ELEMENTI
D' ARITMETICA

Del Signor

S. F. LACROIX

TRADOTTI SOPRA LA XV EDIZIONE DI PARIGI

DA SANTI FABRI

PROFESSORE DI MATEMATICA NEL COLLEGIO
DI RAVENNA

CON NOTE DEL TRADUTTORE

BOLOGNA
Dalla Tipografia Nobili
1822.

TAVOLA

FINE DELLA TAVOLA.

Spiegazione *delle Cifre Romane*

Uno	I	i
Due	II	ij
Tre	III	iij
Quattro	IV	iv
Cinque	V	v
Sei	VI	vj
Sette	VII	vij
Otto	VIII	viij
Nove	IX	ix
Dieci	X	x
Venti	XX	xx
Trenta	XXX	xxx
Quaranta	XL	xl
Cinquanta	L	l
Sessanta	LX	lx
Settanta	LXX	lxx
Ottanta	LXXX	lxxx
Novanta	XC	xc
Cento	C	c
Dugento	CC	cc
Trecento	CCC	ccc
Quattrocento	CCCC	cccc
Cinquecento	D ovvero IↃ	d
Seicento	DC	dc
Settecento	DCC	dcc
Ottocento	DCCC	dccc
Novecento	DCCCC	dcccc
Mille	M ovvero CIↃ	m
Millecento	MC	mc

TRATTATO ELEMENTARE D' ARITMETICA

Della Numerazione.

1. Paragonando i diversi oggetti, che agiscono sopra i nostri sensi, subito conosciamo in tutti questi oggetti un attributo, ovvero qualità, per cui si ponno concepire capaci di aumento, e di diminuzione: questo attributo è la *grandezza*. In generale essa si mostra sotto due forme differenti:

Ora come una collezione di più cose simili, o di più parti separate; allora s'indica colla parola *numero*:

Ed ora come un sol tutto, senza distinzione di parti: in questo modo si riguarda la distanza tra due punti, o la lunghezza della linea, che va dall' un punto all' altro; i contorni, o gl' inviluppi, che determinano la figura, e l' *estensione* dei corpi; finalmente questa stessa estensione.

Il Carattere proprio di quest' ultima forma della grandezza è il legame, che si osserva nelle sue parti, o la loro *continuità*; mentre che nel numero si considera solo quante parti contiene, circostanza, a cui si riferì da principio la parola *quantità*, che di poi si è applicata alla grandezza in generale, osservando di chiamare *quantità continua* la grandezza considerata sotto la forma continua, per distinguerla dal numero, che si chiama *quantità discreta*, o *discontinua*.

2. Tutto ciò, che riguarda la *grandezza*, è l'oggetto della scienza appellata *Matematica*; i numeri sono specialmente l'oggetto dell' *Aritmetica*.

La grandezza continua appartiene alla *Geometria*, la quale si occupa particolarmente delle proprietà, che presentano le forme dei corpi rispetto all' *estensione*.

3. Il numero essendo la collezione di più cose simili, o di più parti distinte, suppone l'esistenza di una di queste cose, o di queste parti presa per termine di paragone, la quale allora si appella *unità*.

La maniera la più naturale di formare i numeri è di aggiungere primieramente un' unità ad un' altra, poi ancora un' altra unità alla riunione delle precedenti; e continuando in questo modo si compongono delle collezioni di unità, che si esprimono con nomi particolari: l'unione di questi nomi, che cangia da una lingua ad un' altra, compone la *numerazione parlata*.

4. Siccome nulla limita la grandezza, alla quale si può portare il numero, poichè, per quanto grande sia un numero, è sempre possibile aggiungervi un' unità di più, s' intende, che vi è una infinità di numeri differenti, e

che perciò sarebbe impossibile esprimerli, in qualsivoglia lingua, con nomi isolati, ovvero indipendenti gli uni dagli altri.

Di quì son nate le nomenclature, nelle quali si è procurato di formare un gran numero di espressioni distinte con la combinazione di un piccolo numero di parole, che hanno forme regolari, e perciò facili a ritenersi.

Quelle che sono in uso nella lingua francese (*) si deducono, se si eccettuano alcune altre poche espressioni, dai nomi assegnati ai nove primi numeri, e da quelli, che prendono di poi le collezioni di *dieci*, di *cento*, di *mille unità*.

In fatti le unità si contano per

uno, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, *e nove*;

Le collezioni di dieci unità, ovvero le *diecine* per *dieci*, *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, e *novanta* (**).

Le collezioni di dieci diecine, ovvero le *centinaja* si contano coi nomi dati alle unità. Si dice: *cento*, *duecento*, *trecento* ..... *novecento*.

(*) Ciò accade anche nella lingua Italiana. (*Il Trad.*)

(**) Per rendere regolare questa parte di nomenclatura, converrebbe, come lo ha proposto Condorcet, sostituire le parole *unanta*, e *duanta* alle parole *dieci*, e *venti*, ed invece delle denominazioni composte, *sessanta* e *dieci*, *quattro-venti*, e *quattro-venti-dieci* con le parole *settanta*, *ottanta*, e *novanta*, come si costuma ancora in varie parti della Francia. Cade in acconcio l'osservare, che le prime sono il resto di una antica maniera di contare per ventine, e per la quale si diceva *sei-venti*, per esprimere il numero *cento venti*. (*Si osservi, che questa nota non appartiene agli Italiani se*

Le collezioni di dieci centinaja, ovvero le *migliaja*, si contano coi nomi dati ai nove primi numeri, ed inoltre per diecine, e centinaja; perciò si dice

mille, *duemila* ..., *novemila*,
diecimila, *ventimila*. etc.,
centomila. *duecentomila*. etc.

Le collezioni di dieci centinaja di migliaja, o di mille volte mille hanno il nome di *milioni*, e si contano come le migliaja.

Le collezioni di dieci centinaja di milioni, o di mille milioni si chiamano *bilioni*, e si contano come i milioni (*).

Ciascuna delle collezioni indicate precedentemente è considerata come se formasse un' *unità di un ordine di più in più elevato*, quanto più si allontana dalle *unità semplici*. Si vede ancora, che i nomi di *diecine*, e di *centinaja* si ripetono sempre, e che non se ne introducono de' nuovi, come *mila*, *milioni*, *bilioni*, che di quattro in quattro ordini solamente. Seguendo questa legge, ai bilioni si fanno succedere i *trilioni*, *quadrilioni*, *quintilioni*, etc., che hanno come i bilioni le loro diecine, e le loro centinaja.

I numeri espressi in questa maniera, quando

---

non in ciò, che riguarda le parole dieci, e venti. Ho creduto bene di non tralasciarla a fine di rendere in Italiano tutto intero il Testo dell' Autore,
Il Traduttore).

(*) I bilioni si chiamano *migliardi* ne' calcoli di Finanza.

vi abbisogna più di una parola per enunciarli, si decompongono in più collezioni, ovvero ordini d' unità come abbiam fatto quì sopra; per esempio, il numero espresso da *cinquecento mila trecento due* si trova decomposto in tre parti, le quali sono *cinque centinaja di migliaja*, *tre centinaja di unità semplici*, *e due di queste ultime unità*.

5. La lunghezza dell' espressione *letterale* dei numeri, allorchè essi sono un poco grandi, ha fatto immaginare dei caratteri esclusivamente appartenenti alla loro rappresentazione compendiosa; e di quì è derivata l' arte di scrivere i numeri con de' caratteri chiamati *cifre*, o sia la *numerazione scritta*.

Quella, che si è adottata al giorno d' oggi, segue un andamento presso a poco analogo alla numerazione parlata. Primieramente i nove primi numeri si sono rappresentati ciascuno con un carattere particolare, cioè,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	*due*,	*tre*,	*quattro*,	*cinque*,	*sei*,	*sette*,	*otto*,	*nove*.

Quando un numero è composto di diecine, e di unità, si scrivono successivamente da sinistra a destra le diecine, e le unità con il carattere, che rappresenta il loro numero. Per esempio, il numero *quarantasette* si scrive 47: la prima cifra a sinistra 4 indica le quattro diecine, ed ha perciò un valore dieci volte maggiore, di quello, che essa avrebbe, se fosse sola; mentre che la cifra 7 posta a destra, esprimendo le sette unità, non ha che il valore, che da principio le abbiam dato.

Si vede nel numero *trentatrè*, che si scrive 33, la cifra 3 ripetuta due volte, ma con de' valori differenti: *la prima cifra verso sinistra ha un valore dieci volte più grande di quella, che è alla sua destra*.

Questo è il principio fondamentale della nostra numerazione scritta.

Se si volesse esprimere *cinquanta*, ovvero cinque diecine, siccome in questo numero non vi sono unità, non si dovrebbe scrivere che la cifra 5, e converrebbe perciò indicare con un segno particolare, che nell' espressione del numero questa cifra dee occupare il primo posto a sinistra; perciò si porrebbe alla sua destra il carattere 0, o sia lo *zero*, il quale per se stesso non ha alcun valore, e che non serve, che ad occupare il posto della collezione di unità, che mancano nell' enunciato del numero proposto, e si avrebbe 50.

6. Con soli dieci caratteri, e con la convenzione quì sopra stabilita intorno al valore, che hanno le cifre, secondo il posto, che occupano, si perviene ad esprimere tutti i numeri possibili.

Con due cifre si può scrivere sino a nove diecine, e nove unità, il che forma 99, o *novantanove*. Dopo questo numero viene il centinajo, il quale s' indica colla cifra 1 più avanzata di un posto verso sinistra, che non lo sarebbe, se esprimesse delle diecine; e perciò si pongono due zeri alla sua destra, il che rende 100.

Le unità, e le diecine, che di poi si uniranno per formare i numeri superiori a 100, prenderanno il luogo, che loro appartiene; così *cento e uno* si scriverà 101, *cento e undici* si scriverà 111. Si vede in questo numero la stessa cifra ripetuta tre volte con de' valori differenti. Nel primo posto, cominciando a sinistra, essa esprime un' unità, nel secondo esprime una diecina, nel terzo un centinajo. Lo stesso accade de' numeri 222, 333, 444, etc. In questo modo, secondo la convenzione stabilita precedentemente rispetto alle diecine, e alle unità, *una stessa cifra esprime delle unità di dieci in dieci volte più grande secondo che si avanza da destra verso sinistra, e con un semplice cambiamento di posto diventa capace di rappresentare successivamente le diverse collezioni di unità, che possono entrare nell' espressione di un numero*.

7. Adunque si scrive un numero sotto la dettatura, o dopo il suo enunciato, ponendo successivamente le une appresso l' altre, cominciando a sinistra, le cifre, che esprimono i numeri di unità di ciascuna collezione; ma conviene aver presente allo spirito l' ordine, nel quale si succedono queste collezioni, per non ometterne alcuna, ed occupare con degli zeri il posto di quelle, che mancano nell'enunciato del numero da scriversi. Se, per esempio, questo fosse, *trecento ventiquattro mila novecento quattro*, si porrebbe 3 per le centinaja di migliaja, 2 per le venti migliaja, o due diecine di migliaja, 4 per le migliaja, 9 per le centinaja; e siccome immediatamente dopo le centinaja vengono le die-

cine, le quali mancano nel numero proposto, si porrebbe o per occuparne il posto, poi si metterebbe la cifra 4 delle unità in questo modo si avrebbe 324904.

Nello stesso modo, facendo attenzione di occuparne con dei zeri i posti delle diecine di migliaja, delle migliaja, e delle diecine, che mancano nel numero *cinquecento mila trecento due*, si scriverà 500302.

8. Quando un numero è scritto in cifre, per enunciarlo, o tradurlo nella lingua ordinaria, conviene sostituire a ciascuna delle cifre la parola, che essa rappresenta, e secondo il luogo, che occupa questa cifra, indicare la collezione, alla quale appartengono le sue unità. Ciò si renderà chiaro con l'esempio seguente:

2	4,	8	9	7,	3	2	1,	5	8	0,	3	4	6
diecine di trilioni	TRILIONI	centinaja di bilioni	diecine di bilioni	BILIONI	centinaja di milioni	diecine di milioni	MILIONI	centinaja di migliaja	diecine di migliaja	MIGLIAJA	centinaja	diecine	UNITA'

Le cifre di questo numero sono divise da delle virgole in gruppi, o *parti* di tre in tre, cominciando a destra; ma l'ultima parte a sinistra, la quale nel presente esempio non ha che due cifre, potrà alcune volte non averne che una sola. Ciascuna di queste parti corrisponde

alle collezioni indicate dalle parole *unità*, *mila*, *milione*, *bilione*, *trilione*, e le sue cifre ne esprimono successivamente le unità, diecine, e centinaja. *Si forma perciò l'espressione letterale del numero proposto enunciando ciascuna parte, come se essa fosse sola, ed aggiungendo alle sue unità il nome, che esse hanno.*

Nell'esempio quì sopra esposto si legge: *ventiquattro trilioni, ottocento novantasette bilioni, trecento ventuno milioni, cinquecento ottantamila trecento quarantasei unità* (*).

9. I numeri possono considerarsi in due maniere, cioè, come io ho fatto, non indicando in particolare la specie della cosa, o di unità, a cui essi si riferiscono, ed allora si chiamano *numeri astratti*, ovvero indicando la specie delle loro unità, come quando si dice due uomini, cinque anni, tre ore etc., ed allora questi sono *numeri concreti*.

(*) La nomenclatura, quì sopra esposta, che è secondo l'uso Francese, non è simile all'Italiana che sino alle *centinaja di milioni*, perchè dagl'Italiani si costuma di passare da questa specie alle *migliaja di milioni*, indi alle *diecine di migliaja di milioni*, poi alle *centinaja di migliaja di milioni*; da questa ultima specie si passa ai *bilioni*, i quali a somiglianza de' *milioni* hanno le loro *diecine*, *centinaja*, *migliaja*, *diecine di migliaja*, e *centinaja di migliaja*, lo stesso si dica de' *trilioni*, *quadrilioni*, *quintilioni etc.* Adunque seguendo la nomenclatura, ch'è in uso in Italia, il numero quì sopra proposto si leggerà in questo modo: *Ventiquattro bilioni, ottocento novantasette mila trecento ventuno milioni, cinquecento ottanta mila trecento quarantasei.*

Nota del Traduttore.

È evidente, che la formazione dei numeri colla riunione successiva delle unità non è legata in alcun modo alla natura di queste unità, e che lo stesso accade di tutte le proprietà, che risultano da questa formazione, per le quali si perviene a comporre, e a decomporre i numeri gli uni per gli altri, il che si appella *calcolare*. Adunque io prendo ad esporre le principali regole del calcolo dei numeri, senza aver riguardo alla natura delle loro unità.

Dell' Addizione.

10. Questa operazione, che ha il fine di riunire molti numeri in un solo, non è che un compendio della formazione dei numeri con la riunione successiva delle unità. Se, per esempio, a sette si volesse aggiunger cinque, converrebbe nella serie dei nomi *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, etc. assegnati ai numeri inalzarsi di cinque gradi al di sopra della parola *sette*, e si perverrebbe allora alla parola *dodici*, che perciò corrisponde alla unione di sette con cinque unità. Sopra questo metodo sono fondate tutte le addizioni dei piccoli numeri, e di cui i risultati si sono appresi a memoria. La sua applicazione immediata a' numeri un pò grandi non potrebbe porsi in pratica; ma allora si considerano decomposti nelle loro diverse collezioni di unità, a fine di eseguire la riunione di quelle, che portano lo stesso nome. Per esempio, a fine di aggiungere 27 con 32, si riuniscono le 7 unità del primo con le 2 del secondo, il che ne rende 9; poi le 2 diecine del primo con le 3 del secondo, il che rende 5 diecine. L' unione di questi due risultati forma una totale di 5 diecine, e 9 unità, o sia 59, che esprime la somma dei numeri proposti.

Per quanto sieno grandi i numeri, che è uopo insieme addizionare, si può sempre ad essi applicare ciò, che è stato detto di sopra; ma conviene osservare, che le somme particolari, che risultano dall'addizione di due numeri, espresse da una sola cifra, possono spesse volte produrre delle diecine, ovvero delle unità della collezione superiore, e che perciò debbono essere riunite con quelle di questa collezione.

Nell' addizione dei numeri 49, e 78 la somma delle unità 9, ed 8 ne produce 17, delle quali conviene ritenerne 10, ovvero una diecina per aggiungerla alla somma delle diecine dei numeri proposti: adunque si dirà 4, e 7 fanno 11, ed aggiungendovi la diecina ritenuta, si avrà 12 pel totale delle diecine contenute nella somma di questi numeri, la quale perciò conterrà 1 centinajo, 2 diecine, e 7 unità, il che farà 127.

11. Partendo da questi principj si è trovata una maniera di disporre i numeri da sommarsi, la quale rende facile la riunione delle loro diverse collezioni di unità, e si è formata una regola, che faremo abbastanza conoscere con l'esempio seguente.

Sieno i numeri 527, 2519, 9812, 73, ed 8: per sommarli insieme, si comincia dallo scrivere gli uni sotto gli altri, ponendo le unità dello stess' ordine in una medesima colonna; poi si conduce una linea per separarli dal risultato, che si pone al di sotto.

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somma	12939

Si fa primieramente la somma de' numeri contenuti nella colonna delle unità, e siccome si trova 29, non si scrivono che le 9 unità, e si ritengono le due diecine per aggiungerle a quelle, che sono contenute nella colonna seguente, la quale a cagione di questo aumento contiene 13 unità del suo ordine; non si scrivono al di sotto che le tre unità, e si ritiene la diecina per aggiungerla alla colonna seguente. Si opera sopra questa come sopra la precedente, e si trova 19; non si scrivono che le 9 unità, e si ritiene la diecina per la colonna seguente, di cui la somma diverrà composta di 12 unità. Si scrivono le 2 unità sotto questa colonna, e si pone la diecina a sinistra, il che si riduce a scrivere la somma dell' ultima colonna come si è trovata. Con questo mezzo si ha 12939 per la somma dei numeri proposti.

12. Il metodo, che abbiamo seguito, può enunciarsi come segue: *scrivere gli uni sotto gli altri i numeri da sommarsi, ponendo le unità dello stess' ordine in una stessa colonna, condurre una linea sotto l' ultimo numero per separarlo dal risultato; aggiungere successivamente, cominciando a destra, i numeri contenuti in ciascuna colonna; scrivere la somma come si è trovata, se essa non sorpassa 9; e se essa contiene delle diecine ritenerle per aggiungerle alla colonna seguente: finalmente scrivere nell' ultima colonna la somma trovata.*

Potremo esercitarci sopra gli esempj seguenti:

7861	66947	4649
345	46742	928
8023	132684	9298
16229	246373	14875

Della sottrazione.

13. Dopo aver appreso di comporre un numero coll' addizione di più altri, il primo problema, che si presenta, è di togliere un numero da un altro, che lo sorpassi, il che torna lo stesso, decomporre questo in due parti, delle quali una sia l' altro numero dato. Se, per esempio, si avesse il numero 9, e si volesse toglier 4, esso 9 sarebbe, per questa operazione, decomposto in due parti, che lo riprodurrebbero con l' addizione.

Per giungere a togliere un numero da un altro, quando essi non sono molto grandi, convien seguire un metodo opposto a quello, che si è prescritto nel numero 10 per trovarne la loro somma, cioè a dire, che nella serie dei nomi assegnati ai numeri, si dee, partendo dal maggiore di quelli, che si considerano, discendere di tanti gradi, quante vi sono unità nel più piccolo, e si arriverà al nome applicato alla differenza cercata: così discendendo di quattro gradi al disotto della parola *nove* si perviene al *cinque*, nome, che esprime il numero, che conviene aggiungere al 4 per formar 9, ovvero, che indica di quanto il 9 sorpassi il 4.

Sotto quest' ultimo punto di vista, 5 è l' *eccesso* di 9 sopra 4. Se non si volesse che indicare l' ineguaglianza de' numeri 9, e 4 senza fermare l' attenzione sopra l' ordine delle loro grandezze, si direbbe, che la loro *differenza* è 5. Finalmente se si facesse l' operazione per togliere 4 da 9, si direbbe, che il *resto* è 5. Si vede, che quantunque le parole *resto*, *eccesso*, *differenza* sieno sinonime, pure ciascuna corrisponde ad una maniera particolare di riguardare la decomposizione del numero 9 nelle due parti 4, e 5, operazione, che s' indica sempre col nome di *sottrazione*.

14. Quando si tratta di numeri un pò grandi, la sottrazione s' opera per parti, togliendo successivamente dalle unità di ciascun ordine, che sono nel maggior dei due numeri, quelle degli ordini corrispondenti poste nel minore.

Per farla comodamente, si dispongono questi numeri come 9587, e 345 nell' esempio quì sotto.

$$\begin{array}{r} 9587 \\ 345 \\ \hline \end{array}$$

Resto 9242

e si pone al di sotto di ciascheduna colonna l' eccesso del numero superiore sopra il numero inferiore contenuto in questa colonna, dicendo

togliendo 5 da 7, resta 2,
togliendo 4 da 8, resta 4,
togliendo 3 da 5, resta 2,

ponendo di poi la cifra 9, dalla quale non vi è niente da levare; il resto 9242 indica di quanto 9587 sorpassa 345.

L' esattezza del metodo, che abbiam seguito, è evidente; poichè, togliendo dal maggiore dei due numeri tutte le parti contenute nel minore, si è evidentemente tolto tutto questo numero minore.

15. L' applicazione di questo metodo dimanda alcune attenzioni particolari, quando qualcuno degli ordini d' unità del numero da togliersi contiene più unità degli ordini corrispondenti dell' altro numero.

Se, per esempio, si ha 397 da togliersi da 524

$$\begin{array}{r} 524 \\ 397 \\ \hline \end{array}$$

Resto 127

Nell' operazione quì sopra indicata non si potranno togliere immediatamente le unità del numero inferiore da quelle del numero superiore; ma il numero 524, rappresentato qui da 5 centinaja, 2 diecine, e 4 unità può essere espresso in una maniera differente decomponendo alcuna delle collezioni d'unità per riunire una parte con altre d'un ordine inferiore. In vece di 2 diecine, e 4 unità, con le quali esso termina, si può sostituire col pensiero una diecina, e 14 unità; togliendo allora da quest' ultima le 7 unità del numero inferiore, si scriverà al disotto il resto 7. Per questa nuova decomposizione il numero superiore non contiene più che una diecina, dalla quale perciò non si potrebbero togliere le 9 del numero inferiore; ma sopra le 5 centinaja, espresse nel numero superiore, si può prenderne 1 per aggiungerla alla diecina rimanente, e si avrà allora 4 centinaja, e 11 diecine; togliendo da queste quelle del numero inferiore, ne resteranno 2. Finalmente dalle 4 centinaja rimaste nel numero superiore si toglieranno le 3 del numero inferiore; si scriverà il resto 1, e si avrà 127 per risultato dell' operazione proposta.

Questa maniera di operare consiste, come si vede, a prendere *in prestito* nell' ordine superiore un' unità per aggiungerla, secondo il suo valore a quelle dell' ordine, sopra il quale si opera, osservando di contare di poi per un' unità di meno la cifra superiore quando vi si arriverà.

16. Quando mancano degli ordini di unità nel maggiore dei due numeri, cioè a dire quando vi sono degli zeri tra le sue cifre significative, è uopo avanzarsi sino alla prima di que-

ste cifre a sinistra per prenderne l' imprestito opportuno. Eccone un esempio:

$$\begin{array}{lr} & 7002 \\ & 3495 \\ \hline \text{Resto} \ldots\ldots & 3507 \end{array}$$

Non potendo togliere le 5 unità del numero inferiore dalle 2 del numero superiore, si prendono 10 unità dalle 7000 indicate dalla cifra 7; allora ne rimangono 6990; ed aggiungendo le 10 prime alla cifra 2, il numero superiore si trova decomposto in 6990, e 12; togliendo da quest' ultimo numero le 5 unità del numero inferiore, si avrà 7 per le unità del resto.

Questa prima operazione ha lasciato nel numero superiore 6990 unità, ovvero 699 diecine, in vece di 700, le quali sono espresse dalle tre ultime cifre a sinistra; per cui si vede, che ai due zeri si sono sostituiti de' 9, e che la prima cifra significativa a sinistra è diminuita di un' unità. Continuando in tal modo la sottrazione nelle altre colonne, essa non há alcuna difficoltà, e si trova il resto scritto al di sotto dell' esempio.

17. Riprendendo le osservazioni fatte ne' due numeri precedenti, la regola da seguirsi per operare la sottrazione sopra due numeri qualunque può enunciarsi in questo modo: *porre il minor numero sotto il maggiore in maniera che le loro unità dello stesso ordine sieno in una stessa colonna; condurre una linea sotto il minore a fine di separarlo dal risultato; to-*

gliere successivamente in ciascuna colonna, cominciando a destra, il numero inferiore dal numero superiore: se ciò non si può eseguire, aumentare la cifra superiore di 10 unità; contare la prima cifra significativa, che viene dopo quella, per un' unità di meno, e se vi sono de' zeri intermedj, riguardarli come 9.

18. Per maggior facilità, quando abbisognasse diminuire la cifra superiore di un' unità, si può contarla per ciò, che vale, ed aggiungere quest' unità alla cifra inferiore corrispondente, la quale, trovandosi aumentata, conduce, come debb' essere, ad un resto minore di un' unità di quello, che risulterebbe dalle cifre scritte. Nel primo degli esempj quì sotto esposti, dopo aver tolte 6 unità da 14, si conteranno le 8 inferiori per un 9, e così degli altri.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

Prova dell' addizione, e della sottrazione.

19. Benchè si eseguisca un'operazione con un metodo, la di cui giustezza è stabilita sopra principj sicuri, pure si possono commettere alcuni errori nelle addizioni, e sottrazioni particolari, di cui si cerca il risultato nella propria memoria; a fine di prevenire questo inconveniente, si ha ricorso ad una operazione inversa della prima, per mezzo della quale si riconosce se i risultati di questa sono esatti: questo è ciò che si appella far la *prova* dell' operazione proposta.

Quella dell' addizione consiste in togliere successivamente tutte le parti di questi numeri dalla somma de' numeri addizionati; e se l' operazione è riescita ben fatta, non si dee trovare alcun resto. Io passo a mostrare, sopra l' esempio del numero 11, come si eseguiscano ad un tempo tutte le sottrazioni.

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somma	12939
	1120

Si sommano primieramente i numeri contenuti nella prima colonna a sinistra, la quale quì contiene le migliaja, e si toglie la somma 11 dal numero 12, il quale dà principio al risultato. Si scrive al disotto la differenza 1 prodotta da ciò, che si è ritenuto sopra la colonna delle centinaja nell' operazione primitiva. La somma della colonna delle centinaja, presa isolatamente, non giunge che a 18; se questa si toglie dalle 9 centinaja scritte nel risultato, ed aggiunte al migliajo, che si è avuto dalla colonna precedente a sinistra (considerato come dieci centinaja), si scriverà al disotto il resto 1, il quale indicherà pure ciò, che si è ritenuto nella colonna delle diecine. La somma

11 di questa colonna tolta da 13 lascia di resto 2 diecine, le quali provengono da ciò che si è ritenuto sopra la colonna delle unità. Aggiungendo queste due diecine con le 9 unità indicate nel risultato, si forma il numero 29, che debb'essere precisamente la somma della colonna delle unità, sopra la quale nessun' altra ha potuto influire. Adunque aggiungendo di nuovo i numeri contenuti in questa colonna, se l' operazione è stata bene eseguita, si dee giungere allo stesso risultato, e quindi non avere alcun resto. Questo è ciò, che accade in fatti nell' esempio presente, e ciò, che indica lo o scritto sotto questa colonna. Il metodo, che io ho spiegato, si ristringe a questo: *per fare la prova dell' addizione conviene aggiungere di nuovo, cominciando a sinistra, ciascuna colonna dell' operazione; togliere l' ultima somma da quella, che si è già segnata al disotto; scrivere i resti, che si trovano, ed aggiungerli come diecine alla colonna seguente a destra: se l' operazione è stata fatta bene, non dee rimaner nulla nell' ultima colonna.*

20. *La prova della sottrazione si ricava immediatamente da ciò, che il minor numero unito al resto compone il maggiore.* Così per assicurarsi dell' esattezza della sottrazione seguente.

	524
	297
Resto	227
	524

si è aggiunto al resto il minor numero, ed il risultato si è trovato in fatti eguale al maggiore.

Della Moltiplicazione.

21. Quando i numeri da sommarsi sono eguali tra loro, l' addizione prende il nome di *moltiplicazione*, perchè allora la somma è composta di uno di questi numeri *ripetuto tante volte, quanti sono i numeri da addizionarsi*; reciprocamente, se si vuol ripetere un numero più volte, vi si perverrà aggiungendo questo numero a se stesso tante volte meno una, quant' esso debbe essere ripetuto. Per esempio, nell' addizione seguente,

16
16
16
16
—
64

si ripete il numero 16 quattro volte, e si trova aggiunto tre volte a se stesso.

Quando si ripete un numero 2 volte dicesi *duplicare*; 3 volte *triplicare*; 4 volte dicesi *quadruplicare*; e così in appresso.

22. Una moltiplicazione contiene tre numeri, cioè, quello che si ripete, e che si chiama *moltiplicando*; il numero, che indica quante volte si ripete, e che si chiama *moltiplicatore*; finalmente il risultato dell' operazione, che si chiama *prodotto*. Il *moltiplicando*, ed il *molti-*

plicatore, come quelli, che concorrono insieme a formare il prodotto, si dicono *fattori* di questo *prodotto*. Nell' esempio quì sopra proposto 16 è il *moltiplicando*, 4 il *moltiplicatore*, e 64 il *prodotto*; e si vede, che 4, e 16 sono i fattori di 64.

23. Quando il moltiplicando, e il moltiplicatore sono de' numeri grandi, la formazione del prodotto per l'addizione ripetuta del moltiplicando abbisognerebbe di un tempo assai considerevole. Si è perciò procurato di abbreviarla decomponendola in certo numero di operazioni particolari facili ad eseguirsi a memoria. Per esempio, si ripeterebbe 4 volte il numero 16, prendendo separatamente lo stesso numero di volte le 6 unità, e la diecina, di cui esso è composto: adunque basta conoscere i prodotti, che danno i numeri delle unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore, quando quest' ultimo numero non ha che una sola cifra, e ciò riducesi, in tutti i casi possibili, a trovare il prodotto di uno qualunque de' 9 primi numeri per ciascun altro di questi numeri.

24. Questi prodotti sono contenuti nella tavola seguente attribuita a Pitagora

TAVOLA DI PITAGORA

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

25. Per formare questa tavola, si scrivono primieramente sopra una stessa linea i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Di poi si aggiunge ciascuno di questi numeri a se stesso, e si scrive la somma nella seconda linea, la quale così è composta del doppio di ciascun numero della prima, ovvero del prodotto di questo numero per 2.

Nella stessa maniera a ciascun numero della seconda linea si aggiunge quello, che gli corrisponde nella prima, e si dispongono le somme sopra una terza linea, la quale in questo modo contiene il triplo di ciascun numero della prima, o il loro prodotto per 3. Coll'addizione de' numeri della prima linea con quelli della terza, se ne formerà una quarta, la quale conterrà il quadruplo di ciascun numero della prima, ovvero il prodotto di questo numero per 4; e così in appresso, finchè siamo pervenuti alla nona linea, la quale contiene i prodotti de' numeri della prima moltiplicati ciascuno per 9. Giova l'osservare, che i diversi prodotti di un numero qualunque, pe' numeri 2, 3, 4, 5, etc., si chiamano i *multipli* di questo numero: così 6, 9, 12, 15, etc., sono i multipli di 3.

26. Quando si è ben intesa la formazione di questa tavola, è facile il conoscerne l'uso. Infatti, se, per esempio, si domandasse il prodotto di 7 per 5, converrebbe, nella quinta linea, che contiene i diversi prodotti de' 9 primi numeri moltiplicati per 5, prendere quello, che corrisponde al di sotto di 7; si troverebbe 35. È la stessa cosa per qualsivoglia altro esempio: *il prodotto si trova nella linea del moltiplicatore al di sotto del moltiplicando.*

27. Cercando nella tavola di Pitagora il prodotto di 5 per 7, si troverà ancora come quì sopra 35, sebbene si sia considerato questa volta 5 come moltiplicando, e 7 come moltiplicatore. Questa osservazione, che può ripetersi sopra ciascuno dei prodotti contenuti nella tavola, è generale; e *si può sempre in qualsivoglia moltiplicazione, rovesciare l' ordine de' fattori, cioè a dire, prendere il moltiplicatore per moltiplicando, e il moltiplicando per moltiplicatore.*

Siccome la tavola di Pitagora non contiene che un numero limitato di prodotti, non basterà l'aver verificata in questa tavola la conclusione, che ora abbiamo enunciata; perchè si potrebbe dubitare, che essa non fosse vera per dei prodotti più grandi, il di cui numero è illimitato; non vi è che un ragionamento indipendente da qualunque valore particolare del moltiplicando, e del moltiplicatore, che possa mostrare, che la conclusione, di cui si tratta, non ha eccezione. Eccone uno, il quale è molto proprio ad adempiere questo fine, perchè egli presenta un immagine sensibile della maniera, con cui si forma il prodotto di due numeri. Per farlo meglio comprendere, io lo applicherò primieramente ai numeri 5, e 3;

Se sopra una stessa linea si scrive 5 volte la cifra 1, e si pongono due linee simili al di sotto della prima, come quì si vede,

1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1
1, 1, 1, 1, 1,

il numero totale delle cifre 1 sarà composto di tante volte 5, quante sono le linee, cioè a dire, di 3 volte 5; ma per la disposizione di queste linee le cifre 1 sono poste in colonne, che ne contengono 3; contandole in questa maniera, si trova tante volte 3 unità, quante vi sono colonne, ovvero 5 volte 3 unità, ed il risultato non dipendendo dalla maniera di contare, ne segue, che 3 volte 5, e 5 volte 3 danno il medesimo prodotto. È facile l'applicare questo ragionamento a numeri qualunque, immaginando, che ciascuna linea contenga tante unità quante ve ne sono nel moltiplicando, e che si sia posto, le une sotto le altre, un numero di linee eguale al moltiplicatore. Contando allora il prodotto per linee, esso risulta dal moltiplicando ripetuto tante volte quante sono unità nel moltiplicatore; ma l'unione delle cifre scritte presenta tante colonne, quante vi sono unità in una linea, e ciascuna colonna contiene tante unità quante sono le linee: adunque, se si vuol contare per colonne, si ripeterà il numero delle linee, ovvero il moltiplicatore tante volte, quante unità vi sono in una linea, cioè a dire, tante volte, quante lo indica il moltiplicando. Perciò è lecito, nella formazione del prodotto di due numeri qualunque, di prendere per moltiplicatore quello di questi numeri, che si vorrà.

28. Il ragionamento, che io ho riportato per provare la verità della proposizione precedente, ne è la *dimostrazione*; e conviene ben osservare, che ciò, che costituisce l'essenza del metodo seguito nelle Matematiche pure, si è che non si ammette alcuna proposizione, o alcuna operazione, che non sia la conseguenza necessaria delle prime nozioni, sopra le quali ci siamo appoggiati, o la cui verità non sia in generale stabilita con ragionamenti indipendenti da esempj particolari, i quali mai non fanno prova, e che non servono che a render facile ai lettori l'intelligenza dei ragionamenti, o la pratica delle regole.

