TRATTATI
DEL
CALCOLO DIFFERENZIALE
DI
VITO CARAVELLI,
E DEL
CALCOLO INTEGRALE
DI
VINCENZO PORTO
PER USO DEL
REGALE COLLEGIO MILITARE

IN NAPOLI

NELLA STAMPERIA DE' RAIMONDI
CON LICENZA DE' SUPERIORI
MDCCLXXXVI.

Pe.

Pesi e
Ella sap
Perchè

La

A DISCRETI LETTORI.

I Due trattati, che, per ubbidire a Sogetto rispettabilissimo, si veggono pubblicati in questo tomo, e trattati destinati per uso del regale Collegio militare, sono il primo di mia mano, e 'l secondo di mano assai migliore. M'era già noto che D. Vincenzo Porto, mio discepolo un tempo, ed ora mio stretto amico, uomo quanto versato nelle scienze matematiche, altrettanto di spedita comprensiva, di felici, ed elevati talenti, e di non ordinaria facilità nel comunicare ad altri la più astruse idee, tiene da più tempo preparato un compiuto trattato sul Calcolo integrale, per farne un dono al pubblico, subito che circostanze opportune il permetteranno. Avendo io pregato tale amico, per risparmiare alquanto la mia penna, resa dagli anni e dalle fatiche ormai pesante, e per dare il primo urto alla sua assai spedita, di fare uno stretto e sugoso compendio del detto trattato, a fine di poterlo aggiugnere al lavoro da me fatto sul Calcolo differenziale, m' ha subito gentilmente compiaciuto; ed io mi fo pregio ora di pubblicarlo, sicuro di rendere in tal modo miglior servizio alla gioventù militare, e al pubblico, che reso non l' avrei, se da me fatto si fosse. Onde siccome io mi protesto tenuto a tale amico della compiacenza usatemi; così spero che la gioventù militare, e 'l pubblico li saprà grado del suo lavoro, che troverà eseguito senza misterj, e con quella facilità, che ho io sempre amata, e non so se conseguita nelle mie deboli produzioni. Gradite intanto tali fatiche, qualunque sieno le mie, e vivete felici.

IN-

INDICE

De' Capi contenuti in questo Trattato.

TRATTATO DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. SI chiamano *quantità costanti* quelle, che sono date, e assegnate di grandezza; e *quantità variabili* quelle, che sono indeterminate di grandezza, cioè d' infiniti diversi gradi di grandezza suscettibili.

AVVERTIMENTO I.

2. Ancorchè ogni quantità possa essere all' infinito accresciuta, e diminuita: nondimeno quando una è data, e assegnata di grandezza, non può ricevere nè accrescimento, nè diminuzione, senza che divenghi un' altra. Così se un cerchio è dato, e assegnato, non sono suscettibili d' accrescimento, e di diminuzione nè il raggio, nè la periferia, nè l' area, senza che il cerchio divenghi un altro; laddove l' ordinata a qualunque suo diametro, e l' ascissa corrispondente possono variare all' infinito tra 'l zero, e la grandezza del raggio, senza che il cerchio divenghi un altro. Similmente se è data, e assegnata una parabola, non possono neppure ricevere accrescimento, e diminuzione per rispetto di qualunque diametro nè il parametro, nè la distanza del vertice del diametro dal fuoco, senza che la parabola divenghi un' altra; laddove l' ordinata, e l' ascissa corrispondente possono all' infinito variare di grandezza tra 'l zero, e l' istesso infinito, senza che la parabola divenghi un' altra.

COROLLARIO.

3. Quindi in un dato cerchio sono quantità costanti il raggio, la periferia, e l' area, e quan-

e quantità variabili l'ordinata a qualunque diametro, e l'ascissa corrispondente. Similmente in una data parabola sono relativamente a qualunque diametro quantità costanti il parametro, e la distanza del vertice del diametro dal fuoco, e quantità variabili l' ordinata, e la corrispondente ascissa.

AVVERTIMENTO II.

4. Contrassegneremo sempre nel calcolo differenziale le quantità costanti colle prime lettere dell'alfabeto, cioè con a, b, c, d, e, ec. fino alla x esclusivamente; e le variabili colle ultime x, y, z, ec..

DEFINIZIONE II.

5. Diciamo in genere *differenziale* di qualsisia quantità variabile l'accrescimento, o la diminuzione infinitamente picciola, che acquista in passando da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo. In ispezie poi il differenziale si dice del *primo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto della quantità istessa, del *secondo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto del differenziale del primo grado, del *terzo grado*, se è infinitamente picciolo per rispetto del differenziale del grado secondo; e così procedendo innanzi.

AVVERTIMENTO.

6. Si noti che l' espressioni algebraiche, contrassegnanti i differenziali di qualunque grado delle quantità variabili, si ricavano, secondo s' insegnerà appresso, dall' espressioni algebraiche contrassegnanti le medesime quantità.

DEFINIZIONE III.

7. Chiameremo *differenziali algebraici* in genere l' espressioni algebraiche, contrassegnanti differenziali di quantità variabili. In ispezie poi un differenziale algebraico si dirà del *grado primo*, *secondo*, *terzo*, ec., secondochè contrassegnerà il differenziale del grado primo, secondo, terzo, ec. di qualsisia quantità variabile.

DEFINIZIONE IV.

8. Si dirà *differenziare una grandezza algebraica*, quando si vorrà da essa ricavare il differenziale algebraico, contrassegnante il differenziale della quantità, che la grandezza algebraica dinoterà.

DEFINIZIONE V.

9. Si chiama *calcolo differenziale* la scienza,

za, che insegna i metodi di determinare i differenziali algebraici d' ogni grado, e a sviluppare verità geometriche, e fisiche con mettere a calcolo i detti differenziali.

AVVERTIMENTO I.

10. Nel calcolo differenziale contrassegnandosi quantità variabili con x, y, z, ec., si contrassegneranno i differenziali di esse del primo grado con dx, dy, dz, ec., del secondo grado con ddx, ddy, ddz, ec., o con d^2x, d^2y, d^2z, ec., del terzo grado con $dddx$, $dddy$, $dddz$, ec., o con d^3x, d^3y, d^3z, ec., e così procedendo innanzi; vale a dire che tali differenziali si contrassegneranno colle medesime lettere x, y, z, ec., postavi innanzi il d coll' esponente indicante il grado del differenziale; il quale d s' adoprerà solamente per mera caratteristica de' differenziali, e non per altro uso.

COROLLARIO I.

11. Quindi nel calcolo differenziale l' espressioni dx, d^2x, d^3x, ec. non dinoteranno prodotti della grandezza contrassegnata da x moltiplicata per le contrassegnate dal d, d^2, d^3, ec., ma differenziali algebraici del grado primo, secondo, terzo, ec. della grandezza contrassegnata da x.

COROLLARIO II.

12. Non essendo una quantità costante suscettibile d' accrescimento, e di diminuzione, il differenziale d' una quantità costante sarà nullo, e s' esprimerà col zero. Sicchè se a contrassegna una quantità costante, sarà $da = 0$.

COROLLARIO III.

13. Contrassegnando con x una quantità variabile, verrà essa in un grado di grandezza infinitamente prossimo contrassegnata da $x + dx$, se s' accrescerà, e da $x - dx$, se si diminuirà. Dunque un differenziale algebraico si deve prendere col $+$, qualora contrassegna accrescimento, e col $-$, qualora dinota diminuzione.

COROLLARIO IV.

14. Finalmente contrassegnando una grandezza infinitamente picciola dx per rispetto di quella, ch' esprime x, d^2x per rispetto di quella, che dinota dx, d^3x per rispetto di quella, che contrassegna d^2x, ec.; si potrà nel calcolo differenziale prendere senza errore sensibile $x \pm dx = x$, $dx \pm d^2x = dx$, $d^2x \pm d^3x = d^2x$, ec.

AVVERTIMENTO II.

15. Per brevità dinoteremo ne' calcoli doversi differenziare qualunque grandezza algebraica, con iscriverla in una parentesi, e metterla innanzi la caratteristica d. Così con $d(a^2 x)$, $d(ax-x^2)$, $d(a^2+ax-xy)$, ec. si dinoterà doversi le grandezze algebraiche $a^2 x$, $ax-x^2$, $a^2+ax-xy$, ec. differenziare.

AVVERTIMENTO III.

16. Finalmente si noti che del calcolo differenziale, non altrimenti che dell' Integrale, di cui si tratterà appresso, il cavaliere Newton n' è stato l' inventore, essendosene egli, prima che altri ne conoscessero le regole, avvaluto come d' un metodo suo particolare in isciorre più problemi, che sembravano alle forze geometriche, e algebraiche superiori. L'acutissimo Leibnitz il primo indagò sì fatto metodo, e ne pubblicò le regole, attribuendosi perciò la gloria dell' invenzione. Tale gloria però li venne contrastata non dal Newton, che unì al sommo merito una uguale moderazione d'animo, ma dalli suoi discepoli; e la gara letteraria di pochi degenerò tosto in gara di nazioni; il che ha fatto che il litigio restasse sempre indeciso. Chi penetra intanto le scoperte

del Newton, scorge in esse il carattere luminoso dell' inventore de' detti calcoli. E' da sapere però che Newton chiama *grandezze fluenti* le variabili, *flussioni* i differenziali, e *calcolo delle flussioni* il calcolo differenziale; e di più contrassegnando con x una fluente, contrassegna la flussione del primo grado con $\dot{x}$, la flussione del secondo grado con $\ddot{x}$, la flussione del terzo grado con $\dddot{x}$, ec.; vale a dire che contrassegna le flussioni coll' istessa x, postivi su uno, due, tre, ec. punti a proporzione del grado della flussione. Del resto come l' uso ha reso famigliari la denominazione di differenziale, e la caratteristica d del Leibnitz; così abbiamo stimato opportuno avvalerci della denominazione di differenziale, e della detta caratteristica d: tanto più che la caratteristica del Newton, riducendosi a punti, riesce poco comoda ne' calcoli, e facile a far cadere in equivoci.

CAP. I.

Delle regole per determinare i differenziali algebraici del primo grado.

DEFINIZIONE I.

17. Chiameremo per brevità dell' espressione *variabile* ogni contrassegnante di grandezza variabile, e *termini variabili* d'una grandezza algebraica composta quei, che contengono variabili.

DEFINIZIONE II.

18. Una grandezza algebraica si dirà *del primo grado*, se conterrà una, o più variabili del primo grado, senza che le variabili, quando saranno più, si troveranno insieme moltiplicate.

PROBL. I.

19. *Insegnare il modo di differenziare le grandezze algebraiche del primo grado.*

SOLUZIONE.

I.

Sia da differenziare ax.

Contrassegnando x il componente variabile della quantità espressa da ax; passato tale componente da un grado di grandezza ad un' altro infinitamente prossimo, verrà esso espresso da $x + dx$. Dunque in tale altro grado di grandezza del detto componente la quantità espressa da ax, verrà espressa da $a(x+dx)$, o sia da $ax + adx$. Or tali due espressioni ax, ed $ax + adx$ dell' istessa quantità in due gradi di grandezza infinitamente prossimi del suo componente variabile differiscono per adx. Sicchè il differenziale di ax è $= adx$.

II.

Sia da differenziare $a^2 \pm ax$.

Contrassegnando pure x il componente variabile della quantità espressa da $a^2 \pm ax$; passato tale componente da un grado di grandezza ad un' altro infinitamente prossimo, verrà esso espresso da $x + dx$. Onde in tale altro grado di grandezza del detto componente la quantità espressa da $a^2 \pm ax$, verrà espressa da $a^2 \pm a(x + dx)$; o sia da $a^2 \pm ax \pm adx$. Ma tali due espressioni $a^2 \pm ax$, e $a^2 \pm ax \pm adx$ dell' istessa quantità in due gradi di grandezza in-

infinitamente prossimi del suo componente variabile differiscono per $\pm adx$. Dunque il differenziale di $a^2 \pm ax$ è pure $= \pm adx$.

III.

Sia da differenziare $a^2 + bx + cy - ez$.

Contrassegnando x, y, z i componenti variabili della quantità espressa da $a^2 + bx + cy - ez$; passati tali componenti da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo, verranno espressi da $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Sicchè in tale altro grado di grandezza de' detti componenti la quantità espressa da $a^2 + bx + cy - ez$, verrà espressa da $a^2 + b(x + dx) + c(y + dy) - e(z + dz)$, o sia da $a^2 + bx + cy - ez + bdx + cdy - edz$. Or tali due espressioni $a^2 + bx + cy - ez$, e $a^2 + bx + cy - ez + bdx + cdy - edz$ dell'istessa quantità in due gradi di grandezza infinitamente prossimi de' suoi componenti variabili differiscono per $bdx + cdy - edz$. Dunque il differenziale di $a^2 + bx + cy - ez$ è $= bdx + cdy - edz$.

Similmente si trova il differenziale d'ogni altra grandezza algebraica del primo grado. Quindi, per differenziare qualunque grandezza algebraica del primo grado, conviene procedere secondo la seguente

RE-

REGOLA.

1. *Se si tratta di grandezza algebraica semplice, si muti in essa la variabile nel suo differenziale, e s'avrà il differenziale cercato.*

2. *Se poi si tratta di grandezza algebraica composta, si prendano i soli termini variabili co' segni, che hanno, e si mutino in essi le variabili ne' differenziali de' medesimi; s'avrà in tal modo il differenziale, che si cerca.*

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO.

20. Si noti che se nella grandezza algebraica $a^2 + ax$ per esempio il differenziale dell'x deve contrassegnare non accrescimento, ma diminuzione; allora tale differenziale non è $+ dx$, ma $- dx$, e conseguentemente il differenziale di $a^2 + ax$ non è $+ adx$, ma $- adx$. Similmente se in $a^2 + bx + cy - ez$ col crescere della grandezza x le altre y, e z si diminuiscono; il che si conoscerà dalle circostanze delle quantità da differenziare: in tale caso i differenziali di y, e z non sono $+ dy$, $+ dz$, ma $- dy$, $- dz$, e conseguentemente il differenziale di $a^2 + bx + cy - ez$ non è $bdx + cdy - edz$, ma $bdx - cdy + edz$.

PRO-

PROBL. II.

21. *Insegnare il modo di differenziare il prodotto* x y *di due variabili del primo grado.*

SOLUZIONE.

Contrassegnando x, ed y i componenti variabili della quantità espressa da $x\,y$; passati tali componenti da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo, verranno espressi rispettivamente da $x + dx$, $y + dy$. Sicchè in tale altro grado di grandezza de' detti componenti, la quantità espressa da xy, verrà espressa da $(x + dx)(y + dy)$, o sia da $xy + xdy + ydx + dxdy$. Or tali due espressioni xy, e $xy + xdy + ydx + dxdy$ dell' istessa quantità in due gradi di grandezza infinitamente prossimi de' suoi componenti variabili differiscono per $xdy + ydx + dxdy$; e conseguentemente per $xdy + ydx$, potendosi senza errore sensibile tralasciare $dxdy$, come infinitamente picciolo per rispetto e di xdy, e di ydx. Dunque il differenziale di xy è $= xdy + ydx$. Quindi, per differenziare il prodotto di due variabili del primo grado, si deve procedere secondo la seguente

RE-

REGOLA.

Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare la prima variabile pel differenziale della seconda, e l' altro con moltiplicare la seconda variabile pel differenziale della prima, e si sommino insieme. S' avrà con tale somma il differenziale del prodotto delle due variabili del primo grado.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO I.

22. Insegnato il modo di differenziare il prodotto di due variabili del primo grado, è facile a comprendere in che modo si deve differenziare qualsisia altro prodotto di variabili del primo grado, qualunque ne sia il numero di esse, e qualsisia di tali prodotti, che racchiudono anche costanti.

I.

Sia da differenziare il prodotto xyz.

Si metta $xy = v$, sarà $xyz = vz$. Onde sarà

$$d(xyz) = d(vz) = vdz + zdv.$$

Ma

$$v = xy,$$

e

$$dv = xdy + ydx.$$

Sicchè

$$d(xyz) =$$

$$vdz + zdv = xydz + xzdy + yzdx.$$

II.

II.

Sia da differenziare il prodotto xyzv.

Si metta $xyz = w$; farà $xyzv = wv$. Onde farà

$$d(xyzv) = d(wv) = wdv + vdw.$$

Ma

$$w = xyz,$$

e

$$dw = xydz + xzdy + yzdx.$$

Sicchè

$$d(xyzv) = wdv + vdw = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx.$$

III.

Sia da differenziare il prodotto $a^3 xyzv$.

Si metta $xyzv = w$; farà $a^3 xyzv = a^3 w$. Onde farà

$$d(a^3 xyzv) = d(a^3 w) = a^3 dw.$$

Ma essendo

$$w = xyzv,$$

farà

$$dw = xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx.$$

Dunque

$$d(a^3 xyzv) = a^3 dw = a^3 xyzdv + a^3 xyvdz + a^3 xzvdy + a^3 yzvdx.$$

Similmente procedendo s'avrà il differenziale del prodotto di qualunque altro numero di variabili, e prodotto, che racchiuda sì,

sì, o no costanti; e si conoscerà sempre che per avere il differenziale del prodotto di qualunque numero di variabili del primo grado, e prodotto, che comprenda sì, o no variabili, si deve procedere secondo la seguente

REGOLA GENERALE.

Si moltiplichino separatamente i differenziali di tutte le variabili per la grandezza da differenziare, esclusane però da essa in ogni moltiplicazione la variabile, che si comprende differenziata, e se ne facciano de' prodotti particolari. La somma di tali prodotti dà il differenziale cercato.

AVVERTIMENTO II.

23. Si noti che le grandezze algebraiche composte, che contengono i detti prodotti di variabili ne' diversi termini di esse, si differenziano con determinare i differenziali di tutt'i termini, e unirli insieme co' segni, che l'appartengono: perchè di tanto varia una grandezza algebraica composta, passando le variabili, che racchiude, da un grado di grandezza ad un altro infinitamente prossimo, quanto è ciò, che nasce unendo insieme co' segni, che l'appartengono, tutt' i differenziali de' suoi termini. Onde se si dovrà differenziare $a^4 + a^3 x - b^2 xy + cxyz$; essendo

d

$$d\,(a^4) = 0$$
$$d\,(a^3 x) = + a^3 dx$$
$$d\,(-b^2 xy) = -b^2 xdy - b^2 ydx$$
$$d\,(cxyz) = + cxydz + cxzdy + cyzdx.$$

Sarà

$$d\,(a^4 + a^3 x - b^2 xy + cxyz) = a^3 dx - b^2 xdy - b^2 ydx + cxydz + cxzdy + cyzdx.$$

Similmente se si dovrà differenziare $(a+x)(b-y)$; essendo $(a+x)(b-y) = ab + bx - ay - xy$, e

$$d\,(ab) = 0$$
$$d\,(bx) = + bdx$$
$$d\,(-ay) = - ady$$
$$d\,(-xy) = - xdy - ydx,$$

sarà

$$d\,(a+x)(b-y) = bdx - ady - xdy - ydx.$$

AVVERTIMENTO III.

24. Si noti pure che il differenziale di $(a+x)(b-y)$ si può determinare senza l'attuale moltiplicazione di quest'altro modo

$$d\,(a+x) = + dx$$
$$d\,(b-y) = - dy.$$

Dunque

$$d\,(a+x)(b-y) = (b-y)\,dx + (a+x) \times -dy = bdx - ydx - ady - xdy.$$

PROBL. III.

25. *Insegnare il modo di differenziare qualunque rotto, che racchiude variabili del primo grado.*

SOLUZIONE.

Contrassegni $\frac{x}{y}$ qualunque rotto, che racchiude variabili del primo grado. Si metta $\frac{x}{y} = v$; sarà $x = vy$. E perciò

$$dx = vdy + ydv.$$

Ma

$$v = \frac{x}{y}.$$

Dunque

$$dx = \frac{x}{y}\,dy + ydv,$$

ed

$$y^2 dv = ydx - xdy,$$

e conseguentemente

$$dv = d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Per avere adunque il differenziale di qualunque rotto, che racchiude variabili del primo grado, si deve operare secondo la seguente

REGOLA.

1. *Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare il denominatore pel differenziale del numeratore, e l'altro con moltiplicare il numeratore pel differenziale del denominatore, e dal primo si sottragga il secondo.*

2. *Il residuo, che nasce, si divida pel quadrato del denominatore.*

Si ha in tal modo il differenziale del detto rotto.

ESEMPIO I.

Sia da differenziare $\frac{x}{a}$.

Essendo $da = 0$; sarà $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{adx - x \times 0}{a^2}$
$= \frac{dx}{a}$.

ESEMPIO II.

Sia da differenziare $\frac{a}{x}$.

Essendo pure $da = 0$; sarà $d\left(\frac{a}{x}\right) =$

$$\frac{x \times 0 - adx}{x^2} = -\frac{adx}{x^2}.$$

ESEMPIO III.

Sia da differenziare $\frac{axy}{bzv}$.

Essendo

$$d\,(axy) = axdy + aydx$$
$$d\,(bzv) = bzdv + bvdz;$$

sarà

$$d\left(\frac{axy}{bzv}\right) =$$

$((bzv\,(axdy + aydx) - axy\,(bzdv + bvdz)):(b^2 z^2 v^2) = (axzvdy + ayzvdx - axyzdv - axyvdz):(bz^2 v^2)$.

ESEMPIO IV.

Sia da differenziare $\frac{ax - yz}{ax + yz}$.

Essendo

$$d\,(ax - yz) = adx - ydz - zdy$$
$$d\,(ax + yz) = adx + ydz + zdy;$$

sarà

$$d\left(\frac{ax - yz}{ax + yz}\right) =$$

$$((ax+yz)(adx - ydz - zdy) - (ax - yz)(adx + ydz + zdy)) : (ax + yz)^2 = \frac{2ayzdx - 2axydz - 2axzdy}{(ax+yz)^2}.$$

PROBL. IV.

26. *Insegnare il modo di differenziare qualunque potenza* x^m.

SOLUZIONE.

Essendo x^m un prodotto di tante indeterminate x, quante ne dinota l' esponente m della potenza; sarà il $d\,(x^m)$ la somma di tutt' i prodotti, che si hanno con moltiplicare il differenziale di ciascuna x, componente x^m, pel prodotto di tutte le altre, cioè per x^{m-1} (§ 22). Ma ognuno di tali prodotti uguaglia $x^{m-1}\,dx$, ed il numero di essi è dinotato da m. Sicchè sarà

$$d\,(x^m) = mx^{m-1}\,dx.$$

Per differenziare adunque qualunque potenza, si deve procedere secondo la seguente

REGOLA.

Si moltiplichino insieme l' esponente della potenza, la potenza istessa, diminuito il suo esponente d'una unità, ed il differenziale della grandezza, che si trova innalzata alla potenza; s' avrà col prodotto il differenziale della potenza.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPJ.

1. $d\,(x^2) = 2xdx$.
2. $d\,(x^3) = 3x^2\,dx$.
3. $d\,(x^4) = 4x^3\,dx$.
4. $d\,(x^3 y^2) = 3x^2 y^2\,dx + 2x^3 ydy$.
5. $d\,(2ax - x^2) = 2adx - 2xdx$.
6. $d\,(2ax - x^2)^3 = 3\,(2ax - x^2)^2 \times (2adx - 2xdx)$.
7. $d\,(a+x)^3 \times (b-y)^2 = 3\,(a+x)^2 \times (b-y)^2 \times (dx) + 2\,(a+x)^3 \times (b-y) \times -dy$.
8. $d\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{3x^2 y^2\,dx - 2x^3 ydy}{y^4} = \frac{3x^2 ydx - 2x^3\,dy}{y^3}$.
9. $d\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{mx^{m-1}\,dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}\,dx$.
10. $d\left(\frac{x}{a^3+x^3}\right) = \frac{(a^3+x^3)dx - 3x^3\,dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{dx}{a^3+x^3} - \frac{3x^3\,dx}{(a^3+x^3)^2}$.

11. d

11. $d\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{n} = n\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{n-1} \times$
$\left(\frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{xdy - ydx}{x^2}\right) = n$
$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{n-1} \times \left(ydx\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}\right) - xdy\right.$
$\left.\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y^2}\right)\right) = n\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{n-1} \times (ydx -$
$xdy) \times \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right).$

12. $d(x^m \times (a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.})^r) = mx^{m-1}(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.})^r dx + rx^m(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.})^{r-1} \times (nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1} + 3nex^{3n-1} + 4nfx^{4n-1}, \text{ec.})dx = (m(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.}) + rx \times (nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1} + 3nex^{3n-1} + 4nfx^{4n-1}, \text{ec.})\, x^{m-1} dx\,(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n})^{r-1} = (ma + mbx^n + mcx^{2n} + mex^{3n} + mfx^{4n}, \text{ec.} + rnbx^n + 2rncx^{2n} + 3rnex^{3n} + 4rnfx^{4n}, \text{ec.})(x^{m-1}dx)(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.})^{r-1} = (ma + \overline{m + rn}.\, bx^n + \overline{m+2rn}.\, cx^{2n} + \overline{m + 3rn}.\, ex^{3n} + \overline{m + 4rn}.\, fx^{4n}, \text{ec.})(x^{m-1}dx)(a + bx^n + cx^{2n} + ex^{3n} + fx^{4n}, \text{ec.})^{r-1}.$

PROBL. V.

27. *Insegnare il modo di differenziare qualunque grandezza radicale variabile.*

Soluzione.

Contrassegni $\sqrt[m]{x^n}$ qualunque grandezza radicale variabile. Si metta $\sqrt[m]{x^n} = v$; sarà $x^n = v^m$. Onde sarà

$$nx^{n-1}\,dx = mv^{m-1}\,dv.$$

E perciò

$$dv = \frac{nx^{n-1}\,dx}{mv^{m-1}} = \frac{nx^{n-1}\,dx \times v}{mv^m} = \frac{nx^{n-1}\,dx \times \sqrt[m]{x^n}}{mx^n} = \frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}.$$

Ma

$$dv = d\sqrt[m]{x^n}.$$

Sicchè

$$d\sqrt[m]{x^n} = \frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}.$$

Per differenziare adunque qualunque grandezza radicale variabile, si deve procedere secondo la seguente

REGOLA.

1. *Si facciano due prodotti, uno con moltiplicare l'esponente della potenza della grandezza di sotto il segno radicale pel differenziale dell'istessa grandezza, considerata senza il detto esponente, e l'altro con moltiplicare l'esponente del segno radicale per l'istesso radicale, dando però alla grandezza di sotto il segno per esponente l'eccesso dell'esponente del segno radicale sull'esponente proprio.*

2. *Di tali due prodotti se ne faccia un rotto, che abbia per numeratore il primo, e per denominatore il secondo.*

Il quoziente darà il differenziale del radicale.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da differenziare $\sqrt{ax - x^2}$.

Essendo in tale caso $m = 2$, $n = 1$, sarà il differenziale cercato $= \dfrac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax - x^2}}$.

ESEMPIO II.

Sia da differenziare $\sqrt[3]{ax - x^2}$.

Essen-

Essendo in tale altro caso $m = 3$, $n = 1$; sarà il differenziale cercato $= \dfrac{adx - 2xdx}{3\sqrt[3]{(ax - x^2)^2}}$.

ESEMPIO III.

Sia da differenziare $\sqrt[5]{(ax - x^2)^2}$.

Essendo ora $m = 5$, $n = 2$; sarà il differenziale cercato $= \dfrac{2adx - 2xdx}{5\sqrt[5]{(ax - x^2)^3}}$.

ESEMPIO IV.

Sia da differenziare $\sqrt{ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2}}$.

Essendo in tale caso $m = 2$, ed $n = 1$; ed essendo di più $d(ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2})$ $= adx + 2xdx + \dfrac{ay^2dx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axy^2}}$; sarà il differenziale cercato $= \dfrac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + x^2 + \sqrt{a^4 + axy^2}}} +$

ay^2

$$\frac{ay^2\,dx + 2axydy}{2\sqrt{a^4+axy^2} \times 2\sqrt{ax+x^2} + \sqrt{a^4+axy^2}}.$$

ESEMPIO V.

Sia da differenziare $\dfrac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{\sqrt{xy+y^2}}$.

