BREVI NOTIZIE

INTORNO

LA VITA E LE OPERE

DI

NICOLA FERGOLA

BREVI NOTIZIE
INTORNO LA VITA E LE OPERE
DI
NICOLA FERGOLA

Non è maraviglia, che favole talvolta si raccontino degli uomini sommi della rimota antichità, se a giorni nostri osserviamo le capricciose, e strane narrazioni de' fatti di coloro, che hanno con noi convivuto, e che sono trapassati sotto a' nostri medesimi occhi.

Imperocchè chi mai avrebbe potuto immaginare, che Fergola vissuto sempre tra noi, capo di numerosa scuola, e continuamente frequentato da alcuni de' suoi più distinti allievi, dovesse, appena succedutane la morte, trovare tali descrittori delle sue memorie, da trasformarne la vita in romanzo! E pure così è avvenuto! Ognuno si ha permesso scriver di lui quello, che ha raccolto da qualche femminuccia, o da qualche fanatico; e delle sue stesse opere, e della vita letteraria di un uomo sommo, o poco si è ragionato, o si è detto tutt' altro di quello che conveniva.

Per tal ragione crediamo ora più che mai nostro dovere di far comparire in fronte de' suoi trattati analitici, l'uno delle *Sezioni Coniche*, l'altro de' *Luoghi geometrici*, due suoi importanti, ed insigni lavori, che primi dopo la di lui morte ripubblichiamo, e che per la loro trattazione debbono essere più per le mani di molti, le cose più rimarchevoli di sua vita, rilevandole dall' *Elogio storico*, che di lui scrisse, per la Reale Accademia delle Scienze di Napoli, il prof. Flauti, Segretario aggiunto di questa, ed antico allievo del Fergola, sempre attaccatissimo al suo maestro, e giusto, e saggio estimatore del di lui merito.

Nicola Fergola nacque in Napoli il dì 29 ottobre 1753. Sua madre fu Candida Starace, e suo padre Luca esercitava la professione di *Razionale* (*). L'amor di costui verso un tal suo figlio, che dalla più tenera età dimostrava ingegno non comune, gli fecero fare tutti gli sforzi per ben istituirlo, avendo in mira di avviarlo per l'avvocheria, professione nel nostro paese, e principalmente a quell'epoca, dignitosa, e conducente a gran-

(*) Così vengon chiamati presso noi quelli, che fanno mestiere di tenere la scrittura di amministrazioni o pubbliche, o private.

di fortune, ed onori. E qual padre buono, che ami un figlio, può mai avviarlo per la carriera sterile delle matematiche!

Compito ch' ebbe il corso di letteratura latina, si portò egli medesimo ad apprender Filosofia nelle Scuole de' PP. Domenicani in S. Tommaso d' Aquino, ove s' imbattè a studiar Geometria da chi n' era inespertissimo; ond' è che dopo poco tempo si avvisò prender miglior direzione avviandosi all' Università degli Studj, che a quell' epoca grandemente fioriva; ed ivi si diresse ai due abili professori Marcello Cecere, e Giuseppe Marzucco da' quali cominciò a gustare que' primi semi della Geometria, e dell' Analisi elementare, che poi dovevano in lui grandemente fruttificare, ed essere di tanta utilità al suo paese.

A quel tempo dettava, nello stesso stabilimento lezioni di pubblica Economia, e di Commercio l' insigne ab. Antonio Genovesi; ed ei andò ad ascoltarlo, e divenne ben presto l' allievo più distinto, ed amicissimo di un tanto maestro.

Poco dopo passò ad apprender Giurisprudenza, tra gli altri, col celebre Giuseppe Cirillo, e profittò anche non poco in questi studj (*).

(*) Deesi quì avvertire, che Fergola non tenne mai scuola di Giurisprudenza, dalla quale vi è chi ha sognato, che sortirono i primi ma-

Restato orfano, quando più bisogno avea di ajuti, per proseguire i suoi studj, fu obbligato dalle circostanze di famiglia a rinunciare alla carriera per la quale era stato avviato, ed abbracciar l' esercizio di alcuni degli affari del padre: ed ei cominciò pure a far lezioni private, dalle quali scarsa mercede ritraevasi a quell' epoca.

Mancante di libri, e privo di opportuni consigli (*) ei riescì a far fronte a tutti questi ostacoli col suo solo genio: ed appena potè proccurarsi la *Geometria* del Cartesio, ed i *Principj Matematici* del Newton, cominciò a far tesoro nella sua mente di quel gran numero di conoscenze, che da un' attenta, e meditata lettura di questi due libri si può trarre.

L' esercizio di lezioni gli fece far conoscenza dell' ottimo marchese Berio, il quale aprì a lui un gran mezzo d' istruzione, nell' allora magnifica libreria posseduta da questa famiglia, ed ora disgraziatamente perduta pel nostro paese, essendo sta-

---

gistrati attuali del nostro Foro. Egli fece solamente lezione di qualche trattato di Giurisprudenza ad un solo, che ora trovasi in distinto impiego.

(*) Raccontava egli stesso, che dimandando un giorno ad un suo maestro: *qual via dovesse tenere per apprendere a risolvere problemi geometrici*, ne ottenne per tutta risposta e direzione: *leggete gli antichi*. E pure ei seppe deciferar quest' oracolo, e tirarne grandissimo profitto.

ta non ha guari tempo, per vilissimo prezzo, venduta in Inghilterra. A ciò si accoppiò anche l'amicizia, e la conformità di studj col distinto nostro scienziato Nicola Pacifico, che era in istato di fornirlo di buoni libri.

Ei già aveva cominciato ad avere una scuola privata, nella quale radunavasi ristretto numero di allievi, ma pieni di ottime intenzioni, cui il loro maestro ispirava interesse per la scienza, che volevano apprendere; e tra i primi che la frequentarono bisogna notare Felice Giannattasio, ed Annibale Giordano, l'uno che or tra noi professa con decoro le matematiche, e l'altro che avrebbe senza dubbio grandemente onorata la scuola napolitana, se all'ingegno di cui era dotato avesse accoppiata quella istruzione, ch'è necessaria, perchè l'ingegno valga; e non avesse deviato da' buoni studj, e dagli ottimi precetti, e morale del maestro.

Senza alcuna precedente prevenzione sul valore de'metodi, ei da se stesso si mise a considerarli tutti e due, e ne conobbe di ciascuno i vantaggi, ed i mancamenti; e si persuase di buon'ora della necessità in cui si è di doverli, pel buon successo dell'invenzione, coltivare entrambi, dando a proposito a ciascun di loro la preferenza, e lasciandoli camminar di concerto ove bisogna. Ed a questo modo educò la sua scuola, e potè col fatto, anche, per ciò che riguarda istituzione della gioventù, valutare il vantaggio che si riceve da sì saggio procedimento.

Nella circostanza di fondarsi in Napoli una nuova Accademia, che doveva ripristinare, e sostenere la gloria di tante antiche già estinte, il suo collega Pacifico lo spinse a pubblicare le soluzioni di due difficili problemi, l'uno per: *Rintracciar la natura di quella curva, in cui la parte di ciascuna tangente, che si arresta tra due rette date di posizione sia uguale al raggio del cerchio osculatore di una tal curva, nel punto del contatto*; l'altro per: *Determinare in una data parabola uno spazio dato, per mezzò di una retta che passi per un dato punto*. E questi due problemi, ne' quali ei dimostra valore, e perizia ne' due metodi, furono da lui indiritti allo stesso Pacifico.

Ascritto all' Accademia napolitana, in qualità di Socio onorario, non tralasciò di lavorare per la medesima, ond' è che si videro, nel solo volume che ne fu pubblicato nel 1784, comparire tre dottissime Memorie del Fergola, l' una che contiene la: *Risoluzione di alcuni difficili problemi ottici*; l' altra: *Sulla vera misura delle volte a spira*, soggetto non di sua scelta, ma propostoli dall' Accademia; e la terza ove espone un suo *Metodo per la risoluzione de' problemi di sito*, argomento che fece poi proseguire dal Giordano, sotto la sua scorta, e che di nuovo ripigliò egli in altra Memoria nel 1787. Con questo suo metodo rese il Fergola sicura, e piana la strada per lo scioglimento di tal genere di problemi, o alla maniera degli antichi, più corrispondente alla natura di essi; o ancor, se vogliansi con la moderna analisi trattare, sodisfacendo in gran parte ai desiderj del Leibnitz, per un'analisi de' siti, che con tanto dispiacere l'Eulero, e 'l d'Alembert non videro promossa. E pure con tutto ciò ei non menò rumore di tal suo utile ritrovamento, e lo coprì di quella modestia, ch' è propria di chi sente il valore di sue forze, ed i mezzi che ha in se di fare anche altro di meglio; e non come quei poveri spiriti, che ogni ombra di luce che gli si mostra, gli fa credere di avere scoperto un nuovo mondo. Ma ei non arrestossi semplicemente a questi lavori per l' Accademia, e molti incarichi sostenne, che a questa piacque affidarli, e da' quali si trasse sempre con grandissimo onore. Segnò anche a questo proposito, com' è principal dovere delle Accademie, la via a' nuovi progressi delle scienze; e non tralasciò ei medesimo, dopo averla indicata, di percorrerla in gran parte. Il chè lo dimostra sempre conseguente a suoi principj in tutta la sua carriera.

Questi severi lavori letterarj non lo deviarono dall' attendere alla sua scuola privata, ed alla cattedra di Matematiche sublimi e miste, che nel 1789 gli venne conferita nel Real Convitto del Salvatore, dopo di averla per alcun tempo sostenuta da sostituto. In questo rincontro, e ad uso degli allievi di tale stabilimento, s' indusse ad ubbidire all' ordine Sovrano di pubblicare le sue *Prelezioni a' Principj Matematici* del Newton (*), colla quale opera non solo s' impegnò a rendere facili, e piane le verità astruse, difficili, e profonde, che l'immortal Newton aveva ordinate da inventore in tal suo libro; ma vi raccolse anche dagli Atti delle principali Accademie di Europa, e dalle opere di altri sublimi meccanici posteriori al Newton, quanto era necessario a mettere i giovani in istato di possedere la scienza, e studiare i distinti autori di essa; i quali due grandi oggetti dee prender di mira ogni buon scrittore di libri elementari.

Terminata l' edizione di quest' opera pregevolissima fin dal 1800, ei non volle più permettere che

(*) Quest' opera in vol. 2. in 8° fu pubblicata negli anni 1792 e 1793.

si ristampasse, mirando sempre a renderla più adatta allo stato attuale della scienza, e quindi a darle nuova forma, la qual cosa da lui maestrevolmente eseguita, è rimasta, come tante altre sue importanti fatiche finora infruttuosa, e forse lo sarà per sempre, per la gioventù cui la destinava.

I bisogni della sua scuola sempreppiù frequentata da ottimi giovani, il determinarono a scrivere gli *Elementi di Geometria Sublime*, ch' ei divise in due volumi, nell' un de' quali, che a replicate istanze degli allievi stessi fu pubblicato nel 1791 per cura del Giannattasio, vi si comprendevano le *Sezioni Coniche*, divise in quattro libri; e nell' altro doveva esservi trattato il difficile argomento del *Luogo di risoluzione*. E tal secondo volume non vide poi la pubblica luce, perchè man mano si accrebbe talmente sì prezioso materiale, che ei pensò a trattarlo più estesamente in un' opera in due vol. in 4°, della quale ne fu dato fuori un ragionato Manifesto nel 1809; donde sarà facile raccorre le dottrine importanti, che vi si dovevano comprendere.

Per supplire agli altri bisogni di sua scuola, e principalmente pel *Corso di Analisi Sublime*, ei preparava alla medesima i suoi MS. ai quali lavorava indefessamente, ora meglio ordinando le materie che trattava, ora rischiarando molte dottrine di esse, in altri autori difficili ed astruse, ed ora o rettificando taluni metodi, o risolvendo in nuova forma sempre più elegante alcuni problemi, e dimostrando più acconciamente de' teoremi. Ed ei per un saggio di questi suoi lavori permise, che si pubblicassero, in una *Raccolta di Opuscoli* intitolati della sua scuola, le ricerche da lui fatte intorno *le funzioni fratte, e 'l loro scindimento in frazioni parziali*, del quale argomento l'Eulero ne aveva più volte trattato; ma che dal Fergola può dirsi ridotto a quella perfezione elementare di cui era suscettivo, e che tanto desideravasi. E per la stessa ragione, ei non senza replicate spinte, s' indusse finalmente ad estrarre da questi suoi MS. le due dimostrazioni de' celebri teoremi del Cotes, e del Moivre, per presentarle, pel mezzo del prof. Flauti, alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, ne' cui Atti veggonsi ora pubblicate (*).

Ma quasi a mostrar sempre la varietà del suo ingegno, ei a queste Memorie di Analisi pura, che diede all'Accademia, volle accoppiare l' altra

(*) Vedi il Vol. I. pubblicato nel 1819.

sul difficile, ed importante argomento del *Problema inverso delle forze centrali, per le orbite algebriche*. Il metodo ch' ei vi adopra è nuovo, scevro da que' difetti che ravvisansi nelle soluzioni di altri illustri meccanici moderni, compresi l' Eulero, ed il Lagrange, che se n' erano occupati.

Fin dal 1801 la sua salute non permettendoli le assidue cure dello studio privato, molto più dopo essere stato promosso alla cattedra di Analisi moderna nella Regia Università degli Studj, ei volle che se ne occupassero i suoi allievi Giannattasio, e Flauti, che per quel tempo che il tenero, lo fu sempre in nome del Fergola, seguendo appuntino il suo metodo d' insegnamento. Egli però non tralasciava, ove conveniva, d' interessarvisi; e fu per provvedere a' bisogni sempre più crescenti del medesimo, che s' indusse a pubblicare le *Sezioni Coniche Analitiche* in un vol. in 8°, le quali vennero poi, a qualche distanza di tempo, seguite dalla dottrina de' *Luoghi Geometrici* (*).

(*) A quell' epoca il professor Flauti, per le sue lezioni di Geometria analitica nella Regia Università degli Studj, aveva lavorato ad un trattatino *sulle curve coniche*, seguendo il metodo del de l' Hopital, del quale non tenne più conto all' apparir l' opera del Fergola, ch' egli stesso spinse a darla in luce.

Con la prima di tali opere ei, ponendo in chiaro giorno l' andamento del metodo Cartesiano, ne dimostra ad evidenza i pregi, ed i vantaggi che possono ritrarsene, se mano perita lo adopri. Tra le cose più distinte, che incontransi in quest' opera, meritano di esser notate il problema dell' *evoluta di un quadrante ellittico*; quello di *assegnare un arco parabolico, che stia ad un altro dato in data ragione*; e l'altro di *due archi ellittici a differenza rettificabile*, famoso paradosso del conte Fagnano, che tanto onorollo, e che l' Eulero credè trascendere le forze dell' analisi moderna.

Nell' altro *Trattato analitico de' Luoghi geometrici*, ei imprende ad esporre i metodi dagli altri analisti adoperati per caratterizzare, e costruire i luoghi di second' ordine; ed indi passa ad esibire il suo metodo, che per l' eleganza, e per la facilità come procede, rende agevole, e piana la strada altra volta dura, e complicata della composizione de' problemi solidi. Egli tributa a tal proposito i giusti titoli di gloria dovuta al Cartesio, per la sua maniera elegantissima di costruire i problemi di terzo, e quarto grado, che colmerebbe di maraviglia i più grandi, ed accurati geometri antichi, se ora rivivessero. E dopo aver in tale opera, rivendicata ad Apollonio la soluzione del famoso problema *delle quattro rette*, che il Cartesio in ogni conto aveva voluto negargli, accenna una sua soluzione generale di questo problema, lavoro che da più tempo trovavasi aver fatto, come lo attestano i suoi allievi Giannattasio, e Flauti, e che tra i suoi MS. avrebbe dovuto ritrovarsi (*).

Fin quì si è qualche cosa accennato delle grandi conoscenze, e de' profondi studj matematici del Fergola; ma non bisogna tralasciare di ridire, che ei aveva nella sua prima gioventù coltivata con successo l'amena letteratura italiana, latina, e greca, e le scienze filosofiche, a' quali studj accoppiò la musica, e la scherma, che soleva chiamare *le arti napolitane*: ed a questo proposito non dee tacersi, ch'era il Fergola attaccatissimo alla gloria del suo paese, ed animato da vero spirito di lodevole patriottismo.

Delle virtù morali del Fergola è inutile parlarne, essendo esse pubbliche, ed a tutti note. Religione santa e pura, qual si conviene a perfetto cristiano; donde carità vera verso i suoi simili, a' quali ei si prestava sempre di buon gar-

(*) Si vegga in fine del presente Elogio.

bo, e con l'esempio, e col consiglio, e con que' pochi mezzi di soccorso, che la sua scarsa fortuna gli permetteva. Disinteresse sommo, ond' è ch' ei ricusò gl' incarichi i più distinti e lucrosi, che gli furono offerti. In fatti nel 1791 chiamato dal General Parisi a dirigere le scuole militari dell' Annunziatella, con quello stipendio che avesse voluto, vi si negò assolutamente, contento del tenue soldo di ducati 20 al mese, che ritraea dal *Convitto del Salvatore*; e nel 1801, senza ordine espresso del Re datoli a voce dal Ministro Migliorini, non avrebbe accettata la cattedra nell' Università degli Studj, quantunque allora nè men avesse più quella nel Convitto suddetto, perchè abolito.

Dell' ambizione glien' era ignoto anche il nome; se pur non si vuole, con quella bassa, e viziosa, che ammorba il più degli uomini, confondere l' altra, ch' è sublime virtù ne' dotti, di distinguersi co' loro utili travagli, co' prodotti del loro ingegno, e col numero di distinti allievi.

I severi suoi studj, e tante gravi fatiche gli avevan resa, fin dalla sua virilità, la vita egra, e languente; ed i suoi mali, che avevan fissato la base ne' nervi, sempre più crescendo, non ostante il parco vitto, e frugale, ed i rimedj ch' ei adoperava, l' obbligarono dopo qualche tempo a sospendere l' esercizio della cattedra, per ritirarsi a vivere nell' amena collina di Capodimonte, a respirarvi aria più amica de' suoi nervi. Ma nel 1806, riformata l' Università degli Studj, e conferita a lui la cattedra di Analisi sublime, dalle gentili maniere usateli dal Ministro dell' Interno Miot, che aveva pel Fergola quel rispetto, che meritava un uomo della sua Religione, morale, e sapere, fu rianimato in lui il desiderio, non mai spento, di rendersi utile alla gioventù napolitana, e ritornò a ripigliar l' esercizio delle lezioni. Interruppe nuovamente il corso di esse, per nuovo accesso di male sopravvenutoli; e ritornò a riprenderlo nel 1812, in occasione di altra riforma, nella quale passò a sostener la cattedra di *Sintesi sublime*, succedendoli il Flauti in quella di *Analisi sublime* (*): ed in questa circostanza fu anche nominato *decano* della Facoltà di Scienze Fisiche, e Matematiche. Ma ciò non durò pure che breve tempo, giacchè non permettendoglielo affatto i suoi mali, ottenne finalmente di ritirarsi dall' esercizio della cattedra, con onori, soldo, e grado di pro-

(*) Il Flauti professore nell' Università degli Studj fin dal 1803 aveva a quell' epoca la cattedra di *Analisi elementare*.

fessore, e con l'insinuazione di perfezionar nelle Matematiche qualche allievo in sua casa, al che adempì scrupolosamente.

Tra i molti incarichi, che a diverse epoche gli furono addossati, ci limiteremo quì a dir solamente di quelli, che per avere avuto risultamento permanente, ci sembrano degni di particolare considerazione.

Nel 1806 trattandosi della fondazione de' Collegj del Regno, e dell'ordinamento dell'istruzione per essi, fu chiamato a far parte di una commissione di ciò incaricata; ed ei si prestò volentieri a quest'incarico, che giudicò di molta utilità pel suo paese. Fu allora, che mirando allo stato de' libri elementari di Matematiche, ch'erano per le mani della gioventù, espose il bisogno di un buon *Corso* per tali scienze, indicando il professor Flauti come persona adatta ad occuparsene.

In seguito ben due volte acconsentì ad entrare a parte nel regolamento degli affari di pubblica istruzione del Regno, non ostante i gravi incomodi di sua salute; ma accortosi che la sua opera non sarebbe stata di alcun vantaggio, se ne ritirò ben presto. Fu sempre pronto a prestarsi al Governo, o anche a' particolari, laddove venne richiesto del suo parere sul sistema di educazione scientifica di pubblici, o privati stabilimenti, e sul merito delle persone da addirsi all' istruzione. E con quanta religiosità siasi condotto in tali commissioni ricevute, non è necessario che si dica, essendo a tutti notissimo; cercando sempre occasione di giovare, e fuggendo al contrario, ove non poteva far meglio, quelle nelle quali trattavasi di nuocere.

Alla stessa epoca poc' anzi detta, fu chiamato a dirigere gli studj di Marina, e vi si negò: lo stesso fece nel 1809 per quelli delle scuole Militari, ove con ampie promesse fu di nuovo invitato; ed anche così operò per la seconda volta coll' Accademia di Marina nel 1817, allorchè fu questa ridotta al maggior grado di splendore, di cui era suscettivo uno stabilimento speciale come quello. Di questi due ultimi inviti generosissimi, ed assai dignitosi pel Fergola, ne fu apportatore a lui il prof. Flauti, ch' ebbe gran parte in tali due riforme.

Nel 1808, in occasione di fondarsi in Napoli una Società Reale, distinta in tre Accademie, fu chiamato a far parte di una commissione pel regolamento di essa, e per la scelta de' membri che dovevano comporla; e tutto corrispose alla dignità del corpo, ed a quella de' proponenti.

In questa circostanza venne nominato cavaliere, la qual distinzione da altri tanto bramata, ei, con esempio unico tra noi, ricusò assolutamente; imitando in ciò fare l' illustre Eulero.

Ei però non potè con l'assiduità che avrebbe voluto intervenire alle tornate dell'Accademia, a cagione del suo stato di salute; della lontananza di sua abitazione, dovendo come si è detto, permanentemente vivere sulla collina di Capodimonte; e per l'ora in cui tenevansi tali tornate non propria per lui. L'Accademia intanto penetrata da tutte queste ragioni, e da grandissimo rispetto pel Fergola, lo ebbe sempre come presente nelle sessioni, pel gettone che davasi ai socj intervenuti, e si valse del suo consiglio in tutt' i rincontri. Egli però, per sua estrema delicatezza, non volle prendere i gettoni, che quante volte diede qualche lavoro per gli *Atti*. Ed a tal proposito convien dire, che oltre le due summentovate Memorie ei diede pure all' Accademia quella delle *Tazioni*, e l'altra del *teorema Tolemaico*. Nè questo gran rispetto che un corpo de' più distinti dotti nazionali ebbe pel Fergola, cessò con la di lui morte; che anzi si accrebbe non poco: mentre appena questa avvenne, indirizzo l' Accademia all'Eccellentissimo Ministro della Real Casa un rapporto, perchè i preziosi MS. del Fergola fossero per lei acquistati, promettendosene largo compenso alle eredi: ma questa nobile offerta, che che ne sia stata cagione, forse per cattivi consigli, venne da esse rigettata, senza valutare qual decoro sarebbe risultato anche al Fergola, per vedersi i di lui MS. pubblicati da un' Accademia, esempio che non aveva avuto luogo, che per l' Eulero con quella di Pietroburgo; e quanto vantaggio il pubblico ne avrebbe ritratto, oltre al loro particolare interesse. Ma di questi scritti, e della loro varia fortuna diremo tra poco.

Nel 1814. partendo da Napoli un insigne personaggio, distinto pel grado che teneva, ed anche per merito scientifico, e grande apprezzatore del Fergola, quantunque nol conoscesce personalmente, l' onorò di compitissima lettera, alla quale aggiunse un dono di ducati 800, per invitarlo così a stampare il *Corso di Analisi sublime*; ma il Fergola, non sentendosi atto ad adempiervi, pel suo stato di salute, nè volendo, ancorchè il potesse, postergare altri obblighi, ricusò gentilmente un tal dono, che il donatore non però riprese, serbandolo ad altro simile uso (*).

Tante gravi fatiche furono dal Fergola sostenute in mezzo ad una perpetua affezione di nervi, che come si è più volte detto, lo tormentava da gran tempo, e che gli preparava insensibil-

---

(*) Vegg. in fine di quest' elogio.

mente fine più penosa. Infatti crescendo semprep-più tal malattia, per la poca cura che gli si fece avere di se medesimo dalle persone che il circondavano, tra' quali uno che disgraziatamente pretendeva al mestiere di medico, e che per quella, dirò così, fatalità che accompagna la nostra vita, ne imponeva al carattere buono del Fergola, fu sorpreso da leggiero colpo di apoplessia nel dì 3. del mese di Febbrajo 1822, dietro del quale si osservò in lui una debilitazione di memoria, e di tempo in tempo, anche della facoltà intellettiva; un cambiamento, e durezza ne' movimenti degli arti, ed un imbroglio nell' articolar le parole.

In tal rincontro, non ostante i consigli di ottimi medici, e degli amici, seguendo i quali, certamente che il Fergola si sarebbe ripigliato in salute, fu allontanato ogni rimedio, e si fece vivere menando la solita vita. Ciò fu causa, che nella sera del 22 ottobre 1823, gli ripetè l' insulto apoplettico, privandolo a dirittura del lato sinistro, e della loquela: e pur si sosteneva tuttavia, con ostinazione inudita, da quel suo assistente, che Fergola non era sorpreso da apoplessia! I principali medici, e chirurgi della Capitale fecero tutt' i loro sforzi, per conservarli un' ombra di vita; e ciò sarebbe riescito loro, se fossero stati secondati. Ma tutti abbiamo il giorno segnato per finire, e per Fergola questo era giunto. I medici non furono intesi, ed i rimedj non praticati a proposito, e quanti conveniva; ond' è che sempreppiù peggiorando il male, finì di vivere, in mezzo a patimenti estremi, tollerati con una rassegnazione, e fermezza di animo grandissima, il dì 21 giugno 1824, e fu sepolto con commovente pomba funebre, alla quale intervennero, con caratteri di vero dolore, come a sì grave perdita conveniva, gran numero di professori pubblici e privati, e numerosissima studentesca.

I PP. Teatini offrirono luogo di pace alle ossa di un tanto uomo nella loro Chiesa di S. Paolo; e la Reale Accademia delle Scienze volle che se ne celebrasse la memoria con un elogio storico, che dal suo Segretario Aggiunto per le Matematiche Vincenzo Flauti fu letto, in una pubblica adunanza tenuta dalla medesima espressamente a quest' oggetto, alla quale, gli animi de' suoi concittadini ancora commossi dalla perdita di un tanto uomo, molti ne fece concorrere ad ascoltar le lodi dovute alla rara sua dottrina, ed alle grandi virtù morali che lo adornavano. Ma è fatalità connaturale agli uomini di esser facili a trasportarsi in ammirazione, e rispetto pe' grandi, e virtuosi uomini, difficili ad imitarli.

Restano di lui molte opere MS. monumenti di suo sapere, e delle profonde sue meditazioni, de' quali per darne qualche notizia recheremo il seguente atto autentico (*). Chi volesse conoscer di essi, e del loro fato più particolari, potrà leggere le *Memorie storiche intorno ai MS. di Nicola Fergola*.

Persuaso che taluni de' suoi scritti avevano ancor bisogno di cure ulteriori, e che taluni altri gli aveva solamente fatti per privato esercizio di scuola, ei, per quanto le forze di una mente in lui degradata dalla malattia il permettevano, lasciò notato nel suo testamento, che non si fosse dall' eredi pubblicato alcun suo lavoro, senza pria consultare l' ab. Giannattasio, il più antico suo allievo, ch' ei lasciò per tal ragione, ed anche per la qualità del carattere che ha, esecutore delle di lui volontà.

Ma quale sarà il fato delle opere MS. del Fergola? ne ritrarrà mai utile il pubblico, e stabiliranno sempre più esse al loro autore quella opinione di dottrina, della quale le cose da lui già pubblicate sono indubitati testimonj? A ciò non possiamo rispondere. Il prof. Flauti colla-

---

(*) Veggasi in fine del presente elogio.

boratore del Fergola, come più volte si è detto, ha cercato diverse congiunture, per indurre le eredi, con generose offerte, a pubblicare alcuni di tali MS. (*); ed esse non sarebbero state ostinate a non accettarle, se genj malefici del nostro paese, non avessero tradotte in ingiurie le buone intenzioni del Flauti.

Si dimanderà pure, se esistono essi per intero; ed a ciò nè anche si potrà rispondere con certezza. Gli scritti di Meccanica non appariscono nel notamento di essi fattone per disposizione della Reale Accademia di Scienze (*); e varj problemi ch'ei, secondo che gli risolveva, registrava in un zibaldone, per estrarneli all' uopo, e quando ne aveva bisogno in altri suoi lavori, si veggono girare pel nostro paese come risoluti da altri. Nè a ciò potrà opporsi alcun ostacolo.

(*) Vegg. in fine di quest' elogio.

DOCUMENTI STORICI

DI CIÒ CHE SI È OPERATO PER SALVARE I PREZIOSI MS. DEL FERGOLA

Appena avvenuta la morte del Fergola, il Presidente della Reale Accademia delle Scienze diresse all' altro della Società Reale Borbonica la seguente rappresentanza.

Napoli 22 *Giugno* 1824.

SIG. PRESIDENTE

» Con sommo ed inesprimibile dolore del mio cuore partecipo
» a V. E. Rev. la perdita fatta da questa nostra Accademia, non
» che dall' Europa intera, del chiarissimo Socio ordinario sig. D. Ni-
» cola Fergola. Cessò egli di vivere il giorno 21 del corrente al-
» le ore 19 1/2; e dimani alle ore 22 se ne celebreranno le esequie,
» con l' intervento de' Socj espressamente invitati di tutte le tre Ac-
» cademie componenti la Società Reale.

V. E. sa quanto questo sublime matematico abbia lavorato in
» varj rami di questa scienza, che ha illustrati con le sue opere,
» e con le sue Memorie inserite ne' nostri Atti accademici. Altre
» non poche ne rimangono inedite, che si dovrebbe proccurare di
» acquistarle dagli eredi, e specialmente quelle che riguardano la
» sua *Arte d' Inventare in Matematiche*, e 'l *Corso di Analisi Su-*
» *blime*, *e le sue diverse applicazioni*.

A. S. E. Rev.
Mons. D. Carlo Rosini
Presid. della Società R. Borbonica.

Firmato: LIONARDO SANTORO
Presid. della Reale Accademia delle Scienze.

Quindi, in seguito di rappresentanza, che dal Presidente della Società Reale fu passata a S. E. il Ministro della Real Casa, e della risposta ottenutane, fu da quel Presidente scritto all' altro dell' Accademia delle Scienze nel tenore seguente.

Napoli 8 *Luglio* 1824.

SIGNORE

» Avendo rassegnato a S. E. il Ministro della Real Casa la pro-
» posizione di cotest' Accademia, per acquistarsi dagli eredi del defun-
» to D. Nicola Fergola le di lui opere inedite, la prelodata E. S.
» ha dimandato maggiori *dettagli* sulle dette opere, e di conoscere
» il prezzo che potrebbero valere.

Firmato : MONS. ROSINI.

L' Accademia dopo ciò diede l' incarico a' Socj Visconti, e Flauti, Segretario aggiunto di essa per le Matematiche, di esaminare tali MS. per proporzionarvi un conveniente compenso. Il Professor Flauti ne fece parlare alle eredi, delle quali l' una aveva già per 200 ducati vendute le sue ragioni all' altra, ch'era una vecchia pinzochera assistita da una sorella anche tale, e da queste ebbe per risposta, che *qualche forestiero avrebbe pagati tali MS.* 10 *a* 12 *mila ducati*.

Dispiacque al prof. Flauti l' insulsa risposta delle due sopraddette donne, pel riflesso che si perdeva sì bella occasione di vedere un' Accademia di scienziati prender parte alla pubblicazione de' MS. di un suo socio, e pel desiderio che aveva di veder compito il Corso di Studj matematici, che da tanto tempo il Fergola, ed egli avevano promesso al pubblico; ed allora pensò a far offrire all' erede di stampare a sue spese, ed impiegando la sua opera, ove bisognava, quella parte del Corso di Matematiche, che dal Fergola si era elaborata, dandone tutto il guadagno ad essa. E per far sì, che ne godesse dal primo momento, offriva di ritirare le spese da fare a metà col guadagno che a lei ne veniva. Questo disinteressato progetto, che assicurava ad essa una proprietà, che nello stato attuale non val nulla, venne anche ricusata; che anzi si diede ad intendere a questa povera donna, che tal generosità del Flauti non era che un' illusione. Allora il professor Flauti abbandonò al suo destino quest' infelice, e la sua sorella raggirate da due persone di mal talento, e si diede a pensar egli a rimediare al vuoto che restava nel Corso di Matematiche, come annunziò al pubblico nel Manifesto che diede fuori nel 1825.

In questo frammentre un' altra congiuntura parve preparare felici speranze per la ricuperazione de' MS.

Esistevano ancora invenduti i libri del Fergola, tra i quali non pochi pregevoli in Matematiche, e qualche uno ben raro; ed i diversi suoi allievi ne attendevano la vendita, per proccurarsi così una memoria del loro Maestro. Alle premure di costoro spinta la vecchia erede alla vendita, si opposero due soggetti, col pretesto insulsissimo che que' libri erano essenziali alla stampa de' MS.; e che non bisognava alienarli a chiunque, ma che gli avrebbero essi comperati. Fecero quindi eseguire un' apprezzo di tali libri eglino medesimi, e ne fecero ascendere il valore a ducati 239.

A questo primo passo, che portava a sì basso prezzo tali libri, si aggiunse l' altro di ben poca delicatezza, di farsene per ciascun di loro la scelta di ciò che vi era di meglio, minorandone anche il valore del quinto sull' apprezzo già fatto; e lasciando in mano dell' erede burlata il rimanente de' libri, pe' quali gli fecero supporre, che vi era già persona che sarebbe venuta a prenderseli, compiendole il valore intero dell' apprezzo. Ma questa persona non comparì mai; ond' è che in qualche modo parvero le due pinzochere raffreddarsi sulla buona opinione, che que' due soggetti si avevano con esse acquistata.

Si aggiunse, che a quest' epoca il Flauti, avendo inteso che pe' MS. del Fergola que' due soggetti, credendo di aver allontanata ogni pretensione di altri, ne offrivano duc. 300, e che il contratto era per farsi, mandò ad offrir 500 ducati, a solo oggetto che i MS. non si alienassero: e quelli giunsero allora anche a tàl somma; ma poco dopo abbandonarono l' impresa.

In questo mentre esso Flauti, per non incolparsi affatto di aver trascurato mezzo a tentare, scrisse la seguente lettera, con la quale credeva di aver ovviato a tutte le asserzioni incivili, e sciocche, e da dover persuadere sicuramente la pinzochera erede, e la sua sorella, ch' entrava consigliera spirituale in tutte le cose dell' altra.

Napoli 10 Novembre 1825.

Mie Signore

» Il rispetto ben dovuto alla memoria del mio illustre maestro, » e vostro benefattore, il Sig. Nicola Fergola, e l'amore che gli » ho portato, e che in tutte le circostanze gli ho sempre dimostra- » to, principalmente in aver sostenuta la di lui scuola, mi fanno » reprimere ogni giusto risentimento, che io debba avere, per la » condotta da Voi, e da taluno da me grandemente beneficato te- » nuta a mio riguardo, dopo la morte del Fergola, e parlarvi an- » che per un' ultima volta de' suoi manoscritti.

» In seguito della morte del Fergola, la Reale Accademia del- » le Scienze, per un attestato del suo rispetto verso sì distinto so- » cio, rapportò a S. E. il Ministro della Real Casa quello che » originalmente rileverete dall' inserito foglio N. 1,; e da questo ne » ricevè la risposta trascritta nel foglio N. 2. (*). Destinati il Socio » Visconti ed io a trattare con Voi un tale affare, ed a proporzio- » narvi una somma per compenso di quelle onorevoli fatiche del- » l' illustre Fergola, che da noi sarebbero state scelte per l' Acca- » demia, Voi sempre mal consigliate ricusaste tali offerte; e così » non pure mal provvedeste a' vostri interessi; ma anche al decoro, » ed all' onore che sarebbe risultato al Fergola, in vedersi un' Acca- » demia impegnata a pubblicare le opere da lui lasciate inedite, rin- » novando l' esempio che aveva avuto luogo per l' Eulero con quella » di Pietroburgo.

» Questa seconda parte però, meno dee attribuirsi a vostro er- » rore, che all' ignoranza de' vostri consiglieri.

» In tal circostanza, prevedendo ben io quali fossero i veri mo- » tivi, che inducevano costoro ad allontanarvi da' vostri interessi, e » da quelli che favorivano la riputazione di un uomo che vi ha sì » generosamente beneficate, insistei col Giannattasio, perchè gli scrit-

(*) *Tali fogli contenevano le lettere quì sopra riportate, pag.* XXVII. *e* XXVIII.

» ti si fossero inventariati, e chiusi: nè a questa mia giusta dimanda si diede pur ascolto. Gli scritti si vollero tenere aperti all' arbitrio di persona, che avendo la coscienza lesa per cose che già erano pervenute nelle sue mani durante la lunga malattia del Fergola, voleva assicurarsi se alcun vestigio vi restasse da smascherarlo, o pure altro ne dovesse trarre, come di fatti avvenne.

» Scorso dopo ciò alcun tempo, siccome col sig. Fergola di onorata e rispettabile memoria, lavorando insieme pel completamento del Corso di Matematiche, ad uso della Scuola napolitana, si era stabilito, che per la parte di *Analisi de' Finiti*, e della sua *Applicazione alla Geometria* me ne sarei io occupato, riserbando per se quella *degl' Infiniti*, così vi feci offrire di permettermi, che io completassi i MS. da lui lasciati per questa, ed in suo nome gli pubblicassi a mie spese, dandone a Voi tutto il profitto, che dalla vendita se ne sarebbe ritratto. E Voi foste anche mal consigliate a ricusare questo progetto, che anzi vi faceste, con mia somma sorpresa persuadere dalla malvagità di taluni a credere, che sotto tal mia richiesta vi si ascondesse qualche mistero criminoso, che con carità poco cristiana aveste il coraggio di propalare, movendo nella gente sensata, e dabbene risa, ed indegnazione. Veramente la mia offerta era troppo generosa, perchè dovesse divenire per Voi sospetta; ma il mio carattere è stato sempre liberalissimo, e molto più lo doveva essere, trattandosi di salvar da rapina, o oblìo le fatiche di tanti anni del mio ottimo maestro.

» Quest' ultimo tratto di cattiva condotta verso di me tenuta, mi aveva interamente fatto desistere dal più pensare a poter pubblicare i MS. del Fergola, e quindi diedi fuori un Manifesto, ove promisi di adempiere io alla promessa tante volte fatta del Corso di Analisi, laddove la vostra ostinazione volesse far rimanere inutili le fatiche già fatte dal Fergola. Perchè però nulla mi restasse a rimproverare di aver omesso in tale affare, e però di aver mancato al dovuto rispetto verso un tanto uomo, fo ora l' ultimo tentativo, offrendovi la seguente transazione.

1. » Siccome per tutti gli scritti del Fergola ve n' erano stati

» offerti duc. 500; contratto che poi nè meno ha avuto luogo, e
» per prenderli persone che avrebbero fatto il meglio ad appropriar-
» seli, come forse ne avevano l' intenzione, giacchè volendo pub-
» blicarli in nome del Fergola, ne avrebbero vituperata la memoria;
» così io ora mi comprometto di pagare la stessa somma per tali scrit-
» ti, che non dovranno però venire nelle mie mani. I MS. del Fer-
» gola non debbono diventare il patrimonio di alcuno, nè le fatiche
» di quest' uomo debbono da' suoi eredi essere vilmente vendute, per-
» chè altri o se le approprii, o pure le renda inutili.

» 2. Essi saranno a mie spese ben ligati in diversi volumi, se-
» condo le materie che vi si trattano, ed i fogli vi saranno nume-
» rati. In fronte a ciaschedun volume vi sarà notato il numero dei
» fogli, e l' indice de' Capitoli.

» 3. In tale stato verranno depositati presso i PP. Teatini di
» S. Paolo, per rimanere donati a perpetuità a quello stesso luogo,
» ove riposano sonno di pace le ossa del loro autore.

» 4. A nessuno, oltre che a me, o a persona col mio consen-
» so, sarà permesso, fino alla loro pubblicazione, il poter vedere,
» o copiare tutti, o parte di tali MS., al quale oggetto essi reste-
» ranno chiusi con tre chiavi, una delle quali sarà presso il *Pro-*
» *posito* del luogo, l' altra presso le eredi, e la terza presso di me.
» A proporzione però che ciascun Trattato sarà pubblicato, resterà
» esso libero, perchè chiunque possa osservarlo.

» 5. Per la pubblicazione degli scritti accetto la condizione lasciata
» in testamento dall' autore, relativamente all' Ab. Giannattasio (*).

» 6. Volendo pubblicare un qualche Trattato, mi dovrà esser
» consegnato per farne estrarre una copia; e tal consegna mi si fa-
» rà in quelle forme legalissime, che piacerà da ora stabilire, accet-
» tando io perciò tutte le più severe condizioni, onde l' integrità del
» MS. sia assicurata. Terminata la copia, e l' edizione, ritornerà il
» MS. presso i PP. Teatini, insieme con un esemplare ben ligato
» dell' opera stessa.

(*) *Veg. il precedente elogio* *pag.* XXIV.

» 7. Tutto ciò che sarà da me aggiunto per completare un qual- » che trattato che si stamperà, giacchè tutti sanno che i MS. del » Fergola sono incompleti, sarà messo in carattere diverso dall'altro.

» 8. La spesa della copia, e della stampa sarà interamente a mio » carico; ed una volta che siasi questa ritratta, tutto il profitto » sarà a vantaggio dell' eredi del fu Fergola, durante la loro vita, » non solamente per la prima, ma anche per le successive edizioni, » se avranno luogo. Solamente 50 esemplari ne saranno da me pre- » si, ad oggetto di darli a' forestieri miei corrispondenti, e ad al- » tri amici, e persone distinte della Capitale.

» 9. Le eredi potranno perciò, per assicurare i loro interessi, » stabilire, che de' volumi tirati, e della loro vendita prendesse » conto chi a loro piace.

» 10. Dopo la morte delle eredi del Fergola, tutto resterà di » mio dritto, da poterlo anche cedere a chi a me parrà, e piacerà.

» 11. In caso che esse, stando fermi i precedenti art., voglia- » no solamente liberarsi dal più pensarvi, e cedere da ora a me la » proprietà delle opere stampate del Fergola, mi obbligo, o di dar » loro duc. 50 per ogni Trattato che si pubblicherà, o pure di co- » stituire a mie spese il capitale di duc. 800. di Messe lasciatesi dal » fu Fergola.

» Io spero che quest'ultima volta, le Sig. Eredi, cui non man- » do ambasciate, ma loro scrivo precisamente le mie intenzioni, vo- » gliano ben consultare i loro interessi; ed onorarmi di una loro ri- » sposta qualunque siasi.

VINCENZO FLAUTI.

Una tal lettera essendo stata inviata all' erede depositaria de'MS. per mezzo del P. M. Ruberti ex-Domenicano, persona di grandissimo decoro, e degna di tutto il rispetto, meritò per conseguenza la seguente risposta, la quale annunzia abbastanza in quali mani trovansi le fatiche di un uomo sommo come il Fergola.

Casa li 2 Dicembre 1825.

RIVERITO SIGNORE

» Onorata da gentilissimo vostro foglio in data de' 10 Novembre
» spirato. Per non essere manchevole ad una sollecita risposta, e
» come l'affare porta seco una matura riflessione, ed io non sono al
» momento da poter risolvere: ringrazio vivamente la vostra gran
» premura, che avete per illustrare vieppiù la memoria del trapas-
» sato mio fratello, vostro maestro. Ma io so quello che debbo fa-
» re, e non dubitate, che entrambi ne portiamo la stessa premura,
» che coll' ajuto del Signore si farà il tutto con sua gloria, ed ono-
» re del defunto.

» Con profondo rispetto, resto dicendomi

Divotissima Serva
M. LUIGIA FASULO.

Si era qui arrestata là faccenda, nè il Professor Flauti più pensava a' MS. del Fergola, tranquillo nel suo animo, per aver fatto tutto quello che con decoro conveniva in questa circostanza; quando un giorno che men sel pensava, per mezzo del suo collega nell' Università degli Studj sig. Parroco Giannattasio, gli giunse l' imbasciata del poc' anzi nominato P. M. Ruberti, che desiderava parlargli, e che era già passato per la di lui casa, senza avervelo ritrovato: ed il Parroco suddetto era anche istruito, che le premure del Ruberti erano, per concertar l' occorrente intorno a' MS. del Fergola, giacchè gli antichi pretensori si erano allontanati, lasciando l' erede, e la sua sorella disgustate.

Il Professor Flauti andò il dì seguente dal Ruberti, il quale facendoli le scuse per parte delle due sorelle pinzochere, gli fece conoscere per quali indecenti vie si erano condotti que' due soggetti di sopra indicati, a fin di deviare l' animo di esse dall' aderire a qualunque sua proposizione. Fa orrore il solamente pensare a tanta nequisia adoperata da persone, che sono state grandemente beneficate dal professor Flauti, e che quasi al momento stesso di questa loro trista condotta stava tuttavia beneficandole. Soggiugneva il Ruberti, che tutto si era ora messo al chiaro; e che quelle eran decise di dare i MS. all' Accademia, prendendo da questa non altro compenso, che i duc. 500 a loro già offerti da' sopraindicati due soggetti.

Il Professor Flauti non mancò di mostrare al P. M. Ruberti il suo ritegno in mischiarsi più in questo affare, molto più dovendo prendere impegno con l' Accademia, per persone che aveva più volte sperimentate di non retta fede. Ma il P. M. Ruberti, fondandosi sulla sua onesta maniera di pensare, lo assicurò che egli non dubitava affatto, che quelle donne sarebbero restate ferme nel loro impegno, e che essendovi egli per lo mezzo, non avrebbero mai osato recederne. L' accordo fu quindi stabilito tra il P. M. Ruberti e 'l Professor Flauti, il quale nella prossima tornata dell' Accademia delle Scienze espose a questa tutto l' affare.

Fu di nuovo abbracciato il partito dall' Accademia, e vennero destinati alla stessa operazione di altra volta i socj Visconti, e Flauti, cui fu aggiunto il socio Giannattasio, che per legge aveva già cessato dalle sue funzioni di esecutore testamentario del Fergola.

Senza stare a descrivere il rimanente di questo affare, si rileverà esso assai bene dalla seguente relazione, che la suddetta commissione presentò all' Accademia nella tornata del dì 18. Giugno 1826.

RELAZIONE DE' SOCJ VISCONTI, GIANNATTASIO, E FLAUTI INCARICATI DALL' ACCADEMIA PER VEDERE, E VALUTARE I MS. DEL FU NICOLA FERGOLA.

SIGNORI

» Il geloso, e difficile incarico che a voi piacque affidarci, in ri-
» guardo a' preziosi MS. lasciati inediti dal fu nostro collega, e som-
» mo matematico Nicola Fergola, è stato da noi pienamente eseguito;
» ed ora abbiam l' onore di presentarvi di esso distinto ragguaglio.

» La prima volta che ci portammo in casa dell' erede conserva» trice di tali MS., Signora M. Lugia Fasulo, coll' intervento anche » del nostro Segretario Perpetuo Cav. Monticelli, e del P. M. D. » Biagio Ruberti (soggetto dotto e distinto, cui dobbiamo il buon » avviamento di questo affare, e che ci ha in tutta l' operazione da » noi fatta assistiti, con somma bontà e pazienza) ci venne presen» tata una massa di carte oltremodo disordinata, senza numerazione » di pagine, e nè tampoco di paragrafi, di proposizioni, e di capi» toli, in carta di diverse qualità, di tal che altra guida non ve» demmo per tentarne una qualche separazione, che la sola, e sem» plice diversità delle materie.

» Questo informe stato di un materiale preziosissimo, risultamen» to delle diuturne e severe meditazioni di un uomo sommo, per » tanti anni, da principio c' imbarazzò non poco; ma il desiderio » di non far restare perduti tanti lavori utili, ed importanti ci fu di » sprone a superare ogni difficoltà. Quindi ci siamo portati in casa » della Sig. Maria Luigia Fasulo in ciascun giorno di lunedì, e giovedì » di aprile, e maggio scorsi; e prima cercammo di separar le materie, » distribuendo i manoscritti in tanti portafogli, nel seguente modo.

Gli Scritti di Analisi sublime in portafogli	3
. . . . . . di Arte Euristica in portafogli	2
. . . . . . di Memorie diverse	2
. . . . . . di Applicazione di Analisi sublime	2
. . . . . . di Problemi, e Ricerche di ogni genere	2
. . . . . . di Miscellanea	3
	14

» Dopo ciò procedemmo ad ordinare alla meglio il materiale di » ciascun portafoglio.

» Le difficoltà incontrate in questa operazione sono state gran» dissime, per la doppia ragione, e delle lacune che s' incontravano, » e della similitudine delle materie, avendo ritrovati fino a quat» tro MS. dell' istesso trattato, senza che per nulla si potesse di» scernere qual fosse l' ultimo. Sarebbe dunque stato bisogno il leg» gerli, e considerarli, a fin di poter discernere il poc' anzi detto; ma

» ciò la strettezza del tempo, e le circostanze nol permettevano. Quin-
» di fummo di opinione di dividerli alla meglio, e quasi direm co-
» sì a colpo d'occhio, serbando una convenevol separazione, ed or-
» dinamento di materie, da poterli in seguito chiunque con agio con-
» siderare, a fin di porli una volta in quell' ordine, che l' è proprio,
» e che dal loro dotto autore gli fu dato. Ed affinchè dopo il da
» noi fatto, null' altro disordine vi si avesse potuto indurre da chic-
» chessia, o altro materiale trarsene, come pur troppo precedentemen-
» te ha dovuto avvenire, col consenso della depositaria, ed erede Fa-
» sulo, e del P. M. Ruberti, interveniente per lei, abbiam fatto
» attentamente legare ciascun volume in casa stessa della suddetta
» erede, e sul medesimo vi abbiamo notato i titoli de' trattati che vi
» si contengono, e le pagine di carattere del Fergola, o di alieno
» carattere.

» Ne sono da ciò risultati i seguenti 21. volumi.

» Vol. 1. Ricerche Geometriche sulla quantità della luce sola-
» re, e del calore, che in ciascun giorno penetrano i nostri edifizj
» pe' loro vani.

» Vol. 2. Ricerche Fisico-Matematiche su talune *bolidi* apparse
» in Napoli in diverse epoche, ed osservate dal Signor Fergola.

» Vol. 3. I°. Ricerche aerometriche, applicate principalmente
» all' eruzione de' vulcani.

» II°. Ricerche dinamiche sulle concussioni derivanti da'tremuoti.

» Vol. 4. Diottrica analitica.

» Vol. 5. Applicazioni diverse di Analisi sublime a ricerche di
» Geometria, di Meccanica, e di Astronomia.

» In questo vol. si comprendono solamente taluni Capitoli del
» Trattato di Meccanica Analitica dal Fergola composta per intero,
» come a molti è noto, e che pensava di pubblicare.

» Vol. 6. Corso di Analisi sublime, cioè di Calcolo differen-
» ziale, integrale, e delle variazioni, forse l'ultimo, ed il più com-
» pleto. Vi è per accidente legato un cartolajo appartenente al Vol. 3.

» Vol. 7. Altro MS. di Analisi sublime, che porta l' indicazio-
» ne dal 1800 al 1804, nel quale oltre a' trattati precedenti, vi si
» contiene anche l' introduzione all' Analisi degl' infiniti.

» Vol. 8. Miscellanea dell'Introduzione all' Analisi degl'infiniti :

» Vol. 9. *Arte Euristica*, tanto per la parte elementare, che » per la parte trascendente. Va in questa inclusa una lunga memo- » ria su i massimi e minimi sinteticamente trattati, e la continuazione » de' metodi inventati dal Fergola pel facile risolvimento de' proble- » mi di sito, lavori già da lui promessi a questa Reale Accademia.

» Sono collegate in fine di questo volume due tavole di figure » appartenenti al problema delle tre, e quattro rette, che avrebbe do- » vuto trovarsi tra i MS. dell' Arte Euristica del Fergola, ma che » ha dovuto esserne stato tolto, non incontrandosene altro vestigio, » oltre le suddette due tavole, che qualche pezzo volante di carta, » ove sta scritta qualche noterella, e ch' è sfuggito agli occhi di chi » ne ha tratto tutto questo lavoro.

» Similmente non ci è riescito ravvisare tra questi MS. le im- » portanti ricerche del Fergola su i *Porismi Euclidei*, e forse non » sono le sopraindicate cose i soli mutilamenti, che hanno sofferto » i MS. di quest' opera importante, ed elaboratissima del nostro socio.

» Vol. 10. Altro MS. di Analisi elementare e sublime incom- » pleto, e forse più antico de' precedenti.

» Vol. 11. Trattato filosofico-matematico su i Miracoli.

» Vol. 12. Antichi MS. di Arte Euristica.

» Vol. 13. Luoghi geometrici analiticamente trattati; insieme » ad altri MS. di cose appartenenti all' Arte Euristica, il tutto in » gran parte già pubblicato.

» Vol. 14. Miscellanea di Analisi sublime.

» Vol. 15. Miscellanea di Arte Euristica.

» Vol. 16. Miscellanea di vario argomento.

» Vol. 17. Antico MS. di Astronomia incompleto.

» Vol. 18. Selva di problemi, e di varie ricerche di Geome- » tria, di Analisi, e di Meccanica.

» Vol. 19. Come il precedente.

» Vol. 20. Corso di Analisi, e di Arte Euristica.

» Questo è per l' appunto quello di cui il Fergola facea uso al- » lorchè tenea scuola privata; ed è perciò il più antico.

» I tre precedenti vol. si trovavano già belli e ligati da mano » al Fergola stesso.

» Vol. 21. Memorie diverse presentate alla Reale Accademia delle » Scienze e Belle Lettere, o del Fergola, o a lui inviate per esame, cioè :

» I°. Memoria del sig. Fergola sulla illuminazione de' corpi sfe» rici, pubblicata nel 1°. vol. degli Atti di quell' Accademia.

» II°. Dissertazione del P. Saladini sulla *Stadera Universale*.

» III°. Memoria dello stesso su i globi areostatici.

» IV°. Memoria ottica, mancante d' intitolazione.

» V°. Memoria del sig. Grippa sul calcolo delle volte a spira.

» Quest' ultima Memoria restata tra i MS. del Fergola rischiara » un punto storico riguardante i lavori di quell' Accademia — Nel » primo vol. degli Atti di essa si trova stampata una Memoria del » Fergola concernente lo stesso soggetto: ed egli più volte parlando » di questo suo lavoro soleva dire, che non pur da se medesimo lo » avea intrapreso; ma per incarico ricevuto dall' Accademia, per » supplire ad una impropria Memoria che glien' era stata inviata, senza » che mai avesse indicato da chi, e nè meno se nazionale, o straniero.

» Se la prima parte del nostro incarico ci avea non poco im» barazzati; non lo è stato di meno l'altra di valutare il compenso » da darsi all' erede del Fergola per questi Scritti. Poichè come mai » dar prezzo a lavori mentali, ed a fatiche di tanti anni di un uomo » sommo! In tal circostanza noi non abbiam trovato miglior espe» diente a prendere che il seguente. Eravamo già istrutti, che due per» sone, quelle stesse, come ogni ragione ci fa credere, alle quali » si doveva il disordinamento, ed anche la mutilazione de' MS. del » Fergola, avevano offerto all' erede per acquistarli duc. 500, al » che questa si era negata, forse non tanto per la tenuità della » somma, quanto perchè ad essa non parea conveniente il far capi» tare le opere inedite del Fergola in mano di particolari, a' quali » potea ben venire il pensiero di appropriarsele. Ecco perchè essa » si rivolse alla nostra Accademia, che altra volta l'avea fatta ri» chiedere di tali MS.

» Intanto, mentre da noi si stava eseguendo il notamento de' me» desimi, quegli stessi, a disturbare ogni nostra operazione, o for-

» se anche a solo oggetto di angariarla, si presentarono di nuovo all' erede, portando la loro offerta fino a 700 ducati, e qui si ristettero; poichè essa lor disse, che definitivamente il contratto con l'Accademia era già fatto, e che non avrebbe mancato di parola.

» In vista di ciò non può offrirsi all' attuale proprietaria de' MS. del Fergola meno de' duc. 700.

» È questo il limite minimo. Sarà poi ben degno della generosità di questa rispettabile Accademia, e del Governo che l' onora di sua protezione, il portare tal compenso a quella maggior somma che crederà.

Dopo letto all' Accademia un tal rapporto, in nome dell' intera Commissione, dal Segretario Aggiunto Flauti, questi particolarmente lesse l' altro seguente.

SIGNORI

» Avete già inteso quello che la Commissione da Voi incaricata, per osservare gli scritti lasciati inediti dal fu Fergola vi ha rapportato intorno ad essi per mezzo mio, e da tal relazione ben si rileva, che ne' medesimi contengasi tutto quel materiale, che sì insigne uomo aveva preparato per completare un Corso di studj matematici ad uso della Scuola napolitana, e non pochi lavori per quest' Accademia. Che però è ben degna di essa la cura che prende, per assicurare tali MS., mettendoli al coperto da ulteriori dilapidazioni. Non sarà però superfluo, che prima di dar su tal rapporto alcun vostro provvedimento, ascoltiate anche un mio progetto, dal quale l' acquisto de' sopraindicati MS. viene ad essere grandemente agevolato.

» A questo proposito conviene che io vi ricordi ciò che ebbi l' onore altra volta di passare a vostra notizia, in leggendovi l' elogio storico del Fergola, cioè, ch' ei ricusò la generosa offerta fattali da distinto personaggio straniero di duc. 800, per por mano alla stampa del Corso di Analisi sublime. L' allontanamento del personaggio da Napoli, e le vicende de' tempi fecero sì, ch' ei

» non mai prendesse conto della suddetta somma da lui rimasta per » darsi al Fergola, fino a che non giunse a sua notizia la morte di » questo nostro distinto soggetto, e con tale infausta notizia anche » l'altra del danaro non mai da lui accettato. Istrutto di ciò ei si » rivolse a me addossandomi lo stesso incarico, e legandomi la me» desima somma, che risultava da ducati 300 in contanti, e duc. 500 » su persona assente. Ed eccovi qui trascritta la gentilissima let» tera, che in questo rincontro fu a me scritta da quel personaggio » straniero.

Bourguignon sous mont-Barne
pres Laon le 25 *aout* 1825.

» *J'ai recu, Monsieur, avec l'éloge historique de feu le sa» vant Fergola, votre Cours de Géométrie Déscriptive* (*). *J'aurois » voulu avant de vous en remercier pouvoir les parcourir, et vous » prouver tout le cas que je fais de cet envoi, en vous en donnant » mon opinion; mais au moment ou je commencais a m' en occuper, » un triste evenement est venu m' arracher a mes paisibles occupa» tions, et j'ai du aller rendre les derniers devoirs a ma respecta» ble mère, ce qui m' a tenu quelque tems loin de chez moi, et » a mon retour j'ai voulu ne pas tarder davantage à vous offrir » mes bien sinceres remercimens pour votre bon et genereux souve» nir. Je deplore avec vous la perte de votre respectable maitre, » et je desire que vous voyez le desir que j' aurois de la reparer, » en vous priant de recevoir de M. de Cosiron, à qui j' ecris à » cet effet, les huit cent ducats, qui avoient èté par moi consacrés » à aider M. Fergola, dans l'entreprise de l' impression de son » Cours de Calcul Infinitesimal, laquelle il a restitué, ne se sen» tant pas la force de faire ce bel ouvrage.*

» *Si vous l'agréez, vous aurez en meme tems la force et la » vigueur necessaire, pour completer le Cours napolitain de Sciences » Mathematiques, chose si desiderable, et auquel j'etois fier, com-*

(*) Geometria di Sito sul Piano, e nello spazio *ed.* 2. *Nap.* 1815.

» *me je le suis encore de pouvoir contribuer ; c' est une obbligation*
» *personelle que je vous auroi, et je serai flatté d' en recevoir un*
» *exemplaire en son tems. J' ai dejà toutes les autres parties recues*
» *à Naples.*

» *Je dois vous remercier, Monsieur, de tout ce que vous vou-*
» *lez bien me dire d' honnete, et je vous prie de croire, que je*
» *tiens encore à l' estime de vos concitoyens et à la votre, comme*
» *j' y ai toujours tenu; et il m' est doux de penser, que je n' en*
» *ai jamais demerité. Des circostances difficiles, sur tout pour moi*
» *et mes connoissances, à raison de mes diverses fonctions, m'ont*
» *jusqu' à present imposé le devoir pour ma tranquillité, et celle*
» *de toutes les personnes que j' ai connu dans votre belle patrie,*
» *de ne correspondre avec aucune; et je serais bien aise d' être*
» *assuré que des relations, qui ne peuvent interesser en rien le*
» *Gouvernement, ne seroient non plus dans le cas de nuire aux*
» *personnes qui ont bien voulu ne pas m' oublier.*

» *Veuillez croire, Monsieur, aux sentimens distingués de con-*
» *sideration de celui qui a l' honneur d' être* (*).

Monsieur

Votre tres humble et obbeissant serviteur
TUGNY

» Nell' accettare e l' incarico e 'l dono, io ebbi sempre in mira
» l' acquisto degli Scritti del Fergola co' quali avrei ad un tempo
» adempito a più obblighi già contratti.

» A Voi è ben noto, e diverse volte vi ho su di ciò intrat-
» tenuti, che io era collaboratore del Fergola per un Corso com-
» pleto di Matematiche, al quale da più tempo e lui ed io lavora-
» vamo, avendone già pubblicata non piccola parte. Vi potrà pure
» esser noto, giacchè in più Manifesti pubblicati, de' quali or vi
» presento quello dato fuori nel 1817, mi trovo aver detto, che
» pel Corso di Analisi moderna la parte elementare per intero, e

(*) *Le risposte date dal prof. Flauti a questa lettera si tro-
veranno in fine.*

» l'Applicazione di essa alla Geometria, doveva esser da me fatta, » rimanendo ad incarico del Fergola la parte sublime, e le diverse » applicazioni di essa. Ottenendo dunque io i MS. del Fergola, ed » ordinandoli e completandoli, avrei soddisfatto all' obbligo già con- » tratto verso del pubblico, nella maniera precisamente come me n'era » compromesso; ed il generoso straniero, donando a me quella somma » già al Fergola legata, avrebbe dovuto restar più pago del modo » come io corrispondeva al suo invito, mostrandoli il buon uso che » ne aveva fatto, in aver cercato di dar effetto alle sue prime intenzioni.

» D'altronde con quale animo potrei io mai intraprendere un » lavoro difficile, mentre so ch' esiste nello stesso paese in cui sono » lo stesso argomento nobilmente e completamente trattato, da mano » tanto perita quanto l'era quella di sì distinto matematico come » Fergola, che per circa 40 anni vi ha assiduamente lavorato.

» Io dunque offro questa somma di duc. 800, tal quale è stata » a me donata, per l'acquisto de' MS. del Fergola, con ciò sola- » mente, che l'Accademia si cooperi a far anticipare all' erede che » gli ha presso di se que' duc. 500, che risultano dal *bono* soprad- » detto, da rifarsene quando verrà soddisfatto, avendo io già messo » in regola un tal affare pel pagamento, come al nostro Segretario » Perpetuo è noto. Quando ciò abbia luogo, l'Accademia avrà per » sempre la proprietà di tutti i MS., de' quali non serberò per me » che la sola pubblicazione, e con sua piena intelligenza. Ed io vo- » lendo corrispondere con quella gratitudine che debbesi a' buoni uf- » ficj prestati dall' Accademia in aver salvati i MS. del Fergola, e » posto me nel caso di completare al più presto quel Corso di Ma- » tematiche, ch' egli ed io tante volte avevamo promesso al pub- » blico, prego l'Accademia ad accettare da me l'indirizzo del trat- » tato *dell' Arte d' Inventare in Matematiche*, che sarà una delle pri- » me cose che mi propongo pubblicare (*).

(*) *Essendo riescito vano ogni tentativo per l'acquisto di tali MS., il prof. Flauti ha cercato di adempiere a queste sue intenzioni verso l'Accademia, ripubblicando i due trattati analitici del Fergola*, delle Sezioni Coniche, e de' loro Luoghi geometrici.

» Io spero, Sig.ⁱ Colleghi, dalla vostra bontà e protezione per » le scienze, e pel decoro del nostro paese, di vedere abbracciato » e sostenuto questo mio progetto, col quale restano adempiti tutti » i miei voti, e si viene a corrispondere esattamente, ed agli ob- » blighi da me, e dal Fergola contratti verso il pubblico, ed a quel- » li, che ogni ragion vuole che io abbia verso il distinto stranie- » ro, che si mostrò sì generoso e verso di lui un tempo, e poi » verso di me, e che tanto interesse prende del nostro bene, e » della nostra gloria.

L'Accademia accettò ben volentieri l' offerta del suo socio e Segretario aggiunto Flauti, e dispose che se ne scrivesse a S. E. il Ministro della Real Casa, da cui essa dipende, e da cui la prima volta erano partiti gli ordini intorno all' acquisto de' MS. del Fergola. Or intanto che il professor Flauti concertava col P.M. Ruberti di anticipar all' erede depositaria de' MS. il pagamento, perchè questa faceva per ciò le più grandi premure, ricomparvero in iscena que' due soggetti, che in tutto il tempo dell' operazione fatta per l' Accademia non avevano lasciato mezzo intentato per disturbarla. Essi erano finalmente riusciti a guadagnare l' animo della sorella pinzochera dell' erede suddetta, e dall' una si comunicò all' altra l'indecente idea di mancare al contratto. Al momento stesso dunque di farsi il pagamento venne dichiarato al P. M. Ruberti, che non si volevano più dare i MS. senza averne prontamente duc. 2000. Qual fosse stata la sorpresa di costui a tale strano annunzio, può da se immaginarlo ogni uomo di onore. Egli si trovava compromesso non solo co' commissarj della Reale Accademia delle Scienze; ma anche con questa per intero, e col pubblico. Corse perciò subito dal Flauti sdegnato e tremante per la bile, e gli raccontò fil filo l' avvenuto. Il professor Flauti al contrario ricevè l' annunzio con freddezza di animo, e cercò di calmare il Ruberti, dicendoli ch' egli non si maravigliava di tal procedimento; che conosceva bene le persone che vi avevano avuto parte, e l' interesse che ve le aveva indotte; e che solamente gli dispiaceva di aver dovuto esser egli raggirato, a fin di mettere la sua opera in ordinare, e dare una qualche forma ad un materiale di MS. in modo guasto, che rendeasi del tutto inutile; e dippiù dar denominazione a molti trattati, che da prima erano stati presi per tutt' altro di quello che erano. Soggiugneva però, che sarebbe stato ben contento di aver impiegata la sua opera, e 'l tempo, se coloro che disturbavano la buona operazione cominciata, ne avessero saputo ben profittare. Ed a maggiormente tranquillare il P. Ruberti lo consigliò a scrivere, di quest' ultimo avvenuto, una relazione all' Accademia, ch' egli le avrebbe presentata nella prossima tornata. È dessa la seguente.

Sig. Presidente

» Per recare un vantaggio alla Gioventù studiosa del mio paese, e per accrescer decoro all' immortal nome del fu insigne matematico D. Nicola Fergola, antichissimo mio amico e padrone, consigliai, ed indussi fin dal mese di marzo, corrente anno, l' erede del glorioso defunto M. Luigia Fasulo a consegnare i di Lui preziosi MS. alla Reale Accademia delle Scienze, di cui quello è stato onorevole socio. Condiscesa l' erede, e la di lei famiglia alle mie inchieste, ne passai subito l' avviso alla Reale Accademia, pel canale del Sig. D. Vincenzo Flauti. Per l' assortimento degli scritti, e per la ripartizione delle materie vennero dall' Accademia stessa destinati i Sig. Visconti, Flauti e Giannattasio, i quali in unione del Segretario Perpetuo Cav. Monticelli si portarono in casa della nominata erede, e vollero che anch' io assistessi al laborioso lavoro. Ritrovatisi tali MS. in una indicibile confusione, si stabilirono due giorni per settimana, per travagliare all' uopo più ore incessantemente. Due mesi, aprile, e maggio, s' impiegarono ad un sì intralciato lavoro, finchè negli ultimi giorni del passato mese riuscì di dare ordine ai disparati fogli, distribuirli in materie, unirli in portafogli diversi, e ligarli in ventun volumi, di cui l' elenco all' Accademia fu già presentato. In questo frattempo varie volte coll' erede Fasulo io tenni parola sul compenso da doversele dare dall' Accademia nella consegna di quelli. Sulle prime

» parve la medesima contenta di ducati 500, indi esternossi per du-
» cati 600. Ma come corse voce, esserne stati da estranee persone
» offerti sino a 700, l' Accademia abbondar volendo in generosità
» convenne pel prezzo di ducati 800, cioè ducati 500 nella conse-
» gna de' descritti vol., ed altri ducati 300 dopo che il Re nostro Si-
» gnore si fosse compiaciuto di approvare il Rapporto dell' Accademia
» su tale assunto.

» Contentissima rimase l' erede di una tal proposta, e verbal-
» mente con somma sua soddisfazione si consumò il contratto, che
» venne in seguito quasi ogni giorno rinnovellato, sino a Domeni-
» ca scorsa, 18 del corrente. Ma che? Dopo tante fatiche per ri-
» ordinare i MS., dopo essersi più volte a voce ratificato il contrat-
» to, mentre era per inviare all' erede la minuta della polizza pe' pri-
» mi ducati 500 in conto di 800, Martedì mattino, 20 giugno, ve-
» nuta da me essa medesima, spiritosamente m' intima lo scioglimen-
» to del già conchiuso contratto, dicendomi che allora avrebbe con-
» segnati all' Accademia gli scritti, quando nel momento gli si fosse-
» ro pagati ducati duemila. Ad una tanto inaspettata insieme, e stra-
» na proposizione, come io rimanessi, e cosa io rispondessi, ogni
» uomo saggio può immaginarlo. Dopo ciò, non ho voluto aver più
» che fare con tale sorte di gente.

» Come io sono stato in mezzo a questo affare, stimo un atto
» di mio rispetto, e di mio dovere far noto tutto questo alla Rea-
» le Accademia delle Scienze, ed a Lei che n' è il degnissimo pre-
» sidente.

» Mi dò l' onore di essere, con profonda venerazione.

Napoli 22 giugno 1826.

Umiliss. Divotiss. Servo
P. M. Biagio Ruberti.

L' Accademia intesa questa relazione, usando di quella dignità che dee esser propria di un corpo sì distinto, e compatendo l' imbecillità di due povere donne raggirate da due persone, che cercano deviarle dal vero interesse loro, deliberò di abbandonare interamente il pensiero di questa faccenda.

Ed ecco il veridico racconto de' principali fatti, che hanno avuto luogo relativamente a' MS. dal Fergola lasciati; e ciò a noi sembra sufficiente all' oggetto che ci abbiam proposto in pubblicare questi documenti.

RISPOSTE DEL PROF. FLAUTI ALLA LETTERA DEL BAR. TOUGNY RIPORTATA PIU' SOPRA NELLE PAG. XLI. E XLII.

Napoli 22 *ottobre* 1825.

RISPETTABILIS. SIG. BARONE

» Una di lei lettera giuntami dopo undici anni, ne' quali io
» non aveva mai tralasciato di cercar sue notizie, mi ha colmato
» di vera gioja; e posso assicurarla che pari al mio è stato il pia-
» cere, che ne hanno provato tutte quelle persone alle quali io
» ho potuto dare di lei contezza, ed accertarle che gode buono
» stato di salute. Son sicuro che ciò dovrà produrre anche in lei
» un' interna compiacenza, in vedere che la virtuosa condotta che
» ha tenuta altra volta tra noi, nè per lunghezza di tempo, nè
» per cambiamento di circostanze ha fatto sì, che siasi minorato
» quel rispetto, e quella venerazione che l' è dovuta. Non so dirle
» quante e quante volte ho dovuto rilegger la sua lettera, e sempre
» gli stessi sentimenti di tenerezza, e sempre lo stesso attaccamento
» mi si ridestava nell' animo, per la sua ben degna e rispettabile
» persona. Anche quelli che non avevano avuto il piacere di cono-
» scerla eran compresi da ammirazione, quando io loro raccontava
» la condotta saggia, ed imparziale da lei tenuta nel nostro paese,

» l' interesse che avea in ogni rincontro preso al decoro del medesi-
» mo, e quanta parte aveva Ella messa in proteggere, ed incoraggia-
» re il coltivamento delle matematiche presso noi.

» Fin da che Ella partì da noi, io feci nota la sua generosi-
» tà usata al Fergola, per metterlo al caso di pubblicare il suo *Cor-*
» *so di Analisi sublime*, e lessi alla nostra Reale Accademia delle
» Scienze la di lei lettera diretta al Fergola, col dono di 800 du-
» cati: ed essa conservò ne' suoi registri la memoria di sì bella a-
» zione, senza esempio presso noi. In altra circostanza, trattando-
» si del Corso di Matematiche da usarsi nelle nostre Scuole, feci ri-
» levare, ch' Ella in simil rincontro, richiedendo all' Accademia il
» suo parere sul Corso di Matematiche da insegnarsi nella *Scuola*
» *Politecnica* di Napoli, apertamente le inculcava, esser sua intenzio-
» ne, che *la Scuola Politecnica napolitana usasse, se fosse possi-*
» *bile, di un Corso di Matematiche nazionale*.

» Ma tutto il fin quì da me operato, non mi rendeva ancor
» soddisfatto, ed io andava in cerca di tal circostanza da poter ren-
» der pubblica la sua generosa condotta verso il Fergola; quan-
» do l' infelice perdita di sì degno uomo, mi pose nel caso di a-
» dempiere a questo mio voto, nello scriverne, e pubblicarne l' e-
» logio, come Ella avrà potuto rilevare in leggendolo. Ma che dovrò
» mai io fare ora, ch' Ella rinnova questa sua generosità nella mia
» persona? Ecco il solo che posso. Farò tutti gli sforzi per corri-
» spondere alle sue benefiche vedute verso il mio paese, e per pub-
» licare al più presto, che mi sia possibile, quel Corso di Analisi
» tanto desiderato, e che invano ho anch' io fatto vivendo il Fer-
« gola, quanto da me si poteva, per vederlo terminato.

» Io già aveva intrapreso un tal Corso, di cui il primo volu-
» me è pubblicato, ed ora mi sto occupando del secondo, in cui
» entrerà a parte l' *Introduzionc all' Analisi degl' infiniti*. Colla pri-
» ma occasione che avrò, le farò pervenire quel primo volume;
» ma è mia intenzione ora di ripubblicarlo in forma più elegante, e
» di indirizzare tutta l' opera a Lei, che n' è il ben degno protet-
» tore, ed incoraggiatore.

» Il Sig. Cosiron cui io presentai la di lei lettera per lui, l' accolse con quel piacere che è proprio della vera amicizia. Egli ha » già passati nelle mie mani i ducati 300, che erano in suo pote- » re, ed un *bono* per veder se mai fia possibile di riscuotere gli al- » tri 500; ed io accetto queste sue grazie per farne quell' uso cui » Ella le destina. Faccia il Cielo che io abbia la forza necessaria a » riescire in modo da corrispondere alle sagge vedute di sì degno » soggetto. In qualunque caso però sia pur sicuro, che non man- » cherò di corrisponderle per gratitudine, e riconoscenza vera.

» Colla prima occasioue le farò anche pervenire il mio Euclide » in 4, le Trigonometrie, e le Sezioni Coniche anche nel sesto stes- » so, ed il 1° Volume degli Atti della nostra Accademia, ove vi » sono alcune mie Memorie, cui aggiugnerò anche qualche altro o- » puscoletto. Intanto la prevengo da ora, che oltre quel numero di » copie, che a proporzione che verranno stampati i volumi del Corso » d' Analisi, io le potrò inviare, tutte le altre resteranno a sua di- » sposizione; e desidero che m' indichi specialmente quelli tra' suoi » amici in Napoli, a ciascun de' quali vorrà che io ne passi un e- » semplare. Sarà a questi grata così non solamente la memoria che » Ella tien di essi; ma anche il beneficio che rende al mio, e loro » paese.

» In fine io la prego di conservarmi sempre quell' amicizia, e » protezione, che per sua bontà mi accordò fin dal primo momen- » to ch' ebbi l' onore di conoscerla, e che inalterata dopo tant' anni » sperimento ora.

Sono con profondissimo rispetto

Di Lei signor Barone.

Umiliss. Divotiss. Servit.
VINCENZO FLAUTI.

Napoli 18 gennajo 1826.

RISPETTABILISS. SIG. GENERALE

» Per mezzo del sig. Cosiron le dovrà essere giunta una mia » lettera, nella quale cercava di esprimerle come meglio poteva, ed » il piacere provato in vedere, che dopo sì lungo tempo non siasi » affievolita in Lei quella bontà, che altra volta aveva io bene spe- » rimentata verso di me, e l' estrema gratitudine che risento pe' nuo- » vi distinti benefizj ch' Ella mi fa, a' quali mi sforzerò di corri- » spondere in tutti que' modi che da me si potranno adoperare.

» Io aveva già altra volta manifestata alla nostra Accademia » Reale delle Scienze la sua nobil condotta verso del Fergola, e » l' imparzialità, ed i riguardi ch' Ella, in diverse circostanze, ave- » va dimostrati verso il nostro paese, di cui si era dichiarato vero » protettore, e col quale aveva agito più che da nazionale; e nel- » la lugubre circostanza della morte del Fergola, gli dee essere pur » ben noto, che non tralasciai, come non tralascerò mai, di ren- » der pubblica testimonianza di tal suo procedimento.

» Ora con questa nuova occasione, ch' Ella si è benignata di » chiamarmi erede del dono fatto a Fergola, ed a supplire quel vuo- » to che restava nel Corso di Matematiche napolitano, di cui Ella » a tanta distanza sarà l' incoraggiatore e 'l protettore, io non saprei » come rendergliene migliori grazie, se non col cercare di corrispon- » dere alle sue vedute. Volendo però da prima conciliare l' antica » sua intenzione, ch' era pur la mia, con la nuova, ho offerti gli » 800 ducati alle eredi del Fergola, pregandole a darmi i suoi MS., » o piuttosto a depositarli, con le condizioni ch' Ella troverà indi- » cate in un foglio qui compiegato (*). Tutte le mie offerte sono

(*) *Un tal foglio è precisamente la lettera che di sopra è stata riportata alla pag.* XXX. *e seg.*

» state però mal ricevute, a cagione di taluni che raggirano queste » due vecchie eredi, e che probabilmente fanno tutto ciò per appro- » priarsi le fatiche di un uomo sì distinto. E voglia il Cielo che » le pubblichino per loro; mentre il maggior mio dispiacere si è, » ch' essi pubblicando qualche cosa in nome del Fergola, siccome » tutto è incompleto, anzi che onorarne la memoria, non abbiano » a vituperarla.

» In tale stato di cose, io non veggo altra risorsa, se non che » di far inteso il pubblico di tutti i passi da me fatti finora, per » non rifar lavoro che dal Fergola era stato già elaborato; ed indi » poi prendere occasione dall' obbligo con lei contratto, per conti- » nuare da me solo l' intrapreso lavoro del Corso di Analisi, di cui » già gliene mando un volume stampato, perchè gli serva di sag- » gio dell' intero lavoro. Un tal volume però, ora che l' opera dee » comparire sotto i di Lei auspicj, dovrà essere ristampato in for- » ma più elegante, ed essere a lei indiritto. Ed io avrò l' onore, » quando dovrò mettervi mano, di far pervenire tale indirizzo alla » sua degnissima persona, perchè possa modificarlo come vorrà. Io » ho già quasi pronto il vol. II. che conterrà tra le altre cose l' *In-* » *troduzione all' Analisi degl' Infiniti*. Intanto per poter lavorare » senza distrazioni, sto con tutta sollecitudine rivedendo i quattro » volumi del mio *Corso di Geometria*, che per la decima volta si » dovrà ristampare, per poter poi affidare ad altri il ristampar- » lo altra volta, se così accaderà. Non sarà però male, ch' Ella ora » riceva da me un esemplare in 4° de' Trattati del Corso stesso, che » io feci tirare sulla quinta edizione. A proporzione che usciranno » i volumi di questa decima edizione, non tralascerò pure di far- » glieli pervenire.

» Con altra occasione le farò anche giugnere il Vol. I. degli » Atti della nostra Reale Accademia delle Scienze, ove contengonsi » alcune Memorie Matematiche del Fergola e mie. Per ora le invio » una Memoria sopra un difficilissimo problema solido risoluto da un » mio antico allievo, ed ora distinto professore, il sig. Francesco » Bruno, assicurandola che tal lavoro ha fatto anche moltissima im- » pressione a valenti matematici francesi; e che a quest' ora dee

» essere stato presentato a qualche società dotta in Francia, come
» rilevo da una lettera del distintissimo matematico sig. Hachette.

Sono con profonda stima e rispetto

Di Lei Sig. Barone.

Umiliss. Divotis. Servit.
VINCENZO FLAUTI.

TRATTATO ANALITICO

DE'

LUOGHI SOLIDI

pure con ovvie elementari operazioni potrà da questa ritrarsi la W, che ho proposta nel presente postulato, e che parmi al mio disegno ben conveniente. Infatti dividendo per A l'anzidetta equazione, i coefficienti $\frac{2m}{n}$, β, γ, δ, ε saranno rispettivamente uguali ai seguenti fratti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{-D}{A}$, $\frac{-E}{A}$, $\frac{-F}{A}$.

PROPOSIZIONE I.

TEOREMA.

§. 52. Ciascuna delle due equazioni V, W, cioè tanto $y^2+\beta y=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, che $y^2+\frac{2mx\gamma}{n}+\beta y=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$, può trasformarsi in un' altra, ch' è pariforme alla $z^2=kv^2+e^2$. Ove k, e^2 sono grandezze costanti, e le z, v posson dinotarvi le coordinate di una locale.

DIM. PART. 1. Compiasi il quadrato del 1° membro dell'equazione V, ed un tal compimento si aggiunga al II°, si avrà

$$\left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\gamma x^2+\delta x+\frac{1}{4}\beta^2+\varepsilon \quad . . . \; A$$

Ma il binomio $\gamma x^2\pm\delta x$ è uguale $\gamma\left(x+\frac{\delta}{2\gamma}\right)^2-\frac{\delta^2}{4\gamma}$. Dunque l'equazione A, con questo valore di quel binomio diverrà

$$\left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\gamma\left(x+\frac{\delta}{2\gamma}\right)^2+\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\delta^2}{4\gamma}+\varepsilon \quad . . . . \; V'$$

E ponendo $y+\frac{1}{2}\beta=z$, $x+\frac{\delta}{2\gamma}=v$, ed $\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\delta}{4\gamma}+\varepsilon=e^2$; l'equazione V dovrà ridursi nella seguente $z^2=\gamma v^2+e^2$.

§. 113. COR. II. Similmente le $-y$, che in queste due curve insiem combinate corrispondono alla medesima ascissa $\pm x$ resteranno adattate l'una sull'altra; e non mai combacianti, se non appartengansi a' punti d'intersezione, o di contatto. E viceversa.

ESEMPIO.

§. 114. Le due curve P, Q abbiano le rispettive equazioni

$$y^2 - 2ay = 4ax - 2x^2 + a^2$$

$$y^2 - 2ay = b^2 + ax$$

cioè quelle, che quassù ho rappórtate nel I. e nel IV. esempio. La ridotta della prima sarà

$$(y - a)^2 = 4a^2 - 2(x - a)^2$$

e quella dell' altra

$$(y - a)^2 = a(c + x).$$

* *fig.* 24. E queste vogliansi costruire col medesimo angolo regolatore XPY, che sia retto. Dunque, ricalcando le soluzioni di que' due esempj: nella PX si tronchi la $Pf = a$; e compito sulla Pf il quadrato PUgf, si descriva l'ellisse BAd, col centro g, e co' semiassi gB, gA rispettivamente uguali a $2a$, e $\sqrt{2a^2}$. E così per la parabola si prolunghi PX in F, talchè diventi $PF = c$, e per F si distenda FG parallela a PV, che convenga colla gV in G. Finalmente col vertice G, coll'asse GT, e col parametro a si descriva la parabola GM. *Queste due curve saranno insiem combinate.*

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

§. 115. Se siensi combinate le due curve coniche, che han le rispettive equazioni

$$y^2+\frac{2mxy}{n}+\beta y=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\,,$$
$$y^2+\frac{2m'xy}{n'}+\beta' y=\gamma' x^2+\delta' x+\varepsilon'\,;$$

le ascisse, che in tali curve corrispondono alle ordinate per le loro intersezioni, dovran dinotarvi le radici reali di quell' equazione biquadratica, ch' emerge eliminando la y dalle proposte equazioni.

Ed affinchè questa regola non fallisca, come talor addiviene; potremo aggiugnere, che la y debba essere una funzione razionale della x.

Dim. Part. 1. La prima delle due proposte equazioni si chiami A, l' altra B, ed abbiano esse le x, y per indeterminate. Ed oltre a ciò la locale della prima equazione si disegni per P, e per Q quella dell' altra equazione. Sarà chiaro, per le teoriche delle equazioni algebriche, che la y non può mai eliminarsi dall' equazioni A, B, se in queste non abbia un medesimo valore. Ma la y è un' ordinata della curva P, e quivi tien la x per ascissa: ed alla stessa x anche corrisponde la y per ordinata nella curva Q, che l' abbiam posta in combinazione coll' altra P. Dunque nell' eliminazione della y dall' equazioni A, B il calcolo deesi dirigere alle sole coordinate, che si appartengono alle intersezioni delle curve P, Q: poichè quivi, come si è detto nel §. 112, rinvengonsi le y dell' una curva uguali a quelle dell' altra. E dovendo risultare in virtù del precedente teorema un' equazione biquadratica, la quale ha per ignota la sola x; le radici reali di quest' equazione saranno geometricamente esibite da quelle ascisse delle curve P, Q, che appartengonsi alle loro intersezioni.

PART. II. Ma sebbene il valore dell'ascissa x suppongasi reale; può non di meno essere immaginario quello della corrispondente ordinata z; quando questa sia una funzione irrazionale della x. E ciò è chiaro dalla natura delle grandezze immaginarie, e da quel, che specialmente ho detto ne' §§.33, 34. Onde in tal caso dovrebbesi conchiudere, che queste due curve non si possan quivi incontrare: e che talora sien meno di numero le intersezioni di due curve, che le radici reali dell'equazione, che con combinar quelle avrem voluto conseguire. E perciò ad evitar questo sconcio, che non deesi mica imputare al metodo proposto, ma sì bene all'inavvertenza dell'analista, convien qui soggiugnere, che per istituir sicuramente una tal ricerca debba essere la y una funzione razionale della x; o che questo si conosca intuitivamente in una delle due equazioni delle curve combinate, o nel maneggiarle (1) a tal uopo.

§. 116. SCOL. I. Queste ultime speculazioni sarebbero poco intelligibili da' giovanetti, se ora non le illustrassi con qualche esempio. E perciò sieno date le due equazioni quadratiche indeterminate $y^2 = R(A+x)$, ed $y^2 = r(a+x)$, che ap-
* §. 23. partengonsi a due parabole* co' rispettivi parametri R, r. Ed io vi suppongo, che le loro coordinate sieno rettangolari, e

(1) Il Sig. Rolle nelle Memorie dell' Accademia di Parigi dell' an. 1708 rilevò il seguente paradosso, che: il *numero delle radici reali di un' equazione possa esser maggiore del numero delle intersezioni di quelle due curve, che l' analista avrà scelte per costruirla*; e che in ciò resti frustrato il suo impegno. Ma i tre valenti geometri della Svizzera Ermanno, Eulero, e Cramer han saggiamente dileguati questi dubbj: aggiugnendovi le analitiche cautele, che converrà praticare a tal oggetto. Leggasi il sig. Cramer *Introd. a l' Analyse des lign. courb. alg* pag. 17.

che sia $R > r$, ed $A > a$. Sarà chiaro, che nel combinar insieme queste due curve abbiasi a praticare il seguente artifizio sul-l'angolo retto XPY* regolatore della costruzione. Si prolunghi indefinitamente il lato XP di quest' angolo oltre il suo vertice, e poi vi si tolga PF $= A$, P$f = a$. Inoltre descrivasi la parabola FM col vertice F, coll' asse FPX, e col parametro principale A. Ed in simil modo, col vertice f, coll' asse fPX, e col parametro principale a si descriva l'altra parabola fm, che sarà combinata colla prima *. Ciò fatto, si elimini la y da quelle due equazioni; dovrà risultare $x = -\left(\frac{RA - ra}{R - r}\right)$. E sostituendo questo valore della x in ciascuna delle due proposte equazioni, si avrà per la prima, e seconda di esse

* fig. 25.

* §. 111.

$$y = \pm \sqrt{Rr}\left(\frac{a - A}{R - r}\right), \quad y = \pm \sqrt{Rr}\left(\frac{a - A}{R - r}\right).$$

Dunque le semiordinate, che corrispondono all' ascissa reale $-\left(\frac{RA - ra}{R - r}\right)$, sono immaginarie, ed uguali. Infatti essendo per supposizione $ra < rA$, dovrà essere $RA - ra > RA - rA$, e quindi $\frac{RA - ra}{R - r} > A$. Dunque quel valore della x sarà una retta PG maggiore di PF; ed all' ascissa PG, che trascende i vertici delle parabole di già combinate, niuna ordinata può mai corrispondere nell' una curva, e nell' altra *.

* §. 33.

§. 117. Scol. II. È un peccato in Geometria, come dicono i savj, il voler risolvere un problema geometrico con artificj men semplici di quelli, che l' arte prescrive. I problemi piani si *hanno a costruire circino et regula*, e non altrimenti. E perciò Adriano Romano nell' aver disciolto colla combinazione di due iperboli un problema piano, qual'è quello di *de-scrivere un cerchio, che insiem toccasse tre cerchi dati*, meritò di esser rimproverato da' geometri; perchè volle attenersi alle condizioni del problema, anzichè alla natura di esso. *I problemi di terzo, e di quarto grado*, che gli sciocchi con artifizj elementari cercan di sciorre, *esigono la combinazione di due curve coniche*; se pur non piaccia d' impiegarvi (1) la retta e la concoide, come il sommo Archimede solea fare, e del che egli dall' illustre Newton ritrasse immensa lode. Ma intanto qual di questi due metodi quì deesi prescrivere nel costruir geometricamente un' equazione di terzo, o di quarto grado? Quello, che ne attigne i luoghi solidi da questa equazione, e due di essi poi combina a tal uopo, e con geometrica eleganza. Or le prime speculazioni di un tal metodo son dovute all' acutissimo Slusio, il quale avendo data una certa forma a' coefficienti de' termini dell' equazion da costruire, si valse di geometriche analogie per ritrovar l' equazioni alla parabola, all' iperbole, al cerchio, o all' ellisse, che doveansi combinare. Il nostro valente analista Giacinto di Cristoforo (2) introdusse a tal uopo un metodo puramente analitico, ed oltremodo uni-

(1) Il Problema *della invenzione di due medie proporzionali* fu risoluto dagli antichi coll' intersezione di una retta e della *cissoide* ch' è una linea di terz' ordine, ove la *conoide* n' è del quarto.

(2) Giacinto di Cristoforo insigne analista napolitano pubblicò fra noi nell' anno 1700 un trattato *de Constructione aequationum*, il cui merito vien così encomiato dal Signor Montucla, imparziale e saggio scrittore dell' Istoria delle Matematiche vol. II. pag. 140. I. » ediz. » Nous citerons un livre pen connu, quoique excellent, » qui traite ce sujet. Cioè *Hyacinti Christophori de Constructione* » *aequationum*. Neap. in 4. 1700.

versale. E la soluzione, che ho rapportata nel seguente problema, potrà aversi per un canone euristico dell' indicato metodo.

PROPOSIZIONE VIII.

PROBLEMA.

§. 118. Costruire, colla combinazione di due curve coniche l'equazione di quarto grado

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = o \ldots A,$$

o la sua ridotta

$$(x^2 + px)^2 + (q - p^2)x^2 + rx + s = o.$$

Avendo compito nella prima di queste due equazioni il quadrato de'primi due termini.

Avvertasi, che i coefficienti p, q, r, s de' termini di essa debbono essere grandezze della prima, seconda, terza, e quarta dimensione rispettivamente.

Soluz. » La radice del quadrato, che ho compito nel-
» l'espression di questo problema, cioè $x^2 + px$ facciasi u-
» guale al prodotto di una nuova indeterminata y in una
» qualunque grandezza h costante. L' emergente equazione
» $a^2 + px = hy$, che vedesi appartenere ad una parabola,
» la quale ha il parametro principale h, ed un dato sito col-
» le direttrici delle x, y, potrà dirsi, che appartenga ad una
» *parabola assunta*. E ponendo in quell' equazione A il qua-
» drato del monomio hy, per lo quadrato del binomio $x^2 + px$;
» e 'l binomio $hy - px$ per lo monomio x^2, si avrà, fatto
» il riducimento de' termini, quest' altra equazione

$$y^2 + \frac{q - p^2}{h} y = \frac{pq - p^3 - r}{h^2} x - \frac{s}{h^2} \ldots B$$

» ch' è pure ad una parabola : la quale per distinguersi dal-
» la precedente si potrà chiamare *la parabola derivata*.
» E queste due parabole valgono ad isciorre il problema. In-
» fatti si sommi l' equazione della parabola assunta con quel-
» la della derivata ; o dall' una l' altra si sottragga : si avrà nel
» primo caso l' equazione all' iperbole , e nell' altro l'equazione
» al cerchio, supponendo retto l'angolo delle x, y. E finalmen-
» te , se in quell' equazione A si ponga solamente il monomio
» h^2y^2 per $(x^2 + px)^2$, lasciando stare la x^2 , si avrà un' e-
» quazione all' ellisse , all' iperbole , o alla parabola , secondo-
» chè sia negativo , positivo , o zero il coefficiente della x^2,
» cioè $q - p^2$.

Dico , che combinando insieme due di queste locali , che
abbian rettangolari le coordinate, debba restar , costruita la da-
ta equazione A di quarto grado . Cioè le radici reali di que-
sta biquadratica equazione saranno disegnate dalle ascisse corri-
spondenti a' punti d' intersezione di quelle due curve insiem
combinate . E le vere , e le false saran mostrate dalle di-
* §. 36. rettrici delle x, y *.

DIM. Per esser vero ciò , che ho proposto quì da ulti-
mo , dovrebbesi dimostrare , che eliminando la y da due di
queste cinque equazioni , le quali ho disposte nella tavola pri-
ma , debba emergere la proposta equazione A di quarto gra-
do . Or se le due locali sieno le due parabole n°. I e II.
cioè la parabola assunta, e la derivata, la cosa è chiara di per
se stessa. Poichè ponendo in B $(x^2 + px)^2$ per h^2y^2, ed $x^2 + px$
per hy si vedrà nascere l' equazione A. E se poi le due lo-
cali non sieno le due parabole n°. I. e II. , si potrà facilmen-
te a queste da quelle pervenire , riflettendo alla genesi quì so-

pra esibita di coteste equazioni indeterminate. Ed in tal modo ricadesi nel primo caso.

§. 119. Cor. I. L'equazione $x^2 + px = hy$, ch'è quella della parabola assunta, si moltiplichi per la grandezza arbitraria θ; e 'l prodotto si aggiunga all' equazione v. della tavola prima. Si otterrà in tal modo l' equazione

$$y^2 + \theta hy = \frac{p^2 - q + h^2\theta}{h^2} x^2 + \left(\theta p - \frac{r}{h^2}\right) x - \frac{s}{h^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{K}.$$

E questa dovrà appartenere alla parabola, all' iperbole, o all' ellisse, secondo che sia zero, positivo, o negativo il trinomio $p^2 - q + h^2\theta$, com' è noto. E ciascuna di queste tre curve dovrà variare in tante guise, in quante può concepirsi variare la grandezza arbitraria θ, cioè in infinite.

§. 120. Cor. II. Dunque potrà combinarsi colla parabola indicata nel primo luogo della tavola I. una sola di queste innumerevoli curve coniche, per ottenere le radici reali dell' equazione biquadratica proposta. Ma quì gioverà l'avvertire, che ciascuna di queste infinite curve, nel combinarsi colla suddetta parabola, debba mai sempre segarla in quegli stessi punti, che un'altra avrà segnati a tal uopo. E si vedrà più appresso quali sieno le combinazioni eleganti, e da doversi alle altre preferire.

§. 121. Cor. III. Se l'equazione biquadratica proposta nel presente problema sia mancante del secondo termine, qual' è la seguente $x^4 \star + qx^2 + rx + s = o$, nelle locali di già esibite nella tavola I. potrà farsi la $p = o$, per brevità di artifizio. E si dovrebbe anche porre la $s = o$, se l' equazion da costruirsi sia di terzo grado, e mancante del secondo termine, com' è quest' altra $x^3 \star + qx + r = o$. Ed è in tal modo che ho congegnate le due tavole II e III. Ma pur non si divieta, che talun le produca coll' artifizio esibito nel problema.

§. 122. COR. IV. L' equazione K generalmente proposta nel §. 119. vedrassi appartenere ad un cerchio *, se mai il coefficiente della x^2, il quale è $\dfrac{p^2 + h^2\theta - q}{h^2}$ sia -1; cioè se sia $p^2 - q + h^2\theta = -h^2$. E risolvendo rispetto all' arbitraria θ quest' ultima equazione, sarà $\theta = \dfrac{q - p^2 - h^2}{h^2}$, e quindi $\theta hy = \dfrac{q - p^2 - h^2}{h^2} y$, e $\theta px = \dfrac{pq - p^3 - ph^2 - r}{h^2} x$. Onde con questo valore della θ l' equazione K degenera nella

$$y^2 + \frac{q - p^2 - h^2}{h} y = \frac{pq - p^3 - ph^2 - r}{h^2} x - x^2 - \frac{s}{h^2}$$

§. 123. COR. V. Dunque dall' equazione K non può carpirsi, che una sola equazione al cerchio; e questa poi è quella medesima, che ho rilevata nel presente problema, col prendere la differenza dell' equazioni della parabola assunta, e della derivata. Ed ecco dimostrato *a priori*, che le radici di un' equazione di 3.°, o di 4.° grado non si possano coll' intersezion di due cerchi ottenere.

* §. 58.

TAVOLA I.

DE' PRINCIPALI LUOGHI SOLIDI, CHE SI RITRAGGONO DALL' EQUAZIONE BIQUADRATICA COMPLETA

$$x^4 + 2px^3 + qx^2 + rx + s = o.$$

I. $x^2 + px = hy$ *parab.*

II. $y^2 + \frac{q - pp}{h} y = \frac{pq - p^3 - r}{h^2} x - \frac{s}{h^2}$ *parab.*

III. $y^2 + \frac{q + h^2 - p^2}{h} y = \frac{ph^2 - p^3 + pq - r}{h^2} x + x^2 - \frac{s}{h^2}$ *iperb.*

IV. $y^2 + \frac{q - h^2 - p^2}{h} y = \frac{pq - ph^2 - p^3 - r}{h^2} x - x^2 - \frac{s}{h^2}$ *cerch.*

V. $y^2 = \frac{px^2 - qx^2 - rx - s}{h^2}$ *comunq.*

VI. $y^2 + \theta hy = \frac{p^2 - q + h^2\theta}{h^2} x^2 + \left(\theta p - \frac{r}{h^2}\right) x - \frac{s}{h^2}$ *comunq.*

TAVOLA II.

DE' PRINCIPALI LUOGHI SOLIDI, CHE RICAVANSI DALL' EQUAZIONE BIQUADRATICA MANCANTE DEL SECONDO TERMINE

$$x^4 + qx^2 + rx + s = o.$$

I. $x^2 = hy$ *parab.*

II. $q^2 + \frac{hy}{h} = -\frac{rx}{h^2} - \frac{s}{h^2}$ *parab.*

III. $y^2 + \frac{1}{h}\left(q + h^2\right) y = x^2 - \frac{rx}{h^2} - \frac{s}{h^2}$ *iperb.*

IV. $y^2 + \frac{1}{h}\left(q - h^2\right) y = -\frac{rx}{h^2} - x^2 - \frac{s}{h^2}$ *cerch.*

V. $y^2 + \theta hy = \frac{h^2\theta - q}{h^2} x^2 - \frac{rx}{h^2} - \frac{s}{h^2}$ *comunq.*

TAVOLA III.

DELLE LOCALI DELL'EQUAZIONE CUBICA MANCANTE DEL SECONDO TERMINE

$$x^3 + qx + r = 0,$$

I. $x^2 = hx$ *parab.*

II. $y^2 + \frac{q}{h}\, y = -\frac{rx}{h^2}$ *parab.*

III. $y^2 + \frac{1}{h}\left(q + h^2\right) y = x^2 - \frac{rx}{h^2}$ *iperb.*

IV. $y^2 + \frac{1}{h}\left(q - h^2\right) y = -x^2 - \frac{rx}{h^2}$ *cerch.*

V. $y^2 + \theta h y = \frac{h^2\theta - q}{h^2}\, x^2 - \frac{rx}{h^2}$ *comunq.*

CONCLUSIONE DELL' ARGOMENTO.

§. 124. Le radici reali di un'equazione di terzo o di quarto grado potran conseguirsi geometricamente, come si è detto quì sopra*, col combinare insieme due di quegl' infiniti luoghi solidi, che il metodo Slusiano ci avrà proferti. Resta quì a discutere qual di coteste combinazioni sia così chiara, ed elegante, che meriti di essere da' geometri in preferenza di tutte le altre adottata. Il sommo Eulero ciò saggiamente cel prescrisse col dirci (1). *Ex hisce infinitis modis eum potissimum eligi conveniet, qui absolvitur lineis curvis cum simplicissimis, tum descriptu facillimis; imprimis vero in id erit incumbendum, ut per intersectiones omnes radices reales exibeantur*. Onde parmi che il valentuomo si fosse quì attenuto al metodo Carte-

* §. 120.

(1) vol. II. *Introd. in Analys. Inf.* §. 499.

siano ; cioè al combinare per un tal fine la parabola col cerchio. Imperocchè qual mai delle curve coniche è più semplice della parabola, la cui natura con un'equazione binomia si esprime? E qual di queste equazioni è più idonea ad agevolare quella eliminazione della y *, ch'è tanto al nostro argomento necessaria? * §. 110. La parabola può con moto organico, e facilmente disegnarsi nel piano. E, quel che più rileva, le combinazioni eseguite con questa curva, e con qualunque altra delle sezioni coniche sono esenti di quella sconcezza, che talor si osserva, *nell' esservi meno intersezioni*, *che non sieno le radici reali dell' equazione*, che ne avrem costruita*. E finalmente, se una parabo- * § 115. la siasi delineata in un piano con esattezza, potremo sovente conseguire, col solo compasso e colla riga, le radici reali di una qualunque cubica, o biquadratica equazione (1). E per tal mezzo i problemi solidi parrebbero disciolti alla maniera de' problemi piani.

§. 125. Al contrario il Cavaliere Isacco Newton fu di parere, che per isciorre con eleganza un problema solido abbisogni combinar col cerchio un' ellisse, la cui organica descrizione è emula di quella dell' istesso cerchio. È vero, così soggiunse il valentuomo, che la natura della parabola sia più semplice di quella dell' ellisse: e che l' equazione della prima di queste due curve costi di meno termini, che non ha quella della seconda; pur non di meno la semplicità dell' equazion di una curva non vi semplifica, nè vi agevola la descrizione.

---

(1) Tutte l' equazioni cubiche si possono costruire con una data parabola, cui si adatti un cerchio. E la maggior parte delle biquadratiche, senza deprimerle al terzo grado, posson sottoporsi ad una simile composizione.

Altrimenti dovrebbesi dire, che la genesi organica della parabola sia più semplice della descrizione del cerchio, la quale è un postulato di Geometria. Che anzi la concoide, ch'è una curva trascendente, può impiegarsi con vantaggio nella risoluzione di certi problemi geometrici di alto grado; per essere semplicissimo il modo di descrivere tal curva. E da queste cose dovrà inferirsi, che nella costruzione de' problemi solidi debbasi attendere più alla facilità di esibir le locali, che alla semplicità della natura di esse.

§. 126. Ma intanto queste ragioni del Newton, che pajono molto sublimi, ed ingegnose, son convenienti alla sola Geometria di tavolino, cioè a que' pochissimi soggetti, su i quali può agirvi la mano del geometra; ond' esse non son potenti a rovesciare il metodo Cartesiano, che sull' immensità della scienza è stabilito. Ed infatti i due sommi geometri inglesi Backer, ed Halley, malgrado le predette ragioni, cercaron poi d' illustrare un tal metodo, come il farò anch'io quì appresso, e nelle didascaliche forme. E sol vi soggiungo il seguente canone, che: *Un' equazione biquadratica sarà lodevolmente costruita col metodo Slusiano, se avrem combinata con un cerchio una delle tre curve coniche, parabola, iperbole, o ellisse; ma senza mai urtare in quell' assurdo mostratoci dal Rolle.*

§. 127. Inoltre se un geometra voglia conoscere in quali punti due curve algebriche s'incontrino, dovrà risolvere il problema inverso di quello, che dianzi ho proposto. Cioè, per divisare una tal soluzione, ei dovrà concepir queste due curve, come se fosser combinate fra loro, o pur descritte colle coordinate rettangolari x, y, le quali suppongansi rapportate ad un medesimo principio delle x. Ed eliminata la y dall'equazio-ri delle dette curve, ei dovrà prender le radici reali dell' equazione, che risulta nella sola x. E queste saranno le ascisse corrispondenti alle ordinate per le intersezioni.

§. 128. L'esempio, che or reco, per ragionar chiaramente di queste cose, potrà benanche sparger sua luce sul problema diretto, del quale principalmente mi sono dianzi occupato. Per la qual cosa, suppongansi tra se combinate la parabola, e 'l cerchio, le cui rispettive equazioni sieno . . .

$$x^2 = hy \; . \; . \; . \; \text{A} \quad , \quad y^2 - 8hy = -6hx - x^2 \; . \; . \; . \; . \; \text{B}$$

$$y = \frac{x^2}{h} \; . \; . \; . \; \text{A}' \quad , \quad y = 4h \pm \sqrt{(16h^2 - 6hx - x^2)} \; . \; . \; \text{B}'$$

Ed eliminando la y dall' equazioni A, B, dovrà risultare l' equazione determinata

$$x^3 - 7h^2x + 6h^3 = o$$

le cui radici reali sono h, $2h$, $-3h$, come nel saggiar quella si conoscono. E sarà un giocondo spettacolo pe' giovanetti il vedere, che ponendo in luogo della x ciascun di questi tre valori nell' equazione A, un medesimo valore debba concepir la y nell'equazioni A', B'.

Infatti suppongasi $x = h$

si avrà $\quad y = h$ nell' equazione A'

e nell' altra B' $\quad y = 4h \pm \sqrt{(16h^2 - 6h^2 - h^2)} = h$.

E ponendo $\quad x = 2h$, si avrà

$y = 4h$ nell'equazione A'

e nell' altra B' $\quad y = 4h \pm \sqrt{(16h^2 - 12h^2 - 4h^2)} = 4h$.

Finalmente, se pongasi

$x = -3h$,

si avrà $\quad y = 9h$ nell'equazione A'

e nell'altra B' $\quad y = 4h \pm \sqrt{(16h^2 + 18h^2 - 9h^2)} = 4h \pm 5h = 9h$.

PREFAZIONE

§. 1. L'Opera, ch' io vi presento, discreti leggitori, è un *Trattato Analitico delle Curve Coniche* con metodo scientifico, e nelle didascaliche forme congegnato. L' Analisi algebrica, avendo ormai concepito un energico potere nell' inventare, dovea innestarsi a questo ramo di Geometria, per farne quegli altri rami germinare, che di esso sono più sublimi; ed affinchè vi rifiorissero più gaje queste linee di secondo ordine, che son le curve benemerite della Natura. Ed io m' immagino, che con tal disegno l' Illustre Marchese de l' Hopital, son già venti lustri, avesse ordito un simil lavoro, che ancor riscuote il plauso de' dotti meritevolmente. Poichè ivi adunansi con ordine Euclideo innumerevoli verità su tale oggetto dimostrate coll' Analisi Cartesiana. In mezzo ad esse veggionsi brillare certi artifizii di Geometria oltremodo ingegnosi; alcuni de' quali son come guida a que' calcoli, che vi s' imprendono a fare, ed altri ne fan comporre con eleganza i risultamenti. I luoghi geometrici, che ne accrescono il lavoro, vi son proposti con generici principii, e con un' orditura assai chiara. E finalmente tutti que' Problemi sì *piani*, che *solidi*, onde il valentuomo cercò d' illustrare l' applicazione dell' Algebra alla Geometria, con ammirabil destrezza vengon quivi disciolti, e costruiti.

§. 2. Ma la mole di quest' Opera, ch' è di tanti pregi gentilmente adorna, non può racchiudersi nel piccol giro di una didascalica istituzione per esserne da' giovani apprendevole. Ed anzi non mancan sensati analisti, che in essa richieggonvi un' analisi più pura, ed insiem più attiva: poichè la piuppar-te degli artifizii euristici, come l' ho indicato quì sopra, non sono che geometrici; e di tal natura sono anche molte dimostrazioni, che quivi appajono con simboliche elegantissime divise. E perciò alcuni geometri dell' età nostra si sono ingegnati di produrre varj Saggi analitici sulle curve coniche con massimo risparmio di Geometria, o facendoli da una nuov'analisi animare, che *Geometria Analtica a due Coordinate* si domanda.

§. 3. Or io lodo siffatte produzioni; e ben mi rimarrei di questo mio lavoro, se i detti Saggi fossero alla loro epigrafe corrispondenti. Il Saggio che si fa di una cosa, è il torne da essa una picciola parte, per vi mostrare la qualità dell' altra, che ne rimane. Ma le ricerche, che si omettono in questi Saggi, le quali per altro son molte, e di grave argomento, potran dirsi sì spedite e chiare, come son quelle, che vi si arrecano? Così la teorica de' fuochi delle curve coniche, suol essere adeguatamente sviluppata ne' detti corsi, e con mirabile agevolezza; essendone lineare l' equazione tra le inclinate di ciascuna curva conica, e le loro ascisse. Ma nel trattato de' diametri gli analisti vi cominciano a cespicare. Nella teorica delle tangenti, e delle seganti si tacciono interamente, o vi ridicono lievi cose. Nè alcuno di essi giammai si volse a speculare i raggi d' osculo di tali curve, le loro evolute, o altre di coteste importantissime locali. E dovendo questi geometri occuparsi delle dimensioni dalle dette curve, in quali smarrimenti non dovran cadere? Imperocchè o dovrebberle attignere da geometriche disquisizioni; e ciò dal metodo impreso n' è loro divietato: o converrebbe con integrazioni di formole ottenerle; e quì vi sarebbe un maggiore sconcio, qual si è quello di subordinare il sommo all' imo, o il volere un facil fine con difficili mezzi ottenere. Sicchè riuscendo cotesti Corsi analitici o monchi di teoriche, o sforniti di quell' uniforme didascalico nitore, che tanto vale a rilevare l' intelligenza in chi gli apprende; niuno di essi ha mai agguagliato in eleganza, non pure i Conici del grande Apollonio, ma nè tampoco certe sintetiche Istituzioni, che da' moderni si sono da quegli otto libri delibate: come sarebber quelle dell' Ab. Grandi, di Roberto Simson, dell' Hutton, del Cagnoli, e forse di tanti altri (*).