29. Conoscendo tutti i prodotti, che danno i 9 primi numeri combinati tra loro, si può, secondo l'osservazione del numero 23, moltiplicare un numero qualunque per un numero di una sola cifra, formando successivamente il prodotto delle unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore; e l'operazione si dispone nella maniera seguente.

$$\begin{array}{r} 526 \\ 7 \\ \hline 3682 \end{array}$$

Il prodotto delle 6 unità del moltiplicando pel moltiplicatore 7, essendo 42, non si scrivono che le 2 unità, e si ritengono le 4 diecine per aggiungerle a quelle, che or ora si troveranno.

Il prodotto delle 2 diecine del moltiplicando pel moltiplicatore 7, è 14, ed aggiungendovi le 4 diecine ritenute precedentemente, si forma il numero 18, di cui non si scrivono ancora che le unità, ritenendo la diecina per l'operazione seguente.

Il prodotto delle 5 centinaja del moltiplicando pel moltiplicatore 7, è 35; aumentato dell'unità ritenuta precedentemente, diventa 36, e si scrive tutto intero, perchè non vi sono altre cifre nel moltiplicando.

30. Questa operazione si enuncia così. *Per moltiplicare un numero composto di più cifre per un numero di una sola cifra, si pone il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, si tira una linea sotto questi numeri per separarli dal prodotto; si moltiplicano successivamente, cominciando a destra, le unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore; si scrive il prodotto tutto intero, quando esso non sorpassa il 9; ma se esso contiene delle diecine, si ritengono per aggiungerle al prodotto seguente; e si continua in questo modo sino all' ultima cifra a sinistra del moltiplicando, di cui si scrive il risultato come si trova.*

È evidente, che quando il moltiplicando termina con degli o, l' operazione non dee cominciare se non se alla prima cifra significativa di questo numero; ma per dare al prodotto il valore, che dee avere, convien porre alla sua destra tanti o, quanti ve ne sono alla destra del moltiplicando. Rispetto agli o, che fossero posti tra le cifre del moltiplicando, essi non danno alcun prodotto, e perciò si dee porre uno o, quando nulla si è ritenuto nel prodotto precedente.

Ecco alcuni esempj per esercitare il lettore:

956	8200	7012	80970
6	9	5	4
5736	73800	35060	323880

31. I numeri i più semplici, espressi da più

cifre, essendo 10, 100, 1000, etc., conviene primieramente cercare come si possa moltiplicare un numero qualunque per ciascuno di questi numeri. Ora, ricordandosi della convenzione stabilita nel numero 6, per la quale la stessa cifra prende un valore di 10 in 10 volte più grande a mano a mano, che essa avanza verso sinistra, si comprenderà, che per moltiplicare un numero qualunque per 10, convien rendere dieci volte più grande ciascuna delle collezioni di unità, di cui esso è composto, cioè a dire, cangiare le unità in diecine, le diecine in centinaja, e così in appresso, e si produce questo effetto, ponendo uno o alla destra del numero proposto, poichè tutte le sue cifre significative saranno avanzate di un posto verso sinistra.

Per la stessa ragione si moltiplicherebbe per 100 un numero qualunque ponendo alla sua destra due zeri; perchè pel primo zero il numero diventando dieci volte più grande di quello, che era, diverrebbe ancora dieci volte più grande col secondo zero, e sarebbe perciò 10 volte 10, ovvero 100 volte più grande di quello, che era da prima.

Continuando questo ragionamento, si vedrà, che, secondo il nostro sistema di numerazione, si moltiplica un numero per 10, per 100, per 1000, etc. scrivendo alla destra del moltiplicando tanti zeri, quanti ve ne sono alla destra dell' unità del moltiplicatore.

32. Quando la cifra significativa del moltiplicatore è differente dall' unità, come se si tratti,

per esempio, di moltiplicare per 30, o per 300, o per 3000, i quali numeri non sono altra cosa che 10 volte 3, o 100 volte 3, o 1000 volte 3, etc., l'operazione si decompone in due altre; si moltiplica primieramente per la cifra significativa 3, secondo la regola del numero 30., e di poi si moltiplica il prodotto per 10, 100, 1000, etc. (come si è detto nel numero precedente), scrivendo uno, due, tre, etc. zeri alla destra di questo prodotto.

Per esempio, si debba moltiplicare 764 per 300

$$\begin{array}{r} 764 \\ 300 \\ \hline \end{array}$$

Prodotto . . . 229200

Le 4 cifre significative di questo prodotto risultano dalla moltiplicazione di 764. per 3; queste si scrivono in dentro due posti verso sinistra per porvi due zeri, coi quali termina il moltiplicatore.

In generale, *quando il moltiplicatore avrà dopo sè un numero qualunque di zeri, si moltiplicherà primieramente il moltiplicando per la cifra significativa del moltiplicatore, e si porranno dopo il prodotto tanti zeri, quanti ne ha il moltiplicatore.*

33. Le regole precedenti si applicano al caso, nel quale il moltiplicatore sia un numero qualunque, considerando a parte ciascuna collezione di unità, delle quali esso è composto. Per esempio moltiplicare 793 per 345, o ciò, che è lo stesso, ripetere 345 volte il numero 793,

vuol dire prendere 793, 5 volte, più 40 volte, più 300 volte, e l'operazione da farsi si trova decomposta in tre altre, nelle quali i moltiplicatori 5, 40, e 300 hanno solamente una cifra significativa.

Per facilmente riunire il risultato di queste tre operazioni, si dispone il calcolo nella maniera, che segue

$$\begin{array}{r} 793 \\ 345 \\ \hline 3965 \\ 31720 \\ 237900 \\ \hline 273585. \end{array}$$

Si moltiplica successivamente il moltiplicando per le unità, diecine, e centinaja etc., del moltiplicatore, osservando di porre uno zero alla destra del prodotto particolare dato dalle diecine del moltiplicatore, e due zeri alla destra del prodotto dato dalle centinaja; il che fa avanzare il primo di questi prodotti di un posto verso sinistra, ed il secondo di due posti. Si fa di poi l'addizione dei tre prodotti particolari, a fine di ottenere il prodotto totale dei numeri proposti.

Li zeri posti dopo i prodotti particolari non contando niente in questa addizione, si può lasciare di scriverli, purchè si abbia cura di porre nel posto che le appartiene, la prima cifra del prodotto dato da ciascheduna cifra significativa del moltiplicatore, cioè a dire, nel posto delle diecine il prodotto dato dalle diecine del moltiplicatore; nel posto delle centinaja il prodotto dato dalle centinaja del moltiplicatore; e così in appresso.

34. Secondo questo metodo, si ha la regola seguente. *Per moltiplicare due numeri qualunque l' uno per l' altro, si formano successivamente* (secondo la regola del numero 30) *i prodotti del moltiplicando per i diversi ordini di unità del moltiplicatore, osservando di porre la prima cifra di ciaschedun prodotto particolare sotto le unità dell' ordine, di cui è la cifra del moltiplicatore, che dà questo prodotto; ed in fine si sommano tutti i prodotti particolari.*

35. Quando il moltiplicando termina con degli zeri, si possono questi in principio trascurare, e si possono incominciare tutte le moltiplicazioni particolari dalla prima cifra significativa del moltiplicando; ma per porre di poi al posto, che loro appartiene, le cifre del prodotto totale, conviene scrivere alla destra di questo prodotto tanti zeri, quanti ve ne sono alla destra del moltiplicando. Se il moltiplicatore terminasse con uno, o più zeri, l' osservazione del numero 32 ci permetterebbe di trascurarli, purchè si scrivesse un egual numero di zeri alla destra del prodotto.

Risulta da ciò, che *quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore terminano con degli zeri, non dobbiamo occuparci in principio, che delle cifre significative, e si pongono alla destra del*

prodotto ottenuto da queste cifre tanti zeri, quanti ve n' erano nel moltiplicando, e nel moltiplicatore.

Quando tra le cifre significative del moltiplicatore vi sono degli zeri, siccome essi non danno alcun prodotto, si trascurano, osservando di porre nel posto, che loro conviene, le unità del prodotto, che risulta dalla cifra significativa scritta a sinistra di questi zeri.

Il lettore potrà esercitarsi sopra questi esempj.

300	526	9648
40	307	5137
12000	3682	67536
	157800	28944O
	161482	964800
		48240000
		49561776.

Della divisione.

36. Il prodotto di due numeri essendo formato dall' uno di questi numeri ripetuto tante volte quante unità sono nell' altro (21), si può ritornare da un prodotto qualunque ad uno de' suoi fattori, cercando quante volte questo prodotto contiene l' altro suo fattore: la sottrazione sola basta per questa ricerca. In fatti, se si volesse sapere quante volte il 64 contiene il 16, basterebbe togliere 16 da 64 quante volte

si può; e poichè dopo 4 sottrazioni non resterebbe nulla, si conchiuderebbe, che il numero 16 è contenuto 4 volte nel 64. Questa maniera di decomporre un numero per un altro, a fine di sapere quante volte esso contiene quest' altro, si chiama *divisione*, perchè essa serve a dividere, o a spartire un numero dato in parti uguali, delle quali il numero, o il valore n' è dato.

Se, per esempio, si dovesse dividere il 64 in 4 parti eguali; per trovare il valore di queste parti, converrebbe cercare il numero, che è contenuto 4 volte nel 64, e perciò riguardare il 64 come un prodotto, il quale ha per fattore 4, ed una delle parti cercate, la quale qui è 16. Se si domandasse di quante parti uguali a 16 il numero 64 è composto, per conoscere il numero di queste parti converrebbe cercare quante volte il 64 contiene il 16, e perciò si dovrebbe riguardare 64 come un prodotto, del quale 16 sarebbe uno de' fattori, e l' altro fattore sarebbe il numero cercato, il quale qui è 4.

Adunque qualunque sia l' uso, che si abbia in vista, *la divisione si riduce a trovare l'uno de' fattori di un dato prodotto, quando si conosce l' altro fattore*.

37. Il numero, che convien dividere, si chiama *dividendo*; il fattore noto, e pel quale si dee dividere, si chiama *divisore*; il fattore incognito, che si trova con la divisione, si chiama *quoziente*, ed indica sempre quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

Da ciò, che si è detto, ne segue, *che il divisore moltiplicato pel quoziente dee riprodurre il dividendo*.

38. Quando il dividendo può contenere un gran numero di volte il divisore, non si può mettere in pratica la sottrazione ripetuta a fine di giungere al quoziente; allora convien ricorrere ad un abbreviamento, simile a quello, che si è dato per la moltiplicazione. Se il dividendo non è 10 volte più grande del divisore, il che si può vedere con la sola ispezione di questi numeri, e se il divisore non ha che una sola cifra, si troverà il quoziente con la tavola di Pitagora, poichè essa contiene tutti i prodotti, i di cui fattori non hanno che una sola cifra. Se, per esempio, si domandasse quante volte 56 contiene 8, bisognerebbe discendere nell' ottava colonna fino alla linea, ove si trova il 56; la cifra 7, posta al principio di questa linea, indica il secondo fattore del numero 56, ovvero quante volte questo numero contiene 8.

Si vede in questa tavola, che vi sono de' numeri, i quali non possono esattamente dividersi per gli altri. Per esempio, la settima linea, la quale contiene tutti i multipli di 7, non contenendo il numero 40, ci dimostra, che questo non è divisibile per 7; ma perciocchè esso è compreso fra 35, e 42, si vede, che il maggior multiplo di 7, che esso può contenere, è 35, i di cui fattori sono 5, e 7. Con questi elementi, e con le considerazioni, che io passo ad esporre, si può eseguire una divisione qualunque.

39. Sia, per esempio, da dividersi 1656 per 3; si può cangiare il quesito in quest' altro: *Trovare un numero tale, che moltiplicando le sue unità, diecine, centinaja, etc. per 3, si abbiano per prodotto le unità, diecine, centinaja, etc. del dividendo* 1656.

Egli è chiaro, che questo numero non avrà unità di un ordine più alto delle migliaja; perchè se egli avesse solamente delle diecine di migliaja, anche nel prodotto si avrebbero le diecine di migliaja, ma ciò non è. Non vi saranno nè pure unità dell' ordine delle migliaja; perchè se ve ne fosse una sola, il prodotto ne conterrebbe almeno 3, e ciò ancora non avviene.

Questo mostra, che il migliajo, che è nel dividendo, è ciò, che si è ritenuto quando si sono moltiplicate pel divisore 3 le centinaja del quoziente.

Ciò posto, la cifra delle centinaja del quoziente cercato debb' esser tale, che moltiplicando per 3 il numero, che essa esprime, si abbia 16 per prodotto, ovvero il multiplo di 3, che più si avvicina al 16. Questa restrizione è necessaria a cagione delle unità ritenute, che possono essere state somministrate dalla moltiplicazione delle altre cifre del quoziente per il divisore, quantità, che abbiamo dovuto riunire al prodotto delle centinaja.

Il numero, che adempie a questa condizione è 5; ma 5 centinaja moltiplicate per 3 danno 15 centinaja, e il dividendo 1656 ne contiene 16: adunque il centinajo, che v' è di differenza proviene da ciò, che si è ritenuto nella moltiplicazione delle altre cifre del quoziente pel divisore. Se ora si sottrae il prodotto particolare 15 centinaja, ovvero 1500 dal prodotto totale 1656, il resto 156 conterrà i prodotti delle diecine del quoziente pel divisore; e tutto si ridurrà a trovare un numero, che moltiplicato per 3, dia 156, problema precisamente simile a quello, che si è presentato a principio. Così, quando si sarà trovata la prima cifra del quoziente in quest' ultimo numero, si moltiplicherà pel divisore il numero espresso da questa cifra, come si è praticato sul numero precedente; e togliendo dal prodotto totale questo prodotto particolare, si avrà per risultato un nuovo dividendo, sopra il quale si opererà, come sul precedente; e così in appresso, finchè vi sono cifre nel dividendo.

40. L' operazione, che ho descritta, si dispone come si vede quì sotto

```
divid. 1656 | 3 divis.
       15   |----------
       ---- | 552 quoz.
        15
        15
        ---
         06
          6
         ---
          0.
```

Il dividendo, e il divisore sono separati da una linea; se ne tira un altra sotto il divisore per indicare il luogo del quoziente: ciò fatto, si prende sopra la sinistra del dividendo la parte 16, atta a contenere il divisore 3; e dividendola per questo numero si ha 5 per prima cifra a sinistra del quoziente. Formando di poi il prodotto del divisore pel numero, che si è trovato, e sottraendolo dal dividendo particolare 16, si scrive al di sotto il resto 1, presso al quale si abbassano le 5 diecine del dividendo. Considerando quest' ultimo numero, come un secondo dividendo particolare, si divide ancora pel divisore 3, e si ottiene 5 per seconda cifra del quoziente; si fa il prodotto di questo numero pel divisore, che si sottrae dal dividendo particolare, e si ha o per resto. Finalmente si abbassa l' ultima cifra del dividendo 6, si divide quest' ultimo dividendo particolare pel divisore 3, e si ha 2 per l' ultima cifra del quoziente.

41. È evidente, che se si trovasse un dividendo particolare, il quale non contenesse il divisore, ciò avverrebbe solo perchè il quoziente non ha unità dell' ordine di questo dividendo, e che quelle, che questo stesso dividendo contiene, provengono dai prodotti del divisore per le unità degli ordini inferiori del quoziente: adunque, quando ciò accade convien porre nel quoziente uno o, a fine di occupare il luogo di quell' ordine di unità, che manca.

Esempio: sia

1535	5
15	307
035	
35	
00.	

La divisione delle 15 centinaja del dividendo pel divisore non lasciando alcun resto, le 3 diecine, che formano il secondo dividendo particolare, non possono contenere il divisore. Ne risulta, che il quoziente non debbe aver diecine, e che perciò conviene occuparne il posto con uno o, per dare alla prima cifra del quoziente il valore, che essa dee avere rispetto alle altre, di poi abbassando l' ultima cifra del dividendo, si forma un terzo dividendo particolare, il quale diviso per 5, dà 7 per le unità del quoziente, e questo numero è 307.

42. Le considerazioni esposte nel numero 40, si applicano egualmente al caso, in cui il divisore contenga un numero qualunque di cifre.

Se, per esempio, si trattasse di dividere 57981 per 251, si vedrebbe facilmente, che il quoziente non ha cifre al di là delle centinaja, perchè se egli avesse solo delle migliaja, il dividendo conterrebbe delle centinaja di migliaja, il che non è; di più questa cifra delle centinaja dovrebbe esser tale, che moltiplicata per 251 dasse per prodotto 579, o il multiplo di 251 il più prossimo a 579, ma minore di questo numero, restrizione necessaria a cagione delle unità ritenute, che la moltiplicazione delle altre cifre del quoziente pel divisore può aver somministrate. Il numero, che adempie a questa condizione è il 2; ma 2 centinaja moltiplicate per 251 fanno 502 centinaja, e il dividendo ne contiene 579; adunque la differenza 77 centinaja proviene dalle unità ritenute risultanti dalla moltiplicazione delle unità, e diecine del quoziente pel divisore.

Se ora si sottrae il prodotto particolare 502 centinaja, ovvero 50200 dal prodotto totale 57981, il resto 7781 conterrà i prodotti delle unità, e delle diecine del quoziente pel divisore, e tutto ancora si ridurrà a trovare un numero, che moltiplicato per 251 dia per prodotto 7781. Così, quando si avrà determinata la prima cifra del quoziente, si moltiplicherà pel divisore il numero, che essa esprime; e togliendo il prodotto particolare dal prodotto totale, si avrà per risultato un nuovo dividendo, sul quale si opererà, come sopra il precedente; e così in appresso, finchè vi saran cifre nel dividendo.

In generale, per ottenere la prima cifra del quoziente, convien sempre separare sulla sinistra del dividendo tal numero di cifre, che sia sufficiente, perchè il numero, che esse esprimono, considerato come se rappresentasse unità semplici, possa contenere il divisore, ed eseguirsi questa divisione particolare.

43. Disponendo l'operazione, come precedentemente, i calcoli indicati si eseguiscono nell'ordine, che segue

57981	251
502	231
778	
753	
251	
251	
000.	

Si prendono le tre prime cifre a sinistra del dividendo, per formare il primo dividendo particolare; queste si dividono pel divisore; si scrive nel quoziente il numero 2, che ne risulta; si moltiplica il divisore per questo numero, si scrive il prodotto 502 sotto il dividendo particolare 579. Fatta la sottrazione, presso al resto 77 si abbassano le 8 diecine del dividendo; si divide pel divisore questo nuovo dividendo particolare, si ottiene 3 per seconda cifra del quoziente, si moltiplica il divisore per questo numero; si sottrae il prodotto dal dividendo particolare corrispondente, ed appresso al resto 25 si abbassa l'ultima cifra 1 del dividendo: quest'ultimo dividendo particolare 251, essendo eguale al divisore, rende 1 per le unità del quoziente.

44. Quando il divisore contiene più cifre, si ponno trovare alcune difficoltà nel riconoscere quante volte questo numero è contenuto nei dividendi particolari. L'esempio seguente è destinato a dimostrare come vi si pervenga.

```
423405 | 485
3880   |-----
       | 873
------
 3540
 3395
------
  1455
  1455
------
  0000.
```

Conviene primieramente prendere quattro cifre sulla sinistra del dividendo per formare un numero, che possa contenere il divisore; ed allora non si vede a prima giunta quante volte 4234 può contenere 485. Per ajutarci in questa ricerca, osserveremo, che questo divisore è compreso tra 400, e 500, e che se egli fosse esattamente l'uno, o l'altro di questi numeri, il problema sarebbe ridotto a trovare quante volte 4 centinaja, o 5 centinaja sono contenute nelle 42 centinaja del numero 4234, ovvero, il che è lo stesso, quante volte i numeri 4, o 5 sono contenuti in 42. Si ha 10 pel primo, ed 8 pel secondo, adunque fra questi due numeri si trova il quoziente cercato. Primieramente si vede, che non è possibile che sia il 10, perchè ciò supporrebbe, che le unità dell'ordine superiore alle centinaja del dividendo, potessero contenere il divisore, il che non è; adunque non rimane che a provare quale dei due numeri 9, ed 8, adoperato come

moltiplicatore di 485, dà un prodotto, che si possa sottrarre da 4234, e si trova, che questo è 8: questa è adunque la prima cifra del quoziente. Sottraendo dal dividendo particolare il prodotto del divisore moltiplicato per 8, si ha per resto 354: abbassando di poi lo 0 delle diecine del dividendo, si forma un secondo dividendo particolare, sopra il quale si opera come sul precedente; e così degli altri.

45. Riepilogando gli articoli precedenti, abbiamo questa regola: *Per dividere un numero per un altro, si pone il divisore alla destra del dividendo; questi si separano con una linea, e se ne tira un altra sotto il divisore per indicare il luogo del quoziente. Alla sinistra del dividendo si prendono tante cifre, quante ve ne vogliono per contenere il divisore; si cerca quante volte il numero espresso dalla prima cifra del divisore è contenuto in quello, che è rappresentato dalla prima, o dalle due prime cifre del dividendo particolare, si moltiplica pel divisore questo quoziente, il quale non è che prossimo; e se il prodotto è maggiore del dividendo particolare, si tolgono successivamente dal quoziente tante unità, quante sono necessarie per ottenere un prodotto, che possa sottrarsi dal dividendo particolare; si fa la sottrazione, e se rimanesse una quantità maggiore del divisore, ciò sarebbe una prova, che il quoziente è stato diminuito di troppo, e perciò si dovrebbe accrescere. Si abbassa presso al resto la seguente cifra del dividendo; si cerca, come per lo*

innanzi, quante volte questo dividendo particolare contiene il divisore; si scrive nel quoziente il numero trovato, e si moltiplica pel divisore per toglierne il prodotto dal dividendo particolare; si prosegue in questo modo finattantochè si sieno abbassate tutte le cifre del dividendo proposto. Quando s' incontra un dividendo particolare, il quale non contiene il divisore, conviene, prima d' abbassare una nuova cifra del dividendo, porre uno zero nel quoziente.

46. Si racchiudono in minore spazio le operazioni della divisione, eseguendo a memoria la sottrazione de' prodotti del divisore per ciascuna cifra del quoziente, nel modo che si vedrà nell' esempio qui sotto posto

1755	39
195	
000	45

Dopo aver trovato, che il primo dividendo particolare 175 contiene 4 volte il divisore 39, si moltiplicano primieramente queste 9 unità per 4, il che dà 36; e per sottrarre questo prodotto delle unità del dividendo particolare, alle 5 unità, che esso contiene si aggiungono 4 diecine, il che fa 45, dal quale sottraendo 36 resta 9. Si ritengono di poi le 4 diecine per aggiungerle col pensiero al prodotto 12 del quoziente moltiplicato nelle diecine del divisore il che fa 16; togliendolo da 17, si tolgono le 4

diecine, che si aggiunsero alle unità del dividendo, a fine di render possibile la precedente sottrazione. Si opera nello stesso modo sopra il secondo dividendo partioolare 195, dicendo: 5 volte 9 fa 45, il quale tolto da 45, dà per resto zero; poi 5 volte 3 fa 15, al quale aggiunte le 4 diecine ritenute, si ottiene 19, e questo tolto da 19, dà per resto zero.

Si vede abbastanza da ciò come dobbiam condurci in qualunque altro esempio, per complicato che egli sia.

47. La divisione si abbrevia ancora quando il dividendo, e il divisore terminano in più zeri, perchè alla fine di ciascuno di questi numeri se ne possono togliere tanti, quanti ve ne sono in quello, che ne ha di meno.

Se, per esempio, si dovesse dividere 84000, per 400, questi numeri si ridurrebbero ad 840, e 4; il quoziente non sarebbe in alcun modo alterato; perchè altro non si sarebbe fatto, che cangiare il nome dell' unità, poichè in vece di 84000, o sia di 840 centinaja, e di 400, o sia di 4 centinaja, si avrebbe 840 unità, e 4 unità, ed il quoziente dei numeri 840, e 4 resta sempre lo stesso, qualunque sia la specie delle loro unità.

È pur d' uopo osservare, che togliendo due zeri alla fine de' numeri proposti, si sono divisi ad un tempo l' uno, e l' altro per 100; perchè si ha dal numero 31, che cancellando 1, 2, o 3 zeri alla destra di un numero qualunque, si divide questo per 10, per 100, o per 1000, e così in appresso.

Ecco alcuni esempj della divisione:

144	3	16512	344	3049164	6274
24		2752		53956	
00	48	0000	48	37644	486
				00000	

48. La divisione, e la moltiplicazione si servono a vicenda di prova, come la sottrazione, e l'addizione; perciocchè, secondo la definizione della divisione (36), dividendo un prodotto per uno de' suoi fattori, si dee trovare l'altro fattore, e moltiplicando il divisore pel quoziente, si dee riprodurre il dividendo (37).

Delle Frazioni.

49. La divisione non può sempre eseguirsi esattamente, perchè un numero qualunque di unità non è composto di un altro numero qualunque di unità, preso un certo numero di volte. Si sono già veduti degli esempj nella tavola di Pitagora, la quale contiene solo i prodotti dei nove primi numeri moltiplicati a due a due, e non contiene già tutti i numeri compresi tra 1, ed 81, cioè, tra il primo, e l'ultimo di quelli, che vi sono inscritti. Il metodo qui sopra esposto non conduce allora, che a trovare il maggior multiplo del divisore, che possa contenere il dividendo.

Se si dividesse 239 per 8, seguendo la regola del numero 46,

239	8
79	
7	29

come lo mostra questa operazione, si avrebbe per ultimo dividendo particolare il numero 79, il quale non contiene 8 esattamente, ma che essendo compreso tra li numeri 72, ed 80, l'uno de' quali contiene 9 volte, e l'altro 10 volte il divisore 8, dimostra, che l'ultima parte del quoziente è maggiore del 9, e minore del 10, e perciò il quoziente totale è tra 29, e 30. Adunque moltiplicando la cifra 9 delle unità del quoziente del divisore 8, e sottraendo il prodotto dall'ultimo dividendo particolare 79, il resto 7 sarà evidentemente l'eccesso del dividendo 239 sopra il prodotto dei fattori 29, ed 8. In fatti, per le diverse parti dell'operazione avendo tolto successivamente dal dividendo 239 il prodotto di ciascuna cifra del quoziente pel divisore, si è evidentemente sottratto il prodotto dell'intero quoziente pel divisore, o sia 232; ed il resto 7 minore del divisore prova, che 232 è il maggior multiplo di 8, che possa contenere 239.

50. Egli è bene di riflettere, che, per ciò, che si è detto, a fine di riprodurre un dividendo qualunque, conviene aggiungere al prodotto del divisore nel quoziente il resto lasciato dalla divisione, quando questa non potè eseguirsi esattamente.

51. Se si volesse in effetto dividere una gran-

dezza in otto parti eguali, di specie qualunque, composta di 239 unità non si potrebbe ciò fare senza porvi delle parti di unità, o sia delle *frazioni*. In fatti, quando si fossero tolte dal numero 239 le 8 volte 29 unità, che esso contiene, resterebbero ancora 7 unità da dividersi in 8 parti; per giungervi, si potrebbero dividere, l'una dopo l'altra, tutte queste unità in 8 parti; di poi prendere una parte per ciascuna unità, il che darebbe 7 parti, le quali dovrebbonsi aggiungere alle 29 unità intere, per formare l'ottava parte di 239, o sia il quoziente esatto della divisione di questo numero per 8.

Lo stesso ragionamento potrebbe adoperarsi per un'altra divisione, la quale lasciasse un resto; ed in questo caso, il quoziente è composto di due parti; l'una è formata di unità intere, e l'altra non può ottenersi, se non se dopo, che si è in effetto eseguita la divisione delle unità concrete, o materiali del resto nel numero delle parti indicate dal divisore: per ora non si fa che indicarla, dicendo, *che convien concepire l'unità del dividendo divisa in tante parti, quante vi sono unità nel divisore, e di queste parti prenderne tante, quante vi sono unità nel resto, e ciò a fine di render completo il quoziente cercato.*

52. In generale, quando si vogliono considerare delle quantità minori dell'unità, bisogna, per riferirle a questa unità, supporla divisa in un certo numero di parti tanto piccole da poter essere contenute un certo numero di volte in queste quantità, o sia da poterle misurare.

Nell'idea, che ci siamo formata della loro grandezza, vi entrano dunque due elementi, cioè, quante volte le parti, che misurano quelle quantità sono contenute nell'unità, e quante di queste parti esse contengono.

Si è composta per le frazioni una nomenclatura, che corrisponde alla maniera di considerarle, e di rappresentarle.

Quella, che risulta dalla divisione dell'unità in due parti eguali, si chiama *metà*, o *mezzo*

in	3 parti	*terzo*
in	4 parti	*quarto*
in	5 parti	*quinto*
in	6 parti	*sesto*
in	7 parti	*settimo*
in	8 parti	*ottavo*
in	9 parti	*nono*
in	10 parti	*decimo*
in	11 parti	*undicesimo*
in	12 parti	*dodicesimo*

e così in appresso, aggiungendo la desinenza *esimo* al numero, che indica in quante parti si considera divisa l'unità (*).

Perciò ogni frazione s'esprime con due numeri: il primo, il quale fa conoscere di quante

(*) Nel denominare le parti dell'unità, l'Autore non giunge che sino ai *sesti*, perchè dopo queste parti la nomenclatura francese è regolare; ma io nel tradurre ho dovuto andar più oltre dei sesti, perchè solo dopo i decimi la nomenclatura italiana è regolare.

Nota del Traduttore.

parti essa è composta, si chiama *numeratore*; e l'altro, che indica quante di queste parti abbisognano per formare l'unità, si chiama *denominatore*, perchè da esso se ne deduce la denominazione della frazione. Li *cinque sesti* dell'unità formano una frazione, della quale il numeratore è il *cinque*, ed il denominatore è il *sei*.

Il *numeratore*, ed il *denominatore* si chiamano insieme i due *termini* della frazione.

Per abbreviare l'espressione delle frazioni, si adoperano delle cifre, scrivendo il denominatore sotto il numeratore separati l'uno dall'altro da una linea:

un terzo si scrive $\frac{1}{3}$

cinque sesti $\frac{5}{6}$

53. Seconda l'idea, che si è annessa alle parole *numeratore*, e *denominatore*, è evidente, che *si accresce una frazione aumentandone il suo numeratore senza cangiarne il suo denominatore*; perchè quest' ultimo indicando in quante parti l'unità è stata divisa, fissa la grandezza di queste parti, la quale rimane la stessa, finattantochè essa non cangia; ed aumentandone il numeratore, si aumenta il numero delle parti, che formano la frazione, e perciò anche questa frazione si aumenta. Così, per esempio, $\frac{8}{9}$ sorpassano $\frac{7}{9}$, e $\frac{13}{30}$ sorpassano $\frac{11}{30}$.

Da questa considerazione ne segue evidentemente, che *ripetendo il numeratore* 2, 3, *o un numero qualunque di volte, senza alterare il denominatore, si ripete un egual numero di volte la quantità rappresentata dalla frazione*, o sia *essa si moltiplica per questo numero*; perchè essa in allora è composta di 2, 3, o di un numero qualunque di volte il numero delle parti, che essa conteneva in principio, e queste parti son rimaste le stesse. Così la frazione $\frac{3}{5}$ è il triplo di $\frac{1}{5}$, e $\frac{10}{21}$ il doppio di $\frac{5}{21}$.

Una frazione *si diminuisce diminuendo il suo numeratore, senza cangiare il suo denominatore*; perchè si prende per comporla un numero di parti minore di quello, che essa conteneva a principio, e queste parti hanno conservata la stessa grandezza. Adunque, *se si divide per* 2, 3, *o un numero qualunque, il numeratore di una frazione, senza alterarne il denominatore, essa si rende un egual numero di volte più piccola*, ovvero *essa è divisa per questo numero*; perchè questa si riduce a contenere 2, 3, ovvero un numero qualunque di volte meno le parti, che essa conteneva da principio, e queste parti sono rimaste le stesse. È per questo, che $\frac{1}{5}$ è il terzo di $\frac{3}{5}$, e che $\frac{5}{21}$ è la metà di $\frac{10}{21}$.

54. Al contrario, *si diminuisce una frazione, quando si aumenta il suo denominatore, senza cangiare il suo numeratore*; perchè allo-

ra si considerano più parti in un' unità; adunque esse diventano più piccole; e siccome per formare la frazione se ne prende ancora lo stesso numero, la loro collezione compone nel secondo caso una quantità minore di quella che componeva da prima. Per questa ragione $\frac{2}{5}$ sono minori di $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{13}$ minori di $\frac{4}{9}$.

Segue da ciò, che *se si moltiplica per 2, 3, o per un numero qualunque, il denominatore di una frazione, lasciando lo stesso il numeratore, la frazione diventa un ugual numero di volte minore*, ovvero *riesce divisa per questo numero*; perchè essa è composta di tante parti quante ne aveva da principio; ma ciascuna è divenuta 2, 3, o un numero qualunque di volte più piccola. La frazione $\frac{3}{8}$ è la metà di $\frac{3}{4}$, e $\frac{4}{15}$ il terzo di $\frac{4}{5}$.

Si aumenta una frazione, quando si diminuisce il suo denominatore, senza cangiare il suo numeratore; poichè, immaginando allora un minor numero di parti nell' unità, ciascuna diventa più grande, e la loro collezione diventa pure più grande.

Adunque, *se si divide il denominatore di una frazione per 2, 3, o qualsivoglia altro numero, si rende questa frazione un egual numero di volte più grande*, o sia *essa si moltiplica per questo numero*; perchè è composta

sempre dello stesso numero di parti, ma ciascuna 2, 3, o un numero qualunque di volte più grande, che non era da principio. Secondo ciò $\frac{3}{5}$ sono il triplo di $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{6}$ sono il quadruplo di $\frac{5}{24}$.

Giova osservare, che quando si toglie il denominatore di una frazione, essa riesce moltiplicata per questo numero. Per esempio, se dalla frazione $\frac{2}{3}$ si toglie il denominatore 3, questa si cangia in due interi, ovvero si moltiplica per 3.

55. Le proposizioni precedenti possono raccogliersi come segue:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Moltiplicando}\\ \text{Dividendo}\end{array}\right\}\text{ il numeratore }\left\{\begin{array}{l}\text{si moltiplica}\\ \text{si divide}\end{array}\right\}\text{la frazione;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Moltiplicando}\\ \text{Dividendo}\end{array}\right\}\text{ il denominatore }\left\{\begin{array}{l}\text{si divide}\\ \text{si moltiplica}\end{array}\right\}\text{la frazione.}$$

56. La prima conseguenza, che si deduce da questa tavola, è, che le operazioni fatte sul denominatore producono l' effetto di operazioni contrarie, o inverse. Ne risulta ancora, che *se si moltiplica ad un tempo il numeratore, e denominatore di una frazione per lo stesso numero, la frazione non cangerà di valore*; perchè, se per una parte, moltiplicando il numeratore si rende la frazione 2, 3, etc. volte più grande, che non era prima, per l' altra parte con la seconda operazione se ne prende la me-

tà, un terzo, etc.; in somma, questa si divide per lo stesso numero, pel quale è stata da prima moltiplicata. Così $\frac{1}{5}$ è eguale a $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{21}$ sono eguali a $\frac{10}{42}$.