Essendo

$$d\sqrt[3]{ax+x^2} = \frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}},$$

$$d\sqrt{xy+y^2} = \frac{xdy+ydx+2ydy}{2\sqrt{xy+y^2}};$$

sarà il differenziale cercato =

$$\frac{\sqrt{xy+y^2}\times adx+2xdx}{(xy+y^2)\times 3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}} - \frac{\sqrt[3]{ax+x^2}}{(xy+y^2)} \times \frac{(xdy+ydx+2ydy)}{2\sqrt{xy+y^2}} = \frac{adx+2xdx)}{\sqrt{xy+y^2}\times 3\sqrt[3]{(ax+x^2)^2}}$$

$$- \frac{\sqrt[3]{ax+x^2}\times(xdy+ydx+2ydy}{(xy+y^2)\times 2\sqrt{xy+y^2}}.$$

AV.

AVVERTIMENTO.

28. Si noti che sempre che occorreranno nelle grandezze algebraiche da differenziare più variabili, si dovrà sempre badare di prendere col + i differenziali di quelle, che dinoteranno accrescimenti, e col — i differenziali di quelle, che dinoteranno diminuzioni; il che nell' uso del calcolo differenziale si conoscerà dalle circostanze delle grandezze contrassegnate dall' espressioni algebraiche, che si dovranno differenziare. Insegnati intanto i modi di determinare i differenziali algebraici del primo grado, procediamo all' uso de' medesimi: però prima conviene premettere i due seguenti capi per l' intelligenza del detto uso. Perciò sia il

CAP.

CAP. II.

Si determinano l'equazioni alle curve, delle quali equazioni si dovrà continuamente far uso in seguito.

DEFINIZIONE.

29. Si dice *equazione al cerchio*, *alla parabola*, *all' ellisse*, *all' iperbola*, ec. quell' equazione indeterminata, ch' esprime la relazione delle coordinate della curva, che limita il cerchio, la parabola, l' ellisse, l' iperbola, ec., e che, dando all' ascissa qualunque valore, che possa appartenerlo, i valori dell' ignota dell' equazione determinata, che ne risulta, limitano i corrispondenti punti della medesima curva.

PROBL. VI.

30. *Determinare l' equazione al cerchio*.

SOLUZIONE.

Contrassegnino A M B qualunque mezzo cerchio, AB il suo diametro, ed O il centro. Fig. 1

Da qualunque punto M della periferia si cali su A B la perpendicolare M P, e si congiunga il raggio OM. Si mettano l' ascissa O P $= x$, l' ordinata corrispondente P M $= y$, e'l raggio $= r$; saranno A P $= r - x$, PB $= r + x$. Essendo per la natura del cerchio $PM^2 = AP \times PB$, sarà $y^2 = r^2 - x^2$; e tale equazione, come esprimente la relazione delle coordinate MP, PO è l' equazione al cerchio. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

31. Se si mette AP $= x$, computando l' ascissa non dal centro O, ma dall' estremo A del diametro; perchè PB $= 2r - x$, sarà a questo modo $y^2 = 2rx - x^2$; e questa sarà un' altra equazione anche al cerchio.

AVVERTIMENTO II.

32. Si noti che se A M B è una curva tale, che sia $PM^3 = AP^2 \times PB$, o $PM^3 = AP \times PB^2$, la figura A M B si dice *cerchio di secondo genere*, per distinguerlo da quello, di cui s' è determinata l' equazione, che chiamano i Geometri *cerchio di primo genere*. Similmente si dirà *cerchio di terzo genere*, se sarà $PM^4 = AP^3 \times PB$, o $PM^4 = AP^2 \times PB^2$, o $PM^4 = AP \times PB^3$; *cerchio*

chio di quarto genere, se farà $PM^5 = AP^4 \times PB$, o $PM^5 = AP^3 \times PB^2$, o $PM^5 = AP^2 \times PB^3$, o $PM^5 = AP \times PB^4$, e così procedendo all' infinito.

COROLLARIO.

33. Sicchè sono l'equazioni al cerchio di primo genere $y^2 = x(2r - x)$, al cerchio di secondo genere $y^3 = x^2(2r - x)$, $y^3 = x(2r - x)^2$, al cerchio di terzo genere $y^4 = x^3(2r - x)$, $y^4 = x^2(2r - x)^2$, $y^4 = x(2r - x)^3$, al cerchio di quarto genere $y^5 = x^4(2r - x)$, $y^5 = x^3(2r - x)^2$, $y^5 = x^2(2r - x)^3$, $y^5 = x(2r - x)^4$, e così procedendo all' infinito. Quindi tutte l' equazioni de' cerchi di tutti gl' infiniti diversi generi si possono rappresentare dall'equazione generale $y^{m+n} = x^m (2r - x)^n$. E perciò tutte le curve, che terminano sì fatti cerchi, si dicono *curve d' un' istessa famiglia*, cioè *della famiglia de' cerchi*.

PROBL. VII.

34. *Determinare l' equazione alla Parabola*.

SOLUZIONE.

Contrassegnino BAC qualunque parabola, AQ il suo asse, ed AH il parametro dell' asse. Fig 2

asse. Da qualunque punto M della curva si cali sull' asse la perpendicolare MP, e si mettano l' ordinata $MP = y$, l' ascissa corrispondente $AP = x$, e'l parametro $AH = p$. Essendo per la natura della Parabola $PM^2 = AP \times AH$, sarà $y^2 = px$; e tale equazione, come esprimente la relazione delle coordinate AP, PM sarà l' equazione alla Parabola. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

AVVERTIMENTO.

35. Si noti che se BAC è una curva tale, che sia $PM^3 = AP^2 \times AH$, o $PM^3 = AP \times AH^2$, la figura BAC si dice *parabola di secondo genere*, o *parabola cubica*, per distinguerla da quella, di cui s' è determinata l' equazione, che chiamano i Geometri *parabola di primo genere*, o *parabola apolloniana*. Similmente si dirà *parabola di terzo genere*, se farà $PM^4 = AP^3 \times AH$, o $PM^4 = AP^2 \times AH^2$, o $PM^4 = AP \times AH^3$; *parabola di quarto genere*, se farà $PM^5 = AP^4 \times AH$, o $PM^5 = AP^3 \times AH^2$, o $PM^5 = AP^2 \times AH^3$, o $PM^5 = AP \times AH^4$; e così procedendo all' infinito.

COROLLARIO.

36. Sicchè sono l' equazioni alla parabola di primo genere $y^2 = px$, di secondo genere

re $y^3 = x^2 \times p$, $y^3 = x \times p^2$, di terzo genere $y^4 = x^3 \times p$, $y^4 = x^2 \times p^2$, $y^4 = x \times p^3$, di quarto genere $y^5 = x^4 \times p$, $y^5 = x^3 \times p^2$, $y^5 = x^2 \times p^3$, $y^5 = x \times p^4$, e così procedendo all' infinito. Quindi tutte l' equazioni delle parabole di tutti gl' infiniti diverſi generi ſi poſſono rappreſentare dall' equazione generale $y^{m+n} = x^m \times p^n$. E perciò tutte le curve, che limitano sì fatte parabole, ſi dicono pure *dell' iſteſſa famiglia*, cioè *della famiglia delle parabole*.

PROBL. VIII.

37. *Determinare l' equazione all' Elliſſe.*

SOLUZIONE.

Contraſſegnino ACB qualunque mezza elliſſe, AB il ſuo aſſe maggiore, O il ſuo centro, OC il ſuo ſemiaſſe minore, ed AH il parametro, che l' appartiene relativamente all' aſſe maggiore. S' intenda da qualunque punto M della curva calata ſu AB la perpendicolare MP; e ſi mettano il ſemiaſſe maggiore $OA = a$, il ſemiaſſe minore $OC = c$, l' ordinata $PM = y$, l' aſciſſa corriſpondente $OP = x$, e 'l parametro $AH = p$. Saranno $AP = a - x$, e $PB = a + x$. Eſſendo per la natura della curva $PM^2 : AP \times PB = AH : AB$, o come $OC^2 :$ Fig. 3

C AO²

AO^2, ſarà $y^2 : a^2 - x^2 = p : 2a$, o come $c^2 : a^2$. Sicchè $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$, ovvero $y^2 = \frac{c^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; e ciaſcuna di tali equazioni, come eſprimente la relazione delle coordinate OP, PM, ſarà l' equazione all' elliſſe. Ch' è ciò, che biſognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

38. Se ſi mette $AP = x$, computando l'aſciſſa non dal centro O, ma dall'eſtremo A dell' aſſe maggiore; perchè $PB = 2a - x$, ſarà $y^2 : 2ax - x^2 = p : 2a$; onde $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$; e queſta ſarà un' altra equazione pure all' elliſſe.

AVVERTIMENTO II.

39. Si noti che ſe ACB è una curva tale, che ſia $AH : AB = PM^3 : AP^2 \times PB$, o come $PM^3 : AP \times PB^2$, la figura ACB ſi dice *elliſſe di ſecondo genere*, per diſtinguerla da quella, di cui s' è determinata l' equazione, che chiamano i Geometri *elliſſe di primo genere*. Similmente ſi dirà *elliſſe di terzo genere*, ſe ſarà $AH : AB =$

PM^4

$PM^4 : AP^3 \times PB$, o come $PM^4 : AP^2 \times PB^2$, o come $PM^4 : AP \times PB^3$; *ellisse di quarto genere*, se farà $AH : AB = PM^5$, $AP^4 \times PB$, o come $PM^5 : AP^3 \times PB^2$: o come $PM^5 : AP^2 \times PB^3$, o come $PM^5 : AP \times PB^4$; e così procedendo all'infinito.

COROLLARIO.

40. Sicchè sono l'equazioni all'ellisse di primo genere $y^2 = \frac{p}{2a} \times x\,(2a - x)$, all'ellisse di secondo genere $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2\,(2a - x)$, $y^3 = \frac{p}{2a} \times x\,(2a - x)^2$, all'ellisse di terzo genere $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^3\,(2a - x)$, $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^2\,(2a - x)^2$, $y^4 = \frac{p}{2a} \times x\,(2a - x)^3$, all'elisse di quarto genere $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^4\,(2a - x)$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^3\,(2a - x)^2$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^2\,(2a - x)^3$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x\,(2a - x)^4$, e così procedendo all'infinito. Quindi tutte l'equazioni dell'ellissi di tutti gl'infiniti diversi generi si

possono rappresentare dall'equazione generale $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m\,(2a - x)^n$. E però tutte le curve, che limitano sì fatte ellissi, si dicono anche *dell'istessa famiglia*, cioè *della famiglia dell'ellissi*.

PROBL. IX.

41. *Determinare l'equazione all'iperbola.*

SOLUZIONE.

Fig. 4 Contrassegnino LAN qualunque iperbola, Aa il suo asse primario, Bb il suo asse secondario, O il centro, ed AH il parametro, che l'appartiene relativamente all'asse primario. S'intenda da qualunque punto M della curva calata sull'asse primario la perpendicolare MP, e si mettano $OA = a$, $OB = c$, $AH = p$, l'ordinata $MP = y$, e l'ascissa corrispondente $OP = x$; saranno $AP = x - a$, ed $aP = x + a$. Essendo per la natura della curva $PM^2 : aP \times PA = AH : Aa$, o come $OB^2 : OA^2$. Sarà $y^2 : x^2 - a^2 = p : 2a$, o come $c^2 : a^2$. Sicchè $y^2 = \frac{p}{2a}\,(x^2 - a^2)$, ovvero $y^2 = \frac{c^2}{a^2}\,(x^2 - a^2)$; e ciascuna di tali equazioni, come esprimente la relazione delle coordinate OP, PM

PM, è all'iperbola. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

AVVERTIMENTO I.

42. Se si mette AP $= x$, computando l'ascissa non dal centro O, ma dal vertice A; perchè è aP $= 2a + x$, sarà $y^2 : x(2a+x) = p : 2a$. Onde $y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)$; e questa sarà un'altra equazione anche all'iperbola.

AVVERTIMENTO II.

43. Si noti che se LAN è una curva tale, che sia AH : Aa = PM^3 : AP$^2 \times$ Pa, o come PM^3 : AP $\times$ Pa^2, la figura LAN si dice *iperbola del secondo genere*, per distinguerla da quella, di cui s'è già determinata l'equazione, e che i Geometri chiamano *iperbola di primo genere*. Similmente si dirà *iperbola del terzo genere*, se sarà AH : Aa = PM^4 : AP$^3 \times$ Pa, o come PM^4 : AP$^2 \times$Pa^2, o come PM^4 : AP$\times$Pa^3, *iperbola di quarto genere*, se sarà AH : Aa = PM^5 : AP$^4 \times$ Pa, o come PM^5 : AP$^3 \times$ Pa^2, o come PM^5 : AP$^2 \times$ Pa^3, o come PM^5 : AP $\times$ Pa^4, e così procedendo all'infinito.

COROLLARIO.

44. Quindi sono l'equazioni all'iperbola di primo genere $y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)$, di secondo genere $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2(2a+x)$, $y^3 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)^2$, di terzo genere $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^3(2a+x)$, $y^4 = \frac{p}{2a} \times x^2(2a+x)^2$, $y^4 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)^3$, di quarto genere $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^4(2a+x)$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^3(2a+x)^2$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x^2(2a+x)^3$, $y^5 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)^4$, e così procedendo all'infinito. Tutte l'equazioni adunque delle iperbole di tutt'i diversi infiniti generi si possono rappresentare dall'equazione generale $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m (2a+x)^n$. E perciò tutte le cur-

curve, che limitano sì fatte iperbole, si dicono *dell' istessa famiglia*, cioè *della famiglia delle iperbole*.

AVVERTIMENTO III.

45. Si noti pure che v'è un'altra equazione semplicissima all'iperbola, considerando le ordinate relativamente alli suoi asintoti. Di fatto sia OR uno degli asintoti dell'iperbola LAN, e da qualunque punto M della curva s'intenda menata ad esso l'ordinata MQ. Poste l'ordinata $MQ = y$, e l'ascissa corrispondente $OQ = x$, e posto anche il lato della potenza dell'iperbola $= a$; essendo per la natura della curva $OQ \times QM = a^2$, sarà $xy = a^2$; e questa semplicissima equazione, come esprimente la relazione delle coordinate OQ, QM riferite agli asintoti, è anche un'equazione all'iperbola di primo genere. Del resto relativamente agli asintoti sono l'equazioni alle iperbole di secondo genere $x^2 y = a^3$, $xy^2 = a^3$; alle iperbole di terzo genere $x^3 y = a^4$, $x^2 y^2 = a^4$, $xy^3 = a^4$, e così procedendo all'infinito. E perciò tutte l'equazioni delle iperbole di tutt'i diversi infiniti generi relativamente agli asintoti si possono rappresentare dall'equazione generale $x^m y^n = a^{m+n}$.

AVVERTIMENTO IV.

46. Si noti finalmente che sebbene non ci prendiamo qui la pena di determinare l'equazioni di altre curve, come non al bisogno della gioventù militare, che ama d'essere introdotta ne' calcoli sublimi: nondimeno nel capo seguente daremo una succinta idea della curva logaritmica, e ne determineremo la sua equazione, per insegnare in seguito il modo di differenziare e le quantità logaritmiche, e le quantità esponenziali. Perciò sia il

---

CAP. III.

Della curva logaritmica, e del modo di differenziare le quantità logaritmiche.

DEFINIZIONE.

Fig. 5 47. Sia LMNO una curva riferita alla retta AB, e tale, che procedendo nella AB da A verso B le ascisse in qualunque progressione aritmetica, le corrispondenti ordinate, ad angoli retti disposte per rispetto di AB, procedano in qualunque progressione ne geometrica. Sì fatta curva LMNO si dice dalli Geometri *logaritmica*, o *logistica*.

AVVERTIMENTO.

48. Si dà a tale curva la denominazione di logaritmica, perchè alle ordinate di esse le ascisse corrispondono, come ai numeri i logaritmi.

COROLLARIO I.

49. Sia da qualunque punto M della logaritmica LMNO menata alla linea delle ascisse AB l'ordinata PM. Poste l'ordinata PM $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$, e dinotando con l il logaritmo della grandezza, a cui si mette innanzi, sarà l'equazione alla detta curva $x = ly$.

COROLLARIO II.

50. Sieno in oltre PM, QN due ordinate qualunque della logaritmica LMNO. S'intendano tirate pm parallela, ed infinitamente vicina a PM, ed MR parallela ad AB. Saranno Pp differenziale di AP, ed Rm differenziale di PM; e di più l'elemento Mm della curva si potrà senza sensibile errore prendere per una lineetta retta, tal che, prolungata in T, saranno TM la tangente della curva in M, e PT la sottan-

tangente corrispondente. S'intenda di più presa Qq = Pp, e s'intendano menate per q la qn parallela a QN, e per N la NS parallela pure ad AB. Si potrà l'elemento Nn della curva prendere anche per una lineetta retta, che, prolungata in U, darà la UN tangente della curva in N, e la QU sottangente corrispondente. Or essendo Ap, AP, Aq, AQ in proporzione aritmetica, s'avrà la seguente proporzione geometrica

$$pm : PM = qn : QN.$$

Sicchè, dividendo, s'avrà

$$Rm : PM = Sn : QN.$$

Ma

$$Rm : PM = MR : PT$$

$$Sn : QN = NS : QU,$$

ovvero

$$Rm : PM = Pp : PT$$

$$Sn : QN = Qq : QU.$$

Dunque

$$Pp : PT = Qq : QU.$$

E perciò, essendo Pp = Qq, sarà PT = QU.

Per la qual cosa la sottangente nella logaritmica è relativamente a qualunque punto della curva sempre dell'istessa grandezza, e conseguentemente costante.

COROLLARIO III.

51. Sia dunque nella logaritmica qualunque

que ordinata PM $= y$, l' ascissa corrispondente AP $= x$, e la sottangente PT $= a$. Essendo $x = ly$, e conseguentemente $dx = dly$, ed essendo Rm : Pp = MP : PT, sarà

$$dy : dx = y : a,$$

ovvero

$$dy : dly = y : a.$$

Sicchè

$$dly = a \times \frac{dy}{y}.$$

Quindi, per differenziare qualunque grandezza logaritmica, si deve procedere secondo la seguente

REGOLA.

Si moltiplichi la sottangente della logaritmica, alla quale appartiene la grandezza logaritmica, pel rotto, che ha per numeratore il differenziale della grandezza, alla quale la grandezza logaritmica si riferisce, e per denominatore l' istessa grandezza, alla quale si riferisce la detta grandezza logaritmica; il prodotto, che nasce, dà il differenziale cercato della grandezza logaritmica.

AVVERTIMENTO I.

52. Si noti che in tutt' i casi, che sog-giugneremo, supperremo sempre la sottangente della logaritmica essere $= a$.

CASO I.

Sia da differenziare $l(1 - x)$.

Essendo $d(1 - x) = - dx$; sarà il differenziale cercato, cioè

$$dl(1 - x) = - \frac{adx}{1-x}.$$

CASO II.

Sia da differenziare lxy.

Essendo $d(xy) = xdy + ydx$; sarà il differenziale cercato, cioè

$$dlxy = \frac{a(xdy + ydx)}{xy}.$$

CASO III.

Sia da differenziare $(lx)^m$.

Si metta $lx = y$. Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$y^m = (lx)^m$$

$$y^{m-1} = (lx)^{m-1};$$

Onde

$$d(lx)^m = dy^m = my^{m-1}dy.$$

E perciò

$$d(lx)^m = m(lx)^{m-1} \times \frac{adx}{x}.$$

CASO IV.

Sia da differenziare $(lx^n)^m$.

Si metta $x^n = y$. Saranno

$$dy = nx^{n-1}dx$$

$$(ly)^m = (lx^n)^m$$

$$(ly)^{m-1} = (lx^n)^{m-1}.$$

Onde

$$d(lx^n)^m = d(ly)^m = m(ly)^{m-1} \times \frac{ady}{y}.$$

E perciò

$$d(lx^n)^m =$$

$$m(lx^n)^{m-1} \times \frac{nax^{n-1}dx}{x^n} = mn(lx^n)^{m-1} \times \frac{adx}{x}.$$

CASO V.

Sia da differenziare llx, *o sia* $l^2 x$.

Si metta $lx = y$. Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$ly = llx.$$

Or-

Onde

$$d(llx) = dly = \frac{ady}{y}.$$

E perciò

$$d(llx) = \frac{a^2 dx}{xlx}.$$

CASO. VI.

Sia da differenziare lllx, *o sia* $l^3 x$.

Si metta $llx = y$. Saranno

$$dy = \frac{a^2 dx}{xlx}$$

$$ly = lllx,$$

$$d(lllx) = dly = \frac{ady}{y}.$$

E perciò

$$d(lllx) = \frac{a^3 dx}{xlx \, . \, llx}.$$

Similmente procedendo si hanno

$$d(l^4 x) = \frac{a^4 dx}{xlx \, . \, l^2 x \, . \, l^3 x},$$

$$d(l^5 x) = \frac{a^5 dx}{xlx \, . \, l^2 x \, . \, l^3 x \, . \, l^4 x}$$

d (l^n

$$d\,(l^n x) = \frac{a^n\,dx}{x\,lx\,.\,l^2 x\,.\,l^3 x\,.\,l^4 x\ldots\,l^{n-1}x}.$$

CASO VII.

Sia da differenziare $(llx)^m$.
Si metta $lx = y$. Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$(ly)^m = (llx)^m$$

$$(ly)^{m-1} = (llx)^{m-1}.$$

Onde

$$d\,(llx)^m = d\,(ly)^m = m\,(ly)^{m-1} \times \frac{ady}{y}.$$

E perciò

$$d\,(llx)^m = m\,(llx)^{m-1} \times \frac{a^2\,dx}{x\,lx}.$$

CASO VIII.

Sia da differenziare $(l(lx)^m)^n$.
Si metta $lx = y$. Saranno

$$dy = \frac{adx}{x}$$

$$y^m = (lx)^m$$

$$ly^m = l(lx)^m$$

$$(ly^m)^{n-1} = (l(lx)^m)^{n-1};$$

On-

Onde

$$d\,[l\,[lx]^m]^n = d\,[ly^m]^n = mn\,[ly^m]^{n-1} \times \frac{ady}{y}.$$

E perciò

$$d\,(l(lx)^m)^n = mn\,(l(lx)^m)^{n-1} \times \frac{a^2\,dx}{x\,lx}.$$

CASO IX.

Sia da differenziare $\frac{x^2}{llx}$.

Essendo $d\left(\frac{x^2}{llx}\right) = \frac{d(x^2)\,llx - x^2 \times d\,[llx]}{[llx]^2}$;
ed essendo

$$d\,[x^2] = 2xdx$$

$$d\,[llx] = \frac{a^2\,dx}{x\,lx}.$$

Sarà

$$d\left(\frac{x^2}{llx}\right) =$$

$$\frac{2xdx\,.\,llx - \frac{a^2\,xdx}{lx}}{[llx]^2} = \frac{2xdx\,.\,lx\,.\,llx - a^2\,xdx}{lx\,.\,[llx]^2}.$$

CA-

CASO X.

Sia finalmente da differenziare $\frac{lx}{llx}$.

Essendo $d\left(\frac{lx}{llx}\right) = \frac{d[lx]\times llx - lx \times d[llx]}{[llx]^2}$,

ed essendo $dlx = \frac{adx}{x}$.

$$d[llx] = \frac{a^2\,dx}{xlx}.$$

Sarà

$$d\left(\frac{lx}{llx}\right) = \frac{adx\,.\,llx - a^2\,dx}{x\,[llx]^2}.$$

AVVERTIMENTO II.

53. Gli esposti casi sono sufficientissimi a far comprendere in che modo si deve procedere per differenziare qualunque altra grandezza logaritmica, o che sia essa un intero, o un rotto.

CAP. IV.

Delle quantità esponenziali, e del modo di differenziarle.

DEFINIZIONE I.

54. Si dicono quantità esponenziali quelle, che si trovano innalzate a potenze d' esponenti variabili.

Così quantità esponenziali sono a^x, x^y, $a^x y^z$, x^{y^z}, ec.,

AVVERTIMENTO.

55. Le quantità esponenziali furono chiamate da Giovanni Bernoulli anche *quantità percorrenti*, come atte a percorrere per tutte le possibili dimensioni, potendosi l' esponente indeterminato supporre dinotare qualsivoglia numero positivo, o negativo, intero, o rotto, commensurabile, o incommensurabile.

DEFINIZIONE II.

56. Si dice una quantità esponenziale essere *del primo grado*, se l' esponente della

quantità è un' indeterminata semplice; *del grado secondo*, se l'esponente è una quantità esponenziale del primo grado; *del terzo grado*, se l' esponente è una quantità esponenziale del grado secondo, e così procedendo all' infinito.

Così sono a^x, x^y, ec. esponenziali del primo grado, a^{x^y}, x^{y^z}, ec. esponenziali del secondo grado, $a^{x^{y^z}}$, $x^{y^{z^v}}$, ec. esponenziali del terzo grado, e così procedendo all' infinito.

P R O B L. X.

57. *Insegnare il modo di differenziare le quantità esponenziali.*

Soluzione.

Si ricavino prima dalle quantità esponenziali le grandezze logaritmiche, come si vedrà qui in seguito fatto; e poscia da queste differenziate si ricavino i differenziali di quelle. S' avranno in tal modo i differenziali delle quantità esponenziali. Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO I.

58. Si noti che ne' casi, che soggiugneremo, l sarà la contrassegnante de' logaritmi, ed a dinoterà sempre la sottangente

della

della curva logaritmica, che si suppone adoperata per la determinazione delle grandezze logaritmiche.

C A S O I.

Sia da differenziare c^x.

Si metta $c^x = y$, e se ne ricavi la grandezza logaritmica. S'avrà $xlc = ly$; e, differenziando tale equazione, s' avrà

$$dxlc = dly = \frac{ady}{y} = \frac{ady}{c^x}.$$

Sicchè

$$dy = dc^x = \frac{c^x\,dxlc}{a}.$$

C A S O II.

Sia da differenziare x^y.

Si metta $x^y = v$. Sarà $ylx = lv$; e differenziando tale equazione, s' avrà

$$dylx + y \times \frac{adx}{x} = \frac{adv}{v} = \frac{adv}{x^y},$$

Sicchè

$$dv = dx^y = \frac{1}{a}\,[x^y\,dylx + ayx^{y-1}\,dx].$$

CA-

CASO III.

Sia da differenziare $c^x y^z$.

Si metta $c^x y^z = v$. Sarà $xlc + zly = lv$; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$dx.lc + dz.ly + z \times \frac{ady}{y} = \frac{adv}{v} = \frac{adv}{c^x y^z}:$$

Sicchè

$$dv = dc^x y^z = \frac{1}{a}[c^x y^z dx.lc + c^x y^z dz.ly + azc^x y^{z-1} dy].$$

CASO IV.

Sia da differenziare $x^y z^v$.

Si metta $x^y z^v = w$. Sarà $ylx + vlz = lw$; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$dylx + y \times \frac{adx}{x} + dvlz + v \times \frac{adz}{z} = \frac{adw}{w} = \frac{adw}{x^y z^v}.$$

Sicchè

$$dw = d(x^y z^v) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a}(ax^y z^v dylx + ayx^{y-1} z^v dx + x^y z^v dvlz + avx^y z^{v-1} dz).$$

CASO V.

Sia da differenziare $x^y \pm z^v$.

Essendo $d(x^y) = \frac{1}{a}(x^y dylx + ayx^{y-1} dx)$,

$$d(z^v) = \frac{1}{a}[z^v dvlz + avz^{v-1} dz].$$

Sarà il differenziale cercato di $x^y \pm z^v = \frac{1}{a}[x^y dylx + ayx^{y-1} dx] \pm \frac{1}{a}[z^v dvlz + avz^{v-1} dz]$.

CASO VI.

Sia da differenziare x^{y^z}.