§. 4. Ma qual n' è mai la natura di questa nuov' Analisi, che quì conviensi a' giovani adombrare? Questa scienza, come cel dicono i suoi coltivatori, è l' applicazione dell' Algebra alla Geometria, fatta con metodi generali, e senza premettervi costruzioni particolari, che dovrebbero variarsi per ogni caso. Cioè a dire un Problema geometrico quivi convertesi in algebrico per mezzo dell' equazioni di certe locali, che vi si hanno a concepire, e pel conveniente lor maneggio. Or s' io non dovessi contenermi negli stretti cancelli di un discorso proemiale, volentieri mi spazierei a descrivere la natura, e 'l merito di questa Scienza. Io vi discuterei, se fia meglio condurre la soluzione di un Problema geometrico alla ma-

---

(*) Il Fergola usando di quella moderazione, che tanto lo distingueva, ha voluto tacere quelle da lui pubblicate, e che senza dubbio tra le quì sopra indicate meritano un luogo distinto.

niera Cartesiana, ch'è assai chiara e naturale, o col maneggio di quelle moltiplici equazioni indeterminate. Se il primo di questi due metodi riesca più agevole e più comodo a' giovanetti, che quell' altro, in che dovrebbono essi ritenere una folla di locali: cioè *l' equazione ad una retta tirata per due punti: a quell' altra, ch' è perpendicolare ad una retta data, o ad una data curva: ad una retta tangente di una proposta curva: ec.* E così varie altre cose in tal rincontro svilupperei. Ma poi che prò, quando la difficoltà di costruirne i risultamenti, la dubbia scelta delle congrue direttrici, e 'l travaglioso lavoro delle eliminazioni, ove tal metodo ne impegna, non il rendono abbastanza commendevole? Intanto del primo de' divisati difetti, che non è assai noto a certi moderni analisti, è ben che alquanto io vi ragioni.

§. 5. Fu detto nelle greche scuole il Problema geometrico esser quello, che si propone a costruirne il soggetto. E si è poi stabilito come un assioma nell' arte dell' inventare, che ciascuno di questi Problemi, qualunque sia il metodo onde il risolviamo, e 'l grado ch' ei contiene, abbia sempre bisogno di costruzione. Ed io vi aggiungo, che la soluzione analitica di uno dei detti Problemi debba stimarsi nelle ottime forme eseguita, se colla purità dell' analisi l' eleganza contenga della costruzione. Or chi non sa, come in questa novella Geometria spesso s' intoppi nelle costruzioni? Il Problema d' *iscrivere in un cerchio un triangolo, i cui lati prodotti, se ne sia d' uopo, passassero per tre punti dati*, fu risoluto con ammirabile analitico magistero dal Signor Lagrange, nella cui mente erasi quella scienza con sagge misure architettata (*). Ma il

(*) Il primo saggio di questa nuova maniera di trattare la soluvalentuomo non vi esibì la costruzione del risultamento: tanto era questo perplesso, e da geometriche ragioni alieno. Onde gli Analisti della Reale Accademia di Pietroburgo, tra'quali il sommo Eulero eminentemente rilucea, dubitaron forte della possibilità della costruzione, e quindi del valore della soluzione del Problema (*). E lo stesso potrei dire di tante altre di coteste analitiche espressioni, che si lasciano inguainate ne' loro simboli, o in uno sterile concetto degli analisti, senza poterle mai rimettere alla Geometria, ove convien recarle (**).

§. 6. Intanto nell' Analisi Cartesiana (lo che valga a toglier dall' obblìo sì nobile scienza) un Problema geometrico si riduce in equazione; tosto che ne avremo espresso in simboli i Dati, i Quesiti, e le Condizioni, che vi si propongono.

---

zione de' problemi geometrici si ha nelle ricerche su'*Problemi della piramide triangolare*, che quest' insigne analista presentò alla R. A. di Berlino, ed inserite nel Vol. degli Atti di essa per l' anno 1773; ove ei stesso indica di essere il primo a tentar di risolvere problemi di Geometria senza bisogno di figure, e di apparecchi geometrici.

(*) Vegg. i *Novi Comm. Acad. Scient. Petrop.* Vol. IV. e V.

(**) Non sarà fuor di proposito, che i coltivatori di questa novella analisi algebrico-geometrica ponessero al confronto le diverse soluzioni che di tal problema, e dell' altro della piramide triangolare, che nel genere de' problemi *di sito* sono quelli che più hanno agitate, e per lungo tempo, le menti de' moderni geometri, ne sono state date alla modernissima maniera da sommi analisti, e quelle che col metodo antico, e con l' analisi Cartesiana ne hanno esibite diversi geometri moderni, e che trovansi inserite ne' Vol. degli Atti della R. A. delle Scienze di Napoli, e nella *Raccolta di Opuscoli della Scuola del Sig. Fergola.*

E questo lavoro non è, che un affare di algoritmo. Nè quelle ingegnose geometriche preparazioni, che vi soleano praticare il Newton, i Bernoulli, e 'l de l' Hopital, e che or taluno ha tanto in odio ed a vile, appartengonsi all'essenza della soluzione; ma sì bene ad ottenerne delle costruzioni eleganti, o a renderne agevoli le soluzioni de' Problemi *posizionali*. Quivi facilmente si costruiscono gli analitici risultamenti: ed anzi l' intera composizion del Problema può in sintetiche forme esibirsi; lo che sembrami assai commendevole. Poichè nostra ragione non è mai paga di aver con simboli risoluto un Problema, se non valga a dimostrarlo con grandezze proprie del soggetto (*). Nè le cognizioni simboliche, per quanto si esalti la loro generalità ed energia, potran mai recarci quell' acquiescenza intellettuale, che solo n' emerge dalle intuitive. Per tal ragione i Bernoulli, ch' eran geometri sommamente acuti e sapienti, esultavan con trasporto, quando loro riusciva di sciorre coll' Analisi Cartesiana certi Problemi di Geometria, che doveansi con metodi nuovi disnodare. Il Signor Montucla, saggio estimatore de' metodi d' inventare, facendo eco a' Matematici del secol trascorso, solea dire, che l' Analisi Cartesiana ben diretta ci somministri un mezzo quanto facile, altrettanto idoneo a farci scoprire la natura, la proprietà, ed i sintomi di una curva di qualunque grado. E finalmente, senza girne mendicando coteste straniere attestazioni, Voi entro quest' Opera vedre-

(*) La definizione che diedero le antiche scuole del Problema geometrico, è che in esso *aliquid proponitur inveniendum et construendum*: questa seconda parte delle soluzione del problema è dunque essenziale ad essa; ed ogni metodo che la trascuri, o che la renda assai difficile, non potrà mai aversi come un buon metodo da risolver problemi geometrici.

te, come l' Analisi Cartesiana ci faccia conoscer facilmente, e talora per sola intuizione non poche verità, che con quell' altro metodo o non ottengonsi per alcun modo, o con mezzi assai duri, ed intralciati.

§. 7. Inoltre chi non sa, che l' Istituzione di una Scienza *sul quanto* si possa distendere in due guise, cioè col *Metodo Sintetico*, che dicesi di *composizione*: o con quell' altro, ch' è *Analitico*, *di risoluzione*, o piuttosto *d' investigazione*. Che per mezzo del primo de' detti metodi rigidamente, e da' principj anteriori debba dimostrarsi ogni verità, che vi si propone: e che l' altro s' impieghi a ritrovare il vero col regolo de' principj euristici, e col pronto maneggio di verità già note. Che il metodo analitico sia più sublime, e più utile del sintetico: come quello, che non pur ci proccura verità nuove, ma insiem ne feconda nostra ragione a poterne rivenir delle altre. Ma sarà bene il volere istituire ogni candidato della detta Scienza col solo metodo analitico, come certi Geometri indiscreti han opinato doversi fare? Potrei dire, che chi non è dalla natura, o dall' arte preparato ad inventare, non usi questo metodo. Dirò solamente (volendone ragionare con equità e discretezza) che l' arte di dimostrare, e l' altra d' inventare sien due virtù *dianoetiche* ben diverse tra loro; e che la prima di esse debba esserne subordinata all' altra: poichè non si procede nel cammino delle invenzioni, che co' passi delle dimostrazioni. Onde chi non è dimostratore, se diasi ad inventare, o nulla vi rinviene, o urta ne' sofismi. Per tal ragione io mi son principalmente in quest' Opera attenuto al metodo di composizione, e vi ho anche praticato in alcuni Problemi l' altro d' investigazione; affinchè ne' giovani si rassodasse per l' un mezzo l' arte di dimostrare, e per l' altro quella dell' inventare.

§. 8. Da tutti questi ragionamenti, cortesissimi Lettori, io mi lusingo, che Voi ne avrete percepito il disegno di quest' Opera, che quì per utile de' giovani esprimo in brevi accenti. Cioè per ciascuna delle tre curve coniche io propongo ordinatamente quella genesi organica, che fu adottata dal Marchese de l' Hopital, e da tanti altri geometri accurati. E poi con mezzi puramente algebrici, e col regolo della Geometria Cartesiana mi fo a svilupparne le più utili, ed insigni proprietà, relativamente a' diametri di esse curve, alle tangenti, alle seganti, a' fuochi, ed alle dimensioni. In tal congiuntura io vi risolvo de' convenevoli Problemi, alcuni de' quali sono oltremodo difficili e sublimi; e vi compongo i risultamenti. E proccuro giusta mia possa che sieno elementari quegli analitici ripieghi, ed eleganti queste costruzioni; affinchè i giovani nell' apprender queste verità si avvezzino a ragionare rigidamente e con eleganza in amendue questi Metodi, e vi conoscan pure, come l'uno convertasi nell' altro decentemente. Intanto io spero, che l' Opera corrisponda al suo disegno. E, se ciò nol sia, io pur son pago, che altri di sagacia fornito, e di sublime ingegno non isdegni produrla in più lodevol forma.

TRATTATO ANALITICO

DELLE

SEZIONI CONICHE

CAPITOLO I.

Della Genesi dell'Ellisse, e de'Diametri di questa Curva.

§. 1. Def. i. Se gli estremi di un filo flessibile intendansi fermati a due piccoli perni fitti in un piano, la distanza de' quali sia minore della lunghezza del filo; e poi uno stiletto, che il tenga mai sempre teso d' accosto al piano, si aggiri con perfetta rivoluzione dintorno a que' due perni: la curva descrittavi dallo stiletto suol dirsi *ellisse* (1).

§. 2. Def. ii. Gli estremi immobili del filo si chiaman *Fuochi dell' Ellisse*. Ed ogni retta, che dall' un de' detti fuochi si conduce ad un qualunque punto della curva, può dirsi *Inclinata*, o *Ramo* (2).

---

(1) Per addestrare i giovani alla precisione, e adeguatezza de'concetti, io quì soglio astrattamente definir certe voci.

(2) Nella genesi organica dell' ellisse, come l' è di tante altre curve, si osservano certi nei ageometrici, ch' io tolgo colla seguente definizione. *I vertici de'triangoli, ciascun de'quali ha una stessa base, ed una data somma de'suoi lati, formano una curva, che si chiama ellisse.*

* *fig.* 1. §. 3. Così il filo FNf* maggiore in lunghezza della retta Ff si concepisca esser legato ne' suoi estremi ai due chiodetti F, f fermati nel piano ANBR, e poi lo stiletto N, che il tenga mai sempre teso d' accanto al piano, si volga d'intorno a que' chiodetti, e finchè ei ritorni al suo primiero sito; la curva ANBR descritta dallo stiletto nell' indicato piano, sarà l' *ellisse* quassù definita; i fuochi della quale saranno i punti F, f. Ed ogni retta FN, o fN, che unisca l' un de' detti fuochi con qualunque punto N del perimetro ANBR, si chiamerà *Inclinata*, o *Ramo*.

§. 4. Da' fuochi F, f della detta ellisse conducansi ad un punto N del perimetro ANBR le rette FN, fN; poi vi si applichi dal punto F, e dall' altra parte della retta Ff, la FR uguale alla fN, e si congiungano le fR, NR. Sarà chiaro, che i due triangoli NfF, RfF abbian le condizioni dell' ottava del I° degli Elementi. Imperciocchè dalla genesi di questa curva, la somma de' rami FN, fN è quanto quella degli altri due fR, FR. Ed essendosi fatta la FR uguale alla fN, sarà anche fR uguale ad NF. Adunque dovranno essere gli angoli NFf, NfF del triangolo NFf rispettivamente uguali agli altri due RfF, RFf del triangolo RfF; e quindi saran parallele le rette NF, Rf, non meno che le altre due FR, Nf. Or essendo la figura $NFRf$ un parallelogrammo, le sue diagonali NR, Ff vi si debbon vicendevolmente secare in parti uguali. Adunque: *Ogni corda dell' ellisse, che facciasi passare pel punto medio della distanza de' fuochi, resterà divisa in parti uguali in tal punto* (1).

(1) Questa verità, che ho quì geometricamente dimostrata, si

§. 5. E se dal fuoco F si applichi la F*n* uguale alla FN, e poi si congiungan le rette N*n*, N*f*, *nf*, si dimostrerà come nel §. prec. esser l' angolo NFM uguale all' altro *n*FM. Il perchè avendo i due triangoli NFM, *n*FM le condizioni della quarta del I° degli Elementi, dovranno avere uguali le loro basi NM, *n*M, e gli angoli NMF, *n*MF in sulle basi: onde ciascuno di essi dovrà esser retto. E perciò: *Nell' ellisse vi è un sistema di corde parallele, che restan divise ad angoli retti, ed in parti uguali dalla retta, che vi si conduce pe' fuochi.*

§. 6. Che anzi: *Se la corda Nn siavi divisa ad angoli retti dalla Ff, dovrà esserne benanche secata in parti uguali; e viceversa.*

Si conduca il ramo *fn* uguale all' altro *f*N, e dall' altra parte della retta pe' fuochi. E se mi si conceda, ch' ei debba

---

può anche attigner dall' Analisi con pari eleganza. (*Ved. Prop. VI.*) Alcuni Geometri la credono intuitiva per esser conseguente alla forma simmetrica dell' ellisse. E ciò non parmi rigoroso. Poichè queste cose si hanno a conoscere col chiarore della Geometria, o dell' Analisi moderna, e non già all' eco di voci indefinite. Inoltre io mi sono astenuto di chiamar *diametri* coteste corde, prima di far vedere, che ciascuna di esse vi divida per mezzo un sistema di corde parallele. Sulla qual cosa convien recare quello, che saggiamente propose il sommo Newton, e si è di poi adottato dallo Stirling, dall' Eulero, e da tanti altri sagaci illustratori della Geometria Sublime: *Si rectae plures parallelae, et ad conicam sectionem utrinque terminatae ducantur; recta duas earum bisecans, bisecabit alias omnes; ideoque dicitur diameter figurae: et rectae bisectae dicuntur ordinatim adplicatae ad diametrum .... et intersectio curvae, et diametri vertex nominatur*. Enum. linear. tert Ord. §. 1.

passare per l' estremo n della detta corda Nn, potrà conchiudersi il proposto assunto per quel che ho nel §. 5 dimostrato. Ma se quel ramo incontri l' ellisse in un punto G diverso dall' altro n, la congiunta NG in virtù di quel medesimo §. sarà perpendicolare alla Ff. E così sarebbero perpendicolari a questa stessa retta le due Nn, NG, che procedono da un medesimo punto. Lo che è un assurdo. Ma per dimostrarne la seconda parte, si supponga il ramo fG uguale all' altro fN, e vi si tiri nH parallela ad Ff. Pel detto §. dovrà essere NK uguale a KG, e quindi NG dupla di NK. Ma per lo parallelismo delle due nH, MK, sta Nn : NM :: NH : NK; e la Nn supponesi doppia di NM: adunque sarebbe anche la NH dupla della medesima NK. E quindi NG uguale ad NH. Ch' è un assurdo.

§. 7. DEF. III. La retta, che conducesi pe' fuochi dell' ellisse, e si distende insino al perimetro, d'amendue le parti, si chiama *Asse* di tal curva. E gli estremi di quello si domandan *Vertici* di questa.

Una tal retta ha meritato il nome di asse dal poter dividere in parti uguali, e ad angoli retti un sistema di corde parallele, come l' ho dimostrato nel §. 6. E 'l §. 4. sarà di luce a ciò, che ora imprendo a definire (1).

§. 8. DEF. IV. Il *centro* dell' ellisse n' è il punto medio dell' asse. E la distanza del centro di tal curva da ciascun de' fuochi di essa suol dirsi *Eccentricità*. Qual sarebbe la retta CF, ovvero l' altra Cf.

(1) Per *centro* di una figura curvilinea può intendersi quel punto, ove resti divisa in parti uguali ogni corda, che conducasi per esso.

§. 9. DEF. V. Ciascuna delle anzidette corde suol chiamarsi *Ordinata all' asse*. E dovrà dirsi *Semiordinata* una metà di essa. Ma la parte dell' asse ch' è tral centro della figura ed un' ordinata, si chiamerà *Ascissa corrispondente ad essa Ordinata, o la sua Ascissa*.

§. 10. SCOL. Il nome di *Ordinata* suol darsi benanche alla metà di tal retta, quando non emerga qualche equivoco nel ragionamento. E l' ascissa corrispondente ad un ordinata può computarsi dall' un de' vertici della curva, o da qualche altro punto dato nel medesimo asse, come parrà conveniente all' analista.

§. 11. DEF. VI. Ciascuna semiordinata, e la sua ascissa diconsi *Coordinate*: e queste nel nostro caso appellansi rettangolari, per esser retto l' angolo da esse contenuto. Tali sarebber le rette NM, ed MC, che costantemente esprimonsi per y ed x.

§. 12. DEF. VII. L' ordinata all' asse, e per lo centro di tal curva si chiama *Asse minore, o secondario* dell' asse primitivo: il quale per tal confronto può dirsi *Asse maggiore, primario, o principale*.

§. 13. POSTUL. Il semiasse maggiore dell' ellisse sarà in appresso costantemente disegnato per a, e per c il semiasse minore. E vi si porrà mai sempre l' eccentricità uguale ad e.

§. 14. COR. Si congiungano * i fuochi F, f, della detta ellisse coll' estremo E del semiasse minore CE. Sarà per la 4. *Elem.* 1. la retta EF uguale all'altra Ef: e ciascuna di esse dovrà uguagliare il semiasse maggiore. Dunque sarà $a^2 = c^2 + e^2$: e quindi $a^2 - c^2 = e^2$, ed $a^2 - e^2 = c^2$. * *fig.* 2.

§. 15. AVVERT. Quì piacemi d' avvertir chi legge, ch'io con un tessuto puramente algebrico, ed inerendo a' principj della Geometria Cartesiana (1) mi son impegnato di compiere questo lavoro sulle curve coniche, qualunque ei sia: proponendone per ciascuna di esse quella genesi organica, ch' è comunemente da' Geometri adottata.

PROPOSIZIONE I.

PROBLEMA.

* *fig.* 2. §. 16. Dalla proposta genesi dell' ellisse ADB* ricavarne l' equazione fra le coordinate rettangolari CM, MN.

SOLUZ. Pongasi, come si è indicato quì sopra, il semiasse maggiore $AC=a$, il minore $CD=c$, l' eccentricità $CF=e$, l' ascissa CM dal centro uguale ad x, e la sua corrispondente semiordinata $MN=y$. Sarà la retta $MF=e-x$, e l' altra $Mf=e+x$. E sarà quindi il ramo $NF=\sqrt{(y^2+(e-x)^2)}$, e l' altro $Nf=\sqrt{(y^2+(e+x)^2)}$. E poichè dalla genesi di tal cur-

* §. 1. va dee esser la somma de' detti rami uguale all'asse maggiore*, sarà ne' loro simboli.

$$\sqrt{(y^2+(e-x)^2)}+\sqrt{(y^2+(e+x)^2)}=2a$$

---

(1) Il Sig. Montucla ha detto saggiamente (*Histoir. des Mathem. Vol. III. pag.* 69.) che l' Analisi Cartesiana ben diretta ci somministri un mezzo quanto facile, altrettanto idoneo a farci scovrir la natura, le proprietà, ed i sintomi di una curva algebrica di qualunque grado. Tutti i Geometri del secolo trascorso furon dello stesso avviso. Ed i Bernoulli, ch' eran geometri oltremodo ingegnosi, e sapienti, esultavano con trasporto, quando ad essi riusciva di sciogliere coll' Analisi Car-

E sterminando i radicali di quest' equazione, come vien prescritto nell' algebrico algoritmo, si avrà un risultato, che cogli ovvj (1) riducimenti può acquistarsi la seguente forma

$$y^2+\frac{a^2-e^2}{a^2}x^2+e^2-a^2=o$$

Ove ponendo per simplicità di calcolo * la c^2 in luogo di * §. 13.
a^2-e^2, si otterrà per la data ellisse la seguente equazione (2)

$$y^2=\frac{c^2}{a^2}(a^2-x^2),\ \text{o pure}\ y^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2.\ .\ .\ .\ \text{A}$$

E se piaccia di ridurre coteste due equazioni in geometrico linguaggio, si avranno i sottoposti Teoremi; cioè:

§. 17. TEOR. I. *Nell' ellisse il quadrato di una qualunque semiordinata sta al rettangolo delle parti dell'asse, in che quella il divide, in duplicata ragione dell'asse minore al maggiore.*

§. 18. TEOR. II. *E 'l quadrato della detta semiordinata manca da quello del semiasse minore per lo quadrato di una retta, ch' è quarta proporzionale in ordi-*

tesiana que'geometrici Problemi, che si solevan risolvere co' metodi nuovi. Si leggano per ciò osservare le opere di Giacomo, e di Giovanni Bernoulli.

(1) Gli ovvj riducimenti, che quì appresso soglio indicare, non sono che il contrarre i termini simili di un' equazione, se pur ve ne sieno: il dividerli per un comun fattore: il trasferire uno, o più di essi dall' un membro all' altro, e simili elementari operazioni.

(2) Estraendo la radice quadrata dalla prima di queste due equazioni ottiensi $y=\pm\frac{c}{a}\sqrt{(aa-xx)}$. E ciò vuol dire, che a ciascun' ascissa di questa curva debban corrispondere due semiordinate uguali, e contrarie, come la Geometria avealo di già dichiarato *. * §. 5.

ne al semiasse maggiore, al minore, ed alla corrispondente ascissa computatavi dal centro.

§. 19. COR. I. Aggiungasi x^2 ad amendue i membri dell' equazione A; dovrà risultarne

$$y^2+x^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2+x^2=c^2+\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2$$

§. 14. E ponendo e^2 per a^2-c^2 *, e per y^2+x^2 il quadrato della retta CN, che unisce il centro C della data ellisse coll' estremo N della detta semiordinata, sarà

$$CN^2=c^2+\frac{e^2}{a^2}x^2$$

§. 20. COR. II. E ciò vuol dire, che il quadrato della retta, che vi congiunge il centro dell' ellisse coll' estremo di una semiordinata, superi quello del semiasse minore, per lo quadrato di una quarta proporzionale in ordine al semiasse maggiore, all' eccettricità, ed all' ascissa presavi dal centro.

§. 21. COR. III. E quindi di tutte le rette, che cadono dal centro di un' ellisse in un quadrante di tal curva, la massima è il semiasse maggiore; la minima il minore: e delle altre quella, ch' è più d' accosto alla massima, n' è maggiore della più rimota.

§. 22. SCOL. I. Nell' equazione del problema appajon due facilissime maniere, onde descrivere per assegnazion di punti un' ellisse, di cui a sia il semiasse maggiore, e c il
* fig. 3. minore. E rispetto alla prima * col centro C, e cogl' intervalli a, e c, si descrivano i due semicerchi DMA, ENF, e da quel centro ad un punto qualunque M nella semicirconferenza esteriore conducasi la CM. Di poi dal punto M si abbassi la MR perpendicolare al diametro AD, e per l' altro

punto N segnato dalla CM nella semicirconferenza interiore si meni la NP parallela al detto diametro. Il punto P, ove s'incontrano le rette MR, NP, dovrassi appartenere ad un' ellisse, che ha que' dati semiassi. Imperocchè ponendo la CR $= x$ e quindi * la MR $= \sqrt{(aa - xx)}$, sarà per lo parallelismo delle due rette NP, CD, CM : CN : : MR : PR, cioè $a : c : : \sqrt{(aa - xx)}$: PR. E questa retta sarà uguale a $\frac{c}{a}\sqrt{(aa - xx)}$, cioè ad una semiordinata della richiesta ellisse. *35. El.III.

In un altro modo men semplice del precedente, ma di esso più generale, perchè applicabile agli altri diametri di questa curva (1), può ottenersi il medesimo intento. Cioè * descritto il semicerchio CKD sul semiasse minore CD dell' ellisse addimandata, si compia d'amendue i semiassi DC, AC il parallelogrammo ACDG, e vi si conduca la diagonale CG. Inoltre si applichi nel detto semicerchio la corda CK uguale ad una qualunque ordinata MH del triangolo ACG, ed in questa retta tolgasi la MN uguale alla DK, corda del supplemento del primiero arco CK. Il punto N dovrà appartenersi ad un quadrante dell' ellisse, che si domanda. * *fig.* 2.

§. 23. SCOL. II. I principii euristici impiegati nella risoluzione del Problema non sono, che questi due. La sterminazione de' radicali nell' equazione che ne offre la genesi dell' ellisse, e la semplificazione del risultamento.

(1) Nella Prop. VII. si vedrà, onde ciò debb' avvenire.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

* fig. 4.

§. 24. Date di posizione la retta HR*, e l'asse AB della data ellisse ANB, vuol determinarsi, se questa curva, e quella retta si incontrino, ed in quali punti.

Soluz. Se la retta HR sia parallela all' asse AB della data ellisse, s' intenderà agevolmente, se questa curva, e quella retta s' incontrino, ed incontrandosi quali punti vi abbiano esse di comune. Ma se la retta HR convenga col detto asse in un punto R, dovrassi a tal uopo praticare il seguente artifizio. Si chiami t la tangente trigonometrica del dato angolo MRN (supponendovi il seno massimo uguale ad 1). E posta la $CR=b$, si dinotino per x, y le coordinate CM, MN della retta HR, che si rapporti alla direttrice CR, avente il punto C per principio delle x. Sarà la $MR=b-x$. Ed essendo MR : MN :: *rag.* : *tang.* NRM, sarà ne' loro simboli $b-x : y :: 1 : t$, e quindi (1) dovrà esser la $y=t(b-x)$. Ciò premesso, si elimini la y dalle due equazioni

$$y=t(b-x) \ldots A \text{ , ed } y^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2 \ldots B$$

(1) Nel prender l' equazione ad una retta, la quale faccia colla sua direttrice un angolo, la cui tangente trigonometrica sia t, io sovente mi valgo di quel noto principio di Trigonometria: che in ogni triangolo rettangolo l' un cateto stia all' altro, come il raggio trigonometrico, che quì sempre suppongo 1, alla tangente dell'angolo sottendente il secondo de' detti cateti. E poi riduco quest' analogia in equazione.

la prima delle quali appartiensi alla retta HR, e l'altra all' ellisse ANB. Si avrà (1) in tal modo l' equazione determinata

$$t^2(b-x)^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}x^2 \quad \ldots \quad C$$

che ordinandosi rispetto ad x diviene

$$x^2-\frac{2t^2a^2b}{t^2a^2+c^2}x+\frac{t^2a^2b^2-a^2c^2}{t^2a^2+c^2}=0 \quad \ldots \quad D$$

Dico *esser le radici reali dell' equazione* D *i valori delle ascisse della data curva* ANB, *le quali corrispondono alle ordinate pe' richiesti punti d' intersezione*.

Dimostr. L' ellisse ANB, e la retta HR, come ne appare dalla soluzione, rapportansi alla medesima direttrice RC, ed han quivi il punto C per comune principio delle x. Inoltre l' è chiaro di per se stesso, che le dette linee ANB, ed HR non possano avere altre y tra se uguali, che quelle sole, che appartengonsi a' punti d' intersezione: altrimenti l' una linea sarebbesi coll' altra immedesimata. Ma quì sopra si è eliminata la y dalle due equazioni A, B: e ciò non può aver luogo, che supponendola di un medesimo valore in esse equazioni. Adunque col magistero di detta eliminazione il calcolo ha dovuto restringersi alle sole coordinate de' punti d' intersezione, quasichè le due locali A, B fosser divenute due ordinarie equazioni a due ignote, ed atte a produrne l' equazione finale D. E perciò le radici di questa equazione, se pur esse sien reali, dovran dinotarvi le ascisse, che corrispondono alle ordinate pe' richiesti punti d' intersezione.

Intanto si chiamino α, β coteste due radici, cioè i

(1) Cotesta eliminazione quì si riduce a sostituire in B il valore della y ricavato dall' equazione A.

valori delle due ascisse CM, CP; saranno le loro ordinate, che però appartengansi alla retta HR, rispettivamente uguali a $t(b-\alpha)$, $t(b-\beta)$. Ma le α, β si son supposte reali; adunque di tal natura saranno i valori delle ordinate MN, PQ. E quindi alle radici reali α, β dell' equazione D corrispondono due vere, e reali intersezioni dell' ellisse ANB, e della retta HR (1). Nè potrà poi temersi ciò, che nella combinazione di due curve avvenir suole, che *il numero delle radici reali dell' emergente equazione non vi pareggi quello delle intersezioni.*

§. 25. Cor. 1. L' equazione D avrà le sue radici immaginarie, se mai si avveri essere il quadrato del fratto $\frac{t^2a^2b}{t^2a^2+c^2}$ minore di $\frac{t^2a^2b^2-a^2c^2}{t^2a^2+c^2}$. O, spingendo il calcolo più oltre, se la t sia maggiore di $\frac{c}{\sqrt{(b^2-a^2)}}$ (2). Ed in tal caso la retta HR non potrà in alcun punto incontrare la sottoposta ellisse ANB.

---

* *fig.* 4. (1) Se la linea RQH* fosse una curva, talchè ciascuna ordinata QP esprimasi per la radice quadrata, biquadrata, *ec.* di un polinomio, il quale contenga l' ascissa x, e grandezze costanti; può spesso avvenire, che per certi valori reali della x quell' ordinata diventi immaginaria.

(2) Nel Cor. 2. Prop. III. si vedrà essere il fratto $\frac{c}{\sqrt{(b^2-a^2)}}$ la tangente di quell' angolo, che dee fare coll' asse, nel punto R, la retta che tocchi la sottoposta ellisse. Onde ognuno dovrà intender colla luce della Geometria quel che l' Analisi quassù n' esprime: che una retta, la quale siane al di sopra della RE*, non possa incontrar mai la data ellisse.

* *fig.* 5.

§. 26. COR. II. E se le radici dell'equazione D non solamente sien reali, ma pur anche uguali (lo che deesi verificare, se il quadrato del primo degli anzidetti fratti pareggi l'altro), le due intersezioni Q, N dovranno raccorsi in un sol punto.

§. 27. COR. III. Se due equazioni contengan due ignote, e l'una di esse sia quadratica, l'altra lineare; necessariamente dee esser di secondo grado quella, che si ricava eliminandone una delle già dette ignote. Dunque niuna retta può segar mai un'ellisse in più di due punti. E nè tampoco può avvenire, che una corda di tal curva producendosi dall'una parte, o dall'altra ne incontri altrove il perimetro.

§. 28. COR. IV. Allorchè due linee si rapportino ad una medesima direttrice, ed abbian quivi un medesimo principio delle ascisse x, cui sien normali le ordinate y, le loro equazioni limitate ad un di quei punti, ove le dette linee si incontrano, dovranno considerarsi come due equazioni a due ignote (1).

§. 29. SCOL. L'eliminazione della y dalle due equa-

---

(1) Queste coordinate da variabili, che l'erano, diventano determinate, in virtù della combinazione delle proposte locali, cioè della retta RH, e dell'ellisse AQN*. Ma un'altra cosa dee esser da' giovani avvertita; ed è, che sebbene l'analisi del problema siasi diretta ad indugarne un solo di questi punti, ella nondimeno vi comprende anche i rimanenti, per esser sì questi, che quello similmente condizionati. Sulla qual cosa eccone un'elegante dottrina del sommo Newton. *Nam si intersectiones illae seorsim quaerantur, quoniam eadem est omnium lex, et conditio, idem erit calculus in casu unoquoque, et propterea eadem semper erit conclusio* (aequatio), *quae igitur debet omnes intersectiones simul complecti*. (*Princ. Math. lem.* 28.) * *fig.* 4.

zioni A , B è il principio regolatore della precedente solu-
zione : ed ella ne dovrà guidare la seguente , con tenervisi
anche conto di due radici uguali , come l' esige la natura del-
la tangente , che or ne imprendo a dichiarare.

§. 30. Def. viii. La *tangente* dell' ellisse è una ret-
ta , che incontra questa curva in un sol punto , e tutti gli al-
tri suoi punti ne restano al di fuori.

§. 31. Scol. Nel contatto di queste due linee s' inten-
* §. 26 don raccolte in un sol punto le due loro intersezioni*. Onde
con tal concetto , e per quel , che ho dimostrato nel Corolla-
rio iii. , potrà intendersi la possibilità del definito , o perchè
mai un solo punto della tangente debba starne in sulla curva,
e gli altri al difuori . Ma pur non si divieta agli analisti il
potervi concepire due intersezioni come intervallate fra loro ad
una distanza infinitesima , e presso a riunirsi in un sol punto.
E con questo nuovo concetto potrà ammettersi ciò , ch' essi
dicono concordemente (1) , *che il contatto equivalga a due
intersezioni : che quivi le due ordinate sieno uguali : che
vi sieno altresì uguali le loro ascisse* : ed altre cose affini ,
che potran regolarci nella ricerca de' contatti delle curve alge-

---

(1) È un principio stabilito dall' Eulero , dal Cramer , e da tanti altri analisti , che una retta non debba secare una linea di primo ordine , che in un sol punto : ch'ella non possa in più di due punti tagliarne una linea di secondo ordine , quali sono le curve coniche : nè in più di tre punti un' altra di terzo ordine : è così più appresso . Onde può inferirsi , che il massimo numero delle intersezioni di una retta , e di una qualunque curva algebrica sia quanto il grado dell' equazione di questa . Ma ciò non può indistintamente valere pel numero de' loro incontri . Imperocchè , essendovi de' contatti , ciascun di questi dovrà contare per due intersezioni .

briche, delle loro osculazioni, della natura delle evolute, delle caustiche per riflessione, o per rifrazione, ed in risolvere tanti altri problemi di una consimil natura.

§. 32. Def. ix. Quella parte dell' asse, ch' è tra una tangente dell' ellisse, e l' ordinata condottagli per lo contatto, suol dirsi *Sottangente*.

§. 33. Def. x. E quell' altra parte del medesimo asse, la qual tramezza l' ordinata per lo contatto, e la normale elevata alla tangente dal contatto, si dice *Sunnormale*.

La retta RE sia tangente dell' ellisse AEB *, e dal punto E del contatto si elevi la EV perpendicolare alla detta tangente, e poi si ordini la ED all' asse AB di tal curva. La retta RD ne sarà la sottangente, e la DV la sunnormale. Intanto la prima di queste due definizioni è adattabile agli altri diametri dell' ellisse, de' quali si parlerà più appresso, e l' altra dee ritenersi pe' soli assi. E tutte dovran poi in simil guisa appartenere alle altre due curve Iperbole, e Parabola. * *fig.* 5.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

§. 34. Data l' ellisse AEB*, tirarle una tangente dal dato punto R, che stia nell' asse prodotto di tal curva. * *fig.* 5.

Soluz. Suppongasi esser la RE la tangente addimandata, e la ED la semiordinata per lo contatto. E poi si ponga la sottangente RD$=v$, la semiordinata ED$=y$, la distanza del centro C dell' ellisse dal punto R, cioè la CR$=b$; e la tangente trigonometrica dell' angolo R, che quì è una gran-

dezza ignota, si chiami t. Sarà l' ascissa $CD=b-v$, e do-
*Not.pag.18. vrà esser la $y=tv$ *. Ciò posto si elimini la y dalle due e-
quazioni

$$y=tv \quad , \text{ ed } \quad y^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}(b-v)^2$$

* §. 16. la prima delle quali appartiensi alla retta RE *, e l' altra è al-
l' ellisse AEB. Si avrà la seguente equazione

$$t^2v^2=c^2-\frac{c^2}{a^2}(b-v)^2$$

che ordinata rispetto all' ignota v si cangia in quest' altra

$$v^2-\frac{2bc^2}{t^2a^2+c^2}v+\frac{b^2-a^2}{t^2a^2+c^2}c^2=0 \ldots F,$$

le cui radici deggion essere tra se uguali per la natura della
* §. 31. tangente RE *. Ma per l' equalità delle dette radici l'ignota v
l' è quanto la metà del coefficiente del 2°. termine affetto di
segno contrario. Dunque sarà

$$v-\frac{bc^2}{t^2a^2+c^2}=0 \ldots G$$

E moltiplicando per v quest' ultima equazione, e poi sottraendola dalla F, si avrà un residuo, che, come ben si vede, può dividersi per la frazione $\frac{c^2}{t^2a^2+c^2}$. Onde n' emerge la sottangente $v=\frac{b^2-a^2}{b}$, e quindi l' ascissa CD, ch' erasi disegnata per $b-v$, diverrà uguale ad $\frac{a^2}{b^2}$.

§. 35. TEOR. *In qualunque punto dell' ellisse conducasi la tangente, l' è sempre di una costante grandezza il rettangolo dell' ascissa corrispondente all' ordinata per* *lo contatto, e della medesima ascissa accresciuta della sottangente : cioè quanto il quadrato del semiasse* .

§. 36. Cor. I. Se per lo punto D si ordini la ED*e* all'asse AB della data ellisse, la congiunta RE dovrà incontrare la detta curva nel solo punto E : restandone al di fuori di essa tutti gli altri suoi punti (1). E per tal ragione ella dovrà esser la tangente addimandata. E lo stesso intendasi per l'altra retta R*e*, che si congiunga.

§. 37. Cor. II. Se vogliasi determinare l'altra ignota t, per indi conoscer la posizione della tangente all'asse della curva, dovrà porsi nell'equazione G il fratto $\frac{a^2-b^2}{b}$ in luogo della v ; con tali grandezze maneggiando la detta equazione si troverà esser la

$$t = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{c} \ldots\ldots\ \text{H}$$

§. 38. Cor. III. Nel dato punto E del perimetro ellittico AEB gli si debba condurre la tangente. Per ciò ottenere si tiri per E l'ordinata ED, e poi si prenda nell'asse BA la CR terza proporzionale in ordine all'ascissa CD, ed al semias-

(1) Quando si son supposte uguali le radici dell'equazione F, ch'è di secondo grado, vi si debbon concepire due prossime intersezioni della retta RE, e dell'ellisse AEB. Onde tutti i punti della RE, tranne il solo E, dovranno stare fuori della curva *. E sarebbe una superfluità il voler precisamente ciò dimostrare ; come par che l'avverta l'insigne Cramer co'seguenti detti : (Introd. a l'Analyse des lignes courbes *pag.* 401.) *La tangente est censée rencontrer en deux points la courbe, qu'elle touche . . . car si elle la rencontroit en un autre point, elle seroit censée la rencontrer trois fois*. Lo che ripugna ad una linea retta di 2°. ordine. *§§. 27. e 31.

4

se CA. La congiunta RE sarà la tangente richiesta: e ciò per l'anzidetto teorema può dimostrarsi.

§. 39. SCOL. L' equazione F avendo le due radici uguali potrà multiplicarsi per la progressione aritmetica 0 . 1 , 2 , termine per termine (1). E sì facendo, dovran restarvi uguali a zero gli ultimi due termini della detta equazione, dal riducimento de' quali si otterrà $v = \frac{b^2 - a^2}{b}$, e quindi $CD = b - v = \frac{a^2}{b}$. Che, se collo stesso metodo voglia rinvenirsi la t, si dovrà multiplicare l' equazione F per l' altra progressione 2, 1, 0, ch' è retrograda della prima: e risultandone $\frac{bc^2}{t^2 a^2 + c^2} = v = \frac{b^2 - a^2}{b}$, sarà finalmente $t = \frac{c}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$.

Intanto, per poter osservare a quale verità geometrica quest' analitico risultamento corrisponda, si chiamino x, y le coordinate del punto E del contatto; sarà* $b = \frac{a^2}{x}$; e quindi $b^2 = \frac{a^4}{x^2}$. Sicchè sostituendo nell'equazione H cotesto valore della b^2, n' emergerà, fatte le consuete riduzioni,

* §. 35.

$$t = \frac{cx}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{c^2}{a^2} \times \frac{x}{y}.$$

(1) Di questo metodo ne siam debitori all' ingegnoso Hudden de Reduct. Aequat.: ed i più accurati istitutisti il sogliono rigidamente dimostrare. Or sebbene un tal metodo, che ho quì adoperato, e quell' altro, che ho seguito nel problema, abbiano differenti orditure; essi non per tanto convengono nel determinarci l' ignota v indipendentemente dalla t, che l' è anche un' ignota, ed insiem con quella rinviensi nell' equazione F del §. 34.

Ove deesi avvertire, che nell'ultimo risultamento si è posto il valore di $\sqrt{(a^2-x^2)}$ preso dall' equazione A Prop. 1. Per la qual cosa essendo

$$t : \frac{x}{y} :: c^2 : a^2$$

sarà

$$tang.\ \mathrm{FRD} : cot.\ \mathrm{ECD} :: c^2 : a^2.$$

Lo che in appresso sarà da altri principj dedotto, e convenevolmente espresso, ed applicato.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

§. 40. Dato il punto K, che non istia sulla data ellisse AEB, nè a diritto coll' asse di tal curva, condurle per esso una tangente. * *fig.* 5.

Soluz. Sia ER la desiata tangente, la quale passi pel dato punto K, incontrando in R l'asse BA di una tal curva; e da' punti K, E si abbassino al detto asse le perpendicolari KQ, ED. Inoltre pongasi la CR $= v$, e si dinotino per b, h le coordinate CQ, QK del dato punto K; saranno le coordinate dell' ignoto punto E, cioè le CD, DE rispettivamente uguali ad $\frac{a^2}{v}$, e $\frac{c}{v}\sqrt{(v^2-a^2)}$. Delle quali cose la prima è nota per lo §. 35, e l'altra per la Prop. 1., ponendovi nell' espression della semiordinata in vece della x il fratto $\frac{a^2}{v}$. Finalmente sarà $\mathrm{RQ} = \mathrm{RC} - \mathrm{CQ} = v - b$, ed $\mathrm{RD} = \mathrm{RC} - \mathrm{CD} = \frac{v^2-a^2}{v}$. E sarà quindi il rapporto di

RD a DE uguale a quello di $\sqrt{(v^2 - a^2)}$ a c, come ne appare dalle loro espressioni. Ciò posto, per la similitudine de' triangoli rettangoli RDE, RQK, sta RD : DE : : RQ : QK, e con ciò RD² : DE² :: RQ² : QK². Adunque ne'loro simboli avrassi $v^2 - a^2 : c^2 :: (v-b)^2 : h^2$, ed

$$h^2 (v^2 - a^2) = c^2 (v - b)^2 \quad . \; . \; . \; \mathrm{H}$$

Or quest' equazione essendo di 2° grado, pe' precetti dell' algoritmo volgare si potran facilmente ottenere i valori numerici della v, e l' esibizione geometrica di essi. E queste due cose potrebbonsi comodamente tralasciare, perchè assai note, e perchè il medesimo problema per la teorica de' diametri più giù risolvo. Ma una breve costruzione, che mi è riuscito d' attigner dall' addotta analogia (1), merita di esser quì recata, e

---

(1) È un dovere di chi analiticamente risolve un geometrico problema il darne con precisione l'analitico risultamento, e poi costruirlo con eleganza. Poichè la prima cosa conviensi alla natura della soluzione, e l' altra a quella del soggetto, che l' è una grandezza continua. Ed a ciò par che alluda il sommo Eulero, quando per simili problemi così ragiona: *unde quicunque valores pro quantitatibus cognitis fuerint assumpti, per calculum numericum valor ipsius incognitae facile assignabitur . . . . . Verum quia hoc problema est geometricum, non tam calculus numericus, quam constructio geometrica desiderari solet.* (Act. Acc. Petrop. an. 1790.) Intanto il presente problema risoluto colla Geometria analitica de' moderni ci offre la seguente equazione $(a^2h^2 + c^2b^2)x^2 - 2a^2c^2bx - a^4(h^2 - c^2) = 0$, ch' è della H assai più difficile, e di una tediosa, e grave costruzione. Ma potrà concedersi ad un che coltivi questo metodo, che, divisa l'unità delia soluzione, ne lasci il risultamento senza costruzione, e che altrove, e per altre teoriche vi rilevi i punti soddisfacenti?

proposta in forma di teorema. Al che anche la ragion di metodo m' induce.

§. 41. TEOR. *Se la* QK, *distanza del dato punto* K *dall' asse della data ellisse, producasi in* F, *sicchè stia* QK *a* QF, *come l' asse minore al maggiore, e dal punto* F *si conducano le due tangenti* FG, Fg *al cerchio circoscritto alla detta ellisse: quelle due rette dovran segnare nell' asse di questa curva i due punti* R, r, *talchè le rette, che li congiungono col punto* K, *ne riescan tangenti all' ellisse.*

DIMOSTR. Imperocchè essendo QK a QF, come CL a CA, o a CG (intendendosi congiunto il raggio CG), sarà permutando QK a CL, come QF a CG, o come RQ ad RG, pe' triangoli simili RGC, RQF; ed $RG^2 : RQ^2 :: CL^2 : QK^2$. E quindi ne' simboli di queste grandezze sarà $v^2 - a^2 : (v - b)^2 :: c^2 : h^2$. E nascendo l' equazione H da quest' analogia, la CR le sarà soddisfacente. Nello stesso modo, e per la similitudine degli altri due triangoli rgC, rQF, ove siasi condotto il raggio Cg, potrà dimostrarsi, che alla medesima equazione H sia soddisfacente la Cr. Adunque le tangenti menate da' punti R, r a' rami ellittici AL, AS dovran passare pel dato punto K.

§. 42. COR. Due tangenti si posson tirare ad un' ellisse da ciascun punto preso fuori di essa. E 'l rapporto loro sarà esibito nel seguente Capo.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

* *fig.* 5. §. 43. Data l' ellisse AEB *, determinarvi il rapporto della sunnormale VD alla CD ascissa dal centro.

SOLUZ. Si ponga il semiasse maggiore AC $= a$, il minore

* §. 35. CL $= c$, e l' ascissa CD $= x$; sarà * la CR $= \frac{a^2}{x^2}$, e la sottangente RD $=$ CR $-$ CD $= \frac{a^2-x^2}{x}$. E dovendo essere le tre rette

* 8.El. VI. RD, DE, VD * continuamente proporzionali, saran tali le

* §. 16. loro espressioni *

$$\frac{a^2-x^2}{x}\ ,\quad \frac{c}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}\ ,\quad VD$$

E dovrà risultarne la sunnormale VD $= \frac{c^2}{a^2}x$. Cioè

§. 44. TEOR. *Nell' ellisse la sunnormale sta alla corrispondente ascissa computatavi dal centro, in duplicata ragione dell' asse minore al maggiore.*

ALITER.

§. 45. Questa indagine poteva eseguirsi indipendentemente dal valor della sottangente, ed alla maniera Cartesiana, che quì

* *fig.* 6. debbo a' giovani dilucidare. Da un qualunque punto G* preso nell' asse della data ellisse conducasi ad un altro punto M di essa curva la GM, e centro G, intervallo GM si descriva il cerchio, che intersechi quella curva in M, *m*, *etc.*; onde

sieno MN, *mn*, *etc.* le semiordinate all' asse per que' punti. Inoltre pongasi l'ascissa $CN = x$, la sua semiordinata $MN = y$, la $GM = z$, e la $GC = v$. Sarà la $GN = CN - CG = x - v$. Inoltre per lo triangolo rettangolo GNM dee essere $MN^2 = MG^2 - GN^2 = z^2 - x^2 - v^2 + 2vx$; e per la natura della data ellisse è poi $MN^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2$. Adunque dal pareggiamento di questi due valori di MN^2 si avrà la seguente equazione

$$z^2 - x^2 - v^2 + 2vx = c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2.$$

Che ordinata rispetto ad x diviene

$$\frac{2a^2v}{a^2-c^2}x - \ldots\ldots = 0 \ldots K$$

Ciò premesso, si supponga rimaner fisso il centro G del mentovato cerchio, e continuamente raccorciarsi il suo raggio, finchè le due sezioni M, *m* si raccolgano in un sol punto. In tal caso la retta GM diverrà normale della data ellisse nel punto M; e le due ascisse CN, C*n* radici dell' equazione K si fanno uguali. Adunque per le algebriche teorie ciascuna di esse vi diverrà uguale alla metà del coefficiente del secondo termine affetto di segno contrario. Cioè dovrà esser la

$$x = \frac{a^2v}{a^2-c^2}, \text{ e quindi } v = \frac{a^2-c^2}{a^2}x.$$

Ed essendo la GN uguale a CN — CG, cioè ad $x - v$, cotesta sunnormale GN dovrà uguagliare $\frac{c^2}{a^2}x$, come si è qui sopra rilevato.

§. 46. Cor. I. Il quadrato della normale EV *, che pareggia la somma de' quadrati della sunnormale DV, e della se- * *fig.* 5.

miordinata ED, dovrà eguagliare il sottoposto trinomio

$$\frac{c^4x^2}{a^4} + c^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2)$$

E, ponendo in esso la e^2 per $a^2 - c^2$, e poi estraendovi la radice quadrata, sarà la normale

$$\text{EV} = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2})}$$

§. 47. COR. II. Si unisca la retta CE, e si chiami θ l' angolo ECD. Sarà pe' triangoli rettangoli DCE, DVE, che han di comune il cateto DE, *tang*. θ : *tang*. EVD :: DV : DC :: $c^2 : a^2$. E con tal proporzione s' intenderà qual sito abbia la normale EV coll' asse AB della data ellisse.

§. 48. COR. III. E chiamando φ l' angolo ERD complemento dell' altro EVD, la precedente analogia si cangerà in quest' altra *tang*. θ: *cot*. φ :: $c^2 : a^2$, onde sarà *tang*. $\theta = \frac{c^2}{a^2}$.*cot*.φ.

Nel Problema, che segue, s' incontra per altre vie la medesima importantissima equazione, che è anche divisata nel §.39.

§. 49. SCOL. I. L' ignota di un' equazione quadratica, che ha le sue radici uguali, è quanto la metà del coefficiente del secondo termine affetto di segno contrario. Or questa verità analitica elementare n' è stata il regolo della soluzione del presente Problema, e del Problema III.

§. 50. SCOL. II. Il primo impegno di colui, che colla face della Geometria, o dell' Analisi va speculando ciascuna di queste tre curve, è certamente il conoscer la natura, e 'l sito di quella linea, che vi passa pe' punti medj delle corde parallele. Or l' asse maggiore di un' ellisse, come l' ho dimostrato nel principio di questo Capo, si conduce pe' punti medj delle applicate, che gli sono perpendicolari. Ed in un altro sistema di corde parallele qual sarà mai la linea, in che i punti medj di esse si allogano? Questa ricerca si esegue nel seguente Problema: ed ella non si restringe all' indicato oggetto, come parrebbe a taluno; ma mirabilmente ci discopre le multiplici proprietà de' diametri di tal curva, e ci è di norma in altre indagini più scabre. Come può vedersi nel seguente Capo.

PROPOSIZIONE VI.

PROBLEMA.

§.51. Data l'ellisse ADB*, ritrovar la linea, che passa pe' punti medj delle sue corde Mm, $M'm'$, *etc.* che sien parallele tra loro. * *fig.* 7.

Soluz. Dagli estremi M, m di una qualunque delle dette corde, e dal suo punto medio O si abbassino all' asse AB della data ellisse le perpendicolari MN, mn, OR. E posta, come quì sopra, la $CA = a$, e l' altra $CD = c$, si facciano $CR = v$, $RO = z$, e $CN = x$; le quali tre grandezze, come ben si vede, sono indeterminate. Sarà la $RN = CN - CR = x - v$. Ed esprimendo per φ l' angolo VMO, cioè quello, che farebbe coll' asse ciascuna delle dette corde, si dinoti per h la sua tangente trigonometrica, postovi il raggio uguale ad 1; dovrà * esser la $VO = h(x - v)$, e quindi la MN, ch' è quanto $OR - VO$, sarà uguale a $z + h(v - x)$. E poichè per la na- *prop. II.

tura dell' ellisse ADB è $MN^2 = CD^2 - \frac{CD^2}{CA^2} \times CN^2$, si avrà ne' simboli di queste grandezze la seguente equazione

$$h^2\omega^2 - 2h\omega(z+hv) + (z+hv)^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}\omega^2$$

che ordinata rispetto ad ω trasformasi in quest' altra

$$\omega^2 - \frac{2ha^2(z+hv)}{h^2a^2+c^4}\omega = \frac{a^2c^2 - a^2(z+hv)^2}{h^2a^2+c^2} \quad . \ . \ . \ A$$

Ciò posto, il coefficiente del secondo termine dell' equazione A preso con segno contrario dee pareggiarvi la somma delle radici, che sono le CN, Cn. Dunque la metà di quello sarà uguale alla semisomma di queste: cioè (1) dovrà essere

$$\frac{ha^2(z+hv)}{h^2a^2+c^2} = CR = v.$$

E, praticando gli ovvj riducimenti in quest' ultima equazione, si vedrà risultarne $ha^2z = c^2v$, e con ciò

$$z = \frac{c^2v}{ha^2}, \text{ ovvero } \frac{z}{v} : \frac{1}{h} :: c^2 : a^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ B$$

§. 52. TEOR. *Nell' ellisse la linea, che passa pe' punti medj delle corde parallele, l' è una retta distesa per lo centro della figura, ed inclinata all' asse per un angolo, la cui tangente sta alla cotangente di quell' altro angolo, onde ciascuna delle dette corde inclinasi al medesimo asse, in duplicata ragione dell' asse minore al maggiore.* (2)

§. 53. COR. 1. Se una delle anzidette corde intendasi flui-

---

(1) Le tre rette CN, CR, e Cn sono aritmeticamente proporzionali: onde sarà CN + Cn = 2CR.

(2) La prima parte di questo teorema nasce dall' equazione B, e l' altra dall' analogia, che vi si osserva.

re con moto a se parallelo verso l'un de' due archi, ch' ella vi sottende; sarà chiaro dalle precedenti cose *, che questa retta fluente vi debba divenir tangente, quando le due intersezioni di essa retta, e della curva raccolgansi in un punto. Dunque le corde Mm, M$'m'$, *etc.* dell' ellisse ADB dovranno esser parallele alle tangenti condottele per gli estremi della retta FG, che passa pe' punti medj di esse. E da questa dottrina potran congegnarsi le seguenti definizioni.

* §. 31.

§. 54. Def. xi. Ogni corda dell' ellisse, che vi traversa il centro, n' è un diametro. Ei tien per *ordinate* quelle altre corde di questa curva, che son parallele alle tangenti condottevi pe' suoi estremi. E le parti del diametro, che le dette ordinate vi troncano insino al centro, si chiaman *le loro ascisse*. Finalmente ciascuna semiordinata, e la sua ascissa si dicon benanche *coordinate*.

§. 55. Cor. ii. Si tiri il semidiametro CL parallelo alle ordinate dell' altro CF. Ed, abbassata la LK perpendicolare all' asse AB, pongasi CL$=\gamma$, CK$=x$, LK$=y$, l' angolo BCL$=\varphi$, $sen.\varphi=m$, e $cos.\ \varphi=n$; sarà $tang.\varphi$, ch'erasi espressa per h, uguale ad $\frac{m}{n}$. E dovendo essere $m:n::$ LK : CK $::y:x$, sarà $y=\frac{mx}{n}$. Intanto si surroghi questo valore della y nell' equazione A del Probl. I., si avrà $x^2=\frac{n^2a^2c^2}{m^2a^2+n^2c^2}$. Ed essendo per le nozioni trigonometriche $n:1::$ CK^2 : CL^2 $::x^2:\gamma^2$, sarà

$$\gamma^2=\frac{a^2c^2}{m^2a^2+n^2c^2}\ \ldots\ldots\ C$$

*

§. 56. COR. III. Nel §. 19. si è valutato il semidiametro CL dall' ascissa corrispondente al suo estremo L, proponendosi esser $CL^2 = c^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2}$; ed ora più acconciamente si valuta per la sua posizione coll' asse della data ellisse, con la regola, che ho stimato dover quì astrattamente enunciare.

§. 57. COR. IV. *Il numeratore del fratto, ch' esprime il quadrato di un semidiametro, è il prodotto de' quadrati del semiasse maggiore, e del minore. Il denominatore vi contiene la somma de' detti quadrati; ma il primo di essi deesi multiplicare per lo quadrato del seno, e l' altro per quello del coseno dell' angolo, onde il detto semidiametro inclinasi all' asse della figura.*

§ 58. COR. V. Inoltre si chiami θ l' angolo ACF, di cui p siane il seno, e q il coseno, e pongasi il semidiametro CF $= a$; sarà per lo Cor. prec.

$$a^2 = \frac{a^2 c^2}{p^2 a^2 + q^2 c^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; D$$

Ma in virtù del rapporto, che si è dimostrato nel §. 52: tra *tang.* θ, e *cot.* φ, potrà recarsi ad a^2 un' altra più comoda espressione, cioè:

§. 59. COR. VI. Essendo *tang.* $\theta = \frac{p}{q}$, e *cot.* $\varphi = \frac{n}{m}$ sarà $\frac{p}{q} : \frac{n}{m} :: c^2 : a^2$, e quindi $\frac{p^2}{1-p^2} : \frac{n^2}{m^2} :: c^4 : a^4$ (1) E, se riducasi in equazione la seconda analogia per rinvenirne la p^2,

(1) Ognun s' avvisa, che quì sopra intendasi citato lo stesso §. 52; che siensi quadrati i termini dell' addotta analogia; e che per q^2 siasi posto $1 - p^2$.

si avrà $p^2 = \frac{n^2c^4}{m^2a^4+n^2c^4}$, e $q^2 = 1 - p^2 = \frac{m^2c^4}{m^2a^4+n^2c^4}$.

Finalmente si procuri di sostituire in D cotesti valori delle p^2, q^2, sarà

$$a^2 = \frac{m^2a^4+n^2c^4}{m^2a^2+n^2c^2} \quad \ldots\ldots \text{E}$$

§. 60. Cor. vii. Ed essendo pe' principj della Trigonometria *sen.* $(\varphi+\theta) = mq + np$, sarà co' recati valori delle p, q

$$sen.\,(\varphi+\theta) = \frac{m^2a^2+n^2c^2}{\sqrt{(m^2a^4+n^2c^4)}} \quad \ldots\ldots \text{F}$$

§. 61. Scol. Un de' principj, onde ne ho specialmente guidata l'addotta soluzione, è quella nota proprietà del coefficiente del 2°. termine di un' equazione algebrica. E di essa ancor mi valgo nel seguente Capo per rinvenir la linea retta, che passa pe' punti medj delle corde di un' ellisse, le quali concorrano ad un punto dato.

CONSEGUENZE GEOMETRICHE

DEGLI ANALITICI RISULTAMENTI DI QUESTO PROBLEMA.

§. 62. i. L' ellisse ha infiniti diametri, che son quelle corde, che passano pel suo centro, e che quivi deggion esser divise in parti uguali *. Il massimo de' diametri n' è l'asse maggiore; il minimo il minore: quegli altri, che sono più d' accosto al massimo, son maggiori de' più lontani *. E due diametri, che inclinansi all' asse ugualmente, son tra se uguali *.

* §. 4.
* §. 21.
* §. 55.

§. 63. ii. Il centro di un' ellisse, i punti medj delle corde parallele, ed i contatti di due tangenti, che sien parallele ad esse corde, si giaccion tutti per diritto. Dunque *una retta, che unisca due di questi punti, dovrà passarne pe' ri-*

manenti. E con questi principj si potrà agevolmente determinare il centro di un ellisse, ove non veggasi segnato alcun de'suoi diametri, o degli assi.

§. 64. III. *Se congiungansi gli estremi di due qualunque diametri** FH, GI *dell' ellisse* AFEN, *l' emergente quadrilineo* FGHI *dovrà essere un parallelogrammo*. Imperocchè i due triangoli FCI, GCH avendo le condizioni della 4. *Elem*. I. dovranno avere uguali le loro basi FI, GH; le quali saran benanche parallele, per esserne l' angolo IFH uguale al suo alterno FHG. E per simil ragione, o per la 33. *Elem*. I. le altre due congiungenti FG, IH saran pure uguali, e parallele: e'l detto quadrilineo dovrà essere un parallelogrammo.

* *fig*. 8.

§.65. IV. Ed unendo per la retta KL i punti medj delle corde FG, HI, che son parallele, ed uguali, la detta congiungente, dovrà pel n°. II. passare per lo centro dell' ellisse, e per la 33. *Elem*. I. risulterà parallela alle FI, GH. E così pure la BD, che conducasi pe' punti medj delle corde FI, GH uguali, e parallele, sarà un diametro parallelo alla FG. Dunque nell' ellisse i due diametri AE, MN han tal posizione, che *ciascuno di essi n' è parallelo alle ordinate dell' altro*. Del che eccone una convenevole definizione.

§. 66. DEF. XII. Due diametri dell' ellisse talmente posti, che ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro soglion dirsi *Conjugati*.

§. 67. SCOL. Questi diametri, come il nota l' Eulero, ebber siffatta denominazione da quel reciproco parallelismo delle loro ordinate. Ed io vi aggiungo, ch' essi avrebberla meritata per quel rapporto costante, che avvi tra la tangente di uno degli angoli quassù indicati *, e la cotangente dell' altro. Ma per render completa cotesta teorica, si dovran divisare i diversi sistemi de' diametri conjugati, come il farò quaggiù nel n°. VI. e nella Proposizione X. * §. 55.

§. 68. V. *Se dagli estremi dell' asse maggiore* AB * *dell' ellisse* ADB *si tirino le due rette* AD, BD *rispettivamente parallele a' semidiametri conjugati* CG, CF; *il loro incontro si farà in un punto della detta curva*. Poichè essendo BC : CA :: BE : ED, e BC uguale a CA, sarà anche BE uguale ad ED. Ma la BE è una semiordinata del semidiametro CG, per essere parallela al conjugato di esso. Dunque il punto D dovrà ritrovarsi nella detta curva. * *fig.* 9.

§. 69. VI. E viceversa, *se dagli estremi dell' asse* AB, *ad un qualunque punto* D *dell' ellisse* ADB *si tirino le rette* AD, BD, *e pe' punti medj di coteste corde conducansi i semidiametri* CF, CG; *questi dovranno essere conjugati, e conterran mai sempre un angolo ottuso*. Imperocchè la CH segando proporzionalmente i lati AB, AD del triangolo ABD dee esser parallela alla base DB di esso. Cioè a dire il semidiametro CF è parallelo all' ordinata DB del semidiametro CG. E per simil ragione sarà il semidiametro CG parallelo all' ordinata AD dell' altro CF: ond' essi saran conjugati *. Inoltre, centro C, intervallo CB intendasi descritto il cerchio, che sarà circoscritto (1) all' ellisse AFGB, e la DA si protragga, sin che lo incontri in O, e poi si unisca la retta BN. Sarà l' angolo in O retto per la natura del cerchio; ed ei per la natura del triangolo BDO sarà minore dell' esterno * §. 66.

(1) Dal §. 22. può conoscersi qual sia il cerchio circoscritto all' ellisse.

ADB, o dell' altro HCE, che gli è uguale. Adunque l' angolo GCF de' due semidiametri conjugati CG, CF sarà ottuso. E, se per π si dinoti la somma di due retti, e per φ, θ esprimansi gli angoli BCG, ACF, sarà il detto angolo $GCF = \pi - \varphi - \theta$.

§. 70. VII. Con sì facile artifizio di Geometria si potran dall' asse maggiore dell' ellisse determinarvi gl' infiniti sistemi de' semidiametri conjugati. Ma ciascun diametro di tal curva può bastarne a siffatta indagine, per quel, che ho detto nel n.° IV., o in virtù del seguente Principio generale. Cioè: *Se dagli estremi di un qualunque diametro dell' ellisse si tirino due rette ad un punto di questa curva; i semidiametri, che vi si fan passare pe' punti medj di esse corde, debbono esser conjugati fra loro*. Imperocchè ciascuno di questi due semidiametri vedesi parallelo ad un' ordinata dell' altro: onde l' è forza, ch' essi sien conjugati fra loro *. Nè poi potrà temersi, che in tal modo cotesti sistemi diventino infinitamente infiniti: poichè quelli di essi, che rinvengonsi da un diametro dell' ellisse, rivengono nel volersi per mezzo di un altro diametro determinare. Lo che ben s' intende.

* §. 66.

§. 71. VIII. Finalmente da quel punto D si meni all' asse AB la perpendicolare DN, onde sia $CN = x$, e $DN = y$. E l' equazione proposta per l' ellisse nel 1°. problema si risolva nella seguente analogia

$$\frac{y}{a+x} : \frac{a-x}{y} :: c^2 : a^2, \text{ cioè } \frac{DN}{NB} : \frac{AN}{DN} :: c^2 : a^2.$$

Sarà la tangente dell' angolo DBC, o del suo uguale ACF, alla cotangente dell' angolo DAB, o dell' altro GCB, che il pareggia, nella costante ragione di c^2 ad a^2. E quindi potrà conoscersi intuitivamente (1) quel principio sì importante, che da varie speculazioni ho più volte, ed in varj modi rilevato, cioè ne' §§. 39. 47. 52., e che ne agevola una gran parte delle ricerche, che si posson fare su questa curva.

§. 72. Scol. Parrebbe tempo, ch' io lasciate le geometriche speculazioni su questi diametri, mi volgessi ad ispiarvi l' equazione tra le coordinate obblique; cioè quella, che n' esprime il rapporto loro, e che suol dirsi *relativa a due diametri conjugati, ed al centro*. Or l' equazione A del problema 1. la quale sembra doversi appartenere alla curva pel solo asse

---

(1) Una dimostrazione per quanto sia rigida, e ricolma di principj sublimi, è sempre da meno dell' intuizione. E perciò io mi sono in quest' opera attenuto all' Analisi Cartesiana, ove il proposto teorema, come il farò poi vedere in tanti altri, riesce quasi intuitivo. Ed in vero, s' io colla Geometria analitica a due coordinate volessi dimostrarlo, dovrei prender l' equazione alla retta AC: poi quella alla BC: moltiplicar fra loro cotest' equazioni: paragonarne il prodotto loro all' equazion dell' ellisse: e così dovrei altre cose praticare, che non son mica naturali, nè sì chiare a' giovani, quanto l' addotto ragionamento. Ed in fine abbattendomi all' equazione $\frac{q}{p} = -\frac{c^2}{a^2} \times \frac{m}{n}$, qual si rileva da' coltivatori di quel metodo, come potrò ridurre in linguaggio geometrico cotesta equazione? La Geometria non conosce grandezze negative: e gli analisti neppur son paghi delle nozioni, che ne hanno. *Vedi il sommo d' Alembert vol. 8. Opus.*, *e Carnot*, *Geom. des position.* Ed io m' immagino, che da tali chiaroscuri di scienza sia nato ciocchè leggo con mio duolo in alcuni di cotesti corsi analitici replicatamente, *che siavi una relazione costante tra gli angoli, che formano coll' asse maggiore le corde menate da' suoi estremi ad un punto della curva.*

maggiore, può adattarsi al minore col solo permutarvi le coordinate. Sicchè ponendovi la y per x, e la x per y, tosto vi si ottiene per l' asse minore la seguente equazione

$$y^2 = a^2 - \frac{a^2}{c^2} x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \mathrm{B}$$

Ma per l' indicata ricerca esigesi più arte; e perciò io propongo il seguente problema, risolvendolo in due guise, cioè col maneggio dell' equazione D del precedente problema, e col passaggio dalle coordinate rettangolari alle obblique. La prima soluzione gli si conviene per l' unità del metodo da me prescelto; e l' altra sembrane dettata dalla natura del medesimo problema, ch' io facilmente conduco colla guida di due triangoli dati di specie, e senza gravarla di que' lemmi analitici, che altri suol premettervi.

PROPOSIZIONE VII.

PROBLEMA

fig. 7. §. 73. Data l'equazione, che ha l'ellisse ADB per le sue coordinate rettangolari CN, MN, rilevar quella, che dee appartenerle per le coordinate obblique CO, MO.

Soluz. Premessi gli artifizj geometrici, e le analitiche indicazioni adoperate nel problema precedente, vi si elimini la z dall'equazione A, o vi si ponga $\frac{c^2 v}{ha^2}$ per la z; dovrà risultarne

$$\alpha^2 - 2\nu\alpha = \frac{a^2 c^2}{h^2 a^2 + c^2} - \left(\frac{h^2 a^2 + c^2}{h^2 a^2}\right)\nu^2 \ldots \text{B}$$

Ed aggiungendo il quadrato di ν ad amendue i membri dell' equazione B, si vedrà chiaramente esser

$$(\alpha - \nu)^2 = \frac{a^2 c^2}{h^2 a^2 + c^2} - \frac{c^2 \nu^2}{h^2 a^2} \ldots\ldots \text{C}$$

E poichè le m, n dinotano il seno, e 'l coseno dell' angolo VMO *, sarà $MO^2 : MV^2 :: 1 : n^2$. Sicchè ponendo l' ascissa $CO = x$, e la semiordinata $MO = y$, dovrà essere pe' principj di Trigonometria $y^2 : (\alpha - \nu)^2 :: 1 : n^2$, e quindi $n^2 y^2 = (\alpha - \nu)^2$. E così pure dall'esserne $CO^2 : CB^2 :: 1 : q^2$, * §. 55.

sarà ne' loro simboli * $x^2 : \nu^2 :: 1 : \frac{m^2 a^2}{m^2 a^4 + n^2 c^4}$, ed * §. 59.

$$\nu^2 = \frac{m^2 a^4 x^2}{m^2 a^4 + n^2 c^4}.$$

Intanto si surroghino in C i valori di già ritrovati di $(\alpha - \nu)^2$, e di ν^2, e quello benanche della h^2, ch' è $\frac{m^2}{n^2}$, e 'l risultamento dividasi per n^2, n' emergerà

$$y^2 = \frac{a^2 c^2}{m^2 a^2 + n^2 c^2} - \frac{a^2 c^2}{m^2 a^4 + n^2 c^4} x^2 \ldots \text{D}$$

Ma il primo fratto, che osservasi nel secondo membro di quest' ultima equazione, è uguale a CL^2, cioè a γ^2: ed è poi $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ * il fratto multiplicatore della x^2. Dunque sarà * 55. 59.

$$y^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2$$

e quindi

74. Teor. *Pe' semidiametri conjugati dell' ellisse* ADB

ha luogo un' equazion pariforme a quella, che vi fu recata per l' asse, cioè alla

$$y^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2 .$$

ALITER.

§. 75. Si ritengano i medesimi simboli quassù impiegati a dinotar le coordinate MO, CO, i semiassi conjugati, ed i seni, e coseni degli angoli OCR, OMV; sarà

$$1 : m :: y : OV. \qquad 1 : p :: x : OR$$
$$1 : n :: y : MV. \qquad 1 : q :: x : CR$$

Onde dovrà essere $OV = my$, $MV = ny$, $OR = px$, $CR = qx$, $CN = CR + RN = qx + ny$, ed $MN = OR - OV = px - my$. Ma per la natura della data ellisse n' è poi $MN^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} CN^2$. Dunque co' valori di già esibiti delle MN, CN si avrà la seguente equazione

$$p^2 x^2 + m^2 y^2 - 2pmy = c^2 - \frac{c^2}{a^2}(q^2 x^2 + n^2 y^2 + 2nqxy) \dots E$$

* §. 52. Ma in più guise si è quassù dimostrato * esser $\frac{p}{q} : \frac{n}{m} :: c^2 : a^2$, e quindi $pm = \frac{c^2}{a^2} nq$. Adunque dovranno sparire da quest' ultima equazione i termini, che vi contengono il rettangolo delle coordinate x, y; ed ella diverrà

$$p^2 x^2 + m^2 y^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} (q^2 - x^2 + n^2 y^2) \dots F$$

che ordinata rispetto ad y riducesi a quest' altra

$$y^2 = \frac{a^2c^2}{m^2a^2+n^2c^2} - \frac{p^2a^2+q^2c^2}{m^2a^2+n^2c^2}x^2 \;\ldots\ldots\; G$$

Or il primo fratto, ch'è nel secondo membro dell'equazione G, è * uguale a γ^2, e l'altro* diviene $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2$. Dunque sarà $y^2=\gamma^2-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2$, come si è rilevato quì sopra (1).

* §. 55.

* §. 58.

§. 76. Cor. 1. Se dicansi y, Y due qualunque semiordinate di un diametro dell' ellisse, ed x, X le loro ascisse; sarà chiaro dover essere

$$y^2=\gamma^2-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2, \text{ ed } Y^2=\gamma^2-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}X^2.$$

---

(1) Il P. Frisi insigne geometra italiano si do'se sin dalla metà del secolo trascorso, che questa verità geometrica non avea ottenuta un' elegante analitica dimostrazione nè dal Wolfio, nè dall' Hopital, nè da altri, che aveano intrapreso un tal lavorio. Ma i moderni analisti col passaggio dalle coordinate rettangolari alle obblique soglion produrla immantinente. Imperocchè supponendo uguali a zero que' termini della trasformata, che contengono il prodotto delle coordinate, (lo che suol dirsi *equazione di condizione*) vi ritengono i rimanenti, da' quali può congegnarsi per la curva un' equazione pariforme a quella, ch' è relativa agli assi conjugati, ed al centro. Or tutto questo è ben fatto, quando si dimostri a' giovani con chiarezza, che il primo fratto dell' equazione D, o dell' altra G vi dinoti CL^2, e l' altro multiplicatore della x^2 sia $\frac{CL^2}{CF^2}$. Imperocchè un che si arresti a questa sola pariformità di termini, senza più dire, non viene a conchiudere sul soggetto della proposizione, che sono i diametri conjugati. E, s' ei li prenda per tali senza prefiggimento di prove, vi farà un salto nella dimostrazione. E tali sconci, che osservo in alcuni di questi Corsi si doveano a' giovani indicare.

Dunque, eliminando $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}$ da queste due equazioni, avrassi

$$\frac{y^2}{\alpha^2 - x^2} = \frac{Y^2}{\alpha^2 - X^2}.$$

E quindi $y^2 : Y^2 :: \alpha^2 - x^2 : \alpha^2 - X^2$. Cioè

§. 77. COR. II. *I quadrati di due semiordinate di un qualunque diametro dell'ellisse sono come i rettangoli delle parti di tal diametro, in che quelle vel dividono.*

§. 78. DEF. XIII. Il *Parametro* di un qualunque diametro dell' ellisse è la terza proporzionale in ordine ad esso diametro, ed al suo conjugato. E quello, che si appartiene all' asse maggiore, suol dirsi *Parametro principale*.

§. 79. COR. III. Sicchè chiamando p la terza proporzionale dopo l' asse maggiore $2a$, e 'l suo conjugato $2c$ (e lo stesso convenevolmente intendasi per gli altri diametri), l' equazione $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ diverrà

$$y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2).$$

E ponendo $z = a - x$, e quindi $x = a - z$, si avrà quest' altra equazione

$$y^2 = pz - \frac{pz^2}{2a} \; . \; . \; . \; . \; . \quad H$$

§. 80. COR. IV. Cioè : *Il quadrato di una di coteste semiordinate sta al rettangolo delle parti dell' asse, in che quella il divide, come il parametro principale all' asse.*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

§. 81. Nell'ellisse la somma de' quadrati di due qualunque semidiametri conjugati è uguale a quella de' quadrati de' due semiassi conjugati.

E'l parallelogrammo, che compiesi da que' due semidiametri, è quanto il rettangolo de' detti semiassi.

DIMOSTR. PART. I. In virtù de' valori assegnati ne' §§. 45., e 59. a' semidiametri conjugati, le due verità proposte in questo teorema diventan quasi intuitive. Infatti sieno a, c i semiassi conjugati, ed α, γ due qualunque semidiametri tra loro conjugati; il primo de' quali sia inclinato all' asse per l' angolo θ, di cui p, q dinotino il seno, e coseno, e l' altro abbia m, ed n per lo seno, e per lo coseno dell' angolo φ, ond' ei s' inclini al medesimo asse. Sarà pe' §§. suddetti

$$\gamma^2 = \frac{a^2 c^2}{m^2 a^2 + n^2 c^2}, \text{ ed } \alpha^2 = \frac{m^2 a^4 + n^2 c^4}{m^2 a^2 + n^2 c^2}.$$

Ciò posto, si sommino i primi membri di queste due equazioni, ed i secondi rispettivamente, e per $a^2 c^2$ scrivasi $(m^2 + n^2) a^2 c^2$, essendo $m^2 + n^2 = 1$; sarà

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \frac{m^2 a^4 + n^2 c^4 + a^2 c^2 (m^2 + n^2)}{m^2 a^2 + n^2 c^2}.$$

Ma il numeratore di questa frazione è divisibile per lo denominatore, e'l quoto è $a^2 + c^2$. Dunque sarà

$$\alpha^2 + \gamma^2 = a^2 + c^2.$$

PART. II. Inoltre i semidiametri α, γ, come si è dimostrato nel §. 69., contengono un angolo uguale a $\pi - \phi - \theta$, Dunque il parallelogrammo, che compiesi da essi, sarà espresso dal seguente prodotto $\alpha\,\gamma . sen.(\phi + \theta)$; essendo $sen.(\phi + \theta) = sen.(\pi - \phi - \theta)$.

E prendendo i valori di queste tre grandezze di già esibiti ne' §§. 59. 55. 60. sarà

$$\alpha . \gamma . sen.(\phi+\theta) = \frac{ac}{\sqrt{(m^2 a^2 + n^2 c^2)}} \sqrt{\frac{m^2 a^4 + n^2 c^4}{m^2 a^2 + n^2 c^2}} \times \frac{m^2 a^2 + n^2 c^2}{\sqrt{(m^2 a^4 + n^2 c^4)}} = ac$$

§. 82. COR. I. E perciò: *Ogni parellelogrammo circoscritto all' ellisse è uguale al rettangolo degli assi.*

§. 83. COR. II. Di quì si vede dover esser $\gamma^2 = a^2 + c^2 - \alpha^2$. Sicchè ponendo per α^2 il suo valore $c^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2}$. qual fu recato nel cor. I. prop. I., sarà $\gamma^2 = a^2 - \frac{a^2 e^2}{x^2}$. Ma in questa curva il quadrato della normale, che passa per l'estre-

* §. 46. mo del semidiametro α, è uguale a $\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{x^2 e^2}{a^2} \right)$. *

Dunque: *La normale dell' ellisse in un qualunque punto del perimetro sarà al semidiametro conjugato di quello, che passa pel suddetto punto, come l'asse minore al maggiore* (1).

---

(1) Questa verità non deesi avere per una sterile illazione, come parrebbe a taluno; poichè ella può utilmente impiegarsi nella teorica de' fuochi, e nel rinvenir la linea, che passa pe' vertici degli angoli degl' infiniti parallelogrammi circoscritti ad un' ellisse, o ad un' iperbole, e forse per altre ricerche. Del che a suo luogo.

§. 84. COR. III. Le sei grandezze a, c, α, γ, φ, θ hanno tal nesso fra loro, che date tre di esse vi si posson determinar le rimanenti. E ciò in forza delle tre seguenti equazioni, di cui le due prime si traggon dal presente teorema, e l'altra dal problema VI. Cioè

I. $\alpha^2 + \gamma^2 = a^2 + c^2$,

II. $\alpha\gamma.sen.(\varphi + \theta) = ac$,

III. $tang.\varphi\, tang.\theta = \dfrac{c^2}{a^2}$.

§. 85. COR. VI. E, se piaccia toglier loro coteste divise transcendenti, potrà porsi * per $tang.\ \varphi$ il fratto $\dfrac{m}{n}$, cioè $\dfrac{m}{\sqrt{(1 - m^2)}}$; per $tang.\ \theta$ l'altro $\dfrac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}$; e per $sen.(\varphi + \theta)$ l'espressione $m\sqrt{(1-p^2)} + p\sqrt{(1-m^2)}$. Per tal modo le tre precedenti equazioni si dovranno trasformare in queste altre, che son puramente algebriche, *§. 59.

I. $\alpha^2 + \gamma^2 = a^2 + c^2$,

II. $\alpha\gamma\left(m\sqrt{(1-p^2)} + p\sqrt{(1-m^2)}\right) = ac$.

III. $\dfrac{mp}{\sqrt{(1-m^2)(1-p^2)}} = \dfrac{c^2}{a^2}$.

§. 86. SCOL. I. Per non lasciar questa teorica nuda d'esempii, e non bene a' giovani conveniente, ho stimato dover quì recare que' due problemi, che l'illustre Marchese dell' Hopital disciolse analiticamente su tal soggetto, e per la teorica delle tangenti di tal curva. Cioè: *Dati di grandezza, e di posizione due semidiametri conjugati di un' ellisse, ritrarne i semiassi conjugati.* E viceversa: *Dati que' semiassi, determinarvi due semidiametri conjugati, che comprendano un an-*

golo dato. Per risolvere il primo de' detti problemi si chiami x il semiasse maggiore, ed y il minore; e per α, γ si dinotino que' dati semidiametri conjugati, che comprendano un angolo dato, il cui seno sia K. Sarà per lo Corollario III. $x^2 + y^2 = \alpha^2 + \gamma^2$, ed $xy = K\alpha\gamma$, ovvero $2xy = 2K\alpha\gamma$. E se quest' ultima equazione or si aggiunga alla prima, ed or vi si tolga, sarà $x^2 + y^2 + 2xy = \alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma$, ed $x^2 + y^2 - 2xy = \alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma$. Ed oltre a ciò estraendo da ciascuna di quest' equazioni la radice quadra (1), si otterrà $x + y = \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma)}$, ed $x - y = \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma)}$. Finalmente, se prendasi la semisomma di esse, e poi la semidifferenza, avrassi

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma)} + \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma)}, \text{ ed}$$

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma)} - \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma)}$$

Il perchè essendo il seno dell' angolo dato, cioè la grandezza K, sempre minore del raggio trigonometrico, ch' è uguale ad 1, sarà $2K\alpha\gamma$ minore di $2\alpha\gamma$, e quindi (2) molto minore di $\alpha^2 + \gamma^2$. Dunque l' espressione $\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma^2)}$ è sempre reale: onde in questo problema non potrà annidarsi verun caso impossibile.

Per risolvere il secondo de' detti problemi può impiegarsi lo stesso tipo di risoluzione quassù adoperato, e con questo solo divario, che in vece di α^2, γ^2 convien porre a^2, c^2, ed

---

(1) Il sommo Eulero rinvenne per altre vie lo stesso risultamento. §. 125. *vol. II. Int. in Analys. Inf.*

(2) Questa verità analitica può dimostrarsi immantinente per la 7. *El. II.*

in luogo di $2K\alpha\gamma$ il fratto $\frac{2ac}{K}$. Lo che intendesi di leggieri. Ma la grandezza $\sqrt{\left(a^2 + c^2 - \frac{2ac}{K}\right)}$ sarà immaginaria, quando sia $\frac{2ac}{K} > a^2 + c$, o $K < \frac{2ac}{a^2 + c^2}$. Dunque nel secondo de' divisati problemi vi sarà il caso impossibile, che ho dovuto per ragion di metodo quì marcare, ancorchè dalla parte II. del seguente teorema ei si potrebbe immediatamente derivare.

§. 87. SCOL. II. Intanto la costruzione del primo di questi due risultamenti può elegantemente ottenersi per mezzo delle prop. 12. e 13. *El. II.* Infatti* l' angolo ABF sia quanto quello, che si comprende da' dati semidiametri conjugati: l' altro DBF ne sia il suo conseguente, e DBC uguagli il complemento di questo. E prendendovi $AB = BD = \alpha$, e $BC = \gamma$, si uniscano le due AC, DC. Sarà il semiasse maggiore dell' ellisse uguale alla semisomma delle congiunte AC, DC; e 'l minore quanto la loro semidifferenza. Imperocchè essendo $cos.DBC = sen.DBF = K$, sarà (1) $AC = \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma)}$*, *fig. 11.

*12. El. II.

---

(1) Dal punto C si abbassi la CN perpendicolare alla DA. Si vedrà essere *rag.* : *cos*.CBD : : CB : BN, cioè $1 : K :: \gamma : BN$, e quindi $BN = K\gamma$. Ma dee essere $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BN$*; dunque sarà $AC^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2K\alpha\gamma$. E così* si troverà $DC^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2K\alpha\gamma$. Onde saranno le AC, DC uguali alle radici degli esibiti trinomj. Il sommo Eulero nel descrivere un cerchio, che insiem toccasse tre cerchi dati di sito, e di grandezza, si servì di questo principio per calcolare il coseno di un angolo di un triangolo, i cui lati eran dati di espressione. Altri analisti anche se ne

*12. El. II. *13. El. II.

*13. El. II.e $DC = \sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma)}$ * . E quindi, se diansi di sito, e di grandezza due semidiametri conjugati, che debbano appartenere ad un' ellisse, si potrà descriver questa curva con quel moto organico, che ho dichiarato nella prima definizione, e con vi aver prima determinati col presente metodo i suoi assi. Ed anzi senza dipender dagli assi vi si potrà esibire il perimetro, usando in convenevol modo il secondo de' due artifizj, che nel §. 22. ho proposti.

* §. 69. Inoltre da quel, che si è dimostrato nella prop. VI. può congegnarsi una facilissima costruzione al secondo de' due problemi proposti. Cioè, si formi sull' asse della data ellisse un segmento di cerchio capiente l' angolo dato; e da una delle due intersezioni di queste due curve (le quali si dovran
* §. 86. sicuramente ottenere, se il problema* non sia impossibile) si tirino due rette agli estremi del detto asse. I semidiametri, che si condurranno pe' punti medj di queste due corde, saranno quelli, che si dimandano.

Finalmente io debbo avvertire i giovani, che una tal ricerca l' è malagevole, quando le tre grandezze da determinarsi, esigano il maneggio di tutte e tre l' equazioni del Cor. IV. In

---

valgono per altre loro ricerche. E basta ricordare, che su questa base regga la più parte delle dimostrazioni sì dirette, che indirette, che tanti ingegnosi geometri han procurato di recare al teorema ciclometico dell' acutissimo Ruggiero Cotes; ove ne abbisogna valutar le incidenti da un dato punto di un cerchio agli estremi di più archi aritmeticamente proporzionali. Leggansi per le prime dimostrazioni il Moivre, l'Ermanno, il Walmesley, il Bougainville *etc.* e per le altre il Cousin, il Paoli, il Lacroix, *etc.*

tal caso vi vuol dell' ingegno, e della conoscenza de' metodi di eliminazione (1), perchè si tragga l'equazione finale, che non monti ad un grado superiore del giusto, o non vi accolga fattori inutili, e stranieri.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

§. 88. Se dagli estremi dell' asse maggiore di un' ellisse si tirino due rette ad un estremo dell' asse minore; i semidiametri, che vi si conducono pe' punti medj di queste due corde, saranno conjugati, ed uguali. E dovrà essere un massimo l'angolo da essi contenuto.

DIMOSTR. PART. I. Si chiami v quel semidiametro dell' ellisse, che debb' essere uguale al suo conjugato: e sia ψ l'angolo, ond' ei s' inclini all' asse. Sarà * $2v^2 = a^2 + c^2$, ed $v^2 sen. 2\psi = ac$. E da ciò immantinente vi si conchiude essere * §. 84.

$$v = \sqrt{\left(\frac{a^2 + c^2}{2}\right)}, \quad \text{e} \quad sen. 2\psi = \frac{2ac}{a^2 + c^2}.$$

Resterebbe a determinarvi il $sen. \psi$. E questo facilmente può (2)

---

(1) I giovani potrebbero consultar con vantaggio l' Opera del Bezout - *Theor. gener. des Equat. algebr.*

(2) Questa verità può attignersi facilmente dalla Geometria. Cioè sia BA * un qualunque arco circolare, BH il suo seno, CH il coseno, e 'l raggio CA sia perpendicolare alla corda del detto arco. Ol- * *fig.* 3.

conoscersi dal dato $sen.\ 2\psi$, ed in virtù di quel noto principio di Trigonometria, che $sen.\ \psi = \sqrt{\left(\frac{1 - cos.\ 2\psi}{2}\right)}$. Il perchè essendo (1) $cos.\ 2\psi = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2}$, sarà

$$sen.\ \psi = \sqrt{\left(\frac{1 - cos.\ 2\psi}{2}\right)} = \frac{c}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}.$$

Ma, compito il rettangolo de' semiassi conjugati, e condottavi
* *fig.* 2. la diagonale CG*, ben si comprende, che questa retta debba passare pel punto medio della corda del quadrante ellittico AND, la quale n' è l' altra diagonale. Ed essendo CG : AG :: *rag.* : *sen.* ACG, cioè $\sqrt{(a^2 + c^2)} : c :: 1 : sen.$ ACG,

sarà $$sen.\ ACG = \frac{c}{\sqrt[2]{(a^2 + c^2)}} = sen.\ \psi.$$

Onde potrà concludersi ciò, che ho proposto nella prima parte del teorema.

---

tre a ciò si ponga il raggio $AC = 1$, e quindi il diametro $AD = 2$, e poi si chiami ψ l'arco AK metà del dato AKB; sarà $AKB = 2\psi$. E dovendo essere, per la natura del cerchio, AB^2, o $4AG^2$ uguale ad $AD \times AH$, o ad $AD\,(CA - CH)$, sarà AG^2 una quarta parte del rettangolo di AD in $CA - CH$; cioè ne' loro simboli sarà

$$sen.\ \psi^2 = \left(\frac{1 - cos.\ 2\psi}{2}\right).$$

(1) Si sa esser $cos.\ 2\psi = \sqrt{(1 - sen.\ 2\psi^2)}$. Se dunque in questo radicale si ponga il valore di $2\psi^2$ di già esibito, si avrà sotto di quel segno un' espressione, da cui potrà estrarsi la radice; che sarà quella, che ho quassù rapportata.

PART. II. Ed essendo $tang.\ 2\psi = \frac{sen.\ 2\psi}{cos.\ 2\psi}$; sarà, ne' valori di queste due grandezze,

$$tang.\ 2\psi = \frac{2ac}{a^2 - c^2} \quad \ldots\ldots \text{A}$$

Inoltre, se φ, θ dinotino quegli angoli, onde due altri semidiametri conjugati inclinansi all' asse: e per m, p si esprimano i loro seni, per n, q i *coseni*, sarà

$tang.\varphi = \frac{m}{n}$, e $tang.\ \theta = \frac{p}{q} = \frac{nc^2}{ma^2}$. E (1) dovrà essere

$$tang.\ (\varphi + \theta) = \frac{m^2a^2 + n^2c^2}{mn(a^2 - c^2)} \quad \ldots\ldots \text{B}$$

E si vedrà poi dall' equazioni A, B, che siavi $tang.\ 2\psi$: $tang.\ (\varphi + \theta)$ :: $2mnac : m^2a^2 + n^2c^2$. Ma per la 7. *El.* II. è sempre $2mnac < m^2a^2 + n^2c^2$. Dunque sarà pure $tang.2\psi < tang.(\varphi + \theta)$, $2\psi < \varphi + \theta$. Sicchè esprimendo per π la somma di due angoli retti, dovrà esser finalmente $\pi - 2\psi > \pi - \varphi - \theta$; e quindi un massimo l'angolo $\pi - 2\psi$, che comprendesi da' semidiametri conjugati uguali.

§. 89. COR. 1. Se per x esprimasi un' ascissa computata dal centro in un di questi due semidiametri, e per y la sua semiordinata; l' equazione dell' ellisse relativamente a' semidiame-

---

(1) Fra' teoremi della Trigonometria analitica, che l' illustre geometra Cristiano Mayer propose all' Accademia Reale di Pietroburgo per l' anno 1727, uno de' più utili, e preclari è il seguente

$$tang.(\varphi + \theta) = \frac{tang.\ \varphi + tang.\ \theta}{1 - tang.\varphi\ tang.\theta}$$

tri conjugati uguali, ed al centro, sarà $y^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - x^2$. E sebbene ella ne dinoti la natura di un cerchio del raggio $\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{2}\right)}$; pur non deesi da ciò inferire, che vi restino confuse le nature di queste due curve, o che l' una s' identichi coll' altra. Poichè nel cerchio le coordinate espresse per le x, y sono rettangolari, e nell' ellisse sono obblique.

§. 90. Cor. II. La tangente dell' angolo 2ψ conseguente dell' angolo ottuso $\pi - 2\psi$, si è dimostrata uguale* alla frazione $\frac{2ac}{a^2 - c^2}$, che dee minorarsi a misura, che decresce il semiasse minore c, rimanendone il maggiore a invariato. Dunque: *L' angolo de' semidiametri conjugati uguali, tuttocchè sia un massimo in una data ellisse, non è perciò di una medesima grandezza in due ellissi diversamente eccentriche, ma dee crescere a misura dell' eccentricità di esse.* Lo che per la Geometria conoscesi da per se stesso.

* §. 69.

§. 91. Scol. Dalla prima parte di questo teorema può inferirsi, che le diagonali del rettangolo circoscritto ad un' ellisse debban segnarvi i diametri conjugati uguali. Che queste rette dividan la curva in quattro archi talmente condizionati, che que' due, i quali vi sottendono gli angoli acuti delle diagonali, debban contenere i vertici de' diametri maggiori de' loro conjugati; e che i vertici di questi ne restino allogati ne' due rimanenti archi. E, se non disdica il voler quì raccorre altre proprietà di queste diagonali, io dirò, che, compito il rettangolo ACDG * da' semiassi conjugati, la diagonale CG possa condurne a descriver l' ellisse per assegnazion di punti, e l' al-

* *fig.* 2.

tra DA ad esibirci i varj sistemi de' diametri conjugati. Il primo di questi due artifizj fu da me recato nel §. 22.; e l'altro n'è conseguente al teorema, che quaggiù propongo.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

§. 92. Se dagli estremi F, L* de' due semidiametri conjugati CF, CL si abbassino le perpendicolari FE, LH, al semiasse maggiore AC, ed al minore CD rispettivamente: quelle rette dovranno dividere questi semiassi proporzionalmente. * fig. 7.

Dim. Si chiamino x, y le coordinate CE, EF, ed v, z le altre due CH, HL. Sarà la tangente dell'angolo FCE alla cotangente dell' altro LCK, o alla tangente di LCH, come c^2 ad a^2; cioè ne' loro simboli sarà *

* §. 52.

$$\frac{y}{x} : \frac{z}{v} :: c^2 : a^2 \quad , \text{ e quindi } \quad a^2vy = c^2xz \, .$$

Ed elevando a quadrato l'equazione $a^2vy = c^2xz$, ed in essa poi riponendo i valori delle y^2, z^2, che furon proposti ne' §§. 16, e 73, sarà

$$a^4v^2y = c^4x^2z^2$$

cioè

$$a^2c^2v^2(a^2 - x^2) = c^2a^2x^2(c^2 - v^2)$$

Finalmente dividasi quest' ultima equazione per a^2c^2, e nel quoto si cancelli il termine $- v^2x^2$, che vi si osserva in amendue i membri; dovrà restarne $a^2v^2 = c^2x^2$, cioè $av = cx$, e quindi

$$a : c :: x : v.$$

§. 93. COR. I. Ad un qualunque semidiametro CF dell' ellisse ADB potrà assegnarsi il suo conjugato colla luce del presente teorema, e senza far uso de' metodi precedenti. Cioè, ordinata dal punto F la FE all' asse maggiore della detta ellisse, si meni pel suo estremo E la EH parallela alla corda del quadrante ellittico AFD; e poi dal punto H, ove tal parallela ne incontri il semiasse minore, si alzi a questo semiasse, e fuori di quel quadrante la perpendicolare HL, che incontri l'ellisse in L. Sarà il semidiametro CL conjugato dell' altro CF.

§. 94. COR. II. E generalmente, se nel triangolo rettangolo, che abbia per cateti i semiassi conjugati, e per ipotenusa la corda di un quadrante ellittico, si applichino delle parallele alla detta ipotenusa; da ciascuna di esse, coll' artifizio del precedente corollario, potrà ottenersi un sistema di diametri conjugati.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

* *fig.* 10.

§. 95. Allorchè un semidiametro CF* dell' ellisse ANB ne incontri una tangente NP di questa curva, ovunque ella ne stia; sarà sempre di una costante grandezza il rettangolo dell' ascissa corrispondente all' ordinata per lo contatto, e della medesima ascissa accresciuta della sottangente (1), cioè quanto il quadrato del detto semidiametro.

(1) Per la definizione della sottangente in un diametro qualunque dell' ellisse potrà leggersi l' annotazione del §. 33.

Dim. Se dal dato punto P, che stia nel semidiametro CF prodotto oltre l' ellisse, si volesse condurre una tangente a questa curva; si dovrebbe per tal uopo maneggiar l' equazione * $y^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2$ colla stessa guida del problema III., e con avervi dinotato per α il semidiametro CF, e per γ il suo conjugato. Per la qual cosa, chiamando b la distanza del punto P dal centro dell' ellisse, cioè la CP, si ponga la sottangente PM $= v$, l'ascissa CM $= b - v$, *sen*.NPM $= h$, e *sen*.PNM $= K$. Sarà $K : h ::$ PM : MN :: v : MN, e quindi MN $= \frac{hv}{K} = tv$, ponendo per brevità $\frac{h}{K} = t$. Ma per la prop. VII. rinviensi $\text{MN}^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \times \text{CN}^2$; dunque si avrà ne' simboli di queste grandezze geometriche la sottoposta equazione

$$t^2 v^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(b - v)^2$$

che maneggiata, come quella del problema III., ci darà

$$v = \frac{b^2 - \alpha^2}{b}, \text{ e quindi } b - v = \frac{\alpha^2}{b}$$

cioè

$$\text{PC} \times \text{CM} = \text{CF}^2, \text{ e PC : CF :: CF : CM}.$$

Inoltre co' due metodi proposti nel probl. III. potrà determinarsi la t; la quale non è la tangente trigonometrica dell' angolo P, come l'era in quel caso; ma sì bene il rapporto del *sen*.MPN al *sen*.MNP. E troncando dalle MN, MP le parti MR, MT proporzionali alle h, K, che si dicano f, g, si unisca la RT. Sarà l' angolo in P uguale all' altro in T di già determinato geometricamente. Ma per ottenerne il valore

* §. 74.

*

numerico del seno dell' angolo P si chiami m il seno, ed n il
12. El. II. coseno dell' angolo NMC delle coordinate CM, MN. Sarà * $RT^2 = f^2 + g^2 + 2nfg$. E dovendo essere RT : RM :: *sen*.TMR : *sen*.RTM, si troverà co' simboli di queste grandezze

$$sen.T = sen.P = \frac{mf}{\sqrt{(f^2 + g^2 + 2nfg)}}.$$

* §. 40. §. 96. Cor. E quindi *, se colla teorica de' diametri dell' ellisse voglia condurlesi una tangente, che passi pel dato punto P, dovrà prendersi nella CP la CM terza proporzionale dopo le CP, CF, e poi distendervi per M la NK parallela alla
* §. 38. tangente di tal curva in F *, che ne incontri il perimetro in N, K. Le congiunte PN, PK saran le due tangenti condotte all' ellisse dal punto F.

Esposizione del metodo Euleriano per la medesima ricerca.

* fig. 10. 97. Si chiami α il semidiametro CF *, γ il suo conjugato, e per x, y esprimansi le oblique coordinate CM, MN di cotesta curva. La sua equazione relativamente al cen-
* §. 74. tro, ed a que' semidiametri conjugati *, sarà $y^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$.
Ciò premesso, si sottragga quest' equazione dall' altra pariforme $(y + \varepsilon)^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(x - \omega)^2$, ove le ω, ε sieno due grandezze piccolissime: e poi nel residuo si trascurino que' termini, che contengano le seconde potenze delle ε, ω. Dovrà restarvi

$$\varepsilon y = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \text{ e quindi } \frac{\varepsilon}{\omega} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \times \frac{x}{y}.$$

Dico esser la sottangente MP $= \frac{\alpha^2}{\gamma^2} \times \frac{y^2}{x^2}$.

DIM. Si tolga dall' ascissa CM la parte $Mm = \alpha$, e compito il parallelogrammo $MmON$, si prolunghi la On insino alla curva Nn. Sarà la $nO = \varepsilon$, per doverne aver luogo quell' equazion pariforme. Sicchè supponendo, che l' ordinata mn con moto a se parallelo si accosti all' altra MN, ed insin che il punto n cada sull' altro N; sarà chiaro, che la corda Nn nello stato di sua evanescenza debba congruire colla NP, tangente della curva in N. Ed in tal caso essendo il triangoletto evanescente NOn simile al triangolo PMN fatto dalla tangente, dalla sottangente, e dalla semiordinata per lo contatto, sarà $nO : NO :: NM : MP$, cioè $\varepsilon : \alpha :: y : MP$. Ma la prima di queste due ragioni si è ritrovata uguale a quella di $\gamma^2 x$ ad $\alpha^2 y$. Dunque sarà $y^2 x : \alpha^2 y :: y : MP$; e sarà quindi la sottangente $MP = \dfrac{a y^2}{\gamma^2 x} = \dfrac{\alpha^2 - x^2}{x}$ * * §. 74.

ALTRO METODO PER LA MEDESIMA INDAGINE.

§. 98. Il precedente metodo, tuttochè sia semplice, e naturale, pur non piace ad alcuni analisti, perchè a grandezze infinitesime si attiene. Io dunque, volendo rimuover queste dal tessuto di quello, seguirò le tracce, che segnò per altro scopo, e verso la fine del secolo antipassato un nostro insigne geometra il sig. Monforte (1).

Sia il punto N della data ellisse quello, ove si addomandi condurle una tangente. L' altro punto n della stessa curva siagli d' accosto nel medesimo quadrante. Le coordinate CM,

(1) Vedi Antonio de Monforte *De Problematum determinatione pag.* 7, 8, 9, *etc.*

MN di quel punto dato esprimansi per b, h, per x, y le coordinate Cm, mn dell' altro punto n preso ad arbitrio. Si unisca la retta nN, che incontri in Q il semidiametro CF, e per N si tiri la NO parallela alla MC. Sarà nO $= nm$ — NM $= y - h$, NO $=$ CM — $Cm = b - x$. Ed esprimendo per $1 : t$ l' ignoto rapporto di *sen.*NnO a *sen.*nNO, sarà $1 : t$ $:: b - x : y - h$, e quindi $y - h = t\ (b - x)$. Or l'e-
* §. 72. quazione della data ellisse relativamente a' punti n, N * ha le seguenti divise

$$y^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}x^2 \quad , \text{ ed } \quad h^2 = \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\, b^2 \,.$$

Se dunque la seconda di queste due equazioni tolgasi dalla prima, si avrà

$$y^2 - h^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\,(b^2 - x^2) \ldots\ldots \text{A}$$

E dividendone per $y - h$ il primo membro, e per $t(b - x)$ il secondo, (lo che sempre può effettuarsi esattamente (1), e convien farlo prima della seguente sostituzione), ne verrà

$$y + h = \frac{\gamma^2}{t\alpha^2}(\,b + x\,) \ldots\ldots \text{B}$$

Finalmente nel primo membro di quest' ultima equazione pongasi h per y, e nel secondo b per x. Sarà

$$t = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \times \frac{b}{h} \ldots\ldots\ldots \text{C}$$

* §. 95. Onde la grandezza t resterà determinata, come quì sopra *.

DIM. Essendo uguali per l' equazione A i due binomj

(1) La differenza di due qualunque analitiche potenze è sempre divisibile per quella delle loro radici. Lo che fu noto agli analisti sin da' tempi di Nicola Tartaglia.

$y^2 - h^2$, e $\frac{\gamma^2}{\alpha^2}(b^2 - x^2)$; ed altresì uguali i loro divisori $y - h$, $t\,(b - x)$, dovranno benanche pareggiarsi i quoti, che in simili casi deggionsi esattamente ottenere, cioè $y + h, \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \times \frac{b+x}{t}$. Ma quando la QN divien tangente della curva in Q, dee essere* NM $=$ nm, e CM $=$ Cm. Dunque ponendo h per y, e b per x nell' equazione B, si avrà, fatte le riduzioni, il valore della t di già esibito nell'equazione C. * §. 31.

§. 99. Scol. Tanto quel metodo Euleriano, che quest' altro, che vi ho sostituito, si possono universalizzare per qualunque curva algebrica, e per un sistema di coordinate oblique, che ne piaccia. Ed amendue i detti metodi veggonsi procedere per un sentiero retto, e luminoso, evitandosi quegli analitici andirivieni, che si sogliono per altre vie incontrare.

CAPITOLO II.

Delle tangenti, e delle secanti dell' ellisse.

§. 100. Que' geometri, che si sono impegnati a svolger le proprietà de' conici coll' analisi moderna, vi sogliono trascurare la teorica delle tangenti, e delle secanti di queste linee rette di secondo ordine, o lievi cose sol vi sospingono. Ma l' analisi Cartesiana è potente a svilupparla compiutamente, e con chiarezza, come il farò vedere in questo Capo. E poi non so, s' ella per la Geometria analitica a due coordinate possa riuscirne a lodevol fine.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

* fig. 13. §. 101. Data di posizione la retta PE*, che incontri la data ellisse ANE, e dato in essa retta il punto P; valutarne il rettangolo delle sue parti, che restano tra la curva, e 'l detto punto, cioè il rettangolo NPE.

Soluz. Dal dato punto P si meni la PG parallela all' asse AB della data curva. E dallo stesso punto P, e dall' altro punto N, ch' è una delle due intersezioni della retta PE, e dell' ellisse ANE, si abbassino le perpendicolari PR, NM al detto asse. Inoltre si chiamino b, h le coordinate CR, RP del dato punto P; e per le a, c si esprimano il semiasse maggiore, e 'l minore, come quì sopra si è praticato* ; e posta la $PN = x$, si faccia $sen.NPG = m$, e $cos.NPG = n$. Sarà $PN : PG :: rag. : cos.NPG$, cioè $x : PG :: 1 : n$, e quindi $PG = nx$. E così pure sarà $NG = mx$. Onde le coordinate CM, MN del punto N saranno rispettivamente $b - nx$, $h + mx$. Ed essendo $NM^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} CM^2$, per la natura della data ellisse, si avrà ne' simboli di queste geometriche grandezze la sottoposta equazione

$$m^2x^2 + 2mhx + h^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}(b^2 - 2bnx + n^2x^2)$$

che ordinata rispetto ad x diviene

$$x^2 + \frac{2mha^2 - 2nbc^2}{m^2a^2 + n^2c^2} x + \frac{a^2h^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{m^2a^2 + n^2c^2} = 0 \; . \; . \; . \; \text{B.}$$

Ma i due valori della radice x di quest' ultima equazione sono designati dalle due rette PN, PE ; e l' ultimo termine di essa n' esprime il prodotto loro. Dunque sarà il rettangolo

$$NPE = \frac{h^2a^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{m^2a^2 + n^2c^2} \; . \; . \; . \; . \; \text{C.}$$

E questa cosa doveasi principalmente quì rinvenire. Che se dallo stesso punto P si tiri un'altra segante Pne, la quale faccia colla PG l' angolo nPG, di cui il seno sia p, e q il coseno, si dimostrerà co' medesimi principj quassù adoperati essere l' altro rettangolo

$$nPe = \frac{h^2a^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{p^2a^2 + q^2c^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; \text{D.}$$

§. 102. Cor. Quindi, condotti nella data ellisse i semidiametri CF, Cf rispettivamente paralleli alle Corde NE, ne, si dividano le due frazioni C, D per lo stesso fratto $\frac{h^2a^2 + b^2c^2 - a^2c^2}{a^2c^2}$

* §. 13.

colla quale operazione non viensi a turbare il rapporto loro; dovrà risultarne

* §. 55. $$\mathrm{NPE} : n\mathrm{P}e :: \frac{a^2c^2}{m^2a^2+n^2c^2} : \frac{a^2c^2}{p^2a^2+q^2c^2} :: \mathrm{CF}^2 : \mathrm{C}f^{*} .$$

§. 103. SCOL. Nella prop. 2. del Capo I. furon date di sito una retta, ed un'ellisse, e vi si rinvennero analiticamente i loro incontri. In quest'altra n'è data di posizione un'ellisse, ed una retta, che però conducesi per un dato punto, e si domanda di valutare il rettangolo delle intercette fra la curva e 'l punto. Or se con questo parallelo ho voluto a' giovani mostrare la corrispondenza delle proposte indagini; essi di propria avvertenza han dovuto intendere l'unità, e l'agevolezza del metodo, onde le ho eseguite. Imperocchè *la soluzione di questo problema vedesi guidata per una proprietà dell'equazioni di secondo grado, e per un'altra quelle de' problemi precedenti*. Ma una serie di utilissime conseguenze, di cui le principali ho quì raccolte in forma di teoremi, vedran fluire da questi risultamenti, che pareano inutili, o almeno di poca importanza.

§. 104. TEOR. I. *Se due corde di un'ellisse s'intersechino entro la curva; i rettangoli de' loro segmenti saran proporzionali a' quadrati de' diametri ad esse paralleli. E, se questi diametri ne stieno inclinati all'asse ugualmente,*
* §. 55. *nel qual caso si debbon essi eguagliare* *; *que' due rettangoli saranno uguali.*

§. 105. TEOR. II. *Se da un punto, ch'è fuori di un'ellisse, le si conducan due seganti; i rettangoli delle intere seganti nelle loro parti esterne saranno come i quadrati de' diametri ad esse paralleli. Onde, se i detti dia-*

metri sieno ugualmente inclinati all' asse, que' due rettangoli dovran pareggiarsi.