57. *Si vede pure, che se ad un tempo si divide per lo stesso numero il denominatore, ed il numeratore di una frazione, il di lei valore non cangia*; perchè, se, per una parte, dividendo il numeratore si rende la frazione 2, 3, etc. volte più piccola che non era a principio, per l'altra parte colla seconda operazione se ne prende il doppio, il triplo, etc.; in somma, questa viene a moltiplicarsi per lo stesso numero, pel quale da prima si era divisa. Per questa ragione la frazione $\frac{2}{4}$ è eguale ad $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{9}$ è eguale ad $\frac{1}{3}$.

58. Non accade delle frazioni ciò, che accade de' numeri interi, ne' quali una grandezza, finchè si riferisce alla stessa unità, non è capace che di una sola espressione; al contrario, nelle frazioni la stessa grandezza può essere espressa in una infinità di maniere. Per esempio tutte le frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \text{etc.},$$

de' quali il denominatore contiene due volte il numeratore, esprimono sotto differenti forme la metà dell' unità; le frazioni

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{15},\ \frac{6}{18},\ \frac{7}{21},\ \text{etc.},$$

delle quali il denominatore contiene tre volte il numeratore, rappresentano tutte un terzo dell' unità. Ma tra tutte le forme, che nell' uno, e nell' altro esempio prende la frazione proposta, vuolsi notare la prima, come quella, che è la più semplice, ed è perciò bene il saperla dedurre da ciascuna delle altre: ora a ciò si perviene dividendo i due termini di queste per lo stesso numero, il che, come si è veduto, non ne cangia il valore. In fatti, se si dividono per 7 i due termini della frazione $\frac{7}{14}$, si otterrà $\frac{1}{2}$; e facendo la stessa operazione sopra $\frac{7}{21}$, se ne dedurrà $\frac{1}{3}$.

59. Seguendo quest' ultimo metodo, si riduce una frazione alla sua *più semplice espressione*. Esso non può applicarsi, che alle frazioni, il cui numeratore, e denominatore possono dividersi per uno stesso numero, ed in tutti gli altri casi, la frazione proposta è la più semplice fra tutte quelle, che possono rappresentare la quantità, che essa esprime.

Così le frazioni

$$\frac{5}{7},\ \frac{7}{12},\ \frac{15}{16},$$

i di cui termini non possono dividersi per uno stesso numero, o sia *non hanno alcun divisor comune*, sono *irriducibili*, e perciò non si potrebbero esprimere in una maniera più semplice, le grandezze, che esse rappresentano: questo si dimostrerà nell' Algebra.

60. Segue da ciò, che per rendere più semplice una frazione, convien tentare di dividere i suoi due termini per qualcheduno dei numeri 2, 3, etc., ma con questo tentativo non si perverrà sempre alla più semplice espressione della frazione proposta, o almeno bisognerà spesse volte eseguire un gran numero di operazioni.

Se, per esempio, si avesse la frazione $\frac{24}{84}$, si potrebbe a principio osservare, che ciascuno de' suoi termini è un multiplo di 2, e dividendoli per questo numero, si otterrebbero $\frac{12}{42}$; dividendo di poi per 2 i due termini di quest' ultima, si dedurrebbero $\frac{6}{21}$.

Quantunque questa frazione sia già molto più semplice della proposta, pure essa è ancor atta a riduzione, perchè si possono dividere i suoi due termini per 3, e se ne ottiene $\frac{2}{7}$.

Se si fa attenzione, che dividere un numero per 2, poi dividere il quoziente per 2, e poi ancora questo nuovo quoziente per 3, è la stessa cosa, che dividere a principio il numero dato pel prodotto dei numeri 2, 2, e 3, il che

si riduce a 12, si vedrà, che le tre operazioni quì sopra esposte possono eseguirsi in una sol volta, dividendo i due termini della frazione proposta per 12, per cui si avrà ancora $\frac{2}{7}$.

I numeri 2, 3, 4, e 12 dividendo ciascuno ad un tempo i due numeri 24, ed 84, sono i divisori comuni di questi numeri; ma 12 si distingue fra gli altri, perchè è il massimo: e con questo *massimo comun divisore* dei due termini della frazione proposta si riduce subito questa frazione alla sua più semplice espressione. Adunque è un' utile ricerca questa, che segue: *essendo dati due numeri, trovare il loro massimo comun divisore*.

61. Si perviene a trovare il comun divisore di due numeri con una specie di tentativo facile a discoprirsi, e che ha il vantaggio di avvicinarsi al fine a ciascun saggio, che se ne fa. Per spiegarlo chiaramente, io prendo un esempio. Sieno i due numeri 637, e 143. È evidente, che il massimo comun divisore cercato non può sorpassare il minore di questi due numeri: adunque convien tentare, se il numero 143, che divide se stesso e dà per quoziente 1, può dividere anche il numero 637, nel qual caso sarebbe esso stesso il massimo comun divisore cercato: ma nell' esempio proposto ciò non accade, e si trova un quoziente 4, ed un resto 65.

Ora è chiaro, che ogni divisore comune ai due numeri 637, e 143, dee dividere anche il resto 65 della loro divisione, perchè il maggiore 637 è eguale al minore 143 moltiplicato pel quoziente 4 più il resto 65 (50); ora, dividendo 637 pel divisore comune cercato, si avrà un quoziente esatto: adunque è d' uopo, che se ne abbia un egual quoto, dividendo per lo stesso divisore ciascheduna delle parti, nelle quali è stato decomposto il 637, e riunendone i risultati; ma il prodotto di 143 per 4 è necessariamente divisibile pel divisore comune, perchè questo è fattore di 143: adunque conviene, che l' altra parte 65 possa anch' essa dividersi per questo divisore, senza di che il quoziente totale sarebbe un intero accompagnato da una frazione, e perciò non potrebbe eguagliare il numero intero, che risulta dalla divisione del 637 pel comun divisore.

Reciprocamente ogni divisore comune a 65 ed a 143 dividerà 637, composto di 4 volte 143, e di 65.

Collo stesso ragionamento si proverà generalmente, che *ogni divisore comune a due numeri dee dividere il resto della divisione del maggiore dei due numeri pel minore*; e che *ogni divisore comune a questo minor numero, ed al resto, dee dividere il maggiore*.

Secondo questi principj si vede, che il massimo comun divisore dei numeri 637, e 143 debb' esserlo anche dei numeri 143, e 65; e che quello di questi ultimi debb' esserlo di 637, e di 143; ma 65 non potendo essere diviso per un numero maggiore di se stesso, convien provare, se esso fosse il massimo comun divisore. Dividendo 143 per 65, si trova un quoziente

2, ed un resto 13; adunque 65 non è il divisore cercato. Con un ragionamento simile a quello, che si è fatto rispetto a numeri 637, 143, e al resto 65 della loro divisione, si vedrà, che il massimo comun divisore di 143, e 65, debb' esserlo pure dei numeri 65, e 13; ora il massimo comun divisore non può sorpassare 13; adunque convien tentare, se 13 divide 65, il che accade, perchè si ha per quoziente 5.

Adunque 13 è il massimo comun divisore cercato, perchè essendo il massimo comun divisore di se stesso, e di 65, debb' esserlo pure di 65. e di 143, ed essendolo di questi numeri, debb' esserlo pure di 143, e 637.

È commodo in pratica di porre le divisioni successive l' una appresso l' altra, e disporre l' operazione, come si vede quì sotto.

637	143	65	13
	4	2	5
65	13	0	

separando i quozienti 4, 2, 5 dai resti posti al di sotto.

I ragionamenti adoperati nell' esempio precedente, potendo applicarsi a numeri qualunque, conducono a questa regola generale: *Si troverà il massimo comun divisore di due numeri, dividendo il maggiore di questi due numeri pel minore, dividendo di poi il minore pel resto* *della prima divisione, poi dividendo questo resto per quello della seconda divisione, poi dividendo questo secondo resto pel terzo resto, o sia quello della terza divisione, e continuando a dividere così il resto di ciascuna divisione per quello della seguente, finchè si perviene ad un quoziente esatto: l' ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.*

62. Ecco due esempj di questa operazione:

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	000	

adunque 752 è il massimo comun divisore tra 9024, e 3760.

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	
		2			

si vede per quest' ultima operazione, che il massimo divisor comune tra 937, e 47 è solamente 1, cioè a dire, che a propriamente parlare questi due numeri non hanno divisor comune, poichè tutti i numeri interi, qualunque essi sieno, sono divisibili per 1.

Non è difficile il convincersi, che la regola

del numero precedente dee necessariamente condurre a questo risultato tutte le volte, che i numeri proposti non avranno divisor comune, perchè i resti essendo sempre minori del divisore, divengono sempre più piccoli a ciascheduna operazione; ed è evidente, che le divisioni dureranno finchè si avrà un divisore maggiore dell' unità.

63. Col mezzo di questi calcoli le frazioni $\frac{143}{667}$, $\frac{3760}{9024}$ si riducono subito alla loro più semplice espressione, dividendo i due termini della prima pel loro divisore comune 13, e quelli della seconda per quelli del loro divisor comune 752: in tal modo si ottiene $\frac{11}{49}$, $\frac{5}{12}$.

La frazione $\frac{47}{937}$ è assolutamente irriducibile, perchè i suoi due termini non hanno altro divisor comune, che l' unità.

64. Non è sempre necessario il tentare la ricerca del massimo comun divisore dei due termini della frazione proposta; vi sono, come già ho fatto osservare, delle riduzioni, che si presentano da se stesse.

Ogni numero che termina con una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8, è necessariamente divisibile per 2; perchè, se si divide un numero qualunque per 2, quando siamo alle diecine, non può restare che 1, e perciò l' ultima divisione particolare si eseguirà sopra i numeri 0, 2, 4, 6, 8, se le diecine non hanno lasciato resto, o sopra i numeri 10, 12, 14, 16, 18, se esse ne hanno lasciato, e tutti questi numeri sono divisibili per 2.

I numeri divisibili per 2 si chiamano numeri *pari*, perchè possono essere divisi in due parti uguali (*o pari*).

Così ogni numero, che termina a destra con uno zero, o con un 5, è divisibile per 5; perchè quando saremo pervenuti alla divisione delle diecine per 5, il resto, se pur ve n' ha sarà necessariamente 1, 2, 3, o 4 diecine; in modo, che se l' ultima cifra è uno zero ovvero un 5, l' operazione terminerà sopra uno dei numeri 0, 5, 15, 20, 25, 30, 35, 40, e 45, i quali son tutti divisibili per 5.

I numeri 10, 100, 1000, etc. espressi dall' unità seguita da un certo numero di zeri, ponno decomporsi in 9 più 1, 99 più 1, 999 più 1, e così in appresso, ed i numeri 9, 99, 999, etc. essendo divisibili per 3, e per 9, ne segue, che se si dividono per 3, o per 9 i numeri della forma 10, 100, 1000, etc., il resto della divisione sarà 1.

Ora ogni numero, come 20, 300, 5000 è espresso da una sola cifra significativa, seguita verso destra da un certo numero di zeri, può essere decomposto in numeri espressi dall' unità seguita a destra da un certo numero di zeri: 20 è eguale a 10 più 10, 300 è eguale a 100 più 100 più 100; 5000 a 1000 più 1000 più 1000 più 1000 più 1000; e così degli altri.

Segue da ciò, che se si divide 20, o 10 più 10 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1, o

sia 2; se si divide 300, ovvero 100 più 100 più 100 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1 più 1, o sia 3.

In generale, se nella stessa maniera si decompone un numero espresso da una sola cifra significativa, seguita a destra da un certo numero di zeri, per dividerlo per 3, o per 9, il resto di questa divisione sarà eguale a tante volte 1, quante vi sono unità nella cifra significativa, cioè a dire, sarà uguale alla stessa cifra significativa. Ora un numero qualunque essendo decomposto in unità, diecine, centinaja, è formato dall' unione di più numeri espressi da una sola cifra significativa; e se si divide ciascuna di quest' ultime per 3, o per 9, si avrà per resto una delle cifre significative del numero proposto: per esempio, la divisione delle centinaja darà per resto la cifra delle centinaja, la divisione delle diecine darà per resto la cifra delle diecine, e così dell' altre specie di unità. Adunque, se la somma di tutti questi resti è divisibile per 3, o per 9, ancora il numero sarà divisibile per 3, o per 9.

Così i numeri 423, 4251, 15342 sono divisibili per 3, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 12 nel 2.°, e 15 nel 3.°

Nello stesso modo, 621, 8280, 934218, sono divisibili per 9, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 18 nel 2.°, e 27 nel 3.°

Si osserverà, che ogni numero divisibile per 9 è anche divisibile per 3, ma non ogni numero divisivile per 3 lo è anche per 9.

Si potrebbero fare anche sopra altri numeri delle osservazioni simili a quelle, che ho esposte sopra i numeri 2, 3, 5, e 9; ma io tralascio la ricerca di queste proprietà, perchè mi allontanerei di troppo dal mio proposito.

I numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. che non si possono dividere, che per se stessi, o per l'unità si appellano *numeri primi*. Due numeri, come 12, e 35, i quali hanno, ciascuno in particolare, de' divisori, ma che niuno fra questi è comune all' uno, e all' altro si chiamano *primi fra loro* (*).

Adunque una frazione irreducibile ha per numeratore, e denominatore dei numeri primi fra loro.

65. L' addizione, e la sottrazione non hanno alcuna difficoltà, quando le frazioni sopra le quali si debbono eseguire quest'ultime operazioni hanno lo stesso denominatore; siccome esse non contengono che parti della stessa denominazione, e perciò della stessa grandezza, si possono sommarle, o sottrarle nella stessa maniera, che se fossero unità, osservando di indicare nel risultato la denominazione delle parti delle quali esso è composto.

In fatti è evidente, che $\frac{2}{11}$, e $\frac{3}{11}$ fanno $\frac{5}{11}$, come 2 quantità, e 3 quantità della stessa specie, ne fanno 5 di questa specie qualunque essa sia.

(*) Nel n.° 162 si troverà la maniera di decomporre un numero qualunque ne' suoi fattori semplici, o *primi*.

Così, la differenza fra $\frac{3}{9}$, ed $\frac{8}{9}$ è $\frac{5}{9}$, come la differenza fra 3 quantità, ed 8 quantità della stessa specie, è 5 quantità di questa specie, qualunque essa sia.

Da ciò si dee conchiudere, che *per aggiungere, o sottrarre delle frazioni dello stesso denominatore, conviene prendere la somma, o la differenza de' loro numeratori, e dare al risultato il denominatore comune*.

66. L' addizione delle frazioni conduce spesso a risultati maggiori dell' unità. Se, per esempio, si addizionassero $\frac{4}{8}$, e $\frac{7}{8}$, la somma sarebbe $\frac{11}{8}$; questa espressione indicando 11 parti, 8 delle quali riunite compongono l' unità, equivale all' unità più tre ottavi di unità, o sia ad $1\frac{3}{8}$.

In generale ogni espressione frazionaria, nella quale il numeratore sorpassa il denominatore, contiene delle unità, o sia degl' *interi*; *questi si estraggono dividendo il numeratore pel denominatore: il quoziente dà il loro numero; ed a questo si dee aggiungere il resto messo in frazione*.

L'espressione $\frac{307}{53}$, per esempio, indicando 307 parti, delle quali 53 compongono l' unità, contiene tante unità, quante volte il 307 contiene il numero 53: facendo la divisione, si ottiene per quoziente 5, e 42 per resto: questo 42 rappresenta dei *cinquanta-treesimi* di unità: così in vece di $\frac{307}{53}$, si può scrivere $5\,\frac{42}{53}$.

67. L'espressione $5\,\frac{42}{53}$, nella quale gl' interi sono manifesti, essendo composta di due parti differenti, egli è spesso utile di ritornare all'espressione primitiva $\frac{307}{53}$, questo è ciò, che si chiama *ridurre un intero in frazione*.

Per giungervi *convien moltiplicare l' intero pel denominatore della frazione, che gli è unita, aggiungere il suo numeratore al risultato, e dare alla somma il denominatore della frazione*.

In fatti è d' uopo primieramente ridurre i cinque interi in cinquanta-treesimi, il che si eseguirà moltiplicando 53 per 5, perchè ciascuna unità dee contenere 53 parti; il risultato sarà $\frac{265}{53}$: riunendo questa parte con la seconda $\frac{42}{53}$, ne verrà $\frac{307}{53}$.

68. Quando le frazioni proposte hanno dei denominatori differenti, non si può più riunire insieme, o togliere l' uno dall' altro il numero delle parti, delle quali esse sono composte, perchè queste parti sono di grandezze differenti; per evitare un tale inconveniente, si fa subire a queste frazioni una trasformazione, che le riduce a parti della stessa grandezza, dando ad esse un denominatore comune.

Sieno, per esempio, le frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$; se si moltiplicano per 5, denominatore della seconda, i due termini della prima, si convertirà questa prima in $\frac{10}{15}$; di poi moltiplicando per 3, denominatore della prima i due termini della seconda, si convertirà questa seconda in $\frac{12}{15}$. Si formeranno così due nuove espressioni, che avranno lo stesso valore delle frazioni proposte (56).

Questa operazione necessaria per confrontare le grandezze rispettive di due frazioni, in sostanza non consiste in altro, che a trovare per esprimerle, delle parti di unità tanto piccole, che possono essere contenute esattamente in ciascuna di quelle, di cui sono formate le frazioni proposte. Nell' esposto esempio si vede chiaro, che la quindicesima parte dell' unità può misurare esattamente $\frac{1}{3}$, ed $\frac{1}{5}$ di questa unità, perchè $\frac{1}{3}$ contiene $\frac{5}{15}$, ed $\frac{1}{5}$ ne contiene tre.

Il metodo applicato alle frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$, può egualmente applicarsi ad altre frazioni, qualunque esse sieno.

In generale, *per ridurre due frazioni qualunque allo stesso denominatore, bisogna moltiplicare i due termini di ciascuna pel denominatore dell' altra*.

69. *Si riduce ad un tempo allo stesso denominatore un numero qualunque di frazioni, moltiplicando i due termini di ciascuna pel prodotto dei denominatori di tutte le altre*; perchè è evidente, che i nuovi denominatori sono uguali, poichè ciascuno è formato dal prodotto di tutti i denominatori primitivi, e le nuove frazioni hanno lo stesso valore delle prime, perchè null' altro si è fatto, che moltiplicare per uno stesso numero i due termini di queste (56).

La regola precedente conduce, in tutti i casi, al fine, che ci siamo proposto; ma quando i denominatori delle frazioni, delle quali si opera, non sono primi fra loro, vi è un denominatore comune più semplice di quello, che si ritrova con questa regola; e si perviene a trovarlo con delle considerazioni simili a quelle dei numeri precedenti. Se, per esempio, si avessero le frazioni

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{8},$$

siccome, per ridurle allo stesso denominatore, non si tratta, che di dividere l' unità in parti, che sieno contenute esattamente in quelle, di cui queste frazioni sono formate, basterà trovare il più piccolo numero, che possa dividersi esattamente per ciascuno dei loro denominatori 3, 4, 6, 8; e questo si troverà tentando sopra i multipli di 3 le divisioni per 4, 6, ed 8 (*),

(*) È evidente, che in questa ricerca torna meglio il prendere i multipli del numero maggiore, che nel presente esempio è 8, perchè con minor numero di operazioni si perviene al numero cercato.

Il Traduttore.

le quali non cominciano a riescire, che sopra al 24: ciò fatto non si avrà che a convertire le frazioni proposte in 24$^{\text{esimi}}$ dell' unità.

Per eseguire questa operazione, si cercherà successivamente quante volte i denominatori 3, 4, 6, ed 8 sono contenuti in 24; ed i quozienti saranno i numeri, pe' quali converrà moltiplicare rispettivamente i due termini di ciascuna frazione, per ridurla al denominatore 24. Si troverà così, che i due termini dei $\frac{2}{3}$ dovranno essere moltiplicati per 8, quelli di $\frac{3}{4}$ per 6, quelli di $\frac{5}{6}$ per 4, quelli di $\frac{7}{8}$ per 3, e si formeranno le frazioni

$$\frac{16}{24},\ \frac{18}{24},\ \frac{20}{24},\ \frac{21}{24}.$$

Si vedranno nell' Algebra de' mezzi per facilitare l' applicazione di questo metodo.

70. La regola data precedentemente per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore, suppone, che un prodotto, che risulta dalle moltiplicazioni successive di più numeri fra loro non cangi punto, qualunque sia l' ordine, col quale si eseguiscono queste moltiplica-

zioni. Questa verità, che si riguarda quasi sempre come evidente, ha però bisogno di essere dimostrata.

È necessario cominciare dal provare, che moltiplicare un numero pel prodotto di due altri è la stessa cosa, che moltiplicarlo prima per l'uno d'essi, e di poi moltiplicare per l'altro il prodotto, che ne risulta. Per esempio, in vece di moltiplicare 3 per 35, prodotto dei numeri 5, e 7, si sarebbe potuto moltiplicare 3 per 5, e di poi moltiplicare per 7 il prodotto di questi numeri. La proposizione sarebbe evidente, se in vece del numero 3 si prendesse l'unità, perchè 1 moltiplicato per 5 dà 5, ed il prodotto di 5 per 7 da 35, come pure il prodotto di 1 per 35: ma 3, o qualsivoglia altro numero non essendo che la collezione di più unità, accaderà a questo numero, ciò che accade a ciascuna delle unità, di cui esso è composto, cioè a dire, che i prodotti di 3 per 5, e per 7 ottenuti nell'una, e nell'altra maniera, essendo in ambidue i casi il triplo dei risultati, che dà l'unità moltiplicata per 5, e per 7, saranno necessariamente gli stessi. Si proverebbe nella stessa maniera, che se si dovesse moltiplicare 3 pel prodotto dei numeri 5, 7, e 9, ciò si ridurrebbe a moltiplicare 3 per 5, poi il prodotto trovato per 7, e quest'ultimo prodotto per 9, e così in appresso, qualunque sia il numero de' fattori.

Per indicare in una breve maniera più moltiplicazioni successive, come quelle dei numeri 3, 5, e 7 tra loro, scriverò 3 per 5 per 7.

Ciò posto, nel prodotto 3 per 5 si può cangiare l'ordine de' fattori 3, e 5 (27), e si avrà ancora lo stesso prodotto. Da ciò segue immediatamente, che 5 per 3 per 7 è la stessa cosa che 3 per 5 per 7.

Si può anche cangiare l'ordine dei fattori 3, e 7 nel prodotto 5 per 3 per 7, poichè questo prodotto equivale a 5 moltiplicato pel prodotto dei numeri 3, e 7; adunque si avrà ancora in 5 per 7 per 3 lo stesso prodotto che nei precedenti.

Ravvicinando le tre disposizioni

3 per 5 per 7
5 per 3 per 7
5 per 7 per 3

si vede, che il fattore 3 si è trovato successivamente il primo, il secondo, ed il terzo, e che potrebbe accader lo stesso di qualunque degli altri due.

Quest'esempio, nel quale non si è in alcun modo considerato il valore particolare di ciascun numero, prova, che un prodotto di tre fattori non cangia, qualunque sia l'ordine, con cui si eseguiscono le moltiplicazioni.

Se si avesse un prodotto di quattro fattori, come 3 per 5 per 7 per 9, si potrebbe per ciò, che si è detto, disporre, come più ci piacesse i tre primi, o i tre ultimi, e fare in tal modo passare per tutti i posti l'uno qualunque di questi fattori. Di poi considerando una delle nuove disposizioni, per esempio, 5 per 7 per 3 per 9, si potrebbe invertire l'ordine dei due ultimi fattori, il che darebbe 5 per 7 per 9 per 3, e si porrebbe 3 nell' ultimo posto. Questi ragionamenti si potranno facilmente applicare a qualsivoglia altro numero di fattori.

71. Per mezzo della riduzione allo stesso denominatore, l' addizione, e la sottrazione delle frazioni si eseguiscono come nel numero 65.

72. Quando si hanno degl' interi uniti a frazioni, è d' uopo cominciare ad operare sù queste. Per esempio, a fine di addizionare $3\frac{2}{7}$ con $5\frac{4}{9}$, si comincierà dal ridurre allo stesso denominatore le frazioni $\frac{2}{7}$, e $\frac{4}{9}$, le quali diventeranno $\frac{18}{63}$, e $\frac{28}{63}$, poi si aggiungerà la loro somma a quella degl' interi 3, e 5; la somma totale sarà $8\frac{46}{63}$.

La sottrazione si eseguirà nella stessa maniera ogni volta, che la frazione, che è nel numero da sottrarsi, sarà la più piccola delle due. In caso contrario per rendere possibile la sottrazione, convien prendere ad imprestito dall' intero unito alla frazione minore. Se, per esempio, si dovesse togliere $\frac{4}{5}$ da $3\frac{1}{4}$, le due frazioni ridotte allo stesso denominatore, diventando $\frac{16}{20}$, e $\frac{5}{20}$, si vedrebbe, che la prima non

può esser sottratta dalla seconda; ma prendendo ad imprestito 1, ossia $\frac{20}{20}$ sopra l' intero 3, si cangierebbe il numero $3\frac{1}{4}$, ovvero $3\frac{5}{20}$ in $2\frac{25}{20}$, da cui sottraendo $\frac{16}{20}$, resterebbe $2\frac{9}{20}$.

73. Io riprendo ora l' esame della tavola del numero 55.

$$\left.\begin{matrix}\text{Moltiplicando}\\ \text{Dividendo}\end{matrix}\right\}\text{ il numeratore }\left\{\begin{matrix}\text{si moltiplica}\\ \text{si divide}\end{matrix}\right\}\text{la frazione;}$$

$$\left.\begin{matrix}\text{Moltiplicando}\\ \text{Dividendo}\end{matrix}\right\}\text{ il denominatore }\left\{\begin{matrix}\text{si divide}\\ \text{si moltiplica}\end{matrix}\right\}\text{la frazione;}$$

per dedurne delle nuove conseguenze.

Primieramente con la sola ispezione di questa tavola, si vede, che si può moltiplicare una frazione in due maniere, cioè, moltiplicando il suo numeratore, o dividendo il suo denominatore, e che si può pure dividerla in due maniere, cioè, dividendo il suo numeratore, o moltiplicando il suo denominatore; dal che ne segue, che la sola moltiplicazione, secondochè si eseguisce o sopra il numeratore, o sopra il denominatore, basta per eseguire la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni per de' numeri interi. Così $\frac{3}{15}$ moltiplicati per 7 unità fanno $\frac{21}{15}$; $\frac{4}{9}$ divisi per 3 fanno $\frac{4}{27}$, etc.

74. Nel numero precedente essendo il moltiplicatore un numero intero, indicava ancora,

come nel numero 22, quante volte si dovea ripetere il moltiplicando, ma quando, per esempio, si dice, che prendere il quinto di un numero qualunque, vuol dire moltiplicare questo numero per $\frac{1}{5}$, la parola *moltiplicare*, non ha più lo stesso significato, che gli abbiam dato finora, poichè essa indica un risultato 5 volte più piccolo del moltiplicando; nullameno si possono comprendere i due casi nello stesso enunciato, dicendo, che *moltiplicare un numerò per un altro vuol dire comporre col primo un numero nella stessa maniera, che il secondo è composto con l'unità* (*). In fatti, quando si tratta di moltiplicare per 2, per 3, etc., il prodotto è composto di 2 volte, 3 volte, etc. il moltiplicando nella stessa maniera che il moltiplicatore è composto di 2, 3, etc. unità; e moltiplicare un numero qualunque, per esempio, per la frazione $\frac{1}{5}$, vuol dire prenderne la quinta parte, perchè il moltiplicatore $\frac{1}{5}$ essendo la quinta parte dell' unità, esprime, che il prodotto debb' essere la quinta parte del moltiplicando (**).

(*) Si può osservare la nota posta dal Traduttore alla pag. 49. degli *Elementi d' Algebra*.

(**) Siamo condotti a questa definizione da un Problema, che spesso si presenta: cioè, quello, in cui si cerca il prezzo di una quantità qualunque di una cosa,

Così moltiplicare un numero qualunque per $\frac{4}{5}$ vuol dire prendere sopra questo moltiplicando una parte, che ne sia i $\frac{4}{5}$, ovvero eguale a quattro volte un quinto di questo moltiplicando.

Da ciò si vede, che la parola *moltiplicare*, applicata alle espressioni frazionarie non porta sempre l' idea d' aumento, come pe' numeri interi. Ogni volta che il moltiplicatore sarà minore dell' unità il prodotto sarà minore del moltiplicando, al quale esso sarebbe solamente eguale, se il moltiplicatore fosse 1.

75. Poichè *la moltiplicazione per una frazione, qualunque sia il moltiplicando, ha per oggetto di prendere sopra questo moltiplicando le parti indicate dalla frazione moltiplicatore*, questa operazione è composta di due altre; cioè, di una divisione, e di una moltiplicazione, nelle quali il divisore, ed il moltiplicatore sono numeri interi.

In fatti, per prendere, per esempio, i $\frac{4}{5}$ di un numero qualunque, bisogna primieramente trovarne la quinta parte dividendolo per 5, e poi ripetere questa quinta parte quattro volte moltiplicandola per 4.

quando si conosce il prezzo dell' unità di questa cosa. Il problema rimane evidentemente lo stesso sia che si tratti di una quantità maggiore, o minore di questa unità.

In generale si vede, che *converrà sempre dividere il moltiplicando pel denominatore della frazione moltiplicatore, e moltiplicare il risultato pel numeratore di questa frazione.*

Se il moltiplicando è un numero intero divisibile per 5, per esempio 35, la quinta parte sarà 7; moltiplicando questo risultato per 4 si avrà 28 per $\frac{4}{5}$ di 35, ossia pel prodotto di 35 per $\frac{4}{5}$. Se il moltiplicando rimanendo sempre intero, non è divisibile esattamente per 5, come se, per esempio, fosse 32, la divisione per 5 darà per quoziente $6\frac{2}{5}$; ripetendo questo quoziente quattro volte, ne risulterà $24\frac{8}{5}$; il che si riduce a $25\frac{3}{5}$: tale è il valore di $\frac{4}{5}$ di 32.

Avressimo evitata la riduzione di $24\frac{8}{5}$ in $25\frac{3}{5}$, se avessimo cominciato dal moltiplicatore 32 pel numeratore 4; dividendo allora il prodotto 128 pel denominatore 5, si sarebbe ottenuto tutto in una volta l'ultimo risultato $25\frac{3}{5}$.

76. Io passo ora alla moltiplicazione di una frazione per una frazione.

Io suppongo, che, per esempio, si debba moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$: secondo ciò, che si è detto nel numero precedente, l'operazione si riduce a dividere $\frac{2}{3}$ per 5, ed a moltiplicare di poi il risultato per 4; e per la tavola del numero 55 la prima operazione si eseguirà moltiplicando il denominatore 3 del moltiplicando per 5, e la seconda moltiplicando il numeratore 2 del moltiplicando per 4, il che darà pel prodotto richiesto $\frac{8}{15}$.

Lo stesso accaderebbe di qualsivoglia altro esempio; quindi per ciò, che precede, si dee conchiudere, che *per formare il prodotto di due frazioni, convien moltiplicare li numeratori l'uno per l'altro, e porre sotto questo prodotto quello dei due denominatori.*

77. Può accadere, che si debbano moltiplicare gli uni per gli altri degl'interi uniti a delle frazioni, come, per esempio, $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$. Il mezzo più semplice per ottenere il prodotto è di ridurre gl'interi in frazioni, seguendo il metodo del numero 67; allora i due fattori saranno espressi per $\frac{26}{7}$, e $\frac{44}{9}$, ed il loro prodotto per $\frac{1144}{63}$, o per $18\frac{10}{63}$ estraendone gl'interi (66).

78. Alcune volte il prodotto di più frazioni

si appella *frazione di frazioni*; e in questo senso si dice i $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$. Questa espressione indica i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell' unità primitiva, e presa in questo caso per unità. Si riducono queste due frazioni ad una sola per mezzo della moltiplicazione (76), ed il risultato $\frac{8}{15}$ esprime il valore della quantità cercata riferita all' unità primitiva, cioè a dire, che i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell' unità equivalgono agli $\frac{8}{15}$ di questa unità. Se si volesse prendere i $\frac{7}{9}$ di questo risultato, ciò si ridurrebbe a prendere li $\frac{7}{9}$ di $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$, e riducendo queste frazioni ad una sola, si avrebbe $\frac{56}{135}$ pel valore della quantità cercata, riferito all' unità primitiva.

79. La parola *contenere* non conviene in tutto rigore ai differenti casi, che presenta la divisione, come la parola *ripetere* non conviene a quelli, che presenta la moltiplicazione, perchè non può dirsi, che il dividendo contenga il divisore, quando esso è minore di questo: tuttavia ci esprimiamo ancora in questa maniera, ma

solamente per analogia, e per maggior estensione (*).

Per rendere generale la definizione della divisione, *convien riguardare il dividendo come composto col quoziente nella stessa maniera, che il divisore è composto dell' unità*; poichè il divisore, ed il quoziente sono i due fattori del dividendo (36). Questa considerazione si presta a tutti i casi, che può presentare la divisione. In fatti, quando il divisore, per esempio, è 5, il dividendo è eguale a 5 volte il quoziente, e questo è perciò la quinta parte del dividendo. Se il divisore è una frazione, come, per esempio, $\frac{1}{2}$ il dividendo non debb' essere che la metà del quoziente, o vero quest' ultimo debb' essere il doppio dell' altro.

Egli è chiaro, che tutte le volte, che il divisore sarà minore dell' unità, il quoziente sor-

(*) Si osservi la nota del Traduttore posta alla pagina 49 degli *Elementi d' Algebra*. Secondo, che in essa si è esposto, *una mezza volta, un terzo di volta, un quarto di volta* etc. un numero dato, vuol dire la *metà*, la *terza*, la *quarta* etc. parte di questo numero. Onde, se, per esempio, si dice, che 4 sta una *mezza volta* in 2, ciò significa, che in 2 è contenuta la *metà* di 4; e se si dice che 3 è contenuto in 7 *due volte*, ed $\frac{1}{3}$ *di volta*, ciò significa, che il 7 contiene *due* 3, o sia 6 più *la terza parte* di 3, ossia 1. Ciò premesso parmi, che la divisione si possa definire: *quella operazione in cui si cerca quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.*

Nota del Traduttore.

passerà il dividendo, poichè questo divisore debb'essere contenuto nel dividendo un maggior numero di volte che l'unità, la quale presa per divisore dà in tutti i casi un quoziente espresso dallo stesso dividendo.

La definizione, che io ho posta, conduce facilmente al metodo di operare, quando il divisore è una frazione. Io prendo, per esempio, $\frac{4}{5}$: in questo caso il dividendo debb'essere solamente li $\frac{4}{5}$ del quoziente; ma $\frac{1}{5}$ essendo $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{5}$, si avrebbe $\frac{1}{5}$ del quoziente prendendo $\frac{1}{4}$ del dividendo, ossia dividendolo per 4. Conoscendo con ciò $\frac{1}{5}$ del quoziente, basta prendere 5 volte questo risultato, ossia moltiplicarlo per 5, e si ottiene il quoziente. In questa operazione si divide il dividendo per 4, e si moltiplica il risultato per 5; adunque ciò è come se si fossero presi i $\frac{5}{4}$ del dividendo, o come se si fosse moltiplicato per $\frac{5}{4}$, i quali non sono altra cosa che la frazione divisore $\frac{4}{5}$ rovesciata.