Si metta $x^{y^z} = v$. Sarà $y^z lx = lv$; e, differenziando tale equazione, s'avrà

$$d[y^z]lx + y^z \times \frac{adx}{x} = \frac{adv}{v} = \frac{adv}{x^{y^z}}.$$

Ma

$$d[y^z] = \frac{1}{a}[y^z dzly + azy^{z-1} dy].$$

Dun-

Dunque

$$\frac{lx}{a}\,[y^z\,dz\,ly + azy^{z-1}\,dy] + ay^z\,x^{-1}\,dx$$

$$= \frac{a\,dv}{x^{y^z}}.$$

E perciò

$$dv = d\,(x^{y^z}) =$$

$$\frac{x^{y^z}\,lx}{a^2}\,[y^z\,dzly + azy^{z-1}\,dy\,] + y^z\,x^{-1}$$

$$x^{y^z}\,dx.$$

AVVERTIMENTO II.

59. Quanto s' è fin qui del calcolo differenziale insegnato è sufficientissimo a poter differenziare qualunque grandezza algebraica. Resta ora che si proceda agli usi del medesimo calcolo. E' d' avvertire però che degli usi non n' esporremo, se non i principali, per non intertenere la gioventù militare troppo in cose fuori del bisogno. Sia intanto il seguente

CAP. V.

Dell' uso de' differenziali del primo grado in determinare le tangenti delle curve.

PROBL. XI.

60. *Determinare due formole generali per poter avere, facendo uso del calcolo differenziale, con una di esse la sottangente di qualunque curva algebraica, e coll' altra la sunnormale.*

SOLUZIONE.

CASO I.

Fig. 6 Contrassegnino AMB qualunque curva, AQ il suo asse, MT la tangente in qualsisia punto M, ed MH la normale. Da M s' intenda menata all' asse l' ordinata MP, e s' intendano tirate *pm* parallela, ed infinitamente vicina a PM, ed MR parallela ad AQ. Si potrà senza sensibile errore intendere l' elemento *Mm* della curva essere una lineetta retta in diretto della tangente TM; e saranno relativamente al punto M la la sottangente PT, e la sunnormale PH. Si mettano l'ordinata PM $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$; saranno MR $=$ P$p = dx$, R$m = dy$. Essendo il triangoletto MRm simile ad MPT, sarà

$$mR : RM = MP : PT.$$

Onde

$$dy : dx = y : PT.$$

Sicchè

$$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Essendo in oltre

$$TP : PM = PM : PH;$$

sarà

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : PH.$$

Dunque

$$PH = \frac{ydy}{dx}.$$

Per la qual cosa le formole generali cercate sono per la

$$\text{sottangente } PT = \frac{ydx}{dy},$$

$$\text{sunnormale } PH = \frac{ydy}{dx}.$$

CA-

CASO II.

Fig. 7 Contrassegnino AMB qualunque curva tra gli asintoti OQ, OΓ, ed MT la tangente in qualunque suo punto M, ed MH la normale. Da M s'intenda menata la perpendicolare MP ad OQ, e s'intendano tirate pm parallela, ed infinitamente vicina a PM, ed mR parallela ad OQ. Relativamente al punto M saranno PT la sottangente, e PH la sunnormale. Si mettano l'ordinata PM$=y$, e l'ascissa corrispondente OP$=x$; saranno P$p = dx$, ed MR $= -dy$. Essendo

$$MR : Rm = MP : PT,$$

sarà

$$-dy : dx = y : PT.$$

Dunque

$$PT = -\frac{ydx}{dy}.$$

Ed essendo

$$TP : PM = PM : PH,$$

sarà

$$-\frac{ydx}{dy} : y = y : PH.$$

Sicchè

$$PH = -\frac{ydy}{dx}.$$

Per

Per la qual cosa le formole cercate in questo secondo caso sono per la

$$\text{sottangente } PT = -\frac{ydx}{dy}.$$

$$\text{sunnormale } PH = -\frac{ydy}{dx}.$$

Ch'è quanto bisognava determinare.

COROLLARIO.

61. Essendo relativamente ad ogni curva $PM = y$, $PH = \pm\frac{ydy}{dx}$, e $PT = \pm\frac{ydx}{dy}$; saranno relativamente ad ogni curva le formole generali per la normale Fig. 6, e 7

$$MH = \sqrt{MP^2 + PH^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}} = \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

e per la tangente

$$MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}} =$$

$$= \frac{y}{dy}\sqrt{dy^2 + dx^2}.$$

AVVERTIMENTO.

62. Si noti che, posto l'arco $AM = v$, è il suo elemento $Mm = dv$. Ma $Pp : PT = Mm : MT$. Dunque si ha $dx : \frac{ydx}{dy} = dv : MT$. E perciò $MT = \frac{ydv}{dy}$ dà un'altra formola generale per la tangente, includendovi in essa l'elemento dell'arco AM della curva.

PROBL. XII.

63. *Determinare la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto d'una curva algebraica coll'ajuto delle formole generali già trovate.*

SOLUZIONE.

Si trovi il differenziale dell'equazione alla curva, e da esso si rilevino i valori delle formole $\pm\frac{ydx}{dy}$, $\pm\frac{ydy}{dx}$. S'avranno in tal modo la sottangente cercata, e la cercata sunnormale.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sieno da determinarſi la ſottangente, e la ſunnormale relativamente a qualunque punto della parabola di qualunque genere.

Poſto il parametro dell'aſſe $= p$, e poſte l'ordinata all'aſſe menata da qualunque punto della curva $= y$, e l'aſciſſa corriſpondente $= x$; ſarà l'equazione generale $y^{m+n} = x^m p^n$, e 'l ſuo differenziale $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = mp^n x^{m-1}\, dx$. Onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(m+n)\, y^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mp^n x^{m-1}}{(m+n)\, y^{m+n-1}}.$$

E perciò

$$\frac{y\,dx}{dy} = \frac{[m+n]\, y^{m+n}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{[m+n]\, x^m p^n}{mp^n x^{m-1}} = \frac{m+n}{m} \times x,$$

$$\frac{y\,dy}{dx} = \frac{mp^n x^{m-1} y^2}{[m+n]\, y^{m+n}} = \frac{mp^n x^{m-1} y^2}{[m+n]\, x^m p^n} = \frac{m}{m+n} \times \frac{y^2}{x}.$$

Quin-

Quindi

1. Se la parabola è di primo genere. Eſſendo in tal caſo $y^2 = px$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 1$; ſaranno la ſottangente $\frac{m+n}{m} \times x = 2x$, e la ſunnormale $\frac{m}{m+n} \times \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} \times \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2} p$.

2. Se la parabola è di ſecondo genere. Poſta la ſua equazione $y^3 = x^2 p$, e conſeguentemente $m = 2$, $n = 1$; ſaranno la ſottangente $\frac{m+n}{m} \times x = \frac{3}{2} x$, e la ſunnormale $\frac{m}{m+n} \times \frac{y^2}{x} = \frac{2}{3} \times \frac{y^3}{xy} = \frac{2}{3} \times \frac{x^2 p}{xy} = \frac{2}{3} p \times \frac{x}{y}$. Poſta poi l'equazione $y^3 = xp^2$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 2$; ſaranno la ſottangente $\frac{m+n}{m} \times x = 3x$, e la ſunnormale $\frac{m}{m+n} \times \frac{y^2}{x} = \frac{1}{3} \times \frac{y^3}{xy} = \frac{1}{3} \times \frac{p^2 x}{xy} = \frac{p^2}{3y}$; e così procedendo innanzi.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto dell' ellisse di qualunque genere.

Posti il semiasse maggiore $= a$, il parametro relativamente all'istesso asse $= p$, l'ordinata al medesimo asse, menata da qualsisia punto della curva $= y$, e l'ascissa corrispondente, computata dall'estremo dell'asse $= x$, sarà l'equazione generale $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m \, [2a - x]^n$, e'l suo differenziale $[m+n] \, y^{m+n-1} \, dy = \frac{p}{2a} \, dx \, [m x^{m-1} \times [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]$; onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[m+n] \, y^{m+n-1}}{\frac{p}{2a} \, [m x^{m-1} \, [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{p}{2a} \, [m x^{m-1}] \, [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]}{[m+n] \, y^{m+n-1}}$$

E perciò

$$\frac{y dx}{dy} = \frac{[m+n] \, y^{m+n}}{\frac{p}{2a} \, [m x^{m-1} \, [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]} =$$

$$\frac{[m+n] \, \frac{p}{2a} \times x^m \, [2a - x]^n}{\frac{p}{2a} \, [m x^{m-1} \, [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]} =$$

$$\frac{[m+n] \, x \, [2a - x]}{m \, [2a - x] - n x},$$

$$\frac{y dy}{dx} = \frac{\frac{p}{2a} \, y^2 \, [m x^{m-1} [2a - x]^n - n x^m \, [2a - x]^{n-1}]}{[m+n] \, y^{m+n}} = \frac{p}{2a}$$

$$\frac{\frac{p}{2a}\, y^2 \left[m x^{m-1} [2a-x]^n - n x^m [2a-x]^{n-1}\right]}{[m+n]\, \frac{p}{2a}\, x^m [2a-x]^n} =$$

$$\frac{[m[2a-x]-nx]\,y^2}{(m+n)\,x\,[2a-x]}.$$

Quindi

1. Se l'elliſſe è di primo genere. Eſſendo in tal caſo $y^2 = \frac{p}{2a} \times x\,[2a-x]$, e conſeguentemente $m=1$, $n=1$; ſaranno la ſottangente $= \frac{[m+n]\,x\,[2a-x]}{m[2a-x]-nx} = \frac{x\,[2a-x]}{a-x}$, e la ſunnormale

$$\frac{[m[2a-x]-nx]\,y^2}{[m+n]\,x[2a-x]} = \frac{a-x}{x[2a-x]} \times y^2 =$$

$$\frac{[a-x]\,\frac{p}{2a} \times x\,[2a-x]}{x\,[2a-x]} = \frac{p}{2a}[a-x].$$

2. Se l'elliſſe è di ſecondo genere. Poſta

E la

la ſua equazione $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2\,[2a-x]$; e conſeguentemente $m=2$, $n=1$; ſaranno la ſottangente $= \frac{[m+n]\,x\,[2a-x]}{m(2a-x)-nx} =$ $\frac{3x\,[2a-x]}{4a-3x}$, e la ſunnormale

$$\frac{[m[2a-x]-nx]\,y^2}{[m+n]\,x[2a-x]} = \frac{[4a-3x]\,y^2}{3x[2a-x]}$$

$$= \frac{[4a-3x]\,y^3}{3xy[2a-x]} = \frac{4a-3x}{3xy} \times$$

$$\frac{\frac{p}{2a} \times x^2\,[2a-x]}{[2a-x]} = \frac{p}{2a} \times x \times \frac{4a-3x}{3y}.$$ Poſta

poi l'equazione $y^3 = \frac{p}{2a} \times x\,[2a-x]^2$, e conſeguentemente $m=1$, $n=2$; faranno la ſottangente $= \frac{[m+n]\,x\,[2a-x]}{m[2a-x]-nx} =$ $\frac{3x\,[2a-x]}{2a-3x}$, e la ſunnormale

[m

$$\frac{[m[2a-x]-nx]y^2}{[m+n]x[2a-x]} = \frac{2a-3x}{3x[2a-x]} \times$$

$$y^2 = \frac{2a-3x}{3xy[2a-x]} \times y^3 = \frac{2a-3x}{3xy[2a-x]} \times$$

$$\frac{p}{2a} \times x[2a-x]^2 = \frac{p}{2a} \times \frac{[2a-3x][2a-x]}{3y};$$

e così procedendo innanzi.

AVVERTIMENTO.

64. Si noti che se nelle formole per l' ellissi si mette $p = 2a$, si trasmutano esse in formole pe' cerchi. Onde per la famiglia de' cerchi le formole generali sono per la

$$\text{sottangente} = \frac{[m+n]x[2a-x]}{m[2a-x]-nx},$$

$$\text{sunnormale} = \frac{[m[2a-x]-nx]y^2}{[m+n]x[2a-x]}.$$

E perciò pel cerchio di primo genere sono la

$$\text{sottangente} = \frac{x[2a-x]}{a-x},$$

$$\text{sunnormale} = a-x.$$

 Pel

Pel cerchio di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = x^2[2a-x]$, sono la

$$\text{sottangente} = \frac{3x[2a-x]}{4a-3x},$$

$$\text{sunnormale} = \frac{(4a-3x)x}{3y}:$$

Posta poi l'equazione $y^3 = x(2a-x)^2$, sono la

$$\text{sottangente} = \frac{3x(2a-x)}{2a-3x},$$

$$\text{sunnormale} = \frac{[2a-3x][2a-x]}{3y};$$

e così procedendo innanzi.

ESEMPIO III.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto dell' iperbola di qualunque genere.

Posti il semiasse primario $= a$, il parametro relativamente all' istesso asse $= p$, l'ordinata al medesimo asse $= y$, e l' ascissa corrispondente, computata dall' estremo dell' asse $= x$; sarà l' equazione generale $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m [2a+x]^n$, e sarà il suo differenziale $[m+n]y^{m+n-1}dy = \frac{p}{2a}dx$ $[mx^{m-1}[2a+x]^n + nx^m[2a+x]^{n-1}]$. Onde

Onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{[m+n]\,y^{m+n-1}}{\frac{p}{2a}[mx^{m-1}[2a+x]^n + nx^m[2a+x]^{n-1}]};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{p}{2a}(mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})}{(m+n)\,y^{m+n-1}}.$$

E perciò

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\,y^{m+n}}{\frac{p}{2a}(mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})} = \frac{(m+n)\frac{p}{2a}\times x^m(2a+x)^n}{\frac{p}{2a}(mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})} = \frac{(m+n)\,x\,(2a+x)}{m(2a+x)+nx};$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{\frac{p}{2a}y^2(mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})}{(m+n)\,y^{m+n}} = \frac{\frac{p}{2a}y^2(mx^{m-1}(2a+x)^n + nx^m(2a+x)^{n-1})}{(m+n)\frac{p}{2a}x^m(2a+x)^n} =$$

$$\frac{m[2a+x]+nx}{[m+n]\,x\,[2a+x]}\times y^2.$$

Quindi

1. Se l'iperbola è di primo genere. Eſſendo in tal caſo $y^2 = \frac{p}{2a}\times x\,[2a+x]$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 1$; ſaranno la ſottangente $= \frac{[m+n]\,x\,[2a+x]}{m(2a+x)+nx} = \frac{x(2a+x)}{a+x}$, e la ſunnormale

$$\frac{(m(2a+x)+nx)y^2}{(m+n)x(2a+x)} = \frac{a+x}{x(2a+x)} \times y^2 = \frac{a+x}{x(2a+x)} \times \frac{p}{2a} x(2a+x) = \frac{p}{2a} \times (a+x).$$

2. Se l'iperbola è di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = \frac{p}{2a} \times x^2 [2a+x]$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$; saranno la sottangente $\frac{[m+n]x[2a+x]}{m[2a+x]+nx} = \frac{3x[2a+x]}{4a+3x}$, e la sunnormale $\frac{[m[2a+x]+nx]y^2}{(m+n)x(2a+x)} = \frac{[4a+3x]y^3}{3xy[2a+x]} = \frac{(4a+3x)\frac{p}{2a} \times x^2(2a+x)}{3xy(2a+x)} = \frac{p}{2a} \times \frac{x(4a+3x)}{3y}$. Posta poi l'equazione $y^3 = \frac{p}{2a} \times x(2a+x)^2$, e conseguen-

temente $m = 1$, $n = 2$; saranno la sottangente $\frac{(m+n)x(2a+x)}{m(2a+x)+nx} = \frac{3x(2a+x)}{2a+3x}$, e la sunnormale $\frac{(m(2a+x)+nx)y^2}{(m+n)x(2a+x)} = \frac{2a+3x}{3x(2a+x)} \times y^2 = \frac{2a+3x}{3xy(2a+x)} \times y^3 = \frac{2a+3x}{3xy(2a+x)} \times \frac{p}{2a} x(2a+x)^2 = \frac{p}{2a} \times \frac{(2a+3x)(2a+x)}{3y}$; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO IV.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto dell'iperbola di qualunque genere, riferita agli asintoti.

Posto il lato della potenza dell'iperbola $= a$, e poste l'ordinata all'asintoto, menata da qualunque punto della curva $= y$, e l'ascissa corrispondente $= x$; sarà l'equazione generale $x^m y^n = a^{m+n}$, e 'l suo differenziale $mx^{m-1} y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = 0$. On-

Onde

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{nx^m y^{n-1}}{mx^{m-1} y^n} = -\frac{n}{m} \times \frac{x}{y},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{mx^{m-1} y^n}{nx^m y^{n-1}} = -\frac{m}{n} \times \frac{y}{x}.$$

E perciò

$$\frac{ydx}{dy} = -\frac{n}{m} \times x,$$

$$\frac{ydy}{dx} = -\frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x}:$$

Quindi

1. Se l' iperbola è di primo genere. Essendo in tal caso $xy = a^2$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$; saranno la sottangente $-\frac{n}{m} x = -x$, e la sunnormale $-\frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x} = -\frac{a^4}{x^3}$.

2. Se l' iperbola è di secondo genere. Posta la sua equazione $x^2 y = a^3$, e conseguentemente $m = 2$, ed $n = 1$; saranno la sottangente $-\frac{n}{m} x = -\frac{1}{2} x$, e la

sunnormale $-\frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x} = -2 \times \frac{a^6}{x^5}$. Posta poi l' equazione $xy^2 = a^3$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; saranno la sottangente $-\frac{n}{m} x = -2x$, e la sunnormale $-\frac{m}{n} \times \frac{y^2}{x} = -\frac{1}{2} \times \frac{a^3}{x^2}$; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO V.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto della curva dell' equazione $a^x = y$.

Essendo $a^x = y$, sarà $xla = ly$; onde

$$ladx = \frac{dy}{y}.$$

Sicchè la

sottangente $\frac{ydx}{dy} = \frac{1}{la}$,

sunnormale $\frac{ydy}{dx} = y^2 \times la$;

ESEM.

ESEMPIO VI.

Sieno da determinarsi la sottangente, e la sunnormale relativamente a qualunque punto della curva dell' equazione $x^x = y$.

Essendo $x^x = y$, sarà $xlx = ly$; onde

$$lxdx + \frac{xdx}{x} = \frac{dy}{y}$$

$$lx \times ydx + ydx = dy.$$

Sicchè la

$$\text{sottangente } \frac{ydx}{dy} = \frac{1}{lx+1},$$

$$\text{sunnormale } \frac{ydy}{dx} = (lx+1)y^2.$$

CAP. VI.

Dell' uso de' differenziali del primo grado in isciorre i probl. de' massimi, e minimi.

DEFINIZIONE.

65. Se l' ordinata d' una curva procede successivamente crescendo, o scemando fino a certa misura, e da tale misura poi procede all' opposto successivamente scemando, o crescendo; il metodo di determinare tale massima, o minima ordinata è ciò, che si dice *metodo de' massimi, e minimi*.

AVVERTIMENTO.

66. Si noti che tutte le altre grandezze, che fino a certo limite possono crescere, o scemare, si possono nel limite della crescenza, o decrescenza determinare col metodo de' massimi, e minimi, considerandole come ordinate massime, o minime di curve, alle quali possono tali ordinate appartenere.

PROBL. XIII.

67. *Insegnare il come si deve in una curva algebraica, che ha massima, o minima ordinata, procedere per determinarla.*

SOLUZIONE.

Dove d'una curva, che ha massima, e minima ordinata si trova corrispondere tale ordinata, ivi si fa parallela alla linea delle ascisse o la tangente, come nella *Fig.* 8, o la normale, come nella *Fig.* 9. Sicchè relativamente al detto punto si fa o infinita la sottangente, e nulla la sunnormale, o nulla la sottangente, ed infinita la sunnormale. E perciò è o $\frac{ydx}{dy} : \frac{ydy}{dx}$, ovvero $\frac{dx}{dy} : \frac{dy}{dx} = \infty : 0$, o $\frac{dy}{dx} : \frac{dx}{dy} = \infty : 0$.
Quindi relativamente al punto, dove corrisponde la massima, o la minima ordinata, deve essere $= 0$ il valore di $\frac{dy}{dx}$, o di $\frac{dx}{dy}$.
Si ricavi dunque dall'equazione della curva il valore di $\frac{dy}{dx}$: con mettere $= 0$ o il va-

valore, che si ha di $\frac{dy}{dx}$, o il suo reciproco di $\frac{dx}{dy}$, si ha una grandezza, da cui si rileva il valore dell'ascissa, alla quale corrisponde la massima, o minima ordinata; e, sostituito tale valore dell'ascissa nell'equazione della curva, si ha un' altra grandezza, da cui si rileva il valore della massima, o minima ordinata.
Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da determinare l'ordinata massima in qualunque genere di cerchio.

L'equazione generale alli cerchi è $y^{m+n} = x^m (2r - x)^n$ (§ 33), e'l suo differenziale $(m + n) y^{m+n-1} dy = mx^{m-1} (2r - x)^n dx - nx^m (2r - x)^{n-1} dx$.
Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}(2r - x)^n - nx^m (2r - x)^{n-1}}{(m + n) y^{m+n-1}}$$

Si metta $\frac{dy}{dx} = 0$.

Sarà

$$mx^{m-1} (2r - x)^n - nx^m (2r - x)^{n-1} = 0.$$

Onde

$$m (2r - x) - nx = 0,$$

ed

ed

$$x = \frac{2mr}{m+n}.$$

Si sostituisca ora il valore dell' x trovato nell' equazione generale, s' avrà

$$y^{m+n} = \left(\frac{2mr}{m+n}\right)^m \times \left(\frac{2nr}{m+n}\right)^n,$$

ed

$$y = \sqrt[m+n]{\left(\frac{2mr}{m+n}\right)^m \times \left(\frac{2nr}{m+n}\right)^n}.$$

Sicchè la formola generale per determinare l' ascissa, alla quale corrisponde la massima ordinata è

$$x = \frac{2mr}{m+n},$$

e l' altra per determinare l' istessa massima ordinata è

$$y = \sqrt[m+n]{\left(\frac{2mr}{m+n}\right)^m \left(\frac{2nr}{m+n}\right)^n}.$$

Quindi

1. Se il cerchio è di primo genere. Essendo in tal caso $y^2 = x\,[\,2r - x\,]$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$; sarà l' ascissa, alla quale corrisponde la massima ordinata $x = \frac{2mr}{m+n} = r$; e l'ordinata massima $y = \sqrt{rxr} = r$.

2. Se il cerchio è di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = x^2\,[\,2r - x\,]$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$; sarà $x = \frac{2mr}{m+n} = \frac{4}{3}r$, e $y = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 \times \frac{2}{3}r}$ $= \frac{1}{3}r\sqrt[3]{32}$. Posta poi la sua equazione $y^3 = x\,[2r - x]^2$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; sarà $x = \frac{2mr}{m+n} = \frac{2}{3}r$, e $y = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}r\right)^2 \times \frac{2}{3}r} = \frac{1}{3}r\sqrt[3]{32}$ pure; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO II.

Sia da determinare l' ordinata massima in qualunque genere d' ellisse,

L' equazione generale all' ellissi è $y^{m+n} = \frac{p}{2a} \times x^m\,(\,2a - x\,)^n$ (§ 40), e 'l suo

suo differenziale $(m+n)y^{m+n-1}dy = \frac{p}{2a}dx$ $(mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1})$.

Dunque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2a}\left(\frac{mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1}}{(m+n)y^{m+n-1}}\right).$$

Si metta $\frac{dy}{dx} = 0$.

Sarà

$$\frac{p}{2a}(mx^{m-1}(2a-x)^n - nx^m(2a-x)^{n-1}) = 0.$$

Onde

$$m(2a-x) - nx = 0,$$

ed

$$x = \frac{2ma}{m+n}.$$

Si sostituisca ora il valore dell' x trovato nell' equazione generale, s' avrà

$$y^{m+n} = \frac{p}{2a}\times\left(\frac{2ma}{m+n}\right)^m\times\left(\frac{2na}{m+n}\right)^n,$$

ed

$$y = \sqrt[m+n]{\frac{p}{2a}\left(\frac{2ma}{m+n}\right)^m\left(\frac{2na}{m+n}\right)^n}.$$

Sicchè la formola generale per determinare l' ascissa, alla quale corrisponde l' ordinata massima, è

$$x = \frac{2ma}{m+n},$$

e l' altra per determinare l' istessa massima ordinata è

$$y = \sqrt[m+n]{\frac{p}{2a}\left(\frac{2ma}{m+n}\right)^m\left(\frac{2na}{m+n}\right)^n}.$$

Quindi

1. Se l' ellisse è di primo genere. Essendo in tal caso $y^2 = \frac{p}{2a}x(2a-x)$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$; sarà l' ascissa, alla quale corrisponde l' ordinata massima $x = \frac{2ma}{m+n} = a$, e la massima ordinata $y = \sqrt{\frac{p}{2a}\times a\times a} = \sqrt{\frac{1}{2}pa}$; e, posto il semiasse secondario $= c$, e conseguentemente $p = \frac{2c^2}{a}$, sarà la detta massima ordinata $y = \sqrt{\frac{1}{2}pa} = \sqrt{c^2} = c$.

2. Se l' ellisse è di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = \frac{p}{2a}\times x^2(2a-x)$, e con-

e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$; faranno

$$x = \frac{2ma}{m+n} = \frac{4}{3}a, \text{ e } y = \sqrt[3]{\frac{p}{2a} \times \left(\frac{4}{3}a\right)^2 \times \frac{2}{3}a} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{16a^2 p}.$$

Posta poi la sua equazione $y^3 = \frac{p}{2a} \times x\,(2a - x)^2$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; faranno $x = \frac{2ma}{m+n} = \frac{2}{3}a$, e $y = \sqrt[3]{\frac{p}{2a} \times \frac{2}{3}a \times \left(\frac{4}{3}a\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{16a^2 p}$; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO III.

Sia da determinare la massima ordinata in una curva, la cui equazione sia $x^3 + y^3 = axy$.

Essendo il differenziale dell'equazione $3x^2\,dx + 3y^2\,dy = axdy + aydx$; sarà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - 3x^2}{3y^2 - ax}.$$

Si metta $\frac{dy}{dx} = 0$.

Sa-

Sarà

$$ay - 3x^2 = 0,$$

e

$$y = \frac{3x^2}{a}.$$

Si sostituisca tale valore di y nell' equazione della curva, s' avrà

$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 3x^3.$$

Onde

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}.$$

E perciò

$$y = \frac{3x^2}{a} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

ESEMPIO IV.

Sia da determinare la minima ordinata nella curva dell' equazione $xy = x^2 + a^2$.

Essendo l' equazione $xy = x^2 + a^2$, sarà $y = \frac{x^2 + a^2}{x}$, il cui differenziale è $dy = \frac{2x^2\,dx - (x^2 + a^2)\,dx}{x^2} = \frac{(x^2 - a^2)\,dx}{x^2}$.

Sic-

Sicchè

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - a^2}{x^2},$$

Si metta $\frac{dy}{dx} = 0$. Sarà

$$x^2 - a^2 = 0,$$

ed

$$x = \pm a.$$

Si sostituisca nell'equazione $y = \frac{x^2 + a^2}{x}$ in vece di x il valore trovato, s'avrà $y = \frac{2a^2}{\pm a} = \pm 2a$.

AVVERTIMENTO.

