2$ ec. $= \omega$, si ha $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} +$ ec. $= \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$; onde se si faccia $x = z\sqrt{-1}$, sarà $e^{z\sqrt{-1}} = \left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega$, $e^{-z\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega$, e $sen\, z = \ldots$

$$\frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega - \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2\sqrt{-1}},\quad cos\, z = \frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega + \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{\omega}\right)^\omega}{2}.$$

71. Ma sia y una funzione della variabile x; se questa divenga $x \pm n dx$ e sia $n dx = a$ quantità finita, sarà n infinita e però $n = n - 1 = n - 2$ ec. Dunque se in y si sostituisce $x \pm a$ in luogo di x, la funzione y si cangierà (3) in $y \pm \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2\,ddy}{2\,dx^2} \pm \frac{a^3\,d^3y}{2.3\,dx^3} + \frac{a^4\,d^4y}{2.3.4\,dx^4} \pm$ ec., presa dx costante e posto per $\pm n$ il suo valore $\pm \frac{a}{dx}$.

72. Per vêder la verità di questa formula in un esempio semplice, suppongasi $y = xx - 2x + 1$, e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $x + 1$ ad x. Avremo $a = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$, $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ ec.; dunque y si cangia in $xx - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = xx$, il che è evidente.

73. Sia $y = x^m$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = m x^{m-1}$, $\frac{ddy}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}$ ec. Dunque se x di-

viene $x+a$, y diventerà $(x+a)^m = x^m \ldots + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^2 x^{m-2} +$ ec.; facendo $a = \frac{-bx}{x+b}$ e però $x+a = \frac{x^2}{x+b}$, avremo $(x+a)^m = \frac{x^{2m}}{(x+b)^m} = x^m - \frac{m b x^m}{x+b} + \ldots\ldots \frac{m(m-1) b^2 x^m}{2(x+b)^2} -$ ec. ovvero $\frac{1}{(x+b)^m} = (x+b)^{-m} = x^{-m} - \frac{m x^{-m} b}{x+b} + \frac{m(m-1) x^{-m} b^2}{2(x+b)^2} -$ ec. $= x^{-m}\left(1 - \frac{mb}{x+b} + \frac{m(m-1)b^2}{2(x+b)^2} - \ldots\ldots \frac{m(m-1)(m-2)b^3}{2.3(x+b)^3} +\text{ ec.}\right)$: serie che avrà un numero finito di termini quando m sarà un intero.

Sia $-m = n$; si avrà $(x+b)^n = x^n\left(1 + \frac{nb}{x+b} + \frac{n(n+1)b^2}{2(x+b)^2} +\text{ ec.}\right)$: si posson verificar queste formule riducendo in serie i rotti $\frac{1}{x+b}$, $\frac{1}{(x+b)^2}$, ec. Ora queste serie servono a trovar le radici dei numeri prontamente perchè possono sempre rendersi convergentissime.

74. Sia ora $y = lx$; se si pone $x \pm a$ in luogo di x essendo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-1}{xx}$ ec., si avrà $l(x \pm a) = lx \pm \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} \pm \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} \pm$ ec. Sia $\pm a = \frac{\mp xx}{b \pm x}$, e avremo $l(x \pm a) = l\frac{bx}{b \pm x} = lbx - l(b \pm x) = lx \mp \frac{x}{b \pm x} -$

$\frac{x^2}{2(b \pm x)^2} \mp \frac{x^3}{3(b \pm x)^3} -$ ec. Dunque $l(b \pm x) = lb \pm \frac{x}{b \pm x}\left(1 \pm \frac{x}{2(b \pm x)} + \frac{x^2}{3(b \pm x)^2} \pm \text{ ec.}\right)$, serie convergenti che facilitan molto il calcolo dei logaritmi.

75. Sia $y = b^x$; avremo $\frac{dy}{dx} = b^x lb$, $\frac{ddy}{dx^2} = b^x l^2 b$ ec.; dunque $b^{x+a} = b^x(1 + a lb + \ldots \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +$ ec.), e perciò $b^a = 1 + a lb + \frac{a^2 l^2 b}{2} + \frac{a^3 l^3 b}{2.3} +$ ec.

76. Sia y un arco di circolo il cui seno $= x$ che indicheremo con $y = A\, sen\, x$, si avrà $x = sen\, y \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen\, y}{cos^3 y} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ ec.; dunque l'arco il cui seno è $x \pm a$, ovvero $A\, sen\,(x \pm a) = A\, sen\, x \pm \frac{a}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{a^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} +$ ec.

77. Queste serie sono attissime a calcolar l'arco che corrisponde a un seno dato. Si cerchi nelle Tavole l'arco più vicino; la differenza del suo seno x dal dato renderà a piccolissima, e poichè $\sqrt{(1-x^2)} = cos\, y$, si avrà l'arco cercato aggiungendo $\pm \frac{a}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \pm$ ec. a quello il cui seno è x. Osservate 1°. che la serie è sì convergente che i due primi termini basteranno sempre quando non vogliasi l'approssimazione più

là dei minuti quinti in circa: 2°. che l'arco avuto da questa serie sarà espresso in parti del raggio 1; e che per ridurle a secondi, a terzi ec., bisognerà dividerle per la lunghezza dell'arco di 1″, posto il logaritmo dell'unità $=10$. Il resto è quello del numero dei secondi dell'arco cercato, il che dà subito i terzi, i quarti ec.

78. Esemp. Sia un' iperbola della potenza 1 e b l'angolo fatto dai suoi asintoti; sarà $sen\, b\, l z$ la superficie d'un trapezio asintotico compreso tra l'ordinate 1, $\frac{1}{z}$, e questo spazio rappresenterà il logaritmo tavolare dell'ascissa z quando sia il modulo $0,4342944819 = sen\, b$; cerchiamo dunque l'angolo b. Il più prossimo a $0,4342$ ec. nelle Tavole ordinarie è di $25°, 44'$; il suo $seno = x = 0,4341833$, il suo $coseno = \sqrt{(1-x^2)} = 0,9008245$, ed $a = 0,0001112$. Calcolando i due primi termini $\frac{a}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \mp \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, fatto $25°, 44' = y$, si avrà $\frac{a}{\cos y} + \frac{a^2\, sen\, y}{2\cos^3 y} = \frac{a}{2\cos^3 y}(2\cos^2 y + a\, sen\, y)$ $= \frac{a}{2\cos^3 y}(1 + \cos 2y + a\, sen\, y) = \frac{a}{2\cos^3 y}(1 + \cos 51°, 28' + a\, sen\, 25°, 44') = \frac{a}{2\cos^3 y} \times 1,6230.80$, il cui logaritmo è $6,0914775$; togliendo quello dell'arco di 1″ cioè $4,6855749$, resta $1,4059026$ per il logaritmo del numero dei secondi dell'arco dimandato $= l\, 25,4626$; dunque l'arco cercato ha $25'' + 0,4626'' = 25'', 27''', 45''''$ ec., onde l'angolo degli asintoti d'un' iperbola i cui spazj rappresentano i logaritmi delle Tavole, o quello che ha per seno il modulo, è di $25°, 44', 25''$, $27'''$ ec.

79. Facciamo attualmente $y = A\cos x$, e avremo $x = \cos y$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{sen\, y} = \frac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, ec.; dunque A

$$\cos(x \pm a) = A\cos x \mp \frac{a}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{a^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{a^3(1+2x^2)}{6(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \text{ec.},$$

serie di cui si fa lo stesso uso che delle precedenti. Se ne troveranno delle simili per l'arco la cui tangente sia $x \pm a$.

80. Sia ora $y = sen\, x$, e avremo $\frac{dy}{dx} = \cos x$, $\frac{ddy}{dx^2} = -sen\, x$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\cos x$ ec.; dunque

$$sen(x \pm a) = sen\, x \pm a\cos x - \frac{a^2}{2} sen\, x \mp \frac{a^3}{6}\cos x + \frac{a^4}{24} sen\, x + \text{ec.}$$

Parimente se $y = \cos x$, si avrà

$$\cos(x \pm a) = \cos x \mp a\, sen\, x - \frac{a^2}{2}\cos x \pm \frac{a^3}{6} sen\, x + \frac{a^4}{24}\cos x - \text{ec.}$$

Queste formule son di grandissimo uso per interpolar le Tavole dei seni. Se sia $x = 0$, i valori di $sen(x+a)$, $\cos(x+a)$ diverranno a cagion di $sen\, x = 0$ e di $\cos x = 1$, quelli che già trovammo.

81. Fatto $y = tang\, x$ onde $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ . . . $\frac{ddy}{2dx^2} = \frac{sen\, x}{\cos^3 x}$ . . . $\frac{d^3 y}{2dx^3} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3\, sen^2 x}{\cos^4 x} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$ ec., sarà $tang(x \pm a) = tang\, x \pm$

$\frac{a}{\cos^2 x} + \frac{a^2 \, sen \, x}{\cos^3 x} \pm \frac{a^3}{\cos^4 x} \mp \frac{a^4 \, sen \, x}{\cos^5 x} \pm$ ec. $\mp \ldots \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 \, sen \, x}{3\cos^3 x} \mp$ ec. : ma $\frac{\pm a + a^2 \, tang \, x}{\cos^2 x}$, $\frac{\pm a^3 + a^4 \, tang \, x}{\cos^4 x}$, $\pm$ ec. è una progression geometrica il cui primo termine $= \frac{\pm a + a^2 \, tang \, x}{\cos^2 x}$, l'ultimo $= \frac{1}{\infty} = 0$, e il quoziente $= \frac{a^2}{\cos^2 x}$; dunque la somma $= \frac{a^2 \, tang \, x \pm a}{\cos^2 x - a^2}$, e però $tang \, (x \pm a) = tang \, x + \frac{a^2 \, tang \, x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \frac{a^4 \, sen \, x}{3\cos^3 x} -$ ec. $= \frac{sen \, x \cos x \pm a}{\cos^2 x - a^2} \mp \frac{2a^3}{3\cos^2 x} - \ldots \frac{a^4 \, sen \, x}{3\cos^3 x} \mp$ ec. Si troveranno delle formule simili per $\cot (x \pm a)$.

82. Sia ora $y = m \, l \, sen \, x$ o al logaritmo ordinario di $sen \, x$ se m rappresenta il modulo; si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{m \cos x}{sen \, x}$ (31), $\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{m}{sen^2 x} \ldots \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2m \cos x}{sen^3 x}$ ec.; dunque $l \, sen \, (x \pm a) = l \, sen \, x \pm am \frac{\cos x}{sen \, x} - \frac{m a^2}{2 \, sen^2 x} \pm \frac{a^3 m \cos x}{3 \, sen^3 x}$ ec.

83. Se $y = m \, l \cos x$, sarà $\frac{dy}{dx} = \frac{- m \, sen \, x}{\cos x}$ (31), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-m}{\cos^2 x} \ldots \frac{d^3 y}{dx^3} = - \frac{2m \, sen \, x}{\cos^3 x}$ ec.; dunque $l \cos (x \pm a) = l \cos x \mp \frac{am \, sen \, x}{\cos x} - \ldots \frac{a^2 m}{2\cos^2 x} \mp \frac{a^3 m \, sen \, x}{3\cos^3 x} -$ ec. Sia $y = m \, l \, tang \, x$, e si avrà $\frac{dy}{dx} = \frac{2m}{sen \, 2x} \ldots \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{-2m \cos 2x}{sen^2 2x}$ ec. e

perciò $l \, tang \, (x \pm a) = l \, tang \, x \pm \frac{2am}{sen \, 2x} -$ ec. Lo stesso sarà per $m \, l \cot x$.

84. Supposto ora che y sia l'arco il cui logaritmo del seno $= x$, ovvero $y = A \, l \, sen \, x$, si avrà $x = l \, sen \, y$, e perciò $\frac{dy}{dx} = \frac{sen \, y}{m \cos y} \ldots \frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen \, y}{m^2 \cos^3 y}$ ec.; dunque $A \, l \, sen \, (x \pm a) = y \pm \frac{a \, sen \, y}{m \cos y} + \frac{a^2 \, sen \, y}{2m^2 \cos^3 y} \pm$ ec.

85. Sia $y = A \, l \, tang \, x$; verrà $\frac{dy}{dx} = \frac{sen \, 2y}{2m}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{sen \, 4y}{4m^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{sen \, 2y \cos 4y}{2m^3}$ ec.; dunque $A \, l \, tang \, (x \pm a) = y + \frac{a \, sen \, 2y}{2m} + \frac{a^2 \, sen \, 2y \cos 2y}{4m^2} \pm \frac{a^3 \, sen \, 2y \cos 4y}{12 m^3} +$ ec. Queste formule posson servire a risolvere con molta approssimazione i problemi sull'uso delle Tavole dei seni.

86. La serie $y \pm \frac{a \, dy}{dx} +$ ec. (71) da cui nascono queste ed infinite altre applicazioni, si chiama il *Teorema di Taylor* dal dotto Geometra Inglese che la trovò. Talvolta induce in inganno se si adopri senza cautela, come può vedersi nei casi benchè semplicissimi di $y = lx$ (74) e di $y = sen^{\frac{m}{n}} x$ quando $x = 0$ nel primo, ed $n > m$ nel secondo.

ALTRE REGOLE

DEL CALCOLO INTEGRALE

Metodo per ridurre l'integrazione di più differenziali binomie a quella d'altre differenziali conosciute.

87. Debbasi integrar la differenziale $x^n dx(a+bx^m)^k$ supponendo conosciuta l'integrale di $x^p dx(a+bx^m)^k$, ed $n > p$.

Osservo che $d[x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}] = (aq+a)x^q dx(a+bx^m)^k + (bmk+bm+bq+b)x^{m+q} dx(a+bx^m)^k$; dunque $\int x^{m+q} dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{q+1}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+m+q+1)} - \frac{a(q+1)\int x^q dx(a+bx^m)^k}{b(mk+m+q+1)}$. Sia $m+q=n$, ovvero $q=n-m$ si avrà $\int x^n dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)} \int x^{n-m} dx(a+bx^m)^k$. Per questa stessa formula $\int x^{n-m} dx(a+bx^m)^k = \frac{x^{1+n-2m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(1+n+mk-m)} - \frac{a(1+n-2m)}{b(1+n+mk-m)} \int x^{n-2m} dx(a+bx^m)^k$; dunque $\int x^n dx(a+$

$bx^m)^k = \frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)} - \frac{a(n-m+1)x^{1+n-2m}}{b^2(mk+n+1)} \times \frac{(a+bx^m)^{k+1}}{(1+n+mk-m)} + \frac{a^2(1+n-m)(1+n-2m)}{b^2(1+n+mk)(1+n+mk-m)} \int x^{n-2m} dx(a+bx^m)^k$.

Può dunque ridursi l'integrale della differenzial proposta $x^n dx(a+bx^m)^k$ a quella di $x^{n-m} dx(a+bx^m)^k$ o in generale di $x^{n-im} dx(a+bx^m)^k$, essendo i un numero intero positivo, per mezzo della seguente formula dedotta dalle passate, ove posto $\theta = i-1$, i numeri $1, 2 \dots \theta$ indicano che il termine in cui sono, dee moltiplicarsi per il precedente: $\int x^n dx(a+bx^m)^k = (a+bx^m)^{k+1}\left(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)} - \frac{a(1+n-m)(1)}{bx^m(1+n+m(k-1))} - \frac{a(1+n-2m)(2)}{bx^m(1+n+m(k-2))} \dots - \frac{a(1+n-\theta m)(\theta)}{bx^m(1+n+m(k-\theta))}\right) \mp \frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\dots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\dots(1+n+m(k-\theta))} \int x^{n-im} dx(a+bx^m)^k$. Il segno superiore ha luogo quando i è pari, l'inferiore quando è impari.

Dunque se $n-im=p$, cioè se $\frac{n-p}{m} = i$ numero intero e positivo, si potrà ridur l'integrale di $x^n dx(a+bx^m)^k$ a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$ per mezzo della formula precedente.

Esemp. Sia $\int x^{10}dx(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$, da ridursi a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ che dipende dalla quadratura del circolo, come vedremo. Si avrà $m=2$, $n=10$, $p=0$, $k=\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=-1$, $\frac{n-p}{m}=5=i$, $\theta=4$; dunque la riduzione è possibile e bisogna prender la formula fino al termine ove è l'*indice* (4), cioè cinque termini di essa ed altrettanti fattori nel numeratore e denominator dell'ultimo termine tra le parentesi: perciò si avrà $\int x^{10}dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ $=-\frac{x^9(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12}-\frac{9x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12.10}-\ldots$ $\frac{9.7x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8}-\frac{9.7.5x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{12.10.8.6}-\frac{9.7.5.3\,x(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}{12.10.8.6.4}$ $+\frac{9.7.5.3.1}{12.10.8.6.4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

88. Che se $\frac{n-p}{m}$ fosse un numero intero ma negativo, cioè se $p>n$, in luogo di ridurre $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, si ridurrebbe questa alla prima, e determinata $(a+\ldots bx^m)^{k+1}\left(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)}-\text{ec.}\right)=X$, e$\ldots$ $\frac{\pm a^i(1+n-m)(\text{ec.})}{b^i(1+n+mk)(\text{ec.})}=A$ (87), si avrebbe $\int x^p dx(a+bx^m)^k=X+A\int x^n dx(a+bx^m)^k$; dunque $\int x^n dx(a+bx^m)^k=-\frac{X}{A}+\frac{1}{A}\int x^p dx(a+bx^m)^k$.

Esemp. Sia $\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$ da ridur-

si a $\int dx(1+x^2)^{-1}$; si avrebbe $n=-4$, $m=2$, $p=0$ ed $\frac{n-p}{m}=-2$; riducendo dunque la seconda alla prima, si avrà $n=0$, $a=1$, $b=1$, $m=2$, $k=-1$, $p=-4$, $\frac{n-p}{m}=2=i$, $\theta=1$; onde $\int dx(1+x^2)^{-1}=-x^{-1}+\frac{x^{-3}}{3}+\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$; dunque $\int x^{-4}dx(1+\ldots x^2)^{-1}=x^{-1}-\frac{x^{-3}}{3}+\int dx(1+x^2)^{-1}$. Ora $\int dx(1+x^2)^{-1}=\int\frac{dx}{1+x^2}=$ all'arco z d'un circolo il cui raggio è 1 e la tangente è x; poichè $d(\tang z)=\frac{dz}{\cos^2 z}$ (29), e $dz=\frac{d(\tang z)}{1+\tang^2 z}=\frac{dx}{1+x^2}$ se si fa $\tang z=x$. In generale il metodo serve a ridurre $\int x^{-2k}dx(1+x^2)^{-1}$ a $\int dx(1+x^2)^{-1}$ o a un arco di circolo.

89. Sia proposto ora di ridur $\int x^n dx(a+\ldots bx^m)^p$ a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$. Poichè $d[x^{n+1}(a+bx^m)^p]=(n+1)x^n dx(a+bx^m)^p+\ldots bmpx^{m+n}dx(a+bx^m)^{p-1}$, sarà $\int x^n dx(a+bx^m)^p=\frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1}-\frac{bmp}{n+1}\int x^{m+n}\ldots dx(a+bx^m)^{p-1}$. Per la stessa ragione $\int x^{m+n}dx(a+bx^m)^{p-1}=\frac{x^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{m+n+1}-\ldots$

$$\frac{bm(p-1)}{m+n+1}\int x^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2}$$; dunque

$$\int x^n dx(a+bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a+bx^m)^p}{n+1} - \ldots$$

$$\frac{bpmx^{m+n+1}(a+bx^m)^{p-1}}{(n+1)(n+1+m)} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b^2m^2 . p(p-1)\int x^{n+2m}dx(a+bx^m)^{p-2}}{(n+1)(n+1+m)},$$ e in generale, posto $\theta = i-2$, si avrà $\int x^n dx(a+bx^m)^p = (a+bx^m)^p \times \Big(\frac{x^{n+1}}{1+n} - \frac{bmpx^m(1)}{(1+n+m)(a+bx^m)}$

$$-\frac{bm(p-1)x^m(2)}{(1+n+2m)(a+bx^m)} - \ldots - \ldots\ldots$$

$$\frac{bm(p-\theta)x^m(\theta+1)}{(1+n+m(\theta+1))(a+bx^m)}\Big) \mp \ldots$$

$$\frac{b^i m^i . p(p-1)\ldots(p-(\theta+1))}{(1+n)(1+n+m)\ldots(1+n+m(\theta+1))}\int x^{n+im}$$

$dx(a+bx^m)^{p-i}$. Il segno superiore è per il numero intero i impari, e l'inferiore per i pari. Ora se $p-i=q$, o se $p-q=i$ è numero intero, l'integrale di $x^n dx(a+bx^m)^p$ si ridurrà a... $\int x^{n+im}dx(a+bx^m)^q$, la quale potendo ridursi a $\int x^r dx(a+bx^m)^q$ quando $\frac{n+im-r}{m}$ cioè $\frac{n-r}{m}$ è un numero intero positivo, anche la formula proposta vi si potrà ridurre.

Es. Sia da ridursi $\int x^4 dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $a=1$, $b=-1$, $n=4$, $m=2$, $p=\frac{5}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, $r=0$, $p-q=i=2$, $\theta=0$ e θ

$+1=1$, cioè bisogna prender la formula fino al termine ove è l'*indice* (1), e perciò due termini di essa ed altrettanti fattori nel numeratore e denominatore dell' ultimo termine tra le parentesì; dunque

$$\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{5 \cdot 7}$$

$$+\frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 7}\int x^8dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}};$$ ma $\int x^8dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$= -\frac{x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{7x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10 . 8} - \ldots$$

$$\frac{7 \cdot 5}{10 . 8 . 6}x^3(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} +$$

$$\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4}\int dx(1-x^2)^{\frac{1}{2}};$$ dunque $\int x^4dx(1-x^2)^{\frac{5}{2}}$

$$= \frac{x^5(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^7(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{10} - \frac{3}{10 . 8}x^5(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\frac{3 \cdot 5}{10 . 8 . 6}x^3(1-xx)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4}x(1-xx)^{\frac{3}{2}} +$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 3}{10 . 8 . 6 . 4}\int dx(1-xx)^{\frac{1}{2}} + C.$$

90. Se sia $q > p$, si opererà come sopra (88) e si dedurrà in generale che il metodo serve a ridurre $\int x^{2k}dx(1+x^2)^{-m}$ a $\int dx(1+x^2)^{-1}$ o a un arco di circolo.

Dell' Integrazione dei Rotti differenziali razionali.

91. Supponghasi che $\frac{Pdx}{Q}$ sia un rotto razionale, e che il maggiore esponente di x in P sia minore almeno d' un' unità che in Q. Non essendo, si dividerà il numeratore per il denominatore finchè abbia luogo quest' ultima condizione. Sia per esem-

pio $\frac{x^4 dx}{a + bx^3}$; si avrà dividendo, $\frac{x\,dx}{b} - \frac{a\,x\,dx}{b(a + bx^3)}$ la cui seconda parte è quale l'abbiamo supposta per $\frac{P\,dx}{Q}$. Ora si cerchino i fattori di Q, e se questi son tutti del primo grado, reali, ed ineguali, il rotto proposto sarà di questa forma $\frac{a\,x^{m-1} + bx^{m-2} + \text{ec.} \ldots\ldots + \omega}{(x-f)(x-g)(x-k)\,\text{ec.}} \times dx$, supponendo che il numero de' fattori $x - f$, $x - g$ ec. sia m. Per integrare in questo caso, si decomporrà il rotto così: $\frac{A\,dx}{x-f} + \frac{B\,dx}{x-g} +$ ec. la cui integrale è $A\,l(x - f) + B\,l(x - g) +$ ec. $+ C$, e si determineranno al solito i coefficienti di A, B ec.

Es. Si dimanda l'integrale di $\frac{dx}{(a^2 - x^2)x}$: lo decompongo in $\frac{A\,dx}{x} + \frac{B\,dx}{a-x} + \frac{C\,dx}{a+x} = \frac{dx}{(a^2 - x^2)x}$, e operando al solito, trovo

$$\left.\begin{array}{l} A a^2 + B a x + B x x \\ -1 + C a - A \\ \quad\;\; - C \end{array}\right\} = 0 \text{; dunque}$$

$A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{2a^2}$, $C = -\frac{1}{2a^2}$, e $\frac{dx}{(a^2 - x^2)x} = \frac{dx}{a^2 x} + \frac{dx}{2a^2(a - x)} - \frac{dx}{2a^2(a + x)}$, la cui integrale è $\frac{lx}{a^2} - \frac{l(a-x)}{2a^2} - \frac{l(a+x)}{2a^2} + \frac{lc}{a^2} = \ldots \frac{1}{a^2}\,l\,\frac{xc}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$. Si troverà pure $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\,l\,\frac{c(a + x)}{a - x}$.

92. I fattori del denominator Q si son supposti reali ed ineguali: se alcuni fossero eguali, ed $(x - a)^m$ esprimesse un numero m di questi fattori,

il rotto si decomporrebbe in $\frac{A\,dx}{x-f} + \frac{B\,dx}{x-g} +$ ec. $+ \frac{A' x^{m-1} + B' x^{m-2} + \text{ec.} \ldots + R}{(x - a)^m}\,dx$, e determinati i coefficienti come sopra, s'integrerebbe $\frac{A' x^{m-1}}{(x-a)^m}\,dx + \frac{B' x^{m-2}}{(x-a)^m}\,dx +$ ec. o in generale $x^k\,dx\,(x - a)^{-m}$, facendo $x - a = z$.

Es. Sia da integrarsi $\frac{(x^3 + x^2 + 2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{A\,dx}{x} + \frac{(Bx + C)\,dx}{(x-1)^2} + \frac{(Dx + E)\,dx}{(x+1)^2}$, onde $A = 2$, $B = -\frac{3}{4}$, $C = \frac{7}{4}$, $D = -\frac{5}{4}$, $E = -\frac{7}{4}$; e però $\frac{(x^3 + x^2 + 2)\,dx}{x(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{2\,dx}{x} + \frac{(7 - 3x)\,dx}{4(x-1)^2} - \frac{(5x + 7)\,dx}{4(x+1)^2}$: per integrare il rotto $\frac{(7 - 3x)\,dx}{4(x-1)^2}$, faccio $x - 1 = z$, il che lo cangia in $\frac{(4 - 3z)\,dz}{4z^2} = \frac{dz}{z^2} - \frac{3\,dz}{4z}$, la cui integrale è $-\frac{1}{z} - \frac{3lz}{4} = \frac{-1}{x-1} - \frac{3\,l(x-1)}{4}$, e trattando così l'altro rotto, trovo per integrale totale, $2lx - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4}\,l(x-1) - \frac{5}{4}\,l(x+1) + C$.

93. Se vi fossero in Q dei fattori immaginarj, esprimendosi un di essi con $x + a + b\sqrt{-1}$, ve ne sarebbe un altro della forma $x + a - b\sqrt{-1}$. Dunque il loro prodotto $x^2 + 2ax + b^2 + a^2$ sarebbe un fattore reale di Q. Perciò si determinerebbe il fattor reale del secondo grado $x^2 + 2ax + a^2 + b^2$, o per brevità $x^2 + mx + n$, e poi si supporrebbe che $\frac{(Ax + B)\,dx}{x^2 + mx + n}$ fosse uno dei rot-

ti parziali di $\frac{P\,dx}{Q}$, e si avrebbe A e B come sopra. Quindi facendo $x+\frac{m}{2}=z$ ed $n-\frac{m^2}{4}=b'b'$, il rotto diventerebbe $\frac{(A'z+B')\,dz}{zz+b'b'}=\ldots$ $\frac{A'z\,dz}{zz+b'b'}+\frac{B'\,dz}{zz+b'b'}$. Ora $\int\frac{A'z\,dz}{zz+b'b'}=\frac{A'}{2}$ $l(zz+b'b')$ (31) e $\int\frac{B'\,dz}{zz+b'b'}=\frac{B'}{b'}\int\frac{\frac{dz}{b'}}{1+\frac{zz}{b'b'}}$

$=\frac{B'}{b'}\times$ *Arco di circolo la cui tangente è* $\frac{z}{b'}$ (88) $=\frac{B'}{b'}\times$ *Arco tang* $\frac{z}{b'}+C$; perciò si avrebbe l'integrale cercata.

Es. Sia $\frac{(z^2-z+1)\,dz}{(1+z)(1+zz)}=\frac{A\,dz}{1+z}+\ldots$ $\frac{(Bz+C)\,dz}{1+zz}$; si troverà $A=\frac{3}{2}$, $B=C=-\frac{1}{2}$, il che muta il rotto nel seguente $\frac{3\,dz}{2(1+z)}-\frac{z\,dz}{2(1+zz)}$ $-\frac{dz}{2(1+zz)}$ il cui integrale è $\frac{3}{2}\,l(1+z)-\frac{1}{4}$ $l(1+z^2)-\frac{1}{2}\times$ *Arco tang* $z+C$.

Sia anche $\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+xx)}$ che si riduce a $\frac{dx}{x}-\frac{(2x+3)\,dx}{(1+x)^2}+\frac{x\,dx}{1+x+xx}$. Per integrare quest' ultima quantità, faccio $x=z-\frac{1}{2}$, e diviene $\frac{z\,dz}{z^2+\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{2}\,dz}{z^2+\frac{3}{4}}$, la cui inte-

grale, fatto $B'=1$, $b'=\frac{\sqrt{3}}{2}$, sarà $\frac{1}{2}\,l(z^2+\frac{3}{4})-\frac{1}{\sqrt{3}}$ *Arc tang* $\frac{2z}{\sqrt{3}}$. Sostituendo dunque il valore di z, si trova per l'intera integrale $lx-2\,l(1+x)+\frac{1}{2}\,l(1+x+x^2)+\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{3}}$ *Arc tang* $\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+C$.