§. 106. Teor. III. *E conducendo da quel punto una segante, ed una tangente alla sottoposta ellisse, sarà il rettangolo dell' intera segante nella parte che n'è fuori, al quadrato della tangente, come il quadrato del diametro parallelo alla segante a quello di un altro diametro parallelo alla tangente. E, se questi diametri inclinansi all' asse ugualmente, quel rettangolo ne sarà uguale al quadrato.*

§. 107. Teor. IV. *Le due tangenti, che conduconsi da un punto ad un' ellisse*, non sono sempre uguali, come lo è nel cerchio, ma nella ragion de' diametri paralleli ad esse. Onde, se quel punto stia per dritto con uno de' due assi, le suddette tangenti saranno uguali.* * §. 42.

§. 108. Teor. V. *Allorchè una corda dell' ellisse ne intersechi due altre, che sieno parallele; i rettangoli de' segmenti di queste saranno proporzionali a' corrispondenti rettangoli de' segmenti di quella.*

§. 109. Teor. VI. *E, se nell' ellisse due corde parallele incontrino una di lei tangente; i rettangoli delle intere seganti nelle loro parti esterne saranno come i quadrati delle parti della tangente, che restano tralle rispettive seganti, e 'l contatto.*

§. 110. Cor. Dunque un cerchio può segare un' ellisse in quattro punti. Ei può segarla in due punti, ed insiem toccarla in un altro. E può benanche toccarla in due punti. Le quali cose discendono dalle seconde parti de' primi quattro teoremi. Ma non per tanto gioverà conoscerle adeguatamente, e colla luce dell' analisi del problema, che passo a risolvere.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

* fig. 14. §. 111. Data di posizione l'ellisse ADB* (1), e'l cerchio del raggio r : si vuol determinare, se queste due curve abbiansi ad incontrare; ed incontrandosi quali sieno i punti del loro incontro.

SOLUZ. Le rette AC, CD dinotino il semiasse maggiore, e 'l minore della data ellisse, che quì anche dicansi a, c : dal punto G centro del dato cerchio si abbassino sulle AC, CD le perpendicolari GR, GE; ed esprimansi per b, h le coordinate CR, RG del detto centro. Inoltre dal punto M, che suppongasi essere uno degl' incontri delle date curve, si ordini all'asse AB della prima di queste due curve la MN; e le coordinate CN, NM, che gli appartengono, si chiamino x, y. Sarà la GO $=$ CN $-$ CR $= x - b$, e la MO $=$ MN $-$ NO $= y - h$: cioè a dire le coordinate del cerchio saranno $x - b$, $y - h$, e l'equazione di questa curva dovrà essere

$$(y - h)^2 + (x - b)^2 = r^2 \; . \; . \; . \; . \; . \quad A$$

Laddove quella dell' ellisse, come dal problema 1. si raccoglie, n' è

$$y^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad B$$

Ciò premesso, si elimini la y dalle due equazioni A, B; e l'emergente equazione, che dee esser biquadratica, si dinoti per K. Dico *esser le radici reali, ed ineguali dell' equazione* K *i valori delle ascisse della data ellisse* ADB, *le*

(1) Di quest' ellisse s'intendono anche dati i semiassi conjugati.

quali corrispondono alle ordinate pe' punti d' intersezione.

DIM. Nel punto M, ch' è uno degl' incontri delle date curve, debbonsi eguagliare le y, che corrispondono alla stessa x. Dunque le due locali A, B potranno considerarsi, come due algebriche equazioni, che abbiano le x, y per ignote, e che sien potenti a determinarvele. E perciò eliminando la y dalle anzidette equazioni dovrà emergerne la K di quarto grado, che vi tien la x per ignota. E tal si rinverrebbe, se il calcolo si dirigesse a qualche altro incontro delle date curve (1): poichè quivi debbono benanche militare le medesime locali A, B. Dunque le radici reali, ed ineguali dell' equazione K dovranno esibirci quelle ascisse della data ellisse ADB, le cui corrispondenti ordinate passano per le intersezioni di essa curva, e del cerchio.

Intanto sottraggasi l' equazione A dall' altra B, e nel residuo pongasi in luogo della x la grandezza α, che sia una delle radici reali dell' equazione K; dovrà risultarne (2) la

$$y = \frac{1}{2h}\left(c^2 + h^2 - r^2 + b^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}\,\alpha^2 - 2b\alpha\right)$$

che ben si vede esser reale, ed a qual ramo della data ellisse

(1) Vedi la not al §. 18.

(2) Il sommo Newton fu di parere, che per risolvere elegantemente un problema solido convenga combinar col cerchio un' ellisse, come quella, che fra le curve coniche è la più facile ad esser descritta organicamente. E che in tal congiuntura, ad esempio dell' immortale Archimede, debbasi preferire una comoda operazione alle agevoli geometriche, o analitiche speculazioni. Onde ho voluto anche per tal ragione intrattenermi alquanto sulla combinazion di queste due curve.

ella ne debba appartenere. Nè quindi può temersi ciò, che sovente in simili casi avvenir suole, che alle radici reali dell' anzidetta equazione vi corrispondano ordinate immaginarie, ed immaginarie intersezioni delle curve.

§. 112. COR. I. Se le due intersezioni L, M del cerchio, e dell' ellisse si trovino intervallate fra loro per una distanza infinitesima; la retta LM, che conducesi per esse, dovrà esser tangente all' una curva, ed all' altra: e queste due curve si dovranno puranche toccare in tal luogo. Ed oltre a ciò le ascisse x corrispondenti a que' due punti si potranno prendere per uguali.

§. 113. COR. II. Dunque *nel caso, che sieno uguali due delle radici reali dell' equazione* K, *le mentovate curve dovran toccarsi*. Nè l' egualità di queste due radici potrà ascriversi ad un *punto doppio*, ch' è l' incontro di due diverse ramificazioni di una stessa curva; poichè niuna delle due date curve ha un tal genere di rami.

§. 114. COR. III. Un circolo, che tocchi un' ellisse, può segarla in due altri punti. Quindi è, che se una di queste due intersezioni si accosti al contatto, tal che vi s' immerga; dovrà quivi prodursi un' altro genere di contatto, che da' geometri suol dirsi *osculazione* (1).

§. 115. COR. IV. E perciò, *se tre delle radici reali*

(1) L' accuratissimo Giacomo Bernoulli così acconciamente definisce l' osculazione: *Si concursui duarum intersectionum, sive contactui tertia intersectio accesserit, et sic, quod osculum dicitur, effecerit*. Pag. 685., e 702. E Schooten Comm. in Cartes. pag. 339. Del che in appresso.

dell' equazione K *sieno uguali; quel circolo sarà osculatore dell' ellisse* .

§. 116. Cor. v. Se tutte e quattro le radici dell' equazione K sieno immaginarie, quel cerchio non potrà incontrar l' ellisse in alcun punto.

§. 117. Cor. vi. Un cerchio, che seghi un' ellisse in quattro punti *, non può altrove incontrarla. E, se l' una di queste due curve tocchi l' altra in due parti del suo perimetro, in niun' altra parte potrà incontrarla. E lo stesso dee dirsi nel caso, che quel cerchio seghi l' ellisse in due punti, e la tocchi in un altro. * §. 100.

§. 118. Scol. La ricerca delle intersezioni di due curve algebriche, che per le vie analitiche ormai si dirige, vedesi esposta a molt' intoppi, che ne divietano il progredire. Ed in prima, se il prodotto de' gradi dell' equazioni *caratteristiche* delle date curve sia maggiore di 4.; non vi sarà mezzo da prender le radici dell' emergente equazione: e ciò per difetto della nostr' Algebra. Nè si potran quindi valutar le ascisse, che alle ordinate pe' punti d' intersezione corrispondono. Ma pur si sappian coteste radici, e sieno reali. Il numero di queste sarà quanto quello delle intersezioni delle curve? L'Ermanno, l'Eulero, il Cramer (1), ed altri profondi geometri dopo di aver dileguati i dubbj del Rolle, si avvisaron saggiamente, che il primo di que' due numeri poteva esser maggiore dell' altro. E poi, ancorchè vadan bene tutte queste cose; pur nondimeno,

(1) Si legga su tal proposito la Dissertazione di Giac. Ermanno vol. III. Miscell. Berolin.; Cramer nel cap. IV. *Introd. a l'Anal. des lignes courbes*; Eulero vol. II. cap. XIX. *Introd. in Analys. Infin.*

se ciascuna delle date curve sia fornita di più rami, sarà dura cosa, e malagevole l' esplorarvi in quale di essi debba cadere l' ordinata per ognuna delle intersezioni. Ma per buona fortuna niuno de' detti ostacoli incontrasi nel problema quassù risoluto: onde senza tema di errori procedesi alle conseguenze (1). E su tal proposito gioverà anche l'avvertire, che il problema inverso delle intersezioni, il quale dicesi *Costruzione geometrica dell' equazioni*, non riceva dall' imperfezione dell' Algebra detrimento. Che anzi la Geometria i cancelli dell' Algebra rimuovendo, le porge le radici reali di una qualunque algebrica equazione, ancorchè questa sia al quarto grado superiore. Poichè in tal problema proponesi un' equazione determinata di un qualunque grado, e coll' intersezione di due curve algebriche, che vi sieno convenevolmente dedotte, prescelte, e combinate, si assegnan quelle ascisse, che con geometriche divise le radici reali della proposta equazione rappresentano.

---

(1) Il processo di queste operazioni quanto utile, altrettanto glorioso al nome della Geometria, merita di esser indicato. Sia $X = o$ un' equazione algebrica di un qualunque grado, ed ella si risolva in due equazioni indeterminate, ch' io dinoto per $f\,(x, y) = o$, ed $F\,(x, y) = o$; cioè queste sien tali, che quella, ch'emerge dall'eliminarvi la nuova variabile y sia la stessa $X = o$. Ove per riuscir senza intoppi, esigesi, che in una di queste due equazioni la y sia una funzione razionale della x; o che tale si possa dal maneggio di esse rinvenire. Ciò premesso, si combinino le due curve, che han per equazioni $f(x, y) = o$, e $F\,(x, y) = o$; cioè quelle curve si dispongano in modo, che abbiano una medesima linea delle x, e quivi un medesimo principio di esse, e che le ordinate positive dell' una restino sulle positive dell' altra adattate. Le ascisse, che corrisponderanno alle ordinate per le intersezioni, saranno le radici reali dell' equazione $X = o$.

§. 119. DEF XIV. Tre grandezze diconsi *armonicamente* proporzionali, se la massima di esse stia alla minima, come l'eccesso della massima sulla media all' eccesso di questa sulla minima.

Son dunque i tre numeri 6, 4, 3 armonicamente proporzionali per esser condizionati nel proposto modo: poichè sta 6 : 3 :: 6 — 4 : 4 — 3. Ed anche sarebbero tali questi tre altri numeri 6, 3, 2, ancorchè essi non si scorgano analoghi a' primi.

§. 120. DEF. XV. Una retta dicesi *divisa armonicamente* in due punti, quando l' intera retta stia ad un de' suoi segmenti estremi, come l'altro segmento estremo al medio. Questa proporzione fu chiamata *analogia conterminale* dal nostro valentissimo geometra Giannalfonso Borelli (1).

Quando la retta AB * si ritrovi divisa ne' due punti C, G nel prescritto modo, cioè che stia AB : BG :: AC : CG, due armoniche analogie si dovranno in essa contenere; e forse per tal ragione Pappo Alessandrino disse armonica cotesta divisione. Imperocchè essendo AC = AB — BC, CG = BC — BG, sarà AB : BG :: AB — BC : BC — BG; e quindi per la * fig. 12.

(1) Questo valentuomo ridusse in un ammirabile compendio i Conici di Apollonio, dandolo in luce in Roma nell'anno 1679; e si valse di questa divisione conterminale per ordirvi eleganti dimostrazioni. Il de la Hire in una consimile opera stampata in Parigi nell' anno 1685 vi adottò per principio la divisione armonica, che anche piacque all' ingegnoso Sig. Pascal, al Desargues, ed ad altri geometri accurati (*Veggasi Krafft Geometr. Subl.* §. 57). E si riscontrino le prop. 9, 10, 11 del Lib. III. Coll. Mat. di Pappo, perchè quell' acconcia nomenclatura non si attribuisca al Blondel, o a qualche altro de' citati Geometri *.

 * §. 120.

precedente definizione debbon esser le tre rette AB, BC, BG armonicamente proporzionali. Ed in simil guisa si concluderebbe, che sien tali le tre rette AB, AG, AC. Per la qual cosa, se mai sia AB $= 6$, BC $= 4$, e BG $= 3$, e con ciò AG $= 3$, AC $= 2$, e CG $= 1$; sarà per quella divisione armonica $6 : 3 :: 2 : 1$; e saran poi armonicamente proporzionali i tre numeri 6, 4, 3, ed anche gli altri 6, 3, 2.

L E M M A.

§. 121. Se i due lati AB, AP* del triangolo ABP sieno divisi armonicamente ne' punti C, G, e negli altri Q, R; le rette CQ, GR, che vi congiungono le sezioni superiori, e le inferiori rispettivamente, dovran convergere ad uno stesso punto della base prolungata; se pur non le sieno parallele.

* *fig.* 12.

DIM. Si ponga AB $= a$, BG $= b$, AP $= \alpha$, PR $= \beta$; e quindi AG $= a - b$, AR $= \alpha - \beta$. Sarà, per la divisione armonica della retta AB ne' punti C, G, AB : BG :: AC : CG, e componendo AB + BG : BG :: AG : CG, cioè ne' loro simboli sarà $a + b : b :: a - b :$ CG. Onde dovrà essere

$$CG = b\left(\frac{a-b}{a+b}\right), \text{ e quindi } AC = a\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

Nello stesso modo si dimostra dover risultare

$$QR = \beta\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right), \text{ ed } AQ = \alpha\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

E si vedrà poi dalle recate espressioni delle CG, GB, che stia CG : GB :: $a - b : a + b$. Or conducasi per R la retta TRS parallela al lato AB del proposto triangolo. Sarà il triangolo AQC simile all' altro RQS, e quindi AQ : AC :: QR : RS, cioè $\alpha\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) : a\left(\frac{a-b}{a+b}\right) :: \beta\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) :$ RS, onde sarà RS $= \frac{a\beta}{\alpha}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$. Ma per la similitudine degli altri due triangoli ABP, RTP sta AP : AB :: RP : RT, cioè $\alpha : a :: \beta :$ RT, che sarà uguale ad $\frac{a\beta}{\alpha}$. E sarà quindi RS : RT :: $a-b : a+b$, lo che nelle loro espressioni si ravvisa. Dunque starà CG : GB :: SR : RT; e le due CQ, GR dovran concorrere ad un medesimo punto della base BP prolungata verso H.

Che se mai si ritrovi esser BA : AC :: PA : AQ, dovrà esser anche BG : GC :: PR : RQ *; e quindi sarà tanto la retta CQ, che l'altra GR parallela alla base BP del proposto triangolo. * §. 120.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

§. 122. Se dal punto A * cadano nella sottoposta ellisse NBG le due tangenti AB, AC, ed una qualunque segante AE; questa segante dovrà esser divisa armonicamente dalla curva NBG, e dalla retta BC fra' contatti. * fig. 16.

Dim. Si tiri la retta AK, per lo punto A, e per lo centro dell'ellisse NBG. Ed a questo diametro si conducano per

le sezioni D, E le semiordinate DP, EK, che incontrino in H, F la tangente ACF. Ed oltre a ciò si ponga DP $= y$, EK $= Y$, HP $= v$, FK $= V$. Sarà per la natura del triangolo KAF, dal cui vertice A si è condotta in sulla base la retta AE, $V^2 - Y^2 : v^2 - y^2 ::$ AF^2 : AH^2. Ma per la na-
* §. 109. tura * della tangente AC dell' ellisse NBG sta poi $V^2 - Y^2 : v^2 - y^2 ::$ CF^2 : CH^2. Dunque starà AF^2 : AH^2 :: CF^2 : CH^2, ed AF : AH :: CF : CH, cioè AE : AD :: EO : OD.

* §. 95. §. 123. COR. I. Sia come quì sopra * il semidiametro
* *fig.* 15. CA* $= \alpha$, l'ascissa dal centro, che corrisponde all' ordinata per lo contatto, cioè CN $= x$, e quindi NA $=$ CA $-$ CN $= \alpha - x$,
* §. 95. ed NG $=$ CG $+$ CN $= \alpha + x$. Sarà * CP $= \frac{\alpha^2}{x}$, e perciò

$$GP = CG + CP = \frac{\alpha}{x}(\alpha + x)$$

e

$$PA = CP - CA = \frac{\alpha}{x}(\alpha - x).$$

E conoscendosi per intuizione essere

$$\frac{\alpha}{x}(\alpha + x) : \frac{\alpha}{x}(\alpha - x) :: \alpha + x : \alpha - x,$$

saran proporzionali le grandezze da questi simboli rappresentate, cioè a dire starà GP : PA :: CN : NA. E perciò

§. 124. COR. II. *Un diametro dell' ellisse, che incontri una qualunque tangente di essa curva, dee restar diviso armonicamente dal perimetro, e dall'ordinata per lo contatto.* E questa verità discende immediatamente dalla natura di tal curva, e senza ricorrere all' intermedia teorica delle tangenti, e delle secanti, come si è praticato in questo teorema.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

§. 125. Se dal punto A* esistente fuori l'ellisse NBG cadano su questa curva le due tangenti AB, AC, e le due seganti AG, AE: le rette LD, GE, che passano per le sezioni superiori, e per le inferiori rispettivamente, dovranno convergere ad uno stesso punto della retta BC fra'contatti; se pur non sien quelle parallele a questa. * *fig.* 16.

Dim. Al presente teorema può adattarsi la medesima dimostrazione del lemma precedente.

§. 126. Cor. I. Se la segante AG si volga con moto angolare intorno al punto A, e verso l'altra segante AE; le rette, che uniscono i punti mobili L, G cogl'immobili D, E, dovran sempre unirsi fra loro in un punto della retta BC fra' contatti. E nell'atto, che la AG passa a combaciare coll'altra AE; le corde de' due archetti D*d*, E*e*, e le tangenti della curva in D, E, dovranno benanche raccorsi in un punto della BC.

§. 127. Cor. II. Dunque: *Se dal punto* A *cadano sulla sottoposta ellisse* NBG *le due tangenti* AB, AC, *ed una sola secante* AE, *e ne' punti* D, E, *ove questa ne incontri la curva, le si conducano le tangenti* DR, ER; *anche queste tangenti dovranno unirsi in uno stesso punto della retta* BC *fra' contatti.*

§. 128. Scol. Nel congegnare un'analitica dimostrazione al presente teorema più ore io spesi indarno nel voler quella dall' equazion dell' ellisse, ed in facil modo derivare. Ma poichè mi avvidi, che cotesta ricerca potevasi istituire in un triangolo, i cui lati fosser divisi armonicamente, e pe' punti delle divisioni vi passassero due rette; io mi rivolsi di buon grado ad esplorare, se queste rette dovesser convergere ad uno stesso punto della base. Ed avendo ciò analiticamente, ed in agevol maniera dimostrato, ne formai il lemma precedente, che racchiude una rigida, e soddisfacente dimostrazione al teorema quassù proposto.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

* *fig.* 15. §. 129. Nell'ellisse AMG * il rettangolo delle due tangenti verticali AO, GT, comunque tagliate da una tangente laterale OT, è sempre uguale al quadrato del semidiametro CQ parallelo a quelle due tangenti. Ed un tal rettangolo n' è poi un massimo.

Dim. Si ponga il semidiametro CA $= \alpha$, cioè quello, che passa per lo contatto di una delle due tangenti verticali, e 'l suo conjugato CQ $= \gamma$. Ed oltre a ciò si chiamino x, y le coordinate CN, NM, che corrispondono al punto M del contatto della tangente laterale MO; che incontri la CA in P. Dovrà

* §. 95. esser * la retta PC $= \frac{\alpha^2}{x}$, la sottangente PN $= \frac{\alpha^2 - x^2}{x}$;

e quindi $PG = PC + CG = \frac{\alpha}{x}(\alpha + x)$, e $PA = PC - CA = \frac{\alpha}{x}(\alpha - x)$, come nel §. 122. Ma i triangoli PAO, PGT sono simili al triangolo PNM. Dunque sarà PN : NM :: PA : AO, ed anche PN : NM :: PG : GT; cioè ne' simboli di queste grandezze dovrà essere

$$\frac{\alpha^2 - x^2}{x} : y :: \frac{\alpha}{x} : (\alpha - x) : AO = \frac{\alpha y}{\alpha + x}$$
$$\frac{\alpha^2 - x^2}{x} : y :: \frac{\alpha}{x} : (\alpha + x) : GT = \frac{\alpha y}{\alpha - x}.$$

E sarà finalmente il rettangolo

$$AO \times GT = \frac{\alpha^2 y^2}{(\alpha^2 - x^2)} = \gamma^2,$$

ponendovi il valore della y^2 esibito nella prop. VII.

PART. II. Inoltre dal punto t della TS vicinissimo all'altro T conducasi a quel punto M del contatto la retta tM, che incontri in o la tangente verticale AO: saranno simili i due triangoletti TMt, OMo. Onde sarà Tt : Oo :: TM : MO :: GN : NA. Ma per la divisione armonica * della retta PG ne' punti A, N, sta GN : NA :: GP : PA :: GT : AO. Dunque sarà Tt : Oo :: GT : AO. Ed essendo il decremento della GT all' incremento della AO, come la GT alla AO, il rettangolo di GT in AO sarà un massimo, o pure un minimo (1). Ma quì non può militare il minimo,

* §. 122.

---

(1) Suppongansi variabili i due lati AB, BC* del rettangolo ABCD, e 'l primo di essi crescerne della particella Bb, e l' altro decrescerne della Cc. Sarà chiaro, ch' essendo AB : Bb :: BC : Cc

* fig. 19.

potendo svanire il rettangolo di GT in AO, quando la TM facciasi passare per lo punto A, o per l'altro G. Dunqu' ei dovrà essere un massimo.

§. 130. COR. I. Si tiri il semidiametro CF parallelo alla tangente laterale MP, il quale si chiami β, e l'altro CQ la incontri in B. Sarà $CA^2 : CF^2 :: GP \times PA : PM^2$ *; e quindi $CA : CF :: \sqrt{(GP \times PA)} : PM$. E questa retta PM ne' simboli di quelle dovrà risultarne uguale a $\frac{\beta}{x} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)}$.

* §. 106.

Ma $PN : NC :: PM : MB$, cioè

$$\frac{\alpha^2 - x^2}{x} : x :: \frac{\beta}{x} \sqrt{(\alpha^2 - x^2)} : MB = \frac{\beta x}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)}}$$

Dunque dovrà essere il rettangolo di PM in MB uguale a β^2.

§. 131. COR. II. E perciò *il rettangolo delle parti di una tangente dell' ellisse, le quali restano tra 'l contatto e gl' incontri di due qualunque semidiametri conjugati, sarà di una costante grandezza, cioè uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa tangente.*

§. 132. COR. III. *Ed a questo quadrato sarà anche uguale il rettangolo delle parti della tangente laterale, che restano tra 'l contatto, e due qualunque tangenti verticali.* Poichè si sa dalla prop. XII. §. 107. essere

---

debbano essere uguali i rettangoletti BbRr, e QqCD. Onde in tal caso non avrà alcun incremento quel rettangolo ABCD. Ma quando una grandezza non ha più incremento, dee esser giunta nel massimo suo grado. Dunque il detto rettangolo sarà un massimo. Intanto io quì appresso dimostro il medesimo assunto con un metodo analitico, che non dipende da grandezze infinitesime, ed è ben diverso da quello del sagace Hudden.

$\frac{AO}{MO} = \frac{\gamma}{\beta}$, e $\frac{GT}{TM} = \frac{\gamma}{\beta}$. Dunque, multiplicando la prima frazione per la terza, e poi la seconda per la quarta, si avrà $\frac{AO \times GT}{MO \times TM} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$. Ma in questo teorema si è dimostrato $AO \times GT = \gamma^2$; dunque sarà $MO \times TM = \beta^2$.

§. 133. Scol. La verità, che ho dimostrata nella parte II. di questo teorema, fu ignota a' Geometri antichi, e si è conosciuta non ha guari dall' acutissimo Sig. Lagrange col suo metodo delle variazioni, o con quello, onde suol rinvenirsi una curva, che sia adorna di una data proprietà di massimo, o di minimo in ciascun punto. Il dottissimo sig. Lacroix dirigesi allo stess' oggetto col metodo de' massimi, e de' minimi delle funzioni differenziali (1). Ed io mi lusingo, che non debba dispiacere a' geometri l' averla io rilevata con pochi giri di analisi geometrica, ed in un modo più generale di quello de' due lodati analisti. Poichè essi si sono limitati al solo caso, che le parallele AO, GT sieno perpendicolari alla retta GA, che congiunge i due punti dati A, G: e questa retta può essere comunque obbliqua a quelle due. Ma non per tanto quel primo caso può anche risolversi coll' Analisi de' finiti in facil modo, come il fo quì appresso, proponendo ne' seguenti termini il

PROBLEMA.

§. 134. *Dato il punto* M, *ch' è in mezzo alle due*

(1) Veggasi il §. 168. delle *Fonct. Analyt.* del Sig. Lagrange: e 'l §. 842. del *Calcul Integr.* del Sig. Lacroix.

rette AV , GT *perpendicolari alla stessa retta* AG , *determinarvi il sito della trasversale* OT ; *sicchè il rettangolo delle due intercette* AO , GT *sia un massimo* .

SOLUZ. La tangente trigonometrica dell' angolo VMO, ch' è una grandezza ignota , si chiami t , e per b, h esprimansi le coordinate AN, NM del dato punto M, che si rapporti alla direttrice AG . E ponendo uguale ad a la CA metà di AG , sarà NG $= 2a - b$, che per brevità esprimasi per f . E dovrà essere VO $= bt$ (1) , TS $= ft$, AO $= h - bt$, GT $= h + ft$, e 'l rettangolo di AO in GT $= h^2 + fht - bht - fbt^2$. Ciò premesso , si chiami q^2 il valore di questo rettangolo ; e l' equazione , che nasce pareggiando q^2 col precedente quadrinomio , si ordini rispetto a t , avrassi quest' altra equazione

$$t^2 + \frac{bh - fh}{bf}\, t = \frac{h^2 - q^2}{bf} \quad \ldots\ldots\ldots \quad A$$

che risoluta ci offre

$$t + \frac{h}{2bf}\,(b - f) = \pm \sqrt{\left(\frac{h^2 - q^2}{bf} + \left(\frac{bh - fh}{2bf}\right)^2\right)} \quad . \; . \quad B$$

Ma cotesto radicale diviene immaginario , quando q^2 è maggiore di $h^2 + \dfrac{(bh - fh)^2}{4bf}$, come l' è chiaro di per se stesso . Dunque quest' ultima espressione sarà il valore della q^2 nel suo massimo grado . E svanendo in tal supposizione il secondo membro dell' equazione B , dovrà restarne il primo uguale a zero ; e quindi sarà l' ignota

$$t = \frac{h}{2bf}\,(f - b) = \frac{h}{b} \times \frac{a - b}{2a - b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad C$$

(1) Vedi la prima delle note al §. 24.

Cioè

$\frac{h}{t} : b :: 2a - b : a - b$; ovvero (1) PN : NA :: NG : NC.

Ciò posto, si prolunghi la NM in D, sicchè ND sia media proporzionale tra le due AN, NG; e la CQ parallela alla NM sia quarta proporzionale in ordine alle tre rette DN, MN, AC*. E poi co' semiassi conjugati CA, CQ intendasi descritta l'ellisse AQG *, cui si tiri nel punto M la tangente TMP *. Sarà da quel, che ho conchiuso nel §. 97, *la sottangente all' ascissa dal vertice vicino, come quella dal vertice rimoto all' ascissa dal centro*; cioè PN : NA :: NG : NC. E quindi cotesta tangente laterale dovrà troncare dalle verticali le parti AO, GT, che vi contengono il massimo rettangolo. E potendosi ciò dimostrare per qualunque altro punto dell' ellisse AMG; questa curva sarà fornita della proprietà di un massimo in ciascun de' suoi punti.

* §. 22.
* §. 1.
* §. 38.

§. 135. Cor. Supponendo esser la retta AG obbliqua alle due parallele AO, GT, in una consimil maniera si potrà conchiuder lo stesso assunto. Ma quì la t dovrà dinotare il rapporto del seno dell'angolo OPA al seno dell' altro AOP, come fu praticato nella prop. XI.

§. 136. Scol. Il voler conseguire con un metodo sublime ciò, che può aversi con un artifizio elementare, non si è mai riputato lodevole impegno. E perciò io son d' avviso, che il mezzo conveniente per l'indicata ricerca sia l' impiegarvi il metodo volgare de' massimi, e de' minimi, cui potrà adattarsi l' altro, che dicesi *metodo inverso delle tangenti*,

(1) *Ibid.*

cioè quello, onde da una data proprietà di una curva vi si rimonta alla natura. E tanto nell' un metodo, che nell' altro potrà procedersi colla Geometria, o coll' Analisi de' finiti, o degl' infiniti, come piacerà all' analista (1).

§. 137. DEF. XVI. Due ellissi si dicono *simili fra loro*, se abbiano gli assi maggiori proporzionali a' minori.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

* fg. 17. §. 138. Data di posizione l' ellisse AOB * e 'l punto P; ritrovar la linea, che passa pe' punti medj delle corde, che conducansi per esso punto.

SOLUZ. Per lo punto P distendasi, ove ne piaccia, la corda Nn, il cui punto medio sia F. E dagli estremi N, n di essa corda, e dal punto medio F si abbassino le perpendicolari ND, nd, FE all' asse maggiore AB, e poi sul minore si tiri dal dato punto P la perpendicolare PH. In oltre si ponga $PH = b$, $CH = h$, $PM = v$, $PG = x$, e $GF = y$.

(1) Nell' equazione C si pongano le variabili x, y in luogo delle due b, h, e per la t il rapporto del differenziale della y a quello della x*, cioè $\frac{dy}{dx}$. In tal modo l' anzidetta equazione si cangerà nella seguente, ch' è una delle differenziali separate,

*N. 1. §. 24.

$$\frac{dy}{y} = dx\left(\frac{a-x}{2ax-x^2}\right).$$

Ed ella integrata co' principj del calcolo sommatorio ci somministra l' equazione $Cy^2 = 2ax - x^2$, ch' è all' ellisse. Ove dovrà esser la constante $C = \frac{a^2}{c^2}$, ponendo $CQ = c$.

Sarà PG : GF :: PM : MN, pe' triangoli simili PGF, PMN, cioè ne' loro simboli $x : y :: v : \mathrm{MN} = \frac{vy}{x}$. E sarà poi la $\mathrm{DN} = \mathrm{DM} - \mathrm{MN} = h - \frac{vy}{v}$, e la $\mathrm{CD} = \mathrm{PH} + \mathrm{PM} = b + v$. Ma per la natura dell' ellisse ANB * dee esser $\mathrm{DN}^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} \times \mathrm{CD}^2$. Dunque cogl' indicati valori delle DN, e DC dovrà prodursi la seguente equazione * §. 16.

$$h^2 - \frac{2hvy}{x} + \frac{v^2 y^2}{x^2} = c^2 - \frac{c^2}{a^2}\,(b^2 + 2bv + v^2) \;.\;.\;.\; \mathrm{A}$$

La quale ordinata rispetto ad v trasformasi in quest' altra

$$v^2 - 2v\,\frac{ha^2 xy - bc^2 x^2}{a^2 y^2 + c^2 x^2} = etc. \;.\;.\;.\;.\; \mathrm{B}$$

Or si sa per le algebriche teorie, che la metà del coefficiente del secondo termine dell'equazione B, preso con segno contrario, debba eguagliarvi la semisomma delle radici PM, Pm, che (1) quì è la PG. Dunque ne' loro simboli sarà

$$\frac{ha^2 xy - bc^2 x^2}{a^2 y^2 + c^2 x^2} = x \text{, cioè } ha^2 y - bc^2 x = a^2 y^2 + c^2 x^2.$$

Quest' ultima equazion può avere la seguente forma,

$$\left(\frac{h}{2} - y\right)^2 = \frac{a^2 h^2 + b^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{a^2}\,(x + \tfrac{1}{2} b)^2 \;.\;.\; \mathrm{C}$$

---

(1) Le rette PM, Pm dirigonsi a parti opposte; onde, se l' una di esse è positiva, l'altra dee esser negativa; e la loro somma per questa contrarietà di segni dovrà equivalere alla dupla PG, e la PG esser la semisomma di quelle rette. Che se il punto P fosse fuori la curva, coteste rette avrebber lo stesso segno, e converrebbe effettivamente sommarle, come si è praticato nella prop. VI. in fine.

Sicchè paragonandola all' equazione A del problema 1., si vedrà immantinente, che quella al par di questa debbasi appartenere ad un' ellisse, di cui le coordinate rettangolari son espresse da' binomj $x + \frac{1}{2} b$, $\frac{1}{2} h - y$, ed i quadrati del semiasse minore, e del maggiore vi son indicati dalle frazioni $\frac{h^2 a^2 + b^2 c^2}{4a^2}$, ed $\frac{h^2 a^2 + b^2 c^2}{4c^2}$, che osservansi proporzionali alle c^2, a^2. Dunque:

§. 139. Teor. *Nell' ellisse la linea, che dee passare pe' punti medj delle corde convergenti ad un dato punto, l' è un' altra ellisse simile alla prima*, e similmente posta.*

* §. 137.

§. 140. Scol. Il sig. Tommaso Perrelli espertissimo ne' metodi geometrici, ed analitici, come il rileviamo da certi suoi Opuscoli, e dagli encomj fattigli dall' ab. Grandi, dal Fabroni, e da altri, sciolse geometricamente, e con greca nitidezza un tal problema. Era dunque necessario, ch' io vi applicassi l' analisi algebrica, non solo per attenermi al sistema didascalico, che ho prescelto sin dal principio; ma perchè dovrò valermi del risultamento analitico di questo problema per risolverne un altro più preclaro, e che sembra agli analitici metodi restio. Intanto la soluzione del presente problema vedesi guidata per una proprietà delle quadratiche equazioni, qual n' è quella della prop. vi. E la soluzione del seguente problema non è, che un magistero di eliminazione.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

§. 141. Data di posizione l'ellisse ANB*, e'l punto P, vuol determinarsi la linea, ove n'è allogato il concorso R delle due tangenti condotte per gli estremi di ciascuna corda Nn, che passi per quel punto dato. *fig. 18.

Sol. Si tiri la retta CR dal centro C della data ellisse al punto R, ove concorrono le tangenti condottele per gli estremi N, n della corda Nh, ch'è una di quelle, che passano pel dato punto P. Sarà chiaro, ch'ella debba incontrar la corda Nn nel punto medio F*. Dal punto T, ove la medesima retta, sega la curva, e dagli altri punti R, F si tirino sull' asse AB della detta curva le perpendicolari TQ, RS, FE. Dovranno essere continuamente proporzionali le tre rette CS, CQ, CE, al par delle loro analoghe CR, CT, CF*. E perciò ponendo, come quì sopra, PH $= b$, e CH $= h$, si chiamino v, z le coordinate CS, SR del punto R. Ed oltre a ciò si ponga la CQ $= t$, e * quindi la CE $= \frac{t^2}{v}$. E poichè, per la similitudine de' triangoli CSR, CEF, sta CS : SR :: CE : EF, cioè $v : z :: \frac{t^2}{v}$: EF, sarà $\frac{zt^2}{v^2}$ il valore della EF. E così anche, per la simiglianza de'triangoli CSR, CQT è CS : SR :: CQ : QT, cioè a dire $v : z :: t$: QT. Onde sarà QT $= \frac{tz}{v}$. E si dovrà poi conchiudere, che le coordi-

* §. 96.

* §. 95.

* §. 95.

nate della proposta ellisse AOB, e dell' altra, ch' è la locale

* §. 140. de' punti F *, abbiano i seguenti valori; cioè

$$CQ = t \quad , \quad QT = \frac{tz}{v}$$

$$PG = \frac{t^2}{v} - b \quad , \quad GF = h - \frac{zt^2}{v^2}.$$

Ciò premesso, si ponga t per x, e $\frac{tz}{v}$ per y nell' equazione

* §. 16. $y^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2}$ che appartiensi * alla prima di queste due ellissi. Sarà $\frac{t^2z^2}{v^2} = c^2 - \frac{c^2t^2}{a^2}$ e quindi

$$t^2 = \frac{a^2c^2v^2}{a^2z^2 + c^2v^2} \quad .\ .\ .\ .\ \mathrm{A}$$

Similmente nell' equazion $a^2y^2 + c^2x^2 = ha^2y - bc^2x$, ch' è alla seconda ellisse, si pongano per le x, y i valori delle coordinate PG, GF di già recati. E fattevi le riduzioni de' termini si troverà $\frac{a^2z^2t^2}{v^3} + \frac{c^2t^2}{v} = \frac{ha^2}{v} + bc^2$. E con ciò

$$t^2 = \frac{ha^2z + bc^2v}{a^2z^2 + c^2v^2}v^2 \quad .\ .\ .\ \mathrm{B}.$$

Sicchè pareggiando i valori della medesima t^2 esibiti nell' equazioni A, B, si otterrà

$$a^2c^2 = ha^2z + bc^2v\ , \ \text{e}\ z = \frac{bc^2}{ha^2}\left(\frac{a^2}{b} - v\right).$$

Dunque

§. 142. TEOR. *La richiesta locale è una retta inclinata all' asse della figura per un angolo, di cui n' è* $\frac{bc^2}{ha^2}$

la tangente trigonometrica, ed $\frac{a^2}{b}$ *la distanza del centro dell' ellisse dal punto, ov' ella incontra l' asse.*

§.143. Cor.i. La retta RV sia l'anzidetta locale, e l'angolo, ond' ella s' inclini all' asse, si dinoti per φ. Giungasi la retta CP, e si chiami θ l'angolo d' inclinazione della CP al medesimo asse; sarà $\frac{h}{b} = tang.\theta$. Ed avendo proposto in questo teorema esser $tang.\varphi = \frac{bc^2}{ha^2}$, sarà $tang.\varphi = \frac{1}{tang.\theta} \times \frac{c^2}{a^2}$. Onde * la retta RV dovrà esser parallela al semidiametro conjugato di quello, che passa pel dato punto P. * §. 77.

§. 144. Cor.ii. Sicchè, se facciasi CL a CA, come CA CV, e per V poi si distenda la retta VR parallela al semidiametro conjugato di quello, che passa per lo punto P; la retta VR sarà la locale addimandata. Imperocchè il punto V è il concorso * delle tangenti menate all' ellisse per gli estremi dell' ordinata all' asse, la qual si conduce per quel punto dato. Dunque sapendosi un punto di questa retta, e la sua inclinazione al detto asse, ella si potrà determinare in sì facil modo. * §. 36.

§. 145. Scol. i. Quest' ammirabile proprietà dell' ellisse, che poi vedrassi appartenere a tutte e quattro le linee di second' ordine, vien dimostrata ne' Corsi sintetici con brevi luminosissime ragioni. Il sig. *Monge* la deriva da principj sublimi, e per la teorica de'piani tangenti le superficie di rivoluzione(1). E mi parea conveniente rilevarla coll'analisi Cartesiana, e con solamente considerarvi l'equazioni alla data ellisse, ed alla locale

(1) *Geometr. Descript.* §. 39.

de'punti medj delle sue corde, che passano per un punto dato.

§. 146. SCOL. 11. Io mi lusingo, che non sia un disadorno finimento di questo Capo l' indicare a' giovani, come coll' analisi Cartesiana si possa risolvere il problema di: *Condurre una tangente comune alle due ellissi* MAP, FRQ *date di sito, di specie, e di grandezza* (1). Sia dunque la MF una
* *fig.* 20. comune tangente* alle due curve date. La retta CG, che unisca i loro centri, la incontri in B. Le MN, FE sieno le semiordinate a' semidiametri CA, GR; e quelle passino pe' punti M, F di contatto: e poi la FD sia parallela alla MN. Sarà dato di specie il triangolo FDE; onde i suoi lati FE, FD, DE potran supporsi proporzionali alle tre grandezze date m, n, r. Inoltre si chiamino α, h i semidiametri dati CA, GR; e γ, g i loro conjugati: e posta la $CG = b$, si dicano x, ν le sue parti CB, GB; e con ciò la $\nu = b - x$. Sarà (2)
$CN = \frac{\alpha^2}{x}$, $NB = \frac{x^2 - \alpha^2}{x}$, ed $MN = \frac{\gamma}{x}\sqrt{(x^2 - \alpha^2)}$.
Onde dovrà essere $MN : NB :: \gamma : \sqrt{(x^2 - \alpha^2)}$, liberando da' fattori comuni l' espressioni delle MN, NB. Similmente sarà

$$BE = \frac{\nu^2 - h^2}{\nu}, \qquad FE = \frac{g}{\nu}\sqrt{(\nu^2 - h^2)}$$

$$FD = \frac{ng}{m\nu}\sqrt{(\nu^2 - h^2)}, \quad DE = \frac{rg}{m\nu}\sqrt{(\nu^2 - h^2)},$$

(1) Un' ellisse dicesi *data di specie*, quando sia dato il rap-
* §. 137. porto de' suoi assi *.

(2) Vedi §. 95. per la prima, e seconda espressione: e la terza
* §. 73. poi si ricavi dal porvi $NM^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - CN^2)$ *.

e $\quad DB = DE - DE = \frac{v^2 - h^2}{v} = \frac{rg}{mv}\sqrt{(v^2 - h^2)}$.

E si conchiuderà, come nel §. prec., essere

$$FD : DB :: \frac{ng}{m} : \sqrt{(v^2 - h^2)} - \frac{rg}{m}.$$

Ma pe' triangoli simili NBM, FBD sta MN : NB :: FD : DB. Dunque ne' simboli di queste ragioni, ove siasi posta $b - x$ per v, si avrà

$$\gamma : \sqrt{(x^2 - \alpha^2)} :: \frac{ng}{m}\sqrt{(b^2 - 2bx + x^2 - h^2)} - \frac{rg}{m}.$$

Sicchè, riducendo siffatt' analogia in equazione, e liberando questa da' radicali, si otterrà un' equazione biquadratica, le cui radici reali saranno i valori numerici delle CB, CB′, *etc.* soddisfacenti al quesito. Del che altrove.

CAPITOLO III.

DE' FUOCHI DELL' ELLISSE.

§. 147. I primi punti ad esser distinti, e definiti in quella genesi dell' ellisse, ch' io recai nel §. 1., non son che i fuochi di essa, de' qua'i quì debbo ragionare a disteso. Ed in primo luogo: *L'ordinata all' asse, la quale gli si conduce per ciascun de' due fuochi, è quanto il parametro*
* §. 78. *principale* *. Poichè ponendo e per x nell' equazione all' ellis-
* §. 16. se *, e nel risultamento c^2 per $a^2 - c^2$, ottiensi

* §. 79. $$y^2 = \frac{c^4}{a^2}, \text{ e con ciò } y = \frac{1}{2} p, \text{ e } 2y = p \text{ *.}$$

§. 148. Inoltre: *Ogni retta, che da un fuoco dell' ellisse si tiri ad un punto di questa curva, esprimesi razionalmente per la sua ascissa: e propriamente l' è uguale al seguente binomio lineare* $a \pm \frac{ex}{a}$*; ove il segno* $+$ *dee valere, s' ella sia maggiore del semiasse, e 'l* $-$ *se ne sia minore.*

La dimostrazione di questa verità può anche attignersi dal probl. 1., sostituendo $c^2 - \frac{c^2}{a^2} x^2$ in luogo della y^2 nell' espressione $\sqrt{(y^2 + (e \pm x)^2)}$, che disegna la detta inclinata. Poichè in tal modo il quadrinomio, che sotto di questo segno si contiene, diventa un quadrato perfetto, avente quel binomio per radice. Ed in questo aspetto il sommo Eulero, ed altri analisti han saggiamente ravvisato i fuochi delle curve coniche.

§. 149. Sicchè volendo esibire in un geometrico prospetto coteste analitiche nozioni, si formi il quadrato ACBD * sul semiasse maggiore AC dell' ellisse ALK. E presa nel lato AD, o nel suo prolungamento la retta AH, o l' altra A*h* uguale all' eccentricità AF; si congiungano le due CK, C*h*. *Queste due rette saranno le locali del binomio* $a \pm \frac{ex}{a}$. Cioè a dire all' ascissa BQ corrisponde dal fuoco vicino F un' inclinata quanto la QN, e dal rimoto *f* l' altra uguale alla Q*n*. * *fig.* 21.

Imperocchè, posta la $BQ = CM = x$, sarà la $MN = Mn = \frac{ex}{a}$, essendo CA : AH :: CM : MN, e quindi dovrà essere

$$QN = QM - MN = a - \frac{ex}{a}, \text{ e } Qn = QM + Mn = a + \frac{ex}{a}.$$

§. 150. Dunque: *Le rette, che si conducono dai due fuochi di un' ellisse ad un medesimo punto di questa curva, sono prese insieme uguali all' asse maggiore di essa.* La qual cosa è anche conseguente alla genesi dell' ellisse *. * §. 1.

§. 151. Def. xvii. Se per l'un de' due fuochi dell' ellisse si tiri l' ordinata all' asse, e pe' suoi estremi le tangenti alla curva; il concorso di queste due rette suol dirsi *punto di sublimità*. E la parallela menata per questo punto a quell' ordinata si chiama *linea di sublimità*.

§. 152. Cor. 1. In ogni ellisse debbon esservi due punti di sublimità, ed altrettante linee di sublimità, che vi sono al disopra de' vertici principali della curva.

§. 153. Cor. 11. Da quel, che si è detto nel Capo I. si raccoglie, che il semiasse CA* debba passare per lo concorso delle tangenti KL, DL menate all' ellisse per gli estremi del- * *fig.* 22.

la DK ordinata all' asse, e per lo fuoco F, e che debba esser FC : CA :: CA : CL. Onde ne' simboli delle CF, CA sarà $CL = \frac{a^2}{e}$ ed $LF = CL - CF = \frac{a^2 - e^2}{e} = \frac{c^2}{e}$.

§. 154. COR. III. Dunque ciascuno de' due punti di sublimità dell' ellisse dee stare nell' asse prolungato di tal curva, distandone dal fuoco vicino per una retta, ch' è terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse minore.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

§. 155. Le rette, che d' amendue i fuochi dell' ellisse si tirano ad uno stesso punto di una tal curva, debbono essere ugualmente inclinate alla tangente condottale per quel punto. O vi debbon costituire angoli uguali colla normale.

* fig. 23. DIM. Al punto N* dell' ellisse AMB intendansi condotte la tangente Gg, e la normale MR, ed allo stesso punto M i due rami FM, fM. Dico esser tra se uguali gli angoli FMG, fMg, e quindi anche i loro complementi FMR, fMR. Imperocchè ponendo

* §. 44. l' ascissa $CN = x$, e con ciò * la sunnormale $RN = \frac{c^2 x^2}{a^2}$,

sarà la rimanente $CR = x - \frac{c^2 x}{a^2} = x \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{c^2 x}{a^2}$

Se dunque quest' ultimo fratto tolgasi dalla $CF = e$, ed ei pur si aggiunga alla $Cf = e$, avrassi

$$FR = e - \frac{e^2 x}{a^2} = \frac{e}{a}\left(a - \frac{ex}{a}\right)$$

ed $$fR = e + \frac{e^2 x}{a^2} = \frac{e}{a}\left(a + \frac{ex}{a}\right).$$

Ed essendo, come intuitivamente ciò si comprende,

$$a - \frac{ex}{a} : a + \frac{ex}{a} :: \frac{e}{a}\left(a - \frac{ex}{a}\right) : \frac{e}{a}\left(a + \frac{ex}{a}\right);$$

saranno benanche proporzionali le rette rispettivamente espresse da questi binomj. Cioè a dire starà $FM : fM :: FR : fR$; onde saranno tra se uguali gli angoli FMR, fMR*, e con ciò* benanche uguali i loro complementi FMG, fMg. 3. El. VI.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

§. 156. Le rette, che d'amendue i fuochi dell'ellisse conduconsi ad un medesimo punto della curva, contengono un rettangolo uguale al quadrato del semidiametro conjugato di quello, che passa pel detto punto. E 'l rettangolo de' proposti rami starà al quadrato della normale in duplicata ragione dell'asse maggiore al minore.

Dim. Premesse le medesime indicazioni del prec. teorema, si chiami α il semidiametro CM, e γ il suo conjugato CQ. Sarà per la *part.* I. *prop.* VIII. $\alpha^2 + \gamma^2 = a^2 + c^2$. Sicchè togliendo α^2 dal primo membro, e dal secondo il suo valore

$c^2 + \frac{e^2 x^2}{a^2}$, qual fu recato nel cor. I. prop. I., dovrà rimanervi

$$y^2 = a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2} = \left(a - \frac{ex}{a} \right) \left(a + \frac{ex}{a} \right)$$

cioè $$CQ^2 = FM \times fM .$$

PART. II. Inoltre nel *cor. I. prop. V.* si è dimostrato il quadrato della normale MR uguale a $\frac{c^2}{a^2} \left(a^2 - \frac{e^2}{x^2} \right)$, laddove $a^2 - \frac{e^2 x^2}{a^2}$ esprime il rettangolo di FM in fM, come dianzi si è conchiuso. Ma questo binomio sta al precedente, come $a^2 : c^2$. Dunque sarà

$$FM \times fM : MR^2 :: a^2 : c^2 .$$

§. 157. COR. La semiordinata NM dell' ellisse AMB si distenda fuori la curva in T, sinchè l' intera NT eguagli la
* §. 156. normale RM; e la detta NT si chiami z. Sarà *

$$z^2 = c^2 - \frac{e^2}{a^4} c^2 x^2 .$$

Onde il punto T dovrà appartenere ad un' altra ellisse, che ha il medesimo asse minore della proposta, e per semiasse maggiore la terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse maggiore di quella; qual n' è disegnata per $\frac{a^2}{e}$.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

§. 158. Nell' ellisse ciascun ramo sta alla distanza del suo estremo dalla vicina linea di sublimità, come l' eccentricità al semiasse. E lo stesso ramo è quanto la semiordinata all' asse condottagli pel suo estremo, e distesa insino alla tangente, che dalla medesima parte passa per lo punto di sublimità di questa curva.

DIM. Quì dee dimostrarsi essere* FM : NL :: CF : CA, * *fig.* 22.
ed FM uguale ad NE. Per la qual cosa essendo CN $= x$, e

CL* $= \frac{a^2}{e}$, sarà NL $=$ CL $-$ CN $= \frac{a^2}{e} - x = \frac{a}{e}\left(a - \frac{ex}{a}\right)$, * §. 34.

ed è poi FM* $= a - \frac{ex}{a}$. Ma il secondo di questi due binomj * §. 149.
sta al primo, come e ad a. Dunque sarà

FM : NL :: e : a.

PART. II. Per essere simili i due triangoli LFK, LNE sta
LF : FK :: LN : NE. Cioè ne' loro simboli *. * §. 153.

$$\frac{c^2}{e} : \frac{c^2}{a} :: \frac{a^2}{e} - x : \text{NE} = a - \frac{ex}{a}.$$

Dunque sarà FM $=$ NE.

§. 159. COR. I. Si chiami z il ramo FM, ed v la differenza dell' eccentricità e, e dell' ascissa x, cioè la FN; onde sia la $x = e - v$. E poi nell' equazione $FM = a - \frac{ex}{a}$, si sostituiscano i già detti valori delle due FM, x. Sarà

$$z = a - \frac{e}{a}(e - v)$$

cioè
$$z = \frac{c^2 + ev}{a} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; K$$

ponendo c^2 per $a^2 - e^2$ nel risultamento.

§. 160. COR. II. L' equazione K, che anche appartiensi all' ellisse, dicesi *Polare*; poichè le due variabili z, v, ch' ella la contiene, procedono dallo stesso punto F considerato qual polo della curva, e ne varia l' angolo di esse.

§. 161. COR. III. Inoltre si chiami φ l' angolo AFM fatto dal ramo, e dall'asse, verso il vertice vicino dell' ellisse; e quindi il suo coseno s' indichi per *cos.* φ; sarà *cos.* MFN $= -$*cos.* φ, per essere i due angoli AFM, MFN uguali a due retti. Ed essendo per lo triangolo rettangolo MFN il raggio al coseno di MFN, come MF ad FN, cioè $1 : -cos.\ \varphi :: z : v$, sarà $v = -z \times cos.\ \varphi$; e l' equazione K con questo valore della v prenderà la seguente forma

$$z = \frac{c^2 - ez \times cos.\ \varphi}{a},$$

onde sarà
$$z = \frac{c^2}{a + e \times cos.\ \varphi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; L$$

§. 162. SCOL. Per l'equazione L può valutarsi ciascun ramo dell' ellisse dalla posizione, ch' ei tiene coll' asse, come nel Capo I. vi ho in simil modo i semidiametri di valutato*. Ma ella è più utile in Astronomia, che in queste geometriche speculazioni: poichè dall' anomalia vera di un pianeta, che quivi è designata per l' angolo AFM, può estimarsi la distanza, ch' ei tien dal sole, e *viceversa*.

* §. 57.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

§. 163. Se all'estremo di un ramo dell'ellisse si tiri la normale alla curva, e poi su quel ramo si abbassi la perpendicolare dal concorso dell'asse coll'anzidetta normale; la parte del ramo troncata verso quel punto estremo è sempre uguale al semiparametro principale.

DIM. Sia FM* il detto ramo, MR la normale all' ellisse AMB pel suo estremo M, RO la perpendicolare abbassata sul ramo dal punto R, ove la detta normale incontra l' asse, ed MN la semiordinata all'asse per lo punto M. Si sapranno per le precedenti cose l'espressioni de'lati del triangolo FMR, onde potrà conoscersi quel segmento MO*. Di fatti essendo

* *fig.* 23.

* 13. El. II.

$$2FM \times MO = FM^2 - FR^2 + MR^2$$

sarà ne' loro simboli (*ved. dim. prop.* XIX.)

$$2MO\left(a - \frac{ex}{a}\right) = \left(a - \frac{ex}{a}\right)^2 - \frac{e^2}{a^2}\left(a - \frac{ex}{a}\right)^2 + \frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right)$$

E, dividendo per $a - \frac{ex}{a}$ quest' equazione, si otterrà

$$2MO = \left(a - \frac{ex}{a}\right) - \frac{e^2}{a^2}\left(a - \frac{ex}{a}\right) + \frac{c^2}{a^2}\left(a + \frac{ex}{a}\right)$$

Ma i due primi binomj, che osservansi nel secondo membro di quest'ultima equazione, riduconsi a $\frac{c^2}{a^2}\left(a - \frac{ex}{a}\right)$, col porvi c^2 per $a^2 - e^2$. E questo risultamento unito all' ultimo binomio diviene $\frac{2c^2}{a}$. Dunque sarà

* §. 78. $$2MO = \frac{2c^2}{a}, \text{ cioè } MO = \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2} p^* .$$

§. 164. Cor. I. Da' fuochi F, f dell' ellisse AMB si abbassino sulla tangente Gg di essa curva le perpendicolari FG, fg. Saranno i due triangoli FMG, fMg simili tra loro, ed

* §. 155. all' altro RMO* . Dunque starà $RM^2 : MO^2 :: FM \times fM : FG \times fg$. Ed adoperando i simboli di queste geometriche grandezze sarà

$$\frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right) : \frac{c^4}{a^2} :: a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2} : FG \times fg .$$

Onde dovrà essere il rettangolo di FG in fg uguale a c^2. Cioè

§. 165. Cor. II. *Le perpendicolari, che da' due fuochi dell' ellisse si abbassano ad una qualunque tangente di questa curva, contengono un rettangolo di una costante grandezza, ch' è quanto il quadrato del semiasse minore.*

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

§. 166. La retta, che dal centro dell' ellisse conducesi parallela ad un ramo di questa curva, ed insin, che incontri la tangente tirata per l' estremo di esso, è sempre uguale al semiasse maggiore. Ed a questo semiasse l' è anche uguale il detto ramo prodotto insino alla retta, che per lo centro si tiri parallela alla tangente.

DIM. Per la similitudine de' triangoli LFM, LCg * sta * *fig.* 23.
LF : LC :: FM : Cg.

Cioè ne' loro simboli $\frac{a^2}{x} - e : \frac{a^2}{x} :: a - \frac{ex}{a} : Cg = a$.
E sarà eziandio la M$d = a$, per essere un parallelogrammo la figura MdCg.

§. 167. SCOL. Se dal fuoco F dell' ellisse QRK * si tirino alla curva le due rette FR, FK, ed a' loro estremi le tangenti RT, KT; *la retta* ET, *che unisce il concorso di queste tangenti con quel fuoco, dovrà secare in parti uguali l' angolo* RFK *de' rami*. Poichè la retta KR fra' contatti dee convenire in uno stesso punto colle tangenti menate all' ellisse pe' termini della corda PFQ *: ed un tal punto dee allogarsi nella linea di sublimità AN *. Ma per la divisione armonica * della retta KN ne' punti O, R dee stare KO : OR :: KN : NR :: KA : RB :: KF : FR *. Dunque * l' angolo KFR sarà diviso dalla retta FT in parti uguali (1).

* *fig.* 24. * §. 127. * §. 151. * §. 122. * §. 158. * 3.El.VI.

---

(1) Questa verità geometrica; se vogliasi rintracciare per certe vie analitiche moderne, si dovrà tener conto di molte cose, e principalmente dell' equazioni alle tangenti dell' ellisse ne' punti R, K, di quelle de' rami FR, FK, dell' altra alla retta FT, che vi congiunge il fuoco F col concorso di quelle due tangenti, *etc.* Ed io m' immagino, che cotesto calcolo dovrebbe riuscire assai complesso, ed a' giovani molesto, come l' ho ravvisato in altre ricerche di questa anche più agevoli. Infatti, per addurne uno di cotesti esempii*, se: *Vogliasi rinvenire il luogo de' vertici de' triangoli, che abbiano la stessa base* AD, *ed una data somma degli angoli in sulla base*, colla Geometria Cartesiana si potrebbe in facil modo ottener l' intento. Imperocchè condotta dal vertice C di uno di questi triangoli la perpendico-

* *fig.* 11.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

fig. 25. §. 168. Dal fuoco F dell' ellisse ANG si abbassi la perpendicolare FT ad una qualunque tangente NQ di questa curva; vuol ritrovarsi il luogo dell' estremo T della detta perpendicolare.

* §. 43. SOLUZ. Al punto N, ove la retta NQ tocchi la data ellisse, si tiri la normale NR *; e poi si abbassino al semiasse AC le perpendicolari NM, TP da' punti N, T, e 'l detto semiasse convenga in Q colla tangente NQ. Inoltre si esprima-

---

lare CN sulla DA loro comun base, si ponga AD $= a$, AN $= x$, CN $= y$, e quindi ND $= a - x$. Saranno le tangenti degli angoli in A, D rispettivamente uguali ad $\frac{y}{x}$, ed $\frac{y}{a-x}$, e quella della loro somma dovrà pareggiare $\frac{ay}{ax - x^2 - y^2}$, come da' teoremi trigonometrici si deduce. E poichè questa tangente supponesi data, e può comodamente esprimersi per $\pm \frac{a}{b}$ (ove dee aver luogo il segno $+$, o il $-$, secondochè quella data somma sia minore, o maggiore di un retto) si avrà da un tal pareggiamento la sottoposta equazione

$$\frac{ay}{ax - a^2 - y^2} = \pm \frac{a}{b}$$

E dal riducimento di questa l' altra

$$(x - \frac{1}{2}a)^2 + (y \pm \frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

no per v, z le coordinate FP, PT del punto T. E posta la $CM = x$, sarà * la sunnormale $RM = \frac{c^2 x}{a^2}$, la rimanente $RC = \frac{e^2 x}{a^2}$, l' altra $CQ = \frac{a^2}{x}$ *, e la semiordinata MN $= \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$. E saran poi

* §. 44.

* §. 37.

$$RQ = CQ - CR = \frac{a^2}{x} - \frac{e^2 x}{a^2} = \frac{a^4 - e^2 x^2}{a^2 x}.$$

$$FQ = CQ - CF = \frac{a^2 - ex}{x},$$

ed
$$RQ : FQ :: a^2 + ex : a^2,$$
come delle loro espressioni si conosce. Ma i triangoli rettangolli RQN, FQT sono simili fra loro, ed agli altri due RNM, FPT. Dunque sarà RQ : FQ :: RN : FT :: RM : FP; cioè ne' loro simboli:

$$a^2 + ex : a^2 :: \frac{e^2 x}{a^2} : v.$$

E riducendo quest' analogia in equazione, per quindi determinarvi la grandezza x, sarà

$$x = \frac{a^2 v}{c^2 - ev} \quad \ldots\ldots\ldots \text{A}$$

---

ch' è al cerchio; e che io lascio a' giovani per confrontarla alle verità elementari. Intanto il cav. Nieuport, nell' Appendice ad una dottissima opera, che ha per epigrafe l'Equazioni a differenze parziali risolve in più pagine il detto problema, e con certe nuove maniere sì oscure, ed intralciate, che ogni geometra dimostratore, il quale s' imbatta a conoscerle, dovrà dire, che si possano comodamente coteste nuove vie ignorare.

Intanto per la similitudine de' triangoli MNR, PTF, sta

RM : MN :: PF : PT,

cioè

$$\frac{c^2 x}{a^2} : \frac{c}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} :: v : z.$$

Dunque formandone un' equazione da quest' altra analogia, per poi determinarvi la stessa x; si avrà

$$x = \frac{a^2 v}{\sqrt{(c^2 z^2 + a^2 v^2)}} \quad . \; . \; . \; . \; B$$

E saran quindi uguali i due valori della x esibiti nell' equazioni A, B; e con ciò i denominatori di essi fratti, che veggonsi avere il medesimo numeratore $a^2 v$. Cioè a dire sarà

$$c^2 - ev = \sqrt{(c^2 z^2 + a^2 v^2)}.$$

E dal maneggio di quest' ultima equazione si otterrà (1).

$$c^4 + e^2 v^2 - 2c^2 ev = c^2 z^2 + a^2 v^2$$

cioè

$$c^4 - c^2 v^2 - 2c^2 ev = c^2 z^2$$

ponendovi c^2 per $a^2 - e^2$. Sicchè dividendo l'equazione per c^2, e poi riducendola, si avrà finalmente $c^2 + e^2 = z^2 + (e+v)^2$. Cioè $a^2 = z^2 + (e+v)^2$. Dunque:

§. 169. TEOR. *La linea, che passa per gli estremi delle perpendicolari abbassate da un fuoco dell' ellisse sulle tangenti del suo perimetro, è la circonferenza del cerchio ad essa circoscritto.*

§. 170. SCOL. Le rette, che dipendono dalle coordinate di

---

(1) Dalla similitudine de' triangoli RNQ, FQT, e da quella degli altri due MNR, PTF produconsi le due equazioni A, B, dalle quali eliminata la x, ch'è straniera al problema, ottiensi la ricercata equazione. Cotesto euristico magistero, che altrove ho benanche impiegato *, doveasi a' giovani indicare: perchè essi potessero comprender bene queste cose, e poi saggiamente regolarsi in casi affini.

* §. 141.

una curva, quali sarebbero le corde, le tangenti, le normali, le sottangenti, le sunnormali, le incidenti al perimetro da un punto dato, e tante altre, che potrebbonsi da' geometri escogitare, non sono, che grandezze variabili al par delle dette coordinate. Ed elleno essendo funzioni dell' ascissa, si può sempre rinvenire un' equazione, che il rapporto di due di loro in convenevol modo esprima. Ma pure non vuolsi da ciò inferire, che qualcuna di siffatte equazioni debba stabilirvi la natura, o la classe della data curva: poichè queste due cose da quella sola equazione si hanno a ritrarre, che v' è tra le coordinate rettangolari. In fatti l' equazione all'ellisse, qual si propose nel problema 1. tra le dette coordinate, ascende al secondo grado, e vi caratterizza l' indole di tal curva. Ma l' equazione polare dell' ellisse * è lineare, e disadatta a tal fine: quella, che traesi tra l' ascissa e la normale di tal curva *, appartiensi ad un' altra ellisse: la presente locale è un cerchio: e chi può dire qual varietà di equazioni per queste diverse indagini s' incontra? E perciò, se all' ascissa di una curva pongasi per ordinata una delle rette quassù proposte, si verrà a formare una nuova locale, la cui natura giova talor d' intender distintamente. Così Vincenzo Viviani dell' Itala Geometria ornamento (1), nella sua *Divinazione su i luoghi solidi di Aristeo*

* §. 160.
* §. 157.

(1) Il sig. Montucla nella *pag.* 7. Vol. III. *Histoire des Mathem.* parlando di una tale opera del Viviani così conchiude » bisogna » convenire, che questa divinazione così voluminosa sarebbe l' ope- » ra di qualche pagina, qualor si tratti coll' analisi algebrica «. Ed io potrei soggiungere, se avrà corso cotesta critica, che quella divinazione sia un affare di pochi versi, o della sola equazione $z = f(x)$. Potrei alla medesima censura sottoporre lo Snellio, l' Halley, il Fer-

seniore speculò colla face della Geometria una moltitudine di queste locali nelle curve coniche. Ed io esorto i giovani ad incontrarlo coll' analisi Cartesiana; nel che fare lieve fatiga essi potran durarvi. Poichè chiamando z una delle rette quassù indicate, ed x l'ascissa, dovrà esser tal retta una funzione della x, ch' io dinoto per $f(x)$. E sarà quindi $z=f(x)$ la richiesta equazione alla locale, che ne' casi particolari dovrà distintamente esplorarsi.

---

mat, Roberto Simson, Marino Ghetaldo, l' Horsley, ed altri robusti geometri, che han proccurato di divinare le Opere perdute degli antichi. Potrei dire esser voluminoso il terzo libro degli Elementi di Euclide, bastando di esibir l' equazione al cèrchio, come quella, che contiene eminentemente tutte le proprietà di questa figura, che quivi vengono dimostrate con adeguatezza. Ma l' Opera del Viviani si troverà di giusta misura, quando si tenga conto del fine, e del modo, onde questo geometra emulo della sapienza greca dovè regolarne l' orditura.

CAPITOLO IV.

DELLA GENESI DELLE IPERBOLI, E DE' LORO DIAMETRI.

§. 171. DEF. XVIII. Una verga rigida sia circolarmente vertibile intorno ad un suo estremo, ed un filo flessibile men lungo di essa stia legato con un estremo nell' estremo mobile della verga, e coll' altro estremo in un dato punto del piano, ov' ella si aggiri; si dirà *Iperbole* la curva descrittavi da uno stiletto, che all' aggirarsi della verga si spinga d' accosto ad essa per mantenervi sempre teso il detto filo.

§. 172. DEF. XIX. E se il centro di rivoluzione di questa verga si trasporti all'estremo immobile del filo, e questo punto in quello si trasloghi, si potrà descrivere collo stesso meccanismo un'altra iperbole, che sarà identica, ed opposta alla prima curva. Ed esse soglion dirsi *Iperboli opposte* per quella inversione di meccanismo, onde son generate.

§. 173. DEF. XX. Que' due centri di rivoluzione, che ha la verga nel descriver sì l' una, che l' altra di queste due iperboli, si chiaman *fuochi di esse curve*. E si potrà dire *ramo*, o *inclinata* ogni retta, che da un punto di una di queste due curve ad un de' loro fuochi si conduce.

§ 174. Così * la verga *f*NO ben rigida, o sottile sia volubile intorno al punto *f* nel piano *f*NF: e'l filo flessibile FNO, la cui lunghezza sia minore della *f*NO, intendasi legato co' suoi estremi ne' due chiodetti O, F, l' uno fitto nell' estremo mobile della detta verga, e l' altro in un qualunque luogo di quel piano. Inoltre si volga la verga *f*MO con moto angolare intorno al punto *f*, avvicinandosi, o discostandosi dalla retta *f*F, * *fig.* 26.

e nello stesso tempo lo stiletto N spingasi d' accanto alla NO con vi mantener sempre teso il detto filo. La curva NA, che vi si descrive, si dirà *Iperbole*. E capovolgendo quella verga, sicchè il centro f di rivoluzione cada nel punto F, ove ne stava l'estremo immobile del filo, e questo poi si fermi nel luogo f; collo stesso meccanismo si potrà descrivere l'altra iperbole *an* opposta alla detta curva. Intanto i punti f, F si diranno fuochi delle due iperboli opposte AN, *an*; e la FN *un ramo*, o *inclinata*. Ed esse curve con un concetto geometrico si potranno esattamente, e nella loro interezza (1) esibire. Cioè *le due iperboli* AN, *a n sono i luoghi de' vertici di quegl' infiniti triangoli, ognuno de' quali ha la stessa base* Ff, *ed una data differenza de' suoi lati*.

§. 175. TEOR. *In ciascuna delle due iperboli opposte v' è un sistema di corde parallele, che son divise ad angoli retti, ed in parti uguali dalla congiungente de' fuochi di quelle curve*. Ed: *Ogni retta, che conducendosi per lo punto medio di questa congiungente si arresti tra le dette curve, dee restar divisa in parti uguali in quel punto*. Che con que' medesimi principj, e con quell' orditura, ch' io impiegai per l' ellisse ne' §§. 5, e 4, si possono queste due ve-

(1) Con quel moto organico non può descriversi, che una picciolissima parte di un' iperbole, e poi dell' opposta: e perciò vi ho supplito un concetto geometrico, che l' infinita ramificazione di quelle due curve comprendesse. Avrei potuto dalla sezione del cono retto le curve coniche analiticamente rilevare, lo che nella semplicità, e adeguatezza a tutte le altre di loro genesi prevale. Ma ho lasciato questo lavoro a' due insigni Geometri Kesner, e Biot, e mi sono attenuto al mio disegno.

rità comodamente dimostrare; per l'altra, che quaggiù propongo, ne abbisogna una distinta dimostrazione. Cioè

§. 176. Teor. *Ogni retta, che termina all' iperboli opposte, ed è parallela alla congiungente de' loro fuochi, vien divisa in parti uguali dalla perpendicolare elevata alla detta congiungente per lo punto medio di essa.*

Per ciò dimostrare, da' fuochi F, *f* delle due iperboli opposte AN, *an* si tirino i due rami FN, *fn*, che sieno uguali fra loro, e dalla stessa parte della retta F*f*. E, congiunta la N*n*, si abbassino da' punti N, *n* le perpendicolari NM, *nm* alla retta F*f*. Si potrà dimostrare, come nell' ellisse *, esser l' angolo NFM uguale all'altro *nfm*. Onde i due triangoli FMN, *fmn* avendo le condizioni della 26. *El. I.* avranno i lati NM, FM rispettivamente uguali agli altri due *nm*, *fm*. E sarà quindi la retta CM uguale all' altra C*m*, e la M*m* parallela alla N*n* *. Se dunque dal punto medio C della F*f* si elevi ad essa retta la perpendicolare CH, le due HN, H*n* saranno rispettivamente uguali alle CM, C*m*: onde quelle saranno tra se uguali al par di queste.

* §. 5.

* §. 35. El. II.

§. 177. Def. xxi. Una retta, che termini alle iperboli opposte, e che prolungata passerebbe pe' loro fuochi, si chiama *asse della figura*. Il *centro* n' è il punto medio dell' asse. E *per eccentricità* vi s' intende la distanza del detto centro da ciascun di que' due fuochi.

§. 178. Def. xxii. Se dal centro delle due iperboli opposte si elevi una perpendicolare all' asse, e di tal lunghezza, che sia media proporzionale tra la somma dell' eccentricità e del semiasse, e la loro differenza, ella si dirà *semiasse seconda-*

rio della figura (1). E l' aggregato di questo semiasse secondario, e di quell' altro, che vi si distende dall' altra parte del medesimo asse, si dovrà dire *asse secondario delle dette iperboli*. E per tal confronto quell' asse principale potrà chiamarsi *asse primario*, o semplicemente *asse*.

§. 179. DEF. XXIII. Due iperboli si dicono *conjugate fra loro*, se il semiasse principale di ciascuna di esse sia il secondario dell' altra.

§. 180. POST. Il semiasse principale di un' iperbole sarà costantemente disegnato per a, per c il suo secondario, e la grandezza e vi dovrà dinotare l' eccentricità della curva.

§. 181. COR. Ed essendosi detto nella definiz. XXII. essere $c^2 = e^2 - a^2$, sarà $e^2 = a^2 + c^2$, ed $e^2 - c^2 = a^2$.

§. 182. SCOL. Di quì si raccoglie, che le due iperboli opposte, e le due loro conjugate debbano avere uno stesso centro, eccentricità uguali, e la detta inversione de' loro assi. Che i due rami di ciascuna delle dette iperboli, e quelli della sua opposta procedano a parti contrarie, discostandosi all' infinito gli uni dagli altri. E che i rami delle due conjugate si accostino continuamente agli adjacenti rami delle primiere iperboli, senza poterli mai incontrare, come sarà dimostrato nel seguente Capo.

La sola ispezione della *fig.* 26. basterebbe a chiarir queste cose; ma va meglio aggiugnervi le seguenti riflessioni. Vi

---

(1) Coll' analogia, che ho proposta nella definizione XXII., ho dovuto ricavar nell' iperbole la lunghezza del semiasse secondario; il quale non vi si può determinare dall' incontro colla curva, come nell' ellisse ciò addiviene. *Vedi* §. 12.

sia un qualunque rombo $ABab$, e fuori di tal figura intendansi prolungate le semidiagonali CA, CB, Ca, Cb, sinchè ciascuna di esse ne diventi uguale ad un lato del detto rombo. I quattro punti F, F′, f, f' così determinati saranno i fuochi dell' iperboli opposte AN, an, e delle loro conjugate BN′, bn'. Le prime di esse avranno Aa per asse principale, e Bb per secondario: laddove per le conjugate la Bb farà da asse primario, e l'altra Aa da secondario. Di più i vertici degli angoli del rombo saranno i rispettivi vertici principali di quelle quattro curve. E le rette Rr, Ss, che conduconsi dal concorso delle diagonali a'punti medj de' lati, distinguono la ramificazione delle iperboli in quattro parti, che sembrano condizionate, come quelle dell' ellisse §. 91.

§. 183. SCOL. 11. Dalla teorica dell' ellisse, e ne'§§. 9, 11, 30, 32, 35 si dovran prendere le nozioni, che quì dovremo attaccare alle voci *ascissa*, *ordinata*, *semiordinata*, *tangente*, *sottangente*, *normale*, e *sunnormale*. Non per tanto è ben l' avvertire, che nelle iperboli le ascisse non sieno segmenti di ciascun semiasse computati dal centro, com' erano quelle dell' ellisse; ma elleno sono indefinite produzioni dell' un semiasse, e dell' altro: la qual cosa si vedrà chiaramente nel problema, che ora prendo a risolvere.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

§. 184. Dalla proposta genesi dell' iperbole AN* ritrarne l'equazione fra le coordinate rettangolari CM, MN di essa curva.

* fig. 26.

SOLUZ. Pongasi, come si è indicato quì sopra, il semiasse principale AC $= a$, il suo secondario CB $= c$, l' eccentricità CF $= e$, l' ascissa CM dal centro uguale ad x, e la sua semiordinata MN $= y$: sarà la retta MF $= e - x$, e l' altra $Mf = e + x$. E sarà quindi il ramo FN $= \sqrt{(y^2 + (e - x)^2)}$,
* §. 173. e l' altro $fN = \sqrt{(y^2 + (e + x)^2)}$. E poichè * per la genesi di tal curva dee essere la differenza de' detti rami uguale all' asse principale, cioè $fN - FN$ uguale a 2AC, sarà ne' loro simboli

$$\sqrt{(y^2 + (e + x)^2)} - \sqrt{(y^2 + (e - x)^2)} = 2a.$$

E perciò liberando quest' equazione da' radicali, e poi ponendo nel risultamento c^2 in luogo di $e^2 - a^2$, si avrà per la data curva la seguente equazione

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - c^2 \ldots \text{A}$$

ovvero
$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 - a^2).$$

Che potrem tradurla in geometrico linguaggio nel seguente modo.

§. 185. TEOR. *Nell' iperbole il quadrato di una qualunque semiordinata all' asse sta alla differenza del quadrato del semiasse da quello dell' ascissa, in duplicata ragione dell' asse secondario al primario.*

§. 186. COR. 1. Ad una ascissa minore del semiasse dee corrispondere una semiordinata impossibile, o assurda. Imperocchè l' espressione $\pm \frac{c}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$ diventa immaginaria al farsi la $x < a$. E se suppongasi la $x = a$, quella semiordinata sarà zero. E finalmente supponendovi la x infinita, tale sarà benanche la semiordinata corrispondente. E perciò *i rami* *di ciascuna di queste due iperboli distendonsi all' infinito, ed all' infinito divergon dall' asse.*

§. 187. Cor. II. Per poco, che si rifletta sull' iperbole *an* opposta alla primiera AN, si vedrà doverle appartenere la medesima (1) equazione A. Ed esprimendo per x, y le coordinate rettangolari CM′, M′N′ dell' iperbole conjugata BN′, si vedrà colla luce di questa soluzione, e per la definizione XXIII, che l' iperbole BN′, e la sua opposta $b'n'$ abbiano ad avere la seguente equazione

$$y^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 - c^2) \; . \; . \; . \; . \; . \quad B$$

§. 188. Cor. III. Si compia il parallelogrammo CMNH dalle due coordinate CM, MN della data iperbole AN, e si ponga CH $= x$, ed NH $= y$; si dovran permutare nell' equazione A queste due variabili, per avere l' equazione fra le coordinate dell' iperbole esterna CANH. Ma da quel permutamento ottiensi $x^2 = \frac{c^2}{a^2}y^2 - a^2$. Dunque quell' iperbole esterna avrà la sottoposta equazione, che dal riducimento di que' termini discende,

$$y^2 = \frac{a^2x^2}{c^2} + a^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 + c^2) . \; . \; . \quad C$$

§. 189. Cor. IV. E ciò vuol dire, *che il quadrato di una qualunque semiordinata dell' iperbole esterna stia alla somma de' quadrati dell' ascissa dal centro, e del semias-*

---

(1) Le ascisse nell' iperbole opposta sono $-x$, il cui quadrato è anche x^2; onde collo stesso metodo ottiensi la medesima equazione A.

se secondario, in duplicata ragione dell' asse primario al secondario.

§. 190. COR. V. Se permuteremo le variabili dell' equazione B, avrassi l' equazione all' iperbole esterna CBN'M, ch' è

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2}(x^2 + a^2) \ldots . \text{D}$$

cioè
$$y = \pm \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 + x^2)}.$$

Ed essendo l' equazione A ben diversa da quest' altra D, l' iperbole conjugata non avrà la medesima natura della sua principale. E dall' espressioni delle semiordinate, che ad una medesima ascissa corrispondono nell' una iperbole e nell'altra, si comprenderà che questi rami non si possano giammai incontrare (1).

§. 191. COR. VI. Si unisca il centro C dell' iperbole AN coll' estremo N della semiordinata NM. Sarà $CN^2 = MN^2 + CM^2$, cioè ne' valori di queste grandezze dovrà esser

$$CN^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2 + x^2 = \frac{c^2 + a^2}{a^2}x^2 - c^2 = \frac{e^2x^2}{a^2}c^2 - c^2$$

ponendovi e^2 per $c^2 + a^2$.

* *fig.* 27. §. 192. SCOL. I. Si descriva il cerchio AGB*, che abbia per centro il medesimo centro dell'iperbole AM, e per interval-

---

(1) Gli antichi geometri nel veder distaccati fra loro i rami dell' iperbole AN, e que' dell' altra *an*, credettero distinte queste due curve, e chiamaronle *iperboli opposte*. Ma i moderni le comprendon tutte e due sotto il nome d' iperbole, per l' identica *irreducibile* equazione, che appartiensi a que' rami. Ed io son d' avviso, che l' una, e l' altra nomenclatura si possa lodevolmente usare. Ma le due iperboli conjugate, che non hanno alcun geometrico, o analitico nesso con quelle due iperboli, non vi formano una sola curva, come dicono gli analisti, ma un sistema di due curve,

lo il semiasse principale AC di questa curva (il qual cerchio suol dirsi iscritto nelle iperboli opposte): e poi da un qualunque punto D dell'asse prolungato gli si conduca la tangente DF. Inoltre nel raggio CF, che passa per lo contatto, si prenda la CP uguale al semiasse secondario di tal curva, e per lo punto P si tiri la PL parallela all'anzidetta tangente. Sarà la retta PL uguale alla DE semiordinata corrispondente all'ascissa CD. Imperocchè, posta la CD $= x$, sarà, per lo triangolo rettangolo CFD, la DF $= \sqrt{(DC^2 - CF^2)} = \sqrt{(x^2 - a^2)}$. Ma pe' triangoli simili CFD, CPL sta CF : CP :: FD : PL, cioè $a : c$ $:: \sqrt{(x^2 - a^2)} :$ PL. Dunque sarà PL $= \frac{c}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} =$ DE*. * §. 184.

E perciò conducendo dal punto D la DE perpendicolare alla CD, ed uguale alla PL, il punto E dovrà esser nell'iperbole NAE, che tiene a per semiasse principale, e c per secondario. Ed in tal modo potrà descriversi questa curva per assegnazione di punti.

§. 193. Scol. ii. Se nell'equazione all'ellisse* si cangino i segni de' termini del secondo membro, si avrà l'equazione all'iperbole. Onde le proprietà nell'una curva si potranno facilmente trasferir nell'altra: e per tal ragione esse diconsi tra loro affini, come l'avverte l'Eulero. Ma cotesta affinità, che serba la nostra iperbole all'ellisse, l'è stata di nocumento: poichè i geometri moderni con tal pretesto l'han considerata assai meno, di quel, che le si dovea, e per la dignità de' suoi rami, e per l'utile, che sarebbene a' giovani ridondato. * §. 16.

PROPOSIZIONE XXVI.

PROBLEMA.

* fig. 27.

§. 194. Dal dato punto R* nell' asse della data iperbole AE, condurre una tangente a questa curva.

SOLUZ. La retta RE suppongasi esser la tangente addimandata, e la DE la semiordinata per lo contatto, la quale si chiami y. Ed oltre a ciò si ponga la sottangente RD $= v$, la distanza del punto R dal centro C di tale iperbole, cioè la CR $= b$, e la tangente trigonometrica dell' angolo DRE, che qui è una grandezza ignota, uguale a t. Sarà l' ascissa CD $= b + v$, e la semiordinata DE $= y = tv$. Ciò premesso, si elimini la y dalle due equazioni

$$y = tv,\ y^2 = \frac{c^2}{a^2}(b + v)^2 - c^2,$$

la prima delle quali appartiensi alla tangente RE, e l' altra alla data iperbole AN: e poi l' emergente equazione si ordini rispetto ad v; sarà

$$v^2 - \frac{2bc^2v}{t^2a^2 - c^2} + \frac{a^2c^2 - b^2c^2}{t^2a^2 - c^2} = o. \ldots H$$

E co' metodi, ch' io proposi per l' ellisse ne' §§. 35, 37, 39, si troverà esser la sottangente $v = \left(\frac{a^2 - b^2}{b}\right)$, l' ascissa CD $= \frac{a^2}{b}$, e la tangente $t = \frac{c}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$.

§. 195. TEOR. *Nell' iperbole l' ascissa dal centro, la quale corrisponde alla ordinata per lo contatto, il semias-*

se principale, e la detta ascissa diminuita della sottangente, sono sempre continuamente proporzionali.

§. 196. Cor. I. E perciò, se al dato punto E dell' iperbole NAE vogliasi condurre la tangente, dovrà prendersi la CR terza proporzionale in ordine all' ascissa CD, che corrisponde all' ordinata per lo punto E, ed al semiasse AC, e poi congiugnersi la RE; che sarà la tangente addimandata.

§. 197. Cor. II. Si supponga esser la $b = o$; sarà la sottangente RD $= \frac{b^2 - a^2}{b} = \frac{a^2}{0} = \infty$. Dunque in niun punto dell'iperbole può condursi una tangente, che ne pervenga al centro, o che il sormonti. Nè v' ha tangente, che possa costituir coll' asse un angolo minore di quello, che vi tien per tangente trigonometrica il fratto $\frac{c}{a}$, cioè il semiasse secondario diviso per lo primario.

§. 198. Cor. III. E quì potrà concludersi, come nel §. 39. dell'ellisse, che stia *tang*. ECD : *cot*. ERD :: $c^2 : a^2$. Del che altrove.

PROPOSIZIONE XXVII.

PROBLEMA.

§. 199. Date di posizione la retta HR *, e'l semiasse AC della data iperbole AQN, si vuol determinare, se questa curva, e quella retta abbiansi ad incontrare; ed in quali punti. * *fig.* 28.

SOLUZ. Se la retta HR sia parallela al semiasse AC di quella data iperbole, s' intenderà per la prop. XXV. quali sieno le intersezioni di quella retta, e delle iperboli opposte. Ma supponendo, che la retta HR incontri nel punto R il semiasse AC, si chiami b la CR, distanza di questo punto dal centro C dell'iperbole AN, e t la tangente trigonometrica dell' angolo HRM, ch' è quello, onde le date rette HR, AC inclinansi fra loro. E poi dal punto N, che sia uno degl' incontri addimandati, si ordini all' asse la NM, che si dica y, e per v si dinoti la RM. Si troverà colla medesima orditura del precedente problema la seguente equazione

$$v^2 - \frac{2bc^2v}{t^2a^2-c^2} + \frac{a^2c^2-b^2c^2}{t^2a^2-c^2} = o \quad . \; . \; . \; . \; \mathrm{F}$$

Dico *potersi conoscere da questa equazione i varj sintomi del richiesto incontro*; de' quali i più rimarchevoli saran quaggiù proposti in forma di teoremi (1).

§. 200. TEOR. *La retta* HR *non può in alcun punto incontrare l' iperbole* AQN, *o la sua opposta, quando* t *sia maggiore del fratto* $\frac{c}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Imperocchè, se la t fosse uguale al proposto fratto, la retta HR, come dianzi

* §. 194. l' ho dimostrato *, dovrebb' essere tangente della sottoposta iperbole. Dunque nel caso che la t sia maggiore dell' indicato fratto, la retta HR dovrà cadere al di sopra della tangente condotta all' iperbole AQN dal punto R; ed ella non potrà incontrare questa curva, e nè tampoco l' iperbole opposta: ma la stessa verità ricavasi dal calcolo in facil modo. L' equa-

(1) Per la chiara intelligenza di queste cose potrà leggersi quel, che ho dimostrato per l' ellisse nel §. 24.

zione F, ch' è di secondo grado, dee aver le sue radici immaginarie, quando vi sia $\frac{b^2c^4}{(t^2a^2-c^2)^2} < \frac{a^2c^2-b^2c^2}{t^2a^2-c^2}$: cioè, moltiplicando per $(t^2a^2-c^2)^2$ questi fratti, e poi dividendoli per c^2, quando vi si ritrovi $b^2c^2 < (t^2a^2-c^2)(a^2-b^2)$; o, fatta la riduzione de' termini, quando sia t maggiore del proposto fratto.

§. 201. TEOR. *Che se la grandezza t ritrovisi minore del fratto $\frac{c}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, ed insiem maggiore dell' altro $\frac{c}{a}$ la retta* HR *dovrà segare in due punti l' iperbole* AQN, *senza poter mai giugnere all' opposta*.

Infatti supponendo esser $t > \frac{c}{a}$, e quindi $t^2a^2 > c^2$, sarà positivo il denominatore dell' ultimo termine dell' equazione F. Ma è anche positivo il numeratore. Dunque sarà positivo quell' ultimo termine: ed in essa equazione vi saran due permute di segni, e quindi due radici vere. Onde le due intersezioni della retta HR, e dell' iperbole dovranno ritrovarsi nel solo ramo curvilineo AQN.

§. 202. COR. Se ad una tangente dell' iperbole conducasi una parallela da un punto preso nella parte esterna della sottangente; dovrà emergerne una corda nella medesima iperbole parallela alla divisata tangente. E lo stesso potrebbe inferirsi, se quel punto stia nella produzione del semiasse. E perciò *data una tangente dell' iperbole può sempre assegnarlesi un sistema di corde parallele*. Lo che giova per intender con distinzione la teorica de' diametri di queste curve.

§. 203. TEOR. *E se la t si ritrovi minore di ciascun de' due fratti* $\frac{c}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$, e $\frac{c}{a}$; *la retta* HR *dovrà in un sol punto segar l' iperbole* AQN , *ed in un altro l' iperbole opposta* .

Imperocchè in questo caso sarebbe negativo il binomio $t^2a^2 - c^2$, e quindi anche tale l' ultimo termine dell' equazione F : la quale per tal ragione avrà una permuta , ed una successione di segni . Onde una delle sue radici sarà vera , e l' altra falsa . E la nostra tesi sarà vera .

§. 204. TEOR. *Che se supporremo la* $t = \frac{c}{a}$, *la retta* HR *dovrà in un sol punto incontrare l' iperbole* AQN.

Infatti moltiplicando l' equazione F per lo binomio $t^2a^2 - c^2$, che in tal caso è uguale a zero , dee svanire il primo termine della equazione F ; che perciò deprimesi al primo grado , e ne offre $v = \frac{a^2-b^2}{2b}$.

§. 205. SCOL. E supponendo la $t = \frac{c}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$ si troverà , fatte le riduzioni de' termini , che l' equazione F abbia due radici uguali . Ed in tal caso la retta HR sarebbe tangente dell' iperbole , come nella prop. prec. si è dimostrato . Intanto per poter ravvisare colla luce della Geometria i varj sintomi di co-
* *fig.* 28. test' incontri* , si elevi al semiasse CA , e dal suo estremo A la perpendicolare AT uguale al semiasse secondario , e congiunta la CT si meni per lo punto R la RO parallela alla CT ; e per lo stesso punto R, e dalla medesima parte della RA, si tiri la tangente RQ alla detta iperbole . L' angolo QRO potrà guidarci nella conoscenza di que' casi. Cioè 1.°: Se la detta retta

RH stia al di sopra della tangente RQ, ella non potrà incontrare l'iperbole AN, e nè tampoco quella, che l'è opposta. 2.° La RH, se combaci colla RQ, sarà tangente dell' iperbole AN, ma senza mai incontrar l'opposta. 3.° S' ella cada dentro all'angolo QRO, dovrà segare l'iperbole AN in due punti, e non potrà incontrare l'opposta. 4.° Se la RH combaci coll'altro lato RO del detto angolo, ella dovrà in un punto solo segare la sola iperbole AN. 5.° E la medesima RH dovrà in un punto segar l'iperbole AN, ed in un altro l'opposta curva, quando ella cada entro l'angolo ARO. E così per l'altra parte potrebbesi convenevolmente ragionare.

§. 206. Teor. *Una retta, che si conduce per lo centro delle iperboli opposte, non può mai incontrare queste due curve, se la tangente dell'angolo, ond'ella s'inclini all'asse, non sia minore del quoziente dell'asse secondario per lo primario.*

Allorchè la retta CN si conduce per lo centro C delle dette iperboli, dee farsi $b = o$, e l'equazione F si acquista la seguente binomia forma $v^2 + \dfrac{a^2 c^2}{t^2 a^2 - c^2} = o$

cioè $$v = \frac{\pm ac}{\sqrt{(c^2 - t^2 a^2)}} \;\ldots\; G$$

Ma supponendo $t = \dfrac{c}{a}$, e quindi $t^2 a^2 = c^2$, la frazione G diviene $\pm \dfrac{ac}{o} = \infty$. E supponendo $t > \dfrac{c}{a}$, e con ciò $t^2 a^2 > c^2$ la medesima frazione diventa immaginaria. Dunque necessariamente dee esser $t < \dfrac{a}{c}$, per potere succeder l'incontro di quella retta con le iperboli opposte.

§. 207. Teor. *E chiamando m il seno del detto an-*

golo, ed n il coseno, sarà il valore di questa incidente su quelle due iperboli opposte uguale a $\frac{\pm ac}{\sqrt{(n^2c^2 - m^2a^2)}}$, *nel caso che sia* $t < \frac{c}{a}$.

E quando sia $t > \frac{c}{a}$, *l'incidente apparterrà alle due iperboli conjugate, e la sua lunghezza sarà* $\frac{\pm ac}{\sqrt{(m^2a^2 - n^2c^2)}}$; *dovendosi permutare i segni de' termini del primiero denominatore.*

Ponendo nell' equazione G il fratto $\frac{m}{n}$ in luogo della t, si avrà la $CM = v = \frac{nac}{\sqrt{(n^2c^2 - m^2a^2)}}$. Ma nel triangolo CNM sta $cos.C : 1 :: CM : CN$. Dunque sarà

$$CN = \frac{ac}{\sqrt{(n^2c^2 - m^2a^2)}}, \text{ e } Cn = \frac{cn}{\sqrt{(n^2c^2 - m^2a^2)}}.$$

E ciò nel caso, che sia t, o $\frac{m}{n} < \frac{c}{a}$.

Ma supponendo il primo di questi due fratti maggior dell' altro, è immaginaria l' espressione $\frac{\pm ac}{\sqrt{(n^2c^2 - m^2a^2)}}$; e l' altra $\frac{\pm ac}{\sqrt{(m^2a^2 - n^2c^2)}}$ divien reale, come l' è noto. E da quel, che ho detto nella part. 1., quest' ultimo fratto dinota l' incidente nelle iperboli conjugate: poichè in queste curve si permutano i due semiassi *; e 'l seno cangiasi in coseno, e questo in quello si converte (1), come l' è ben chia-

* §. 179.

* *fig.* 26.

(1) Sia BC * il semiasse secondario di CA, e la CN in mezzo

ro per la Geometria. Dunque sarà vero quel, che ho proposto in quest' ultimo teorema.

PROPOSIZIONE XXVIII.

PROBLEMA.

§. 208. Dal dato punto K*, il quale stia fuori dell' asse della data iperbole AN, condurle una tangente. *fig. 27.

SOLUZ. Sia KE la tangente richiesta, ed ED la semiordinata per lo contatto. Le CQ, QK, che si chiamano b, h, sieno le coordinate del punto K riferito all' asse della data iperbole. Si dica v la CR differenza della sottangente RD dall' ascissa CD; sarà RQ $= v - b$, l' ascissa CD $= \frac{a^2}{v^2}$ la sottangente RD $= \frac{a^2 - v^2}{v}$, e la semiordinata ED $= \frac{c}{v} \sqrt{(a^2 - v^2)}$. E sarà quindi RD : DE :: $\sqrt{(a^2 - v^2)} : c$. Ma pe' triangoli simili RDE, RQK la ragione di RD a DE dee pareggiare quella di RQ a QK. Dunque sarà

$$\sqrt{(a^2 - v^2)} : c :: v - b : h \quad . \; . \; . \; . \; . \quad A$$

E riducendo siffatta analogia in equazione, e questa poi ordinando rispetto ad v, si avrà la seguente equazione

$$v^2 - \frac{2c^2bv}{c^2 + h^2} + \frac{c^2b^2 - a^2h^2}{c^2 + h^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad B$$

---

ad essi; il seno e 'l coseno dall' angolo ACN, saranno gli stessi che il coseno, e 'l seno dell' altro BCN.

*

le cui radici saranno soddisfacenti al quesito. Intanto prima di costruire l'equazione B, e di divisarne i diversi casi, io dovrò dimostrare non potervi aver luogo il caso impossibile, quando quel dato punto si ritrovi fuori della data iperbole, e della sua opposta.

Imperocchè per questo caso dovrebb' essere

$$\frac{c^4 b^2}{(c^2+h^2)^2} < \frac{c^2b^2 - a^2h^2}{c^2+h^2}, \text{ cioè } c^4b^2 < (c^4+h^2)(c^2b^2 - a^2h^2).$$

O, spingendo il calcolo più oltre in convenevol modo, dovrebb' essere $b^2 > a^2 + \frac{a^2h^2}{c^2}$. Cioè a dire l' estremo dell' ascissa del punto K avrebbe a stare entro la curva. Ma da quel rapporto di maggioranza si rileva essere $h^2 < \frac{c^2b^2}{a^2} - c^2$, e

* §. 184. questo binomio è uguale * al quadrato della semiordinata corrispondente all' ascissa b. Dunque l' estremo della retta h, cioè il punto K dovrebbe cadere dentro la data iperbole. E co' medesimi principj si può dimostrare, che per verificarsi quel caso impossibile; un tal punto potrebbe anche star entro l'iperbole opposta.

COSTR. All' estremo A del semiasse AC si elevi la perpendicolare AT uguale al semiasse secondario, e preso in quel semiasse la retta AO uguale alla QK, si unisca la retta TO. Inoltre dal punto Q si meni la QG parallela alla congiunta OT, ed ella ne incontri ne' punti G, g il cerchio AGB iscritto nelle iperboli opposte. Finalmente da' detti punti si calino sull' asse AB le perpendicolari GR, gr. Dico essere i punti R, r soddisfacenti al problema: sicchè unendoli col dato punto K, le congiungenti vi riescan tangenti alle iperboli. Imperocchè per la similitudine de' triangoli QRG, OAT sta GR:

RQ :: TA : AO , cioè ne' loro simboli $\sqrt{(a^2 - v^2)} : v - b :: c : h$. Dunque, riducendo quest' analogia in equazione, sarà $h^2 (a^2 - v^2) = c^2 (v^2 - 2bv + b^2)$. Che se il punto r cada sul centro, sarà $Cr = - v$, e quindi $Qr = QC + Cr = b - v$. E pe' triangoli simili Qrg, OAT essendo $gr : rQ ::$ AT : AO , cioè $\sqrt{(a^2 - v^2)} : b - v :: c : h$, anche di quì si avrebbe la stessa equaz. $h^2 (a^2 - v^2) = c^2 (v^2 - 2bv + b^2)$.

§. 209. COR. I. L' analogia dinanzi esposta mi ha guidato in quella geometrica costruzione, che parmi assai precisa, e chiara : onde da essa potrei svolgere i casi del problema, se mi fosse permesso di girne per le sintetiche vie spaziando.

§. 210. COR. II. Ma dovendo conoscer que' casi per mezzo dell' equazione B, io suppongo $\frac{h}{b} < \frac{c}{a}$, e quindi $a^2h^2 < c^2b^2$. In tal supposizione sarà positivo il terzo termine dell' anzidetta equazione, di cui n' è negativo il secondo : e vi saran due permute di segni, e quindi le due radici vere. Sicchè i due punti R, r restando al disotto del centro, le due tangenti, che passano per K, dovran cadere sulla sola iperbole AE *. * §. 197.

§. 211. COR. III. E supponendo $\frac{h}{b} > \frac{c}{a}$, si dimostrerà collo stesso filo di ragioni, che una tangente dal punto K potrà condursi alla detta iperbole, ed un' altra all' opposta. Che se mai il primo di questi due fratti si ritrovi uguale all' altro, e con ciò $a^2h^2 = c^2b^2$, dovrà svanire il terzo termine dell' equazione B ; la quale deprimendosi al primo grado ne mostrerà potersi una sola tangente, ed alla sola iperbole AE, condurre da quel dato punto.

§. 212. SCOL. Dall' estremo A del semiasse principale AC * *fig. 28.
si elevi la perpendicolare AT uguale al semiasse secondario : ed

ella si protragga in t, sicchè diventi uguale ad AT, e poi si uniscano le rette CT, Ct. L'angolo TCt, che fu considerato
* § 182. nella genesi dell'iperbole*, e che qui appresso chiameremo *angolo assintotico*, si potrà in questa occasione nominare *angolo regolatore*. E le precedenti analitiche ricerche potran convertirsi nel seguente teorema di Geometria. Cioè

§. 213. TEOR. *Se quel dato punto stia entro quest'angolo regolatore, e fuori di quell'iperbole, che il sottende; di là potran condursi due tangenti ad essa curva. Ed una sola tangente potrà condurlesi, quando quel punto si ritrovi in un lato dell'indicato angolo. Ma se il detto punto stia fuori dell'angolo regolatore, e del suo opposto, una sola tangente potrà tirarsi da esso punto all'anzidetta iperbole, ed un'altra all'opposta.*

PROPOSIZIONE XXIX.

TEOREMA.

* fig. 27. §. 214. Nell'iperbole NAE* la sunnormale VD sta all'ascissa CD, che le corrisponde, in duplicata ragione dell'asse secondario al principale.

DIM. Si ponga il semiasse principale AC $= a$, e l'ascis-
* §. 195. sa CD $= x$. Sarà * la CR $= \frac{aa}{x}$, e la sottangente RD $=$

CD — CR $= x^2 - \frac{a^2}{x} = \left(\frac{x^2 - a^2}{x}\right)$, E dovendo essere le
* 8. El. VI. tre rette RD, DE, DV * continuamente proporzionali, saran

tali le loro espressioni * . $\frac{x^2 - a^2}{x}$, $\frac{c}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$, VD. Onde * §. 184.

dovrà risultare la VD $= \frac{c^2}{a^2} x$.

§. 215. Cor. 1. Il quadrato della normale EV, ch' è uguale al quadrato della sunnormale VD con quello della semiordinata ED, dovrà uguagliare il seguente trinomio

$$\frac{c^4}{a^4} x^2 + \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{c^2 + a^2}{a^2} \cdot x^2 - a^2 \right).$$

E ponendovi e^2 per $c^2 + a^2$, sarà

$$EV^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(\frac{e^2 x^2}{a^2} - a^2 \right).$$

§. 216. Cor. II. E quì potrà dimostrarsi, come nell'ellisse, esser *tang.* ECD : *cot.* ERD :: $c^2 : a^2$. * §. 48.

§. 217. Scol. In questa ricerca, come fu praticato nell'ellisse * potrà anche il metodo Cartesiano impiegarsi, che del valor della sottangente non si vale in alcun modo. * §. 45.

PROPOSIZIONE XXX.

PROBLEMA.

§. 218. Data l'iperbole AMm*, ed in essa un sistema di corde parallele; ritrovar la linea, che passa pe' loro punti medj. *fig. 29.

Soluz. La retta Mm sia una di queste corde, ed O il punto medio di essa. Dal punto O, e da' punti estremi M, m della detta corda si abbasino le perpendicolari OR, MR, mn sul semiasse AC della data iperbole. E poi si pongano uguali ad v, z le coordinate CR, RO del punto O riferito all'asse RC. Inoltre sia la CN $= \omega$, e l'angolo VMO $= \varphi$, di cui le grandezze m, n, h dinotino il seno, il coseno, e la tangente rispettivamente. Sarà NR $=$ MV $= \nu - \omega$, VO $= h(\nu - \omega)$, MN $=$ RO $-$ VO $= z + h(\omega - \nu)$. E dovendo essere per la natura della data iperbole $MN^2 = \frac{c^2}{a^2}CN^2 - c^2$, si avrà ne' simboli delle MN, CN un'equazione, che ordinata rispetto ad ω diviene

$$\omega^2 + \frac{2ha^2(z - h\nu)\omega}{h^2a^2 - c^2} = \frac{-a^2c^2}{h^2a^2 - c^2} - \frac{a^2(z - h\nu)^2}{h^2a^2 - c^2} \quad \ldots \text{A}$$

E vi dovrà essere, per quel, che si è detto nella prop. VI.,

$\frac{ha^2(h\nu - z)}{h^2a^2 - c^2} = \nu$, cioè $ha^2z = c^2\nu$, fattevi le debite riduzioni. E finalmente sarà $z = \frac{nc^2\nu}{ma^2}$, e $\frac{z}{\nu} : \frac{n}{m} :: c^2 : a^2$. Cioè

§. 219. TEOR. *Nell'iperbole la linea, che passa pe' punti medj delle corde parallele, l'è una retta convergente al centro della figura, ed inclinata all' asse per un angolo, la cui tangente trigonometrica sta alla cotangente di quell' altro angolo, onde ciascuna delle dette corde inclinasi al medesimo asse, in duplicata ragione dell' asse secondario al primario.*

CONSEGUENZE, CHE TRAGGONSI DALL' ADDOTTA PROPOSIZIONE.

§. 220. I. Se la corda Mm intendasi fluire con moto a se parallelo verso l'arco, che ne sottende; ella gli diverrà tangente, quando le intersezioni con quell' arco raccolgansi in un sol punto. E perciò ciascuna delle anzidette corde dovrà esser parallela alle tangenti, che conduconsi alle iperboli opposte per que' due punti, che l'indicata locale dee segnarvi.

§. 221. II. DEF. XXIV. Ogni retta, che termini alle iperboli opposte, passandovi pel centro, è un *diametro della figura*; e gli estremi di quella si dicono *vertici di questa*. Le *ordinate del diametro* son quelle corde dell' una, e dell' altra iperbole, che vi sono parallele alle tangenti menate a queste curve per gli estremi del diametro. E l' *ascissa*, che corrisponde a ciascuna delle dette ordinate, è la distanza, che tien dal centro il punto medio di essa corda. Finalmente ogni semiordinata, e la sua ascissa diconsi *coordinate*.

§. 222. III. Il centro dell' iperbole, i punti medj delle corde, che vi son parallele, ed i vertici di quel diametro, cui quelle sono applicate, giaccion tutti per diritto. Dunque una retta, che unisca due di questi punti, dovrà passare pe' rimanenti. E da ciò potrà conoscersi il centro di un' iperbole, quando niuno de' suoi diametri ne appaja.

§. 223. IV. In questa figura vi deggion essere infiniti diametri disuguali fra loro. Il minimo di essi è l' asse principale. Quei che gli son più d' accosto, sono minori de' più rimoti. E due diametri, che inclinansi all' asse ugualmente, sono tra se uguali.

§. 224. V. *Se dal centro* C* *dell' iperbole* AMF *si tiri* *la retta* CL *parallela alla* FP *tangente di essa curva; quella parallela dovrà cadere sull' altra iperbole* DL, *ch' è conjugata all' anzidetta iperbole.* * fig. 29.

Imperocchè la curva AFm è al di sotto della sua tangente PFp*, e molto più della retta CL, che ho supposto esser parallela alla detta tangente, e starne al di sopra. E perciò compito il parallelogrammo ACDG dal semiasse principale AC, e dal suo semidiametro CD, vi si conduca la diagonale CG. * §. 30.

* §. 197. Sarà* l' angolo ACG minore di APF, o del suo uguale ACL. Onde dovrà essere l' angolo DCL minore di DCG, e la retta
* §. 207. CL dovrà cadere in sull'iperbole DL conjugata dell'altra AMF*.

§. 225. VI. Inoltre pel teorema precedente sta *tang*.FCA a *cot*.FPA, o a *tang*.LCD, come c^2 ad a^2. E conducendo nel punto L dell' altra iperbole DL la LQ tangente a questa curva, sarà pel medesimo teorema, *tang*.LCD a *cot*.LQD, come a^2 a c^2, cioè *cot*.LQD : *tang*.LCD :: c^2 : a^2. Dunque
* 11. El. V. dovrà essere *tang*.FCA : *tang*.LCD :: *cot*.LQD : *tang*.LCD*; cioè *tang*. FCA sarà uguale a *cot*. LQD; e quindi la retta CF dovrà esser parallela alla tangente LQ. E ciò vuol dire, che : *Conducendo nell' iperbole principale un qualunque semidiametro, si può sempre esibirne un altro nella conjugata, talchè ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro.*

§. 226. VII. DEF. XXV. Due diametri dell' iperbole si dicono *conjugati*, se ciascuno di essi sia parallelo alle ordinate dell' altro. E 'l *parametro* di un diametro è la terza proporziona-
* §. 78. le in ordine ad esso diametro ed al suo conjugato*.

§. 227. VIII. Si chiamino α, γ due semidiametri conjugati di un' iperbole, θ, φ sieno gli angoli, ond' essi rispettivamente inclinansi all' asse, e p, q esprimano il seno e 'l coseno del primo de' detti angoli, ed m, n sieno quei dell' altro.
* §. 207. Sarà*

$$\alpha^2 = \frac{a^2c^2}{q^2c^2 - p^2a^2}, \quad \gamma^2 = \frac{a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2}, \text{ e } \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{q^2c^2 - p^2a^2}{m^2a^2 - n^2c^2}.$$

§. 228. IX. Cioè : *Il numeratore del fratto, ch' esprime il quadrato di un semidiametro dell' iperbole principale, è il prodotto de' quadrati del semiasse primario, e del secondario. E 'l denominatore vi contiene il quadrato del semidiametro secondario meno quello del primario ; ma il pri-*

mo di questi due termini deesi moltiplicare per lo quadrato del coseno, e l' altro per quello del seno dell' angolo, onde il detto semidiametro inclinasi all' asse.

§. 229. X. Ed essendo pel teorema, che dianzi ho proposto nel §. 219, $\frac{p}{q} : \frac{n}{m} :: c^2 : a^2$, sarà $pm = \frac{c^2}{a^2} nq$. E si potrà dimostrare, come nel §. 59, essere

$$p = \frac{nc^2}{\sqrt{(m^2a^4 + n^2c^4)}}, \quad q = \frac{ma^2}{\sqrt{(m^2a^4 + n^2c^4)}}$$

e $$\text{sen.}\,(\varphi - \theta) = mq - np = \frac{m^2a^2 - n^2c^2}{\sqrt{(m^2a^4 + n^2c^4)}}$$

Finalmente, se porremo nel valore di α^2 questi, che ho quì recati alle p, q, sarà $\alpha^2 = \frac{m^2a^4 + n^2c^4}{m^2a^2 - n^2c^2}$.

PROPOSIZIONE XXXI.

PROBLEMA.

§. 230. Data l' equazione, che ha l' iperbole AMm* per le sue coordinate rettangolari CN, MN, ritrovar quella, che le dee appartenere per le coordinate obblique CO, MO. *fig. 29.

SOLUZ. Si chiamino x, y le proposte coordinate CO, MO, ed α, γ il semidiametro principale CF, e 'l suo conjugato CL. Inoltre sia l' angolo VMO $= \varphi$, e l' altro ACF $= \theta$, e sieno m, p i loro seni, ed n, q i coseni rispettivamente. Sarà, premettendo gli artifizj geometrici del probl. prec. (1),

(1) Il metodo della permuta delle coordinate, tanto benemerito

*

$$1 : m :: y : OV \quad , \quad 1 : p :: x : OR \, ,$$
$$1 : n :: y : MV \quad , \quad 1 : q :: x : CR \, .$$

E quindi $OV = my$, $MV = ny$, $OR = px$, $CR = qx$, $CN = CR - RN = qx - ny$, $MN = OR - OV = px - my$.