68. Si noti che si conosce, se una curva di data equazione ha ordinata massima, o ordinata minima, o non ha nè massima, nè minima ordinata a questo modo. Si ricavino dall'equazione della curva i valori dell'ascissa, e della ordinata corrispondente, procedendo del modo già insegnato per determinare la massima, o la minima ordinata. Supposto che si abbiano l'ascissa $x = a$, e l'ordinata corrispondente $y = b$, si sostituisca nell'equazione della curva in vece dell'x prima $a - dx$, e poscia $a + dx$, e si

rilevino in ambi i casi i valori corrispondenti dell'y. Se tali nuovi valori dell'y si trovano ambidue minori del b, la curva in tal caso ha ordinata massima, ed è $y=b$. Se poi si trovano ambidue maggiori del b, la curva in tale altro caso ha ordinata minima, ed è pure $y = b$. Se finalmente de' due detti nuovi valori dell'y uno si trova essere maggiore del b, e l'altro minore; la curva allora non ha nè massima, nè minima ordinata; e l'ordinata $y = b$ già determinata non è, se non l'ordinata corrispondente all'ascissa $x = a$, senza punto essere nè massima, nè minima. Così nell'equazione $xy = x^2 + a^2$ della curva, in cui all'ascissa $x = \pm a$ s'è trovato corrispondere l'ordinata $y = \pm 2a$, sostituendo $\pm a + dx$ in vece di x, risulta $y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a + dx}$, e sostituendovi $\pm a - dx$, risulta pure $y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a - dx}$. Risultandone dunque in tutte e due le sostituzioni valori di y maggiori di $\pm 2a$, ne segue avere la curva minima ordinata, ed essere $y = \pm 2a$, corrispondente all'ascissa $x = \pm a$. Se poi l'equazione d'una curva è $x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x = a^2 y$, da cui, procedendo del modo insegnato, si ricavano $x = a$, $y = a$. Perchè

chè con sostituire in tale equazione $a + dx$ risulta $y = a + \frac{dx^3}{a^2}$, e con sostituirvi $a - dx$ risulta $y = a - \frac{dx^3}{a^2}$, cioè una ordinata colla prima sostituzione maggiore di a, e colla seconda minore; tale curva non ha nè massima, nè minima ordinata. Avvertite intando tali cose, procediamo ora alli problemi detti de' *massimi*, e *minimi*.

PROBL. XIV.

69. *Data qualunque linea retta* AB, *dividerla nel punto* C *in modo, che il rettangolo fatto da* AC, *e* CB *sia il massimo di tutti gl' infiniti rettangoli, che si possono similmente fare, dividendo l' istessa retta in ogni altro punto.* Fig. 10

SOLUZIONE.

Si mettano AB $= a$, AC $= x$; sarà CB $= a - x$. Onde AC $\times$ CB $= ax - x^2$. Si finga essere $cy = ax - x^2$ l'equazione d'una curva, e contrassegnare x le ascisse, ed y le ordinate. E' chiaro essere l' istesso il cercare la massima ordinata di tale curva, che il cercare che $ax - x^2$ sia un massimo. Si cerchi dunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

 cdy

$$cdy = adx - 2xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{c}.$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

sarà

$$\frac{a - 2x}{c} = 0$$

$$a - 2x = 0,$$

$$x = \frac{1}{2}a.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all' ascissa $x = \frac{1}{2}a$; e perciò $ax - x^2$ è un massimo, quando è $x = \frac{1}{2}a$. Per la cosa il rettangolo fatto da AC, e CB è il massimo, quando A B è divisa in C in due parti uguali, cioè quando è il quadrato della metà di AB. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XV.

70. *Dividere la retta* AB *in* C *in modo; che*

che $AC^2 \times CB$ *sia il massimo di tutti gl' infiniti parallelepipedi, che si possono similmente formare, dividendo l' istessa linea in ogni altro punto.*

SOLUZIONE.

Si mettano $AB = a$, $AC = x$; sarà $CB = a - x$. Onde $AC^2 \times CB = ax^2 - x^3$. Si finga essere $c^2 y = ax^2 - x^3$ l' equazione d' una curva, e contrassegnare x le ascisse, ed y le ordinate. E' pure manifesto essere l' istesso il cercare la massima ordinata di tale curva, che il cercare che $ax^2 - x^3$ sia un massimo. Si cerchi adunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$c^2 dy = 2axdx - 3x^2 dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 3x^2}{c^2}.$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

sarà

$$\frac{2dx - 3x^2}{c^2} = 0$$

$$2ax - 3x^2 = 0$$

$x =$

$$x = \frac{2}{3}a.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all' ascissa $x = \frac{2}{3}a$; e perciò $ax^2 - x^3$ è un massimo, quando è $x = \frac{2}{3}a$. Per la qual cosa il parallelepipedo $AC^2 \times CB$ è il massimo, quando è $AC = \frac{2}{3}AB$, cioè quando è $= \frac{2}{27}AB^3$. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XVI.

Fig. 11 71. *Data la retta* AB, *costruire su di essa un triangolo rettangolo, che sia il massimo di tutti gl' infiniti triangoli rettangoli, che possono avere* AB *per ipotenusa.*

SOLUZIONE.

Sia ACB il triangolo rettangolo cercato. Si mettano $AB = a$, $AC = x$; sarà $CB = \sqrt{a^2 - x^2}$. Onde il triangolo $ABC = \frac{1}{2} AC \times CB = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$.

Si

Si finga essere $cy = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ l'equazione d'una curva, e contrassegnare x le ascisse, ed y le ordinate. E' chiaro pure che il cercare l'ordinata massima di tale curva è l'istesso, che cercare che $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ sia un massimo. Si cerchi dunque la massima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$cdy = \frac{1}{2} dx \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{\frac{1}{2} x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

ovvero

$$cdy = \frac{(a^2 - x^2 - x^2)\, dx}{2\sqrt{a^2 - x^2}},$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2x^2}{2c\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

sarà

sarà

$$\frac{a^2 - 2x^2}{2c\sqrt{a^2 - x^2}} = 0.$$

$$a^2 - 2x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}.$$

Sicchè la massima ordinata nella supposta curva corrisponde all'ascissa $x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}$; e perciò $\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}$ è un massimo, quando è $x = \sqrt{\frac{1}{2} a^2}$. Per la qual cosa il triangolo rettangolo ABC è il massimo, quando è $AC = \sqrt{\frac{1}{2} AB^2}$, e conseguentemente pure $BC = \sqrt{\frac{1}{2} AB^2}$, vale a dire quando è isoscele. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XVII.

72. *Tra gl'infiniti cilindri retti uguali determinare quello, la cui superficie intera è la minima.*

So-

SOLUZIONE.

Sia la solidità de' cilindri uguali $= a^3$, e sia $r : p$ la ragione del raggio di qualunque cerchio alla periferia. S' intenda in oltre essere ABCD il cilindro da determinare. Si metta il raggio AO della sua Fig. 12 base $= x$; saranno la periferia AB $= \frac{p}{r} x$, il cerchio AB $= \frac{p}{2r} x^2$, e l' altezza AD del cilindro $= \frac{a^3}{\frac{p}{2r} x^2} = \frac{2ra^3}{px^2}$. Onde la superficie cilindrica AC $= \frac{p}{r} x \times \frac{2ra^3}{px^2} = \frac{2a^3}{x}$, e conseguentemente la superficie intera dell' istesso cilindro $= \frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$.

Si finga essere $cy = \frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$ l' equazione d' una curva, e contrassegnare x le ascisse, e y le ordinate. E' manifesto che il cercare l' ordinata minima di tale equazione sia l' istesso, che il cercare che $\frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r} x^2$ sia un minimo. Si cerchi dunque la minima ordinata di sì fatta curva. Perciò

$$cdy = -\frac{2a^3\, dx}{x^2} + \frac{2p}{r} x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^3 r + 2px^3}{rcx^2}.$$

E mettendo

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

sarà

$$\frac{2px^3 - 2a^3 r}{rcx^2} = 0.$$

Onde

$$2px^3 - 2a^3 r = 0$$

$$x^3 = \frac{r}{p} a^3$$

$$x = a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}.$$

Sicchè la minima ordinata nella supposta curva corrisponde all' ascissa $x = a \sqrt[3]{\frac{r}{p}}$.

E

E perciò $\frac{2a^3}{x} + \frac{p}{r}x^2$ è un minimo, quando è $x = a\sqrt[3]{\frac{r}{p}}$. Per la qual cosa la superficie intera del cilindro ABCD è la minima, quando è il raggio della base, cioè AO $= a\sqrt[3]{\frac{r}{p}}$, e conseguentemente l'altezza AD $= \frac{2ra^3}{px^2} = \frac{2ra^3}{pa^2\sqrt[3]{\frac{r^2}{p^2}}} =$

$\frac{2ra}{\sqrt[3]{r^2 p}} = \frac{2a\sqrt[3]{r^3}}{\sqrt[3]{r^2 p}} = 2a\sqrt[3]{\frac{r}{p}}$, vale a dire quando il cilindro è cilindro quadrato, cioè che ha l'altezza AD uguale al diametro AB della base. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO.

73. Essendosi trovata $x^3 = \frac{r}{p}a^3$, sarà $x^3 : a^3 = r : p$. Dunque nel cilindro quadrato, vale a dire nel cilindro, la cui superfi-

perficie intera è la minima di tutte quelle degl' infiniti cilindri d' uguali grandezze, il cubo del raggio della base sta alla grandezza del cilindro nella ragione del raggio di qualunque cerchio alla periferia.

PROBL. XVIII.

Fig. 13 74. *Tirare da qualunque punto C, esistente fuori della curva algebraica AMN, all' istessa curva la retta CM, che sia la minima di tutte le infinite rette, che da C si possono tirare alla medesima curva.*

SOLUZIONE.

Sia AQ l' asse della curva, e su di esso sieno calate dalli punti C, ed M le perpendicolari CB, MP; di più per M sia tirata MD parallela ad AQ, e CM sia prolungata in R. Si mettano in oltre AB $= a$, BC $= b$, AP $= x$, PM $= y$; saranno DC $= b - y$, e DM $= x - a$. Sicchè CM $= \sqrt{(b-y)^2 + (x-a)^2} =$ $\sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2 - 2ax + a^2}$. Dovendo tale grandezza essere un minimo, sarà il suo differenziale, cioè

$$\frac{-bdy + ydy + xdx - adx}{\sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2 - 2ax + a^2}} = 0.$$

Onde

Onde

$$(b - y)\,dy = (x - a)\,dx$$

$$(b - y)\frac{ydy}{dx} = (x - a)\,y.$$

E perciò

$$b - y : x - a = y : \frac{ydy}{dx},$$

ovvero

$$DC : DM = MP : \frac{ydy}{dx}.$$

Ma

$$CD : DM = MP : PR.$$

Dunque

$$PR = \frac{ydy}{dx};$$

vale a dire che PR, qualunque sia la curva, è la sunnormale relativamente al punto M, e conseguentemente RM la normale. Per la qual cosa la perpendicolare calata da C alla curva è la più brieve di tutte le infinite rette, che si possono da C tirare alla curva, qualunque essa sia. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

CAP. VII.

S' insegna a determinare i differenziali algebraici di gradi superiori.

PROBL. XIX.

75. *Insegnare il modo di ricavare i differenziali di gradi superiori dalli differenziali di gradi inferiori.*

SOLUZIONE.

Si proceda secondo le regole date per ricavare i differenziali del primo grado dalle grandezze algebraiche, che racchiudono variabili.

ESEMPIO I.

Sia da differenziare adx.

Essendo il differenziale di $a = 0$, e quello di $dx = d^2x$; sarà il differenziale di $adx = ad^2x$.

Similmente sarà il differenziale

di $ad^2x = ad^3x$

di $ad^3x = ad^4x$

di $ad^4x = ad^5x$

di $ad^nx = ad^{n+1}x$.

ESEMPIO II.

Sia da differenziare xdx.

Essendo $xdx = x \times dx$, sarà il suo differenziale $dx \times dx + xd^2x = dx^2 + xd^2x$.

Similmente sarà il differenziale

di $dxd^2x =$

$d^2x \times d^2x + dx \times d^3x = (d^2x)^2 + dxd^3x$

di $d^2xd^3x =$

$d^3x \times d^3x + d^2x \times d^4x = (d^3x)^2 + d^2xd^4x$

di $d^3xd^4x =$

$d^4x \times d^4x + d^3x \times d^5x = (d^4x)^2 + d^3xd^5x$

di $d^nxd^{n+1}x =$

$d^{n+1}x \times d^{n+1}x + d^nx \times d^{n+2}x = (d^{n+1}x)^2 + d^nxd^{n+2}x$.

ESEMPIO III.

Sia da differenziare $\frac{dx}{x}$.

Essendo dx il dividendo, ed x il divisore, sarà il differenziale di $\frac{dx}{x} =$

$$\frac{x \times d^2x - dx \times dx}{x^2} = \frac{xd^2x - dx^2}{x^2}.$$

Similmente sarà il differenziale

di $\frac{d^2x}{dx} =$

$$\frac{dx \times d^3x - d^2x \times d^2x}{dx^2} = \frac{dxd^3x - (d^2x)^2}{dx^2},$$

di $\frac{d^3x}{d^2x} =$

$$\frac{d^2x \times d^4x - d^3x \times d^3x}{(d^2x)^2} = \frac{d^2xd^4x - (d^3x)^2}{(d^2x)^2},$$

di $\frac{d^{n+1}x}{d^nx} =$

$$\frac{d^nx \times d^{n+2}x - d^{n+1}x \times d^{n+1}x}{(d^nx)^2} =$$

$$\frac{d^nxd^{n+2}x - (d^{n+1}x)^2}{(d^nx)^2}.$$

ESEMPIO IV.

Sia da differenziare $\frac{a}{dx}$.

Essendo il differenziale di $a = 0$, sarà il differenziale di $\frac{a}{dx} = -\frac{ad^2x}{dx^2}$.

Similmente sarà il differenziale

$$\text{di } \frac{a}{d^2 x} = - \frac{a d^3 x}{(d^2 x)^2},$$

$$\text{di } \frac{a}{d^3 x} = - \frac{a d^4 x}{(d^3 x)^2},$$

$$\text{di } \frac{a}{d^n x} = - \frac{a d^{n+1} x}{(d^n x)^2}.$$

ESEMPIO V.

Sia da differenziare $\frac{x}{dx}$.

Essendo x il dividendo, e dx il divisore, sarà il differenziale di $\frac{x}{dx} = \frac{dx \times dx - x \times d^2 x}{dx^2}$ $= \frac{dx^2 - x d^2 x}{dx^2}$.

Similmente sarà il differenziale

$$\text{di } \frac{dx}{d^2 x} =$$

$$\frac{d^2 x \times d^2 x - dx \times d^3 x}{(d^2 x)^2} = \frac{(d^2 x)^2 - dx d^3 x}{(d^2 x)^2},$$

$$\text{di } \frac{d^2 x}{d^3 x} =$$

 d^3

$$\frac{d^3 x \times d^3 x - d^2 x \times d^4 x}{(d^3 x)^2} = \frac{(d^3 x)^2 - d^2 x d^4 x}{(d^3 x)^2},$$

$$\text{di } \frac{d^n x}{d^{n+1} x} =$$

$$\frac{d^{n+1} x \times d^{n+1} x - d^n x \times d^{n+2} x}{(d^{n+1} x)^2} =$$

$$\frac{(d^{n+1} x)^2 - d^n x \, d^{n+2} x}{(d^{n+1} x)^2}.$$

ESEMPIO VI.

Sia da differenziare $(dx)^2$.

Essendo $(dx)^2 = dx \times dx$, sarà il suo differenziale $dx \times d^2 x + dx \times d^2 x = 2dxd^2 x$. Similmente sarà il differenziale

di $(dx)^3 = 3d^2 x \, (dx)^2$
di $(dx)^4 = 4d^2 x \, (dx)^3$
di $(dx)^5 = 5d^2 x \, (dx)^4$
di $(dx)^n = nd^2 x \, (dx)^{n-1}$.

ESEMPIO VII.

Sia da differenziare $\frac{ydx}{dy}$.

Essendo il differenziale del numeratore $ydx = dydx + yd^2 x$, e quello del denominatore $dy = d^2 y$; sarà il differenziale di

ydx

$$\frac{ydx}{dy} = \frac{(dy)^2 dx + ydyd^2x - ydxd^2y}{(dy)^2}.$$

ESEMPIO VIII.

Sia da differenziare $dx\sqrt{1-x^2}$.

Essendo il differenziale di $dx = d^2x$, e quello di $\sqrt{1-x^2} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; sarà il differenziale di $dx\sqrt{1-x^2} = d^2x\sqrt{1-x^2} - \frac{xdx^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{d^2x - x^2d^2x - xdx^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

ESEMPIO IX.

Sia da differenziare $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax-x^2}}$.

Essendo il differenziale del numeratore $adx - 2xdx = ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x$, e quello del denominatore $2\sqrt{ax-x^2} = \frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-x^2}}$; sarà il differenziale di

 adx

$$\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{ax-x^2}} = \left(\left(ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x\right)2\sqrt{ax-x^2} - (adx-2xdx)\left(\frac{adx-2xdx}{\sqrt{ax-x^2}}\right)\right) : 4(ax-x^2) =$$

$$\left(\left(ad^2x - 2dx^2 - 2xd^2x\right)(2ax-2x^2) - (adx-2xdx)^2\right) : \left(4(ax-x^2)\sqrt{ax-x^2}\right) =$$

$$\frac{2a^2xd^2x - 6ax^2d^2x + 4x^3d^2x - a^2dx^2}{4(ax-x^2)\sqrt{ax-x^2}}.$$

AVVERTIMENTO.

76. Si noti che se in un differenziale, come $\frac{ydy}{dx}$ per esempio, sarà costante il dx, il differenziale di $\frac{ydy}{dx}$ sarà $= \frac{dy^2 + yd^2y}{dx}$; se poi sarà costante il dy, il differenziale di $\frac{ydy}{dx}$ sarà in tale altro caso $= \frac{dxdy^2 - ydyd^2x}{dx^2}$.

Similmente se nel differenziale $\frac{2\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$

sarà

sarà costante il dx, il suo differenziale sarà

$$\frac{dz\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}+\frac{zdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}=$$

$$\frac{dzdx^2+dzdy^2+zdyd^2y}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

; e se sarà costante il dy, il suo differenziale sarà

$$\frac{dzdx\sqrt{dx^2+dy^2}+\dfrac{zdx^2d^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}}-zd^2x\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^2}=$$

$$\frac{dzdx^3+dzdxdy^2-zdy^2d^2x}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

. Finalmente se nel differenziale di $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sarà costante il dx, il suo differenziale sarà

$$\frac{-3dxdy(ddy)^2(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}+dxd^3y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^2(ddy)^2}.$$

Si noti intanto in tale differenziale che non può accadere che sia dy costante; altrimenti ddy sarebbe nullo.

CA

CAP. VIII.

Dell' uso de' differenziali del secondo grado in determinare i punti di flessioni contrarie, *e de'* ritorni *delle curve, che hanno tali punti.*

DEFINIZIONE.

77. Se una curva ha rivolta verso l' asse fino a certo suo punto la sua concavità, e da tal punto in poi la sua convessità, o all' opposto; il punto, che separa la parte concava verso l' asse dalla convessa, si dice della curva *punto di flessione contraria*. Se poi una curva procede fino a certo suo punto verso un lato, e da tal punto procede ritornando verso il lato opposto; sì fatto punto si chiama della curva *punto di ritorno*.

Così le curve LMN nelle *Fig.* 14, 15, 16, e 17 hanno i punti M di flessioni contrarie; e la curva LMN della *Fig.* 18 ha il punto M di ritorno.

AV-

AVVERTIMENTO I.

78. Proceda la curva AML concava verso l' asse AB, andandosi da A verso L successivamente allontanando dall' istesso asse; e sia PM qualunque sua ordinata. S' intendano tirate le altre due ordinate QN, RS, tal che sieno PQ, QR uguali, ed infinitamente picciole per rispetto dell' ascissa AP. S' intendano di più tirate per M, ed N le MV, NX parallele ad AB; e finalmente s' intenda l' elemento MN della curva, che si può prendere per una lineetta retta, prolungato in Y, finchè s' unisca con RS prolungata in Y fuori della curva, potendosi MNY considerare come tangente dell' istessa curva in N. Essendo i triangoletti MNV, NXY simili, ed avendo $MV = NX$, sarà $NV = XY$, e conseguentemente $XS < NV$. Fig.19

COROLLARIO I.

79. Quindi nel supposto caso chiamando y qualunque ordinata PM, QN, ec., ed x l' ascissa corrispondente AP, AQ, ec., e prendendo il dx costante; coll'andare l'ascissa x successivamente crescendo, il dy, differenza dell'ordinata, procederà successivamente diminuendosi.

AV-

AVVERTIMENTO II.

Fig.20 80. Si noti che il contrario accade, se la curva MNL, concava verso l' asse AB, si va successivamente all' istesso asse avvicinando, cioè che, supposto costante il dx, differenziale dell' ascissa, coll' andare l' ascissa successivamente crescendo, il dy, differenziale dell'ordinata, procederà successivamente crescendo.

AVVERTIMENTO III.

Fig.21 81. Proceda la curva LMO convessa verso la linea AB delle ascisse, e da L verso O successivamente allontanandosi dall' istessa AB; e sia PM qualunque sua ordinata ad AB. S' intendano tirate le altre due ordinate QN, RS, tal che sieno pure PQ, QR uguali, ed infinitamente picciole per rispetto dell' ascissa AP. S' intendano di più tirate per M, ed N le MV, NX parallele ad AB; e finalmente s' intenda l' elemento MN della curva prolungato in Y. Essendo i triangoletti MVN, NXY equiangoli, ed avendo $MV = NX$, sarà $NV = XY$, e conseguentemente $SX > NV$.

CO-

COROLLARIO II.

82. Quindi nel supposto caso chiamando y qualunque ordinata PM, QN, ec., ed x l'ascissa corrispondente AP, AQ, ec., e prendendo il dx costante; coll' andare l'ascissa x successivamente crescendo, il dy, differenza dell'ordinata, procederà successivamente pure crescendo.

AVVERTIMENTO IV.

83. Si noti finalmente che il contrario accade, se la curva LMO, convessa verso AB, si va successivamente all' istessa AB successivamente avvicinando; cioè che, supposto costante il dx, differenza dell' ascissa; coll' andare l'ascissa successivamente crescendo, il dy, differenza dell' ordinata, procederà successivamente diminuendosi. Premesse intanto tali cose, procediamo ora al metodo di determinare i punti di flessioni contrarie, e de' ritorni delle curve, che hanno tali punti. Perciò sia il Fig. 23

PROBL. XX.

84. *Insegnare il modo di poter determinare i punti di flessioni contrarie nelle curve, che hanno cotali punti.*

So-

SOLUZIONE.

Fig. 14, 15, 16, e 17 Sia LMN la curva, che abbia il punto M di flessione contraria. Quattro casi possono accadere. I. Che la curva sia verso AB concava da L ad M, e convessa da M ad N, e proceda successivamente allontanandosi da AB, come nella *Fig.* 14.: II. Che sia verso AB concava pure da L ad M, e convessa da M ad N, ma proceda successivamente avvicinandosi ad AB, come nella *Fig.* 15.: III. Che sia verso AB convessa da L ad M, e concava da M ad N, e proceda successivamente allontanandosi da AB, come nella *Fig.* 16.: IV. Finalmente che sia pure verso AB convessa da L ad M, e concava da M ad N, ma proceda successivamente avvicinandosi ad AB, come nella *Fig.* 17.

Contrassegnando con x ogni ascissa computata in AB da A, e con y ogni ordinata, e preso il differenziale dx costante, anderà il differenziale dy nel primo, ed ultimo caso successivamente diminuendosi fino al punto M, e da tal punto in poi successivamente accrescendosi; e al contrario negli altri due casi s' anderà successivamente accrescendo fino ad M, e da tal punto in poi successivamente diminuendosi. E perciò, posto il differenziale dx costante, sarà il differenziale dy relativamente al punto M

un

un minimo nel primo, ed ultimo caso, ed *un massimo* negli altri due casi. Onde relativamente al punto M il differenziale del differenziale di dy, o sia ddy si fa $= 0$, ovvero $= \infty$.

Per determinare adunque in una curva il punto di flessione contraria, quando la curva ha tale punto, si deve procedere a questo modo.

1. Si deve differenziare l' equazione della curva.

2. Supposto le ascisse contrassegnate coll' x, e le ordinate coll' y, si deve il differenziale trovato, preso il dx costante, di nuovo differenziare, e da tal nuovo differenziale rilevarne il valore del ddy.

3. Il valore trovato del ddy si deve mettere $= 0$, ovvero, non risultandone equazione da ricavarne valore dell' x; o dell' y, si deve mettere $= \infty$.

4. Dall' equazione, che si ha, si deve ricavare il valore dell' x; determinato il quale valore, è facile a determinare nell' equazione della curva anche il valore dell' y.

Daranno sì fatti valori dell' x; e dell' y l' ascissa, e l' ordinata corrispondenti al punto della flessione contraria della curva, e conseguentemente daranno la determinazione di tale punto. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO.

85. Si noti che ciò, che s' è detto per determinare i punti delle flessioni contrarie, si deve intendere ancora per determinare i punti de' ritorni delle curve; perchè ne' punti de' ritorni vi sono sempre le flessioni contrarie.

ESEMPIO I.

Fig. 23 *Sieno* AQB *un semicerchio, ed* AMC *una curva, limitata dalla retta* BC *perpendicolare ad* AB; *e sì fatta curva sia tale, che, tirata in essa qualunque ordinata* PM *al suo asse* AB, *sia sempre la semiperiferia* AQB *alla retta* BC, *come l' arco circolare* AQ *alla retta* QM: *sia di sì fatta curva da determinare il punto della sua flessione contraria.*

Si mettano il raggio OB $= r$, la semiperiferia AQB $= p$, la retta BC $= a$, la OP $= x$, PM $= y$, PQ $= v$, e l' arco AQ $= z$. Essendo AQB : BC = AQ : QM, o sia $p : a = z :$ QM; sarà QM $= \frac{a}{p} z$, e conseguentemente $y =$ PQ + QM $= v + \frac{a}{p} z$, e $py = pv + az$. Sicchè

$$pdy = pdv + adz.$$

Ma essendo $v = \sqrt{r^2 - x^2}$, e conseguentemente $dv = -\frac{xdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, e $dz = \sqrt{dx^2 + dv^2}$

$$= \sqrt{dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{r^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2 dx^2}{r^2 - x^2}} = \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

sarà

$$pdy = -\frac{pxdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{ardx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{(-px + ar)dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Sicchè, presa dx costante, sarà

$$pddy = \frac{-pdx^2\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{xdx}{\sqrt{r^2 - x^2}}(-px + ar)\,dx}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{[-pr^2 + px^2 - px^2 + arx]\,dx^2}{[r^2 - x^2]\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{[-pr^2 + arx]\,dx^2}{(r^2 - x^2)\sqrt{r^2 - x^2}},$$

e

$$ddy = \frac{(-pr^2 + arx)\,dx^2}{p\,[r^2 - x^2]\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Si metta, per determinare il punto della flessione contraria, $ddy = 0$, sarà

$$-pr^2 + arx = 0.$$

Onde

$$x = \frac{pr}{a}.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all'ascissa OP computata dal centro O, che si ha con trovare il quarto proporzionale in ordine alla retta BC, alla semiperiferia AQB, e al raggio OB del semicerchio.

ESEMPIO II.

Sia da determinare il punto di flessione contraria nella curva dell'equazione $ax^2 = [x^2 + a^2]\,y$.

Essendo $y = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}$, sarà

$$dy = \frac{2axdx\,[x^2 + a^2] - 2xdx \times ax^2}{[x^2 + a^2]^2} = \frac{2a^3\,xdx}{[x^2 + a^2]^2}.$$

E,

E, posto il dx costante, sarà

$$ddy = \frac{2a^3\,dx^2\,(x^2+a^2)^2 - 2(x^2+a^2)\times 2x\,dx \times 2a^3 x\,dx}{(x^2+a^2)^4}$$

$$= \frac{(2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\,dx^2}{(x^2+a^2)^4}.$$

Si metta, per determinare il punto cercato della flessione contraria, $ddy = 0$, sarà

$$\frac{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0}{a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0}\ 2a^3 \text{ div.}$$

$$x^4 + \frac{2}{3}a^2x^2 = \frac{1}{3}a^4,$$

ed

$$x^2 = -\frac{1}{3}a^2 + \sqrt{\frac{1}{9}a^4 + \frac{1}{3}a^4} = -\frac{1}{3}a^2 + \sqrt{\frac{4}{9}a^4} = -\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = +\frac{1}{3}a^2,$$

ed

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}.$$

Di più se nell' equazione della curva in vece di x^2 si sostituisse $\frac{1}{3}a^2$, s' avrà

H 2 $y=$

$$y = \frac{a^3}{4a^2} = \frac{1}{4}a.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all' ascissa $= \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, e l' ordinata relativamente a tale punto è $y = \frac{1}{4}a$.

ESEMPIO III.

Sia da determinare il punto di flessione contraria della curva dell' equazione $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$.