94. Infine se Q abbia uno o più fattori di questa forma $(x^2+ax+b)^m$, si supporrà che il rotto parziale provenuto da questo fattore sia . . . $dx\left(\frac{Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+\text{ec.}+R}{(x^2+ax+b)^m}\right)$ e si determineranno i coefficienti A, B ec. come sopra. Quindi facendo $x=z-\frac{a}{2}$ e sostituendo, il rotto diverrà $\frac{A'z^{2m-1}+B'z^{2m-2}+\text{ec.}+R'}{(z^2+b'b')^m}\,dz$ che può decomporsi così, $\frac{A'z^{2m-1}}{(z^2+b'b')^m}\,dz+\ldots\ldots$ $\frac{B'z^{2m-2}}{(z^2+b'b')^m}\,dz+$ ec.: ma i termini ove il numeratore ha una potenza impari sono integrabili in parte algebricamente e in parte per logaritmi (38); e quelli ove z nel numeratore ha una potenza pari essendo della forma $\frac{Mz^{2k}\,dz}{(z^2+b'b')^m}$ posson ridursi (88) a $\frac{dz}{z^2+b'b'}$, cioè posson integrarsi in parte algebricamente e in parte per archi di circolo; dunque con questo mezzo si avrà l'integrale del dato rotto.

95. Per rischiarare questi varj metodi, ecco un esempio che tutti gli comprende.

Sia il rotto $\frac{dx}{(1+x)xx(x^2+2)(x^2+1)^2}$ $= \frac{A\,dx}{1+x} + \frac{(Bx+C)dx}{x^2} + \frac{(Dx+E)dx}{x^2+2} + \frac{(Fx^3+Gx^2+Hx+I)dx}{(x^2+1)^2}$. Riducendo allo stesso denominatore, si troverà $A=\frac{1}{12}$, $B=-\frac{1}{2}$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{1}{6}$, $E=-\frac{1}{6}$, $F=\frac{1}{4}$, $G=-\frac{1}{4}$, $H=\frac{3}{4}$, $I=-\frac{3}{4}$ e il rotto proposto $=\frac{dx}{12(1+x)} + \frac{(1-x)dx}{2x^2} + \frac{(x-1)dx}{6(x^2+2)} + \frac{(x^3-x^2+3x-3)dx}{(4x^2+1)^2}$. Ora $\int\frac{dx}{12(1+x)} = \frac{1}{12} l(1+x)$ . . . . $\int\frac{(1-x)dx}{2x^2} = \frac{1}{2}\, l\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$ . . .

$\int\frac{x\,dx-dx}{6(x^2+2)} = \frac{1}{12}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}x^2+1}$ $= \frac{1}{12}\, l(x^2+2) - \frac{1}{6\sqrt{2}}$ Arc tang $\frac{x}{\sqrt{2}}$ . . . . $\int\frac{x^3\,dx}{4(x^2+1)^2} = \frac{1}{8}\, l(x^2+1) + \frac{1}{8(x^2+1)}$ (89) . . . $\int\frac{3x\,dx}{4(x^2+1)^2} = -\frac{3}{8(x^2+1)}$. Per integrare . . . . $\frac{-x^2\,dx}{4(x^2+1)^2} - \frac{3dx}{4(1+x^2)^2}$, bisogna proporsi di ridurre $\int\frac{dx}{1+x^2}$ alla prima, e si avrà (90) $\int\frac{dx}{1+x^2} =$ $\frac{x}{1+x^2} + 2\int x^2\,dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int x^2\,dx(1+x^2)^{-2} = -\frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$ *Arc tang* x: ma

riducendo la prima alla seconda (87), $\int x^2dx(1+x^2)^{-2} = -x(1+x^2)^{-1} + \int dx(1+x^2)^{-2}$; dunque $\int dx(1+x^2)^{-2} = x(1+x^2)^{-1} + \int x^2 dx(1+x^2)^{-2} = \frac{\frac{1}{2}x}{1+x^2} + \frac{1}{2}$ *Arc tang* x. Riunendo dunque tutte queste integrali, sarà . . . . .
$\int\frac{dx}{(1+x)x^2(x^2+2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{12}\, l(1+x) + \frac{1}{12}\, l(x^2+2) + \frac{1}{8}\, l(x^2+1) + \frac{1}{2}\, l\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}$ $- \frac{(x+1)}{4(1+x^2)} - \frac{1}{2}$ *Arc tang* $x - \frac{1}{6\sqrt{2}}$ *Arc tang* $\frac{x}{\sqrt{2}}$ $+ C$.

96. Dunque ogni differenziale frazionaria e razionale è integrabile o algebricamente o per logaritmi o per archi di circolo. La sola difficoltà consiste nel trovare i fattori del denominator Q: ma questo è piuttosto un difetto dell' Algebra ordinaria che del metodo d'integrazione. Se dunque un rotto differenziale potrà rendersi razionale, saremo sicuri di trovarne l'integrale. Ecco alcuni casi in cui questa riduzione è possibile.

97. Sia primieramente una quantità con soli radicali monomj, come $\left(\frac{\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+xx}{x+\sqrt[4]{x}}\right)dx$: ridotti i radicali allo stesso grado verrà . . . . $\frac{dx(\sqrt[12]{x^4}+x\sqrt[12]{x^6}+x^2)}{x+\sqrt[12]{x^3}}$, e fatto $\sqrt[12]{x}=z$, onde $x=z^{12}$, $dx=12z^{11}dz$, la differenziale diverrà razionale e però integrabile.

Sia ora X una funzione razionale di x; per trovare l'integrale di $dy = X dx \sqrt{(a + bx + \ldots cx^2)}^{\pm 1}$, cerco i due fattori di $a + bx + cx^2$ e se son reali si troverà x per la nota formula, e quindi dx, dopo di che si potrà integrare.

Sia per esempio $dy = dx\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)}$; si farà $\pm a^2 \mp x^2 = Q = \frac{(x + a)(\pm a \mp x)}{(\pm a \mp x)} = \frac{x + a}{\pm a \mp x} = z^2$, onde $x = \frac{\mp a + a z^2}{z^2 \pm 1}$, $dx = \frac{\pm 4 a z\, dz}{(z^2 \pm 1)^2}$, e $\sqrt{(\pm a^2 \mp x^2)} = \frac{2 a z}{z^2 \pm 1}$; dunque $dy = \frac{\pm 8 a^2 z^2 dz}{(z^2 \pm 1)^3}$. L'integrazione della formula col segno $+$ si ha riducendo $\int dz (z^2 + 1)^{-1}$ a $\int z^2 dz (z^2 + 1)^{-3}$ (90), il che la cangia in $\int z^4 dz (z^2 + 1)^{-3}$, onde poi riducendo questa a $\int z^2 dz (z^2 + 1)^{-3}$ (87), si trova $8 a^2 \int z^2 dz (1 + z^2)^{-3} = \frac{2 a^2 z^3}{(1 + z^2)^2} - \frac{a^2 z}{1 + z^2} + a^2 \times \mathit{arc\ tang}\, z + C$, ovvero sostituito il valor di z, $\int dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{x\sqrt{(a^2 - x^2)}}{2} + a^2 \times \mathit{arc\ tang} \sqrt{\frac{a + x}{a - x}} + C$.

L'integrazione della formula col segno $-$ si ha col solito metodo (92), che dà $\int - \frac{8 a^2 z^2 dz}{(z^2 - 1)^3} = - \frac{a^2}{2}\, l \frac{z + 1}{z - 1} + \frac{a^2 z}{2(z + 1)^2} + \frac{a^2 z}{2(z - 1)^2} + C$, ovvero sostituito il valor di z e osservando che $\frac{z + 1}{z - 1}$

$= \frac{(z + 1)^2}{z^2 - 1} = \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a}$, $\int dx \sqrt{(x^2 - a^2)} = \frac{x\sqrt{(x^2 - a^2)}}{2} - \frac{a^2}{2}\, l \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} + C$.

Sia ancora $dy = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$; fatto come prima $\frac{x + a}{x - a} = z^2$, sarà $dy = \frac{-2\, dz}{z^2 - 1}$, ed $y = l \frac{C(z + 1)}{z - 1}$ (91) $= l \frac{C}{a} [x + \sqrt{(x^2 - a^2)}]$.

98 Se i fattori di $a + bx + cx^2$ sono immaginarj, bisogna farne svanire il secondo termine supponendo $x + \frac{b}{2c} = z$, e allora $X dx \sqrt{[a + bx + cx^2)}^{\pm 1}$ diviene della forma $Z dz \sqrt{[z^2 + b' b']}^{\pm 1}$. Sia dunque $z^2 + b b' = Q$, onde fatto nella nota formula $a = 1$, $A = u$, sarà $z = \frac{u^2 - b'^2}{2u}$ e $dz = \frac{du}{2u^2}(b'b' + uu)$, dopo di che si potrà integrare.

Così se sia $dy = dx\sqrt{(x^2 + a^2)}$, avremo $x = \frac{u^2 - a^2}{2u}$, $u = x + \sqrt{(x^2 + a^2)}$, $dx = \frac{du}{2u^2}(u^2 + a^2)$, $\sqrt{(x^2 + a^2)} = \frac{u^2 + a^2}{2u}$, onde $dy = \frac{du (u^2 + a^2)^2}{4u^3} = \frac{u\, du}{4} + \frac{a^2 du}{2u} + \frac{a^4 du}{4u^3}$; dunque $y = C + \frac{u^2}{8} + \frac{a^2}{2} lu - \frac{a^4}{8u^2} = C + \frac{u^4 - a^4}{8u^2} + \frac{a^2}{2} lu$: ma $\frac{u^4 - a^4}{8u^2} = \left(\frac{u^2 - a^2}{4u}\right)\left(\frac{u^2 + a^2}{2u}\right) = \frac{x}{2}\sqrt{(x^2 + a^2)}$; dunque $y = C + \frac{x}{2}\sqrt{(x^2 + a^2)} + \frac{a^2}{2}\, l [\sqrt{(x^2 + a^2)} + x]$.

Metodi di integrar per Serie.

99. Quando una differenziale non è suscettibile d'una integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora uno degli ultimi compensi. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si avrà una serie di termini monomj, le cui integrali riunite daranno un valore approssimato di $\int X dx$. Per esempio, si sa che l'integrale di $\frac{dx}{a+x}$ è $l(a+x)$ e che $\frac{dx}{a+x} = \ldots \frac{dx}{a} - \frac{x dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} -$ ec.; dunque $\int \frac{dx}{a+x}$ ovvero $l(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ ec. $+ C$. Ma se si fa $x = 0$, sarà la costante $C = la$; dunque $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} -$ ec., e per conseguenza $l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} -$ ec. Supponghiamo $\frac{x}{a} = \frac{z}{a+z}$, ed avremo $l(a-x) = 2la - l(a+z) = la - \frac{z}{a+z} - \ldots \frac{z^2}{2(a+z)^2} -$ ec.; dunque $l(a+z) = la + \ldots \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} +$ ec., serie tanto più convergente quanto sarà z minor di a. Per esempio $l\,11 = l(10+1) = l\,10 + \frac{1}{11} + \frac{1}{2.11^2} +$ ec. $= 2,397$ ec.

Se si ha $dy = \frac{dx}{1+xx}$, allora $y =$ *Arco tang* x: ma $\frac{dx}{1+xx}$ ridotta in serie dà $dy = dx - x^2 dx +$

$x^4 dx - x^6 dx +$ ec.; dunque y ovvero *Arco tang* $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ ec.

Sia y un arco, x il suo seno, ovvero $y =$ *Arco seno* x cioè *sen* $y = x$, si avrà $dy = \ldots \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = dx(1-xx)^{-\frac{1}{2}} = dx\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \text{ec.}\right)$. Dunque y ovvero *Arco seno* $x = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5\,x^7}{2.4.6.7} +$ ec., integrale a cui non vi è costante da aggiungere. Sia $x = 1$, e la circonferenza $= \pi$, sarà $y = \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.3.1}{2.4.5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7} +$ ec. Se $x = \frac{1}{2}$, l'arco diventa $\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.3.2^3} + \frac{1.3.1}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7.2^7} +$ ec.

100. Bastino questi esempj: ma il seguente *Metodo di integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $d(xz) = xdz + zdx$, dà $xz = \int xdz + \int zdx$; dunque generalmente $\int zdx = xz - \int xdz$, e posta $z = X$ funzione qualunque di x, si avrà $dz = dx$ e $\int X dx = Xx - \int x dX$. Sia $dX = X'dx$; dunque $\int x dX = \int X' x dx$ e fatto $x dx = dz$ onde $\frac{x^2}{2} = z$, sarà $\int X' dz = X'z - \int z dX' = \frac{X'xx}{2} - \frac{\int xx dX'}{2}$. Sia $dX' = X'' dx$;

dunque $\frac{\int x^2 dX'}{2} = \frac{\int X'' x^2 dx}{2}$, e fatto $x^2 dx = dz$ onde $\frac{x^3}{3} = z$, sarà $\frac{\int X'' dz}{2} = \frac{X'' z}{2} - \frac{\int z\, dX''}{2} = \frac{x^3}{2.3} X'' - \int \frac{x^3}{2.3} dX''$, ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione, si trova $\int X dx = Xx - \frac{x^2}{2} X' + \frac{x^3}{2.3} X'' - \frac{x^4}{2.3.4} X''' + \frac{x^5}{2.3.4.5} X'''' -$ ec., ovvero supposta dx costante onde $\frac{dX}{dx} = X'$, $\frac{ddX}{dx} = dX'$, $\frac{dX'}{dx} = X'' = \frac{ddX}{dx^2}$ ec., si avrà $\int X dx = Xx - \frac{x^2 dX}{2.dx} + \frac{x^3 ddX}{2.3.dx^2} - \frac{x^4 dddX}{2.3.4.dx^3} +$ ec.

Es. Sia $X = \frac{1}{a+x}$; si avrà $\frac{dX}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2}$, $\frac{ddX}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}$, $\frac{dddX}{dx^3} = \frac{-2.3}{(a+x)^4}$, ec. Dunque $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ ec. ...... $+ C$, ovvero $l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ ec., come si è già trovato.

101. Sia ora $dy = m(a+x)^{m-1} dx$, la cui integrale è $y = (a+x)^m$; si avrà $X = m(a+x)^{m-1}$, $\frac{dX}{dx} = m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2} = m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque y, ovvero $(a+x)^m = C + mx(a+x)^{m-1} -$

$\frac{m(m-1)}{2} x^2 (a+x)^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^3 (a+x)^{m-3} -$ ec., e fatto $x = 0$, verrà $C = a^m$, ed $(a+x)^m = a^m + mx(a+x)^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 (a+x)^{m-2} +$ ec. Facendo $a+x = z$, avremo $z^m = (z-x)^m + mxz^{m-1} - \frac{m(m-1)}{2} x^2 z^{m-2} +$ ec., onde $(z-x)^m = z^m \left(1 - \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x^2}{2.z^2} -\right.$ ec.$\left.\right)$....$(z+x)^m = z^m \left(1 + \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x^2}{2.z^2}\right.$ $+$ ec.$\left.\right)$.... $\frac{(z+x)^m}{z^m} = 1 + \frac{mx}{z} + \frac{m(m-1)x}{2.z^2}$ $+$ ec...... e $\frac{(z+x)^{-m}}{z^{-m}} = \frac{z^m}{(z+x)^m} = 1 - \frac{mx}{z} + \frac{m(m+1)x^2}{2.z^2} -$ ec.; dunque se $z + x = b$, avremo $(b-x)^m = b^m \left(1 - \frac{mx}{b-x} + \frac{m(m+1)x^2}{2(b-x)^2} - \text{ec.}\right)$ e $(b+x)^m = b^m \left(1 + \frac{mx}{b+x} + \frac{m(m+1)}{2(b+x)^2} + \text{ec.}\right)$.

102. Per trovare il valor di $y = a^x$ differenzio, ed ho $dy = a^x dx\, la$ (32). Dunque $X = a^x la$, $\frac{dX}{dx} = a^x l^2 a$, $\frac{ddX}{dx^2} = a^x l^3 a$ ec., il che dà $y = a^x = C + a^x x\, la - \frac{xx\, l^2 a}{2} a^x + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} a^x -$ ec. Sia $x = 0$, si avrà $C = 1$, ed $a^x = 1 + x\, la . a^x - \frac{xx\, l^2 a}{2} a^x +$ ec.; dividendo per a^x, verrà $1 = a^{-x} + x\, la - \frac{xx\, l^2 a}{2} +$ ec. Dunque $a^{-x} = 1 - x\, la + \frac{x^2 l^2 a}{2} -$ ec.; e per conseguenza, supposta x positiva, le sue potenze impari debbono cangiar segno, il che rende la serie tutta positiva cioè $a^x = 1 +$

$x\,l\,a + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2\cdot 3} +$ ec. come si sa d'altronde.

103. Sia y un arco qualunque e x la sua tangente; avremo $dy = \frac{dx}{1+xx}$ (88); ma siccome determinando X, $\frac{dX}{dx}$ ec. la serie è troppo complicata, pongo $\frac{1}{1+x^2} = u$ onde $-\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = du$; dunque $\int\frac{dx}{1+x^2} = \int u\,dx = ux - \int x\,du = \frac{x}{1+x^2} + \int\frac{2x^2dx}{(1+x^2)^2}$. Pongo $\frac{1}{(1+x^2)^2} = u$ onde $-\frac{4x\,dx}{(1+x^2)^3} = du$, e fatto $2x^2dx = dz$ onde $\frac{2x^3}{3} = z$, sarà $\int\frac{2x^2dx}{(1+x^4)^2} = \int u\,dz = uz - \int z\,du = \frac{2x^3}{3(1+x^2)^2} + \int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3}$. Pongo $\frac{1}{3(1+x^2)^3}$ $= u$ onde $\frac{-6x\,dx}{3(1+x^2)^4} = du$, e fatto $2.4\,x^4dx = dz$ onde $\frac{2.4x^5}{5} = z$, sarà $\int\frac{2.4x^4dx}{3(1+x^2)^3} = \int u\,dz = uz - \int z\,du = \frac{2.4x^5}{3.5(1+x^2)^3} + \int\frac{2.4.6x^6dx}{3.5(1+x^2)}$ ec. Dunque *Arco tang* $x = y = \frac{x}{1+xx} + \frac{2.x^3}{3(1+xx)^2} + \frac{2.4.x^5}{3.5(1+xx)^3} + \frac{2.4.6\,x^7}{3.5.7(1+xx)^4} +$ ec. Dunque in generale poichè $x = tang\,y = \frac{sen\,y}{cos\,y}$, sostituendo e riducendo, si ha $y = cos\,y\,(sen\,y + \frac{2}{3}sen^3y + \frac{2.4}{3.5}sen^5y + \frac{2.4.6}{3.5.7}sen^7y +$ ec.$) = \frac{sen\,2y}{2}(1 + \frac{2}{3}sen^2y + \frac{2.4}{3.5}sen^4y + \frac{2.4.6}{3.5.7}sen^6y$

$+$ ec.). Se $y = 45^\circ$, sarà la circonferenza $\pi = 4(1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{1.3.5} + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} +$ ec.).

Dell' Integrazione delle Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali.

104. Per integrar la differenziale logaritmica $X\,dx\,lx$, supponendo X una funzione di x, sia $y = lx$, e $dz = X\,dx$: si avrà $\int X\,dx\,lx = \ldots$ $\int y\,dz = yz - \int z\,dy = lx\int X\,dx - \int\frac{z\,dx}{x}$; dunque l'integrale della quantità proposta si riduce a quella di $X\,dx$ e di $\frac{dx}{x}\int X\,dx$. Si potrà dunque trovarla colle regole precedenti se $\int X\,dx$ non contiene alcuna transcendente, come logaritmi, archi di circolo ec.

Esempj. Sia $X = x^n$; si avrà $\int X\,dx = z = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, e $\int\frac{z\,dx}{x} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$; dunque $\int x^n dx.\,lx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right)$, integrale che non è soggetta ad eccezione fuorche nel caso di $n = -1$: ma allora si ha $\int\frac{dx}{x}lx = \int lx\,dlx = \frac{1}{2}l^2x$ (31).

Sia ancora $X = \frac{1}{(1-x)^2}$; si avrà $\int X\,dx = \ldots$ $\frac{1}{1-x} = z$, $\int\frac{z\,dx}{x} = \int\frac{dx}{x(1-x)} = lx - l(1-x)$

(91). Dunque $\int \frac{dx\, lx}{(1-x)^2} = \frac{lx}{1-x} - lx + l(1-x) = \frac{x\, lx}{1-x} + l(1-x)$.

105. Per integrare $dX l^n x$ si farà come prima (104) $\int dX l^n x = X l^n x - n \int \frac{X dx}{x} l^{n-1} x$; quindi ponendo $\frac{X dx}{x} = dX'$, si ha $\int dX' l^{n-1} x = X' l^{n-1} x - (n-1) \int \frac{X' dx}{x} l^{n-2} x$, e fatto ... $\frac{X' dx}{x} = dX''$, verrà $\int dX'' l^{n-2} x = X'' l^{n-2} x - (n-2) \int \frac{X'' dx}{x} l^{n-3} x$ ec. Dunque $\int dX l^n x = X l^n x - n X' l^{n-1} x + n(n-1) X'' l^{n-2} x - n(n-1)(n-2) X''' l^{n-3} x +$ ec., espressione che dipende solo dall'integrazione di quantità algebriche e che avrà un numero finito di termini se n sarà intero e positivo.

Sia per esempio $dX = x^m dx$; sarà $X = \ldots \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int \frac{X dx}{x} = X' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}$, $\int \frac{X' dx}{x} = X'' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}$, $X''' = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^4}$ ec. Dunque $\int x^m dx\, l^n x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l^{n-2} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l^{n-3} x + \text{ec.} \right)$. Il solo caso che sfugge alla regola generale è quello in cui $m = -1$ e allora si ha $\int \frac{dx}{x} l^n x = \frac{l^{n+1} x}{n+1} + C$ (42).

106. Questa formula si applica egualmente ad n negativa; ma avendosi allora per integrale una serie infinita, ecco un altro mezzo d'integrare. Sia

la quantità $\frac{X dx}{(lx)^n}$ che riduco alla forma $Xx \cdot \frac{dx}{x(lx)^n}$; fatto $lx = u$, sarà $l^n x = u^n$ e $\frac{dx}{x} = du$, onde ...

$$\int \frac{dx}{x l^n x} = \int u^{-n} du = \frac{u^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1) l^{n-1} x}$$

$= z$, e posto $Xx = y$, si avrà $\int Xx \cdot \frac{dx}{x l^n x} =$

$$\int \frac{X dx}{l^n x} = \int y\, dz = yz - \int z\, dy = \frac{-Xx}{(n-1) l^{n-1} x}$$

$+ \frac{1}{n-1} \int \frac{d(Xx)}{l^{n-1} x}$. Se ora sia $d(Xx) = X' dx$, $d(X'x) = X'' dx$, $d(X''x) = X''' dx$ ec., avremo ponendo $n-1 = m$, $\int \frac{d(Xx)}{l^{n-1} x} = \int \frac{X' dx}{l^m x}$, formula simile alla prima e che si integra perciò nel modo stesso: dunque $\int \frac{X dx}{(lx)^n} = \frac{-Xx}{(n-1) l^{n-1} x}$

$$- \frac{X' x}{(n-1)(n-2) l^{n-2} x} - \frac{X'' x}{(n-1)(n-2)(n-3) l^{n-3} x}$$

$-$ ec. fino a un termine della forma . . . . . $\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 2 \cdot 1} \int \frac{X dx}{lx}$, la cui integrazione, se è possibile, darà quella della formula proposta.

Sia per esempio $X = x^m$; avremo $d(Xx) = X' dx = d(x^{m+1}) = (m+1) x^m dx$, onde $X' =$

$(m+1)x^m$, $X^{II} = (m+1)^2 x^m$, $X^{III} = (m+1)^3 x^m$ ec.; dunque $\int \frac{x^m dx}{l^n x} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)l^{n-1} x} \Big(lx + \frac{m+1}{n-2} l^2 x + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)} l^3 x + \frac{(m+1)^3}{(n-2)(n-3)(n-4)} l^4 x + \text{ec.} \Big) + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1} \int \frac{x^m dx}{lx}$, onde la proposta integrale si riduce a quella di $\frac{x^m dx}{lx}$. Ora fatto $x^{m+1} = u$, sarà $\frac{x^m dx}{lx} = \frac{du}{lu}$, differenziale che si integra sol per le serie, come vedremo, fuorchè nel caso di $m = -1$; poichè allora $\int \frac{dx}{x\, l^n x} = \frac{1}{1-n} \times l^{1-n} x$.

107. Debba ora integrarsi la formula esponenziale $a^x X dx$. Osservo che $a^x dx\, la = d(a^x)$ (32), onde fatto $a^x dx = dz = \frac{d(a^x)}{la}$, sarà $z = \frac{a^x}{la}$ e perciò $\int a^x X dx = \int X dz = zX - \int z dX = \ldots \frac{a^x X}{la} - \frac{1}{la}\int a^x dX$. Sia $dX = X' dx$, si avrà $\int a^x dX = \int a^x X' dx = \int X' dz = X'z - \int z dX' = \frac{a^x X'}{la} - \frac{1}{la}\int a^x dX'$ ec.; dunque $\int a^x X dx = \frac{a^x}{la}\Big(X - \frac{X'}{la} + \frac{X^{II}}{l^2 a} - \ldots \pm \frac{X^{II\ldots n}}{l^n a} \Big) \mp \ldots \frac{1}{l^{n+1} a} \int a^x X^{II\ldots n+1} dx$ che sarà almeno la più semplice delle integrali trascendenti della sua specie, se non è suscettibile d' un' integrazione esatta. Se la formula fosse $a^{mx} X dx$, fatta $a^m = b$, si troverebbe egualmente $\int a^{mx} X dx = \frac{a^{mx}}{mla}\Big(X - \frac{X'}{mla} \text{ ec.}\Big)$ ec.

108. Se e è il numero il cui logaritmo $= 1$, si ha $\int e^x X dx = e^x (X - X' + X^{II} - X^{III} + X^{IIII} - \text{ec.})$. Sia per esempio $X = x^n$; sarà $X' = nx^{n-1}$, $X^{II} = n(n-1)x^{n-2}$, $X^{III} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ ec.; dunque $\int e^x x^n dx = e^x (x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{ec.})$. E così si avrebbe $\int e^{mx} x^n dx = e^{mx}\Big(\frac{x^n}{m} - \ldots \frac{nx^{n-1}}{m^2} + \text{ec.}\Big)$.

109. Per trovar $\int \frac{a^x dx}{x}$, poichè le date regole divengono inutili, riduco in serie ed ho (102) $\frac{a^x dx}{x} = \frac{dx}{x} + dx\, la + \frac{x\, dx}{2} l^2 a + \text{ec.}$; dunque $\int \frac{a^x dx}{x} = C + lx + x\, la + \frac{x^2 l^2 a}{2 \cdot 2} + \frac{x^3 l^3 a}{3 \cdot 2 \cdot 3} +$ ec., e $\int \frac{e^x dx}{x} = C + lx + x + \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 3} +$ ec. Sia $e^x = z$, si avrà $\frac{e^x dx}{x} = \frac{dz}{lz}$, differenziale di una quantità trascendente che sarà eguale alla serie infinita $C + llz + lz + \frac{l^2 z}{2 \cdot 2} + \frac{l^3 z}{3 \cdot 2 \cdot 3} +$ ec.: e poichè $\int \frac{dz}{zlz} = llz$ (42) $= y$, sarà $\int \frac{dz}{lz} = \int z \cdot \frac{dz}{zlz} = \int z dy = zy - \int y dz = zllz - \int llz dz$, e però $\int llz dz = zllz - \int \frac{dz}{lz}$, integrale che pur dipende dalla quantità trascendente $\int \frac{dz}{lz}$.

110. Quando le precedenti regole non abbian luogo, la quantità esponenziale si ridurrà in serie per la formula $a^x = 1 + x\,l\,a +$ ec. (104) e sarà facile d'integrare. Sia $dy = x^{mx}\,dx$; si avrà per le serie, $dy = dx\left(1 + m\,x\,l\,x + \frac{m^2x^2l^2x}{2} + \frac{m^3x^3l^3x}{2\,.\,3} + \text{ec.}\right) = dx + m\,x\,dx\,l\,x + \frac{m^2}{2}x^2dx\,l^2x +$ ec., la cui integrale si trova per mezzo di quella di $x^m\,dx\,l^n x$ (105) e si ha $\int x^{mx}dx = x\left(1 - \frac{mx}{2^2} + \frac{m^2x^2}{3^3} - \frac{m^3x^3}{4^4} + \text{ec.}\right) + m\,x^2\,l\,x\left(\frac{1}{2} - \frac{mx}{3^2} + \frac{m^2x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{m^2x^3l^2x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{mx}{4^2} + \frac{m^2x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) +$ ec. che nel caso particolare di $x = 1$, si riduce alla serie convergente $1 - \frac{m}{2^2} + \frac{m^2}{3^3} - \frac{m^3}{4^4}$ + ec.

Dell' Integrazione delle Quantità differenziali ove entrano Seni, Coseni ec.

111. Poichè $dx\cos x = d\,\mathrm{sen}\,x$, e $-dx\,\mathrm{sen}\,x = d\cos x$ (28), è chiaro che $\int dx\cos x = \mathrm{sen}\,x$ e che $\int dx\,\mathrm{sen}\,x = -\cos x$; che $\int dy\cos ny = \frac{\mathrm{sen}\,ny}{n}$ e che $\int dy\,\mathrm{sen}\,ny = -\frac{\cos ny}{n}$ (28); che $\int dz\cos z\,\mathrm{sen}^n z = \frac{\mathrm{sen}^{n+1}z}{n+1}$, e che $\int dz\,\mathrm{sen}\,z \times$

$\cos^n z = -\frac{\cos^{n+1}z}{n+1}$ (28). Similmente se si dovesse integrare $dy\,\mathrm{sen}\,y\cos ay$, si farebbe $\mathrm{sen}\,y\cos ay = \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(a+1)y - \frac{1}{2}\mathrm{sen}\,(a-1)y$, e l'integrale diventerebbe $-\frac{\cos(a+1)y}{2(a+1)} + \frac{\cos(a-1)y}{2(a-1)}$.

112. Sarebbe lo stesso per $dx\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,ax$, $dx\cos x\cos ax$ ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}\,ax\cos bx$ ec. riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici per mezzo dei valori di $\mathrm{sen}\,a\cos b$, $\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b$ ec. Si potrebbe dunque far uso di questo metodo per integrare $dx\,\mathrm{sen}^2x$, $dx\,\mathrm{sen}^3x$, $dx\cos^2x$ ec.: ma riesce più semplice l'integrarli nel modo che segue.