* §. 184. E dovendo essere*, per la natura della data iperbole, $MN^2 = \frac{c^2}{a^2} CN^2 - c^2$, si avrà ne' simboli delle MN, CN la sottoposta equazione

$$p^2x^2 + m^2y^2 - 2pmxy = \frac{c^2}{a^2}(q^2x^2 + n^2y^2 - 2qnxy) - c^2 \, .$$

E nella quale dovranno sparir que' termini, che contengono il rettangolo delle coordinate x, y. Imperocchè si è quì sopra di-

---

a' progressi della Geometria sublime, fu egregiamente recato dal sommo Eulero (*Introd. in Analys. Inf. vol. II. sect.* 23. . . . 46) e nello stesso tempo, e con pari eleganza rapportato dall' insigne Cramer (*Introd. a l'Analys. des lig. courbes, sect.* 24. . . . . 30). Vi mancava il metodo, onde passare dalle coordinate obblique ad altre puranche obblique. Ed ei fu supplito dal valentissimo Kaisner, le cui speculazioni furon poi illustrate da Federico Rudiger, da Carlo Indenbourg, e da altri geometri di Europa. Ma qual n' è mai cotesto metodo di permutazione? Ei principalmente consiste nel convertir l'equazione di una curva, ch' è tra due coordinate di essa, in un' altra tra due altre coordinate, che sieno comunque date, o assunte. Or se la data linea ecceda il secondo grado, o se quel passaggio debbasi fare da coordinate obblique ad altre benanche obblique, si sogliono, per agevolarne il calcolo, praticare i metodi combinatorj degli analisti tedeschi i Signori Indenbourg, Pfaff, Prass, *ec.* Intanto io lodo il magistero analitico di tutti questi geometri; e ne' passaggi, che quì ho dovuto fare da un' equazione all' altra, ho fatto guidarmi da due triangoli dati di specie, che immediatamente gli eseguono, e più facilmente intendonsi da' giovani.

mostrato * essere $pm = \frac{c^2}{a^2} nq$. E perciò ella ordinata rispetto ad y diviene * §. 229.

$$y^2 = \frac{q^2c^2 - p^2a^2}{m^2a^2 - n^2c^2} x^2 - \frac{a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2}.$$

E ponendo in quest' ultima equazione i valori de' fratti, che vi si osservano *, sarà finalmente * §. 227.

$$y^2 = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} x^2 - \gamma^2 \; . \; . \; . \; . \quad \text{Cioè (1)}.$$

§. 231. TEOR. *Pe' semidiametri conjugati dell' iperbole* AMm *ottiensi un' equazione pariforme a quella, che fu recata per l' asse principale; cioè alla* $y^2 = \frac{c^2}{a^2} x^2 - c^2$.

§. 232. COR. I. I quadrati di due semiordinate di un qualunque diametro dell' iperbole sono come gli eccessi de' quadrati delle loro ascisse sul quadrato del semidiametro, o come i rettangoli delle loro ascisse valutate d' amendue i vertici.

§. 233. COR. II. E 'l quadrato di una di queste semiordinate starà al rettangolo delle sue ascisse computate d' ambedue i vertici, in duplicata ragione del diametro secondario al primario, o come n'è ad esso diametro primario il suo parametro.

---

(1) Si potrebbe questa dimostrazione al par di quella dell' ellisse eseguire col maneggio dell' equazione A prop. XXX, e nel seguente modo. » Alla fine di quella prop. si è dimostrato essere $\frac{ha^2(hv - z)}{h^2a^2 - c^2} = v$
» Dunque il primo membro di essa equazione sarà $\omega^2 - 2v\omega$. E da quel
» pareggiamento risultandone $hv - z = \frac{h^2a^2 - c^2}{ha^2} v$, sarà il secondo
» membro, fatte le debite riduzioni, uguale a $\frac{-a^2c^2}{h^2a^2 - c^2}$ » $- v^2 \frac{(h^2a^2 - c^2)}{h^2a^2}$
» E se vi si aggiunga v^2, si avrà un' equazione da doversi maneggiare, come quella dell' ellisse §. 73.

§. 234. COR. III. Si chiami p il parametro dell'asse principale dell'iperbole, e z un'ascissa computatavi dall'un estremo di esso, e poi vi si ponga la corrispondente semiordinata uguale ad y; sarà $y^2 = pz + \frac{pz^2}{2a}$. Le quali cose colla guida de' §§. 76, e 79 si potran quì raccorre.

PROPOSIZIONE XXXII.

TEOREMA.

§. 235. Nell'iperbole la differenza de' quadrati di due semidiametri conjugati è uguale a quella de' quadrati de' semiassi conjugati. E 'l parallelogrammo, che compiesi da que' due semidiametri, è quanto il rettangolo de' detti semiassi.

DIM. Si è dimostrato quì sopra ne' §§. 229, 227 essere

$$\alpha^2 = \frac{m^2a^4 + n^2c^4}{m^2a^2 - n^2c^2}$$

e $$\gamma^2 = \frac{a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2} = \frac{a^2c^2\,(m^2 + n^2)}{m^2a^2 - n^2c^2}\,.\ (1)$$

Se dunque dalla prima di queste due equazioni sottraggasi la seconda, avrassi

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \frac{m^2a^4 + n^2c^4 - a^2c^2\,(m^2 + n^2)}{m^2a^2 - n^2c^2} = a^2 - c^2\,.$$

PART. II. L'aja del parallelogrammo, che compiesi da' semidiametri α, γ, è uguale ad $\alpha\gamma.sen.\,(\varphi - \theta)$. Dunque,

---

(1) Si sa essere $m^2 + n^2 = 1$.

prendendo i valori delle α, γ, e di $sen.(\varphi - \theta)$ quì sopra esibiti *, sarà quel parallelogrammo uguale a * §. 229.

$$\sqrt{\left(\frac{m^2a^4 + n^2c^4}{m^2a^2 - n^2c^2}\right)} \times \sqrt{\left(\frac{a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2}\right)} \times \frac{m^2a^2 - n^2c^2}{\sqrt{(m^2a^4 + n^2c^4)}} = ac$$

§.236. Cor. I. Di quì si raccoglie, che sia $\gamma^2 = \alpha^2 - a^2 + c^2 = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2$, ponendovi il valore della α^2 recato nel §. 191. Cioè a dire con questo binomio esprimesi il quadrato del semidiametro CL conjugato a CF. Mentre il quadrato della normale, che * corrisponde all' estremo F di questo semidiametro, è uguale a $\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{e^2x^2}{a^2} - a^2\right)$. * §. 215.

§. 237. Cor. II. Dunque: *La normale dell' iperbole in un qualunque punto di essa curva dee stare al semidiametro conjugato di quello, che passa pel suddetto punto, come l' asse secondario al principale.*

§.238. Scol. Anche nell'iperbole le sei grandezze a, c, α, γ, φ, θ hanno tal nesso fra loro, che da tre di esse si possono le tre altre determinare. E ciò in forza delle tre equazioni $\alpha^2 - \gamma^2 = a^2 - c^2$, $\alpha\gamma . sen. (\varphi - \theta) = ac$, e $tang.\varphi . tang.\theta = \frac{c^2}{a^2}$; le quali si potran ridurre a tre altre, che sieno sgombre di grandezze trascendenti, come si è praticato nell' ellisse §. 85. E perciò: *Dati di grandezza, e di posizione due diametri conjugati di un' iperbole, si potran determinare gli assi conjugati.* Imperciocchè esprimendo per x il semiasse principale, e per y il conjugato, si dinoti per α il semidiametro principale, e per γ il suo conjugato, i quali sien dati, e contengano un angolo, il cui seno sia K. Si dovranno a tal oggetto risolvere le due equazioni $x^2 - y^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, ed $xy = K\chi\gamma$, per vi determinare le ignote x, y. Lo che abbastanza è noto dall' algebrico Algoritmo.

PROPOSIZIONE XXXIII.

TEOREMA.

* fig. 29. §. 239. Se dagli estremi F*, L de' semidiametri conjugati CF, CL si calino le perpendicolari FE, LH sul semiasse principale AC, e sul secondario CD rispettivamente; quelle rette dovran segnarvi in questi semiassi due ascisse proporzionali a' medesimi semiassi.

DIM. Si legga la dimostrazione della prop. X. dell'ellisse, con riscontrare la citata figura dell' iperbole.

PROPOSIZIONE XXXIV.

TEOREMA.

§. 240. Per un qualunque diametro dell' iperbole dovrà verificarsi ciò, che si è dimostrato per l' asse nel §. 194. cioè, che vi sien continuamente proporzionali l' ascissa, che corrisponde all' ordinata pel contatto, il detto semidiametro, e la medesima ascissa diminuita della sottangente.

DIM. Questa verità può ricavarsi con quell' istesso metodo, che ho impiegato nella prop. XXV., con questo solo divario, che quì la t dee dinotare il rapporto del seno di MPN al seno di MNP, come nell'ellisse §.95. E lo stesso assunto potrebbesi convenevolmente conseguire co' metodi proposti ne' §§. 97, 98.

§. 241. Def. XXVI. Un' iperbole si dice *parilatera*, o *equilatera*, quando l' asse principale pareggi il suo conjugato. E se ciò non si avveri, l' iperbole si dirà *scalena*.

§. 242. Cor. I. Nell' iperbole parilatera ogni diametro è uguale al suo conjugato. Imperocchè essendo* $\alpha^2 - \gamma^2 = a^2 - c^2$, * §. 235.
ed $a^2 - c^2 = o$, dee anche essere $\alpha^2 - \gamma^2 = o$, ed $\alpha = \gamma$.

§. 243. Cor. II. E perciò l' equazione di una tal' iperbole relativamente agli assi, ed al centro sarà $y^2 = x^2 - a^2$. E pe' diametri conjugati ella dovrà essere $y'^2 = x'^2 - \alpha^2$.

PROPOSIZIONE XXXV.

TEOREMA.

§. 244. Se dagli estremi di un diametro AB* * *fig.* 30.
dell' iperbole parilatera NHC conducansi ad un punto C di essa curva le due rette AC, BC; gli angoli alla base AB dell' emergente triangolo ABC avran sempre una data differenza.

Dim. Si ponga il semidiametro GB $= \alpha$, e si chiamino x, y le coordinate GD, DC, che corrispondono al punto C; sarà * * *cor. pr.*
$y^2 = x^2 - \alpha^2$, e con ciò $y : x - \alpha :: x + \alpha : y$. Cioè DC : DB :: DA : DC. Onde dovrà esser l'angolo DCB uguale all' altro DAC*. Ma per essersi prodotto il lato DB del triangolo DBC, è l' angolo esterno ABC = BDC + BCD = BDC + BAC. Dunque sarà BDC = ABC — BAC. * 6.El. VI.

§. 245. COR. *E se da un punto* N *di questa curva conducansi le due rette* NH , NK *agli estremi dell' asse principale* HK ; *gli angoli acuti , ch' esse forman col detto asse , sono , presi insieme , uguali ad un retto .*

Dal punto N si ordini all' asse la NM , e sieno x , y le
* §. 242. coordinate GM, MN. Sarà* $y^2 = x^2 - a^2$ l' equazione di quest'iperbole parilatera . Onde dovrà essere $\frac{y}{x-a} = \frac{x+a}{x}$ come *tang.* NHM = *cot.* NKM . E quindi NHM + NKM uguale ad un retto (1).

---

(1) Quest' insigne proprietà dell' iperbole parilatera immediatamente si deduce dall' equazione di essa curva . E ne abbisognerebbe un lungo calcolo per poterla conseguire colla Geometria analitica *a due coordinate* (*Vedi Biot Essai de Geom. Analyt. pag.*200). E quel , che più ne duole , questo metodo non potrebbesi universalizzare per rilevar la verità del presente teorema . L' ingegnosissimo Roberto Simson con un prodigioso lavorìo di sintesi ha dimostrata la medesima verità nell' Appendice al suo trattato delle curve coniche . Ma io mi lusingo , che la via euristica quassù calcata sia conducente a poter dimostrare con eleganza la verità proposta , ed anche a rinvenirla facilmente , se sia d' uopo ; evitandosi per tal modo certe studiate preparazioni , che vi si soglion praticare , o gli stenti nel ridurne il risultamento (*Ved. Newton Arith. Univ. probl.* 41.)

CAPITOLO V.

DEGLI ASSINTOTI DELLE IPERBOLI.

§. 246. Nel capitolo precedente ho rilevato dalla teorica de' diametri principali di un' iperbole quella de' loro conjugati, e senza frapporvi la dottrina degli assintoti di essa curva, come la piupparte de' geometri suol fare. Ora, che degli assintoti ragiono, io fo guidarmi da una proprietà de' detti diametri, che quì propongo in forma di teorema.

PROPOSIZIONE XXXVI.

TEOREMA.

§. 247. Le diagonali del rettangolo circoscritto alle iperboli (1) debbon passare per gli angoli opposti di un qualunque altro parallelogrammo, che vi si circoscriva.

DIM. Si compia il parallelogrammo CILR * da due qualunque semidiametri conjugati CR, CI dell' iperbole RAM; e nel punto R intendasi condotta la normale RQ ad essa curva. Da' punti R, L si abbassino le perpendicolari RT, LH al se- * *fig.* 31.

(1) Per gli estremi di due diametri conjugati delle iperboli conducansi ad esse curve le tangenti, che facciansi convenir tra loro; il quadrilineo, che n' emerge, sarà un parallelogrammo *, che per le nozioni elementari potrà dirsi *circoscritto* alle due iperboli opposte, ed alle conjugate. E questa definizione dee anche valere pe' parallelogrammi circoscritti all' ellisse (*Ved.* §. 82.) * §. 220.

miasse CA dell' iperbole, e vi si compia il rettangolo RH. Sarà
* §. 226. la retta RL tangente della curva in R *, e quindi perpendicolare alla RQ. E perciò i due angoli QRT, LRO, che son complementi dello stesso angolo ORX, saranno uguali: e dovranno esser simili i due triangoli QTR, LOR, che son rettangoli in T, O, ed han pure que' due angoli uguali.

Ciò premesso, si ponga $CH = x$, $HL = z$, $TR = y$, e quindi $LO = LH - HO = z - y$; e poi la ragione di RQ ad
* §. 237. RL esprimasi per quella di c ad a*. E poichè per la similitudine de' detti triangoli dee stare RQ : RL :: RT : RO, cioè $c : a :: y : RO$, sarà la retta $RO = \frac{ay}{c}$, l'altra CT, ch'è uguale a $CG - TH$, sarà $x - \frac{ay}{c}$, e dovrà essere la sun-
* §. 214. normale $QT * = \frac{c^2}{a^2}\left(x - \frac{ay}{c}\right) = \frac{c^2 x}{a^2} - \frac{cy}{a}$. Ma per la similitudine de' medesimi triangoli QTR, LOR è benanche RQ : RL :: TQ : LO. Dunque sarà ne' simboli di queste grandezze $c : a :: \frac{c^2 x}{a^2} - \frac{cy}{a} : z - y$, e quindi $z = \frac{cx}{a}$.
E perciò il punto L dovrà appartenere ad una retta, che passa per lo centro (1) della proposta iperbole, ed inclinasi all'asse per un angolo, la cui tangente trigonometrica è quanto $\frac{c}{a}$.
Cioè a dire il detto punto dovrà esser nella produzione della CE diagonale del rettangolo de' semiassi conjugati CA, CD; poichè anche l'angolo ACE tien per tangente trigonometrica quel fratto. E di quì resta conchiuso il proposto assunto (2).

(1) Leggasi la nota n. 1. del §. 24.

(2) Io lascio a' giovani il poter analiticamente rilevare, e col re-

§. 248. Cor. Il semiasse AC inclinasi alla diagonale ECe del rettangolo circoscritto alle iperboli, per un angolo, che ha per tangente trigonometrica $\frac{c}{a}$: e per lo stesso angolo ei deesi all' altra diagonale del medesimo rettangolo inclinare. Dunque l'angolo ECB sarà duplo dell' altro ECA, ed avrà per tangente il fratto $\frac{2ac}{a^2 - c^2}$ (1).

§. 249. Def. xxvii. Una retta dicesi *assintoto di una curva*, se l'una di queste due linee può continuamente accostarsi all' altra, e per un intervallo minore di qualunque dato, ma senza poterla giammai incontrare.

§. 250. Scol. La possibilità del definito, ch' è un paradosso geometrico, si conoscerà chiaramente dal teorema, che or ne aggiungo.

PROPOSIZIONE XXXVII.

TEOREMA.

§. 251. Le diagonali del rettangolo circoscritto alle iperboli opposte, ed alle loro conjugate sono assintoti di queste quattro curve. E propriamente ciascuna di esse è assintoto di que' rami iperbolici, tra' quali ella si distende d' ambe le parti.

---

golo dell' adottata soluzione, qual sia quella curva, la quale passa per gli angoli opposti de' parallelogrammi circoscritti ad una data ellisse.

(1) Si legga la nota n. 3. del §. 88.

DIM. Si ponga CH $= x$, GH $= y$, ed LH $= z$. Sarà per teor ema precedente $z = \frac{cx}{a}$, e quindi $z^2 = \frac{c^2x^2}{a^2}$. Ma per la natura dell' iperbole GAM è $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2$. Se dunque quest' ultima equazione sottraggasi dalla precedente, avrassi $z^2 - y^2 = c^2$, cioè $(z - y)(z + y) = c^2$. E quindi $z - y = \frac{c^2}{z+y}$. Ma $z + y$, o la retta LM, può divenir maggiore di qualunque retta data, come ben si comprende. Dunque il fratto $\frac{c^2}{z+y}$, o il suo valore $z - y$, cioè la retta LG può farsi minore di qualunque dato intervallo, e senza poter mai divenir zero. E perciò la retta CL per la premessa definizione sarà assintoto del ramo iperbolico ARG. E lo stesso per gli altri rami di quelle quattro iperboli si potrà concludere convenientemente.

CONSEGUENZE, CHE SI TRAGGONO DALL' ADDOTTO TEOREMA.

§. 252. I. *Ciascuna delle due diagonali del rettangolo, che si circoscriva alle dette iperboli, è assintoto di quattro rami iperbolici: cioè di due rami alterni delle iperboli opposte, e di due altri delle iperboli conjugate, che sono alterni fra loro, ed adjacenti a' due primi*. Cioè* la retta RC*r* è assintoto de' rami alterni AD, *an* delle iperboli opposte NAD, *nad*, e degli altri due BE, *bn'* delle iperboli conjugate: e questi sono alterni fra loro, ed adjacenti a' primi. E lo stesso intendasi dell' altra retta SC*s* convenevolmente.

* *fig.* 26.

§. 253. II. *Ognuna delle quattro iperboli già dette ha per suoi assintoti due di queste quattro semidiagonali, entro le quali ella si contiene.*

Così le rette CS, *Cr* sono assintoti dell' iperbole NAD, ch' è dentro ad esse. E l' angolo di queste semidiagonali suol dirsi *angolo assintotico*.

§.254. III. *Or cotest' angolo assintotico sarà retto, acuto, o ottuso, secondochè l' asse principale dell' iperbole, che il sottende, sia uguale, maggiore, o minore del suo secondario.*

Imperocchè la tangente trigonometrica del detto angolo * è uguale a $\frac{2ac}{a^2-c^2}$. Ma supponendo $a=c$, e quindi parilatera l' iperbole, ne diviene infinita l' espressione $\frac{2ac}{a^2-c^2}$. Dunque dovrà esser retto quell' angolo assintotico. E supponendo $a>c$, sarà di finita grandezza il proposto fratto, ed insiem positivo: laddove ei sarebbe finito, e negativo, se si supponesse $a<c$. Dunque nel caso 1. un tal angolo sarà acuto, e nell' altro ottuso, come da' principj trigonometrici è stabilito.

* §. 247.

§. 255. IV. *Una tangente dell' iperbole, qualor si distenda insino agli assintoti di tal curva, dee restar divisa in parti uguali nel contatto. E ciascuna metà di essa sarà uguale al semidiametro conjugato di quello, che passa pel detto punto.*

Questa verità è una conseguenza immediata del precedente teorema.

§. 256. V. E quindi se ad un punto R* dell' iperbole RAM vogliasi condurre la tangente, potremo col precedente principio agevolarne nel seguente modo la costruzione. Dal dato punto R si tiri la RN parallela all'assintoto CB, e poi si prenda la parte LN uguale alla NC, e si congiunga la LR. Questa retta sarà la tangente, che si domanda*,

* *fig.* 31.

* §. 255. e 2. El. VI.

§. 257. VI. Dall' equazione all' iperbole principale, cioè dalla $y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} - c^2$ si potrebbero immantinente rinvenire gli assintoti di questa curva. Cioè, vi si suppongano d'infinita grandezza le coordinate x, y; in tal caso potrà trascurarsi la c^2 nella proposta equazione, che dovrà ridursi alla $y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2}$, o alla $\pm y = \frac{cx}{a}$. Ma l' elemento di tal curva, il quale ha le x, y infinite, coincide coll' assintoto di essa; onde quest' ultima equazione dee anche appartenere a quella retta. Dunque l' equazione all' uno, ed all' altro assintoto sarà $\pm y = \frac{cx}{a}$.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

TEOREMA.

§. 258. Se per un qualunque punto di un' iperbole si tiri una retta, che incontri i due assintoti di essa curva; il rettangolo delle parti di quella retta, che restano tra gli assintoti e 'l detto punto, sarà uguale al quadrato del semidiametro dell' iperbole parallelo ad essa retta.

fig. 32. DIM. Per lo punto M dell' iperbole GAM siasi condotta la retta LMK, che incontri in L, K gli assintoti CK, CL di essa curva, ed in un altro punto G la stessa iperbole GAM, formandone la corda MG. Si tiri la retta CH dal punto me-

dio di questa corda al centro di quella curva, cui si conduca la tangente FAB per l'estremo A del semidiametro CA: ed ella ne incontri in E, B i detti assintoti. Dovrà esser la retta EB parallela alla LK *, e le EA, AB uguali fra loro, ed al semidiametro conjugato di CA*. Ciò posto, sia CA $= \alpha$, AB $= \gamma$, CH $= x$, HM $= y$, HK $= z$. Sarà CA:AB::CH:HK pe' triangoli simili CAB, CHK, cioè $\alpha : \gamma :: x : z$, e quindi $z = \frac{\gamma x}{a}$, e $z^2 = \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2}$. Ma è poi* $y^2 = \frac{\gamma^2 x^2}{\alpha^2} - \gamma^2$. Dunque togliendo quest' ultima equazione dalla precedente sarà $z^2 - y^2 = \gamma^2$, cioè il rettangolo LMK uguale al quadrato di AB, o del semidiametro conjugato di CA.

* §. 220.
* §. 255.
* §. 230.

Cas. II. Che se la retta MR incontri nel punto R l'iperbole aR opposta alla primiera AM, dal centro C di essa curva si meni la CA parallela alla MR, ed in A la tangente EAB nella detta iperbole AM. E poi si ponga la MK $= \nu$, l'altra CA $= \alpha$, e la BA $= \gamma$. Sarà, per lo caso precedente, ML $= \frac{\gamma^2}{\nu}$ Ed essendo, pe' triangoli simili CAB, PMK, AB : AC::MK :MP, o ne' simboli di queste grandezze $\gamma : \alpha :: \nu$: PM, sarà PM$= \frac{\alpha\nu}{\gamma}$ Ma è anche AB : AC :: ML : MQ, pe' triangoli simili CAB, QML. Dunque sarà $\gamma : \alpha :: \frac{\gamma^2}{\nu}$: MQ, e la MQ $= \frac{\alpha\gamma}{\nu}$. E dovrà essere PM $\times$ MQ $= \frac{\alpha\nu}{\gamma} \times \frac{\alpha\gamma}{\nu} = \alpha^2$.

§. 259. Cor. I due rettangoli LMK, LGK, come uguali allo stesso quadrato di AB, sono uguali fra loro. Dunque dovrà essere, per le nozioni di Geometria, la MK uguale alla GL. E così pure può dimostrarsi esser la PM uguale alla QR.

§. 260. Def. xxviii. Ogni applicata tra un ramo iperbolico, e l'assintoto di esso, la quale sia parallela all' altro assintoto, suol dirsi *ordinata dell' iperbole tra gli assintoti*. E la parte dell' assintoto, ch' ella ne tronca insino al centro, è *l' ascissa corrispondente alla detta ordinata*. Finalmente quest' ordinata, e quell' ascissa si diranno *coordinate dell' iperbole tra gli assintoti*.

§. 261. Def. xxix. La *potenza* di un' iperbole è la quarta parte del quadrato dell' eccentricità di essa curva, o della somma de' quadrati de' semiassi conjugati. E '*l lato di tal potenza* è la metà dell' eccentricità suddetta.

§. 262. Cor. Tutte e quattro le iperboli conjugate hanno gli stessi assintoti, ed una medesima potenza.

* *fig.* 31. §. 263. Scol. Da un punto qualunque M* dell' iperbole RAM, ch' è tra gli assintoti CK, CL, si tiri la retta MP parallela all' assintoto CL, che ne incontri l' altro CK in un punto P. La retta MP sarà un' ordinata di quest' iperbole tra gli assintoti, e la CP la sua ascissa. E si vedrà quì appresso, che il lato della potenza di quest' iperbole sia quell' ordinata, che vi procede dal vertice principale di tal curva, o la metà del lato di quel rombo, ch' io rapportai nel §. 182 per far conoscere il sito, e la grandezza delle due iperboli opposte, e delle loro conjugate.

PROPOSIZIONE XXXIX.

TEOREMA.

§. 264. Il rettangolo delle coordinate in un' iperbole tra gli assintoti è sempre uguale alla potenza di essa iperbole.

DIM. Sieno MP, PC* due coordinate all' iperbole tra gli assintoti CL, CK, e per lo vertice principale A vi si distenda la tangente AB, che gl' incontri in B, E; ed in K, L gli seghi la retta LMK condotta per M parallela ad AB. Sarà PM uguale a PK: poichè il triangolo MPK è isoscele al par del suo simile ECB. Intanto pongasi CP $= x$, PM $=$ PK $= y$, CA $= a$, AB $= c$, e CB $= \sqrt{(a^2 + c^2)} = e$. Sarà CP : LM :: PK : KM :: CB : BE, cioè x : LM :: $e : 2c$, ed y : MK :: $e : 2c$. Dunque moltiplicando fra loro i corrispondenti termini di queste due analogie, e ponendovi* c^2 per lo rettangolo di LM in MK, sarà $xy : c^2 :: e^2 : 4c^2$, e quindi * *fig.* 31. * §. 258.

$$xy = \frac{1}{4} e^2 \ldots\ldots H$$

CONSEGUENZE, CHE DISCENDONO DAL PRESENTE TEOREMA.

§. 265. I. *Le ordinate nell' iperbole tra gli assintoti sono inversamente come le loro ascisse*

Quindi se una di coteste coordinate si chiami v, l'altra dovrà essere uguale ad $\frac{e^2}{4v}$.

§. 266. II. *La potenza dell' iperbole tra gli assintoti è quanto il quadrato dell'ordinata, che vi si conduce dal vertice principale.*

Infatti, se dall' estremo A del semiasse CA si tiri la retta AV parallela all' assintoto CL; dovrà essere, pe' triangoli simili BAV, BEC, l'ordinata AV metà della CE, come n'è la BA della BE. Ed essendo la CE uguale all' eccentricità dell' iperbole RAM, la detta ordinata ne sarà metà, e quindi uguale al lato della detta potenza.

§. 267. III. Si chiami φ l'angolo MPC, o il suo uguale AVC, e si ritengano i simboli quassù adottati. Sarà $xy = \frac{1}{4} e^2$, e quindi $xy \times sen.\varphi = \frac{1}{4} e^2 \times sen.\varphi$. Cioè:

Il parallelogrammo, che compiesi dalle coordinate MP, PC, *è quanto il rombo, che tien per base la retta* AV, *e φ per uno degli angoli alla sua base.*

§. 268. IV. Se al punto L* dell' assintoto CL di essa curva s' inclini sotto un dato angolo la retta LK, col maneggio dell' equazione H si potrebber conoscere gl' incontri della retta LK e della curva GAM.

* *fig.* 32.

Poichè, supposto essere il punto G uno di quest' incontri, si ordini la GN, e si ponga $LN = x$, $LC = h$, $tang.L = t$, e quindi $OC = h - x$, e $GM = tx$. Sarà $GN \times NC$ uguale alla potenza dell' iperbole, cioè $tx(h - x) = \frac{1}{4} e^2$; e quindi

$$x^2 - hx + \frac{e^2}{t^4} = o \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$$

Sicchè risolvendo quest' equazione, sarà

$$x = \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} \sqrt{\left(h^2 - \frac{e^2}{t}\right)}$$

$$x = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} \sqrt{\left(h^2 - \frac{e^2}{t}\right)}$$

Cioè a dire sarà la retta LO il primo valore della x, e l' altro dovrà esser quello della LN: supponendovi, che non sia $h^2 < \frac{e^2}{t}$, cioè che non vi abbia luogo il caso impossibile.

§. 269. V. Ma la retta CO, ch'è uguale ad $LC - LO$, sarà $= h - \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} \sqrt{\left(h^2 - \frac{e^2}{t}\right)} = \frac{1}{2} h - \frac{1}{2} \sqrt{\left(h^2 - \frac{e^2}{t}\right)}$

cioè LN = CO, e quindi ancora LG = MK. E da ciò può anche inferirsi quello, che per altre vie ho * dimostrato, che : *Quando una retta sega un'iperbole, e gli assintoti di essa, le sue parti, che restano tra ciascun ramo iperbolico e 'l suo assintoto, sien fra se uguali.* * §. 259.

E supponendo uguali le due radici dell'equazione I, cioè che quella retta sia tangente dell'iperbole*, dovrà essere $x = \frac{1}{2}h$. Dunque : * §. 26.

La sottangente LN* *nell'iperbole tra gli assintoti è uguale, ed opposta alla corrispondente ascissa* CN. * *fig.* 32.

E finalmente sarà $t = \frac{e^2}{h^2}$

§. 270. VI. *L'equazione* $x^2y^2 - \frac{1}{16}e^4 = o$ * *può rappresentare le due iperboli opposte* AM, *am*, *e le due loro conjugate* M'B, *m'b*. *Ma ponendovi la* CP = x, *e l'ordinata* PM = y, *il fattore* $xy - \frac{1}{4}e^2 = o$ *di quell'equazione dovrà rappresentare le due iperboli opposte, e l'altro* $xy + \frac{1}{4}e^2 = o$ *si apparterrà alle due loro conjugate. E perciò quell'equazione biquadratica dovrà dinotare un sistema di due diverse curve.* * *fig.* 33.

Per l'intelligenza di questo utilissimo principio (1) sarà be-

(1) Se mai nel rimontare da qualche proprietà di una curva alla natura di essa rinvengasi un'equazione risolvibile in due, o più fattori; ciascuno di questi dovrà rappresentare una curva particolare, che gode la proprietà proposta. Così il sommo Newton, volendo ritrovare *il luogo del vertice di un triangolo, che abbia una data base, ed una data differenza degli angoli in sulla base*, si abbattè ad un'e-

* *fig.* 33. ne l' avvertire le seguenti cose. Cioè* supponendo CP $= + x$, e PM $= + y$, dovranno esser negative le ascisse opposte alle CP, e negative le ordinate opposte alle PM. E perciò essendo

$$\begin{array}{llll} CP = x, & PM = y, & \text{sarà } CP \times PM = & xy = \frac{1}{4} e^2 \\ CP = x, & Pm' = -y, & CP \times Pm' = & -xy = \frac{1}{4} e^2 \\ Cp = -x, & pm = -y, & Cp \times pm = & xy = \frac{1}{4} e^2 \\ Cp = -x, & pM' = y, & Cp \times pM' = & -xy = \frac{1}{4} e^2 \end{array}$$

Laonde l' equazione $x^2y^2 - \frac{1}{16} e^4 = o$, ch' è il prodotto di $xy - \frac{1}{4} e^2 = o$, e di $xy + \frac{1}{4} e^2 = o$, dovrà dinotare un sistema di due diverse iperboli a' medesimi assintoti
* §. 190. rapportate *.

§. 271. VII. Finalmente *nel voler descrivere un' iperbo-*
* *fig.* 31. *le, che passi per un dato punto* M*, *e che abbia per suoi assintoti le rette* CL, CK *date di posizione*, potrà impiegarsi

---

quazione biquadratica a due indeterminate. Ed ei seppe disciorla in due fattori quadratici, l' uno rappresentante un' iperbole parilatera, e l' altra un cerchio: e poi conchiuse, che ad una tal ricerca poteva esser soddisfacente sì l' una curva, che l' altra. (*Ved. Arith. Univers. Newt. Prob.* 41.). Il celebre Eulero nel ricercare *una curva, che avesse in massimo, o in minimo grado una certa funzione delle coordinate* rinvenne la seguente equazione $y^3 - xy^2 + (x^2 - ax)y + ax^2 - x^3 = o$. E poichè i fattori di questa sono $y - x = o$, ed $y^2 - ax + x^2 = o$, tanto la retta, che il cerchio rispettivamente designati da quest' equazioni, avranno la proprietà proposta, ed in quel grado. *Methodus inven. lineas curv. max. . . . pag.* 41. E così in simili casi da questi geometri, e da altri si è praticato.

il metodo, che segue. Si tiri MP parallela a CL, e si chiamino b, h le coordinate CP, PM della richiesta curva, ed m, n il seno e 'l coseno dell' angolo ACB metà del dato LCK. Sarà l' eccentricità di essa curva uguale a* $2\sqrt{bh}$. * §. 264.
Il semiasse principale sarà $2n\sqrt{bh}$, e 'l suo secondario dovrà essere $2m\sqrt{bh}$. Onde pel §. 171. ella potrà descriversi con moto organico. E se per lo punto M si tiri comunque la retta LMK, e vi si prenda GL uguale ad MK, e lo stesso poi si pratichi in altre rette tirate per quel punto M, si avrà per assegnazion di punti la stessa curva*. * §. 259.

§. 272. Post. Per le seguenti ricerche potrà porsi uguale ad 1 la potenza di un' iperbole, e con ciò anche uguale ad 1 il suo lato.

PROPOSIZIONE XL.

TEOREMA.

§. 273. Se tre ascisse nell' iperbole tra gli assintoti sieno continuamente proporzionali, cui conducansi le corrispondenti ordinate; lo spazio assintotico compreso dalle ordinate estreme, e dalle porzioni dell' arco e dell' assintoto, ch' esse ne troncano, sarà diviso in due parti uguali dalla media di quelle tre ordinate.

Dim. Si chiami b la prima di quelle tre ascisse, cioè la CA*, e poi si ponga uguale ad x la seconda ascissa CB, e quindi la terza CD $=\frac{x^2}{b}$. Sarà AB $= x - b$, il qual binomio per *fig. 34.

brevità di calcolo si chiami X, e dovrà esser la $BD = \frac{x^2}{b} - x = \frac{x}{b}(x - b) = \frac{xX}{b}$. Intanto prendansi dalle AB, BD due aliquote simili Aa, Bb, e sia n il numero m delle une, o delle altre. Sarà $Aa = \frac{X}{n}$, e $Bb = \frac{xX}{nb}$. E se ciascuna delle Aα, Bβ contenga il numero m delle dette aliquote, sarà $A\alpha = \frac{mX}{n}$, $B\beta = \frac{mxX}{nb}$, $C\alpha = b + \frac{mX}{n}$, e $C\beta = x + \frac{mxX}{nb}$. E finalmente le ordinate αH, βK, che corrispondono alle ascisse Cα, Cβ saranno uguali all' unità divisa pe' valori delle Cα,
* §. 272. Cβ respettivamente*: essendosi supposta parilatera cotesta iperbole, e la sua potenza uguale ad 1. Per la qual cosa dovrà essere

$$a\alpha \times \alpha H = \frac{X}{n} \times \frac{1}{b + \frac{mX}{n}} = \frac{X}{nb + mX}$$

e

$$b\beta \times \beta K = \frac{xX}{nb} \times \frac{1}{x + \frac{mxX}{nb}} = \frac{nb + mX}{X}.$$

Cioè a dire sono tra se uguali i rettangoli di $a\alpha$ in αH, e di $b\beta$ in βK. Or nella stessa maniera può dimostrarsi, che gli altri rettangoli iscritti nell' aja iperbolica ABFE sieno uguali a' corrispondenti rettangoli, che sarebbero iscritti nell'altra BDGF. Dunque pel metodo de' limiti saranno tra se uguali le due aje iperboliche ABFE, BDGF.

§. 274. Cor. 1. Se le ascisse CA, CB, CD, CL, *etc.* nella detta iperbole sieno continuamente proporzionali; i quadrilinei iperbolici ABFE, BDGF, DLIG, *etc.* saranno tra se uguali. E quindi gli altri ABFE, ADGE, ALIE *etc.*

dovranno esser nella progressione de' numeri naturali 1 , 2 , 3 , *etc.*

§. 275. Cor. II. *Dunque i quadrilinei iperbolici* ABFE, ADGE, ALIE *etc. sono logaritmi delle corrispondenti ascisse* CB, CD, CL *etc.* : *o delle ragioni di* CB *a* CA, *di* CD *a* CA, *di* CL *a* CA *etc.*

§. 276. Cor. III. E potendosi continuare all' infinito la serie delle ascisse CA, CB, CD, CL, *etc.* continuamente proporzionali; lo spazio assintotico ALXIE, ch' è infinitamente lungo, dovrà contenere un numero infinito di quadrilinei uguali, di cui ciascuno è finito di magnitudine; ond' *egli avrà un' aja infinita*.

§. 277. Cor. IV. Dal centro C dell' iperbole GFE conducansi le rette CE, CF agli estremi delle ordinate AE, BF di essa curva. Saranno uguali i due triangoli CAE, CBF *. * 15.El.VI.
Sicchè, togliendo da essi il comune triangolo ACO, ne rimarrà il triangolo COE uguale al trapezio ABFO. Ed aggiungendo di comune a questi due spazj il trilineo iperbolico FOE, dovranno *esser tra se uguali il settore iperbolico* FCE, *e 'l quadrilineo iperbolico* ABFE, che poggiano sullo stesso arco FE di una tal curva.

§. 278. Scol. Farei torto a' giovani studiosi, s' io quì tacessi certe immediate conseguenze di questo teorema, che son di molta importanza nell' Analisi sublime, e mi pajono obbliate ne' Corsi elementari. Cioè a dire, si ponga uguale ad 1 la potenza della detta iperbole, e sia anche 1 la prima di quelle ascisse continuamente proporzionali; e le loro ordinate AE, BF, DG, *etc.* si prolunghino, sinchè ne incontrino in M, N, P, *etc.* il semiasse secondario di tal curva, cui si tiri nel vertice principale E la tangente QER. I°. Coteste applicate tra 'l semiasse conjugato, e l' iperbole, cioè le rette ME, NF, PG, *etc.*, saranno 2, $x+\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, *etc.* cioè *dovran rappresentare i binomj delle parti reciproche*. Imperocchè essendo semiretto l'angolo ACM, saranno le MA, NB, PD, *etc.* rispettivamente uguali alle grandezze 1, x, x^2, *etc.*, laddove le AE, BF, DG, *etc.* sono, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, *etc.* II.° Inoltre per lo parallelogrammo EVNM la retta ME è uguale alla NV, e quindi minore della NF; e così anche è la ME minore della PG, *etc.* Dunque *niuno di que' binomj di parti reciproche può esser minore del* 2. E perciò III.° Essendo $2.\cos.\varphi$ sempre minore del 2, non potrà mai supporsi $x+\frac{1}{x}=2.\cos.\varphi$, ed insiem pretendere, che sieno reali i valori della x. Infatti risolvendo la proposta equazione si avrà la $x=\cos.\varphi\pm\sqrt{(\cos.\varphi^2-1)}=\cos.\varphi\pm\operatorname{sen}.\varphi\sqrt{-1}$. Del che nelle funzioni circolari (1).

PROPOSIZIONE XLI.

PROBLEMA.

§. 279. Da' principj del precedente teorema

---

(1) Il sig. Lagrange nelle *Séances des Écoles Norm.* s'impegnò a dimostrare il teorema ciclometrico Cotesiano col supporre $2.\cos.\varphi=x+\frac{1}{x}$, derivandone con egregj analitici ripieghi dover esser benanche $2.\cos.n\varphi=x^n+\frac{1}{x^n}$. Ma sembrami, ch' ei non vi abbia evitate le grandezze immaginarie, come il pretende: poichè quì sopra si è veduto essere immaginaria la x, tuttochè ella non appaja d' esser tale.

vuol ritrarsi un metodo per valutare que' quadrilinei iperbolici.

Soluz. Suppongasi uguale ad 1 il lato CA della potenza dell' iperbole parilatera GFE, ed un' altr' ascissa CL si ponga uguale a K. E poi la CB sia media proporzionale tra le CL, CA. Sarà per lo precedente teorema il quadrilineo iperbolico LAEI uguale a 2BAEF. E prendendo la $C\alpha$ media proporzionale tra le CB, CA, sarà pure $BAEF = 2\alpha AEH$; e quindi $LAEI = 2^2 \times \alpha AEH$. E così più oltre procedendo si conchiuderà per induzione, che se la Ca dinoti l' ultima di coteste medie proporzionali prese un numero n di volte, debba essere il quadrilineo iperbolico LAEI uguale a $2^n \times a\, AEe$.

Ciò premesso, essendo $CL = K$, $CA = 1$, e $CB^2 = CL \times CA$, sarà $CB = \sqrt{K} = K^{\frac{1}{2}}$. E così pure dovrà essere $C\alpha = \sqrt{K^{\frac{1}{2}}} = K^{\frac{1}{4}}$. E dovrà benanche conchiudersi per induzione esser Ca uguale a K elevata alla potenza $\frac{1}{2^n}$. Laonde, se da K estraggasi la radice quadrata il numero n di volte seguitamente, e tal radice si dinoti per r, sarà $Ba = r$, $Aa = r - 1$, e 'l rettangolo di Aa in $AE = (r-1)1 = r - 1$. E l' altro rettangolo di Aa in ae sarà uguale a quello di $r - 1$ in $\frac{1}{r}$, essendo $a\,e = \frac{1}{r}$. E perciò i limiti tra' quali dovrà contenersi il valore del quadrilineo LAEI, saranno $2^n(r-1)$, e $2^n\left(\frac{r-1}{r}\right)$; ed essi saranno tanto più stretti, quanto il numero n sia più grande. Del che altrove.

CAPITOLO VI.

DELLE TANGENTI, E DELLE SEGANTI DELLE IPERBOLI.

PROPOSIZIONE XLII.

PROBLEMA.

* fig. 35. §. 280. Data di posizione la corda NE * e l'asse AB della data iperbole ANE, e dato il punto P in quella retta; vuol valutarsi il rettangolo NPE, che vien formato da quelle parti di essa retta, che restano tra la curva, e'l detto punto.

SOLUZ. Dagli estremi N, E della corda NE, e da quel dato punto P si menino le perpendicolari NM, EK, PR all'asse AB, cui conducasi la parallela PG dal detto punto. E poi si ponga $PG = x$, $GN = y$, $CR = b$, $PR = h$, $tang. NPG = t$; e finalmente per m, n esprimansi il seno, e'l coseno del detto angolo rispettivamente. Sarà $NG = tx$, $NM = h + tx$, $CM = CR + RM = b + x$. E dovendo es-

* §. 184. sere * $NM^2 = \frac{c^2}{a^2} CM^2 - c^2$, sarà ne'simboli di queste grandezze geometriche $h^2 + t^2x^2 + 2thx = \frac{c^2}{a^2}(b^2 + 2bx + x^2) - c^2$.

Sicchè ordinando rispetto ad x siffatta equazione si avrà

$$x^2 + \frac{2a^2th - 2c^2b}{a^2t^2 - c^2}x + \frac{a^2h^2 + a^2c^2 - c^2b^2}{a^2t^2 - c^2} = 0 \quad \ldots \quad A.$$

E dovrà essere, per quel che si è detto nel §. 102. dell'ellisse, il rettangolo FPG uguale ad $\frac{a^2h^2 + a^2c^2 - c^2b^2}{a^2t^2 - c^2}$. Ma è poi

FPG : EPN :: PG² : PN² :: n^2 : 1. Dunque sarà il rettangolo

$$EPN = \frac{a^2h^2 + a^2c^2 - c^2b^2}{m^2a^2 - n^2c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; B$$

ponendovi m^2 per t^2n^2 nel risultamento.

Or quì è facile l' avvertire, I°. che nel valutare ciascuno de' rettangoli ePn, $E'PN'$, $e'Pn'$, s' incontri un' equazione pariforme ad A; e che il solo divario consista nel seno e nel coseno dell'angolo, onde ciascuna di esse corde s' inclini all' asse. Imperocchè essendo $gn = -y$, ed $mn = gn - gm$, sarà $mn = -y - h$, il cui quadrato è quanto quello di $y + h$, o di $h + \frac{px}{q}$, supponendo esser $sen.GPn = p$, e $cos.GPn = q$. II.° Similmente si dimostra esser la $M'N' = -y - h$, il cui quadrato è lo stesso di quello della $y + h$. Ed essendo $CM' = RM' - RC = -x - b$, anche il quadrato di questo binomio sarà identico a quello della $b + x$: onde niun cangiamento risentesi nell' equazione, che si ritragga, come quì sopra. III°. E lo stesso può anche conoscersi nel valutare il rettangolo $e'Pn'$ coll' indicato metodo.

Ciò premesso sta

$$\frac{h^2a^2 - b^2c^2 + a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2} : \frac{h^2a^2 - b^2c^2 + a^2c^2}{p^2a^2 - q^2c^2} :: \frac{a^2c^2}{m^2a^2 - n^2c^2} : \frac{a^2c^2}{p^2a^2 - q^2c^2} \quad . \; . \; . \; C$$

imperocchè i due ultimi termini di quest' analogia non sono, che i primi divisi per lo stesso fratto $\frac{h^2a^2 - b^2c^2 + a^2c^2}{a^2c^2}$. Ed i due primi termini rappresentano i rettangoli EPN, ePn; e gli altri due esprimono i quadrati de' semidiametri, che son paralleli alle corde NE, ne*. Dunque da quest' analogia potremo ritrarre più conseguenze, di cui le principali sono quì recate in forma di teoremi. Cioè: * § 228.

§. 281. Teor. i. *Se due corde di un' istessa iperbole, o delle due opposte s' intersechino fuori di queste due curve; i rettangoli delle intere seganti nelle loro parti esterne saranno proporzionali a' quadrati de' diametri paralleli ad esse corde. E se mai sieno uguali questi due diametri ugualmente inclinati all' asse, anche que' rettangoli dovranno uguagliarsi fra loro.*

§. 282. Teor. ii. *Che se una di queste due seganti incontri una tangente dell' un' iperbole, o dell' altra; il rettangolo dell' intera segante nella sua parte esterna, e'l quadrato della tangente, saranno in duplicata ragione de' diametri di queste curve paralleli a quelle rette. Ed essendo uguali questi due diametri, dovrà essere quel rettangolo uguale al quadrato della detta tangente. E sarà anche vero, che le tangenti condotte alle iperboli da uno stesso punto debbano esser proporzionali a' diametri paralleli ad esse.*

§. 283. Teor. iii. *Se due corde di un' istessa iperbole s' intersechino entro la curva; i rettangoli de' loro segmenti saranno proporzionali a' quadrati de' diametri ad esse paralleli. Onde quelli saranno uguali, se questi il sieno.*

§. 284. Teor. iv. *Ma quando una corda dell' iperbole incontri due altre parallele fra loro; i rettangoli de' segmenti di queste dovranno essere proporzionali a' rettangoli de' segmenti di quella.*

§. 285. Teor. v. *E se in questa curva due corde parallele intersechino una tangente di essa; i rettangoli delle seganti nelle loro parti esterne dovranno esser proporzionali a' quadrati delle parti della tangente, che restano tra le respettive seganti e 'l contatto.*

§. 286. Cor. Dunque un cerchio può segare un' iperbole in quattro punti: ei può segarla in due punti, ed insiem toccarla in un altro: e può anche toccarla in due soli punti. Le quali cose discendono immediatamente dalle seconde parti de'tre primi teoremi.

§. 287. Scol. Ma i varj sintomi di quest' incontri si potran conoscer direttamente dal risolvere il problema, che quì propongo. *Dati di posizione un cerchio del raggio r, ed una data iperbole; determinare gl' incontri di queste due curve.* Or le tracce euristiche della richiesta soluzione sono le seguenti. *Si prendano l' equazioni al cerchio, ed all' iperbole, rapportando queste due curve ad un medesimo asse, e ad uno stesso principio delle ascisse x. E poi si elimini l' altra indeterminata y dalle dette equazioni.* Si avrà un' equazione biquadratica determinata, le cui radici reali dinoteranno le ascisse, che corrispondono alle ordinate pe' punti d' intersezione. E queste saranno reali, quando nel maneggio di quelle due equazioni siasi ritrovata la y uguale ad una funzione razionale della x. Intanto per maggior chiarezza di questi principj, e per le ulteriori conseguenze può leggersi la prop. XIII. co' suoi corollarj.

PROPOSIZIONE XLIII.

TEOREMA.

§. 288. Se da un punto esistente fuori delle due iperboli opposte cadano in una di queste curve due tangenti, ed una segante; una tal segante dovrà esser divisa armonicamente dalla curva, e dalla retta fra' contatti.

DIM. Si legga la dimostrazione della prop. XIV. dell' ellisse per aver quella del presente teorema.

PROPOSIZIONE XLIV.

TEOREMA.

§. 289. Se da un punto esistente fuori delle due iperboli opposte conducansi in una di queste curve due tangenti, e due seganti; le due corde, che passano per le due sezioni superiori, e per le inferiori rispettivamente, o saran parallele alla retta fra' contatti, o dovranno incontrarla in uno stesso punto.

DIM. Si legga la dimostrazione della prop. XV.

§. 290. COR. *E le tangenti, che conduconsi a questa curva da que' punti, che vi segna ciascuna delle divisate seganti, dovran convenire in uno stesso punto colla retta fra' contatti.*

PROPOSIZIONE XLV.

TEOREMA.

* *fig.* 36. §. 291. Nell'iperbole il rettangolo delle tangenti verticali AO, GT troncate da una qualunque tangente laterale MT è sempre uguale al quadrato del semidiametro parallelo a quelle due tangenti verticali. Ed un tal rettangolo n' è un massimo.

Dim. Si chiami α il semidiametro CA, che passi per lo contatto di una di quelle due tangenti, e γ il suo conjugato. E poi si esprimano per x, y le coordinate CN, NM, che appartengano al semidiametro CA. Sarà * $CP = \frac{\alpha^2}{x}$, la sot- * §. 240.
tangente PN, ch'è uguale a CN — CP, sarà dinotata dal fratto $\frac{x^2 - \alpha^2}{x}$. E sarà quindi $PA = CA - CA = \frac{\alpha}{x}(x - \alpha)$, e $PG = CP + CG = \frac{\alpha}{x}(x + \alpha)$. Onde dovrà esser la ragione di PN a PA uguale a quella di $x + \alpha$ ad α; e l'altra di PN a PG quanto quell'altra di $x - \alpha$ ad α, come può rilevarsi dalle indicate espressioni di tali rette. Ma per essere il triangolo PNM simile a ciascuno de' triangoli PAO, PGT sta PN : PA :: NM : AO, e PN : PG :: NM : GT. Dunque sarà ne' simboli delle anzidette ragioni

$$x + \alpha : \alpha :: y : AO = \frac{\alpha y}{x + \alpha}$$

ed

$$x - \alpha : \alpha :: y : GT = \frac{\alpha y}{x - \alpha}.$$

Onde dovrà risultarne

$$AO \times GT = \frac{\alpha^2 y^2}{x^2 - \alpha^2} = \gamma^2 \; *.$$ * §. 231.

Part. II. La dimostrazione di questa parte II. può attingersi da quella dell' ellisse prop. XVI.

§. 292. Cor. I. Dal paragone de' valori delle rette PN, PA, PG, PC si raccoglie dover essere PN : PA :: PG : PC; o, prendendo le loro analoghe, NM : AO :: GT : CR. Dunque sarà il rettangolo di NM in CR uguale a quello di AO in GT, e quindi al quadrato del semidiametro CB conjugato all' altro AC.

§. 293. COR. II. Cioè: *Quando una tangente di un'iperbole incontri un qualunque semidiametro secondario di essa curva, dee anche avverarsi, che questo semidiametro sia medio proporzionale tra l' ascissa, che nell' iperbole esterna corrisponde all'ordinata per lo contàtto, e tra quella parte della medesima ascissa, che resta fra la tangente, e 'l centro*; cioè CS : CB :: CB : CR.

PROPOSIZIONE XLVI.

PROBLEMA.

* fig 37. §. 294. Data l'iperbole ANn, ritrovar la linea, che passa pe' punti medj delle sue corde, le quali conducansi per un dato punto P*.

SOLUZ. La retta Nn sia una delle proposte corde, da' cui estremi N, n, e dal punto medio F intendansi menate le perpendicolari ND, nd, FE sull' asse della data iperbole: e la PH, condotta parallela al medesimo asse pel dato punto P, incontri ne' punti M, m, G quelle rette, e nel punto H il semiasse secondario. Inoltre si ponga PH $= b$, CH $= h$, PM $= v$, PG $= x$, FG $= y$. Sarà PG : GF :: PM : MN, pe' triangoli simili PGF, PMN, cioè $x : y :: v : \text{MN} = \frac{yv}{x}$. Onde dovrà essere la $\text{ND} = \text{MD} - \text{MN} = h - \frac{yv}{x}$, e la $\text{CD} = \text{PH} - \text{PM} = b - v$. Ma per natura della data iperbole* dee essere $\text{ND}^2 = \frac{c^2}{a^2} \times \text{CD}^2 - c^2$. Dunque ne' simboli di queste grandezze si avrà la sottoposta equazione

* §. 184.

$$h^2 + \frac{y^2 v^2}{x^2} - \frac{2hyv}{x} = \frac{c^2}{a^2}\,(b^2 - 2bv + v^2) - c^2,$$

che ordinata rispetto ad v riducesi nella seguente forma

$$v^2 + \left(\frac{2bc^2x^2 - 2ha^2yx}{a^2y^2 - c^2x^2}\right) v + etc. = o\,.$$

E quindi, per quel che ho dimostrato nell' ellisse*, sarà * §. 138.

$$\frac{ha^2yx - bc^2x^2}{a^2y^2 - c^2x^2} = x\,,\ \text{cioè}\ ha^2y - bc^2x = a^2y^2 - c^2x^2\,.$$

E si avrà finalmente l' equazione

$$\left(\frac{1}{2}h - y\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}b - x\right)^2 - \frac{c^2}{4a^2}\,(b^2 - h^2)$$

ch' è ad un' iperbole simile alla data (1).

PROPOSIZIONE XLVII.

PROBLEMA.

§. 295. Data l'iperbole ATM*, e dentro ad essa il punto P; vuol determinarsi la linea, ov' è allogato il concorso R delle due tangenti condotte per gli estremi N, n di una qualunque corda Nn, che passi per quel punto dato. *fig. 38.

Soluz. Dal centro C della data iperbole a quel punto R intendasi condotta la retta CR, che dovrà dividere la Nn in parti uguali nel punto F (2), incontrando la curva in T. Dai

---

(1) Se la grandezza b sia maggiore dell' altra h, l' equazione apparterrà all' iperbole interna: e se la b sia minore di h, ella dovrà appartenersi all' esterna. (*Ved.* §§. 184., 188.)

(2) Se la Nn non sia un' ordinata del semidiametro CT, le se-

punti R, T, F si abbassino le perpendicolari RS, TQ, FE sul semiasse AC della detta iperbole; e compita la figura, come nella prop. prec., si ponga PH $= b$, CH $= h$, CS$= v$, RS $= z$, e CQ $= t$, e quindi CE $= \frac{t^2}{v}$, per esser continuamente proporzionali le CS, CQ, CE al par delle loro a-
* §. 240. naloghe CR, CT, CF*. Ed essendo CS : SR :: CE : EF, per la similitudine de' triangoli CSR, CEF, sarà $v : z :: \frac{t^2}{v}$: EF $= \frac{zt^2}{v^2}$. Inoltre, per la simiglianza de' triangoli CSR CQT, sta pure CS : SR :: CQ : QT, cioè $v : z :: t$: QT $= \frac{tz}{v}$. E dovrà essere PG = PH — GH $= b - \frac{t^2}{v}$, e GF=GE—FE $= h - \frac{zt^2}{v^2}$. Cioè, per esibir distintamente i valori delle coor-
* §. 294. dinate della data iperbole, e della precedente locale*, saranno

$$CQ = t, \qquad e\ QT = \frac{tz}{v}$$

$$PG = b - \frac{t^2}{v}, \ e\ GF = h - \frac{zt^2}{v^2}.$$

Ciò posto, pongasi t per x, e $\frac{tz}{v}$ per y nell' equazione $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2$, e poi vi si determini la t^2. Avrassi, fatte le

---

miordinate ad esso semidiametro condottegli da' punti N, n, dovrebberlo incontrare in due diversi punti O, o. Dunque per la prop. 34. sarebbe CR : CT :: CT : CO, e CR : CT : : CT : Co, cioè CO=Co. Lo che è un assurdo.

convenienti riduzioni

$$t^2 = \frac{a^2c^2v^2}{c^2v^2 - a^2z^2} \;\ldots\ldots\; \mathrm{F}$$

Similmente si ponga $b - \frac{t^2}{v}$ per x, $h - \frac{zt^2}{v^2}$ per y nell'altra equazione $a^2y^2 - c^2x^2 = ha^2y - bc^2x$, ch' è la locale determinata nel precedente problema: e poi nel risultamento si pratichino gli ovvj riducimenti, e quegli altri, che vi si debbon fare per vi determinare la medesima t^2. Si otterrà

$$t^2 = \frac{bc^2v - a^2hz}{c^2v^2 - a^2z^2}\, v^2 \;\ldots\; \mathrm{G}$$

E finalmente dal pareggiare i valori della t^2 esibiti nell' equazioni F, G, si avrà $a^2hz = bc^2v - a^2c^2$, cioè

$$z = \frac{bc^2}{ha^2}\left(v - \frac{a^2}{b}\right) \;\ldots\; \mathrm{H}$$

E perciò

§. 296. TEOR. *La richiesta locale è una retta inclinata all' asse dell' iperbole per un angolo, la cui tangente trigonometrica è* $\frac{bc^2}{ha^2}$; *ed è poi* $\frac{a^2}{b}$ *la distanza del vertice di questo dal centro di quella.*

Infatti per rinvenir l' incontro della locale RV coll' asse della data iperbole dovrebbesi supporre la $z = o$. E divenendo anche zero il secondo membro dell' equazione H, dovrà risultare $v = \frac{a^2}{b}$: cioè la retta CV terza proporzionale dopo le due rette LC, CA, come per le sintetiche disquisizioni ella si rinviene. Ma la tangente dell' angolo AVR esprimesi per $\frac{bc^2}{ha^2}$ E ciò vuol dinotare, che la VR debba esser parallela alle ordinate del diametro, che passi per quel dato punto P. E potrà leggersi il §. 143, se ne abbisogni maggior chiarezza in ciò, che ho detto.

§. 297. SCOL. Finalmente siccome nell' ellisse §§. 32, 31, così nell' iperbole potrà dimostrarsi, che: *Il rettangolo delle parti di una tangente laterale, le quali restano tra il contatto, e due tangenti verticali, o gl' incontri di due semidiametri conjugati, sia uguale al quadrato del semidiametro parallelo ad essa tangente*. Ed ogni giovane potrà da que' §§. supplire le dimostrazioni delle verità indicate. Che anzi colla guida del §. 146, e delle teoriche precedenti ei potrà risolvere ciascuno de' seguenti problemi.

Condurre una comune tangente a due iperboli da te di sito, di specie, e di grandezza: o ad un' iperbole, e ad un' ellisse, che sien benanche date di grandezza, di specie, e di posizione.

CAPITOLO VII.

DE' FUOCHI DELLE IPERBOLI OPPOSTE .

§. 298. I primi punti, che presenta la genesi organica delle iperboli opposte, qual ne recai nel §. 171., non sono, che i loro fuochi, de' quali or debbo distintamente ragionare.

PROPOSIZIONE XLVIII.

TEOREMA.

§. 299. Chiamando x l'ascissa dal centro, ed in sull'asse, in una delle due iperboli opposte; sarà $\frac{ex}{a} - a$ il ramo, che le corrisponde dal fuoco di essa curva. Ed $\frac{ex}{a} + a$ dovrà esser quello che perverrebbe allo stesso punto dal fuoco dell' iperbole opposta.

DIM. Imperocchè il ramo FN*, per quel che si è detto nel §. 184, è uguale a $\sqrt{(y^2 + (e - x)^2)}$. Se dunque in questo radicale pongasi $\frac{c^2x^2}{a^2} - c^2$ per la y^2, e nel risultamento si facciano le convenienti riduzioni, si avrà la $FN = \frac{ex}{a} - a$. * fig 26.

E ciò l'è anche vero, quando la CL sia maggiore della CF; poichè il secondo de' due quadrati, che contengonsi in quel radicale, dovrà essere $(x - e)^2$, ch'è quanto $(e - x)^2$.

Ma l'altra fM essendo uguale ad $e + x$, con quella medesima sostituzione dovrà emergere $fN = \frac{ex}{a} + a$.

§. 300. COR. E perciò: *Ognuna di coteste inclinate esprimesi razionalmente per la sua ascissa*.

PROPOSIZIONE XLIX.

TEOREMA.

§. 301. La differenza delle rette, che da' fuochi delle iperboli opposte conduconsi ad un punto di una di queste due curve, è sempre uguale all'asse principale della figura. E l'ordinata all'asse, per lo fuoco di una di queste due curve, è quanto il parametro principale.

DIM. La verità della prima parte del proposto teorema comprendesi nell' indicata genesi di queste curve. Ed ella potrebbesi con ugual chiarezza ottenere, sottraendo dal valore della fN quell' altro della FN: poichè ne verrebbe immantinente $fN - FN = 2a$.

PART. II. Nell' equazione $y^2 = \frac{c^2x^2}{a^2} - c^2$ pongasi e per x. Si avrà in tal caso

$$y^2 = \frac{c^2e^2}{a^2} - c^2 = \frac{c^2}{a^2}(e^2 - a^2) = \frac{c^4}{a^2}$$

* §. 226. cioè $$y = \frac{c^2}{a} - \frac{1}{2}p\text{, e } 2y = p\text{*}.$$

§. 302. SCOL. Per la *linea di sublimità*, e pe' *punti di sublimità delle iperboli opposte* si ritengano le definizioni esibite nel §. 151. E si potrà conchiudere con pari eleganza essere $\frac{c^2}{e}$ *la distanza del punto di sublimità di una di queste due curve dal fuoco di essa*: cioè *terza proporzionale dopo l' eccentricità*, *e 'l semiasse conjugato*.

PROPOSIZIONE L.

TEOREMA.

§. 303. Le rette, che da' fuochi delle due iperboli opposte si tirano ad un punto di una di queste due curve, debbono restar ugualmente inclinate alla tangente condottale per tal punto. E 'l rettangolo di tali rette è uguale al quadrato del semidiametro conjugato di quello, che passa per l'anzidetto punto.

Dim. Part. 1. Da' fuochi F*, f delle iperboli opposte conducansi ad un punto M dell' iperbole AM le due rette FM, fM, ed in M la tangente MR: dico esser l' angolo FMR uguale all' altro fMR. Imperocchè la retta CR è * uguale ad $\frac{a^2}{x}$, posta l' ascissa CN $= x$; onde sarà la RF $=$ CF $-$ CR $= e - \frac{a^2}{x} = \frac{a}{x}\left(\frac{ex}{a} - a\right)$. E così pure potrà dimostrarsi esser la R$f =$ Cf + CR $= \frac{a}{x}\left(\frac{ex}{a} + a\right)$. Ma è poi chiaro di per se stesso, che stia $\frac{a}{x}\left(\frac{ex}{a} - a\right) : \frac{a}{x}\left(\frac{ex}{a} + a\right)$

* *fig.* 39.
* §. 195.

$:: \frac{ex}{a} - a : \frac{ex}{a} + a$. Dunque, prendendo le rette rappresentate da questi simboli (1), sarà RF : Rf :: FM : fM : e quindi

* 3. El. VI. dovrà esser l'angolo FMR uguale all'altro fMR*.

PART. II. Si chiami α il semidiametro CM, e γ il suo conjugato CQ; e poi dall'equazione $\alpha^2 = \frac{e^2x^2}{a^2} - c^2$, la qual si propose nel §. 191, tolgasi l'altra equazione $\alpha^2 - \gamma^2 = a^2 - c^2$ esibita nel §. 235, dovrà restare

$$\gamma^2 = \frac{e^2x^2}{a^2} - a^2 = \left(\frac{ex}{a} - a\right)\left(\frac{ex}{a} + a\right).$$

E quindi $$CQ^2 = FM \times fM.$$

§. 304. COR. I. Ed essendosi detto nel §. 215 essere il quadrato della normale $MK = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{e^2x^2}{a^2} - a^2\right)$ sarà

$$FM \times fM : MR^2 :: a : c^2.$$

Cioè

Nell' iperbole il rettangolo de' proposti rami sta al quadrato della normale condotta in esso punto, in duplicata ragione dell' asse principale al conjugato.

§. 305. COR. II. La semiordinata NM dell' iperbole AM si distenda fuori la curva in T, sinchè la NT eguagli la normale

* §. 215. MK; e la retta NT si chiami z. Sarà* $z^2 = \frac{e^2c^2}{a^4}x^2 - c^2$. E perciò

(1) Il mezzo più naturale, onde può analiticamente dimostrarsi la verità proposta, è il prender l'espressioni delle RE, Rf, e poi dimostrarle proporzionali a quelle de' rami FM, fM. Lo che ottiensi facilmente. Ma il sig. Mac-Laurin seguito fedelmente dall'Eulero si serve di certe geometriche preparazioni nel dimostrare la verità indicata, la prop. XXIV., ed alcune altre di questo argomento.

La locale del punto T *è un' altra iperbole, che ha il medesimo asse conjugato della proposta, e per semiasse principale la terza proporzionale in ordine all'eccentricità, ed al semiasse principale della primiera curva.* (Ved. §. 157.)

PROPOSIZIONE LI.

TEOREMA.

§. 306. In un' iperbole ciascun ramo sta alla distanza del suo estremo dalla linea di sublimità, come l'eccentricità al semiasse. E lo stesso ramo è quanto la semiordinata all' asse distesa per lo suo estremo insino alla tangente, che passi pel punto di sublimità di essa curva, e dalla stessa parte di quel ramo.

Dim. Sia LH* la linea di sublimità dell' iperbole AKM : * *fig.* 40.
l' ascissa CN, che corrisponde all' ordinata NM per l' estremo del ramo FM, sia x; sarà * $CL = \frac{a^2}{e}$, ed $LN = CN - CL$ * §. 195.
$= x - \frac{a^2}{e} = \frac{a}{e}\left(\frac{ex}{a} - a\right)$; laddove il ramo FM si è dimostrato uguale ad $\left(\frac{ex}{a} - a\right)$*. Ma quest' ultimo bino- * §. 299.
mio sta al precedente come e ad a. Dunque in tal ragione sarà anche FM ad NL, o ad MH.

Part. II. Ed essendo LF : FK :: LN : NE, pe' triangoli simili LFK, LNE, sarà ne' loro simboli* $\frac{c^2}{e} : \frac{a^2}{a} :: \frac{a}{e}\left(\frac{ex}{a} - a\right)$ * §. 302.
: NE; onde dovrà essere $NE = \left(\frac{ex}{a} - a\right) = FM$.

*

PROPOSIZIONE LII.

TEOREMA.

§. 307. Se all' estremo di un ramo dell' iperbole si tiri la normale alla curva, e poi su quel ramo si abbassi la perpendicolare dal concorso dell' asse e della normale; la parte del ramo troncatane verso quel punto estremo è sempre uguale semiparametro principale.

La dimostrazione di questo teorema può farsi sulle tracce di quella dell' ellisse prop. XXII. riscontrando la figura di questa proposizione, ed esprimendo il ramo FM per $\frac{ex}{a} - a$, e la normale MR per $\frac{c}{a}\sqrt{\left(\frac{e^2x^2}{a^2} - a^2\right)}$, come si è prescritto ne' §§. 299, e 215.

§. 308. COR. *Le perpendicolari, che da' due fuochi delle iperboli opposte si abbassano sopra una qualunque tangente di una di esse curve, contengono un rettangolo di costante grandezza, ch' è quanto il quadrato del semiasse conjugato.*

PROPOSIZIONE LIII.

TEOREMA.

§. 309. La retta, che dal centro di un' iperbole conducesi parallela ad un ramo, ed insino alla tangente, che vi si tiri per l' estremo di esso, è quanto il semiasse principale. Ed a questo semiasse l'è anche uguale quella parte del detto ramo, ch'è tra la tangente, e la parallela condottale dal centro.

DIM. Per la similitudine de' triangoli RFm*, RCg (ove le Cg, Cd sieno parallele al ramo Fm, ed alla tangente mR rispettivamente) sta RF : RC :: Fm : Cg, cioè ne' loro simboli *fig. 40.

$$e - \frac{a^2}{x} : \frac{a^2}{x} :: \frac{ex}{a} - a : \mathrm{C}g = a .$$

E sarà benanche la $md = a$, per essere un parallelogrammo la figura $md\mathrm{C}g$.

§. 310. SCOL. Con un calcolo guidato co' medesimi principj del §. 168. potrebbesi quì dimostrare, che: *La linea, la quale passa per gli estremi delle perpendicolari abbassate dal fuoco di una delle due iperboli opposte sulle tangenti di essa curva, sia la circonferenza del cerchio, che ha lo stesso centro delle iperboli, e 'l semiasse principale per suo raggio*. E con quel ragionamento, che impiegai nel §. 167, si potrà concludere un' altra verità importante. Cioè: *Se dal fuoco di un' iperbole cadano due rette sulla curva, e dagli estremi di questi rami le si conducano due tangenti; la retta, che unisce il detto fuoco col concorso delle tangenti, dovrà dividere l' angolo de' rami in parti uguali*.

CAPITOLO VIII.

DELLA GENESI, DELLA PARABOLA, E DE' SUOI DIAMETRI.

§. 311. DEF. XXX. Una verga ben diritta, e sottile vada strisciando con un suo estremo sopra una consimil verga immobile, rimanendole sempre perpendicolare in uno stesso piano; ed un filo flessibile, che in lunghezza eguagli la verga mobile, stia legato con un suo capo nell' altro estremo di questa verga, e coll' altro in un chiodetto fitto in quel piano. Si dirà *Parabola* la curva descrittavi da uno stiletto, che al muoversi di quella verga si spinga d' accosto ad essa, con mantenervi sempre teso il detto filo. Il punto segnato dal chiodetto in quel piano, ove si giaccion le due verghe, si dice *fuoco della parabola*. La retta, che vi si conduce per la direzione della verga immobile, suol dirsi *direttrice della parabola*, o *linea della sublimità di questa curva*. E vi si addomanda *ramo*, o *inclinata* ogn' incidente dal fuoco in sulla curva.

§. 312. Così, per la chiara intelligenza di queste cose, si
fig. 41. concepisca la riga HK fermata nel piano NKGM, e quivi stare la squadra OKG, che col suo lato KG combaci con quella riga. Inoltre il filo flessibile FNO lungo quanto l' altro lato KO della data squadra, stia legato con un suo capo all' estremo O di esso lato, e coll' altro nel chiodetto F fitto nel piano NKGM. Si dirà parabola la curva N A n descrittavi dallo stiletto N, che al dimenarsi della squadra lungo la riga HGK vi mantenga sempre teso il detto filo. Il punto F sarà il fuoco della parabola: e la retta menata per la direzione HK ne sarà la direttrice. E si dirà ramo, o inclinata ogni retta FN,

che unisca il fuoco della parabola con un qualunque punto del perimetro di essa.

§. 313. Cor. I. Ogni punto della parabola NAn tanto dista dal fuoco di tal curva, quanto dalla direttrice di essa. Cioè la FN è sempre uguale alla NK. E questo nuovo concetto può supplire quel geometrico rigore, che manca nell' addotta genesi della parabola.

§. 314. Cor. II. *Nella parabola ogni corda, ch' è parallela alla direttrice, vien divisa in parti uguali dalla perpendicolare alla medesima direttrice condottale dal fuoco.*

Infatti sia la Nn parallela alla KH, ed FG la perpendicolare alla medesima KH per lo fuoco F, la quale incontri la Nn in M. Sarà, compito il parallelogrammo $NKHn$, la retta NK uguale alla nH: e quindi* anche FN uguale ad Fn. E sarà pure $FN^2 - FM^2 = Fn^2 - FM^2$, cioè $NM^2 = nM^2$, ed $NM = nM$. * §. 313.

§. 315. Def. XXXI. La retta, che si distende per lo fuoco della parabola perpendicolare alla direttrice di essa, suol dirsi *asse della parabola; il cui vertice principale* è il punto di questa curva segnatovi da quella retta.

§. 316. Def. XXXII. Ogni corda della parabola parallela alla direttrice è un' *ordinata all' asse*: ed ogni metà di questa dovrà dirsi *semiordinata*. E l' *ascissa*, che le corrisponde, è quella parte dell' asse, ch' ella ne tronca insino al vertice. Finalmente ciascuna semiordinata della parabola, e la sua ascissa diconsi *coordinate*.

§. 317. Così NM l'è una semiordinata della parabola; AM la corrispondente ascissa; ed AM, NM si diranno coordinate; le quali nel nostro caso sono rettangolari, e si potranno esprimere per le x, y.

§. 318. DEF. XXXIII. *Il parametro principale di una parabola* è la quadrupla distanza del fuoco dal vertice principale di essa curva: ed ei suol dinotarsi per p.

* §. 313. §. 319. COR. I. Essendo* GA uguale ad AF, aggiuntavi AM di comune, sarà GM uguale ad AM + AF. Ma GM, o sia KN è uguale al ramo FN. Dunque sarà FN uguale ad AM + AF.

§. 320. COR. II. Cioè: *Nella parabola ogni ramo dee superare per la quarta parte del parametro principale l'ascissa, che corrisponde all' ordinata pel suo estremo.*

§. 321. SCOL. Ho stimato di dover omettere le definizioni delle tangenti, sottangenti, normali, e sunnormali della parabola, potendomi attenere a quelle, che già recai per l' ellisse ne' §§. 30, 32, 33.

PROPOSIZIONE LIV.

PROBLEMA.

§. 322. Dalla proposta genesi della parabola NAn ritrarre l' equazione fra le coordinate rettangolari AM, MN di essa curva.

fig. 41. SOLUZ. Si chiamino x, y coteste coordinate AM, MN, e p il parametro dell' asse AD. Sarà FM $=$ AM $-$ AF $= x - \frac{1}{4}p$, ed FN $=\sqrt{(\text{MN}^2+\text{FM}^2)} = \sqrt{\left(y^2+(x-\frac{1}{4}p)^2\right)}$.

* §. 313. Ma la retta FN dee* pareggiare la NK, o la sua uguale MG. Dunque ne' simboli di queste grandezze si otterrà la seguente

equazione $\sqrt{(y^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2)} = x + \frac{1}{4}p$; ch' elevata a quadrato, e ridotta in convenevol modo, darà

$$y^2 = px, \text{ ed } y = \pm\sqrt{px} \quad . \; . \; . \; . \; A.$$

§. 323. Teor. *Nella parabola il quadrato di qualunque semiordinata all' asse adegua il rettangolo del parametro nell' ascissa, che le corrisponde. E le ordinate di questa curva debbono essere in sudduplicata ragione delle loro ascisse.*

§. 324. Cor. La parabola ha i due soli rami curvilinei ANS, A*n*Q; e questi divergon dall'asse all' infinito, ed in simil guisa.

PROPOSIZIONE LV.

PROBLEMA.

§. 325. Date di posizione la retta H'R*, e l' asse AD della data parabola QAN, determinare gl' incontri di questa curva con quella retta. **fig. 41.*

Soluz. Se la data retta H'R sia parallela all' asse AD della data parabola, pe' principj del precedente problema potrà intendersi agevolmente in qual punto quella retta debba intersecare la proposta curva.

Ma se la retta H'R incontri il detto asse nel punto R sopra del vertice della parabola NAQ, si chiami b la distanza RA di questi due punti, e t la tangente dell' angolo QRD. E supposto esser Q un de'punti d' intersezione, si ordini all' asse la QD, e si ponga la RD $= x$. Sarà DA $= x - b$, e DQ $= tx$. E dovendo essere per la prop. prec. DQ $= p \times$ DA, sarà ne' simboli di queste grandezze $t^2 x^2 = px - pb$, cioè

$$x^2 - \frac{px}{t^2} + \frac{pb}{t^2} = 0 \; . \; . \; . \; . \; A$$

E supponendovi, che la t non sia maggiore di $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{b}}$, o che non vi abbia luogo il caso impossibile; le radici dell'equazione A, che sono amendue vere, disegneranno le RD, RM', pe' cui estremi dovran passare le ordinate pe' richiesti punti d'intersezione.

Che se il punto R′ cada sotto del vertice A della parabola proposta, e pongasi come quì sopra $R'D = x$, ed $R'A = b$, sarà $AD = x + b$. E l' equazione del problema, qualor si ricavi nella stessa guisa del caso precedente, sarà

$$x^2 - \frac{px}{t^2} - \frac{pb}{t^2} = o.$$

Or le radici di questa sono amendue reali, e l' una di esse è positiva, l' altra negativa, come l' è ben noto. Dunque l' uno degl' incontri della retta H″R′ colla parabola QAN dovrà farsi al di sotto dal dato punto R′, e l' altro al di sopra.

Finalmente suppongansi tra se uguali le radici dell' equazione A, e quindi la QR tangente della parabola proposta. Sarà in tal caso la $x = \frac{p}{2t^2}$, cioè $x^2 - \frac{px}{2t^2} = o$. Sicchè

* V. pr. 3. sottraendo quest' equazione dall' altra A, dovrà rimanervi *

$$-\frac{px}{2t^2} + \frac{pb}{t^2} = o, \text{ cioè } x = 2b, \text{ e } t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{b}}.$$

§. 326. COR. I. *Ogni retta; che conducasi entro la parabola parallela ad una tangente di essa curva, dovrà incontrare il perimetro in due punti.*

Imperocchè in tal caso la t non è maggiore di $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{b}}$

nè quindi può avervi luogo il caso impossibile, come si sa dall'equazioni quadratiche.

§. 327. Cor. II. *Nella parabola la sottangente è dupla dell'ascissa, che corrisponde all'ordinata per lo contatto.*

§. 328. Cor. III. Dal fuoco F * della parabola ANB si tiri la FN al contatto di essa curva colla retta NK. Sarà FK uguale ad FN: poichè * ciascuna di esse vien dinotata per lo binomio $x + \frac{1}{4}p$. E conducendo dal detto fuoco la perpendicolare FG alla tangente NK, e dal vertice A la retta AG parallela all'ordinata NN′, le due rette FG, AG dovran convenire in uno stesso punto della tangente NK, dovendo ciascuna di quelle rette secar quest'altra in parti uguali *. *fig. 42. * §. 31. * §. 328.

§. 329. Cor. IV. Dunque: *Le perpendicolari, che dal fuoco della parabola si tirano sulle tangenti laterali di essa curva, dovranno giacere co' loro estremi nella tangente verticale*

§. 330. Cor. V. Si chiami m il seno dell'angolo acuto K fatto dalla tangente NK coll'asse. Sarà * KF : FA :: $KF^2 : FG^2$ :: $1 : m^2$. Onde sarà la FK, *o il ramo* FN *uguale a* $\frac{p}{4m^2}$. * 8.El.VI.

PROPOSIZIONE LVI.

TEOREMA.

§. 331. La sunnormale nella parabola è di costante grandezza, cioè quanto il semiparametro principale.

DIM. Preparata la figura, come nel §. 33, si ponga
* §. 327. l'ascissa AM $= x$, e quindi la sottangente MK $= 2x$*. Ed essendo, pe'triangoli simili KMN, QMN, KM : MN :: MN : MQ, cioè $2x : \sqrt{px} :: \sqrt{px} :$ MQ; sarà la sunnormale MQ $= \frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$.

§. 332. COR. E sarà la normale NQ $= \sqrt{(\mathrm{MQ}^2 + \mathrm{MN}^2)}$ $= \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + px)}$. Onde se la semiordinata MN si protragga in L, sinchè ne pareggi la normale NQ, e la ML si chiami z, sarà $z^2 = \frac{1}{4}p^2 + px = p(\frac{1}{4}p + x)$. E ciò ne dinota, che: *Il luogo di queste normali sia un'altra parabola dello stesso parametro della primiera curva; ma il vertice, e'l fuoco della detta locale estolgonsi rispettivamente nel punto di sublimità, e nel vertice della parabola proposta*.

§. 333. SCOL. Questa ricerca potrebbesi istituire col metodo Cartesiano, come fu praticato per quella per l'ellisse, nel §. 45.

PROPOSIZIONE LVII.

PROBLEMA.

*fig. 42. **§. 334. Dal dato punto P *, che stia fuori della parabola NAN′, condurre una tangente a questa curva.**

SOLUZ. Supponghasi esser la retta NP tangente della parabola nel punto N, passando pel dato punto P, ed ella ne incontri l'asse AM di tal curva nel punto K. Sarà la sottangente KM dupla dell' ascissa AM corrispondente al punto N del contatto, o della KA. Dal detto punto P si tiri la PT perpendicolare all' asse della parabola, e la PE ad esso parallela. E poi si ponga $AM = AK = x$, $PT = h$, $TA = b$; e quindi $MK = 2x$, $KT = x - b$, ed $MN = \sqrt{px}$. Ed essendo MN : MK :: TP : TK; pe' triangoli simili KMN, KTP, sarà ne' simboli di quelle rette $\sqrt{px} : 2x :: h : x - b$, ovvero $px : 4x^2 :: h^2 : (x - b)^2$, cioè $p : 4x :: h^2 : (x - b)^2$. Onde dovrà essere $4h^2x = p(x - b)^2$. E costruendo quest' equazione di secondo grado, si avranno le due ascisse determinatrici delle due tangenti, che dal dato punto P si posson condurre alla sottoposta parabola NAN'.

§. 335. Cor. I. Da un punto dato fuori di una parabola si posson condurre due tangenti ad essa curva, l' una da una parte, e l'altra dall' altra di quella retta, che dal detto punto si tiri parallela all' asse.

§. 336. Cor. II. E se quel punto stia in sul perimetro parabolico; una sola tangente potrà condurglisi: e la costruzione del problema sarà in tal caso assai chiara. Imperocchè ordinata all' asse, e da quel punto una retta, si prolunghi la sua ascissa oltre del vertice, finchè la parte protratta adegui la detta ascissa, e poi si unisca l' estremo di questa retta con quel punto: *tal congiugente sarà la tangente richiesta*; come dal coroll. II. della prop. LVI. ben si rileva.

PROPOSIZIONE LVIII.

PROBLEMA.

* *fig.* 43. §. 337. Data la parabola AMC * ritrovar la linea, che passa pe' punti medj delle infinite corde Mm, *ec.* parallele alla tangente CK.

Soluz. Si pratichi quella stessa geometrica preparazione, che vedesi per l'ellisse nella prop. vi. E poi si pongano uguali ad v, z le coordinate AR, RO del punto medio O della corda Mm, la NA $= \omega$, la *tang*.VMO $= h$, e sia m il seno, ed n il coseno del detto angolo. Sarà NR $=$ MV $= v - \omega$, VO $= h(v - \omega)$, ed RV $=$ MN $=$ RO $-$ VO $= z + h(\omega - v)$.
* §. 322. E dovendo essere * $MN^2 = p\omega$, si avrà ne' simboli della MN la seguente equazione

$$z^2 + 2hz(\omega - v) + h^2(\omega - v)^2 = p\omega$$

che ordinata rispetto ad ω, darà

$$\omega^2 + \frac{2hz - 2h^2 v - p}{h^2}\omega + v^2 + \frac{z^2}{h^2} - \frac{2zv}{h} = 0 \quad . \therefore \text{A}$$

E per le ragioni addotte nella citata prop. vi. dovrà essere

$$\frac{2h^2 v + p - 2hz}{2h^2} = v, \text{ cioè } z = \frac{p}{2h} = \frac{pn}{2m}.$$

§. 338. Teor. *La linea, che passa pe' punti medj delle corde di una parabola parallele ad una qualunque tangente di essa curva, è una retta parallela all' asse, distandone da questo per* $\frac{p}{2h}$.

§. 339. Def. xxxiv. Ogni retta, che da un punto della parabola si conduce parallela all' asse, è *un diametro della figura*. Le *sue ordinate* sono quelle corde della parabola, che vi si distendon parallele alla tangente di tal curva per lo vertice di esso. Le loro *ascisse* sono i segmenti del diametro, che restano tra 'l vertice di questo, e quelle corde. Ciascuna ascissa, e la sua semiordinata diconsi *coordinate*. E finalmente il *parametro di un diametro* è la quadrupla distanza, che ha dal fuoco della parabola il vertice di esso diametro.

§. 340. Cor. I. I punti medj delle ordinate ad un diametro della parabola stan per diritto fra loro, e col vertice di esso. Dunque una retta, che unisca due di quest' infiniti punti, dovrà passare pe' rimanenti.

§. 341. Cor. II. Conducendo nella parabola due corde parallele fra loro, la retta, che ne congiunge i punti medj, è un diametro della parabola. Ed ogni corda, che sia perpendicolare a questo diametro, sarà un' ordinata all' asse.

PROPOSIZIONE LIX.

PROBLEMA.

§. 342. Data l'equazione della parabola ACm per le coordinate rettangolari AN, NM, ritrovar quella, che ne intercede tra le coordinate obblique CO, OM di essa curva. * fig. 43.

Soluz. Nell' equazione A del problema precedente pongasi per la z il suo valore $\frac{pn}{2m}$, che dianzi si è ritrovato*. Do- * §. 337.

vrà divenire uguale a $2v$ il coefficiente del secondo termine: e le grandezze $\frac{z^2}{h^2}$, e $\frac{2zv}{h}$, che osservansi nell' ultimo termine, diverranno $\frac{p^2 n^4}{4m^4}$, e $\frac{pn^2 v}{m^2}$ rispettivamente. Dunque con tal sostituzione dovrà l' equazione A cangiarsi in quest' altra

$$\omega^2 - 2v\omega + v^2 + \frac{p^2 n^4}{4m^4} - \frac{pn^2 v}{m^2} = o$$

cui potrà darsi la seguente forma

$$\left(\frac{v - \omega}{n}\right)^2 = \frac{p}{m^2}\left(v - \frac{n^2 p}{4m^2}\right) \quad .\ .\ .\ .\ \text{B}$$

Ciò premesso, si chiami x la retta CO, ed y la MO; si vedrà chiaramente essere la $y = \frac{v - \omega}{n}$, e la $x = v - \frac{n^2 p^2}{4m^2}$ Imperocchè essendo MO : MV :: 1 : n, e ne'loro simboli y : $v - \omega$ :: 1 : n, sarà $y = \frac{v - \omega}{n}$. Ed essendo $CF^2 = z^2 = \frac{n^2 p^2}{4m^2}$ per quel che si è detto quì sopra, sarà $AF = \frac{z^2}{p} = \frac{n^2 p}{4m^2}$. E quindi $AR - AF = v - \frac{n^2 p}{4m^2}$; e finalmente la x, che dinota la CO, sarà $v - \frac{n^2 p}{4m^2}$. Dunque l' equazione B ricevendo le x, y per le v, z, ed ω, si cambierà nell' altra $y^2 = \frac{px}{m^2}$

* §. 322. ch' è pariforme a quella di già recata per l'asse*. E per essere $\frac{p}{m^2}$

*§. 330, 339. il parametro del diametro CQ *, potrà in tal proposito stabilirsi la verità seguente.

§. 343. Teor. *Il quadrato di una qualunque semiordinata di un diametro della parabola è uguale al rettangolo della corrispodente ascissa nel parametro di esso diametro.*

ALITER.

§. 344. Pongansi le coordinate CO, OM rispettivamente uguali ad x, y; la $OR = CF = a$, e quindi $AF = \frac{a^2}{p}$. Sarà $OV = my$, $MV = ny$, e con ciò $MN = VR = OR - OV = a - my$; ed AN, ch'è uguale ad $AR - RN = AF + FR - MV$, sarà $\frac{a^2}{p} + x - ny$. Ma per la natura della parabola dee essere $MN^2 = p \times AN$. Dunque ne'valori di queste rette avrassi

$$a^2 + m^2 y^2 - 2amy = a^2 + px - npy.$$

Cioè, fatte le riduzioni, sarà

$$y^2 + \frac{np - 2am}{m^2} y = \frac{p}{m^2} x \; . \; . \; . \; . \; . \; C$$

E conducendo la normale CG al punto C della parabola dee stare $CF : FG :: MV : VO$, a cagione de' triangoli simili CFG, MVO, cioè $a : \frac{1}{2}p :: n : m$. Dunque sarà $np = 2am$.

E l'equazione C ridurrassi ad $y^2 = \frac{p}{m^2} x$, come quì sopra (1).

§. 345. Cor. 1. La semiordinata NM * del diametro AQ pongasi uguale ad a, e la sua ascissa $AM = b$. E due * *fig.* 42.

(1) Alcuni moderni analisti per rilevar quest' ultima conseguenza sogliono maneggiare le seguenti equazioni, $sen. \phi . sen. \theta = o$, $sen. \phi^2 = o$, $b . sen. \theta - p \cos. \theta = o$, $b^2 - 2ap = o$.

altre coordinate CS, SA dello stesso diametro dicansi y, x;
* *fig.* 42. e p il parametro di esso. Sarà * $a^2 = pb$, ed $y^2 = px$. Onde dovrà essere $a^2 - y^2 = p(b - x)$, ovvero NEN' $= p \times$ CE, compito il parallelogrammo MC. Ed in simil modo può dimostrarsi, che sia NHN' $= p \times$ VH.

§. 346. COR. II. Dunque: *Se da più punti di una parabola conducansi altrettante rette parallele ad un diametro di una tal curva, prolungandole insino ad un' ordinata di esso; quelle incidenti saranno proporzionali a' rettangoli de' rispettivi segmenti della detta ordinata.*

PROPOSIZIONE LX.

TEOREMA.

§. 347. Per qualunque diametro della parabola si avvera, che la sottangente sia dupla dell' ascissa corrispondente all'ordinata per lo contatto.

* *fig* 42. DIM. Da un punto P, che stia fuori della parabola NAN'* e della direzione dell' asse AM, intendasi condotta un' incidente PN su questa curva, e per N la semiordinata NO a quel diametro, che passerebbe per lo punto P. E poi si ponga PO $= x$, PC $= b$, il parametro di CO $= f$, *sen.* P $= m$, *sen.*PNO $= n$, e quindi CO $= x - b$. Ed essendo n ad m, come PO, cioè x ad NO, sarà NO $= \frac{mx}{n}$. E poichè per
* §. 343. la natura di tal curva* dee essere NO$^2 = f \times$ CO, sarà ne' va-

lori di queste rette $\frac{m^2x^2}{n^2} = f(x - b)$. Sicchè ordinando siffatta equazione dovrà emergerne

$$x^2 - \frac{fn^2x}{m^2} + \frac{fn^2b}{m^2} = o \ . \ . \ . \ A$$

Ma nella supposizione, che l'incidente PN sia tangente della curva, le due radici dell'equazione A* diventano tra se uguali, cioè la $x = \frac{fn^2}{2m^2}$. Dunque sarà $x - \frac{fn^2}{2m^2} = o$, ovvero * §. 31.

$$x^2 - \frac{fn^2x}{2m^2} = o \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ B$$

E togliendo dall'equazione A l'altra B, dovrà restare

$$-\frac{fn^2x}{2m^2} + \frac{fn^2b}{m^2} = o$$

cioè $x = 2b$, ovvero $PO = 2CO$.

§. 348. Cor. 1. Di quì si vede un agevol mezzo da poter condurre una tangente alla parabola NAn dal punto P dato fuori di essa curva. Cioè dal punto P si meni la PE parallela all'asse AQ; e fatta la CO uguale alla PC, si distenda per O la corda nN parallela alla tangente della curva in C, e poi si congiungano le rette Pn, PN. *Queste saranno le due tangenti menate dal punto* P *alla sottoposta parabola* NAn.

§. 349. Scol. 1. La tangente NP della parabola NAN′ incontri in K l'asse AM di questa curva, ed in D una semiordinata RV al detto asse. E poi si ponga $KA = c$, $KR = x$, $RV = y$, $RD = z$, e *tang*. $K = t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{c}}$*. Sarà AR* §. 325. *in fine*.

*7. El. II. $= x - c$, $y^2 = px - pc$, e $z^2 = t^2 x^2 = \frac{px^2}{4c}$. Ma * essendo $x^2 + 4c^2 > 4cx$, è $x^2 > 4cx - 4c^2$, cioè $\frac{x^2}{4c} > x - c$, e quindi $\frac{px^2}{4c} > px - pc$. E prendendo le grandezze rispettivamente uguali a queste, che ho quì paragonate, dovrà essere $z^2 > y^2$, e $z > y$. Dunque tutti i punti della retta NP, tranne il solo N, dovranno giacer fuori della curva NAN′: ond' ella in virtù della definizione VIII. sarà tangente della parabola NAn. E con questi analitici ripieghi, e colla guida dell' indicata definizione si potrebbe nelle curve coniche dimostrare, che sien tangenti certe rette, che vi si conducono. Ma in tal rincontro l' equazione del problema può condizionarsi ad

* §. 31. avere due radici uguali*: onde le intersezioni della curva, e di quella retta, cui si rapporti la detta equazione, dovranno raccorsi in un sol punto. E per questa via più spedita, e chiara, che in questo corso didascalico più volte ho calcata, perviensi a dimostrar tangente una tal retta.

§. 350. SCOL. Se nella parabola il quadrato di ciascuna semiordinata ad un qualunque diametro vi pareggia il rettangolo del parametro nell' ascissa che dal vertice le corrisponde; nelle altre due curve coniche non sono uguali questi due spazj. Imperocchè il quadrato della detta ascissa moltiplicato per lo rapporto del parametro al diametro dinota nell' iperbole l' eccesso del primo di que' due spazj sull' altro, e nell' ellisse n' è il difetto. E ciò può arguirsi dall' equazioni $y^2 = pz + \frac{pz^2}{2a}$, ed $y^2 = pz - \frac{pz^2}{2a}$ rapportate per gli assi di queste curve ne' §§. 254, e 79, e che dagli assi potran facilmente a' loro diametri trasferirsi. Onde per tal riflesso gli antichi geometri chiamarono queste tre curve *parabola*, *iperbole*, *ellisse*, che nel nostro idioma suonano *adeguante*, *eccedente*, *deficiente* (1). Ed in fine sarà dicevol chiusura di questo argomento il recarvi quella verità, di che io mi valsi come principio nel tesser geometricamente la dottrina de' diametri di queste curve (2). Cioè:

Se ad un punto di un diametro di una di esse curve si elevi una perpendicolare terza proporzionale in ordine all'ascissa, ed alla semiordinata, che corrispondono al detto punto; l'estremo di essa perpendicolare dovrà essere allogato in una retta data di posizione.

Per ciò dimostrare, si chiami v quella retta MI perpendicolare al diametro AM di una curva conica NAN′, e vi si ponga l'ascissa $AM = z$, la sua semiordinata $MN = y$, p il parametro del diametro AM, $2a$ la lunghezza di esso: onde l'equazione generale di questa curva dovrà essere $y^2 = pz \pm \frac{pz^2}{2a}$ ove il segno $+$ dee militare per l'iperbole, il $-$ per l'ellisse, e per la parabola la $2a$ dee essere infinita, sarà per la proposta condizione $AM \times MI = MN^2$, cioè $vz = pz \pm \frac{pz^2}{2a}$, ed $v = p \pm \frac{pz}{2a}$, ch'è un'equazione ad una retta data di sito. Cioè nel-

(1) I nomi delle tre indicate curve traggon l'origine dalle tre voci dell' idioma Greco, *παραβαλλειν*, *ελλειπειν*, *ὑπερβαλλειν*, *adaequare*, *deficere*, *excedere*.

(2) Vedi la prop. 7. delle sezioni Coniche dal Giannattasio, ediz. seconda, e seg.

la parabola una tal retta è parallela al detto diametro, come l'è noto dall' addotta equazione, la quale dal supporsi $\frac{pz^2}{2a}=o$ degenera in $v=p$; e nelle altre due curve ella riducesi ad $v=\frac{p}{2a}(2a\pm z)^2$. Intanto questa retta soleva dirsi *regolatrice* dagli antichi geometri, e serve a rinvenire i parametri di esse curve.

CAPITOLO IX.

DELLE TANGENTI, E DELLE SEGANTI DELLA PARABOLA.

PROPOSIZIONE LXI.

TEOREMA.

§. 351. Se due corde di una parabola s'intersechino dentro, o fuori di una tal curva; i rettangoli di que' loro segmenti, che restano tra la curva e'l loro incontro, saran proporzionali a' parametri di que' diametri, a' quali le dette corde son ordinate.

SOLUZ. Dal punto P*, ove s'intersecano le due corde NE *ne*, fuori, o dentro la parabola NA*e*, si tiri la PG parallela all'asse AM, e da' punti P, N si abbassino sulla retta AM le perpendicolari PR, NM; e poi si ponga PR $= h$, AR $= b$, PN $= x$, *sen*.NPG $= m$, *cos*.NPG $= n$. Sarà NG $= mx$, PG $= nx$, NM $=$ NG $+$ GM $= mx + h$, AM $=$ RM $-$ RA $= nx - b$. Sicchè dovendo* essere NM$^2 = p \times$ AM, sarà ne' simboli di queste grandezze $m^2x^2 + h^2 + 2hmx = pnx - pb$. Ed ordinando quest' equazione rispetto ad x, sarà * fig. 44. * §. 322.

$$x^2 + \frac{hm - np}{m^2}x + \frac{h^2 + pb}{m^2} = o \;.\;.\;.\; A$$

Onde dovrà essere, per la teorica dell' equazioni algebriche, il rettangolo NPE uguale ad $\frac{h^2 + pb}{m^2}$. E se chiamisi μ il seno dell'angolo GP*e*, si potrà conchiudere, come dianzi, essere $\frac{h^2 + pb}{\mu^2}$ l' espressione del rettangolo nPe. Dunque sarà NPE : $nPe :: \frac{ph + b^2}{m^2} : \frac{pb + h^2}{\mu^2} :: \frac{p}{m^2} : \frac{p}{\mu^2}$. Ed essendo $\frac{p}{m^2}$, e $\frac{p}{\mu^2}$

*§.330.339. i parametri de' diametri cui le NE, ne sono ordinate *, sarà vero il proposto assunto.

§. 352. Cor. I. Se dal punto P voglia condursi una segante alla sottoposta parabola NAE, talchè il rettangolo NPE sia uguale al quadrato dell' incidente PH, che pervenga alla parte concava della parabola, e che esprimo per K; dovrà farsi $\frac{pb^2 + h^2}{m^2} = K^2$, onde ne diverrà l'ignota $m = \pm \frac{1}{K}\sqrt{(pb+h^2)}$ Cioè per soddisfare al quesito dovran farsi al dato punto P della retta PG, e d' ambe le parti di essa i due angoli uguali NPG, nPG, ciascuno de' quali abbia per seno $\frac{1}{K}\sqrt{(pb + h^2)}$.

§. 353. Cor. II. *Le tangenti, che da un punto preso fuori di una parabola conduconsi ad essa curva, sono in sudduplicata ragione de' parametri corrispondendi a' punti di contatto.*

Imperocchè, come può inferirsi dal presente teorema, i quadrati di quelle tangenti sono proporzionali a'parametri suddetti.

PROPOSIZIONE LXII.

TEOREMA.

§. 354. Se a due diametri della parabola, che sieno ugualmente distanti dall' asse, si tirino ovunque due ordinate; per gli estremi di queste rette può sempre passare un cerchio. E le perpendicolari, che da' detti estremi conduconsi sull'asse, son tali, che quelle due, che restan dall'una parte dell'asse, sien prese insieme uguali a quelle dell'altra parte.

DIM. PART. I. Le due corde Nn, N$'n'$, che sieno ordinate de' diametri BD, CE ugualmente distanti dall' asse AM, s' intersechino entro la parabola in G. Sarà per la prec. prop. NGn ad N$'$Gn', come il parametro di BD a quello di CE, cioè in ragion di uguaglianza*. E perciò essendo uguali i due* rettangoli NGn, N$'$Gn', un cerchio potrà descriversi pe' quattro punti N, n', n, N$'$, che sono gli estremi delle dette ordinate. E lo stesso ragionamento avrà luogo, quando queste due ordinate s' intersechino fuori della parabola. *fig. 45. *§. 339. 351.

PART. II. Si chiamino a, e le perpendicolari, che da' punti N, n' si tirino sull' asse AM, cioè le NM, $n'm'$: e poi per α, ε si disegnino le N$'$M$'$, nm perpendicolari calate sul medesimo asse da' punti N$'$, n. E finalmente pongasi la DM $=$ EM$' = \omega$. Sarà la ND $=$ NM $-$ DM $= a - \omega$; e l' altra nV $= nm + m$V$= \varepsilon + \omega$. Ma per essere i triangoli rettangoli DNH, nVH uguali e simili, la retta ND è uguale alla nV. Adunque sarà $a - \omega = \varepsilon + \omega$; e quindi $a - \varepsilon = 2\omega$. Or nella stessa maniera può dimostrarsi che sia $\alpha - e = 2\omega$. Laonde sarà $a - \varepsilon = \alpha - e$, e con ciò $a + e = \alpha + \varepsilon$, ovvero NM $+ n'm' =$ N$'$M$' + nm$ (1).

(1) Questo teorema, che ad istigazione di certi geometri francesi fu dimostrato dall' illustre Schooten, vien da lui proposto con eleganza nel seguente modo, che può agevolarne l' intelligenza della prop. 62. (*Ved. pag.* 331 *vol.* 1. *Geom. Cart.*): *Si circulus parabolam in pluribus punctis secuerit, a quibus ad axem ex utraque parte per-*

§. 355. COR. I. Se la retta $N'n'$ fluisca verso il punto C con moto a se parallelo, ella ne diverrà tangente della parabola, quando le sezioni N', n' si raccolgano in C. Sia dunque CO cotesta tangente, ed incontri la corda Nn nel punto O; sarà $CO^2 = NOn$. E prolungando la CO, finchè si unisca in R coll' asse prodotto di tal curva, la congiunta RB sarà benanche tangente della parabola in B, e sarà uguale alla RC.

§. 356. COR. II. Dunque: *Un cerchio può segar la parabola in quattro punti. Ei può segarla in due punti, ed insiem toccarla in un altro. E può benanche toccarla in due soli punti.*

Ma si vedrà nel seguente problema, che un cerchio non possa in più di quattro punti segare una parabola*.

PROPOSIZIONE LXIII.

PROBLEMA.

§. 357. Dati di sito, e di grandezza il cer-
* fig. 46. chio FRG*, e la parabola FAG; determinare analiticamente gl' incontri di queste due curve.

SOLUZ. Dal centro E del dato cerchio si meni nell' asse AL della data parabola la perpendicolare ED; e poi si ponga

---

pendiculares demittantur: erit ea, quae ex una parte axis reperitur, aequalis illis, quae sunt ab altera parte. Quod si vero ab utraque parte in duobus punctis illam secet: erunt similiter duae ab una parte aequales duabus ab altera parte. Ma la dimostrazione analitica, che vi si legge, occupa undici pagine; ond' io ho proccurato per comodo de' giovani di sostituirne quest' altra assai breve.

la retta ED $= h$, la DA $= b$, il parametro principale della detta parabola uguale ad 1, e 'l dato raggio uguale a K. E supponendo il punto G essere uno de' richiesti incontri, ed AK, KG le coordinate, che gli corrispondono, si ponga l' ascissa AK $= x$, e la semiordinata KG $= y$. Sarà $x = y^2$ *, GM $=$ MK $+$ KG $= h + y$, EM $=$ AK $-$ AD $= x - b = y^2 - b$. Sicchè dovendo essere $EM^2 + MG^2 = EG^2$, sarà $y^4 - 2by^2 + b^2 + h^2 + y^2 + 2hy = K^2$. E le radici reali di quest' ultima equazione saranno le semiordinate corrispondenti a' richiesti punti d' intersezione.

* §. 332.

§. 358. Cor. I. Volendo proporre la detta equazione alla maniera Cartesiana, sicchè nel primo membro vi resti l' ignota elevata al massimo esponente e positiva, e nel secondo gli altri suoi termini con que' segni, ed in que' luoghi, che loro si convengono, sarà

$$y^4 = (2b - 1)y^2 - 2hy + K^2 - b^2 - h^2 \quad \ldots\ldots \quad A$$

E questa medesima equazione sarebbesi ottenuta col divisato artifizio, e con porvi la FL $= -y$, qual si conviene nell' aver posta la KG $= +y$.

§. 359. Cor. II. Ma se suppongasi la FL $= y$, se ne avrà un' altra col $+ 2hy$ nel secondo membro. Cioè sarebbe

$$y^4 = (2b - 1)y^2 + 2hy + K^2 - b^2 - h^2 \quad \ldots\ldots \quad B$$

Onde può stabilirsi, che quando in quest' emergente equazione rinvengasi $+ 2hy$ nel secondo membro, le semiordinate positive della parabola debban essere dalla parte del centro di quel cerchio, che le si è combinato. E ch' elleno vi debbano stare dalla parte opposta, quando nella detta equazione si ritrovi $- 2hy$. Lo che può esser di chiarimento alla costruzione Cartesiana de' problemi solidi: come si vedrà qui appresso.

§. 360. COR. III. Rapportando queste due curve ad un medesimo asse, e ad uno stesso principio delle ascisse, e poi eliminando dalle loro equazioni una di quelle due indeterminate, che vi si contengono, dovrà nascerne un'equazione biquadratica determinata, nè potrà mai ottenersene un' altra di grado superiore. Or le radici reali di quest' emergente equazione, com' è chiaro, vi dinotano le ascisse, o le semiordinate corrispondenti a' punti d' intersezione. Dunque:

Il massimo numero de' punti, ne' quali la data parabola, e'l cerchio s' intersecano, non può esser che quattro.

§. 361. COR. IV. Questo ragionamento può benanche applicarsi a due altre curve coniche, che s' intersechino; donde potrem ricavarne la medesima illazione del precedente corollario.

§. 362. COR. V. Si dinotino per α, β, γ, δ le radici reali dell' equazione A. E lo stesso varrebbe convenevolmente per l' altra B. E poi si prendano nella tangente verticale AX le parti AV, AZ uguali alle α, β, ch' io suppongo positive; * §. 359. e le contrarie AT, AS uguali alle γ, δ, che sien negative*. Dovranno essere α^2, β^2, γ^2, δ^2, le corrispondenti applicate * §. 322. nella parte esterna della parabola*, cioè sempre reali. Dunque:

Alle radici reali della indicata equazione dovran corrispondere intersezioni reali della data parabola, e del cerchio.

§. 363. COR. VI. Avendo eliminata la x dall' equazioni al cerchio, ed alla parabola, che son date di sito, e di grandezza, l' emergente equazione vien sempre mancante del secondo termine. E dovrà svanirne l'ultimo termine, quando si ritrovi il quadrato del raggio di quel cerchio uguale alla somma de' quadrati delle coordinate del centro di esso, cioè $K^2 = h^2 + b^2$. Ed in tal caso la detta equazione si deprimerà al terzo grado: e'l cerchio dovrà passare pel vertice principale della parabola.

§. 364. Scol. La costruzione geometrica di un' equazione è un problema inverso di quello delle intersezioni di due linee. Imperocchè nel problema diretto si soglion proporre due curve date di sito, e di grandezza, e si vuol ritrovare un' equazione, le cui radici reali vi dinotino le ascisse, o le ordinate corrispondenti a' punti d' intersezione. Laddove nell' inverso vien data un' equazione algebrica, e si domanda di rinvenire, e combinare due convenevoli curve, sicchè le ordinate, o le ascisse corrispondenti alle loro intersezioni vi dinotassero le radici reali di essa equazione. Ma quanti principj geometrici, ed analitici dovrei quì chiarire per adeguatamente risolvere il secondo di questi due problemi? Io dunque per non digredire oltremodo mi atterrò alla Cartesiana costruzione delle cubiche, e biquadratiche equazioni, che vien riputata la più perfetta, e la più generale di quante si potrebbero da' geometri agognare (1). Ed in vero delineando una parabola in un piano, e con quel parametro, che ne aggrada, con questa sola curva si potrà costruire una qualunque biquadratica, o cubica equazione, sol che vi si combini un convenevol cerchio. E per tal modo *i problemi solidi* parran disciolti alla maniera de' *problemi piani*: poichè nell' effettiva costruzione di quelli non si hanno a descrivere, che soli cerchi, e congiunger rette. Ma un altro pregio in questo metodo vi ammiro, ed è, che nella combinazione di tali curve il numero delle radici reali è quanto quello delle intersezioni di esse curve: onde in questo me-

(1) Così parla Cartesio nella *pag.* 88. della sua Geometria: *Adeo ut haec regula omnium, quas qui exoptare queat, generalissima sit, et perfectissima.*

todo i forti dubbj del Rolle non han luogo. Ma nè anche può objettarsi, che l' equazione biquadratica $x^4 = px^2 \, . \, . \, qx \, . \, . \, r$ proposta alla maniera Cartesiana contenga termini *asimmetrici*, o di diverse dimensioni, come ne appajono. Imperocchè un' equazione del quarto grado, che sia mancante del secondo termine, dovrebbe avere la seguente simmetrica forma $x^4 = \, . \, . \, e^2x^2 \, . \, . \, . \, f^3 \, x \, . \, . \, g^4$. Or supponendo una retta uguale all' unità, la terza proporzionale dopo di essa, e l' altra retta e dee esser e^2, che può chiamarsi p. E, se facciasi 1 ad $\frac{f^2}{1}$, come f ad una quarta q, sarà $q = \frac{f^3}{1}$. E finalmente, coll' instituirsi quest' altra analogia $1 : \frac{g^2}{1} :: \frac{g^2}{1} : r$, ne viene $r = g^4$. Onde la prima delle due proposte equazioni dovrà identificarsi colla seconda.

§. 365. DEF. XXXV. Una retta dicesi *radice di un' equazione algebrica*, se le condizioni, che han dovuto imporsi ad essa retta nell' averla geometricamente esibita, si possan ridurre in quell' equazione.

§. 366. Se una tal retta si potesse analiticamente dinotare in grandezze note, co' criterj proposti ne' Corsi elementari dovrebbesi conoscere, s' ella sia radice della detta equazione. Ma nell'equazioni superiori al quarto grado invan si spera cotesta analitica valutazione: ed ella suol essere assai molesta, ed inviluppata in moltissime equazioni di terzo, e di quarto grado. Onde a tal uopo fia necessario l' usare il criterio proposto nella definizione. Ed in vero la retta KG*, che nel problema precedente fu determinata dal combinare insieme la parabola FAG, e 'l cerchio FGR, vi riceve le due seguenti condizioni. Per la natura della parabola la semiordinata KG dee esser media pro-

* *fig.* 46.

porzionale tra la sua ascissa KA, e 'l parametro principale di essa curva, che si è supposto uguale ad 1. E per la natura del cerchio dee essere $(KG + KM)^2 = EG^2 - EM^2$. E poichè coteste due condizioni ci porgono l' equazione A, di questa ne sarà una radice la retta KG. Or di un tal criterio si valse il sagacissimo Cartesio nell' esplorare siffatte radici: e da esso mi son' io ingegnato d' intessere l' addotta definizione, che può esser di lume all' argomento.

PROPOSIZIONE LXIV.

PROBLEMA.