Essendo $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$, sarà

$$4b^3\,dx = (4b^2y - 4y^3)\,dy,$$

e

$$dy = \frac{b^3\,dx}{b^2y - y^3}.$$

E perciò, presa dx costante, sarà

$$ddy = \frac{(-b^2\,dy + 3y^2\,dy)\,b^3\,dx}{(b^2y - y^3)^2}.$$

Si metta adunque $ddy = 0$, sarà

$$\frac{-b^2\,dy + 3y^2\,dy = 0}{y^2 = \frac{1}{3}b^2}$$

$y=$

$$y = \sqrt{\frac{1}{3} b^2}.$$

Sostituendo finalmente $\frac{1}{3} b^2$ in vece di y^2 nell' equazione della curva, si ha $4b^3 x = \frac{2}{3} b^4 - \frac{1}{9} b^4 = \frac{5}{9} b^4$,

ed

$$x = \frac{5}{36} b.$$

Per la qual cosa il punto cercato della flessione contraria corrisponde all' ascissa $x = \frac{5}{36} b$, e l' ordinata relativamente a tale punto è $y = \sqrt{\frac{1}{3} b^2}$.

AVVERTIMENTO.

86. Si noti che se per riguardo dell'istessa curva si mette il $ddy = \infty$, sarà

$$b^2 y - y^3 = 0.$$

Onde

$$y^2 = b^2,$$

ed

$$y = b,$$

E sostituendo nell' equazione della curva il b in vece di y, si ha

$$4b^3 x = 2b^4 - b^4 = b^4,$$

 ed

ed

$$x = \frac{1}{4} b.$$

E perciò l' istessa curva ha un altro punto di flessione contraria corrispondente all' ascissa $x = \frac{1}{4} b$, e l' ordinata relativamente a tale punto è $y = b$.

CAP. IX.

Dell' uso de' differenziali del secondo grado in determinare i raggi osculatori delle curve.

DEFINIZIONE I.

Fig. 24 87. Sia LMNO una curva, ed ONMLA un filo affisso in O, e adattato con una sua parte a tale curva, e col rimanente alla retta AL, tangente l' istessa curva in L. Si vada sì fatto filo, con tenerlo sempre teso, movendo, e disobligando successivamente dalla detta curva, finchè ne sia interamente disobligato. L' estremo A di tale filo nel detto movimento descriverà l' altra curva ABCD. Si diranno di ABCD la curva LMNO l' evo-

evoluta, e l' istessa ABCD la *curva nata dalla evoluzione*.

COROLLARIO I.

88. Mantenendosi il filo ALMNO nel descrivere col suo estremo A la curva ABCD sempre teso, sarà la sua parte, che non si trova adattata alla curva LMNO, in ogni sito di esso sempre tangente della medesima curva.

COROLLARIO II.

89. S' intenda Mm essere una parte infinitamente picciola dell' evoluta LMNO; e s' intenda il detto filo mosso dal sito MB per un intervallo infinitamente picciolo, tal che giunga nel sito *mb* ad essere tangente dell' evoluta in *m*. Si potrà senza sensibile errore prendere *mb* come uguale ad MB. Onde l' elemento Bb della curva ABCD si può senza sensibile errore considerare come un elemento della periferia circolare descritta col raggio MB. E perciò qualunque elemento della curva ABD, come per esempio Bb, si può senza sensibile errore prendere come congruente coll' elemento corrispondente della periferia del cerchio, che ha per raggio la parte MB del filo, che si trova non a-

 dat-

dattata all' evoluta, e per centro il punto M, dove l' istessa porzione di filo si trova tangente della medesima evoluta.

DEFINIZIONE II.

90. I cerchi, che hanno i centri negl' infiniti diversi punti L, M, N, ec. dell' evoluta, e per raggi LA, MB, NC, ec. si dicono *cerchi osculatori* della curva ABD ne' rispettivi suoi punti A, B, C, ec.; ed i raggi LA, MB, NC, ec. de' medesimi cerchi si chiamano *raggi osculatori*, come raggi, co' quali si descrivono i detti cerchi osculatori.

COROLLARIO I.

91. Quindi i raggi osculatori per rispetto de' punti A, B, C, ec. della curva ABCD sono tangenti dell' evoluta ne' rispettivi punti L, M, N, ec. della medesima evoluta, e dove cadono i centri de' cerchi osculatori, a' quali appartengono.

COROLLARIO II.

92. Potendosi prendere gli elementi A, B, C, D della curva ABD, come congruenti cogli elementi corrispondenti de' cerchi osculatori dell' istessa curva ne' medesimi punti; saranno i raggi LA, MB, NC, ec. oscu-

osculatori perpendicolari alla detta curva ne' medesimi punti A, B, C, ec.; e sarà di più la curvatura della curva ABD ne' diversi punti A, B, C, ec. quale è quella de' cerchi osculatori ne' medesimi punti; vale a dire che procederà tale curvatura ne' detti punti A, B, C, ec. diminuendosi a proporzione, che vanno accrescendosi i raggi osculatori LA, MB, NC, ec..

COROLLARIO III.

93. Essendo finalmente l' arco LM dell evoluta = MB — LA, l' arco LN = NC — LA, l' arco LO = OD — LA, l' arco MN = NC — MB, ec.: è chiaro essere la differenza di due raggi osculatori qualunque dell' istessa curva uguale all' arco della sua evoluta, che tramezza tra i punti di contatto de' medesimi raggi coll' istessa evoluta. Premesse intanto tali nozioni, procediamo ora al modo di determinare i raggi osculatori, o sieno delle curvature delle curve algebraiche, e l' evolute di esse. Perciò sia il

PROBL. XXI.

94. *Trovare una formola generale per poter determinare il raggio osculatore di qualunque curva algebraica relativamente a qualunque suo punto, supposte le ordinate della curva perpendicolari all' asse.*

SOLUZIONE.

Fig. 25 Contrassegnino AMC qualunque curva, AB il suo asse, LNO la sua evoluta, ed MP qualunque ordinata all' asse. S' intenda essere mp parallela, ed infinitamente vicina ad MP e s' intendano essere NM, Nm i raggi osculatori della curva AMC ne' punti M, m, che si possono prendere per uguali, e per tangenti dell' evoluta nell' istesso punto N. S' intendano di più tirate parallele ad AB le MR, NQ, e prolungate le MP, mp in Q, e q.

Si mettano $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z$; saranno $Pp = MR = dx$, $Rm = dy$, ed $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Essendo NM raggio osculatore della curva in M, sarà l' angolo NMm retto, e conseguentemente uguale ad RMQ; onde, toltone il comune RMN, sarà l' angolo RMm = NMQ. E perciò il triangoletto MRm è simile ad MQN. Per la qual cosa sarà

$$MR : Mm = QM : MN,$$

ovvero

$$dx : \sqrt{dx^2 + dy^2} = z : MN.$$

Sicchè

$$MN = \frac{z}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Or

Or prendendo per costante il dx, differenziale dell'ascissa, l'ordinata deve sempre variare, ed intanto il raggio osculatore MN deve per ogni elemento Mm della curva conservarsi costante. Sicchè il differenziale di MN per ogni elemento Mm della curva deve essere sempre nullo. Ma, posto il dx costante, è il differenziale di

$$MN = \frac{dz}{dx}\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{z\,dy\,d^2y}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2 + z\,dy\,d^2y}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Sicchè

$$\frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2 + z\,dy\,d^2y}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}} = 0.$$

E perciò

$$dz\,dx^2 + dz\,dy^2 + z\,dy\,d^2y = 0.$$

E' di più Rm differenziale sì di PM, che di QM, e conseguentemente $dz = dy$. Dunque sarà

$$\frac{dy\,dx^2 + dy\,dy^2 + z\,dy\,d^2y = 0}{dx^2 + dy^2 + z\,d^2y = 0,}$$

e

e

$$z = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}.$$

Essendo finalmente

MR : Mm = MQ : MN,

sarà

$$dx : \sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy} : MN.$$

Dunque la formola cercata del raggio osculatore $MN = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}$.

Ch'è ciò, che bisognava trovare.

PROBL. XXII.

95. *Data l'equazione d'una curva, determinare coll'ajuto della formola trovata il raggio osculatore di tale curva per qualsisia suo punto.*

SOLUZIONE.

1. Si trovi il differenziale dell'equazione data, e tale differenziale, supposto il dx costante, si torni di nuovo a differenziare.

2. La formola $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}$, so-

sostituiti in essa i valori del dy^2, e del ddy, che si hanno dalli due differenziali già trovati, si riduca colle regole del calcolo in termini finiti.

S' avrà in tal modo in termini finiti il raggio osculatore cercato della curva per qualsisia suo punto. Ch'è ciò, che bisognava determinare.

ESEMPIO I.

Sia da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque punto della parabola di primo genere, vale a dire della parabola dell' equazione $y^2 = px$.

Il differenziale di $y^2 = px$ è $2ydy = pdx$; onde

$$dy = \frac{pdx}{2y} = \frac{pdx}{2\sqrt{px}}$$

$$dy^2 = \frac{p^2\,dx^2}{4px} = \frac{pdx^2}{4x}.$$

Il differenziale di $2ydy = pdx$, preso il dx costante, è $2dy^2 + 2yddy = 0$; onde

$$ddy = -\frac{dy^2}{y} = -\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}.$$

Sicchè, posta la curva AMC essere la parabola di primo genere, sarà relativamente a qualunque suo punto M il raggio osculatore

tore MN $= \dfrac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx\,ddy} =$

$$\frac{\left(dx^2 + \dfrac{pdx^2}{4x}\right)\sqrt{dx^2 + \dfrac{pdx^2}{4x}}}{dx \times \dfrac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}} =$$

$$\frac{(4x+p)\,\frac{1}{2}\,dx^3\sqrt{\dfrac{4x+p}{x}}}{dx^3\sqrt{\dfrac{p}{x}}} = \frac{(4x+p)\sqrt{4x+p}}{2\sqrt{p}}.$$

COROLLARIO I.

96. Si supponga l'ascissa AP, o sia $x = 0$. Il punto M deve in tal caso cadere in A, e 'l raggio osculatore relativamente al punto A si fa $= \dfrac{p\sqrt{p}}{2\sqrt{p}} = \dfrac{1}{2}p$. Sicchè AL =

$= \frac{1}{2} p$, cioè uguale alla metà del parametro dell' asse.

COROLLARIO II.

97. Essendo pel § 93 $MQ = z = \frac{dx^2 + dy^2}{ddy}$, sarà $MQ = \frac{dx^2 + \frac{pdx^2}{4x}}{\frac{pdx^2}{4x\sqrt{px}}} = \frac{(4x+p)\sqrt{x}}{\sqrt{p}} = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}} + \sqrt{px}$; onde tirata LS parallela ad MQ, $LS = PQ = MQ - MP = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$. Essendo di più $MR : Rm = MQ : QN$, o sia $dx : dy$, ovvero $2\sqrt{px} : p$, o pure $2\sqrt{x} : \sqrt{p} = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}} + \sqrt{px} : QN$, sarà $QN = 2x + \frac{1}{2}p$, e conseguentemente, tirata NT pure parallele ad MQ, $PT = 2x + \frac{1}{2}p$. Onde $AT = AP + PT = 3x + \frac{1}{2}p$, e conseguentemente $SN = LT = AT - AL = 3x$.

Si mettano adunque $LS = v$, ed $SN = w$; saranno

$$v = \frac{4x\sqrt{x}}{\sqrt{p}}$$

$$w = 3x.$$

E perciò

$$v = \frac{\frac{4}{3} w \sqrt{\frac{1}{3} w}}{\sqrt{p}}$$

$$v^2 = \frac{16w^3}{27p},$$

ed

$$w^3 = \frac{27}{16} pv^2;$$

Per la qual cosa l' evoluta LNO della parabola AMC del primo genere è la seconda parabola cubica, che ha per paramentro $\frac{27}{16} p$.

ESEMPIO II.

Sia da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque punto dell' ellisse di primo genere, vale a dire dell' ellisse dell' equa-

zione $y^2 = \frac{p}{2a} \times x(2a - x) = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$.

Il differenziale di $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ è $ydy = \frac{p}{2a}(a - x)\,dx$. Onde

$$dy = \frac{\frac{p}{2a}(a - x)\,dx}{y} = \frac{\frac{p}{2a}(a - x)\,dx}{\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax - x^2)}} = \frac{\sqrt{\frac{p}{2a}} \times (a - x)\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}, \text{ e}$$

$$dy^2 = \frac{\frac{p}{2a}(a - x)^2\,dx^2}{2ax - x^2}.$$

Il differenziale di $ydy = \frac{p}{2a}(a - x)dx$, preso il dx costante, è $dy^2 + yddy = -\frac{p}{2a}dx^2$; onde

$$-ddy = \frac{\frac{\frac{p}{2a}(a - x)^2\,dx^2}{2ax - x^2} + \frac{p}{2a}dx^2}{y} = \frac{\left((a - x)^2 + 2ax - x^2\right)\frac{p}{2a}dx^2}{(2ax - x^2)\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax - x^2)}} = \frac{a^2\,dx^2\sqrt{\frac{p}{2a}}}{(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Sicchè, posta la curva AMC essere l'elliffe di primo genere, sarà relativamente a qualunque suo punto M il raggio osculatore

$$MN = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy} = \frac{\left(dx^2 + \frac{p}{2a}\frac{(a - x)^2\,dx^2}{2ax - x^2}\right) \times \sqrt{dx^2 + \frac{p}{2a}\frac{(a - x)^2\,dx^2}{2ax - x^2}}}{\quad};$$

$$\frac{a^2\, dx^3 \sqrt{\frac{p}{2a}}}{(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2}}$$, e conseguentemente MN =

$$\frac{\left(2ax - x^2 + \frac{p}{2a}(a - x)^2\right) \times \sqrt{2ax - x^2 + \frac{p}{2a}(a - x)^2}}{a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}}.$$

COROLLARIO I.

98. Si supponga l' ascissa AP, o sia x = o. Il punto M deve in tal caso cadere in A, e'l raggio osculatore relativamente al punto A si fa $= \frac{\frac{p}{2a} \times a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}} \times a^2}{a^2 \sqrt{\frac{p}{2a}}} = \frac{1}{2}p$. Sicchè AL $= \frac{1}{2}p$, cioè ugua-

I 2 le

alla metà del parametro dell' asse primario.

COROLLARIO II.

99. Si supponga in oltre l' ascissa AP, o $x = a$. Il punto M cade in tale altro o nel vertice dell' asse secondario, e'l gio osculatore relativamente a tale punto sa $= \frac{a^2\sqrt{a^2}}{a^2\sqrt{\frac{p}{2a}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{p}{2a}}} = \sqrt{\frac{2a^3}{p}}$

$= a\sqrt{\frac{2a}{p}}$. Or, posta la metà dell' asse ondario $= c$, e posto il parametro relatiente a tale asse $= q$, essendo $a : c = c :$ p, e conseguentemente $c = \sqrt{\frac{1}{2}ap}$, essendo $c : a = a : \frac{1}{2}q$, sarà $\frac{1}{2}q =$

$= \frac{a^2}{\sqrt{\frac{1}{2}ap}} = \sqrt{\frac{2a^3}{p}} = a\sqrt{\frac{2a}{p}}$.

r la qual cosa il raggio osculatore relativamente al vertice dell' asse secondario nell' el-

ellisse di primo genere è $= \frac{1}{2} q$, cioè uguale alla metà del parametro del medesimo asse secondario.

COROLLARIO III.

100. Sia adunque ACB una mezza ellisse, Fig. 26 che abbia per semiasse primario AO, e per semiasse secondario CO. Si taglino da AB le porzioni AL, BM, ognuna uguale al semiparametro dell'asse AB, e si prolunghi il semiasse CO in P, finchè sia CP il semiparametro del medesimo asse. E' chiaro che l'evoluta della curva AC deve toccare AO in L, e CP in P; e similmente l'evoluta della curva CB deve toccare BO in M, e CP in P. Sicchè l'evoluta dell'intera curva ACB deve avere la forma della curva LPM, e conseguentemente deve essere una curva, che abbia in P un punto di ritorno, e composta da due rami PL, PM perfettamente uguali, e simili.

COROLLARIO IV.

101. Si mettano AO $= a$, CO $= c$; il parametro dell'asse primario $= p$, e quello dell'asse secondario $= q$; saranno AL $= \frac{1}{2} p$,

CP $= \frac{1}{2} q$, e la lunghezza dell'evoluta LP = PC — LA $= \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p$. Or essendo $\frac{1}{2} p = \frac{c^2}{a}$, ed $\frac{1}{2} q = \frac{a^2}{c}$, sarà

$$\frac{1}{2} q - \frac{1}{2} p = \frac{a^2}{c} - \frac{c^2}{a} = \frac{a^3 - c^3}{ac} = \frac{(a-c)^3}{ac} + 3(a-c).$$

Sicchè se al quoziente, che nasce dividendo pel prodotto de' semiassi AO, OC il cubo della differenza di essi, s'aggiugne il triplo dell'istessa differenza de' detti semiassi, si ha la lunghezza dell'evoluta LP. Per la qual cosa, posti AO di palmi 10, e OC di pal. 6; sarà la lunghezza dell'evoluta LP =

$$\frac{(AO - OG)^3}{AO \times OC} + 3(AO - OC) = \frac{64}{60} + 12 = \text{pal. } 13 \frac{1}{15}.$$

ESEMPIO III.

Sieno ARB *un semicerchio, ed* AMC *una curva limitata dalla retta* BC *perpendicolare ad* AB, *ed eguale alla semiperiferia* ARB; *e sì fatta curva sia tale, che, tirata in essa qualunque ordinata* PM *al suo asse* AB, *sia sempre la retta* RM *uguale al corrispondente arco circolare* AR: *sia di sì fatta curva da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque suo punto.* Fig. 27

Si mettano il raggio AO $= r$, la semiperiferia ARB, e conseguentemente la retta BC $= p$, l'ascissa AP $= x$, l'ordinata PM $= y$, la PR $= v$, l'arco AR, e conseguentemente la retta RM $= z$; sarà $y = v + z$, e $dy = dv + dz$. Ma essendo $v = \sqrt{2rx - x^2}$, e conseguentemente $dv = \frac{(r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$, e $dz = \sqrt{dx^2 + dv^2}$

$$= \sqrt{dx^2 + \frac{(r-x)^2\,dx^2}{2rx - x^2}} = \sqrt{\frac{r^2\,dx^2}{2rx-x^2}}$$

$$= \frac{r\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}, \text{ sarà}$$

$$dy = \frac{(r-x)\,dx + r dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = \frac{(2r-x)\,dx}{\sqrt{2rx-x^2}}.$$

Sicchè, presa dx costante, sarà $-\,ddy =$

$$\frac{(2r-x)\,rdx^2}{(2rx-x^2)\sqrt{2rx-x^2}} = \frac{rdx^2}{x\sqrt{2rx-x^2}}.$$

E perciò il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M, cioè MN $=$

$$\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-\,dx\,ddy} =$$

$$\left(\left(dx^2 + \frac{(2r-x)^2\,dx^2}{2rx-x^2}\right) \times \sqrt{dx^2 + \frac{(2r-x)^2\,dx^2}{2rx-x^2}}\right) : \frac{rdx^3}{x\sqrt{2rx-x^2}} =$$

$2\sqrt{4r^2 - 2rx} = 2\sqrt{(2r-x)2r} =$ $2\sqrt{AB \times BP} = 2\,BR$, tirata nel semicerchio la corda BR.

COROLLARIO.

102. Essendo il raggio osculatore relativamente a qualunque punto della supposta curva $= 2\sqrt{4r^2 - 2rx}$; posta $x = 0$, il punto M cade nel vertice A, e 'l raggio osculatore relativamente al vertice A si fa $= 2\sqrt{4r^2} = 4r$, cioè doppio del diametro AB del semicerchio ARB. Posta poi $x = 2r$, il punto M in tale altro caso cade in C, e 'l raggio osculatore relativamente al punto C si fa $= 2\sqrt{4r^2 - 4r^2} = 0$. Quindi l' evoluta della curva AMC deve avere la forma LNC, cioè deve avere il suo principio nel punto L, distante da A di LA $= 2$ AB, e 'l suo termine nel punto G; e di più la lunghezza di sì fatta evoluta è $=$ LA $= 2$ AB.

AVVERTIMENTO.

103. Si noti che la curva AMC è la famosa curva, detta dalli Geometri la Cicloide.

ESEMPIO IV.

Sia da determinare il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M *della logaritmica* LMN. Fig. 28

Sia

Sia AB la linea delle ascisse, ed A l' origine di esse. S' intenda da M calata su AB la perpendicolare MP; e per l' istesso punto M s' intenda tirata la tangente MT. Si mettano l' ascissa AP $= x$, l' ordinata PM $= y$, e la sottangente PT, ch' è costante in tale curva $= a$. Sarà $\frac{ydx}{dy} = a$. Onde

$$dy = \frac{ydx}{a};$$

e, presa dx costante, sarà

$$ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{a^2}.$$

E perciò il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M sarà

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy} = \frac{\left(dx^2 + \frac{y^2dx^2}{a^2}\right)\sqrt{dx^2 + \frac{y^2dx^2}{a^2}}}{-\frac{ydx^3}{a^2}} = \frac{(a^2 + y^2)\sqrt{a^2 + y^2}}{-ay}.$$

CO

COROLLARIO.

104. Si tiri da M la normale MH. Essendo TP : PM = PM : PH, o sia a: $y=y$: PH, sarà PH $= \frac{y^2}{a}$, e TH $=$ $a + \frac{y^2}{a} = \frac{a^2+y^2}{a}$. E' di più TM $=$ $\sqrt{TP^2 + PM^2} = \sqrt{a^2+y^2}$. Dunque il raggio osculatore relativamente a qualunque punto M è $= - \frac{TH \times TM}{PM}$, cioè è quarta proporzionale in ordine a PM, TH, TM, e si deve prendere in continuazione di HM prolungata verso O pel segno negativo. Per la qual cosa se relativamente a qualunque punto M si prolunga la normale HM in O, finchè sia MO quarta proporzionale in ordine all' ordinata PM, alla retta TH, somma della sottangente TP, e della sunnormale PH, e alla tangente TM; tale quarta proporzionale dà il raggio osculatore della logaritmica relativamente al punto M.

AVVERTIMENTO.

105. Non ci prendiamo la pena di estendere di vantaggio l' uso dell' esposto calcolo differenziale; perchè quanto s' è insegnato è bastantissimo a guidare chicchessia ne' più fini sviluppi, che coll' ajuto di sì fatto calcolo far si possono.

Fine del Calcolo differenziale.

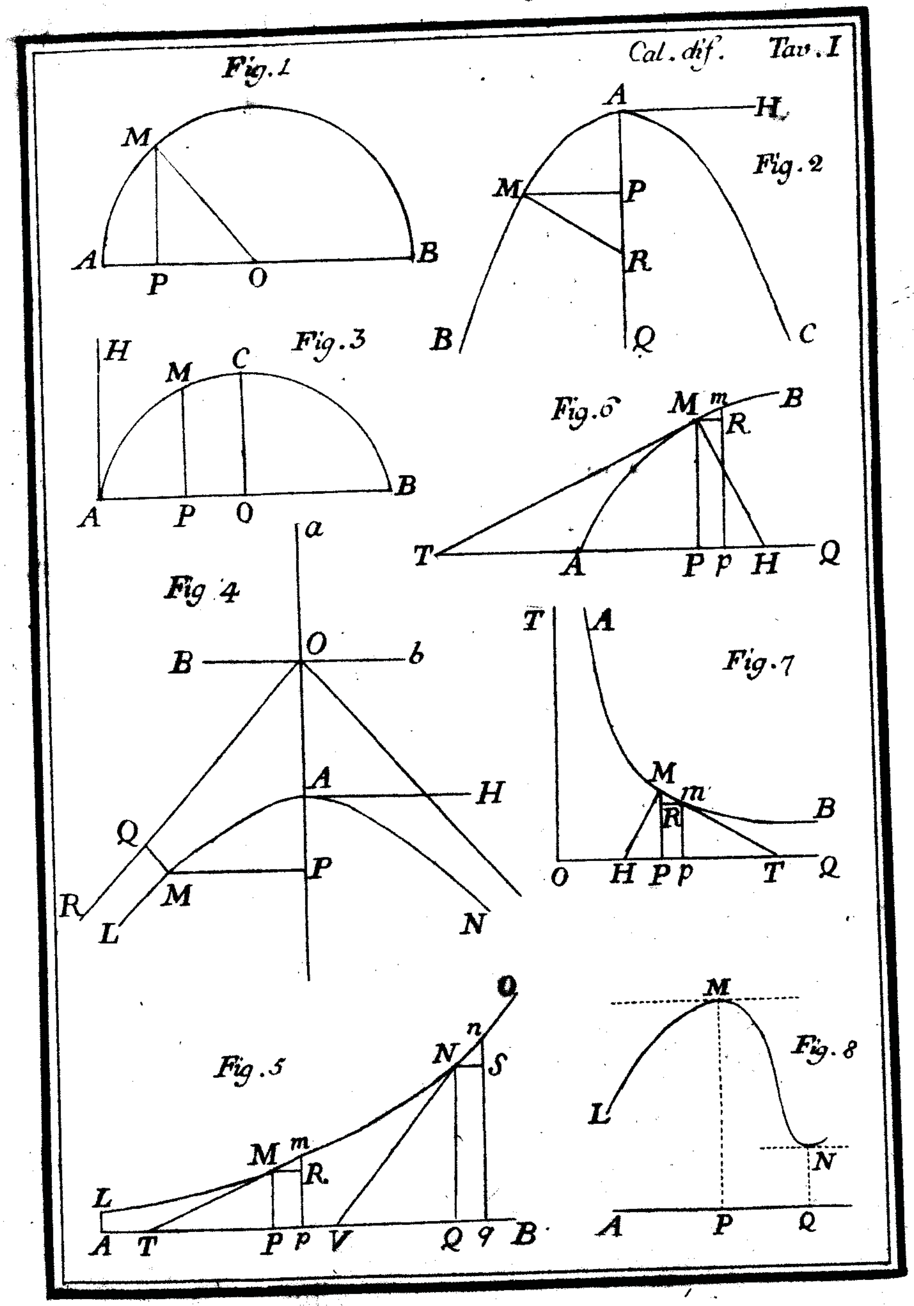
Correzioni da fare.