Questo esempio dimostra, che in generale *per dividere un numero qualunque per una frazione, convien moltiplicarlo per questa frazione rovesciata*.

Per esempio, si debba dividere 9 per $\frac{3}{4}$; ciò si eseguirà moltiplicando 9 per $\frac{4}{3}$, e si troverà $\frac{36}{3}$, ovvero 12. Così la divisione di 13 per $\frac{5}{7}$ si ridurrà a 13 moltiplicato per $\frac{7}{5}$, ossia $\frac{91}{5}$. Il quoziente cercato sarà $18\frac{1}{5}$, estraendone gl'interi (66).

80. Quando il dividendo è una frazione, l'operazione si riduce a *moltiplicare* (76) *la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata*.

Si debbano dividere $\frac{7}{8}$ per $\frac{2}{3}$; converrà moltiplicare $\frac{7}{8}$ per $\frac{3}{2}$, il che darà $\frac{21}{16}$.

È evidente, che l'operazione, qui sopra esposta, può ancora enunciarsi in questo modo: *per dividere una frazione per un altra, convien moltiplicare il numeratore della prima pel denominatore della seconda, ed il denominatore della prima pel numeratore della seconda.*

Se si avessero degl'interi uniti alle frazioni proposte, questi si ridurrebbero in frazioni, e si applicherebbe ai risultati la regola quì sopra esposta.

81. Giova osservare, che col mezzo di una espressione frazionaria s'indica una divisione qua-

lunque, sia che essa possa eseguirsi in numeri interi, o altrimenti: per esempio $\frac{36}{3}$ esprimono evidentemente il quoziente di 36 per 3 nella stessa maniera che lo esprime il 12; perchè $\frac{1}{3}$ essendo contenuto 3 volte nell'unità, $\frac{36}{3}$ saranno contenuti 3 volte in 36 interi, come debb'esserlo il quoziente di 36 per 3.

82. Si osserverà senza dubbio, che la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni si eseguiscono immediatamente per le osservazioni enunciate nella tavola della pagina 43, in vece che l'addizione, e la sottrazione delle frazioni richieggono una preparazione preliminare. Ciò dipende da questo, che le frazioni provengono dalla divisione, la quale è molto legata alla moltiplicazione. In avvenire si avrà spesso occasione di convincersi di questa verità, che le operazioni da eseguirsi sopra delle quantità sono tanto più facili, quanto più esse si avvicinano all'origine di queste quantità.

Delle Frazioni Decimali.

83. Quantunque si possa, per le regole precedenti, eseguire in tutti i casi sopra le frazioni le quattro operazioni fondamentali dell'Aritmetica, pure dobbiamo esserci accorti, che, se si fossero assoggettate ad una stessa legge di decremento le diverse suddivisioni dell'unità,

che servono a misurare le quantità più piccole di quest'unità, il calcolo delle frazioni sarebbe divenuto molto più comodo per la facilità, che si sarebbe avuta a convertire le une nelle altre. Prendendo questa legge conforme alla base del nostro sistema di numerazione, si è dato al calcolo il più alto grado di semplicità, che si possa ottenere; ed ecco come.

Si è veduto nel numero 3, che ciascheduna collezione di unità, contenuta in un numero, è composta di dieci unità dell'ordine precedente, come la diecina si forma delle unità semplici; ma nulla si oppone a riguardare questa unità semplice composta di dieci parti, di cui ciascuna sarà un *decimo*:

Il decimo come composto di dieci parti, delle quali ciascuna sarà un *centesimo* dell'unità:

Il centesimo come composto di dieci parti, delle quali ciascuna sarà un *millesimo* dell'unità; e così in appresso.

Proseguendo in questo modo, si formeranno delle quantità tanto piccole quanto si vorranno, per mezzo delle quali si potranno in conseguenza misurare delle quantità, per quanto piccole esse sieno.

Queste frazioni, che si chiamano *decimali*, perchè esse sono composte di parti dell'unità di dieci in dieci volte più piccole, si convertono l'une nelle altre nella stessa maniera, che le *diecine*, le *centinaja*, le *migliaja*, etc. si convertono nell'unità. Infatti

l'unità essendo eguale a	10 decimi
il decimo	10 centesimi
il centesimo	10 millesimi,

ne risulta, che il decimo vale 10 volte 10 millesimi, ossia 100 millesimi.

Per esempio, 2 decimi, 3 centesimi, 4 millesimi saranno equivalenti a 234 millesimi, come 2 centinaja, 3 diecine, e 4 unità fanno 234 unità; accaderà lo stesso in tutti gli altri casi, perchè la subordinazione delle parti dell'unità è simile a quella dei diversi ordini di unità.

84. Per questa osservazione si possono, col mezzo di cifre, scrivere le frazioni decimali come gl'interi, perciocchè, secondo la convenzione, che rende dieci volte minore il valore di una cifra posta alla destra di un'altra, i *decimi* trovano naturalmente il loro posto alla destra delle unità, poi i *centesimi* alla destra dei decimi, e così in appresso: ma per impedire, che non si confondano le cifre, che esprimono parti decimali con quelle, che rappresentano unità intere, si pone una virgola alla destra delle unità. Per esempio, a fine di esprimere 34 unità, e 27 centesimi, si scriverà 34, 27. Se non si avessero unità, si occuperebbe il loro posto con uno zero, e si farebbe lo stesso per tutte le parti decimali, che potessero mancare tra quelle, che sono enunciate nel numero proposto.

Così 19 centesimi si scrivono	o, 19
304 millesimi	o, 304
3 millesimi	o, 003.

85. Se si confrontano le espressioni delle frazioni decimali ora esposte alle seguenti $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{1000}$, $\frac{3}{1000}$, che si dedurrebbero dalla maniera

di rappresentare in generale una frazione, si vedrà, *che per rappresentare sotto la forma intera una frazione decimale scritta come una frazione ordinaria, convien prendere come egli è il numeratore di questa frazione, e porlo in maniera, che vi sieno dopo la virgola tante cifre, quanti zeri vi sono dopo l'unità nel denominatore*.

Reciprocamente, *per ridurre una frazione decimale, presentata sotto la forma di un' intero, a quella di una frazione ordinaria, convien dare per denominatore alle cifre, che essa contiene, l'unità seguita da tanti zeri, quante cifre vi sono alla destra della virgola*.

In questo modo le frazioni o, 56, e o, o36 si cangiano in $\frac{56}{100}$, e $\frac{36}{1000}$.

86. *L'espressione in cifre dei numeri, che contengono parti decimali, si legge enunciando prima le cifre poste alla sinistra della virgola, poi quelle, che sono alla destra, ed aggiungendo all'ultima di queste la denominazione delle parti, che essa rappresenta*.

Il numero 26, 736 si enuncia 26 unità, 736 millesimi:

Il numero o, o673 si enuncia 673 dieci-millesimi:

Finalmente o, ooo0673 si enuncia 673 dieci-millionesimi.

87. Le cifre decimali non prendendo il loro valore, che dal posto, che esse occupano rispetto alla virgola, egli è indifferente lo scrivere, o il cancellare alla loro destra quanti ze-

ri si vorranno. Per esempio, o, 5 è la stessa cosa o, 50; o, 784 è la stessa cosa che o, 78400, perchè nel primo caso il numero, che esprime la frazione decimale è divenuto 10 volte più grande, ma le parti sono divenute centesimi, e perciò 10 volte più piccole, che non erano a principio; nel secondo caso il numero, che esprime la frazione è divenuto cento volte più grande, ma le parti essendo diventate centomillesimi, sono cento volte più piccole, che non lo erano in principio: adunque questa trasformazione si riduce a quella, che si opera sopra una frazione ordinaria, quando si moltiplicano i suoi due termini per lo stesso numero, e sarebbe lo stesso, che dividerli per lo stesso numero, quando si togliessero degli zeri.

88. L'addizione delle frazioni decimali, e dei numeri ad esse uniti non abbisogna d'altra regola che quella dei numeri interi, perchè le parti decimali sono composte le une delle altre, andando da destra a sinistra, come lo sono le unità intere.

Per esempio, sieno dati i numeri o, 56; o, 003; o, 958, disponendoli come segue

	o, 56
	o, 003
	o, 958
Somma	1, 521

si trova con la regola del numero 12, che la loro somma è uguale a 1, 521.

Si abbiano ancora i numeri 19, 35; o, 3; 84, 5; e 110, 02, che contengano delle unità intere; si disporranno nel modo seguente

	19, 35
	o, 3
	84, 5
	110, 02
Somma	214, 17,

e si troverà pure, che la loro somma è 214, 17.

In generale, *l'addizione dei numeri decimali si fa come quella de' numeri interi, osservando di porre alla somma la virgola nella stessa colonna, in cui si trovano tutte quelle dei numeri da sommarsi.*

89. Le regole prescritte per la sottrazione dei numeri interi convengono pure, come vedremo ai numeri decimali. Per esempio, dal numero o, 62 si debba togliere il numero o, 3697; si osserverà primieramente, che il primo numero, il quale non contiene che centesimi, mentrechè il secondo contiene dei dieci-millesimi, può ancora convertirsi in dieci-millesimi ponendo due zeri alla sua destra (87), il che lo cangia in o, 6200. Di poi si disporrà l'operazione come quì sotto

	o, 6200
	o, 3697
Differenza ...	o, 2503,

e per la regola del numero 17 si troverà una differenza di o, 2503.

Si debba ancora togliere da 9, 1457 il numero 7, 364: disponendo l'operazione in questo modo.

9, 1457
7, 3640

Differenza . . . 1, 7817

si trova la differenza indicata qui sopra. Si sarebbe ottenuto lo stesso non ponendo lo zero dopo al numero da sottrarsi, purchè si fossero poste le sue diverse cifre al di sotto di quelle, che indicano, nel primo numero, degli ordini di unità, o delle parti corrispondenti.

In generale, *la sottrazione dei numeri decimali si eseguisce come quella dei numeri interi, purchè si renda il numero delle cifre decimali uguale nei due numeri proposti, scrivendo, alla destra di quello, che ne ha meno, tanti zeri, quanti sono necessarj: e si pone nella differenza una virgola nella colonna, in cui si trovano le virgole dei numeri proposti.*

Le prove dell' addizione, e della sottrazione dei numeri decimali si fanno assolutamente come quelle delle stesse operazioni sopra i numeri interi.

90. La virgola separando le collezioni di unità intere dalle parti decimali, se questa si toglie dal suo posto fa cangiare necessariamente il valore del numero proposto. Portandola verso la destra, si fanno passare nella parte intera delle cifre, che si trovavano nella parte frazionaria, e perciò si aumenta il valore totale del numero proposto. Al contrario, avanzando la virgola verso sinistra, si fanno passare nella parte frazionaria delle cifre, che si trovavano

nella parte intera, e perciò si diminuisce il valore totale del numero proposto.

Il primo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, etc. volte più grande, secondo che si porta la virgola uno, due, tre, etc. posti verso alla destra; perchè ciascuna volta che si trasporta la virgola di un posto a destra tutte le cifre confrontate a questa virgola avanzano di un posto verso sinistra, e perciò prendono un valore 10 volte più grande di quello che esse avevano a principio.

Se, per esempio nel numero 134, 28 si porta la virgola tra 2, ed 8 si avrà 1342, 8; le centinaja saranno divenute migliaja, le diecine centinaja, le unità diecine, i decimi unità, i centesimi saranno divenuti decimi. Tutte le parti del numero essendo diventate dieci volte più grandi, è come se si fossero rese decuple, o moltiplicate per dieci.

Il secondo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, etc. volte più piccolo, secondo, che si avanza la virgola di uno, due, tre, etc. posti verso sinistra, perchè ciascuna volta, che si avanza la virgola di un posto, tutte le cifre paragonate a questa virgola si avanzano di un posto verso destra, e perciò prendono un valore dieci volte più piccolo di quello, che esse avevano in principio.

Se nel numero 134, 28 si porta la virgola fra il 3, ed il 4, si avrà 13, 428; le centinaja saranno diventate diecine, le diecine unità, le unità decimi, i decimi centesimi, ed i centesimi millesimi. Tutte le parti del numero essendo diventate dieci volte più piccole, è lo stesso, come se si fossero divise per dieci.

91. Dopo le considerazioni precedenti è facile il prevedere il vantaggio, che le frazioni decimali hanno sopra le frazioni ordinarie; tutte le moltiplicazioni, e divisioni, che conviene eseguire col denominatore di queste si eseguiscono coll'aggiungere, o togliere un certo numero di zeri, o solo col variare di posto la virgola. Addottando queste modificazioni alla teorìa delle frazioni ordinarie, se ne deduce subito quella delle frazioni decimali, e la maniera di eseguire sopra queste frazioni la moltiplicazione, e la divisione; ma vi si può pervenire direttamente con le seguenti considerazioni.

Io supporrò primieramente, che il moltiplicando abbia solamente delle cifre decimali. Se lasciamo di considerare la virgola, esso diventerà dieci, cento, mille, etc. volte più grande, secondo il numero delle sue cifre decimali, ed il prodotto, che darà in questo caso la moltiplicazione sarà un ugual numero di volte più grande di quello, che si cercava: adunque si otterrà quest'ultimo, dividendo l'altro per dieci, cento, mille, etc.; il che si eseguirà separando alla sua destra (90) tante cifre decimali, quante ne aveva nel moltiplicando.

Se, per esempio, si dovesse moltiplicare 34, 137 per 9, si formerebbe primieramente il prodotto di 34137 per 9, il che darebbe 307233; e siccome la suppressione della virgola avrebbe reso il moltiplicando mille volte più grande, che esso non era, converrebbe dividere per mille il prodotto trovato, o separare con una virgola le tre sue ultime cifre a destra: in questo modo si avrebbe 307,233.

In generale, *a fine di moltiplicare per un numero intero un numero congiunto a cifre decimali, non si considera in questo la virgola, ma alla destra del prodotto si separano tante cifre decimali, quante ne conteneva il moltiplicando*.

92. Quando il moltiplicatore contiene cifre decimali, e che non vi si considera la virgola, si rende questo dieci, cento, mille, etc. volte più grande, secondo il numero delle sue cifre decimali: adoperandolo in questo stato, esso darà evidentemente un prodotto dieci, cento, mille etc. volte più grande di quello, che si avrebbe dovuto avere, il quale perciò si otterrà dividendo il primo per l'uno di questi numeri; cioè a dire, separando alla destra del prodotto tante cifre decimali, quante ne contiene il moltiplicatore, o avanzando un egual numero di posti, verso sinistra (90), la virgola, che si troverebbe nel prodotto, se anche il moltiplicando avesse dei decimali.

Per esempio, si debba moltiplicare 172,84 per 36, 003; non considerando la virgola nel solo moltiplicatore, si avrebbe, secondo il numero precedente il prodotto 6222758,52; ma il moltiplicatore trovandosi mille volte più grande di quello, che dovrebb'essere, bisognerà dividere questo prodotto per mille, o avanzare la virgola di tre posti verso la sinistra, il che darà 6222, 75852 pel prodotto richiesto, in cui perciò si troveranno tante cifre decimali, quante ve ne sono nel moltiplicando, e nel moltiplicatore.

In generale, *per moltiplicare l' uno per l'altro due numeri congiunti a cifre decimali, si tralascierà di considerare la virgola nell' uno, e nell' altro: ma si separeranno alla destra del prodotto tante cifre decimali, quante ambidue ne contengono.*

In alcuni casi convien porre uno, o più zeri alla sinistra del prodotto, per dargli il numero di cifre decimali, che esso debbe avere secondo la regola precedente. Se, per esempio, si dovesse moltiplicare 0,624 per 0,003, formando primieramente il prodotto di 624 per 3, si avrebbe il numero 1872, che non contiene che quattro cifre; e siccome converrebbe separare sei cifre decimali, non si potrebbe ciò fare, se non se ponendo a sinistra di questo numero tre zeri, de' quali uno occuperebbe il posto delle unità, il che farebbe 0,001872.

93. È evidente (47), che il quoziente di due numeri non dipende in alcun modo dalla grandezza assoluta delle loro unità, purchè questa sia la stessa nell' uno, e nell' altro. Adunque, se si trattasse di dividere per 13 il numero 451,49, si osserverebbe, che il primo riducesi a 45149 centesimi, ed il secondo a 1300 centesimi, e che questi ultimi numeri debbono dare lo stesso quoziente, come se essi esprimessero unità intere. In questo modo siamo condotti a togliere la virgola dal primo de' numeri proposti, ed a porre due zeri alla destra del

secondo; e ci siamo ridotti a dividere il numero 45149 per 1300, il che darà per quoziente $34\frac{949}{1300}$.

Da ciò si conchiuderà, che *per dividere per un numero intero un numero congiunto a cifre decimali, convien togliere la virgola da questo, e porre alla destra dell' altro tanti zeri, quante cifre decimali conteneva questo dividendo; e nulla si avrà a cangiare nel quoziente.*

94. Quando il dividendo, ed il divisore sono ambidue congiunti a cifre decimali, prima di togliere la virgola, si dee porre alla destra di quello dei due numeri, che ha meno cifre decimali tanti zeri, quanti ne abbisognano, perchè esso termini nello stess' ordine di decimali che l' altro. I due numeri proposti essendo allora riferiti alle stesse parti dell' unità, daranno uno stesso quoziente, come se essi esprimessero unità intere.

Per esempio, si debba dividere 315,432 per 23,4. Si cangerà quest'ultimo numero in 23,400, e di poi si dividerà 315432 per 23400: il quoziente sarà $13\frac{11232}{23400}$.

In questo modo, *per dividere l' uno per l'altro due numeri congiunti a cifre decimali, si pone alla destra di quello, che ne ha meno tanti zeri, quanti ne abbisognano perchè il numero delle cifre decimali sia lo stesso nel dividendo, e nel divisore; allora non si considera la virgola, e nulla si debbe cangiare nel quoziente.*

95. Siccome si è ricorso ai decimali solo per evitare l'uso delle frazioni ordinarie, egli è naturale di servirsene per approssimarsi ai quozienti, che non si possono ottenere esattamente, il che si fa convertendo in decimi, centesimi, millesimi, etc. il resto, a fine che esso possa contenere il divisore, come si vede nel quì sottoposto esempio.

	45149	1300
	6149	34, 73
Resto	949	
Decimi . . .	9490	
Centesimi . . .	3900	
	0000	

Quando siamo giunti al resto 949, vi si è aggiunto uno zero, a fine di moltiplicarlo per dieci, o sia per convertirlo in decimi; allora si forma un nuovo dividendo particolare composto di 9490 decimi, il quale dà per quoziente 7 decimi, che si scrivono alla destra delle unità dopo aver posta una virgola. Restano ancora 390 decimi, che si riducono in centesimi coll'aggiungere un altro zero, con che si forma un secondo dividendo composto di 3900 centesimi, il quale dà per quoziente 3 centesimi, che si pongono alla destra dei decimi. Quì ha fine l'operazione, e si ha per risultato esatto 34, 73 centesimi. Se questa operazione avesse lasciato un terzo resto, si sarebbe portato più lungi il calcolo, convertendo questo resto in millesimi, e continuando sempre nella stessa maniera, finchè si pervenisse ad un quoziente

esatto, o ad un resto composto di parti molto piccole, il quale perciò si potesse riguardare come di niuna importanza.

È evidente, che si può sempre, come nell'esempio quì sopra esposto, porre una virgola dopo le unità intere del quoziente per distinguerle dalle cifre decimali, il numero delle quali debb'essere eguale a quello degli zeri scritti successivamente alla destra degli resti (*).

96. Il numeratore di una frazione convertito in parti decimali, potrà dividersi pel denominatore, come nell'esempio precedente, e con questo mezzo la frazione sarà convertita in decimali. Si abbia, per esempio, la frazione $\frac{1}{8}$; si opererà come quì sotto

1	8
10	0, 125
20	
40	

(*) L'operazione, che si è eseguita sopra i decimali, non è che un caso particolare di quest'altro più generale: *Valutare il quoziente di una divisione in frazioni di una specie data*; e per ciò fare si converte il dividendo in frazione della stessa specie moltiplicandolo pel denominatore dato. Così per valutare in quindicesimi il quoziente di 7 per 3, si moltiplicherà 7 per 15, e si dividerà per 3 il prodotto 105, si avranno 35 quindicesimi, ovvero $\frac{35}{15}$ pel quoziente cercato.

Si abbia ancora la frazione $\frac{4}{797}$; conviene primieramente convertire il numeratore in millesimi per potere incominciare la divisione posta quì sotto

4	797 (*)
4000 1500 7030 654	0, 005018

97. Per quanto c' inoltriamo in questa divisione, non si otterrà giammai un quoziente esatto, perchè la frazione $\frac{4}{797}$ non può espri-

(*) Si può ancora proporre di convertire una frazione data in frazione di un' altra specie, ma più piccola della prima; per esempio, di trasformare $\frac{3}{4}$ in diecisettesimi; a questo si perverrà moltiplicando 3 per 17, e dividendo il prodotto per 4. In questa maniera si troverrà $\frac{51}{4}$ di diecisettesimo, ovvero $\frac{12}{17}$, e $\frac{3}{4}$ di diecisettesimo; ora i $\frac{3}{4}$ di un diecisettesimo equivalgono a $\frac{3}{68}$: adunque il risultato $\frac{12}{17}$ differisce dal vero di soli $\frac{3}{68}$.

Questa operazione, e quella della nota precedente si appoggiano sullo stesso principio dell' operazione corrispondente nel sistema decimale.

mersi rigorosamente in decimali, come la frazione $\frac{1}{8}$.

Questa differenza dipende da ciò, che il denominatore della frazione, il quale non divida il suo numeratore, non può dare un quoziente esatto, se non se quando esso, divida uno dei numeri 10, 100, 1000, etc., pei quali si moltiplica successivamente il suo numeratore (*); perchè è un principio dimostrato nell' Algebra, che ogni numero non può dividere un prodotto, se non se quando i suoi fattori dividono quelli di questo prodotto. Ora i numeri 10, 100, 1000, etc. essendo tutti formati dal numero 10, i di cui fattori sono 2, e 5, non sono divisibili, che per numeri formati da questi stessi fattori; 8 è in questo caso, poichè esso risulta da 2 per 2 per 2.

(*) È da avvertire, che la proposizione quì esposta si verificherà sempre quando la frazione ordinaria sia stata ridotta alla più semplice espressione; ma in caso diverso non si verifica. In fatti, se, per esempio, sia data la frazione $\frac{3}{6}$ da ridursi in decimali, essa si riduce esattamente a 0, 5 benchè il 6 non sia contenuto interamente nel 3, ed in alcuno de' numeri 10, 100, 1000, etc., e ciò perchè la frazione $\frac{3}{6}$ ridotta alla più semplice espressione equivale ad $\frac{1}{2}$, frazione il di cui denominatore 2 divide esattamente il 10.

Nota del Traduttore.

Le frazioni, che non possono valutarsi rigorosamente coi decimali, presentano nella loro espressione approssimativa, quando questa si porta innanzi sufficientemente, un carattere, che serve a farle ritrovare; questo è il ritorno periodico nelle stesse cifre.

Se si converte in decimali la frazione $\frac{12}{37}$, si troverà 0, 324324 . . . . ., e le cifre 3, 2, 4 ritorneranno sempre nello stess' ordine, senza che l'operazione possa mai terminare.

In fatti, siccome non si può avere per resto in ciascuna divisione che l'uno dei numeri interi, che precede il divisore, conviene necessariamente, che quando si saranno fatte più divisioni, che non sono questi numeri, si ricada sopra qualcuno de' resti precedenti, e perciò i dividendi particolari ritornino nello stesso ordine. Nell'esempio qui sopra esposto tre divisioni bastano per produrre questo ritorno; ma per la frazione $\frac{1}{7}$ ne abbisogneranno sei, perchè allora si troveranno per resti sei numeri, che sono inferiori a 7, e verrebbe 0, 1428571 ....
La frazione $\frac{1}{3}$ conduce solamente a 0, 3333 ....

98. Le frazioni, le quali hanno per denominatore un numero qualunque di 9, non hanno nel loro periodo che la cifra significativa 1:

$\frac{1}{9}$ dà 0, 1111 . . . .

$\frac{1}{99}$ . . . . 0, 010101 . . . .

$\frac{1}{999}$ . . . . 0, 001001001 . . . .

e così delle altre, poichè ciascuna divisione particolare, eseguendosi sopra i numeri 10, 100, 1000, etc., lascia sempre per resto l'unità.

Profittando di questa osservazione, si passa facilmente da una frazione decimale periodica alla frazione ordinaria, da cui essa deriva. Per esempio, si vede, che 0, 33333 . . . . . si riduce alla frazione 0, 11111 . . . . . moltiplicata per 3, e siccome quest' ultima è lo sviluppo di $\frac{1}{9}$, se ne conchiude, che la prima è quello di $\frac{1}{9}$ moltiplicato per 3, o di $\frac{3}{9}$, o finalmente di $\frac{1}{3}$.

Quando si tratta di frazioni, il di cui periodo è composto di due cifre, si confrontano allo sviluppo di $\frac{1}{99}$, ed a quello di $\frac{1}{999}$, quando il loro periodo contiene tre cifre; e così di seguito.

Sia, per esempio, 0,324324 . . . . ., è evidente, che questa frazione si formerebbe moltiplicando 0, 001 001 001 . . . . . pel numero 324: adunque moltiplicando $\frac{1}{999}$, di cui quest' ultima frazione decimale n' è lo sviluppo, per 324, si avrà $\frac{324}{999}$ per la prima, dividendo per 27 i due termini di questo risultato, si ritornerà alla frazione $\frac{12}{37}$.

In generale, *la frazione ordinaria, da cui ne risulta una frazione decimale periodica, si forma scrivendo come denominatore sotto il numero, che esprime un periodo tanti* 9 *quante cifre sono in questo periodo*.

Se il periodo della frazione non cominciasse alla prima cifra decimale, si potrebbe trasportare per un' istante la virgola subito innanzi alla prima cifra di questo periodo, e valutare la frazione partendo solo da questa cifra, e considerando come unità quelle, che sono alla sua sinistra; non si avrebbe più che a dividere il risultato per 10, 100, 1000, etc., secondo il numero de' posti, de' quali si è fatta avanzare la virgola verso destra.

Per esempio, la frazione 0, 324141..... si scriverà in questo modo 32, 4141....: la parte 0, 4141.... corrispondendo a $\frac{41}{99}$, si avrà il risultato $32\frac{41}{99}$, che bisognerà dividere per 100, poichè la virgola si è avanzata di due posti verso destra, e perciò ne verrà $\frac{32}{100}$, e $\frac{41}{9900}$, ovvero riducendo allo stesso denominatore ne verrà $\frac{3209}{9900}$, frazione, che riprodurebbe lo sviluppo proposto.

Per formarsi un'idea ben esatta della natura di queste espressioni, basta considerare la frazione 0, 999.... Volendo ritornare al suo valore primitivo, si trova, che essa corrisponde a 9 diviso per 9, il che non è altra cosa che l' unità: frattanto qualunque sia il numero delle cifre, al quale ci fermiamo nella sua espressione, non si formerà mai l' unità. Se ci limitiamo alla prima cifra, vi mancherà $\frac{1}{10}$, se alla seconda $\frac{1}{100}$, se alla terza $\frac{1}{1000}$, e così in appresso; in modo che ci possiamo avvicinare all' unità di quanto si vuole, ma senza mai giungervi. Adunque qui l' unità non è che un limite, a cui l' espressione 0, 999.... si avvicina quanto più cifre si prendono.

99. Ciò, che abbiam veduto, contiene le regole veramente essenziali dell' Aritmetica dei numeri astratti; ma per applicarle agli usi della Società, conviene conoscere le diverse unità, che si adoperano per confrontare tra loro, o valutare le quantità sotto qualunque forma esse si presentino. Queste unità, che sono le misure in uso, hanno variato coi tempi, e co' luoghi; il loro legame non si è formato che a poco a poco, secondo che il bisogno, ed il progresso delle arti, e delle scienze hanno obbligato d' introdurre più esattezza nell' apprez-

zare le materie, e nella costruzione degl' istrumenti.

Dopo aver mostrato da lungo tempo gl' inconvenienti di un sistema composto di parti incoerenti, nel quale la mancanza di legame poneva ne' calcoli una complicazione inutile, ed anche nocevole all' istruzione generale, i più illustri dotti Francesi hanno in fine ottenuto lo stabilimento di nuove misure, legate tra loro, le quali bene s' accordano nel nostro sistema di numerazione, e sono prese immediatamente sopra le dimensioni del Globo, che noi abitiamo, e sopra la più sparsa delle sostanze, che esso ci presenta. L' estensione di questo trattato, ed il luogo, che esso occupa nell' insegnamento, non mi permettono di presentare l' estratto di tutti i lavori scientifici eseguiti per lo stabilimento di questo sistema, e che formano il più bello de' monumenti innalzati alla gloria delle scienze, ed alla utilità pubblica nell' ultimo secolo: io mi limiterò ad esporne sommariamente i principj, e l' uso.

Esposizione del nuovo sistema metrico, ed applicazioni pratiche dell' Aritmetica.

100. Le misure hanno delle forme, e dei nomi differenti, secondo la specie di grandezza, alla quale si applicano. Queste grandezze possono essere distinte in questo modo:

Le lunghezze, d' onde nascono le misure lineari;

Le superficie, ovvero le aree;

I volumi, ovvero le capacità, per le quali si confrontano tra loro i corpi solidi, e liquidi;

Finalmente le misure di peso, ovvero i pesi che servono pure al paragone de' corpi.

L' unità di lunghezza, ovvero l' unità lineare, che si chiama *metro*;

L' unità di superficie, che si chiama *ara*;

L' unità di volume, che dicesi *stero*, ovvero *metro cubo* (*);

L' unità di capacità, che dicesi *litro*;

L' unità di peso, che si chiama *grammo*.

Per paragonare delle misure più grandi o più piccole delle precedenti, si adoperano le parole *miria*, *kilo*, *ecato*, *deca*, *deci*, *centi*, *milli*, etc., dedotti dal greco, e dal latino, che indicano rispettivamente delle diecine di migliaja, delle migliaja, delle centinaja, delle diecine, dei decimi, dei centesimi, dei millesimi, etc. Le misure di lunghezza formano perciò la serie seguente: *miriametro*, *kiliometro*, *ecatometro*, *decametro*, *METRO*, *decimetro*, *centimetro*, *millimetro* etc.

Ciascuna di queste misure è dieci volte più grande di quella, che la segue, e dieci volte più piccola di quella, che la precede immediatamente nell' ordine della serie.

Il *litro* è una misura di capacità; esso equivale ad un decimetro cubo.

(*) Si chiama *cubo* un corpo terminato da sei faccie quadrate, ed eguali.

I nomi delle misure di capacità si compongono come quelli delle misure della lunghezza, perciò si dirà *ecatolitro*, *decalitro*, *LITRO*, *decilitro*, *centilitro*, etc.

Il *grammo* è un peso eguale al centimetro cubo di acqua pura (*). Il *miriagrammo*, il *chiliogrammo*, l'*ecatogrammo*, il *decagrammo*, il *GRAMMO*, il *decigrammo*, il *centigrammo*, etc. formano una serie decimale, come le altre misure.

L'*ara* è una misura di superficie eguale al decametro quadrato, cioè a dire, ad un quadrato, il di cui lato sia un decametro, ovvero uguale a cento metri quadrati. Non vi sono, che due multipli dell'ara, i quali sembrano avere una qualche utilità; l'uno è l'*ecataro*, che vale cento are, e l'altro è il *miriaro*, che ne vale diecimila.

Lo *stero*, pel legname da bruciare, è un metro cubo, il che suppone delle cataste della lunghezza di un metro poste dentro un telajo quadrato, che abbia un metro per ogni lato, o qualunque altra disposizione equivalente. I composti dello stero non sembrano di alcuna utilità negli usi ordinarj.

Finalmente le unità di moneta sono ora conosciute sotto i nomi di *lire*, *decimi*, e *centesimi*. I loro valori relativi sono pure di dieci in dieci volte più piccoli.

(*) Per ottenere maggior esattezza nel determinare questa unità, si è fatt'uso di acqua distillata, che si è ridotta al suo *maximum* di densità con opportuno raffreddamento.

La lira è formata di un pezzo d'argento, che pesa 5 grammi, e colla lega di $\frac{1}{10}$ di rame (*).

La tavola quì unita è atta a far comprendere i vantaggi dell'uniformità introdotta nella nomenclatura dei multipli, e delle suddivisioni delle misure prese per unità. Presso a ciascun nome si trova, tra parentesi, l'abbreviatura proposta da M.r Dillon, allora verificatore generale de' pesi, e misure.

101. Tutti i problemi, ne'quali si tratta di riunire in un solo più numeri di una stessa specie di misure, si riferiscono evidentemente all'addizione.

Così per sapere ciò, che hanno prodotto tre contratti, ne'quali si è venduto successivamente per $1334^{l.},45$, $1951^{l.},17$, $183^{l.},11$ di una certa derrata, basta sommare questi tre numeri, e la risposta al problema proposto si troverà nel totale $3468^{l.},73$.

(*) Un carattere essenziale, che assicura a questo sistema la superiorità sopra tutto ciò, che è stato fatto in questo genere, è che tutte le misure sono legate tra loro, ed hanno un rapporto immediato con le dimensioni della sferoide terrestre. Il metro è la diecimilionesima parte della distanza dal polo all'equatore presa sul meridiano, che passa per Parigi. L'arco di questo meridiano, che traversa la Francia, è stato misurato con una esattezza fin quì ignota, e calcolato con la maggior precisione secondo i metodi di Mr. Delambre, e se n'è conchiusa la distanza, che si trova tra il polo, e l'equatore, e da questa si è dedotto il metro.

TAVOLA DELLE MISURE DECIMALI
CHE DIMOSTRA IL SISTEMA METODICO DELLA LORO DENOMINAZIONE

RAPPORTI DELLE MISURE di ciascuna specie alla loro misura principale		Prima parte del nome che indica il rapporto alla misura principale	MISURE PRINCIPALI					ESEMPI dei nomi composti per esprimere differenti unità di misure
In lettere	In Cifre		DI LUNGHEZZA	DI CAPACITÀ	DI PESO	AGRARIA	PER LE LEGNE DA ARDERE	
Diecimila	10000.	Miria . . . . (M.)	METRO (me.)	LITRO (li.)	GRAMMO (gr.)	ARA (ar.)	STERO (st.)	MIRIAMETRO, lunghezza di diecimila metri. KILIOGRAMMO, peso di mille grammi. ECATARA, misura agraria di cento are. DECALITRO, misura di capacità di dieci litri. DECIMETRO, decima parte del metro. CENTIGRAMMO, centesima parte del grammo. *Nota*. Molti composti come *decara*, *kilioara*, e tutti quelli, che son formati con lo stero, non sono in uso.
Mille	1000.	Kilio . . . . (K.)						
Cento	100.	Ecato . . . . (E.)						
Dieci	10.	Deca . . . . (D.)						
Uno	1.	. . . .						
Undecimo	0,1.	Deci . . . . (d.)						
Un centesimo . .	0,01.	Centi . . . . (c.)						
Un millesimo . .	0,001.	Milli . . . . (m.)						
Rapporti delle misure principali tra loro, e con la grandezza del Meridiano			Dieci-millionesima parte della distanza dal polo all' equatore.	Un decimetro cubo.	Peso d' un centimetro cubo di acqua stillata.	Cento metri quadrati.	Un metro cubo.	L' Unità monetaria si chiama *Lira*. La *lira* dividesi in dieci *decimi*: Ed il Decimo in dieci *centesimi*. Il valore di una *Lira* è quello d' un pezzo d'argento a nove decimi di fino, pesante cinque grammi.