§. 367. Data un' equazione biquadratica, sgombra del secondo termine, e proposta alla maniera Cartesiana nel seguente modo $y^4 = py^2 + qy + r$; esibire geometricamente le sue radici reali, se pur ve ne sieno.

Soluz. Si confronti la proposta equazione coll'altra B, ch'è

$$y^4 = (2b - 1)y^2 + 2hy - h^2 - b^2 + K^2$$

per determinare le b, h, K. Sarà dal parallelo de' loro termini analoghi

$$p = 2b - 1,\ q = 2h,\ r = K^2 - h^2 - b^2,$$

e quindi

$$b = \frac{1+p}{2},\ h = \frac{1}{2}q, K = \sqrt{\left[\frac{1}{4}q^2 + \left(\frac{1+p}{2}\right)^2 + r\right]}.$$

Dunque delineando una parabola, che abbia l' unità per parametro principale, e l' asse per direttrice della costruzione, si descriva il cerchio, che abbia per raggio il valore della K, e per centro quel punto, le cui coordinate sieno $\frac{1}{2}(1+p)$, ed $\frac{1}{2}q$; le sue intersezioni colla detta parabola saranno gli estremi di quelle semiordinate di questa curva, che vi dinotano le radici reali della detta equazione. E le vere staranno in quella parte della parabola, ov' è il centro del detto cerchio, le false nella parte opposta. Che se nella data equazione, e disposta come sopra, vi fosse $-qy$, ella si dovrà paragonare coll' equazione A per ricavarne i valori del raggio del cerchio da descriversi, e delle coordinate del centro di esso. Lo che si ottiene in un consimil modo; ma le radici false di essa equazione staranno nella parte della parabola, ov' è il centro del detto cerchio, e le vere nell' opposta parte. E per la chiara, e ritenevole intelligenza di queste cose gioverà esibire la regola Cartesiana.

§. 368.» Descritta la parabola con un parametro dato, che » pongasi uguale ad 1, si prenda nel suo asse un punto (1) di» stante dal vertice per $\frac{1}{2}$. Inoltre dal detto punto tolgasi nell' as» se una retta uguale alla metà del coefficiente del terzo termine: » ed ella ne proceda verso il vertice, o alla parte opposta, se» condochè il detto termine sia negativo, o positivo; e dall' e» stremo di questa retta si eriga al medesimo asse una perpendi» colare uguale alla metà del coefficiente del quarto termine, e

(1) Questo punto, come si vedrà in appresso, è il centro del cerchio osculatore della parabola nel vertice principale. Ed ognuno potrà conoscere, che le regole di questa costruzione Cartesiana siensi ritratte dal problema precedente, e non già dalla teorica de' luoghi geometrici, come si crede.

» da quella parte, che ne aggrada: e poi si tiri una retta dal-» l'estremo della detta perpendicolare al vertice della parabola. » Inoltre al quadrato di questa congiungente dovrà unirsi il ret-» tangolo del parametro nell' ultimo termine, se pur questo sia » positivo, e togliersi nell'altro caso: e poi converrà estrarre la » radice da quel binomio, o da questo apotome «. *Il cerchio, che tien per centro l' estremo della detta perpendicolare, e per intervallo l' indicata radice, sarà quello, che si ricerca. E, se la data equazione sia cubica, il raggio di questo cerchio sarà quanto la detta congiungente*. Ma per le radici vere, e per le false dovrà serbarsi il criterio di già esposto nel §. precedente.

PROPOSIZIONE LXV.

PROBLEMA.

§. 369. Dato il punto P* dentro la parabola FAG, condurle per esso una normale. *fig. 47.

SOLUZ. Sia F un di que' punti, ove la richiesta normale incontri la data parabola: e si chiamino x, y le coordinate AE, FE di esso punto; b, h le coordinate AM, MP del dato punto P, e per p si dinoti il parametro principale. Sarà FI $=$ FE $-$ MP $= y - h$, PI $=$ AM $-$ AE $=$ $b - x = b - \frac{y^2}{p}$. E dovendo essere FI : IP :: FE : ER, pe' triangoli simili FIP, FER, sarà ne' simboli di quelle rette $y - h : b - \frac{y^2}{p} :: y : \frac{1}{2}p$, cioè $\frac{1}{2}py - \frac{1}{2}ph = by - \frac{y^3}{p}$.

Ed ordinando quest'equazione alla maniera Cartesiana, si otterrà

$$y^3 = p\left(b - \frac{1}{2}p\right)y + \frac{1}{2}p^2 h \ldots . A$$

COSTRUZ. Prodotta la MR in g, sicchè sia Mg = ER $= \frac{1}{2}p$, si divida la gA in parti uguali nel punto D, e presa la Mn quarta parte di MP; si compia il parallelogrammo MB. E poi centro B intervallo BA si descriva il cerchio, che segnerà nella parabola i punti addimandati.

§. 370. COR. 1. Se nell'equazione A pongasi px per y^2, si avrà, fatte le ovvie riduzioni, $xy + \left(\frac{1}{2}p - b\right)y = \frac{1}{2}ph$. Or siffatta equazione è ad un' iperbole tra gli assintoti. Dunque colla combinazione di questa curva, e della parabola proposta si potrà risolvere il presente problema. Ma la prima delle recate soluzioni è più elegante di quest' altra (1).

---

(1) Un problema solido, il cui soggetto sia una parabola conica, dee stimarsi risoluto colla massima eleganza, quando vi si combini un cerchio ad indagarne i punti soddisfacenti. E perciò è di gran pregio questa soluzione ordita dall' illustre Giacomo Bernoulli, e destinata a divinare quella dell' Ugenio. E di una pari perfezione n'è quell' altra del sommo Newton *nel voler condurre nella parabo-*
*fig. 42. *la* AVN* *il ramo* FN, *che vi comprendesse un' aja data col ramo* FM, *il quale passa per lo vertice principale*. Per la qual cosa dal punto N, che suppongasi essere il richiesto, si abbassi la perpendicolare NM sull' asse AM della detta parabola. E si ponga questa semiordinata NM = y, il parametro principale uguale ad 1, l' ascissa AM = x = y^2. E l' aja AFN suppongasi uguale ad $1 \times m$. Sa-

§. 371. COR. II. Colla similitudine de' medesimi triangoli FIP, FER potrà risolversi per l'ellisse il presente problema: ma con questo divario, che postavi l'ascissa dal centro uguale ad x, e ad a, c il semiasse maggiore, e'l suo conjugato, debba essere la sunnormale MR $= \frac{c^2x}{a^2}$, ed $x = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2 - y^2)}$.

§. 372. SCOL. Questo problema, che sembra recato a solo fine d'illustrare il metodo Cartesiano, contiene un' importante ricerca, che meritò le cure de' sommi Geometri Ugenio, e Giacomo Bernoulli. Ed anzi dal risultamento di esso potremo facilmente l'evoluta della parabola raccorre. Del che in appresso.

---

rà il rettangolo FMN $= \frac{1}{2}y\left(y^2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{8}y$; e 'l trilineo AMN, che più appresso si mostrerà uguale a due terzi del parallelogrammo delle coordinate AM, MN, sarà uguale a $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}y^3$. Onde dovrà essere il trilineo AFN, che vi pareggia AMN $-$ FMN, uguale a $\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{8}y = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{8}y$. Ma ei per le condizioni del problema dee pareggiare $1 \times m$. Dunque sarà $y^3 = -\frac{3}{4}y + 6m$. *E quindi per ritrovarsi quel punto* N *si dovrà dal punto medio della* FA *elevare una perpendicolare ad* AF *uguale a* 3m *e poi descrivere un cerchio, che abbia per centro l' estremo di detta perpendicolare, e per raggio la sua distanza dal vertice della parabola*: come l'ha praticato l'ill. Newton, occultandone l'analisi di già recata.

PROPOSIZIONE LXVI.

TEOREMA.

§. 373. Se da un punto esistente fuori di una parabola conducansi due tangenti ad essa curva, ed una sola segante, che non sia diametro; cotesta segante sarà divisa armonicamente dalla detta curva, e dalla retta fra' contatti.

Vedi la dimostrazione della proposizione XIV.

PROPOSIZIONE LXVII.

TEOREMA.

§. 374. Se da un punto esistente fuori di una parabola conducansi due tangenti ad essa curva, e due seganti, niuna delle quali sia diametro; la retta, che ne unisce i contatti, e le altre due, che passano per le sezioni superiori, e per le inferiori rispettivamente, dovranno segarsi in uno stesso punto.

§. 375. Cor. *E la medesima retta fra' contatti dovrà passare per lo concorso di quelle due tangenti, che conducansi alla curva ne' punti segnati da una di quelle seganti.*

Vedi la dimostrazione della proposizione XV.

PROPOSIZIONE LXVIII.

PROBLEMA.

§. 376. Per un punto dato nello spazio parabolico nTAE * sia comunque condotta la corda Nn, ed a' suoi estremi le due tangenti NR , nR ; vuol ritrovarsi il luogo del concorso di queste due rette. * *fig.* 48.

Soluz. Dal dato punto P , e dal concorso R delle proposte tangenti si tirino le PH , RF parallele all'asse AQ della parabola , e la prima di queste due rette incontri in H la tangente verticale AH . Da' punti R , F si calino sul detto asse le perpendicolari RS , FE ; e la PH convenga colla FE in G . Inoltre sieno PH $=b$, AH $=h$, PG $=x$, GF $=y$, e PM $=\omega$, Sarà , PG : GF :: PM : MN, pe' triangoli simili PGF, PMN , cioè $x : y :: \omega :$ MN $= \frac{\omega y}{x}$. E dovrà essere ND $= h - \frac{\omega y}{x}$, AD $= b - \omega$. Ma per la natura della parabola ATn dee * essere ND$^2 = p \times$ AD . Dunque ne' simboli di queste grandezze ottiensi un' equazione , che ordinata rispetto ad ω ha la seguente forma * §. 321.

$$\omega^2 + \frac{px^2 - 2hyx}{y^2} \cdot \omega + \frac{h^2x^2 - pbx^2}{y^2} = 0$$

E dovrà essere, per quel che si è detto altrove $\frac{hyx - \frac{1}{2}px^2}{y^2} = x$

cioè $$hy - \frac{1}{2}px = y^2 \quad . \; . \; . \; . \quad \text{A}$$

Ciò posto , si chiamino z , v le coordinate RS , SA del concorso R delle proposte tangenti . Sarà la GF $=$ GE $-$ FE $= h - z$. E , compiti i due parallelogrammi ST , SM , si vedrà esser $TQ = RS = z$, $AQ = \frac{TQ^2}{p} = \frac{z^2}{p}$, e quindi QS $= AQ - AS = \frac{z^2}{p} - v$. Ma la sottangente RF è dupla di RT. Dunque sarà $VG = RF = \frac{2z^2}{p} - 2v$, e $GP = PH - HV - VG = b + v - \frac{2z^2}{p}$. Se dunque nell' equazione A pongasi per la x il trinomio $b + v - \frac{2z^2}{p}$, e per la y il binomio $h - z$, si avrà un' equazione, in cui contraggonsi molti termini: ed ella poi si riduce nella semplicissima forma lineare

$$z = \frac{p}{2h}(b + v) \quad . \; . \; . \quad B$$

E perciò

§. 377. TEOR. I. *La linea, che passa pe' concorsi delle divisate tangenti, è una retta inclinata all' asse della parabola per un angolo, la cui tangente trigonometrica è* $\frac{p}{2h}$; *ed è b la distanza del vertice di questo angolo da quello della detta curva.*

§. 378. TEOR. II. *La linea, che passa pe' punti medj della corde di una parabola, le quali s' interseghino in un dato punto, l' è anche una parabola similmente posta colla data, ed avente un sudduplo parametro*: come può conoscersi dall' equazione A ridotta nella seguente forma.

$$\left(\frac{1}{2}h - y\right)^2 = \frac{p}{2}\left(\frac{h^2}{2p} - x\right) \quad . \; . \; . \; . \quad C$$

§. 379. COR. Se quel dato punto, in che s'intersecano le corde della parabola, sia il fuoco di tal curva, la grandezza b diverrà $\frac{1}{4}p$, $h=o$, e l'equazione B darà $v=-\frac{1}{4}p$. Onde potrà conchiudersi, che: *Debbon sempre concorrere nella linea della sublimità della parabola due tangenti menate ad essa curva per gli estremi di ciascuna corda, che passi per lo fuoco.*

ALITER*.

* *fig.* 49.

§. 380. Sia Mm una qualunque corda di una curva conica, ed ella vi si conduca per lo dato punto P. Le tangenti de' punti M, m si uniscano in T, donde si tiri la TE parallela all' asse AB di essa curva, che supponghiamo essere un' ellisse avente il centro in C. E si dicano x, y le coordinate CN, MN del punto M; α, ε le altre CV, VT del punto T: intendendo esserne b, h, come si è praticato altrove, quelle del dato punto P. Ed infine dicasi t la tangente trigonometrica dell' angolo MTO. Sarà * $\frac{y}{x} : \frac{1}{t} :: c^2 : a^2$, e

* §. 52.

quindi $$y=\frac{c^2x}{a^2t} \quad \ldots\ldots\ldots \text{A}$$

Ed essendo $\text{TO}=\alpha-x$, $\text{MO}=y-\varepsilon$, sarà

$$y-\varepsilon=t(\alpha-x) \quad \ldots\ldots \text{B}$$

Sicchè eliminando la t dalle due equazioni A, B, ne risulterà $a^2y^2+c^2x^2+a^2\varepsilon y+c^2\alpha x=o$. E sottraendo quest' ultima equazione da quella dell'ellisse *, ch'è $a^2y^2+c^2x^2=a^2c^2$, si avrà la sottoposta equazione lineare

* §. 16.

$$a^2\varepsilon y+c^2\alpha x=a^2c^2 \quad \ldots\ldots \text{C}$$

che appartiensi ad una retta condottavi per M. Ma collo stesso metodo può dimostrarsi, che l' equazione C debba appartenere ad una rètta, che passi per lo punto m. Dunqu' ella sarà l' equazione alla corda Mm, come quella che ha i suoi estremi in M, m. Ed una tal' equazione avrà luogo per qualunque valore delle variabili x, y.

Intanto suppongasi la corda Mm passare per lo dato punto P, le cui coordinate sieno b, h: e poi nell' equazione C pongasi b per x, h per y; ne nascerà quest' altra equazione

$$a^2\varepsilon h + c^2\alpha b = a^2c^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathrm{D}$$

che vi dinota il rapporto delle coordinate del detto punto P a quelle delle concorso T delle divisate tangenti. Ma conducendo per lo punto P un' altra corda nell' ellisse, dee militarvi la medesima equazione D, variandone le sole coordinate, che appartengonsi al nuovo punto di concorso di esse tangenti. Se dunque nell' equazione D ponghansi le due variabili v, z per le costanti α, ε, che vi si ravvisano, l' emergente equazione apparterrà alla richiesta locale. Ed ella sarà, come sopra *,

$$a^2hz + c^2bv = a^2c^2, \text{ cioè } z = \frac{c^2b}{a^2h}\left(\frac{a^2}{b} - v\right).$$

* §. 141.

§. 381. Nello stesso modo si risolve il problema per l' iperbole. Ma rispetto alla parabola dovrà farsi AN $= x$, ed AV $= \alpha$. E sarà $y - \varepsilon = t(\alpha + x)$ l' equazione alla retta TM, ed $\frac{1}{2}p = ty$ quella della tangente in M. Dunque eliminando la t da queste due equazioni avrassi $y^2 - \varepsilon y = \frac{1}{2}p(\alpha + x)$. E, se tolgasi quest' ultima equazione da quella della parabola, ch' è $y^2 = px$, resterà $\varepsilon y = \frac{1}{2}p(x - \alpha)$. Ciò premesso, si ponga in quest' equazione b per x, h per y; ella diverrà $eh = \frac{p}{2}(b - a)$: e surrogandovi le variabili v , z per le a , e , si avrà , come sopra (1) .

$$z = \frac{p}{2h}(b - v) \;\ldots\ldots\; E$$

§. 382. SCOL. Volendo ad istruzione de' giovanetti spinger più oltre quest' argomento , io passo a risolvere un problema , che parmi da altri non risoluto . Ed è di : *Ritrovare il luogo del concorso di due tangenti condotte ad una curva conica , per gli estremi di una qualunque sua corda , che tocchi un' altra curva data* . Per chiarezza di soluzione io quì simplifico i dati del problema , supponendo la prima di queste due curve essere un' ellisse , i cui semiassi sieno , come si è convenuto sin dal principio , a , c ; e l' altra un cerchio del raggio r , ed avente il medesimo centro dell' ellisse . Inoltre si chiamino v, z le coordinate CV , VT* di quel punto di concorso , ed x , y quelle altre del contatto della detta corda col dato cerchio , cioè le CK , KP . Dovrà * in tal punto aver luogo la seguente equazione $a^2zy + c^2vx = a^2c^2$, ovvero quest' altra $a^2z\sqrt{(r^2 - x^2)} + c^2vx = a^2c^2$, ponendovi $\sqrt{(r^2 - x^2)}$ per y . E liberando da' radicali quest' ultima equazione , e poi ordinandola rispetto ad x , si avrà

* *fig.* 49.

* §. 380.

$$x^2 - \frac{2a^2c^4v}{a^4z^4 + c^4v^2}\,x + \frac{a^4c^4 - a^4z^2r^2}{a^4z^2 + c^4v^2} = o \;\ldots\ldots\; A$$

(1) L' equazione E , e l' altra B del §. 376. sono le medesime , ancorchè in quella si ravvisi $+v$, e $-v$ in quest' altra : imperocchè in queste due ricerche si sono prese le ascisse v a parti opposte. Intanto la presente soluzione del problema si è istituita senza dipendere dalla locale de' punti medj delle corde condotte in esse curve per un dato punto.

Or nel contatto di quella corda col proposto cerchio si debbo-
* §. 31. no eguagliare le due radici dell' equazione A *, ch'è di secondo grado. Dunque il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine dovrà pareggiarne il terzo. Onde riducendo queste grandezze uguali si otterrà

$$z^2 = \frac{c^4}{r^2} - \frac{c^4}{a^4} v^2 = \frac{c^4}{a^4}\left(\frac{a^4}{r^2} - v^2\right).$$

Cioè a dire: *La richiesta locale è un' ellisse, che ha per semiasse maggiore la terza proporzionale dopo le grandezze* r, a; *e per minore l' altra terza proporzionale in ordine ad* r, c. E quì ben si vede essere sparita dall' equazione A la variabile x, che in altre simiglianti ricerche avrebbesi dovuta con qualche stento dell' analista eliminare. Ma un altro problema di questo più importante dovrà fregiare siffatte disquisizioni sulle tangenti.

PROPOSIZIONE LXIX.

PROBLEMA.

* *fig.* 50. §. 383. Data la parabola MAm*, ritrovare il luogo del concorso T delle tangenti TM, Tm di essa curva, le quali contengano un angolo uguale al dato KGH.

Soluz. Quest' angolo per comodità della soluzione intendasi costituito all' estremo G dell' ordinata GH della parabola, condottavi per lo fuoco F; e 'l suo lato GK incontri in K la HK parallela all' asse. Onde sarà data la HK. Dal punto T si meni la TO parallela al detto asse, ed essa incontri in O la semiordinata per lo contatto M. E l'ordinata GH si distenda, sinchè incontri la KL perpendicolare alla GK.

Ciò posto, si chiami p il parametro principale della parabola, o la GH, e si ponga $HK = b$, $TO = VN = x$, $TV = z$, $AV = v$; e queste due ultime variabili sieno le coordinate del punto T. Inoltre la tangente trigonometrica dell'angolo MTO sia uguale a t, e quella di $KGH = \frac{b}{p}$. Sarà $AN = x - v$, $MO = tx$, e quindi $MN = MO + ON = tx + z$. E dovendo essere $MN^2 = p \times AN$, per la natura delle parabola, si avrà ne' simboli di queste grandezze la seguente equazione $t^2x^2 + 2ztx + z^2 = px - pv$, che ordinata rispetto ad x trasformasi in quest' altra

$$x^2 + \frac{2zt - p}{t^2}x + \frac{z^2 + pv}{t^2} = o \; . \; . \; . \; . \quad A$$

Ma a cagione della tangente MT sono eguali le due radici dell' equazione A, ch' è di secondo grado: dunque dovrà essere $\left(\frac{2zt - p}{2t^2}\right)^2 = \frac{z^2 + pv}{t^2}$. E riducendo quest' ultima equazione, e poi ordinandola rispetto a t, se ne otterrà quest' altra,

$$t^2 + \frac{zt}{v} - \frac{p}{4v} = o \; . \; . \; . \; . \quad B$$

le cui radici sono

$$-\frac{z}{2v} + \frac{1}{2v}\sqrt{(z^2 + pv)}, \text{ e } -\frac{1}{2z} - \frac{1}{2v}\sqrt{(z^2 + pv)}$$

e la prima di esse è vera, dinotando la tangente trigonometrica dell' angolo MTO, e l' altra, ch' è falsa, esprime quella dell' angolo mTO, ch' è negativo. Ma da' principj della Trigonometria analitica, è noto esser $tang. (\varphi + \theta)$ uguale a $\dfrac{tang.\,\varphi + tang.\,\theta}{1 - tang.\,\varphi \times tang.\,\theta}$. Dunque pel problema presente si avrà

$$\frac{\dfrac{\sqrt{(z^2 + pv)}}{v}}{1 - \dfrac{p}{4v}} = \pm \frac{b}{p};$$ onde liberando quest'equazione da radici, ed ordinandola rispetto a z, si avrà finalmente

$$z^2 = \frac{b^2}{p^2}\left(v^2 - \frac{1}{2}pv - \frac{p^3 v}{b^2} + \frac{p^2}{16}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad C$$

ch' è un' equazione all' iperbole, e conforme a quella, che il March. de l' Hopital rinvenne per altre vie, e con giudiziose geometriche preparazioni.

COSTRUZ. Dal punto R della sublimità della parabola, ed in sull' asse prodotto, prendasi la RC quarta proporzionale in ordine alle tre rette LH, HG, GF, sarà C il centro di cotesta iperbole, e 'l fuoco F della parabola sarà l' un de' fuochi di essa curva. E 'l semiasse principale dovrà esser benanche una quarta proporzionale in ordine alle tre rette LH, HG,
* §. 171. GI. Ond' ella potrà descriversi* agevolmente.

§. 384. COR. I. *La convessità dell' iperbole* BST *sarà il luogo de' vertici di quegli angoli acuti, di cui ciascuno è uguale al dato* KGH; *ed i suoi lati sono tangenti della parabola* MA*m*: *laddove il concavo dell' altra iperbole* b a d *è un simil luogo degli angoli ottusi uguali al conseguente del detto angolo* KGH.

§. 385. COR. II. E si conoscerà dal calcolo quassù disteso, che l' asse conjugato di queste iperboli stiane al principale, come la tangente dell' angolo dato al raggio. E da un tal rapporto, e dall' espressioni di TV^2, e di $CV^2 - CS^2$ potrà verificarsi l' addotta costruzione.

§. 386. Cor. III. Supponendo esser retto il dato angolo KGH, dovrà farsi infinita la retta KH, o la b, che la rappresenta. E perciò nell' equazione C dovran rimanervi que' soli termini, che ritrovansi moltiplicati per b^2; essendo gli altri disprezzabili rispetto ad essi. Cioè in tal caso l' equazione C degenera in quest' altra

$$\frac{b^2}{p^2}\left(v^2 - \frac{1}{2}pv + \frac{p^2}{16}\right) = o$$

che ridotta ci offre la $v = \frac{1}{4}p$.

§. 387. Cor. IV. E di quì si raccoglie, che: *I vertici degli angoli retti, i cui lati sieno tangenti di una parabola data, debban giacere nella linea di sublimità di essa curva.*

ALITER

§. 388. La tangente MT della parabola MAm si prolunghi, finchè incontri in D l' asse di tal curva: e condottavi per M la normale MP, si ponga la DV $= x$, e vi rimangan salde le altre indicazioni quassù proposte. Sarà* l' ascissa AN $=$ AD $=$ AV $+$ VD $= v + x$; e quindi* la semiordinata NM $=$ $\sqrt{(pv + px)}$. Ma pe' triangoli simili MNP, TVD sta NP : NM :: TV : VD, cioè $\frac{1}{2}p : \sqrt{(pv + px)} :: z : x$, ovvero $\frac{1}{4}p : v + x :: z^2 : x^2$. Dunque sarà $\frac{1}{4}px^2 = z^2 v + z^2 x$; ed ordinando rispetto ad x siffatta equazione, avremo quest' altra

* §. 327.
* §. 323.

$$x^2 - \frac{4z^2}{p}x - \frac{4vz^2}{p} = o \ . \ . \ . \ . \ \mathrm{A}$$

le cui radici sono

$$\frac{2z^2}{p} + \frac{2z}{p}\sqrt{(z^2 + pv)}, \text{ e } \frac{2z^2}{p} - \frac{2z}{p}\sqrt{(z^2 + pv)}$$

e vi deggion dinotare le due rette VD, Vδ rispettivameute. Ma le frazioni $\frac{TV}{VD}$, $\frac{TV}{V\delta}$ sono le tangenti degli angoli TDV, TδV. Dunque coteste tangenti dovranno avere i seguenti valori

$$\frac{p}{2z+2\sqrt{(z^2+pv)}}\,,\quad \frac{p}{2z-2\sqrt{(z^2+pv)}}.$$

Or suppongasi essere $\pm\frac{b}{p}$ la tangente del dato angolo MTm, che per la natura del triangolo TDδ dee pareggiare i due angoli interni, ed opposti TDδ, TδD: e poi dalle divisate tangenti degli angoli TDV, TδV si ritrovi la tangente della loro somma, ed un tal risultamento facciasi uguale a $\pm\frac{b}{p}$; s'incontrerà per quest' altra via, ch' è più agevole della primiera, la medesima equazione C.

§. 389. SCOL. Lo stesso metodo potrà impiegarsi per l'ellisse, o per l'iperbole, quando vi si richieggano consimili locali. Queste curve però non saranno del genere delle coniche, ma sì bene linee di quart' ordine. Che anzi se piaccia di conoscere nella parabola qual sia quella curva, *che vien toccata dalle congiungenti de' contatti di due tangenti, le quali contegan sempre un dato angolo acuto, ovvero ottuso*; ella pe' principj sparsi in questo Capo potrà facilmente investigarsi. Intanto non mi s' imputi a difetto l' essermi quì diffuso più, che altrove; poichè dovendo esibir chiaramente la costruzione Cartesiana de' problemi solidi, proposta nella fine del §. 146., e volendo indagar certe locali assai più difficili di quelle, di che si occupò lodevolmente il Viviani, non ho potuto esser più breve.

CAPITOLO X.

LA TEORICA DEL FUOCO DELLA PARABOLA.

§. 390. Molte proprietà del fuoco della parabola, che tra ggonsi di leggieri dalla genesi di questa curva*, o che nelle precedenti ricerche io disvelai, meritano di essere ordinatamente quì ragunate, perchè sieno a' giovani più ritenevoli. Ed in primo luogo: *Ogni ramo di questa curva è quanto la distanza del suo estremo dalla linea di sublimità**. *Ciascun ramo, e la distanza del suo estremo da una sottoposta ordinata all' asse vi formano una costante somma. Ei supera l' ascissa corrispondente alla ordinata pel suo estremo, per la quarta parte del parametro principale. E divenendo un tal ramo perpendicolare all' asse, dovrà pareggiare la metà del detto parametro*: *etc.* Ma due altre proprietà del medesimo soggetto saranno contenute nel seguente teorema.

* §. 311.

* §. 313.

PROPOSIZIONE LXX.

TEOREMA.

§. 391. Ciascun ramo della parabola è quanto la distanza del fuoco di questa curva dal concorso dell'asse con la normale, che vi procede dal suo estremo.

E lo stesso ramo dee uguagliare la semiordinata all' asse distesa pel suo estremo insino alla tangente, che vi si conduce dal punto della sublimità, e dalla medesima parte di esso ramo.

fig. 51. DIM. PAR. I. La retta FN sia un ramo della parabola ADN, e dal suo estremo N intendansi condotte ad essa curva la normale NQ, e la semiordinata NM all' asse, la quale incontri in R la tangente RD, che passi per lo punto K della sublimità. E posta uguale ad x l' ascissa AM, ed a p il pa-

* §. 331. rametro principale di tal curva, sarà* la sunnormale $MQ = \frac{1}{2}p$. Ma la retta FQ è uguale ad $FM + MQ = AM - AF + MQ$

* §. 390. $= x - \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}p = x + \frac{1}{4}p$. Ed è* anche $FN = x + \frac{1}{4}p$. Dunque sarà $FN = FQ$.

PAR. II. Tanto la retta FK, che la semiordinata FD

* §. 390. all' asse AM è uguale ad $\frac{1}{2}p$*; e perciò quelle sono uguali fra loro. Onde pe' triangoli simili KFD, KMR, sarà anche $KM = MR$. Ma è $KM = x + \frac{1}{4}p$, per essere uguale ad $AM + AK$. Dunque sarà $MR = x + \frac{1}{4}p = FN$.

§. 392. COR. *In una parabola, se dall'estremo di un ramo conducansi la tangente, e la normale ad essa curva; la tangente dovrà fare angoli uguali col detto ramo, e coll' asse della parabola, come può rilevarsi da'* §§. 320, *e* 347. *E con queste due rette vi farà pure angoli uguali la normale.*

§. 393. SCOL. Di quì si vede, come si possa descrivere per assegnazione di punti una parabola, di cui sia dato il fuoco F, e 'l vertice principale A. Imperocchè congiunta la FA, si elevi ad essa retta dal punto F la perpendicolare FD dupla di FA, e nel suo estremo D facciasi l' angolo semiretto FDG.

Inoltre le rette FA, DG si prolunghino al di sopra della FD, finchè s' incontrino in K, ed elleno indefinitamente distendansi all' ingiù. E finalmente condotta, ove ne piace, l' ordinata MR nel triangolo MKR, si descriva col centro F, intervallo MR il cerchio; che dovrà segnare nella MR il punto N, il quale appartiensi alla parabola richiesta.

PROPOSIZIONE LXXI.

TEOREMA

§. 394. Se ad un punto della parabola si conducano il ramo, e la normale; e poi dal punto ove la normale incontra l' asse, si meni la perpendicolare al detto ramo: la parte del ramo, ch'ella ne tronca verso la curva, è quanto il semiparametro principale.

DIM. Al punto N* della parabola ADN s' intendano condotti il ramo FN, e la normale NQ, che incontri l' asse AM in Q; e da Q si abbassi sul detto ramo la perpendicolare QB: dico esser la $NB = \frac{1}{2}p$. *fig. 51.

Si ritengano i simboli della proposizione precedente; sarà* * 13.El. II.
$FQ^2 = FN^2 + NQ^2 - 2FNB$, cioè per essere $FQ^2 = FN^2$*, * §. 391.
sarà $2FNB = NQ^2$: onde ne' loro simboli dovrà essere * * §. 390.

$2\left(x + \frac{1}{4}p\right)NB = px + \frac{1}{4}p^2$; e quindi $NB = \frac{1}{2}p$.

PROPOSIZIONE LXXII.

PROBLEMA.

§. 395. Descrivere una curva conica, che ab-
fig. 52. bia il punto S per fuoco, il parametro principale uguale ad L, e tocchi nel dato punto P la retta RP data di posizione.

Soluz. Nel punto P della retta RP si formi l' angolo RPH supplemento del dato angolo SPR; e dal punto S si abbassi la SK perpendicolare alla PH. Poi si ponga $SP = r$, $L = p$, $PK = b$, e facciasi uguale ad x la PH, che intercede tra 'l dato punto P, e l' àsse della curva, che quì supponghiamo essere un' ellisse; poichè da questa può facilmente fluirne alle altre due curve coniche la soluzione. Ed essendo $SP + PH$ l' asse principale di tal curva, sarà $\frac{1}{4}p(r+x)$ il quadrato del semiasse secondario; e quello dell' eccentricità do-
§. 150. 78. vrà essere uguale ad $\frac{1}{4}(r+x)^2 - \frac{1}{4}p(r+x)$. E sa-
13. El. II. rà finalmente $SH^2 = (r+x)^2 - p(r+x)$. Ma dee essere $SH^2 = SP^2 + PH^2 - 2PH \times PK$. Dunque sarà ne' simboli di queste rette $r^2 + 2rx + x^2 - pr - px = r^2 + x^2 - 2bx$, cioè $2rx - px - pr = -2bx$. E quindi

$$x = \frac{pr}{2r + 2b - p} \quad \ldots\ldots \text{A}$$

Or la precedente frazione è positiva, negativa, o di un' infinito valore, secondo che il binomio $2r + 2b$ sia maggiore, minore, o uguale alla grandezza p. E perciò nel primo caso la curva conica da doversi descrivere sarà un' ellisse, il cui asse maggiore dee esser uguale* a $\frac{2r^2 + 2br}{2r + 2b - p}$: nel secondo caso ella sarà un' iperbole, che tien per asse principale $\frac{2r^2 + 2br}{p - 2r - 2b}$. * §. 150.

E finalmente nel terzo caso la detta curva sarà una parabola, di cui saran dati di posizione il fuoco e l' asse, e di grandezza il parametro principale: ond'ella potrà facilmente esibirsi.

§. 396. Scol. Nel punto P della RP fatto l' angolo RPH supplemento del dato RPS, e la PB metà di L, si elevino da punti B, P le perpendicolari BD, PD alle PS, PR rispettivamente; e poi giungasi l' incontro D di esse perpendicolari col dato punto S per mezzo della DS. Questa retta, come può raccorsi dal §. 391., sarà l'asse della curva da descriversi: che dovrà essere una parabola, un' ellisse, o un' iperbole, secondo che la PH sia parallela alla SDH, o pur siale convergente, o divergente. E questa geometrica soluzione doveasi quì rapportare in confronto dell' analitica di già recata, per far rilevare dell' un metodo, e dell' altro l' energia.

PROPOSIZIONE LXXIII.

TEOREMA.

§. 397. Se dagli estremi di due rami di una parabola distendansi due tangenti ad essa curva; la retta, che unisce il fuoco col concorso di quelle due tangenti, dovrà dividere in parti uguali l' angolo compreso da' detti rami.

La dimostrazione di questo teorema può congegnarsi co' principj indicati per l' ellisse nel §. 167.

§. 398. Cor. Dalla presente proposizione, e da ciò, che si è dimostrato ne' §§. 379, e 387, si possono raccorre le verità seguenti, cioè a dire. *Le tangenti menate ad una parabola per gli estremi di una corda, che vi si distende per lo fuoco, si debbono incontrare in un punto della linea della sublimità di tal curva. Quivi debbono esse contenere un angolo retto. Ed oltre a ciò dee essere perpendicolare ad essa corda la congiungente del fuoco, e del concorso delle divisate tangenti.*

CAPITOLO XI.

DE' CERCHI OSCULATORI DELLE CURVE CONICHE.

LEMMA.

§. 399. Le curvature di due cerchi ineguali sono inversamente come i semidiametri di essi.

DIM. I raggi de' proposti cerchi si chiamino R, r; e nelle loro circonferenze prendansi due archetti infinitesimi, ed uguali, esprimendo per φ la lunghezza di ciascuno di essi, e per ω, ed ε le rispettive loro saette. Sarà chiaro per le geometriche nozioni (1) dover essere $\omega = \frac{\varphi^2}{2R}$, ed $\varepsilon = \frac{\varphi^2}{2r}$; e quindi $\omega : \varepsilon :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$. Ma in due cerchi dissuguali le saette di due archi minimi, ed uguali vi misurano le loro curvature; la qual cosa è chiara di per se stessa. Dunque siffatte curvature saranno inversamente come i raggi de' proposti cerchi.

§. 400. DEF. XXXVI. Un cerchio, che tocchi una curva dalla parte concava di essa, si dirà essere un *cerchio osculatore*, se quivi abbia la medesima di lei curvatura.

§. 401. SCOL. I. La periferia di un cerchio ha da per tutto un' identica curvatura: laddove questa suol variare ne' diversi punti di ciascun' altra curva, e deesi da suoi cerchi osculatori misurare. Così, per una comoda intelligenza di queste

(1) Se dall' estremo del diametro di un semicerchio si tiri una qualunque corda; questa retta sarà media proporzionale tra 'l diametro, e l' ascissa, che corrisponde all' arco troncatone da essa corda*. *8. El. VI.

fig. 53. cose, se l'arco Mm di una qualunque curva AMD sia infinitesimo, e da' suoi estremi vi si conducano le normali MG, mG, che concorrano in G; il cerchio descritto col centro G, intervallo GM sarà osculatore della curva in M. E si vedrà pure, che nelle curve coniche l'osculazione di questo cerchio, e 'l centro di esso debban trovarsi a parti opposte dell' asse.

§. 402. Def. xxxvii. La locale de' centri de' cerchi osculatori di una curva suol dirsi *l'evoluta di essa curva*.

§. 403. Scol. ii. Quella locale fu detta evoluta dal chiarissimo Ugenio, perchè da una certa evoluzione praticata in un filo, che le si adatti nella parte convessa, si può intender generata l'altra curva.

§. 404. Scol. iii. Egli è chiaro di per se stesso, che un cerchio, il quale tocchi una curva nella concava di lei par-
§. 114. te, talor la seghi in più punti. Ed è poi concepibile, che senza cangiarne il luogo del contatto si possa talmente accorciare, o allungare il raggio di quel cerchio, che ivi pur ne concorra una delle dette intersezioni. Cioè a dire, può talmente adattarsi un certo cerchio nella parte concava di una data curva, che in un tal combaciamento intendansi raccolte tre intersezioni di queste due curve, o un' intersezione, ed un contatto. Or questo è per appunto quello, che da' moderni geometri dicesi *osculazione*. Nè vale il sentimento del Leibnitz, che l' osculo debba *consistere nella coincidenza di due contatti, o di quattro intersezioni*. Conciosiachè, se ciò fosse vero, dovrebbesi conchiudere contro l' evidenza, che niun cerchio osculatore di una curva conica potrebbela altrove intersecare, per non potersi aumentare il numero quaternario delle interse-
*§. 361. zioni di queste due linee di second' ordine *. Onde da queste

ragioni, o da altre recate da' Bernoulli dovrà inferirsi, che nell' osculo siensi riunite tre delle anzidette intersezioni (1): che vi debbano esser tre radici uguali nell' equazione, che siasi per tali ricerche istituita: e ch' ella giusta i principj dell' Hudden si possa moltiplicare due volte di seguito per due qualsivogliano aritmetiche progressioni, come si vedrà praticato quì appresso.

PROPOSIZIONE LXXIV.

PROBLEMA.

§. 405. Ritrovar l'evoluta della parabola AMD*. *fig. 53.

Soluz. Sia MG il raggio d' osculo in un punto M della data parabola AMD, ed ei si chiami r. Da' suoi estremi M, G si calino sull' asse AC di questa curva le perpendicolari MN, GH. E compito il parallelogrammo GN, si prenda nel detto asse l' ascissa AS uguale alla metà del parametro principale, che si dinoti per p. Ed oltre a ciò si esprimano per x, y

(1) L' illustre Giacomo Bernoulli, che saggiamente ha ragionato de' raggi d' osculo, così ne parla in due luoghi delle sue note sulla Geometria di Cartesio. *Coincidentibus tribus intersectionum punctis, futurum sit, ut circulus parabolam, quam hoc casu osculari dicitur, non tangat, sed secet*. E ciò erasi anche avvertito dallo Schooten *pag.* 339. *Comm. Cart.*. Che anzi quel geometra avea detto anteriormente, *fieri enim potest, ut radius. circuli curvae sit perpendicularis, et tamen circulus hoc radio descriptus curvam non tangat, sed secet. Nempe si concursui duarum intersectionum, sive contactui tertia intersectio accesserit, et sic quod osculum dicitur, effecerit.* Dello stesso avviso è Giovanni Bernoulli, cui fanno eco gli analisti moderni, tra' quali convien rammentar con lode il *Lacroix*.

le coordinate AN, NM della parabola data: e per v, z le SH, HG coordinate della richiesta evoluta. Sarà la sunnormale NO $= \frac{1}{2}p$, l'ascissa AN $= \frac{y^2}{p}$, la SN $=$ AN $-$ AS $= \frac{y^2}{p} - \frac{1}{2}p$, e quindi la QG $=$ NH $=$ SH $-$ SN $= v + \frac{1}{2}p - \frac{y^2}{p}$. Ma per lo triangolo MQG rettangolo in Q dee essere $MG^2 = QG^2 + MQ^2$. Dunque ne' simboli di queste rette avremo l' equazione

$$r^2 = v^2 + \frac{1}{4}p^2 + \frac{y^4}{p^2} + pv - \frac{2vy^2}{p} + z^2 + 2zy$$

che ordinata rispetto ad y riducesi in quest' altra

$$y^4 - 2pvy^2 + 2p^2zy + p^2\left(z^2 + v^2 + pv + \frac{1}{4}p^2 - r^2\right) = o \quad \ldots\ldots \mathrm{A}$$

Ciò premesso, l' equazione A per avere tre radici uguali (1)
* §. 404. può moltiplicarsi due volte di seguito* per una progressione aritmetica. Ella dunque si moltiplichi primieramente per 4, 3, 2, 1, 0. E la risultante equazione, che ridotta nelle ovvie maniere diviene

$$y^3 - pvy + \frac{1}{2}p^2z = 0 \quad \ldots\ldots \mathrm{B}$$

si moltiplichi per l' altra aritmetica progressione 3, 2, 1, 0; si otterrà $3y^2 - pv = o$, cioè $3px - pv = o$. E quindi

$$3x = v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{C}$$

(1) Un' equazione biquadratica, che abbia tre radici uguali, può avere la seguente implicita forma $(y-e)^3(y-f) = o$. Sicchè eseguendo le indicate operazioni potrà paragonarsi quest' equazione all' altra A, e dal confronto de' termini analoghi di esse potrà conoscersi il rapporto delle v, z; e quindi l' equazioue alla richiesta evoluta. Un tal metodo benanche Cartesiano vedesi praticato da Giov. Bernoulli.

E poichè la retta NH si è dimostrata uguale ad $v + \frac{1}{2}p - \frac{y^2}{p}$, riponendo in questo trinomio i valori di già ritrovati del primo, e del terzo termine, sarà la retta NH $= 2x + \frac{1}{2}p$, e quindi OH $=$ NH $-$ NO $= 2x$. Ma pe' triangoli simili GHO, MNO sta GH : HO :: MN : NO; e ne' loro simboli $z : 2z :: \sqrt{px} : \frac{1}{2}p$, ovvero $z^2 : 4x^2 :: px : \frac{1}{4}p^2$. Dunque sarà $x^3 = \frac{pz^2}{16}$. E perchè nell' equazione C si è ritrovata $x^3 = \frac{v}{27}$, dovrà essere (1)

$$v^3 = \frac{27}{16}pz^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; D$$

ch' è l' equazione della richiesta evoluta.

A L I T E R.

§. 406. Si ritengano i simboli adottati quì sopra. E poichè dee essere GH : HO :: MN : NO*, pe' triangoli simili GHO, MNO, cioè $z : v - \frac{y^2}{p} :: y : \frac{1}{2}p$; sarà $\frac{1}{2}pz = vy - \frac{y^3}{p}$; e quindi * fig. 53.

$$y^3 - pvy + \frac{1}{2}p^2 z = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; E.$$

(1) S'io avessi potuto usare la frase de' moderni analisti, avrei detto: si differenzii rispetto ad y l' equazione E, e poi dal maneggio di una tal derivata, e della medesima equazione E vi si elimini la y. Ma col metodo, di Hudden si è ottenuto altrettanto. Che anzi nell'un metodo, e nell'altro suppongonsi costanti le v, z, onde il punto G, concorso di due prossime normali della parabola, sarà nella richiesta evoluta. Lo che intendasi benanche per la soluzione del seguente problema.

Intanto si moltiplichi l' equazione E, termine per termine, per la progressione aritmetica 3, 2, 1, 0; e quella, che n' emerge, cioè $3y^3 - pvy = 0 \ldots\ldots F$ si sottragga dalla primiera equazione E. Si otterrà in tal modo

$$y^3 = \frac{1}{4} p^2 z \text{, ed } y = \sqrt[3]{\frac{1}{4} p^2 z} \, .$$

E sostituendo in F i rispettivi valori delle y^3, ed y, dovrà essere

$$\frac{3}{4} p^2 z - pv \sqrt[3]{\frac{1}{4} p^2 z} = 0 \, ,$$

cioè
$$\frac{3}{4} pz = v \, . \sqrt[3]{\frac{1}{4} p^2 z} \, .$$

E finalmente si avrà, come in D.

$$\frac{27}{16} pz^2 = v^3 \ldots\ldots G \, .$$

§. 407. Cor. L' evoluta della parabola conica AMD è la parabola Neiliana SGR, ove i cubi delle ordinate (1) son proporzionali a' quadrati delle loro ascisse, e 'l suo parametro nel nostro caso è $\frac{27}{16} p$. Inoltre quel punto dell' asse della parabola conica, ch' è distante dal vertice per la metà del parametro di essa curva, è il vertice della Neiliana, e quivi l' è tangente l' asse della parabola conica.

§. 408. Scol. 1. Quando da un punto dato entro una parabola vuol condurlesi una normale, si dovrà risolvere, come si è detto nel §. 369, la seguente equazione $y^3 - p \left(b - \frac{1}{2} p\right)$

(1) Questa parabola cubica fu detta *Neiliana*, perchè *Guglielmo Neil* acutissimo giovane inglese fu il primo a rettificarla.

$y - \frac{1}{2}p^2 h = o$, ove le b, h sono le coordinate del punto dato. Se dunque vi si ponga v per $b - \frac{1}{2}p$, e z per h, ella diverrà $y^3 - pvy - \frac{1}{2}p^2 z = o$. E moltiplicandola per la progressione o, 1, 2, 3, si avrà, fatte le riduzioni, $y = \frac{-3pz}{4v}$, e quindi $y^2 = \frac{9p^2 z^2}{16v^2}$. Intanto quell' equazione cubica si moltiplichi per la progressione retrograda della precedente cioè per 3, 2, 1, o; avremo $3y^3 - pvy = o$, cioè $y^2 = \frac{1}{3}pv$. E pareggiando questi due valori della y^2, si otterrà, fatte le riduzioni, $v^3 = \frac{27}{16}pz^2$; ch'è la medesima equazione all' evoluta della parabola, ritrovata con questi altri facilissimi ripieghi.

§. 409. SCOL. II. Ma ecco in qual maniera dall'evoluzione della parabola Neiliana SGR si può concepir generata la parabola conica AMD. Un filo flessibile intendasi avvolto alla convessità della parabola Neiliana SGR, sicchè un suo estremo cada nel vertice A della parabola conica AMD, e l' altro estremo R si fermi nel convesso della detta Neiliana, ovunque ciò accada. Di poi si muova l' estremo A di esso filo verso M, ed in modo, che svolgendosi da questa curva il detto filo, le sue parti di già svolte restino mai sempre tese, e ben dritte. Quel punto A dovrà in questa evoluzione descrivere la parabola conica AMD, il cui vertice è il punto A, e 'l parametro il duplo di AS. E ciò basti per far concepire a' giovani il magistero di evoluzione indicato nel §. 403; e perchè mai la locale de' centri de' cerchi osculatori di una curva siasi chiamata l' evoluta di essa: poichè il problema, in cui sia data una curva, e vi si domandi quella, che si genera dalla sua evoluzione, è fuori del pomerio di queste mie ricerche: ed altri principj si dovrebbon quì chiarire per isnodarlo con esattezza (*)

PROPOSIZIONE LXXV.

PROBLEMA.

* *fig.* 53. §. 410. Dato il quadrante ellittico AMD*, ritrovare l' equazione della sua evoluta.

SOLUZ. Praticata la costruzione preliminare del prec. problema, si chiami a il semiasse maggiore AC del quadrante ellittico AMD, c il minore, ed e l' eccentricità di tal figura. Inoltre sia x l' ascissa CN, che corrisponde alla semiordinata MN; e per v, z vi si esprimano le corrispondenti coordinate CH, HG dell' evoluta SGR di quel quadrante ellittico. Sarà

* §. 44. NH $=$ CN $-$ CH $= x - v$, NO $= \frac{c^2 x}{a^2}$*, HO $=$ NH $-$ NO

* §. 14. $= x - v - \frac{c^2 x}{a^2} = \frac{e^2 x}{a^2} - v$*, ed MN $= \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$. Ma pe' triangoli simili MNO, GHO stà MN : NO :: GH : HO, ed $MN^2 : NO^2 :: GH^2 : HO^2$, cioè ne' simboli di quelle rette

$$a^2 - x^2 : \frac{c^2 x^2}{a^2} :: z^2 : \left(\frac{e^2 x}{a^2} - v\right)^2 \quad \ldots\ldots A$$

Dunque da questa analogia potrem ritrarne la sottoposta equazione, che ho stimato doverla ordinare rispetto ad x nel seguente modo

$$e^4x^4 - 2a^2e^2vx^3 + a^2(a^2v^2 + c^2z^2 - e^4)x^2 + 2a^4e^2vx - a^6v^2 = o \quad \ldots\ldots B$$

(*) Vedi Ugenio *part.* III. *de Horol. Oscill.*

Intanto l' equazione B* si moltiplichi per la progressione aritmetica 4, 3, 2, 1, 0, termine per termine. E sì facendo ne avremo quest' altra equazione *§. 404.

$$4e^4x^4 - 6a^2e^2vx^3 + 2a^2(a^2v^2 + c^2z^2 - e^4)\,x^2 + 2a^4e^2vx = o \;.\;.\;.\;.\;.\; C$$

Che divisa per 2, e poi sottratta da B, ci darà per residuo

$$-e^4x^4 + a^2e^2vx^3 + a^4e^2vx - a^6v^2 = o\,.$$

Or questo residuo, come ben si vede (1), può dividersi per lo binomio $e^2x - a^2v$; e 'l quoto è $a^4v - e^2x^3 = o$.

Dunque sarà $\quad v = \dfrac{e^2}{a^4}x^3 \;.\;.\;.\;.\; D.$

E sostituendo nell' analogia A questo valore della v, ella si cangerà nell' altra

$$a^2 - x^2 : \frac{c^2x^2}{a^2} :: z^2 : \frac{e^4a^2}{a^8}(a^2 - x^2)^2$$

ch' è sgombra di quella variabile, e può ridursi nella seguente equazione $\qquad (a^2 - x^2)^3 = \dfrac{a^6c^2z^2}{e^4}$

o pure $\qquad a^2 - x^2 = \dfrac{a^2}{e}\sqrt[3]{\dfrac{c^2z^2}{e}} \;.\;.\;.\; E$

Ciò premesso, i due valori della x^2, l' uno tratto dall' equazione D, e l' altro dalla E, si pareggino fra loro. Sarà

$$a^2 - \frac{a^2}{e}\sqrt[3]{\frac{c^2z^2}{e}} = \frac{a^2}{e}\sqrt[3]{\frac{a^2v^2}{e}}$$

e quindi

$$e = \sqrt[3]{\frac{a^2v^2}{e}} + \sqrt[3]{\frac{c^2z^2}{e}} \;.\;.\;.\;.\;.\; F$$

---

(1) Il binomio $e^2x - a^2v$ è un fattore straniero di quest' equazio. Imperocchè supponendolo uguale a zero, ne verrebbe $v = \dfrac{e^2x}{a^2}$. E con questo valore della v si distruggerebbe l'analogia proposta in A.

E se l' equazione F si elevi a cubo, si avrà finalmente

$$e^3 = \frac{a^2 v^2}{e} + \frac{c^2 z^2}{e} + 3e \sqrt[3]{\frac{a^2 c^2 v^2 z^2}{e^2}}$$

cioè

$$\frac{e^2}{c^2}\left(e^2 - \frac{a^2 v^2}{e^2} - \frac{c^2 z^2}{e^2}\right)^3 = 27 a^2 v^2 z^2 \quad \ldots\ldots \quad G.$$

Ch' è l' equazione dell' evoluta del quadrante ellittico AMD.

§. 411. COR. I. Da quest' ultimo risultamento si rileva, che l' evoluta di un' ellisse sia una linea di sest' ordine, la cui equazione è di pari dimensioni.

§. 312. COR. II. Sebbene cotesta evoluta sia una linea di un ordine più alto della Neiliana, che, come si è dimostrato nella prec. prop., dee esser l' evoluta della parabola; ella nondimeno potrebbesi costruire per mezzo di due Neiliane. Imperocchè i due termini del secondo membro dell' equazione F rappresentano due semiordinate di due diverse parabole cubiche. Ma questo lavoro può eseguirsi da' giovinetti, mentre un' altro di esso più generico, ed elementare sarà recato nel seguente problema.

§. 413. COR. III. Supponendo la variabile $z = o$ nell' equazione F, dovrà risultare l' altra $v = \frac{e^2}{a}$. E ne verrà la $z = \frac{e^2}{c}$, se nella medesima equazione si faccia la $v = o$.

§. 414. COR. IV. Dunque *la terza proporzionale, che si ritrovi in ordine al semiasse maggiore, ed all' eccentricità dell' ellisse, dovrà dinotare la massima ascissa dell' evoluta di un quadrante ellittico. Ove la massima ordinata sarà un' altra terza proporzionale dopo il semiasse mi-*

nore, *e l' eccentrtcità suddetta*. E queste due illazioni sono concordi a quelle, che il chiarissimo Ugenio propose in altri accenti, e senza dimostrarle (1).

§. 415. COR. V. L' evoluta di un quadrante ellittico dee incontrare il semiasse maggiore in un punto sottoposto al vertice di esso per la metà del parametro principale. Imperocchè togliendo dal semiasse maggiore a il valore della massima ascissa, il quale si è dimostrato essere $\frac{e^2}{a}$; il residuo sarà $\frac{a^2-e^2}{a}$ $= \frac{c^2}{a} = \frac{1}{2}p$ *. * §. 14 e 78.

§. 416. SCOL. Quest' evoluta; ch' è una curva della natura (2), meritava d'essere convenevolmente conosciuta da' Geometri, e con ugual chiarezza a' giovani conferita. Ma pure, ch' il crederebbe! l' illustre Ugenio, poichè ebbe introdotte in Geometria l' evoluzioni delle curve, fecesi a specular minutamente l' evoluta della parabola, e quella della cicloide Galileana; e passando di volo per le altre due curve coniche, c'indicò solamente, che le loro evolute erano linee di sest' ordine, e di pari dimensioni. Il sommo Newton divinando, com' io m' immagino, i calcoli Ugeniani, ed altri di propria avvertenza distendendo, ci avvisò esser cotesta calculazione assai inviluppata (3) senza più dire. Ed i Bernoulli, l' Hopital, ed

(1) Vedi prop. X. *de Horol. Oscillat.*

(2) Non essendo la nostra terra di forma sferica, ma una sferoide compressa ne' poli; le direzioni de' gravi, che son posti in uno stesso meridiano terrestre, non dovranno convergere al suo centro; ma esser tangenti dell' evoluta dell' ellisse generatrice di quel solido.

(3) Così parla il sommo Newton (*Opusc. II. de Serieb. inf. ec.*): *sed ea computatio* (in Ellipsi, ac Hyperbole) *erit satis perplexa.*

altri illustratori di questa teorica, si ritenner finanche dal considerarle. Or io avendo ricercate a tal uopo varie orditure di eliminazioni (in che consiste il principal nodo del problema), una ne rinvenni assai agevole, dipendendo da due sole operazioni elementari, cioè dalla sottrazione di un polinomio da un altro, e dalla divisione di un quadrinomio per un binomio. E questa ho quì all' intelligenza de' giovani adattata: e potrà loro esser di guida nell' indagar l' evoluta dell' iperbole. Intanto quì ne aggiungo, qual nuovo fregio dell' argomento, che l' equazione della detta evoluta, oltre ad esser di sesto grado, e di pari dimensioni, sia identica sì nella forma, che nella genesi all'equazione di una certa curva escogitata da Giov. Bernoulli, ch' è quella, che vien continuamente toccata da una retta data di grandezza, la quale vada strisciando co' suoi estremi ne' lati di un angolo retto. Infatti chiamando a quella retta, e z un' ascissa presa in un di que' due lati dell' angolo, e dal suo vertice, ed esprimendone per v la sua ordinata, la detta equazione dovrà nascere, come quel geometra l' ha dimostrato, dallo sviluppo dal seguente pareggiamento $a = \sqrt[3]{av^2} + \sqrt[3]{az^2}$, che conformasi all' equazione F del §. precedente. [Vedi Gio: Bernoulli *Oper. vol. I. pag.* 57., *e vol. III. pag.* 448. (1).]

(1) L' evoluta di questa curva l' è anche una linea di sest' ordine di pari dimensioni: e tale n'è ancora la *caustica circolare per riflessione*, ed altre non poche. Ma la curva nata dall' indicato movimento di quella retta non solo è fornita di un'equazione pariforme alla nostra evoluta, ma vi si deriva nello stesso modo.

PROPOSIZIONE LXXVI.

TEOREMA.

§. 417. Il raggio d' osculo in un qualunque punto di una curva conica è sempre uguale al cubo della corrispondente normale diviso per lo quadrato del semiparametro principale *. * *fig.* 53.

DIM. CAS. I. Nella parabola si è dimostrato * esser la retta OH uguale a $2x$. Dunque la NH, o la sua uguale QG dovrà pareggiare il binomio $\frac{1}{2}p + 2x$. Ma pe' triangoli simili MNO, MQG sta NO : QG :: MO : MG, o ne' simboli di queste rette $\frac{1}{2}p : \frac{1}{2}p + 2x :: \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)} : \text{MG}$. * §. 405.

Dunque sarà il raggio d' osculo

$$\text{MG} = \frac{(px + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2} \quad \ldots\ldots \quad \text{P}$$

CAS. II. Nell' ellisse poi si è dimostrato esser la retta $v = \frac{e^2x^3}{a^4}$ *, e quindi la NH $= x - v = \frac{a^4x - e^2x^3}{a^4}$. Ma pe' triangoli simili MNO, MQG sta NO:QG::MO:MG, o ne' loro simboli * §. 410.

$$\frac{c^2x}{a^2} : \frac{a^4x - e^2x^3}{a^4} :: \frac{c}{a}\sqrt{\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right)} : \text{MG} = \frac{1}{ac}\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Ed è poi chiaro da per se stesso, che sia $\frac{1}{ac} = \frac{c^3}{a^3} : \frac{c^4}{a^2}$.

Dunque sarà il raggio d' osculo

$$\text{MG} = \frac{\frac{c^3}{a^3}\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{c^4}{a^2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{Q}$$

* §. 46. Cioè quanto il cubo della normale (indicato dal numeratore * di questo fratto) diviso per lo quadrato del semiparametro ,
* §. 78. che ne vien espresso dal denominatore * . Lo che più chiaramente si osserva nella formola P della parabola .

Cas. III. Una consimil formola può nello stesso modo ritrovarsi per l'iperbole : onde generalmente potremo concluderne quello , che si è proposto nel teorema .

§. 418. Cor. I. La formola P, con porvisi la $x = o$ degenera in quest' altra $\frac{(\frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}$, ch' è quanto $\frac{1}{2}p$. E se nella formola Q vi porremo la $x = a$, ella dovrà ridursi nella se-
* §. 78. guente $\frac{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}{ac}$, ch'è uguale ad $\frac{(c^2)^{\frac{3}{2}}}{ac}$, cioè a $\frac{c^2}{a}$, o ad $\frac{1}{2}p$ * .

§. 419. Cor. II. *Il raggio d' osculo , che si appartiene ad un de' vertici principali dell' ellisse , o dell' iperbole , o a quello della parabola , dee sempre pareggiare il*
*§. 407. 415. *semiparametro principale della curva* *.

§. 420. Cor. III. *Ed i raggi d' osculo , che corrispondono a diversi punti di una stessa curva conica , saranno in triplicata ragione delle normali corrispondenti .*

PROPOSIZIONE LXXVII.

PROBLEMA.

* *fig.* 54. §. 421. Data una curva conica AML * , descrivere per assegnazion di punti la sua evoluta .

Soluz. Ad un qualunque punto M della curva AML , che sia una delle tre curve coniche, si tiri la normale MR, cui si elevi la perpendicolare RC dal punto R, ov' ella incontra l' asse AN. E poi dal punto C, ch' è il concorso della detta perpendicolare col ramo FM corrispondente a quel punto, si alzi la perpendicolare CE ad esso ramo, la qual si protragga, sin che incontri in E la detta normale. Dico il punto E dover appartenere alla richiesta evoluta.

Dim. Dal punto R si abbassi la RO perpendicolare alla MF. Sarà ME : MC :: MR : MO. Ma sta ME : MR :: $ME^2 : MC^2 :: MR^2 : MO^2$. Dunque sarà $ME = \frac{MR^3}{MO^2}$; cioè quanto $\frac{MR^3}{\frac{1}{4}p^2}$, per essere MO uguale ad $\frac{1}{2}p$. Onde per la proposizione precedente il punto E dovrà appartenere all' evoluta della curva conica AML.

§. 422. Cor. I. Quantunque sia una linea di sest' ordine l' evoluta di un' ellisse, o di un' iperbole; ella non pertanto può descriversi con un semplicissimo artifizio elementare. Nè quindi dalla semplicità della genesi di una curva dovrà dedursi quella dell' equazione di essa.

§. 423. Cor. II. E di quì potrà risolversi benanche con principj elementari il seguente importantissimo problema (1). *Descrivere una curva conica, che abbia il dato punto* F *per fuoco, e che tocchi nel dato punto* M *la retta* MP, *aven-*

(1) Il problema inverso delle forze centrali nella vera ipotesi della gravità dipende da questo geometrico problema. In fatti il gran Newton riduce quel problema astronomico al seguente geometrico: *Nam datis umbilico, et puncto contactus, et positione tangentis, describi potest sectio conica, quae curvaturam datam ad punctum illud habebit.* (*Princ. Math. Lib. I. prop.* 13.)

done quivi una data curvatura. Si unisca la retta MF, cui si elevi dal dato punto M la perpendicolare MR, che si protragga in E, sin che diventi uguale al raggio di quella data curvatura. Di poi dal punto E si abbassi la retta EC perpendicolare alla MF, incontrandola in C, e dal punto C si meni l'altra CR perpendicolare alla ME. *Il punto* R *starà nell'asse della richiesta curva*. E 'l problema potrà risolversi per la proposizione LXXII.

CAPITOLO XII.

DELLE DIMENSIONI DELLE CURVE CONICHE.

PARTE I.

Prenozioni dell' argomento.

§. 424. Il metodo, cui mi sono attenuto in quest' opera, m' induce a dover discutere le dimensioni delle curve coniche con principj analitici elementari, come quassù mi è riuscito misurarne le curvature. Ond' io a tal fine quì premetto alcuni Lemmi geometrici, e di poi propongo quelle dimensioni in forma di teoremi, che gioverà produrli colla frase de' geometri antichi, e poi colle formole analitiche de' moderni. Acciocchè per l' un mezzo s' ingeneri un nitor di scienza nell' argomento, e per l' altro ci riesca facile il poterlo alla pratica adattare, o a risolver que' problemi, che ne dipendono.

LEMMA I.

§. 425. Se le due curve AMN*, AQN rapportate al comune asse AP sieno tali, che le ordinate NM, NQ corrispondenti ad una medesima ascissa AN sieno sempre nella costante ragione di *m* ad *n*; anche le dette aje AMN, AQN dovranno essere in quella ragion costante di *m* ad *n*. *fig. 55.

Ed aggirandosi le aje AMN, AQN con perfetta rivoluzione intorno al comune loro asse AP; i solidi generati da esse saranno in duplicata ragione di m ad n, cioè come m^2 ad n^2.

DIM. PART. I. L'ascissa AN intendasi divisa in un qualunque numero di particelle uguali, ciascuna delle quali si chiami ω; e le ordinate, che nella curva AMN corrispondono ai punti N, p, q, *etc.* dell'indicata divisione, si esprimano per le z, z', z', *etc.* Laddove quelle dell'altra curva AQN si dinotino per y, y', y', *etc.* rispettivamente. Sarà, come n'è chiaro, $\omega z : \omega y :: z : y :: m : n$. E così pure $\omega z' : \omega y' :: m : n$,
*12. El. V. $\omega z'' : \omega y'' :: m : n$, *etc.* Dunque dovrà essere *

$$\omega z + \omega z' + \omega z'' + etc. : \omega y + \omega y' + \omega y'' + etc. :: m : n.$$

Ma i primi degl'indicati rettangoli terminano nell'aja curvilinea AMN, e gli altri nell'altra AQN (*). Dunque sarà AMN : AQN :: $m : n$.

PART. II. Inoltre i cerchi, che colla proposta rivoluzione vengonsi a generare dalle ordinate NM, NQ, sono in duplicata ragione di queste rette, cioè come m^2 ad n^2. E lo stesso dee valere per le altre delle già dette ordinate. Dunque colla guida della precedente dimostrazione potremo benanche concluderne, che il primo de' proposti solidi stia all'altro, come m^2 ad n^2.

§. 426. DEF. XXXVIII. Se da un punto di una curva conica si tiri la semiordinata all'asse, intorno al quale si aggiri con perfetta rivoluzione il trilineo terminato dalla detta semiordinata, dalla sua ascissa computatavi dal vertice, e dall'arco, ch'è in mezzo a tali rette; si chiamerà *Conoide* il solido generato in tal modo. E questa Conoide si dirà *ellittica*,

(*) Vegg. il lem. 2. in fine della *Storia delle Sezioni Coniche*, vol. 3. *Cors. di Geom. Elem. e Subl. di Flauti.*

iperbolica, o *parabolica*, secondo che quella curva sia un'ellisse, un'iperbole, o una parabola.

§. 427. DEF. XXXIX. Una semiellisse terminata dall' asse maggiore, e dalla metà del perimetro di essa, se mai aggirisi con perfetta rivoluzione intorno al detto asse; il solido, che si genera, si dirà *Sferoide*. E se una semiellisse terminata dall' asse minore, e benanche dalla metà del perimetro si aggiri con perfetta rivoluzione intorno all' asse minore, dovrà dirsi *Sferoide schiacciata*, o *depressa* il solido, ch'è generato in tal modo.

§. 428. DEF. XL. Un' iperbole, che si aggiri con perfetta rivoluzione intorno al suo asse conjugato, produce un solido, che suol dirsi *Cilindroide*.

§. 429. SCOL. L'asse di rivoluzione nella prima delle indicate Sferoidi è l' asse maggiore dell' ellisse generatrice di un tal solido, e nell' altra è il minore. E perchè quella conformasi ad un uovo, e questa ad un' arancia, la prima convenevolmente fu detta *Sferoide*, o *Sferoide allungata*, e l' altra poi *Sferoide compressa*, o *schiacciata*. Ma conducendo nell' iperbole MAK* l' ordinata rettangolare MK, e compiti i parallelogrammi NF, N*f* dalle coordinate de' punti M, K; perchè mai chiamasi cilindroide il solido, che nasce dal rivolgerne intorno all' asse conjugato FC*f* della detta curva lo spazio mistilineo MF*f*KA? Questo solido ha per sue basi due cerchi uguali, e paralleli, che sono quelli de' raggi FM, *f*K, ed è cinto dalla superficie cava generata dalla curva MAK colla proposta rivoluzione: onde per una certa conformità, ch' ei tiene al cilindro retto, ha potuto denominarsi *Cilindroide*. Ma ecco alcune principali conseguenze del proposto Lemma recate in forma di teoremi.

**fig. 56.*

§. 430. TEOR. *L'ellisse sta al cerchio circoscrittole, come l'asse minore al maggiore. Ed una sferoide sta alla sfera benanche ad essa circoscritta, in duplicata ragione*
* fig. 3. *dell' asse minore al maggiore**.

DIM. Il semiasse maggiore della proposta ellisse si chiami a, il minore c, ed x sia una qualunque ascissa CR computata dal centro in sull' asse. Sarà per l' ellisse la semiordinata $RP = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$, e per lo cerchio la semiordinata $RM = \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Ma da quest' espressioni ben si comprende essere $RP : RM :: c : a$, ed $RP^2 : RM^2 :: c^2 : a^2$. Dunque per lo proposto Lemma sarà vero il teorema.

§. 431. TEOR. *Se le due iperboli* AMN, ARN *abbiano un medesimo asse principale, e differenti assi conju-*
* fig. 56. *gati; il trilineo iperbolico* AMN* *compreso dalle due coordinate rettangolari* AN, NM, *e dall'arco* AM *starà ad un consimil trilineo* ARN, *che con quello abbia la medesima ascissa* AN, *come l' asse conjugato della prima iperbole all' asse conjugato dell' altra. Ed in duplicata ragione di questi due assi saranno fra loro le conoidi generate da' detti trilinei* AMN, ARN.

DIM. Si chiami a il semiasse principale dell' una iperbole, e dell'altra; e per c, γ si dinotino i semiassi conjugati delle iperboli AMN, ARN. Inoltre sia x la comune ascissa CN computata dal centro. Sarà $MN = \frac{c}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$, ed $RN = \frac{\gamma}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)}$. E dovrà stare $MN : RN :: c : \gamma$, ed $MN^2 : RN^2 :: c^2 : \gamma^2$. Onde pel proposto lemma si conchiuderà il presente assunto.

§. 432. TEOR. *Se le due iperboli* MPY*, RSZ *si rapportino a' medesimi assintoti rettangoli* CL, CQ, *ed in esse conducansi due qualunque ordinate* NMR, QPS; *sarà il quadrilineo iperbolico* NMPQ *all' altro* NRSQ, *come la potenza della prima iperbole alla potenza dell' altra*. * *fig.* 57.

DIM. Si ponga l'ascissa CN $= x$, la potenza della prima delle indicate iperboli uguale ad $\frac{1}{4}e^2$, e quella dell'altra uguale ad $\frac{1}{4}\varepsilon^2$, dovrà * essere l' ordinata NM $= \frac{e^2}{4x}$, e l' altra NR $= \frac{\varepsilon^2}{4x}$; * §. 265.

e si conoscerà intuitivamente essere NM : NR :: $\frac{1}{4}e^2 : \frac{1}{4}\varepsilon^2$; e da ciò potremo conchiuderne l' assunto pel proposto lemma.

§. 433. DEF. XLI. In una curva conica, se ciascuna semiordinata rettangolare si protragga oltre l' asse, finchè la parte prodotta pareggi la normale corrispondente; questa nuova curva rapportata al detto asse si dirà *scala delle normali* della prima curva.

§. 434. SCOL. La stessa definizione potrebbe convenevolmente adattarsi ad altre curve. Ma ho voluto quì restringermi alle sole curve coniche per ragion di metodo; e perchè in queste si avvera, che le scale delle normali loro siene pure linee di second' ordine, come si vedrà ne' seguenti teoremi.

§. 435. TEOR. *La scala delle normali di una data parabola, è una parabola di un identico parametro, la quale tiene il suo vertice, ed il fuoco nel punto di sublimità, e nel vertice della parabola data rispettivamente*.

Per la dimostrazione di questo assunto vedi il §. 332.

§. 436. TEOR. *La scala delle normali di una data ellisse è un altra ellisse, che ha comune colla prima curva il centro, e l'asse minore, e tien per asse maggiore la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi, ed all' asse maggiore della data ellisse.*

DIM. Imperocchè chiamando z una semiordinata di questa scala delle normali, ed indicando nelle solite maniere le
* §. 46. coordinate rettangolari dell'ellisse data, si avrà* per la detta scala l' equazione

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(a^2 - \frac{e^2x^2}{a^2}\right) = c^2 \times \frac{e^2}{a^4}\left(\frac{a^4}{e^2} - x^2\right).$$

che appartiensi ad un' ellisse, che tiene il semiasse minore uguale a c, e 'l maggiore uguale ad $\frac{a^2}{e}$, cioè la terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse maggiore della data ellisse. Onde l' asse maggiore di quella scala delle normali sarà terza proporzionale dopo la distanza de' fuochi, e l'asse maggiore della data ellisse.

§. 437. TEOR. *La scala delle normali di una data iperbole è un' altra iperbole, che ha comune colla prima curva il centro, e l'asse secondario, ed ha poi per asse principale la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi, ed all' asse principale di quella data iperbole.*

DIM. Quì potrebbesi colla guida dell' ellisse, e col §. 215. dimostrare, che sia

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{e^2x^2}{a^2} - a^2\right) = c^2 \times \frac{e^2}{a^4}\left(x^2 - \frac{a^4}{e^2}\right)$$

e vi si conchiuderà nello stesso modo il presente assunto.

§. 438. TEOR. *La scala delle normali di una data iperbole riferita all' asse secondario è un' altra iperbole, che ha comune colla prima curva il centro, e l' asse prin-*

cipale, e tien per asse secondario la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi, ed all' asse secondario della data iperbole.

Dim. La normale MD * dell' iperbole AM si prolunghi insino al semiasse secondario CB. Ed abbassate dal punto M le perpendicolari MN, MS sugli assi conjugati di detta curva, si ponga $CS = NM = x$, $MS = CN = y$, e poi $CA = a$, $CB = c$, l'eccentricità $= e$. Sarà, pe' triangoli simili DNM, MSE, $DN : NM :: MS : SE$, cioè $\frac{c^2}{a^2}y : x :: y : SE = \frac{a^2x}{c^2}$. Onde, per essere $ME^2 = MS^2 + SE^2$, avrassi $ME^2 = \frac{a^2}{c^2}(x^2 + c^2) + \frac{a^4x^2}{c^4} = \frac{a^2c^2x^2}{c^4} + a^2$, ponendovi e^2 per $a^2 + c^2$. Se dunque, si chiami z la normale ME, si avrà per la proposta scala delle normali la seguente equazione * fig. 36.

$$z^2 = a^2 \times \frac{e^2}{c^4}\left(x^2 + \frac{c^4}{e^2}\right).$$

E da ciò può conchiudersi l'assunto.

§. 439. Teor. *La scala delle normali di un' ellisse rapportata all' asse minore è anche un' iperbole, che ha per asse principale l' asse maggiore dell' ellisse, e per asse secondario la terza proporzionale in ordine alla distanza de' fuochi dell' ellisse, ed all' asse minore.*

La dimostrazione di questo teorema può farsi sulle orme di quella del precedente. Ma non per tanto gioverà quì recarla distintamente. Per la qual cosa ad un punto E dell' ellisse ALB * conducasi la normale Ef, che incontri in f l' asse minore di tal curva, ed ella si chiami z. Di poi compito il parallelogrammo EDCH dalle coordinate CD, DE di essa cur- * fig. 5.

va, si ponga CH = DE = x, ed EH = y. Sarà pe' triangoli
* §. 44. simili EDV, EHf, DV : DE :: EH : Hf, cioè *

$$\frac{c^2}{a^2}y : x :: y : Hf = \frac{a^2x}{c^2}.$$

Ma si sa dal §. 72 essere $HE^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - x)$; ed è pure $Ef^2 = EH^2 + Hf^2$. Dunque ne' simboli di queste grandezze avremo la seguente equazione.

$$z^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - x^2) + \frac{a^4x^2}{c^4}.$$

E, riducendo cotesti termini col porvi e^2 per $a^2 - c^2$, si avrà quest'altra equazione conforme a quella del §. 438. cioè

$$z^2 = a^2 \times \frac{e^2}{c^2}\left(x^2 + \frac{c^4}{e^2}\right).$$

LEMMA II.

* fig. 55. §. 440. Se la figura curvilinea AQN * si aggiri con perfetta rivoluzione dintorno al suo asse AN; la superficie del solido, che vi si genera, dovrà stare alla corrispondente aja ABKN nella scala delle normali (1), come la periferia di un cerchio al suo raggio.

DIM. L'ascissa AN intendasi divisa in un qualunque numero di particelle uguali Np, pq, *ec.* ciascuna delle quali

(1) I lati opposti AB, NK del quadrilineo mistilineo ABKN passano pe' punti estremi della curva AQ. Ed in ciò consiste la corrispondenza di quell' aja a questa curva.

si chiami ω ; e le ordinate NQ , pR , qS , *ec.* della curva AQN corrispondenti a' punti N , p , q , *ec.* della divisione si esprimano per le y , y' , y'' , *ec.* : laddove quelle dell' altra curva aKN si dinotino per le X, X', X'' *ec.* rispettivamente . Inoltre nella prima di queste due curve si tirino la normale QP , e la tangente QF dall' estremo dell' ordinata NQ ; e la QF incontri in F la prossima ordinata pR . E lo stesso intendasi praticato ne' punti R , S , *ec.* E poi si chiami ε la prima tangente QF, ε' la seconda RO, ε'' la terza, *ec.* E finalmente si dinoti per π la semicirconferenza del cerchio del raggio 1.

Ciò posto , i due triangoli rettangoli QFE , PQN sono equiangoli, per avere uguali i loro angoli acuti QFE, PQN ; poichè ciascuno di questi forma un retto coll' angolo EQF . Dunque sarà QF : FE :: QP : QN ; e ne' loro simboli $\varepsilon : \omega :: X : y :: 2\pi X : 2\pi y$; onde dovrà essere $2\pi\varepsilon y = 2\pi\omega X$. Or nello stesso modo può dimostrarsi , che sia $2\pi\varepsilon' y' = 2\pi\omega X'$, $2\pi\varepsilon' y'' = 2\pi\omega X''$; e così più oltre . Dunque sarà . . .

$$2\pi\,(\varepsilon y + \varepsilon' y' + \varepsilon'' y'' + etc.) = 2\pi\omega\,(X + X' + X'' + etc.)$$

e quindi . . . .

$$2\pi\,(\varepsilon y + \varepsilon' y' + \varepsilon'' y'' + etc.) : \omega X + \omega X' + \omega X'' + etc. \; 2\pi : 1 .$$

Ma , passando da queste grandezze a' loro limiti , ben si vede , che il primo termine dell' addotta analogia debba dinotare la superficie del solido generato dalla curva AQN nel proposto modo , e che il secondo disegni l' aja ABKN nella scala delle normali dell' anzidetta curva . Dunque sarà la superficie del proposto solido a quella corrispondente aja nella scala delle normali , come la periferia di un cerchio al suo raggio .

§. 441. Cor. 1. L'espressione dell' aja ABKN nella scala delle normali della curva AQN si risolva ne' due fattori lineari ψ , e φ , i quali sieno due qualunque funzioni algebriche , o trascendenti dell' ascissa x, cioè dell' AN; e si dinoti per $\pi : 1$ il rapporto della semicirconferenza di un cerchio al suo raggio, o della circonferenza al diametro (il qual simbolo sarà costantemente adoperato quì innanzi). Sarà quella superficie di rivoluzione uguale a $2\pi \times \text{ABKN} = 2\pi \times \psi\varphi$.

§. 442. COR. II. Quindi *la superficie del proposto solido sarà uguale al cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra le due linee* 2ψ, *e* φ. Poichè chiamando R una tal media proporzionale, sarà quella superficie uguale a πR^2, cioè, pe' teoremi di Archimede, quanto il cerchio del raggio R.

* *fig.* 62. §. 443. COR. III. Le due curve AQB*, AVL rapportate al comune asse CB abbiano sempre uguali le normali QT, VS corrispondenti ad una comune loro ascissa CN. *Saranno pure uguali le superficie generate da' corrispondenti archi* AQ, AV, *quando questi siensi rivolti intorno a quel comune asse.*

LEMMA III.

* *fig.* 58. §. 444. Se le ascisse AB*, AC, AD, *etc.* della parabola AFB sieno continuamente proporzionali, e poi dalle loro semiordinate BF, CG, DH, *etc.*, e dalle differenze delle dette ascisse si compiano i parallelogrammi BK, C*o*, D*v*, *etc.*; anche questi spazj saranno continuamente proporzionali.

E lo stesso dovrà dirsi de' parallelogrammi MR, NL, SP, *etc.*, che si compiano nella parte esterna della medesima parabola.

DIM. Le proposte ascisse AB, AC, AD, *ec.* si chiamino x, x', x'', *ec.*; le loro semiordinate BF, CG, DH, *ec.* si dicano y, y', y'', *ec.*; e per le ϖ, ϖ', ϖ'', *ec.* si disegnino le differenze successive delle dette ascisse, cioè le BC, CD, DE, *ec.* Sarà chiaro *, che le ϖ, ϖ', ϖ'', *ec.* deb-* 19. El. V. bano essere proporzionali alle x, x', x'', *ec.*, o a' quadrati delle y, y', y'', *ec.* E per la natura della parabola potrà immantinente dimostrarsi, che anche le y, y', y'', *ec.* sieno continuamente proporzionali. Inoltre sia φ l'angolo ABF delle coordinate dalla parabola proposta: saranno i parallelogrammi BK, Co, Dν, *ec.* rispettivamente uguali alle seguenti grandezze $\varpi y.sen.\varphi$, $\varpi' y'.sen.\varphi$, $\varpi'' y'' sen.\varphi$, *ec.* Onde sarà BK : Co :: $\varpi y.sen.\varphi : \varpi' y'.sen.\varphi :: \varpi y : \varpi' y' :: (y^3) : (y')^3$, sostituendo alla ragione di ϖ ad ϖ' quella di $y^3 : (y')^3$. E sarà pure, adoperando un simil ragionamento, Co : Dν :: $(y')^3 : (y'')^3$; e così più innanzi. Dunque i parallelogrammi BK, Co, Dν, *ec.* saranno in triplicata ragione delle loro basi BF, CG, DH, *ec.*; e quindi quelli al par di queste dovranno essere continuamente proporzionali.

PART. II. Quì sopra si è dimostrato, che le semiordinate BF, CG, DH, *ec.*, o le loro uguali AM, AN, AS, *ec.* sieno in una continua proporzione. Dunque, distendendo la dimostrazione di questa seconda parte colla medesima guida della prima, potremo raccorre, che i parallelogrammi MR, NL, SP, *ec.* sieno pur essi come i cubi delle dette semiordinate, e con ciò continuamente proporzionali, al par di queste rette.

§. 445. COR. I. Nella prima parte del presente Lemma ho dimostrato, che sia BK : Co :: $BF^3 : CG^3$; e nella seconda che debba stare MR : NL :: $BF^3 : CG^3$. Dunque sarà BK : Co :: MR : NL; e permutando BK : MR :: Co : NL. Or similmente può conchiudersi, che stia Co : NL :: Dν : SP, e co-

12. El. V. sì più oltre. Quindi è, che potrà inferirsi, che stia BK + Co + Dv + *etc.* : MR + NL + SP + *etc.* :: BK : MR (1).

§. 446. Cor. ii. Le coordinate AB, BF della parabola proposta sieno rettangolari, e lo spazio parabolico ABF si aggiri con perfetta rivoluzione dintorno all' ascissa AB, generando una conoide parabolica. Potrà dimostrarsi, come si è praticato in questo Lemma, che la somma de' cilindri iscritti in una tal conoide debba stare alla somma degli anelli cilindrici ad essa circoscritti, come il primo di que' cilindri al primo di questi anelli; cioè come il cilindro generatovi dal rettangolo BK all' anello, che vi genera il rettangolo RM coll' anzidetta rivoluzione.

§. 447. Cor. iii. Se le ascisse x, x', x'', *etc.* della curva ABF sieno come le potenze n delle loro semiordinate y, y', y'', *etc.*, e quelle si suppongan pure continuamente proporzionali; i parallelogrammi, che compionsi dalle y, y', y'', *etc.* e dalle differenze di quelle ascisse, saranno benanche in una proporzione continua: lo che può dimostrarsi, come si è dianzi praticato (2).

---

(1) Il teorema, onde ritraggonsi le dimostiazioni Fermaziane per le quadrature, vien proposto dal sagace Horsley nel seguente modo. *Se le grandezze* a, b, c, d, etc. *sieno continuamente proporzionali, e ciascuna di queste ragioni pareggi quella di* m *ad* n, *sarà la massima alla somma delle rimanenti come* m — n : n. E ciò vuol
17. El. V. intendersi, quando la minima delle dette grandezze sia evanescente. Ma la quadratura della parabola si vedrà quì appresso rapportata con altro torno di ragioni, e col metodo de' limiti.

(2) Le verità di questi tre Lemmi sono anche applicabili a curve diverse dalle coniche: onde giustamente potremo chiamar Lemmi queste preposizioni preliminari.

CAPITOLO XII.

PARTE II.

DELLE DIMENSIONI DELL' ELLISSE

PROPOSIZIONE LXXVIII.

TEOREMA.

§. 448. Se chiamisi a il semiasse maggiore di un'ellisse, c il minore, ed esprimendo per x, y le coordinate di un punto di questa curva, si dinoti per θ un arco, la cui tangente trigonometrica sia $\frac{ay}{cx}$: dico, che conducendo da quel punto un' ordinata all' asse, debba essere il segmento ellittico troncato da questa retta verso il vertice vicino della curva, uguale alla differenza del rettangolo delle dette coordinate da quello de' semiassi, moltiplicato per la ragione dell' arco θ al raggio.

Cioè a dire, se la IH* rappresenti quella corda dell'ellisse HGD, dovrà essere il segmento ellittico IGH $= \theta ac - xy$. *fig. 59.

Dim. La semiordinata AI della proposta ellisse HGD sta alla corrispondente semiordinata AK del cerchio ad essa circoscritto*, come c ad a. Dunque sarà $\mathrm{AK} = \frac{ay}{c}$, ed $\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AC}} = \frac{ay}{cx}$. Inol- * §. 430.

tre si chiami θ l'angolo ACK, o l'arco del raggio 1, che il misuri; e poi si faccia $1 : a :: \theta : GK$; sarà $GK = a\theta$, il settore KCG dovrà essere uguale ad $\frac{1}{2} a^2\theta$, il triangolo CAK ad $\frac{1}{2}\frac{axy}{c}$; e quindi sarà il trilineo circolare $KAG = KCG - CAK$
* §. 430. $= \frac{1}{2}\left(a^2\theta - \frac{axy}{c}\right)$. Ma * sta $CG : CD :: KAG : IAG$, cioè $a : c :: \frac{1}{2}\left(a^2\theta - \frac{ayx}{c}\right) : IAG$. Dunque sarà il trilineo ellittico $IAG = \frac{1}{2}(ac\theta - xy)$, e 'l segmento ellittico $IGH = ac\theta - xy$.

§. 449. COR. Si chiami φ l'angolo KCL complemento di θ, o l'angolo, che abbia per tangente il fratto $\frac{cx}{ay}$. Sarà $1 : a :: \varphi : KL = a\varphi$; il settore KCL dovrà essere uguale ad $\frac{1}{2} a^2\varphi$, il triangolo $KAC = \frac{1}{2}\frac{axy}{c}$; e quindi il quadrilineo circolare $LKAC = KCL + KAC = \frac{1}{2}\left(a^2\varphi + \frac{axy}{c}\right)$. E sarà poi il quadrilineo ellittico $DIAC = \frac{1}{2}(ac\varphi + xy)$, e'l suo duplo sarà uguale ad

$$ac\varphi + xy \;.\;.\;.\;.\; A$$

PROPOSIZIONE LXXIX.

TEOREMA.

§. 450. Poste le medesime cose della proposizione precedente, l'aja di un' ellisse è quanto un cerchio, il cui il raggio sia medio proporzionale tra i semiassi conjugati della detta curva.

Ed, indicando per $\pi : 1$ la ragione della semicirconferenza al suo raggio, sarà la detta aja uguale a πac. E la sferoide, che vi si genera, dovrà essere $\frac{2}{3}\pi ac^2$.

DIM. Queste due verità fluiscono immediatamente da quel, che ho detto nel primo lemma*, e nel preced. coroll. * §. 43.

§. 451. COR. Dunque *le aje di due ellissi sono come i rettangoli de' lori assi conjugati.*

PROPOSIZIONE LXXX.

TEOREMA.

§. 452. Se col centro di un' ellisse, e coll'intervallo uguale alla terza proporzionale in ordine all' eccentricità, ed al semiasse maggiore di una tal curva si descriva un arco circolare tra le tangenti menate a' vertici dell'ellisse, e da una stessa parte; la superficie della sferoide, che vi si genera, sarà uguale al cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra'l semiasse minore, e'l detto arco circolare accresciuto dell'intero asse minore*. * fig. 59.

Cioè, chiamando φ quell'arco, sarà (1) la proposta superficie uguale a $\pi\left(\frac{ac^2\varphi}{e} + c^2\right)$.

(1) L'ennunciazione della prima parte di questo teorema concorda con quella, che l' Ugenio recò in altra guisa, e senza dimostrazione.

DIM. La semiellisse ADB sia la generatrice della sferoide proposta; e la scala delle sue normali ne sia l' altra ellisse
* §. 436. GDO, che * dee avere il medesimo asse minore colla prima curva, e per semiasse maggiore $\frac{a^2}{e}$. A' vertici della semiellisse ADB si conducano le tangenti AK, BE verso una medesima parte dell' asse AB, le quali incontrino in I, Q l' ellisse GDO, ed in K, E la circonferenza di un cerchio ad essa circoscritto: e poi si chiami ϕ la metà dell' angolo KCE. Sarà la retta AI uguale a $\frac{c^2}{a}$. Imperocchè ella dovrebbesi ge-
* §. 436. neralmente esprimere * per $\frac{c}{a}\sqrt{\left(a^2-\frac{e^2x^2}{a^2}\right)}$; ed essendo in questo caso la $x=a$, il detto radicale diverrà uguale a $\frac{c}{a}\sqrt{(a^2-e^2)}=\frac{c^2}{a}$. Ciò premesso, se nella formola $ac\phi+xy$, che si è detto nel precedente corollario dover dinotare il quadrilineo ellittico AIQB, si ponga $\frac{a^2}{e}$ per a, e per le x, y le a, e $\frac{c^2}{a}$ rispettivamente, sarà AIQB $=\frac{a^2c\phi}{e}+c^2$. E per lo lemma II. dovrà essere la superficie della proposta sferoide $=2\pi\times$ AIQB $=\pi\left(\frac{2a^2c\phi}{e}+2c^2\right)$. E con ciò u-
* §. 442. guale al cerchio, che ha per raggio la media proporzionale * tra c, $\frac{2a^2\phi}{e}+2c$.

§. 453. SCOL. I. La dimensione della superficie di una sferoide schiacciata, avvegnachè dipendendo dalla quadratura dell' iperbole, o dalla rettificazione della parabola, sarà esibita alla fine di questo Capo.

§. 454. SCOL. II. Colla guida del secondo di questi tre Lemmi potremo imprendere quella geometrica ricerca, in che si converte il famoso astronomico problema dell' *Anamolia*. Cioè: *Data la semiellisse* AOB*, *dividerla in una data ragione con una retta, che passi per uno de' suoi fuochi* F. A tal uopo si descriva il semicerchio ANB sull' asse maggiore AB della data curva, e dalla medesima parte di essa. E supponendo, che O sia il richiesto punto, si meni sulla BA da tal punto la perpendicolare OM, che incontri in N quel semicerchio: e poi si uniscano le rette FO, FN, e 'l raggio CN. Ed essendo in virtù del primo Lemma il segmento ellittico AMO al circolare AMN, come MO ad MN, o come l' asse minore al maggiore di cotesta ellisse: ed il triangolo FMO all' altro FMN anche come MO ad MN, sarà il trilineo ellittico FAO al circolare FAN nella data ragione dell' asse minore al maggiore. Onde dovrà esser dato di grandezza il trilineo circolare FAN al par dell'altro FAO, e potremo comodamente supporlo uguale al settore circolare ACP. Ciò posto, sia il semiasse AC $= 1$, e l' eccentricità FC $= e$. E poi si ponga l' ignoto arco AN $= \varphi$, il suo seno NM $= x$, e 'l dato arco AP $= \psi$. Sarà il *sett.circ.*ACN$= \frac{1}{2}\varphi$, il *triang.*NCF $= \frac{1}{2}ex$ e'l *sett.circ.*ACP$=\frac{1}{2}\psi$. Ed essendo ACP $=$ ACN $+$ NCF, sarà

$$\psi = \varphi + ex \quad \ldots \quad A.$$

Or sebbene questo risultamento, ed altri che per la simile indagine si sogliono incontrare, sieno semplicissimi; pure i più sublimi analisti si sono seriamente occupati a poterli ridurre in

*fig. 60.

usi comodi di Astronomia. Intanto dall' equazione A si deriva essere $\psi - \varphi = ex$, cioè $1 : e :: x : \psi - \varphi$. E perciò il detto problema si trasforma in quest' altro benanche transcendente, ch' è di: *Dividere l' arco* AP *in due parti*, *talchè l' una di esse stia al seno dell' altra*, *come l' eccentricità dell' ellisse al semiasse maggiore*. E per tal verso un nostro geometra (1) ha saputo con operazioni aritmetiche, e con una grande, ed agevole approssimazione esibire dall'*Anomalia media* di un pianeta la *vera*, o la *coequata*.

(1) Questo geometra ha comunicato agli editori de' nostri *Opuscoli matematici* una dissertazione su tale argomento per farvela inserire.

CAPITOLO XII.

PARTE III.

DELLA DIMENSIONE DELL' IPERBOLE.

§. 455. Que' geometri dell' antichità rimota, che conobbero le due opere di Archimede *della dimensione del cerchio*, e *della quadratura della parabola*, vi dovettero comprender chiaramente, che dalla quadratura del cerchio discendea quella dell' ellisse, e che ogni spazio parabolico si potea quadrare con geometrica esattezza. Ma niuno di loro, per quel, che sappiamo, tentò mai di quadrar l' iperbole, o non vi si diresse col metodo de' limiti, e per le proprietà degli assintoti di essa: lo che agevolmente avrebbel condotto al disiato fine. Onde questa curva, la più sventurata tra quelle, ch' ebber la genesi dal cono, restò fino al secolo antipassato senza corredo di quadratura. Or io, dovendo esibire la dimensione dell' iperbole con principj analitici elementari, potrei valermi del metodo esposto nella prop. 42, che sembra commendevole, e per la semplicità, che contiene, e per la luce, che può diffondere alle log-miche funzioni. Imperocchè il valore dell' aja assintotica, che ivi vuol quadrarsi, è di una comoda approssimazione. Egli è compreso tra due limiti assai stretti: nè quindi ad estimar l' errore, ch' emerge (1) da' termini omessi, dovrà in-

(1) Il dottissimo sig. Lagrange nella *Teorica delle funzioni analitiche* §. 53. ha detto saggiamente, che: *la perfezione de' metodi di approssimazione, ne' quali s' impiegan le serie, non debbasi attendere dalla sola convergenza di esse, ma dal potervi estimar l' errore, che risulta dai termini omessi*. Or questa seconda indagine suol

stituirsi una nuova calcolazione, che il più delle volte suol es-
serne assai scabra. Col detto metodo può risolversi agevolmen-
te il problema fondamentale della costruzione del Canone Ne-
periano, ch'è di: *computare il numero delle medie propor-*
zionali, che si hanno ad intercalare tra l' unità, ed un
numero dato in una progressione geometrica, la quale ab-
bia per suo denominatore il fratto spurio 1,0000001. Che
anzi in esso metodo traluce la formola F, che contiene il pro-
cesso delle operazioni Briggiane, per la ricerca de'log-mi tabu-
lari, e che il sig. Lagrange con ingegnosi ripieghi ha rinve-
nuta (1). Ma pure malgrado tutte queste cose, io non impon-

---

esser dura nell' applicazione. Poichè frequentamente viene omessa da
quell' istesso analista, che la propose: cioè nel rinvenire i log-mi
de' numeri primi, i seni dagli archi, gli archi da' seni, *ec.*

(1) Il sagace Brigg stabilì con operazioni aritmetiche equiva-
lenti alle analitiche, che quì sono indicate, che posto il modulo del
sistema uguale ad A debba essere il log-mo tabulare del numero y
uguale a $\frac{2^n\left(y^{\frac{1}{2^n}}-1\right)}{A}$. (*Vedi la theor. des fonction. analyt.* del
Lagrange §. 23.) Or ponendo $A = 1$, si avrà nel sistema Nepe-
riano il log-mo naturale del numero y. Lo che con altri facilissi-
mi ripieghi adoperati nell' analisi della prop. 42 sarebbesi ottenu-
to. Ho voluto rapportar queste cose; poichè quel lavorìo aritme-
tico praticato dal gran Nepero non fu chiaramente espresso da que-
sto geometra, nè da altri sufficientemente illustrato. Infatti il Mon-
tucla dovendo prefiggere quelle aritmetiche operazioni elementari,
onde conobbe il Nepero doversi ritrovare 23025850 termini tra 1 e 10
in quella progressione geometrica, i cui primi termini sono 1, ed
1,0000001, disse generalmente, ch' *ei ciò rinvenne per mezzo del*
calcolo. Il sommo Lagrange si espresse più determinatamente col dire,

go a' giovani, che per quadrare l' iperbole tra gli assintoti vi abbiano ad eseguire quelle indicate aritmetiche operazioni, che dovrebberli travagliare immensamente. Mi basta ch' essi vi comprendano il metodo di quadrar tal curva, ed i vantaggi analitici, che se ne sarebber conseguiti. E poichè i log-mi naturali si sogliono oramai ottenere con metodi spediti, e chiari; e gli possiamo benanche colla regola aurea ritarre da' tabulari: col beneficio delle tavole log-miche, e profittando de' travagli de'loro compositori, potremo nel seguente modo quadrare l' iperbole tra gli assintoti.

§. 456. Teor. *Conducendo due ordinate in un' iperbole tra gli assintoti, che però sia parilatera, lo spazio troncatone da quelle due rette sarà uguale alla potenza della medesima iperbole, moltiplicata pe 'l log-mo della ragione della maggiore di esse ordinate alla minore.*

PROPOSIZIONE LXXXI.

TEOREMA.

§. 457. Se da un qualunque punto di un' iperbole parilatera vi si tiri l' ordinata all' asse principale; l' aja del segmento iperbolico troncatone da tal retta sarà uguale al rettangolo delle coordinate corrispon-

---

che a rinvenirne il luogo, che il 10 occupava in quella serie bisognava *cercare per le regole conosciute i termini successivi a que'due primi termini*. Ed accorgendosi, che quest' indagine avrebbene costata un' immensissima fatiga, soggiunse altrove, *che una tal cosa poteasi ottenere colle successive estrazioni delle radici quadrate*, e forse col metodo da me prescritto nella prop. 42.

denti al detto punto, meno il quadrato del semiasse moltiplicato pe 'l logaritmo della ragione dalla somma di esse coordinate al medesimo semiasse.

* *fig.* 56. Cioè, chiamando x, y le coordinate CN*, NM del punto M dell' iperbole parilatera KAN, ed a il semiasse principale AC, sarà il segmento iperbolico

$$\text{MAK} = xy - a^2.\text{l.}\left(\frac{x+y}{a}\right).$$

DIM. Intendasi condotto l' assintoto CB al ramo iperbolico AM. E quivi ordinate le due rette AD, MB, l' una dal vertice principale di tal curva, e l' altra dal proposto punto M, si compia il parallelogrammo CNMF. Sarà per lo triangolo isoscele rettangolo CFE (1) il cateto CF uguale all' altro FE.

* §. 243. Ed essendo, per la natura* di cotesta iperbole, $y^2 = x^2 - a^2$; e quindi $x^2 - y^2 = a^2$, sarà $x + y : a :: a, x - y$. Ma le grandezze a, ed $x - y$ vi dinotano rispettivamente le rette AC, ME; e sta poi AC : ME :: AD : MB, pe' triangoli simili ADC, MBE. Dunque sarà $x + y : a ::$ AD : MB. Ciò posto, il qua-

* §. 277. drilineo iperbolico ADBM, o il suo ugual settore CAM*, è uguale alla potenza dell' iperbole KAM, moltiplicata pe 'l loga-

* § 456. ritmo della ragione di AD ad MB*. Dunque sarà il settore iperbolico CAM $= \frac{1}{4}e^2 . \text{l.}\left(\frac{x+y}{a}\right)$. E quindi il trilineo iperbolico MAN $=$ CNM $-$ CAM $= \frac{1}{2}xy - \frac{1}{4}e^2.\text{l.}\left(\frac{x+y}{a}\right)$,

---

(1) L' angolo assintotico BCR dell' iperbole parilatera KAM è

* §. 254. retto*: e 'l semiasse CA il divide per metà. Dunque sarà semiretto l' angolo FCE.

E prendendone i loro doppj con porvi a^2 per $\frac{1}{2}e^2$ *, sarà il segmento iperbolico *§. 261.

$$\mathrm{MAK} = xy - a^2.\mathrm{l}.\left(\frac{x+y}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{A}$$

§. 458. Cor. I. Il quadrilineo ACFM nella parte esterna della detta iperbole è uguale al rettangolo NCFM meno il trilineo iperbolico MAN. Dunque sarà cotesto quadrilineo iperbolico

$$\mathrm{ACFM} = \frac{1}{2}\left(xy + a^2.\mathrm{l}.\left(\frac{x+y}{a}\right)\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{B}$$

§. 459. Cor. II. Col medesimo asse principale dell' iperbole KAM, e coll' asse conjugato uguale a $2c$ intendasi descritta l' altra iperbole Am. Sarà* il trilineo iperbolico MAN al suo corrispondente trilineo mAN, come a a c. Dunque dovrà esser questo secondo trilineo iperbolico *§. 431.

$$m\mathrm{AN} = \frac{c}{2a}\left(xy - a^2.\mathrm{l}.\frac{x+y}{a}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{C}$$

§. 460. Cor. III. Nell' iperbole PAQ* si tirino ovunque le due corde parallele MN, PQ; e la retta CBE sia il diametro di queste due ordinate*. Sarà manifesto esser tra se uguali i due trilinei iperbolici MBD, NBD, non men che gli altri due PBE, QBE: onde dovranno rimanervi uguali i due quadrilinei iperbolici PrMDE, QsNDE. Ma congiunte le rette PM, QN risultano uguali i trapezj rettilinei PMDE, QNDE. Dunque vi resteranno uguali i due segmenti iperbolici PrM, QsN. *fig. 61. *§. 222.

§. 461. Cor. IV. Da' punti P, M, N, Q si abbassino le perpendicolari PG, MF, NI, QH all' asse conjugato della detta iperbole, prodotto quanto conviensi. Sarà chiaro, che i due quadrilinei iperbolici GPrMF, HQsNI abbiano la medesima differenza de' due trapezj rettilinei GPMF, HQNI, per essere uguali, come l' ho dimostrato, le parti additizie PrM, QsN di que' due quadrilinei. E perciò la differenza de' due quadrilinei $GPrMF$, $HQsNI$ sarà quadrabile al par di quella degli anzidetti trapezj. Ed è un paradosso geometrico, *che sia quadrabile la differenza di due spazj iperbolici, niuno de' quali è suscettivo di quadratura*.

PROPOSIZIONE LXXXII.

TEOREMA

§. 462. La conoide generata da un' iperbole parilatera è uguale alla differenza del cono rettangolo, che tien per asse l' ascissa della generatrice di quella conoide, computatavi dal centro; e di un cilindro, che ha per base il cerchio del semiasse, e per altezza la detta ascissa diminuita di due terzi di quel semiasse.

Cioè colle precedenti denominazioni una tal conoide sarà uguale ad $\frac{1}{3}\pi x^3 - \left(x - \frac{2}{3}a\right)\pi a^2$.

E la sua superficie verrà espressa da quest' altra formola $\frac{\pi ec}{a^2}\left(xy - e^2 + \frac{a^4}{e^2}.\,\mathrm{l}.\frac{e^2}{ax+ay}\right)$

fig. 56. Dim. Part. i. Il trilineo iperbolico NAM col volgersi dintorno alla sua ascissa AN generi la conoide proposta. E l' assintoto CR di tal curva incontri in O la tangente verticale AO, ed in R la semiordinata CN prodotta, quanto

sia d' uopo. Inoltre dal punto N si tronchi un qualunque elemento Nn dalla detta ascissa, e dal punto A la PA terza parte del semiasse AC: e poi si compiano i parallelogrammi Ns, Nν, NO, NL. E sia CN $=$ NR $= x$, MN $= y$, CA $= a$, ed $Nn = \omega$. Sarà* $y^2 = x^2 - a^2$, e quindi $\pi\omega y^2 = \pi\omega x^2 - \pi\omega a^2$. E ciò vuol dire, che il cilindro nato dalla rivoluzione del rettangolo Ns intorno ad Nn sia uguale all' anello cilindrico, che vi si genera rivolgendo intorno ad AN il rettangolo Qν. Onde per la teorica de' limiti potremo concludere, che la conoide proposta sia uguale al solido generato dal volgerne intorno ad AN il triangolo OQR. Or questo solido è la differenza del cono rettangolo, che vien generato dal triangolo CNR rivolto intorno a CN, e di quell' altro solido, che in una tal rivoluzione sarebbesi generato dal trapezio COQN. Ed è quel cono uguale ad $\frac{1}{2}\pi x^3$: e quest' altro solido vi pareggia $\frac{1}{3}\pi a^3 + (x - a)\pi a^2 = (x - \frac{2}{3}a)\pi a^2$. Dunque la proposta conoide sarà uguale ad $\frac{1}{3}\pi x^3 - (x - \frac{2}{3}a)\pi a^2$. * §. 243.

PART. II. L' iperbole GIX sia la scala delle normali dell' iperbole AM, il cui semiasse primario CG dee essere $\frac{a^2}{e}$, e 'l secondario C$g = c$. Potrà dimostrarsi, come nell' ellisse, prop. 80., esser la retta AI $= \frac{c^2}{a}$. E per lo Cor. II. prop. preced. si vedrà essere (1) il trilineo iperbolico GNX uguа-

(1) Leggansi il §. 437, e 459.

le a $\frac{Cg}{2CG}\left(CN\times NX - CG^2.\,l.\,\frac{CN+NX}{CG}\right)$. Se dunque in quest' espressione porremo c per Cg, ed $\frac{a^2}{e}$ per CG, il detto trilineo GNX sarà uguale ad $\frac{ec}{2a^2}\left(xy - \frac{a^4}{e^2}.l.\frac{ex+ey}{a^2}\right)$. E ponendo in questa formola per le x, y le grandezze a, e $\frac{c^2}{a}$, che sono i valori delle coordinate CA, AI, ed e^2 per $a^2 + c^2$, si avrà il trilineo GAI $= \frac{ce}{2a^2}\left(c^2 - \frac{a^4}{e^2}.\,l.\frac{e^3}{a^3}\right)$. Ed essendo lo spazio ANXI=GNX—GAI, dovrà essere il quadrilineo iperbolico

$$ANXI = \frac{ec}{2a^2}\left(xy - c^2 + \frac{a^4}{e^2}.l.\frac{e^2}{ax+ay}\right).$$

E per lo Lemma secondo avremo la superficie della conoide proposta uguale a

$$\frac{\pi ec}{a^2}\left(xy - c^2 + \frac{a^4}{e^2}.l.\frac{e^2}{ax+ay}\right).$$

§. 463. Cor. La quadratura di un' iperbole scalena, e la dimensione della conoide, che vi si genera, dipendono dalla quadratura, e dalla cubatura dell' iperbole parilatera, come si è detto nel §. 431. E la superficie di quella conoide potrà agevolmente ottenersi colla guida dell' analisi, che ho recata nella seconda parte di questo teorema.

CAPITOLO XII.

PARTE IV.

DIMENSIONE DELLA PARABOLA.

PROPOSIZIONE LXXXIII.

TEOREMA.

§. 464. Se da un punto di una parabola si tiri la semiordinata ad un qualunque diametro di tal curva; il trilineo parabolico compreso dalle coordinate del detto punto, e dall' arco, ch' è in mezzo ad esse, sarà due terzi del parallelogrammo, che compiesi dalle anzidette coordinate.

DIM. Intendasi praticata la medesima costruzione del lemma terzo. E poi si ponga la semiordinata $BF = a$, l' altra $CG = y$, il parametro del diametro AB uguale a p, l' angolo $B = \phi$, e quindi* l' ascissa $AB = \frac{a^2}{p}$ l' altra $AC = \frac{y^2}{p}$, e la $BC = \frac{a^2 - y^2}{p}$ Dovrà essere il parallelogrammo $BG = \frac{y}{p}(a^2 - y^2)sen.\phi$, l' altro $NK = \frac{y^2}{p}(a - y)\,sen.\,\phi$, e 'l rapporto della prima alla seconda di queste due figure sarà quanto quello di $a + y$ ad y; lo che ben si vede simplificando un tal rapporto, o dividendo per $\frac{y}{p}(a - y)\,sen.\,\phi$ le grandezze, che il contengono. Ciò posto, la somma de' parallelogrammi

*fig. 58.

* §. 323.

iscritti nello spazio parabolico interno ABF sta alla somma degli altri iscritti nello spazio esterno AMF, come il paral-
* §. 445. lelogrammo BG all' altro NK*. Dunque passando da queste grandezze a'loro limiti, sarà lo spazio parabolico interno ABF (1) all' esterno AMF, come $a+y$ ad y, cioè come 2 ad 1. Imperocchè svanendo la differenza delle a, y, diviene $a+y : y :: 2y : y :: 2 : 1$. E perciò lo spazio parabolico interno ABF sarà due terzi del parallelogrammo delle coordinate AB, BF.

§. 465. COR. Da un altro punto I della parabola proposta si ordini al diametro AB la retta IE. Sarà quadrabile il trilineo parabolico AEI al par dell' altro ABF. E quello dovrà stare a questo, come EI^3 a BF^3. Cioè *que' due trilinei parabolici saranno in triplicata ragione delle semiordinate, su cui poggiano*.

---

(1) Per comprender l'essenza di questa dimostrazione convien rimontare al lemma 111, e porvi per le x, x', x'', *etc.* i rispettivi quadrati delle y, y', y'', *etc.* divisi per la p. Ed in tal modo i parallelogrammi BG, NK si troveranno avere le seguenti espressioni

$$y\left(\frac{y^2-y'^2}{p}\right)sen.\,\phi\,,\ \text{ed}\ (y-y')\,\frac{y^2}{p}\,sen.\,\phi\,,$$

e 'l rapporto di queste due grandezze si vedrà esser quanto quello di $y+y'$ ad y. Ma per la proporzionalità delle y, y', y'', *etc.* il detto rapporto è costante, ch' io dinoto per $m : n$. E, quando que'rettangoli vanno a terminar nella curva, il medesimo rapporto è di 2 : 1. Dunque lo spazio parabolico interno è duplo dell' esterno. Intanto il proposto metodo non si restringe al solo asse, come altri suol fare, ma può adattarsi a qualunque diametro della parabola.

PROPOSIZIONE LXXXIV.

TEOREMA.

§. 466. La conoide parabolica è una metà del cilindro, che abbia con tal solido la medesima base, ed altezza.

DIM. Si supponga esser retto l' angolo ABF * delle dette coordinate, e poi con perfetta rivoluzione si aggiri il trilineo ABF intorno ad AB. Gli spazj cilindrici generati con tal moto dal rettangolo BG, e dall' altro GM saranno fra loro, come $\left(\frac{a^2-y^2}{p}\right)\pi y^2$, e $(\pi a^2 - \pi y^2)\frac{y^2}{p}$, dinotando per p il parametro principale della parabola. Cioè saranno que' solidi in ragion di uguaglianza. E quindi la conoide generata dal trilineo parabolico ABF sarà uguale * al solido generato dallo spazio esterno AMF. Onde quella dovrà essere una metà del cilindro ad essa circoscritto.