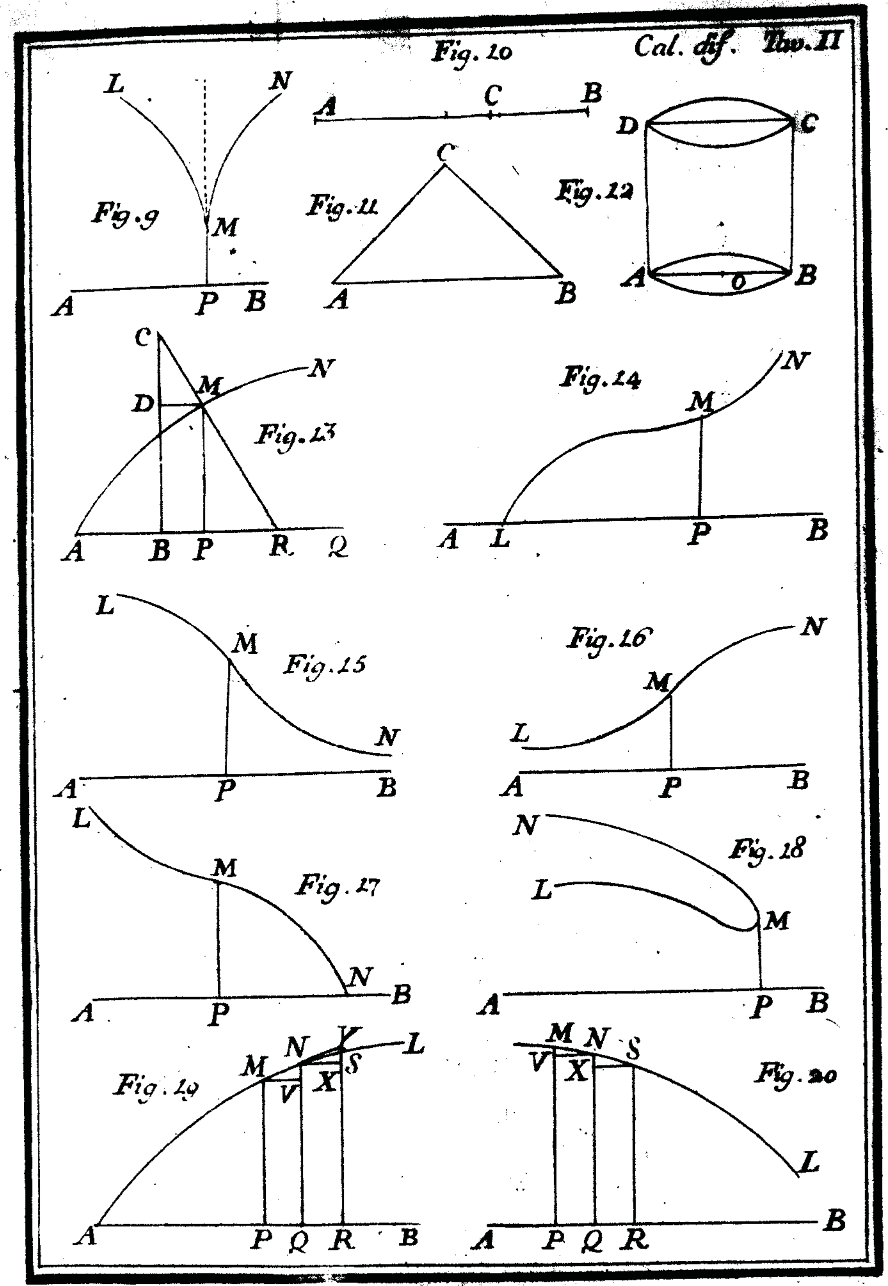
S' avverta che negli esempj V, e VI, che si trovano alle pagini 74, e 75 s' è adoperata l' unità per sottangente della logaritmica; onde se si suppone tale sottangente $= c$, deve essere nel primo de' detti esempj la sottangente della curva $= \frac{c}{la}$, e la sunnormale $= \frac{y^2}{c} \times la$, e nel secondo la sottangente della curva $= \frac{c}{c+lx}$, e la sunnormale $= \frac{y^2}{c} \times (c + lx)$.

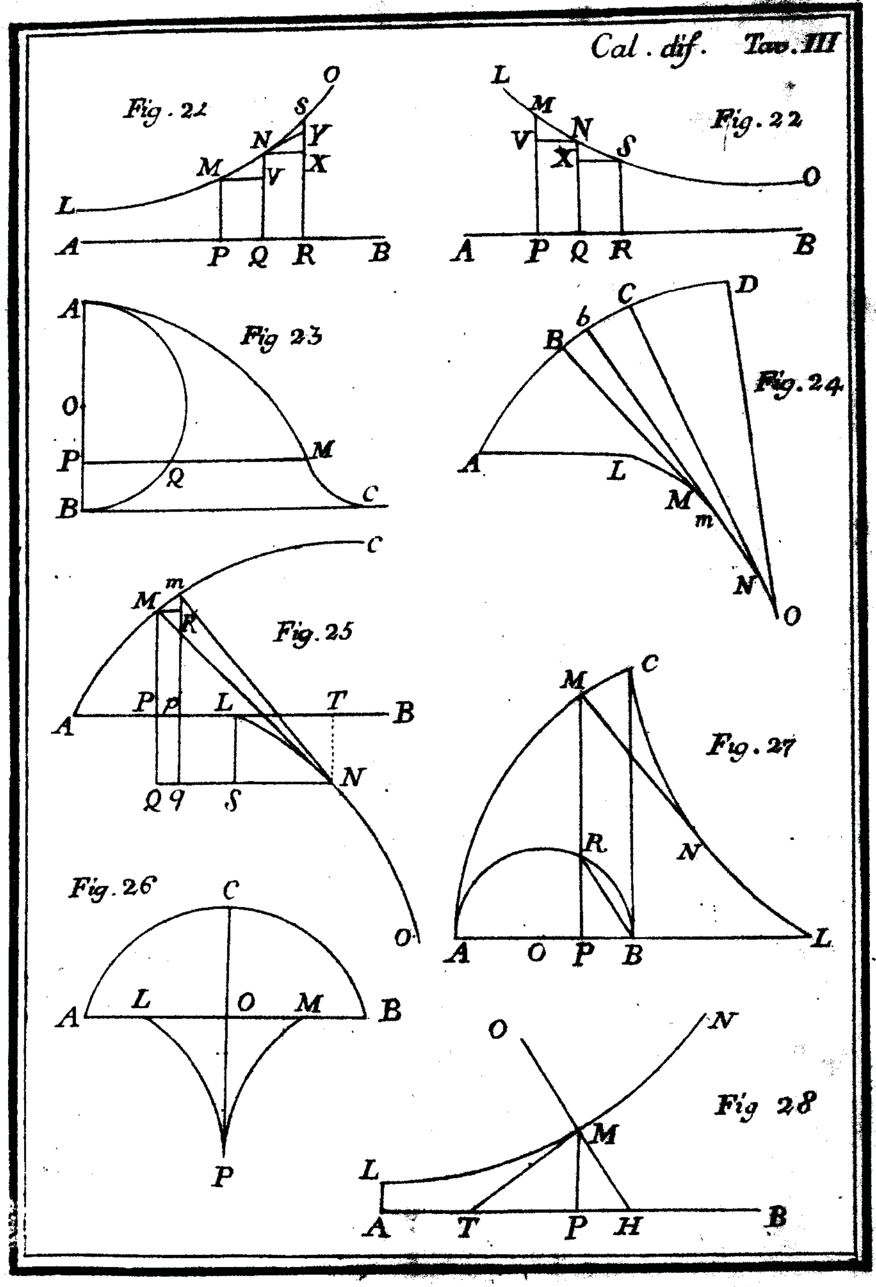
Di più alla pagina 86 ne' versi 19, e 20 in vece di $y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a + dx}$, $y = \pm a + \frac{dx^2}{\pm a - dx}$ deve essere $y = \pm 2a + \frac{dx^2}{\pm a + dx}$, $y = \pm 2a + \frac{dx^2}{\pm a - dx}$.

INDICE

DE' CAPI CONTENUTI IN QUESTO TRATTATO.


Cal. dif. Tav. I
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8


Cal. dif. Tav. II
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19
Fig. 20



TRATTATO DEL CALCOLO INTEGRALE.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. SI dicono in generale *quantità differenziali* tutte l' espressioni algebraiche, che contengono differenziali di qualunque grado di una, o più variabili. In particolare poi una quantità differenziale si dice del *grado primo*, *secondo*, ter-

terzo, ec., secondochè i differenziali, che contiene, sono del grado primo, secondo, terzo, ec.

COROLLARIO.

2. Quindi l'espressioni algebraiche $adz + 2czdz + 3fz^2dz$, $zdz + adz - ydy$, $2axdx + bdx - 2cx^{-3}ydx + cx^{-2}dy$, ec. sono quantità differenziali del primo grado; e l'espressioni algebraiche $xd^2y + 2dydx + yd^2x$, $(dx)^2 + xd^2x + ad^2x - (dy)^2$, ec. sono quantità differenziali del secondo grado, e così procedendo innanzi.

AVVERTIMENTO.

3. Le quantità differenziali non risultano tutte dal differenziare grandezze algebraiche, che racchiudono variabili, o differenziali di variabili. In effetto le quantità differenziali del primo grado xdy, e $xdy - ydx$ non derivano dal differenziare nè $x + y$, nè $x - y$, nè xy, nè $\frac{x}{y}$; essendo il differenziale di $x + y = dx + dy$, quello di $x - y = dx - dy$, quello di $xy = xdy + ydx$, e quello di $\frac{x}{y} = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

DE-

DEFINIZIONE II.

4. Diciamo *integrale* di qualsisia quantità differenziale la quantità, il di cui differenziale uguaglia la stessa quantità differenziale.

COROLLARIO I.

5. Quindi gl'integrali di dx, dy, dz, ec. sono rispettivamente x, y, z, ec.; quelli di d^2x, d^2y, d^2z, ec. sono rispettivamente dx, dy, dz, ec.; quelli di d^3x, d^3y, d^3z, ec. sono rispettivamente d^2x, d^2y, d^2z, ec., e così procedendo innanzi: vale a dire che gl'integrali delle quantità differenziali del primo grado sono quantità finite, quelli delle quantità differenziali del secondo grado sono grandezze differenziali del primo grado, quelli delle quantità differenziali del terzo grado sono grandezze differenziali del secondo grado; e così procedendo innanzi.

COROLLARIO II.

6. Essendo l'integrale di una data quantità differenziale quella quantità, che, differenziata, dà la stessa differenziale data: è chiaro che, per avere l'integrale di una data quantità differenziale, si debbono fare

 delle

delle operazioni contrarie a quelle, che si fanno nel differenziare.

AVVERTIMENTO.

7. Si noti, che l' espressioni algebraiche, che contrassegnano gl' integrali algebraici delle quantità differenziali, si ricavano, quando è possibile, secondo s' insegnerà appresso, dall' espressioni algebraiche, che contrassegnano le medesime quantità differenziali.

DEFINIZIONE III.

8. Chiamiamo *integrali algebraici* l' espressioni algebraiche, che contrassegnano gl' integrali delle quantità differenziali.

DEFINIZIONE IV.

9. Si dice *integrare* una quantità differenziale, quando da essa si vuole ricavare l' espressione algebraica, che contrassegna l' integrale della stessa quantità differenziale.

DEFINIZIONE V.

10. Si chiama *calcolo integrale* la scienza, che insegna i metodi di determinare ne' casi possibili gl' integrali algebraici delle quantità differenziali, e di sviluppare delle verità sì

sì geometriche, che fisiche col calcolo de' detti integrali.

AVVERTIMENTO I.

11. Per brevità dinoteremo ne' calcoli doversi integrare una quantità differenziale semplice collo scriverle innanzi la lettera $\int$, ed una quantità differenziale composta collo scriverla in una parentesi, e col mettere innanzi alla parentesi la lettera $\int$, che si pronunzia colla voce *somma*.

COROLLARIO.

12. Quindi nel calcolo integrale la lettera $\int$ si adopera per mera caratteristica degl' integrali; tal che l' espressioni $\int adx$, $\int cy^{-4}dy$, $\int (adx + bdy + cdz)$, $\int (xdy + ydx)$, ec. non dinotano prodotti delle quantità differenziali adx, $cy^{-4}dy$, $adx + bdy + cdz$, $xdy + ydx$, ec. moltiplicate per la grandezza contrassegnata dalla lettera $\int$, ma indicano che si debbono integrare le dette quantità differenziali espresse da adx, $cy^{-4}dy$, $adx + bdy + cdz$, $xdy + ydx$, ec..

AVVERTIMENTO II.

13. Si noti che ancorchè non vi sia grandezza algebraica, che racchiude quantità variabili, o differenziali di esse, che non si possa differenziare secondo le regole stabilite nel calcolo differenziale, vi è però un gran numero di quantità differenziali, che non si sanno integrare. Tra tali quantità ve ne sono delle non integrabili di lor natura, come xdy, $xdy - ydx$, ec.; e sono tutte quelle, che non ammettono grandezze, che possono renderle con differenziarle. Ve ne sono poi delle altre, che, sebbene sieno integrabili di lor natura, non s'è però ancora trovato metodo per farne l'integrazione. Forse tra queste ve ne saranno di quelle, che non si sapranno integrare giammai.

AVVERTIMENTO III.

14. Si noti pure che ancorchè una grandezza algebraica, che contiene variabili, o differenziali di esse, abbia un solo differenziale, nondimeno una quantità differenziale può avere un' infinità d' integrali diversi. Così la grandezza ax non ha altro differenziale, che adx; ma il differenziale adx può avere un' infinità d' integrali diversi. In fatti con trassegnandosi con b, c, d, ec. quantità costanti, adx sarà il differenziale di ciascuna

na delle quantità ax, $ax \pm b$, $ax \pm c$, $ax \pm d$, $ax \pm cb$, $ax \pm cd$, $ax \pm bcd$, ec.; perchè qualora nelle grandezze da differenziare si ritrovano de' termini costanti, tali termini non si notano nel differenziale, come nullo il differenziale di qualsisia quantità costante. Or essendo adx il differenziale di ciascuna delle quantità ax, $ax \pm b$, $ax \pm c$, $ax \pm d$, $ax \pm bc$, $ax \pm cd$, ec.: è chiaro che ognuna delle suddette quantità può essere l' integrale di adx. Dunque l'integrale di una data quantità differenziale può essere non solo quella quantità, che ha per suo differenziale la differenziale data, ma anche la stessa quantità accresciuta, o diminuita di una, o più costanti, o di una quantità composta di quantità tutte costanti. Perciò a qualunque integrale, che si determinerà, aggiugneremo sempre una costante, che disegneremo colla lettera C, iniziale della voce costante, affinchè si riconosca per tale. Sì fatta costante avrà un valore arbitrario, finchè non si avrà altr' oggetto, che quello d' insegnare il modo di ritrovare l' integrale di una data quantità differenziale: ma quando l' integrazione si farà per risolvere qualche problema, allora la costante, che si aggiugnerà all' integrale, che si ritroverà, avrà un valore, che sarà determinato, secondo si vedrà appresso, dalle condizioni dello stesso problema.

AVVERTIMENTO IV.

15. Si noti di vantaggio che ſiccome non ſi può eſtrarre qualunque radice da ogni grandezza, ancorchè qualunque grandezza ſi poſſa innalzare a qualſiſia potenza; così non ſi può, che rade volte avere con eſattezza l'integrale di un dato differenziale, ancorchè ſi ſappia ſempre ritrovare il differenziale di qualſivoglia grandezza variabile, o compoſta da variabili, e coſtanti: e che ſiccome l'aritmetica, e l'algebra ricorre alle approſſimazioni per quelle radici, che non poſſono averſi eſattamente; così nel calcolo integrale ricorriamo alle ſerie infinite, quando gl'integrali, che ſi cercano, non poſſono averſi con eſattezza.

AVVERTIMENTO V.

16. Si noti finalmente che il calcolo integrale ſi chiama anche *calcolo inverſo*, o *reciproco delle fluſſioni*, eſſendo l'inverſo del calcolo differenziale, chiamato dal Newton *calcolo delle fluſſioni*.

CAP. I.

Delle regole per determinare gl'integrali algebraici delle quantità differenziali del primo grado, che contengono il differenziale di una ſola variabile.

PROBL. I.

17. ***Inſegnare il modo d'integrare le quantità differenziali monomie, che contengono il differenziale del primo grado di una ſola variabile non moltiplicato per la ſteſſa variabile.***

SOLUZIONE.

Avendoſi il differenziale di una grandezza algebraica ſemplice del primo grado con mutare in eſſa la variabile nel ſuo differenziale: è chiaro che, volendoſi al contrario l'integrale di una quantità differenziale ſemplice, che contiene il differenziale del primo grado di una ſola variabile, conviene procedere ſecondo la ſeguente

REGOLA.

Si muti nella grandezza, che si deve integrare, il differenziale della variabile nella variabile istessa, ed a quel, che nasce, si aggiunga la costante C (§ 14). Si avrà in tal modo l' integrale cercato.

ESEMPJ.

1. $\int 3a^2\,dx = 3a^2\,x + C.$
2. $\int 8c^3\,dy = 8c^3\,y + C.$
3. $\int 4a^3\,b^2\,c^4\,dz = 4a^3\,b^2\,c^4\,z + C.$
4. $\int ma^n\,p^r\,dx = ma^n\,p^r\,x + C.$

PROBL. II.

18. *Insegnare il modo d' integrare le differenziali monomie, che contengono il differenziale del primo grado di una sola variabile, moltiplicato per qualsisia potenza della stessa variabile.*

SOLUZIONE.

Avendosi il differenziale di una grandezza algebraica semplice, che contiene qualunque potenza di una variabile, con moltiplicare la stessa grandezza, diminuito però l' esponente della sua variabile di un' unità, per lo prodotto, che nasce moltiplicando l' esponente della variabile pel differenziale della medesima: è chiaro che, volendosi al contrario l' integrale di una quantità differenziale semplice, che contiene il differenziale del primo grado di una sola variabile moltiplicato per qualche potenza della stessa variabile, conviene procedere secondo la seguente

REGOLA FONDAMENTALE.

Si divida la grandezza data, accresciuto prima l' esponente della variabile di un' unità, pel prodotto, che si ha con moltiplicare il detto esponente della variabile accresciuto di un' unità per lo differenziale della medesima, ed a quel, che nasce, si aggiunga la costante C (§ 14). In tal modo si avrà l' integrale cercato.

ESEMPJ.

1. $\int 2x dx = \frac{2x^2\,dx}{2dx} + C = x^2 + C.$
2. $\int 3y^2\,dy = \frac{3y^3\,dy}{3dy} + C = y^3 + C.$

3.

$$3.\ \int az^4\,dz = \frac{az^5\,dz}{5dz} + C = \frac{1}{5}az^5 + C.$$

$$4.\ \int ax^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{ax^{\frac{5}{3}}\,dx}{\frac{5}{3}\,dx} + C =$$

$$\frac{3}{5}\,ax^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\,a\sqrt[3]{x^5} + C.$$

$$5.\ \int ax^m\,dx = \frac{ax^{m+1}\,dx}{(m+1)\,dx} + C = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C.$$

AVVERTIMENTO I.

19. Si noti che quando la differenziale, che si deve integrare, contiene il solo differenziale di una variabile, e non già la variabile istessa, si può la medesima integrare colla regola fondamentale, suppostavi però la detta variabile coll' esponente zero: In effetto essendo $3a^2\,dx = 3a^2\,x^0\,dx$, sarà $\int 3a^2\,dx = \int 3a^2\,x^0\,dx = \frac{3a^2\,x\,dx}{dx} + C = 3a^2\,x + C$. Similmente essendo $ma^n\,dx = ma^n\,x^0\,dx$, sarà $\int ma^n\,dx = \int ma^n\,x^0\,dx = \frac{ma^n\,x\,dx}{dx} + C = ma^n\,x + C.$

AVVETIMENTO II.

20. Si noti pure che se la differenziale semplice, che si deve integrare, è un rotto, il cui denominatore contiene la variabile con qualunque esponente, tale variabile si considera nel numeratore, mutando il segno al suo esponente, ed indi s' integra secondo la regola fondamentale.

ESEMPJ.

$$1.\ \int \frac{adx}{x^3} = \int ax^{-3}\,dx = \frac{ax^{-2}\,dx}{-2dx} + C = \frac{-a}{2x^2} + C.$$

$$2.\ \int \frac{3c^2\,dy}{4ay^4} = \int \frac{3c^2\,y^{-4}\,dy}{4a} = \frac{3c^2\,y^{-3}\,dy}{4a\times -3dy} + C = \frac{c^2\,y^{-3}}{-4a} + C = -\frac{c^2}{4ay^3} + C.$$

$$3.\ \int \frac{ma^n\,dy}{c^n\,y^r} = \int \frac{ma^n\,y^{-r}dy}{c^n} = \frac{ma^n\,y^{-r+1}\,dy}{c^n\,(1-r)dy} + C = \frac{ma^n\,y^{-r+1}}{c^n\,(1-r)} + C = \frac{ma^n}{c^n\,(1-r)y^{r-1}} + C.$$

AVVERTIMENTO III.

21. Si noti di vantaggio che se la differenziale monomia, di cui si cerca l'integrale, contiene un radicale variabile; si sostituisce allora al radicale variabile la grandezza esistente sotto il segno radicale innalzata alla potenza indicata dal rotto, che ha per numeratore l'esponente della variabile, e per denominatore l'esponente del segno radicale, e poi s'integra colla regola fondamentale.

ESEMPJ.

$$1.\ \int adx\,\sqrt[3]{x^2} = \int ax^{\frac{2}{3}}dx = \frac{ax^{\frac{5}{3}}dx}{\frac{5}{3}dx} + =$$

$$\frac{ax^{\frac{5}{3}}}{\frac{6}{3}} + C = \frac{3}{5}\,ax^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\,a\sqrt[3]{x^5} + C.$$

$$2.\ \int 2cdy\,\sqrt[m]{y^n} = \int 2cy^{\frac{n}{m}}\,dy = \frac{2cy^{\frac{n}{m}+1}\,dy}{\left(\frac{n}{m}+1\right)dy}$$

$$+ C$$

$$+ C = \frac{2cy^{\frac{m+n}{m}}}{\frac{n+m}{m}} + C = \frac{2mcy^{\frac{m+n}{m}}}{n+m} + C =$$

$$\frac{2mc}{n+m}\,\sqrt[m]{y^{n+m}} + C.$$

$$3.\ \int mdx\sqrt[r]{ax^n} = \int mdx\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{x^n} =$$

$$\int m\sqrt[r]{a}\times x^{\frac{n}{r}}\,dx = \frac{m\sqrt[r]{a}\times x^{\frac{n}{r}+1}\,dx}{\left(\frac{n}{r}+1\right)dx} + C = \frac{m\sqrt[r]{a}\times x^{\frac{n}{r}+1}}{\frac{n}{r}+1}$$

$$+ C = \frac{m\sqrt[r]{a}\times x^{\frac{n+r}{r}}}{\frac{n+r}{r}} + C = \frac{rm\sqrt[r]{a}}{n+r}\,x^{\frac{n+r}{r}} +$$

$$C = \frac{rm}{n+r}\sqrt[r]{a}\sqrt[r]{x^{n+r}} + C = \frac{rm}{n+r}\sqrt[r]{ax^{n+r}} + C.$$

$$4.\ \int \frac{adx}{c\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{adx}{cx^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{a}{c}\,x^{-\frac{3}{4}}\,dx =$$

a

$$\frac{ax^{\frac{1}{4}}\,dx}{\frac{1}{4}\,cdx}+C=\frac{4ax^{\frac{1}{4}}}{c}+C=\frac{4a}{c}\sqrt[4]{x}+C.$$

5. $$\int\frac{a\,dy}{b\sqrt[m]{y^r}}=\int\frac{a\,dy}{by^{\frac{r}{m}}}=\int\frac{ay^{-\frac{r}{m}}\,dy}{b}=$$

$$\frac{ay^{-\frac{r}{m}+1}\,dy}{b\left(-\frac{r}{m}+1\right)dy}+C=\frac{ay^{\frac{m-r}{m}}}{b\left(\frac{m-r}{m}\right)}+C=$$

$$\frac{may^{\frac{m-r}{m}}}{b(m-r)}+C=\frac{ma}{(m-r)b}\sqrt[m]{y^{m-r}}+C.$$

AVVERTIMENTO IV.

22. Finalmente si noti che si esclude dalla regola fondamentale il solo caso, in cui l'esponente della variabile è -1. Se s'integrasse allora colla regola fondamentale, si avrebbe per integrale una quantità infinita, e per conseguenza inassegnabile. In fatti inte-

tegrando colla detta regola la differenziale $x^{-1}\,dx$, nasce $\frac{x^0\,dx}{0\times dx}+C=\frac{1}{0}+C=\infty+C$. Similmente integrando colla stessa regola $ay^{-1}\,dy$, nasce $\frac{ay^0\,dy}{0\times dy}+C=\frac{ay^0}{0}+C=\frac{a}{0}+C=\infty+C$. In sì fatto caso le quantità differenziali sono differenziali di logaritmi, e conseguentemente i loro integrali, che si determineranno nel modo, che s'insegnerà appresso, saranno logaritmi; ed appresso s'insegnerà, perchè in tal caso il calcolo dà una quantità infinita.

PROBL. III.

23. *Insegnare il modo d'integrare le quantità differenziali composte, i termini delle quali hanno le condizioni delle differenziali monomie, che si sono considerate ne' precedenti problemi, ed avvertimenti.*

SOLUZIONE.

Avendosi il differenziale di una grandezza algebraica composta con determinare i differenziali di tutt'i suoi termini, ed unirli insieme co' segni, che loro appartengono:

è chiaro che, volendosi al contrario l'integrale di una quantità differenziale composta, che contiene in ciascun termine il differenziale di una variabile sola, bisogna procedere secondo la seguente

REGOLA.

Si determinino colle regole precedenti gl' integrali di tutt' i termini, che compongono la proposta grandezza, e si uniscano in una somma. A sì fatta somma si aggiunga la costante C, e si avrà l' integrale cercato.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$ax^2\,dx + \frac{bx^3\,dx}{m} + \frac{cx^4\,dx}{n} + ex^5\,dx + f\,dx.$$

Essendo

$$\int ax^2\,dx = \frac{1}{3}ax^3$$

$$\int \frac{bx^3\,dx}{m} = \frac{bx^4}{4m}$$

$$\int \frac{cx^4\,dx}{n} = \frac{cx^5}{5n}$$

$$\int ex^5\,dx = \frac{1}{6}ex^6$$

$$\int f\,dx = fx.$$

Sarà

Sarà

$$\int\left(ax^2\,dx + \frac{bx^3\,dx}{m} + \frac{cx^4\,dx}{n} + ex^5\,dx + f\,dx\right) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{b}{4m}x^4 + \frac{c}{5n}x^5 + \frac{1}{6}ex^6 + fx + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$3a^2x^3\,dx + 5c^3\,dx\sqrt[5]{x^2} + \frac{2a\,dx}{3x^2} + \frac{7c\,dx}{2\sqrt[3]{x}} - ax^2\,dx.$$

Essendo

$$\int 3a^2x^3\,dx = \frac{3}{4}a^2x^4$$

$$\int 5c^3\,dx\sqrt[5]{x^2} = \frac{25}{7}c^3\sqrt[5]{x^7}$$

$$\int \frac{2a\,dx}{3x^2} = -\frac{2a}{3x}$$

$$\int \frac{7c\,dx}{2\sqrt[3]{x}} = \frac{21}{4}c\sqrt[3]{x^2}$$

$$\int -ax^2\,dx = -\frac{1}{3}ax^3.$$

Sarà

$$\int \left(3a^2x^3dx + 5c^3dx\sqrt[5]{x^2} + \frac{2adx}{3x^2} + \frac{7cdx}{2\sqrt[3]{x}} - ax^2dx \right) = \frac{3}{4}a^2x^4 + \frac{25}{7}c^3\sqrt[5]{x^7} - \frac{2a}{3x} + \frac{21}{4}c\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{3}ax^3 + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi la quantità differenziale

$$2x^3dx + 3ay^4dy + 5czdz + \frac{2dy}{y^3} + 4dx\sqrt[3]{x^2}.$$

Essendo

$$\int 2x^3dx = \frac{1}{2}x^4$$

$$\int 3ay^4dy = \frac{3}{5}ay^5$$

$$\int 5czdz = \frac{5}{2}cz^2$$

$$\int \frac{2dy}{y^3} = -y^{-2}$$

$$\int 4dx\sqrt[3]{x^2} = \frac{12}{5}\sqrt[3]{x^5}.$$

Sa-

Sarà

$$\int \left(2x^3dx + 3ay^4dy + 5czdz + \frac{2dy}{y^3} + 4dx\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{5}ay^5 + \frac{5}{2}cz^2 - y^{-2} + \frac{12}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$$

AVVERTIMENTO I.

24. Si noti che se l' esponente della variabile in qualche termine della quantità differenziale composta, che si deve integrare, è -1, l' integrale di tale termine non s' avrà colla regola fondamentale, ma per mezzo de' logaritmi (§ 22).

AVVERTIMENTO II.

25. Se la grandezza, che si deve integrare, è il prodotto di una quantità differenziale semplice, o composta, che contiene ne' suoi termini il differenziale del primo grado di una sola variabile, moltiplicata per una grandezza composta, che ha la stessa variabile in tutti li suoi termini, o in alcuni di essi, innalzata ad una potenza, il di cui esponente è un numero intero, e positivo; sì fatta grandezza s' integra nel seguente modo. Si eleva prima la grandezza variabile composta alla potenza proposta, ed indi si moltiplica tale potenza per la quantità differenziale, che contiene la grandezza

 da-

data. S' integra colla regola fondamentale ciascun termine del prodotto, che nasce, ed alla somma di tutti gl'integrali, che si hanno, si aggiugne la costante C.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi $adx\ (c + px)^4$.