Suppongo ancora, che si sieno comperate quattro pezze di stoffa, le di cui lunghezze sieno espresse da 217^{mi}, 43, 97^{mi}, 21, 194^{mi}, 07, 51^{mi}, 34, la somma di questi numeri espressa da 560^{mi}, 05 darà la quantità totale di stoffa.

L' applicazione della sottrazione è troppo facile, e perciò sù di questa non mi trattengo.

102. È chiaro, che coll' ajuto della moltiplicazione si trova il prezzo di un numero dato di cose della stessa specie, e dello stesso valore, quando si conosce quest' ultimo, poichè allora si tratta di ripeterlo tante volte quante vi sono cose, qualunque poi queste sieno.

Si vede, che il prodotto non dipende dalla specie di unità del moltiplicatore, ma che esso è della specie del moltiplicando, e che il moltiplicatore dee riguardarsi come un numero astratto. Questa considerazione serve a determinare, in una moltiplicazione di numeri concreti quello, che dee prendersi per moltiplicatore.

Se, per esempio, il metro di una certa stoffa costa $19^{l.}$, 25, e si domandi il prezzo di una pezza di 37^{mi}, 14, basterà moltiplicare $19^{l.}$, 25 per 37, 14; il prodotto $714^{l.}$, 95 sarà il prezzo richiesto.

In fatti, è evidente, che il prezzo della pezza debb' essere composto di quello del metro, come la lunghezza di questa pezza è composta di quella del metro. Così, la pezza, che contiene 37 volte il metro più $\frac{14}{100}$ di questa misura, dee costare 37 volte $19^{l.}$, 25 più $\frac{14}{100}$ di questo prezzo; adunque convien moltiplicare $19^{l.}, 25$ per 37, e $\frac{14}{100}$, e queste due operazioni sono riunite in una sola quando si prende $37, 14$ per moltiplicatore.

Si può ancora riguardare l'operazione sotto questo punto di vista assai semplice: considerando primieramente la somma di $19^{l.}, 25$ come il prezzo del centimetro di stoffa, cioè a dire dell'unità dell'ultimo ordine del moltiplicatore, con ciò si rende evidente, che il prezzo totale debbe ottenersi ripetendo 3714 volte la somma di $19^{l.}$ 25; ma 3714 essendo un numero cento volte più grande del vero moltiplicatore 37, 14, si ridurrà il prodotto al suo giusto valore, prendendone la centesima parte, ovvero separando due cifre decimali di più.

Finalmente, in terzo luogo, si riconosce facilmente, che quando il prezzo del metro è $19^{l.}, 25$, quello dell'unità dell'ultim' ordine del moltiplicatore, ossia del centimetro, nell'esempio presente, dovendo esserne la centesima parte, sarà espresso da $0^{l.}, 1925$, e si avrà il prezzo di $37^{mi}, 14$, ovvero 3714 centimetri, moltiplicando $0^{l.}, 1925$ per 3714.

103. Questa maniera di riguardare il problema dipende dalla facilità di convertire, le une nelle altre, le suddivisioni di una stessa specie di misure, col semplice cangiamento di posto della virgola, secondo le osservazioni del numero 90. Se, per esempio, si volessero convertire $314^{mi}, 513$ in decimetri, basterebbe il far avanzare la virgola di un posto verso destra, il che

darebbe $3145^{dmi}, 13$ poichè allora si prenderebbe il decimetro per unità.

Togliendo la virgola, i millimetri diventano unità, e perciò si ha il numero dei millimetri contenuti nella grandezza proposta, espresso da $314513^{mil.}$

104. Si ritornerebbe da quest'ultima suddivisione a quelle, che la precedono, cioè a dire, al centimetro, al decimetro, al metro, separando successivamente una, due, o tre cifre decimali. Se ne separassimo quattro, si prenderebbe per unità il decametro, e si avrebbero $31\ D^{mi}, 4513$; continuando nella stessa maniera, si otterrebbero $3\ E^{mi}, 14513$, etc.

Queste considerazioni, e quelle del numero precedente si applicherebbero facilmente ad ogni altra specie di misure del sistema decimale, e presentano uno de' più grandi vantaggi di questo sistema.

105. Ora passo ad indicare alcuni usi della divisione. Essa primieramente serve per risolvere tutti i problemi del genere seguente: *Conoscendo ciò che è costato un certo numero di cose dello stesso valore, trovare questo valore?* Ciò si vede osservando, che il prezzo noto è necessariamente il prodotto del prezzo di una cosa, moltiplicato pel numero delle cose (102); onde da ciò ne risulta, che dividendo questo prodotto pel fattore noto, che è il numero delle cose, si debbe ottenere per quoziente l'altro fattore, o sia il prezzo di una sol cosa (36).

Per esempio, io suppongo, che avendo pagati $19^{mi}, 13$ di stoffa, $315^{l.}, 45$, si domandi quanto questa costi al metro? Per trovar ciò si dividerà $315^{l.}, 45$ per $19, 13$; si otterrà $16^{l.}, 49$.

Si perverrebbe al risultato ancora in questa maniera. Se si convertissero $19^{mi}, 13$ in 1913 centimetri, e si dividesse $315^{l.}, 45$ per 1913, si avrebbe il prezzo del centimetro, che si dovrebbe poi moltiplicare per 100, a fine di avere quello del metro: ora è evidente, che adoperando un divisore, come $19, 13$ cento volte più piccolo di 1913, si otterrà un quoziente cento volte più grande, e perciò eguale a quello, che si cerca. Adunque dividendo $315^{l.}, 45$ per $19,13$ si troverà $16^{l.}, 49$ pel prezzo di un metro di stoffa.

106. Ecco un secondo problema, in cui il dividendo, ed il divisore sono ambidue della stessa natura, ed in cui il quoziente, è di una natura differente.

Si domanda quanti kiliogrammi di una certa mercanzia, la quale costa $14^{l.}, 5$ il kiliogrammo, si avranno con $529^{l.}, 35$? È chiaro, che il numero cercato è composto col kiliogrammo (sua unità), come $529^{l.}, 35$ sono composte con $14^{l.}, 5$, prezzo del kiliogrammo. Adunque, se si divide $529, 35$ per $14, 5$, il quoziente $36, 50689$ esprimerà dei kiliogrammi, e delle suddivisioni di questa specie di unità.

107. L'uso delle frazioni si presenta da se stesso, mediante l'enunciato del problema. Se, per esempio, bisognasse calcolare i $\frac{3}{4}$ di $219^{l.}, 6$, si dovrebbe moltiplicare $219^{l.}, 6$ per $\frac{3}{4}$, cioè a

dire, moltiplicare questo numero per 3, e poi dividere il risultato per 4, il che darebbe $164^{l.}, 7$ (75).

Si potrebbero riportare molti altri diversi problemi, i quali si risolvono colle quattro regole, ma questa cura è inutile; perchè l'applicazione di queste regole non ha alcuna difficoltà quando si è bene intesa la definizione, ed il fine di ciascuna.

Delle Proporzioni.

108. Si sono già veduti i diversi metodi necessarii per eseguire sopra i numeri, sieno questi interi, o frazionarii, le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica, l' addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione; e tutti i problemi, che si riferiscono a' numeri debbono riguardarsi come risoluti, quando con maturo esame del loro enunciato, siamo pervenuti a ridurli a qualcuna di queste operazioni. Perciò potrei quì terminare ciò, che debbo dire sull' Aritmetica, perchè il rimanente appartiene all' Algebra, ma nondimeno io prendo a risolvere alcuni problemi, i quali mentre esercitano i lettori sopra ciò, che essi hanno già veduto, li prepareranno all' analisi algebrica, e li condurranno ad una teoria ben importante, cioè a dire, quella dei rapporti, e delle proporzioni, che si comprende ordinariamente nell' Aritmetica.

109. *Una pezza di drappo, che contiene* 13 *metri è stata pagata* $130^{l.}$: *si domanda quanto costerebbe una pezza dello stesso drappo, che avesse* 18 *metri di lunghezza?*

È evidente, che se si sapesse ciò, che costasse un metro del drappo, che si è comperato, si ripeterebbe questo prezzo 18 volte, e si avrebbe per risultato il prezzo della pezza di 18 metri, ora, poichè 13 metri sono costati 130l., un sol metro sarebbe costato la decima terza parte di 130l., ovvero $\frac{130}{13}$: facendo la divisione, si trova per risultato 10l., e moltiplicando questo numero per 18, si ottengono 180l. per la somma richiesta. Tale è, in fatti, il valore della pezza di 18 metri.

Un corriere, che va sempre egualmente veloce, avendo percorsi 5 miriametri in 3 ore, si domanda quanti ne percorrerebbe in 11 ore?

Ragionando come nell' esempio precedente, si vede, che questo Corriere percorrerebbe, in un' ora, $\frac{1}{3}$ di 5 miriametri, o sia $\frac{5}{3}$, e che in 11 ore esso ne percorrerebbe 11 volte tanti, o $\frac{5}{3}$ di miriametro moltiplicati per 11, o finalmente, $\frac{55}{3}$ il che equivale a 18 miriametri, ed $\frac{1}{3}$.

Io suppongo ancora, che *si domandi in quanto tempo il Corriere del problema precedente percorrerebbe* 22 *miriametri?*

Si vede, che se si conoscesse il tempo, che gli abbisogna a percorrere un miriametro, si ripeterebbe questo tempo 22 volte, e si avrebbe per risultato il richiesto numero d' ore, ora il Corriere, di cui si tratta, impiegando 3 ore

a percorrere 5 miriametri, non impiegherà, che $\frac{1}{5}$ di questo tempo, ovvero $\frac{3}{5}$ d' ora a percorrere un miriametro: moltiplicando questo numero per 22 si ottengono $\frac{66}{5}$, ovvero 13 ore, e $\frac{1}{5}$; e siccome l' ora è di 60 minuti, si avranno 13 ore e 12 minuti in vece di 13 ore, ed $\frac{1}{5}$.

110. Io discopersi la quantità incognita coll' analisi di ciascuno degli enunciati precedenti; ma in tutti questi problemi i numeri noti, e i numeri cercati dipendono gli uni dagli altri in una maniera, che giova esaminare.

Perciò io riprendo il primo problema, in cui si tratta di conoscere il prezzo di 18 metri di drappo, di cui 13 metri si pagarono con 130 lire.

È evidente, che la somma da pagarsi per una pezza della stoffa di cui si tratta diventerebbe doppia, se questa pezza contenesse un numero di metri doppio del primo: e se questo numero diventasse triplo, anche il prezzo si triplicherebbe, e così in appresso; e in fine è evidente, che per la metà, o i $\frac{2}{3}$ della pezza non si dovrebbe pagare che la metà, o i $\frac{2}{3}$ del prezzo totale.

Dopo queste nozioni, che tutti quelli, che intendono la proprietà dei termini ammettono senza difficoltà, si vede, che se si hanno due pezze dello stesso drappo, il prezzo della seconda dee contenere quello della prima tante volte, quanto la lunghezza della seconda contiene quella della prima; e questa circostanza si enuncia dicendo, che i prezzi sono in *proporzione* delle lunghezze, o sono tra loro nello stesso *rapporto* delle lunghezze.

Questo esempio servirà a stabilire il senso di più espressioni, le quali si ripetono spesso.

111. Il *rapporto* delle lunghezze è il numero o intero, o frazionario, che esprime quante volte l' una delle lunghezze contiene l' altra. Se la prima pezza avesse 4 metri, e la seconda 8 il rapporto di questa all' altra sarebbe 2, poichè 8 contiene il 4 due volte. Nell' esempio posto quì sopra la prima pezza aveva 13 metri, e la seconda 18; adunque il rapporto di questa all' altra era $\frac{18}{13}$, ovvero 1, e $\frac{5}{13}$. In generale *il rapporto, o la ragione di due numeri è il quoziente dell' uno per l' altro*.

I prezzi avendo tra loro lo stesso rapporto delle lunghezze, bisogna che 180, prezzo della seconda pezza, essendo diviso per 130, prezzo della prima, dia per quoziente $\frac{18}{13}$: ed è questo ciò, che in fatti accade; perchè riducendo $\frac{180}{130}$ alla più semplice espressione, si hanno $\frac{18}{13}$.

I quattro numeri 13, 18, 130, 180 scritti nell' ordine, nel quale quì si veggono, sono

dunque tali, che *il secondo contiene il primo tante volte, quante il quarto contiene il terzo*; ed essi formano così ciò, che si appella *proporzione*.

I numeri 13, 18, 130, 180 si chiamano termini della proporzione.

Si dice pure, *che una proporzione è l' unione di due rapporti eguali*.

È a proposito l' osservare, che un rapporto non cangia, quando si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per uno stesso numero; e ciò è evidente, poichè questo rapporto non essendo che il quoziente di una divisione, può sempre porsi sotto una forma frazionaria. È in questo modo, che il rapporto $\frac{18}{13}$ è lo stesso che $\frac{180}{130}$.

Le stesse considerazioni si applicano ancora al secondo esempio. Il Corriere, che percorre 5 miriametri in 3 ore, percorrerà una strada doppia in un tempo doppio, tripla in un tempo triplo; così 11 ore, numero, che esprime il tempo, che questo Corriere ha impiegato per percorrere 18 miriametri, ed $\frac{1}{3}$, ovvero $\frac{55}{3}$ di miriametro, dee contenere 3 ore, numero, che indica il tempo, che esso impiega a percorrere 5 miriametri, tante volte quante $\frac{55}{3}$ contengono il 5: i quattro numeri 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11 sono dunque in proporzione, ed in fatti, se si divide $\frac{55}{3}$ per 5 si avranno $\frac{55}{15}$, resultato, che equivale a $\frac{11}{3}$. Ora sarà facile il riconoscere tutti i casi, ne' quali avrà luogo la proporzione fra quattro numeri.

112. Per indicare, che vi è una proporzione tra i numeri 13, 18, 130, 180, si scrivono in questo modo 13 : 18 :: 130 : 180; e si enuncia dicendo 13 *sta* a 18 *come* 130 *sta* a 180; il che vuol dire, che 13 è la stessa parte di 18, che il 130 è di 180, ovvero, che 13 è contenuto in 18 tante volte che 130 lo è in 180; o finalmente che il rapporto di 18 a 13 è lo stesso che quello di 180 a 130.

Il primo termine di un rapporto si appella *antecedente*, ed il secondo *conseguente*. In una proporzione vi sono due *antecedenti*, e due *conseguenti*, cioè l' antecedente del primo rapporto, e quello del secondo, il conseguente del primo rapporto, e quello del secondo. Nella proporzione 13 : 18 :: 130 : 180, gli antecedenti sono 13, e 130, i conseguenti sono 18, e 180.

In avvenire io prenderò il conseguente del rapporto per numeratore della frazione, che esprime il rapporto, e l' antecedente per denominatore.

113. Per accertarsi che vi è proporzione tra i quattro numeri 13, 18, 130, e 180, conviene vedere, se le frazioni $\frac{18}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono u-

guali, e perciò fare bisogna ridurre la seconda alla sua più semplice espressione; ma si può fare la stessa verificazione osservando, che se le due frazioni $\frac{18}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono equivalenti, come si suppone, ne segue, che riducendole allo stesso denominatore, il numeratore dell' una diventerà uguale a quello dell' altra, e perciò 18 moltiplicato per 130 darà lo stesso prodotto che dà 180 moltiplicato per 13. Questo è ciò, che in fatti accade, ed il ragionamento, che lo ha fatto conoscere essendo indipendente dal valore particolare de' numeri, prova, che *se quattro numeri sono in proporzione il prodotto del primo, e dell' ultimo, o sia de' due* estremi *è uguale a quello del secondo, e del terzo o sia dei due medj*.

Si vede nello stesso tempo che se i quattro numeri proposti non fossero in proporzione non avrebbero la proprietà quì sopra indicata; perchè la frazione, che esprime il primo rapporto non essendo equivalente a quella, che ne esprime il secondo, il numeratore dell' una non diventerebbe uguale a quello dell' altra quando si riducessero tutte due allo stesso denominatore.

114. La prima conseguenza, che naturalmente da ciò si deduce, è, che si può cangiare l' ordine dei termini di una proporzione, purchè quello, che si stabilisce sia tale, che il prodotto degli estremi rimanga eguale a quello de' medj. Nella proporzione 13 : 18 :: 130 : 180 si possono fare le seguenti disposizioni

13 : 18 :: 130 : 180
13 : 130 :: 18 : 180
180 : 130 :: 18 : 13
180 : 18 :: 130 : 13
18 : 13 :: 180 : 130
18 : 180 :: 13 : 130
130 : 13 :: 180 : 18
130 : 180 :: 13 : 18

perchè in ciascheduna di esse il prodotto degli estremi, e quello de' medj, sono sempre formati dagli stessi fattori. La seconda disposizione, nella quale i medj hanno cangiato tra loro di luogo è una di quelle, che si praticano più spesso (*).

(*) Io credo a proposito l'osservare, che la proporzione 13: 130:: 18: 180 si sarebbe presentata immediatamente sotto questa forma dietro la soluzione stessa del problema del numero 109; perchè si può avere il valore di un metro di drappo in due maniere, cioè, dividendo per 13 il prezzo della pezza di 13 metri, o dividendo per 18 quello della pezza di 18 metri. Adunque segue da ciò, che il prezzo della prima dee contenere 13 tante volte quante il prezzo della seconda contiene 18; adunque si avrà 13: 130:: 18: 180. Si potrebbe ragionare nella stessa maniera sopra il secondo problema dello stesso numero, come sopra tutti quelli dello stesso genere; e derivarne da ciò le proporzioni; ma io ho preferito il punto di vista del n.° 109, perchè esso conduce a paragonare tra loro delle quantità della stessa specie, mentre che quì conviene paragonare i prezzi, che sono somme di danaro a dei metri, che sono misure di lunghezza; il che non può farsi se non se considerando gli uni, e le altre come numeri astratti.

115. Bisogna osservare, che si possono moltiplicare, o dividere per uno stesso numero i due antecedenti, o i due conseguenti di una proporzione senza turbarla; perchè questo cangiamento fa dei due antecedenti il primo rapporto, e dei due conseguenti il secondo. Se, per esempio, si avesse 55 : 21 :: 165 : 63, cangiando i medj di posto ne verrebbe 55 : 165 :: 21 : 63: allora si potrebbero dividere pel numero 5 i due termini, che formano il primo rapporto (111), il che darebbe 11 : 33 :: 21 : 63; cangiando di nuovo i medj di posto si troverebbe 11 : 21 :: 33 : 63; proporzione, che è anch' essa vera, e che non differisce dalla proposta se non se in ciò che i due antecedenti sono stati divisi per 5.

116. Poichè il prodotto degli estremi è uguale a quello dei medj, si può prendere l'uno per l'altro; e siccome dividendo il prodotto degli estremi per un estremo, si troverebbe necessariamente per quoziente l'altro estremo, *sarà d' uopo, che dividendo il prodotto dei medj per un estremo si trovi anche l'altro estremo*. Per la stessa ragione *se si divide il prodotto degli estremi per uno de' medj, si otterrà l'altro medio*,

Adunque si può trovare un termine qualunque di una proporzione, quando si conoscano gli altri tre, perchè il termine cercato non può essere che l'uno degli estremi, o l'uno de' medj.

Il problema del n.° 109 si risolve per una delle regole già date. In fatti quando si è conosciuto, che il prezzo delle due pezze di drappo è in proporzione col numero de' metri contenuti in ciascheduna, si scrive così questa proporzione

$$13 : 18 :: 130 : x$$

ponendo la lettera x per tenere il luogo del prezzo cercato della pezza di 18 metri, e si trova questo prezzo, che è l'uno degli estremi moltiplicando tra loro i due medj 18, e 130, il che dà 2340, e dividendo questo prodotto per l'estremo noto 13: si ha per risultato 180.

L'operazione, per la quale essendo dati tre termini qualunque di una proporzione si trova il quarto, si chiama *regola del tre*. Gli autori della maggior parte dei libri d'Aritmetica, l'hanno distinta in più specie; ma questo apparato è inutile quando si è ben inteso ciò, che costituisce la proporzione, e che si è compreso bene l'enunciato del problema proposto. Alcune applicazioni apporteranno chiarezza a ciò, che si è detto.

117. Un'operajo avendo fatti 217^{mi}, 5 di lavoro in 9 giorni, si domanda quanto tempo impiegherebbe a farne 423, 9 supponendo, che esso lavorasse sempre nella stessa maniera?

In questo problema l'incognita è un numero di giorni, che dee contenere i 9 giorni impiegati a fare 217^{mi}, 5 tante volte, quante 423. 9 contiene 217, 5; adunque si ha la seguente proporzione $217,5 : 423,9 :: 9 : x$, e per x si trova 17, 54.

118. Tutta la difficoltà, che si può incontrare ne' problemi non consiste che nella maniera

di stabilire la proporzione; ed ecco delle regole sicure per formarla in tutti i casi.

Tra i quattro termini, che debbono comporre la proporzione vi sono due numeri, che sono di una medesima specie, ed altri due numeri, che sono ancor essi di una stessa specie, ma differente dalla prima. Nell'esempio precedente due termini esprimono dei metri, e gli altri due dei giorni.

Adunque conviene primieramente distinguere i due termini di ciascuna specie; e quando ciò sarà fatto, si avrà necessariamente il quoziente del maggior termine della seconda specie diviso pel minor termine della stessa specie eguale al quoziente del maggior termine della prima specie diviso pel minore di questa specie; il che darà questa proporzione.

Il minor termine della prima specie

sta

al maggior termine di questa specie

come

il minor termine della seconda specie

sta

al maggiore di questa specie.

Nell'esempio precedente questa regola dà immediatamente $217,5 : 423,9 :: 9 : x$; perchè il termine incognito debb'essere maggiore di 9, poichè vi abbisognano più giorni quanto più lavoro vi è a farsi.

119. Se fosse proposto di trovare quanti giorni impiegherebbero 17 Operaj ad eseguire un lavoro, che 15 Operaj, i quali lavorino tanto quanto questi, hanno fatto in 18 giorni, si ve-

drebbe, che abbisogna tanto meno di giorni, quanto più di Operaj vi sono, e reciprocamente. Vi è però ancora in questo caso una proporzione, ma in un ordine inverso; perchè se il numero degli Operaj della seconda compagnia fosse, per esempio, triplo di quello della prima, non bisognerebbe che la terza parte del tempo impiegato da questa. Adunque il primo numero de' giorni dovrebbe contenere il secondo tante volte quante il secondo numero d' operaj contiene il primo.

L' ordine, nel quale queste quantità si contengono, essendo inverso di quello, che gli è stato assegnato dall' enunciato del problema, si dice, che i due numeri d' Operaj sono in *ragione inversa* dei numeri dei giorni. Se si confrontassero i due primi e i due ultimi nell' ordine nel quale si presentano, il rapporto degli uni sarebbe 3, ovvero $\frac{3}{1}$, e quello degli altri sarebbe $\frac{1}{3}$ frazione inversa di $\frac{3}{1}$.

In fatti, si vede bene, che s' inverte un rapporto invertendo la frazione, che lo esprime, poichè in questo modo si fa passare l' antecedente nel posto del conseguente, ed il conseguente nel posto dell' antecedente: $\frac{3}{2}$ o sia $2:3$ è l' inverso di $\frac{2}{3}$, o sia di $3:2$.

La regola del numero precedente semplifica

molto queste considerazioni; perchè prendendo i due numeri d' Operaj per le quantità della prima specie, i due numeri di giorni per quelle della seconda, e ponendo le une, e le altre nel loro ordine di grandezza, si ha questa proporzione

$$15 : 27 :: x : 18,$$

dalla quale si ottiene x uguale a 10.

120. Ecco ancora alcuni esempj ad esercizio del lettore.

1.° Un uomo ha poste 3575 lire in commercio alla ragione del 5 per cento d' interesse all' anno; si domanda quanto debb' essere alla fine di un anno l' interesse del suo capitale?

L' espressione 5 per 100 d' interesse, che si scrive 5 per $\frac{0}{0}$, significa che una somma di 100 lire riporterebbe 5 lire alla fine di un' anno; adunque prendendo i due capitali per le quantità della prima specie, e gli interessi per quelle della seconda, si avrà

$$100 : 3575 :: 5 : x$$

proporzione, che si riduce a $20 : 3575 :: 1 : x$, secondo l' osservazione del numero 115; dividendo ancora per 5 i due termini del primo rapporto si trova finalmente

$$4 : 715 :: 1 : x,$$

ove x è uguale a $\frac{715}{4}$, o a $178^{l.}, 75$.

Si può ancora risolvere questo problema osservando, che 5 è $\frac{1}{20}$ di 100, e che perciò si avrà l'interesse di una somma qualunque a questo frutto prendendo la ventesima parte di questa somma; ora $\frac{1}{20}$ di 3575 è 178, 75, risultato conforme a quello, che si è già trovato qui sopra.

2.° Un Mercante ha promesso di pagare 800 lire in un anno; non potendo aspettare questo termine, la sua cambiale vien passata ad un Banchiere otto mesi prima del tempo del pagamento: si domanda quanto dee dare il Banchiere? Questo togliendo dalla sua cassa una somma, che non dee rientrarvi se non se dopo otto mesi, conviene necessariamente, che esso trovi nel rimborso, che allora gli sarà fatto l'interesse de' suoi fondi.

L'interesse per un anno supponiamo che sia del 6 per 100, l'interesse per 8 mesi ne sarà gli $\frac{8}{12}$, o sia $\frac{2}{3}$; dunque una somma di 100 lire prestata per otto mesi dee produrre 4 lire d'interesse, cioè a dire, che quello, che l'ha presa in imprestito dee rendere 104 lire. La somma anticipata dal Banchiere non essendo che simile ad un prestito si avrà questa proporzione

$$104^{l.} : 100^{l.} :: 800 : x$$

da cui ne verrà $769^{l.}, 23$ pel valore della x,

cioè a dire, per la somma, che dee dare il Banchiere (*).

Regola del tre composta.

121. La regola del tre si applica ancora a' problemi, nei quali il rapporto della quantità cercata alla quantità data della stessa specie dipende da più circostanze, che è d'uopo combinare, e prende allora il nome di *regola del tre composta*. Eccone alcuni esempj.

Io suppongo, che si domandi quanti miriametri percorrerebbe in 17 giorni un viaggiatore viaggiando 10 ore per giorno quando si sa, che esso ha impiegati 29 giorni a percorrere 112 miriametri viaggiando 7 ore al giorno.

Questo problema può risolversi in due maniere: ecco quella, che dà luogo alla regola del tre composta.

Il numero dei miriametri percorsi in ciascun caso dipende da due circostanze, cioè, dal numero de' giorni del cammino del viaggiatore, e

(*) L'operazione posta quì sopra, la quale si appella *regola di sconto* è ridotta d'ordinario a togliere l'interesse della somma intera portata nella cambiale; il che non corrisponde allo stato della questione, e perciò non è esatta. Nel nostro esempio l'interesse essendo del 4 per 100. sarebbe di 32 lire; adunque il banchiere non darebbe che 768 lire.

In questa maniera *lo sconto è preso al di fuori*, e nell'altra *al di dentro* della somma riportata nella cambiale.

dal numero d' ore, che esso cammina in ciascun giorno.

Si può primieramente non considerare quest' ultima circostanza, e supporre, che il numero delle ore rimanga lo stesso tanto nel secondo caso, quanto nel primo. Allora il problema si enuncierebbe in questo modo: *Un Viaggiatore ha impiegati 29 giorni a percorrere 112 miriametri, quanti egli ne percorrerebbe in 17 giorni?* e si avrebbe la proporzione

$$29 : 17 :: 112 : x$$

Il quarto termine sarebbe uguale a 112 moltiplicato per 17, e diviso per 29, o sia $\frac{1904}{29}$ miriametri.

Ora per aver riguardo alla differenza del numero d' ore di viaggio, si direbbe: *Se camminando 7 ore per giorno in un certo numero di giorni, questo viaggiatore ha percorsi* $\frac{1904}{29}$ *miriametri, quanti ne percorrerebbe egli nello stesso tempo, se camminasse 10 ore al giorno?* il che condurrebbe alla proporzione

$$7^{\text{ore}} : 10^{\text{ore}} :: \frac{1904}{29}\ \text{miriametri} : x,$$

di cui il quarto termine darebbe 93, 793 pel numero de' miriametri domandato.

Il problema si risolverebbe ancora, osservando che 29 giorni di cammino a 7 ore per giorno equivalgono a 203 ore di cammino; che 17 giorni a 10 ore per giorno danno 170 ore, e

quindi il problema è ridotto a questa proporzione

$$203^{\text{ore}} : 170^{\text{ore}} :: 112^{\text{mir.}} : x,$$

per cui si trova il cammino, che dee fare il viaggiatore in 170 ore in conseguenza di quello, che ha fatto in 203 ore.

122. Secondariamente, se 9 operaj, lavorando 8 ore per giorno hanno impiegati 24 giorni a scavare una fossa di 65 metri di lunghezza, 13 di larghezza, e 5 di profondità, quanti giorni abbisogneranno a 71 operaj, che abbiano la stessa forza dei primi, e che lavorino 11 ore al giorno per scavare, una fossa di 327 metri di lunghezza, 18 di larghezza, e 7 di profondità?

Ecco un problema assai complicato in apparenza, e che si risolve egualmente con la regola del tre.

Se tutto, eccetto il numero de' giorni, e il numero degli uomini fosse simile ne' due casi enunciati, il problema si ridurrebbe a trovare quanti giorni abbisognerebbero a 71 uomini per fare l' opera, che è stata eseguita da 9 uomini in 24 giorni: adunque si avrebbe (118).

$$9 : 71 :: x : 24;$$

ma quì in vece di calcolare il numero de' giorni, io mi ristringo ad indicare, come nel numero 70, i numeri da moltiplicarsi tra loro, e porre nel denominatore quelli, pe' quali convien dividere: io ho così pel numero x dei giorni

$$\frac{24 \text{ per } 9}{71}$$

Ma i primi operaj non lavorando che 8 ore per giorno, mentre i secondi lavorano per 11 ore, vi abbisognerà a questi un minor numero di giorni: adunque si avrà

$$8 : 11 :: x : \frac{24 \text{ per } 9}{71},$$

da cui si conchiuderà, che in questa circostanza il numero de' giorni è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11}.$$

Questo numero è quello de' giorni necessarj ai 71 operaj, lavorando 11 ore per giorno, per scavare la prima fossa.

Poichè le fosse sono di lunghezze disuguali, bisognerà tanto più di giorni, quanto il secondo fosso sarà più lungo del primo; in questo modo si avrà

$$65 : 327 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11} : x,$$

e il numero de' giorni relativo a questa nuova circostanza sarà

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65}.$$

Ed avendo riguardo alle larghezze, le quali non sono le stesse in ciascuna fossa, si avrà

$$13 : 18 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65} : x,$$

e perciò il numero de' giorni cercato si cangia in

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13}.$$

Finalmente, le profondità essendo differenti, si avrà

$$5 : 7 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13} : x$$

ed il numero di giorni, che ne risulta dal concorso di tutte le circostanze, è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}.$$

Eseguendo le moltiplicazioni, e le divisioni si arriverà al risultato cercato 21 giorni $\frac{1902831}{3299725}$.

123. Questo numero è uguale a 24 moltiplicato per la quantità frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5};$$

ma quest' ultima quantità, che esprime il rapporto del numero dato di giorni al numero di giorni cercato è il prodotto delle seguenti frazioni

$$\frac{9}{71}, \frac{8}{11}, \frac{327}{65}, \frac{18}{13}, \frac{7}{5};$$

ora rimontando alle denominazioni dei numeri dati nell' enunciato del problema, si vede, che

$\frac{9}{71}$ è l'inverso del rapporto dei numeri degli uomini, il quale, preso nell'ordine dell'enunciato sarebbe 9 a 71, poichè vi sono 9 uomini nel primo caso, e 71 nel secondo; $\frac{8}{11}$ è pure l'inverso del rapporto del numero d'ore, che ciascuna banda di operaj dee lavorare;

$$\frac{327}{65},\ \frac{18}{13},\ \text{e}\ \frac{7}{5}$$

sono i rapporti diretti delle lunghezze, delle larghezze, e delle profondità delle due fosse: segue da ciò, che il rapporto del numero de' giorni dato al numero de' giorni cercato è uguale al prodotto di tutti i rapporti diretti, e di tutti i rapporti inversi, che risultano dal paragone dei termini relativi a ciascuna circostanza del problema.

Si risolverà il problema molto semplicemente, valutando primieramente ciascuno di questi rapporti; perchè, moltiplicando tra loro le frazioni, che li esprimono, si formerà quella, che rappresenta il rapporto della quantità cercata alla quantità data della stessa specie.

Quest' ultima frazione, che sarà il prodotto di tutti i rapporti, che entrano nel problema, avrà per numeratore il prodotto di tutti i loro antecedenti, e per denominatore quello di tutti i loro conseguenti. Un rapporto, che in questo modo risulta dalla moltiplicazione di più altri, è detto *rapporto composto*.

Ponendo l'espressione frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$$

sotto la forma di un rapporto, se ne dedurrà col numero 24 dei giorni dati la proporzione

$$71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5$$
$$: 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7 :: 24 : x$$

che è facile ad imitarsi in tutti i casi simili.

Regola di Società.

124. Questa regola ha per oggetto di dividere un numero in parti, che abbiano tra loro de' rapporti dati; si vedrà nell' esempio seguente la sua origine, e d'onde essa abbia preso il suo nome.

Tre mercanti si sono associati per un traffico; il primo ha poste 25000 lire, il secondo 18000, ed il terzo 42000; essi si separano, e vogliono dividere tra loro il guadagno comune, il quale è di 57225 lire; si domanda quanto ciascuno debba avere di sua parte?

Per risolvere questo problema è d'uopo considerare, che il guadagno di ciascuno d'essi debb' essere composto del guadagno totale come il suo fondo è composto della somma de' fondi, o del fondo totale; perchè quegli, che avesse posto da se solo, per esempio, la metà, o la terza parte di questi fondi, è evidente che avrebbe diritto alla metà, o la terza parte del guadagno. Nell' esempio proposto la somma dei fondi formando 85000 lire, i fondi particolari ne saranno rispettivamente i

$$\frac{25000}{85000},\ \frac{18000}{85000},\ \frac{42000}{85000};$$

e moltiplicando per queste frazioni il guadagno totale 57225 lire, si otterrà il guadagno relativo a ciascun fondo. È poi evidente, che la somma delle parti eguaglierà il guadagno totale, poichè la somma delle frazioni poste quì sopra avendo il suo numeratore eguale al suo denominatore è necessariamente l'unità.