113. Poichè $dx\,\mathrm{sen}^n x = dx\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{sen}^{n-1}x$ e $\int dx\,\mathrm{sen}\,x = -\cos x = z$, fatto $\mathrm{sen}^{n-1}x = y$, sarà $\int dx\,\mathrm{sen}^n x = \int y\,dz = zy - \int z\,dy = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int dx\,\mathrm{sen}^{n-2}x\cos^2x = -\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x + (n-1)\int dx\,\mathrm{sen}^{n-2}x - (n-1)\int dx\,\mathrm{sen}^n x$; e trasponendo, $\int dx\,\mathrm{sen}^n x = -\frac{\cos x\,\mathrm{sen}^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int dx\,\mathrm{sen}^{n-2}x$: dunque anche $\int dx\,\mathrm{sen}^{n-2}x = -\frac{\cos x\,\mathrm{sen}^{n-3}x}{n-2} + \frac{n-3}{n-2}\int dx\,\mathrm{sen}^{n-4}x$; onde in generale $\int dx\,\mathrm{sen}^n x = -\frac{\cos x}{n}\left(\mathrm{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\mathrm{sen}^{n-3}x + \ldots\right.$

$\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} sen^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} \times sen^{n-7} x +$ ec. $\ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 2}{(n-2)(n-4)\ldots\ldots 1} \Big)$, formula che ha luogo solamente nel caso in cui n è impari, nel quale l' integrale non dipende da altro che dalle quantità $cos\, x$, $sen\, x$. Ma quando è pari, l' integrale sarà $-\frac{cos\, x}{n}\Big(sen^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} sen^{n-3} x +$ ec. $\Big) \ldots + \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots 1}{2\,.\,4\ldots n} x$, cioè conterrà l' arco o quantità trascendente x. Per esempio, $\int dx\, sen^5 x = C - \frac{cos\, x}{5}\Big(sen^4 x + \ldots \frac{4\, sen^2 x}{3} + \frac{4\,.\,2}{3} \Big)$; e $\int dx\, sen^6 x = C - \frac{cos\, x}{6}\big(sen^5 x + \frac{5}{4} sen^3 x + \frac{5\,.\,3}{4\,.\,2} sen\, x \big) + \frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2} x$.

114. Facciasi $x = 90^\circ - z$; avremo $dx = -dz$, $sen\, x = cos\, z$, $cos\, x = sen\, z$, e $\int dz\, cos^n z = \frac{sen\, z}{n}\Big(cos^{n-1} z + \frac{n-1}{n-2} cos^{n-3} z + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \times cos^{n-5} z + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)} cos^{n-7} z + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2}{(n-2)(n-4)\ldots 1} \Big)$ se n è impari; e se è pari, l'ultimo termine $= + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2} z$.

Per esempio, $\int dy\, cos^5 y = C + \frac{sen\, y}{5}\Big(cos^4 y + \frac{4}{3} cos^2 y + \frac{4\,.\,2}{3\,.\,1} \Big)$; e $\int dy\, cos^6 y = C + \frac{sen\, y}{6}\Big(cos^5 y + \frac{5}{4} cos^3 y + \frac{5\,.\,3}{4\,.\,2} cos\, y \Big) + \frac{5\,.\,3\,.\,1}{6\,.\,4\,.\,2} y$.

115. Sia ora da integrarsi $dy\, sen^m y\, cos^n y$; poichè $d(sen^p y\, cos^q y) = p\, cos^{q+1} y\, sen^{p-1} y\, dy - q\, cos^{q-1} y\, sen^{p+1} y\, dy$ (28), sarà $\int dy\, sen^{p-1} y\, cos^{q+1} y = \frac{1}{p} sen^p y\, cos^q y + \frac{q}{p} \int dy\, cos^{q-1} y\, sen^{p+1} y$: dunque fatto $p - 1 = m$, $q + 1 = n$, verrà $\int dy\, sen^m y\, cos^n y = \frac{sen^{m+1} y\, cos^{n-1} y}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int dy\, cos^{n-2} y\, sen^{m+2} y$; sostituendo $1 - cos^2 y$ in vece di $sen^2 y$ e trasponendo, si ha $\int dy\, sen^m y\, cos^n y = \ldots\ldots \frac{sen^{m+1} y\, cos^{n-1} y}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int dy\, sen^m y\, cos^{n-2} y = C + \frac{sen^{m+1} y}{m+n}\Big(cos^{n-1} y + (n-1) \frac{cos^{n-3} y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\, cos^{n-5} y}{(m+n-2)(m+n-4)} +$ ec. $\ldots\ldots + \ldots\ldots \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(m+n-2)\ldots m+1} \Big)$ se n è impari, o fino all'ultimo termine $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2} \int dy\, sen^m y$, se n è pari.

116. Facciasi $y = 90^\circ - z$; avremo $\int dz\, cos^m z\, sen^n z = C - \frac{cos^{m+1} z}{m+n}\Big(sen^{n-1} z + \frac{(n-1)\, sen^{n-3} z}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3)\, sen^{n-5} z}{(m+n-2)(m+n-4)} +$ ec. $\ldots\ldots + \ldots\ldots \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{(m+n-2)\ldots m+1} \Big)$ se n è impari, e fino al termine $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1\,.\int dz\, cos^m z}{(m+n)(m+n-2)\ldots m+2}$, se è pari.

Per esempio, la prima formula dà $\int dy \cos^3 y \; sen^5 y = C + \frac{1}{8} sen^6 y \left(\cos^2 y + \frac{1}{3} \right) = C + \frac{1}{8} sen^6 y \left(\frac{4}{3} - sen^2 y \right)$, e la seconda $\int dy \cos^3 y \; sen^5 y = C - \frac{1}{8} \cos^4 y \left(sen^4 y + \frac{2}{3} sen^2 y + \frac{1}{3} \right)$. Bisogna dunque che o questi due risultati siano eguali, o differiscan solo d'una quantità costante, che nel caso nostro è $\frac{1}{24}$, riducendo tutto in seni, osservando che $\cos^4 = (1 - sen^2)^2$ e paragonando i due risultati.

117. Consideriamo ora i rotti nei quali entrano seni ec., e cominciamo dai più semplici $\frac{dy}{sen\, y}$, $\frac{dy}{\cos y}$, $\frac{dy \cos y}{sen\, y}$, $\frac{dy\, sen\, y}{\cos y}$, $\frac{dy}{sen\, y \cos y}$.

Il primo $\frac{dy}{sen\, y} = \frac{dy\, sen\, y}{sen^2 y} = \frac{-d \cos y}{1 - \cos^2 y} = (91)$ $-\frac{\frac{1}{2} d \cos y}{1 + \cos y} - \frac{\frac{1}{2} d \cos y}{1 - \cos y}$; dunque $\int \frac{dy}{sen\, y} = \frac{1}{2} l \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} = \frac{1}{2} l\, tang^2 \frac{1}{2} y = l\, tang \frac{1}{2} y$. Fatto $y = 90^\circ - z$, avremo $dy = -dz$, $sen.\, y = \cos z$; dunque il secondo $\int \frac{dz}{\cos z} = -l\, tang \left(45^\circ - \frac{z}{2} \right) = -l \cot \left(45^\circ + \frac{z}{2} \right) = l\, tang \left(45^\circ + \frac{z}{2} \right)$. Il terzo $\int \frac{dy \cos y}{sen\, y} = \int \frac{d(sen\, y)}{sen\, y} = l\, sen\, y = \int dy \cot y$. Il quarto $\int \frac{dy\, sen\, y}{\cos y} = \int \frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -l \cos y = l \sec y = \int dy\, tang\, y$. Il quinto $\int \frac{dy}{sen\, y \cos y} =$

$\int \frac{dy}{\cos^2 y \frac{sen\, y}{\cos y}} = \int \frac{dy}{\cos^2 y\; tang\, y} = l\, tang\, y$.

118. Posto ciò, cerchiamo $\int \frac{dy}{sen^m y}$. Poichè (113) $\int dy\; sen^n y = -\frac{\cos y\; sen^{n-1} y}{n} + \frac{n-1}{n} \times \int dy\; sen^{n-2} y$, facciamo $n - 2 = -m$ ovvero $n = 2 - m$, ed avremo $\int \frac{dy}{sen^{m-2} y} = \frac{\cos y\; sen^{1-m} y}{m-2} + \frac{1-m}{2-m} \int \frac{dy}{sen^m y}$; dunque $\int \frac{dy}{sen^m y} = -\frac{\cos y}{(m-1)\, sen^{m-1} y} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{dy}{sen^{m-2} y} = -\frac{\cos y}{m-1} \left(\frac{1}{sen^{m-1} y} + \frac{m-2}{(m-3)\, sen^{m-3} y} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5)\, sen^{m-5} y} + \text{ec.} \right)$ fino al termine $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} \int \frac{dy}{sen\, y} = \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} l\, tang \frac{1}{2} y$ se m è impari, e fino a $\frac{(m-2)(m-4) \ldots 2 \cos y}{(m-1)(m-3) \ldots 1\, sen\, y}$ se m è pari.

119. Suppongasi $y = 90^\circ - z$, e la formula precedente darà $\int \frac{dz}{\cos^m z} = \frac{sen\, z}{m-1} \left(\frac{1}{\cos^{m-1} z} + \frac{m-2}{(m-3) \cos^{m-3} z} + \frac{(m-2)(m-4)}{(m-3)(m-5) \cos^{m-5} z} + \text{ec.} \right)$ fino al termine $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 2}{(m-1)(m-3) \ldots 1} \frac{sen\, z}{\cos z}$ se m è pari, e fino al termine $+ \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} \int \frac{dz}{\cos z} = \frac{(m-2)(m-4) \ldots 1}{(m-1)(m-3) \ldots 2} l\, tang \left(45^\circ + \frac{z}{2} \right)$ se m è impari. Per esempio $\int \frac{dy}{\cos^7 y} = \frac{sen\, y}{6} \left(\frac{1}{\cos^6 y} + \frac{5}{4 \cos^4 y} + \frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2 \cdot \cos^2 y} \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} l\, tang \left(45^\circ + \frac{y}{2} \right)$.

120. E' dunque facile integrar la formula $\frac{dy\cos^m y}{sen^n y}$; poichè se m è un numero impari $2k+1$, si ha $\frac{dy\cos^{2k+1} y}{sen^n y} = \frac{d(sen\,y)}{sen^n y}(1-sen^2 y)^k$ che fatto $sen\,y = z$, diventa $z^{-n}dz(1-z^2)^k$ integrabile, giacchè quì k è numero intero e positivo (88). Se m è un numero pari $2k$, allora $\frac{dy\cos^{2k} y}{sen^n y} = \frac{dy(1-sen^2 y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s'integrerà per mezzo della formula $\int\frac{dy}{sen^m y}$ (118).

Lo stesso sarebbe per $\int\frac{dy\,sen^m y}{cos^n y}$ e $\int\frac{dy}{sen^m y\,cos^n y}$; onde è facile d'integrar le differenziali ove entran seni e coseni, quando esse son suscettibili d'integrazione.

Dell' Integrazione delle Differenziali a più Variabili.

121. Se T sia una funzione di più variabili x, y, z ec., le differenze d^xT di T per x, d^yT di T per y, d^zT di T per z ec., le quali si hanno facendo variar solamente o x o y o z ec., si chiamano *differenze parziali* di T: ed all'incontro le somme $\int^x T\,dx$, $\int^y T\,dy$, $\int^z T\,dz$ ec. che si hanno integrando per x o per y o per z ec., cioè considerando come variabile la sola x, la sola y, la sola z ec., posson dirsi *somme parziali* di T. Tale è la notazione che adottiamo per le differenze parziali; ella ci sembra più espressiva e meno equivoca di quante ne sono in uso tra gli Scrittori, i più dei quali indicano con $\frac{dT}{dx}dx$, $\frac{dT}{dy}dy$, $\frac{dT}{dz}dz$

ec. ciò che noi intendiamo per d^xT, d^yT, d^zT ec. Si osservi intanto, come per principio fondamentale di simili differenze, che supposto $T=\varphi(x,y)$ (1), sarà $d^xT=\varphi(x+dx,y)-T$ (6) e $d^yd^xT = \varphi(x+dx,y+dy)-d^yT-d^xT$: parimente $d^yT=\varphi(x,y+dy)-T$ e $d^xd^yT=\varphi(x+dx,y+dy)-d^xT-d^yT$; dunque $d^yd^xT=d^xd^yT$.

122. Data pertanto una differenziale $Pdx+Qdy$ a due variabili in cui P, Q son funzioni di x, y, se T ne sia l'integrale, avremo $dT=Pdx+Qdy$; dunque supponendosi x, y indipendenti l'una dall'altra, si potranno formar le particolari equazioni $d^xT=Pdx$, $d^yT=Qdy$: e poichè $d^yd^xT=dx\,d^yP$, $d^xd^yT=dy\,d^xQ$ e $d^yd^xT=d^xd^yT$ (121), sarà $dx\,d^yP=dy\,d^xQ$ e $\frac{d^yP}{dy}=\frac{d^xQ}{dx}$, cioè *una differenziale* P dx + Q dy *sarà* esatta *o potrà integrarsi se la differenza parziale di* P *per* y *divisa per* d y *eguagli quella di* Q *per* x *divisa per* d x.

Dunque 1°. giacchè $d^xT=Pdx$, $d^yT=Qdy$, sarà $d^xT+d^yT=Pdx+Qdy=dT$, e in generale da V, funzione di x, y, si ha sempre $d^xV+d^yV=dV$: 2°. se varj la sola x e poi la sola y, sarà I°. $T=\int^x Pdx+C$, II°. $T=\int^y Qdy+C'$ e potrà esser $C=\varphi(y)$, $C'=\varphi(x)$: 3°. le due espressioni $\int^x Pdx$, $\int^y Qdy$ avranno co-

muni tutti i termini ove si trova xy; onde i termini *non comuni* in quelle espressioni conterranno x senza y in $\int^x P\,dx$, ed y senza x in $\int^y Q\,dy$ (13): 4°. poichè dalla I. equazione si ha $d^y T (= Q\,dy) = d^y \int^x P\,dx + dy\,\varphi'(y)$ (33), dalla II. $d^x T (= P\,dx) = d^x \int^y Q\,dy + dx\,\varphi'(x)$, sarà (42) $\varphi(y) = \int (Q\,dy - d^y \int^x P\,dx)$, $\varphi(x) = \int (P\,dx - d^x \int^y Q\,dy)$, e perciò III. $T = \int^x P\,dx + \int (Q\,dy - d^y \int^x P\,dx)$, IV. $T = \int^y Q\,dy + \int (P\,dx - d^x \int^y Q\,dy)$.

123. Per render più comode queste integrali, chiamo S i termini *comuni* o simili, e D, D' i *non comuni* o dissimili in $\int^x P\,dx$, $\int^y Q\,dy$ (122. 3°.); onde $\int^x P\,dx = S + D$, $\int^y Q\,dy = S + D'$. Sostituiti questi valori nella somma della III. e IV. equazione, verrà $2T = D + D' + 2S + \int (P\,dx + Q\,dy) - \int (d^y D + d^y S + d^x D' + d^x S)$: ma . . . $\int (P\,dx + Q\,dy) = T$, $d^y S + d^x S = dS$ (122. 1°.), $d^y D = 0$, $d^x D' = 0$ (122. 3°.); dunque $T = D + D' + S$, cioè *l'integrale d' una differenziale esatta* P dx + Q dy *si ha dalle somme parziali di* P dx *per* x *e di* Q dy *per* y, *presi una sola volta i termini simili*. Così giacchè la differenziale $(3x^2 + 2bxy - 3y^2)\,dx + (bx^2 - 6xy + 3cy^2)\,dy$ è esatta

trovandosi $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dy} = 2bx - 6y$, integro $3x^2dx + 2byx\,dx - 3y^2dx$ per x e viene $x^3 + byx^2 - 3xy^2$; integro $bx^2dy - 6xy\,dy + 3cy^2dy$ per y ed ho $bx^2y - 3xy^2 + cy^3$: onde $T = D + D' + S = x^3 + byx^2 - 3y^2x + cy^3 + C$. Ma poichè talora è necessaria qualche sostituzione per giungere all' integrale d' una differenziale esatta, ne porremo quì varj esempj.

I. $\int \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$: fatto $\frac{y}{x} = z$, si ha . . . . $\int \frac{x^2\,dz}{(x - zx)^2} = \int \frac{dz}{(1-z)^2}$.

II. $\int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$: fatto $\frac{x}{y} = z$ onde $x^2 + y^2 = y^2(z^2+1)$, si ha $\int \frac{dz}{z^2+1}$.

III. $\int \frac{3x\,dx + y\,dx - x\,dy - 3y\,dy + 2dy\sqrt{a}\sqrt{(x+y)}}{2\sqrt{(x+y)}}$: fatto $\sqrt{(x+y)} = z$, si ha $\int [(2z - \sqrt{a})\,dx + (2x - 3z^2 + 2z\sqrt{a})\,dz]$.

IV. $\int \frac{(a+y)\,3\,dx + x\,dy\,lx + 9(a+y)\,x\,dy}{3x\sqrt[3]{(a+y)^2}}$: fatto $\sqrt[3]{(a+y)} = z$, si ha $\int (\frac{z\,dx}{x} + dz\,lx + 9z^3dz)$.

V. $\int \frac{-(5xy + 6y^2)\,dx - (5xy + 6x^2)\,dy}{2x^4y^4\sqrt{(x+y)}}$: fatto I. $xy = p$, II. $x + y = z^2$, onde III. $x\,dy + y\,dx = dp$, IV. $dx + dy = 2z\,dz$, moltiplico la I. per la IV. e la II. per la III. ed ho $xy\,dx + xy\,dy = 2pz\,dz$, ed $x^2dy + xy\,dx + xy\,dy + y^2dx = z^2dp$; dunque $5xy\,dx + 5xy\,dy = 10pz\,dz$ e $6x^2dy + 6y^2dx = 6z^2dp - 6xy\,dx - 6xy\,dy = 6z^2dp - 12pz\,dz$; dunque sommando queste due equazioni, $-(5xy+6y^2)dx-(5xy+6x^2)dy = 2pz\,dz - 6z^2dp$, e la data integrale diviene $\int \frac{p\,dz - 3z\,dp}{p^4}$.

VI. $\int \frac{x\,dy + y^3\,dx}{(x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2-\frac{x^2y^2}{a^2})}}$: fatto I. $xy=p$, II. $x^2+y^2=z^2$, onde III. $x\,dy+y\,dx=dp$, IV. $x\,dx+y\,dy=z\,dz$, moltiplico come sopra ed ho $x^2y\,dx + xy^2dy = pz\,dz$, ed $x^3dy + yx^2dx + xy^2dy + y^3dx = z^2dp$; dunque sottraendo queste due equazioni, $x^3dy+y^3dx = z(z\,dp - p\,dz)$, e la data integrale diviene $\int\frac{z(z\,dp-p\,dz)}{z^2\sqrt{(z^2-\frac{p^2}{a^2})}}$, ove fatto $\frac{p}{z}=u$, si ha . . . . $\int\frac{a\,du}{\sqrt{(a^2-u^2)}}$.

VII. $\int\frac{(2x^2y-y^3)dx+(x^3-2xy^2)dy}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$: fatto I. $xy=p$, II. $x^2-y^2=z^2$, onde III. $x\,dy+y\,dx=dp$, IV. $x\,dx-y\,dy=z\,dz$, moltiplico al solito ed ho $yx^2dx - xy^2dy = pz\,dz$, ed $x^3dy+yx^2dx-xy^2dy-y^3dx=z^2dp$; dunque sommando queste due equazioni, la data diviene $\int(p\,dz+z\,dp)$.

124. Data una differenziale a tre variabili $Pdx+Qdy+Rdz$, e chiamata la sua integrale T, sarà $d^xT=Pdx$, $d^yT=Qdy$, $d^zT=Rdz$; dunque (122) perchè la differenziale sia completa o possa integrarsi, bisogna che sia $\frac{d^yP}{dy}=\frac{d^xQ}{dx}$, $\frac{d^zP}{dz}=\frac{d^xR}{dx}$, $\frac{d^zQ}{dz}=\frac{d^yR}{dy}$.

125. Avverandosi queste condizioni, *l'integrale $T=D+D'+D''+S$ si otterrà integrando* Pdx *per* x, Qdy *per* y, Rdz *per* z, *presi tutti i termini diversi e una sola volta i simili* (123). Così poichè in $(2y^2x + 4bz^2x^3)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{(y^2+z^2)}} + 3y^2 + 2x^2y\right)dy + \left(4z^3 + 2bx^4z + \ldots \frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)dz$ si avverano le tre condizioni, viene $\int^x Pdx = y^2x^2 + bz^2x^4$, $\int^y Qdy = \sqrt{(y^2+z^2)} + y^3 + x^2y^2$, $\int^z Rdz = z^4 + bx^4z^2 + \sqrt{(y^2+z^2)}$; onde $T=D+D'+D''+S = y^2x^2+bz^2x^4+\sqrt{(y^2+z^2)}+y^3+z^4+C$. Ora non è difficile di trovar le condizioni che debbono aver le differenziali di un più gran numero di variabili, e d'integrare quando esse hanno luogo.

126. Posto ciò, vediamo come si integrano le differenze seconde. Supposta P una funzione di x, differenzio Pdx ed ho $Pddx + dx\,dP$; e poichè P è funzione di x, fatto $dP=Qdx$, verrà $Pddx+Qdx^2$. Dunque $dP=Qdx$ è la condizione necessaria perchè una differenziale del second' ordine $Pddx+Qdx^2$ sia integrabile: se la condizione ha luogo, verrà $\int(Pddx+Qdx^2)=Pdx$. Così $mx^{m-1}ddx + m(m-1)x^{m-2}dx^2$ è integrabile, poichè $dP=m(m-1)x^{m-2}dx = Qdx$, e l'integrale è $mx^{m-1}dx$, che nuovamente integrata dà x^m+C.

127. Se dx è stata supposta costante, la differenziale è Qdx^2; ora poichè dx è costante, si avrà $\int Qdx^2 = dx\int Qdx +$ la costante Cdx.

Per esempio $\int dx^2(1-x^2) = dx\int(dx - x^2dx)$ $= dx(x - \frac{x^3}{3}) + Cdx$, e nuovamente integrando, $Cx + C' + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$.

128. Sia una differenzial generale del second' ordine $Pddx + Qdx^2$; differenziandola si avrà $Pd^3x + (dP + 2Qdx)ddx + dQdx^2$: dunque reciprocamente data una differenzial generale del terz' ordine $Rd^3x + Sdxddx + Tdx^3$, si avrà $R = P$, $Sdx = dP + 2Qdx$, $Tdx = dQ$ e perciò $Q = \int Tdx$; sostituiti i valori di P, Q nella seconda equazione, verrà $\frac{S}{2} - \frac{dR}{2dx} = \int Tdx$, onde se questa equazione si avveri, la proposta differenziale sarà integrabile, e l'integrale sarà $Rddx + dx^2\int Tdx$. Per esempio $x^2d^3x + 2x^3dxddx + (3x^2 - 1)dx^3$ ha la condizione necessaria per essere integrabile, ed il suo integrale è $x^2ddx + dx^2(x^3 - x)$.

129. Se dx è costante, si avrà $dx^2\int Tdx + Cdx^2$; l'integrale di questa differenziale sarà dunque $dx\int(dx\int Tdx) + Cxdx + C'dx$, e l'integrale di questa, $\int(dx\int dx\int Tdx) + \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. Così $dx^2\int x^m dx = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$ $+ \frac{Cxx}{2} + C'x + C''$. Nella maniera medesima si troverebbero le integrali delle differenziali più elevate e le condizioni dei loro coefficienti.

130. Consideriamo ora le differenziali del second' ordine a due variabili, espresse generalmente per $Pddx + Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$. Per trovar le condizioni dei coefficienti P, Q, R ec. prendo la differenziale di $Adx + Bdy$, nella quale A e B son funzioni qualunque di x, y, ed ho $Addx + Bddy + dAdx + dBdy$, che fatto $dA = d^xA + d^yA$, $dB = d^xB + d^yB$, diviene $Addx + Bddy + \frac{d^xA}{dx}.dx^2 + \left(\frac{d^yA}{dy} + \frac{d^xB}{dx}\right)$ $dxdy + \frac{d^yB}{dy}.dy^2$; onde $P = A$, $Q = B$, e perciò $R = \frac{d^xP}{dx}$, $S = \frac{d^yP}{dy} + \frac{d^xQ}{dx}$, e $T = \frac{d^yQ}{dy}$. Verificandosi queste condizioni, l'integrale sarà $Pdx + Qdy$: tanto avviene in $yddx - xddy$ il cui integrale è $ydx - xdy$.

131. Se dx si suppone costante, dovrà integrarsi $Qddy + Rdx^2 + Sdxdy + Tdy^2$, che nascendo come prima da $Adx + Bdy$, darà $Q = B$, $R = \frac{d^xA}{dx}$, $S = \frac{d^yA}{dy} + \frac{d^xQ}{dx}$, $T = \frac{d^yQ}{dy}$; dunque $d^xA = Rdx$, $A = \int^x Rdx$, $Adx = dx\int^x Rdx$, e le condizioni per integrare saranno $S = \frac{d^xQ}{dx} + \frac{d^y\int^x Rdx}{dy}$, $T = \frac{d^yQ}{dy}$; quindi l'integrale $Adx + Bdy$ diverrà $dx\int^x Rdx + Qdy$ $+ Cdx$. Per esempio, $6x^2dxdy + 6xydx^2 + x^3ddy$, nella quale dx è costante, ha le condizioni precedenti e la sua integrale è $x^3dy + 3x^2ydx$ $+ Cdx$ che integrando di nuovo, dà $x^3y + Cx$

$+ C'$. Nella maniera medesima si troverebbero le condizioni per un maggior numero di variabili.

Applicazioni del Calcolo Integrale.

Le applicazioni del Calcolo Integrale si estendono a tutte le parti delle Matematiche; ma per limitarci a quelle che son puramente geometriche e che servon di fondamento all'altre, determineremo le formule delle quadrature e delle rettificazioni delle curve, le solidità dei corpi, quelle dei solidi di rivoluzione, come altresì le lor superficie (20), e finiremo con alcuni usi del metodo inverso delle tangenti.

Della quadratura delle Curve.

132. Sia la curva AM con l'asse AP e con 23.
l'ordinata PM al punto M; per trovar la quadratura dello spazio AMP conduco un'altra ordinata mp, e la linea Mr parallela a Pp; allora ho la superficie $MmpP = MP \times Pp + Mmr$, e se il punto m si avvicini al punto M, il triangolo Mmr diminuirà sempre più, ma non potrà diventare zero se il punto m non cada sul punto M; allora $MmpP$ svanirà e sarà la differenziale dello spazio AMP (16); onde fatto $Pp = dx$, avremo $d(AMP) = ydx \times sen\,\varphi$ se le coordinate facciano un angolo $P = \varphi$ o, se l'angolo P sia retto, $d(AMP) = ydx$ (4), e però $AMP = \int ydx + C$ ed $AQM = \int xdy + C$.

133. Es. I. Sia un quadrante di circolo descrit- 24.
to col centro A e col raggio a; si avrà $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$ e $\int ydx = AQMP = \int dx\sqrt{(aa - xx)} +$

$C = C + ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{1.x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} -$
24. $\frac{1.3.5x^9}{2.4.6.8.9a^7}$ — ec. Fatto $x = 0$, sarà $AQMP = 0$, e però $C = 0$; dunque $AQMP = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5}$ — ec.

II. Nell'ellisse, $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$; dunque $\int ydx = \frac{b}{a}\left(ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \text{ec.}\right)$.

III. Nella parabola, $ydx = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx$ e $\int ydx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy$, cioè lo spazio APM è due terzi del rettangolo circoscritto. L'equazione
23. alle parabole di tutti i gradi è $y^m = x^n a^{m-n}$; dunque $mly = nlx + (m-n)la$; dunque $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$, ovvero $m:n::ydx:xdy::\int ydx:\int xdy::AMP:AMQ$; onde lo spazio AMP sta al rettangolo circoscritto $APMQ::m:m+n$.

IV. Nell'iperbola equilatera, $xy = aa$ ed $ydx = \frac{aadx}{x}$; dunque $\int ydx = aalx + C$. Se si voglion prendere gli spazj dall'origine A, lo spazio
25. sarà $= 0$ quando $x = 0$; dunque $C = -aal0 = \infty$, e lo spazio $Q'APMN = aalx - aal0 = \infty$. Se $x = AD$, allora lo spazio $Q'ADBN = aala - aal0$; dunque $BDPM = aalx - aala = aal\frac{x}{a}$.

V. Nella cicloide AEB', $xdy = dx\sqrt{(2ax}$
14. $- x^2)$ (55) e $\int xdy (= ACR)$ (132) $= \int dx$

$\surd(2ax - x^2) = ALQP'$ (55. 132); dunque tutto lo spazio AED eguaglia tutto il semicircolo AQB' ec. 14.

VI. Nella cissoide, $y = \frac{x\surd x}{\surd(a-x)}$ e $\int y\,dx = AKMPA = \int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a - x)^{\frac{1}{2}} = ACONP$ (133); e se si riduci $\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (89) 26.

$\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}} dx (a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx (a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax - xx)^{\frac{1}{2}}$, ovvero $APMKA = 3ACONP - 4ANP = 3ACONA - ANP$. Dunque poichè quando $x = a$ il triangolo ANP svanisce e il segmento $ACONA$ si cangia nel semicircolo $ACNB$, lo spazio infinitamente lungo $MKABQ$ è triplo del semicircolo genitore.

VII. Nella logaritmica, $y\,dx = A\,dy$ (45), e $\int y\,dx = BAPM = Ay + C$: ma quando $y = 1 = AB$, lo spazio $ABMP$ diventa nullo; dunque $C = -A$, e $ABMP = A(y-1) =$ al rettangolo $OIQM$. Se si fa $y = 0$, si avrà lo spazio infinitamente lungo $BXYA = -A =$ al rettangolo $PQIT$. 27.