Essendo

$(c + px)^4 = c^4 + 4c^3 px + 6c^2 p^2 x^2 + 4cp^3 x^3 + p^4 x^4$.

Sarà

$adx\ (c + px)^4 = ac^4 dx + 4ac^3 pxdx + 6ac^2 p^2 x^2 dx + 4acp^3 x^3 dx + ap^4 x^4 dx$.

E perciò

$\int (adx\ (c + px)^4) = \int (ac^4 dx + 4ac^3 pxdx + 6ac^2 p^2 x^2 dx + 4acp^3 x^3 dx + ap^4 x^4 dx) = ac^4 x + 2ac^3 px^2 + 2ac^2 p^2 x^3 + acp^3 x^4 + \frac{1}{5} ap^4 x^5 + C$.

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi $2ax^3 dx\ (bx + cx^2)^3$.

Essendo

$(bx + cx^2)^3 = b^3 x^3 + 3b^2 cx^4 + 3bc^2 x^5 + {}^3 x^6$.

Sarà

$2ax^3 dx\ (bx + cx^2)^3 = 2ab^3 x^6 dx + 6ab^2 cx^7 dx + 6abc^2 x^8 dx + 2ac^3 x^9 dx$.

E perciò

$\int (2ax^3 dx\ (bx + cx^2)^3) = \int (2ab^3 x^6 dx +$

$6ab^2 cx^7 dx + 6abc^2 x^8 dx + 2ac^3 x^9 dx) = \frac{2}{7} ab^3 x^7 + \frac{3}{4} ab^2 cx^8 + \frac{2}{3} abc^2 x^9 + \frac{1}{5} ac^3 x^{10} + C$.

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi $(2axdx + 3c^2 x^3 dx)\ (a + cx)^2$.

Essendo

$(a + cx)^2 = a^2 + 2acx + c^2 x^2$,

sarà

$(2axdx + 3c^2 x^3 dx)\ (a + cx)^2 = 2a^3 xdx + 4a^2 cx^2 dx + 2ac^2 x^3 dx + 3a^2 c^2 x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx = 2a^3 xdx + 4a^2 cx^2 dx + (2ac^2 + 3a^2 c^2)\ x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx$.

E perciò

$\int ((2axdx + 3c^2 x^3 dx)\ (a + cx)^2) = \int (2a^3 xdx + 4a^2 cx^2 dx + (2ac^2 + 3a^2 c^2)\ x^3 dx + 6ac^3 x^4 dx + 3c^4 x^5 dx) = a^3 x^2 + \frac{4}{3} a^2 cx^3 + \frac{(2ac^2 + 3a^2 c^2)}{4} x^4 + \frac{6}{5} ac^3 x^5 + \frac{1}{2} c^4 x^6 + C$.

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi $2xdx\ (a + bx)^3 + adx \times (x + cx^2 + fx^3)^2$.

Essendo

$(a + bx)^3 = a^3 + 3a^2 bx + 3ab^2 x^2 + b^3 x^3$, e

$(x + cx^2 + fx^3)^2 = x^2 + 2cx^3 + 2fx^4 + c^2 x^4 +$

$+ 2cfx^5 + f^2 x^6 = x^2 + 2cx^3 + (2f + c^2) x^4 + 2cfx^5 + f^2 x^6$.

Saranno

$2xdx\,(a + bx)^3 = 2a^3 xdx + 6a^2 bx^2 dx + 6ab^2 x^3 dx + 2b^3 x^4 dx$; e

$adx\,(x + cx^2 + fx^3)^2 = ax^2 dx + 2acx^3 dx + (2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx$.

E perciò

$$\int (2xdx\,(a+bx)^3 + adx\,(x + cx^2 + fx^3)^2) = \int (2a^3 xdx + 6a^2 bx^2 dx + 6ab^2 x^3 dx + 2b^3 x^4 dx + ax^2 dx + 2acx^3 dx + (2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx) = \int (2a^3 xdx + (6a^2 b + a) x^2 dx + (6ab^2 + 2ac) x^3 dx + (2b^3 + 2af + ac^2) x^4 dx + 2acfx^5 dx + af^2 x^6 dx) = a^3 x^2 + (2a^2 b + \tfrac{1}{3} a) \times x^3 + \frac{3ab^2 + ac}{2} x^4 + \frac{2b^3 + 2af + ac^2}{5} x^5 + \tfrac{1}{3} acfx^6 + \tfrac{1}{7} af^2 x^7 + C.$$

AVVERTIMENTO III.

26. Se la grandezza, che si deve integrare, è un prodotto, i cui fattori sono dell' indole esposta nel § antecedente, ed il fattore differenziale è il differenziale dell' altro fattore, non considerato l' esponente della potenza, a cui tale altro fattore dev' essere innalzato; o pure è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità co-

stan-

stante: tale grandezza è sempre integrabile colla regola fondamentale, ancorchè l' esponente della detta potenza sia un rotto, o negativo, o rotto, e negativo insieme, escluso il solo caso, nel quale il detto esponente è -1. E ciò si ottiene nel seguente modo. Nella grandezza, che si deve integrare, si sostituiscono al fattore, che dev' essere innalzato ad una potenza, il di cui esponente è un rotto positivo, o negativo, o un' intero negativo, una variabile semplice, ed all' altro fattore il differenziale del primo grado della stessa variabile semplice moltiplicato, o diviso per quella quantità costante, che, moltiplicata o divisa per lo differenziale del primo de' detti fattori, dà il secondo de' medesimi fattori. Indi s' integra colla regola fondamentale, ed a quel, che nasce, dopo di aver sostituito alla variabile il suo valore, si aggiugne la costante C.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi $2cxdx\,(b + cx^2)^{\frac{2}{3}}$:

Si metta $b + cx^2 = y$.

Essendo

$2cxdx = d\,(b + cx^2)$:

Sarà

$2\,cxdx = dy$.

E perciò

$2cxdx\,(b + cx^2)^{\frac{2}{3}} = y^{\frac{2}{3}} dy$.

Ma

$$\int y^{\frac{2}{3}}\, dy = \frac{3}{5}\sqrt[3]{y^5} + C.$$

Dunque anche

$$\int (2cxdx\,(b+cx^2)^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{y^5} + C.$$

E, sostituendo ad y il suo valore $b + cx^2$, sarà

$$\int (2cxdx\,(b+bx^2)^{\frac{2}{3}}) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{(b+cx^2)^5} + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi $(ady + 3cy^2 dy)(ay+cy^3)^{-4}$.

Si metta $ay+cy^3 = x$.

Essendo

$$ady + 3cy^2 dy = d(ay+cy^3);$$

sarà

$$ady + 3cy^2 dy = dx.$$

Onde

$$(ady + 3cy^2 dy)(ay+cy^3)^{-4} = x^{-4}dx.$$

Ma

$$\int x^{-4}dx = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

Dunque anche

$$\int((ady+3cy^2 dy)(ay+cy^3)^{-4}) = -\frac{1}{3x^3} + C.$$

E

E, sostituendo alla variabile x il suo valore $ay+cy^3$, sarà

$$\int((ady+3cy^2 dy)(ay+cy^3)^{-4}) = -\frac{1}{3(ay+cy^3)^3} + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi $adx\,(a+bx)^{-\frac{1}{2}}$.

Si metta $a+bx = y$.

Essendo

$$adx = d(a+bx)\times\frac{a}{b}$$

Sarà

$$adx = \frac{a}{b}dy.$$

Onde

$$adx\,(a+bx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a}{b}y^{-\frac{1}{2}}dy.$$

Ma

$$\int\frac{a}{b}y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{ay^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}b} + C = \frac{2a}{b}\sqrt{y} + C.$$

Dunque anche

$$\int(adx\,(a+bx)^{-\frac{1}{2}}) = \frac{2a}{b}\sqrt{y} + C.$$

E

E, fostituendo alla variabile y il suo valore $a + bx$, sarà

$$\int \left(adx \, (a+bx)^{-\frac{1}{2}} \right) = \frac{2a}{b} \sqrt{a+bx} + C.$$

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi $(a^2 \, dx + 2axdx) : \sqrt{ax + x^2} = (a^2 \, dx + 2axdx)(ax + x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Si metta $ax + x^2 = y$.

Essendo

$$a^2 \, dx + 2axdx = a \times d(ax + x^2),$$

sarà

$$a^2 \, dx + 2axdx = ady.$$

Onde

$$\frac{a^2 \, dx + 2axdx}{\sqrt{ax + x^2}} = ay^{-\frac{1}{2}} dy.$$

Ma

$$\int ay^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{ay^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2a\sqrt{y} + C.$$

Dunque anche

$$\int (a^2 \, dx + 2axdx) : \sqrt{ax + x^2} = 2a\sqrt{y} + C.$$

E, fostituendo ad y il suo valore $ax + x^2$, sarà

$$\int (a^2 \, dx + 2axdx) : \sqrt{ax + x^2} = 2a\sqrt{ax + x^2} + C.$$

ESEM-

ESEMPIO V.

Sia da integrarsi $adx \, (a + bx)^m$.

Si metta $a + bx = y$.

Essendo

$$adx = \frac{a}{b} \times d(a + bx),$$

sarà

$$adx = \frac{a}{b} dy.$$

Onde

$$adx \, (a + bx)^m = \frac{a}{b} y^m dy.$$

Ma

$$\int \frac{a}{b} y^m dy = \frac{ay^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

Dunque anche

$$(adx \, (a + bx)^m) = \frac{ay^{m+1}}{b(m+1} + C.$$

E, fostituendo ad y il suo valore $a + bx$, sarà

$$\int (adx \, (a + bx)^m) = \frac{a(a + bx)^{m+1}}{b(m+1)} + C.$$

ESEM-

ESEMPIO VI.

Sia da integrarsi $(adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}}$.
Si metta $ax + cx^2 + ex^3 = y$.

Essendo

$$adx + 2cxdx + 3ex^2 dx = d(ax + cx^2 + ex^3),$$

sarà

$$adx + 2cxdx + 3ex^2 dx = dy.$$

E perciò

$$(adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{m}{n}}\, dy.$$

Ma

$$\int y^{\frac{m}{n}}\, dy = \frac{y^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C.$$

Dunque anche

$$\int\left((adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{y^{\frac{m+n}{n}}}{\frac{m+n}{n}} + C = \frac{n\sqrt[n]{y^{m+n}}}{m+n} + C.$$

E, sostituendo alla variabile y il suo valore $ax + cx^2 + ex^3$,

sarà

sarà

$$\int\left((adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{(ax + cx^2 + ex^3)^{m+n}} + C.$$

Similmente si trova

$$\int\left((adx + 2cxdx + 3ex^2 dx)(ax + cx^2 + ex^3)^{\frac{-m}{n}}\right) = \frac{n}{n-m}\sqrt[n]{(ax + cx^2 + ex^3)^{n-m}} + C.$$

COROLLARIO.

27. Quindi è che se la grandezza, che si deve integrare, è una differenziale binomia, cioè il prodotto di una quantità differenziale moltiplicata per una potenza di un binomio, che ha un termine costante, e l' altro variabile; tale grandezza si fa esattamente integrare non solamente, se l' esponente della potenza del binomio è un numero intero, e positivo, ma anche se l' esponente, che ha la variabile fuori del binomio, è minore di un' unità di quello, che ha nel binomio. Perchè in tale caso la parte differenziale della grandezza da integrarsi è il differenziale del binomio, che contiene la stessa grandezza, o è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante. Onde contrassegnando con r un numero intero, e positivo, è esattamente integrabile ogni differenziale binomia della seguente forma

ax^m

$$ax^m dx\ (b + cx^n)^r,$$

qualunque sia il valore degli esponenti m, ed n della variabile: e contrassegnando con p qualsisia numero intero, o rotto, positivo, o negativo, è anche integrabile esattamente ogni differenziale binomia della forma seguente

$$ax^{m-1} dx\ (b + cx^m)^p,$$

qualunque sia il valore di m.

AVVERTIMENTO IV.

28. Si noti che una differenziale binomia si può anche integrare con esattezza, se l'esponente, che ha la variabile fuori del binomio, è tale, che accresciuto di un'unità, e diviso poi per l'esponente, che ha la stessa variabile nel binomio, dà per quoziente un numero intero, e positivo. Perciò soggiugniamo il seguente.

PROBL. IV.

29. *Insegnare il modo d'integrare una differenziale binomia, qualora il quoziente, che nasce con dividere l'esponente, che ha la variabile fuori del binomio, accresciuto di un'unità, per l'esponente, che ha la stessa variabile nel binomio, è intero, e positivo.*

So-

SOLUZIONE.

1. Si metta il binomio uguale ad una sola variabile; e da tale equazione se ne ricavi un'altra, che abbia nel primo membro la sola variabile della grandezza data.

2. S'innalzino amendue i membri di tale altra equazione a quella potenza, che bisogna, affinchè l'esponente della variabile nel primo membro della terza equazione, che nasce, ecceda quello, che ha la stessa variabile fuori del binomio nella grandezza data, di un'unità; il che è sempre possibile, qualora il quoziente, che nasce con dividere l'esponente della variabile fuori del binomio, accresciuto di un'unità, per l'esponente, che ha la stessa variabile nel binomio, è intero, e positivo.

3. Si faccia una quarta equazione co' differenziali de' membri della terza, e da essa si ricavi il valore della parte della grandezza data, esistente fuori del binomio, considerata senza la quantità costante, per cui è moltiplicata, o divisa.

4. Tale valore si moltiplichi, o divida per la quantità costante, per cui è moltiplicata, o divisa la parte differenziale della grandezza data. Con quel, che nasce, si avrà il valore dell'intera parte esistente nella proposta grandezza fuori del binomio.

5. Nella grandezza data si sostituiscano al

bino-

binomio la variabile, con cui si è espresso, ed alla parte esistente fuori del binomio il suo valore ritrovato; e quel, che nasce, s' integri colle regole stabilite.

6. Finalmente alla variabile dell' integrale ritrovato si sostituisca il binomio della grandezza data; e si avrà l' integrale cercato. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi $ax^5 dx\,(b+cx^3)^{\frac{2}{3}}$.
Si metta $b+cx^3=y$.

Saranno

$$cx^3 = y-b,$$

$$x^3 = \frac{y-b}{c},$$

$$x^6 = \left(\frac{y-b}{c}\right)^2.$$

Onde

$$dx^6 = d\left(\frac{y-b}{c}\right)^2,$$

ovvero

$$6x^5 dx = 2\left(\frac{y-b}{c}\right)\times\frac{dy}{c}.$$

E perciò

$$x^5 dx = 2\left(\frac{y-b}{c}\right)\times\frac{dy}{6c}$$

ax^5,

$$ax^5 dx = \left(\frac{y-b}{c}\right)\times\frac{ady}{3c} = \frac{aydy-abdy}{3c^2}.$$

Si sostituiscano nella grandezza data in vece del binomio $b+cx^3$ la variabile y, ed in vece di $ax^5 dx$ il valore ritrovato, cioè $\frac{aydy-abdy}{3c^2}$, si avrà

$$ax^5 dx\,(b+cx^3)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{aydy-abdy}{3c^2}\right)y^{\frac{2}{3}} =$$

$$\frac{ay^{\frac{2}{3}+1}dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}}dy}{3c^2}.$$ Onde

$$\int\left(ax^5 dx\,(b+cx^3)^{\frac{2}{3}}\right) = \int\left(\frac{ay^{\frac{2}{3}+1}dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}}dy}{3c^2}\right).$$

Ma

$$\int\left(\frac{ay^{\frac{2}{3}+1}dy}{3c^2} - \frac{aby^{\frac{2}{3}}dy}{3c^2}\right) = \frac{ay^{\frac{2}{3}+2}}{3c^2\times\left(\frac{2}{3}+2\right)}$$

$$-\frac{aby^{\frac{2}{3}+1}}{3c^2\times\left(\frac{2}{3}+1\right)} + C = \frac{ay^{\frac{2}{3}+2}}{3c^2\times\frac{8}{3}} -$$

$aby^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{aby^{\frac{2}{3}+1}}{3c^2 \times \frac{5}{3}} + C = \frac{a}{3c^2} \times y^{\frac{2}{3}} \times$$

$$\left(\frac{3}{8}y^2 - \frac{3}{5}by\right) + C = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{y^2} \times$$

$$\left(\frac{3}{8}y^2 - \frac{3}{5}by\right) + C.$$

Dunque anche

$$\int\left(ax^5\,dx\,(b+cx^3)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{y^2} \times$$

$$\left(\frac{3}{8}y^2 - \frac{3}{5}by\right) + C.$$

E, sostituendo alla variabile y il suo valore $b+cx^3$, sarà

$$\int\left(ax^5\,dx\,(b+cx^3)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{a}{3c^2} \sqrt[3]{(b+cx^3)^2} \times$$

$$\left(\frac{3}{8}(b+cx^3)^2 - \frac{3}{5}b(b+cx^3)\right) + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi $ax^{3m-1}dx\,(b+cx^m)^{-n}$.
Si metta $b+cx^m = y$.

Saranno

$$cx^m = y - b,$$

$$x^m = \frac{y-b}{c},$$

ed

ed

$$x^{3m} = \left(\frac{y-b}{c}\right)^3;$$

onde

$$3mx^{3m-1}\,dx = 3\left(\frac{y-b}{c}\right)^2 \times \frac{dy}{c}.$$

E perciò

$$x^{3m-1}\,dx = \left(\frac{y-b}{c}\right)^2 \times \frac{dy}{mc}$$

ed

$$ax^{3m-1}\,dx = \left(\frac{y-b}{c}\right)^2 \times \frac{ady}{mc} =$$

$$\left(\frac{y^2-2by+b^2}{c^2}\right) \times \frac{ady}{mc} =$$

$$\frac{ay^2\,dy - 2abydy + ab^2\,dy}{mc^3}.$$

Si sostituiscano nella grandezza data in vece del binomio $b+cx^m$ la variabile y, ed in vece di $ax^{3m-1}\,dx$ il suo valore ritrovato, cioè $\frac{ay^2\,dy - 2abydy + ab^2\,dy}{mc^3}$, si avrà

$$ax^{3m-1}\,dx\,(b+cx^m)^{-n} =$$

$$\left(\frac{ay^2\,dy - 2abydy + ab^2\,dy}{mc^3}\right) y^{-n} =$$

 ay

$$\frac{ay^{-n+2}\,dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1}\,dy}{mc^3} + \frac{ab^2\,y^{-n}\,dy}{mc^3}.$$

Onde

$$\int\left(ax^{3m-1}\,dx\,(b+cx^m)^{-n}\right) = \int\left(\frac{ay^{-n+2}\,dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1}\,dy}{mc^3} + \frac{ab^2\,y^{-n}\,dy}{mc^3}\right)$$

Ma

$$\int\left(\frac{ay^{-n+2}\,dy}{mc^3} - \frac{2aby^{-n+1}\,dy}{mc^3} + \frac{ab^2\,y^{-n}\,dy}{mc^3}\right) = \frac{ay^{-n+3}}{mc^3\,(3-n)} - \frac{2aby^{-n+2}}{mc^3\,(2-n)} + \frac{ab^2\,y^{-n+1}}{mc^3\,(1-n)} + C.$$

$$= \frac{a}{mc^3}\,y^{-n}\left(\frac{y^3}{3-n} - \frac{2b}{2-n}\,y^2 + \frac{b^2}{1-n}\,y\right) + C.$$

Dunque anche

$$\int\left(ax^{3m-1}\,dx\,(b+cx^m)^{-n}\right) = \frac{a}{mc^3}\,y^{-n} \times \left(\frac{y^3}{3-n} - \frac{2b}{2-n}\,y^2 + \frac{b^2}{1-n}\,y\right) + C.$$

E, sostituendo alla variabile y il suo valore $b + cx^m$, sarà

$$\int\left(ax^{3m-1}\,dx\,(b+cx^m)^{-n}\right) = \frac{a}{mc^3}$$

(b

$$(b+cx^m)^{-n} \times \left(\frac{1}{3-n}(b+cx^m)^3 - \frac{2b}{2-n}(b+cx^m)^2 + \frac{b^2}{1-n} \times (b+cx^m)\right) +$$

$$C = \frac{a}{mc^3\,(b+cx^m)^n} \times \left(\frac{1}{3-n}(b+cx^m)^3 - \frac{2b}{2-n}(b+cx^m)^2 + \frac{b^2}{1-n}(b+cx^m)\right)$$

$+ C.$

AVVERTIMENTO I.

30. Si noti che qualche volta accade, che una differenziale binomia, che non è compresa nel caso precedente, vi si riduce, con mutare il segno all' esponente della variabile nel binomio, senza mutare il valore della grandezza proposta. Or ciò s' ottiene nel seguente modo. Nella data grandezza si sostituiscono al binomio il quoziente, che nasce dividendo ciascuno de' suoi termini per quella potenza della variabile, che si ritrova in esso, ed alla parte esistente fuori del binomio il prodotto, che si ha con moltiplicare la stessa parte per quella potenza del divisore adoperato, che indica l' esponente del binomio. Per esempio la gran-

 dez-

dezza $\frac{a^2\,dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = a^2\,dy\,(a^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ è tale, che l' esponente della variabile fuori del binomio accresciuto di un' unità, cioè $0+1$, o sia 1, non è divisibile esattamente per 2, ch' è l' esponente della stessa variabile nel binomio. Onde tale grandezza non sembra compresa nel caso precedente. Ma vi si riduce, ed in conseguenza si rende integrabile secondo il modo insegnato, se il binomio si divide per y^2, ed $a^2\,dy$ si moltiplica per $(y^2)^{-\frac{3}{2}}$, o sia per y^{-3}. Perchè allora la grandezza data si muta nella seguente, cioè $a^2 y^{-3}\,dy\,(a^2 y^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$, nella quale l' esponente della variabile fuori del binomio, accresciuto di un'unità, cioè $-3+1$, o sia -2, diviso per -2, ch' è l' esponente della variabile nel binomio, dà per quoziente 1, ch' è intero, e positivo. Or l' integrale di $a^2 y^{-3}\,dy\,(a^2 y^{-2}+1)^{-\frac{3}{2}}$ è per lo § precedente $= \frac{1}{\sqrt{a^2 y^{-2}+1}} + C = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} + C$. Dunque anche l' integrale di $\frac{a^2\,dy}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ è $= \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}} + C$.

AVVERTIMENTO II.

31. Si noti pure che qualora una differenziale binomia non si riduce ad uno de' due casi considerati ne' §§ 27, e 29; ancorchè si faccia in essa la preparazione insegnata nel § 30, tale differenziale non è esattamente integrabile. Così non si può integrare con esattezza la differenziale binomia $ax^5\,dx\,(b+cx^4)^{-\frac{3}{5}}$, la quale non si riduce al primo caso, per essere $-\frac{3}{5}$ un rotto, e negativo; nè al secondo, per non essere $ax^5\,dx$ il differenziale di $b+cx^4$ moltiplicato, o diviso per una quantità costante; nè al terzo, per non essere $5+1$, o sia 6 divisibile per 4 esattamente; e se si opera in essa secondo si è insegnato nel § 30, nè anche la differenziale binomia, che nasce, cioè $ax^{\frac{13}{5}}\,dx\,(bx^{-4}+c)^{-\frac{3}{5}}$ si riduce al caso terzo, come è facile a comprendere.

AV-

AVVERTIMENTO III.

32. Si noti di vantaggio che ogni diſferenziale binomia, che ha la variabile in amendue i termini del ſuo binomio, ſi può traſformare in un' altra, che abbia la variabile in un ſolo termine del binomio, ſenza cambiare il ſuo valore, nel ſeguente modo. Si divida prima il binomio per quella potenza della variabile, che ſi ritrova in uno de' ſuoi termini; ed indi la parte, ch' eſiſte fuori del binomio, ſi moltiplichi per la ſteſſa potenza della variabile, innalzata però alla potenza indicata dall' eſponente del medeſimo binomio. Così la differenziale binomia $ax^{\frac{4}{5}}dx\,(ax^2 + cx^3)^{\frac{3}{5}}$, che ha la variabile x in amendue i termini del binomio $ax^2 + cx^3$, dividendo il binomio per x^2, e moltiplicando la parte $ax^{\frac{4}{5}}dx$, ch' è fuori del binomio per $(x^2)^{\frac{3}{5}} = x^{\frac{6}{5}}$, ſi traſforma nella differenziale binomia $ax^2dx\,(a + cx)^{\frac{3}{5}}$, che ſi riduce al caſo terzo, e che conſeguentemente è integrabile eſattamente.

COROLLARIO.

33. Quindi le differenziali binomie, che con-

contengono la variabile in amendue i termini de' loro binomj, ſono eſattamente integrabili sì, o no, ſecondochè ſono eſattamente integrabili sì, o no quelle, nelle quali ſi poſſono traſformare, operando del modo inſegnato nel § precedente.

AVVERTIMENTO IV.

34. Si noti che per le differenziali trinomie, quadrinomie, ec., oltre de' caſi conſiderati ne' §§ 25, e 26, ve ne ſono anche degli altri, ne' quali le mededeſime ſono eſattamente integrabili, e che noi ci diſpenſiamo di eſaminare, perchè la brevità prefiſſaci non lo permette: tanto più che tali altri caſi non occorrono, che rariſſime volte.

AVVERTIMENTO V.

35. Si noti finalmente che ſe la differenziale, di cui ſi cerca l' integrale, è una differenziale compoſta, che non è compreſa ne' caſi eſpoſti, tale differenziale s' integra allora per approſſimazione. L' arte d' integrare per approſſimazione è la ſeguente. Si riſolve prima la grandezza data in una ſerie d' infiniti monomj, e poſcia s' integrano molti de' primi termini della detta ſerie colle regole inſegnate. La ſomma degl' integrali, che ſi avranno, coll' aggiunta della co-

costante C, sarà l' integrale della grandezza data, più o meno prossimo al vero, secondochè il numero de' termini della detta serie sarà maggiore, o minore, e secondochè più, o meno la stessa serie sarà convergente.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale $ax^5\,dx\,(b + cx^4)^{-\frac{3}{5}}$.

Essendo

$$(b + cx^4)^{-\frac{3}{5}} = b^{-\frac{3}{5}} - \frac{3b^{-\frac{3}{5}}cx^4}{5b} + \frac{24b^{-\frac{3}{5}}c^2x^8}{50b^2} - \frac{104b^{-\frac{3}{5}}c^3x^{12}}{250b^3}, \text{ ec.} = b^{-\frac{3}{5}} - \frac{3}{5}b^{-\frac{8}{5}}cx^4 + \frac{12}{25}b^{-\frac{13}{5}}c^2x^8 - \frac{52}{125}b^{-\frac{18}{5}}c^3x^{12}, \text{ ec.}$$

Sarà

$$ax^5\,dx\,(b + cx^4)^{-\frac{3}{5}} = ab^{-\frac{3}{5}}x^5\,dx - \frac{3}{5}ab^{-\frac{8}{5}}cx^9\,dx + \frac{12}{25}ab^{-\frac{13}{5}}c^2x^{13}dx - \frac{52}{125}ab^{-\frac{18}{5}}c^3x^{17}\,dx, \text{ ec.} = ab^{-\frac{3}{5}}\left(x^5\,dx - \frac{3}{5}b^{-1}cx^9\,dx + \frac{12}{25}b^{-2}c^2x^{13}dx - \frac{52}{125}b^{-3}c^3x^{17}dx, \text{ ec.}\right).$$

E perciò

$$\int\left(ax^5\,dx\,(b + cx^4)^{-\frac{3}{5}}\right) = \int\left(ab^{-\frac{3}{5}} \times \left(x^5\,dx - \frac{3}{5}b^{-1}cx^9\,dx + \frac{12}{25}b^{-2}c^2x^{13}dx - \frac{52}{125}b^{-3}c^3x^{17}dx, \text{ ec.}\right)\right) = ab^{-\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{50}b^{-1}cx^{10} + \frac{6}{175}b^{-2}c^2x^{14} - \frac{26}{1125}b^{-3}c^3x^{18}, \text{ ec.}\right) + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale $\frac{aydy}{a^4 - y^4} = aydy\,(a^4 - y^4)^{-1}$.