Le operazioni indicate quì sopra danno le proporzioni

85000 : 25000 :: 57225 : al guadagno del 1.° merc.;
85000 : 18000 :: 57225 : al guadagno del 2.°,
85000 : 42000 :: 57225 : al guadagno del 3.°,

che possono enunciarsi in questo modo: il fondo totale : un fondo particolare :: il guadagno totale : al guadagno particolare.
Semplificando il primo rapporto di ciascheduna di queste tre proporzioni, si ha

85 : 25 :: 57225 : al guadagno del 1.°, ovvero $16830^{l.}\frac{75}{85}$

85 : 18 :: 57225 : al guadagno del 2.°, ovvero $12118^{l.}\frac{20}{85}$

85 : 42 :: 57225 : al guadagno del 3.°, ovvero $28275^{l.}\frac{75}{85}$.

Se tutti i fondi fossero eguali, l'operazione si ridurrebbe a dividere il guadagno totale pel numero de' fondi; si riduce il problema a questo punto nell' esempio proposto considerando il guadagno totale 85000 lire diviso in 85 fondi

particolari, ovvero *azioni*, di 1000 lire: il guadagno di ciascuno di questi fondi debb' essere evidentemente la 85.^{ma} parte del guadagno totale; e non ci rimane più che a moltiplicare successivamente questa parte per 25, 18, e 42, considerando i fondi $25000^{l.}$, $18000^{l.}$, $42000^{l.}$, come una riunione di 25 azioni, di 18 azioni, e di 42 azioni.

È bene il sapere, che, in termini di commercio, il fondo totale si chiama *capitale*, ed il guadagno da dividersi *dividendo*.

Il problema seguente ha molta analogìa con quello, che si è risoluto.

125. Si vuol dividere una eredità di $67250^{l.}$ fra tre eredi in modo che la parte del secondo sia i $\frac{2}{5}$ di quella del primo, e che la parte del terzo sia i $\frac{7}{8}$ di quella del secondo.

È evidente, che la parte del terzo, paragonata a quella del primo, nè sarà i $\frac{7}{8}$ di $\frac{2}{5}$, o vero i $\frac{14}{40}$, ovvero $\frac{7}{20}$; adunque queste tre parti cercate saranno tra loro nello stesso rapporto dei tre numeri 1, $\frac{2}{5}$, $\frac{7}{20}$. Riducendo questi allo stesso denominatore, si troveranno $\frac{20}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, e si avranno i tre numeri 20, 8, 7, che saranno proporzionali ai primi; ma la loro somma essendo 35, si vede, che se si prendono tre parti, che sieno espresse dalle frazioni $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$; esse saranno nei rapporti richiesti: adunque il problema sarà risoluto prendendo i $\frac{20}{35}$, poi gli $\frac{8}{35}$, poi i $\frac{7}{35}$ di 67250l., il che darà le somme dovute agli eredi secondo la distribuzione prescritta, cioè,

$$38428^{l.}\,\frac{20}{35},\quad 15371^{l.}\,\frac{15}{85},\quad \text{e}\ 13450^{l.}.$$

126. Finalmente sieno due fontane, delle quali la prima versando sola per 2 ore $\frac{1}{2}$, riempie una certa vasca, e di cui la seconda riempie questa stessa vasca versando sola per 3 ore $\frac{3}{4}$, si domanda quanto tempo abbisognerà, perchè sia riempita dalle due fontane quando queste versino nello stesso tempo?

Io cerco qual parte della vasca è riempita dalla prima fontana in un tempo dato, per esempio, in 1 ora, ed osservo, che prendendo per unità la capacità di questa vasca, io non ho che a dividere 1 per 2 $\frac{1}{2}$, o $\frac{5}{2}$, il che dà $\frac{2}{5}$ per la parte cercata. Dividendo pure 1 per 3 $\frac{3}{4}$

ovvero $\frac{15}{4}$, io ottengo $\frac{4}{15}$ per la porzione di vasca, che la seconda fontana riempie in 1 ora; le due fontane versando insieme empiranno i $\frac{2}{5}$ più i $\frac{4}{15}$, ossia i $\frac{10}{15}$ della vasca in 1 ora; adunque dividendo 1, ossia la capacità della vasca per $\frac{10}{15}$, si avrà il numero di ore, che essa impiegherà a riempirsi in questo modo, e si troveranno così $\frac{15}{10}$, ovvero un ora e mezzo.

Gli Autori, che hanno scritto intorno all' Aritmetica hanno in molte maniere moltiplicati, e variati questi problemi, ed hanno ridotto a regole i metodi, che servono a risolverli; ma tutti questi precetti sono per lo meno inutili, perchè un problema di questo genere si risolve sempre facilmente da chi sa sviluppare le conseguenze dell' enunciato; sopratutto quando può ajutarsi col soccorso dell' Algebra; è perciò, che io non mi fermerò di più sopra questo proposito.

127. A somiglianza delle proporzioni, le quali sono composte di quattro numeri, di cui i due primi, si contengono l' uno nell' altro tante volte, quante i due ultimi, si è considerato l' unione di quattro numeri tali come 2, 7, 9, 14 di cui il secondo sorpassa il primo di tanto, quanto il quarto sorpassa il terzo: questi numeri, che possono chiamarsi *equidifferenti*, godono di una pro-

prietà rimarchevole simile a quella della proporzione; perchè la somma dei termini estremi 2, e 14 è uguale a quella dei termini medj 7, e 9 (*).

Per provare generalmente questa proprietà, conviene osservare, che il secondo termine è eguale al primo più la differenza, e che il quarto è uguale al terzo più la differenza; dal che ne segue, che la somma degli estremi, composta del primo, e del quarto termine sarà eguale al primo più il terzo più la differenza. Nel la stessa maniera la somma dei medj, composta del secondo, e del terzo termine sarà uguale al primo più la differenza più il terzo. Queste due somme essendo composte delle stesse parti, sono in conseguenza uguali.

(*) Gli antichi avevano benissimo separato la teoria delle proporzioni dalle operazioni dell' Aritmetica. Euclide dà questa teoria nel quinto libro de' suoi *Elementi;* e siccome egli applica le proporzioni alle linee, è verosimile, che da ciò abbiano preso in appresso il nome di *proporzioni geometriche*, e che si sia dato il nome di *proporzione aritmetica* all' unione de' numeri equidifferenti, de' quali niuno si è occupato che più tardi. Queste denominazioni sono viziosissime; la parola *proporzione* ha nella nostra lingua un senso determinato che non conviene in alcun modo ai numeri equidifferenti. D' altronde la proporzione, che dicesi *geometrica* non è meno *aritmetica*, che quella, che porta esclusivamente questo nome. Lagrange nelle sue lezioni alla scuola normale ha per questo riguardo rettificato il linguaggio, ed io ho seguito il suo esempio.

L' equidifferenza, o l' unione di quattro numeri equidifferenti, o finalmente *la proporzione aritmetica* si scrive in questa maniera 2. 7 : 9. 14.

Io ho supposto, che il secondo, ed il quarto termine fossero maggiori del primo, e del terzo; potrebbe accadere il contrario, come nei quattro numeri 8, 5, 15, 12: allora il secondo termine sarà eguale al primo meno la differenza, ed il quarto sarà uguale al terzo meno la differenza. Cangiando la parola *più* in *meno* nel ragionamento precedente, si proverà ancora, che nel caso presente la somma degli estremi è eguale a quella de' medj.

Io non porterò più lungi questa teoria dei numeri equidifferenti, poichè ora non può essere di alcun uso.

Regola d' alligazione.

128. Io non tralascierò la *regola d' alligazione*, il di cui fine è di trovare il valore medio di più cose della stessa specie, ma di prezzi differenti: gli esempj seguenti la faranno abbastanza conoscere.

Un mercante ha comprate più specie di vino, cioè,

130	bottiglie	a 10	decimi l' una,
75		a 15	
231		a 12	
27		a 20;	

egli di poi le mescola insieme: si domanda quanto costa una bottiglia del miscuglio? Egli è facile il vedere, che non si ha che a calcolare ciò, che costa tutto questo mescuglio, e quante bottiglie esso forma, e di poi dividere il primo di questi risultati pel secondo, a fine di avere il prezzo cercato.

Ora le 130 bottiglie	a 10 decimi	fanno	1300 decimi
75	a 15	fanno	1125
231	a 12	fanno	2772
27	a 20	fanno	540

dunque 463 bottiglie costano 5737 decimi

Dividendo 5237 per 463, il quoziente 12,39 è il prezzo della bottiglia del mescuglio.

129. Si fa uso ancora della regola precedente per prendere una media fra diversi risultati dati dall' esperienza, o dall' osservazione, e che non s' accordano tra loro. Se, per esempio, si trattasse di conoscere esattamente la distanza di due punti assai lontani, e che questa si misurasse, per quanta cura si avesse in questa operazione, vi sarebbe sempre un poco d' incertezza nel risultato a cagione degli errori, che necessariamente si commettono nella maniera di porre le misure le une dopo le altre.

Io adunque suppongo, che si sia ripetuta più volte questa operazione per verificarla, e che due volte si sia trovata di 3794^{mi}, 48, che tre altre misure abbian dato 3795^{mi}, 27, che si abbia in fine un risultato di 3893^{mi}, 115: questi diversi numeri non essendo punto gli stessi è evidente, che vi è errore in qualcuno di essi, e probabilmente in tutti; e per diminuirlo, ecco come si ragiona. Se si fosse ottenuto ciascuna volta la vera misura la somma dei risultati sarebbe uguale a sei volte questa misura, ed è evidente che avrebbe luogo ancora

la stessa cosa, se i risultati ottenuti si discostassero dal vero valore gli uni per difetto, gli altri per eccesso in maniera, che l' aumento prodotto per l' addizione degli eccessi compensasse ciò, che manca ai risultati minori del vero valore: adunque in questo caso si perverrebbe alla vera misura dividendo la somma dei risultati pel loro numero.

Questo caso è troppo particolare, per sperare, che esso s' incontri frequentemente; ma accade quasi sempre, che gli errori in un senso distruggono una parte di quelli, che sono nell' altro, e che ciò, che rimane trovandosi ripartito egualmente sopra ciascuno dei risultati è tanto più diminuito, quando più è maggiore il numero dei risultati.

Secondo queste considerazioni si opererà come segue:

Prenderemo	2 volte 3794, 48,	ovvero	7588, 96
	3 volte 3795, 27,	ovvero	11385, 82
	1 volta 3793, 115,	ovvero	3793, 115

i 6 risultati somministrano in tutto 22767, 885.

Dividendo 22767, 885 per 6 si troverà, che il valor medio della distanza richiesta è 3794^{mi}, 647.

Bisogna poi aver ricorso al calcolo delle probabilità a fine di discutere, ed apprezzare i vantaggi, e gli inconvenienti di questo metodo; e questo soggetto ha occupati i più grandi geometri del nostro secolo.

Del paragone delle diverse misure dello stesso genere.

130. L'uniformità delle misure era da lungo tempo l'oggetto de' voti di tutti i dotti, quando si stabilì in Francia il sistema decimale, che io ho già esposto (100); ma questo sistema non essendo ancora adottato dalle altre nazioni, e succedendo ad un antico sistema, col quale si sono espressi molti risultati numerici importanti, si ha spesso bisogno di confrontare con le misure decimali tanto le antiche misure Francesi, quanto le altre misure.

Io perciò passo ad indicare i mezzi di fare questo confronto.

I dati necessarj sono i rapporti delle misure da confrontarsi. Questi rapporti si ottengono esprimendo l'una delle misure per l'altra.

131. Le misure lineari più in uso in Francia erano la *tesa*, e l'*auna*.

La tesa si divide	in	6 piedi;
Il piede	in	12 pollici;
Il pollice	in	12 linee;
La linea	in	12 punti.

L'auna (di Parigi) contiene 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{5}{6}$. Io confronto primieramente la tesa al metro.

Il metro determinato definitivamente è stato trovato di 3 piedi, o pollici, 11 linee, e 296 millesimi di linea.

Questo numero, essendo ridotto in frazione

della tesa, dà il rapporto del metro alla tesa.

Per fare questa riduzione conviene primieramente convertire i piedi in linee, il che si farà osservando, che il piede valendo 12 pollici, 3 piedi faranno 36 pollici; e siccome il pollice vale 12 linee, si moltiplicherà 36 per 12, il che darà 432 pel valore di 3 piedi convertiti in linee, al che conviene aggiungere le 11 linee, e 296 millesimi di linea, e ne verrà $443^{\text{lin.}},296$.

D'altra parte la tesa composta di 6 piedi, contiene 6 volte 12 pollici, o 72 pollici, e 72 volte 12 linee, o 864 linee. La tesa dunque contenendo 864 linee, mentre che il metro ne contiene solamente 443,296, il rapporto del metro alla tesa è quello dei numeri 443, 296, e 864, ovvero dei numeri 443296, e 864000, mille volte maggiori dei precedenti. Adunque la tesa è $\frac{864000}{443296}$ di metro; frazione, che si riduce a $\frac{27000}{13853}$, dividendo i suoi due termini per 32.

132. Segue da ciò, e dal numero 75, che per convertire un numero qualunque di tese in metri, convien moltiplicarlo per la frazione $\frac{27000}{13853}$.

Per esempio, si domandi quanti metri sono 43 tese; il risultato è $\frac{1161000}{13853}$, estraendo gli interi da questa frazione, ne viene $83\,\frac{11201}{13853}$, e riducendo in decimali, la frazione che accompagna l'intero, si ha 83, 80856.

Poichè per gl' usi ordinarj abbisogna solo una riduzione prossima, è commodo il convertire immediatamente in decimali la frazione $\frac{27000}{13853}$, il che dà pel valore della tesa $1^{m},94904$; e moltiplicando questo numero per quello delle tese proposte, sarà subito fatta la loro conversione in metri.

133. I piedi, i pollici, le linee, di cui è noto il rapporto con la tesa, si convertono facilmente in parti decimali di metro.

1.° Il piede essendo la sesta parte della tesa, valerà la sesta parte della frazione $\frac{27000}{13853}$, ovvero ai $\frac{4500}{13853}$ di metro, ed in decimali $0^{m},32484$, ovvero $3^{dec.},2484$.

2.° Il pollice essendo la dodicesima parte del piede, valerà la dodicesima parte della frazione $\frac{4500}{13853}$, ovvero $\frac{375}{13853}$ di metro, ed in decimali $0^{m}.02707$, ovvero $2^{cent.},707$.

3.° La linea essendo la dodicesima parte del pollice valerà la dodicesima parte della frazione $\frac{375}{13853}$, ovvero $\frac{125}{55412}$ di metro, ed in decimali $0^{m},00226$, ovvero $2^{mil.},26$.

Si otterrebbe nella stessa maniera il valore del punto.

134. Ora è facilissimo il ridurre in metri, ed

in parti decimali di metro un numero qualunque di tese, piedi, e pollici. Sieno, per esempio, 13 tese, 5 piedi, 3 pollici, e 8 linee.

Le	13	tese danno	$25^{mi},33752$
I	5	piedi	1 ,62420
I	3	pollici	0 ,08121
Le	8	linee	0 ,01808
Totale		....	27 ,06101

135. L'auna di Parigi, contenendo 3 piedi, 7 pollici, 10 linee, e $\frac{5}{6}$, ridotta in linee, si riduce alla frazione $\frac{3161}{5184}$ della tesa; e la tesa essendo $\frac{27000}{13853}$ di metro, l'auna sarà li $\frac{3161}{5184}$ dei $\frac{27000}{13853}$ di metro; il che si riduce in decimali ad $1^{m},18845$.

136 Il peso si misurava una volta in *libbre marchi*, *oncie*, *grossi*, *grani*, e *frazioni di grani*.

La libbra è composta	di	2 marchi
Il marco	di	8 oncie
L' oncia	di	8 grossi
Il grosso	di	72 grani

Per mezzo di esperienze delicatissime si è trovato, che il kilogrammo pesava 18827 grani. Convertendo questo numero in frazioni di libbra, come ho fatto riguardo a quello, che esprime il metro pel piede, si avrà il rapporto della libbra al kilogrammo, e si deduranno da ciò i rapporti delle suddivisioni della lira colle parti decimali del grammo.

Si troverà 1.°, che la libbra è $\frac{9216}{18827}$ del kilogrammo, ovvero $0^{\text{kil.}}.48951$ in decimali;

2.° Che l' oncia, ovvero la sedicesima parte della libbra vale $\frac{576}{18827}$ del kilogrammo, ovvero $0^{\text{kil.}},03059$ in decimali;

3.° Che il grosso, o l' ottava parte dell' oncia vale $\frac{72}{18827}$ del kilogrammo, ovvero $0^{\text{kil.}},00382$ in decimali;

4.° Che il grano, ovvero la settantaduesima parte del grosso vale $\frac{1}{18827}$ del kilogrammo, ovvero $0^{\text{kil.}},00005$ in decimali.

Con questi risultati è facilissimo il convertire in misure decimali un peso qualunque espresso nelle antiche misure. Sieno, per esempio, 23 libbre, 4 oncie, 5 grossi, e 31 grani.

Si ha per	23 libbre	$11^{\text{kil.}}$	,25873
per	4 oncie	0	,12236
per	5 grossi	0	,01910
per	71 grani	0	,00165
	Totale . . .	$11^{\text{kil.}}$	,40184.

137. L' unità monetaria dell' antico sistema era la *lira tornese*. Il valore del franco, dato dal

pezzo di 5 franchi, essendo stato paragonato a quello della lira tornese data dallo scudo di 6 lire, ne è risultato, che il valore del franco sta a quello della lira tornese, come 81 ad 80; Adunque per convertire una somma di lire tornesi in franchi converrà prenderne gli $\frac{80}{81}$, ovvero moltiplicarla per 0,98765.

Reciprocamente per valutare una somma di franchi in lire tornesi, convien prendere gli $\frac{81}{80}$, ovvero moltiplicarla per 1,0125.

Se la somma da ridursi fosse 100 franchi, ne verrebbe 101, 25, ovvero $101^{\text{l.}}\frac{1}{4}$.

La lira tornese si divide in 20 soldi, ciascun soldo in 12 danari. Nell' uso ordinario si confonde la *lira* col franco. Per questa ipotesi, che non è che prossima, ciascun soldo vale $\frac{1}{2}$ decimo, ovvero 0,05; ed un denaro essendo la dodicesima parte del soldo vale $\frac{1}{12}$ di 0,05, ovvero 0,0041666 etc.

Per facilitare le riduzioni delle antiche misure alle nuove, si sono riuniti in tavole poste alla fine di questo Trattato i risultati ottenuti nel numero 133, e nel precedente, con tutti quelli, che si troverebbero paragonando nello stesso modo le misure corrispondenti dell'antico sistema con quelle del sistema decimale. Vi si sono aggiunti pure i rapporti delle principali misure, e monete straniere con quelle dello stesso sistema.

138. Nella stessa maniera, che pel rapporto dell' auna alla tesa, io ho paragonato questa misura al metro, così io avrei potuto paragonare col metro tutte le misure straniere, il cui rapporto con le nostre misure antiche è noto. L'esempio seguente, benchè fittizio, basterà per mettere in stato di applicare il metodo a tutti i casi, che ponno presentarsi, e darà una idea della *regola congiunta*, che si pratica spesso nell' operazioni di *cambio* delle monete.

Suppongo, che 3 *lire* di Francia valgano 32 *denari sterlini* d'Inghilterra; che 240 denari sterlini valgono 408 denari di grosso d' Olanda; che 50 *denari di grosso* d' Olanda valgono 190 *maravedis* di Spagna; si domanda a quanti maravedis equivarranno 90 lire di Francia?

1.° Poichè 3 lire di Francia fanno 32 denari sterlini, la lira è $\frac{32}{3}$ del denaro sterlino.

2.° Poichè 240 danari sterlini equivalgono a 408 denari di grosso, il denaro sterlino è i $\frac{408}{240}$ di denaro di grosso.

3.° Poichè 50 denari di grosso equivalgono a 190 maravedis, il denaro di grosso è i $\frac{190}{50}$ di maravedis.

Adunque si convertirà la lira di Francia in maravedis prendendo $\frac{32}{3}$ dei $\frac{408}{240}$ dei $\frac{190}{50}$; il che

darà

$$\frac{32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}$$

pel rapporto della lira al maravedis; e moltiplicando questo rapporto per 90, avremo il valore di 90 lire di Francia, espresse in maravedis, cioè a dire,

$$\frac{90 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{\text{per } 3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}.$$

Questo numero frazionario può avere un espressione assai più semplice, perchè il numeratore, ed il denominatore hanno de' fattori comuni. Nel primo 90. e 190 sono divisibili per 10; accade lo stesso di 240, e di 50 nel secondo, ed eseguendo la divisione, ne verrà

$$\frac{9 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{\text{per } 3 \text{ per } 24 \text{ per } 5}.$$

Ma 32, che è nel numeratore essendo divisibile per 8, come ancora lo è 24 nel denominatore, si avrà

$$\frac{9 \text{ per } 4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{\text{per } 3 \text{ per } 3 \text{ per } 5}$$

e siccome 3 per 3 fa 9, si potrà togliere questo fattore dal numeratore, e dal denominatore ad un tempo, e ne risulterà

$$\frac{4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{5},$$

ovvero 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis per 90 lire di Francia.

Del calcolo de' numeri complessi.

139. I numeri, che contengono ad un tempo delle *tese*, *piedi*, *pollici*, *linee*, *punti*; ovvero *libre*, *oncie*, *grossi*, e *grani*; delle *lire*, *soldi*, e *danari* essendo riferite a delle unità differenti, e le loro espressioni essendo composte di più parti, sono stati denominati *numeri complessi*; quelli, che non ne contengono che una sola, sono chiamati *incomplessi* (*). Si eseguiscono immediatamente sopra i numeri complessi le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica con dei metodi, che io quì riporterò, per mettere in istato di seguire gli antichi calcoli, sebbene sia a desiderarsi, che si rinunci affatto a delle operazioni, alle quali si sono sostituiti tanto felicemente i decimali.

Ciò, che io dirò sopra i numeri complessi usati in Francia, si applicherà facilmente a tutti quelli, che ponno risultare dalle misure straniere, e loro suddivisioni.

(*) I numeri accompagnati da frazioni decimali non debbono avere questa denominazione; perchè si può a prima giunta convertirli in una sola specie di unità. Per esempio, $34^{mi}, 95$ si riducono a 3495 centimetri.

Dell' addizione de' numeri complessi.

140. L' addizione dei numeri complessi si appoggia sopra gli stessi principj che quella dei numeri incomplessi: si tratta sempre di riunire tra loro le parti dello stesso valore, e quando se ne trovano tante da formare una, o più parti di un' ordine superiore, si ritengono quest' ultime per comprenderle nella somma di quelle, che sono scritte nei numeri proposti, come nell' addizione semplice si portano le diecine di una colonna sopra la seguente a sinistra. Adunque i numeri complessi da sommarsi debbonsi disporre in modo, che le loro unità, o parti dello stesso valore, sieno in una stessa colonna, e fare separatamente la somma di ciascuna di queste colonne, ricordandosi quante unità, o parti di ciascun ordine abbisognano per comporre quelle dell' ordine immediatamente più grande.

Ecco un esempio sopra le lire, soldi, e danari.

$984^{l.}$	$12^{s.}$	$8^{d.}$
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5

Sommando primieramente tra loro i danari, perchè queste sono le parti di minor valore, e riunendo ad un tempo le unità, e le diecine, di questi numeri, si trovano 29 danari; ma siccome 12 fanno un soldo, questa somma si riduce a 2 soldi, e 5 denari: adunque non si scrivono che i 5 danari, e si ritengono i soldi per portarli alla loro colonna.

Quì si sommano separatamente le unità, e le diecine. Le prime danno 22, aggiungendovi i 2 soldi ritenuti sopra i danari; non si scrivono che le due unità, e si ritengono le diecine per la colonna seguente, la di cui somma s' innalza per questo mezzo a 5 diecine; ma siccome la lira, composta di 20 soldi, contiene 2 diecine, si ottiene il numero delle lire risultante dai soldi, dividendo quello delle diecine dei soldi per 2. Si ha 2 per quoziente, ed 1 di resto, che si scrive sotto la colonna, in cui si opera, mentre che si ritengono le lire per la seguente colonna a sinistra. A partire da quest' ultima l' operazione si eseguisce come quella dei numeri incomplessi, e si trovano $2756^{l.}$ $12^{s.}$ $5^{d.}$

141. Io non ridurrò in regola questo metodo, che è facilissimo l' addattare a qualunque suddivisione dell' unità, e per dare occasione di eseguirla, io porrò quì sotto un esempio in tese, piedi, pollici, linee, e punti, il quale chiunque potrà verificare da se stesso, ricordandosi, che 12 punti fanno una linea, 12 linee un pollice, 12 pollici un piede, 6 piedi 1 tesa

	34^{tese}	5^{piedi}	$6^{pollici}$	7^{linee}	8^{punti}
	16	3	2	5	6
	127	4	10	11	9
Somma	179	1	8	9	11

Della sottrazione dei numeri complessi.

142. Questa sottrazione si eseguisce nella stessa maniera che per i numeri incomplessi, cangiando solamente ciò, che si rapporta alla subordinazione dell' unità, quando si è astretti di prendere in prestito sulle parti di maggior valore per rendere possibili le sottrazioni particolari nel caso, che il numero inferiore sia maggiore del numero superiore.

Sieno, per esempio

	$795^{l.}$	$3^{s.}$	$0^{d.}$
	684	17	4
Differenza	110	5	8.

In questa sottrazione conviene primieramente prendere ad imprestito 1 sopra la colonna dei soldi, ovvero 12 denari per toglierne i denari del numero inferiore, e si ha per resto 8 danari. Per la colonna de' soldi, nella quale non ve ne rimangono che due nella colonna superiore, convien prendere ad imprestito 1 lira, o 20 soldi dalla colonna delle lire per ottenere 22 soldi, dai quali togliendone 17, ne rimangono 5; di poi si passerà alla colonna delle lire, ove si conterà la cifra superiore per un unità di meno, e si terminerà l' operazione seguendo il metodo relativo ai numeri incomplessi.

L' esempio quì sottoposto, preso nelle misure di peso, completamente chiarirà questo metodo

	19^{libbre}	0^{marchi}	4^{oncie}	5^{grossi}	37^{grani}
	4	1	3	6	49
Differenza	14	1	0	6	60

Per fare le sottrazioni nella colonna dei grani, conviene prendere ad imprestito un'unità in quella dei grossi, e ricordarsi, che questa unità vale 72 grani, aggiungerli col pensiero ai 37, che sono scritti nel numero superiore, il che fa 109 grani, dai quali togliendone 49, ne rimangono 60. Si continua la sottrazione nelle altre colonne computando 1 oncia per 8 grossi, 1 marco per 8 oncie, 1 libbra per 2 marchi.

Io farò osservare in questa occasione come la sconnessione, che si trova nelle suddivisioni delle diverse unità dee recare imbarazzo nelle operazioni de'numeri complessi, e particolarmente come era poco comoda la divisione dei grossi in 72 grani, la quale conduceva sempre a delle operazioni particolari assai complicate.

Io darò ancora un esempio in tese, e suddivisioni della tesa tanto per esercitare il lettore sopra questa specie di misure, quanto per mostrare, come si debba contenere, quando manca nel numero maggiore qualcuna delle parti contenute nell' altro.

	16^{tese}	0^{piedi}	0^{pollici}	0^{linee}	0^{punti}
	4	3	6	8	5
Differenza	11	2	5	3	7

Per fare la sottrazione nella colonna dei pun-

ti non si può prendere ad imprestito che sopra quello delle tese, e ciò si fa decomponendo 1 tesa in 5 piedi più 11 pollici più 11 linee più 12 punti.

S'immaginano questi numeri di piedi, pollici, linee, e punti rispettivamente posti nella loro colonna per sottrarne successivamente ciascuno de'numeri inferiori corrispondenti, il che dà i resti scritti al di sotto. Si passa di poi alla colonna delle tese contando per 1 di meno la cifra delle unità.

Della prova dell' addizione, e della sottrazione dei numeri complessi.

143. La prova dell' addizione si fa ancora con gli stessi principj usati pe' numeri incomplessi; conviene solamente, passando alle suddivisioni dell' unità sostituire al rapporto decimale il valore di ciascheduna parte riguardo a quella, che la segue a destra.

$984^{\text{l.}}$	$12^{\text{s.}}$	$8^{\text{d.}}$
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
1122	22	0

Si opera sopra le lire seguendo la regola del numero 19, poi si convertono le 2 lire in diecine di soldi, il che dà 4 di queste diecine, le quali unite a quella, che è scritta nella colonna formano il numero 5, dal quale si tolgono le 3 unità di questa colonna. Si pone al di sotto il resto 2, che si conta per diecine rispetto alle 2 unità della colonna seguente. Restano ancora 2 soldi, i quali debbonsi convertire in danari; si aggiungono i 24 danari, che ne risultano con i 5, che vi sono scritti, e si ha un totale di 29, che convien ritrovare coll' addizione dei denari di tutti i numeri, poichè queste sono le parti del minor valore. Questo è ciò, che in fatti accade, e ciò, che prova, che l' operazione è esatta.

Io non mi fermerò ad esporre la prova della sottrazione, poichè essa si fa col mezzo di una addizione (20); e si è veduto precedentemente come si eseguisca quella de' numeri complessi.

Della moltiplicazione de' numeri complessi.

144. La moltiplicazione de' numeri complessi non presenta alcuna difficoltà quando si conosce bene la teoria delle frazioni: perchè primieramente si possono cangiare il moltiplicando, ed il moltiplicatore in numeri frazionarii per mezzo de' rapporti di ciascuna suddivisione dell' unità con quella, che la precede, come si è fatto nei numeri 131, e 136 pei valori del metro rispetto alla tesa, e del kiliogrammo rispetto alla libbra.

Se, per esempio, si avessero $15^{l.}\ 12^{s.}\ 4^{d.}$; si ridurrebbero primieramente le lire in soldi, moltiplicandole per 20, e si avrebbe 300 da ag-

giungersi ai 12, che sono scritti, il che cangierebbe il numero proposto in $312^{s.}\ 4^{d.}$; si moltiplicherebbero ancora i soldi per 12 a fine di convertirli in danari: si otterrebbe 3744. ed aggiungendovi i 4 danari scritti, ne risulterebbero 3748 danari. Ciò fatto, si osserverebbe. che la lira contenendo 20 soldi, il soldo 12 danari, la lira contiene 20 volte 12, o 240 danari; che così 1 danaro è $\frac{1}{240}$ della lira, d' onde ne risulta, che 3748 danari fanno $\frac{3748}{240}$ della lira.

Se convenisse moltiplicare questo numero per 7 tese, 4 piedi, si cangierebbero nello stesso modo 7 tese, e 4 piedi in 46 piedi, o $\frac{46}{6}$ di tesa; si farebbe, secondo la regola del n.° 76, il prodotto delle frazioni $\frac{3748}{240}$, e $\frac{46}{6}$, il che darebbe $\frac{172408}{1440}$; ed osservando che l' unità del prodotto debb' essere della stessa specie di quella del moltiplicando (102), si valuterebbe nel modo seguente, questa frazione in lire tornesi, e sue suddivisioni.

$$
\begin{array}{r|l}
172408 & 1440 \\
2840 & \overline{\phantom{119^{l.}\ 14^{s.}\ 6^{d.}\tfrac{2}{3}}} \\
14008 & 119^{l.}\ 14^{s.}\ 6^{d.}\tfrac{2}{3} \\
1048 & \\
20 & \\
\hline
20960^{s.} & \\
6560 & \\
800 & \\
12 & \\
\hline
9600^{d.} & \\
960 &
\end{array}
$$

La parte intera del quoziente della divisione del numeratore pel denominatore darebbe primieramente le lire tornesi, poi si moltiplicherebbe il resto 1048 per 20 a fine di convertirlo in soldi; si dividerebbe il prodotto 20960 pel divisore 1440, ed il quoziente 14 sarebbe il numero dei soldi, che dee unirsi a quello delle lire già trovate. Il secondo resto 800 si convertirebbe di poi in denari, moltiplicandolo per 12; finalmente si dividerebbe il prodotto 9600 pel divisore 1440, e si avrebbero 6 denari da aggiungersi alle due prime parti del quoziente, e poi la frazione $\frac{960}{1440}$, la quale si riduce a $\frac{2}{3}$.

Quest' ultima operazione, che può applicarsi a qualsivoglia specie di misura, dipende da ciò, che ogni numero frazionario può considerarsi come l' indicazione di una divisione, che si ren-

de possibile, convertendo il numeratore in parti di più in più piccole, come si è fatto rispetto a decimali nel n.° 95.

145. I metodi, che si seguono d' ordinario nella moltiplicazione dei numeri complessi, probabilmente immaginati da uomini, che non se ne occupavano, che per giungere al risultato, sembrano a prima vista meno semplici, e meno generali di quello del numero precedente, ma essi sono forse più commodi per la pratica; essi d' altronde presentano quel carattere ingegnoso, che si trova in tutte le invenzioni suggerite dal bisogno, alle quali si perviene, come per istinto, senza conoscere ben chiaramente l' estensione, e l' ordine del soggetto, che sviluppano poi quelli, che si sono dedicati solamente alla meditazione.

Io seguirò i passi, che i primi Aritmetici hanno fatto, cominciando con degli esempj.

Si debba moltiplicare $25^{l.}\ 12^{s.}$

$$
\begin{array}{rrr}
 & \text{per} & 16 \\
\hline
 & & 150 \\
 & & 25 \\
\text{prodotto per 10 soldi} & & 8 \\
\text{per 2 soldi} & & 1\ \ 12 \\
\hline
\text{Prodotto totale} \ldots & & 409\ \ 12.
\end{array}
$$

Quì il moltiplicando solamente è complesso; si tratta di ripeterlo 16 volte, il che si eseguisce ordinariamente sopra la parte intera; poi si osserva, che se si aggiungesse 1 al moltiplicando 25, il prodotto sarebbe aumentato precisamente del moltiplicatore 16, e che esso lo sarebbe solo della metà, se al moltiplicando non si fosse aggiunta, che la metà di 1 lira. Dopo ciò, se vi fossero 10 soldi presso le lire del moltiplicando, converrebbe scrivere nel prodotto otto unità, metà del moltiplicatore; ma in vece di 10 soldi ve ne sono 12; adunque restano 2 soldi de' quali conviene tener conto: ora questi 2 soldi essendo la 5.ª parte dei 10, non debbono aumentare il prodotto, che della 5.ª parte di ciò, che hanno dato i 10 soldi, si prenderà perciò la 5.ª parte delle 8 lire trovate precedentemente, per scriverla sotto il prodotto totale richiesto, cioè, 409 lire, e 12 soldi.

146. Decomponendo nella stessa maniera, in parti, che sieno contenute esattamente nell'unità del moltiplicando, o, le une nelle altre, le suddivisioni, che sono unite alle unità del maggior valore, o le *unità principali* del moltiplicando, non si ha più, che a prendere delle parti simili sopra il moltiplicatore, o sopra i prodotti già formati.

Queste parti si chiamano *aliquote*; se ne comprenderà bene l'uso coll'esempio seguente.