* *fig.* 58.

* §. 446.

PROPOSIZIONE LXXXV.

TEOREMA.

§. 467. La superficie dell' anzidetta conoide è quanto un cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra la terza parte del parametro principale, e la differenza de' raggi d' osculo ne' punti estremi della generatrice di una tal superficie (1).

(1) L' enunciazione di questa verità, che parmi assai semplice, e ritenevole, forse non si è usata da altri in tal rincontro.

Cioè, ponendo l'altezza di quel solido uguale ad x, sarà la superficie di esso uguale a

$$\frac{\pi y}{3}\left(\frac{(px+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}-\frac{1}{2}p\right).$$

*fig. 55. DIM. La parabola DBK * sia il luogo delle normali della
* §. 435. proposta parabola AMN*; e chiamando p il comune parametro principale di queste due curve, pongasi nella prima delle dette parabole l'ascissa $AN = x$, e nell' altra si ordinino da' punti A, N le AB, NK, e la NA la incontri in D. Sarà $DA = \frac{1}{4}p$, $AB = \frac{1}{2}p$, $ND = \frac{1}{4}p + x$, $NK = \sqrt{(px + \frac{1}{4}p^2)}$,
* §. 464. il trilineo * parabolico $BAD = \frac{2}{3} BA \times AD = \frac{1}{3.4}p^2$, l' altro $KND = \frac{2}{3} KN \times ND = \frac{2}{3}(x + \frac{1}{4}p)\sqrt{(px + p^2)}$ $= \frac{2}{3p}\left(px + \frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}}$. E quindi il quadrilineo parabolico $ABKN = \frac{2}{3p}(px + \frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3.4}p^2$. E finalmente per lo lemma II. la superficie della conoide parabolica generata dalla rivoluzione del trilineo AMN intorno all' asse AN sarà uguale a

$$\frac{4\pi}{3p}(px+\tfrac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2.3}p^2 = \frac{\pi p}{3}\left(\frac{(px+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2} - \frac{1}{2}p\right).$$

Ma il raggio d' osculo, che appartiensi al punto M della pro-
* §. 417. posta parabola AM, è * uguale a $\frac{(px+\frac{1}{4}p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}p^2}$, cioè al cubo della normale diviso per lo quadrato del semiparametro dell'as-

se: ed è $\frac{1}{2}p$ il raggio d' osculo nel vertice della detta curva*: dunque sarà vero il teorema nel concetto geometrico, e nell' altro analitico, co' quali l' ho quassù esibito. * §. 419.

§. 468. COR. Di quì si deduce, che: *Le superficie di due conoidi paraboliche, le cui curve generatrici hanno parametri uguali, debbano essere, come le rispettive differenze de' raggi d' osculo ne' punti estremi di esse generatrici.*

PROPOSIZIONE LXXXVI.

TEOREMA.

§. 469. Se da un punto di una parabola conducasi la semiordinata all'asse, e poi si congiunga la metà di questa retta col vertice di quella curva: sarà l' arco parabolico terminato dal proposto punto, e dal vertice della curva uguale alla detta congiungente, ed alla quarta parte del parametro moltiplicata pe'l log-mo della ragione della somma della detta semiordinata, e della corrispondente normale alla sunnormale (1).

Cioè, chiamando y quella semiordinata NM* * *fig.* 63.

(1) Il sagace Horsley chiama elegantissima quella composizione geometrica, che seppe ordire l' acutissimo Cotes nel rettificare un arco parabolico. Or ad una tal composizione io mi sono ingegnato di conformare il tema del presente teorema. Ove ben si vede, che dalla quadratura dell' iperbole dipende la rettificazione della parabola.

della parabola ANS, ed a il semiparametro princi-
pale della curva, sarà l' arco parabolico

$$AN = \frac{y}{2a} \sqrt{(y^2+a^2)} + \frac{1}{2} a . l. \frac{y+\sqrt{(y^2+a^2)}}{a}$$

DIM. L' asse AM della proposta parabola ANS si pro-
lunghi oltre il vertice, sinchè la parte protratta AC vi pa-
reggi il semiparametro principale di essa curva. E poi,
centro C, col semiasse principale AC si descriva l' iperbole
parilatera AQG. E preso nella parabola l' archetto piccolissi-
mo Nn, si tirino pe' punti N, n le due rette NP, np pa-
rallele all' asse AM di tal curva, cui si tiri per N la norma-
* §. 332. le NR. Sarà, per la natura della parabola ANS *, la normale
NR $= \sqrt{(y^2+a^2)}$; e per la natura dell' iperbole esterna
* §. 190. AQG dovrà essere* la semiordinata PQ $= \sqrt{(y^2+a^2)}$. Dun-
que sarà NR = QP. Ed essendo $Nn : No :: NR : MR$, pe'tri-
angoli simili NOn, NMR, cioè $Nn : Pp :: QP : AC$, sarà
$Nn \times AC = Pp \times QP$. E ciò sempre dimostrandosi, sarà l' ar-
co parabolico AN moltiplicato pel semiasse AC uguale al
* §. 458. quadrilineo iperbolico ACPQ, che si è quì sopra * dimostrato
uguale ad $\frac{1}{2} CH \times HQ + \frac{AC^2}{2} . l. \frac{CH+HQ}{CA}$. Sicchè dividendo
quest' equazione per AC, e ponendovi per le CH, HQ, AC
le loro uguali NR, NM, MR, sarà l' arco parabolico

$$AN = \frac{1}{2} . \frac{RN \times NM}{MR} + \frac{1}{2} MR . l. \frac{NR+NM}{MR}.$$

Ciò premesso, si conduca dal punto N la NF tangente
della parabola ANS. Ed essendo per supposizione MB = BN,
* §. 327. e per la natura di questa curva la * MA = AF, sarà quella
congiungente AB parallela alla tangente NF, ed una metà di

questa retta. Ma pe' triangoli simili RMN, RNF sta RM : MN :: RN : NF. Dunque sarà $NF = \frac{RN \times NM}{RM}$, e quindi $AB = \frac{1}{2} NF = \frac{1}{2} \cdot \frac{RN \times NM}{RM}$. E la precedente equazione darà l'arco parabolico $AN = AB + \frac{1}{2} MR \,.\, l. \frac{NR + NM}{MR}$.

Inoltre riponendo in quest' ultima equazione i proposti simboli delle rette, che vi si osservano, sarà l' arco parabolico

$$AN = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{a} \sqrt{(y^2+a^2)} + \frac{1}{2} a \,.\, l. \frac{y + \sqrt{(y^2 + a^2)}}{a} \quad \ldots \; A$$

§. 470. COR. I. La retta QP si prolunghi, sin che incontri la CL, che divida in parti uguali l' angolo retto PCF. Sarà $LP = CP = MN$, e quindi $LQ = LP + PQ = NM + NR$. Cioè a dire: *Nell' iperbole parilatera esterna* AQPC, *ogni semiordinata prodotta sino all' assintoto* CL *di essa curva è quanto la somma della semiordinata, e della normale della parabola corrispondenti a quella retta*. E questo principio geometrico è utilissimo per le seguenti analitiche ricerche.

§. 471. COR. II. Per la qual cosa pongasi cotesta retta $QL = v$, cioè $v = y + \sqrt{(y^2 + a^2)}$, e quindi $v - y = \sqrt{(y^2 + a^2)}$. Sarà, quadrando quest' ultima equazione, $v^2 - 2vy = a^2$, ed $y = \frac{v^2 - a^2}{2v}$. E dovrà essere $\sqrt{(y^2+a^2)}$, che si è dimostrato pareggiare $v - y$, uguale ad $\frac{v^2 + a^2}{2v}$.

Ed in tal modo l' equazione A liberata da' radicali darà l'arco parabolico

$$AN = \frac{v^4 - a^4}{8av^2} + \frac{1}{2} a \,.\, l. \frac{v}{a} \quad \ldots\ldots \; B$$

§. 472. COR. III. E se porremo uguale a z la somma della semiordinata, e della normale della parabola, le quali corrispondono al punto S inferiore all' altro N; sarà come dianzi si è dimostrato, l' arco parabolico

$$AS = \frac{z^4 - a^4}{8az^2} + \frac{1}{2} a . l. \frac{z}{a}$$

E quindi

$$NS = AS - AN = \frac{z^4 - a^4}{8az^2} - \frac{v^4 - a^4}{8av^2} + \frac{1}{2} a . l. \frac{z}{v} \ldots D$$

* *fig.* 61. §. 473. COR. IV. L' iperbole PAQ * sia quella dalla cui quadratura dipenda la rettificazione della parabola RAV, come si è veduto in questa dimostrazione. E nella detta iperbole intendasi praticata la medesima costruzione del cor. 4. prop. 81. Ed oltre a ciò le rette GP, FM, IN, HQ incontrino la sottoposta parabola RAV ne' punti R, S, V, T. Sarà $(RS - VT) \times a = GPrMF - HQsNI = GPMF - HQNI$. E ponendo la differenza di questi due trapezj rettilinei uguale al rettangolo della retta a in un' altra q, sarà $(RS - VT) \times a = aq$, e quindi $RS - VT = q$.

§. 474. COR. V. Dunque: *Dato un arco parabolico, può sempre assegnarsene un altro, talchè la differenza loro sia rettificabile, tuttocchè niuno di essi sia suscettivo di rettificazione*. La qual cosa è un geometrico paradosso, al par di quello, che fu recato nel cor. 4. prop. 81.

PROPOSIZIONE LXXXVII.

PROBLEMA.

§. 475. Dato l' arco parabolico ED, assegnarne un altro NS, che stia a quel dato arco nella ragione di n ad 1.

SOLUZ. Si chiami K l'aggregato della normale della parabola, e della semiordinata corrispondenti al punto inferiore D del dato arco ED, ed h sia una consimil somma per l'estremo E superiore. Sarà * quest' arco

* §. 471.

$$ED = \frac{K^4 - a^4}{8aK^2} - \frac{h^4 - a^4}{8ah^2} + \frac{1}{2} a . \mathrm{l} . \frac{K}{h} \quad . \ . \ . \ . \quad A$$

Laddove per lo coroll. 3. prop. prec. dee essere il richiesto arco

$$NS = \frac{z^4 - a^4}{8az^2} - \frac{v^4 - a^4}{8av^2} + \frac{1}{2} a . \mathrm{l} . \frac{z}{a} \quad . \ . \ . \ . \quad B$$

Ma per le condizioni del problema conviene, che sia NS : ED :: n : 1, cioè NS $= n \times$ ED. Dunque ne' valori di questi archi vi sarà la seguente equazione

$$\frac{z^4 - a^4}{8az^2} - \frac{v^4 - a^4}{8av^2} + \frac{1}{2} a . \mathrm{l} . \frac{z}{v} = \frac{nK^4 - na^4}{8aK^2} - \frac{nh^4 - na^4}{8ah^2} + \frac{1}{2} na . \mathrm{l} . \frac{K}{h} \quad . \ . \ . \quad C$$

Intanto il presente problema, che ci offre le due ignote v, z, non può risolversi, se una di esse non si elimini, e non vi si tolgan puranche le grandezze log-miche che il fanno trascendente. Onde per renderlo insieme algebrico, e determinato, potremo supporre uguali gli ultimi termini del primo, e del secondo membro dell' equazione C: cioè $\frac{1}{2} a . \mathrm{l} . \frac{z}{v} = . \ \mathrm{l} . \frac{K}{h}$, ovvero $\mathrm{l} . \frac{z}{v} = n . \mathrm{l} . \frac{K}{n}$, o finalmente $\frac{z}{v} = \left(\frac{K}{h}\right)^n$, passando da' log-mi a' numeri. Laonde, se faremo per brevità di calcolo $\left(\frac{K}{h}\right)^n = r$, ne verrà $z = rv$. Ed in tal modo la detta equazione diverrà determinata, ed algebrica, qual n' è la seguente

$$\frac{r^4v^4 - a^4}{r^2v^2} - \frac{v^4 - a^4}{v^2} = \frac{nK^4 - na^4}{K^2} - \frac{nh^4 - na^4}{h^2}.$$

Or questa equazione, ch' è di quarto grado derivativa del secondo, facilmente può risolversi pe' metodi comuni, e poi costruirsi colla guida del corollario secondo. Infatti nell' iperbole AQG prendasi l' ascissa CT, ch' esprima una radice reale della detta equazione. E condotta per T la TQ parallela all' assintoto CL, ed insin che incontri l' iperbole in Q, si tiri per Q la QN parallela a quell' ascissa, incontrando la parabola in N. Sarà il punto N un estremo dell' arco, che si richiede. E l' altro può rinvenirsi col medesimo artifizio, e con avvertirvi, che la z dee eguagliare la rv.

§. 476. Scol. Questo problema, che da trascendente, qual sembrava, si è quì ridotto in algebrico, fu per altre vie risoluto da' due preclarissimi geometri Giovanni Bernoulli, e 'l marchese de l' Hopital, che potran consultarsi da chi brama intender più cose di un tal soggetto.

PROPOSIZIONE LXXXVIII.

TEOREMA.

§. 477. La superficie della sferoide schiacciata è uguale al cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra l' asse maggiore dell' ellisse generatrice di tal solido, e quell' arco di una parabola, che vi tien per base l' asse minore della detta ellisse, e per vertice il punto medio dell' eccentricità di questa curva.

* *fig.* 62.

Dim. Descritta la parabola BED *, che abbia per base l' asse minore BD dell' ellisse BADG generatrice del proposto solido, e per vertice principale il punto medio E dell' eccentricità CF di essa curva (1), vi s' intenda anche delineata l' iperbole HAK* luogo delle normali della detta ellisse riferite all' asse minore. E preso in quest' asse l' elemento Nn, che si chiami ω, si tirino pe' punti N, n le rette NH, nh parallele all' asse maggiore di tal curva. E poi, ordinata nella parabola BED dal punto M la MI, vi si conduca per M la normale MR, e si ponga CA $= a$, CB $= c$, CF $= e$, e CN $=$ MI $= x$. Sarà CE $= \frac{1}{2} e$; il parametro principale della parabola, ch' è $\frac{BC^2}{CE}$, sarà uguale a $\frac{2c^2}{e}$; onde dovrà essere la sunnormale* RI $= \frac{c^2}{e}$, e la normale MR $= \sqrt{\left(\frac{e^4}{e^2} + x^2\right)}$ * §. 439. * §. 331.

Ma essendo RI : RM :: MO : Mm, pe' triangoli simili RIM, MOm; sarà ne' simboli di queste rette

$$\frac{c^2}{e} : \sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)} :: \omega : \mathrm{M}m = \frac{e\omega}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)}.$$

E poichè si è dimostrato quì sopra* essere nell' ellisse la normale QT, o la sua uguale NH $= \frac{ea}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)}$, sarà il rettangoletto . . . . * §. 439.

$$\mathrm{N}nh\mathrm{H} = \frac{ea\omega}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)} = a \times \frac{e\omega}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)}.$$

(1) È dato il vertice, e l' asse di una tal parabola, ed anche n' è dato il parametro principale, come terza proporzionale in ordine alle due rette date EC, CB. Dunque vi sarà dato il fuoco, e la direttrice. Ond' ella potrà descriversi per lo §. 311.

Cioè quanto l' archetto parabolico Mm moltiplicato pel semiasse maggiore a della proposta ellisse. Onde l' armilla generata dall'archetto ellittico Qq, nel rivolgersi la semiellisse BAD intorno al suo asse minore BD, sarà uguale a $2\pi a \times Mm$, come l' è noto per lo lemma II. Quindi tutta la superficie di cotesta sferoide schiacciata dovrà uguagliare $2\pi a \times BED$; e ciò sarà quanto il cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra l' asse della proposta ellisse, e l' arco BED della parabola indicata*.

* §. 442.

§. 478. COR. I. Nella formola A della proposizione 86 pongasi la x per la y, e 'l fratto $\frac{c^2}{e}$ per a. Si avrà con tal sostituzione l' arco parabolico . . . .

$$ME = \frac{ex}{2c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)} + \frac{c^2}{2e} . \text{l.}\left(\frac{ex}{c^2} + \frac{e}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)}\right)$$

Onde potrà inferirsi da quel, che si è detto in questa dimostrazione, che la superficie descritta dall' arco ellittico AQ coll' indicata rivoluzione sia uguale a

$$\frac{\pi aex}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)} + \frac{\pi ac^2}{e} . \text{l.}\left(\frac{ex}{c^2} + \frac{e}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2} + x^2\right)}\right)$$

§. 479. COR. II. Col medesimo asse AG della proposta ellisse, e con un altro asse secondario, ch' io dinoto per 2γ, intendasi descritta l' iperbole AVL, cui si tiri la normale VS dal punto V, dove nella parte esterna la incontri la semiordinata NQ della detta ellisse: e poi si chiami ε l' eccentricità di una tal' iperbole, cioè * la grandezza $\sqrt{(a^2 + \gamma^2)}$. Si potran conoscere pe' §§. 338, 439 i valori delle normali QT, SV di queste due curve. Cioè sarà

* §. 181.

$$\left.\begin{aligned} QT &= \frac{ae}{c^2}\sqrt{\left(\frac{c^4}{e^2}+x^2\right)} \\ SV &= \frac{a\varepsilon}{\gamma^2}\sqrt{\left(\frac{\gamma^4}{\varepsilon^2}+x^2\right)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad B$$

E queste due rette dovranno essere uguali, sol che sia

$$\frac{e}{c^2}=\frac{\varepsilon}{\gamma^2},\ \text{cioè}\ \frac{e^2}{c}=\frac{\sqrt{(a^2+\gamma^2)}}{\gamma^2}$$

§. 480. Cor. III. Intanto si risolva rispetto a γ quest' ultima equazione. Si vedrà immantinente, ch' ella liberata da' radicali debba degenerare in un' equazione biquadratica derivativa del secondo grado, di cui la radice reale e positiva, che vi s' incontra, è $\frac{ac}{e}$. Ed è anche chiaro di per se stesso, che ponendo nel valore della SV il fratto $\frac{ac}{e}$ per γ, e (1) quindi $\frac{a^4}{\varepsilon^2}$ per ε^2, debba essere l' espressione della SV quanto quella della QT. Per la qual cosa potremo stabilire colla luce del §. 443. il seguente geometrico . . . .

§. 481. Teor. *Se descrivasi un' iperbole, che abbia per asse principale l' asse maggiore di un' ellisse, e per semiasse secondario la quarta proporzionale in ordine all' eccentricità, ed a' semiassi conjugati dell' ellisse, e poi queste due curve si aggirino con perfetta rivoluzione intorno all' asse minore dell' ellisse; saran sempre uguali quelle superficie della sferoide, e cilindroide, che corrispondono*

(1) La grandezza ε^2, che quì sopra si è veduta uguale ad $a^2+\gamma^2$, in tal supposizione diverrà $a^2+\frac{a^2c^2}{e^2}=\frac{a^2}{e^2}\times a^2$; ponendovi a^2 per e^2+c^2.

ad una medesima ascissa presavi dal centro nell' asse minore dell' ellisse .

§. 482. SCOL. I. Il sommo d' Alembert, poichè ebbe chiarite le nozioni della *conoide*, e della *cilindroide* ne' corrispondenti articoli dell' Enciclopedia, ne invitò i geometri a risolvere quel problema proposto dal Signor Parent ne' principj del secolo trascorso, ed espresso ne' seguenti termini: *Ritrovare il rapporto, che debbano avere gli assi conjugati dell' iperbole generatrice di un cilindroide a quelli di una sferoide schiacciata, che convenevolmente le s' iscriva, affinchè le superficie di questi due solidi sieno continuamente tra se uguali, come son quelle della sfera, e del cilindro circoscrittole*. Or il primo geometra, cui riuscì di sciogliere questo problema, fu l' insigne P. Gregorio Fontana, servendosi a tal uopo del calcolo integrale, e di un metodo indiretto. Ma dopo lui i nostri geometri D. Stefano Forte, l' Ab. Giannattasio, e 'l Sig. Sangro lo han saggiamente risoluto co' soli principj dell' Analisi de' finiti, o colla Geometria elementare. Ed io vi aggiungo, che volendo risolvere un tal problema con un metodo analitico diretto, e generale s' incontri un' equazione differenziale del primo ordine, ed a due variabili, di cui il proposto teorema n' è un integrale particolare (*Ved. Opusc. Matem. della nostra scuola pag.* 118.)

§. 483. SCOL. II. Le curve coniche, che compongono la piccola famiglia delle linee di second' ordine, e che in questa opera le ho mostrate adorne di proprietà affini, variano molto fra loro nelle dimensioni. La rettificazione del cerchio dipende dalla quadratura di esso (1). La parabola, che può

(1) Come fu dimostrato dall' immortale Archimede.

quadrarsi per mezzo della Geometria elementare*, non è poi rettificabile: e ne abbisognano i log-mi ad esprimer gli archi di una tal curva. La quadratura dell' ellisse dipende dalla dimensione del cerchio*, o dalle funzioni circolari: e quella dell' iperbole da' logaritmi*. Ma le rettificazioni di queste due curve non vi si possono per le quadrature di esse rispettivamente ottenere, cioè per le circolari, e per le log-miche funzioni; ma ne impegnano in formole delle dette funzioni assai più trascendenti. E pure malgrado questa trascendenza, e la diversa ramificazione, che in esse curve ravvisiamo, la rettificazione dell' iperbole può determinarsi per quella dell' ellisse, come non ha guari sì è tal cosa da' geometri conosciuta (1). Onde gli archi ellittici vengon riputati per le trascendenti le più semplici dopo le funzioni circolari, e le log-miche, e soglion dirsi *trascendenti ellittiche*: che in verità sarebbero un nuovo istrumento di calcolo, se la loro natura ne fosse più chiara, ed i valor di esse più precisi. Intanto i Signori d' Alembert, ed Eulero, lasciando a' geometri posteriori il promuover delle dette transcendenti la chiarezza, e la precisione, si diedero studiosamente a rintracciar quegl' integrali, che dalla rettificazione delle curve coniche dipendessero. E lo stesso Eulero, e dopo lui i Signori Lagrange, e Legendre si sono occupati di un più sublime, ed utile argomento, ch' è quello della comparazione delle trascendenti, che hanno la seguente forma $\frac{Zdz}{\sqrt{(1+mz^2+nz^4)}}$, ove la Z sia una funzione razionale della z^2. Ma di queste analitiche ricerche quali verità di Geometria, e pel nostro soggetto rileveremo? L' Eulero ne ritrasse

* §. 464.
* §. 450.
* §. 457.

(1) Cioè dal sig. *Landen*, e poi dal sig. *Legendre*.

tra le altre cose, che: *Preso un arco di ellisse da un estremo di un quadrante di tal figura, si possa mai sempre dall'altro estremo prenderne un altro, sicchè la differenza loro sia rettificabile.* Ed anzi può dirsi generalmente, che: *In ogni sezione conica, preso un arco ad arbitrio, si possa mai sempre assegnarne un altro da un altro punto di tal curva, sicchè la differenza di essi archi sia geometricamente determinabile.* I giovani vorrebbero, ch'io nel primo di questi due teoremi vi determinassi geometricamente l'arco che vi si domanda, e la retta che dee uguagliar la differenza di esso dall'arco dato. E vorrebbon pure, ch'io dimostrassi quel teorema in chiari modi, e senza rimetterli alle malagevoli formole Euleriane; affinchè questo teorema, che rese immortale l'illustre Conte Fagnano, possa decentemente coronare questi miei, qualunque siensi, didascalici lavori.

PROPOSIZIONE LXXXIX.

TEOREMA.

* *fig.* 64. §. 484. Se da un qualunque punto M* del quadrante ellittico AMB conducansi la normale MP, e la semiordinata MN all'asse, e poi si prenda l'ascissa CT, che stia al semiasse AC, come la semiordinata MN alla normale MP, e dal punto T vi si ordini la TQ; la differenza degli archi ellittici BM, AQ presi dagli estremi de' semiassi conjugati BC, AC sarà rettificabile.

DIM. Si tolga dall' ascissa CN la particella Nn infinitesima; e condottavi per n la semiordinata nm, si prenda l'ascissa Ct, che stia al semiasse AC, come la semiordinata mn alla normale della curva in m; e poi si compia la figura, come ne appare. Inoltre pongasi uguale ad 1 il semiasse maggiore AC del proposto quadrante, l'eccentricità di tal figura uguale ad e, il semiasse minore CB $= c$, l'ascissa CN $= x$, l'altra CT$= v$, e quindi N$n = dx$ (1), e T$t = dv$. Sarà* la semiordinata NM $= c\sqrt{(1 - x^2)}$, l'altra QT $= c\sqrt{(1-v^2)}$,* la normale MP $= c\sqrt{(1-e^2x^2)}$, e quell'altra QF$= c\sqrt{(1-e^2v^2)}$. Ed essendo per ipotesi MP : MN :: CA : CT, e quindi MP^2 : MN^2 :: CA^2 : CT^2, sarà ne' simboli di questi quadrati, $1-e^2x^2 : 1 - x^2 :: 1 : v^2$. E con ciò

* §. 16.
* §. 46.

$$x^2 + v^2 = 1 + e^2x^2v^2 \quad . \ . \ . \ . \quad \text{A}$$

Ciò posto, l'equazione A può avere la seguente forma $x^2 - e^2x^2v^2 = 1 - v^2$, da cui può trarsi quest' analogia $1 : x^2 :: 1 - e^2v^2 : 1 - v^2$; cioè $1 : x :: \sqrt{(1-e^2v^2)} : \sqrt{(1-v^2)}$, e finalmente QF : QT :: CA : CN. E poichè sta Mm : Mr :: MP : MN :: AC : CT, pe' triangoli simili Mmr, MPN; sarà ne' simboli di quelle rette Mm : dx :: 1 : v. E così pure può dimostrarsi, che stia Qq : dv :: 1 : x. Onde dovrà essere

$$\text{M}m = \frac{dx}{v}, \text{ e } \text{Q}q = \frac{dv}{x} \quad . \ . \ . \ . \quad \text{B}$$

Intanto si differenzii l'equazione A (2); e 'l risultamento . . . .

---

(1) Le parti infinitesime delle grandezze variabili x, v si sogliono esprimere per dx, dv.

(2) Il sommo Newton, che avea adottato i sintetici ragionamenti nell' esporre i *Principii Matematici della Filosofia Naturale*, dovè proporvi in qualità di lemma una verità di Calcolo differenziale, che gli abbisognava (*L.* 11. *lemm.* 2.). Or io ad esempio di sì

$$2xdx + 2vdv = 2e^2 (v^2xdx + x^2vdv)$$

si divida per vx; sarà

$$\frac{dx}{v} + \frac{dv}{x} = e^2 (vdx + xdv)$$

cioè

$$Mm + Qq = e^2 (vdx + xdv).$$

Ed integrando quest' ultima equazione (1) ne otterremo

$$BM + BQ = e^2vx + Cost. \; . \; . \; . \; . \quad D$$

Ma supponendo la $x = o$, ben si vede dover essere $e^2vx = o$, $BM = o$, e l' arco BQ divenir uguale al quadrante ellittico AQB. Dunque sarà $AQB = Cost.$ E l' equazione D con questo debito valore della costante degenera in . . . . . . $BM + BQ = e^2vx + AQB$, cioè in $BM + BQ - AQB = e^2vx$. Donde sarà finalmente $BM - AQ = e^2vx$.

---

granduomo, ed in questo Trattato analitico propongo un consimil

* *fig.* 65. lemma. Cioè, *il differenziale del rettangolo* ABCE*, *i cui lati* AB, AE *sieno variabili**, *è uguale alla somma de' due rettangoli fatti da ciascuno di essi lati nel differenziale dell' altro*. Imperocchè il lato AB cresca dell' infinitesima particella B*b*, mentre l'altro AE ne cresce delle E*e*. Compito il parallelogrammo A*bce*, e distese le BC, EC insino a' suoi lati *ec*, *bc*, si vedrà esser lo gnomone B*bc e*EC il detto differenziale. Ma questo spazio può stimarsi uguale ai due rettangoli C*b*, C*e*, essendo il rettangoletto C*c* disprezzabile rispetto a ciascuno di essi. E questi due rettangoli sono $BC \times Bb$, ed $EC \times Ee$. Dunque se chiameremo x, v i due lati AB, AE, e dx, dv i loro incrementi B*b*, E*e*, dovrà essere il differenziale del rettangolo ABCE, cioè $D.xy = vdx + xdv$.

II°. E si vedrà immantinente esser $D.x^2 = 2xdx$, e così $v^2 = 2vdv$.

III°. E sarà poi $D.x^2v^2 = 2v^2xdx + 2x^2vdv$; come può rilevarsi dal proposto lemma.

(1) Vedi *n.* I. *Not. prec.*

§. 485. Cor. I. Per effettivamente costruire la retta $e'vx$, che dee pareggiare la differenza degli archi ellittici BM, AQ, ecco l' artificio geometrico, ch' è prescritto dagli elementi di Analisi. *Si elevi al semiasse* AC *dal suo estremo* A *la perpendicolare* AO *uguale all' eccentricità della proposta ellisse. E congiunta la* CO, *si distendano insino ad essa le semiordinate* MN, QT *della detta curva. E poi si ritrovi la quarta proporzionale in ordine alle tre rette* AC, TL, NK. *Tal quarta proporzionale sarà uguale alla differenza degli archi* BM, AQ. Imperocchè pe' triangoli simili CAO, CTL sta CA : AO :: CT : TL, cioè $1 : e :: v :$ TL $= ev$. E così pure si dimostra, pe' triangoli simili CAO, CNK, essere la NK $= ex$. Ma la quarta proporzionale in ordine alle rette AC, TL, NK, cioè ad 1, ev, ex, dee essere uguale ad $e'vx$. Dunque quella quarta proporzionale dovrà pareggiare BM — AQ.

§. 486. Cor. II. La differenza degli archi BM, AQ sia uguale alla retta k, e sia h la differenza degli altri due archi Bm, Ap; cioè sia BM — AQ $= k$, Bm — A$p = h$. Sarà, sottraendo la seconda di queste due equazioni della prima, Mm — Q$p = k - h$. Dalla qual cosa può trarsi il seguente geometrico

§. 487. Teor. *In ogni ellisse, preso un arco ad arbitrio, può sempre assegnarsene un altro, da altro punto di tal curva, sicchè sia rettificabile la differenza loro.*

§. 488. Scol. L' artificio euristico, che quì si adopera, è un certo regresso da un' equazione finita alla sua differenziale, che divisa per lo prodotto delle variabili rinviensi intuitivamente integrabile. Ma le operazioni geometriche, onde ho assegnato il secondo de' detti archi, e quella retta, che dee pareggiare la differenza loro, non son che ovvie, ed elementari. Or se con somma lode fu commendato l' ingegno di Giovanni Bernoulli, nell' aver ei risoluto un simil problema per gli archi parabolici *, che son meno trascendenti degli ellittici; di maggior gloria dovrà esser degno l' illustre Fagnano, per avere un facil mezzo impiegato nella presente ricerca, che al dir di Eulero credevasi trascendere le forze dell' Analisi moderna.

* §. 474.

FINE

DEL TRATTATO ANALITICO DELLE SEZIONI CONICHE.

INDICE

DE'

CAPITOLI

DEL TRATTATO ANALITICO DELLE SEZIONI CONICHE.

TRATTATO ANALITICO

DE'

LUOGHI SOLIDI

CAPITOLO I.

Breve Storia dell' Argomento.

§. 1. Il primo geometra dell' antichità rimota, che contemplò i luoghi solidi, e l' uso che di essi convien fare in Geometria, fu Aristeo seniore, filosofo della Magna-Grecia, e successore nella scuola italica al gran Pitagora, che ivi l' avea fondata sì mirabilmente. Ei compose cinque libri su i conici, ed altrettanti su i luoghi solidi, che a quelli eran *coerenti*: ed anche, come pare (1), ad altri oggetti di Geometria volse con buon successo il suo pensiere. Ma il tempo distruggitore delle umane cose non ci ha trasmesso cotesti scientifici elegantissimi lavori, che al saggio Euclide parvero modelli di un venusto, e saldo geometrizzare. E noi non conosciamo que' Luoghi geometrici, che per una fuggevole rimembranza fattane da Pappo, o nella geometrica divinazione, onde il celebre Viviani ha cercato di adeguatamente restituirli. Ma non per tanto sappiam di certo, che quivi dovean mancare i principj risolutivi del famoso *problema delle quattro ret-*

(1) Leggasi la pag. 6. della pref. della Divinaz. di Vincenzio Viviani su i *luoghi solidi* di Aristeo seniore.

te. Poichè lo stesso Pappo nella prefazione al settimo libro delle sue Matematiche collezioni disse chiaramente, che *con quelle teoriche di Aristeo, nè Euclide, nè Apollonio, nè altri potè mai risolvere il divisato problema: e che Apollonio ebbevi a supplire nuovi, ed eleganti teoremi, perchè rilevasse, che quelle locali non erano che curve coniche date di posizione* (1).

§. 2. Ma da queste cose come si potrà mai inferire, che Apollonio non avesse risoluto il problema, se egli *ne conobbe il risultamento, avendone già escogitati i principj di risoluzione: se il compose perfettamente, con averne dovuto premettere l' analisi geometrica: e se di tutte queste cose menò mai sempre rigogliosa esultazione*. E pure il signor Cartesio, checchè ne fosse cagione, scrisse categoricamente, che il problema delle quattro rette non fu sciolto da' geometri antichi co' principj loro (2), e che egli il dovea assolutamente

(1) Leggasi la lettera diretta da Apollonio ad Eudemo su i diversi argomenti de' suoi libri de' Conici, e quello particolarmente del Libro III. Si consideri attentamente ciò che ne disse Pappo nella prefazione al Lib. VII. delle sue *Matematiche Collezioni*, e quell'altro, che il nostro Ab. Giannattasio, nelle not. 23, e 24 della *Storia delle Sezioni Coniche* ne ha recato di questa mia congettura, e del senso, che dee darsi alle seguenti espressioni di Pappo: *Quem locum ab Euclide non perfectum, neque ipse* (Apollonius) *perficere poterat, neque aliquis alius: sed neque paullulum quid addere iis, quae Euclides scripsit per ea tantum conica, quae usque ad Euclidis tempora praemonstrata sunt*. . . .

(2) Cartesio avea fondato questo suo parere nell' addotta autorità di Pappo. Ma io son di avviso, che leggendosene il contesto se ne trarrebbe un altro senso. Infatti Apollonio in quella lettera diretta ad Eudemo gli dichiarò, ch' ei nel Lib. III. de' suoi Conici avea

all' analisi moderna sottoporre per condurlo a fine. Io altrove ho recate le mie congetture a pro del geometra di Perga, sostenendo aver egli colla teorica de' conici risoluto il problema delle quattro rette. Ora, che deggio analiticamente ragionare de' luoghi solidi, cui quello si riduce, è ben che omesse coteste critiche dissensioni, a contemplar mi volga l' essenza, ed il merito dèl sistema Cartesiano su tale assunto.

---

dovuto inventar non pochi, ed eleganti teoremi, per ottenere la composizion del Luogo *ad tres et quatuor lineas*; e che Euclide aveala rimasta imperfetta, per non saper que' teoremi. Ma Pappo mal soffrendo cotale *arroganza* di Apollonio sul *mitissimo* Euclide, e volendola reprimere alquanto, non negò il fatto, ma sol ne aggiunse le ragioni. Coteste locali, così ei disse, non furono perfezionate nè da Euclide, nè da Apollonio, nè da altri; e nemmeno si potè loro aggiugner cosa *col solo attenersi ai Conici di Aristeo*, cui erasi attenuto Euclide per un ossequioso rispetto a sì granduomo, *qui quantum ostendi potuit de loco per ejus* (Aristaei) *conica memoriae prodidit*. Ed Apollonio potè facilmente farvi quelle aggiunzioni (*facile potuit*) riflettendo a quanto erasi scritto, ed insegnato da Euclide su tal proposito. E così poi conobbe, *che il Luogo alle tre, o alle quattro rette* era una curva conica data di posizione, restandogli tuttavia ignota la locale a più di quattro linee. Dunque, così conchiudo: Apollonio sciolse generalmente il problema delle quattro rette, e non vi distese la soluzione, abbisognandone più volumi a distenderla nel Metodo delle antiche scuole. Roberto Simson nella sua Divinazione su *i Luoghi Piani di Apollonio* vi ha impiegato un volume in quarto: e 'l Geometra di Perga quanti su i Luoghi solidi avrebbene impiegati?

ESPOSIZIONE DEL METODO DEL CARTESIO SU I LUOGHI SOLIDI TRATTATI COLL' ANALISI MODERNA.

§. 3. Appena questo geometra francese spinse l' analitica soluzione del problema delle quattro rette, che il ridusse a dover costruire un' equazione quadratica a due indeterminate; o, ch' è lo stesso, a recare analiticamente, e con precisione la teorica de' luoghi solidi, alla qual meta ei con pari celerità, e sagacia pervenne. Imperocchè un' equazione quadratica a due indeterminate, che vogliasi generalmente esprimere, può avere la seguente forma

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \quad \ldots\ldots \text{A}.$$

E risolvendola rispetto ad y, come se la x fosse grandezza nota; e ponendo per semplicità di calcolo

$$\frac{m}{n} = -\alpha,\ h = -\frac{1}{2}\beta,\ p = \gamma + \frac{mm}{nn},\ q = \delta + \frac{m\beta}{n},\ \text{e}\ t = \frac{1}{4}\beta^2 + \varepsilon$$

sarà $$y = \frac{mx}{n} + h \pm \sqrt{(px^2 + qx + t)} \quad \ldots \text{B}.$$

Ma da questi due principj cotanto elementari, che pajono affatto sterili, chi avrebbene raccolto il desiato metodo, come raccolselo il valentuomo? *La parte razionale del valore della y*, così disse il Cartesio, *ci offre la posizione del diametro della curva conica, che dee essere il luogo dell' equazione* A. *E dall' irrazionale potremo agevolmente conoscere la lunghezza di quel diametro, e del parametro di esso.*

§. 4. E volendosi queste due cose a' giovani dimostrare, è ben ch' io qui illustri un certo dato, ch' è implicito a siffatti problemi, e che riguarda le direttrici delle anzidette indeterminate. E perciò un angolo costante XPY sia il *regolatore* della costruzione*: cioè a dire le PX, PY sieno

* *fig.* 1.

le assunte direttrici : ove la PX sia la linea retta delle x , e quivi le x positive dinotino le parti del lato PX , che vi procedano indefinitamente dal vertice del detto angolo nella continuazione di esso lato . E le y positive esprimano le parallele all' altro lato PY , le quali stieno nell' apertura dell' angolo regolatore tra la linea delle x , e la curva da descriversi . Laddove le rette opposte alle $+x$, $+y$ saranno espresse per le $-x$, $-y$ rispettivamente , come si vedrà con più chiarezza nel *postul.* 1.

§. 5. Ciò premesso , *si faccia una nuova variabile* v *eguale alla parte razionale del valore della* y , *come si è detto nel* §. 3 , *cioè* $v = \frac{mx}{n} + h$; e poi con quell' angolo regolatore si costruisca quest' equazione lineare , servendoci di norma le due seguenti supposizioni da doversi fare in detta equazione. Cioè suppongasi $v = o$, ovvero $\frac{mx}{n} + h = o$. Sarà $x = -\frac{nh}{m}$. E facendovi $x = o$, risulterà $v = h$. E ciò vuol dire , che l' incontro della locale dell' anzidetta equazione colla linea delle x debba farsi al disopra del punto P per la retta $\frac{nh}{m}$; e che l' ordinata corrispondente al punto P debba essere uguale ad h . Il perchè si prolunghi la retta KP al disopra del punto P , sinchè la PD adegui $\frac{nh}{m}$. E poi dal punto P sulla PY si tolga la PB uguale ad h . Ed infine si congiunga la DB ; *questa retta sarà la locale dell' equazione* $v = \frac{mx}{n} + h$. Imperocchè , condottavi una qualunque ordinata RN, sarà DP : PB :: DN : NR pe' triangoli simili DPB, DNR; e ne' simboli di quelle rette avrassi $\frac{nh}{m} : h :: \frac{nh}{m} + x : v$; e quindi vi si vedrà verificata l'equazione $v = \frac{mx}{n} + h$.

§. 6. Intanto *si chiami z la parte irrazionale di quel valore della y nell'equazione* B, cioè il $\pm \sqrt{(px^2 + qx + t)}$. Sarà in virtù dell' anzidetta equazione $y = v \pm z$; cioè alla retta NR, ch' eguale ad v, dovrà aggiungersi per dritto, e dal punto R la $Rm = z$, e togliersi da essa la $RM = z$, affinchè i punti m, M stieno nella curva conica richiesta. E ciò chiaramente dimostra, che la retta DBv debba passare pe' punti medj delle ordinate Mm, *etc.* della detta curva, e quindi essere un diametro. E si vedrà finalmente, ch' essendo dato di specie il triangolo DPB, debba essere data la ragione di DP, DB, che può esprimersi per quella di n ad r.

§. 7. Per dimostrare il secondo de' due proposti assunti, o per determinare il diametro, e 'l parametro della curva VMvm, sia C il centro dell' ellisse MVm (alla qual curva io sol mi attengo nel rischiarare questa parte) e poi facciasi la distanza dell' ignoto punto C dall' altro B, cioè la retta $CB = \beta$, il semidiametro $Cv = \lambda$, e'l parametro del diametro Vv eguale a π; esprimendo queste rette ignote colle indicate lettere del greco alfabeto. Sarà $BR = \frac{rx}{n}$, essendo DP : DB :: PN : BR, cioè $n : r :: x : BR = \frac{rx}{n}$. E sarà poi $CR = BR - CB = \frac{rx}{n} - \theta$, e $Cv^2 = \lambda^2 - \left(\frac{rx}{n} - \theta\right)^2$. Ma per la natura di tal curva dee essere $2\lambda : \pi :: \lambda^2 - \left(\frac{rx}{n} - \theta\right)^2 :$ RM^2. Dunque sarà $RM^2 = \frac{\pi}{2\lambda}\left(\lambda^2 - \theta^2 - \frac{r^2x^2}{n^2} + \frac{2\theta rx}{n}\right)$ Ma per supposizione dee esser la stessa $RM^2 = t + qx - px^2$ (1). Dunque uguagliando questi due valori di RM^2, avremo

$$t + qx - px^2 = \frac{\pi}{2\lambda}(\lambda^2 - \theta^2) + \frac{\pi\theta rx}{\lambda n} - \frac{\pi r^2x^2}{2\lambda n^2} \quad \ldots \quad C$$

E pareggiando i termini analoghi dell' un membro e dell' altro, potremo determinare le grandezze ignote π, θ, λ coll' ovvio Metodo de' coefficienti indeterminati, come fù praticato dallo Schooten per 29. casi, dovendo omettere in tal metodo l' iperbole tra gli assintoti. Intanto ecco di questo un agevole eseguimento.

§. 8. Dall' equazione C, ch' è

$$t + qx - px^2 = \frac{\pi}{2\lambda}(\lambda^2 - \theta^2) + \frac{\pi\theta rx}{\lambda n} - \frac{\pi r^2x^2}{2\lambda n^2}$$

ritraggonsi le sottoposte equazioni parziali, cioè

I. $\pi\lambda^2 - \pi\theta^2 = 2\lambda t$, II. $\frac{\pi\theta r}{\lambda n} = q$ III. $\frac{\pi r^2}{2\lambda n^2} = p$.

E prendendo il valore di λ dall' equazioni II. e III. si avrà

$$\lambda = \frac{\pi\theta r}{nq}, \text{ e } \lambda = \frac{\pi r^2}{2n^2p} \quad \ldots \quad D$$

E quindi dal pareggiamento di questi due valori di λ si avrà $\theta = \frac{qr}{2pn}$. E finalmente l'equazione I. con questo valore di θ, e con quello di λ, ch' è in D, dovrà diventare

$$\pi\left(\frac{r^4\pi^2}{4n^4p^2} - \frac{q^2r^2}{4n^4p^2}\right) = \frac{\pi r^2 t}{n^2p}.$$

(1) Com' è noto dai Conici.

E dividendola per $\frac{\pi r^2}{n^2 p}$, e prendendo poi nel quoziente il valore di π, sarà $\pi = \frac{2n}{r} \sqrt{(pt + \frac{1}{4} q^2)}$. E per tal modo conoscendosi il parametro π di quest' ellisse, se ne saprà il suo diametro 2λ, dall' essere in D, $\lambda = \frac{\pi r^2}{2n^2 p}$. Ma si vedrà nel Cap.III. come questi risultamenti convengan con quelli, che io nel mio sistema proporrò più appresso.

§. 9. Questo metodo puramente analitico, ed ingegnoso fu chiarito con brevi note dal Signor Florimondo di Beaune. E Francesco Schooten gli recò poi un accuratissimo comento. Ma quest' opera, che per potersi intendere, dee esser carica di note e di comentarj, ancorchè le une vi fossero sagge, e gli altri si riputassero compiuti, non può mai valere per un utile corso d'istituzione. E perciò fu degno di lode il Signor Giovanni Witt, nitidissimo geometra olandese, che volle scrivere con ordine scientifico su tal soggetto, e giusta le orme di Aristeo; recandoci una breve istituzione su i Conici, cui ne aggiunse un Trattato analitico de' luoghi piani, e degli altri, che solidi chiamiamo. Della qual cosa ragionerò quì appresso più distintamente.

ESPORRE IL METODO DEL SIG. GIOVANNI WITT SUL MEDESIMO ASSUNTO.

§. 10. Le parti essenziali di questo metodo, per quel che a me pare, sono le seguenti: *Si assegni a ciascuna curva conica la più semplice equazione, che può competerle. E poi si riduca ad una tal forma, e con introdurvi nuove* *indeterminate* (1) *l' equazione da costruirsi*, *che appartengasi alla stessa curva*, *e che siane di quella più complessa*. *Finalmente si proccuri di geometricamente costruire l' equazione ridotta*. *Si avrà l'intento*. Così la più semplice equazione alla parabola, come l'è noto a' geometri, è la seguente $y^2 = px$. Dunque volendo ridurre in tal forma l'altra equazione $y^2 - 2ay = ax - a^2$, ch' è anche alla stessa curva e di quella è più composta, dovrà farsi il binomio $y - a$ uguale alla nuova indeterminata z. E risultando la $y = z + a$, si sostituisca $z + a$ per y nell' equazione data; avremo $z^2 = ax$; e quindi sarà quest' ultima equazione pariforme alla data $y^2 = px$, e dovrà nel seguente modo costruirsi (2). *Il punto* P* *nella retta* PX *sia il principio delle indeterminate* PN, NR *comprendenti l' angolo costante* PNR, *ed espresse per le* x, y *rispettivamente*, *come si è supposto nel* §. 4. *Di poi per esser la* $z = y - a$, *si tiri dal punto* P, *ed all' insù della* PN, *la retta* PV *parallela alla* NM, *ed uguale alla data* a. *E condotta per* V *la* VT *parallela alla* PN, *si descriva una parabola col diametro* VT, *che abbia il suo vertice in* V, *per parametro la retta* a, *e faccia colle sue ordinate l' angolo* VTM = PNR. *Avremo ottenuta la locale* del- * *fig*. 2.

(1) Le *Funzioni* si trasmutano in altre forme, con introdurvi nuove variabili, o ritenendovi le stesse. Nel primo di questi due modi vengon simplificate dal Signor Witt le dette equazioni: e dell' altro mezzo dovrò valermi nel Cap. III. (*Vegg. Eulero nell' Intr. all' Anal. degl' Inf. Cap. II. vol. I.*)

(2) Ho voluto costruire la proposta equazione nello stesso modo del Signor Witt, e senza valermi dell' angolo regolatore XPY, che proporrò nel Capo II., e che avrebbela resa più spedita, e più chiara.

l' equazione $y^2 - 2ay = ax - a^2$ *nella parabola descritta.*

§. II. Ma quali regole vi furon proposte generalmente dal Signor Witt, com' ei far dovea, per queste geometriche costruzioni, che son la parte principale dell' argomento? Se la teorica della *Permutazione delle coordinate* si fosse conosciuta da' geometri di que' tempi, egli ch' era sagacissimo scrittore, avrebbele di là carpite con leggiadra semplicità; e non sarebbesi ravvolto tra molte geometriche figure, che volle a tal fine congegnare. Poichè, avendo elaborati per ogni curva conica varj sistemi di rette incrociate fra loro, vi esibì per ciascuno di questi la corrispondente equazione di quella; mostrando qual sito dovrebbero avere le coordinate della richiesta curva, e la loro origine relativamente a due date, o a due assunte direttrici. Ma coteste figure reticolari, e le moltiplici loro dichiarazioni, ancorchè fossero complete, sono ugualmente incomode alla potenza visiva, ed alla ritenitiva. Onde pochi giovanetti ebbero la pazienza di apprenderle dall' opera quassù citata, e niun analista giammai le propose (1) in alcuu Corso d' istituzione; bastandogli di recarne per sola chiarezza alquanti

---

(1) Coteste regole generali sono rapportate dal signor Witt nel Cap. IV in 36 pag. in 4. e per 17 figure, che contengono un inviluppo di rette. Onde non fia maraviglia, se i geometri non abbiano voluto distintamente percepirle. Ma più mi duole, che il lodato geometra assegni per locale di ciascuna equazione una parte di una curva conica, e non già l' intero perimetro di essa. Così tra molte di coteste asserzioni, che potrei quì allegare, io mi restringo a quella della pag. 269 in fine. *Portio curvae, quae inter verticem et rectam AX intercipitur, erit locus quaesitus*. E lo stesso difetto può notarsi nel Trattato de' Luoghi Geometrici del March. de l' Hopital, che dovrò abbozzare quì appresso.

esempli. Ed io son di parere, che più per tali difetti, che per la gravezza dell' opera il sig. Giovanni Craig, e 'l Marchese de l' Hopital ne avessero inventato un altro metodo di quello più generale, ed a' casi dati più adattabile; la cui natura io quaggiù descrivo in pochi versi, e nella sola ellisse. E proccuro di appressarvi la luce del §. 4, affinchè ognuno intenda gli stami del detto metodo, e'l possa estendere ad altre curve coniche, se ne sia d' uopo.

METODO DE' SIG. CRAIG, E DE L' HOPITAL SULLO STESSO ARGOMENTO.

§. 12. Il punto P * nella retta PX sia il principio delle coordinate PN, NM espresse rispettivamente per le x, y. E dallo stesso punto P si tiri l' indefinita retta PS inclinata alla PX sotto un angolo qualunque, e l' altra PB parallela ad NM, e di quella lunghezza, che ne piaccia. Inoltre dal punto B conducasi la retta Bv parallela a PS, ed anche di quella grandezza, che ne aggrada; e la BC sia il segmento minore, la Cv il maggiore della Bv. Finalmente descrivasi l' ellisse MVmv col diametro 2CV, che abbia il dato parametro p, e le sue ordinate sieno parallele alla NR. Ciò posto, pongasi la retta PB $= c$, l'altra BC $= e$, e la CV $= \alpha$. Ed essendo dato di specie il triangolo PSN, i suoi lati NS, NP, PS saranno proporzionali a tre grandezze date, che chiamo m, n, r. Onde sarà NS $= \frac{mx}{n}$, e PS $= \frac{rx}{n}$. E finalmente dovrà essere MR $=$ NR $-$ NM $=$ NS $+$ SR $-$ NM $= \frac{mx}{n} + c - y$,

* *fig.* 1.

e $CR = BR - BC = \frac{rx}{n} - e$. Ma per la natura della descritta curva sta $MR^2 : CV^2 - CR^2 :: p : 2\alpha$, cioè $\left(\frac{mx}{n} + c - y\right)^2 : \alpha^2 - \left(\frac{rx}{n} - e\right)^2 :: p : 2\alpha$. Sicchè cangiando in equazione quest' analogia, con praticare gli ovvii riducimenti, avremo la seguente equazione

$$y^2 - \frac{2mxy}{n} + \left(\frac{mm}{nn} + \frac{prr}{2\alpha nn}\right)x^2 + \left(\frac{2mc}{n} - \frac{rpe}{\alpha n}\right)x - 2cy + \left(c^2 - \frac{1}{2}\alpha p - \frac{pe^2}{2\alpha}\right) = 0. \quad D.$$

§. 13. Dunque volendo con quest' equazione *regolatrice* costruire un' equazione all' ellisse, qual sarebbe, per cagion di esempio la seguente $y^2 * + 2x^2 - 4ax - 2ay - a^2 = 0$, dovremo unicamente pareggiare i termini analoghi dell' una equazione e dell' altra, per sì determinarvi le grandezze generali m, n, r, p, α, c, e. Infatti dal confronto de' secondi termini delle dette equazioni rileveremo essere la $m = 0$, cioè la $NS = 0$, e quindi PN coincidente con PS, cioè $r = n$, ed $\frac{r}{n} = 1$. E dal paragone de' terzi termini (trascurando $\frac{mm}{nn}$, ch' è zero, e ponendo 1 per $\frac{rr}{nn}$) avremo $\frac{p}{2\alpha} = 2$, cioè $p = 4\alpha$. Similmente nel confrontare i quarti termini, con porvi 4α per p, zero per m, ed $r = n$, rinverremo $4e = 4a$, cioè $e = a$. Inoltre dal pareggiamento de' penultimi termini si otterà $c = a = e$. E finalmente uguagliando gli ultimi termini delle medesime equazioni, e rimettendo in essi i valori delle c, p, e, di già ritrovati, avremo $a^2 - 2\alpha^2 + 2a^2 = -a^2$, cioè $\alpha = a\sqrt{2}$, e quindi $p = 4a\sqrt{2}$, e 'l semidiametro conjugato di a sarà $2a$, come si ritroverà nel Cap. III. per diverse vie.

§. 14. Ma chi non vede, che cotesto metodo introdotto da' Sig. Craig, e de l' Hopital sia *indiretto*, procedendo dalla costruzione di una curva conica all' equazione di essa, e non già da questa all' esibizion di quella, come far si devea. E poi un giovane, che per tal mezzo vorrebbe costruire un' equazione quadratica a due indeterminate, o dovrebbe attigner da qualche libro quell' equazion generale, di cui la data è un caso; o avrebbe dovuto recarsi a mente l' equazione D, ed altre cinque di una consimil forma, per potersi sceglier quella, che convenga. E l' una, e l'altra cosa non parmi utile, o decente ad una scientifica istituzione. Ed è anche non lieve difetto di questo metodo, che le più facili di coteste equazioni, le cui geometriche costruzioni veggonsi di per se stesse, diventino assai difficili nel volerle derivare da quelle generali, per sì costruirle. Di che anche si dolea forte il sagacissimo Roberto Simson nel proemio della sua divinazione de' *luoghi piani* di Apollonio.

METODO CARTESIANO RIFORMATO DALL' ERMANNO.

§. 15. Dunque ragionevolmente l'acutissimo Giacomo Ermanno simplificò (1) quel metodo Cartesiano su i luoghi solidi: per essere una tal ricerca puramente analitica, diretta, ed universale. E son benanche degni di lode gl' insigni geometri il P. Vincenzo Riccati, e 'l signor Prony, che han contribuito a

(1) Vol. IV. *Accad. di Pietrob.*

render questa riforma di metodo assai più perfetta, o più spedita. Ed in vero quì non si usa il metodo de' coefficienti indeterminati, per conoscer la lunghezza del diametro, e del parametro della richiesta curva conica, com' è nel §. 8; ma ne vien sostituita la risoluzione dell'equazione $-px^2+qx+t=o$, le cui radici sono $\frac{q}{2p}+\frac{1}{2p}\sqrt{(qq+4pt)}$, e $\frac{q}{2p}-\frac{1}{2p}\sqrt{(qq+4pt)}$. E si avvisò l' Ermanno, che prendendo nella PX, e dal punto P le rette Ph, PH uguali alle indicate radici, i due punti h, H doveano essere *le vestigie de' vertici dell' anzidetta curva*: e che per ritrovar questi bastava da' punti h, H condurre le rette $h\,v$, HV parallele alla PB, ed insino alla D v locale dell' equazione $v=\frac{mx}{n}+h$ del §. 5. Ed io vi aggiungo, che da questo geometrico lavorìo può facilmente esprimersi la lunghezza di tal diametro nell' iperbole, o nell' ellisse.

§. 16. Ma se propongasi l'equazione $px^2+qx+t=o$, e sia $t>-\frac{qq}{4p}$, le sue radici debbono essere immaginarie; e quindi il metodo Ermanniano non potrà usarsi nel costruire il luogo di quest' iperbole riferita ad un suo diametro conjugato. Il P. Riccati con varj mezzi geometrici, ed analitici è riuscito nell' esibir cotesta locale. E vi ha benanche supplito il luogo dell' iperbole rapportata agli assintoti. Ma io non so, s' ei vi abbia mantenuta l'unità, e la semplicità del metodo Ermanniano. So non pertanto, che lo stesso Ermanno dovè alterarvi quell' unità di metodo, quando fu obbligato di ripiegare nel sistema, di de l' Hopital, per estendere a tutti i casi le sue ricerche, quasi che fossegli fallito il metodo, che imprese. Ed eccone le sue parole. *Omnes reliquos casus percensere, qui a si-*

gnorum varietate pendent, nimis longum foret; sed eorum loco libet construere aequationem generalem, quam illustris Marchio Hospitalius pro ellipsibus instar canonis dedit, cum qua omnes casus particulares locorum ad ellipses comparavit (Vedi vol. IV. Atti di Pietrob., e l' equaz. D per l'ellisse).

§. 17. Intanto io son di parere, che l' equazione $z = \sqrt{(px^2 + qx + t)}$, ch' è la seconda di quelle due di già assunte dal Cartesio per tal fine *, abbia ingenerata in questo metodo una certa durezza, che dispiace a' geometri di buon senso. Poichè se col geometra Francese impiegheremo il metodo dell' equazioni identiche per conoscere la lunghezza del diametro, e del parametro della richiesta curva, una tal ricerca non sarà mica elementare: nè gli artifizj analitici, che avremo impiegati, potranno facilmente tradursi in geometrici ragionamenti, come il più delle volte convien fare. Se coll' Ermanno vorremo segnare i vertici della detta curva nella retta D v *, locale della prima equazione del §.5, dovremo risolvere l' equazione quadratica $px^2 + qx + t = o$, com' ei cel prescrisse. Ed urteremo sovente in grandezze immaginarie: ove ne farà scorno l' aver adottato per un fattibil fine un impossibil mezzo. E poi una tal ricerca, come dianzi l' ho mostrato, non è nè completa, nè elegante, e nè anche l' unità di metodo vi traluce. Finalmente, se in ciascuna ordinata RN della locale RD tolgasi dal punto R la RM $= \sqrt{(px^2 + qx + t)}$, o le si aggiunga per dritto la R$m = \sqrt{(px^2 + qx + t)}$; il punto M, o l' altro m dovrà appartenere ad una curva conica. Ed in tal modo certi prestantissimi analisti dell' età nostra sogliono, per assegnazion di punti, e generalmente esibire coteste linee di second' ordine. Ma il perimetro di ciascuna di queste curve, che

* §. 5, 6.

* *fig.* 15.

sarebbe una serie d'infiniti punti intervallati fra loro, non potrà mai avere la continuità delle parti, ch' essenzialmente conviensi all' esteso. Anzi ne saran quivi infinite ordinate alternativamente reali, ed immaginarie; onde la teorica delle intersezioni delle curve coniche, che si richiede a costruire i problemi solidi, dovrà svanire. E perciò saggiamente si avvisarono i geometri dell' antichità rimota, che le linee di second' ordine doveansi intender generate dal segare un cono con un piano. Ed i moderni con pari sapienza le concepiscon prodotte con moti continui, o per organiche descrizioni. Anch' io, nell' istituirmi su i Conici di Apollonio, rilevai dalle regolatrici di queste curve una nuova proprietà, che loro si appartiene, ed è: *che ciascuna semiordinata di una qualunque sezione conica sia media proporzionale tra le corrispondenti coordinate di una retta data di posizione* (1). Ed avrei potuto da ciò stabilire per assegnazion di punti una genesi generale di tali linee, e con un metodo assai più facile di quello, che conviensi a costruire la grandezza $\sqrt{(px^2 + qx + t)}$. Ma per evitare tutti quegli sconci, che ora ho divisati, io quì reco in sua vece un nobilissimo teorema del Cavalier Newton su tale assunto; * fig. 3. cioè: *Se i due angoli* PAD, PBD* *dati di sito, e di grandezza in uno stesso piano, si facciano simultaneamente rotare intorno i loro vertici* A, B, *e vi si proccuri che l'intersezione de' lati* AX, BY *vada segnando la retta* PV *data di sito; l'intersezione degli altri due lati* AD, BD *dovrà descrivere una sezione conica, che passa pe' poli* A, B.

(1) Vegg. le istit. delle Curve Coniche dell' Ab. Giannattasio §. 30. Ed avvertasi, che quì per sezione conica deesi intender benanche il cerchio, ed il triangolo. E lo stesso valga pel seguente teorema Newtoniano.

CAPITOLO II.

PRENOZIONI DELL' ARGOMENTO .

§. 18. Volendo quì proporre un metodo, che sia insiem *diretto*, *generale*, e *didascalico*, ho pensato dovermi a quello attenere, ch' io ne' primi anni di mia giovinezza comunicai a' valorosi giovani della nostra Capitale : e che, se il mio pensiere non mi delude, dee essere di que' tre caratteri fregiato ; cioè: *un' equazione quadratica a due indeterminate può generalmente esibirsi per la seguente*

$$y^2 + \frac{2mxy}{n} + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$$

intendendo ridotti al primo membro, e quivi ordinati quei termini di essa, che contengono l' indeterminata y, *ed al secondo i rimanenti. Inoltre io compio il quadrato del primo membro, e nel secondo proccuro di compiere il quadrato di que' termini, che contengono l' altra indeterminata* x. *E con queste due operazioni sì facili ed elementari, quant' è la prop. 4, del II. degli Elementi, chi il crederebbe! l' equazione proposta dee acquistarsi una costruibil forma, cioè tale, che ci presenta l'espressioni delle coordinate della richiesta curva, e 'l rapporto loro. Da questo rapporto comprenderemo di repente la natura della detta curva ; e da quelle espressioni il sito di essa rileveremo. Finalmente le dimostrazioni, che dovranno farsi ne' casi di* $+x$, $-x$, *di* $+y$, $-y$, *riusciranno per tal riduzione ugualmente agevoli : ed anzi da una di esse dovranno intendersi le rimanenti, senza più fare. E quindi l' intera curva, e non mica un arco di essa, come altri suol dire, sarà il luogo geometrico dell' anzidetta equazione.*

§. 19. Nella *costruibil* forma, che avrà presa una di cotest' equazioni, dee tralucere una proprietà principale di una curva conica rispetto ad un diametro di essa, e la posizione di questa retta a due date direttici. Dunque sarà bene, ch' io per ordine di scienza illustri queste due cose in convenevol modo: e che quaggiù le rechi dopo aver definite alcune voci.

§. 20. Defin. 1. Ciascuna curva può dirsi *Luogo Geometrico*, o semplicemente *Luogo* di quell'equazione, ch' esprime la sua natura. E 'l *costruire un' equazione a due indeterminate* non è, che l' esibire il suo luogo geometrico, o, come suol dirsi, la sua *Locale*.

§. 21. Fu nobil pensiere degli analisti esprimere la natura di ciascuna curva per lo rapporto, che vi han le coordinate, o per l' equazione in che convertesi un tal rapporto. E fu saggio di lor parere, che per comodo di nostra immaginazione debbansi dinotare per x, y le dette coordinate, se pur non convenga altri simboli adottare. Ma riman sempre all' arbitrio dell' analista lo scegliere le direttrici, e il prefiggervi un certo asse, e quivi il principio delle x, che ne sono le ascisse. E perciò non fia maraviglia, se *diansi infinite equazioni differenti fra loro, di cui ciascuna può la natura di una stessa curva dinotare*. Perchè cotesta varietà non vien d' altronde, che da quell' arbitraria posizione delle direttrici. E le dette equazioni non sono essenzialmente fra se diverse: potendosi ciascuna di esse con artificj elementari in ciascun' altra della medesima famiglia trasformare, ed in quella specialmente, che conoscasi la più semplice fra esse (1).

---

(1) Nel Cap. III. si vedrà in ogni rincontro un tal paradosso

§. 22. Or il problema di costruire un' equazione quadratica a due indeterminate, ch' è l' inverso di quell' altro, ove traduciamo la natura di una curva conica in equazione, anch' ei presenta un simil paradosso, che: *costruendo ciascuna fra innumerevoli equazioni tra se differenti, e del secondo grado, ottengasi una stessa curva, variando solamente la posizione di essa con due direttrici date*. Dunque a risolvere un tal problema, ch' è l' oggetto di nostre speculazioni, gioverà di convertire l' equazione proposta in *costruibil forma*: perchè non solamente si possa conoscere qual sia cotesta curva; ma vi s' intenda eziandio la sua posizione con due date direttrici. E quindi se gli artifizj di quell' algebrico riducimento sono assai semplici, ed elementari, come si è detto quì sopra *, la condotta della soluzione sarà ben confacente a tal problema, come quella, che dal problema diretto gli è profferita. * §. 18.

§. 23. Se la variabile z dinoti una qualunque semiordinata di un diametro della parabola, il parametro del quale si dica p, v la corrispondente ascissa computata dal vertice; *l'equazione alla parabola sarà*

$$z^2 = pv.$$

Qui l' angolo delle coordinate v, z è di quella grandezza, che piace. E lo stesso vuol intendersi per le altre curve coniche, tranne il solo cerchio, ove quell' angolo dee esser retto. Inoltre nelle seguenti curve le ascisse tolgonsi in sul diametro, e dal centro.

§. 24. Se dicasi z una qualunque semiordinata di un diametro del cerchio del raggio r; v l' ascissa, che dal centro le

---

so. Che anzi ne' seguenti §§. comunque si trasloghi l' origine delle x, s' incontrerà una nuova equazione.

corrisponde : *l' equazione al cerchio sarà*

$$z^2 = r^2 - v^2 .$$

§. 25. Nell' ellisse il quadrato di ciascuna semiordinata di un qualunque diametro, è quanto l' eccesso del quadrato del semidiametro secondario sul quadrato della corrispondente ascissa moltiplicata per lo rapporto del semidiametro secondario al primario. Cioè chiamando z quella semiordinata, v l' ascissa, ed a, c il semidiametro primario, e 'l secondario rispettivamente : *l' equazione all' ellisse sarà*

$$z^2 = c^2 - \frac{c^2}{a^2} v^2 .$$

§. 26. Nell' iperbole rapportata ad un diametro primario $2a$, il quadrato di ciascuna semiordinata z ad un tal diametro, è uguale al difetto del quadrato del semidiametro conjugato c dal quadrato della corrispondente ascissa v, moltiplicata per lo rapporto del semidiametro secondario al primario. Cioè a dire : *l' equazione all' iperbole per diametro primario $2a$ sarà*

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2} v^2 - c^2 .$$

§. 27. E rapportandosi questa curva al diametro secondario $2c$, sarà il quadrato di una semiordinata z di un tal diametro uguale alla somma di due quadrati, l' uno fatto dal semidiametro primario a, e l' altro dalla corrispondente ascissa v moltiplicata per lo rapporto del semidiametro primario a al secondario c. Vale a dire : *l' equazione all' iperbole pel diametro secondario $2c$ sarà*

$$z^2 = a^2 + \frac{a^2}{c^2} v^2 .$$

§. 28. Finalmente nell' iperbole fra gli assintoti il rettangolo delle coordinate v, z dee uguagliare la potenza della detta curva, ch' io l' esprimo per p^2. Cioè a dire, *l' equazione all' iperbole tra gli assintoti*, *sarà*

$$z v = p^2.$$

§. 29. Cor. I. Dall' equazione dell' ellisse può ottenersi quella dell' iperbole riferita al diametro primario, col solo cangiare i segni de' termini nel secondo membro. E per averne quell' altra rispetto al diametro secondario, vi si dovranno commutare i semidiametri conjugati, scrivendo a^2 per c^2, e c^2 per a^2, con far anche positivi amendue i termini del secondo membro.

§. 30. Cor. II. E si potrà inferir generalmente (lo che si vedrà anche nella parabola verificato), che: *per ciascuna curva conica, il quadrato di una delle coordinate debba stare in una ragion data alla somma, o alla differenza di due quadrati, l' uno fatto dall' altra coordinata, e l' altro da una quantità costante* (1).

§. 31. Scol. Prima di gir più oltre, debbo quì rassodar due cose: *che l' equazione alla parabola si possa da quella dell' ellisse derivare*. E che, *dall' iperbole riferita ad un suo diametro primario possiam facilmente l' equazione fra gli assintoti raccorre*. E riguardo al primo assunto pongasi la $v = a - x$ nell' equazione all' ellisse quassù dichiarata, cioè nella $z^2 = c^2 - \dfrac{c^2 v^2}{a^2} = \dfrac{c^2}{a^2}(a^2 - v^2)$, e si chiami p

(1) Il Sommo Eulero nel §. 110. Vol. II. *Anal. degl' Infiniti*, e 'l sagace Kestner nella sua Geom. Subl. convengono essere *di tal forma la generale equazione dell' ellisse e dell' iperbole, prendendo le ascisse dal centro della figura, ed in un diametro di essa.*

il parametro del diametro $2a$. Sarà $z^2 = \frac{p}{2a}\left(a^2 - (a-x)^2\right)$
$= \frac{px}{2a}(2a - x)$. E facendovi $2a = \infty$, e quindi $2a - x$
$= 2a$; la precedente equazione si ridurrà in quest' altra

$$z^2 = \frac{px}{2a} \times 2a = px$$

* §. 23. ch' è alla parabola*.

§. 32. Inoltre sieno CH, Ch gli assintoti dell' iperbole
* fig. 4. NAn*, il cui semiasse principale CA sia a, e 'l suo conjugato AB = AD sia c. Sarà, pe' triangoli simili CAB, CMH, CA : AB ::
CM : MH, cioè $a : c :: v : \text{MH} = \frac{cv}{a}$, e quindi $\text{MH}^2 = \frac{c^2v^2}{a^2}$.

* §. 26. Ma è poi* $\text{MN}^2 = \frac{c^2v^2}{a^2} - c^2$. Dunque sarà $\text{MH}^2 - \text{MN}^2 = c^2$.
Intanto dal punto N si tiri la NK parallela all' assintoto Ch. Sarà il triangolo NKH simile all' altro DCB, ch' è isoscele: onde dovrà essere NK = KH. E perciò chiamando x, y le coordinate CK, KN dell' iperbole tra gli assintoti NAn, sarà anche KH $= y$. Ed essendo, per lo parallelismo delle rette KN, Ch, il rettangolo CKH all'altro hNK, come HC^2 ad Hh^2, o come CB^2 a BD^2, sarà, ne' simboli di queste grandezze $yx : c^2 ::$
$a^2 + c^2 : 4c^2$, e quindi $yx = \frac{1}{4}(a^2 + c^2)$, *ch' è l' equazione all' iperbole tra' suoi assintoti*.

* §. 23. §. 33. Essendo nella parabola* la semiordinata $z = \sqrt{pv}$, sarà manifesto, che supponendovi l' ascissa $v = o$, debba *risultare anche la* $z = o$. E se vi si ponga la v negativa, *dovrà divenire immaginaria la* z, come uguale a $\sqrt{-pv}$.

* §. 25. §. 34. E poichè nell' ellisse* rinviensi la $z = \frac{c}{a}\sqrt{(a^2 - v^2)}$

si vedrà chiaramente, che allo svanir della v risulti la $z = c$. E che questa z *diventi immaginaria al prendervi* la $v > a$. E ciò dee valere benanche per lo cerchio convenevolmente.

§. 35. Ma nell' iperbole riferita ad un diametro primario si rileva la $z = \frac{c}{a}$. Dunque ponendovi la v eguale a zero, o ad una grandezza minore di a, *dovrà farsi la z immaginaria.* E perciò, volendo evitare queste grandezze immaginarie, dovremo permutarvi le coordinate di una tal curva, ponendo $v^2 = a^2 + \frac{a^2z^2}{c^2}$, ovvero $v = \frac{a}{c}\sqrt{(c^2 + z^2)}$. Poichè, se facciasi zero, o negativa la z, che quì disegna un'ascissa dal centro in un diametro conjugato, non può mai divenir zero la v, e nè tampoco immaginaria.

POSTULATO I.

§. 36. I. Io qui assumo per regolo delle seguenti costruzioni un angolo costante XPY*, che dinoto per φ, e 'l chiamo *Angolo regolatore*: poichè i suoi lati PX, PY rappresentano le due date, o le due assunte direttrici. E propriamente il lato PY, che quaggiù suol essere delineato in sito verticale, è la linea delle indeterminate x nell' equazione da costruirsi: e quivi le x positive esprimono le parti del lato PX, le quali procedono indefinitamente dal vertice del detto angolo insino ad un arbitrario punto del lato PX. E le y positive debbon dinotarvi le parallele all' altro lato PY, che stieno nell' apertura dell'angolo regolatore tra la linea delle x, e la curva da descriversi. Laddove le $-x$, e le $-y$ dovranno esprimervi le rette rispettivamente opposte alle primiere.

* *fig.* 2.

§. 37. II. E per più chiarezza di dire, i lati PX, PY del detto angolo regolatore si prolunghino indefinitamente, al di sopra del vertice di esso, cioè verso X', Y'. Si vedrà chiaramente, che l' apertura dell' angolo regolatore XPY sia la sede delle indeterminate $+x$, $+y$; e che l' apertura del suo opposto X'PY' racchiuda le $-x$, $-y$. Imperocchè le $-x$ debbon dinotarvi quelle rette indefinite, che si troncano dal vertice del detto angolo sulla retta PX', ch' è il prolungamento del lato PX, e le $-y$ si hanno a ritrovare in opposizione delle $+y$, cioè debbon esser parallele alla PY, restando tra la retta PX' e la curva, ch' è nella parte X'PY'. Inoltre nell' angolo XPY' vi staranno le $+x$ e le $-y$: e nel suo opposto YPX' dovran contenersi le $-x$ e le $+y$. Le quali cose è ben che s' intendano chiaramente da' giovanetti, affinchè essi conoscano con distinzione quel, che dovrò dimostrare ne' capitoli seguenti.

§. 38. III. Dal vertice P dell' angolo regolatore XPY e ne' suoi lati PX, PY si tolgano le rette Pk, Pl rispettivamente uguali alle n, m, che dinotano il denominatore e 'l numeratore del fratto $\frac{m}{n}$, il quale spesso incontrasi nelle seguenti equazioni: e poi si compia il parallelogrammo Pkhl, ed in esso conducansi le diagonali kl, Ph. La prima di queste diagonali, cioè la kl, potrà chiamarsi *la sottesa dell' angolo regolatore* ϕ; e la altra Ph sarà *la sottesa del suo supplemento* Pkh. Quella dovrà essere uguale a $\sqrt{(mm+nn-2mn.cos.\phi)}$, e quest' altra dovrà eguagliare $\sqrt{(mm+nn+2mn.cos.\phi)}$. Ed io per generalità di concetto pongo la $r=\sqrt{(mm+nn\pm 2mn.cos.\phi)}$.

§. 39. IV. Se nel lato PY dell'angolo regolatore XPY s'intendan tolte da P verso Y le parti rappresentanti le y, e poi le x sien le parallele all'altro lato PX, restando comprese tra la PY e la curva da descriversi, quasichè le y dinotassero le ascisse, e le x le applicate; dovrem dire, che le y e le x di questo caso, e quelle del §. 37 *sien commutate fra loro: o che le une appartengansi alla parte interna della curva, e le altre all' esterna*. Così nella curva X'MN le rette PN, NM vi dinotano le x, y, come dianzi ho detto, ma compito il parallelogrammo Nβ saranno Pβ, βM le y, x.

§. 40. V. Se l'applicata MN, ch' esprimesi per y, si prolunghi oltre la linea PX, sinchè la parte aggiunta NS sia uguale ad una data retta g; *l' intera* MS *sarà uguale ad* $y + g$, come l'è chiaro. Ma rapportando alle due direttrici PX, PY la retta NS; *questa dovrà dinotarsi per* $- g$; poichè da quanto si è detto quì sopra* ben si conosce, che la NS ritrovandosi fra le applicate negative debba esprimersi per $- g$. E così pure togliendo dalla MN, e dal punto N la retta NT$=g$; *sarà la rimanente* TM $= y - g$. *Laddove la medesima* NT, *per essere un'applicata, che rapportasi alle direttrici* PX, PY, ed è rinchiusa nell'apertura dell'angolo regolatore, *sarà* $+ g$.

* §. 37.

LEMMA L.

PROBLEMA.

§. 41. Dato l'angolo regolatore XPY*, i cui lati PX, PY sieno le direttrici delle x, y, e 'l punto P il principio di tali grandezze; vuol ritrovarsi il principio delle nuove coordinate v, z, che

* *fig.* 2.

sieno rispettivamente uguali a' binomj $x+f$, $y+g$, ove le f, g disegnino due rette date.

SOLUZ. Supponiamo, che allo svanire dell' ascissa v svanisca eziandio l'applicata z, come interviene alle coordinate della parabola, di cui quì sopra ho ragionato*. Sarà chiaro, che facendovi la $v=o$, debba essere anche il suo valore $x+f=o$, e quindi $x=-f$. E poichè si è supposto, che in tal caso debba svanir benanche l'applicata z, sarà pure il suo valore $y+g=o$, e con ciò la $y=-g$. *Dunque rapportandosi alle direttrici* PX, PY *cotesto principio delle* v, z *dovrà dirsi, che le sue coordinate debbano essere le parti costanti de' loro valori* $x+f$, *ed* $y+g$, *affette di contrario segno, cioè le* $-f$, *e* $-g$.

* §. 33.

Supponiamo in secondo luogo, che svanendo una delle coordinate v, z l' altra non diventi zero, e nè tampoco risulti immaginaria*. E sia v quella che svanisca. Sarà come prima $x+f=o$, e con ciò $x=-f$. Intanto la z anzichè svanire insieme colla v, come dianzi l'abbiam supposta, diventi uguale ad $y'+g$, qualunque sia la grandezza determinata y'. Sarà chiaro, da quel che ho dimostrato precedentemente, che l'estremo della retta g debba avere la $-g$ per ordinata, qualora il rapportiamo alle direttrici PX, PY. Dunque anche in quest' altro caso dovrà concludersi tutto quello, che nel primo ho inferito.

* §. 35.

§. 42. COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA

COSTRUZ. *Dal vertice* P* *dell' angolo regolatore* XPY, *si tolga in sul lato* PF *la retta* PE $=f$, *la quale stia in es-*

* *fig.* 2.

so lato, o nel suo prolungamento, secondochè la grandezza costante f sia negativa, o positiva. E similmente dallo stesso punto P, *ed in sull' altro lato* PY *del detto angolo, si tronchi la parte* $PO = g$; *ed ella stia in esso lato* PY, *o nel suo prolungamento* PY', *secondochè si osservi esser la* g *negativa, o positiva. E poi dalle due rette* PF, PO *si compia il parallelogrammo* POCF. *Il punto* C *sarà il richiesto principio delle coordinate* v, z; *e la linea delle* v *sarà in quel lato del detto parallelogrammo, ch' è parallelo alla linea delle* x, *e conducesi pel principio suddetto.*

Dim. Essendo la retta $PN = x$, e l' altra $PF = f$, sarà $CS = PN + PF = x + f$. E per esser benanche $NM = y$, $NS = g$, sarà $MS = MN + NS = y + g$. Dunque le coordinate CS, SM saranno rispettivamente uguali alle $x + f$, $y + g$. E prendendo nel lato PY dell' angolo regolatore, e dal suo vertice P la retta PV uguale a g, e compito il parallelogrammo PVGF dalle due PF, PV, si dimostrerà come sopra dover essere GT, TM rispettivamente uguali alle $x + f$, $y - g$. Ed anzi, se vi si tronchi in sul lato PX, dal punto P, la retta Pf uguale ad f, e poi si compiano i parallelogrammi POcf, PVgf, saranno cS, SM rispettivamente uguali ad $x - f$, $y + g$; e le altre gT, TM uguali ad $x - f$, $y - g$ rispettivamente.

§. 43. Cor. I. L'addotta costruzione di questo Lemma, per l' insigne utilità, che in se racchiude, può proporsi nel seguente

Canone: *Il principio delle* v, z *rispettivamente uguali a' binomj* $x + f$, $y + g$, *e rapportate all'angolo regolatore* XPY, *dee avere per sue coordinate le parti costanti di sif-*

fatti binomj, che sieno affette di contrario segno, cioè $-f$, $-g$. *E la linea retta delle applicate* v *dovrà condursi dal detto principio parallela alla* PX *linea delle* x. *E tanto sarà il dire, si prenda il punto* C, *che abbia per sue coordinate le rette* $-f$, $-g$; *quanto effettivamente esibirlo colla formazione del detto parallelogrammo* POCF. *E l'una cosa potrà usarsi per l'altra, come piace all'analista.*

§. 44. COR. II. Il principio delle indeterminate v, z può essere allogato nell' apertura dell' angolo regolatore, in quella del suo opposto, o in ciascuna degli altri due angoli laterali; la qual cosa dalla sola ispezione della figura ben si comprende.

LEMMA II.

PROBLEMA.

§. 45. Dato l' angolo regolatore XPY, a' lati del quale si rapportino le coordinate v, z rispettivamente uguali alle grandezze $\frac{r}{n}(x+f)$, ed $y+g+\frac{mx}{n}$; rinvenire il principio delle v, z.

Quì le quantità m, n, f, g sono costanti, e comunque: e dee essere la $r=\sqrt{(m^2+n^2\pm 2mn.\cos.\varphi)}$.

SOLUZ. Pongasi uguale a zero la variabile v, cioè il suo valore $\frac{r}{n}(x+f)=o$; sarà, come nel lemma prec., $x=-f$. Ed in tal caso dovrà esser la $z=y+g-\frac{mf}{n}$; poichè si vuol porre $-f$ per x in quel trinomio. Dunque, da quanto si è detto quì sopra *, il principio delle nuove variabili v, z riferito alle direttrici PX, PY avrà per sue coordinate le due $-f$, $-(g-\frac{mf}{n})$, e potrà geometricamente, ed in facil modo esibirsi. * §. 43.

Ma per conoscere la linea della v, la quale non è parallela alla PX, come in quel lemma, facciasi la $x=o$, risulterà la $z=y+g$. E sarà $-g$, come si è detto quassù *, l'ordinata dell' estremo della retta g. Dunque dovrà esser dato quell' altro punto, che riferito alle medesime direttrici, abbia per sue coordinate o, $-g$; e si potrà anch' esso geometricamente, ed in facil modo esibire. E perciò: *la retta, che si conduca per questi due punti, l' uno che abbia per coordinate* $-f$, $-(g-\frac{mf}{n})$; *e l' altro le altre* o, $-g$, *sarà la linea delle* v. * §. 40.

§. 46. Composizione geometrica del problema.

Costruz. Supponendo la $m=o$, i valori delle v, z diverranno rispettivamente uguali a' binomj $x+f$, $y+g$ del precedente lemma. E perciò, cogli artifizj prescritti nella costruzione di esso, si formi dalle grandezze costanti f, g una figura parallelogramma, qual si converrebbe alla precedente. Ed oltre a ciò da quell' angolo di tal figura, ch' è in sulla PY, si meni la parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, o del suo supplemento, secondochè il fratto $\frac{mx}{n}$ sia positivo, o negativo. *Cotesta parallela sarà la linea delle* v: *e'l principio di esse dovrà essere quel punto, ove la detta parallela incontra il lato di quella figura, il quale è equidistante dalla* PY.

DIM. Essendo i triangoli SOD, COH simili al triangolo Pkl, come ciò ne appare, dappoichè avremo tirata per lo punto O la retta HOD parallela alla kl sottesa dell' angolo regolatore XPY, sarà $Pk : kl :: OS : OD :: OC : OH$; e quin-
*12. El. V. di $Pk : kl :: CS : HD$ *. E ne' simboli di queste grandezze avremo $n : r :: x+f : HD$, che sarà uguale ad $\frac{r}{n}(x+f)$. E per essere $Pk : Pl :: OS : SD$, cioè $n : m : x : SD$, sarà $SD = \frac{mx}{n}$, ed $MD = MS + SD = y + g + \frac{mx}{n}$. Dunqne le coordinate, che si richieggono nel caso, che sien positivi i termini f, $\frac{r}{n}$, g, ed $\frac{mx}{n}$, debbon essere le HD, DM.

E se mai nell'espression dell' ordinata sia negativo il termine $\frac{mx}{n}$, cioè a dire se una tal retta sia uguale ad $y + g - \frac{mx}{n}$, dovrà condursi per lo punto O la retta $H'OD'$ parallela alla sottesa del supplemento dell' angolo regolatore, cioè alla retta, che congiunge i due punti P, h. E si dimostrerà, come quì sopra, che il punto H' sia il principio delle coordinate $H'D'$, $D'M$ rispettivamente uguali ad $\frac{r}{n}(f+x)$ ed $y+g-\frac{mx}{n}$. E così dovrebbesi per altri casi ragionare.

§. 47. COR. I. La presente ricerca può ridursi a quella del precedente lemma, col supporvi la $m = o$, e quindi $r = n$. E sol dovrebbesi di poi condurre quella parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, o del suo supplemento, secondochè nell' espressione dell'ordinata siavi positivo, o negativo il monomio $\frac{mx}{n}$. Anzi in un più facil modo potrem riuscire, ch'è il seguente:

§. 48. COR. II. *Si trovi un punto, che riferito alle proposte direttrici* PX *e* PY *abbia per coordinate* $-f$, *e* $-\left(g-\frac{mf}{n}\right)$. *E da un tal punto si tiri la parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, o del suo supplemento, secondochè sia positivo il monomio* $\frac{mx}{n}$, *o negativo.* *fig. 2.
Questa retta sarà la linea delle v, e quel punto il principio di esse. Imperocchè essendo $FH=g-\frac{mf}{n}$, $FC=g$, sarà $CH=\frac{mf}{n}$, cioè $CH:f::m:n$, ovvero $CH:CO::Pl:Pk$, e quindi* sarà l'angolo CHO, o il suo alterno HOP, uguale all'altro Plk; e con ciò la retta HO parallela alla sottesa lk. *6. El. VI.

§. 49. COR. III. La retta HOD, che ho condotta per O parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, incontra ne' punti H, Q i due lati FC, fc de' parallelogrammi POCF, POcf. E la parallela menata per lo stesso punto O alla sottesa Ph del supplemento del detto angolo, cioè la retta H′OD′, incontra negli altri punti H′, Q′ i medesimi lati FC, Fc. Dunque i quattro punti H, H′, Q, Q′ saranno i rispettivi principj delle coordinate
$\frac{r}{n}(f+x)$ ed $y+g+\frac{mx}{n}$, $\frac{r}{n}(f+x)$ ed $y+g-\frac{mx}{n}$,
$\frac{r}{n}(x-f)$ ed $y+g+\frac{mx}{n}$, $\frac{r}{n}(x-f)$ ed $y+g-\frac{mx}{n}$,
cioè delle rette HD, DM; H′D′, D′M; QD, DM; Q′D′, D′M, che da quelle grandezze sono rispettivamente espresse. E lo stesso dicasi per le altre quattro coppie di coordinate, che alla parte sinistra della XX′ debbon cadere.

§. 50. SCOL. Se nell' espressione dell' ordinata siavi un ter-

mine $\pm \frac{mx}{n}$, qual si rinviene nel proposto trinomio $y+g\pm\frac{mx}{n}$, la corrispondente ascissa dovrà avere per coefficiente il fratto $\frac{r}{n}$,
* §. 38. essendo * la $r = \sqrt{(m^2+n^2\pm 2mn.\ cos.\ \varphi)}$. Imperocchè, se l' espressioni di tali coordinate suppongansi essere $y+g+\frac{mx}{n}$, $x+f$; le rette, che queste dinotano, dovranno essere le MD, CS, che non posson convenire ne' loro estremi D, S; ed un tal incontro alla posizione delle coordinate conviensi necessariamente. Dunque non potrà $x+f$ dinotarvi quell' ascissa. E nello stesso modo può farsi questa dimostrazione indiretta, se in quel trinomio sia negativa la g, o la $\frac{mx}{n}$, o amendue queste grandezze.

POSTULATO II.

§. 51. Un'equazione quadratica, che contenga le due indeterminate x, y, può generalmente esprimersi nella seguente forma

$$y^2+\frac{2mxy}{n}+\beta y=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon \ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{W}$$

rimettendo al primo membro, e quivi ordinando tutti que' termini di essa, che contengono la y, ed al secondo i rimanenti. E se mai cotesta equazione sia mancante del secondo termine, cioè di quello che racchiude il prodotto delle x, y, ella potrà dinotarsi per

$$y^2\ *\ +\beta y=\gamma x^2+\delta x+\varepsilon\ \ldots\ldots\ldots\ \mathrm{V}.$$

E quest' equazione per legge di metodo deesi considerar prima di quell'altra.

DILUCIDAZIONE. Il solo comento, che può recarsi a questo postulato, è che i coefficienti de' termini dell' equazione W, i quali successivamente esprimonsi (1) pe' simboli $\frac{2m}{n}$, $\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$, sieno grandezze costanti e comunque, cioè intere o fratte, razionali o irrazionali, positive o negative. Ma nel costruir geometricamente la detta equazione, i mentovati coefficienti debbono avere (2) una giusta dimensione, se pur nella sua genesi non siasi assunta qualche retta uguale all' unità. Vale a dire le grandezze $\frac{2m}{n}$ e γ debbon essere di niuna dimensione, come son per appunto i numeri volgari, o i rapporti di grandezze date. I coefficienti β, δ conterranno una sola dimensione, cioè a dire debbon esser grandezze lineari. E finalmente la ε convien che sia di due dimensioni, come l'è un rettangolo dato, o un quadrato. E sebbene l' equazione W potrebbesi proporre in una forma più generale, e per più usi, qual' è la seguente

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o;$$

---

(1) Ho adottato per coefficienti generali de' termini dell' equazione W le lettere del greco alfabeto, per distinguere queste generiche grandezze da quelle particolari e determinate, che io uso negli esempj, che le dinoto per le lettere *a*, *b*, *c*, *etc.* del nostro alfabeto.

(2) Vi è qualche moderno analista, che asserisce *le riduzioni di cotesti coefficienti in numeri esser preferibili.* E ciò parmi detto con innavvertenza: poichè chi mai non vede, che in tal modo potrebbonsi assegnar rette uguali a' quadrati, e che si estinguerebbero i rapporti irrazionali dalle geometriche grandezze?

PART. II. Si compia il quadrato del 1° membro dell' equazione W, ed un tal compimento aggiungasi al II°., si avrà

$$\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\left(\gamma+\frac{mm}{nn}\right)x^2+\left(\delta+\frac{m\beta}{n}\right)x+\frac{1}{4}\beta^2+\varepsilon \ldots \mathrm{C}$$

E ponendo, per brevità di calcolo, $\gamma+\frac{mm}{nn}=p$, $\delta+\frac{m\beta}{n}=q$,

ed $\frac{1}{4}\beta^2+\varepsilon=t$, come si è praticato nel §. 3, sarà

$$\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2=px^2+qx+t$$

cioè $\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2}{4p}+t \ldots \mathrm{D}.$

essendo il binomio px^2+qx, come dianzi l' ho dimostrato, uguale a $p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2}{4p}$. Ma la prima di queste due ultime espressioni è identica a $\frac{pnn}{rr}\left(\frac{rx}{n}+\frac{rq}{2np}\right)^2$, il qual riducimento dee convenirle in virtù del §. 50, affinchè le grandezze rinchiuse ne' vincoli dell'equazione D possano dinotarvi le coordinate. Dunque sarà

$$\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\frac{pnn}{rr}\left(\frac{rx}{n}+\frac{rq}{2np}\right)-\frac{q^2}{4p}+t \ldots \mathrm{W}'$$

Ed esprimendo per z il trinomio $y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta$, per v il binomio $\frac{rx}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{rq}{np}$, e per e^2 l'altro $-\frac{q^2}{4p}+t$; sarà, come nella parte I. si è conchiuso, $z^2=\frac{pnn}{rr}v^2+e^2$.

§. 53. DEF. II. Un' equazione quadratica a due indeterminate dicesi *ridotta in costruibil forma*, se le radici di

que' due quadrati, che vi osserviamo, posson dinotarvi le
* §. 50. coordinate di una curva*, e l'un di questi quadrati serbi una ragion data alla somma, o alla differenza dell' altro quadrato
* §. 30. e di una data grandezza*.

§. 54. COR. I. Dunque l' equazione V′ non è che la proposta equazione V, che si è ridotta in costruibil forma. E per la stessa ragione dovremo dire, che l' altra equazione W′ esibisca la data equazione W ridotta in costruibil forma.

§. 55. COR. II. L' equazione

$$x^2 + \frac{2mxy}{n} + \beta x = \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

che in altro non differisce dall' equazione W, che per la so-
* §. 39. la permuta delle coordinate* x, y, può similmente ridursi in costruibil forma. E lo stesso dicasi dell' equazione

$$x^2 * + \beta x = \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon$$

ch' è mancante del secondo termine.

§. 56. COR. III. La grandezza p, che quì sopra si è fatta uguale a $\gamma + \frac{mm}{nn}$, e che può dirsi *coefficiente caratteristico*, se mai sia zero, darà la seguente equazione,

$$\left(y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta\right)^2 = qx + t = q\left(x + \frac{t}{q}\right)$$

che vedrassi appartenere alla parabola; e che ridotta in costruibil forma degenera nell' altra

$$\left(y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{nq}{r}\left(\frac{rx}{n} + \frac{rt}{nq}\right).$$

E così pure, se suppongasi la grandezza $\gamma = o$ nell' equazione $y^2 + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$; la ridotta in costruibil forma, e che apparterrà alla parabola, dovrà essere

$$\left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\delta\left(x+\frac{\beta^2+4\varepsilon}{4\delta}\right).$$

§. 57. SCOL. Un' equazione quadratica a due indeterminate, che abbia ne' suoi termini certi dati coefficienti, può anche ridursi in costruibil forma col solo raccomodare con questi coefficienti quelli, che converrebbero alla sua ridotta, e senza punto rilevarli col metodo proposto. Infatti, per darne quì un esempio, se vogliasi ridurre in costruibil forma l' equazione

$$y^2+2xy-4ay = 2x^2+2ax-b^2$$

questa potrà paragonarsi coll'equazione W, cioè colla

$$y^2+\frac{2mxy}{n}+\beta y = \gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$

E dovrà essere $\frac{m}{n}=1$, cioè $m=1$, $n=$, ed $r=\sqrt{2}$, supponendo $\varphi=90^\circ$, e quindi $cos.90^\circ=0$. Inoltre sarà $\beta=-4a$, $\gamma=2$, $\delta=2a$, $\varepsilon=-b^2$. E con ciò $p=\frac{mm}{nn}+\gamma=1+2=3$, $q=\delta+\frac{m\beta}{n}=2a-4a=-2a$. E finalmente la ridotta W′, ch' è

$$\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\frac{pnn}{rr}\left(\frac{rx}{n}+\frac{rq}{2np}\right)^2-\frac{q^2}{4p}+\frac{1}{4}\beta^2+\varepsilon,$$

cogl' indicati valori de' suoi coefficienti diverrà

$$(y+x-2a)^2=\frac{3}{2}\left(\left(x-\frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2+\frac{11}{3}a^2-b^2.$$

E come vedrassi più chiaramente nel Cap. IV. esemp. VII.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

§.58. Data un'equazione quadratica a due indeterminate, che non siasi ridotta in costruibil forma, vuol conoscersi da'suoi termini qual debba essere la sua locale, e si vogliono esibire cotesti criterj.

SOLUZ. Si è veduto nella dimostrazione del precedente teorema, che l' equazione W, qualor si compia il quadrato del 1° membro, ed un tal compimento aggiungasi al II°, debba ridursi nell' altra $\left(y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta\right)^2 = px^2+qx+t$; ov' è la $p=\frac{mm}{nn}+\gamma$, la $q=\delta+\frac{m\beta}{n}$, e la $t=\frac{1}{4}\beta+\varepsilon$. Or io vi aggiungo, che la grandezza p, che ho detto potersi chiamare *coefficiente caratteristico dell' equazione*, debba decidere della natura della locale di essa. Ed ecco il canone, che quì propongo a tal oggetto, e per amendue l'equazioni W, U. Cioè

PART. I. L' equazione W dee avere per locale una parabola, un' ellisse, o un' iperbole, secondochè il suo *coefficiente caratteristico* p, cioè $\frac{mm}{nn}+\gamma$, sia *zero*, *negativo*, o *positivo*. E quest' iperbole dovrà riferirsi ad un suo diametro primario, o secondario, secondochè sia *negativo*, o *positivo* il binomio $t-\frac{q^2}{4p}$. (Vegg. i §§. 26, 27.)

PART. II. E così pure l' equazione U, cioè $y^2+\beta y=$

$\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, avrà per sua locale una parabola, un' ellisse, o un' iperbole, secondochè il coefficiente della x^2, cioè la grandezza γ, sia zero, negativo, o positivo. Ed ella sarà un cerchio, se mai sia $\gamma = -1$, e retto l' angolo delle coordinate.

PART. III. Finalmente l'equazione W si apparterrà ad un'iperbole tra gli assintoti, se in essa manchino amendue i quadrati delle indeterminate x, y; cioè a dire, s' ella sia concepita ne'seguenti termini $xy + \beta y + \delta x = \varepsilon$. Imperocchè risolvendo in fattori il primo membro, si avrà l'equazione $(x + \beta)(y + \delta) = \varepsilon + \beta\delta$, ch' è pariforme alla $vz = p^2$ del §. 28.

§. 59. SCOL. I. L'equazione $\frac{m}{n}y^2 + xy + \beta y + \delta x = \varepsilon$, che colla luce del problema precedente vedesi appartenere ad un' iperbole rapportata ad un diametro di tal curva, può riferirsi all' iperbole tra gli assintoti nel seguente modo. Si divida per lo binomio $y + \delta$ la data espressione $\frac{m}{n}y^2 + xy + \beta y + \delta x$. Dovrà essere l'altro di lei fattore uguale ad $\frac{m}{n}y + x + \beta - \frac{m}{n}\delta$, se quell'espressione abbia questi altri due termini $\delta\beta$, $-\frac{m}{n}\delta^2$. La qual cosa ben si conosce dall' eseguir l' indicata divisione Dunque aggiungendo i due termini $\beta\delta$, e $-\frac{m}{n}\delta^2$ al primo e secondo membro dell' equazione proposta nel principio di questo scolio, otterremo

$$\frac{m}{n}y^2 + xy + \beta y + \delta x + \beta\delta = \frac{m}{n}\delta^2 = \varepsilon + \beta\delta - \frac{m}{n}$$

cioè $\left(\frac{m}{n}y + x + \beta - \frac{m\delta}{n}\right)(y + \delta) = \varepsilon + \beta\delta - \frac{m}{n}\delta^2$.

* §. 50. E perciò riducendo quest'ultima equazione in costruibil forma*, sarà

$$\left(\frac{m}{n}y+x+\beta-\frac{m\delta}{n}\right)\frac{r}{n}(y+\delta)=\frac{r}{n}\left(\varepsilon+\beta\delta-\frac{m}{n}\delta^2\right).$$

§. 60. SCOL. II. Ma questa ricerca avrebbesi potuto istituire con un metodo diretto, sebbene meno elementare del precedente. Cioè il prodotto delle due grandezze $y+\delta$, ed $\frac{m}{n}y+x+\beta+A$, suppongasi uguale ad $\varepsilon+B$, ove le A, B sien grandezze costanti da determinarsi. Sarà, fatta la moltiplica di que' due fattori,

$$\frac{m}{n}y^2+yx+\beta y+\delta x+Ay+\frac{m}{n}\delta y+\beta\delta+A\delta=\varepsilon+B.$$

E togliendo da quest' equazione quella, ch' erasi già proposta, cioè $\frac{m}{n}y^2+yx+\beta y+\delta x=\varepsilon$, resterà $Ay+\frac{m}{n}\delta y+\beta\delta+A\delta=B$. Ove pareggiando i loro termini analoghi, si otterrà $Ay+\frac{m}{n}\delta y=o$, e $\beta\delta+A\delta=B$. Or dalla prima di esse avremo $A=-\frac{m}{n}\delta$, e per la seconda sarà $B=\beta\delta-\frac{m}{n}\delta^2$, come si è conchiuso nello scolio I.

CAPITOLO III.

COSTRUZIONE GEOMETRICA DELL'EQUAZIONI QUADRATICHE A DUE INDETERMINATE.

§. 61. Un' equazione quadratica a due indeterminate, che co' principj del Capo II. siasi ridotta in costruibil forma, si vedrà appartenere ad una curva conica *data di specie, e di grandezza*. E se ci fermiamo alquanto a considerar cotesta curva, conosceremo eziandio, che vi debb' esser *data la sua posizione con due proposte direttrici*. Che anzi potrem rilevare ciò, che nel principio di quest' opera ho asserito, che: *la ricerca de' luoghi solidi sia un problema posizionale*; *e propriamente il problema inverso di quell' altro, in cui la natura di una curva conica si suol tradurre in equazione*. Il grande Apollonio, sin da' tempi rimoti della Geometria percepì un simile riducimento; quando dal contemplare il problema delle quattro rette concepì quell' elegantissimo teorema, che Pappo ci trasmise nelle sue matematiche collezioni, e che or propongo ne' seguenti termini: *Se diansi di posizione quattro rette giacenti in un piano, e da un punto esistente in tal piano cadano in esse altrettante rette sotto dati angoli, e talmente, che sia data la ragione del rettangolo di due di queste incidenti a quello delle altre due; il detto punto dovrà ritrovarsi in una curva conica data di posizione:* o per servirmi della frase delle greche scuole, *punctum contingit positione datum locum solidum*.

§. 62. Ma quali artifizj dovranno impiegarsi per una tal ricerca, la quale, e per le gravi fatiche, cui ne impegna, e pe' tanti ingegnosi e diligenti geometri, che le han sostenute, pare assai malagevole, o sublime? Quelli per appunto, ch' io alla fine de' due lemmi problematici proposi, e che ora rinchiudo in un solo e distinto abbozzo. *Ridotta in costruibil forma una di coteste equazioni* (per lo qual riducimento esigonsi operazioni elementari) *si vedranno emergere l' espressioni delle coordinate della richiesta curva conica. E potendosi geometricamente esibire un tal punto, da esso dovrà condursi una parallela alla linea delle x, o una certa inclinata, secondochè la proposta equazione sia mancante del secondo termine, o ne sia completa*. Una tal costruzione sarà quì appresso recata più distintamente per l' un caso, e per l' altro. E ne aggiugnerò un nuovo teorema, il quale assicura, che la data equazione non si appartenga a quel solo arco della locale, ove son positive le x, y, come altri suol dire (1); ma all' intero perimetro di tal curva, ancorchè questo distendasi all' infinito: come l' è de' due rami curvilinei della parabola, e de' quattro delle due iperboli opposte.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

* fig. 2. §. 63. Dato l' angolo regolatore XPY*, o date di posizione le due rette PX, PY, che debban essere le direttrici delle due indeterminate x, y; si vuol costruire un' equazione quadratica, che contenga queste indeterminate, e sia mancante del secon-

* §. 51. do termine, che io espressi generalmente* per la

$$y^2 + \beta x = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \ . \ . \ . \ U.$$

(1) Vedi la nota corrispondente al §. 11.

ANALISI DI UNA TAL RICERCA.

L'equazione U ridotta in costruibil forma pel teorema 1. deesi trasformare in quest' altra

$$\left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2=\gamma\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)^2+\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\delta^2}{4\gamma}+\varepsilon\ldots\mathrm{U}',$$

ove i binomj $y+\frac{1}{2}\beta$, $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$ rinchiusi ne' due vincoli, che vi osserviamo, dovran dinotare le coordinate della curva conica *, che si domanda. E le parti costanti di questi binomj, le quali sieno affette di contrario * segno, cioè $-\frac{1}{2}\beta$, e $-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$, saranno le coordinate del centro di una tal curva, o del vertice s' ella sia una parabola. E potendosi geometricamente esibire cotesto punto, per esser date le sue coordinate rispetto alle direttrici PX, PY, da esso dovrem condurre nell'un caso, e nell' altro la parallela alla direttrice PX: *e quella retta sarà il diametro della detta curva*.

* §. 52.

* §. 43.

Inoltre co' criterj esibiti nella proposiz. 11, e dal valore che ne' casi particolari dovrà avere tanto il trinomio $\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\delta^2}{4\gamma}+\varepsilon$, che il coefficiente γ del secondo de' detti vincoli, potremo conoscere qual sia cotesta curva, e con quali determinazioni converrà descriverla. Ed essendo geometrico-analitica una tal ricerca, dovrem soggiugnervi con eleganza la composizione geometrica, e poi illustrar queste cose cogli esempj.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

§. 64. **Costruz.** Dal vertice P del dato angolo regolato-

re ed in sul lato PX si tolga una retta uguale ad $\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$, se tal monomio osservisi negativo: ed essendo questo positivo, dovrà prendersi quella retta nel prolungamento PX′ del detto
* §. 43. lato *. Similmente dal vertice P del medesimo angolo, e sull'altro lato PY, si tronchi una retta uguale ad $\frac{1}{2}\beta$, se questo monomio veggasi negativo; o vi si prenda una tal retta in sul prolungamento PY′ del detto lato, se sia positivo $\frac{1}{2}\beta$. E supponendo esser PF, PO coteste due rette (alle quali per brevità di dire quì mi attengo), si formi da esse il parallelogrammo POCF. *Saranno le rette* CS, SM *le coordinate della richiesta curva*: *il punto* C *dovrà esser il principio di esse*: *e 'l diametro resterà adattato sulla* CS.

Intanto dal valore del trinomio $\frac{1}{4}\beta^2 - \frac{\delta^2}{4\gamma} + \varepsilon$, e da quello del coefficiente γ potrà conoscersi, colla luce de' criterj che recai nel §. 58, se la curva da costituirsi sia un'ellisse, o un' iperbole riferita ad un suo diametro primario, o secondario: e con quali semidiametri conjugati in ciascun di questi casi converrà descriverla. *E descrittala in tal modo*, *ella sarà la locale addimandata*.

E se mai sia zero la grandezza γ nell'equazione U: o pur se questa abbia la seguente forma $y^2 + \beta y = \delta x + \varepsilon$, la sua ridotta sarà

$$(y + \tfrac{1}{2}\beta)^2 = \delta\left(\frac{\beta^2 + 4\varepsilon}{4\delta} + x\right) = \delta(c + x)$$

ponendovi uguale a c il fratto del secondo membro dell'equazio-

ne. Ed in tal caso troncando, come prima, la * PO $= \frac{1}{2}\beta$, * *fig.* 5.
e la PF $= c$, e compito il parallelogrammo POCF, dovrà descriversi * la parabola MCm, *che tocchi la retta* CF * §. 59.
in C, *che il suo diametro* CS *sia parallelo alla* PX, *e che abbia la retta* δ *per parametro. E questa curva sarà la locale per un tal caso.*

§. 65. Dim. Essendo PN $= x$, e PF $= \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$, sarà * *fig.* 2.
CS $=$ PN $+$ PF $= x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$. E così pure essendo MN $= y$, ed NS $=$ PO $= \frac{1}{2}\beta$, sarà SM $=$ MN $+$ NS $= y + \frac{1}{2}\beta$. Onde le due coordinate CS, SM saranno rispettivamente espresse da' binomj $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$ ed $y + \frac{1}{2}\beta$. Ma per l' addotta costruzione il rapporto delle CS, SM è quanto quello, che l'equazione U′ propone fra i binomj suddetti. E la curva conica, che avrem descritta, ha quel sito colle date direttrici PX, PY, che si è proposto. Dunque una tal curva sarà la locale addimandata.

§. 66. Cor. 1. In simil modo potrebbesi condurre il ragionamento per ciascuna delle tre altre coppie delle seguenti coordinate GT, TM; cS, SM, e gT, TM, le cui espressioni sono rispettivamente

$$x + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma} \qquad y - \frac{1}{2}\beta$$

$$x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma} \qquad y + \frac{1}{2}\beta$$

$$x - \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma} \qquad y - \frac{1}{2}\beta$$

§. 67. COR. II. Se nell' equazione U sia zero il coefficiente γ, e l' altro δ sia negativo, la ridotta U′ dovrà essere $(y+\frac{1}{2}\beta)^2=\delta(c-x)$. E nel costruirla dovrem pren-

* §. 64. dere nella PY′ la PO $=\frac{1}{2}\beta$, come si è praticato quì sopra*,

* *fig.* 6. e troncare nella * PX la PF $=c$; continuando il resto, come nella costruzione del §. 64. Nè sembri un' eccezion di regola l' aver troncata nel lato PX la retta PF $=c$, quando nel lemma I. erasi prescritto doverla torre dal lato PX′, per essere c positiva. Imperocchè in quel lemma erasi supposta la x positiva, e non già negativa, come quì si vede. Onde per gli artifizj del medesimo lemma avrebbesi dovuto fare $c-x=o$, e sarebbe risultata la $x=c$.

§. 68. COR. III. E se in qualche caso ritrovisi uguale a zero il trinomio $\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\delta^2}{4\gamma}+\varepsilon$ dell' equazione U′; questa non dovrà più appartenere ad una curva conica; ma sì bene *ad una linea retta data di sito*. Poichè estraendo la radice quadrata dalla risultante equazione, dovremo ottenere $y+\frac{1}{2}\beta=\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)\sqrt{\gamma}$. Che agevolmente può ridursi nella forma trinomia $y=\frac{mx}{n}+h$, e poi costruirsi cogli artifizj del §. 3. (1).

---

(1) Dalle regole, che io proposi ne' due lemmi problematici, avrebbesi potuto benanche attigner la costruzione di questa locale. Ma fia meglio lasciar questo lavoro a' giovani arguti, che aggravarne i meno ingegnosi con quì recarlo, potendo a questi bastar quello del §. 3.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

§. 69. L'equazione U appartiensi all'intera sua locale, e non già ad un arco di tal curva, come parrebbe nell'aver considerate nella precedente dimostrazione le sole coordinate positive.

DIM. Sia AMBm la detta locale: ed in questa curva intendansi condotte le tre ordinate Mm, M$'m'$, M$''m''$: la prima al di sotto del vertice P dell'angolo regolare XPY, e del principio C delle coordinate: la seconda al di sopra di questi due punti: e la terza in mezzo ad essi. E sebbene sianvi casi, ne' quali non potremo condurre tutte e tre queste ordinate (1); pure l' esattezza della dimostrazione m' induce a considerare i più completi. Anz' io, per non renderla assai grave, com' ella dovrebb' essere nel farla esatta, mi son industriato di riuscirvi col considerar solamente le ascisse dinotate da' binomj $x+f$, $x-f$; ponendo per brevità di calcolo f per $\frac{1}{2}\beta$, come nel §.41. * fig. 7.

Infatti essendo $PN = x$, e $PF = f$, sarà $CS = PN + PF = x+f$.