VIII. Sia una curva BM che abbia per equazione $y = x^x$; si avrà (110) lo spazio $ABMP =$ 28.

$\int x^x dx = x\left(1 - \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{3^3} - \frac{x^3}{4^4} + \text{ec.}\right) + xxlx\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3^2} + \frac{x^2}{4^3} - \text{ec.}\right) + \frac{x^3 l^2 x}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{4^2} + \frac{x^2}{5^3} - \text{ec.}\right) + \text{ec.}$; e quando $x = AP =$

28. $PM = 1$, si ha lo spazio $ABMP = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \text{ec.} = 0,7834305107 12$ ec.

29. IX. Sia la curva dei seni $AMA'M'$ ec. la cui equazione è $x = arc.\, sen\, y$ ovvero $y = sen\, x$; si avrà $APM = \int dx\, sen\, x = C - cos\, x$. Facciamo $x = 0$, e sarà $C = 1$, $APM = 1 - cos\, x$. Sia $x = 180^\circ = c$, si avrà $AMA' = 2 =$ al doppio del quadrato del raggio. Se si suppone $x = 2c = AA''$, si avrà lo spazio $AMA'A + A'M'A''A' = 0$, il che è chiaro, poichè l'uno è positivo e l'altro negativo. In generale se $x = 2kc$, lo spazio sarà zero; e se $x = (2k+1)c$, lo spazio sarà $= 2$. Posta

30. l'origine degli x nel punto A, medio di $A'A'$, si avrà $y = cos\, x$; onde lo spazio $ABMP = sen\, x$, lo spazio $ABA'A = 1$, e $A'MBA'A = 0$, o non attendendo alle sue due parti positiva e negativa, $A'MBA'A = 2$.

31. 134. Se l'ordinate parton da un punto fisso C, ecco come può trovarsi la quadratura della curva. Condotti i due raggi CM, Cm, si descriverà col centro C e col raggio CM l'arco Mr; allora il triangolo $CMm = \frac{Mr \times CM}{2} + Mmr$; ma quando il punto m è infinitamente vicino ad M, lo spazio Mmr svanisce, e resta $d(COMC) = \frac{Mr \times CM}{2}$; se dunque $Mr = dx$, $CM = y$, si avrà $COMC = \frac{1}{2}\int y\,dx + C$.

Chiamando φ l'angolo che fa CM con una linea fissa che parte dal punto C, o l'arco che mi-

sura quest' angolo in un circolo il cui raggio è 1, 31.
si avrà $Mr = y\,d\varphi$ e $COMC = \frac{1}{2}\int y^2 d\varphi + C$.

135. Esemp. I. Sia la concoide AM, il suo polo 32.
P, $PM = y$, $QM = a$, $PB = b$, e l'angolo $APM = \varphi$; si avrà $PQ = \frac{b}{\cos\varphi}$, ed $y = \frac{b}{\cos\varphi} \pm a$; dunque lo spazio $APM = \frac{1}{2}\int \frac{b^2 d\varphi}{\cos^2\varphi} \pm ab\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} + \int \frac{a^2 d\varphi}{2} = \frac{b^2\, tang\,\varphi}{2} \pm ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$ (117) $+ \frac{a^2\varphi}{2}$ senza costante; dunque poichè $PBQ = \frac{b^2\, tang\,\varphi}{2}$, sarà $\pm APM \mp PBQ = ABQM = ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) \pm \frac{a^2\varphi}{2}$, ed $AAMM = 2ab\, l\, tang(45^\circ + \frac{\varphi}{2})$.

II. Nella cissoide se si fa $AM = y$, $MAB = \varphi$, 26.
sarà $AQ = \frac{a}{\cos\varphi}$, $AO = MQ = a\cos\varphi$, $y = \frac{a}{\cos\varphi} - a\cos\varphi = \frac{a\, sen^2\varphi}{\cos\varphi}$, ed $y^2 = \frac{a^2(1-\cos^2\varphi)^2}{\cos^2\varphi} = \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - 2a^2 + a^2\cos^2\varphi$; dunque $AKMOA = \frac{a^2}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - a^2\int d\varphi + \frac{a^2}{2}\int d\varphi\cos^2\varphi = \frac{a^2}{2}(tang\,\varphi + \frac{sen\, 2\varphi}{4} - \frac{3\varphi}{2})$ (114). Dunque $AKMPA = AOMP\, (= \frac{y^2\, sen\,\varphi\cos\varphi}{2}) - AKMOA = \frac{a^2}{2}(\frac{3\varphi}{2} - \frac{5\, sen\, 2\varphi}{4} + sen\,\varphi\cos^3\varphi)$. Ma $sen\,\varphi\cos^3\varphi = \frac{sen\, 4\varphi}{4} + sen^3\varphi\cos\varphi = \frac{sen\, 4\varphi}{4} + sen\,\varphi\cos\varphi - sen\,\varphi\cos^3\varphi$ e però $sen\,\varphi\cos^3\varphi$

26. $= \frac{1}{4}(\frac{sen\, 4\varphi}{2} + sen\, 2\varphi)$; dunque $AKMPA = \frac{a^2}{2}(\frac{3\varphi}{2} - sen\, 2\varphi + \frac{sen\, 4\varphi}{8})$. Fatto $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, si ha $sen\, 2\varphi = 0 = sen\, 4\varphi$, e poichè $\frac{a^2\varphi}{4}$ è il semicircolo $AONB$, sarà lo spazio infinitamente lungo $MKABQ = \frac{3a^2\varphi}{4} = 3\,AONB$.

III. Nella spirale d' Archimede, $AGFBN =$
31. x, $AGFBA = a$, $CM = y$, $CA = a$, $Mr = \frac{y\,dx}{a}$, $d(COMC) = \frac{Mr \cdot CM}{2}$ (134) $= \frac{y^2 dx}{2a}$, $x = \frac{cy}{a}$, $dx = \frac{c\,dy}{a}$; dunque $COMC = \frac{c\,y^3}{2 \cdot 3 \cdot a^2}$ senza costante; onde fatto $y = a$, lo spazio $COMAC = \frac{ac}{2 \cdot 3} =$ al terzo di tutto il circolo.

Non si è preso quì l' integrale $\frac{1}{2}\int y^2 d\varphi$ perchè questo non può estendersi al di là di $\varphi = 360^\circ$, altrimenti i triangoli elementari $\frac{1}{2}y^2 d\varphi$ conterrebbero i già sommati, difetto a cui può supplirsi calcolando i trapezj elementari compresi tra due spire vicine. Lo stesso inconveniente ha luogo per la formula ordinaria $\int y\,dx$ se più ordinate corrispondano alla stessa ascissa.

IV. Nella spirale iperbolica scemando x mentre
33. cresce y, sarà $CN(a) : Nn(-dx) :: CM(y) : Mr = -\frac{y\,dx}{a}$; dunque $COMC = \frac{1}{2}\int \frac{-y^2 dx}{a}$: ma $xy = ab$, e però $-y\,dx = x\,dy = \frac{ab\,dy}{y}$; dunque $-\frac{y^2 dx}{a} = b\,dy$, e lo spazio compreso tra la curva e due ordinate $= \frac{1}{2}by + C$.

Della Rettificazione delle Curve.

136. Se sia il punto m infinitamente vicino ad M, sarà $Mm = ds$ la differenziale dell'arco $AM =$ 34.
s, e si avrà $dAM = ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; onde $AM = s = \int \sqrt{(dx^2+dy^2)} + C$ o l'ordinate sieno parallele o partano da un punto fisso.

137. Es. I. Nel circolo, $y = \sqrt{(a^2 - x^2)}$,
$dy^2 = \frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}$ e $QM = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = (99)\ x$ 24.
$+ \frac{x^3}{2.3a^2} + \frac{1.3x^5}{2.4.5a^4} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6} +$ ec.; dunque l'arco $MB = y + \frac{y^3}{2.3a^2} + \frac{1.3y^5}{2.4.5a^4} +$ ec. come si trova nella trigonometria.

II. Nella parabola, $AM = \int dy \sqrt{(1+\frac{4y^2}{p^2})}$ 23.
$= \int \frac{2dy}{p}\sqrt{(\frac{p^2}{4}+y^2)}$: ma abbiam trovato (98) $\int dx\sqrt{(x^2+a^2)} = C + \frac{x}{2}\sqrt{(x^2+a^2)} + \frac{a^2}{2} l[x+\sqrt{(a^2+x^2)}]$; dunque $AM = C + \frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})} + \frac{p}{4} l[y+\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}]$. Facciamo $y = 0$, e sarà $C = -\frac{p}{4} l \frac{p}{2}$; dunque $AM = \ldots$

$$\frac{y}{p}\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})} + \frac{p}{4} l\, 2\left[\frac{y+\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}}{p}\right].$$

138. Può osservarsi che se col centro A e col semiasse maggiore $BA = \frac{p}{2}$ si descrive un'iperbo- 34.
la equilatera BN', lo spazio $ABN'Q$ sarà $\int x\,dy$

23. $(132) = \int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}$; dunque $AM = \frac{2}{p}\int dy\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})} = \frac{2}{p}\times ABN'Q$ e però $AM \times \frac{p}{2} = ABN'Q$; onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell'iperbola e reciprocamente.*

III. Nell'ellisse supposto il semiasse maggiore $=1$, sarà $y = b\sqrt{(1-x^2)}$, e fatto $\sqrt{(1-b^2)}$
35. cioè la semidistanza dei fuochi $= c$, si ha $BM = \int\frac{dx\sqrt{(1-c^2x^2)}}{\sqrt{(1-x^2)}}$, integrale che non può aversi con le regole precedenti. Bisogna dunque ridurre in serie: ma per maggior semplicità riducendo solamente $\sqrt{(1-c^2x^2)}$, avremo $BM = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\times$ $(1 - \frac{c^2x^2}{2} - \frac{c^4x^4}{2.4} - \frac{1.3c^6x^6}{2.4.6} - \frac{1.3.5c^8x^8}{2.4.6.8} -$ ec.$)$ $= \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{c^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{c^4}{2.4}\times\ldots$ $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1.3c^6}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} -$ ec. Ora riducendo le integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (87) fatto $k = -\frac{1}{2}$, $m = 2$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2, 4, 6,$ ec. $i = 1, 2,$ ec. $p = 0$, si avrà $BM =$ $(1 - \frac{c^2}{2^2} - \frac{3c^4}{2^2.4^2} - \frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5^2.7c^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}$ $-$ ec.$)\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} + c^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}[\frac{1}{2^2} + \ldots$ $\frac{3c^2}{2^2.4^2} + \frac{3^2.5c^4}{2^2.4^2.6^2} +$ ec.$] + c^4x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\times$ $[\frac{1}{2.4^2} + \frac{3.5c^2}{2.4^2.6^2} + \frac{3.5^2.7c^4}{2.4^2.6^2.8^2} +$ ec.$]$: ma DN

$=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ (137); dunque son note tutte le quantità di questa serie di cui è facile conoscer la legge.

Sia $x=1$; si avrà $AMB=\left(1-\frac{c}{2^2}-\right.$ 35.
$\left.\frac{3c^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5c^6}{2^2.4^2.6^2}-\text{ec.}\right)AND$. Dunque la perifería dell' ellisse è a quella del circolo circoscritto $::1-\frac{1}{2^2}.\frac{c^2}{a^2}-\frac{1.1^2}{2^2.4^2}.\frac{3c^4}{a^4}-\frac{1.1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2}$
$\frac{5c^6}{a^6}-\text{ec.}:1$ (supposto a il semiasse maggiore)
Questa serie sarà convergentissima quando i fuochi saran vicini. Per esempio se $c=\frac{a}{10}$, la circonferenza dell' ellisse sarà a quella del circolo circoscritto $::0{,}997\,495\,292\,861\,261:1$.

139. La rettificazion dell' iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve l' integrali d' un gran numero d' altre differenziali.

IV. L' equazione alla seconda parabola cubica è $y^3=ax^2$; dunque $s=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)}=\ldots$
$\frac{8}{27}a\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}+C$(39); facendo $y=0$, si ha $C=-\frac{8}{27}a$, e un arco di questa curva preso dall' origine $=\frac{8}{27}a\left[\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$(54).

V. Nella cicloide, $dy=dx\sqrt{\left(\frac{a-x}{x}\right)}$ (55) 36.
preso $AB=a$; dunque $s=\int dx\sqrt{\frac{a}{x}}=2\sqrt{ax}=2AN$(56).

VI. Nella logaritmica, $y\,dx=a\,dy$, $s=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(y^2+a^2)}$; se $\sqrt{(y^2+a^2)}=z$, si avrà $\frac{dy}{y}=\frac{z\,dz}{z^2-a^2}$ ed $s=\int\frac{z^2dz}{z^2-a^2}=z+\frac{a}{2}\,l\frac{z-a}{z+a}$ (91), ovvero moltiplicando i due termini del rotto logaritmico per $z+a$ ed estraendo la radice, $z+a\times l\left(\frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{z+a}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}+\ldots\ldots\ldots$
$a\,l\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right)=\sqrt{(y^2+a^2)}-\ldots$
$a\,l\left(\frac{a+\sqrt{(aa+yy)}}{y}\right)+C$, espressione d' un arco qualunque di logaritmica nella quale C è facile a determinarsi (133. VI.).

31. VII. Nella spirale d' Archimede, $Mr=\frac{y\,dx}{a}$
(135), $Mm=d(COM)=\sqrt{\left(dy^2+\frac{y^2dx^2}{a^2}\right)}$: ma $x=\frac{cy}{a}$; dunque $COM=\int\frac{c\,dy}{a^2}\left(yy+\frac{a^4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Descriviamo una parabola CN' il cui parametro $=\frac{2a^2}{c}$; avremo, facendo $CQ=CM=y$ e conducendo l' ordinata QN', $CN'=\int\frac{c\,dy}{a^2}\sqrt{\left(\frac{a^4}{c^2}+yy\right)}$ (137); dunque $CN'=COM$, onde regna dell' analogìa tra la spirale di Archimede e la parabola.

VIII. Nella spirale iperbolica l' equazione $x=$
33. $\frac{ab}{y}$ dà $dx=-\frac{ab\,dy}{y^2}$ ed $rM\left(=-\frac{y\,dx}{a}(135)\right)$
$=\frac{b\,dy}{y}$, onde $mM^2(=rm^2+rM^2)=dy^2+\frac{b^2dy^2}{y^2}$, e l' arco $COM=\int\frac{dy}{y}\sqrt{(bb+yy)}$.
Dunque descritta una logaritmica NK la cui suttan-

gente $= b =$ a quella della spirale (47) si avrà (Esem. VI.) $MOC =$ all' arco infinito NK, prendendo l' ordinata $NR = CQ = CM$. Ma per l' e- 33.
spressione d' un arco di spirale o di logaritmica compreso tralle due ordinate y, y', si troverà $\sqrt{(b^2 + y^2)} - \sqrt{(b^2 + y'y')} + bl\frac{y[b+\sqrt{(b^2+y'^2)}]}{y'[b+\sqrt{(b^2+y^2)}]}$.

IX. Nella spirale logaritmica cos Mmr (c) : 15.
mr (dy) : : 1 : $Mm = \frac{dy}{c}$; dunque $ADM = \frac{y}{c} = MT$ per esser simili i triangoli mrM, MAT.

Della misura delle Solidità.

140. Un solido da misurarsi s' immagini decomposto in un' infinità di piccoli strati paralleli. Chiamando t la base d' uno di essi, dx la sua altezza o una parte infinitesima della distanza x dello strato dal vertice, sarà $\int t\,dx + C$ la sua solidità, e solo dovrà esprimersi t per x.

141. Per esempio, sia B la base del solido, A la sua altezza; posto che le basi degli strati sieno proporzionali a una potenza m della loro distanza dal vertice, si avrà $A^m : B :: x^m : t = \frac{Bx^m}{A^m}$; dunque l' elemento d' una porzione del solido sarà $\frac{Bx^m dx}{A^m}$, ed integrando $\int \frac{Bx^m dx}{A^m} = \frac{Bx^{m+1}}{(m+1)A^m} + C$, o senza costante, se la porzione cominci dal vertice. Onde il solido intero $= \frac{BA}{m+1}$, poichè allora $x = A$: perciò la solidità delle piramidi, in cui $m = 2$, è $\frac{BA}{3}$.

37. 142. Se una curva AM giri intorno al suo asse AP, genererà un solido di rivoluzione di cui ogni sezione perpendicolare all' asse sarà un circolo $= \pi yy$, facendo $PM = y$ e $\pi = 3,141$ ec. Dunque un solido qualunque di rivoluzione $= C + \int \pi yy\,dx$.

Es. I. Nella sfera, $yy = 2ax - xx$; dunque la solidità d' un segmento sferico $= \pi xx(a - \frac{x}{3})$, e la sfera $= \frac{4a^3\pi}{3} =$ ai due terzi del cilindro circoscritto.

II. Nell' ellisse, $yy + \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$. Dunque il solido generato dalla sua rivoluzione intorno all' asse maggiore sta alla sfera circoscritta :: $bb : aa$, ovvero è due terzi del cilindro circoscritto.

143. si chiama *Ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *Ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell' Ellisse intorno al suo asse minore. E' facile il trovare che anche quest' ultimo solido è due terzi del cilindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa :: $abb : aab :: b : a$.

III. In una parabola di un ordine qualunque si ha $y^m = x^n a^{m-n}$, onde $\pi y^2 dx = \pi x^{\frac{2n}{m}} a^{\frac{2m-2n}{m}} dx$, e $\int \pi y^2 dx = \pi \frac{x^{\frac{2n+m}{m}} a^{\frac{2m-2n}{m}}}{\frac{2n+m}{m}} = \ldots\ldots$

$$\frac{m\pi x^{\frac{2n}{m}}.x.a^{\frac{2m-2n}{m}}}{2n+m} = \frac{m\pi xy^2}{2n+m},$$ espressione del solido che perciò starà al cilindro circoscritto :: $m : m + 2n$; quindi la paraboloide ordinaria

nella quale $m = 2$, $n = 1$, è la metà del cilindro circoscritto.

IV. Similmente se l'iperbola la cui equazione 38. è $y^m x^n = a^{m+n}$ gira intorno all'asintoto CP, prendendo $CD = AD = a$, il solido descritto dal trapezio $ADPM$ avrà per espressione $\frac{m}{2n-m}\pi(a^2 - xy^2)$, e perciò supposto $2n > m$, il solido descritto dallo spazio infinitamente lungo $OADX$ sta al cilindro descritto da $AECD :: m : 2n - m$, e nell'iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

Delle Supesficie curve dei Solidi di rivoluzione.

144. La differenziale della superficie descritta 37. dalla curva AM è eguale al piccolo tronco di cono descritto dall'elemento $Mm = ds$. Dunque questa superficie curva $= \int circPM \,.\, ds = 2\pi\int y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C = 2\pi\int n\,dx + C$, chiamando n la normale $MN = \frac{y}{dx}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (43).

Es. I. Nella sfera, $n = a$ (43); dunque la superficie d'un segmento sferico qualunque è $2a\pi x$, e quella della sfera è $4a^2\pi$ o quattro circoli massimi.

II. La superficie del paraboloide ove $n=\sqrt{(y^2+\frac{p^2}{4})}$, è $\frac{2\pi}{p}\int 2y\,dy\,(yy+\frac{p^2}{4})^{\frac{1}{2}} + C = \frac{4\pi}{3p}(yy+\frac{p^2}{4})^{\frac{3}{2}} + C$ (39). Sia $y=0$: si avrà $C = -\frac{4\pi}{3p}\cdot\frac{p^3}{8}$, e la superficie del solido $\frac{\pi}{6p}[(pp+4yy)^{\frac{3}{2}} - p^3]$.

39. III. Nell'ellisse fatto a il semiasse di rivoluzione che sarà il trasverso nell'ellissoide allungata e il conjugato nella compressa, e posto ne' due diversi casi $\pm a^2 \mp b^2 = c^2$, si avrà $n = \frac{bc}{a^2}\sqrt{(\frac{a^4}{c^2} \mp x^2)}$, e però se la curva giri o intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx\sqrt{(\frac{a^4}{c^2}\mp x^2)}$. Nel primo caso, descritto col raggio $CD = \frac{a^2}{c}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (133) $\frac{2bc\pi}{a^2}\times ABNP$: ma nel secondo, determinata C col porre $x=0$, sarà (98) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{(\frac{a^4}{c^2}+x^2)} + \frac{a^2 b\pi}{c}\, l\, \frac{c}{a^2}[x+\sqrt{(\frac{a^4}{c^2}+x^2)}]$.

40. IV. Nell'iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il conjugato, e posto $a^2+b^2=c^2$, si avrà $n=\frac{bc}{a^2}\sqrt{(x^2 \mp \frac{a^4}{c^2})}$, e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2bc\pi}{a^2}\int dx\sqrt{(x^2\mp\frac{a^4}{c^2})}$. Nel primo caso determinata C col fare $x=a$, la superficie cercata sarà (97) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{(x^2-\frac{a^4}{c^2})} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{c}\, l\, \frac{cx+\sqrt{(c^2x^2-a^4)}}{a(c+b)}$: ma nel secondo determinata C col fare $x=0$, sarà (98) $\frac{bc\pi x}{a^2}\sqrt{(x^2+\frac{a^4}{c^2})} + \frac{a^2b\pi}{c}\, l\left[\frac{cx}{a^2}+\sqrt{(1+\frac{c^2x^2}{a^4})}\right]$.

Del Metodo inverso delle Tangenti, e dell' Integrazione dell' Equazioni differenziali.

145. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello che insegna a trovar l'equazione d'una curva in cui si conosca una proprietà qualunque delle tangenti. Cerchisi per es. la curva in cui la sunnormale è costante ed $= a$. Poichè (43) l'espression generale di questa linea è $\frac{y\,dy}{dx}$, avremo $\frac{y\,dy}{dx} = a$, $y\,dy = a\,dx$, e integrando, per esprimere che la proprietà data conviene a tutti i punti della curva, si ha $\frac{1}{2} y^2 = ax$, cioè $y^2 = 2a(x + C)$, equazione alla parabola che risolve il problema proposto. E' dunque chiaro che questo *Metodo* conduce alla soluzione di equazioni differenziali che diconsi *del primo*, *del secondo* ec. *ordine* se contengono le differenze prime, seconde ec; e son poi *lineari*, *quadratiche*, *cubiche* ec. se le variabili vi si trovano alla prima, seconda, terza ec. dimensione.

146. Sieno P, Q due funzioni di x, y; tutte l'equazioni differenziali del prim' ordine a due variabili verranno rappresentate da $Pdx + Qdy = 0$, equazione integrabile 1.° se P e Q sieno funzioni di x o di y sola, giacchè in tal caso ella diventa $dy = X\,dx$ o $dx = Y\,dy$: anzi simili equazioni si integreranno quando pur fossero di un qualunque ordine n^{simo}, supposta dx o dy costante. Poichè da $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ si ha $\frac{d^n y}{dx^{n-1}} = X\,dx$, ed integrando, $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X\,dx + C$; di nuovo $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-2}} = dx\int Xdx + C\,dx$, ed integrando, $\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int dx\int Xdx + Cx$

$+ C'$ ec., ripetuta l'operazione finchè si abbia y. Così se debba sommarsi la serie $y = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} +$ ec. *in inf.*, supposto x non maggiore di 1, differenziando si ha $dy = \left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \text{ec.}\right)dx$, e di nuovo differenziando, $ddy = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{ec.}\right)dx^2$, e differenziando una terza volta, $d^3y = (1 + x^2 + x^4 + \text{ec.})\,dx^3 = \frac{dx^3}{1 - x^2}$; dunque 1.° $\frac{d^3 y}{dx^2} = \frac{dx}{1 - x^2}$, ed integrando (91), $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{l(1+x) - l(1-x)}{2}$ senza costante, perchè $x = 0$ dà $y = 0$: 2.° $\frac{ddy}{dx} = \ldots\ldots \frac{dx\,l(1+x) - dx\,l(1-x)}{2}$, ed integrando (104), $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)\,l(1+x) + (1-x)\,l(1-x)}{2}$: 3.° $dy = \frac{dx(1+x)\,l(1+x) + dx(1-x)\,l(1-x)}{2}$, ed integrando (104), $y = \left(\frac{1+x}{2}\right)^2 l(1+x) - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 l(1-x) - \frac{x}{2}$. Con questo metodo che dicesi delle *ripetute integrazioni*, si sommano tutte le serie analoghe a quella che abbiamo sommata.

147. 2.° Si integrerà l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ se $\frac{d^y P}{dy} = \frac{d^x Q}{dx}$ (122). Spesso avviene però che anche non avverandosi quella condizione, la data differenziale può integrarsi col solo moltiplicarla per un fattore idoneo: così $xdy - ydx + xdx$

$=0$ se si moltiplichi per $\frac{1}{x^2}$ si integra facilmente (27. 31). Sia dunque F il fattor cercato, e l'equazione diverrà $FPdx + FQdy = 0$, che supponendosi ora integrabile, darà $\frac{d^y(FP)}{dy} = \frac{d^x(FQ)}{dx}$, o differenziando, $\frac{Fd^yP}{dy} + \frac{Pd^yF}{dy} - \frac{Fd^xQ}{dx} - \frac{Qd^xF}{dx} = 0$, formula generale da cui si avrà F se si prenda per F un' idonea funzione di x e di y con esponenti indeterminati, come $F = x^m y^n$; ed m, n si determineranno col sostituir nella formula i valori di F, P, Q e loro differenziali, e con eguagliare a zero i termini omologhi. Così data l'equazione $2adx - 2bydx - bxdy = 0$, avrò $P = 2a - 2by$, $\frac{d^yP}{dy} = -2b$, $Q = -bx$, $\frac{d^xQ}{dx} = -b$, $\frac{d^yF}{dy} = nx^m y^{n-1}$, $\frac{d^xF}{dx} = my^n x^{m-1}$, e sostituendo nella formula, trovo $(m - 2n - 1)bx^m y^n + 2anx^m y^{n-1} = 0$. Eguaglio a zero i termini omologhi, ed ottengo 1.° $m - 2n - 1 = 0$: 2.° $2an = 0$; dalla seconda equazione ricavo $n = 0$, onde la prima dà $m = 1$; dunque $F = xy^0 = x$, per cui moltiplicando la data equazione, si ha $2axdx - 2bxydx - bx^2dy = 0$, ed integrando, $ax^2 - byx^2 = C$.

Si osservi 1.° che lo stesso metodo ha luogo se si voglia il fattore che rende esatta una data differenziale, come $dy - ydx$: 2.° che se m, n si abbiano da una sola equazione, come da $m = n + 1$, si potrà fare $n = 0$ e anche prender per n un numero qualunque: 3.° che non si ha fin qui regola alcuna generale per dare ad F una forma adattata ai particolari bisogni, benchè in certi casi sia facile di determinarlo; ed eccone il modo.

Supposto $dF = Adx + Bdy$ onde $\frac{d^xF}{dx} = A$, $\frac{d^yF}{dy} = B$ (121), la trovata formula generale diverrà $\frac{Fd^yP}{dy} + BP - \frac{Fd^xQ}{dx} - AQ = 0$, cioè $\frac{d^yP}{dy} - \frac{d^xQ}{dx} = \frac{AQ - BP}{F}$; dunque se il primo membro di quest' equazione sia funzione della sola x onde $d^xQ = dQ$, lo sarà anche il secondo e perciò anche F, e si avrà $B = 0$, $dF = Adx$, $\frac{dxd^yP}{dy} - dQ = Q\frac{dF}{F}$, $\int\frac{dF}{F}$ ($= lF$) $= \int\frac{dxd^yP}{Qdy} - \int\frac{dQ}{Q}$ ($= -lQ$), e quindi $F = \frac{1}{Q}e^{\int\frac{dxd^yP}{Qdy}}$. Data per esempio, l'equazione $rdx + tydx + udy = 0$ ove r, t, u son funzioni della sola x, sarà $P = r + ty$, $Q = u$, $\frac{d^yP}{dy} = t$ ed $F = \frac{1}{u}e^{\int\frac{tdx}{u}}$, fattore che rende esatta la data, e che per l'equazione $xdy - ydx + xdx = 0$ accennata di sopra, si trova essere $= \frac{1}{x^2}$ come dicemmo.

E si noti che alla proposta $rdx + tydx + udy = 0$ si riduce anche l'altra $ry^n dx + tydx + udy = 0$ dividendola per y^n e ponendo $y^{1-n} = z$: vi si riducono anche delle equazioni più complicate, ma non dobbiamo allungarci di più. Intanto il metodo è particolare, e perciò qualor non riesca, si passa a *separar l'equazione*, cioè a dividerla in due membri, ciascun de' quali contenga una sola variabile con la sua differenziale. Anche questo metodo non è generale: ecco alcuni casi in cui la separazione riesce.

148. Se $P = XY$, e $Q = X'Y'$, essendo X, X' delle funzioni di x, ed Y, Y' delle funzioni di y, sarà $\frac{X\,dx}{X'} = -\frac{Y'dy}{Y}$, equazione separata e ridotta all'integrazione delle differenziali a una sola variabile.

149. Se P e Q son funzioni omogenee di x e di y, cioè se tutti i lor termini hanno lo stesso numero di dimensioni di x e di y, facendo $\frac{x}{y} = z$, si vede facilmente che $\frac{Q}{P}$ sarà una funzione Z di z. Onde si avrà $dx + Z\,dy = 0$, ovvero $z\,dy + y\,dz + Z\,dy = 0$, e separando si troverà $\frac{dz}{Z + z} = -\frac{dy}{y}$. Per esempio $(ax + by)\,dx = (mx + ny)\,dy$, facendo $\frac{x}{y} = z$ onde $x = yz$, $dx = z\,dy + y\,dz$, e $\frac{Q}{P} = Z = \frac{-mz - n}{az + b}$, diviene $-\frac{dy}{y} = \frac{(az + b)\,dz}{az^2 + (b-m)z - n}$, equazione facile a integrare (94. 98).