	$34^{l.}$	$19^{s.}$	$3^{d.}$ $\frac{1}{3}$	
	18			
	272			
	34			
Per 10 soldi . . .	9			
Per 5 soldi . . .	4	10		
Per 4 soldi . . .	3	12		
Per 1 soldo				$0^{l.}$ $18^{s.}$
Per 3 denari		4	6	
Per 1 denaro				$0^{l.}$ $1^{s.}$ $6^{d.}$
Per $\frac{1}{3}$ di denaro		0	6	
Totale	$629^{l.}$	$7^{s.}$	$0^{d.}$	

Dopo aver formati i prodotti delle unità principali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, riguardo alle suddivisioni del moltiplicando, si opera come segue.

Si decompongono 19 soldi in 10 soldi, più 5 soldi, più 4 soldi,

Per i 10 soldi, si prende la metà del moltiplicatore,

Per 5 soldi, si prende la metà del prodotto precedente,

Per 4 soldi, si prende la 5ª parte del moltiplicatore.

Siccome poi da questi conviene passare ai 3 danari, i quali non sono, che la quarta parte di un soldo, e perciò la 16ª di 4 soldi, potrebbe riescire un po' difficile il prendere a vista la 16ª parte del prodotto di 4 soldi.

Per evitare un tale imbarazzo, si prende primieramente il quarto, il che forma il prodotto, che darebbe 1 soldo, e poi si prende il quarto di questo: si ha così il prodotto relativo a 3 denari, ma si debbono scrivere a parte (*) le cifre del prodotto precedente, il quale non avendo servito che a formare quest' ultimo non dee comporre il prodotto totale (**). Si ottiene nello stesso modo il prodotto relativo ad $\frac{1}{3}$ di denaro, formando primieramente quello di 1 denaro per mezzo di quello di 3 denari, e si scrive a parte il prodotto di 1 denaro. Si riuniscono di poi tutti gli altri prodotti particolari, e la somma è il prodotto richiesto.

Ecco ancora un' esempio sopra la tesa, e sue suddivisioni.

(*) L'autore pone le $0^{l.}\ 18^{s.}$, e le $0^{l.}\ 1^{s.}\ 6^{d.}$ sotto le quantità della stessa specie ne' prodotti particolari, e siccome esse non debbono far parte del prodotto totale le ha cancellate con una linea trasversale, ma perchè ciò potrebbe portare qualche confusione, ed equivoco nel calcolo, ho creduto bene di seguire il costume comune di porre questi numeri *sussidiarii* alla destra de' prodotti particolari. *Nota del Traduttore*.

(**) Gli Aritmetici chiamano *prodotti falsi*, quelli che essi cercano per trovarne degli altri, denominazione certamente molto cattiva.

	6^{tese}	3^{piedi}	$5^{pollici}$	2^{linee}	
	5				
	30				
Per 3 piedi . . .	2	3			
Per 1 piede					$0^{tese}\ 5^{piedi}$
Per 3 pollici		1	3		
Per 1 pollice		0	5		
Per 1 pollice		0	5		
Per 2 linee		0	0	10	
Totale . . .	32	5	1	10	

Si è formato il prodotto relativo ad un piede per facilitare il passaggio ai pollici, e si è scritto due volte il prodotto di 1 pollice, invece di formare ad un tempo il prodotto di 2 pollici, prendendo la 6ª parte di quello di 1 piede, perchè si aveva bisogno del prodotto di un pollice per ottenere commodamente quello di 2 linee.

147. Quando solamente il moltiplicatore è complesso, si decompongono, come precedentemente, in parti aliquote dell' unità principale, le suddivisioni, che esso contiene, e si eseguiscono sopra il moltiplicando le operazioni, che esse indicano. In questo caso è importante il distinguere dallo stato del problema, quale dei due numeri proposti debb' esser preso per moltiplicando, perchè determinandone la natura delle unità del prodotto cercato, esso fissa i rapporti delle suddivisioni alle quali convien discendere, prendendo i prodotti relativi alle parti

aliquote, e sopra le quali ci potressimo molto ingannare, poichè le suddivisioni del moltiplicando, e del moltiplicatore seguono leggi differenti, quando questi due numeri non sono della stessa specie. Sia, per esempio,

	$793^{l.}$			
	9^{marchi}	3^{oncie}	5^{grossi}	$7^{\text{grani}}\ \frac{1}{2}$
	$7137^{l.}$	s.	d.	
Per 2 oncie.	198	5		
Per 1	99	2	6	
Per 4 grossi.	49	11	3	
Per 1	12	7	$9\ \frac{3}{4}$	
Per 12 grani	$2^{l.}$	$1^{s.}$	$3^{d.}\ \frac{5}{8}$	
Per 6	1	0	$7\ \frac{13}{16}$	
Per 1	0	3	$5\ \frac{29}{96}$	
Per $\frac{1}{2}$	0	1	$8\ \frac{125}{192}$	
Totale . . .	7497	12	$4\ \frac{99}{192}$	

In quest' esempio si è preso

per 2 oncie, $\frac{1}{4}$ del moltiplicando;
per 1 oncia, $\frac{1}{2}$ del prodotto precedente;
per 4 grossi, $\frac{1}{2}$ del prodotto di un oncia;
per 1 grosso, $\frac{1}{4}$ del prodotto precedente.

Ma siccome il grosso contiene 72 grani, si è primieramente preso il sesto del prodotto re-

lativo ad 1 grosso, a fine di avere il prodotto relativo a 12 grani, e si è preso di poi

per 6 grani, $\frac{1}{2}$ del prodotto di 12;
per 1 grano, $\frac{1}{6}$ del prodotto precedente
per $\frac{1}{2}$ grano, $\frac{1}{2}$ del prodotto precedente.

Questi diversi prodotti sono accompagnati da frazioni, che conviene sommare insieme; il che si eseguisce facilmente col secondo metodo del numero 69, perchè il maggiore dei denominatori contenendo tutti gli altri, si possono convertire tutte le frazioni della specie dell' ultima, si trova per loro somma $\frac{483}{192}$, ovvero $2\ \frac{99}{192}$: aggiungendo questi denari a quelli già scritti, e continuando l' addizione delle altre colonne, si ha il prodotto totale.

148. Finalmente quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono ambidue complessi, dopo aver fatti i prodotti delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, si prendono primieramente, solo sopra le unità principali del moltiplicatore, le parti aliquote, nelle quali si decompongono le suddivisioni del moltiplicando; poi si decompongono le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote dell' unità principale, e si eseguiscono sopra tutto il moltiplicando le operazioni, che esse indicano.

Per conoscere l' esatezza di questo metodo, basta l' osservare, che il prodotto cercato dee contenere tre parti, e sono, il prodotto delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore: quello delle suddivisioni del moltiplicando per le unità principali del moltiplicatore, e finalmente il prodotto di tutto il moltiplicando per le suddivisioni del moltiplicatore.

In fatti, si può ridurre questa operazione alla moltiplicazione di due fattori composti di un intero unito ad una frazione; e se si avesse, per esempio, $8\frac{2}{3}$ da moltiplicare per $6\frac{5}{7}$, il prodotto si comporrebbe evidentemente di 8, e di $\frac{2}{3}$ ripetuto ciascuno 6 volte, più $\frac{5}{7}$ di volta.

149. L'esempio seguente renderà chiari questi principj, e ne farà conoscere l'applicazione.

	$84^{l.}$	$6^{s.}$	$3^{d.}\ \frac{1}{3}$	
	15^{tese}	4^{piedi}	$6^{pol.}$	$8^{lin.}$
	420^{lire}	soldi	denari	
	84			
per 5 soldi .	3	15		
per 1	0	15		
per 3 denari .	0	3	9	
per 1				$0^{l.}\ 1^{s.}\ 3^{d.}$
per 3 piedi .	42	3	$1\ \frac{2}{3}$	
per 1	14	1	$0\ \frac{5}{9}$	
per 6 pollici	7	0	$6\ \frac{5}{18}$	
per 1				$1\ 3\ 5\ \frac{5}{108}$
per 6 linee .	0	11	$8\ \frac{113}{216}$	
per 2	0	3	$10\ \frac{545}{648}$	
	1328	14	$5\ \frac{70}{81}$.	

Primieramente si sono prese sopra le 15 unità principali del moltiplicatore le parti aliquote, nelle quali si decompongono li $6^{s.}\ 3^{d.}\ \frac{1}{3}$ del moltiplicando; poi si sono prese sopra tutto il moltiplicando le parti aliquote, che formano 4^{piedi}, $6^{pollici}$ 8^{linee} del moltiplicatore: riunendo le frazioni, si sono ottenuti 2 interi, e $\frac{560}{648}$, frazione, di cui la più semplice espressione è $\frac{70}{81}$: si sono aggiunti questi interi alla somma della colonna di denari, e si è fatta l' addizione secondo la regola del numero 140.

150. Le più volte si trascurano le frazioni, le quali, quando se ne vuol tener conto, rendono assai complicato il calcolo; ma in questo modo il risultato può trovarsi mancante di alcune unità nella colonna delle suddivisioni del minor valore. Si eviterebbe questo errore, ed imbarazzo, che dà l' addizione delle frazioni ordinarie, convertendo in decimi il resto, che lasciano nella formazione di ciascun prodotto particolare le ultime suddivisioni del prodotto precedente; e fintantochè non si avranno dieci di questi prodotti, saremo sicuri di avere il risultato esatto sino alle ultime unità.

Ecco un esempio relativo all' auna.

Si tratta di trovare ciò, che si dee pagare per 15 aune $\frac{2}{3}$, e $\frac{1}{16}$ di una stoffa, essendo il prezzo dell' auna di $42^{l.}$ $17^{s.}$ $11^{d.}$

	$42^{l.}$	$17^{s.}$	$11^{d.}$
	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$
	210		
	42		
per 10 soldi	7	10	
per 5	3	15	
per 2	1	10	
per 6 denari		7	6
per 3		3	9
per 2		2	6
per $\frac{1}{2}$ auna	21	8	11,5
per $\frac{1}{4}$	10	14	5,7
per $\frac{1}{16}$	2	13	7,4
Prodotto totale	678	5	9,6.

I 17 soldi del moltiplicando si decompongono in 10 soldi più 5 più 2; e si prende per 10 soldi la metà di 15; per 5 la metà del prodotto precedente; per 2 il quinto del prodotto relativo a 10 soldi.

I $\frac{3}{4}$, che sono scritti nel moltiplicatore si decompongono in $\frac{1}{2}$, ed $\frac{1}{4}$; si prende $\frac{1}{2}$ di tutto il moltiplicando, poi per $\frac{1}{4}$ la metà del prodotto precedente, poi in fine per $\frac{1}{16}$ il quarto del prodotto precedente. Nel prodotto totale si cancella la cifra dei decimi del denaro, perchè non è sempre esatta, a cagione delle frazioni dei decimi, che si sono trascurate.

151. Tutto ciò, che si è veduto intorno la moltiplicazione dei numeri complessi, ridotto a regola, può enunciarsi in questo modo: *Moltiplicare primieramente le unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; decomporre le suddivisioni del moltiplicando in parti aliquote della sua unità principale, o delle parti aliquote, che le precedono; valutare queste frazioni solamente sopra le unità principali del moltiplicatore; decomporre di poi le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale, o delle parti aliquote, che le precedono, e valutare queste frazioni sopra tutto il moltiplicando. Quando la frazione da valutarsi sarà troppo piccola rispetto a quella, a cui si riferisce, se ne faciliterà il calcolo prendendone una parte aliquota intermediaria per formarne un prodotto ausiliario, dal quale si dedurrà la parte aliquota cercata, e di cui si scriveranno a parte le cifre, per non comprenderle nell'addizione dei prodotti particolari, che debbono comporre il prodotto totale.*

Della divisione dei numeri complessi.

152. Per eseguire la divisione dei numeri complessi è cosa importantissima il porre attenzione alla natura delle unità del quoziente, poichè da ciò dipende la conversione dei resti nelle suddivisioni di queste unità: ma l'esame maturo del problema non lascia mai dubbio su questo riguardo, molto più quando considerando il dividendo come un prodotto, si determina quali han dovuto essere il moltiplicando, ed il moltiplicatore, come si è fatto nel numero 105.

S'incontreranno in questa maniera due casi differenti; nell'uno il dividendo, e il divisore essendo di natura diversa, il quoziente debb'essere della stessa specie che il dividendo; nell'altro il dividendo, e il divisore essendo della stessa specie, il quoziente debb'essere di una specie differente. L'operazione relativa a quest'ultimo caso essendo più semplice che nel primo, passo immediatamente ad occuparmene.

153. Ecco un problema, che conduce a questo caso: il prezzo di una tesa di lavoro essendo di 36 lire, 15 soldi, e 6 denari, si domanda quanto dello stesso lavoro si farà con $1689^{l.}$, $17^{s.}$? Qui il dividendo $1689^{l.}$, $17^{s.}$ è composto con $36^{l.}$ $15^{s.}$, e $6^{d.}$ nella stessa maniera che il numero, il quale misura il lavoro cercato, è composto colla tesa, e sue suddivisioni; così il quoziente debb'essere espresso per quest'ultime misure.

Per ottenerlo, si considera, che il suo valore non debba cangiare quando si convertono il dividendo, e il divisore in parti dello stesso valore, poichè le frazioni, che hanno lo stesso denominatore, danno per quoziente quello de'loro numeratori; ma riducendo nello stesso tempo il dividendo, e il divisore in denari, che sono le parti del minor valore, che essi contengono, si renderanno questi numeri incomplessi.

Il dividendo $1689^{l.}$, $17^{s.}$ dà $405564^{d.}$, ed il divisore $36^{l.}$, $15^{s.}$, e $6^{d.}$ nè produce 8826: allora si riguarda il dividendo come composto di tese, ed il divisore come un numero astratto; poichè, se la tesa non costasse che un denaro, se ne avrebbero 405564; e che costandone 8826 denari, non si dee prendere che la 8826ma parte del primo numero: adunque l' operazione si stabilisce in questo modo.

```
405564 | 8826
-------|------
 52524 |  45tese 5piedi 8pollici 5linee 6270/8826
  8394 |
     6 |
------
 50364
  6234
    12
------
 12468
  6234
------
 74808
  4200
    12
------
  8400
  4200
------
 50400
  6270
```


Dopo avere ottenute le unità principali del quoziente, si moltiplica per 6 il resto 8394 tese per convertirlo in piedi, il che dà 50364; si continua la divisione, e si pone il quoziente nel posto dei piedi; si moltiplica per 12 il resto 6234 di quest' ultima operazione; a fine di convertirlo in pollici; si divide il prodotto 74808 pel divisore, e si ottiene il numero dei pollici da scriversi nel quoziente; si moltiplica ancora il resto 4200 per 12, a fine di convertirlo in linee; la divisione del prodotto 50400 pel divisore dà il numero di linee da scriversi nel quoziente; e fermandoci quì, si termina questo quoziente colla frazione $\frac{6270}{8826}$, che si riduce alla sua più semplice espressione. Il risultato finale dell' operazione è 45 tese, 5 piedi, 8 pollici, 5 linee, e $\frac{1045}{1471}$.

La forma di questo metodo rimarrebbe la stessa, quando i numeri proposti, ed i loro quozienti si rapportassero ad unità di ogn' altra specie.

154. Quando il quoziente debb' essere della stessa specie del dividendo, e che il divisore è incomplesso, l' operazione si eseguisce come quella del numero 144.

Per esempio, 27 oncie di un metallo sono costate $169^{l.}$, $11^{s.}$, $4^{d.}$, si domanda quanto è costata l' oncia? Ecco l' operazione

$169^{l.}\ 11^{s.}\ 4^{d.}$	27
7	$6^{l.}\ 5^{s.}\ 7^{d.}\ \frac{7}{27}$
20	
140	
11	
151	
16	
12	
32	
16	
192	
4	
196	
7	

Quando siamo giunti alle 6 lire, che debbono far parte del quoziente, si converte il residuo 7 in soldi, e vi si aggiungono gli 11, che sono scritti nel dividendo, poi si divide il risultato 151 pel divisore 27, e si hanno 5 soldi nel quoziente, si moltiplica il resto 16 per 12, a fine di convertirlo in denari, e vi si aggiungono 4 denari del dividendo; si divide il totale 196 pel divisore 27; si ha per quoziente 7 denari, e la frazione $\frac{7}{27}$: adunque il risultato completo è 6 lire, 5 soldi, 7 denari, e $\frac{7}{27}$.

155. Finalmente quando il dividendo, e il divisore sono ambidue complessi, e di specie differenti, conviene convertire l' ultimo in frazione, come si è indicato nel numero 144; ed allora la regola data per le frazioni nel numero 79 conduce a moltiplicare il dividendo pel denominatore del divisore, ed a dividere il prodotto, che può essere un numero complesso pel numeratore del divisore, che è necessariamente incomplesso. Ecco un esempio:

36 tese, 5 piedi, 6 pollici, e 8 linee di lavoro essendo state pagate 1374 lire, 12 soldi, 4 denari, dedurne il prezzo della tesa?

Il divisore convertito nelle ultime suddivisioni della sua unità principale produce 31904 linee; e la tesa contenendo 864 linee si ha $\frac{31904}{864}$ di tesa per la frazione, che la rappresenta.

Moltiplicando primieramente il dividendo 1374 lire, 12 soldi, e 4 danari per 864, secondo il metodo del numero 146, si trovano 1187668 lire, e 16 soldi, e non si ha più, che a dividere, come nel numero precedente, il numero complesso 1187668 lire, e 16 soldi pel numero incomplesso 31904; il che dà per quoziente 37 lire, 4 soldi, 6 denari $\frac{318}{997}$.

156. Giova osservare, che il denominatore della frazione, che si ottiene a principio per rappresentare il divisore, è il numero delle parti del più piccolo valore, contenute nell' unità principale, in modo, che si può enunciare in questo modo la regola precedente:

Per dividere un numero complesso per un altro numero complesso, convien convertire il divisore in parti del più piccolo valore, moltiplicare il dividendo pel numero delle parti di questo valore contenute nell' unità principale del divisore, e dividere il secondo risultato pel primo.

Questa regola si applicherebbe al caso sviluppato al numero 153, se il dividendo non contenesse alcuna parte di minor valore che l' ultima del divisore; perchè, allora moltiplicare il dividendo pel numero delle parti di questo valore contenute nella sua unità principale, è convertirlo in queste parti.

157. Non si debbono trascurare le abbreviazioni, che ponno presentarsi convertendo il divisore in frazione, e riducendo questa alla sua più semplice espressione; ne risulta spesso da ciò maggior facilità, ed eleganza nei calcoli. La pratica ripetuta di queste operazioni suggerisce pure de' metodi particolari, che semplificano il calcolo, e che io penso non dover quì indicare: io mi ristringerò a dimostrare come si convertono subito i soldi in lire.

Siccome si tratta per questo di dividere per 20 il numero proposto di soldi, si divide questo primieramente per 10, separando una cifra alla destra, poi si prende la metà di quelle, che rimangono a sinistra, con che si divide per 2, si hanno perciò delle lire. Quando rimane un' unità, essa rappresenta una diecina di soldi, e conviene aggiungerla alla cifra separata sulla destra, la quale esprime dei soldi.

È in questo modo, che 3579 soldi producono 357,9; poi 178^l. 19^s.

158. Il paragone dei metodi, che io ho successivamente presentati, è sicuramente la miglior prova, che possa darsi del vantaggio, che procureranno le nuove misure, quando esse saranno adottate; e qualunque sia l' abitudine, che si abbia nel calcolo dei numeri complessi non si potrà a meno di sentire tutto il comodo del calcolo decimale, purchè non si continui ad adoperare le antiche misure, il che esige per ciascun risultato la conversione di queste misure nelle nuove, operazione sempre lunga, assolutamente straniera al sistema metrico, e che si ostina malgrado ciò a riguardare come inseparabile dall' uso di questo sistema.

Di alcuni mezzi coi quali si abbreviano i calcoli Aritmetici.

159. Quando si debbono moltiplicare l' uno per l' altro due numeri grandissimi, è comodo il formare primieramente i prodotti del moltiplicando per ciascuna delle differenti cifre del moltiplicatore. Sieno, per esempio, i numeri 2937487541, e 67431456. Io osservo, che il moltiplicatore non contiene, che le cifre 1, 3, 4, 5, 6, 7; moltiplicando successivamente il moltiplicando per ciascuna di queste cifre, io formo la tavola seguente

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

nella quale io prendo i prodotti del moltiplicando per le cifre 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7, e 6 del moltiplicatore, per porli nel posto, che essi debbono occupare, come si vede quì sotto

```
         17624925246
        14687437705 .
       11749950164 ..
        2937487541 ...
       8812462623 ....
     11749950164 .....
    20562412787 ......
    17624925246 .......
    -------------------
    1980790618714896 96.
```

Seguendo questo metodo non vi possono essere tutto al più, che 9 prodotti da formare, ed il resto dell' operazione si riduce ad una semplice somma.

160. Si riduce la divisione a semplice sottrazione facendo prima il prodotto del divisore pe'9 primi numeri. In fatti, se si avesse 4539947812346 da dividersi per 73809, e che si formasse una tavola, che contenesse i multipli del divisore, cioè,

1	73809
2	147618
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

si potrebbe operare come segue:

```
 4539947812346 | 73809
               |-------------------
 442854 ...... | 61509406 64892/73809
 -------------
  111407 .....
   73809 .....
 -------------
   375988 ....
   369045 ....
 -------------
    694312 ...
    664281 ...
 -------------
     300313 ..
     295236 ..
 -------------
        507746
        442854
 -------------
         64892
```

Si cerca nella tavola il multiplo più prossimo al numero espresso dalle 6 prime cifre del dividendo; questo multiplo corrispondendo a 6, dà 6 per prima cifra del quoziente. Togliendolo dal dividendo particolare, abbassando una cifra di più, e cercando quale è il multiplo il più prossimo del nuovo dividendo particolare, si trova 1 per la seconda cifra del quoziente. Si prosegue in questo modo l'operazione sino alla fine per mezzo di sottrazioni.

161. Quando si adoperano i decimali per arrivare ad un certo grado di approssimazione, si può abbreviare sensibilmente la moltiplicazione operando come ora si vedrà.

Io suppongo, che si tratti di conoscere, coll'approssimazione di un millesimo di unità, il prodotto dei numeri 45,6259573, e 28,63549.

Si osserverà, che è inutile il far entrare nel prodotto totale le cifre, che ne' prodotti particolari rappresentano decimali di un' ordine più alto, che i 10000^{esimi}, perchè la somma delle colonne, che contengono i decimali ulteriori, e ciò che si è ritenuto non possono influire sopra i millesimi; ed allora per avere un prodotto composto di cento-millesimi, partendo dalla prima cifra a sinistra del moltiplicatore, la quale quì esprime delle diecine, basta cominciare la moltiplicazione dalla cifra 7 dei millionesimi del moltiplicando. Le cifre, che seguono a destra quella delle diecine, esprimendo unità di dieci in dieci volte più piccole, non si comincierà rispetto ad esse la moltiplicazione, che sopra le cifre 5, 9, 5 etc., le quali seguono a sinistra la cifra 7, perchè i 5 cento-millesimi del moltiplicando moltiplicati per le 8 unità del moltiplicatore, daranno de' cento-millesimi, come i dieci-millesimi del moltiplicando per i decimi del moltiplicatore, come i millesimi del molti-

plicando pei centesimi del moltiplicatore, e così in appresso.

Per non ingannarsi nel principio di ciascuna moltiplicazione particolare, si scrivono sotto il moltiplicando le cifre del moltiplicatore, in ordine inverso, ponendo quella delle diecine del moltiplicatore sotto i millionesimi del moltiplicando, come si vede quì sotto:

```
 456259573
  9453682
 ---------
 91251914
 36500760
 .2737554
 ..136875
 ...22810
 ....1824
 .....405
 ---------
 130652142
```

In questo modo, ciascuna cifra del moltiplicatore è collocata sotto quella cifra del moltiplicando, dalla quale si dee cominciare la moltiplicazione; in maniera che si trascurano quelle, che sono alla destra, e si scrivono tutti i prodotti nelle stesse colonne, poichè cominciano tutti da unità dello stesso ordine. Sommandoli, e separando cinque decimali, perchè l'ultima cifra debb' essere di cento-millesimi, si trova 1306,52142; cancellando le due ultime cifre, si ha 1306,521, risultato, che sino ai millesimi s'accorda con quello, che si sarebbe ottenuto colla solita maniera di moltiplicare, e che sarebbe 1306,521644004.

Se accadesse, che uno dei fattori non avesse tante cifre da poter stabilire la corrispondenza quì sopra indicata, vi si supplirebbe col porre de' zeri alla destra di questo fattore. Per ottenere con due decimali, per esempio, il prodotto de' numeri 54,236, e 532,27 conviene scriverli in questo modo.

```
 54236000
    72235
---------
271180000
 16270800
  1084720
   108472
    37961
---------
288681953
```

Si trova pel prodotto richiesto 28868,20, aggiungendo un' unità all' ultima cifra, perchè le due, che si tolgono sorpassano la metà di questa unità, cioè a dire, 50.

È regola generale, che quando si trascurano alcune cifre decimali si aumenti sempre di un' unità l' ultima, che si conserva, quando quelle, che si tolgono sorpassano la metà dell' unità, che è nell' ultimo posto di quelle, che si ritengono. Per conoscerne la ragione, basta osservare, che, per esempio, 34,546 è più prossimo a 34,55 di quello che lo sia a 34,54.

Il metodo della divisione può essere anch' esso abbreviato; ma siccome esige un maggior nu-

mero di precauzioni particolari per essere adoperato con sicurezza, perciò io sù di questo non mi fermerò punto.

162. Si è veduto nei numeri 60, e 69, il vantaggio, che si può avere dalla decomposizione de' numeri in fattori per la semplificazione de' calcoli relativi alle frazioni: adunque è cosa importante il saper eseguire questa decomposizione: l' esempio seguente dimostrerà come vi si possa pervenire.

Sia il numero 360: io lo divido primieramente per 2, ed ho per quoziente 180; divido questo quoziente per 2, ed ho 90, il quale è ancor divisibile per 2, e dà per quoziente 45: onde già vedo, che 360 è eguale a 2 per 2 per 2 per 45. Il numero 45 non essendo più divisibile per 2, lo divido per 3, ed ho 15, che ancor divido per 3, il che dà per quoziente 5, numero primo, il quale perciò non può esser diviso, che per se stesso, o per l' unità: adunque il 45 è uguale a 3 per 3 per 5, e perciò 360 è uguale a

2 per 2 per 2 per 3 per 3 per 5.

Questi sei fattori essendo numeri primi, sono i *fattori semplici* del numero 360. È chiaro, che ogni numero, il quale non sia primo può sempre in questo modo decomporsi in un certo numero di fattori semplici, o primi.

Per formare tutti i divisori del numero proposto si scrive il quoziente, che corrisponde a ciascun fattore, e questo fattore, sopra due colonne, come lo dimostra la tavola seguente

360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	2	8
15	3	3. 6. 12. 24
5	3	9. 18. 36. 72
1	5	5. 10. 15. 20. 30. 40. 45. 60. 90. 120. 180. 360

Si vede alla terza linea, che il numero proposto è stato diviso due volte di seguito per 2; adunque esso è divisibile pel prodotto di 2 per 2, ossia per 4, che si scriverà a lato del 2 nella terza linea. Il quoziente 90 essendo di nuovo diviso per 2, il numero proposto sarà perciò divisibile per 2 volte 4, ossia per 8; adunque si scriverà 8 a lato del 2 sopra la quarta linea. Il quoziente 45, scritto al principio di questa linea, essendo di poi diviso per 3, il numero proposto sarà evidentemente divisibile pei prodotti di 3 moltiplicato per ciascuno dei divisori precedenti: adunque si formeranno sopra la quinta linea nuovi divisori composti 6, 12, 24. Continuando in questo modo a moltiplicare il fattor semplice di ciascuna linea per tutti i divisori, che lo precedono, osservando di non scrivere due volte lo stesso, si avranno tutti i divisori del numero proposto.

163. Quando siamo condotti dal calcolo ad una frazione, il di cui numeratore, e denominatore sono un poco grandi, e non hanno alcun fattor comune, si ricercano i valori prossimi di questa frazione, i quali sieno espressi da de'numeri più semplici a fine di formarsene un idea.

Se, per esempio, si ha il numero frazionario $\frac{1103}{887}$, si estraggono primieramente gl'interi, e ne viene 1 e $\frac{216}{887}$.

Ora per formarsi un idea più semplice della frazione $\frac{216}{887}$, si cerca di paragonarla ad una parte dell'unità a fine di non avere che a riguardare un sol termine, e perciò si dividono i suoi due termini per 216; si trova 1 pel quoziente del numeratore, e $4\frac{23}{216}$ per quello del denominatore: quest'ultimo quoziente, il quale è perciò compreso tra 4, e 5, c'insegna, che la frazione $\frac{216}{887}$ cade tra $\frac{1}{4}$, ed $\frac{1}{5}$. Fermandoci a questo punto si vede, che il secondo valore prossimo dell'espressione $\frac{1103}{887}$ è 1, ed $\frac{1}{4}$, ovvero $\frac{5}{4}$; ma che questo valore è troppo grande, perchè il vero valore è eguale ad 1 più 1 diviso per 4, e $\frac{23}{216}$, il che si scrive in questo modo $1\,\cfrac{1}{4\frac{23}{216}}$.

Per formarsi un' idea esatta dell' espressione $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$, convien considerarla come se indicasse il quoziente dell' intero 1 per l' intero 4 unito alla frazione $\frac{23}{216}$.

Se si dividono i due termini di $\frac{23}{216}$ per 23, il quoziente sarà $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; trascurando i $\frac{9}{23}$, che accompagnano l' intero 9, ne verrà solo $\frac{1}{9}$ in vece di $\frac{23}{216}$, e perciò $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ sarà un terzo valore prossimo di $\frac{1103}{887}$, valore, che sarà troppo piccolo perchè 9 essendo minore del vero quoziente di 216 per 23, la frazione $\frac{1}{9}$ sarà maggiore di quella, che dee accompagnare 4, e perciò il divisore $4\frac{1}{9}$ sarà maggiore del divisore esatto $4\frac{23}{216}$, ed il quoziente $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ più piccolo del vero.

Riducendo l' intero 4 con la frazione, che l'ac-

compagna, e facendo la divisione secondo il metodo del numero 80, ne derivano $\frac{9}{37}$, e si ha 1, e $\frac{9}{37}$, o $\frac{46}{37}$ pel terzo valore prossimo di $\frac{1103}{887}$.

L' espressione esatta di questo valore essendo

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}}$$

se si dividono i due termini di $\frac{9}{23}$ per 9, si avrà

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}};$$

trascurando la frazione $\frac{5}{9}$, rimarrà

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}}$$

valore troppo grande, perchè la frazione $\frac{1}{2}$ essendo più grande di $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$, di cui essa occupa il posto, formerà, aggiunta a 9, un denominatore troppo grande; la frazione da aggiungersi a 4 sarà in allora troppo piccola, e l'ultimo denominatore essendo così più piccolo del giusto, renderà l'ultima frazione più grande del giusto.

Riducendo primieramente in frazione $9\frac{1}{2}$, ne verranno $\frac{19}{2}$; adunque $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ sarà uguale a $\frac{2}{19}$, ed il valore prossimo diventerà $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$: ora $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ dà $\frac{19}{78}$; aggiungendovi l'unità, ne viene 1 e $\frac{19}{78}$ o vero $\frac{97}{78}$ per quarto valore prossimo di $\frac{1103}{887}$.

Riprendendo l'espressione

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\frac{5}{9}}}}$$

io divido i due termini dell' ultima frazione $\frac{5}{9}$ per 5; con ciò ne verrà $\frac{1}{1\frac{4}{5}}$, e

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\frac{4}{5}}}}};$$

trascurando la frazione $\frac{4}{5}$, resterà

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\frac{1}{1}}}},$$

e si vedrà come quì sopra, che questo valore è più piccolo del giusto.

La frazione $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ si riduce ad $\frac{1}{3}$; poi la seguente $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$ dando $\frac{3}{28}$, quella, che vi succede si cangia in $\cfrac{1}{4\frac{3}{28}}$, eguale a $\frac{28}{115}$, in modo che il quinto valore prossimo è $1\frac{28}{115}$, ovvero $\frac{143}{115}$.

Finalmente dividendo per 4 i due termini della frazione $\frac{4}{5}$, che è stata trascurata quì sopra, io ho per quoziene $\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}$, e togliendo primieramente la frazione $\frac{1}{4}$ ottengo il nuovo valore

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\frac{1}{1}}}}}$$

più grande del giusto.

Se si riducono successivamente tutti i denominatori in frazione a fine di ottenere la frazione semplice, che essa rappresenta, si troverà

$$1\frac{47}{193},\ \text{ovvero}\ \frac{240}{193}$$

Rimettendo a lato dell' ultimo denominatore la frazione $\frac{1}{4}$, si forma l' espressione

$$1\cfrac{1}{4\cfrac{1}{9\cfrac{1}{2\cfrac{1}{1\cfrac{1}{1\frac{1}{4}}}}}},$$

che essendo ridotta come le precedenti, riproduce il numero frazionario $\frac{1103}{887}$.

Si opererebbe nello stesso modo sopra qualsivoglia altra frazione, e si dedurrebbe una serie di valori prossimi alternativamente più grandi, e più piccoli del suo vero valore, se questa è una frazione propriamenre detta, o alternativamente più piccoli, o più grandi, se, come nell' esempio precedente, il numeratore sorpassa il denominatore.

Gli sviluppi, che io ho trovati per l' espressione $\frac{1103}{887}$, sono *frazioni continue*, le quali si possono generalmente definire in questo modo: *Frazioni il di cui denominatore è composto di un intero più una frazione, la quale ha ancora per denominatore un intero più una frazione, e così in appresso*. Questa specie di frazioni gode molte proprietà interessanti, le quali si possono vedere nel *Complemento degli Elementi di Algebra*.

Sopra l' applicazione dell' Aritmetica alla Banca, ed al Commercio.

164. Se si avesse a giudicare dal gran numero di regole o formole, che contengono i trattati di Aritmetica, destinati ai Banchieri, ed ai Negozianti, si crederebbe, che vi fosse per queste professioni un' Aritmetica particolare, mentre che tutta la difficoltà dell' applicazione delle regole ordinarie non si appoggia che sopra l' intelligenza dei termini tecnici introdotti dall' uso, e molte volte senza necessità. Quando questi termini sono bene spiegati, qualunque calcolatore renderà sempre, in numeri, la vera risposta ai diversi problemi, che gli si potranno proporre.

Lo *sconto*, ed il *cambio* sono le operazioni le più usuali della Banca: si è veduto (120) come lo sconto debba eseguirsi secondo il fine, che si pone; ma i primi, che l' hanno praticato hanno trovato più semplice di togliere l' interesse dalla somma intera, come se questa fossa la somma stessa, che essi pagassero anticipatamente. (*Vedete la nota della pag.* 124).

In generale, nelle contrattazioni, ogni somma, della quale non se ne potrà disporre che in tempo avvenire, ha un valore reale minore del suo valor nominale, a cagione del frutto, che essa riporta, a contare dal momento, in cui questa si possiede; e perciò il godimento anticipato di una somma aumenta il suo valore reale. Da ciò ne deriva, che per paragonare delle somme pagabili a diverse epoche, convien te-

ner conto dell' interesse, che esse possono produrre a quegli, che ne dispone. Le regole del numero 120 sono bastanti per questo oggetto tutte le volte, che l' intervallo di tempo non eccede un anno, e che non si unisca l' interesse col capitale: in caso contrario, conviene impiegare le formole relative all' *interesse composto*, riportate alla fine de' miei *Elementi d' Algebra*.