E dall'esser $PN' = -x$, e $PF = f$, sarà $CS' = PN' - PF = -x-f$.

---

(1) Per rischiaramento di una tal' eccezione io ne adduco la sola parabola, ove non può mai condursi un' ordinata al disopra del vertice, in virtù del §. 33. Anzi, se ivi un' ascissa rinvengasi uguale ad $f+x$, ogni altra risulterà anche uguale ad $f+x$. E s' ella sia $x-f$, ciascun' altra sarà pure $x-f$.

Similmente essendo PN$''$ $= - x$, e PF $= f$, sarà CS$''$ $=$ PF $-$ PN$''$ $= f + x$.

E si vedrà col solo algebrico algoritmo, che quantunque le CS, CS$'$, e CS$''$ abbiano diverse espressioni; pure i quadrati loro debban contenerne una stessa, qual è la $x^2 + 2fx + f^2$.

* *fig.* 8. Similmente è PN$= x$, e PF $= f$. Dunque sarà la CS$=$ PN $-$ PF $= x - f$.

Ed essendo PN$' = - x$, e PF $= f$, sarà CS$' =$ PN$'$ $+$ PF $= - x + f$.

E così pure è PN$'' = x$, e PF $= f$; dunque è CS$'' =$ PF $-$ PN$'' = f - x$.

Ed anche quì si conosce, che sieno identici i quadrati dell' espressioni delle CS, CS$'$, CS$''$, ancorchè l' espressioni di queste rette sieno differenti.

Inoltre nella curva MBM$'$ conducansi le applicate MK, M$'$K$'$, M$''$K$''$ parallele alla CB, la prima al di sotto de' pun-
* *fig.* 9. ti P, C *, la seconda al di sopra, e la terza in mezzo ad essi, come dianzi si è praticato. E considerando le y del-
* § 39. l' equazione U come le ascisse* della detta curva, prese dal punto P nella PY, e le x come le corrispondenti loro ordinate, potremo dimostrare de' binomj $y + g$, $y - g$ tutto quello, che quì sopra ho inferito degli altri due $x + f$, $x - f$. E da queste cose ecco il mio ragionamento.

Ben si comprende, che quì abbian luogo quattro coppie di coordinate, che sono $x + f$ ed $y + g$, $x - f$ ed $y - f$, $x + f$ ed $y - g$, $x - f$ ed $x + g$. E che in ciascuna di queste coppie possa variare l' espressione dell' ascissa, o quella dell' ordinata, o di ambedue; e ciò per lo sito, che hanno queste rette co' punti P, C. Ma in ciascuna delle dette coppie i quadrati dell' espressioni delle ascisse non potran mai variare, nè quelli dell' espressioni delle ordinate. E perciò sempre dovrà risultare la medesima equazione, che si è proposta, ovunque prendasi un punto nella descritta locale.

§. 70. COR. I. La ragione di OS ad OD* esprimasi per quella di n ad r, come vien prescritto quì sopra nel §. 45. Saranno le ragioni di CS ad HD, di CS' ad HD', e di CS'' ad HD'' uguali alla medesima ragione di n ad r. Onde prendendo i valori delle CS, CS', CS'' quassù recati, avremo le HD, HD', HD'' rispettivamente uguali alle $\frac{r}{n}(x+f)$, $\frac{r}{n}(-x-f)$, $\frac{r}{n}(f+x)$. Ed i quadrati di queste grandezze, che veggonsi diverse, saranno gli stessi. E ciò valga eziandio per lo binomio $x-f$ convenevolmente.

* *fig.* 7.

§. 71. COR. II. L' ordinata DM, che corrisponde all'ascissa HD, è uguale ad MS + SD, cioè ad $y+g+\frac{mx}{n}$. E l'altra M'D', che è uguale ad M'S' — S'D', sarà pure uguale ad $y+g+\frac{mx}{n}$. Imperocchè essendo la OS' $=-x$, ed OS' : S'D' :: $n:m$, sarà S'D' $=-\frac{mx}{n}$. E dovendosi togliere questa grandezza negativa dalla M'S', cioè dal binomio $y+g$, l' ultimo termine dell' emergente trinomio dovrà esser positivo. E così può anche dimostrarsi, che sia la M''D'' $=$ $y+g+\frac{mx}{n}$. E lo stesso dicasi convenevolmente del trinomio $y-g+\frac{mx}{n}$, e degli altri $y-g-\frac{mx}{n}$, $y+g-\frac{mx}{n}$.

§. 72. COR. III. E perciò tutto quello, che abbiam recato alla fine della presente dimostrazione rispetto alle coordinate $x+f$, $y+g$, potrà adattarsi alle altre $\frac{n}{r}(x+f)$, $y+g+\frac{mx}{n}$. Onde potrem poi dedurre generalmente, che: *ciascuna di queste equazioni, la quale siasi geometricamente costruita, debba appartenersi alla sua intera locale, e non mica ad un arco di questa curva.*

§. 73. SCOL. I. Da' principj analitici, di che mi son valuto nel cammino di questa dimostrazione, potremo congegnare una Tavola, la quale offra, come in un sol quadro, le coordinate, che corrispondano a certe loro espressioni. La qual cosa sarebbe a' giovani di gran vantaggio: poichè essi ne' casi particolari potrebbero sciogliere questo problema colla sola intuizione della detta tavola, e di due figure, cui quella si rapporti: e potrebbero benanche estender questo lavoro al seguente problema, che di questo n' è più malagevole. Onde il sistema del Signor Witt in tal modo potrebbesi esibire assai più semplice, e generale.

TAVOLA

DELLE

DIVERSE POSIZIONI DELLE COORDINATE DI UNA CURVA CONICA PER L'EQUAZIONE

$y^2 + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \epsilon$.

E DE'

QUADRATI DELLE RISPETTIVE ESPRESSIONI LORO.

I.

CS, SM	CS′, S′M′	CS″, S″M″				
CS, Sm	CS′, S′m′	CS″, S″m″	$\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)^2, \left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2$			

II. *fig. 10.

GT, TM	GT′, T′M′	GT″, T″M″	
GT, Tm	GT′, T′m′	GT″, T″m″	$\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)^2, \left(y-\frac{1}{2}\beta\right)^2$

III.

cS, SM	cS′, S′M′	cS″, S″M″	
cS, Sm	cS′, S′m′	cS″, S″m″	$\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)^2, \left(y+\frac{1}{2}\beta\right)^2$

IV. *fig. 11.

gT, TM	gT′, T′M′	gT″, T″M″	
gT, Tm	gT′, T′m′	gT″, T″m″	$\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)^2, \left(y-\frac{1}{2}\beta\right)^2$.

§. 74. SCOL. II. I due prestantissimi geometri il Signor Giovanni Witt, e 'l Marchese de l' Hopital, che conoscevan bene il metodo geometrico, e l' analitico, e come l' uno doveasi convertir nell' altro, scrissero su i luoghi solidi nelle didascaliche forme, e più ampiamente, che altri non fece su tal soggetto. Ma questi due valentuomini, che che ne fosse cagione, si attennero a considerare le sole coordinate positive di ciascuna locale, cioè le $+x$, $+y$. Onde asseriron sovente (1),

(1) Leggasi ciò, che ho scritto di un tal difetto nel primo Capo, cioè nella nota al §. 11.

che un certo arco della detta curva dovea essere il luogo dell' equazione, ch' ella ne costruiva. E con tali assertive rovesciaron la teorica della combinazione delle curve, la quale dee reggere sulla certezza, che *l' intero perimetro di ciascuna di esse locali debba essere il luogo di quell' equazione a due indeterminate, che geometricamente ne costruisce.* Intanto il Marchese de l'Hopital, poichè ebbe costruita nell' esempio I. del suo lemma I., l'equazione

$$y^2 - 2ay = 2bx - c^2 \; . \; . \; . \; . \; A$$

ch'è alla parabola, ed è di una facilissima costruzione, proccurò di render generali siffatte asserzioni, adoperando nel §. 314. un ragionamento analogo a quello, che or distendo. » Oltre a » quell'arco della parabola, che ho dimostrato quì sopra esse- » re il luogo delle coordinate positive $+x$, $+y$, ve ne sono » due altri, l'uno, ch' è luogo delle $+x$, $-y$, e l' altro del- » le $-x$, $+y$, essendo $(y-a)^2 = (a-y)^2$. E ciò dee » valere per gli altri esempj della parabola, e per tutti quel- » li, che nelle rimanenti curve coniche possiam proporre ». Ma io non so intendere, come con queste considerazioni sì ristrette e particolari, si possa ordire un' apodittica dimostrazione a quelle verità generiche, ed importanti, che ho prodotte quì sopra nel teorema II, e nel coroll. III., o come i giovinetti dall' equazione A potranno ascendere alle generali U, W. Ed egli poi ragionando più giù de' luoghi al cerchio, all'ellisse, ed alle iperboli, perchè ripiegò in certe località parziali, se le ragioni di già addotte potevanlo in que' generici concetti stabilire?

ESEMPIO I.

§. 75. Dato l'angolo regolatore XPY*, che suppongasi retto, si vuol costruire l'equazione $y^2 - 2ay = 4ax - 2x^2 + a^2$, la cui ridotta $(y - a)^2 = 4a^2 - 2(x - a)^2$ ci manifesta * dover quella appartenere ad un' ellisse. * fig. 12. * §. 58.

SOLUZ. Dal vertice P del dato angolo regolatore, e nel suo lato PX, si tolga la parte PF $= a$, e poi su questa retta, e dentro all' apertura del detto angolo (1), si formi il quadrato PUgf. *Il centro dell' ellisse, che si richiede, dovrà essere il punto* g; cioè il vertice dell' angolo di quella figura parallelogramma, il qual' è opposto all' angolo regolatore XPY. Inoltre i lati gf, gU del quadrato PUgf si producano in B, A, sinchè sia la gB dupla del lato di un tal quadrato, e la gA quanto la diagonale. Ed in fin si descriva l' ellisse ABmM co' semiassi conjugati gB, gA. *Questa curva sarà l' addimandata locale.*

---

(1) Il centro di quest' ellisse, il qual si rapporti alle date direttrici PX, PY, dee avere per sue coordinate le parti costanti de' binomj $x-a$, $y-a$, ed affette di contrario segno, come l' ho dimostrato nel §. 43., e dovrò anche impiegarlo nelle seguenti costruzioni. Onde, compito il parallelogrammo PUgf da quelle coordinate PU, Pf, il detto centro dovrà essere in g, ch'è l'angolo di una tal figura parallelogramma opposto diametralmente all' angolo regolatore XPY. E ciò intendasi ancora per le costruzioni de' seguenti esempj.

DIM. Imperocchè essendo $PN = x$, e $Pf = a$, sarà $gT = PN - Pf = x - a$. Ed in simil modo essendo $MN = y$, e $TN = a$, dovrà essere $MT = MN - TN = y - a$. E si vedrà dall' addotta costruzione essere $gB^2 = 4a^2$, $gA^2 = 2a^2$, e quindi $\left(\frac{gB}{gA}\right)^2 = 2$. Ma per la natura dell' ellisse, o per quel che ho dimostrato nel §. 25., quì dee reggere l' equazione $MT^2 = gB^2 - \left(\frac{gB}{gA}\right)^2 \times gT^2$. Dunque ne' simboli di queste rette avremo $(y - a)^2 = 4a^2 - 2(x - a)^2$, cioè $y^2 - 2ay = 4ax - 2x^2 + a^2$. E potendosi dimostrare colla guida del precedente teorema, che questa medesima equazione debba aver luogo in qualunque altro punto della descritta ellisse; *una tal curva sarà la locale della data equazione*.

§. 76. COR. Le coordinate $x - a$, $y - a$ della richiesta ellisse veggonsi appartenere al n°. IV. della tavola quassù proposta nel §. 73. Onde il centro di una tal curva dovrà ritrovarsi nel punto g della figura 11, prendendo $Pf = a$, e $PU = a$. E vi si dovrebbon solamente rinvenire que' semiassi conjugati, come si è fatto quì sopra verso la fine della costruzione.

ESEMPIO II.

§. 77. Poste le cose stese del preced. esempio, vuol costruirsi l'equazione $y^2 - 2ay = b^2 - 4ax - x^2$, la cui ridotta $(y - a)^2 = b^2 + 5a^2 - (x + 2a)^2$
* §. 58. dimostra* doversi quella appartenere ad un cerchio.

*fig. 13. SOLUZ. Il lato PX dell' angolo regolatore XPY si prolun-

ghi sul vertice di questo, sicchè diventi PF $= 2a$; e sull'altro lato PY, e dallo stesso punto P, si tolga (1) la parte PU $= a$; e poi si compia dalle PF, PU il parallelogrammo PUGF. Finalmente, centro G, intervallo GM uguale a $\sqrt{(b^2 + 5a^2)}$ si descriva il cerchio. *Questa figura sarà la ricercata locale* (2).

Dim. Quì la dimostrazione può distendersi, come quella dell' Esemp. 1. E dall' equazione ridotta possiam comprendere, che le sue coordinate appartengansi al n. 11. tav. §. 73: e quindi nella fig. 10 dovrà essere in G il centro di tal cerchio, avendosi dovuto prender la PF $= 2a$, la PU $= a$, e 'l raggio uguale a $\sqrt{(b^2 + 5a^2)}$.

Esempio III.

§. 78. Dato l'angolo regolatore XPY*, qualunque sia la sua grandezza (3); si cerca di costruire l'equazione $y^2 - 2ay = 2x^2 + 2ax - b^2$, di cui la ridotta *fig. 14.

(1) Si vegga la nota prec.

(2) Ciascun geometra conosce intuitivamente, che la locale dell' equazione $y^2 = ax - x^2$ *sia un cerchio, quando l' è retto l' angolo delle coordinate: e che essendo queste obbliquamente inclinate fra loro, quella curva debba essere un' ellisse*. E pure l' insigne Marchese de l' Hopital, nel rilevar sì l'una verità, che l' altra, v'impiega un calcolo ben lungo, ed intrigato, *pag.* 231. *Trait. Analyt. des Sect. Coniq.* Tanto è vero, che il suo metodo riesca ne' casi facili oltremodo difficile: come l'ho detto sin da principio nel §. 14.

(3) Per la generalità del metodo proposto ho assunto l' angolo regolatore di una qualunque grandezza.

44

$$\left(y-a\right)^2=\frac{1}{2}a^2-b^2+2\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2$$

fa conoscere, ch'ella appartenga ad un' iperbole rife-
§. 26. 27. rita ad un diametro primario, o secondario, secondochè sia negativo, o positivo il binomio $\frac{1}{2}a^2-b^2$ ch' io per brevità esprimo $\pm$ con e^2.

Soluz. Cas. I. Il lato PX del dato angolo regolatore si prolunghi oltre il vertice di esso, e sin che divenga la $PF=\frac{1}{2}a$; e presa nell' altro lato PY, e dallo stesso punto, P la $PU=a$, si compia dalle due rette PF, PU il parallelogrammo PUGF. *Il punto* G *sarà il centro della richiesta iperbole* (1). Inoltre i due lati GF, GU di quel parallelogrammo si prolunghino in B, A, sicchè sia $GB=e$, e $GA=e\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2e^2}$ (2), e poi col semidiametro primario GA, e col suo secondario GB si descrivano le iperboli opposte MA m, M'A'm'. *Queste due curve saranno l' addimandata locale.*

Dim. Imperocchè essendo $PN=x$, e $PF=\frac{1}{2}a$, sarà $GT=PN+PF=x+\frac{1}{2}a$. Similmente, per essere MN $=y$, ed $NT=PU=a$, dovrà esser $MT=MN-NT$ $=y-a$. E si conoscerà di per se stesso, che sia GB^2:

(1) Not. n. I. §. 75.

(2) La GA è la metà della diagonale del quadrato di e.

$GA^2 :: e^2 : \frac{1}{2}e^2 :: 2 : 1$. Ma per la natura di quest' iperbole, o per lo §.27. dee essere $MT^2 = \left(\frac{GA}{GB}\right)^2 GT^2 - GB^2$. Dunque ne' simboli di tali grandezze avremo $(y - a)^2 = 2(x + \frac{1}{2}a)^2 - e^2$, cioè $y^2 - 2ay = 2x^2 + 2ax - b^2$. Or questa medesima equazione può ottenersi in ogni altro punto delle descritte iperboli, purchè il rapportiamo alle medesime direttrici PX, PY colla luce del teorema II. Dunque *le dette curve saranno la locale addimandata*.

CAS. II. Quando sia positivo il binomio $\frac{1}{2}a^2 - b^2$ espresso per e^2, si compia, come quì sopra, il parallelogrammo PUGF. *Il punto* G *sarà il centro della richiesta curva*. Inoltre si prenda nella retta GT la parte $GA = e$, e la $GB = \frac{1}{2}\sqrt{2e^2}$. E poi si descrivano le due iperboli opposte MAm, $M'A'm'$, che abbiano per semidiametro primario la GA, e per secondario la GB. *Queste due curve saranno la richiesta locale*. *fig. 15.

DIM. Essendo $PN = x$, e $PF = \frac{1}{2}a$, sarà $GT = PN + PF = x + \frac{1}{2}a$. E si vedrà essere, come prima, la $MT = y - a$, e $\left(\frac{GA}{GB}\right)^2 = 2$. Ma per la natura di tal curva, e come l'ho dimostrato nel §. 27, dee essere $MT^2 = \left(\frac{GA}{GB}\right)^2 GT^2 + GA^2$. Dunque sarà ne' simboli di queste rette $(y - a)^2 = 2(x + \frac{1}{2}a)^2 + e^2$, cioè $y^2 - 2ay + a^2 = 2x^2 + 2ax +$

$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 - b^2$, ovvero $y^2 - 2ay = 2x^2 + 2ax - b^2$.
E la conchiusione si farà come nel caso I.

§. 79. COR. Le coordinate $x + \frac{1}{2}a$, ed $y - a$ della richiesta iperbole veggonsi appartenere al num. III. della tavola §. 73. E perciò il punto G della fig. 10 sarà il centro di tal curva: continuando il resto, come quì sopra si è operato, dopo aver compito il parallelogrammo PUGF col lato $FP = \frac{1}{2}a$, e coll' altro $PU = a$.

ESEMPIO IV.

fig. 16. §. 80. Dato l'angolo regolatore XPY, si dee costruire l' equazione $y^2 - 2ay = b^2 \pm ax$, la cui ridotta $(y - a)^2 = a\left(\frac{a^2 + b^2}{a} \pm x\right)$ dimostra dover-
* §. 58. si quella appartenere alla parabola*.

SOLUZ. CAS. I. Per brevità di calcolo si faccia $\frac{a^2 + b^2}{a} = c$; e poi si distenda in F il lato PX dell' angolo regolatore, talchè ne provenga $PF = c$; e nell' altro lato PY si tronchi dal punto P la parte $PU = a$, ed infin si compia il parallelogrammo PUGF dalle due rette PF, PU. Ed oltre a ciò si descriva la parabola MGm col vertice G, e col diametro GT parallelo alla PX, il quale abbia la retta a per parametro, e le cui ordinate sieno parallele all' altro lato PY dell' angolo regolatore. *Questa curva sarà la richiesta locale*.

DIM. Imperocchè essendo PN $= x$, e PF $= c$, sarà GT $=$ FP $+$ PN $= c + x$, e sarà MT $=$ MN $-$ NT $= y - a$. E dovendo esser, per la natura di questa curva, o per lo §. 23. $MT^2 = a \times GT$, sarà $(y - a)^2 = a(c + x) = a^2 + b^2 + ax$, cioè $y^2 - 2ay = b^2 + ax$. Anzi essendo PN$' = -x$, e PF $= c$, sarà GT$' =$ PF $-$ PN$' = c + x$; e vi si trarrebbe per questo caso la medesima equazione dianzi rilevata: e per tutti ne verrà la dimostrazione del teorema II. Onde *la detta parabola sarà la ricercata locale*.

CAS. II. Ne'lati PX, PY del dato angolo regolatore XPY, e dal vertice P di esso, tolgansi le parti PF, PU rispettivamente uguali alle c, a, e da queste poi si formi il parallelogrammo PUGF (1). Inoltre si descriva la parabola M$'$Gm', che abbia per vertice il punto G, e la retta GT$'$ per diametro, il quale abbia la retta a per parametro; e le sue ordinate sieno parallele alla PY. *Una tal curva sarà l'addimandata locale.* * *fig.* 17.

DIM. Essendo PN $= x$, e PF $= c$, sarà GT $=$ PF $-$ PN $= c - x$. E sarà pure, come ben si vede, MT $=$ MN $-$ MT $= y - a$. Sicchè dovendo essere, per la natura della parabola, o per lo §. 23., $MT^2 = a \times GT$, sarà ne' simboli di queste rette $(y - a)^2 = a(c - x) = a^2 + b^2 - ax$, cioè $y^2 - 2ay = b^2 - ax$.

Ed essendo eziandio PN$' = -x$, e PF $= c$, sarà GT$' =$ PM$' +$ PF $= c - x$. Ma dee essere $M'T'^2 = a \times GT'$; dunque sarà, come quì sopra, $(y - a)^2 = a(c - x) = a^2 + b^2 - ax$, cioè $y^2 - 2ay = b^2 - ax$. Anzi questa medesima equazione per qualunque punto della parabola dovrem raccor-

(1) Si legga quel che ho scritto nel §. 67.

re, se il rapporteremo alle stesse direttrici OF, PY colla luce del teor. II.

§. 81. Cor. Le coordinate della curva nel caso I. sono rispettivamente $y-a$, $c+x$. Dunque per la tavola del §. 73 potremo conoscere, che il vertice della parabola sia il punto G nella fig. 10. Ma nel caso II. non dovremo regolarci nè con quella tavola, nè con questa figura, essendo la x negativa. E vi conosceremo di per se stesso, che ponendo $c-x=o$, debba essere la $x=c$.

CAPITOLO IV.

CONTINUAZIONE DELLO STESSO ARGOMENTO.

PROPOSIZIONE V.

PROBLEMA.

§. 82. Dato l'angolo regolatore XPY*, i cui lati PX, PY sieno le direttrici delle due indeterminate x, y; si vuol costruire un'equazione quadratica, che contenga queste indeterminate nella più generica forma, qual' io espressi nel §. 51. *fig. 2.

$$y^2 + \beta y + \frac{2ymx}{2} = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \; . \; . \; . \; . \; . \; W$$

Quì per brevità di calcolo suppongansi $p = \gamma + \frac{m^2}{n^2}$, $q = \delta + \frac{m\beta}{n}$, $t = \frac{1}{4}\beta^2 + \varepsilon$, come fu praticato sin da principio nel §. 3, e poi l' equazione W si riduca in costruibil forma pel problema 1. Ella dovrà trasformarsi in quest' altra

$$\left(y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{pn^2}{r^2}\left(\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2np}\right)^2 + t - \frac{q^2}{4p} \ldots W'$$

ove le grandezze $y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta$, ed $\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2n}$ rinchiuse ne' vincoli, che vi osserviamo, dovranno esprimere le coordinate della richiesta locale. E quindi (1) sarà dato quel punto, che riferito alle direttrici PX, PY ha per ascissa il monomio $-\frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p}$, e per ordinata il binomio $-\left(\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\cdot\frac{mq}{np}\right)$. *E questo punto sarà il centro della richiesta curva conica, o ne sarà il vertice, s' ella sia una parabola.* Inoltre distendasi una retta per questo punto, e per quell' altro, che abbia zero per ascissa, e per ordinata $-\frac{1}{4}\beta$. *Ed in tal retta dovrà cadere il diametro della detta curva.*

Finalmente dal conoscere il valore del binomio $t-\frac{q^2}{4p}$ e del monomio $\frac{pn^2}{r^2}$ potremo rilevare, pe' criterj quassù stabiliti nel §. 58., la natura di quella curva conica, e le determinazioni a descriverla. *E sarà questa la locale addimandata.* Le quali cose potran vedersi chiaramente dalla seguente composizione geometrica; o dagli esempj, onde io le illustro.

---

(1) Cioè dal vertice P dell' angolo regolatore XPY, e nel suo lato PX si tolga una retta uguale al monomio $\frac{q}{2p}$, se questa grandezza sia negativa: ed essendo positivo un tal monomio, dovrà prendersi quella retta nel prolungamento PX' del detto lato. Ed in simil guisa, nell' altro lato PY del dato angolo regolatore, e dal medesimo punto P, si tronchi una retta uguale al monomio $\frac{1}{2}\beta$, se questo osservisi negativo: ed essendo positivo un tal monomio, dovrà prendersi quella retta nel prolungamento PY' del detto lato.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

§. 83. COSTRUZ. Supponendo la $m = o$, e quindi la $r = n$, e la $\frac{r}{n} = 1$, l' espressioni delle coordinate della richiesta locale dovranno essere $y + \frac{1}{2}\beta$, ed $x + \frac{q}{2p}$. E perciò nell' esibir geometricamente tali rette si usi l'artifizio proposto nella composizione del precedente problema *. * §. 64.

Cioè supponendo essere PF, PO* coteste coordinate (cui per chiarezza di dire solamente mi attengo) si compia da esse il parallelogrammo POCF. E poi per l' angolo POC di questa figura, il qual'è adjacente alla direttrice YY', si meni la retta HOD parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, se il monomio $\frac{mx}{n}$ osservisi positivo. Ed essendo questo negativo, quella dovrà condursi parallela alla sottesa del supplemento dell'angolo regolatore. Ed una tal retta incontri in H, o in H' il lato CF dell' anzidetto parallelogrammo, cioè quello, ch'è parallelo alla medesima direttrice YY'. *Dovrà essere il punto* H *il principio delle coordinate* HD, DM *espresse per* $\frac{rn}{n} + \frac{rq}{2np}$, ed $y + \frac{1}{2}\beta + \frac{mx}{n}$. *E l' altro* H' *sarà il principio delle coordinate* H'D', D'M *dinotate per le* $\frac{rn}{n} + \frac{rq}{2nq}$, ed $y + \frac{1}{2}\beta - \frac{mx}{n}$. Finalmente dal valore del binomio $t - \frac{q^2}{4p}$, colla luce de' criterj esibiti nella proposizione II. * potrà conoscersi qual sia cotesta curva conica, * §. 58.

* fig. 1.

e quali le sue determinazioni a poterla descrivere convenevolmente.

§. 84. DIM. Essendo $PN = x$, e $PF = \frac{q}{2p}$, sarà $CS = PN + PF = x + \frac{q}{2p}$. Ma i due triangoli SOD, COH sono simili tra loro, ed all'altro kPl. Dunque dovrà essere
* 12. V. $Pk : kl :: OS : OD :: OC ; OH$, e Pk * $: kl :: CS : HD$; cioè ne' loro simboli $n : r :: x + \frac{q}{2p} : HD$, che sarà uguale ad $\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2np}$. Che anzi, per la similitudine de' triangoli Pkl, SOD, essendo $Pk : Pl : OS : SD$, cioè $n : m :: x : SD$, sarà $SD = \frac{mx}{n}$, ed $MD = MN + NS + SD = y + \frac{1}{2}\beta + \frac{mx}{n}$
E si vedrà dalla costruzione, che il rapporto delle coordinate HD, DM sia quanto quello, che dimostra l'equazion ridotta.

§. 85. COR. I. Prima di recar gli esempj illustratori di questo problema generale, è ben chiarire gli artifizj, che dovrò praticare a tal uopo; i quali non sono che quelli stessi, che abbozzai nel corollario I. del lemma II. problematico. Cioè a dire, supponendo la $m = o$, e quindi la $\frac{r}{n} = 1$, l'espressioni delle coordinate della richiesta curva dovranno essere $y + \frac{1}{2}\beta$, $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$; e quelle del centro di essa, o del vertice, se sia una parabola, saranno $-\frac{1}{2}\beta$, e $-\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$ ch' io per brevità di segno geometricamente per le rette CO, CF. E perciò compito il parallelogrammo POCF dalle due CO, CF, dovrà condursi per l'angolo O di tal parallelogrammo, ch'è adjacente alla direttrice PY, la retta HOD parallela alla sottesa dell'angolo regolatore XPY, o l'altra H'OD' parallela alla sottesa del supplemento del detto angolo, secondochè la $\frac{mx}{n}$ sia positiva, o negativa. E l'una retta, o l'altra sarà il diametro della locale.

§. 86. Cor. II. E volendo anche addurre l'esposto del coroll. III. del detto lemma, la prima delle divisate parallele, qual'è la HD*, incontri i lati FC, fc de' parallelogrammi POCF, POcf ne' punti H, Q; e l'altra parallela H'D' incontri quegli stessi lati ne' punti H', Q'. Saranno le

*fig. 18.

Coordinate della locale	Espresse rispettivamente per le grandezze
I. HD, DM	$\frac{r}{n}\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta$
II. H'D', D'M	$\frac{r}{n}\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y-\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta$
III. QD, DM	$\frac{r}{n}\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y+\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta$
IV. Q'D', D'M	$\frac{r}{n}\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y-\frac{mx}{n}+\frac{1}{2}\beta$

§. 87. Cor. III. E conducendo per l'altro punto V la retta KVE parallela alla sottesa dell'angolo regolatore XPY, e l'altra K'VE' parallela alla sottesa del supplemento di esso, si rileverà come nel precedente corollario esser le

COORDINATE DELLA LOCALE	ESPRESSE RISPETTIVAMENTE PER LE GRANDEZZE
V. KE, EM	$\frac{r}{n}\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y+\frac{mx}{n}-\frac{1}{2}\beta$
VI. K′E′, E′M	$\frac{r}{n}\left(x+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y-\frac{mx}{n}-\frac{1}{2}\beta$
VII. ΨE, EM	$\frac{r}{n}\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y+\frac{mx}{n}-\frac{1}{2}\beta$
VIII. Ψ′E′, E′M	$\frac{r}{n}\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\right)$, $y-\frac{mx}{n}-\frac{1}{2}\beta$

ESEMPIO V.

§. 88. Dato l' angolo regolatore XPY, il qual suppongasi retto, si vuol costruire l'equazione

$$y^2+\frac{8}{3}xy+2ay=-\frac{16}{9}x^2+2ax+4a^2 \text{ . . . . . . A},$$

che dal §.58. vedesi appartenere ad una parabola.

SOLUZ. Quest' equazione può recarsi nella seguente forma $y^2+\frac{8}{3}xy+\frac{16}{9}x^2+2ay=2ax+4a^2$, ove compiendo il quadrato del primo membro, ed aggiungendone tal compimento al secondo, come fu praticato nel teorema 1. si avrà

$$\left(y+\frac{4}{3}x+a\right)^2=5a^2+\frac{14}{3}ax=\left(x+\frac{15}{14}a\right)\frac{14}{3}a \text{ . . . . . B}$$

E confrontando il secondo termine dell'equazione W col secondo dell'equazione A, cioè $\frac{2m}{n}xy$ con $\frac{8}{3}xy$, si avrà $m=4$, $n=3$,

$r = \sqrt{(m^2 + n^2)} = \sqrt{(16 + 9)} = 5$, e quindi $\frac{r}{n} = \frac{5}{3}$. Onde il primo fattore del secondo membro dell'equazione B dovrà moltiplicarsi* per $\frac{15}{14}a$, per poter così dinotar l'ascissa conveniente all' ordinata $y + \frac{4}{3}x + a$. E l'altro fattore dovrà insiem dividersi per $\frac{5}{3}$, a fine di mantener lo stesso valore del secondo membro dell' equazione B. E perciò l'equazione A ridotta in costruibil forma sarà * §. 50.

$$\left(y + \frac{4}{3}x + a\right)^2 = \frac{5}{3}\left(x + \frac{15}{14}a\right)\frac{14}{5}a \; . \; . \; . \; . \; . \; C$$

La qual cosa avrebbesi potuto benanche conseguire cogli artifizj proposti nel §. 82.

Costruz. Ciò posto, supponganssi essere $y + a$, ed $x + \frac{15}{14}a$ le coordinate della richiesta locale, quasichè fosse sparito il termine $\frac{4}{3}x$ dall' ordinata $y + \frac{4}{3}x + a$; e si fosse ridotto all'unità il coefficiente $\frac{5}{3}$ della corrispondente ascissa $\frac{5}{3}(x + \frac{15}{14}a)$ *fig. 19. Lo che vuol farsi per rimetter questo problema al precedente*. *. §. 83. E poi si ritrovi il punto C, che riferito alle direttrici PX, PY abbiavi per coordinate le PF, PO espresse per $-\frac{15}{14}a$, e per $-a$ rispettivamente. E compito da esse rette il parallelogrammo POCF, si tiri per lo punto O la retta HOD parallela alla sottesa dell'angolo regolatore XPY, per essere positivo il monomio $\frac{8}{3}xy$, nella data equazione. Ed una tal parallela incontri la CF in H. Dico, *che l' addimandata locale debba esser quella parabola, che tocchi la* CF *in* H, *ed abbia per diametro la retta* HOD, *il cui parametro sia* $\frac{14}{5}a$.

DIM. Essendo per costruzione $Pk : kl :: OS : OD :: OC :$
* 12. V. OH, sarà $Pk : kl :: CS : HD$.* ; e quindi ne' simboli di queste rette dovrà esser benanche $3 : 5 :: x + \frac{15}{14}a : HD$; onde sarà $HD = \frac{5}{3}\left(x + \frac{15}{14}a\right)$. Inoltre per la similitudine de' triangoli OCH, OSD, sarà pure OC a CH, cioè 3 a 4, come OS ad SD. Dunque sarà $SD = \frac{4}{3}x$, e quindi $MD = MN + NS + SD = y + a + \frac{4}{3}x$. Ma per la natura della parabola, che si è quì descritta, o per lo §. 23. dee esser $MD^2 = HD \times \frac{14}{5}a$. Dunque ne' simboli di queste grandezze avremo $\left(y + a + \frac{4}{3}x\right)^2 = \frac{5}{3}\left(x + \frac{15}{14}a\right)\frac{14}{5}a$. Cioè fatte le riduzioni risulterà la proposta equazione

$$y^2 + \frac{8}{3}xy + 2ay = -\frac{16}{14}x^2 + 2ax + 4a^2.$$

E questa medesima equazione dovrà emergere per qualunque altro punto dell' anzidetta parabola, ancorchè ei stia infinitamente rimoto dal vertice H, come può vedersi colla luce della prop. IV. Dunque *questa curva sarà la locale, che si domanda*.

§. 89. COR. I. Se l' ultimo termine della data equazione sia $-a^2$; ella potrà proporsi nella seguente forma $y^2+\frac{8}{3}xy$ $+\frac{16}{9}x^2+2ay+a^2=2ax$. E si dovrà aggiugnere $\frac{8}{3}ax$ al primo, ed al secondo membro di quest'ultima equazione, affinchè quello risulti un quadrato perfetto, qual' è $\left(y+\frac{4}{3}x+a\right)^2$; e questo diventi uguale a $\frac{14}{3}ax$, cioè ad $x\times\frac{14}{3}a$, ovvero* a $\frac{5}{3}x\times\frac{14}{5}a$. Vale a dire sarà $\left(y+\frac{4}{3}x+a\right)^2=\frac{5}{3}x\times\frac{14}{3}a$. * §. 58.

Onde per costruire quest'ultima equazione: *dovrà condursi dal punto* O* *la retta* OD *parallela alla sottesa dell' angolo regolatore* XPY. *E 'l vertice della parabola richiesta sarà il punto* O; *il diametro di essa sarà la* OD, *il cui parametro è* $\frac{14}{5}a$; *e le sue ordinate dovranno essere parallele alla direttrice* PY. * *fig.* 19.

§. 90. Cor. II. E se la data equazione fosse $y^2+\frac{8}{3}xy=-\frac{16}{9}x^2+bx+c^2$, che può avere la seguente forma $y^2+\frac{8}{3}xy$ $+\frac{16}{9}x^2=bx+c^2$, cioè $\left(y+\frac{4}{3}x\right)^2=\left(x+\frac{c^2}{b}\right)b$, sarà, nel ridurla in construibil forma,

$$\left(y+\frac{4}{3}x\right)^2=\frac{5}{3}\left(x+\frac{c^2}{b}\right)\frac{3}{5}b.$$

E perciò in quest' altro caso dovrà prodursi la XP in F, sinchè diventi la PF $= \frac{c^2}{b}$. E distesa per lo punto P la retta IPE parallela alla sottesa dell' angolo regolatore, e finchè incontri in I la retta FI condotta per lo punto F parallela alla direttrice PY; *il punto* I *sarà il vertice della parabola richiesta, che dovrà avere la* KE *per diametro, il parametro del quale sarà* $\frac{3}{5}b$, *e le ordinate dovranno essere parallele alla* PY. E questi due esempj sono analoghi a quelli, che recò il signor Witt alla fine del luogo alla parabola (1).

§. 91. COR. III. Le coordinate della curva richiesta nel §. 88. veggonsi appartenere al n. I. della Tav. in fine del §. 86.; ond' elleno saranno le HD, DM.

---

(1) Fu certamente una mirabil cosa, che il signor Witt avesse disciolti cotesti esempj colla sola sagacità del suo intendimento, e senza farsi guidar da regole, ch' ei per ragion di scienza, e per utilità de' giovani dovea premettere al suo lavoro. Egli è vero, che quivi il valentuomo, nell' ultimo Capitolo propose una regola generale per tali determinazioni. Ma questa regola non è, che un notamento de' moltissimi risultamenti de' diversi casi, cui corrispondono altrettante figure reticolari. Ed i giovanetti, poichè gli avran conosciuti, non dovran riputarsi più saggi, o più istruiti. Il signor Ozanam cinque anni dopo del Witt volle questo sistema proporre con più chiarezza. Ma pur ei si spinse per anguste vie, ed a tentone.

ESEMPIO VI.

§. 92. Dato angolo regolatore XPY *, che sup- * *fig.* 20.
pongasi retto, si vuol costruire l'equazione

$$y^2 + 2xy - 4ay = 4x^2 + 2ax + a^2.$$

la quale per la prop. II. vedesi appartenere ad un' ellisse.

SOLUZ. Paragonando il secondo termine di quest' equazione col secondo dell' equazione generale W, cioè $2xy$ con $\frac{2mxy}{n}$, si vedrà che quì debba essere $1 = \frac{m}{n}$, vale a dire $m = 1$, $n = 1$, $r = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{2}$, ed $\frac{r}{n} = \sqrt{2}$. E perciò, ridotta in costruibil forma l'equazione proposta, sarà per lo §.50

$$\left(y + x - 2a\right)^2 = \frac{16}{3}a^2 - 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2$$
$$= \frac{16}{3}a^2 - \frac{3}{2}\left(\left(x + \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2$$

Dunque le coordinate della richiesta ellisse dovranno essere $y + x - 2a$, $\left(x + \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}$. E questa curva dovrà avere per semidiametro principale $\frac{4}{3}\sqrt{2a^2}$, e per secondario $\frac{4}{3}\sqrt{3a^2}$, che dovranno essere convenevolmente tra loro inclinati. Cioè:

COSTRUZ. Si cancelli il termiue x nell' anzidetta ordinata di una tal' ellisse, ed anche il coefficiente $\sqrt{2}$, ch' è nell' ascissa *. E poi per lo lemma I. si ritrovi il principio di que- * § 63.

ste nuove coordinate $y - 2a$, $x + \frac{1}{3}a$. Cioè, per effettivamente esibire il principio di esse, si prolunghi sul vertice il lato PX del dato angolo regolatore, sinchè sia $PF = \frac{1}{3}a$; e poi si tolga nell' altro lato PY, e dal punto P la retta $PU = 2a$, compiendo il parallelogrammo PUGF dalle due PF, PU. Inoltre per l' angolo GUP di questa figura parallelogramma, il quale è adjacente alla PU, si tiri la retta KUE parallela alla sottesa del dato angolo regolatore, e ciò per essere $2xy$ positivo. E dal punto K, ove tal parallela incontra il lato FG del detto parallelogrammo, ch' è equidistante alla PY, si prenda (1), $KA = \frac{4}{3}\sqrt{2a^2}$, e $KB = \frac{3}{4}\sqrt{3a^2}$. Ed in fin descrivasi l' ellisse BAM co' semidiametri conjugati KA, KB. *Questa curva sarà la locale addimandata.*

DIM. Imperocchè essendo per costr. $PF = \frac{1}{3}a$, e $PN = x$,

---

(1) Volendo dare maggior eleganza a questa geometrica costruzione avrei potuto dire. » Si divida per metà l'angolo PUT, per la » retta UE, e dal punto K, ove tal retta incontra la PG, si tol- » ga sulla KF la parte KB uguale a quattro terzi del lato del trian- » golo equilatero iscrittibile nel cerchio del raggio a. E da quel pun- » to sull' altra retta KE si tolga la KA uguale a quattro terzi del la- » to del quadrato iscrittibile nello stesso cerchio. E poi co' semidia- » metri conjugati KA, KB si descriva l' ellisse BAM. Questa cur- » va sarà la richiesta locale. « Ma l' eleganza di una tal costruzione avrebbene inviluppata l' applicazione del Metodo, che principalmente ho voluto quì illustrare. E perciò l' ho tralasciata.

sarà $GT = PF + PN = \frac{1}{3}a + x$. Ma per la similitudine de' triangoli KGU, UTE sta $GU : UK :: UT : UE :: GT : KE$*,* 12. El. V.
cioè $1 : \sqrt{2} :: x + \frac{1}{3}a : KE$. Dunque sarà $KE = \left(x + \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}$.
E poi si vede da per se stesso essere $TE = TU = x$. Dunque sarà $ME = MT + TE = (y - 2a) + x$. E dovendo essere, per la natura di questa curva, e come l'ho detto nel §. 52,
$ME^2 = KB^2 - \left(\frac{KB}{KA}\right)^2 KE^2$, sarà ne' simboli di questa rette

$$\left(y - 2a + x\right)^2 = \frac{16}{3}a^2 - \frac{3}{2}\left(\left(x + \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2$$

cioè

$$y^2 + 2xy + 4a^2 - 4ay + x^2 - 4ax = \frac{16}{3}a^2 - 3x^2 - \frac{1}{3}a^2 - 2ax.$$

E fatte le riduzioni avremo

$$y^2 + 2xy - 4ay = -4x^2 + a^2 + 2ax.$$

E lo stesso potendosi dimostrare per ciascun altro punto dell' ellisse BAM *: *questa curva sarà la richiesta locale*. * §. 72.

§. 93. Cor. Le coordinate $y + x - 2a$, ed $x + \frac{1}{3}a$ appartengonsi al n. v. del §. 87, ond'esse dovranno essere le KE, EM.

Esempio VII.

§. 94. Dato l'angolo regolatore XPY *, che suppongasi retto, si cerca di costruire l'equazione * *fig.* 21.

$$y^2 + 2xy - 4ay = 2x^2 + 2ax - b^2$$

la quale vedesi appartenere ad un'iperbole, colla luce della prop. II., o per la sua ridotta

$$\left(y + x - 2a\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2 + \frac{11}{3}a^2 - b^2,$$

che recai nel §. 57.

Quì, per brevità di calcolo, può supporsi

$\frac{11}{3}a^2 - b^2 = \mp e^2$.

SOLUZ. CAS. I. Le proposte coordinate $y + x - 2a$, $\left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}$ potran considerarsi già ridotte nelle due altre $y - 2a$, $x - \frac{1}{3}a$, come se dalla prima si fosse tolto il secondo termine x, e 'l coefficiente dell' altra si fosse ridotto all' unità: e poi per lo lemma I. si trovi il principio di queste due ultime coordinate $y - 2a$, $x - \frac{1}{3}a$. Cioè, per distendere quì un tal artifizio: sul lato PX dell' angolo regolatore XPY, e dal vertice P, si tolga la parte $Pf = \frac{1}{3}a$, e dallo stesso punto P, nell' altro lato PY, si tronchi la parte $PU = 2a$, compiendo il parallelogrammo PUgf dalle rette Pf, PU. Di poi per l' angolo PUg di tal parallelogrammo, cioè per quello ch' è adjacente alla PY, si distenda la retta A'UE parallela alla sottesa del dato angolo regolatore, incontrando in K il lato gf del detto parallelogrammo. Finalmente si prenda dal punto K sulla Kf la retta $KB = e$, e sull' altra retta KE la parte $KA = e\sqrt{\frac{2}{3}}$. *Dico l' addimandata locale essere le due iperboli opposte* MAm, M'A'm', *che abbiano per semidiametro primario la retta* KA, *e per secondario la* KB.

DIM. Imperocchè essendo $PN = x$, e $Pf = \frac{1}{3}a$, sarà

$gT = PN - Pf = x - \frac{1}{3}a$. Ed essendo $Ug : UK :: gT :$ KE*, cioè $1 : \sqrt{2} :: x - \frac{1}{3}a : KE$, sarà $KE = \left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}$*. *2. El. VI.

Inoltre per essere la $MN = y$, e la sua parte $TN = 2a$, sarà la rimanente parte $MT = y - 2a$; e quindi $ME = MT + TE$, sarà uguale ad $y + x - 2a$. Ma per la natura di tal curva* dee essere $ME^2 = \left(\frac{KB}{KA}\right)^2 KE^2 - KB^2$. Dunque sarà, ne' simboli di queste rette * §. 26.

$$\left(y + x - 2a\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2 - e^2$$

cioè

$$y^2 + 2xy - 4ay + x^2 + 4a^2 - 4ax = 3x^2 + \frac{1}{3}a^2 - 2ax - e^2$$

e quindi fatte le riduzioni, e posto il binomio $\frac{11}{3}a^2 - b^2$ per $-e^2$, si vedrà essere

$$y^2 + 2xy - 4ay = 2x^2 + 2ax - b^2.$$

E questa medesima equazione, colla luce del §.72., potrà dimostrarsi in ciascun altro punto dell' una iperbole, e dell' altra. E perciò *una tal curva sarà la richiesta locale*.

CAS. II. Se l' equazione quassù proposta siasi ridotta nella seguente $(y - x + 2a)^2 = \frac{3}{4}\left(\left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2 + e^2$, ove la e^2 si conosca essere una grandezza positiva, dovrà impiegarsi* il medesimo artificio del precedente caso per ritrovare il punto K*. Ma poi ecco il divario di questa operazione, e di quella. Nella Kf si tolga la $KA = e$, e nella KU la $KB = e\sqrt{\frac{2}{3}}$. E quindi descrivansi due iperboli opposte, che abbiano la

* §. 27.
* fig. 22.

KA per semidiametro primario, e la KB per secondario. *Queste due curve saranno la locale della proposta equazione pel secondo caso.*

DIM. Essendo $PN = x$, e $Pf = \frac{1}{3}a$, sarà $gT = PN - Pf$

* 2. El. VI. $= x - \frac{1}{3}a$. Ma è poi* $KE : gT :: UK : Ug :: \sqrt{2} : 1$, cioè $KE : x - \frac{1}{3}a :: \sqrt{2} : 1$. Dunque sarà $KE = \left(x - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}$. Ed oltre a ciò essendo $MN = y$, $TN = 2a$, sarà $MT = MN - TN = y - 2a$, ed $ME = MT + TE = y - 2a + x$; poichè dalla costruzione ben si conosce, che sia $TE = TU = x$. E finalmente dalla medesima costruzione rileviamo essere $KA^2 : KB^2 :: e^2 : \frac{2}{3}e^2 :: 3 : 2$. Ma per la natura di tal curva, o per lo §. 27 è $ME^2 = \left(\frac{KA}{KB}\right)^2 KE^2 + KA^2$. Dunque ne' simboli di queste rette avremo

$$(y + x - 2a)^2 = \frac{2}{3}\left(\left(\left(a - \frac{1}{3}a\right)\sqrt{2}\right)^2 + e^2\right).$$

Cioè, fatte le riduzioni, sarà

$$y^2 + 2xy - 4ay = 2x^2 + 2ax - b^2.$$

ESEMPIO VIII.

* fig. 23. §. 95. Dato l'angolo regolatore XPY*, qualunque ei sia; vuol costruirsi l'equazione

$$\frac{m}{n}x^2 + xy + ay + bx = e^2$$

* §. 60. o la sua ridotta*

$$\left(\frac{m}{n}x+y+b-\frac{ma}{n}\right)\left(x+a\right)\frac{r}{n}=\frac{r}{n}\left(e^2+ab-\frac{ma^2}{r}\right),$$

ch'è all' iperbole tra gli assintoti.

SOLUZ. Le coordinate della richiesta locale, che veggonsi essere $\frac{r}{n}(x+a)$, $y+\frac{mx}{n}+b-\frac{ma}{n}$, si possono ridurre, come vedesi praticato quì sopra *, nelle due altre $x+a$, $y+b-\frac{ma}{n}$; cancellando della prima di esse il coefficiente $\frac{r}{n}$, e togliendo dall' altra il secondo termine $\frac{mx}{n}$; e poi si ritrovi il principio delle coordinate $x+a$, $y+b-\frac{ma}{n}$. Cioè, per esibir tal punto, si prolunghi in F il lato XP dell' angolo regolatore XPY, talchè risulti la PF $=a$; e così pure l' altro lato PY si produca in O, finchè sia PO $=b-\frac{ma}{n}$, e si compia il parallelogrammo POCF, ove il punto C sarà un tal principio. Ciò fatto, distendasi per lo punto O la retta HOD parallela alla sottesa dell' angolo regolatore XPY, per esser positivo nell' espression dell' ordinata * il termine $\frac{mx}{n}$; e tal retta incontri in H il lato FC del detto parallelogrammo POCF. Finalmente, centro H, cogli assintoti HD, HQ, e colla potenza $\frac{r}{n}\left(e^2+ab-\frac{ma^2}{n}\right)$ si descriva l' iperbole MAm, e la sua opposta M'A'm'. *Queste due curve saranno la richiesta locale.*

* §. 83.

* §. 48.

DIM. Imperocchè essendo PN $=x$, e PF $=a$, sarà

$CS = PN + PF = x + a$. Ma per la similitudine de' triangoli SOD, COH sta $OS : OD :: OC : OH :: n : r$; e quin-
* 12.El. V. di * anche $CS : HD :: n : r$, cioè $n : r :: x + a : HD$. Dunque sarà $HD = \frac{r}{n}(x + a)$. E sarà poi, per la similitudine degli stessi triangoli COH, SOD, anche $CO : CH :: OS : SD$, cioè $n : m :: x : SD$. Dunque sarà $SD = \frac{mx}{n}$, ed $MD = MN + NS + SD = y + b - \frac{ma}{n} + \frac{mx}{n}$. Sicchè dovendo essere,
* §. 32. per la natura di tal curva*, il rettangolo di HD in DM uguale alla potenza di cotesta iperbole, sarà ne' loro simboli

$$\frac{r}{n}\left(x + a\right)\left(y + b - \frac{ma}{n} + \frac{mx}{n}\right) = \frac{r}{n}\left(e^2 + ab - \frac{ma^2}{n}\right)$$

e dall'eseguimento delle indicate operazioni si otterrà l'equazione proposta. E questa potrà nello stesso modo ottenersi in ciascun altro punto dell'iperbole MAm, o della sua opposta., e ciò colla guida della prop. IV.

§. 96. COR. supponiamo esser la grandezza $m = o$, e quindi $\frac{r}{n} = 1$; quell' equazion ridotta dovrà degenerare in quest'altra $(x + a)(y + b) = e^2 + ab$. *Ed in tal caso sarà* C *il centro della richiesta iperbole*, CQ, CS *i suoi assintoti, ed* $e^2 + ab$ *la potenza di tal curva.*

§. 97. SCOL. L'equazione, che ho proposta in quest'esempio, potrà esibirsi nella seguente forma

$$\frac{r}{n}\left(x + a\right)\left(\frac{m}{n}x + y + b + A\right) = \frac{r}{n}\left(e^2 + B\right),$$

ove le A, B sieno grandezze ignote. E poi colla luce del §.60. si potran rinvenire i valori delle assunte A, B, la prima delle quali si vedrà immantinente essere uguale a $-\frac{ma}{n}$, e l'altra quanto il binomio $ab - \frac{m}{n}a^2$.

§. 98. Se fin dal §. 18. ho promesso di voler quì distendere quest' opera con un metodo *generale*, *diretto*, e *didascalico*, qual da' dotti suol desiarsi; ora, che l' ho compiuta, debbo in brevi accenti dimostrare di non avere deviato dall'intento. Ed in vero l'equazione $y^2 + \frac{2mxy}{n} + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon$, che sovente osservasi quì dentro, è la più generica di quelle di secondo grado, che tra le due indeterminate x, y posson concepirsi dagli analisti. E 'l costruirla non è che risolvere il problema inverso di quell' altro, ove la natura di una curva conica vuol esprimersi in equazione. Le quali cose assicurano, che il nostro metodo sia *generale*, e *diretto*. E si vedrà benanche esser *didascalico*, non solo perchè vi ho adoperate le più semplici e le più chiare operazioni, che ci presentano la Geometria, e l'Analisi de' finiti; ma perchè ho voluto al metodo di Euclide attenermi. Che se qualche moderno analista voglia regolarne l' orditura col metodo d'invenzione, come ora suol farsi, e come anch' io l' ho proposto all'Accademia delle Scienze, ei potrebbe ciò conseguire nel seguente modo.

§. 99. Si compia il quadrato del primo membro dell' equazione, che ho proposta quì sopra nel §. precedente, e si proccuri eziandio di compier quella de' due termini $\gamma x^2 + \delta x$ del secondo membro. Cioè si riduca la detta equazione in costruibil forma. Sarà pe' §§. 52, 82.

$$\left(y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{pn^2}{r^2}\left(\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2np}\right)^2 - \frac{q^2}{4p} + t.$$

E dovranno essere le coordinate della richiesta curva rispettivamente uguali ad $\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2np}$, ed $y + \frac{mx}{n} + \frac{1}{2}\beta$. Per la qual cosa, ponendo uguale a zero il binomio $\frac{rx}{n} + \frac{rq}{2np}$, ch' esprime l' ascissa; sarà $x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{p}$. E quindi con tal valore della x diverrà $y + \frac{1}{2}\beta - \frac{mq}{2np}$ il trinomio, che rap-
* §. 81. presentava l'ordinata. Dunque le coordinate * del centro della richiesta curva, o del vertice, s' ella sia una parabola, saranno $-\frac{1}{2} \cdot \frac{q}{p}$, e $-\left(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2} \cdot \frac{mq}{np}\right)$. E 'l diametro starà in quella retta, che passa per questo punto, e per quell' altro, che tiene zero per ascissa (1), e per ordinata $-\frac{1}{2}\beta$. E finalmente dal conoscersi le grandezze costanti $-\frac{q^2}{4p} + t$, e $\frac{pn^2}{r^2}$, si saprà non solamente la natura della locale addimandata, ma si avran benanche le determinazioni a descriverla. Imperocchè *in qualunque curva conica, il quadrato di ciascuna coordinata serba una ragion data alla somma, o alla differenza del quadrato dell' altra coordinata, e del quadrato di una retta data*. E costruendo siffatta equazione si conoscerà colla luce della prop. IV, ch' ella appartengasi a ciascun punto di una tal locale, e non già ad un arco di essa curva, come altri suol dire.

§. 100. Avrei dovuto quì compiere questo mio analitico

---

(1) Si veggan tutte queste cose ne' §§. convenienti del Cap. III.

lavoro, per averne già unite le parti, e dispostele con *ordine di scienza*; ma una quistione, che io proposi fin dal principio, m' induce a doverla risolvere adeguatamente prima di gir più oltre. E mi lusingo, che quest' aggiunta sia per esser gradevole a' legitori: poichè con tal mezzo vi saran disciolte tante quistioni, che appartengonsi alla Geometria sublime delle antiche scuole. Intanto il famoso problema delle quattro rette, che può dirsi il centro di tali discussioni, può esser proposto nel seguente modo. *Date di posizione quattro rette giacenti in un piano; vuol ritrovarsi il luogo di quegli infiniti punti, da ciascun de' quali conducendo altrettante rette sulle date, e con angoli dati; sia sempre il rettangolo di due di queste incidenti in una ragion data al rettangolo delle altre due incidenti*. Ed a me pare, che tanto questo problema, che l' altro affine, il qual ritrovasi nelle Collezioni di Pappo, sia stato accuratamente risoluto dal grande Apollonio. Ed eccone le varie ragioni, che ne adduco.

§. 101. Un geometra dovrà riconoscersi per lo scioglitore di un problema, di cui siasi smarrita, o pur celata la soluzione, se costi in primo luogo, ch' egli abbiasi procurato i veri principj di una tal soluzione, possedendo benanche l' arte d' inventare. E se ancora siasi certo notoriamente, ch' egli abbia poi conosciuto il risultamento, o cangiato in teorema quel problema. Altrimenti ei dovrebbesi avere per profeta, se avesse conosciuto il risultamento del problema, senza risolver questo. Infatti chi mai ha dubitato, che Viviani (il proponente dell' *Enigma Fiorentino*) fosse stato lo scioglitore di un problema sì elegante? E così l' autore del teorema Cartesiano proposto senza dimostrazione dovett' essere il geometra, che disciolse in fattori duplici reali il binomio $x^n \pm a^n$, la cui soluzione contenevasi nell' anzidetto teorema. Cristiano Ugenio, che propose senza veruna dimostrazione tanti elegantissimi teoremi, indicò agli eruditi, ch' egli aveali già risoluti. Ed anzi nell' aver solamante detto, che l' evoluta dell' ellisse, o dell' iperbole era una *curva di sest' ordine, e di pari dimensioni*, ognun credette che tal geometra avessene risoluto il problema. E così di tanti altri teoremi dovrà dirsi.

§. 102. Ciò posto, Apollonio nella lettera ch' ei scrisse ad Eudemo (1), indicandogli i diversi oggetti degli otto libri dei suoi conici, disse chiaramente, ch' ei nel terzo libro avea recato nuovi, ed eleganti teoremi, alcuni de' quali eran confacenti alla soluzione de' problemi solidi, e specialmente di quello *della composizione del luogo alle tre, o alle quattro linee*. E poi soggiunse, che Euclide senza queste cose da lui inventate non potea eseguir rettamente la detta composizione. Dunque Apollonio escogitò i giusti principj a poter risolvere il proposto problema. Ma egli conobbe eziandio il risultamento del problema. Imperocchè volendo Pappo specificare il soggetto, di cui tanto si compiacque il grande Apollonio, e con insultare il *mitissimo* Euclide, non fece che rapportare il proposto problema ridotto in teorema locale, ch' è il seguente: *Se diansi di posizione quattro rette, e da uno stesso punto facciansi cadere altrettante rette sulle date, che vi facciano angoli dati, e sia data la ragione del rettangolo di due di queste incidenti a quello delle rimanenti; un tal pun-*

(1) Per la chiara intelligenza di ciò, che contiensi nel presente §. e ne' seguenti, si leggano le due ultime pagine della prefazione del lib. 7. di Pappo *de Conicis Apollonii*.

to CONTINGET POSITIONE DATUM SOLIDUM LOCUM, HOC EST UNAM EX TRIBUS CONICIS SECTIONIBUS. Dunque da' criterj quassù proposti dovrà conchiudersi, che Apollonio avesse risoluto un tal problema.

§. 103. Che se Apollonio non avesse sciolto il problema convenevolmente, a che menarne tanto orgoglio, e 'l saviissimo Euclide dispreggiarne? Ognuno avrebbe repressa tal manìa con dirgli: tant' è in Geometria chi comincia a sciogliere un problema, quanto chi vi avrà fatte molte speculazioni senza risolverlo. E di tal riprensione avrebbesi dovuto valere il giudizioso Pappo nell' apologìa, che fece per Euclide; e non già mendicare le seguenti ragioni, che sembrano assai deboli. Cioè: *Il luogo alle tre, o alle quattro linee; che Apollonio disse non essersi perfezionato da Euclide, nemmen potevasi perfezionare dallo stesso Apollonio, o da altri: e nè tampoco potevasi aggiugner cosa a quel, ch' Euclide avea scritto su i Conici, con volersi attenere alle produzioni di Aristeo, ch' ei tanto rispettava. E ben disse Apollonio, ch' ei per riuscire in quella perfetta risoluzion del problema avea dovuto escogitare principj nuovi.* Ma come mai da questa imperfetta apologia fatta da Pappo per Euclide, si conchiuse dal Cartesio, che niun geometra dell' antichità rimota abbia saputo risolvere il problema delle quattro rette? E quel che più duole, com' ei indusse in tal parere i moderni?

§. 104. Intanto il sommo Newton, che sciolse un tal problema esibendone la geometrica composizione *qualem veteres quaerebant*, per servirmi de' suoi detti (1), di quali princi-

---

(1) Cor. 2. Lemm. XIX. *Prin. Mathem. Philos. Natur.*

pj si valse? Il fondamento di una tal soluzione fu il lem. XVII. de' *Principj Matematici*. La dimostrazione di questo principio è divisa in tre casi. Il primo è identico alla prop. 17, o 18 del libro III de'Conici di Apollonio, come lo stesso Newton il dice: e gli altri due vi si possono ridurre con facili ripieghi di Geometria. E sarebbe la soluzione Newtoniana una divinazione di quella del geometra di Perga, se il problema concepito da questo geometra non fosse più generale di quello, cui si attenne il cavalier Newton. Imperocchè ne' lemmi Newtoniani XVII, XVIII leggesi *rectangulum ductarum ad opposita duo latera quadrilateri, erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita in data ratione*. Ed una tal condizione è men generale della seguente serbataci da Pappo nel Lib. VII. *Coll. Math. praef.* cioè: *Et data sit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad contentum duabus reliquis*. Ed è anche più generale il soggetto di Pappo, che quello del Newton; poichè ognun vede, che contengonsi più casi nell'espressione: *date di sito quattro rette in un piano*, che in quest'altra: *dato un quadrilineo qualunque*; potendo quelle concorrere tutte e quattro in un sol punto, o concorrere tra di esse solamente; e queste cose ai lati di un quadrilineo non possono mai convenire.

* §. 98. §. 105. Quì sopra ho dimostrato*, che il metodo da me proposto per quest' analitico lavoro sia insiem *diretto*, *generale, e didascalico*. Ora è ben di aggiungervi, ch' ei si possa facilmente *tradurre in una sintesi rigorosa*; dipendendo dalla quinta del secondo degli Elementi, cioè dal compiere il quadrato di una retta divisa in due parti, ove sia dato il quadrato di una di tali parti col doppio rettangolo di esse. E perciò facilmente avrei potuto col mio metodo *divinare* quell' o-

pera di Apollonio su i luoghi solidi. Ma il signor D. Giuseppe Scorza, che vale assai ne' metodi delle greche scuole, avendo conosciuto i miei pensieri, e 'l mio impegno, per tale assunto, mi ha prevenuto colle sue geometriche speculazioni, che all' uscir da' torchj saran grate a' geometri di buon senso.

§. 106. Se il problema delle quattro rette, può dir taluno, travagliò tanto i geometri dell' antichità rimota, perchè in que' tempi, anzi che rimettere la difficoltà del problema, si pensò a proporlo assai più malagevole, ed esteso? Un tal problema, come rilevasi da Pappo, fu proposto generalmente per un qualunque numero *n* di rette date di posizione in uno stesso piano, e per altrettante incidenti, che pervengano in esse sotto dati angoli da un medesimo punto del suddetto piano. Il prodotto delle incidenti, quando queste eran più di sei, dovea eccedere le dimensioni del solido, le quali non possono esser che tre: onde *alcune grandezze ipersolide* avrebbonsi dovute introdurre in Geometria nel risolvere cotesti problemi eccedenti (lo che non può essere). Ma i geometri di que' tempi usarono un convenevol ripiego per la ragion composta, ed espresso da Pappo ne' seguenti termini. *Si ab aliquo puncto ad positione datas rectas lineas ducantur rectae lineae in datis angulis, et data sit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, et altera ad alteram, et alia ad aliam . . . punctum continget positione datas lineas.*

§. 107. Or da tutte queste cose potrem quì raccorre con quali sagaci cure i geometri antichi avesser coltivati i diversi rami *del luogo risoluto*, cioè le diverse parti dell' arte d' inventare. E 'l lodato professor Scorza aggiunse in tal proposito, che la *quistione* di Pappo generalmente concepita* era un

* §. 106.

mezzo per la *classificazione delle curve algebriche*. Lo che mi parve nuovo.

§. 108. Ed in vero, (ecco com' io coll' analisi algebrica il dimostro) ciascuna delle incidenti nel problema delle quattro rette è una funzione lineare delle x, y, le quali dinotino le coordinate della locale addimandata: cioè a dire ella può generalmente dinotarsi per lo trinomio $\alpha + \beta x + \gamma y$. Dunque l'equazione del detto problema sarà quadratica a due indeterminate, e nella massima generalità, che può competerle. E perciò in virtù della definizione 1. ella sarà l'equazione per le *linee di second' ordine*. E così può dimostrarsi più oltre per le *linee di 3°. ordine*, di 4°, di 5°, *ec*. Anzi generalmente dovrà dirsi, *che una di queste locali sia del grado n., se il numero delle incidenti sia 2n, o pur 2n — 1.*

CAPITOLO V.

DELLA COMBINAZIONI DI DUE LUOGHI SOLIDI, PER GEOMETRICAMENTE OTTENERE LE RADICI REALI DI UN'EQUAZIONE DI TERZO, O DI QUARTO GRADO.

§. 109. L'analitico lavoro, che ne' precedenti Capi ho disteso, parrebbe inutile, o poco a' giovani vantaggioso, s' io quì non imprendessi a ragionare della combinazione di due luoghi solidi, e dell'utile che da questi all'Analisi moderna suol ridondare. *Le radici reali di un' equazione cubica o biquadratica si possono geometricamente, e nel più convenevol modo ottenere col combinare insieme due curve coniche*. E questo è il principal vantaggio, che la nostra Analisi in ciò ritrae dalla Geometria. Ed i due seguenti teoremi sono i principj di quella teorica, che quaggiù debbo in forma didascalica divisare.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

§. 110. Se mai si elimini l' indeterminata y dall'equazioni di due curve coniche, che non sien due cerchi; l'equazione ch' emerge nella sola x, la quale è l' altra delle due indeterminate, potrà ascendere al quarto grado.

DIM. PART. I. L' equazioni di due cerchi si possono rispettivamente esibire per le due sottoposte

$$y^2 + \beta y = \delta x - x^2 + \varepsilon$$
$$y^2 + \beta' y = \delta' x - x^2 + \varepsilon'$$

Sicchè sottraendo la seconda di esse dalla prima, dovrà risultare

$$y = \frac{(\delta - \delta')x + \varepsilon - \varepsilon'}{\beta - \beta'}$$

E si vedrà chiaramente, che col sostituire in una di quelle due equazioni questo valore della y, debba restare di secondo grado quella, ch' emerge nella sola x; e che una tal' equazione non possa giammai montare ad un grado superiore.

PART. II. L' equazioni di due qualunque curve coniche si possono generalmente disegnare per le due seguenti*

* §. 18.

$$y^2 + \frac{2mxy}{n} + \beta y = \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon \; . \; . \; . \; . \; . \; A$$

$$y^2 + \frac{2m'xy}{n'} + \beta' y = \gamma' x^2 + \delta' x + \varepsilon' \; . \; . \; . \; . \; . \; B$$

E poi, per conoscer chiaramente, e colla presente calcolazione un tale assunto, si faccia

$$\frac{2mx}{n} + \beta = \Psi \quad , \quad \frac{2m'x}{n'} + \beta' = \psi,$$

$$\gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = \Phi \quad , \quad \gamma' x^2 + \delta' x + \varepsilon' = \phi.$$

Le due equazioni A, B si cambieranno rispettivamente in queste altre due

$$y^2 + \Psi y = \Phi. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; C$$
$$y^2 + \psi y = \phi. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; D$$

E togliendo l' equazione D dall' altra C si avrà, fatte le ovvie riduzioni,

$$y = \frac{\Phi - \phi}{\Psi - \psi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; I^a.$$

Che se l' equazione C si moltiplichi per φ, e l' altra D per Φ, affinchè vi si facciano uguali i loro secondi membri: e poi la seconda delle risultanti equazioni sottraggasi dalla prima, sarà, con eseguire il riducimento,

$$y = \frac{\Psi\varphi - \Phi\psi}{\Phi - \varphi} \quad \ldots\ldots \quad \text{II}^a.$$

Finalmente si pareggino i due valori della y di già esibiti nell' equazioni I., II., si avrà, come il calcolo dimostra,

$$(\Phi - \varphi)^2 = (\Psi - \psi)(\Psi\varphi - \Phi\psi) \ldots\ldots \text{G}$$

Ma il primo membro di quest' ultima equazione è uguale ad $(x^2(\gamma - \gamma') + x(\delta - \delta') + \varepsilon - \varepsilon')^2$, come ben si comprende da' valori delle Φ, φ; e quivi debbon contenersi le potenze x^4, x^3, x^2, x. E lo stesso nel secondo membro ancor si osserva. Dunque l' equazione G dee ascendere al quarto grado.

§. 111. Def. III. Se con un medesimo angolo regolatore sien costruite due equazioni quadratiche a due indeterminate; le locali ch' emergono, e che debbon esser due curve coniche, si dicono *combinate fra loro*.

§. 112. Cor. I. Si chiamino P, Q due curve fra se combinate, ed A, B le loro rispettive equazioni in x, y. Dovrà in primo luogo inferirsi, che le curve P, Q insiem combinate debbano aver di comune le indeterminate x procedenti in una retta data di posizione da un punto dato: però le positive da una parte, e le negative dall' opposta; come si è detto altrove*. Ma le $+y$, che in amendue queste curve corrispondono ad una medesima ascissa $\pm x$, resteranno adattate l' una sull' altra. E non saranno combacianti coteste due ordinate, se non appartengano a' punti d' intersezione, o de' contatti. E ciò è chiaro, altrimenti sarebbero identiche le curve P, Q.

* §. 36.

PROPOSIZIONE IX.

PROBLEMA.

§. 129. Dedurre dalla proposizione precedente il metodo proposto dal Cartesio, per la costruzione dell'equazione biquadratica

$$x^4 = -abx^2 - a^2cx - a^3d \quad . \; . \; . \; . \; A$$

così da lui trasformata a tal uopo (1).

E poi divinare le tracce di sì nobile invenzione.

Soluz. Part. I. Il quadrato dell'ignota x suppongasi uguale al rettangolo della nuova indeterminata y nella grandezza costante a. L'equazione $x^2 = ay$ dovrà appartenersi a quella

---

(1) Talun che voglia conoscere con qual principio il Cartesio abbia data ad un' equazione biquadratica la forma

$$x^4 + abx^2 + a^2cx + a^3d = o \; . \; . \; . \; A,$$

dovrà supporre, che una data equazione

$$x^4 + \beta^2 x^2 + \gamma^3 x + \delta^4 = o \; . \; . \; . \; B$$

* §. 118. i coefficienti della quale abbian le giuste dimensioni *, siasi trasformata in A con pareggiarvi i termini analoghi, ove suppongasi nota la grandezza a, ed ignote le b, c, d. Infatti pareggiando abx^2 con $\beta^2 x^2$, si avrà $ab = \beta^2$, cioè $b = \frac{\beta^2}{a}$. E quindi b terza proporzionale in ordine alle date α, β.

E supponendo $a^2 cx = \gamma^3 x$, cioè $c = \frac{\gamma^2}{a^2}\gamma$. Sarà $c : \gamma :: \gamma^2 : a^2$. Cioè c a γ in duplicata ragione di γ ad a.

Finalmente sia $a^2 d = \delta^4$, cioè $d = \frac{\delta^2}{a^2} \cdot \frac{\delta^2}{a}$. E suppogasi $\frac{\delta^2}{a}$ uguale alla retta f, sarà d ad f in duplicata ragione di δ ad a.

parabola assunta, di cui ho ragionato qui sopra nel metodo Slusiano. Sicchè sostituendo ay per x^2, ed a^2y^2 per x^4 nell' equazione A, dovrà ottenersi, fatti gli ovvj riducimenti de' termini, l' equazione $y^2 + by = -cx - ad$, che appartiensi alla parabola derivata. E la differenza dell' equazioni di queste due parabole, come fu detto nel metodo Slusiano, darà l'equazione al cerchio, ove suppongasi retto l' angolo delle x, y.

Vale a dire cotesta equazione sarà

$$y^2 + (b - a)y = -cx - x^2 - ad,$$

o la sua ridotta in costruibil forma

$$\left(y + \frac{1}{2}(b-a)\right)^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{4}c^2 - \left(x^2 + \frac{1}{2}c\right)^2 - ad.$$

Laonde $-\frac{1}{2}c$, ed $\frac{1}{2}(a-b)$ *saranno le coordinate del centro del detto cerchio*: *e 'l raggio di esso dovrà essere*

$$\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2 - ad\right)}.$$

COSTRUZ. L' angolo XPY sia retto: e coll' asse PY descrivasi la parabola EP*, che abbia il parametro principale a, e passi per lo punto P. Di poi dal punto P tolgasi nella PY **fig.* 26.
la retta $PL = \frac{1}{2}(b-a)$ verso il punto Y, o dalla parte opposta, secondochè sia negativa, o positiva la grandezza $\frac{1}{2}(b-a)$. E così pure, dal punto L si elevi alla PL la perpendicolare $LM = \frac{1}{2}c$, la quale stia dentro l'angolo regolatore, o dalla parte avversa, secondochè si trovi $\frac{1}{2}c$ negativa o positiva*. Finalmen- * §. 42.

te centro M intervallo uguale a $\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}(b-a)^2-ad\right)}$ descrivasi il cerchio. *I punti, che la sua circonferenza segna nella parabola, saranno soddisfacenti al problema. Cioè le perpendicolari abbassate da' detti punti sull' asse* PY *della parabola dovranno essere le radici reali dell' equazione* A. *Le vere tra esse resteranno dentro l' angolo regolatore* XPY, *e le false saranno fuori**.

* §. 37.

PART. II. La regola Cartesiana per la costruzione geometrica dell' equazioni cubiche, e delle biquadratiche s' incontra agevolmente, come l' ho dimostrato quì sopra, nel mirabile metodo dello Slusio, il quale fiorì dopo del Cartesio. Ma il famoso Backer, che apparve ne' tempi posteriori, dovè chiarire le tracce euristiche del metodo Cartesiano, per aver impiegate a tal uopo l' equazioni identiche sì familiari al Cartesio. Ed ecco il calcolo, ch' io distendo a questo proposito.

* fig. 27.

Sia retto l' angolo regolatore XPY*, e si chiami h il parametro principale della parabola PNB, l' asse della quale sia PB; e poi si dicano y, x le due qualunque di lei coordinate PB, BN. E supposto esser G il centro del cerchio da doversi con quella parabola combinare, si chiamino z, v le sue coordinate LP, LG, che son grandezze ignote. Sarà $GO = BL = PL - PB = z - y$; ed $ON = BN - BO = x - v$. E finalmente il raggio GN del detto cerchio si dica w. Sarà $GN^2 = GO^2 + ON^2$; onde ne' simboli di queste rette si avrà $w^2 = y^2 - 2zy + z^2 + x^2 - 2vx + v^2$. E ponendo per la y il suo valore $\frac{x^2}{h}$, che la descritta parabola ne porge, ed ordinando rispetto ad x la risultante equazione, avremo

$$x^4 + (h^2 - 2hz)\,x^2 - 2h^2vx + h^2(v^2 + z^2 - w^2) = o \ldots . D.$$

Intanto si pareggino i termini analoghi dell' equazioni A, D;

dalla I. di esse otterremo $z = \frac{h^2 - ab}{2h}$

dalla II. $v = -\frac{a^2c}{2h^2}$

e dalla III. $w^2 = v^2 + z^2 - \frac{a^3d}{h^2}$

Cioè, con sostituire i valori delle v^2, z^2, sarà

$$w^2 = \frac{a^4c^2}{4h^4} + \frac{h^2}{4}\left(\frac{h^2 - ab}{h^2}\right)^2 - \frac{a^3d}{h^2}$$

Ed ognuno osserva, che ponendo, come si è praticato nella prima parte, la grandezza h uguale ad a, si debba incontrare il risultamento Cartesiano, per la conoscenza del sito e della grandezza del cerchio, che converrà con quella parabola combinare.

§. 130. Scol. Dunque il Cartesio con un simil maneggio di equazioni identiche dovè proccurarsi quell' elegante regola, ch' ei propose per costruire l' equazioni biquadratiche, e che con trasporto di giubilo chiamò *regula omnium, quas quis exoptare queat, generalissima et perfectissima* (1). Essa coincide con quella, che quassù* col metodo Slusiano, e con più chiari mezzi ho recata. E lasciò al signor Backer, che nel costruire un' equazione di terzo, o di quarto grado, col combinarvi due curve coniche, si serva dell' equazioni identiche per conoscere il sito, e le grandezze di tali curve. Ma i giovani, che vorran seguirlo, badino di non urtare in grandezze

*§§. 118.

(1) Pag. 88. *Geom. Cart. Amst.* 1659.

immaginarie, che sovente vi s' incontrano; mentre io qui imprendo ad illustrare il metodo Slusiano con risolvere alquanti problemi solidi. Il primo di essi, ch' è assai confacente a tal uopo, fu risoluto dall' illustre Ugenio, occultandone le vie euristiche. Ma queste furon poi svelate dal sagace Giacomo Bernoulli. Ed io ho voluto qui renderle più chiare a' giovanetti. Gli altri due, che immediatamente propongo, son que' due problemi proposti fin dall' antichità rimota, l' uno *sulle due medie proporzionali tra due rette date*, e l' altro *per la trisezione angolare*.

PROPOSIZIONE X.

PROBLEMA.

§. 131. Dato il punto C dentro, o fuori la parabola EPE′, condurre per esso una retta perpenpicolare alla detta curva.

*fig. 26. SOLUZ. La retta PN sia l' asse della parabola proposta, e dicasi a il parametro di esso. Ed oltre a ciò le PY, PX siano le direttrici rettangolari della soluzion del problema. Cioè a dire le coordinate CG, PG del dato punto E si chiamino rispettivamente c, h. E le altre EH, PH dell' ignoto punto E dicansi rispettivamente x, y, ovvero x, $\frac{x^2}{a}$, per la natura di tal curva. Sarà HG $=$ PG $-$ PH $= h - \frac{x^2}{a}$; ed ER $=$ EH $-$ CG $= x - c$. E finalmente dovrà essere la sunnormale HD $= \frac{1}{2}a$. Ma per la similitudine de' triangoli EHD, ERC

sta EH : HD :: ER : RC. Dunque ne' simboli di queste rette starà $x : \frac{1}{2} a :: x - c : h - \frac{x^2}{a}$; e dovrà essere

$$hx - \frac{x^3}{a} = \frac{1}{2} ax - \frac{1}{2} ac$$

cioè

$$x^3 + \left(\frac{1}{2}a - h\right)ax - \frac{1}{2} a^2 c = o$$

ordinando rispetto ad x la precedente equazione.

Maneggio di quest' ultima equazione col metodo dello Slusio.

Si moltiplichi per x la detta equazione, si avrà . . . $x^4 + \left(\frac{1}{2}a - h\right)ax^2 - \frac{1}{2}a^2cx = o$. E supponendo la $x^2 = ay$, e quindi la $x^4 = a^2y^2$; quell' equazione di quarto grado, con sostituirvi cotesti valori delle x^4, x^2, diverrà

$$a^2y^2 + \left(\frac{1}{2}a - h\right)a^2y - \frac{1}{2}a^2 cx = o:$$

cioè, fatta la semplificazione de' termini, ella si cambierà nell' equazione

$$y^2 + \left(\frac{1}{2}a - h\right)y = \frac{1}{2}cx$$

ch' è alla parabola derivata; laddove la $x^2 = ay$ era alla parabola assunta*. E sottraendo l' equazione di questa parabola dall' equazione di quell' altra, otterremo l' equazione al cerchio

$$y^2 - \left(h + \frac{1}{2}a\right)y = \frac{1}{2}cx - x^2$$

cioè

$$\left(y - \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{2}a\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(h + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{1}{4}c^2 - \left(x - \frac{1}{4}c\right)^2$$

* §. 118.

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

COSTRUZ. Tolgasi nella GY, dal punto G, la retta GN uguale al semiparametro $\frac{1}{2}a$ della parabola. E divisa ugualmente in L la retta PN, si elevi perpendicolare a PN dal punto L la retta LM uguale ad $\frac{1}{4}c$, e dentro l' angolo regolatore XPY. Finalmente, centro M, intervallo MP descrivasi il cerchio FPe. Questo dovrà segnare nella parabola data i punti, che si domandano.

DIM. Prendasi GF uguale al semiparametro GN, ed OI u-
2. El. III. guale ad OH. E per essere OS uguale ad OE, OH uguale ad OI; sarà HS uguale ad EI. Ma per la natura del descritto cerchio, il rettangolo PHN è uguale all' altro EHS, cioè a quello di EH in EI. Dunque sarà PH : HE :: EI : HN. E per la natura della parabola proposta sta PH : HE :: HE : FN. Dunque pareggiando le seconde ragioni di queste due analogie a-
19. El. V. vremo HE : FN :: EI : HN; e* starà HE : FN :: HI : FH :: HR : 2FH. Per la qual cosa essendo HE : FN :: HR : 2FH, avremo
19. El. V. pure HE : FN :: RE : 2HG; e permutando sarà HE : RE :: FN : 2HG.

Ciò posto, per la similitudine de' triangoli HED, REC
11. El. V. sta HE : RE :: HD : RC. Dunque sarà FN : 2HG :: HD : RC. Ma 2HG vedesi dupla di RC; dunque sarà benanche quel parametro FN duplo di HD; e perciò la retta DCE perpendicolare alla parabola in E.

PROPOSIZIONE XI.

PROBLEMA.

§. 132. Date le due rette A, H, ritrovare in mezzo ad esse due medie continuamente proporzionali. *fig. 28.

SOLUZ. Si chiami a la prima delle due rette date, ed h la seconda. La prima delle richieste medie proporzionali si dica x; l' altra dovrà essere $\frac{x^2}{a}$. Ed essendo il rettangolo di queste due medie uguale a quello dell' estreme, sarà

$$\frac{x^3}{a} = ah, \text{ cioè } x^3 - a^2 h = o,$$

ovvero

$$x^4 - a^2 h x = o \ldots\ldots\ldots \text{A}$$

MANEGGIO DI QUEST' ULTIMA EQUAZIONE COL METODO PRECEDENTE.

Suppongasi

$$x^2 = ay \ldots\ldots\ldots\ldots \text{B}$$

e quindi $x^4 = a^2y^2$; e poi nell' equazione A si surroghi questo valore della x^4; si avrà

$$a^2y^2 - a^2 hx = o$$

cioè

$$y^2 = hx \ldots\ldots\ldots\ldots \text{C}$$

E sottraendo dall' equazione C l' altra B, avremo finalmente l' equazione al cerchio, ch' è

$$y^2 - ay = hx - x^2 \ldots\ldots \text{D}$$

o la sua ridotta in costruibil forma

$$(y - \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{4}(a^2 + h^2) - (x - \tfrac{1}{2}h)^2.$$

Ed eccone la

COMPOSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA.

COSTRUZ. Sia XPY l'angolo regolatore, ch' io suppongo retto; e si descriva la parabola PMR col vertice P, coll' asse PY, e col parametro principale A. Inoltre tolgasi dalla PX la $PF = \frac{1}{2}H$; e dalla PY la $PU = \frac{1}{2}A$. E compito il parallelogrammo PUGF dalle due PU, PF, si descriva, centro G intervallo GP, il circolo PMD. Questo segnerà nella parabola PMR il richiesto punto M.

DIM. Imperocchè dalla natura della parabola PMR si rileva la seguente analogia A : MC :: MC :: PC, e quindi $MC^2 = A \times PC = PD \times PC$. Ma per la natura del cerchio PML è il rettangolo PCD uguale all' altro LCM. Dunque sarà $MC^2 - LCM = PD \times PC - CD \times PC$, cioè $MC \times 2CO = PC^2$. E quindi MC : PC :: PC : H. Vale a dire le quattro rette A, MC, CP, ed H saranno continuamente proporzionali.

§. 133. COR. I. Eliminando la y dalle due equazioni C, D, ottiensi $x^3 = a^2h$, cioè $CM^3 = a^2h$, e quindi $CM = \sqrt[3]{a^2h}$.

§. 134. COR. II. Inoltre il radicale universale

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}a^2c + \sqrt{\left(\frac{1}{2}a^4c^2 + a^3b^3\right)}\right)}$$

che ci porgono le formole Cardaniche, può ridursi nell' altro

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}a^2c + \frac{1}{2}a^2\sqrt{\left(c^2 + \frac{b^3}{a}\right)}\right)}$$

E facendo $\sqrt{\left(c^2 + \frac{b^3}{a}\right)} = e$, ed $\frac{1}{2}(c + e) = h$, quel primo radicale diverrà $\sqrt[3]{a^2h}$, e resterà costruito pel coroll. prec.

§. 135. Nel risolvere analiticamente il famoso problema della trisezione angolare mi sono abbattuto non ha guari in un principio geometrico, che sembrami nuovo: ed è poi commendevole per potersi agevolmente conoscere, ritenere, ed applicare a risolvere analiticamente un tal problema colla combinazione Cartesiana, o con quell' altra di Pappo Alessandrino. Cioè a dire*: *Se un arco circolare si divida in tre parti uguali, e da un punto delle due divisioni si cali la perpendicolare sulla corda di tal arco; il segmento maggiore della detta corda dovrà superare il minore, per quanto è la corda di uno di que' tre archi uguali*. Infatti l' arco AHSD intendasi diviso ne' due punti H, S, ne' tre archi uguali AH, HS, SD, e dal punto S si tiri SE perpendicolare alla corda AD di quell' arco; dovrà il segmento maggiore AE superare il minore ED, o il suo uguale AR per la retta RE, che vedesi uguale ad NL, compiendo la figura, come quì appare. Ed ecco la soluzione del detto problema col divisato principio.

* *fig.* 29.

PROPOSIZIONE XII.

PROBLEMA.

§. 136. Dato l'arco circolare AHD, dividerlo in tre parti uguali.

SOLUZ. Intendansi tirate le tre corde AH, HS, SD* in que' tre archi uguali; e la corda AD del dato arco AHD si prolunghi in T, finchè sia DT uguale ad SD: poi congiungansi le rette SA, ST; e 'l raggio HG si protragga in I fino alla circonferenza di tal cerchio. Sarà chiaro che questo

* *fig.* 29.

raggio debba dividere in parti uguali, e ad angoli retti la corda AS. Ed essendo pel principio geometrico quassù proposto il segmento maggiore AE della corda AD uguale al minore ED accresciuto della DS, corda della terza parte del detto arco, cioè AE uguale ad ET, sarà isoscele il triangolo AST; ed anzi sarà questo triangolo simile all' altro AHS, ch' è anche isoscele. Imperocchè gli angoli SAD, SAH de' suddetti triangoli sono uguali, per avere i loro vertici nella circonferenza del cerchio dato, e per insistere sugli archi uguali DS, SH. Ciò posto, ecco l'analitica, ed agevole soluzione del problema.

Sia il raggio $HG = r$, la data corda $AD = c$, l' ignota corda $AH = x$, e quindi $AT = AD + AH = c + x$. Per la natura del cerchio dee essere $HO = \frac{x^2}{2r}$, ed $AO^2 = HA^2 - HO^2$ $= x^2 - \frac{x^4}{4r^2} = \frac{x^2}{4r^2}(4r^2 - x^2)$. Onde sarà $SA = 2\,AO$ $= \frac{x}{r}\sqrt{(4r^2 - x^2)}$. Ma pe' triangoli simili AHS, AST sta $AH : AS :: AS : AT$, e quindi $AS^2 = AH \times AT$. Dunque ne' simboli di queste rette avremo $\frac{x^2}{r^2}(4r^2 - x^2) = cx + x^2$.

Ed ordinata, e ridotta quest' emergente equazione per la *trisezione angolare*, ella sarà

$$x^3 - 3r^2 x + cr^2 = o \; . \; . \; . \; . \; A.$$

MANEGGIARE COL METODO SLUSIANO L' EQUAZIONE CARTESIANA A, O LA SUA IDENTICA

$$x^4 - 3r^2 x^2 + cr^2 x = o \; . \; . \; . \; . \; A'.$$

Si faccia $x^2 = ry$, e quindi $x^4 = r^2 y^2$; e poi si sostituiscano in A′ questi due valori delle x^2, x^4. Si avrà $r^2y^2 - 3r^3y + cr^2x = o$, cioè $y^2 - 3ry = -cx$. E si vedrà bene, che l'equazione $x^2 = ry$ appartengasi alla parabola assunta, e l'altra $y^2 - 3ry = -cx$ alla derivata, e che la loro differenza $y^2 - 4ry = -cx - x^2$ debba essere al cerchio *. Dunque dovrem combinare insieme l'equazione $x^2 = ry$, ch'è alla parabola assunta, e la ridotta di quella al cerchio, cioè la $(y-2r)^2 = 4r^2 + \frac{1}{4}c^2 - (\frac{1}{2}c + x)^2$; e 'l centro di esso avrà per coordinate $+2r$, e $-\frac{1}{2}c$; cioè le parti costanti dell' espressioni delle coordinate del cerchio, ed affette di contrario segno. * §. 118.

§. 137. Costruire la proposta equazione A.

Suppongasi retto l'angolo regolatore XPY *, ove la PY regolatrice delle y sia verticalmente. E poi coll' asse PY, il cui parametro sia r, si descriva per lo punto P la parabola M′PM″. Inoltre nella PY, dal punto P, si tolga la parte PO uguale a $2r$; e prolungata la XP in F, sinchè la parte aggiunta PF uguagli $\frac{1}{2}c$, si compia il parallelogrammo rettangolo POCF; e centro C intervallo CP si descriva il cerchio PMM′M″, che dovrà segare l'anzidetta parabola non solo in P, ma benanche negli altri tre punti M, M′, M″ *. Dico che le radici dell'equazione $x^3 - 3r^2x + cr^2 = o$ sieno geometricamente espresse dalle tre ordinate comuni di queste due curve insiem combinate, cioè dalle rette MN, M′N′, M″N″: di cui le due prime veggonsi positive, da quel che ho proposto nel §. 36., e l'altra è negativa. * *fig.* 30. * §. 128.

Dim. L'equazione, che ha in M la parabola di già de-

scritta; è $x^2 = ry$, onde ritraesi la $y = \frac{x^2}{r}$, e quindi $y^2 = \frac{x^4}{r^2}$ Ma l' equazione, che compete al cerchio nel punto M, e per le medesime coordinate x, y, dee essere $y^2 - 4ry = -cx - x^2$. Se dunque si sostituiscano in quest' ultima equazioni i soprascritti valori delle y, y^2, avremo $\frac{x^4}{r^2} - 4x^2 = -cx - x^2$, cioè $x^3 - 3r^2x + cr^2 = o$. Vale a dire l' equazion proposta per la trisezione angolare quì vedesi emergere dall' eliminare la y dalle due locali $x^2 = ry$, $y^2 - 4ry = -cx - x^2$, che ho quì sopra combinate. Dunque la MN sarà una radice di
* §. 115. quella cubica equazione * . E nello stesso modo potrà dimostrarsi, che le altre due ordinate M′N′, M″N″ sieno anche radici della suddetta equazione. Imperocchè l' equazione alla parabola ne' punti M′, M″ è anche $y^2 = ry$, come si è dimo-
* §. 69. strato anteriormente*. E quella del cerchio ne' punti M′, M″ è pure $y^2 - 4ry = -cx - x^2$.

*fig. 29. §. 138. SCOL. Per render completa questa dimostrazione avrei dovuto specificare que' tre archi, che nel dato cerchio AHDI vengon sottesi dalle MN, M′N′, M″N″, che son le semiordinate corrispondenti a' punti d' intersezione della parabola, e del cerchio insiem combinati. Il Cartesio illustrò le due
*fig. 29. 30. prime col dirci: che la minima di esse, cioè la MN * era la corda della terza parte dell' arco dato AHD; che la media M′N′ era la corda della terza parte del supplemento del detto arco, cioè di AID. Ma per la massima M″ N″ si lasciò solamente dire, ch' ella era negativa, e di grandezza uguale a quelle due positive. Lo che niente rileva. Imperocchè qual sito dovrà avere nel cerchio dato cotesta corda negativa? E sa-

rà poi applicabile nel detto cerchio AHD, o ne sarà minore del diametro? Or il primo di questi due dubbj è saggiamente prodotto dal signor d'Alembert; e l'altro può quì pruomuoversi col seguente geometrico ragionamento. Dal punto P ad un punto K della CO si tiri la retta PK. Questa retta sarà minore di PC raggio del cerchio combinato colla parabola, e maggiore di PO diametro del cerchio dato AHDI. E perciò ella può essere una semiordinata del cerchio combinato, senza essere una corda del cerchio dato. E chi ci assicura, che la M″N″ non sia uguale alla PK, o ad altra simile incidente? Ma per togier questi due dubbj ecco il seguente analitico teorema.

PROPOSIZIONE XIII.

[illegible]

TEOREMA.

§. 139. Se nell'equazione cubica $v^3 - \frac{3}{4} v + \frac{1}{4} h = o$ suppongasi $h = sen.\,\varphi$, $v = sen.\,\frac{1}{3}\varphi$, posto il raggio trigonometrico uguale ad 1; gli altri due valori della v soddisfacenti alla proposta equazione dovranno essere $sen.\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right)$, e $- sen.\left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right)$.

Dim. La prima di queste due ultime espressioni ben si vede essere uguale a $sen.\,(60^\circ - \frac{1}{3}\varphi)$. Dunque ponendo $sen.\,\frac{1}{3}\varphi = w$, e $cos.\,\frac{1}{3}\varphi = z$, sapendosi esser $sen. 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $cos.\,60^\circ = \frac{1}{2}$, si avrà

$$sen. \left(60^\circ - \frac{1}{2}\varphi \right) = \frac{1}{2} z \sqrt{3} - \frac{1}{2} w \; . \; . \; . \; . \; . \; B.$$

E così pure dovrà essere

$$- sen. \left(\frac{\pi + \varphi}{3} \right) = - \frac{1}{2} z \sqrt{3} - \frac{1}{2} w \; . \; . \; . \; . \; C.$$

Ciò posto si sommino le tre espressioni w, B, C: si avrà per risultamento

$w - \frac{1}{2} w - \frac{1}{2} w + \frac{1}{2} z \sqrt{3} - \frac{1}{2} z \sqrt{3}$, cioè zero.

E moltiplicando a due a due le tre grandezze w, B, C, la somma di tali prodotti dovrà essere

$$- \frac{1}{2}(w^2 - wz\sqrt{3}) - \frac{1}{2}(w^2 + zw\sqrt{3}) + (\frac{1}{4} w^2 - \frac{3}{4} z^2)$$

cioè tal somma sarà $- \frac{3}{4}$ ponendo $1 - w^2$ per z^2, e fattevi le riduzioni.

Finalmente, se moltiplicheremo tutte insieme le tre grandezze w, B, C, si avrà per prodotto

$$w\left(\frac{w^2}{4} - \frac{3z^2}{4}\right) = w\left(\frac{w^2}{4} - \frac{3}{4}(1 - w^2)\right) = \left(w^2 - \frac{3}{4}\right)w$$

$$= w^3 - \frac{3}{4} w = - \frac{1}{4} h.$$

Imperocchè dal supporsi la w radice della proposta equazione cubica, dee essere $w^3 - \frac{3}{4} w = - \frac{h}{4}$. Dunque dovremo conchiudere *, che $sen. \frac{1}{3}\varphi$, $sen. \left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right)$, e $- sen. \left(\frac{\pi + \varphi}{3}\right)$ sieno le radici dell' equazione $v^3 - \frac{3}{4} v + \frac{1}{4} h = o$. Ma l' altra equazione $x^3 - 3x + h = o$ tien le sue radici rispettiva-

* §. 332. *Alg.*

mente duple delle precedenti. Dunque elleno, per gli elementi di Trigonometria dovranno essere la corda di $\frac{1}{3}$ *arco* 2ϕ, l'altra di $\frac{1}{3}$ *arco supplemento* 2ϕ, e la corda di $\frac{1}{3}$ *arco* $(2\phi+2\pi)$.

PROPOSIZIONE XIV.

PROBLEMA.

§. 140. Dal principio geometrico, che ho proposto quì sopra §. 135., si vuol attigner quell'elegante soluzione di già recata da Pappo Alessandrino per trisegar l'arco AHD.

Soluz. Premesse le precedenti cose, sia T il punto medio della corda AD del dato arco AHD, HM sia la perpendicolare a tal retta condottale dall'ignoto punto H. Inoltre pongasi $HM=y$, $TM=x$, $TA=a$, e quindi $AM=a-x$, $AE=a+x=MD$. Sarà la corda *fig. 31.

$$AN=\sqrt{(y^2+a^2-2ax+x^2)}.$$

E dovendo essere, per quel principio geometrico, DM=AM+AN, sarà

$$a+x=a-x+\sqrt{(y^2+a^2-2ax+x^2)}$$

cioè

$$2x=\sqrt{(y^2+a^2-2ax+x^2)}$$

e $4x^2=y^2+a^2-2ax+x^2$, cioè $y^2=3x^2+2ax-a^2$.

E riducendo in costruibil forma quest'ultima equazione si avrà

$$y^2=3\left(x+\frac{1}{3}a\right)^2-\frac{4}{3}a^2$$

ch'è l'equazione ad un'iperbole, il cui centro è nella retta AD, e propriamente nel punto C della corda AD, ch' è al disopra del punto T, per la $TC = \frac{1}{3}a$; ed ella ha que' semiassi conjugati, che le convengono colla seguente

COSTR. La corda AD dell' arco dato si divida in tre parti uguali ne' punti B, C, e condotte da questi punti a quella retta le perpendicolari BF, CP, si prenda l' angolo EBP terza parte dell' angolo retto CBF, lo che può farsi per la Geometria elementare: e la retta BP incontri la CP in P. Dico esser CB *il semiasse primario della detta iperbole, e* CP *il suo secondario. E le due iperboli opposte* HBU, QDZ *saranno le richieste*: cioè la prima di esse dee troncare dal dato arco AHD la terza parte AH, col ramo BH; e coll' opposto BU la terza parte AU nel supplemento di quello. Ed in fine l' arco DZ dell' altra iperbole QDZ vi toglierà l' arco circolare ASDZ terza parte della circonferenza di esso cerchio accresciuta dell' arco dato AND.

DIM. Essendo, per costruzione, $TM = x$, e $TC = \frac{1}{3}a$ sarà $CM = x + \frac{1}{3}a$. E dovrà stare, per la natura di questa curva, ed in virtù dell' addotta costruzione, $MN^2 : CM^2 - CB^2 :: CP^2 : CB^2$, cioè $y^2 : (x + \frac{1}{3}a)^2 - \frac{4}{9}a^2 :: 3 : 1$; e quindi

$$y^2 = 3(x + \frac{1}{3}a)^2 - \frac{4}{3}a^2 \text{ ; vedendosi esser } CB = \frac{2}{3}a.$$

Inoltre dal centro G del dato cerchio AHDK si tiri GI perpendicolare ad HM distesa verso K sino alla circonferenza. E sia $MI = h$, e quindi $HI = y + h$. Sarà il rettangolo

*35. El. III. $HMK = HI^2 - MI^2 = y^2 + 2hy$. E poichè * sono uguali i rettangoli NMK, AMD, ne' simboli di queste grandezze avremo $y^2+2hy=a^2-x^2$, ch'è l'equazione al dato cerchio. E togliendo da questa equazione l'altra $y^2=3x^2+2ax-a^2$, che, come si è detto quì sopra, dee appartenere all'iperbole, sarà $2hy=2a^2-4x^2-2ax$, cioè $y=\frac{1}{h}(a^2-2x^2-ax)$. Finalmente pongasi questo valore della y nell'equazione

$$y^2=3x^2+2ax-a^2,$$

otterremo quest' altra

$$a^4+4x^4+a^2x^2-4a^2x^2-2a^3x+4ax^3=3h^2x^2+2ah^2x-a^2h^2.$$

che ordinata rispetto ad x, con porvi per a^2+h^2 il quadrato del raggio, che chiamo r, darà

$$x^4+ax^3-\frac{3}{4}r^2x^2-\frac{1}{2}ar^2x+\frac{1}{4}a^2r^2=o.$$

Ma quest' ultima equazione è divisibile per $x+a$. Dunque eseguendo una tal divisione si avrà

$$x^3-\frac{3}{4}r^2x+\frac{1}{4}r^2a=o.$$

E perchè questa medesima equazione può nello stesso modo ottenersi per le due x corrispondenti a' punti V, Z; i tre archi AH, AK, ASZ di sopra definiti nel §. 138. saranno soddisfacenti al problema (1).

§. 141. COR. Sia l'angolo ADH $=\varphi$. Si vedrà, che nel nostro caso debba essere l'altro angolo DAH $=2\varphi$. Ed è

$$tang.\,2\varphi=\frac{2\,tang.\,\varphi}{1-tang.\,\varphi^2}\;\ldots\ldots\; A.$$

(1) L'eleganza dell'addotta costruzione ben si conosce nella brevità, che può recarsele; cioè: *Dalla corda dell' arco dato tolgasi la terza parte, ed in ciò che rimane si formi il triangolo equilatero. La semibase, e l' altezza di un tal triangolo saranno i semiassi conjugati dell' iperbole richiesta.*

E ne' simboli precedenti ottiensi $tang.\ ADH = tang.\ \phi = \frac{y}{a + x}$,

e $tang.\ DAN = tang.\ 2\phi = \frac{y}{a - x}$. Dunque sostituendo in

* *fig.* 31. A questi valori delle $tang.\ \phi$, $tang.\ 2\phi$, e praticando nel risultamento i debiti riducimenti, avremo la precedente equazione

$$y^2 = 3x^2 + 2ax - a^2$$

che converrebbe maneggiar, come dianzi si è fatto, se sia d' uopo.

§. 142. SCOL. Ma non fia grave l' adombrar quì appresso un' altra soluzione del medesimo problema, la qual procede con un metodo puramente analitico, ed immantinente fa incontrare una certa ellisse da doversi col dato cerchio combinare. Lo che sarebbe assai gradevole a chi ami il metodo proposto

* §. 125. dall' illustre Newton *. Cioè l' arco ABD abbia per seno la ret-

* *fig.* 32. ta* $AH = e$, posto il raggio $= r$, e per coseno l' altra $CH = h$; e dell' arco BD terza parte di AD sia il seno $BN = x$, e 'l coseno $CN = y$. Sarà la retta $AG = AH - BN = e - x$, e l' altra $BG = CN - CH = y - h$. E quindi $AB^2 = AG^2 + BG^2 = e^2 - 2ex + x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = x^2 - 2ex + y^2 - 2hy + r^2$, ponendovi r^2 per $e^2 + h^2$. Ma per le condizioni del problema dee essere l' arco AB duplo dell' altro BD: e pe' principj di Trigonometria convien, che sia la retta AB dupla dell' altra BN; e quindi $AB^2 = 4BN^2$. Dunque sarà

$$x^2 - 2ex + y^2 - 2hy + r^2 = 4x^2 = 4r^2 - 4y^2$$

Cioè, fatte le riduzioni de' termini, e poi ordinati convenevolmente, sarà

$$5y^2 - 2hy = 3r^2 + 2ex - x^2$$

ch' è un' equazione all' ellisse, la quale dovrebbesi combinare col cerchio della seguente equazione $y^2 + x^2 = r^2$.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

§. 143. Tutti i problemi solidi riduconsi a que' due precedenti, che sono della trisezione angolare, e dell' invenzione di due medie proporzionali tra due rette date,

Ed un problema solido s' intenderà risoluto colla massima eleganza, se immantinente lo avrem convertito in un'equazione cubica mancante del secondo termine.

DIM. L' equazioni di quarto grado sono deprimibili al terzo: e da ciascuna dell' equazioni cubiche può sempre togliersi il secondo termine, divenendo quella del caso irriducibile, o pur quell' altra, che non è tale. Ma la prima di queste due equazioni si costruisce colla trisezione angolare, e l' altra coll' indagine di due medie proporzionali tra due rette date. Dunque tutti i problemi solidi riduconsi agl' indicati problemi, e che quì sopra ho in varie guise risoluti.

Che se nel risolvere un problema solido riesca rilevarne di repente un' equazione cubica, che sia mancante del secondo termine; una tal soluzione, come ben si vede, dovrà dirsi di massima eleganza.

§. 144. SCOL. L' immortale Archimede nel Libro II. della Sfera e del Cilindro avea disciolto il famoso problema *della division della sfera in una ragion data*. Ma la composizione geometrica promessaci dal valentuomo non ci è pervenuta; nè poi siam contenti di quelle di Eutocio, di Dionisidoro, e di Diocle: poichè le due prime ci offrono una parabola combinata a tal uopo con un' iperbole; e nell' altra l' iperbole combinasi coll' ellisse. Ma il chiarissimo Ugenio ha risoluto lodevolmente un tal problema, rimettendone alla trisezione dell' arco la composizione. Ed avendone occultata l' analisi, io quì la debbo ad industri giovani svelare.

PROPOSIZIONE XVI.

PROBLEMA.

§. 145. Dividere, con un piano, la sfera in ragion data.

SOLUZ. Un tal problema, per poco che si consideri attentamente, vedesi ridotto a quest' altro. Dato un emisfero condurvi un piano parallelo alla sua base, talchè ne tolga un segmento uguale ad un cono, il quale abbia la medesima base dell' emisfero, e per altezza la retta h minore del doppio raggio. Vale a dire il dato emisfero s' intenda generato dal qua-
* fig. 33. drante BCE rivolto intorno al raggio BC*: e 'l segmento sferico, che si richiede, sia nato dal volgere d' intorno a quel raggio il trilineo circolare BQD. Ed oltre a ciò sia $CB = r$, $CQ = x$, e quindi $BQ = r - x$, che sarà l'altezza del richiesto segmento. Ed esprimendo per $\frac{\pi}{\lambda}$ la ragion di un cerchio al quadrato del raggio, sarà il cerchio, che ha BQ per raggio, uguale $\frac{\pi}{\lambda}(r - x)^2$; e 'l segmento sferico generato del
* 29. *Arch.* trilineo BQD dovrà essere $\frac{\pi}{3\lambda}(r - x)^2(2r + x)$*. Ma per

le condizioni del problema il detto segmento dee uguagliare il dato cono $\frac{\pi r^2}{\lambda} \times \frac{h}{3}$. Dunque sarà

$$\frac{\pi}{3\lambda}\left(r-x\right)^2\left(2r+x\right)=\frac{\pi r^2}{\lambda}\times\frac{h}{3}$$

cioè

$$(r-x)^2(2r+x)=r^2 h.$$

Ed ordinando l' emergente equazione otterremo

$$x^3-3r^2 x+r^2(2r-h)=o \quad . \; . \; . \; . \; . \; A.$$

Ch' è un' equazione per la trisezione dell' arco della corda $2r-h$ nel cerchio massimo BDAN della data sfera*. Ed eccone la

* §. 136.

COSTRUZ. Dal punto A del detto cerchio massimo si applichi in esso la retta AN uguale a $2r-h$. E diviso l' arco ARN del segmento minore in tre parti uguali, si congiunga la corda AR di uno di questi tre archi uguali: e poi nel raggio CB si tolga dal centro C la CQ uguale alla corda AR. Il punto Q sarà quello che si richiede.

CAP. VI.

Continuazione del medesimo argomento.

§. 146. Un metodo analitico, che sia nuovo, e che debbasi spesso adoperare, merita di essere ornato di varj esempj, affinchè in mente a' giovanetti ei diventi più energico, e più chiaro. Or io per tal ragione dovendo quassù illustrare la teorica Slusiana, per la costruzione dell'equazioni cubiche, e delle biquadratiche, mi son condotto ad isciorre analiticamente varj problemi solidi, e que' due specialmente, che l' antichità rimota ci trasmise: l' uno *sulla trisezione angolare*, e l' altro *per l' invenzione di due medie proporzionali tra due rette date*. Ed ho poi dimostrato, che ad essi debban ridursi tutti i problemi solidi, che potrem mai proporre. Ma il primo degli anzidetti problemi, che dell' altro è più antico, e che precede la conoscenza, ch' ebbero i geometri delle curve coniche, come Pappo cel ridice, a più nobili pensieri l' animo impegna. Ed essi son l' oggetto della proposta geometrica continuazione.

§. 147. Il sommo Archimede ridusse il problema della trisezione dell'arco ad: *Applicare tra la circonferenza di un cerchio, ed un diametro di esso una retta uguale al raggio, la quale passi per un punto dato in detta circonferenza.* Alcuni geometri de' tempi posteriori svolsero la ricerca a: *Situare una retta data tra i lati di un angolo retto, sicchè ella pervenisse ad un punto dato.* E di quì l'intera famiglia de' problemi solidi videsi ridotta ad un solo problema d'inclinazione, il quale per mezzo della concoide, ch'è una *linea di quar-*

to ordine e di facilissima organica descrizione, potevasi agevolmente e con eleganza costruire. Inoltre le formole di Vieta per le sezioni angolari, le altre affini proposte dal Wallis; ed anche il famoso teorema Tolemaico, donde posson (1) fluire sì le une, che le altre, ci porgono all' istante l' equazione del problema, la quale assolutamente dee ascendere al 3.° grado, ed appartenersi al caso irriducibile, qual' è la $x^3 - 3r^2x + r^2c = o$*. Ma l' insigne Cartesio questa pur ritrasse di certe geometriche speculazioni, ch' io le riduco al seguente teorema: *La corda di un arco minore della semicirconferenza è minore della tripla corda dell' arco suttriplo, per una retta, che sta a questa corda in duplicata ragione di essa al raggio*. E volendo sostituirvi quel teorema, che in tal congiuntura mi si è offerto, e ch' è molto chiaro, ritenevole, ed atto ad un tal lavoro, non sarà grave ripeterne l' enunciazione: *Se dall'un de' due punti, in che un arco geometrico può concepirsi diviso in tre parti uguali, si abbassi la perpendicolare sulla corda di esso arco, la differenza de' segmenti di tal corda sarà uguale alla corda di uno di que' tre archi uguali*. Ma eccone per que' lavori di Archimede il seguente *§. 136.

LEMMA.

§. 148. Se nel cerchio RPD prendasi l' arco RB minore del quadrante, e dall' estremo B di quell' arco s' intenda inclinata sul diametro RD, che passi *fig. 34.

(1) Leggasi una mia Dissert. su tale oggetto, nel Vol. I. della nostra Accademia, pubblicato l' anno 1819.

per l'altro estremo, una retta, in modo, che l' intercetta fra il diametro e la circonferenza sia uguale al raggio; quest' inclinata potrà esibirci la terza parte del detto arco, del suo complemento, o del suo supplemento, secondochè quell'intercetta cada tutta fuori del cerchio, resti dentro, o pur si ritrovi parte dentro e parte fuori dello stesso cerchio (1).

DIM. CAS. I. La retta BLV sia quell' inclinata, di cui l' intercetta LV veggasi cader tutta fuori del cerchio PRD. Si unisca la BC. Sarà l' angolo esterno BCR del triangolo BCV uguale ai due V, CBV. Ma l' angolo CBV è uguale all' altro CLB, per lo triangolo isoscele BCL. E l' angolo CLB, è u-
* 32. El. I. guale al doppio V *. Dunque sarà l' angolo BCR uguale ad $V + 2V = 3V$. E quindi l' arco DL misuratore dell' angolo LCD, o di V, sarà $\frac{1}{3}$ di BR, o di ϕ, ponendo $BR = \phi$.