150. Sia ora l'equazione generale $ax^m y^n dx^p dy^q + bx^{m'} y^{n'} dx^{p'} dy^{q'} + cx^{m''} y^{n''} dx^{p''} dy^{q''} +$ ec. $= 0$ ove per la natura di tali equazioni si ha sempre $p + q = p' + q' = p'' + q'' =$ ec.: fatto $y = z^r$, ella diventa $r^q a x^m z^{r(n+q)-q} dx^p dz^q + \ldots\ldots$

$r^{q'} bx^{m'} z^{r(n'+q')-q'} dx^{p'} dz^{q'} + \ldots\ldots\ldots$, $r^{q''} cx^{m''} z^{r(n''+q'')-q''} dx^{p''} dz^{q''} +$ ec. $= 0$, e sarà omogenea se $m + r(n+q) - q = m' + r(n'+q') - q' = m'' + r(n''+q'') - q''$ ec., cioè se $r = \frac{m - q - m' + q'}{n' + q' - n - q} = \frac{m - q - m'' + q''}{n'' + q'' - n - q} =$ ec. Così l'equazione $ay^2x^2\,dx + b\,dx + cyx\,dx + fx^4y^2\,dy = 0$ dà $m = n = 2$, $m' = n' = 0$, $m'' = n'' = 1$, $m''' = 4$, $n''' = 2$, $q = q' = q'' = 0$, $q''' = 1$ e però $r = \frac{2}{-2} = \frac{2-1}{1-2} = \frac{2-4+1}{2+1-2} = -1$; dunque fatto $y = z^{-1}$, si avrà $az^{-2}x^2\,dx + b\,dx + cz^{-1}x\,dx + fx^4z^{-4}\,dz = 0$, equazione omogenea e perciò integrabile (149). Parimente l'equazione $ax^2\,dx^4 + bx^3y^3\,dx^2\,dy^2 + cx^5y^{-11}\,dx^3\,dy + gx^5y\,dy^4 = 0$ dà $m = 2$, $n = 0$, $m' = n' = 3$, $m'' = 5$, $n'' = -11$, $m''' = 5$, $n''' = 1$, $q = 0$, $q' = 2$, $q'' = 1$, $q''' = 4$ e però $r = \frac{2-3+2}{3+2} = \frac{2-5+1}{-11+1} = \frac{2-5+4}{1+4} = \frac{1}{5}$; dunque fatto $y = z^{\frac{1}{5}}$, si avrà $625ax^2\,dx^4 + 25bx^3z^{-1}\,dx^2\,dz^2 + 125cx^5z^{-3}\,dx^3\,dz + gx^5z^{-3}\,dz^4 = 0$, equazione omogenea che facendo $z = ux$ e $dz = (t+u)\,dx$, si riduce a $\frac{g(t+u)^4}{u^3} + \frac{25b(t+u)^2}{u} + \frac{125c(t+u)}{u^3} + 625a = 0$: or da questa si ha t data per u, onde supposta $t = U$, da $u\,dx + x\,du = (t+u)\,dx$ viene $\frac{dx}{x} = \frac{du}{t} = \frac{du}{U}$. Del resto, se taluno dei rotti $\frac{m - q - m' + q'}{n' + q' - n - q}$ ec. divenisse $\frac{0}{0}$, non se ne farebbe conto, ciò solamente significando che qualunque valore di r rende omogenei i termini d'onde quel rotto risulta; e se divenissero $\frac{0}{0}$ tutti i rotti, o andassero a zero tutti i loro numeratori o denominatori, ciò indicherebbe che per separar le variabili non vi è bisogno di metodo.

151. Passiamo ad altre equazioni, e sieno da integrarsi I. $y + \frac{p\,dy}{dx} = 0$, II. $y + \frac{p\,dy}{dx} = X$ ove p, X son funzioni di x. La I. si integrerà riducendola a $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{p}$, onde $ly = -\int\frac{dx}{p} + lC$ ed $y = Ce^{-\int\frac{dx}{p}}$. Nella II. si farà $y = rz$ (r è funzione di x) e avremo $rz\,dx + pr\,dz + pz\,dr = X\,dx$; onde potendosi dar tali valori ad r, z che sia III. $rz\,dx + pz\,dr = 0$, verrà la IV. $pr\,dz = X\,dx$. La III. si integra come la I. e viene $r = e^{-\int\frac{dx}{p}}$ e perciò la IV. ci dà $X\,dx$ ($= pr\,dz$) $= pe^{-\int\frac{dx}{p}}dz$, z ($= \frac{y}{r}$) $= \ldots\ldots$ $\int\frac{e^{\int\frac{dx}{p}}}{p}X\,dx$ ed $y = e^{-\int\frac{dx}{p}}\int\left(\frac{e^{\int\frac{dx}{p}}}{p}X\,dx + C\right)$. Così se si abbia $y + \frac{dy}{dx} = x^2$, sarà $p = {}^{\circ} = 1$, $X = x^2$ ed $y = e^{-x}\int e^{x}x^2\,dx + Ce^{-x} = Ce^{-x} + e^{-x}[e^{x}(x^2 - 2x + 2)]$ (108) $= Ce^{-x} + x \;\; - 2x + 2$. Alla II. equazione si riduce 1°. $y + \frac{p\,dy}{dx} = Xy^{n+1}$ col dividerla per y^{n+1} e far poi $\frac{1}{y^n} = u$: 2°. $y^{m+1} + \frac{py^m\,dy}{dx} = Xy^n$

col dividerla per y^n e far quindi $y^{m-n+1} = u$: 3°. $Xy^m\,dy + X'y^{m+1}\,dx = X''y^n\,dx$ dividendola per $X'dx$, facendo $\frac{X}{X'} = p$, $\frac{X''}{X'} = q$, e trattandola quindi come l'antecedente.

152. Ma sia l'equazion lineare del second'ordine $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} = 0$ ove a, b, dx son costanti. Fatto $p = \frac{dy}{dx}$ ovvero $mp - \frac{m\,dy}{dx} = 0$ (m è indeterminata) e sommata questa con la data, viene I. $y + (a+m)p - (m\,dy - b\,dp)\frac{1}{dx} = 0$, che potrebbe integrarsi se la prima sua parte $y + (a+m)p$ o un suo m^{plo} qualunque fosse l'integrale della seconda $m\,dy - b\,dp$ (31). Supponghiamolo dunque giacchè l'indeterminata m lo permette, e avremo $y + (a+m)p = \frac{1}{m}\int(m\,dy - b\,dp) = y - \frac{bp}{m}$, onde $a + m = -\frac{b}{m}$ e II. $m = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b\right)}$. Fatto ora III. $y + (a+m)p = u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $du = dy - \frac{b\,dp}{m}$ ovvero $m\,du = m\,dy - b\,dp$, la I. diverrà $u - \frac{m\,du}{dx} = 0$ che ci dà (151) IV. $u = Ce^{\frac{x}{m}}$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la III. si scioglierà nelle due $y + (a+m')p = u'$, $y + (a+m'')p = u''$ dalle quali si ha la V. $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$. Così data

$y + \frac{4dy}{5dx} - \frac{ddy}{5dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$, onde per la II. viene $m = -\frac{2}{5} \pm \frac{3}{5}$ e perciò $m' = \frac{1}{5}$, $m'' = -1$; dunque per la IV. $u' = Ce^{5x}$ ed $u'' = C'e^{-x}$, con che dalla V. si ottiene $y = \frac{1}{6}(Ce^{5x} + 5C'e^{-x})$.

Di quì si ha la somma y di tutte le serie trascendenti della forma $1 + \frac{x^r}{1.2.3\ldots r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3\ldots 2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3\ldots 3r} +$ ec. *in infin.*, essendo r numero intero e positivo. Si voglia la somma della serie $y = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} +$ ec.: differenziando abbiamo $dy = (x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ec.})dx$, e nuovamente differenziando presa dx costante, $ddy = (1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ec.})dx^2 = y\,dx^2$. Si ha dunque $y - \frac{ddy}{dx^2} = 0$, ove $a = 0$, $b = -1$, $m = \pm\sqrt{1}$, $m' = 1$, $m'' = -1$ e perciò $y = \frac{Ce^x + C'e^{-x}}{2}$. Per determinar le costanti si osservi che quando $x = 0$, viene $y = \frac{C + C'}{2} = 1$, $dy = \frac{Ce^x dx - C'e^{-x}dx}{2} = 0$; dunque $\frac{C + C'}{2} = C = C' = 1$ ed $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$.

153. Se nella II. equazione sia $\frac{a^2}{4} = b$, verrà

$m' = m'' = -\frac{a}{2}$ e quindi $u' = u''$ nella IV., ed $y = \frac{0}{0}$ nella V., ciò che non potrebbe avverarsi se non fosse anche $C = C'$. Ora per determinar y in questo caso, prendo K per la costante comune ed ω per un infinitesimo, e suppongo $m' = -\frac{a}{2} + \omega$, $m'' = -\frac{a}{2} - \omega$; dunque $u' = Ce^{\frac{x}{m'}} = \ldots Ke^{\frac{2x}{2\omega - a}} = Ke^{-\frac{2x}{a} + \frac{4\omega x}{a(2\omega - a)}} = \ldots\ldots Ke^{-\frac{2x}{a}}\left(1 + \frac{4\omega x}{a(2\omega - a)}\right)$, $u'' = C'e^{\frac{x}{m''}} = Ke^{\frac{-2x}{2\omega + a}} = Ke^{-\frac{2x}{a} + \frac{4\omega x}{a(2\omega + a)}} = Ke^{-\frac{2x}{a}}\left(1 + \frac{4\omega x}{a(2\omega + a)}\right)$ (70) trascurando sempre ω^2, ω^3 ec.: e poichè $m' - m'' = 2\omega$, la V. equazione diverrà $y = \frac{a + 2x}{a}Ke^{-\frac{2x}{a}}$, onde fatto $K = C$, $\frac{2K}{a} = C'$, viene $y = (C + C'x)e^{-\frac{2x}{a}}$ con le due costanti che l'equazione esige. Così se si abbia $y + \frac{4dy}{5dx} + \frac{4ddy}{25dx^2} = 0$, sarà $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{4}{25}$ ed $y = (C + C'x)e^{-\frac{5x}{2}}$.

154 Nel modo stesso potranno integrarsi due

equazioni $y + ax + \frac{b\,dx}{dt} = 0$, $y + fx + \frac{g\,dy}{dt} = 0$ supposte a, b, f, g costanti; poichè se la seconda si moltiplichi per l'indeterminata m e si sommi con la prima, verrà $(m+1)y + (a+fm)x + (g\,m\,dy + b\,dx)\frac{1}{dt} = 0$; onde fatto come sopra (152), $(m+1)y + (a+fm)x = \frac{1}{m}\int(g\,m\,dy + b\,dx) = gy + \frac{bx}{m}$, si avrà $m+1 = g$, $a+fm = \frac{b}{m}$ ed $\frac{am+fm^2}{b} = g - m$, equazione che determina m. Quindi se sia $(m+1)y + (a+fm)x = u = gy + \frac{bx}{m}$ e perciò $m\,du = g\,m\,dy + b\,dx$, l'equazione sommata diverrà $u + \frac{m\,du}{dt} = 0$ e avremo al solito $u = Ce^{-\frac{t}{m}}$. Il rimanente si fa come sopra (152), e tutto ciò ha luogo quando pur l'equazioni fossero $y + ax + \frac{b\,dx + c\,dy}{T\,dt} = 0$, $y + a'x + \frac{b'dx + c'dy}{T\,dt} = 0$, trovandosi allora $u = \ldots\ldots$

$$Ce^{-\int\frac{T\,dt}{m}}$$

155. Sia anche l'equazione $y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} = X$ ove X è funzione di x. Tutto si farà come sopra (152), se non che l'equazione che ivi diveniva $u - \frac{m\,du}{dx} = 0$, è quì $u - \frac{m\,du}{dx} = X$, cioè $du - \frac{u\,dx}{m} = -\frac{X}{m}$ che integrata al solito (151)

dà $u = e^{\frac{x}{m}}\left(C + \frac{1}{m}\int - e^{-\frac{x}{m}} X\,dx\right)$. Così avendo $y - \frac{dy}{dx} - \frac{3\,ddy}{4\,dx^2} = 2x$, sarà $a = -1$, $b = -\frac{3}{4}$, $m = \frac{1}{2} \pm 1$, $m' = \frac{3}{2}$, $m'' = -\frac{1}{2}$, $X = 2x$, $u' = Ce^{\frac{2x}{3}} + 2x + 3$, $u'' = C'e^{-2x} + 2x - 1$ ed $y = \frac{1}{4}(C'e^{-2x} + 2x - 1) + \frac{3}{4}(Ce^{\frac{2x}{3}} + 2x + 3)$;

156. Questo metodo che a cagione dell'indeterminate m ec. introdotte nell'equazioni, si chiama *dei Coefficienti Indeterminati*, vale anche per l'equazioni lineari di un qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n-1$ d'equazioni $mp - \frac{m\,dy}{dx} = 0$, $kq - \frac{k\,dp}{dx} = 0$, $gr - \frac{g\,dq}{dx} = 0$ ec., si integreranno con la stessa facilità, fuorchè quando y ha un coefficiente $q = 0$, o l'equazione si riduce a $\frac{d^n y}{dx^n} = X$, che per altra via si è già integrata (146): il giro però sarà in queste più lungo attese l'equazioni $n-1$ da cui debbon dedursi i valori dell'indeterminate k, g ec. dati per m, e quelle del grado $(n-1)^{simo}$ dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''' ec. e quindi u', u'', u''' ec. L'equazioni che non hanno la forma delle precedenti, o non possono affatto integrarsi o esigono delle artificiose sostituzioni per separarne le variabili. D'ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione: ma non vi è regola generale per so-

stituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo quì vaj esempj di sostituzioni con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del primo e second'ordine, ove X, Y esprimon sempre una funzione di x o di y.

I. $x^2dx^2 + axydxdy = bdy^2$: compiendo il quadrato si ha $\left(xdx + \frac{aydy}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2y^2}{4} + b\right)dy^2$, ed estraendo la radice, $xdx = \frac{dy}{2}\left[\sqrt{(a^2y^2 + 4b)} - dy\right]$.

II. $4a^2x^2dx + 4a^2bxdx + 4abyxdx + 2ab^2ydx + b^2y^2dx - ab^3dy = 0$. Osservo che l'equazione può scriversi così: $(2ax + by + ab)^2dx - a^2b^2dx - ab^3dy = 0$; e supposto $(2ax + by + ab)^2dx = 0$, verrebbe $y = -\frac{2ax}{b} - a$. Faccio dunque $y = z - \frac{2ax}{b} - a$, $dy = dz - \frac{2adx}{b}$, e sostituendo e riducendo, viene $dx = \frac{abdz}{a^2 + z^2}$.

III. $-a^3dx - 3yx^2dx + 3y^2xdx - y^3dx + x^3dy + a^3dy = 0$. Osservo che supposto $3yxdx(y - x) = 0$, verrebbe $y = x$, il che si avrebbe anche dall' equazioni combinate $-dx(a^3 + y^3) = 0$, $dy(x^3 + a^3) = 0$. Faccio dunque $y = z + x$, $dy = dz + dx$, e sostituendo e riducendo, viene $\frac{dz}{z^3} = \frac{dx}{a^3 + x^3}$.

IV. $x^2dx + xydy + y^2dx = Xdx$; fatto $xy = z$, si ha $zdz = (X - x^2)xdx$.

V. $2ydy + xdy + ydx = (a + x + y)Ydy$; fatto $x + y = z$, viene $ydz + zdy = (a + z)Ydy$: fatto $yz = u$, viene $du - \frac{uYdy}{y} = aYdy$: fatto $\frac{Ydy}{y}$

$= \frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu - udq}{q^2} = \frac{aYdy}{q}$: fatto $\frac{u}{q} = p$, viene infine $dp = \frac{aYdy}{q}$.

VI. $\frac{2x^2dx + xydy + y^2dx}{x^4 + x^2y^2 + a^4} = \frac{xdx + ydy}{a^2\sqrt{(x^2 + y^2)}}$: fatto $x^2 + y^2 = z^2$, viene $\frac{z(xdz + zdx)}{x^2z^2 + a^4} = \frac{dz}{a^2}$: fatto $zx = p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2 + a^4} = \frac{dz}{z}$.

VII. $\frac{Ydy}{x^2} = aY'dy - \frac{dx}{x}$: fatto $aY'dy = \frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^3} = \frac{xdz - zdx}{zx^2}$: fatto $\frac{z}{x} = p$, viene $\frac{Ydy}{z^2} = \frac{dp}{p^3}$.

VIII. $(x + y)^2dy = a^2dx$: fatto $x + y = z$, si ha $z^2(dz - dx) = a^2dx$, cioè $dx = \frac{z^2dz}{a^2 + z^2}$.

IX. $-\frac{a^3dx}{x} + bydx = aydy$: fatto $bx - ay = az$, viene $bxdz = azdz + \frac{a^3dx}{x}$: fatto $zdz = \frac{a^2dp}{p}$; viene $bxdz = \frac{a^3(pdx + xdp)}{px}$: fatto $px = u$, viene $\frac{bdz}{p} = \frac{a^3du}{u^2}$.

X. $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} + \frac{(m+1)y^2dx}{x} = ydy$, cioè $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + \frac{(m+1)bydx}{x} = y^2\left(\frac{dy}{y} - \frac{(m+1)dx}{x}\right)$: fatto $ly - (m+1)lx = lp$, $y = px^{m+1}$, viene $\frac{-x^mdx}{a^{m-1}} + (m+1)bpx^mdx = px^{2m+2}dp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}}(-1 + (m+1)a^{m-1}$

$= a^{m-1} pdp$, cioè $\frac{dx}{x^{m+2}} = \frac{a^{m-1}pdp}{(m+1)a^{m-1}bp-1}$.

XI. $mydx + nxdy = y^r dy$ ovvero $xy\left(\frac{mdx}{x} + \frac{ndy}{y}\right) = y^r dy$: fatto $mlx + nly = lp$, $x^m y^n = p$, viene $\frac{p^{\frac{1}{m}}dp}{y^{\frac{n}{m}}p} = y^{r-1}dy$, cioè $\frac{dp}{p^{\frac{m-1}{m}}} = y^{\frac{rm+n-m}{m}} dy$.

XII. $\frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$: fatto $x = pz$, $y = p\sqrt{(1-z^2)}$, viene $\frac{-dz}{\sqrt{(p^2dz^2 + dp^2(1-z^2))}} = p$: fatto $dz = udp$, quadrando, sostituendo il valor di $u = \frac{dz}{dp}$ ed estraendo la radice, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{pdp}{\sqrt{(1-p^4)}}$.

XIII. $aydy = y^2dx + x^2dx$ cioè $x^2dx = y^2\left(\frac{ady}{y} - dx\right)$: fatto $aly - x = lz$, $\frac{y^a}{e^x} = z$, $y = z^{\frac{1}{a}} e^{\frac{x}{a}}$, viene $x^2dx = \frac{z^{\frac{2}{a}} e^{\frac{2x}{a}} dz}{z}$, cioè . . . . $\frac{x^2dx}{e^{\frac{2x}{a}}} = \frac{dz}{z^{\frac{a-2}{a}}}$.

XIV. $dy = \frac{yxdx}{x^2 - a^2} - \frac{y^3dx}{x^3}$: fatto $x^2 - a^2 = z^2$, $y = pz$, $dy = zdp + pdz = zdp + \frac{pxdx}{z}$, viene $zdp + \frac{pxdx}{z} = \frac{pxdx}{z} - \frac{z^3p^3dx}{x^3}$, cioè $\frac{dp}{p^3} = \frac{(a^2 - x^2)dx}{x^3}$.

XV. $\frac{y^2dx - xydy}{\sqrt{(y^2dx^2 - 2xydydx + y^2dy^2)}} = Y$: fatto $\frac{x}{y} = z$ onde $x = yz$ e $dx = ydz + zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2 - z^2dy^2 + dy^2)}} = Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene $\frac{dz^2}{1-z^2} = \frac{Y^2dy^2}{y^4 - Y^2y^2}$, cioè $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{Ydy}{y\sqrt{(y^2 - Y^2)}}$.

XVI $2y^2dyddy\sqrt{xy} + y^2dy^3\sqrt{\frac{x}{y}} = dx^2(ydx - xdy)$ ove dx è costante: fatto $\frac{x}{y} = z$, viene $ydy^2 = dx^2(2\sqrt{z} + C)$.

XVII. $xddx + dx^2 = -\frac{yx^3dx^2}{a^3}$ ove dy è costante: fatto $xdx = zdy$, viene $\frac{a^3dz}{z^2} = -ydy$.

XVIII. $a^{2m}dy^{m-1}ddy = Ydx^m$ ove è costante dx: fatto $dy = zdx$, viene $a^{2m}z^{m-1}dz = Ydy$.

XIX. $adxdy = (2addx - 2xddx - 2ddy\sqrt{x} - dx^2)(a-x)\sqrt{x}$: se si faccia $a - x = p^2$ e $dy = pdz$, viene $\frac{adxdz}{2p^2\sqrt{x}} = pddx - \frac{dpdz\sqrt{x}}{p} - ddz\sqrt{x} - \frac{dx^2}{2p}$, cioè posto il valor di $a = p^2 + x$ e di $dx = -2pdp$, $ddz\sqrt{x} + \frac{dxdz}{2\sqrt{x}} = pddx - \frac{dx^2}{2p}$ il cui integrale è $dz\sqrt{x} = pdx$ cioè $pdz(=dy) = \frac{p^2dx}{\sqrt{x}} + C$.

XX. $Ydx^2 - mdy^2 - nyddy = 0$ ove dx

è costante: fatto $dx = z y^{\frac{m}{n}} dy$ onde $o = y^{\frac{m}{n}} dy dz + \frac{m}{n} z y^{\frac{m-n}{n}} dy^2 + z y^{\frac{m}{n}} ddy$, cioè $n y ddy = - m dy^2 - \frac{n y dy dz}{z}$, viene $Y y^{\frac{2m-n}{n}} dy = - \frac{n dz}{z^3}$ e $dx = y^{\frac{m}{n}} dy \sqrt{\frac{n}{2\int (Y y^{\frac{2m-n}{n}} dy + C)}}$.

157. Del resto dal non potersi separar le variabili non bisogna dedurre che l'equazione non è integrabile: ve ne sono alcune che ricusando in certi casi la separazione, possen generalmente integrarsi; e tale è la famosa *Equazione del Conte Riccati* $dy = a x^m dx + b y^2 dx$, sopra cui lasceremo che si consulti il Calcolo Integrale di Le Seur e Iacquier. Ecco ora dei problemi sul metodo inverso delle tangenti.

Probl. I. Trovar la curva la cui suttangente $\frac{y dx}{dy} = \frac{m x}{n}$. Si avrà dunque separando, $\frac{n dx}{x} = \frac{m dy}{y}$, e integrando, $n lx = m ly + lC$; fatto dunque $x = y = c$, sarà $lC = (n - m) lc$, onde $y^m = x^n c^{m-n}$, equazione cercata.

II. Qual'è la curva che ha per suttangente $\frac{y dx}{dy} = \frac{a^2 + x^2}{x}$? Si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{x dx}{a^2 + x^2}$ ed integrando, $ly = l(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + lC = lC(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, onde $y = C\sqrt{(a^2 + x^2)}$: fatto $x = o$,

divien costante l'ordinata $y = Ca = b$, onde $C = \frac{b}{a}$; perciò $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2)$, equazione all'iperbola.

41. III. Qual'è la curva in cui lo spazio $ABM = \frac{m}{n} AMQ$? si ha dunque $\frac{m}{n}\int x dy = \int y dx$ (132), $\frac{m dy}{y} = \frac{n dx}{x}$, $y^m = x^n a^{m-n}$.

42. IV. Trovar la curva BM il cui spazio $ABMP$ eguagli l'arco BM moltiplicato per una costante a, onde $\int y dx = a\int \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Dunque $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - a^2)}}$; ed integrando, $\frac{x}{a} = l\frac{c}{a}[y + \sqrt{(y^2 - a^2)}]$ (97).

43. V. Trovar la curva AM, in cui il raggio osculatore $MC = \frac{m}{n} MN$. Poichè $MO : MC :: MP : MN$, supposta dx costante, sarà (51) $\frac{m}{n} y = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, ovvero $\frac{m}{n} y ddy + dx^2 + dy^2 = o$. Per integrare, sia $dx = p dy$ e differenziando, $ddy = -\frac{dp dy}{p}$ e sostituendo nell'equazione, $\frac{n dy}{m y} = \frac{dp}{p(p^2 + 1)}$; dunque $\frac{n}{m} l\frac{y}{c} = l\frac{p}{\sqrt{(p^2 + 1)}}$ (31), $p = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}}}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}})}}$, e $dx = \frac{\pm y^{\frac{n}{m}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2n}{m}} - y^{\frac{2n}{m}})}}$, e questa è l'equazione differenziale del primo ordine della curva cercata.

Se $n = m$, si ha $dx = \pm y dy (c^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, ed $x = c' \pm \sqrt{(c^2 - y^2)}$, equazione al circolo. Se

$m = 2n$, si ha $dx = \frac{\pm dy \sqrt{y}}{\sqrt{(c-y)}}$, equazione alla cicloide.

VI. Trovar la curva BM tale che conducendo per l'origine A dell'ascisse la retta AO che faccia coll'asse un angolo di 45°, stia sempre l'ordinata PM alla suttangente PT :: una linea data $a : OM$. Dunque $dy : dx :: a : y - x$, e $a\,dx = (y - x)\,dy$. Sia $y - x = z$ e si avrà $dx = dy - dz$, onde sostituendo nell'equazione, $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{a - z}$, $\frac{y}{a} = l\frac{C}{a - z}$, ed $x = y - a + Ce^{-\frac{y}{a}}$, che potea trovarsi anche per i numeri 151 e 152. La minima ordinata BD si ha facendo $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x} = \infty$ (60) e allora $x = y = al\frac{C}{a} = BD = AD$. Lo spazio $DBMP = PQ - DC - BCQM = xy - a^2 l^2 \frac{C}{a} - \int x\,dy$ (132). 44.

Ora $\int x\,dy = \int (y\,dy - a\,dy + Ce^{-\frac{y}{a}} dy) = C' + \frac{y^2}{2} - ay - aCe^{-\frac{y}{a}}$ (108), e sostituendo in $-ay$ il valor di $y = x + a - Ce^{-\frac{y}{a}}$, verrà $\int x\,dy = C' + \frac{y^2}{2} - ax - a^2$: ma quando lo spazio $BCQM$ svanisce, si ha $y = AC = al\frac{C}{a}$ ed $x = CB = al\frac{C}{a}$, onde $C' = a^2 + a^2 l\frac{C}{a} - \frac{a^2}{2}$

$l^2 \frac{C}{a}$; dunque $\int x\,dy = \frac{y^2}{2} - ax + a^2 l\frac{C}{a} - \frac{a^2}{2} l^2 \frac{C}{a}$, ed infine $DBMP = xy - \frac{y^2}{2} + ax + a^2 l\frac{a}{C} + \frac{a^2}{2} l^2 \frac{a}{C}$.

45. VII. Trovar la curva EM che faccia per tutto coll'ordinata PM un angolo EMP o TMP proporzionale all'ascisa AP, che sarà perciò m^{pla} dell'arco o angolo TMP.

Si avrà dunque $TMP = \frac{x}{m}$, e $y : \frac{y\,dx}{dy} :: 1 : \text{tang}\,\frac{x}{m} = \frac{dx}{dy}$; dunque $\frac{dy}{m} = \frac{dx}{m} \cot \frac{x}{m} = \frac{\frac{dx}{m} \cos \frac{x}{m}}{\text{sen}\,\frac{x}{m}}$, e però $y = C + m\,l\,\text{sen}\,\frac{x}{m}$; equazione che nel caso di $y = 0$ dando $l\,\text{sen}\,\frac{x}{m} = -\frac{C}{m} = -\frac{Cle}{m}$, cioè $\text{sen}\,\frac{x}{m} = e^{-\frac{C}{m}}$, e però $x = m \times$ arco di circolo il cui seno è $e^{-\frac{C}{m}}$, fa vedere che la curva incontra la linea dell'ascisse in punti E, F, E', F' ec. tali, che $l\,\text{sen}\,\frac{x}{m} = -\frac{C}{m}$, ed x eguaglia m moltiplicata per tutti gli archi, i cui seni sono $= e^{-\frac{C}{m}}$. Ora il numero di questi archi è infinito; poichè se il primo è a, quelli che avranno lo stesso seno saranno a, $c - a$, $2c + a$, $3c - a$, $4c + a$, $5c - a$, ec: quindi le distanze a cui la curva incontrerà la linea dell'ascisse, saranno espresse per $ma, m(c-a), m(2c+a), m(3c-a)$ ec. Presa dunque $AE = ma$, $AF = mc - ma$, $AE' = 2mc + ma$, $AF' = 3mc - ma$ ec., si avranno i valori positivi di x. Si troveranno parimente i suoi valori negativi, cioè le ascisse prese verso la sinistra di AS, e si vedrà inoltre che gli intervalli EF, $E'F'$ ec. sono eguali. 45.

Fatto ora $\frac{dy}{dx} = cot\,\frac{x}{m} = 0$ per avere il massimo, sarà $sen\,\frac{x}{m} = 1$, e i valori che soddisfanno nel senso positivo a quest'equazione, preso $a = 90^\circ = \frac{c}{2}$ nella serie $a, c-a, 2c+a$ ec., sono

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{5}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{9}{2}c,\ \frac{x}{m} = \frac{13}{2}c,\ \text{ec.}$$

e poichè in questo caso $sen\,\frac{x}{m} = 1$ e $l\,sen\,\frac{x}{m} = 0$, si ha $y = C$; onde ai punti più elevati C, C' ec. le ordinate son eguali fra loro ed alla costante.

Se nell'equazione $y = C + l\,sen^m\,\frac{x}{m}$ si faccia $sen^m\,\frac{x}{m} = 0$, sarà $y = C + l0 = C - \infty = -\infty$, ovvero $-y = \infty$, e però a tutti gli archi o ascisse x che danno $sen^m\,\frac{x}{m} = 0$, corrisponde un'ordinata negativa $-y$ che è infinita o asintoto della curva: ora quest'archi sono $x = 0$, $x = \pm cm$, $x = \pm 2cm$ ec. in infinito; dunque la curva ha un numero infinito d'asintoti perpendicolari all'asse. Il primo passa per l'origine dell'ascisse ove $x = 0$ ed è AS, il secondo passa per D alla distanza $AD = cm$, il terzo ad una distanza $AD' = 2AD = 2cm$ ec. Lo stesso è nel senso negativo.