Il cambio, il quale serve ad evitare il trasporto del numerario, compensando gli uni cogli altri i debiti, che contraggono reciprocamente i Negozianti di diversi Paesi, conduce ad un calcolo, il cui fine è sempre di trovare ciò, che una somma pagabile in una piazza di Commercio vale in un altra, sia pel rapporto delle due somme riguardate come equivalenti nelle monete di queste piazze, sia per una serie di rapporti formati da somme equivalenti prese nelle monete delle diverse piazze comunicanti le une con le altre. Il numero 138 presenta un esempio generale, da cui le formole particolari non differiscono, che per la suppressione di fattori, che in ciascun caso possono essere comuni al numeratore, e al denominatore dei rapporti, che si paragonano. Le somme equivalenti, che formano questi rapporti sono enunciate ciascun giorno ne' pubblici Fogli, perchè essi variano secondo le circostanze; ma questi cangiamenti nulla variano lo spirito del metodo indicato sotto il nome di *regola congiunta*.

Riguardo alle operazioni di Commercio, nel n.° 124 si trova tutto ciò, che bisogna per dividere i beneficj, o le perdite, che risultano da un' associazione qualunque; *i diritti di commissione*, le *provvisioni*, le *bonificazioni*, etc., si valutano a *tanto* per $\frac{0}{0}$ nella stessa maniera, che si calcola il frutto; le *tasse*, e le *imposte* hanno dei rapporti con i valori delle mercanzie, ovvero sono stabiliti sopra l' unità sia di peso, sia di volume, e possono dedursi, per delle quantità qualunque con le proporzioni, e colle frazioni.

Finalmente l' *impostamento de' Libri di Scrittura* non è che la maniera di disporre gli stati del dare, ed avere del Negoziante, in ordine tale, che si possano a ciascun istante paragonare gli uni agli altri per conoscerne la differenza, e stabilire così il *bilancio* fra quello che egli ha, e ciò, che dee dare.

PARAGONE DELLE ANTICHE MISURE FRANCESI COLLE NUOVE

Caratteri usati nel denotare le antiche Misure

Per le monete

lira tornese, s. soldo, d. denaro (137).

Per il tempo

g. giorno, or. ora, ′ minuto primo, ″ secondo.

Pei pesi

lb. libbra, M marco, O ovvero ℥ oncia, G ovvero ʒ grosso, D ovvero ℈ denaro o scrupolo, G grano (136).

Osservazione. Il denaro, o scrupolo equivale a $\frac{1}{3}$ del grosso, ovvero a 24 grani.

Misure di lunghezza

t tesa, p piede, pol pollice, l linea, pun punto (131).

Osservazione. Le distanze alcune volte si misurano in passi ordinarj, considerati ciascuno $2^{p}\frac{1}{2}$, ed in passi geometrici, ovvero braccia di 5^{p}.

Dimensioni esatte della Terra

Il raggio dell' equatore è di 3 271 208 tese.

Il semi-asse, ovvero la distanza dal centro al polo, è di 3 261 443 tese.

La distanza dal polo all' equatore, misurata sul meridiano di Parigi, è di 5130740 tese.

Il grado terrestre, ch' è la 90^{ma} parte della detta distanza, equivale dunque a 57008 tese.

L' arco terrestre d' un minuto primo è in conseguenza di circa 950 tese.

Tavole calcolate dal Sig. Haros per la conversione delle Misure antiche in nuove, e reciprocamente.

Ciascuna colonna contiene, nella prima linea, il valore della misura indicata nel titolo della colonna, ed in seguito i prodotti di questo valore pei numeri scritti nella colonna segnata N.

Vi sono per tutto cinque decimali, ma nell' uso ordinario possiamo limitarci a tre.

Convertire 8 tese, 5 piedi e 7 pollici in metri

$8^{t.}$ equivalgono a	$15^{m.},592$
$5^{p.}$	$1\ ,624$
$7^{pol.}$	$0\ ,189$
Somma ...	$17^{m.},405$

Risposta 17 metri, e 40 centimetri.

Convertire 89 aune $\frac{3}{4}$ di Parigi in metri

80^{aune} equivalgono a	$95^{m.},076$
9	$10\ ,969$
$\frac{3}{4}$	$0\ ,891$
Somma ...	$106^{m.},663$

Risposta 106 metri, e 66 centimetri.

Convertire 218 arpenti (*acque, e foreste*) in ecatare

$200^{arp.}$ equivalgono a	$102^{ecat.},144$
10	$5\ ,107$
8	$4\ ,086$
Somma ...	$111^{ecat.},337$

Risposta 111 ecatare, e 34 are in circa.

Convertire 3050 libbre in kilogrammi

$3000^{lib.}$ equivalgono a	$1468^{kil.},52$
50	$24\ ,48$
Somma ...	$1493^{kil.},00$

Risposta 1493 kilogrammi.

Le medesime tavole possono dare il prezzo della nuova unità di una materia per mezzo di quello dell' antica unità espresso in lire. Per esempio, una auna del drappo costando $37^{l.}, 50$, è manifesto che, se si conoscesse l' espressione del metro in auna, altro non dovrebbe farsi che moltiplicare quest' espressione per 37,5, il che ridurrebbesi a convertire $37^{m.},5$ in aune, ed in parti decimali dell' auna; ma bisognerebbe contare il resultato per delle lire. Ecco il calcolo di quest' esempio.

Mediante la Tavola, che converte i metri in aune,

30 equivalgono a	**$25^{aun.},243$**
7	**$5\ ,890$**
0 ,5	**$0\ ,421$**
Somma $37^{m.},5$	**$31^{aun.},554$,**

e prendendo questo resultato per delle lire, si trova 31 lire, 55 cent. pel prezzo del metro del drappo.

Allorchè si vogliono convertire le nuove misure nell' antiche, non si ottengono, mediante le tavole seguenti, se non che degl' interi, e delle frazioni decimali, e resta da convertire queste frazioni in suddivisioni proprie a ciascuna specie di misura.

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di Misure *lineari* antiche in Misure nuove, e reciprocamente.

N.	Leghe terrestri in Kiliom. *	Leghe marine in Kil. **	Tese in Metri	Piedi in Metri	Pollici in Metri	Linee in Metri	N.	Aune in Metri ***	N.	Frazioni d'Auna in Metri	N.	Frazioni d'Auna in Metri	N.	Frazioni d'Auna in Metri
1	4,4444	5,5556	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256	1	1,18845	1/2	0,594	5/8	0,743	7/16	0,520
2	8,8889	11,1111	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512	2	2,37689	1/3	0,396	7/8	1,040	9/16	0,669
3	13,3333	16,6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768	3	3,56534	2/3	0,792	1/12	0,099	11/16	0,817
4	17,7778	22,5555	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024	4	4,75378	1/4	0,297	5/12	0,495	13/16	0,966
5	22,2222	27,7778	9,74519	1,62420	0,135350	0,011280	5	5,94223	3/4	0,891	7/12	0,693	15/16	1,114
6	26,6667	33,3333	11,69422	1,94904	0,162419	0,013536	6	7,13068	1/6	0,198	11/12	1,089		
7	31,1111	38,8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792	7	8,31912	5/6	0,990	1/16	0,074		
8	35,5556	44,4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048	8	9,50757	1/8	0,149	3/16	0,223		
9	40,0000	50,0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,020304	9	10,69601	3/8	0,446	5/16	0,371		
10	44,4444	55,5556	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560	10	11,88446						

N.	Kiliomet. in Leghe terrestri	Kiliom. in Leghe marine	Metri in Tese	Metri in Piedi	Metri in Pollici	Metri in Linee	N.	Metri in Aune di Parigi
1	0,225	0,18	0,51307	3,07844	36,9413	443,296	1	0,84144
2	0,450	0,36	1,02615	6,15689	73,8827	886,59[illegible]	2	1,68287
3	0,675	0,54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888	3	2,52431
4	0,900	0,72	2,05230	12,31378	147,7653	1773,184	4	3,36574
5	1,125	0,90	2,56537	15,39222	184,7067	2216,480	5	4,20718
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775	6	5,04861
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071	7	5,89005
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367	8	6,73148
9	2,025	1,62	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663	9	7,57292
10	2,250	1,80	5,13074	30,78444	369,4133	4432,959	10	8,41435

* La Lega di 25 a grado equivale a tese 2280, 33 in conseguenza del valore *definitivo* del Metro.

** La Lega marina di 20 per grado equivale a 2850 tese,41.

*** L'Auna di Parigi equivale a 3 piedi, 7 pollici, 10 linee 5/6.

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di Misure *agrarie* antiche in Misure nuove, e viceversa.

N.	Tese quadre in Metri quadri	Piedi quadri in Metri quadri	Pollici quadri in Metri quadri	Linee quadre in Metri quadri	N.	Leghe quadre in Miriametri quadri	Leghe quadre in Miriare	Arpento d'Acque e For. in Ecatare ovvero Pertiche quadre in Are	Arpento di Parigi in Ecatare ovvero Pertiche quadre in Are
1	3,798744	0,105521	0,00073278	0,000005089	1	0,1975309	19,75309	0,510720	0,341887
2	7,597487	0,211041	0,00146556	0,000010178	2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	11,396231	0,316562	0,00219834	0,000015267	3	0,5925926	59,25926	1,532160	1,025661
4	15,194975	0,422083	0,00293112	0,000020356	4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	18,993718	0,527604	0,00366390	0,000025445	5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	22,792462	0,633124	0,00439668	0,000030534	6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051322
7	26,591205	0,738645	0,00512946	0,000035623	7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	30,389949	0,844166	0,00586224	0,000040712	8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	34,188693	0,949686	0,00659502	0,000045801	9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	37,987436	1,055207	0,00732780	0,000050890	10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

N.	Metri quadri in Tese quadre	Metri quadri in Piedi quadri	Metri quadri in Pollici quadri	Metri quadri in Linee quadre	N.	Miriametri quadri in Leghe quadre	Miriare in Leghe quadre	Ecatare in Arpen. d'Acque e Foreste ovvero Are in Pertiche quadre	Ecatare in Arpen. di Parigi ovvero Are in Pertiche quadre
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511	1	5,0625	0,050625	1,958020	2,924943
2	0,526490	18,95363	2729,32	393023	2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	0,789735	28,43045	4093,99	589534	3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	1,052980	37,90726	5458,65	786045	4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	1,316225	47,38408	6823,31	982557	5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068	6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	1,842714	66,33771	9552,63	1375579	7	35,4375	0,354375	13,706140	20,474601
8	2,105959	75,81453	10917,30	1572090	8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	2,369204	85,29134	12281,96	1768602	9	45,5625	0,455625	17,622180	26,324487
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113	10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di Misure *cubiche* antiche in Misure nuove, e reciprocamente.

N.	Tese cube in Metri cubi	Piedi cubi in Metri cubi	Pollici cubi in Metri cubi	Linee cube in Metri cubi	N.	*Corde di legna* (Acque e Foreste) in Steri	*Solive* (da costruzione) in Steri ovvero Metri cubi
1	7,40389	0,0342773	0,000019836	0,00000001148	1	3,8391	0,10283
2	14,80778	0,0685545	0,000039673	0,00000002296	2	7,6781	0,20566
3	22,21167	0,1028318	0,000059509	0,00000003444	3	11,5172	0,30850
4	29,61556	0,1371090	0,000079346	0,00000004592	4	15,3562	0,41133
5	37,01945	0,1713863	0,000099182	0,00000005740	5	19,1953	0,51416
6	44,42334	0,2056636	0,000119018	0,00000006888	6	23,0343	0,61699
7	51,82723	0,2399408	0,000138855	0,00000008036	7	26,8734	0,71982
8	59,23112	0,2742181	0,000158691	0,00000009184	8	30,7124	0,82265
9	66,63501	0,3084953	0,000178528	0,00000010332	9	34,5515	0,92549
10	74,03890	0,3427726	0,000198364	0,00000011480	10	38,3905	1,02832

N.	Metri cubi in Tese cube	Metri cubi in Piedi cubi	Metri cubi in Pollici cubi	Metri cubi in Linee cube	N.	Steri in *Corde di legna* (Acque e Foreste)	Metri cubi in *Solive*
1	0,135064	29,1739	50412,42	87112655	1	0,26048	9,7246
2	0,270128	58,3477	100824,83	174225310	2	0,52096	19,4492
3	0,405192	87,5216	151237,25	261337965	3	0,78144	29,1739
4	0,540257	116,6954	201649,66	348450619	4	1,04192	38,8985
5	0,675321	145,8693	252062,08	435563274	5	1,30241	48,6231
6	0,810385	175,0431	302474,50	522675929	6	1,56289	58,3477
7	0,945449	204,2170	352886,91	609788584	7	1,82337	68,0723
8	1,080513	233,3908	403299,33	696901239	8	2,08385	77,7970
9	1,215577	262,5647	453711,74	784013894	9	2,34433	87,5216
10	1,350641	291,7385	504124,16	871126549	10	2,60481	97,2462

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di Misure di *Capacità* antiche in Misure nuove, e reciprocamente.

N.	Pinte di Parigi in Litri	Moggia di Vino di Parigi in Ecatolitri	*Sestiere* o stajo di Grano di Parigi in Ecatolitri	*Boisseaux* in Litri	*Litrons* in Litri
1	0,9313	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,2440	52,033	3,2521
5	4,6566	13,4110	7,8050	65,042	7,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302

N.	Litri in Pinte di Parigi	Ecatolitri in Moggia di Vino di Parigi	Ecatolitri in *sestieri* o Staja di Grano di Parigi	Litri in *Boisseaux*	Litri in *Litrons*
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9219	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2,5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8642	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4424	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5899	2,9826	5,1250	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7656	0,69187	11,0699
10	10,7374	3,7283	6,4062	0,76874	12,2998

TAVOLA per ridurre un numero qualunque di *Pesi* antichi in Pesi nuovi, e reciprocamente.

N.	Libbre in Kiliog.	Oncie in Kiliog.	Grossi in Kiliog.	Grani in Kiliog.	Quintali in Miriagr.
1	0,48951	0,03059	0,003824	0,0000531	4,8951
2	0,97901	0,06119	0,007648	0,0001062	9,7901
3	1,46852	0,09178	0,011472	0,0001593	14,6852
4	1,95802	0,12238	0,015296	0,0002124	19,5802
5	2,44753	0,15297	0,019120	0,0002655	24,4753
6	2,93704	0,18356	0,022944	0,0003186	29,3704
7	3,42654	0,21416	0,026768	0,0003717	34,2654
8	3,91605	0,24475	0,030592	0,0004248	39,1605
9	4,40555	0,27535	0,034416	0,0004779	44,0555
10	4,89506	0,30594	0,038240	0,0005310	48,9506

N.	Kiliog. in Libbre	Kiliog. in Oncie	Kiliog. in Grossi	Kiliog. in Grani	Miriagr. in Quintali
1	2,04288	32,686	261,49	18827,15	0,20429
2	4,08575	65,372	522,98	37654,30	0,40858
3	6,12863	98,058	784,46	56481,45	0,61286
4	8,17150	130,744	1045,95	75308,60	0,81715
5	10,21438	163,430	1307,44	94135,75	1,02144
6	12,25726	196,116	1568,93	112962,90	1,22573
7	14,30013	228,802	1830,42	131790,05	1,43001
8	16,34301	261,488	2091,90	150617,20	1,63430
9	18,38588	294,174	2353,39	169444,35	1,83859
10	20,42876	326,860	2614,88	188271,50	2,04288

Paragone *di alcune misure straniere con le nuove misure francesi.*

MISURE LINEARI	Millim.	PESI	Gram.
Piede antico Francese	324,7	Libbra peso di marco	489,2
Piede Inglese . .	304,7	Inglese { libbra *troy*	372,6
Varo di Castiglia .	836,6	Inglese { avere di peso	453,1
Piede del Reno . .	313,9	Di Castiglia . . .	459,4
Di Vienna . . .	416,0	Colonia	467,4
D' Amsterdam . .	283,0	Vienna	558,6
Di Svezia . . .	297,1	Amsterdam . . .	491,4
Di Russia . . .	354,1	Svezia.	424,6
Della China . . .	320,0	Russia.	409,5

Tavola *di confronto delle monete straniere con le monete francesi, supposte tutte giuste, ed esatte di peso, e di titolo, secondo le leggi di fabbricazione.* (Presa dall' *Annuario* del 1821).

N. B. Il titolo è la quantità di metallo puro (o di fino) contenuto nella totalità del pezzo, che si suppone composto di 1000 parti. Il titolo della lira è $\frac{9}{10}$, o vero 900, essendo il suo peso di 5 grammi (100), esso contiene $\frac{9}{2}$ grammi d'argento; così fatta astrazione delle spese del monetaggio, il grammo d'argento vale $\frac{2}{9}$ di lira, e il kilogrammo $\frac{2000}{9}$ di lira, o sia 222 lire, e 22 centesimi; il kilogrammo d'oro vale 3444 lire, e 44 centesimi, poichè il rapporto del valore dell'oro a quello dell'argento è stabilito di 15 $\frac{1}{2}$ ad 1.

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	INGHILTERRA			
		g.		l. c.
Oro	Ghinea di 21 scellini.	8,3802	917	26 47
	Mezza.	4,1901	917	13 23,50
	Un quarto, ...	2,095	917	6 61,75
	Un terzo, o vero 7 scellini.	2,7934	917	8 82,33
	Sovrana dopo il 1818 di 20 scellini	6,9808	917	25 20,80
Arg.	Crovvn, o corona di 5 scellini antichi . . .	30,074	925	6 18
	Scellino antico	6,015	925	1 23,60
	Crovvn, o corona, dopo il 1818	28,2514	925	5 80,72
	Scellino dopo il 1818.	5,6503	925	1 16,14
	AUSTRIA, E BOEMIA			
Oro	Ducato dell'Imperatore	3,491	986	11 86
	Ducato d' Ungheria . .	3,491	990	11 90
	Sovrana	5,567	917	17 58
	Mezza . . . . , . .	2,7835	917	8 79
Arg.	Scudo, o risdallero di convenzione, dopo il 1753 . . . . , ...	28,064	833	5 19,50
	Mezzo risdallero, o vero fiorino	14,032	833	2 59,75
	Venti kreutzer	6,682	583	0 86,50
	Dieci kreutzer	3,898	500	0 43,25
	OLANDA			
Oro	Ducato	3,512	986	11 93

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	OLANDA (segue)			
		g.		l. c.
Oro	Ryder	9,988	920	31 65
	Venti fiorini, 1808 . .	13,659	917	43 14
	Dieci fiorini, *idem* . .	6,8295	917	21 57
	— di Guglielmo, 1818	6,700	900	20 77
Arg.	Fiorino di 20 soldi . .	10,597	917	2 15,94
	Escalin, o vero pezzo di 6 soldi	4,976	583	0 64
	Ducatone, o vero ryder.	32,750	941	6 85
	Ducato, o vero risdallero	28,230	873	5 48
	DANIMARCA, ED HOLSTEIN			
Oro	Ducato corrente dopo il 1767	3,143	875	9 47
	Ducato specie, 1791 al 1802	3,519	979	11 86
	Cristiano, 1773	6,735	903	20 95
Arg.	Risdallero di specie, o vero doppio scudo di 96 scellini Danesi dopo il 1776	29,126	875	5 66
	Risdallero corrente, o pezzo di 6 marchi. Dansk del 1750 . .	26,800	833	4 96
	Marco Danese di 16 scellini, del 1776 .	« «	688	0 94
	Marco di Lubec di 16 scellini, del 1740 .	9,164	750	1 53

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	STATO ECCLESIASTICO			
		g.		l. c.
Oro	Doppia di Pio VI., e Pio VII.	5,471	$916\frac{1}{3}$	17 27,50
	Mezza	2,7355	$916\frac{2}{3}$	8 63,75
	Zecchino, 1769, Clemente XIV., e suoi successori	3,426	1000	11 80
	Mezzo	1,713	1000	5 90
Arg.	Scudo di 10 paoli, o vero 100 bajocchi .	26,437	$916\frac{2}{3}$	5 38,50
	Tre decimi di scudo, o testone di 30 bajocchi . , ...	7,931	$916\frac{1}{3}$	1 62
	Un quinto di scudo, o papetto di 20 baj. .	5,287	$916\frac{2}{3}$	1 08
	Un decimo di scudo, o paolo di 10 baj. .	2,644	$916\frac{2}{3}$	0 54
	SPAGNA			
Oro	Doppia, o doblone di 8 scudi, 1772 al 1786.	27,045	901	83 93
	. . . . di 4 scudi . . .	13,5225	901	41 96,50
	. . . . di 2 scudi . . .	6,7612	901	20 98,25
	Mezza doppia, o vero scudo	3,3806	901	10 49,12
	Doppia, o doblone di 8 scudi, dopo il 1796.	27,045	875	81 51
	. . . . di 4 scudi . . .	13,5225	875	40 75,50
	. . . . di 2 scudi . . .	6,7612	875	20 37,75
	Mezza doppia, o vero scudo	3,3806	875	10 18,87

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	SPAGNA (segue)			
		g.		l. c.
Arg.	Piastra, dopo il 1772.	7,045	903	5 43
	Reale da 2, o pezzetto, o vero quinto di piastra	5,971	813	1 08
	Reale da 1, o mezzo pezzetto, o vero 10.° di piastra	2,9855	813	0 54
	Reallillo, o vero 20.° di piastra	1,4927	813	0 27
	Nota. Questi ultimi tre pezzi si chiamano *monete provinciali*; esse sono fabbricate in Spagna, e non sono in corso che nella penisola.			
	AMBURGO			
Oro	Ducato *ad legem Imperii*	3,491	986	11 86
	Ducato nuovo della città	3,488	979	11 76
Arg.	Marco banco (*moneta imaginaria*)	« «	« «	1 88
	Marco, o 16 scellini dietro la convenzione di Lubec	9,164	750	1 53
	Risdallero di costituzione, o vero scudo di banco	29,233	889	5 78

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	TOSCANA			
		g.		l. c.
Oro	Ruspone, o 3 zecchini	10,464	1000	36 04
	Un terzo di ruspone, o zecchino	3,488	1000	12 01,33
	Mezzo zecchino	1,744	1000	6 00,67
	Zecchino coll' effige	3,488	1000	12 01,33
	Rosina	6,976	896	21 54
	Mezza	3,488	896	10 77
Arg.	Francescone di 10 paoli, livornino, piastra colla rosa, talaro, leopoldino, e scudo di 10 paoli	27,507	917	5 61
	Pezzo di 5 paoli	13,7535	917	2 80,50
	. . . . di 2 paoli	5,501	917	1 12,20
	. . . . di 1 paolo	2,751	917	0 56,10
	SVIZZERA			
Oro	Pezzo di 32 franken di Svizzera	15,297	904	47 63
	. . . . di 16	7,6485	904	23 81,50
	Ducato di Zuric	3,491	979	11 77
	. . . . di Berna	3,452	979	11 64
	Doppia di Berna	7,648	902	23 76
Arg.	Scudo di Bale di 30 batz, o 2 fiorini	23,386	878	4 56
	Mezzo scudo, o fiorino di 15 batz	11,693	878	2 28
	Franco di Berna, dopo il 1803	7,512	900	1 50
	Scudo di Zuric, del 1781	25,057	844	4 70

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	SVIZZERA (segue)			
	Mezzo, o fiorino, dopo il 1781	g. 12,5285	844	l. c. 2 35
	Scudo di 40 batz di Bale, e Solura dopo il 1798	29,480	901	5 90
Arg.	Pezzo di 4 franken di Berna, del 1799.	29,370	901	5 88
	.... di 4 franken di Svizzera nel 1803 .	30,049	900	6 0
	.... di 2 franken di Svizzera, nel 1803. .	15,0245	900	3 0
	.... di un franken di Svizzera, nel 1803.	7,5122	900	1 50
	NAPOLI			
Oro	Il titolo dei ducati è troppo variabile per poterne dare il valore in monete francesi	« «	« «	« «
	Oncia nuova di 3 ducati, dopo il 1818 .	3,786	996	12 99
	Quintuplo di 15 ducati, dopo il 1818 . .	18,933	996	64 95
	Decuplo di 30 ducati, dopo il 1818	37,865	996	129 90
Arg.	12 carlini di 120 grani, dopo il 1804 .	27,533	833 $\frac{1}{3}$	5 10
	Ducato di 10 carlini di 100 grani, 1784 . .	22,810	839 $\frac{1}{2}$	4 25
	2 carlini, dopo il 1804.	4,589	833 $\frac{1}{3}$	0 85

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	NAPOLI (segue)			
Arg.	1 carlino, dopo il 1804.	g. 2,2945	833 $\frac{1}{3}$	l. c. 0 42, 5
	Ducato di 10 Carlini, del 1818.	22,943	838 $\frac{1}{3}$	4 25
	PARMA			
Oro	Zecchino	3,468	1000	11 95
	Doppia del 1784. ...	7,498	891	23 01
	Doppia del 1786, al 1791	7,141	891	21 91,50
	40 lire di Maria Luigia, dopo il 1815.	12,9032	900	40 «
	20 lire di Maria Luigia, dopo il 1815.	6,4516	900	20 «
Arg.	Ducato del 1784, e 1796.	25,707	906	5 18
	Pezzo di 3 lire, dopo il 1790	3,672	833	0 68
	.... di una lira, e 10 soldi, dopo il 1790.	1,836	833	0 34
	5 lire di Maria Luigia, dopo il 1815	25,000	900	5
	2 lire, 1 lira, $\frac{1}{2}$, ed $\frac{1}{4}$ di lira, a proporzione	« «	« «	« «
	GENOVA			
Oro	Zecchino	3,484	1000	12 01

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	PORTOGALLO			
		g.		l. c.
Oro	Moneta d'oro, lisbonina di 4800 reis . . .	10,752	917	33 96
	Mezza moneta, mezza lisbonina di 2400 reis.	5,376	917	16 98
	Quartino, quarto di lisbonina di 1200 reis .	2,688	917	8 49
	Mezza doppia portoghese di 6400 reis . . .	14,334	917	45 27
	Mezza portoghese di 3200 reis	7,167	917	22 63,50
	Pezzo di 16 testoni di di 1600 reis	3,583	917	11 31,75
	. . . . di 12 testoni di 1200 reis	2,583	917	8 02
	. . . . di 8 testoni di 800 reis	1,792	917	5 66
	Crociato di 480 reis .	1,045	917	3 30
Arg.	Nuovo crociato di 480 reis	14,633	903	2 94
	1000 reis	» »	»	6 12,50
	PRUSSIA			
Oro	Ducato	3,491	979	11 77
	Federico	6,689	903	20 80
	Mezzo.	3,3445	903	10 40
Arg.	Risdallero, scudo, talero di 24 buoni gro.si del 1767 al 1807	22,298	750	3 71,63
	Mezzo, o vero 12 buoni grossi.	11,149	750	1 85,81
	Grosso	» »	»	0 15,48

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	RAGUSA			
		g.		l. c.
Oro	Niente	. . . .	. . . .	. . . . .
Arg.	Talaro, detto ragusina .	29,400	600	3 90
	Mezzo	17,700	600	1 95
	Ducato	13,666	450	1 37
	12 grossetti	4,140	450	0 41
	6 grossetti	2,070	450	0 20,50
	RUSSIA			
Oro	Ducato del 1755 al 1763.	3,495	979	11 79
	. . . . del 1763	3,473	969	11 59
	Imperiale di 10 rubli, del 1755 al 1763 . .	16,585	917	52 38
	Mezzo di 5 rubli, del 1755 al 1763. . . .	8,2925	917	26 19
	Imperiale di 10 rubli, dopo il 1763	13,073	917	41 29
	Mezzo di 5 rubli, dopo il 1763	6,5365	917	20 64,50
Arg.	Rublo di 100 copek, del 1750 al 1762 .	25,870	802	4 61
	. . . . dopo il 1763 al 1807	24,011	750	4 0
	SARDEGNA			
Oro	Carlino, dopo il 1768 .	16,056	392	49 33
	Mezzo	8,028	892	24 66,50
	Doppia	9,118	906	28 45
	Mezza	4,559	906	14 22,50
Arg.	Scudo, dopo il 1768 .	23,590	896	4 70

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	SARDEGNA (segue)			
		g.		l. c.
Arg.	Mezzo scudo	11,795	896	2 35
	Quarto di scudo, o vero una lira	5,8975	896	1 17,50
	Scudo nuovo di 5 lire, 1816	25,000	900	5 0
	SAVOJA E PIEMONTE			
Oro	Zecchino	3,468	1000	11 94,50
	Nuova doppia doppia di 24 lire	9,620	906	30 0
	Mezza di 12 lire . . .	4,810	906	15 0
	Carlino, dopo il 1755	48,100	906	150 0
	Mezzo	24,050	906	75 0
	Nuova doppia di 20 lire, del 1816	6,4516	900	20 0
Arg.	Scudo di 6 lire, dopo il 1755	35,118	906	7 07
	Mezzo scudo	17,559	906	3 53,50
	Un quarto, o vero 30 soldi	8,7795	906	1 76,75
	Mezzo quarto, o vero 15 soldi	4,3897	906	0 88,37
	Nuovo scudo di 5 lire, 1816.	25, »	900	5 0
	SASSONIA			
Oro	Ducato	3,491	986	11 86
	Doppia Augusta, o vero 10 taleri	13,340	903	41 49

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	SASSONIA (segue)			
		g.		l. c.
Oro	Augusta, o vero 5 taleri	6,670	903	20 74,50
	Mezza Augusta	3,335	903	10 37,25
Arg.	Risdallero di specie, o scudo di convenzione dopo il 1763 . .	28,064	833	5 19,50
	Mezzo, o fiorino di convenzione . . , ...	14,032	833	2 59,75
	Talero di 24 buoni grossi (*moneta imaginaria*)	» »	»	3 89,63
	Un grosso, o 32.° di risdallero, o 24.° di talero	1,982	368	0 16,21
	SICILIA			
Oro	Oncia, dopo il 1748.	4,399	906	13 73
Arg.	Scudo di 12 tari . . .	27,533	$833\frac{1}{3}$	5 10
	SVEZIA			
Oro	Ducato	3,482	976	11 70
	Mezzo	1,741	976	5 85
	Quarto	0,8705	976	2 92,50
Arg.	Risdallero di specie di 48 scellini, del 1720 al 1802	29,508	878	5 75,73
	2 terzi di risdallero di 32 scellini	19,672	878	3 83,82
	Un terzo, o 16 scellini.	9,836	878	1 91,91

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	VENEZIA			
		g.		l. c.
Oro	Zecchino	3,484	1000	12 0
	Mezzo	1,742	1000	6 0
	Osella	13,666	1000	47 07
	Ducato	2,175	1000	7 40
	Doppia	6,764	917	21 36
Arg.	Ducato effettivo di 8. lire piccole	22,777	826	4 18
	Scudo della croce . . .	31,788	948	6 70
	Giustina o ducatone . .	27,954	948	5 91
	Talero	28,990	826	5 32
	Osella	9,843	948	2 07
	Ducato corrente di 6 $\frac{1}{5}$ di lira 124 soldi moneta di carta	» »	»	3 23,95
	Lira di 20 soldi	» »	»	0 52,25
	STATI UNITI D' AMERICA			
Oro	Aquila doppia di 10 dollari	17,480	917	55 21
	Aquila di 5 dollari . .	8,740	917	27 60,50
	Mezza aquila, o vero 2 dollari $\frac{1}{2}$	4,370	917	13 80,25
Arg.	Dollaro	27,000	903	5 42
	Mezzo	13,500	903	2 71
	Un quarto	6,750	903	1 35,50

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	GIAPPONE			
	(Per approssimazione, e senza determinati indizj sopra il peso, ed il titolo legale delle monete)			
				l. c.
Oro	Kobang vecchio di 100 mas	» »	»	51 24
	Mezzo di 50 mas . . .	» »	»	25 62
	Kobang nuovo di 100 mas	» »	»	32 69
	Mezzo di 50 mas . .	» »	»	16 34,50
Arg.	Tigo-gin, o vero pezzo di 40 mas	» »	»	14 40
	Mezzo di 20 mas . . .	» »	»	7 20
	Un quarto di 10 mas .	» »	»	3 60
	Un ottavo di 5 mas .	» »	»	1 80
	MOGOL (*per approssimazione*)			
Oro	Rupio di Mogol	» »	»	38 72
	Mezzo	» »	»	19 36
	Un quarto	» »	»	9 68
	Pagod, con la luna . .	» »	»	9 46
	. . . . con la stella . .	» »	»	9 35
	Ducato della compagnia olandese . . .	» »	»	11 62
	Mezzo	» »	»	5 81
Arg.	Rupio del Mogol . . .	» »	»	2 42
	. . . . di Madrasto . .	» «	»	2 40
	. . . . d' Arcate	» »	»	2 36
	. . . . di Pondichèri .	» »	»	2 42

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	MOGOL (segue)			
Arg.	Doppia fanone delle Indie	» »	»	l. c. 0 63
	Fanone	» »	»	0 31,50
	Pezzo della compagnia olandese	» »	»	2 40
	PERSIA (*per approssimazione*)			
Oro	Rupio	» »	»	36 75
	Mezzo	» »	»	18 37,50
Arg.	Doppio rupio di 5 abassis	» »	»	4 90
	Rupio di 2 ½ abassis .	» »	»	2 45
	Abassis	» »	»	0 97
	Mamudi	» »	»	0 48,50
	Larin	» »	»	1 03
	TURCHIA			
Oro	Zechino zermahboud d' Abdoul-Hamid, 1744.	g. 2,642	958	8 72
	Nisfio o ½ zermahboud *idem*.	1,321	958	4 36
	Rubbio, o vero ¼ di zecchino fondukli . .	0,881	802	2 43,33
	Zecchino zermahboud di Selim III.	2,642	802	7 30
	Mezzo	1,321	802	3 65
	Un quarto	0,661	802	1 82,50

METALLO	DETERMINAZIONE DEI PEZZI	PESO LEGALE	TIT. LEGALE	VALORE
	TURCHIA (segue)			
Arg.	L' allmichlec di 60 paras, dopo il 1771 .	g. 28,822	550	l. c. 3 52
	Yaremlec di 20 paras, o 60 aspri, 1757 . .	» »	»	0 99
	Rubbio di 10 paras, o 30 aspri, 1757 . . .	» »	»	0 49,50
	Para di 3 aspri, 1773	» »	»	0 04
	Aspro, di cui 120 fanno la piastra del 1773 .	» »	»	0 01,33
	Piastra di 40 paras, o vero 120 aspri, 1780.	18,015	500	2 0
	Pezzo di 5 piastre di Mahmoud, 1811. . .	» »	»	4 13,6

			Errori	*Correzioni*
Pag.	8	lin. 4	unità in questo	unità: in questo
	14	lin. ult.	esempio quì sotto	esempio, che segue
	40	lin. 26	In gererale . .	In generale
	50	lin. 17	Seconda . . .	Secondo
	97	lin. 7	esso, divida . .	esso divida
	104	lin. 17	*ecataro*	*ecatara*
		lin. 18	*miriaro*	*miriara*
	116	lin. 17	*dei due medj* .	*dei due* medj