CAS. II. La retta Bλ sia quella di coteste inclinate, di cui l' intercetta λw cade dentro del cerchio RPDλ. Congiungasi la retta λC, che prolungata incontri la proposta circonferenza in H; e poi pe' punti B, C, H si tirino le BO, CP, HM perpendicolari al diametro RD del detto cerchio. Saranno uguali gli angoli λwC, λCw, alla base del triangolo isoscele wλC; e quindi anche i loro verticali BwO, HCM; e gli altri due OBw, PCH complementi di essi. Ma l' angolo esterno BCH

(1) La prima parte di questa proposizione è il lemma, che fu proposto, ed egregiamente dimostrato per tal soggetto dal principe de' geometri Archimede. E le altre due accrescono il nostro argomento, e 'l rendono più adatto alle presenti speculazioni.

del triangolo isoscele BCλ è uguale a 2CBλ. Dunque togliendo da questi gli altri due angoli PCH, OBw, che si son dimostrati uguali, rimarrà l' angolo PCB, o il suo alterno OBC uguale a 2CBw — Obw. Cioè OBC + oBw uguale a 2CBw : e togliendo d'ambe le parti CBw, avremo 2OBw uguale a CBw ; e quindi OB$w = \frac{1}{3}$CBO. E finalmente l' arco PH terza parte di BP.

CAS. III. Finalmente l' inclinata νBl sia uguale al raggio C, e questa intercetta stia parte dentro, e parte fuori del proposto cerchio. Sarà l' angolo esterno lCD del triangolo isoscele νlC uguale ad ν + C$l\nu$. Ma questo secondo angolo è uguale a CBl, per lo triangolo isoscele λCB : e l' angolo CBl esterno del triangolo CBν è uguale ad ν+BCν. Dunque sarà quell' angolo lCD uguale ad ν insieme con ν + BCν, cioè a 2ν + BCν. Ed aggiungendo di comune l' angolo BCl risulterà l' angolo BCD uguale a $2\nu + l\mathrm{C}\nu = 2\nu + \nu = 3\nu$. Cioè l' arco RB$l = \frac{1}{3}$BPD.

§. 149. COR. I. La dimostrazione della prima parte di questo lemma (lo che varrebbe anche per le altre due) par che sia indicata dalla posizione de' due triangoli isosceli CLV, LCB. Questi han di comune il lato CL ; e l' altro lato LV del triangolo CLV è a dritto colla base LC del secondo triangolo LCB. E perciò dee essere l' angolo V terza parte di BCR. E forse per una tale speculazione potè nascere l' altro problema d' inclinazione, che ho indicato nel §. 147.

§. 150. COR. II. Infatti dall' angolo C del rettangolo ABOC intendasi condotta l' inclinata CD sul lato AB disteso verso D, *fig. 35.

sicchè l'intercetta FD sia dupla della diagonale CB di esso rettangolo. La FD si divida ugualmente in G, e si unisca la GB.
*32. El. III. Sarà GB uguale a GF, uguale a BC *. Onde saranno isosceli i due triangoli BGD, GBC, avendo il lato BG comune, e l' altro GD a dritto colla base CG del triangolo CDG: e dovrà essere l' angolo D terza parte di CBA, o del suo uguale BCO.

§. 151. Scol. Questo lemma, che dal grande Archimede fu concepito nel solo primo caso, quì vedesi disteso a tutti tre que' casi, che gli convengono, e che ho dovuto con pari chiarezza dimostrare. Ora il debbo ridurre in equazione. E mostrerò a' giovanatti, lo che sarà ad essi gradevol cosa, ed importante, *che le sue radici debban esser necessariamente le tre seguenti sen.* $\frac{1}{3}\phi$, *sen.* $\frac{1}{3}(\pi-\phi)$, — *sen.* $\frac{1}{3}(\pi+\phi)$, che rapportai nel §. 139.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

§. 152. Co' principj di Archimede, nel precedente lemma illustrati, si vuol dividere in tre parti uguali l'arco dato RB.

fig. 36. Soluz. La retta VB supponghasi esser l'inclinata, che si richiede: cioè tale che l'intercetta LV sia quanto il raggio CL del dato cerchio RBD. E poi da' punti B, L si abbassino le perpendicolari BO, LN al diametro RD di esso cerchio. Saranno uguali i segmenti NC, NV della base del triangolo iso-

scele CLV. Il perchè ponendo BO $= e$, OC $= h$, LN $= x$, e CN $= y$, sarà CV $= 2y$, OV $= h + 2y$. E pe' triangoli simili BOV, LNV essendo BO : LN :: OV : NV, si avrà ne' simboli di queste rette $e : x :: h + 2y : y$, e quindi $hx + 2yx = ey$. Cioè riducendo in costruibil forma quest' equazione avremo $\left(\frac{1}{2}e - x\right)\left(y + \frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}eh$: ch' è l' equazione ad un' iperbole tra gli assintoti, da doversi costruire nel seguente modo.

Costruz. Per lo punto medio G del raggio CB si tirino le rette GT, GS rispettivamente parallele alle coordinate LN, NC del cerchio dato. E poi cogli assintoti GT, GS descrivasi l' iperbole LCλ, che passi per lo centro C del detto cerchio, e s' intenda benanche delineata la sua opposta Kl, che dovrà passare per lo punto B. *I punti* L, l, λ, *che segnano nel cerchio dato queste iperboli opposte, saranno soddisfacenti al problema*; *e l' altro punto* B *ne sarà straniero*.

Dim. Pongasi il raggio CL $= 1$; l' equazione al cerchio per le coordinate LN, NC sarà $y^2 + x^2 = 1$. Ma quivi per la natura delle iperboli di già descritte risulta, come si è dimostrato quì sopra, $hx + 2yx = ey$, cioè $y = \dfrac{hx}{e - 2x}$. Dunque se nell' equazione al cerchio porremo per la y questo suo valore, si avrà la seguente biquadratica equazione

$$x^4 - ex^3 - \frac{3}{4}x^2 + ex - \frac{1}{4}e^2 = o. \quad . \quad . \quad . \quad \text{B.}$$

E questa liberata dalla radice straniera e, o pur divisa per lo binomio $x - e$, darà la giusta equazione del problema per *la trisezione angolare*

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}e = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{C.}$$

Or la stessa equazione vedesi emergere per gli altri due punti l, λ. Dunque dovrà dirsi che questi le sieno soddisfacenti. Ma nel punto B vi è la $x = e$, e la $y = -h$. Dunque l'equazione $y = \frac{hx}{e - 2x}$ si riduce in quest' altra identica $-h = \frac{he}{e - 2e} = -h$. E quindi tal radice sarà straniera al problema.

Inoltre pongasi l'angolo $BCR = \varphi$, potendosi benanche dinotare per φ l'arco RB del raggio 1. Sarà l' angolo $V = \frac{1}{3}\varphi$, come l' ho dimostrato nel precedente lemma. E l' altro v dovrà essere uguale ad $\frac{1}{3}(\pi - \varphi)$. Che anzi essendosi dimostrato, nella part. III. dello stesso lemma, esser l'angolo $OBw = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$, sarà l' angolo $wBC = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = \frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\varphi$. Vale a dire, a cagion del triangolo isoscele $BC\lambda$, sarà anche l' angolo $C\lambda w = \frac{1}{3}\pi - \frac{2}{3}\varphi$. E dovrà essere l'angolo $\lambda C w$ dell'altro triangolo isoscele Clw uguale a $\frac{\pi - \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}\varphi}{2} = \frac{1}{3}(\pi + \varphi)$. Dunque le radici dell' equazione C espresse per le ordinate LN, ln, λv saranno $sen.\ \frac{1}{3}\varphi$, $sen.\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$ $-sen.\ \frac{1}{3}(\pi + \varphi)$, come nel §. 139. ho proposto.

PROPOSIZIONE XVIII.

PROBLEMA.

§. 153. Dato l'angolo BCO*, dividerlo in tre parti uguali, secondo il metodo d'inclinazione rammentato nel §. 150. *fig. 35.

Soluz. Da un qualunque punto B nel lato BC del dato angolo BCO, si abbassi la BO perpendicolare all'altro lato CO del detto angolo. E compito il rettangolo ABOC, si unisca CB, e si supponga inclinata dal punto C sulla retta ABD l'altra CFD, sicchè l'intercetta FD sia uguale a 2CB.

Ciò posto, sia $OB = e$, $OC = a$, $BF = x$, e quindi $OF = OB - BF = e - x$. E finalmente pongasi $DF = 1$, affinchè la x possa dinotare il seno dell'angolo D. Sarà $BC = \frac{1}{2}$ ed $e^2 + a^2 = \frac{1}{4}$. E $CF^2 = CO^2 + OF^2 = a^2 + e^2 - 2ex + x^2 = \frac{1}{4} - 2ex + x^2$. E pe' triangoli simili FOC, FBD essendo $OF : FC :: BF : FD$, e con ciò $OF^2 : FC^2 :: BF^2 : FD^2$, sarà ne' simboli di queste rette, $e^2 - 2ex + x^2 : \frac{1}{4} - 2ex + x^2 :: x^2 : 1$. Dalla quale analogia si avrà la seguente equazione

$$x^4 - 2ex^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2ex - e^2 = o.$$

E questa poi potendosi dividere per lo binomio $x - 2e$, offrirà l'equazione del problema di già per le altre vie rinvenuta

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}e = o.$$

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

§. 154. Se nel dividere in tre parti uguali un' arco dato s' incontri un' equazione di quarto grado, ingombra, come suol essere, di una radice straniera; questa radice dovrà essere uguale al coefficiente del secondo termine affetto di contrario segno. Cioè a dire, se cotesta equazione sia $x^4 + Kx^3 + etc = o$, sarà tal radice uguale a K.

Dim. Poichè — K è uguale alla somma delle radici *§.332.*Alg.* dell' anzidetta equazione *, cioè a quelle tre radici, che appartengonsi all' equazione per la trisezione angolare, ed alla radice straniera: e quelle tre radici insiem sommate sono uguali a zero, come ben si vede in quell' equazione per la trisezione angolare. Dunque la radice straniera sarà uguale a — K. E ciò si vedrà chiaramente da' sottoposti esempj.

§. 155. Esemp. i. Quell' agevol principio di Geometria, che mi si offre nel *trisegar* l' angolo rettilineo, mi ha recato a tal fine la seguente biquadratica equazione

$$x^4 + ax^3 - \frac{3}{4}r^2 x^2 - \frac{1}{2} ar^2 x + \frac{1}{4} a^2 r^2 = o$$

Dunque — a dee esser la radice straniera al problema. E dividendo quell' equazione per lo binomio $x + a$, dovrà ottenersi l' equazione cubica

$$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^2 a = o,$$

* §. 139. *ch' è per la trisezione angolare* *.

§. 156. ESEMP. II. Inoltre quella soluzione puramente analitica, che ho recata al medesimo problema nello scolio della prop. XIV, ci offrirebbe la seguente biquadratica equazione

$$x^4 + ex^3 - \frac{3}{4} r^2 x^2 - \frac{1}{2} r^2 ex - \frac{1}{4} e^2 r^2 = o$$

E ciò con eliminar la y dalle due indeterminate equazioni

$$5y^2 - 2hy = 3y^2 + 2ex - x^2 \text{ , ed } y^2 + x^2 = r^2$$

la prima delle quali è all' ellisse, e l' altra al cerchio. Dunque sarà $-e$ la radice straniera del problema. E divisa per $x + e$ quella biquadratica equazione, si avrà

$$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x + \frac{1}{4} r^2 e = o,$$

ch' è l' equazione per la trisezione angolare (§. *prec.*).

§. 157. ESEMP. III. Dal principio geometrico proposto dal grande Archimede, per la trisezione dell' arco, ho ricavata a tal oggetto la seguente equazione di quarto grado

$$x^4 - ex^3 - \frac{3}{4} x^2 + ex - \frac{1}{4} e^2 = o$$

posto uguale ad 1 il raggio del dato cerchio. Dunque sarà $+e$ la radice straniera del problema. E dividendo per $x - e$ la detta equazione incontreremo

$$x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} e = o$$

ch' è quella per la trisezione angolare.

§. 158. ESEMP. IV. Finalmente da quell' altro principio d' inclinazione, donde gli antichi cercarono di sciorre il problema della trisezione angolare, ho analiticamente ottenuta l' equazione

$$x^4 - 2ex^3 - \frac{3}{4} x^2 + 2ex - e^2 = o.$$

Dunque la radice straniera dovrà essere $+2e$. E quell'equazione dovrà dividersi per lo binomio $x-2e$, perchè si ottenga l' *e-quazione*

$$x^3-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}e=o$$

per la trisezione angolare.

§. 159. Colla guida del principio geometrico, che ho rap-portato nel §. 135, si può immediatamente conseguire l' equa-zione cubica del caso irriducibile, come l' ho conseguita nel-la prop. XIV., e come il Cartesio con altre guide geometri-che ancor l' ottenne: cioè l' equazione $x^3-3r^2x+cr^2=o$, ponendo il raggio del cerchio dato uguale ad r, la corda del-l' arco da *trisegarsi* uguale a c; e ad x quella della terza parte di esso. Ma sebbene quest' analitico sentiero sia più breve di ciascun de' precedenti; pure non è di essi più elegante. Impe-rocchè tali radici geometriche rilevansi fuori dell' arco dato, cioè colla combinazione di due altre curve coniche. E dovrebbesi rigidamente dimostrare, ch' esse sieno applicabili in quel cer-chio dato. Ma dove dovrebbe cadere la radice negativa? (*Ve-di il* §. *128.*).

§. 160. E per dimostrare a priori quella verità importan-te del §. 139. convien quì stabilire questo principio della Tri-gonometria analitica, che: *posta la circonferenza del raggio* 1 *uguale a* C, *e dinotando per* n *qualunque numero inte-ro positivo*, *debba* $\varphi+nC$ *avere lo stesso seno*, *e coseno dell' arco* φ. Dunque l' equazione che otterremo per la trisezio-ne dell' arco φ, dovrà darci per radice non solamente *sen.* $\frac{1}{3}\varphi$, ma benanche *sen.* $\frac{1}{3}(\varphi+nC)$, cioè infinite altre diverse espressioni, le quali riduconsi a quelle tre solamente che ho proposte nella fine del §. 152.

§. 161. Ed in vero si divida nC per 3, e si chiami m il quoziente. Il residuo potrà essere 0, 1, 2. E perciò l' espressione $sen. \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{nC}{3}\right)$ dovrà degenerare in una di queste tre

$$sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC\right) \qquad sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC + \frac{C}{3}\right);$$

$sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC + \frac{2C}{3}\right)$. Ma per lo principio §. 160.

$$sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC\right) = sen. \left(\frac{1}{3}\varphi\right)$$

E così pure

$$sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC + \frac{C}{3}\right) = sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{3}C\right),$$

$$sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + mC + \frac{2C}{3}\right) = sen. \left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{2}{3}C\right).$$

Dunque quest' infiniti seni ricadono ne' tre primi, che sono le necessarie radici dell' anzidetta equazione.

FINE

DEL TRATTATO ANALITICO DE' LUOGHI GEOMETRICI.

INDICE

DE'

CAPITOLI

DEL TRATTATO ANALITICO DE' LUOGHI GEOMETRICI.

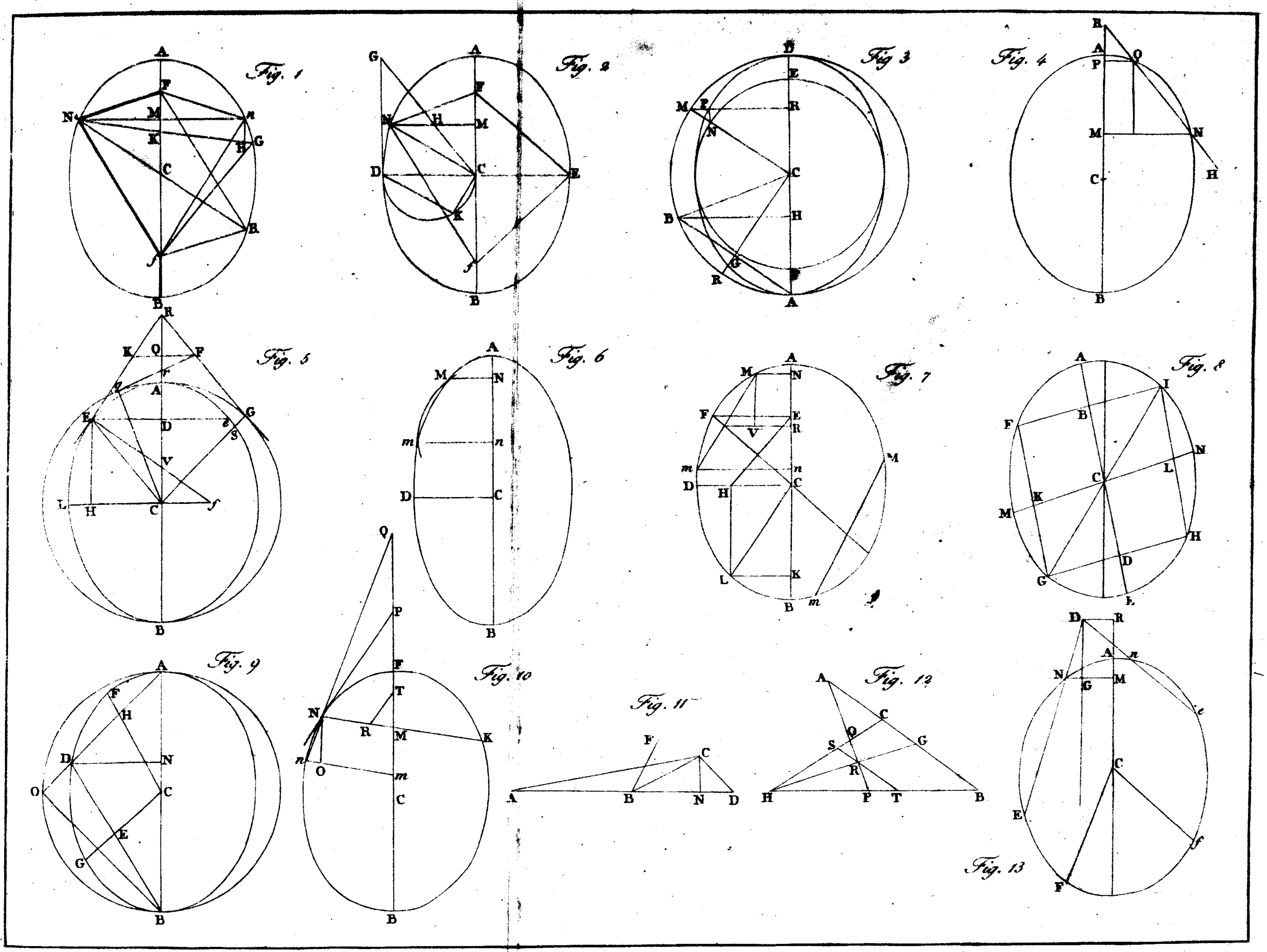


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13

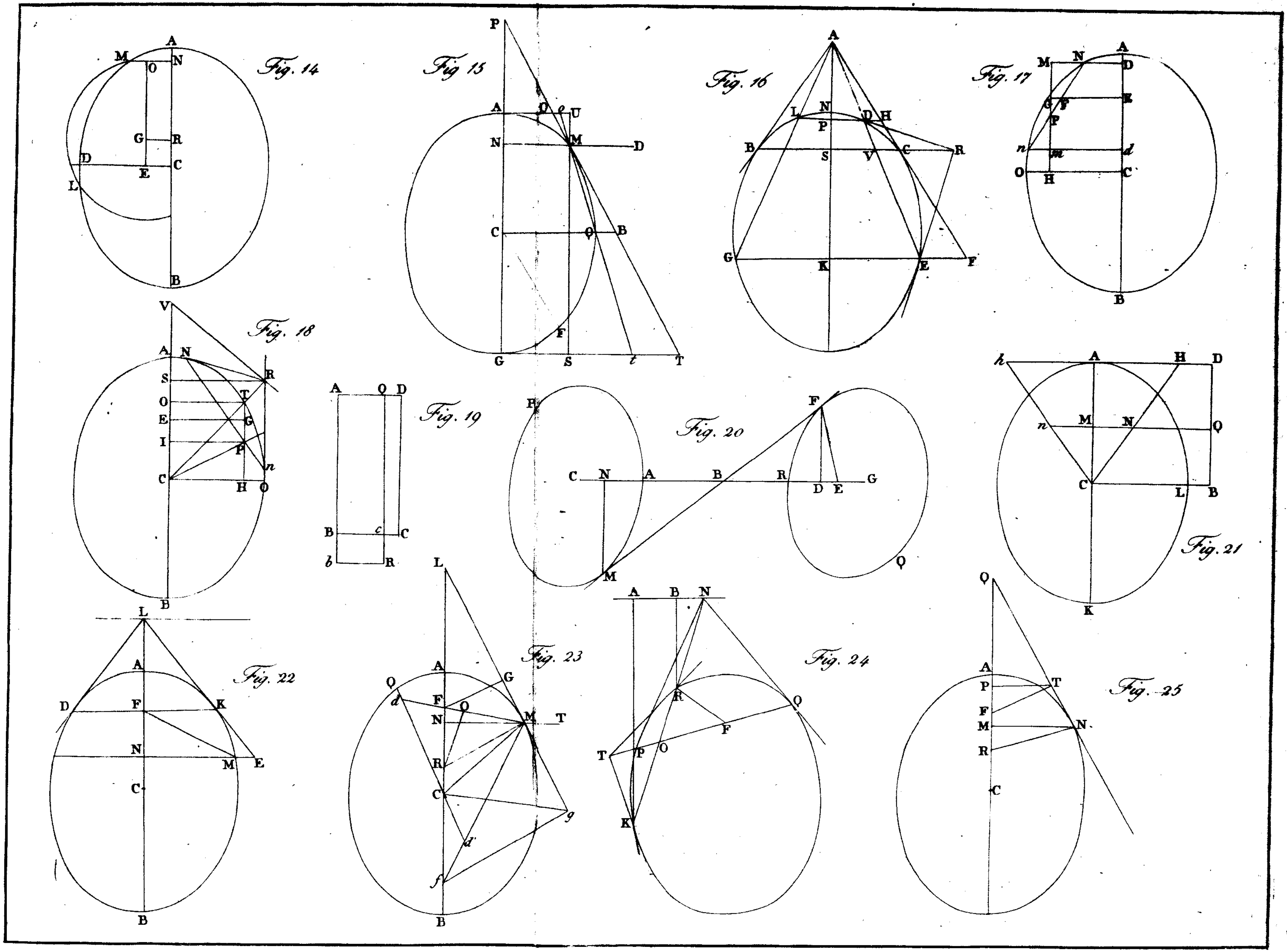


Fig. 14
M A N O G R D C E L B
Fig. 15
P A O e U N M D C Q B F G S t T
Fig. 16
A L N D H P B S V C R G K E F
Fig. 17
M N A D G F E P n m d O H C B
Fig. 18
V A N R S T O E G I P C H O n B
Fig. 19
A Q D B c C b R
Fig. 20
F C N A B R D E G M Q
Fig. 21
h A H D n M N Q C L B K
Fig. 22
L A D F K N M E C B
Fig. 23
L A G Q d F O N M T R C g d' f B
Fig. 24
A B N R Q F T P O K
Fig. 25
Q A T P F M N R C

Fig. 26

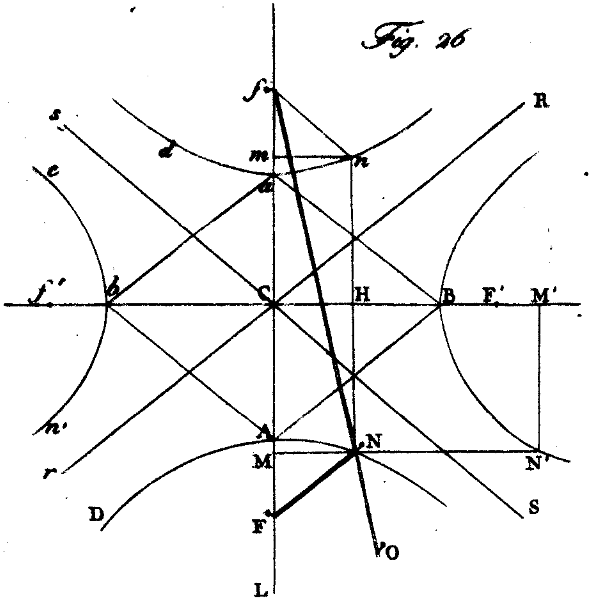


Fig. 27

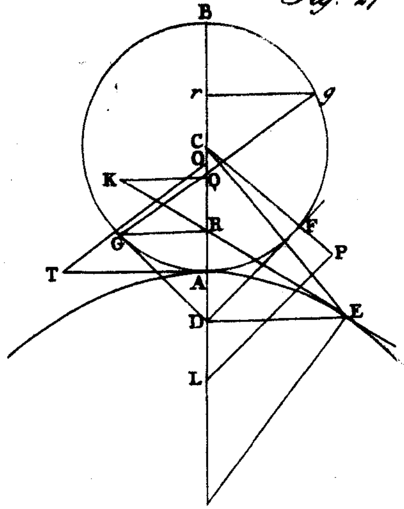


Fig. 28

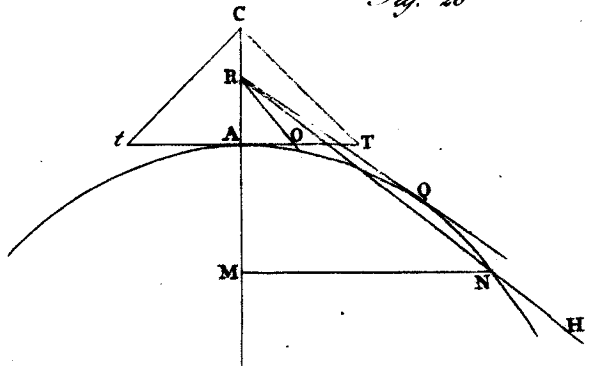


Fig. 29

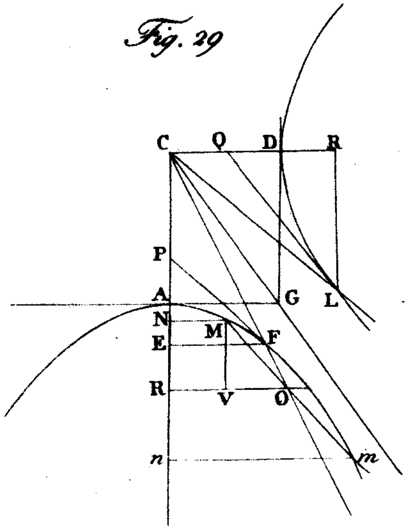


Fig. 30

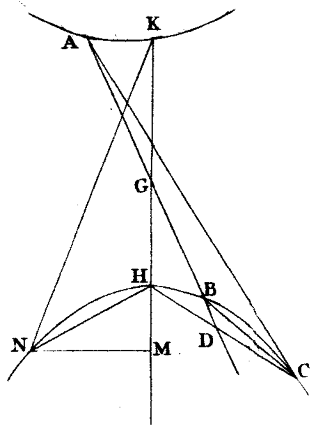


Fig. 31

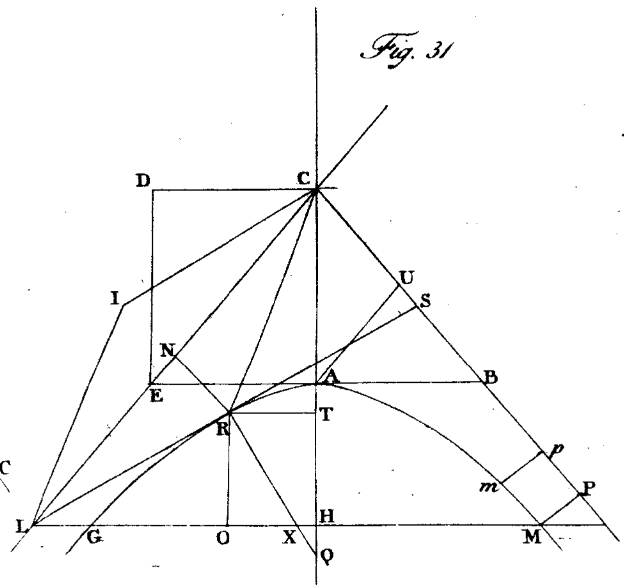


Fig. 32

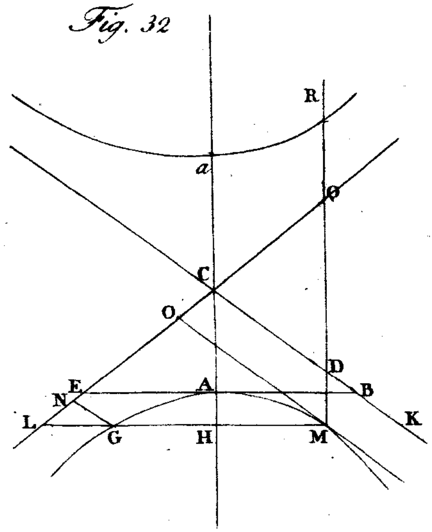


Fig. 33

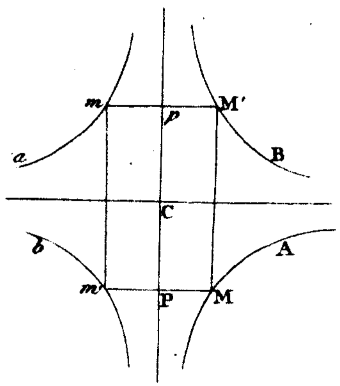


Fig. 34.

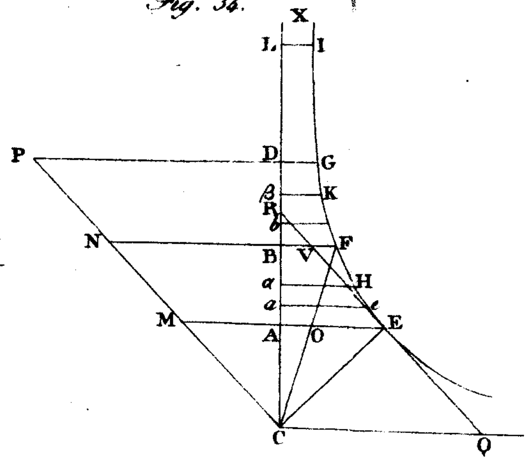


Fig. 35

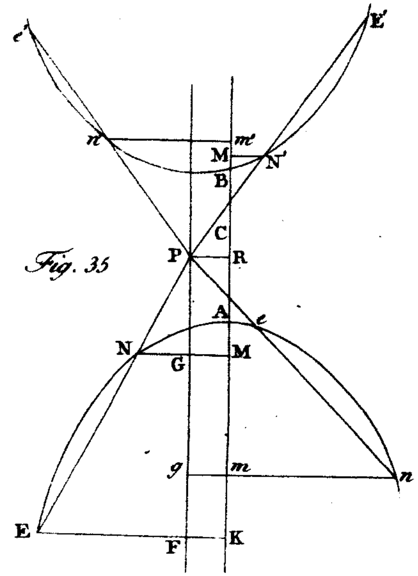


Fig. 36

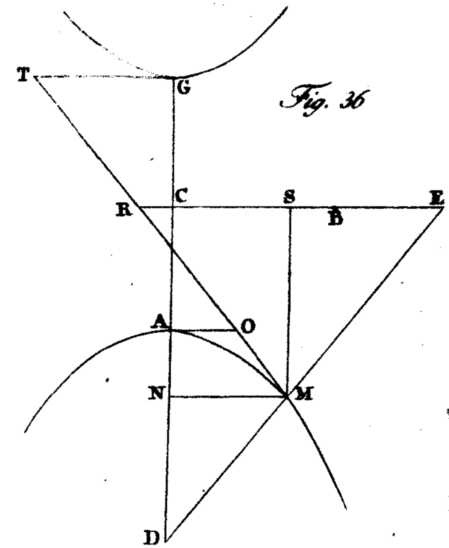


Fig. 37

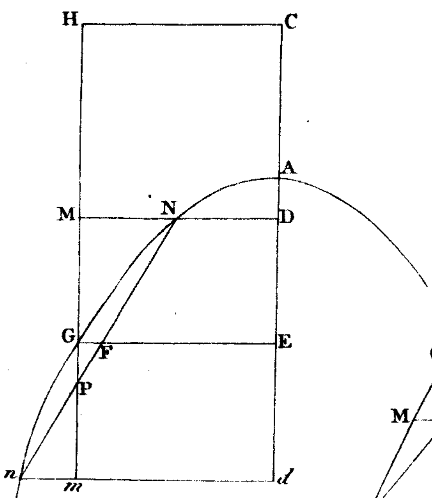


Fig. 38

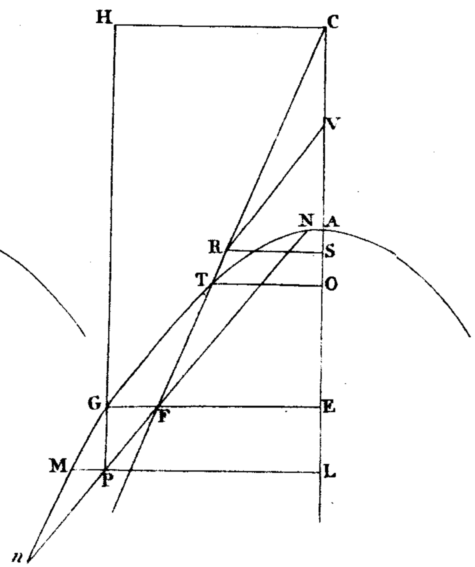


Fig. 39

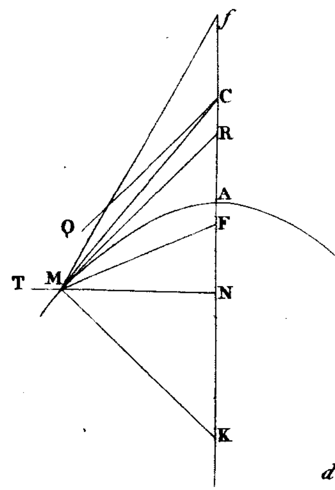
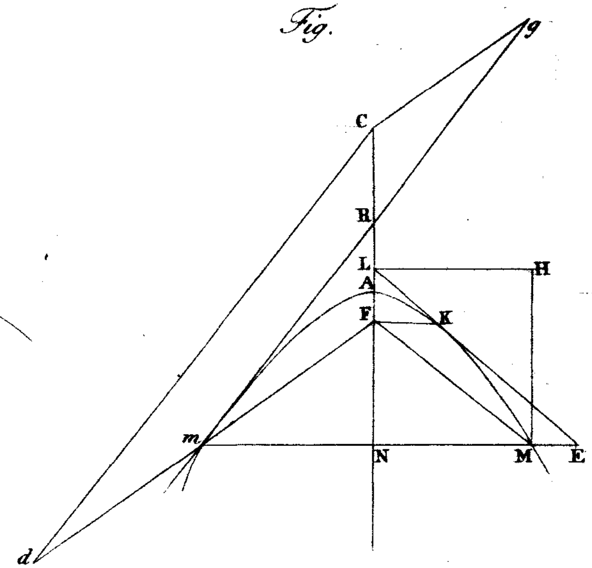


Fig.



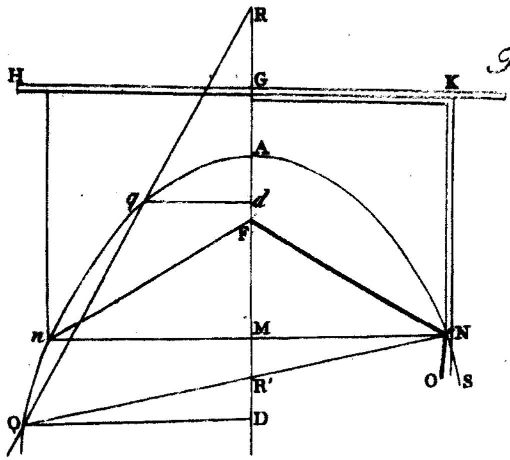


Fig. 41

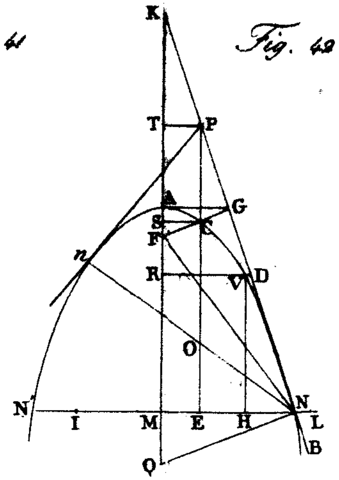


Fig. 42

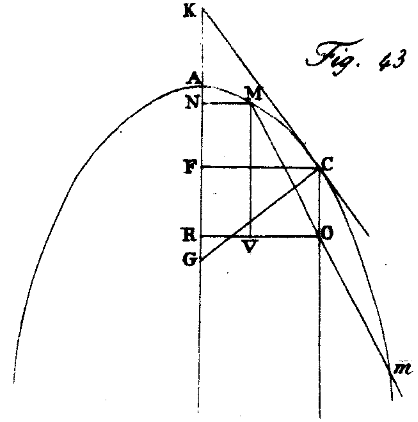


Fig. 43

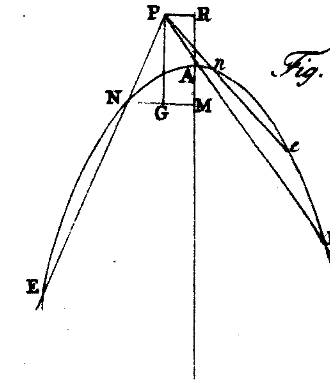


Fig. 44

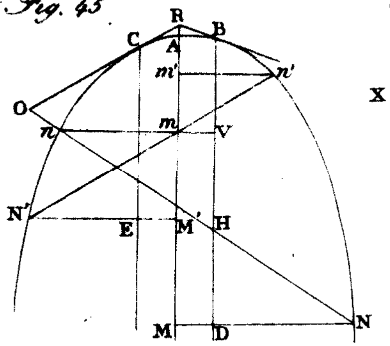


Fig. 45

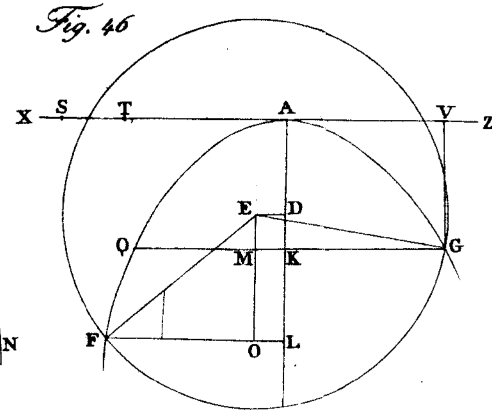


Fig. 46

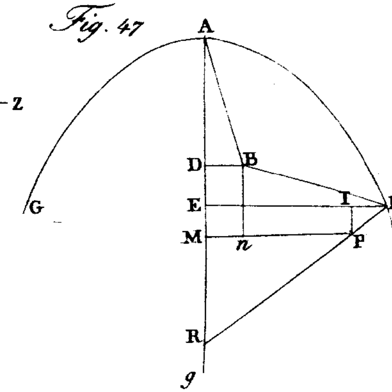


Fig. 47

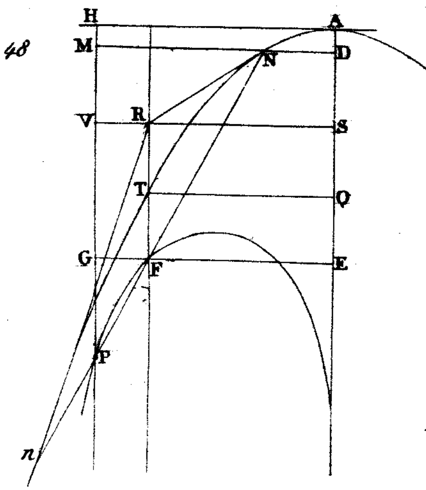


Fig. 48

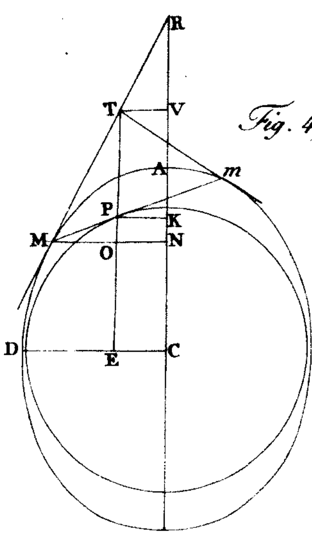


Fig. 49

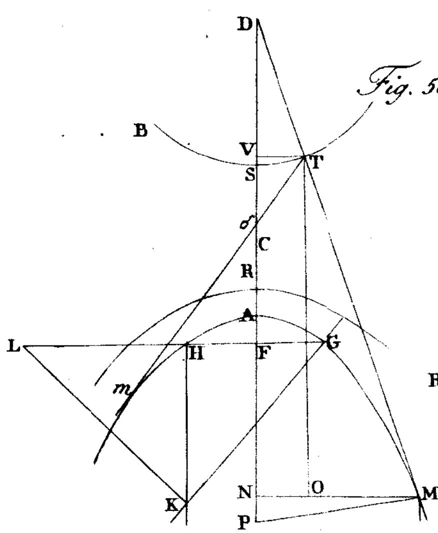


Fig. 50

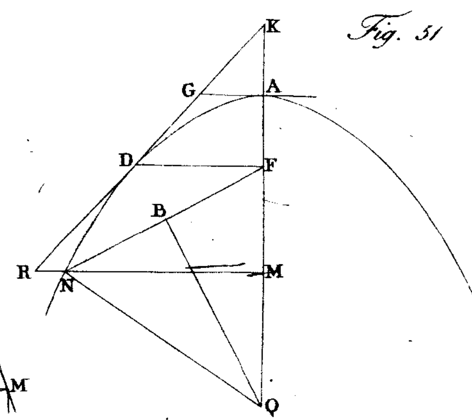


Fig. 51

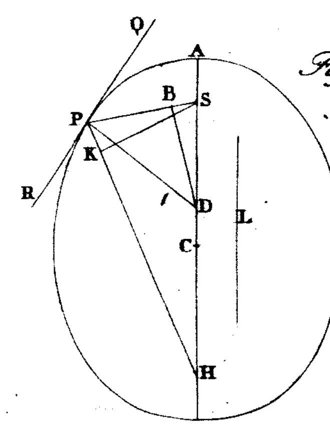


Fig. 52

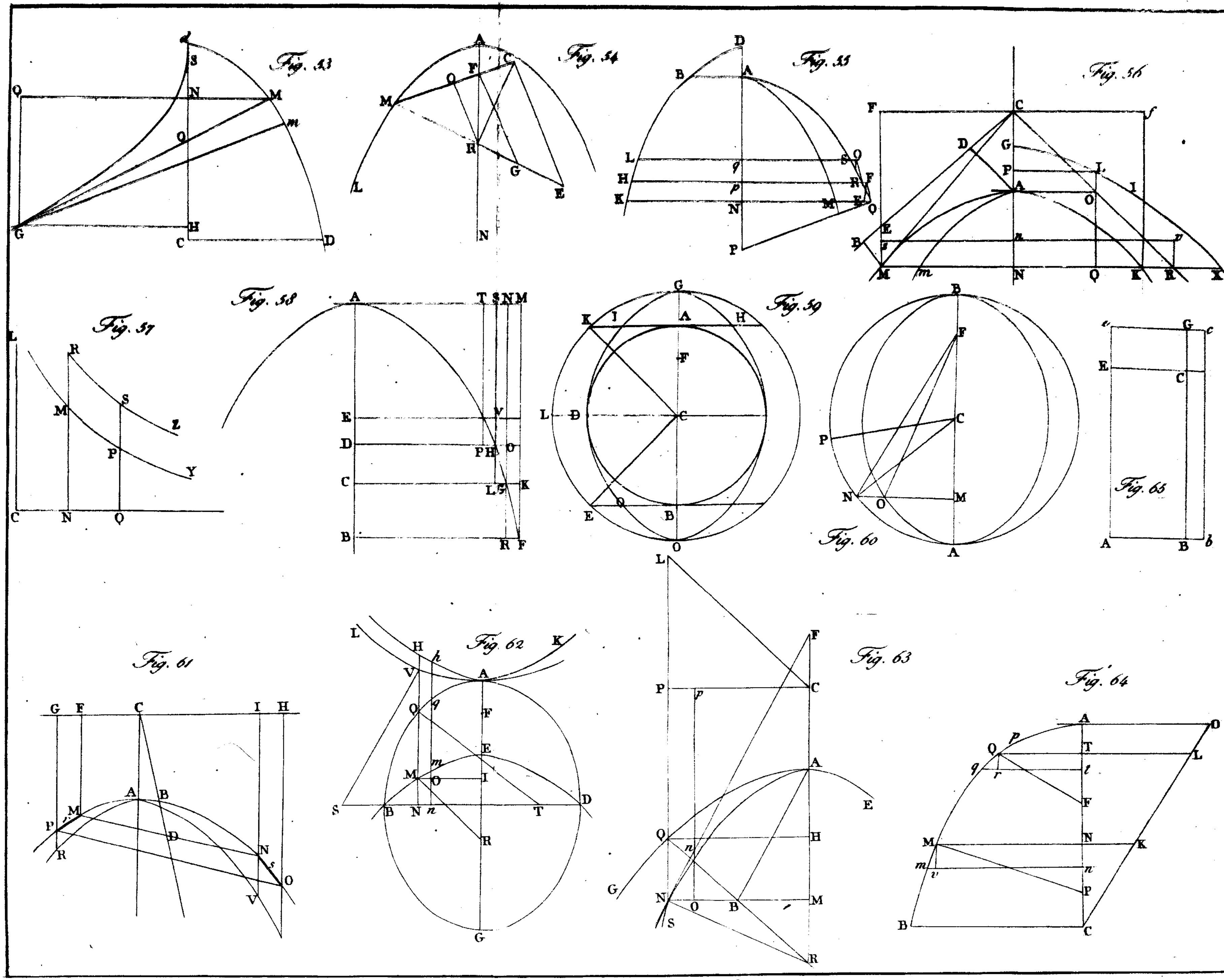


Fig. 53
Fig. 54
Fig. 55
Fig. 56
Fig. 57
Fig. 58
Fig. 59
Fig. 60
Fig. 61
Fig. 62
Fig. 63
Fig. 64
Fig. 65

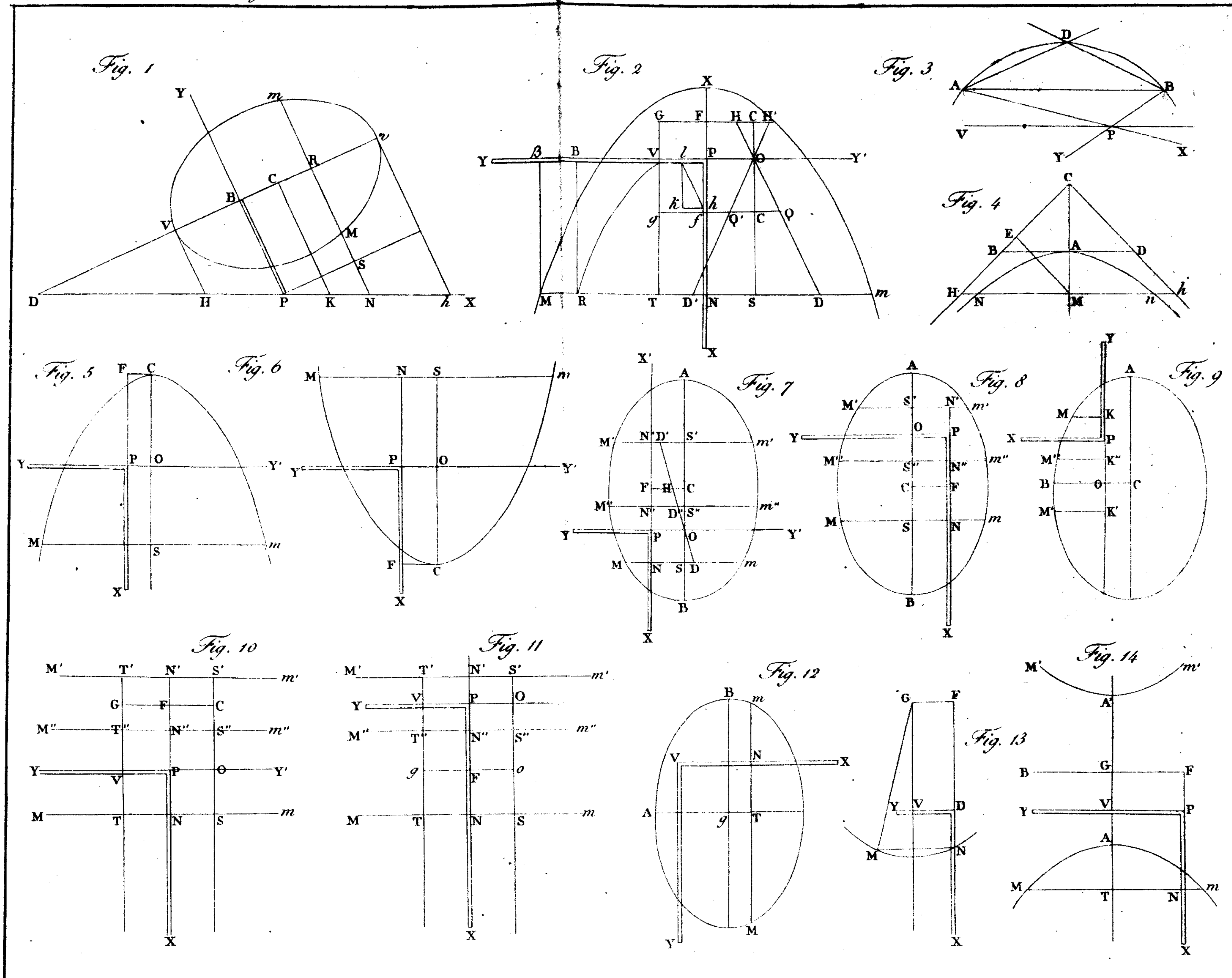


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14

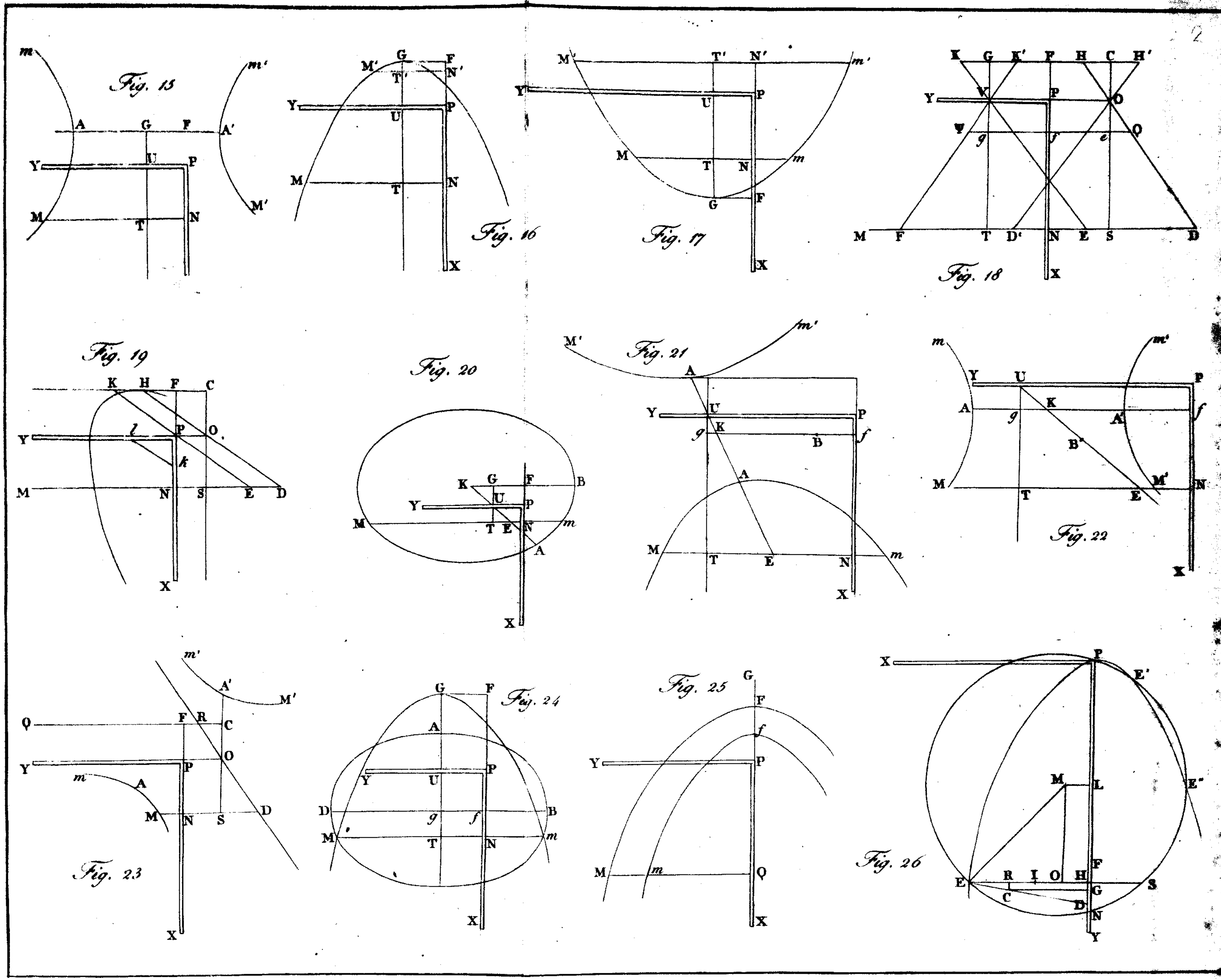


Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26

Fig. 27

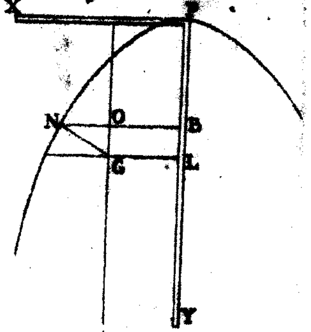


Fig. 28

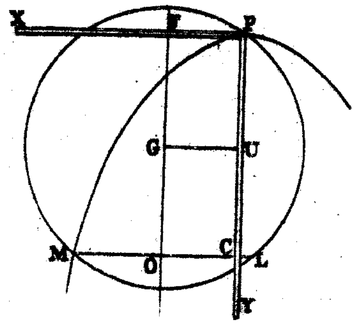


Fig. 29

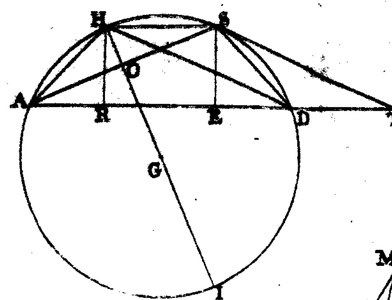


Fig. 30

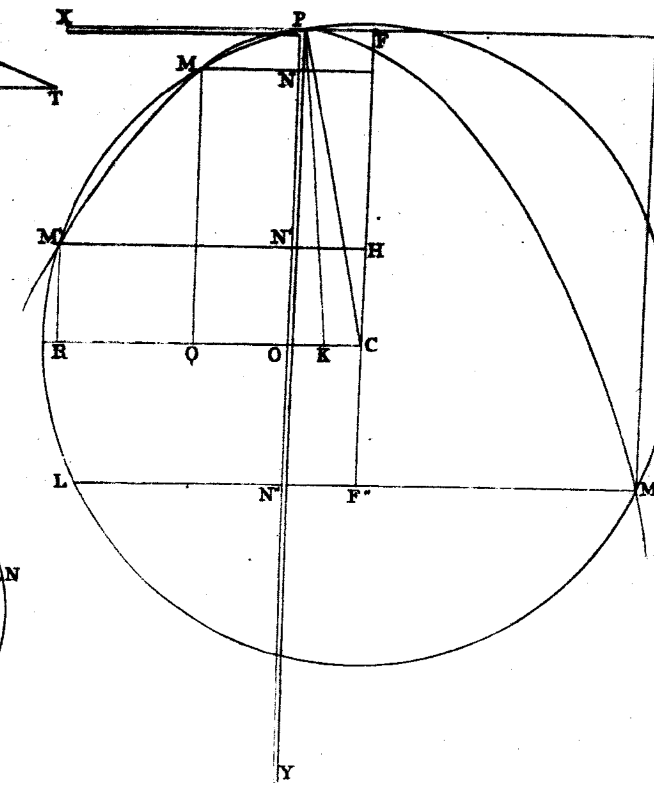


Fig. 31

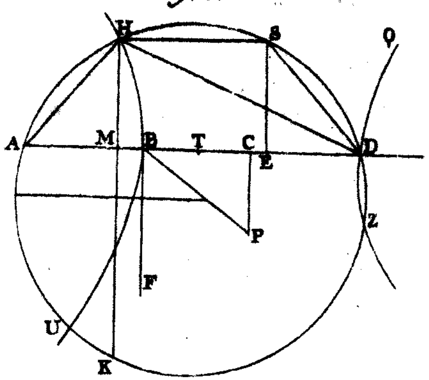


Fig. 32

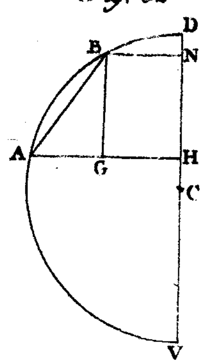


Fig. 33

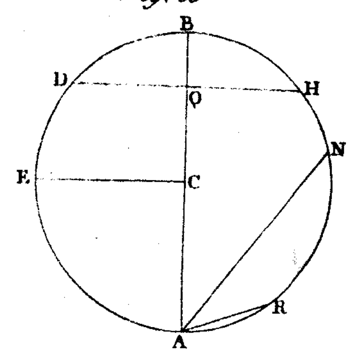


Fig. 34

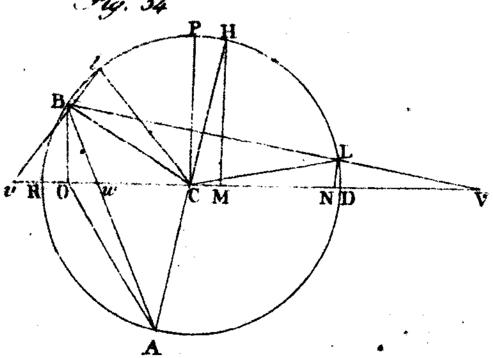


Fig. 35

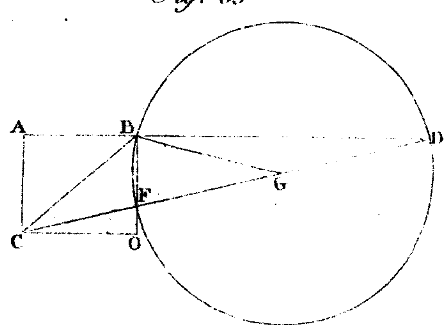


Fig. 36

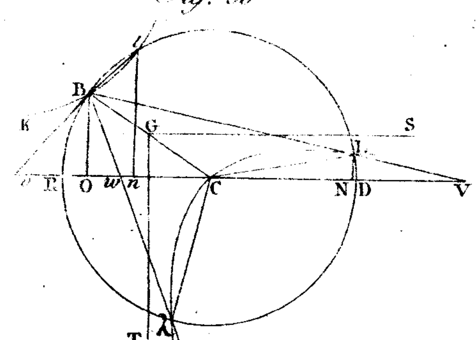
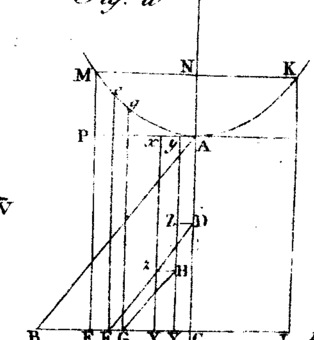


Fig. a



NOTE

CRITICHE, E GEOMETRICHE

SU I DUE PRECEDENTI TRATTATI ANALITICI

DELLE

SEZIONI CONICHE

E DE' LORO

LUOGHI GEOMETRICI

NOTE EC.

ALLA PREFAZIONE.

Non sarà certamente fuor di proposito il far qui qualche cenno de' motivi, che indussero il Fergola a comporre, e pubblicare, con più sollecitudine ch' ei non solea, questo trattato.

È un male necessariamente annesso a' progressi delle scienze, che questi non possano avvenire senza varietà di opinioni, e dispute, dal quale però sarebbe sembrato ad ognuno, che le Matematiche per loro natura avessero dovuto essere esenti. Nulladimeno gli stessi progressi rapidissimi di esse, dopo che l'analisi moderna divenne un mezzo assai potente a tentare, con più o meno successo, ogni quistione sul *quanto*, l' hanno assoggetata allo stesso impero dell' opinione. La facilità con cui procedevasi nell' invenzione co' metodi moderni fece sì, che questi continuamente acquistassero preponderanza sull' antico, che man mano si giunse a ridurlo, e ciò per un ristretto numero di persone, ad un affare quasi di pura erudizione; e finalmente si volle interamente sbandito dalle Scuole, anche per l' insegnamento geometrico. Progredendo in questa maniera di pensare, si arrivò finalmente a volere, che un metodo puramente analitico-algebrico campeggiasse nelle ricerche geometriche, sostituendo una combinazione di formole algebriche alle evoluzioni, che la Geometria doveva ottenere per la considerazione di figure, e sbandendo anche queste da' problemi, che riguardavano l' estensione di sua natura figurata. Ed in tal modo si pretese ridurre in uso delle Scuole uno sforzo accademico, che, come per saggio della virtù dell' analisi moderna, aveva voluto fare un grand' ingegno, nelle cui mani solamente l' analisi moderna era potente a qualunque ricerca.

Io non intendo entrare quì in esame sul merito, e sulla utilità del metodo antico, e de'nuovi metodi analitico-geometrici de' moderni, trovandomi aver ciò trattato in una dissertazione presentata alla Reale Accademia delle Scienze di Napoli, e che se non prima da questa, lo sarà da me pubblicata, negli Opuscoli che mi trovo di aver già promessi di dare in luce. Ma ho dovuto ciò accennare pel mio scopo presente, a fin di dire, che il Fergola, alla cui mente eran familiari tanto le antiche più astruse dottrine, che le più astratte escogitazioni de' moderni, credè di poter riescire a porre qualche freno alle sciocche pretensioni di chi, in grazia di una malintesa brevità, credeva, che si dovesse assolutamente sbandire dall' insegnamento delle Matematiche quello delle sezioni del cono all' antica maniera, come troppo lungo, e fastidioso, col dimostrare col fatto, che non men lunghe riescivano tali ricerche con la moderna analisi, quando queste si avessero voluto dare così complete come solevasi con l' antica. Aggiugnendo di più un parallelo tra l' analisi Cartesiano, e la moderna Geometria analitica, detta a *due coordinate*. Ed ei con saggezza grandissima va speculando spesso spesso in questo suo Trattato, nel mostrare col fatto la forza di questi due metodi analitici, nella risoluzione di una stessa quistione; ed indica all' uopo quante importanti ricerche siensi tralasciate da coloro, che, facendo prevalere l' opinione all' utilità, hanno voluto al solo metodo modernissimo attenersi. Sicchè quest' opera del Fergola dee aversi, non solamente come un compiuto trattato analitico delle curve coniche, pieno d' importanti ricerche, che da altri in opere di simil fatta soleansi tralasciare, e condotte a fine con grandissimo giudizio, e facilità, da potersi intendere da chiunque abbia pronti i più elementari precetti della Geometria, e dell' Algebra; ma ancora come un libro utilissimo a dare una conoscenza de' diversi metodi geometrico-algebrici, della loro forza, e maniera da servirsene con vantaggio.

Quest' opera stimabilissima pe' tanti pregi de' quali è adorna, fu pubblicata nel 1814, e non mancò a quell' epoca di corrispondere alle mire sopra indicate dell' autore di essa, e della sua scuola; ma a proporzione che l' istruzione matematica si è andata infievolendo; e che la morte del Fergola, e l' essersi ritirati i principali suoi allievi dall' insegnamento, ha dato luogo ad un totale abbandono per la scuola matematica napolitana, che, per più di trent'anni, procedendo su buone basi, si era messa in un rango distinto, da poter figurare tra le altre di Europa; e che persone prive di conoscenza di metodi, non solamente per l' invenzione, ma benanche per l' insegnamento, si mischiano nel regolar questo, non conoscendo che appena gli Elementi della Scienza, e nè anche bene, non è maraviglia, se veggansi banditi i buoni libri, e ceder luogo ad opere di minor merito; e se chiamisi ora ordine d' insegnamento, ciò che ad occhio perito non è che disordine, e rovina del medesimo. Il fatto comprova da giorno in giorno quello, che finora ho asserito, non ottenendosi più dalla presente istituzione matematica que' giovani istruiti e dotti, che di anno in anno si vedevano pullulare presso noi; e cominciandosi ad essere imbarazzati nella scelta di un professore, anche per gli Elementi di Geometria, mentre in altri tempi si abbondava in persone compiutamente istituite, eziandio ne' motodi d' inventare; e de' quali non pochi, per mancanza di posti nell' istruzione, han dovuto prendere altra carriera. Ed io non so, come questa semplice considerazione di fatto, non giunga a convincere chi regola luoghi d' istruzione, che questo male non può da altro dipendere, che dal non buono metodo d' insegnamento, e da' libri male adattati all' istruzione della gioventù nelle matematiche.

In fine, ritornando al mio oggetto, farò notare, che la presente prefazione del Fergola, non è già, come d' ordinario sogliono esser le prefazioni, una superfluità, da potersi comodamente tralasciare; ma piena di dottrina, e di solida istruzione, da servir di base a ciò, che nel Trattato dovrassi con particolarità esporre.

A' §§. 1. 171 E 311

Tra le diverse genesi immaginate per le curve coniche, la più geometrica, e la più semplice, è quella degli antichi, per la sezione del cono; poichè per essa non si richiede che un cono, ed un piano che lo seghi in data posizione ; e da ciò immantinente ne deriva il perimetro intero della curva , indefinito se tal sia , e la forma de' rami di essa , senza che vi sia bisogno di altra ricerca . Ma questo metodo , per la sua purità geometrica mal si presta, quando le proprietà di tali curve si vogliano con l' analisi moderna ricercare ; che però volendo a questo sistema attenersi, bisognava ricorrer ad altro ripiego, e più comodo .

Coloro che hanno perciò preso l' espediente di trattar di esse curve partendo dalle loro equazioni caratteristiche , o più generalmente dall' assumere l' equazione universale per le linee di second' ordine , hanno ottenuto il massimo vantaggio, per un metodo puramente analitico , nelle loro ricerche ; ma nel tempo stesso hanno deviato dal principale scopo , che si dee aver di mira in trattare argomento geometrico , qual' è quello , che il soggetto in quistione si presenti all' occhio , e si vegga qual sia : ed è diventato per essi fine delle loro ricerche, ciò che doveva esserne il fondamento , cioè l' esibizione della curva rappresentata dall' equazione . Aggiungasi a ciò , che l' è un forte salto nell' istituzione geometrica , che dopo essersi trattato del cerchio negli Elementi , incominciando dall' esibizione in figura del medesimo , si passi ad un tratto a voler persuadere , che un pareggiamento algebrico , o un' espressione implicita ridotta a zero rappresenti una curva ; di tal che questo metodo , convien dirlo , è alquanto duro , sebbene spedito per gran parte delle ricerche da farsi su tali curve : ed analogo a ciò che per ricerche simili nello stesso argomento delle curve in generale , conviene di necessità fare con l' ajuto dell' analisi moderna .

Che anzi queste stesse ragioni rendono desiderabile , che un altro metodo , col quale dalla rappresentazione della curva conica si passi all' equazione , servisse di scalino al caso più generale della considerazione di ogni curva per l' equazione , ove , come si è detto , non può altrimente farsi . Tra i due mezzi che si offrono a ciò, quello cioè della descrizione organica di una curva conica , e l' altra per punti , ambedue mezzi meccanici , il primo di essi sembra preferibile; poichè la natura di continuità, che forma la caratteristica fondamentale della curva che si vuol considerare, non vedesi affatto distrutta; ma solamente limitata, perchè tali sono i mezzi che si adoperano per ottenerla. È però che il Fergola, ad imitazione del de l' Hopital, e di altri sommi uomini, si è attenuto a questa genesi nel presente suo trattato; sebbene nell' applicazione del metodo algebrico allo sviluppo delle verità da dedurne per ciascuna curva dalla sua genesi, e nel risolvere que' problemi per esse che bisognava, siasi diversamente condotto, che da altri non si era fatto, rendendo questo suo metodo misto, non già un adattamento di simboli, e segni ad un puro ragionamento geometrico, per abbreviarlo, come il più delle volte trovasi fatto dal de l' Hopital; ma sì bene un puro maneggio analitico applicato ad un soggetto geometricamente definito, e spesso per le vie della Geometria apparecchiato, fino al segno da agevolare grandemente gli sviluppi dell'analisi algebrica, che vi si doveva applicare, per pervenire solo per la via di essa a quella conseguenza, che formava il soggetto in quistione. Si vedranno quindi campeggiare in questo trattato le teoriche generali delle algebriche equazioni, delle quali col sistema del de l' Hopital non si aveva bisogno: ed i giovani potranno da questo reciproco continuo passaggio da un soggetto geometrico ad un' espressione, o equazione algebrica, e dal ritorno da questa a soggetto geometrico acquistare quella persuasione, ch' è necessaria a poter in appresso far uso, nelle ricerche generali sulle curve, ed in altre di Geometria sublime, e trascendente, del puro metodo algebrico, senza esitazione.

È così solamente, che si acquista, senza accorgersene, quella *fede geometrica*, di cui parlava un valente matematico francese ad un suo allievo, che anch' egli ha molto onorate queste scienze, allorchè questi gli moveva difficoltà sulla metafisica del calcolo differenziali, dicendoli, *andate innanzi*, *e la fede vi verrà per istrada*. Di fatti le applicazioni geometriche di tal calcolo, co' loro risultamenti identici a quelli, che per le pure vie della Geometria ottengonsi, doveva a poco a poco distruggere, nell' animo di chi ne usava, ogni dubitazione sull' esattezza del medesimo; e stabilire così una dimostrazione indiretta de' principj di esso.

NOTA

AL §. 98.

Il nostro illustre giureconsulto, e matematico distintissimo de'suoi tempi *Antonio di Monforte*, conoscendo di quale importanza fosse la determinazione ne' problemi, del quale argomento tanto si erano occupati gli antichi nelle loro opere del *luogo risoluto*, e co' loro metodi, intraprese a trattarne, per così compiere quest' assunto nella novella Geometria analitica; e diede fuori le sue ricerche, nell' opuscolo pubblicato quì in Napoli nel 1691 col titolo: *De problematum determinatione tractatus*. Le dottrine ch' egli vi espone sono scritte con sì bell' ordine, e chiarezza, e sparse di vedute sì a proposito, che sembrami strano, ch' esse sieno men conosciute di quello che converrebbe; e che lo stesso autore, di cui già altre opere vi sono, non senza merito, tal che l' Opuscolo: *De sydcrum intervallis, et magnitudinibus*, pubblicato insieme al precedente, e l' opera postuma: *De stellarum motubus*, stampata in Firenze nel 1720, sia anche sfuggito alle ricerche del dotto, e laborioso storico delle Matematiche il signor Montucla, che non fa del Monforte alcuna menzione. Certamente che se egli ne avesse avuta notizia, e conosciuto quel suo primo lavoro, ch' è di supplemento alla Geometria Cartesiana, non lo avrebbe disgiunto dall' altro suo distinto nazionale, ed amico *Giacinto di Cristofaro*, di cui egli, sull' autorità di altri, parla con grandissimo vantaggio, nella pag. 167 vol. II. della seconda edizione della sua importante *Storia delle Matematiche*, per aver dottamente trattata la costruzione geometrica delle equazioni indeterminate del secondo grado.

A' §§. 16, E 73; 184, E 230; 322, E 342.

Ne' sopra notati paragrafi, dalla genesi assunta per ciascuna curva conica, si è tratta l' equazione particolare ad essa per l' asse, ed indi per ogni altro diametro; e da ciò poi si sono derivate tutte le altre proprietà di tali curve. Questo metodo può chiamarsi l' *analitico diretto* per un simile argomento; poichè stabilita le definizione del soggetto geometrico che dee trattarsi, da esso per mezzo di ripieghi analitici destinati ad abbreviare un ragionamento geometrico, si cerca di sviluppare man mano tutte le proprietà di quel soggetto particolare. Un tal cammino è però non solamente più proprio per la istituzione della gioventù, e più elementare; ma ancora più consentaneo alla ragione, e più adatto a trarre dal soggetto definito tutta la serie delle proprietà che lo adornano; che per vie puramente analitiche non si potrebbero mai tutte ottenere.

E da questo metodo, in bel modo, si potrà poi giugnere a stabilire un' equazion generale di second' ordine, che tutte quelle per le diverse curve coniche in se comprenda; e della quale non solamente potrà farsi uso per dedurne le loro proprietà comuni, principalmente quelle che riguardano le intersezioni tra due di esse, o con una retta, la natura de' loro rami, *ec.*; ma ancora servirsene di base per la dottrina de' luoghi geometrici di second' ordine, che di sua natura costituisce il metodo inverso del precedente; e che di tanta importanza è per la costruzione de' problemi di terzo, e quarto grado.

È questo, come abbiamo detto, il progresso naturale nell' insegnamento analitico di tali dottrine; poichè ognuno facilmente comprende, che prima sia il soggetto ad esistere, e poi la sua veste analitica; che può pure a più soggetti adattarsi: ed è però quello, che con molta sagacia, ed in tutta la sua estensione ha tenuto il nostro sig. Fergola.

Da quanto abbiamo detto già ciascun ravvisa, che il metodo inverso da trattar lo stesso argomento consista, nello stabilire l' equazione generale di secondo grado a due indeterminate, rappresentante tutte le linee di second' ordine: e da questa non solamente derivarne le proprietà comuni ad esse; ma anche la loro forma, e le proprietà particolari, per quanto è possibile.

Il solo vantaggio che si ha in quest'altro metodo, assai meno elementare, e proprio ad istituire del precedente, consiste, nel preparare esso la strada alle generali considerazioni sulle curve algebriche di ordini superiori, per le quali il numero, e la genesi di ciascuna non può geometricamente stabilirsi. Ed è però, che di esso si valse l'Eulero nella sua opera *delle linee curve in generale*, alla quale, ed a quella del Cramer, consigliamo ad attenersi chiunque voglia in tal genere di ricerche istruirsi con buon metodo, e con estensione. Ma il ripetiamo, il precedente vantaggio, che ritraesi da questo metodo inverso, non dee far sì, che diasi ad esso la prevalenza ne' trattati elementari sulle curve coniche; poichè ciò sarebbe lo stesso, che assoggettare le ricerche su queste a quelle stesse imperfezioni, dalle quali non possono andar esenti le considerazioni sulle curve di ordine superiore; e privarle del vantaggio che hanno, di poter essere col metodo diretto trattate. E basterà, per mettere una certa uniformità tra la loro trattazione, e quella delle curve in generale, ciò che poc' anzi ho detto, di comprendere, dopo la loro trattazione per equazioni particolari, queste in una sola equazione generale; il che servirà anche di conveniente scalino ad assuefar lo spirito de' giovani al metodo inverso, di cui debbono far uso nelle ricerche sulle altre curve.

Lo stabilimento di tal'equazione generale, si otterrà facilmente dalle equazioni semplicissime, per gli assi di esse curve, ottenute ne' §§. 16, 184, 264, e 322, con l'ovvio metodo della trasformazione delle coordinate, mediante la quale si vedrà, che tutte le curve coniche considerate, compreso il cerchio, sieno contenute nell' equazione generale

$$y^2 + \mathrm{A}xy + \mathrm{B}y + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x + \mathrm{E} = o$$

e da questa bisognerà partire pel metodo inverso, a fine di rilevare la forma, ed il numero di tali curve; ed ancora, che oltre quelle da noi sopra considerate, altre non ve ne sieno. (*Vegg. il* §. 58 *de' Luoghi Geometrici*).

Alla nota del §. 40.

L' equazione, che negli ordinarj trattati analitici sulle curve coniche, si assegna per la tangente un' ellisse condottale dal punto delle coordinate b, h, ch' è la seguente:

$$(a^2 h^2 + e^2 b^2)\, x^2 - 2a^2 c^2 bx - a^4 (h^2 - e^2) = o$$

dal nostro autore si dà come *assai più difficile*; *e di tediosa e gra-*

le costruzione dell' altra H da lui ottenuta : e tale è di fatto, conservandola in quella forma. Si potrà però ridurla a forma costruibile, ed identica a quella proposta dal Fergola, combinandola con l' altra equazione $x = \frac{a^2}{\rho}$ rilevata nel principio di tal paragrafo.

Alle note de' §. 71 e 75.

Queste note sono una comprova di ciò ch' egli si era proposto di mostrare, per la prevalenza del metodo Cartesiano (*Ved. Pref.*); e della poca esattezza, che taluni analisti moderni soglion porre ne' loro ragionamenti ; che principalmente in opere elementari è sommo sconcio.

Al §. 128.

Da quel che dice il Fergola in questo scol., si potrà rilevare con quanto profitto si possa, per mezzo di una convenevole trasformazione geometrica, rendere agevole una ricerca, che si voglia trattare con l' analisi algebrica.

Al §. 129. Part. ii., ed a' §§. 133. e 134.

Si osservi con quanta destrezza ha saputo quì il Fergola tradurre in un' analisi elementare una ricerca, che per l' innanzi, era stata oggetto di applicazione dell' analisi la più sublime.

Alla nota del §. 167.

Questo paragrafo, e la nota per esso sono uno di quegli argomenti di fatto, che nella prima nostra nota si disse aver il Fergola recati, per comprovar la prevalenza del metodo Cartesiano sulla modernissima maniera algebrico-geometrica. Al che aggiugneremo le seguenti considerazioni nostre.

E ben naturale, che colui il quale, trattando un soggetto, si vale, nelle ricerche intorno ad esso, di altre proprietà del medesimo già scoperte, si trovi a mezzo cammino fatto, rispetto a chi voglia sempre dalla natura universale del soggetto ripeterne ciascuna proprietà: d' altronde a me pare, che costoro i quali si hanno voluto attenere, in trattar dottrine sulle curve coniche, ad uno strettissimo metodo analitico, sieno stati indotti in equivoco, dal non ben considerar prima l'oggetto cui essi miravano co' loro lavori. Certamente che in questo genere di libri non si tratta d' invenzioni, ma d' istituzione de' giovani: e se è così, perchè nasconder loro la via più breve, e più agevole, per mostrargliene un' altra talvolta anche più lunga, e sempre penosa. L' arte d' inventare non si apprende studiando gli elementi di una scienza; ma segue questi, e viene quando già siasi fatta base di verità, e di conoscenze elementari. Ricordiamoci come procedevano gli antichi, che pure nell' invenzione non erano da star dopo i moderni; e non trascuriamo ancora di vedere come hanno praticato tutte le scuole matematiche de' moderni, fino a che non si è pensato a trasformar l' analisi geometrico-algebrica alla moda. Si paragoni il gran numero di uomini sommi ottenuti con quella istituzione a ciò che ora avviene; e si vedrà subito per quale delle due maniere stia la prevalenza. [*Vegg. al proposito di ciò che si è detto la nota* (1) *del Fergola al* §. 245].

Al §. 170.

Ciò che sta detto in questo paragrafo è di somma importanza a recarsi in un libro elementare; ed è però da dolersi, che altri abbian trascurato di avvertirlo, ne' loro trattati sulle curve coniche.

Alla nota (1) del §. 190.

Qui conviene osservare, che sebbene gli antichi avessero chiamate *opposte* le due iperboli, non però le dovettero considerare come due curve distinte; poichè essi, che dal cono ottennero le curve coniche, vider bene, che dalla continuità di una medesima superficie conica indefinita pe' due versi, la quale faceva un nodo nel vertice comune di tali due coni, le sezioni opposte si ottenevano; nè questa facile considerazione potè sfuggire la loro penetrazione d' ingegno. Ma un altro argomento di aver essi considerate le sezioni opposte come una sola curva a rami separati, lo dà la teorica delle intersezioni delle curve coniche da Apollonio recata nel Lib. IV. de' suoi *Conici*: poichè non poterono essi ignorare, che essendo tali curve della stessa natura, gli stessi in numero dovevano essere i punti d' intersezione tra loro, e col cerchio; che però non mai quattro punti d' intersezione sarebbero risultati dall' intersezione dell' iperbole col cerchio, o con altra curva conica, se ad un tratto, e come una curva sola, non si fossero considerate le sezioni opposte: nè essi si avrebber dovuto prevalere indistintamente dell' iperbole, dell' ellisse, e della parabola nella composizione de' problemi solidi.

Alla nota (1) del §. 270.

Si osservi come il Fergola va cogliendo l' occasione in questo suo libro, per istabilire precetti importanti di Geometria analitica, per la costruzione delle equazioni a' problemi con essa risoluti.

Al §. 357 e seg., fino al §. 372.

In questi paragrafi il Fergola, con bell'ordine, e chiarezza, espone quanto concerne la costruzione Cartesiana delle equazioni di terzo, e di quarto grado, premettendovi le verità necessarie riguardanti le intersezioni delle curve coniche col cerchio. Volendo in seguito illustrare questa dottrina con qualche esempio, sceglie molto a proposito il problema di: *Tirare da un punto dato la normale ad una data parabola*; del qual problema si prevale in seguito nella ricerca dell' evoluta per questa curva.

La soluzione ch' ei, con l' algebra Cartesiana reca a quel problema, analoga all' altra che Giacomo Bernoulli ne aveva data, volendo supplire alla mancanza di quella orditavi dall' Ugenio, è ridotta a determinare il cerchio che combinato con la parabola proposta, soddisfi al quesito. E ciò, come lo avverte lo stesso Fergola nella nota (1) al §.370, è della maggior eleganza nella soluzione de' problemi *solidi*, riducendone la composizione agli stessi artifizj, che pe' piani si adoperano, cioè alla descrizione del cerchio.

E giacchè siamo su questo argomento, non conviene che io tralasci di far quì notare, che il nostro illustre professore Francesco Bruno, in un esercizio di problemi solidi, da lui non ha molto pubblicato, diede del sopraddetto problema un' elegantissima soluzione geometrica, riducendone anche la composizione a combinare un cerchio con la data parabola, mediante un lemma, dal quale non pure ricavasi l'elegante soluzione di tal problema, ma ancora di alcuni altri, tra' quali quello risoluto dal Newton di: *Condurre nella parabola un ramo, che comprenda un' aja data, con l'altro ramo che va al vertice principale*, universalizzato per un punto qualunque nell' asse di quella curva, dalla combinazioue della quale con un determinato cerchio rimane il problema risoluto. E noi raccomandiamo agli estimatori dell' eleganza geometrica nella risoluzione de' problemi, la lettura di quest' opuscolo del Bruno, che ha per titolo: *Soluzioni geometriche di alcuni difficili problemi solidi*.

A' §§. DAL 405 AL 423.

Le ricerche che quì stabilisce il Fergola intorno le evolute, valendosi della sola algebra Cartesiana, non sono l' ultimo ornamento di questo suo Trattato; e per la maniera come sono esse condotte; e per avere con estrema eleganza recata quella dell' evoluta di un quadrante ellittico, che dall' Ugenio tentata, e proseguita dal Newton, da' Bernoulli, e dal de l' Hopital, non era però stata ancora condotta al suo termine, e proposta a' matematici come convenivasi; nè poi dopo costoro alcuno de' trattatisti moderni di curve di second' ordine aveva pur da lontano pensato a considerarla.

A' §§. DAL 435 AL 439.

Il Fergola ha voluto quì seguire la Geometria antica nello stabilire i principj per la misura delle superficie de' solidi principali generati dalle sezioni Coniche; e queste sue poche proposizioni sono col fatto un argomento, di ciò che disse in astratto il Montucla al proposito de' luoghi solidi del Viviani. E noi abbiamo nelle Sezioni Coniche geometricamente trattate seguito il Fergola nell' andamento di queste stesse ricerche.

AL §. 452.

L' enunciazione che dà il Fergola a questo teorema per la quadratura della superficie della sferoide, ad imitazione dell' Ugenio, e che poi dimostra elegantemente, è emula delle verità di Archimede sulla sfera, e sul cilindro.

A' §. 474, 475, 484, 485.

In questi §§. fa il Fergola rilevare per vie facilissime due sorprendenti paradossi, cioè, che sebbene non sia rettificabile algebricamente un arco parabolico, o ellittico; pure se ne possano assegnar sempre due, tal che la loro differenza sia rettificabile. E dal primo di tali paradossi egli si apre la strada alla soluzione del problema di assegnare un arco parabolico, che stia ad un altro dato in data ragione. Ed a questi si può aggiugnere il terzo paradosso, ch' egli in altre ricerche sull' iperbole fece pur noto, cioè, che possansi assegnare segmenti iperbolici a differenza rettificabile. (*Veggansi in fine le sue Sezioni Coniche illustrate dal Giannattasio*, *ed una Memoria da questo presentata alla R. A. delle Scienze*, *ed inserita nel Vol.* 1. *degli Atti*).

A' §§. 481 E 482.

Il teorema recato nel primo de' sopraddetti paragrafi assegna la superficie del cilindroide; e nel secondo il Fergola tesse brevemente la storia di tal ricerca. Su di che potranno consultarsi non solamente gli Opuscoli da lui citati; ma ancora il Vol. 1. degli Atti della nostra R. A. di Scienze. Non per tanto alcuno finora non si è mai rivolto a determinare la cubatura di un tal solido, per le vie geometriche, o per quelle che, in varj modi, può offrire l' analisi moderna.

Questa considerazione essendomisi presentata innanzi gli occhi, nel ristampare, che ora ho fatto per l' ultima volta, il terzo volume del mio Corso Geometrico, coll' occasione che della misura delle sezioni coniche, e de' solidi da esse generati ho stimato trattare in un libro a parte, ch' è il V° di quelli sulle curve coniche, ebbi ricorso al metodo proprio per queste ricerche di misura, a fin di assicurarmi, trattandosi di solido dall' iperbole generato della natura dell' espressione, che doveva rappresentarlo, per vedere se esso potevasi in seguito per le pure vie geometriche ottenere, come in quel libro conveniva recarlo, e come di fatti trovai aver luogo, col seguente calcolo.

* *fig. a.* S' indichino con a, b i semiassi CA, CB * dell' iperbole MAK generatrice del cilindroìde; sicchè tra le sue coordinate riferite al semiasse minore CB avrà luogo l' equazione $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$; e dinotando per $1 : \pi$ il rapporto del quadrato del raggio di un cerchio a questo, si avrà il cerchio del raggio FM espresso da πy^2, o da $\frac{\pi a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$; e 'l cilindretto che ha per base un tal cerchio, e per altezza l' elemento Ff dell' ascissa CF, cioè l' elemento di cilindroìde descritto dallo spazietto iperbolico FMmf rivolto dintorno a CB, verrà espresso da $\frac{\pi a^2}{b^2} dx\ (x^2 + b^2)$. Laonde il solido intero generato da FMAC, ch' è $\int \frac{\pi a^2}{b^2} dx\ (x^2 + b^2)$ risulterà uguale a $\frac{\pi a^2 x^3}{3b^2} + \pi a^2 x$; che ponendo nel primo termine

la $\frac{b^2}{a^2}y^2 - b^2$ invece di x^2, e riducendo, diviene $\frac{\pi y^2 x}{3} + \frac{2\pi a^2 x}{3}$
Ed il *primo di questi termini l' è il cono della base il cerchio del raggio* MF, *altezza* CF; *l' altro il doppio del cono che ha per base il cerchio del raggio* CA, *e per altezza la stessa* CF.

Ma volendo, come conviensi al presente Trattato, prevalersi in questa ricerca dell' analisi de' finiti, a fin di compiere convenevolmente l' argomento della misura del cilindroìde:

Si dinotino, come poc' anzi, per a, b i semiassi dell' iperbole generatrice di esso; ond'è che l' equazione alla medesima, per l' ascissa x presa sul semiasse secondario, e che dinoti l' altezza del cilindroìde da determinarsi, venghi espressa da $y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$. Una tale ascissa CF* si concepisca divisa negli elementi uguali Ff, fG . . . . . . XY, YC, di cui ciascuno si dinoti per ω; e per ogni punto di queste divisioni si tirino le ordinate fm, G g, *ec.* all' iperbole. Sarà l' elemento del cilindroìde generato dal rivolgersi lo spazietto FMmf intorno al semiasse secondario espresso da $\pi y^2 \omega = \frac{\pi a^2}{b^2}\omega(x^2 + b^2)$ $= \frac{\pi a^2}{b^2}x^2\omega + \pi a^2 \omega$. Similmente quello che verrà generato dall' altro spazietto fG g m corrispondente all' ascissa dal centro $x - \omega$, si troverà espresso da $\frac{\pi a^2}{b^2}\omega(x - \omega)^2 + \pi a^2 \omega$. E così l' altro appresso lo sarà da $\pi\frac{a^2}{b^2}\omega(x - 2\omega)^2 + \pi a^2 \omega$; e lo stesso in appresso. Di tal che quello il quale corrisponde all' ultimo elemento YC verrà dinotato da $\pi\frac{a^2}{b^2}(x - (n-1)\omega)^2 + \pi a^2 \omega$. Che però il cilindroìde proposto sarà quanto $n.\pi a^2 \omega + \pi\frac{a^2}{b^2}\Big[x^2 + (x - \omega)^2 + (x - 2\omega)^2 + \dots\dots\dots + (x - (n-1)\omega)^2\Big]$

* *fig. a.*

Ed è manifesto che l'espressione $n.\pi a^2 \omega$ sia il cilindro del cerchio del raggio CA, altezza x, cioè quello iscritto nel cilindroìde da misurarsi. Or i termini della serie compresa nel vincolo del secondo termine dell' espressione del solido quassù recata, essendo i quadrati de' termini della progressione aritmetica, di cui il primo termine è x, la differenza è $-\omega$, e l'ultimo termine ω; la som. di essi verrà espressa da $\frac{2x^3+3\omega x^2+\omega^2 x}{6\omega}$ che, essendo ω evanescente, si riduce ad $\frac{x^3}{3\omega}$, giacchè il termine $3\omega x^2$ l'è un elemento evanescente di $2x^3$, ed $\omega^2 x$ lo è di $3\omega x^2$ (*). Laonde quell' altro solido dinotato dal secondo termine dell' espressione sopraindicata si ridurrà a $\frac{\pi a^2 x^3}{3b^2}=\frac{\pi a^2}{b^2}x^2 \times \frac{x}{3}$. Ed è $\frac{\pi a^2}{b^2}$ il cerchio del raggio $\frac{ax}{b}$, cioè la quarta proporzionale in ordine a b, a, x, Quindi la precedente ultima espressione dinoterà il cono di tal cerchio per base, e per altezza la stessa del cilindroìde. Che però si otterrà per la misura di questo solido il seguente:

Teor. *Il cilindroìde generato da un quadrilineo iperbolico racchiuso tra l'asse primario; ed una qualunque altra ordinata all'asse secondario di un'iperbole, supera il cilindro in essa iscritto, la cui base è il cerchio del semiasse secondario, e l' altezza quella stessa del cilindroìde, pel cono della medesima altezza, che ha per base il cerchio del raggio la quarta proporzionale in ordine a'semiassi secondario e primario dell' iperbobole, ed all' altezza suddetta.*

Scol. 1. Volendo ridurre questa misura all' altra, che più sopra è stata rilevata col calcolo sublime, si prenda di nuovo l' espres-

---

(*) I due termini $2x^3$ e $3\omega x^2$ sono tra loro come $2x : 3\omega$; che però essendo 3ω evanescente rispetto a $2x$, lo è pure $3\omega x^2$ in riguardo a $2x^3$. E lo stesso potrà dirsi degli altri due termini $3\omega x^2$ ed $\omega^2 x$, che essendo tra loro come $3x : \omega$; diviene il secondo trascurabile rimpetto al primo: e tutti due, per conseguenza lo sono rispetto a $2x^3$.

sione $\pi \frac{a^2}{3b^2} x^3 + \pi a^2 x$, ed in essa si ponga $x^2 = \frac{b^2}{a^2}(y^2 - a^2)$, come risulta dall' equazione all' iperbole per l' asse secondario, sicchè quella diverrà $\frac{\pi y^2 x}{3} - \frac{\pi a^2 x}{3} + \pi a^2 x = \frac{\pi y^2 x}{3} + \frac{2\pi a^2 x}{3}$, identica all' altra di sopra ottenuta.

Scol. 2. E volendo recare al risultamento che ha dato luogo al precedente teorema una forma più geometrica, sarà questa la seguente: *Per l' estremo* F* *dell' ascissa* CF, *che dinota l' altezza del cilindroide generato dal quadrilineo iperbolico* CFMA, *si tiri la parallela* FD *alla congiungente* AB *il vertice dell' iperbole con l' estremo dell' asse secondario; sarà quel cilindroide quanto il cilindro in esso iscritto, più il cono che nel rivolgimento intorno a* CB *vien generato dal triangolo* DCF. E da questa forma enunciativa il sig. Sangro ha tratta la dimostrazione geometrica per la presente ricerca. [*Vegg. la Nota corrisp. nelle Sezioni Coniche illustrate dal Giannattasio*].

* *fig. a.*

A' LUOGHI GEOMETRICI

A' §§. 2. 100.

Le tante occasioni che ha sempre cercate il Fergola di parlare del problema *delle quattro rette*, ci obbligano a fare quì brevemente qualche cenno de' motivi che ve lo hanno indotto.

Fin da che egli fece pubblicare la prima volta la Parte I. de'suoi *Elementi di Geometria Sublime* nel 1791, volle recare la composizione, e poi l'analisi di tal problema, valendosi di quello che per tale oggetto aveva fatto il Newton, nel lemma XVII de' *Principj Matematici*. Accortosi in seguito della particolarità di tal soluzione, la quale non riguardava, che un caso solo, sebbene il più difficile dell' enunciazione recataci da Pappo, ed alla quale il Cartesio aveva soddisfatto con l' analisi moderna, si occupò a ricercar la soluzione generale del medesimo, secondo la mente degli antichi. Ma quando egli era riescito nel suo assunto, già il materiale preparato per la Parte II. di tal sua opera era di tanto cresciuto, che venneli in idea di pubblicare un Trattato compiuto sull' arte d' inventare, comprendendovi quanto d' importante si era escogitato su questo argomento dalle Greche Scuole, e dopo il rinascimento della Geometria, e l' applicazione dell'analisi ad essa. Ed allorchè nel 1809 ei mi diede incarico di pubblicare il *Prospetto* di una tale sua opera, col titolo di *Arte d' inventare in Matematiche*, in esso annunziò, che nel lib. II. avrebbe trattato *de'luoghi geometrici, e sinteticamente rapportati*, tra' quali doveva figurare quello *alle tre*, *ed alle quattro rette*. Nè più volle dopo ciò che, ristampandosi le Sezioni Coniche se ne facesse parola. Intanto però non cessò mai dall' indicare, ove l' occasione gliene sembrò opportuna, ch' egli possedeva tal soluzione; e 'l luogo sopra citato della presente sua opera, n' è tra gli altri il più manifesto indizio. E se pur tal soluzione non troverassi tra' suoi MS., a causa del fato sinistro di questi; pure ne faranno argomento a favore di ciò che diciamo qualche pezzo volante di carta sulla quale egli, al suo solito, aveva scritta qualche noterella, che la riguarda, ed una tavola di figure, che quando ci fu permesso percorrerli vi ravvisammo alla sfuggita. Intanto le continue affezioni nervose che il molestavano, rendendolo sempreppiù alieno dalla nojosa cura, e grave della stampa di ogni suo lavoro, fecero sì, ch' egli, nell' atto stesso che stampavasi questo Trattato de' luoghi geometrici, la di cui impressione cominciata nel 1818 durò pressochè due anni continui, già si era deciso a conservare inedito ogni altro suo lavoro; nè valsero persuasioni a farli mutar pensiero: che però spinse egli medesimo il suo allievo Sc. a distendere co' suoi principj, come quì il dice, la soluzione compiuta del problema delle quattro rette, attenendosi puramente alla mente degli antichi; ed a pubblicarla.

Un tal lavoro dello Sc., non vide la luce che dopo la morte del Fergola; poichè quantunque l' opera che lo riguarda porti la data di pubblicazione del 23; purtuttavia questa non dee aversi, che come quella della stampa del primo foglio, giacchè il volume intero di essa non comparve in luce che nel 25. Ed i geometri moderni cui sta a cuore la Geometria antica, sarebbero stati grati a questo nostro distinto professore, per aver loro estesa la desiderata soluzione compiuta, se a questa si fosse precisamente attenuto, senza oltrepassare i limiti dell' enunciazione di Pappo, e senza tante ricerche, ch' egli ha pensato che dal medesimo dovessero discendere. Ma noi non dobbiamo più dilungarci in ciò; perchè non abbiamo assunto un esame particolare del lavoro dello Sc., del che tratteremo altrove ne' nostri Opuscoli.

A' §§ 107 E 108.

Vi è stato chi ha detto tra noi, che la quistione di Pappo generalmente concepita, cioè: *Si a quodam puncto ad rectas positione datas ducantur rectae in datis angulis, et data sit ratio composita ex rationibus quas habet una e ductis ad unam, et altera ad alteram, et reliqua ad datam si fuerunt septem: vel si fuerint octo,* *et reliqua ad reliquam: continget punctum illud lineam positione datam. Ac pari modo fiet, quotumque fuerint ductae pares, vel impares numero*, era un mezzo per la classificazione delle curve algebriche. Ed il Fergola credè ciò nuovo. E pure a noi pare che nè l' uno, nè l' altro di questi oggetti abbia luogo. Imperocchè supposto vero il primo, e volendolo comprovare nel modo che vi si conduce il Fergola nel §. 108, egli altro non fa che eseguire, e dire quello stesso, che già erasi fatto dal Cartesio nella sua Geometria, il quale, dopo di aver esibita, come quì ha fatto il Fergola, la forma delle espressioni algebriche di quelle incidenti pel problema delle quattro rette, così conchiude generalmente: *Atque ita videre est, quod positione datis quotcunque lineis, et puncto* C, *semper totidem aliae ad illas duci possint in datis angulis (juxta quistionis tenorem), quae singulae exprimantur ad summum per tres terminos, quorum quidem unus compositus sit ex quantitate incognita y, multiplicata aut divisa per aliam quandam cognitam; secundus vero ex incognita quantitate x, etiam multiplicata aut divisa per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliqua omnino cognita. Excepto tantum si datae lineae sint omnes parallelae, vel lineae* AB *(quo casu terminus ex quantitate x compositus evanescet); vel etiam lineae* CB *(quo casu terminus ex quantitate y compositus evanescet); quemadmodum id plus satis per se manifestum est, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem spectat ad signa* + *et* — *quibus hi termini conjunguntur, ipsa quidem variari possunt modis omnibus, quos imaginari licet.*

Deinde videre etiam licet, quod multiplicando ita hasce lineas in se invicem, quantitates x et y, quae in producto reperiuntur, singulae non plures dimensiones habere possint, quam extiterint lineae (quarum explicationi inserviunt) quae ita sunt multiplicatae. Adeo ut nunquam plures duabus habiturae sint dimensiones, ubi productum illud ex duabus tantum linearum multiplicatione nascitur, nec plures tribus, cum productum illud ex trium tantum linearum multiplicatione genitum fuerit, et sic in infinitum etc.; (Geomet. Lib. I.)

E certamente, che il Cartesio non potea con più chiarezza esprimere, nè con maggiore estensione, ciò che dal Fergola si è accennato nel sopraddetto paragrafo. Ma egli non pensò di servirsi di questa proprietà geometrica per classificare gli ordini di linee algebriche; nè tampoco il credettero conveniente que' sommi analisti, che dopo lui trattarono diffusamente delle linee curve algebriche. Imperocchè quale di queste ne sarebbe mai la definizione? mentre se dicasi che: *linee di second'ordine sono quelle, nelle quali condotte tre o quattro rette di sito, le incidenti a queste da un punto dato in dati angoli, sieno tali, che il quadrato di una, o il prodotto di due stia a quello di altre due in data ragione*. Che: *linee di terzo ordine sieno le altre in cui condotte cinque, o sei linee rette di sito, le incidenti in esse da un punto dato in dati angoli diano il prodotto di due di esse in un'altra retta data, o il prodotto di tre, a quello di tre altre in data ragione, ec.*; non potrà questa maniera di distinguerle per una proprietà di esse non ancora nota dirsi chiara classificazione di quelle linee: e converrebbe prima dimostrare, che da tali principj si perviene ad equazioni di secondo grado a due indeterminate, di terzo, di quarto *ec.*, mentre tal classificazione dee essere algebrica e non geometrica; e se anche geometrica non è chiaro il criterio di differenza tra i diversi ordini.

Al Cap. V.

La dottrina delle intersezioni, come altrove l' abbiamo detto, è più agevole il trattarla con l' analisi moderna, che con ricerche geometriche; e certamente che se gli antichi di quel mezzo si valsero per la classificazione de' problemi, e per conoscere i casi delle loro soluzioni, molto stentato, ed anche dubbioso e limitato dovè essere il loro metodo; mentre al contrario facile, certo, e piano l' è quello de' moderni. *Qualunque sieno le equazioni particolari di condizioni ad un problema algebricamente risoluto; l' eliminata di esse convenevolmente ridotta, dinoterà il grado, ed il numero delle soluzioni possibili, ed impossibili di quel problema*. Ecco il principio fondamentale di questa ricerca. E se i metodi di eliminazione non fossero sì imperfetti, come lo sono, e dassero l' eliminata senza fattori alteranti il grado di essa, nulla vi resterebbe a desiderare per la conoscenza del grado di un problema. Intanto però nulla di svantaggio si ottiene da questa imperfezione di metodi di eliminazioni; poichè disgraziatamente non possediamo altro metodo di costruzione geometrica, oltre i problemi del quarto grado.

Sieno adunque

$$A + By + Cy^2 = o$$
$$A' + B'y + C'y^2 = o$$

due equazioni indeterminate del 2° grado, ove la A, B, C; A', B', C' dinotino funzioni della x: ed esse rappresentino due curve coniche rapportate al medesimo asse, e col medesimo principio delle ascisse; e però tra loro combinate. È noto dalle algebriche dottrine, che la loro eliminata in y, o in x debba generalmente ascendere al quarto grado; che però vi dovranno essere quattro soluzioni geometriche soddisfacenti al problema di tal' equazione, se essa abbia quattro radici reali: e delle quattro ne potranno essere due uguali corrispondenti ad un punto di contatto delle due curve in combinazione, o pur due uguali tra loro, e due altre anche tra loro, corrispondenti a due punti di contatto; o finalmente tutte quattro uguali corrispondenti ad un solo punto di contatto duplice; nel qual caso l' equazione al problema sarebbe la potenza quarta di un binomio. Ed in questi due ultimi casi il problema si comporrebbe senza l' artifizio di combinazione di quelle curve coniche.

Che se tali equazioni si appartenessero al cerchio, allora le A, A' sarebbero espresse da trinomj della forma $px - x^2 + q$, $p'x - x^2 + q'$, le B, B' da m, n, e le C, C' ciascuna dall'unità; ond'è che l' eliminata risulterebbe del secondo grado; il che coincide con la verità dimostrata da Euclide nella prop. X del Lib. III.

La prop. VII. del Fergola è un principio intuitivo della maniera come noi abbiamo esposto il teorema fondamentale delle intersezioni; poichè si vede chiaro, che la x nell' eliminata sia l' ascissa comune alle ordinate pe' punti d' intersezioni nelle due curve; e che le y dinotino le ordinate per tali punti.

Nella prop. VIII, e ne' suoi corollarj si esibiscono dal Fergola le regole per la costruzione delle equazioni del terzo e quarto grado, con tutte le ricerche, che si esigono per questo importante argomento, le quali può dirsi che sono quello cui miravano tutte le altre precedenti; e si esibiscono in prospetto alcune Tavole de' principali luoghi geometrici per tal costruzione; sicchè questa ne' diversi casi si riduce ad un semplice meccanismo.

A' §. 124, 125, E 126.

Il Fergola entra nell' esame particolare di quali luoghi geometrici tra quelli precedentemente assegnati convengano meglio alla costruzione delle equazioni del terzo, e quarto grado; e principalmente se alla maniera Cartesiana convenga dar la preferenza, combinando una data parabola col cerchio; o pure seguire il Newton, che emulo in ciò del Cartesio, di cui questo sublime tratto d' invenzione facevali ombra, propose la combinazione del cerchio con l' ellisse, perchè questa curva è per la sua natura più finitima al cerchio, e per la maniera meccanica di descriverla più vi si avvicina. Ed egli discute questo argomento in favore del Cartesio, come prima di lui lo avevano, senza entrare in discettazioni, deciso Giacomo Bernoulli, il Cramer, l' Eulero, ed anche taluni geometri d' Inghilterra, tal che il Backer, e l' Halley; ond' è che finalmente, per coronar l' opera, ei passa ad esporre il metodo Cartesiano, che poi illustra con varj esempj di principali problemi solidi ingegnosamente risoluti, ed elegantemente costruiti. Ma siami ciò non ostante permesso di quì aggiugnere su tal proposito un breve mio ragionamento.

L' artifizio di costruzione geometrica di un' equazione di terzo o di quarto grado; e così potrebbe di altre di superior grado anche dirsi, consiste: I° in saper scegliere per tale oggetto, tra gl' infiniti luoghi geometrici diversi i più facili a maneggiarsi, onde ottenere i determinanti della loro descrizione; II° in darli tali da esserne la più facile possibile la descrizione e la combinazione. Or pel primo di questi oggetti ch' è puramente algebrico, chi può mai dubitare che contribuisca ad agevolarlo la semplicità dell' equazione della parabola, e principalmente di quella che può dirsi *modulo*, che il Cartesio introduce per uno de' luoghi geometrici universali della sua costruzione; e mediante il quale poi, con estrema facilità, ne deriva l' altra equazione al cerchio, e'l centro e'l raggio di esso, onde all' istante si effettuisce la desiderata combinazione di tali curve. E questi vantaggi sono proprj per la costruzione Cartesiana, e non per la Newtoniana, e la rendono perciò molto prevalente.

Dall' altra parte, se è vero che la descrizione dell' ellisse è più semplice di quella della parabola; e soggiugnerò pure, che di essa, quando si tratti di operazioni da tavolino, compiuto se ne ha il perimetro, mentre ciò non avviene, nè può avvenire della parabola; pure vi è da riflettere, e ciò forma il principal pregio del metodo Cartesiano, che la parabola modulo, l' è universale per tutt' i problemi, e che l' intera operazione è ridotta a conbinarvi il cerchio, il cui centro e 'l raggio solamente varia. Di tal che può dirsi, che il Cartesio con ciò abbia mirabilmente ridotta la costruzione *solida* a *piana*. E ciò non può mai avvenire per l' ellisse, dovendo questa variarsi in ogni costruzione.

Al che se aggiungasi, che con la costruzione Cartesiana tante debbono risultare le intersezioni, quante saranno le radici reali dell' equazione proposta; e che quindi non si esige per distinguere quante sieno le radici reali alcuna nuova ricerca: chi potrà mai negare al metodo Cartesiano la preferenza? Di tal che ben ebbe egli ragione di dire esser questa sua regola *omnium, quas quis exoptare queat generalissima et perfectissima.*

Che se la combinazione del Newton non può prender prevalenza su quella del Cartesio; chi mai oserà di proporre per una novità senza oggetto, e senza alcun merito, di combinar l' iperbole col cerchio? In tal caso agli svantaggi poc' anzi detti per l' ellisse si unirà anche quello di una più difficil descrizione, dovendo tracciarsi non solo l'una iperbole, ma l' opposta, e l' indefinito corso de' rami di tali curve.

Al §. 131.

Quì il Fergola, per illustrare il metodo Slusiano risolve lo stesso problema di *condurre da un punto dato la normale alla parabola*, che già aveva risoluto nelle Sezioni Coniche al §. 369. (*Veg. la nostra Nota corrisp.*)

AL §. 143.

Il Fergola grande apprezzatore, e coltivatore della Geometria antica, non poteva essere a meno di non esser toccato dal vedere, che que' saggi nostri maestri fossero per metodi particolari pervenuti a stabilire, che tutta la famiglia de' problemi solidi si potesse ridurre o a trisegar l' arco, o a duplicare il cubo; sicchè questi erano i problemi cardinali, ed i principj di riduzione per la risoluzione di tutti i problemi solidi. Ed avevano essi per elegante la soluzione di un di questi problemi, quando all' un de' sopraddetti si fosse ridotto. Ed ora che le ricerche del Cartesio hanno per principj universali e diretti mostrata tal riduzione, seguendo lo stile della moderna analisi, l' era ben conveniente che ciò si facesse marcare apertamente in un' opera il cui oggetto era la composizione de' problemi solidi analiticamente risoluti.

Io altrove mi ho proposto di ragionare sulla riduzione de' problemi alla maniera degli antichi, del quale argomento parmi, che non siensi finora raccolti dalle loro opere que' precetti, che convengonsi a stabilire con metodo e per iscienza questo argomento di molta importanza per l' invenzione geometrica.

AL §. 145.

Si vegga per questo Problema l' elegante soluzione geometrica del Bruno ridotta alla combinazione della parabola col cerchio, nell' Opuscolo più sopra citato.

AL §. 135. E SEG. FINO AL 142, E DAL 146 ALLA FINE.

Le ricerche, che stabilisce il Fergola in tutti questi §§. meritano una particolare attenzione, per non trovarsi da altri con tanta estensione e chiarezza, nè in tanti diversi modi messo ad esame il famoso problema della trisezione angolare; al che potrà aggiugnersi la soluzione fondata su principj trigonometrici recata nella nostra Trigonometria (*Lib. VI. pr.* 4).

ERRATA.

Pag. 35 *v.*	24	n	n^2
39	26	BN	BO
53	23	CA	CK
94	15	N	M
	20	$\frac{c^2x}{a^2}$	$\frac{e^2x}{a^2}$
107	26	$\int$MO	$\int$NO
148	12	tang. L	$\frac{\text{sen.NLG}}{\text{sen.NGL}}$
178	5	BM	B*d*
341	2	$\left(\frac{GA}{GB}\right)^2$	$\left(\frac{GB}{GA}\right)^2$
343	25	PM′	PN′
359		*Al Cas.* 11. *corrisponde la fig.* 22.	
392	19	E	C
394		FP*e*	EPE′E″
397	16	NL	HL
403	15 *e* 16	AN	AH
404	15	AND	AHD
	18	MN^2	MH^2