Prima di passare ad altro proporremo alcuni Problemi sopra i due Calcoli Differenziale ed Integrale.

158. I. Data una Curva di nota tangente e presa in ogni sua ordinata una media proporzionale tra l'ordinata stessa e la corrispondente ascissa, condur la tangente alla nuova Curva che passa per l'estremità delle medie proporzionali. *Ris.* Se x, y sieno le coordinate della curva data e z l'ordinata della nuova curva, la sua suttangente sarà . . . . $\frac{2z^2dx}{xdy + ydx}$, che essendo la data curva o una parabola o un circolo del raggio a, diviene $\frac{4x}{3}$ o $\frac{4ax - 2x^2}{3a - 2x}$ ec.

159. II. Trovare il punto di flesso contrario nella curva dell'equazione $y = \frac{ax}{\sqrt{(rx - x^2)}}$. *Ris.* il punto cercato corrisponde all'ordinata che ha per ascissa $x = \frac{r}{4}$.

160. III. Qual'è la linea retta che con due date forma il triangolo massimo? *Ris.* L'ipotenusa; cioè il triangolo massimo è il rettangolo.

161. IV. Qual è il massimo dei triangoli iscrittibili in un dato circolo e sopra una corda data? *Ris.* L'isoscele.

162. V. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz che abbia il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = z = \sqrt{ab}$.

163. VI. Di una data superficie ab formare un rettangolo xz, tre de' cui lati abbiano il minimo perimetro. *Ris.* Si troverà $x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, $z = \sqrt{2ab}$.

164. VII. Qual è il minimo dei quadrati iscrit-

tibili in un dato quadrato? *Ris.* Se a sia il lato del dato, quello del minimo si troverà $\sqrt{\frac{a^2}{2}}$.

165. VIII. Qual è il massimo in superficie convessa di tutti i cilindri iscrtttibili in una data sfera? *Ris.* Se $2r$ sia il diametro della sfera, quello della base del massimo cilindro sarà $r\sqrt{2}$.

166. IX. Qual deve essere il rapporto tra il diametro della base e l'altezza d'una Misura cilindrica di data capacità affinchè la sua superficie intera sia un minimo? *Ris.* Il rapporto dee essere di $2:1$, come si trovò sopra (159).

167. X. Qual è il massimo dei cilindri iscrittibili in un cono dato? *Ris.* Se $2c$ sia il diametro della base del cono, quella del cilindro cercato avrà per diametro $\frac{4c}{3}$.

168. XI. Determinare il valor dei rotti 1° $\frac{b(a-x)^2}{(a-x)^2}$ quando $x=a$; 2° $\frac{1-sen\,x+cos\,x}{sen\,x+cos\,x-1}$ quando $x=90^\circ$; 3° $\frac{1-x}{lx}$ quando $x=1$; 4° . . . $\frac{x^x-x}{1-x+lx}$ quando $x=1$. *Ris.* I valori cercati si troveranno $b, 1, -1, -2$.

169. XII. Integrare $\frac{z\,dz}{z^3-c^3}$. *Ris.* $\int\frac{z\,dz}{z^3-c^3} = \frac{l(z-c)}{3c} - \frac{l(c^2+cz+z^2)}{6c} + \frac{1}{c\sqrt{3}} \times arc.\ tang\ \frac{2z+c}{c\sqrt{3}} + C$.

170. XIII. Integrare $yx\,dx$ posto $y=\sqrt{(2ax-x^2)}$. *Ris.* $\int yx\,dx = a\int y\,dx - \frac{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}{3}$.

171. XIV. Integrar le formule $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, . . .

$\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, $\frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$, ... $\frac{a\,dx-x\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$. *Ris.* 1° $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.\ sen\ x$; 2° $\int\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}} = arc.\ cos\left(1-\frac{x}{a}\right)$; 3° . . . . . . $\int\frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = arc.\ cos\left(\frac{2x}{b}-1\right)$; 4° . . . . $\int\frac{a\,dx}{2\sqrt{(ax-x^2)}} = arc.\ sen\ v.\ x$ in un circolo del raggio $\frac{a}{2}$; 5° $\int\frac{a\,dx-x\,dx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \sqrt{(ax-x^2)} +$ *arc. sen v.* x in un circolo del raggio $\frac{a}{2}$.

172. XV. Integrar $\frac{d\varphi}{(1-b\cos\varphi)^2}$ supposto $b<1$. *Ris.* $\int\frac{d\varphi}{(1-b\cos\varphi)^2} = \frac{b\,sen\,\varphi}{(1-b^2)(1-b\cos\varphi)} + \ldots \frac{2}{(1-b^2)^{\frac{3}{2}}}\ arc.\ tang\ \frac{(1+b)\,sen\,\varphi}{(1+cos\varphi)\sqrt{(1-b^2)}} + C$.

173. XVI. Integrar le formule $x^n dx\ sen\ x$, $x^n dx\ cos\ x$. *Ris.* 1° $\int x^n dx\ sen\ x = -x^n cos\ x + n x^{n-1} sen\ x + n(n-1)x^{n-2} cos\ x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} sen\ x - n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} cos\ x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.; 2° $\int x^n dx\ cos\ x = x^n sen\ x + n x^{n-1} cos\ x - n(n-1)x^{n-2} sen\ x - n(n-1)(n-2)x^{n-3} cos\ x + \ldots + \ldots - \ldots -$ ec.: preso alternativamente in ambedue i casi $sen\ x$ e $cos\ x$ fino al termine ove si trova x^{n-n} col quale è compita l'integrazione.

174. XVII. Quadrar la curva dell' equazione

$y^m = a + x$. *Ris.* $\int y\,dx = \ldots\ldots\ldots$

$$\frac{m\left[(a+x)^{\frac{m+1}{m}} - a^{\frac{m+1}{m}}\right]}{m+1}.$$

175. XVIII. Quadrare e rettificar la curva trascendente dell' equazione $dx = \pm \frac{dy}{y}\sqrt{(a^2-y^2)}$. *Ris.* Lo spazio asintotico ed infinitamente lungo compreso dalla curva e dal suo asintoto eguaglia il quadrante d' un circolo del raggio a: un suo arco qualunque eguaglia la corrispondente ascissa d' una logaritmica che cominci dal vertice della curva ed abbia a per suttangente.

176. XIX Rettificar la curva dell' equazione $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+x^2)}}$. *Ris.* $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)} = \sqrt{(2ax+x^2)}$.

177. XX Misurar l' intero solido prodotto dalla rivoluzion della cissoide intorno al diametro del suo circolo genitore. *Ris.* Il solido è infinito.

178. XXI. Misurar la superficie del solido generata dalla rivoluzione intorno all' asintoto dello spazio asintotico ed infinitamente lungo del n°. 175. *Ris.* La superficie eguaglia il circolo del raggio $a\sqrt{2}$.

179. XXII. Misurar la solidità e la superficie convessa dell' unghia cilindrica formata dal taglio obliquo d' un cilindro retto in modo che la sezione passi per il centro della base. *Ris.* Se sia r il raggio della base del cilindro, a l' altezza dell' unghia, se ne troverà la solidità $= \frac{2ar^2}{3}$, e la superficie $= 2ar$.

180. XXIII. Trovar la curva la cui tangente è

R

costante ed $= a$. *Ris.* L' equazione della curva cercata sarà $dx = \pm\frac{dy}{y}\sqrt{(a^2-y^2)}$.

181. XXIV. Trovar la curva la cui suttangente è $\frac{x^4}{2x^3+ay^2+y^2x}$. *Ris.* L' equazione è $y^2 = \frac{x^4}{2C - 2ax - x^2}$.

182. XXV. Trovar la curva la cui sunnormale è $\frac{-y^4}{xy^2+bx^2}$. *Ris.* L' equazione è $y^4 = C^4\left(b + \frac{2y^2}{x^2}\right)$.

183. XXVI. Trovar la curva la cui area è $\frac{x^3}{3a}$. *Ris.* La curva è una parabola.

Dell' Integrazione dell' Equazioni a Differenze finite.

184. Sieno l' equazioni lineari del prim' ordine $I^a.\ y + \frac{p\delta y}{\delta x} = 0$, $II^a.\ y + \frac{p\delta y}{\delta x} = X$, ove $\delta x = 1$ (2) e p, X son funzioni di x. Per integrar la I., giacchè se δy fosse infinitesimo si avrebbe $y = e^{-\int\frac{dx}{p}}$ (151), prendo $y = e^u$ ed ho $y + \delta y = e^{u+\delta u}$ (3), $\delta y = e^u(e^{\delta u} - 1)$, $\frac{\delta y}{y} = e^{\delta u} - 1 = -\frac{1}{p}$, $\delta u = l\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ ed $u = \sigma l\left(1 - \frac{1}{p}\right)$, $y = e^u = e^{\sigma l\left(1 - \frac{1}{p}\right)} + C$. Per integrar la seconda equazione, fatto come sopra (151) $y = rz$, avremo $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$, e l' equazione si cangierà in $rz + pr\delta z + pz\delta r + p\delta r\delta z = X$; onde se sia al solito (151) $III^a.\ rz + pz\delta r = 0$, verrà $IV^a.\ pr\delta z$

$+ p\delta r \delta z = X$. La III. si integra come la I. e si ha $r = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}$ ed $r + \delta r = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p}) + \delta \sigma l(1 - \frac{1}{p})} = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p}) + l(1 - \frac{1}{p})} = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} \times e^{l(1 - \frac{1}{p})} = (32)\ (1 - \frac{1}{p})\, e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}$: perciò la IV. ci dà $\delta z = \frac{X}{p(r + \delta r)} = \frac{X}{(p-1)\, e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}}$ e $z = C + \sigma \frac{X}{(p-1)\, e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}} = \frac{y}{r}$, onde $y = e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})} \left(C + \sigma \frac{X}{(p-1)\, e^{\sigma l(1 - \frac{1}{p})}} \right)$.

185. Poichè la somma σ di tutti i valori di $l(1 - \frac{1}{p})$ dipende da x di cui $1 - \frac{1}{p}$ è funzione (184), ed $x = \delta(x - 1 + x - 2 + x - 3$ ec.$)$ (4), si avrà $\sigma l(1 - \frac{1}{p})$ col cangiar successivamente x in $x - 1$, in $x - 2$, in $x - 3$.... in 3, in 2, in 1 e col prender la somma dei logaritmi di queste quantità o il logaritmo del loro prodotto che chiamo $l\pi(1 - \frac{1}{p})$. Quindi l'equazione III. di sopra diverrà integrandola $r = e^{l\pi(1 - \frac{1}{p})} = \pi(1 - \frac{1}{p})$, e chiamando p' il termine che viene immediatamente dopo p nella serie ec. $'p, p, p'$ ec., sarà $r + \delta r = \pi(1 - \frac{1}{p'})$; dunque $\delta z = \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{1}{p'})}$, $z = C + \sigma \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{1}{p'})} = \frac{y}{r}$, ed $y = \pi(1 - \frac{1}{p}) \left(C + \sigma \frac{X}{p \cdot \pi(1 - \frac{1}{p'})} \right)$. Così data $y + (x + 1)\delta y + a(2x + 1) = 0$, sarà $p = x + 1$, $1 - \frac{1}{p} = \frac{x}{x + 1}$, $\pi(1 - \frac{1}{p}) = \frac{x - 1}{x} \cdot \frac{x - 2}{x - 1} \cdot \frac{x - 3}{x - 2} \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x}$, $p' = x + 2$, $1 - \frac{1}{p'} = \frac{x + 1}{x + 2}$, $\pi(1 - \frac{1}{p'}) = \frac{x}{x + 1} \cdot \frac{x - 1}{x} \cdot \frac{x - 2}{x - 1} \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{1}{x + 1}$, ed $X = -a(2x + 1)$; onde $y = \frac{1}{x}(C - a\sigma(2x + 1)) = \frac{1}{x}(C - ax^2)\ (7) = \frac{C}{x} - ax$. Parimente data $y' = fy + g$, atteso $y' = y + \delta y$ (2), si avrà $y + \frac{\delta y}{1 - f} = \frac{g}{1 - f}$, onde $p = \frac{1}{1 - f}$, $1 - \frac{1}{p} = f$, $1 - \frac{1}{p'} = f'$, $X = \frac{g}{1 - f}$ ed $y = \pi f\left(C + \sigma \frac{g}{\pi f'}\right)$: ove supposta f costante, saranno πf, $\pi f'$ dei prodotti f^n, f^{n+1} di f moltiplicata per se stessa tante volte n, $n + 1$ quanti sono i termini che precedono y, y' nella serie ec. $'''y$, $''y$, $'y$, y, y' ec., ed in tal caso si avrà $y = f^n\left(C + \sigma \frac{g}{f^{n+1}}\right)$; e se sia costante anche g, il rimanente integrale $\sigma \frac{1}{f^{n+1}}$ esprimerà la somma $\frac{f^n - 1}{f^n(f - 1)}$ della progression geometrica $\frac{1}{f^n}$, $\frac{1}{f^{n-1}} \ldots \frac{1}{f}$, cioè la somma di tutti i valori che si hanno da $\frac{1}{f^{n+1}}$ cangiando successivamente n in n

$= 1, n-2 \ldots 3, 2, 1$; si avrà dunque allora $y = Cf^n + \frac{g(f^n - 1)}{f-1}$.

Può sciogliersi con questo metodo il Problema seguente. Data al frutto semplice di m per 1 una sorte p, risolvo di consumar in t anni e sorte e frutti, spendendo annualmente un' egual somma. Cerco la somma x che potrò spendere ogn' anno.

Suppongo che nell' anno n^{simo} la sorte sia ridotta ad y onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende x, la sorte nel seguente anno $(n+1)^{simo}$ sarà $y' = (m+1)y - x$, equazione da cui si ha $f = m+1$, $g = -x$, ed essendo x costante, $y = C(m+1)^n - \frac{x[(m+1)^n - 1]}{m}$: ma quando gli anni sono $n = 1$ si ha la sorte $y = p$; dunque $p = C(m+1) - x$, $C = \frac{p+x}{m+1}$ ed $y = \frac{x}{m} + (p - \frac{x}{m})(m+1)^{n-1}$. Or tutto vuol consumarsi negli anni $n = t$, e perciò nell' anno $n = t+1$ dee aversi $y = 0$; dunque $0 = \frac{x}{m} + (p - \frac{x}{m})(m+1)^t$ e la somma cercata $x = \frac{mp(m+1)^t}{(m+1)^t - 1}$.

186. Sia anche l' equazion lineare del second' ordine $y + a\delta y + b\delta^2 y = X$ in cui a, b son co- stanti e $\delta x = 1$. Secondo il metodo dei coefficienti indeterminati (152) pongo $mp - m\delta y = 0$ e som- mate le due equazioni, viene I^a. $y + (a+m)p - m\delta y + b\delta p = X$. Supposto al solito (152) $y + (a+m)p = \frac{1}{m}\sigma(m\delta y - b\delta p) = y - \frac{bp}{m}$, abbiamo $a + m = \frac{-b}{m}$ con che si determinano i valori m', m'' di m (152); e fatto II^a. $y + (a+m)p$

$= u = y - \frac{bp}{m}$ e perciò $\delta u = \delta y - \frac{b\delta p}{m}$ ovvero $m\delta u = m\delta y - b\delta p$, la I. equazione diverrà $u - m\delta u = X$ che si dà (185) $u = \pi(1 + \frac{1}{m})(C - \sigma \frac{X}{m \cdot \pi(1+\frac{1}{m})})$; onde fatta la costante $1 + \frac{1}{m} = h$ e però $m = \frac{1}{h-1}$, si avrà $u = h^n(C - (h-1)\sigma \frac{X}{h^{n+1}})$ (185); e se anche X fosse costante, verrebbe $u = h^n(C - (h-1)X\sigma\frac{1}{h^{n+1}}) = Ch^n - X(h^n - 1)$ (185). Posti pertanto in questi i due valori m', m'' di m o h', h'' di h, si avranno i due u', u'' di u, e quindi al solito $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$ (152).

E' evidente che l' equazioni simili del terzo, quarto... r^{simo} ordine si posson risolvere con lo stesso metodo (154. 156).

187. Bisogna eccettuarne al solito (156) l' equazione $qy + a\delta y + b\delta^2 y \ldots + \omega\delta^r y = X$ quando si ha $q = 0$, o resta solamente $\omega\delta^r y = X$: ma in quest' ultimo caso può applicarsi alle differenze finite il metodo delle ripetute integrazioni (146). Supponghiamo per brevità $\omega = 1$, $r = 4$, $X = 0$, e dovrà integrarsi $\delta^4 y = 0$ ovvero $\frac{\delta^4 y}{\delta x^3} = 0$: dunque 1°. $\frac{\sigma\delta^4 y}{\delta x^3} = \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = C$, o $\frac{\delta^3 y}{\delta x^2} = C\delta x$; 2°... $\frac{\sigma\delta^3 y}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = C\delta x\,\sigma 1 + C' = (7)\, Cx + C'$, o $\frac{\delta^2 y}{\delta x}$

$= \delta x \, C x + C' \delta x$; 3°. $\dfrac{\sigma \delta^2 y}{\delta x} = \dfrac{\delta y}{\delta x} = C \delta x \, \sigma x + C' \delta x \, \sigma 1 + C'' = (7)\ C\left(\dfrac{x^2 - x}{2}\right) + C' x + C''$, o $\delta y = C \delta x \left(\dfrac{x^2 - x}{2}\right) + \delta x \, C' x + C'' \delta x$; 4°. $\sigma \delta y = y = C \delta x \, \sigma \dfrac{x^2}{2} - C \delta x \, \sigma \dfrac{x}{2} + C' \delta x \, \sigma x + C'' \delta x \, \sigma 1 + C''' = (7)\ C\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{12}\right) - C\left(\dfrac{x^2 - x}{4}\right) + C'\left(\dfrac{x^2 - x}{2}\right) + C'' x + C''' = \dfrac{C x^3}{6} + \dfrac{(C' - C) x^2}{2} + \left(\dfrac{C}{3} - \dfrac{C'}{2} + C''\right) x + C'''$.

188. Si ha di quì la teorìa di varie specie di *Serie Ricorrenti*: ma noi ci limiteremo alle più semplici. Già si sa che l'equazione $\dfrac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2} = A + Bx + Cx^2$ ec. si riduce a

$$0 = \begin{cases} a^2 A + a^2 Bx + a^2 Cx^2 + a^2 Dx^3 + a^2 Ex^4 + \text{ec.} \\ -a^2 + 2aAx + 2aBx^2 + 2aCx^3 + 2aDx^4 + \text{ec.}, \\ \qquad\qquad - Ax^2 - Bx^3 - Cx^4 - \text{ec.} \end{cases}$$

e i due primi coefficienti A, B si determinano dall' equazioni $a^2 A - a^2 = 0$, $a^2 B x + 2aAx = 0$: riguardo agli altri C, D, E ec., si ha $C = \dfrac{-2B}{a} + \dfrac{A}{a^2}$, $D = \dfrac{-2C}{a} + \dfrac{B}{a^2}$, $E = \dfrac{-2D}{a} + \dfrac{C}{a^2}$ ec., d'onde la serie ricorrente $1 - \dfrac{2x}{a} + \dfrac{5x^2}{a^2} - \dfrac{12x^3}{a^3} + \dfrac{29x^4}{a^4}$ ec. $= \dfrac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$, *rotto genitore* della serie. Ora le costanti quantità $\dfrac{-2}{a}$, $+\dfrac{1}{a^2}$ dal cui prodotto nei respettivi coefficienti B, A o

C, B o D, C che precedono, nasce ciascuno dei coefficienti C, D, E ec. che seguono, si chiama *scala di relazione*; ed è facile osservare 1°. che *la scala di relazione è formata dai coefficienti che ha la variabile nel denominatore ordinato del rotto genitore, presi con segni contrarj e divisi per i termini costanti*: 2°. che *per avere il coefficiente di un nuovo termine della serie bisogna moltiplicar l'ultimo già trovato per il primo termine della scala di relazione, il penultimo per il secondo ec., e far la somma di tutto*. Così il rotto $\dfrac{1 + z + z^2}{1 - z - z^4 + z^5}$ si cangia nella serie $1 + 2z + 3z^2 + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8$ ec., la cui scala di relazione sarà $1, +0, +0, +1, -1$, e supposti trovati i primi cinque coefficienti $1, 2, 3, 3, 4$, per avere il sesto, il settimo ec., si farà $1.4 + 0.3 + 0.3 + 1.2 - 1.1 = 5$ coefficiente del sesto termine, $1.5 + 0.4 + 0.3 + 1.3 - 1.2 = 6$, coefficiente del settimo ec.

189. Data dunque una serie ricorrente $f + gx + hx^2 + kx^3$ ec. con la scala di relazione p, $+q$, $+r$ ec., la sua somma all'infinito sarà un rotto genitore $\dfrac{s + tx + ux^2 \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$ di cui la scala di relazione già somministra il denominatore (188). Per avere i coefficienti s, t, u, ec. del numeratore, si divida $s + tx + ux^2$ ec. per $1 - px - qx^2$ ec. e paragonando il quoziente $s + (t + ps)x + (u + qs + pt + p^2 s)x^2$ ec. con la serie data, si avrà $s = f$, $t = g - pf$, $u = h - pg - qf$, ec.; dunque la somma cercata sarà . . . . $\dfrac{f + (g - pf)x + (h - pg - qf)x^2 \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$. Così se la serie sia $1 - \dfrac{2x}{a} + \dfrac{5x^2}{a^2}$ ec., e la scala di relazione $\dfrac{-2}{a}$, $+\dfrac{1}{a^2}$, avremo $f = 1$, $g = \dfrac{-2}{a}$, $h =$

$\frac{5}{a^2}$ ec., $p = -\frac{2}{a}$, $q = \frac{1}{a^2}$, e la sua somma all' infinito sarà $\frac{a^2}{a^2 + 2ax - x^2}$ (188). Che se si voglia la somma fino ad un dato termine τx^n, i termini dopo di esso all' infinito saranno $v x^{n+1} + \varphi x^{n+2} + \chi x^{n+3}$ ec. $= x^{n+1} (v + \varphi x + \chi x^2 \text{ ec.}) = \frac{x^{n+1} [v + (\varphi - pv) x + (\chi - p\varphi - qv) x^2 \text{ ec.}]}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}$, e però la somma della serie si troverà . . . . .

$$\frac{f + (g - pf)x + (h - pg - qf)x^2 \text{ ec.} - vx^{n+1} - (\varphi - pv)x^{n+2} - (\chi - p\varphi - qv)x^{n+3} \text{ ec.}}{1 - px - qx^2 - rx^3 \text{ ec.}}:$$

onde nel caso d' una scala bimembre $p, +q$ quando $h = pg + qf$ e $\chi = p\varphi + qv$ (188), la somma fino al termine τx^n sarà . . . .

$$\frac{f + (g - pf)x - vx^{n+1} - (\varphi - pv)x^{n+2}}{1 - px - qx^2} = \ldots$$

$\frac{f + (g - pf)x - (p\tau + q\sigma)x^{n+1} - q\tau x^{n+2}}{1 - px - qx^2}$ perchè $v = p\tau + q\sigma$, $\varphi = pv + q\tau$ (188). Così volendo la somma della serie di sopra $1 - \frac{2x}{a}$ ec. fino al quinto termine $\frac{29x^4}{a^4}$, ella si troverà . . . . .

$$\frac{a^6 + 70ax^5 - 29x^6}{a^6 + 2a^5x - a^4x^2}.$$

190. Ma questa formula della somma involvendo i termini particolari f, g, h ec. v, φ, χ ec., non può darci il termine generale; onde alla ricerca di esso applicheremo l'equazioni a differenze finite. Supposta $q, +r$ la scala di relazione, yx^n il termine generale, y il general coefficiente della serie ec. $'yx^{n-1}, yx^n, y'x^{n+1}, y''x^{n+2}$ ec. ed n il numero dei termini la cui differenza costante è

$\delta n = 1$, si avrà $y'' = qy' + ry$ (188): ma $y' = y + \delta y$, $y'' = y + 2\delta y + \delta^2 y$ (3); dunque $y + \frac{(2 - q)\delta y + \delta^2 y}{1 - q - r} = 0$, che paragonata con l' equazione di sopra (186) ci dà $a = \frac{2 - q}{1 - q - r}$, $b = \frac{1}{1 - q - r}$, $X = 0$, $\frac{2 - q}{1 - q - r} + m = \frac{-1}{m(1 - q - r)}$, $m' = \frac{q - 2 + \sqrt{(q^2 + 4r)}}{2(1 - q - r)}$, $m'' = \ldots\ldots \frac{q - 2 - \sqrt{(q^2 + 4r)}}{2(1 - q - r)}$, $h' = \frac{\sqrt{(q^2 + 4r)} - q - 2r}{q - 2 + \sqrt{(q^2 + 4r)}}$, $h'' = \frac{-\sqrt{(q^2 + 4r)} - q - 2r}{q - 2 - \sqrt{(q^2 + 4r)}}$, $u' = Ch'^n$, $u'' = C'h''^n$ ed $yx^n = \frac{[(a + m')u'' - (a + m'')u']x}{m' - m''}$ (186). Così data la serie $1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec. $= 1x^0 + 0x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4$ ec., la cui scala di relazione $1, +2$, sarà $q = 1$, $r = 2$, $a = -\frac{1}{2}$, $m' = -\frac{1}{2}$, $m'' = 1$, $h' = -1$, $h'' = 2$, $u' = C(-1)^n$, $u'' = C'2^n$, $y = \frac{C'.2^{n+1} + C(-1)^n}{3}$; e poichè fatto $n = 0$, si ha dalla serie $y = 1$, e fatto $n = 1$ si ha $y = 0$, le due equazioni $1 = \frac{2C' + C}{3}$, $0 = \frac{4C' - C}{3}$ daranno $C' = \frac{1}{2}$, $C = 2$ ed $yx^n = \frac{(2^n \pm 2)x^n}{3}$, preso il segno $+$, o il segno $-$ secondo che n è pari o impari.

191. Accade talvolta che per esser $2 - q = 0$ ed $1 - q - r = 0$, si trovi $m' = m'' = \frac{0}{0}$: allora l'equazione $y + \frac{(2 - q)\delta y + \delta^2 y}{1 - q - r} = 0$ si riduce

a $\delta^2 y = 0$ ove la differenziale costante è $\delta n = 1$ (190); dunque $\sigma\delta^2 y = Cn + C'$ (187). Così data la serie $1 + 6x + 11x^2 + 16x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, + r = 2, - 1$ e perciò $q - 2 = 0$, ed $1 - q - r = 0$, sarà $y = Cn + C'$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 6$, le due equazioni $1 = C'$, $6 = C + C'$ o $5 = C$ danno $yx^n = (5n + 1)x^n$. Può anche avvenire che si trovi $m' = m'' = -\frac{a}{2}$ (158): allora fatta al solito $m' = -\frac{a}{2} + \omega$, $m'' = -\frac{a}{2} - \omega$, $h' = 1 + \frac{1}{m'} = \frac{2\omega - a + 2}{2\omega - a}$, $h'' = 1 + \frac{1}{m''} = \frac{2\omega + a - 2}{2\omega + a}$, $C = C' = K$ (153), e posto per comodo $a - 2 = g$, sarà $u' = K\left(\frac{g - 2\omega}{a - 2\omega}\right)^n$, $u'' = K\left(\frac{g + 2\omega}{a + 2\omega}\right)^n$, cioè sviluppando i binomj con trascurare ω^2, ω^3 ec., $u' = \frac{K(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{a^n - 2na^{n-1}\omega}$,

$$u'' = \frac{K(g^n + 2ng^{n-1}\omega)}{a^n + 2na^{n-1}\omega}, \text{ e però (186) } y = \ldots$$

$$\frac{K(a + 2\omega)(g^n + 2ng^{n-1}\omega)}{4\omega(a^n + 2na^{n-1}\omega)} - \ldots\ldots$$

$$\frac{K(a - 2\omega)(g^n - 2ng^{n-1}\omega)}{4\omega(a^n - 2na^{n-1}\omega)} = [Kan - Kg(n - 1)]\frac{g^{n-1}}{a^n};$$ onde fatto $Ka = C$, $Kg = C'$ e resti-

tuito il valor di $g = a - 2$, avremo $y = [Cn - C'(n - 1)]\frac{(a - 2)^{n-1}}{a^n}$. Così data la serie $1 + 2x - 5x^2 + 8x^3$ ec. la cui scala di relazione $q, + r = -2, -1$, sarà (190) $a = \frac{2 - q}{1 - q - r} = 1$ ed $y = [Cn - C'(n - 1)](-1)^{n-1}$; e poichè quando $n = 0$ si ha $y = 1$, e quando $n = 1$ si ha $y = 2$, le due equazioni $1 = -C'$, $2 = C$ danno $yx^n = (3n - 1)(-1)^{n-1}x^n$.

192. Anche nell'Analisi del *Caso* e della *probabilità* si adoperano le Differenze finite. Chiamando noi fortuito o *casuale* un successo allorchè ignoriamo le cagioni che posson farlo avvenire, siamo costretti a riguardar come *egualmente probabile* l'esistenza o inesistenza di due successi casuali se l'uno o l'altro dovendo necessariamente accadere, non vi sia maggior ragione per cui l'uno debba accader piuttosto che l'altro. Si riguarda pure come egualmente probabile l'esistenza di tre avvenimenti che a vicenda escludendosi mentre un di essi dee certamente aver luogo, non ci offrono intanto ragione alcuna onde lo debba aver questo piuttosto che quello: ma quì l'inesistenza di ciascuno è *più probabile* della sua esistenza nel raporto di 2 a 1. perchè di tre casi possibili l'inesistenza ne ha due in favore e uno solo contrario. Quindi le probabilità Π, Π' dell'esistenza o inesistenza d'un avvenimento son tanto maggiori o minori, quanto direttamente è più grande o più piccolo il numero dei casi F, C a lei favorevoli o contrarj, e quanto reciprocamente è più piccolo o più grande quello dei casi possibili P, onde sarà $\Pi = F \times \frac{1}{P} = \frac{F}{P}$ e $\Pi' =$

$C \times \frac{1}{P} = \frac{C}{P}$, e poichè i casi favorevoli F insieme coi contrarj C formano i casi possibili P, cioè $F + C = P$, si avrà $\Pi + \Pi' = 1$ ed 1 rappresenterà la *certezza*, essendo chiaro che un avvenimento dee di certo accadere o non accadere. Trovata la probabilità si determina la *speranza* Σ degli interessati all' esistenza dell' avvenimento, e questa speranza evidentemente risulta e dalla somma sperata S e dalla probabilità Π d'ottenerla, cioè $\Sigma = \Pi S = \frac{FS}{P}$. Ecco ora un Problema sulle probabilità per far vedere come si applichino a somiglianti ricerche le Differenze finite.

Presa a caso una quantità di monete da un mucchio n di esse, determinar la probabilità che il numero preso sia pari o casso, supponendo che possa prendersi una sola moneta, o più, o tutte. Chiamando y i casi in cui il numero preso può esser pari, e z quelli in cui può esser casso, una nuova moneta aggiunta al mucchio e combinata coi precedenti casi in casso, gli renderà tutti pari, onde allora la somma dei pari sarà I^a. $y' = y + z$; ma combinata coi precedenti casi pari, gli cangierà tutti in casso oltre l'unità aggiunta che è casso, onde la somma dei casi in casso sarà II^a. $z' = z + y + 1$. La I. dà $y + \delta y = y + z$ cioè $\delta y = z$ e però $\delta^2 y = \delta z$: dalla II. si ha $z + \delta z = z + y + 1$ cioè $\delta z (= \delta^2 y) = y + 1$ e però $y - \delta^2 y = -1$, equazione da cui abbiamo (186) $a = 0$, $b = -1$, $X = -1$, $m' = 1$, $m'' = -1$, $b' = 2$, $b'' = 0$, $u' = (C + 1) 2^n - 1$, $u'' = -1$ ed $y = (C + 1) 2^{n-1} - 1$: ma quando $n = 1$ non si hanno casi pari e però $y = 0$; dunque $C = 0$, $y = 2^{n-1} - 1$, $y' = 2^n - 1$, $z (= y' - y) = 2^{n-1}$.

Ora i casi y pari coi casi z in casso danno i casi possibili $P = y + z = 2^n - 1$; dunque la probabilità per i casi pari è $\Pi = \frac{F}{P} = \frac{y}{y + z} = \dots \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}$, e quella per gli impari $\Pi' = \frac{C}{P} = \dots \frac{z}{y + z} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$; e poichè $z^{n-1} > 2^{n-1} - 1$, la scommessa per il numero casso sarà sempre più vantaggiosa che per il pari.

Dell' Integrazione dell' Equazioni a Differenze parziali.

193. Supposta z una funzione di più variabili x, y ec., diconsi *a differenze parziali del prim' ordine* quelle equazioni in cui z, x, y ec. vanno unite con $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ ec. (121); *del secondo* allorchè oltre z, x, y ec., $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ ec. trovansi anche $\frac{d d^x z}{dx^2} = \frac{d^{2x} z}{dx^2}$, $\frac{d d^y z}{dy^2} = \frac{d^{2y} z}{dy^2}$ ec., $\frac{d^x d^y z}{dx\,dy} = \frac{d^y d^x z}{dy\,dx}$ ec. (121), differenze parziali seconde che nascono e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per x, $\frac{d^y z}{dy}$ per y ec. essendo costanti dx, dy ec., e dal differenziar $\frac{d^x z}{dx}$ per y o $\frac{d^y z}{dy}$ per x ec.: così si dica degli altri ordini successivi. Tali equazioni qualche volta s'incontrano nell' alta Geometria, e assai spesso nella Fisica Matematica più sublime: ma come il Calcolo Infinitesimale suppone perfetta l'Algebra, così quello dell' equazioni a differenze parziali suppone perfetto l'Infinitesima-

le. Per esempio, quì si assume che possa sempre trovarsi il fattore m che rende esatta la differenziale qualunque $Pdx + Qdy$ (147), e si riguarda come integrata un'equazione a differenze parziali quando è ridotta all'integrazion d'un'equazione a differenze ordinarie: se il fattore non possa aversi o se non si possa integrar l'equazione differenziale, il difetto sarà dei Calcoli inferiori, non di quello di cui trattiamo. Eccone alcune più elementari nozioni.

194. Se z sia funzione di x, y, si avrà $dz = Pdx + Qdy = d^x z + d^y z$ e però $\frac{d^x z}{dx} = P$, $\frac{d^y z}{dy} = Q$ (122). Dal che si raccoglie 1.° che l'espressioni $\frac{d^x z}{dx}$, $\frac{d^y z}{dy}$ son quantità variabili ma finite, denotanti il coefficiente P o Q di dx o di dy quando si differenzia z o per x o per y: 2.° che se nella differenziazione di z si prenda x o y costante, si ha $dz = d^y z = Qdy$ o $dz = d^x z = Pdx$, e l'integrale di queste equazioni sarà $z = \int^y Qdy + C$ o $z = \int^x Pdx + C'$ ove potrà essere $C = \varphi(x)$, $C' = \varpi(y)$ (122. 2.°) se d'altra parte non si sappia che tali funzioni non hanno luogo: 3.° che avendosi $\int Pdx = Px - \int xdP$, e $\int Qdy = Qy - \int ydQ$ (100), sarà $z = \int Pdx + \int Qdy = Px + Qy - \int (xdP + ydQ) = \frac{xd^x z}{dx} + \frac{xd^y z}{dy} - \int \left(x . d\left(\frac{d^x z}{dx}\right) + y . d\left(\frac{d^y z}{dy}\right) \right)$.

195. Dico ora che se z sia una funzione di x, y, onde $dz = d^x z + d^y z$, ella sarà anche una funzione di x, u (supposta u funzione di x, y) onde deno-

tando con $d'^x z$ la differenza di z per la nuova x, si avrà $dz = d'^x z + d^u z$. Infatti se $z = ax + by = nax + by - (n - 1)ax = \frac{(ax + by)}{x^n} x^n =$ ec., potrà farsi $u = nax + by$, $u = by - (n - 1)ax$, $u = \frac{ax + by}{x^n}$, $z = (ax + by)x^n$, $u =$ ec. ed u sarà sempre funzione di x, y, onde z lo sarà anche di x, u. Perciò u è indeterminata e suscettibile di infinite forme differenti.

196. Anzi può x soggettarsi a soddisfare ad una condizione richiesta, per esempio, che sia tale onde abbiasi $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$, intendendo per p una data funzione di x, y; poichè preso dall'equazione proposta e sostituito in $du = d^x u + d^y u$ il valor di $d^x u$, si avrà $du = d^y u - \frac{pdxd^y u}{dy} = \ldots \frac{d^y u}{dy}(dy - pdx)$: dunque supposto m il fattore che rende esatta la differenziale $dy - pdx$ (147) onde si abbia $mdy - mpdx = dt$, verrà $du = \frac{d^y u}{dy} . \frac{dt}{m}$; dunque u è funzione di t, ed essendo u indeterminata (195), può farsi $u = t$ onde $\frac{d^y u}{dy} = m$, valori che danno $\frac{d^x u}{dx} + \frac{pd^y u}{dy} = 0$. Così se si voglia u di modo che sia $\frac{d^x u}{dx} - \frac{yd^y u}{xdy} = 0$, avremo $p = -\frac{y}{x}$ e $dy - pdx = dy + \frac{ydx}{x}$, differenziale esatta se

si moltiplichi per $m = x = \frac{d^y u}{dy}$; dunque $xy = t = u$ e $\frac{d^x u}{dx} - \frac{y d^y u}{x dy} = y - \frac{yx}{x} = 0$.

197. Considerando dunque z come funzione di x, y e di x, u, si avrà $dz = d^x z + d^y z = d^x z + d^u z$ (195): ma $du = d^x u + d^y u$ ovvero $du d^u z = (d^x u + d^y u) d^u z$, e però $d^u z = \frac{d^u z}{du}(d^x u + d^y u)$; dunque $dz = d'^x z + \frac{d^u z}{du} . d^x u + \frac{d^u z}{du} . d^y u = d^x z + d^y z$, e quindi (194) $d^x z = d'^x z + \frac{d^u z}{du} . d^x u$ e $d^y z = \frac{d^u z}{du} . d^y u$.

198. Ciò premesso, poco vi vuole a integrar l'equazioni lineari del prim' ordine a tre variabili, che tutte comprendonsi nella generale $\frac{d^x z}{dx} + \frac{p d^y z}{dy} + q = 0$ essendo p una data funzione di x, y mentre q può esserlo di x, y, z. Poichè sostituiti in essa i valori di $d^x z$, $d^y z$ (197), si ha $\frac{d'^x z}{dx} + \frac{d^u z}{du}\left(\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy}\right) + q = 0$; e fatto $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0$ per determinare u (196), viene $\frac{d'^x z}{dx} + q = 0$. Posto dunque in q il valor di y ricavato da quello di u, onde q si cangi in q', avremo $d'^x z + q' dx = 0$: ma z è quì funzione di x, u e manca $d^u z$; dunque

u è costante (194. 2°); dunque $d'^x z = dz = - q' dx$, dunque $z = - \int^x q' dx + \varphi(u)$ (194. 2°).

Esempio. Debba integrarsi $\frac{d^x z}{dx} + \frac{y d^y z}{x dy} + \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0$: avremo $p = \frac{y}{x}$, $q = \frac{z}{y} - a\sqrt{(x^2 + y^2)}$ e $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p d^y u}{dy} = 0 = \frac{d^x u}{dx} + \frac{y d^y u}{x dy}$. Da questa equazione si ha (196) $du = \ldots \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{y dx}{x}\right)$, e poichè il fattore $m = \frac{1}{x}$ rende esatta la differenziale $dy - \frac{y dx}{x}$, verrà $\frac{y}{x} = t = u$, $y = ux$, $q' = \frac{z}{ux} - ax\sqrt{(1 + u^2)}$, e dovrà integrarsi $dz = - \frac{z dx}{ux} + a x dx \sqrt{(1 + u^2)}$ ovvero $u x dz + z dx = a u x^2 dx \sqrt{(1 + u^2)}$ fatta u costante: integrando pertanto (156. XI.) e restituendo quindi il valor di $u = \frac{y}{x}$, si ottiene

$$z = \frac{a y x \sqrt{(x^2 + y^2)}}{2y + x} + x^{-\frac{x}{y}} \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

199. Ho supposta p una data funzione di x, y: ma si deve aggiungere che può essere anche funzione di x, y, z, senza che si alteri l'operazione. Per dimostrarlo basta osservare che da un'equazione $z - axz = by$ può aversi o $z = \frac{by}{1 - ax}$, valore assoluto di z, o $z = axz + by$, valore che determina z quando essa nel secondo membro si ri-

guardi come una costante. In tal caso u che era funzione di x, y (194), lo sarà anche di x, y, z, e perciò nell' equazione $\frac{d^x u}{dx} + \frac{p\, d^y u}{dy} = 0$ (196) potrà esserlo anche p, ma z vi si dovrà prender per costante, e quindi tutte l' operazioni dovranno farsi nella consueta maniera. Così per l' equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{xz}{y^2}\frac{d^y z}{dy} = 0$ si ha $p = \frac{xz}{y^2}$, $q = 0$, $du = \ldots \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{x\,dx}{y^2}\right)$, il fattore $m = y^2$, onde $u = \frac{y^3}{3} - \frac{zx^2}{2}$ e $z = \varphi(u) = \varphi\left(\frac{y^3}{3} - \frac{zx^2}{2}\right) = \varphi(2y^3 - 3zx^2)$.

Nè faccia stupore se quì si sopprime il denominator 6; poichè le costanti soppresse, o sieno coefficienti o esponenti o denominatori comuni, ricompariscono in seguito allorchè si determina la forma delle funzioni φ secondo certe condizioni assegnate. Per esempio, se si voglia la forma della funzione φ tale che fatto $y = mx$ nell' equazione $z = \varphi(y^2 + x^2)$, si abbia $z = \frac{x^2}{a}$, è chiaro che sostituiti i valori di z ed y, l' equazione diverrà $\frac{x^2}{a} = \varphi(x^2 + m^2 x^2)$; onde posto $u = x^2 + m^2 x^2$ e però $x^2 = \frac{u}{m^2 + 1}$, si avrà $\varphi(u) = \ldots \frac{u}{a(m^2+1)} = \frac{x^2 + y^2}{a(m^2+1)} = \varphi(x^2 + y^2) = z$; e si vede che in φ era stato soppresso il denominator costante $a(m^2 + 1)$. In tal guisa (per avvisarne quì di passaggio) si determinano le funzioni arbitrarie dell' equazioni a differenze parziali, finchè almeno le condizioni assegnate per la loro determinazione possono esprimersi analiticamente.

200. Del resto, si integrano con questo metodo anche certe equazioni per cui si suol ricorrere alla formula accennata di sopra (194 . 3°.). Tale è l' equazione $\frac{d^x z}{dx} \cdot \frac{d^y z}{dy} = 1$, che ridotta a $\frac{d^x z}{dx} - \frac{dy}{d^y z} = 0$, ci dà $p = 0$, $q = -\frac{dy}{d^y z}$, $du = \frac{d^y u}{dy} \cdot dy$, onde $u = y$, $q' = -\frac{du}{d^u z}$, e quindi $dz = \ldots \frac{du}{d^u z}dx$ cioè $z = \frac{x\,dy}{d^y z} + \varphi(y) = \frac{x\,dxz}{dx} + \varphi(y)$: dunque differenziando z per y, si avrà $d^y z \left(= \frac{dx}{d^x z}dy\right) = dy\,\varphi'(y)$; ed integrando, $\frac{y\,dx}{d^x z} = \varphi(y) +$ una *Costante* che può esser funzione di $\frac{d^x z}{dx}$; dunque $\varphi(y) = \frac{y\,dx}{d^x z} - f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$ e perciò $z = \frac{x\,dy}{d^y z} + \frac{y\,dx}{d^x z} + f\left(\frac{d^x z}{dx}\right)$: cosicchè se sia $\frac{d^x z}{dx} = \frac{dy}{d^y z} = r$ onde $\frac{dx}{d^x z} = \frac{d^y z}{dy} = \frac{1}{r}$, verrà $z = rx + \frac{y}{r} - f(r)$, precisamente come si avrebbe dalla citata formula.

201. Per assicurarsi poi che l' operazione è ben fatta, si torna dall' integrale all' equazione differenziale 1°. differenziando tutta l' integrale per x dal che in luogo di φ si ha φ' (33): 2°. differenzian-

dola nuovamente per y dal che pure si ha φ' in luogo di φ : 3°. eliminando φ' per mezzo delle due equazioni. Si integri al solito (198) l'equazione $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m^2 y d^y z}{n^2 x dy} - \frac{m^2 z}{x} = 0$, ove $p = \frac{m^2 y}{n^2 x}$, $q = -\frac{m^2 z}{x}$, $du = \frac{d^y u}{dy}\left(dy - \frac{m^2 y\, dx}{n^2 x}\right)$, il fattore $= \frac{1}{x^{\frac{mm}{nn}}}$, e perciò $\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}} = u$, $dz = \frac{m^2 z\, dx}{x}$ e

$$z = x^{mm}\varphi\left(\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}}\right) \text{ ovvero } \frac{z}{x^{mm}} = \varphi\left(\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}}\right):$$

per ritornare alla data, differenzio questa per x e viene

$$\frac{x^{mm} d^x z - m^2 z x^{mm-1} dx}{x^{2mm}} = \ldots\ldots \frac{-m^2 y x^{\frac{mm-nn}{nn}} dx\, \varphi'\left(\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}}\right)}{n^2 x^{\frac{2mm}{nn}}}$$

; differenzio per y ed ho $\frac{d^y z}{x^{mm}} = \frac{dy\, \varphi'\left(\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}}\right)}{x^{\frac{mm}{nn}}}$; elimino φ', riduco, e trovo la data.

202. Sia ora da integrarsi l'equazion lineare dell'ordine n^{simo} e della forma $\frac{x^n d^{nx} z}{dx^n} + \ldots\ldots \frac{n x^{n-1} y d^{(n-1)x} d^y z}{dx^{n-1} dy}$ + ec.... + $\frac{y^n d^{ny} z}{dy^n} = Y\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + Y'\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ + ec... + $X\Psi\left(\frac{y}{x}\right) + X'\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)$ + ec., e per render più facile l'intelligenza del metodo, riduciamola ad un caso particolare e sia

I.ª $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3} + \frac{3x^2 y d^{2x} d^y z}{dx^2 dy} + \frac{3xy^2 d^x d^{2y} z}{dx dy^2} + \ldots \frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3} = 0$. Pongo $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2} + \frac{2xy d^x d^y z}{dxdy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = V$ (V è funzione di x, y) e differenziando prima per x e poi per y, viene II.ª $\frac{2x d^{2x} z}{dx} + \frac{x^2 d^{3x} z}{dx^2} + \frac{2y d^x d^y z}{dy} + \frac{2xy d^{2x} d^y z}{dxdy} + \frac{y^2 d^{2y} d^x z}{dy^2} = d^x V$, III. $\frac{x^2 d^{2x} d^y z}{dx^2} + \frac{2x d^x d^y z}{dx} + \frac{2xy d^x d^{2y} z}{dxdy} + \frac{2y d^{2y} z}{dy} + \frac{y^2 d^{3y} z}{dy^2} = d^y V$. Moltiplico la II. per $\frac{x}{dx}$, la III. per $\frac{y}{dy}$ e sostituiti nella data i valori di $\frac{x^3 d^{3x} z}{dx^3}$ e di $\frac{y^3 d^{3y} z}{dy^3}$, ella dopo la riduzione diventa $\frac{d^x V}{dx} + \frac{y d^y V}{x dy} - \frac{2V}{x} = 0$, che integrata (198) dà $V = x^2\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, onde l'integrale della I. sarà IV.ª $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$

$+ \frac{2xy\,d^x d^y z}{dx\,dy} + \frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2} = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Questa nuovamente si integra ponendo $\frac{x\,d^x z}{dx} + \frac{y\,d^y z}{dy} = V$, differenziando prima per x e poi per y, moltiplicando le due differenziali respettivamente per $\frac{x}{dx}$, $\frac{y}{dy}$, e sostituendo nella data i valori di $\frac{x^2 d^{2x} z}{dx^2}$ e di $\frac{y^2 d^{2y} z}{dy^2}$, che fatta la riduzione, la trasformano in $\frac{d^x V}{dx} + \frac{y\,d^y V}{x\,dy} - \frac{V}{x} - x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, d'onde si ha $V = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ e per integrale della IV. $\frac{x\,d^x z}{dx} + \frac{y\,d^y z}{dy} = x^2 \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$. E finalmente per l'integrale di quest'ultima, che sarà l'integrale finita della I., si trova $z = \frac{x^2}{2} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$. Così si trattano tutte l'altre della medesima forma e d'un ordine qualunque, e perciò anche l'equazione proposta in principio, giacchè il secondo membro $Y \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ec. non altera punto il giro delle prescritte operazioni.

203. E' però tanto simmetrica questa equazione, che il metodo d'integrarla si stimerà forse d'un uso assai raro. Eppur con esso integreremo più facilmente di quel che altri abbia fatto finora, l'equazioni *omogenee* di un ordine n^{simo} quelle cioè che hanno tutti i termini con differenziali al mede-

simo grado e con coefficienti costanti. Sia, per esempio, l'equazione I^a. $\frac{d^{2x} z}{dx^2} + \frac{b\,d^x d^y z}{dx\,dy} + \ldots \frac{c\,d^{2y} z}{dy^2} = R$ ove R può esser funzione di x, y.

Pongo II^a. $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m\,d^y z}{dy} = V$ (m è un coefficiente indeterminato) e differenziando al solito per x e per y, moltiplicando le differenziali respettivamente per $\frac{1}{dx}$, $\frac{c}{m\,dy}$, e sostituendo nella I. i valori di $\frac{d^{2x} z}{dx^2}$ e di $\frac{c\,d^{2y} z}{dy^2}$, ella, se si faccia III^a. $b - m - \frac{c}{m} = 0$, diverrebbe IV^a. $\frac{d^x V}{dx} + \frac{c\,d^y V}{m\,dy} = R$. Ma quì bisogna osservare che la risoluzion della III. dando due valori m', m'' di m, la II. si scioglie nelle due $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m'\,d^y z}{dy} = V$, $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m''\,d^y z}{dy} = V$, d'onde viene $\frac{d^x z}{dx} = V$ ovvero $\frac{d^y z}{dy} = 0$; dunque V non è ora funzione di x, y ma di x solamente; dunque la IV. dee ridursi a $\frac{dV}{dx} = R$ (194. 2°.), da cui abbiamo $V = \int^x R\,dx$ senza la solita $\varphi(y)$ che si è trovata $= 0$; dunque l'integrale della I. sarà $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m\,d^y z}{dy} = \int^x R\,dx$, che nuovamente integrata (198) dà $z = \int dx \int^x R\,dx + \varphi(y - mx)$ ricordandosi di mettere in R il valor di $y =$

$u + mx$ (198) prima di integrar $\int^x R\,dx$: ma dai due valori m', m'' di m si ha $z = \int dx \int^x R\,dx + \varphi(y - m'x)$ e $z = \int dx \int^x R\,dx + f(y - m''x)$; dunque sommando verrà finalmente $z = \int dx \int^x R\,dx + \frac{1}{2}\varphi(y - m'x) + \frac{1}{2} f(y - m''x) = \int dx \int^x R\,dx + \varphi(y - m'x) + f(y - m''x)$, la cui differenziale restituisce in fatti la data. Così presso a poco si integrerarnno l'equazioni omogenee degli altri ordini.

204. Al caso di $m' = m'' = \frac{b}{2}$ soddisfa anche più direttamente il metodo stesso (202); poichè avendosi allora $c = \frac{b^2}{4}$ la proposta equazione (203) diventa $\frac{d^{2x}z}{dx^2} + \frac{b\,d^x d^y z}{dx\,dy} + \frac{b^2 d^{2y} z}{4\,dy^2} = R$, i cui coefficienti costanti formano un quadrato perfetto. Si ponga dunque $\frac{d^x z}{dx} + \frac{b\,d^y z}{2dy} = V$: differenziando per x e per y, moltiplicando respettivamente le due differenziali per $\frac{1}{dx}$, $\frac{b}{2dy}$ e sostituendo al solito, si troverà $\frac{d^x V}{dx} + \frac{b\,d^y V}{2dy} = R$ da cui si ottiene (198) $V = \int^x R\,dx + \varphi(y - \frac{bx}{2})$; dunque l'integrale della data sarà $\frac{d^x z}{dx} + \frac{b\,d^y z}{2dy} = \int^x R\,dx + \varphi(y - \frac{bx}{2})$, dalla cui integrazio-

FIG.

ne viene $z = \int dx \int^x R\,dx + x\varphi(2y - bx) + f(2y - bx)$.

205. La natura del nostro Libro non ci permette di estenderci più oltre sull'equazioni a differenze parziali. Solo aggiungeremo che questa teoria si applica sempre utilmente e spesso per necessità a tutti i problemi geometrici ove si considerano le superficie curve; poichè tali superficie esigendo tre assi a cagione delle loro tre dimensioni, e quindi anche tre coordinate z, y, x respettivamente parallele ai tre assi e legate in equazione tra loro, una di esse, come z, deve esser funzione dell'altre due, e ciò per lo più conduce alle differenze parziali. Si voglia, per esempio, l'equazion generale di tutte le superficie di rivoluzione intorno all'asse
39. AA, e si supponga $dz = d^x z + d^y z = P\,dx + Q\,dy$ (194) la differenziale di questa equazione. Intendendo abbassata da un punto qualunque H della superficie sul piano AEA l'ordinata perpendicolare $HF = z$, onde l'altre due coordinate sieno $FP = y$, $PC = x$, si congiunga PH, e prolungata FP in M sicchè si abbia $PM = u = PH$ per la natura della rivoluzione, il triangolo HFP rettangolo in F darà $u^2 = z^2 + y^2$, o differenziando, $dz = \frac{u\,du}{z} - \frac{y\,dy}{z} = P\,dx + Q\,dy$; e poichè $Q\,dy$ deve eguagliarsi a $-\frac{y\,dy}{z}$ (122), sarà $P\,dx = \frac{u\,du}{z}$; dunque u è funzione di x e può farsi $u = nx$. Si avrà pertanto $Q = \frac{-y}{z}$, $P = \frac{n^2 x}{z}$, $\frac{P}{n^2 x} + \frac{Q}{y} = 0 = \frac{d^x z}{dx} + \frac{n^2 x\,d^y z}{y\,dy}$, ed in-

tegrando (198) con prendere il fattore $m = 2y$, verrà $z = \varphi(y^2 - n^2x^2)$, equazione di tutte le possibli superficie di rivoluzione intorno all'asse AA.

206. Poichè però non possono aver quì luogo le notizie occorrenti per dedurre da questa generale equazione l'equazioni particolari di superficie determinate, osserveremo per ora al nostro intento, che se nell'equazione $u^2 = z^2 + y^2$ trovata sopra, si sostituisca il valor di u cavato dall'equazion della curva genitrice $AEAE$, si avrà subito l'equazione 39.
alla superficie generata: così se $AEAE$ sia un circolo, un'ellisse ec., avremo $u^2 = a^2 - x^2$, $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ec., e l'equazioni alle superficie della sfera, dell'ellissoide ec. saranno $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2}$, $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2}$ ec. E se la semicllisse AEA cresca o scemi uniformemente nel primo quarto di rivoluzione, e all'incontro scemi o cresca del pari nel secondo ec., cosicchè la superficie generata abbia il semiasse $CK = c$ oltre i due $AC = a$, $CE = b$, è ben vero che non sarà più $PM = PH$ perchè la sezione MLP normale al piano $AEAE$, non sarà più un circolo ma un'ellisse: per altro essendo MLP simile alla sezione EKC segata pur normalmente per ECE, avremo $EC\ (b) : CK\ (c) :: MP\ (u) : PL = \frac{cu}{b}$; onde $HF^2 = z^2 = \frac{c^2u^2}{b^2u^2}(u^2 - y^2)$; riducendo dunque e sostituendo il valor di $u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, l'equazione a questa superficie sarà $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

207. Abbiasi dunque un'infinità di tali superficie ellittico-sferoidali $AEAKL$ simili tra loro e

concentriche, e si cerchi l'equazione di quella che tutte le tagli ad angoli retti. Poichè per una delle date superficie abbiamo $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ (206) e tutte son simili, supposta $a : b : c :: m : n : 1$ la ragione costante dei loro semiassi, e però $a = mc$, $b = nc$, la generale equazione di tutte diverrà $1 = \frac{x^2}{m^2c^2} + \frac{y^2}{n^2c^2} + \frac{z^2}{c^2}$, ove m, n saran costanti in ciascuna sferoide e il solo c varierà dall'una all'altra: perciò differenziando, la commune equazione delle superficie da tagliarsi sarà $dz = -\frac{xdx}{m^2z} - \frac{ydy}{n^2z} = X'dx + Y'dy$ fatto $X' = -\frac{x}{m^2z}$, $Y' = -\frac{y}{n^2z}$. Ora se ad un punto qualun-
39. que R della superficie $AEAKL$ si alzi la normale $RT = f$ che incontri il piano AEA nel punto T a cui rispondono (condotta OST parallela a CA) le coordinate $CI = OT = a'$, $IT = GS = b'$, e da R si conduca sul piano AEA la perpendicolare $RV = z$, da V sopra CA la perpendicolare $VG = y$, e congiunta RS, pongasi $CG = OS = x$, sarà $TS = IG = a' - x$, $VS = b' - y$, e il triangolo RVS rettangolo in V darà $RS^2 = z^2 + (b' - y)^2$: ma appartenendo RS al paiano RVS perpendicolare ad OT, anche il triangolo RST è rettangolo in S; dunque $RT = f = \sqrt{[z^2 + (b' - y)^2 + (a' - x)^2]}$, che per la natura delle normali alle superficie dovrà esser la massima o la minima di tutte le linee che da T posson condursi alla superficie $AEAKL$. Differenziando pertanto, verrà $zdz - (b' - y)dy - (a' - x)dx = 0$ (60) o sostituendo il valor di dz trovato di sopra, $(X'z - (a' - x))dx + (Y'z - (b' - y))dy = 0$, e quindi (63) $X'z - a' + x = 0$, $Y'z - b' + y = 0$, $a' = X'z + x$, $b' = Y'z + y$ ed $f = z\sqrt{(1 + X'^2 +}$

Y'^2). Ma giacchè nei punti ove le superficie si tagliano, le coordinate della cercata e della data debbono esser le stesse, supposta $dz = d^x z + d^y z = P'dx +$ 39.
$Q'dy$ l' equazion differenziale della cercata, $k = RZ$ la sua normale in R, $g = CY$ ed $h = YZ$ le coordinate che determinano il punto Z in cui ella incontra il piano AEA, si troverà col raziocinio medesimo $g = P'z + x$, $h = Q'z + y$ e $k = z\sqrt{(1 + P'^2 + Q'^2)}$, onde se sia $TZ = t$ l' intervallo tra le due normali f, k, si avrà $t = \sqrt{(ZX^2 + XT^2)} = \sqrt{[(a' - g)^2 + (b' - h)^2]} = z\sqrt{[(X' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$. Or le due superficie debbon tagliarsi ad angoli retti e però è retto l' angolo ZRT; dunque $t = \sqrt{(f^2 + k^2)} = z\sqrt{[(x' - P')^2 + (Y' - Q')^2]}$, cioè $1 + P'X' + Q'Y' = 0$, o mettendo i valori di X', Y', P', Q' dati di sopra, $\frac{d^x z}{dx} + \frac{m^2 y d^y z}{n^2 x dy} - \frac{m^2 z}{x} = 0$ e però (201) $z = \ldots\ldots x^{mm}\varphi\left(\frac{y}{x^{\frac{mm}{nn}}}\right)$, equazione alle superficie cercate, che diviene $z = x\varphi(\frac{y}{x})$ se le date sferoidi si cangino in sfere, ove essendo i semiassi $a = b = c$, si ha $m = n = 1$.

Del Calcolo delle Variazioni.

208. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi* di cui già parlammo di sopra (59), un altro ve ne è più elevato che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il punto di una data linea ove una certa quantità variabile diventa massima o minima, cosicchè cangiandosi gli altri punti o elementi della curva, la quantità massima o minima non soffre alcun cangiamento; in questo si vuole la linea stessa in cui abbia luogo la proprietà del massimo o del minimo, di modo che la quantità massima o minima dipende da tutta la curva, e cangiatone qualunque elemento essa pure si cangia. Così il problema di determinar nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere: ma quello di trovar tra tutte l' isoperimetre la curva che con l' ordinata e con l' ascissa racchiude la massima area, appartiene al secondo. E' vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo; ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

46. 209. Sia BD una curva che abbia per asse la retta $AE = a$, e fatta l' ascissa $AP = x$, si conducano l' ordinate perpendicolari AB, PM, ED. Pongo $PM = z$ intendendo per z una quantità composta comunque di x, y, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ ec. e anche degli integrali $\int\varphi dx$, $\int\varphi' dx$ ec., supposte φ, φ' ec. delle nuove funzioni di x, y, p, q ec. Se si prenda $PT = dx$ e si conduca l' ordinata TV, sarà $PMVT = zdx$ (132), $ABMP = \int zdx$ che va a zero se $x = 0$, e diviene $ABDE$ se $x = a$. Chiamasi H l' area $ABDE$; dunque se ciascuna ordinata $PM = z$ *varj* in più o in meno di una quantità infinitesima Mf e sia β la *caratteristica della variazione* come d lo è della differenziazione, avremo $Mf = \beta z$ *variazione* di z, $MfiV = \beta z dx$ *variazione* di $zdx = PMVT$, $BcfM = \int\beta z dx$ somma degli elementi $MfiV$ e *variazione* dell' area $ABMP$, e finalmente $BCKD = \beta H$ *variazione* dell' area $ABDE = H$. Quindi se quest' area

H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area $BckD$ si annulli e sarà $\beta H = \beta . ABDE = \beta \int z\,dx = o$ (60), presa l'integrale da $x = o$ fino ad $x = a$. Da questa formula $\beta \int z\,dx = o$ si avrà la relazione tra x ed y o l'equazione alla curva che ha la proprietà cercata del massimo o del minimo: cosicchè qualunque altra equazione tra x ed y darà un valor più piccolo per H quando H è un massimo, o un valor più grande quando H è un minimo. 46.

210. Il Calcolo delle Variazioni dee dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di βH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo. Ora H può riguardarsi o nello *stato primitivo* quando z o PM non ha ricevuta in H alcuna variazione, o nello *stato variato* quando z vi ha avuta una variazione Mf, e si è cangiata in $PM \pm Mf = z \pm \beta z$. Ma siccome nello stato primitivo di H se x divenga $x \pm dx$ anche y diviene $y \pm dy$ (2); così nello stato variato mentre H passa in $H \pm \beta H$ ed x $(= AP)$ resta lo stesso in ambedue gli stati, z ed y diventano $z \pm \beta z$, $y \pm \beta y$: onde x non influisce nella variazione βH, che solo dipende dalla variazione βz, e si ha sempre $\beta x = o$, e perciò anche $\beta dx = o$.

211. Come z diventa $z + \beta z$, così z' $(= QN)$ si cangia in $z' + \beta z' = Qg$, z'' $(= RS)$ in $z'' + \beta z'' = Sh$ ec.: ma $z' = z + dz$ (2) onde $\beta z' = \beta z + \beta dz$; dunque $\beta dz = \beta z' - \beta z = d\beta z$ (2), cioè *la variazione d'una differenziale eguaglia la differenziale della sua variazione*. Perciò scrivendo dz in vece di z, sarà $\beta d^2 z = d\beta dz = d^2 \beta z$, e di nuovo scrivendo qui dz in luogo di z, verrà $\beta d^3 z = d\beta d^2 z = d^2 \beta dz = d^3 \beta z$; e in generale $\beta d^n z = d^n \beta z$, o preso $m < n$, $\beta d^n z = d^m \beta d^{n-m} z$.

212. Del pari supposto $u = \int z\,dx$, sarà variando, $\beta u = \beta \int z\,dx$, e differenziando, $du = z\,dx$; dunque βdu $(= d\beta u) = \beta z\,dx$, e integrando, $\beta u = \int \beta z\,dx = \beta \int z\,dx$, cioè *la variazione dell'integrale* $\int z\,dx$ *eguaglia l'integrale della variazione di* $z\,dx$. Perciò scrivendo $\int z$ in vece di z, avremo $\int \beta \int z\,dx = \beta \int\int z\,dx = \int\int \beta z\,dx$ ec.

213. Si raccoglie da tutto ciò 1°. che la differenziale dz è diversissima dalla variazione βz; poichè dz è l'aumento che riceve z quando x aumenta di dx onde non si altera il rapporto tra z ed x o tra y ed x (19), laddove βz è l'aumento di z quando quel rapporto talmente varia che nell'alterarsi z o y, la variabile x resta la stessa (210): 2°. che le variazioni βy di ciascun valore di y nel suo passaggio allo stato variato essendo bensì infinitesime (209) ma indipendenti da ogni legge o condizione, non hanno alcun rapporto coi valori stessi di y, e sono anzi tanto arbitrarie e indefinite che posson poi determinarsi a piacere e anche mandarsi tutte a zero, fuorchè quella o quelle che corrispon-
46. dono alla linea infinitesima $PT = dx$ dalla quale risulta la formula $\int z\,dx$: 3°. che z cangiandosi in $z \pm dz$ nella differenziazione, ed in $z \pm \beta z$ nella variazione, ad onta della diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di z come se ne ha la differenza* purchè in luogo di dz, dy si scriva βz, βy e si faccia x costante: così la variazione di $z = ax^2 y + bxy^2$ sarà $\beta z = ax^2 \beta y + 2bxy\beta y$ ec.

214. Dunque $\beta(z\,dx) = dx\beta z + z\beta dx$: ma $\beta dx = o$ (210); dunque $\beta(z\,dx) = dx\beta z$ e $\int \beta(z\,dx) = \int dx \beta z = \beta \int (z\,dx)$ (212).

215. Parimente poichè $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, $r = \frac{dq}{dx}$ ec. (209), presa dx costante, si avrà $dp = \frac{d^2y}{dx}$, $dq = \frac{d^2p}{dx} = \frac{d^3y}{dx^2}$, $dr = \frac{d^2q}{dx} = \frac{d^4y}{dx^3}$ ec. ed integrando, $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $r = \frac{d^3y}{dx^3}$ ec.; dunque $\beta p = \frac{\beta dy}{dx}$ (210) $= \frac{d\beta y}{dx}$ (211), $\beta q = \ldots \frac{\beta d^2y}{dx^2} = \frac{d^2\beta y}{dx^2}$, $\beta r = \frac{\beta d^3y}{dx^3} = \frac{d^3\beta y}{dx^3}$ ec., differenziali che facilmente si determinano osservando che $d\beta y = \beta y' - \beta y$, $d\beta y' = \beta y'' - \beta y'$, $d\beta y'' = \beta y''' - \beta y''$ ec. (211), e perciò $d^2\beta y = d\beta y' - d\beta y = \beta y'' - \beta y' - \beta y' + \beta y = \beta y'' - 2\beta y' + \beta y$, $d^3\beta y = d\beta y'' - 2d\beta y' + d\beta y = \beta y''' - \beta y'' - 2\beta y'' + 2\beta y' + \beta y' - \beta y = \beta y''' - 3\beta y'' + 3\beta y' - \beta y$ ec.: e se le variazioni di y', y'', y''' ec. sieno zero (213), verrà $d\beta y = -\beta y$, $d^2\beta y = \beta y$, $d^3\beta y = -\beta y$ ec.

316. Volendo pertanto la variazione di z funzione di x, y, p, q, r ec. (209), siccome la sua differenza sarebbe $dz = P\,dx + Q\,dy + R\,dp + S\,dq$ ec. supposte P, Q, R, S ec. funzioni di x, y, p, q ec.; così la sua variazione, fatto $\beta x = 0$ (210), sarà $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (215).

217. Similmente per aver la variazione di $\int z\,dx$, essendo sempre z una funzione di x, y, p, q ec., si farà dx costante e avremo 1°. $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. $= Q\beta y + \frac{Rd\beta y}{dx} + \frac{Sd^2\beta y}{dx^2}$ ec. (216): 2°. $\beta(z\,dx) = dx\,\beta z$ (214) $= Q\,dx\,\beta y + R\,d\beta y + \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: 3° $\int \beta z\,dx = \beta \int z\,dx$ (212) $= \int Q\,dx\,\beta y + \int R\,d\beta y + \int \frac{Sd^2\beta y}{dx}$ ec.: ma $\int R\,d\beta y = R\beta y - \int dR\,\beta y$ (100) $= R\beta y - \int \frac{dx\,dR\beta y}{dx}$, e parimente $\int \frac{Sd^2\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \int \frac{dS\,d\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\,\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\,\beta y}{dx} = \frac{Sd\beta y}{dx} - \frac{dS\beta y}{dx} + \int \frac{d^2S\,dx\,\beta y}{dx^2}$ ec.; dunque $\beta \int z\,dx = \int dx\,\beta y\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \text{ec.}\right) + \beta y\left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}\right) + \frac{d\beta y}{dx}(S - \text{ec.}) +$ ec. Fermiamoci a considerar questa formula.

218. Osservo primieramente che ella è composta di una parte integrale $\int dx\,\beta y\left(Q - \frac{dR}{dx}\text{ ec.}\right)$, e di una parte assoluta $\beta y(R - \text{ec.}) + d\beta y(S - \text{ec.}) +$ ec. Or nel caso del massimo o del minimo per aver tutta la variazione βH bisogna porre $x = a$ nell' intera formola (209), ciò che di fatto eseguito nella sua parte assoluta, βy vi indicherà la varia-
46. zione dell' ultima ordinata ED corrispondente all' ascissa $AE = a$: ma tal variazione essendo arbitraria si può suppore zero (213); dunque nel caso di $x = a$ tutta la parte assoluta i cui termini son moltiplicati per $\beta y = 0$, per $d\beta y = 0$ ec., si annichilerà e avremo la sola parte integrale $\int dx\,\beta y\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}\right) = \beta H = 0$ (209).

219. In secondo luogo osservo che quest' ultima espressione è la somma di tutte le variazioni che nascono dalla variazione di ciascun valore di y: ma tutte posson mandarsi a zero fuorchè una (213), dunque la somma di esse si ridurrà a quella sola, e si avrà $dx\,\beta y\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.}\right) = 0$, ovve-

ro $Q - \frac{dR}{dx} + \text{ec.} = 0$. Dal che si raccoglie 1°. che se z è solamente funzione di x, y, nella formula di sopra $\beta z = Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (217) sarà $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ec., onde $R\beta p = 0$, $S\beta q = 0$ ec., e l'equazione ora trovata diverrà $Q = 0$: 2°. che se z sia funzione di x, y, p, nella formula stessa (217) sarà $q = 0$, $r = 0$ ec onde $S\beta q = 0$ ec., e la nostra equazione diverrà $Q - \frac{dR}{dx} = 0$: e così di seguito.

220. Ma riguardo a questa seconda conseguenza convien riflettere che l'equazioni $Q - \frac{dR}{dx} = 0$, $Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} = 0$ ec. son sempre differenziali o del primo o di altri ordini più elevati; onde la loro integrazione esigendo l'aggiunta di una o più costanti arbitrarie, l'equazione tra x ed y che somministra il massimo o il minimo, non sarà interamente determinata, e si avranno tanti massimi o minimi quanti sono i valori che posson darsi a ciascuna costante. Per fissar dunque in tali casi il vero massimo o minimo, si ricorre alla parte assoluta della formula variata cioè a $\beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}\right) + d\beta y\,(S - \text{ec.}) + \text{ec.} = 0$ (218), che attesa la variazione arbitraria βy (213), non può generalmente andare a zero se non vi vada ciascun suo termine, e sia perciò $\beta y \left(R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.}\right) = 0$, $d\beta y\,(S - \text{ec.}) = 0$ ec., ovvero $R - \frac{dS}{dx} + \text{ec.} = 0$, $S - \text{ec.} = 0$, ec., sempre nella supposizione di $x = a$ (218): ciò determina le costanti e quindi il cercato massimo o minimo, come vedremo.

221. Troviamo ora la variazione di $\int z dx$ quando z contiene non solo x, y, p, q ec. ma anche un integrale $\int \varphi dx$ (209). Sia $\int \varphi dx = r$ e avremo I. $\beta r = \beta \int \varphi dx = \int Q' dx \beta y + \int R' d\beta y + \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec. (217): di più essendo z funzione di r, x, y, p, q ec., supposta V una funzione come z, verrà II. $\beta z = V\beta r + Q\beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec., che sostituendo il valor della I., diviene $\beta z = V \int Q' dx \beta y + V \int R' d\beta y + V \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}$ ec. $+ Q\beta y + \frac{R d\beta y}{dx} + \frac{S d^2 \beta y}{dx^2}$ ec. Ora $\int \beta z dx = \beta \int z dx$ (212); dunque $\beta \int z dx = \ldots$ $\int (V dx \int Q' dx \beta y) + \int (V dx \int R' d\beta y) + \int \left(V dx \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}\right)$ ec. $+ \int Q dx \beta y + \int R d\beta y + \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}$ ec. Per liberar la formula dal segno integrale moltiplicato, pongo $V dx = dK$ onde

$$\int \left(V dx \int Q' dx \beta y\right) = \int \left(dK \int Q' dx \beta y\right) = K \int Q' dx \beta y - \int K Q' dx \beta y, \quad \int \left(V dx \int R' d\beta y\right) = \int \left(dK \int R' d\beta y\right) = K \int R' d\beta y - \int K R' d\beta y, \quad \int \left(V dx \int \frac{S d^2 \beta y}{dx}\right) = \int \left(dK \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx}\right) = K \int \frac{S' d^2 \beta y}{dx} - \int \frac{K S' d^2 \beta y}{dx} \text{ ec.};$$

dunque $\beta \int z dx = K \int dx \left(Q' \beta y + \frac{R' d\beta y}{dx} + \frac{S' d^2 \beta y}{dx^2} \text{ ec.}\right) + \int dx \left[(Q - KQ')\beta y + (R - KR')\frac{d\beta y}{dx} + (S - KS')\frac{d^2 \beta y}{dx^2} \text{ ec.}\right]$, ove posson farsi le riduzioni di sopra (217).

222. Quasi nel modo stesso potrebbe aversi la variazione di $\int z dx$ quando z contiene più integrali

$\int \varphi dx$, $\int \varphi' dx$ ec., e generalmente quando è data da un' equazion differenziale di qualunque ordine; potrebbe anche indagarsi la variazione di $\int z dx$ o di $\int z$ quando x non fosse costante come lo abbiamo supposto di sopra, e fino introdursi in questo Calcolo le differenze parziali che ne formano un nuovo ramo: ma tali ricerche sarebbero inutili alla presente nostra intenzione di terminar questo Libro con alcune più semplici e più elementari applicazioni dell' esposta dottrina.

PROBL. I. Tra tutte le curve riferite ad una stessa ascissa determinar quella in cui $\int z dx = \int (gx - y^2) y dx$ è un massimo o un minimo.

Si avrà $z dx = (gx - y^2) y dx$, $z = (gx - y^2) y$ e $\beta z = (gx - 3y^2) \beta y$ (213) $= Q\beta y + R\beta p + S\beta q$ ec. (217); dunque $Q = gx - 3y^2$, $R = 0$, $S = 0$ ec.: ma dee esser $Q = 0$ (219. 1°); dunque $gx - 3y^2 = 0$ ovvero $y^2 = \frac{gx}{3}$, equazione alla parabola. Sostituito il valor di $y = \sqrt{\frac{gx}{3}}$ nella formula $\int (gx - y^2) y dx$, ella diviene $2 \int \left(\frac{gx}{3}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4gx^2}{15} \sqrt{\frac{gx}{3}}$ che si annulla quando $x = 0$, ed è un massimo o un minimo quando $x = a$. Per distinguere qual dei due abbia qui luogo, prendo in vece della parabola un' altra linea qualunque (209), per esempio la linea retta coincidente con l' asse onde sia $y = 0$, e trovo che $y = 0$ riduce la data formula a zero, mentre $y = \sqrt{\frac{gx}{3}}$ la riduceva a $\frac{4gx^2}{15} \sqrt{\frac{gx}{3}} > 0$; dunque si ha qui un massimo.

II. Trovar la curva in cui $\int z dx = \int (15g^2x^2 - 15g^3x + 5g^2y^2 - 3y^4) y dx$ è un massimo o un minimo.

Dunque $\beta z = (g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4) 15\beta y = Q\beta y$, e $Q = 0 = g^2x^2 - g^3x + g^2y^2 - y^4 = (y^2 - g^2 + gx)(gx - y^2)$, e perciò soddisfanno al quesito due parabole dell' equazioni I. $y^2 = g(g - x)$, II. $y^2 = gx$. Per sapere quale delle due dia il massimo, supporrò x infinitesima, il che riduce la I. ad $y = g$, valore che posto nella formula data, la cangia in $\int 2g^5 dx$, mentre sostituendovi $y = \sqrt{gx}$ preso dalla II., si ha $\int - 10g^3 x dx \sqrt{gx}$: ma fatto, come sopra, $y = 0$, la formula va a zero e $\int 2g^5 dx > 0$ laddove $\int - 10g^3 x dx \sqrt{gx} < 0$; dunque la I. dà un massimo, la II. un minimo.

III. Qual' è la curva in cui $\int z dx = \ldots \int \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo?

Poichè $\frac{dy}{dx} = p$, verrà $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{(1 + p^2)}$, onde $z = \sqrt{\frac{1 + p^2}{y}}$, $dz (= Pdx + Qdy + Rdp) = \frac{p\,dp}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{dy\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$ e $\beta z = \frac{p\beta p}{\sqrt{y(1+p^2)}} - \frac{\beta y \sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}} = Q\beta y + R\beta p$; dunque $P = 0$, $Q = \frac{-\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$, $R = \ldots \frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$; e poichè dee quì aversi $Q - \frac{dR}{dx} = 0$ (219. 2°), sarà $Qp\,dx (= Q dy) = p\,dR$: ma es sendo $P=0$, viene $dz=Qdy+Rdp=pdR+Rdp$; dunque integrando, $z(=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}})=pR+C=\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}+C$, e $C=\frac{1}{\sqrt{y(1+p^2)}}$. Pertanto se si faccia $C=\frac{1}{\sqrt{m}}$, avremo $m=y(1+p^2)$, $p(=\frac{dy}{dx})=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, e $dy=dx\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, equazione ad una cicloide (55) il cui circolo genitore ha per diametro m. La riduco a $dx=dy\sqrt{\frac{y}{m-y}}=\frac{y\,dy}{\sqrt{(my-y^2)}}$ ed integrandola ottengo $x=arc.\ sen\ v.\ y-\sqrt{(my-y^2)}+C$ (171. 4°. 5°.), con che abbiamo le due costanti arbitrarie m, C. Per determinarle faccio $R-\frac{dS}{dx}=0$ (220), cioè $R(=\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}})=0$ perchè qui $S=0$, e viene $p=0=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$ e perciò $y=m$: quindi l'equazione integrata, postovi $y=m$ ed $x=a$ (220), diverrà $a=arc.\ sen.\ v.\ m+C$: ma essendo m il diametro, $arc.\ sen\ v.\ m$ è evidentemente la semicirconferenza $m\pi$; dunque $C=a-m\pi$; di più se quando $x=0$ si vuole anche $y=0$, l'equazione integrata si cangierà in $0=a-m\pi$ e sarà $m=\frac{a}{\pi}$. Del resto, si ha quì un minimo; poichè la data formula, sostituito il valor di $p=\sqrt{\frac{m-y}{y}}$, diventa $\int dx\sqrt{\frac{m}{y}}$, da cui, facendo al solito $y=0$, viene un infinitamente grande.

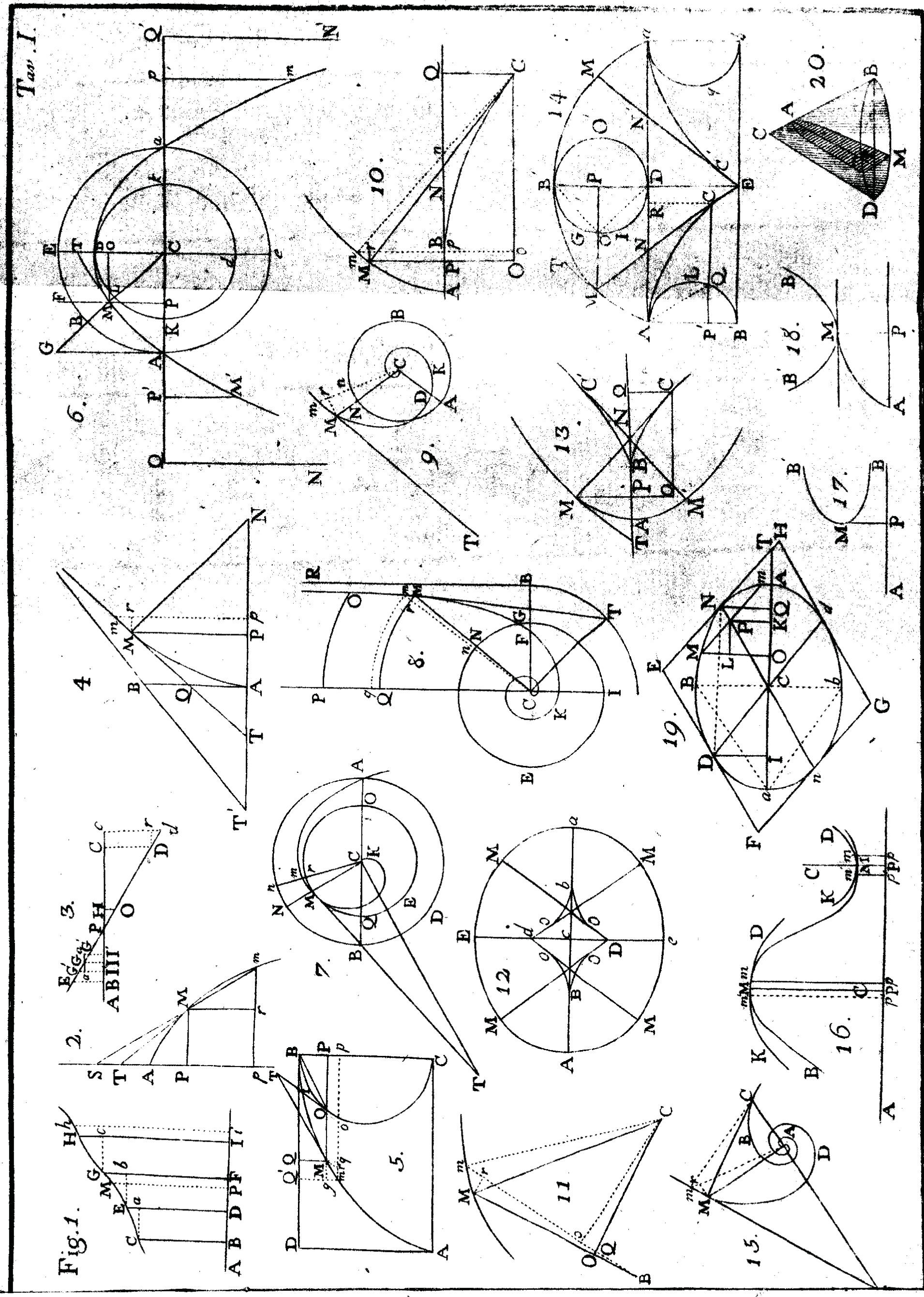
IV. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella in cui l'area $\int y\,dx$ (132) è un massimo o un minimo.

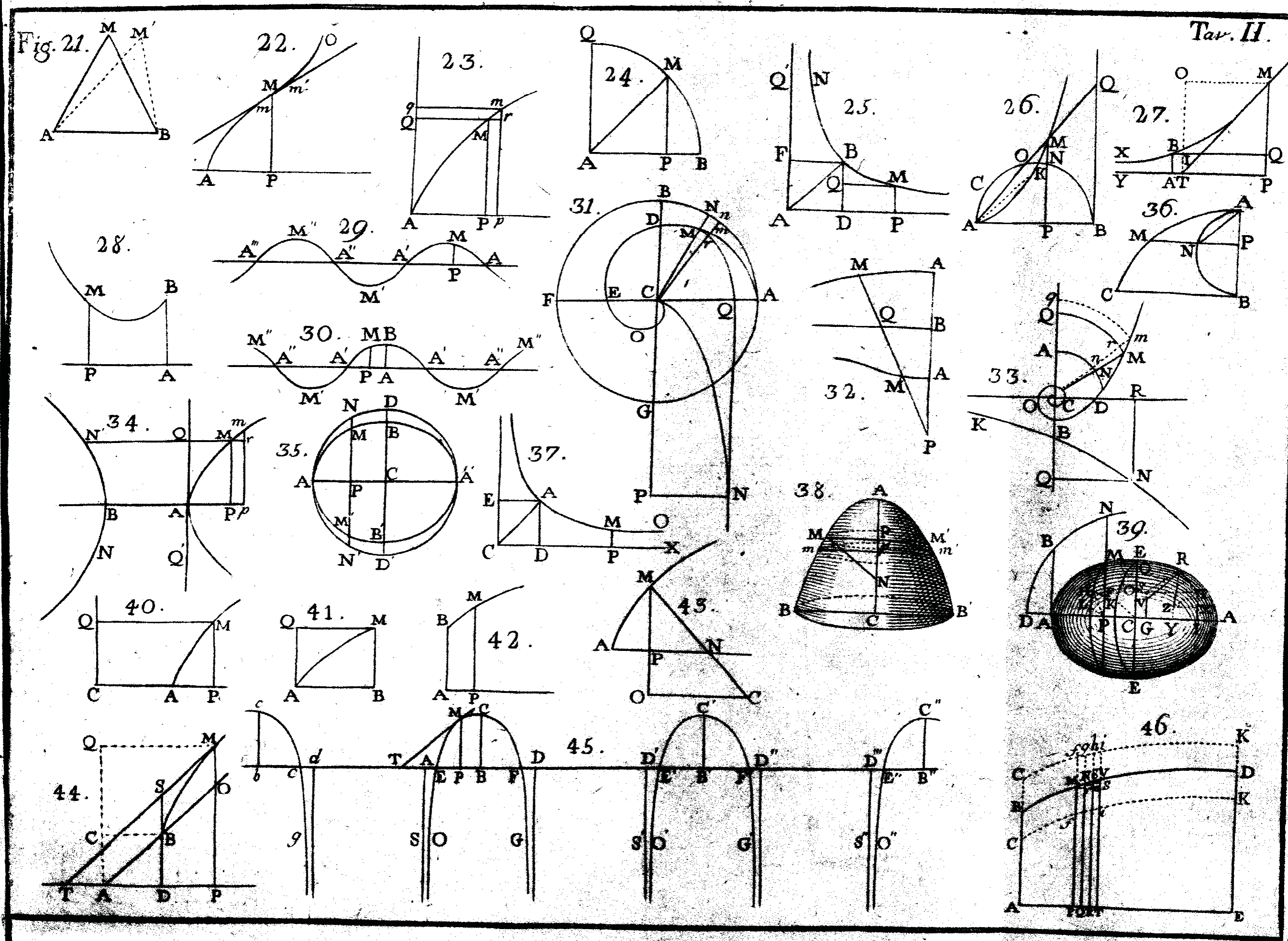
Giacchè l'espressione della lunghezza d'un arco è (136) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (III.) e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\beta\int dx\sqrt{(1+p^2)}=0$: ma anche $\beta\int y\,dx=0$ (209); dunque il problema si ridurrà a trovar la curva in cui $\int z\,dx=\int y\,dx+\int g\,dx\sqrt{(1+p^2)}$ è un massimo o un minimo, moltiplicata per g costante l'espression dell'arco onde sieno omogenee le due integrali. Si avrà pertanto $z=y+g\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y+\frac{gp\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=1$, $R=\frac{gp}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$; e ripetuto il raziocinio del passato problema, verrà $z(=y+g\sqrt{(1+p^2)})=pR+C=\frac{gp^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $(C-y)\sqrt{(1+p^2)}=g$, $p(=\frac{dy}{dx})=\frac{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}{C-y}$, e $dx=\frac{dy(C-y)}{\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}}$; dunque integrando, $x=\sqrt{[g^2-(C-y)^2]}+C'$, cioè $(C-y)^2=g^2-(x-C')^2$, equazione al circolo, in cui le costanti g, C, C' si determineranno come sopra (III) avvertendo di più che la lunghezza della curva può supporsi data: ed è chiaro che il radicale portando il doppio segno, e perciò potendo descriversi il circolo onde rivolga all'ascissa o la concavità o la convessità, avremo un massimo nel primo caso, un minimo nel secondo.

V. Tra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (144).

Trascurato 2π che è un numero costante e fatta $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, dovrà essere, come nell'antecedente problema, $\int z\,dx = \int y\,dx\sqrt{(1+p^2)}+\int g\,dx\sqrt{(1+p^2)}$ un massimo o un minimo; dunque $z=(y+g)\sqrt{(1+p^2)}$, $\beta z=\beta y\sqrt{(1+p^2)}+\frac{(y+g)p\beta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $Q=\sqrt{(1+p^2)}$, $R=\frac{(y+g)p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $Q-\frac{dR}{dx}=0$, e fatto il solito raziocinio, $z\left(=(y+g)\sqrt{(1+p^2)}\right)=pR+C=\frac{(y+g)p^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $C=\frac{y+g}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $p\left(=\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{C}\sqrt{[(y+g)^2-C^2]}$, e $dx=\ldots\frac{C\,dy}{\sqrt{[(y+g)^2-C^2]}}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria* perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva. E qui pure atteso il doppio segno che compete al radicale, si avrà un massimo quando la curva rivolga la concavità all'asse, ed un minimo quando gli volga la convessità.

FINE.




Tav. II.
Fig. 21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.