Essendo

$$(a^4 - y^4)^{-1} = a^{-4} + \frac{a^{-4}y^4}{a^4} + \frac{a^{-4}y^8}{a^8} + \frac{a^{-4}y^{12}}{a^{12}}, \text{ ec.}$$

Sarà

$$\frac{aydy}{a^4 - y^4} = aydy\,(a^4 - y^4)^{-1} = \frac{ydy}{a^3} + \frac{y^5\,dy}{a^7} + \frac{y^9\,dy}{a^{11}} + \frac{y^{13}dy}{a^{15}}, \text{ ec.}$$

E

E perciò

$$\int\left(\frac{a y d y}{a^4 - y^4}\right) = \int\left(\frac{ydy}{a^3} + \frac{y^5 dy}{a^7} + \frac{y^9 dy}{a^{11}} + \frac{y^{13}dy}{a^{15}}, \text{ec.}\right) = \frac{y^2}{2a^3} + \frac{y^6}{6a^6} + \frac{y^{10}}{10a^{11}} + \frac{y^{14}}{14a^{15}}, \text{ec.} + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale $\frac{2adx}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2adx\,(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Essendo

$$(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = a^{-1} - \frac{a^{-1}x^2}{2a^2} + \frac{3a^{-1}x^4}{8a^4} - \frac{5a^{-1}x^6}{16a^6} + \frac{35a^{-1}x^8}{128a^8}, \text{ec.} = a^{-1}\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ec.}\right).$$

Sarà

$$\frac{2adx}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2adx\,(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 2dx\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ec.}\right).$$

E perciò

$$\int\frac{2adx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\left(2dx\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{5x^6}{16a^6} + \frac{35x^8}{128a^8}, \text{ec.}\right)\right) = \int\left(2dx - \frac{x^2 dx}{a^2} + \frac{3x^4 dx}{4a^4} - \frac{5x^6 dx}{8a^6} + \frac{35x^8 dx}{64a^8}, \text{ec.}\right)$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{3x^5}{20a^4} - \frac{5x^7}{56a^6} + \frac{35x^9}{576a^8}, \text{ec.} + C,$$

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi per approssimazione la differenziale $ydy\,(y^2+2y^3)^{-\frac{m}{n}}$.

Essendo

$$(y^2+2y^3)^{-\frac{m}{n}} = y^{\frac{-2m}{n}} - \frac{2m}{n}y^{\frac{n-2m}{n}} + \frac{2(m^2+mn)}{n^2}y^{\frac{2n-2m}{n}} - \frac{4(m^3+3m^2n+2mn^2)}{3n^3} \times y$$

$$y^{\frac{3n-2m}{n}} + \frac{2(m^4+6m^3n+11m^2n^2+6mn^3)}{3n^4}\, y^{\frac{4n-2m}{n}}, \text{ ec.}$$

Sarà

$$ydy\,(y^2+2y^3)^{-\frac{m}{n}} = y^{\frac{-2m}{n}+1}dy - \frac{2m}{n}\, y^{\frac{n-2m}{n}+1}dy + \frac{2(m^2+mn)}{n^2}\, y^{\frac{2n-2m}{n}+1}dy - \frac{4(m^3+3m^2n+2mn^2)}{3n^3}\, y^{\frac{3n-2m}{n}+1}dy + \frac{2(m^4+6m^3n+11m^2n^2+6mn^3)}{3n^4}\, y^{\frac{4n-2m}{n}+1}dy, \text{ ec.}$$

E perciò

$$\int\left(ydy\,(y^2+2y^3)^{-\frac{m}{n}}\right) = \int\left(y^{\frac{-2m}{n}+1}dy - \frac{2m}{n}\, y^{\frac{n-2m}{n}+1}dy + \frac{2(m^2+mn)}{n^2}\, y^{\frac{2n-2m}{n}+1}dy - \frac{4(m^3+3m^2n+2mn^2)}{3n^3}\, y^{\frac{3n-2m}{n}+1}dy + \frac{2(m^4+6m^3n+11m^2n^2+6mn^3)}{3n^4}\right.$$

$$\left. y^{\frac{4n-m}{n}+1}ay, \text{ ec.}\right) = y^{\frac{2n-2m}{n}} - \frac{2m}{3n-2m}\, y^{\frac{3n-2m}{n}} + \frac{m^2+mn}{2n^2-mn}\, y^{\frac{4n-2m}{n}} - \frac{(4m^3+12m^2n+8mn^2)}{15n^3-6mn^2}\, y^{\frac{5n-2m}{n}} + \frac{m^4+6m^3n+11m^2n^2+6mn^3}{9n^4-3mn^3}\, y^{\frac{6n-2m}{n}}, \text{ ec.} + C.$$

CAP. II.

De' differenziali logaritmici, e del modo d' integrarli.

DEFINIZIONE.

36. Si dicono *differenziali logaritmici* tutte le quantità differenziali, che contrassegnano differenziali di grandezze logaritmiche.

COROLLARIO I.

37. Quindi gl' integrali de' differenziali logaritmici sono tutti grandezze logaritmiche.

COROLLARIO II.

38. Essendo il differenziale di qualunque grandezza logaritmica uguale al rotto, che ha per numeratore il differenziale della grandezza, alla quale si riferisce la grandezza logaritmica, e per denominatore la stessa grandezza, qualora si esprime coll' unità la sottangente della curva logaritmica, alla quale appartengono le grandezze logaritmiche: ne segue che i rotti differenziali, che hanno per numeratori i differenziali de' loro denominatori, sono tutti differenziali logaritmici, supposta la sottangente della curva logaritmica, alla quale appartengono le grandezze logaritmiche, che danno gl' integrali di sì fatti rotti, $= 1$.

PROBL. V.

39. *Insegnare il modo d' integrare i rotti differenziali, che hanno per numeratori i differenziali de' loro denominatori.*

SOLUZIONE.

Al logaritmo del denominatore del rotto si aggiunga la costante C. La somma, che nasce, sarà l'integrale cercato.

La ragione di ciò è manifesta per lo corollario precedente.

ESEM-

ESEMPJ.

1. $\int \frac{dx}{x} = lx + C.$

2. $\int \frac{dy}{c+y} = l(c+y] + C.$

3. $\int \frac{3a^2 x^2 dx}{3q^2 + a^2x^3} = l(3q^2 + a^2 x^3) + C.$

4. $\int \left(\frac{xdy + ydx}{xy} \right) = lxy + C = lx + ly + C.$

5. $\int \frac{my^{m-1} dy}{y^m} = ly^m + C = mly + C.$

6. $\int \frac{nx^m y^{n-1} dy + my^n x^{m-1} dx}{x^m y^n} = lx^m y^n +$ $C = lx^m + ly^n + C = mlx + nly + C.$

AVVERTIMENTO I.

40. Si noti che se il numeratore di un rotto differenziale non è esattamente il differenziale del denominatore dello stesso rotto, ma è il detto differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante;

N 2 l' in-l'integrale di sì fatto rotto anche ſi riduce ad una grandezza logaritmica. In fatti ſe ſi riſolve allora il rotto in due fattori, de' quali uno ſia un rotto, che abbia per denominatore il denominatore del rotto propoſto, e per numeratore il differenziale dello ſteſſo denominatore, e l'altro ſia coſtante; è chiaro che ſi avrà l'integrale del rotto propoſto con moltiplicare per lo fattore coſtante l'integrale dell'altro fattore, o ſia coſtante l'integrale dell'altro fattore, o ſia con moltiplicare per lo fattore coſtante il logaritmo del denominatore dell'altro fattore, e con aggiugnere al prodotto, che naſce, la coſtante C.

ESEMPIO I.

Sia da integrarſi il rotto $\frac{ax^3\,dx}{a^4+x^4}$.

Eſſendo

$$d(a^4+x^4) = 4x^3\,dx;$$

ſarà

$$\frac{ax^3\,dx}{a^4+x^4} = \frac{a}{4} \times \frac{4x^3\,dx}{a^4+x^4}.$$

E perciò

$$\int\left(\frac{ax^3\,dx}{a^4+x^4}\right) = \int\left(\frac{a}{4} \times \frac{4x^3\,dx}{a^4+x^4}\right) = \frac{a}{4} \times \int\left(\frac{4x^3\,dx}{a^4+x^4}\right).$$

On-

Onde

$$\int\left(\frac{ax^3\,dx}{a^4+x^4}\right) = \frac{1}{4}\,al\,(a^4+x^4) + C.$$

ESEMPIO II.

Sia da integrarſi il rotto $\frac{2nxdx}{mx^2}$.

Eſſendo

$$d(mx^2) = 2mxdx;$$

ſarà

$$\frac{2nxdx}{mx^2} = \frac{n}{m} \times \frac{2mxdx}{mx^2}.$$

E perciò

$$\int\frac{2nxdx}{mx^2} = \int\left(\frac{n}{m} \times \frac{2mxdx}{mx^2}\right) = \frac{n}{m} \times \int\frac{2mxdx}{mx^2} = \frac{n}{m} \times l\,(mx^2) + C = \frac{n}{m}(lm + lx^2) + C = \frac{n}{m}\,lm + \frac{2n}{m}\,lx + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarſi il rotto $\frac{dy}{c-y}$.

Eſ-

Essendo

$$d(c - y) = -dy;$$

sarà

$$\frac{dy}{c-y} = -1 \times \frac{-dy}{c-y}.$$

E perciò

$$\int\left(\frac{dy}{c-y}\right) = \int\left(-1 \times -\frac{dy}{c-y}\right) =$$

$$-1 \times \int\left(-\frac{dy}{c-y}\right) = -1 \times$$

$$l(c-y) + C = -l(c-y) + C = 0 - l(c-y) + C = l\,1 - l(c-y) + C = l\frac{1}{c-y} + C.$$

COROLLARIO.

41. Essendo $x^{-1}\,dx = \frac{dx}{x}$, sarà $\int x^{-1}\,dx = \int\frac{dx}{x} = l\,x + C$. Similmente essendo $3a^2\,y^{-1}\,dy = \frac{3a^2\,dy}{y}$, sarà $\int 3a^2\,y^{-1}dy = \int\frac{3a^2\,dy}{y} = 3a^2 \times \int\frac{dy}{y} = 3a^2\,ly + C$. Sicchè gl' integrali delle quantità differenziali monomie, che contengono la variabile coll' esponente -1, sono tutti logaritmi. Quindi s' intende perchè l' integrazioni di sì fatte quantità sono escluse dalla regola fondamentale.

AVVERTIMENTO II.

42. Si noti che vi sono de' rotti differenziali, i quali ancorchè non abbiano le condizioni esposte ne' §§ 39, e 40, nondimeno con qualche preparazione si possono ad essi somministrare. Sì fatti rotti anche si possono integrare co' logaritmi. Così il rotto differenziale $\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a}}$ non ha nè la condizione del § 39, nè quella del § 40; perchè il numeratore dy non è il differenziale del denominatore $\sqrt{y^2 - a}$, nè è lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante; essendo il differenziale del detto denominatore $= \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a}}$. Ma moltiplicando il detto rotto per $y + \sqrt{y^2 - a}$, e dividendo poi il prodotto per la stessa quan-

quantità $y+\sqrt{y^2-a}$, nasce il rotto $\left(\frac{ydy}{\sqrt{y^2-a}}\right.$ $\left.+dy\right):(y+\sqrt{y^2-a})$, il quale rotto è dello stesso valore del rotto proposto, ed ha per numeratore l' esatto differenziale del denominatore. Dunque l' integrale del primo rotto è lo stesso, che l' integrale del secondo. Ma l' integrale del secondo è $=l[y+\sqrt{y^2-a}]+C$ [§ 39]. Dunque anche l' integrale del primo è $==$ $l[y+\sqrt{y^2-a}]$. Similmente il rotto differenziale $\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ non ha la condizione del § 39, nè quella del § 40; perchè il numeratore dx non è il differenziale del denominatore $\sqrt{a-x^2}$, nè è lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante; essendo il differenziale del detto denominatore $=-\frac{xdx}{\sqrt{a-x^2}}$. Ma moltiplicando sì il numeratore, che il denominatore del detto rotto per $\sqrt{-1}$, nasce l' altro rotto $\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{a-x^2}\times\sqrt{-1}}=$

$\frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-a}}=\sqrt{-1}\times\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$. Dunque l'integrale del rotto $\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ è lo stesso, che l'integrale del prodotto, che si ha con moltiplicare per $\sqrt{-1}$ il $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$, cioè è uguale al prodotto, che nasce moltiplicando per $\sqrt{-1}$ l'integrale del rotto $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$.

Ora il rotto $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}$ non si riferisce nè al § 39, nè al § 40, come è facile a conoscere; ma moltiplicandolo per $x+\sqrt{x^2-a}$, e dividendo poi il prodotto, che nasce, per la stessa grandezza $x+\sqrt{x^2-a}$, nasce il rotto $\frac{dx}{\sqrt{x^2-a}}\times(x+\sqrt{x^2-a}):(x+\sqrt{x^2-a})$, nel-

nel quale il numeratore è il differenziale esatto del denominatore; essendo $\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a}}$ il differenziale di $\sqrt{x^2-a}$, e dx il differenziale di x. Dunque l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ è uguale al prodotto, che si ha con moltiplicare per $\sqrt{-1}$ l'integrale del rotto $\left(\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a}}+dx\right):(x+\sqrt{x^2-a})$. Ma l'integrale di sì fatto rotto è $=l[x+\sqrt{x^2-a}]+C$ [§ 39]. Sicchè l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{a-x^2}}$ è $=\sqrt{-1}\times l[x+\sqrt{x^2-a}]+C$.

CA.

CAP. III.

De' differenziali esponenziali, e del modo d' integrarli.

DEFINIZIONE.

43. Si dicono *differenziali esponenziali* tutte le grandezze differenziali, che contengono quantità esponenziali.

PROBL. VI.

44. *Insegnare il modo di conoscere, se un differenziale esponenziale sia integrabile sì, o no.*

SOLUZIONE.

Avendosi il differenziale di qualsisia quantità esponenziale con moltiplicare la stessa quantità per lo differenziale del suo logaritmo: è chiaro che sarà integrabile una quantità differenziale esponenziale, se si potrà risolvere in due fattori, de' quali l' uno sia il differenziale del logaritmo dell' altro, o lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

PRO.

PROBL. VII.

45. *Insegnare il modo d' integrare un differenziale esponenziale, ch' è dell' indole esposta nel problema precedente.*

SOLUZIONE.

1. Si risolva la grandezza data in due fattori, de' quali l' uno sia il differenziale dell' altro, o lo stesso differenziale moltiplicato, o diviso per una quantità costante.

2. Si aggiunga la costante C al secondo de' detti fattori, o al prodotto, o quoziente, che nasce con moltiplicare, o dividere il secondo de' detti fattori per la quantità costante, per cui è moltiplicato, o diviso nella grandezza data il differenziale dello stesso fattore.

La somma sarà l' integrale cercato. Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi $a^x dxla$.

Essendo

$$dxla = d(la^x);$$

sarà

$$\int (dxla \times a^x) = \int a^x dxla = a^x + C.$$

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi $y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y}$.

Essendo

$$y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y} = y^x\left(lydx + \frac{xdy}{y}\right),$$

e

$$lydx + \frac{xdy}{y} = d(xly) = d(ly^x).$$

Sarà

$$\int\left(y^x lydx + \frac{y^x xdy}{y}\right) = y^x + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi $c^y dylc + x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x}$.

Essendo

$$dylc = d(ylc) = d(lc^y);$$

sarà

$$\int c^y dylc = c^y + C.$$

Similmente essendo

$$x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x} = x^z\left(dzlx + \frac{zdx}{x}\right),$$

e

e

$$dzlx + \frac{zdx}{x} = d(lx^z);$$

Sarà

$$\int\left(x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x}\right) = x^z + C.$$

Onde sarà

$$\int\left(c^y dylc + x^z dzlx + \frac{x^z zdx}{x}\right) = c^y + x^z + C.$$

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi $[c^2+y^2]^y\left(dyl[c^2+y^2]+\frac{2y^2 dy}{c^2+y^2}\right)$.

Essendo

$$dyl[c^2+y^2]+\frac{2y^2 dy}{c^2+y^2} = d(yl(c^2+y^2]) = d[l[c^2+y^2]^y].$$

Sarà

$$\int\left([c^2+y^2]^y[dyl[c^2+y^2]+\frac{2y^2 dy}{c^2+y^2}]\right) = [c^2+y^2]^y + C.$$

ESEMPIO V.

Sia da integrarsi dza^{cz}.

Essendo

$$d[la^{cz}] = d[czla] = cladz,$$

e

$$dz = \frac{cladz}{cla}:$$

è chiaro che nel differenziale dato dza^{cz} il fattore dz è il differenziale del logaritmo dell' altro fattore a^{cz}, diviso per la quantità costante cla. Onde sarà

$$\int dza^{cz} = \int\frac{cladza^{cz}}{cla}:$$

Ma

$$\int cladza^{cz} = a^{cz} + C.$$

E perciò

$$\int\frac{cladza^{cz}}{cla} = \frac{a^{cz}}{cla} + C.$$

Sicchè

$$\int dza^{cz} = \frac{a^{cz}}{cla} + C.$$

ESEMPIO VI.

Sia da integrarsi $cladxa^x$.

Essendo

$$d[la^x] = d[xla] = ladx.$$

e

$$cladx = ladx \times c:$$

è chiaro che nel differenziale dato $cladxa^x$ il fattore $cladx$ è differenziale del logaritmo dell' altro fattore a^x, moltiplicato per la costante c. Onde sarà

$$\int cladxa^x = c \times \int ladxa^x = ca^x + C.$$

AVVERTIMENTO I.

46. Si noti che vi sono de' casi, ne' quali si sanno integrare le quantità differenziali esponenziali, ancorchè non sieno dell' indole esposta nel problema precedente. Ma noi ci asteniamo di esaminarli, perchè la brevità prefissaci non lo permette.

AVVERTIMENTO II.

47. Insegnato il modo d'integrare le quantità differenziali, che contengono il differenziale del primo grado di una sola variabile, e che perciò diconsi *differenziali ad una variabile*; passiamo ad esporre in che modo s' integrano le quantità differenziali, che contengono

gono

gono i differenziali del primo grado di due, o più variabili, e che perciò chiamansi *differenziali a più variabili*. Perciò sia il

CAP. IV.

Del modo d' integrare le quantità differenziali a più variabili.

DEFINIZIONE.

48. Una quantità differenziale di qualunque grado dicesi *esatta*, o *inesatta*, ovvero *completa*, o *incompleta*, secondochè risulta sì, o no dal differenziare una grandezza algebraica, che contiene variabili, o differenziali di variabili.

COROLLARIO.

49. Quindi è che una quantità differenziale di qualsivoglia grado è sì, o no integrabile, secondochè è completa, o incompleta. E perciò, prima di procedere ad insegnare il modo d' integrare i differenziali a più variabili, stabiliremo delle regole, colle quali si possa sempre conoscere, se tali differenziali sieno esatti sì, o no.

AVVERTIMENTO I.

50. Si noti che qualunque differenziale esatto a due variabili costa di termini, de' quali alcuni sono moltiplicati per lo differenziale di una di tali variabili, e gli altri per lo differenziale dell' altra variabile. Onde chiamando A la somma de' primi, e B la somma degli altri, si potrà qualunque differenziale a due variabili x, e y esprimere colla formola generale $Adx + Bdy$.

AVVERTIMENTO II.

51. Si noti pure che rappresentando con A una grandezza algebraica, che contiene due variabili x, e y, dinoteremo appresso il differenziale di sì fatta grandezza con $\frac{dAdx}{dx}$, quando si fa variare in essa solo x, con $\frac{dAdy}{dy}$, quando si fa variare solo y, e con $\frac{d^2Adxdy}{dxdy}$, quando si differenzia la grandezza A con supporre variabile solo x, ed indi si differenzia il risultato, supponendo in esso variabile solo y.

PRO-

PROBL. VIII.

52. *Insegnare il modo di conoscere, se un differenziale a due variabili sia sì, o no esatto.*

SOLUZIONE.

Contrassegnino $Adx + Bdy$ un'esatto differenziale a due variabili x, e y, e P l'integrale di tale differenziale. Essendo

$$dP = \frac{dPdx}{dx} + \frac{dPdy}{dy},$$

sarà

$$\frac{dPdx}{dx} + \frac{dPdy}{dy} = Adx + Bdy;$$

cioè saranno

$$\frac{dPdx}{dx} = Adx$$

$$\frac{dPdy}{dy} = Bdy,$$

o sia

$$\frac{dP}{dx} = A,$$

e

$$\frac{dP}{dy} = B.$$

 E

E differenziando l'equazione $\frac{dP}{dx} = \mathcal{A}$, con far variare solo y, e l' equazione $\frac{dP}{dy} = B$, con far variare solo x, saranno

$$\frac{d^2 Pdy}{dxdy} = \frac{d\mathcal{A}dy}{dy},$$

e

$$\frac{d^2 Pdx}{dxdy} = \frac{dBdx}{dx};$$

o sia

$$\frac{d^2 P}{dxdy} = \frac{d\mathcal{A}dy}{dy} : dy,$$

e

$$\frac{d^2 P}{dxdy} = \frac{dBdx}{dx} : dx;$$

e conseguentemente

$$\frac{d\mathcal{A}dy}{dy} : dy = \frac{dBdx}{dx} : dx.$$

Ma $\frac{d\mathcal{A}dy}{dy}$ esprime il differenziale di $\mathcal{A}$ preso con far variare solo y, e $\frac{dBdx}{dx}$ esprime il differenziale di B preso con far variare solo x. Dunque il quoziente, che si ha con dividere per dy il differenziale di A, preso con far variare solo y, è uguale al quoziente, che nasce dividendo per dx il differenziale di B, preso con far variare solo x. E perciò è esatta, e conseguentemente integrabile una quantità differenziale a due variabili x, e y, se il quoziente, che si ha con dividere per dy il differenziale di A, preso con far variare solo y, è uguale al quoziente, che nasce dividendo per dx il differenziale di B, preso con far variare solo x; cioè se il quoziente, che si ha con dividere per lo differenziale della seconda variabile il differenziale della somma de' termini, che sono moltiplicati per lo differenziale della prima variabile, preso il differenziale della detta somma con far variare in essa solo la seconda delle variabili, è uguale al quoziente, che nasce dividendo per lo differenziale della prima variabile il differenziale della somma de' termini, che sono moltiplicati per lo differenziale della seconda variabile, preso il differenziale della detta somma con far variare in essa solo la prima delle variabili.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

COROLLARIO I.

53. Quindi le quantità differenziali $aydx - cdx + axdy$, e $6x\, y^3\, dx + 9x^2\, y^2\, dy$ sono esatte, perchè nella prima è $= a$ sì il quoziente, che nasce con dividere per dy il differen-

ferenziale di $ax - c$, che quello, che si ha con dividere per dx il differenziale di ax: e nella seconda è $= 18xy^2$ sì il quoziente, che si ha con dividere per dy il differenziale di $6xy^3$, preso con far variare solo y, che quello, che nasce dividendo per dx il differenziale di $9x^2 y^2$, preso con far variare solo x. Al contrario le quantità differenziali $axydx + cxdy$, e $xdy - ydx$ sono inesatte; perchè nella prima i quozienti, che si hanno con dividere per dy il differenziale di axy, preso con far variare solo y, e per dx il differenziale di cx, sono disuguali, essendo il primo di essi $= ax$, ed il secondo $= c$; e nella seconda i quozienti, che nascono dividendo per dy il differenziale di $-y$, e per dx il differenziale di x, sono anche disuguali, essendo il primo di essi $=-1$, e l'altro $= 1$.

AVVERTIMENTO I.

54. Si noti che qualunque differenziale esatto a tre variabili x, y, z si può esprimere colla formola generale $Adx + Bdy + Cdz$, chiamando A la somma de' termini moltiplicati per dx, B quella de' termini moltiplicati per dy, e C quella de' termini moltiplicati per dz.

AVVERTIMENTO II.

55. Si noti di vantaggio che se un differenziale esatto a tre variabili x, y, z si contrassegna con $Adx + Bdy + Cdz$; ragionando del modo insegnato nel problema precedente si trovano il quoziente, che nasce con dividere per dy il differenziale di A, preso con far variare solo y, uguale al quoziente, che si ha con dividere per dx il differenziale di B, preso con far variare solo x; il quoziente, che nasce con dividere per dz il differenziale di A, preso con far variare solo z, uguale al quoziente, che si ha dividendo per dx il differenziale di C, preso con far variare solo x; e finalmente il quoziente, che si ha con dividere per dz il differenziale di B, preso con far variare solo z, uguale al quoziente, che nasce dividendo per dy il differenziale di C, preso con far variare solo y. Onde contrassegnando con $Adx + Bdy + Cdz$ un differenziale a tre variabili, il medesimo sarà esatto, e conseguentemente integrabile, se saranno

$$\frac{\frac{dAdy}{dy}}{dy} = \frac{\frac{dBdx}{dx}}{dx},$$

$$\frac{\frac{dAdz}{dz}}{dz} = \frac{\frac{dCdx}{dx}}{dx},$$

e

$$\frac{\;\frac{dBdz}{dz}\;}{dz}=\frac{\;\frac{dCdy}{dy}\;}{dy}.$$

COROLLARIO II.

58. Quindi è che la quantità differenziale $6xy^3zdx + 9x^2y^2zdy + 3x^2y^3dz + 2y^2dx + 4xydy$ è esatta; perchè il differenziale di $6xy^3z + 2y^2$, preso con far variare solo y, e diviso per dy, è uguale al differenziale di $9x^2y^2z + 4xy$, preso con far variare solo x, e diviso per dx, cioè

$$\frac{18xy^2zdcy + 4ydy}{dy}=\frac{18xy^2zdx + 4ydx}{dx};$$

il differnziale di $6xy^3z + 2y^2$, preso con supporre variabile solo z, e diviso per dz, è uguale al differenziale di $3x^2y^3$, preso con supporre variabile solo x, e diviso per dx, cioè

$$\frac{6xy^3dz}{dz}=\frac{6xy^3dx}{dx};$$

e finalmente il differenziale di $9x^2y^2z + 4xy$, preso con far variare solo z, e diviso per dz, è uguale al differenziale di $3x^2y^3$, preso con supporre variabile solo y, e diviso per dy, cioè

$9x^2$

$$\frac{9x^2y^2dz}{dz}=\frac{9x^2y^2dy}{dy}.$$

Al contrario la quantità differenziale $4xyzdx + x^2zdy + 2x^2ydz$ è inesatta, ancorchè il quoziente, che si ha con dividere per dz il differenziale di $4xyz$, preso con far variare solo z, sia uguale al quoziente, che nasce dividendo per dx il differenziale di $2x^2y$, preso con supporre variabile solo x, cioè ancorchè sia

$$\frac{4xydz}{dz}=\frac{4xydx}{dx}.$$

Perchè sono disuguali sì i quozienti, che nascono dividendo per dy il differenziale di $4xyz$, preso con far variare solo y, e per dx il differenziale di x^2z, preso con far variare solo x, che i quozienti, che si hanno con dividere per dz il differenziale di x^2z, preso con supporre variabile solo z, e per dy il differenziale di $2x^2y$, preso con supporre variabile solo y; essendo

$$\frac{4xzdy}{dy} > \frac{2xzdx}{dx},$$

e

$$\frac{x^2dz}{dz} < \frac{2x^2dy}{dy}.$$

AV-

AVVERTIMENTO III.

57. Ciò, che si è detto de' differenziali a due, ed a tre variabili, è sufficiente a farci comprendere il come si dovrà procedere per conoscere, se sia esatto sì, o no, e conseguentemente integrabile sì, o no un differenziale, che contiene più di tre variabili.

AVVERTIMENTO IV.

58. Insegnato il modo di conoscere, se un differenziale a più variabili sia sì, o no esatto, procediamo ora ad esporre il metodo di determinare gl' integrali de' differenziali a più variabili, qualora tali differenziali sono esatti. Perciò soggiugniamo il seguente

PROBL. IX.

59. *Insegnare il modo d' integrare le quantità differenziali a più variabili, qualora sono esatte.*

SOLUZIONE.

Si uniscano in una somma tutt' i termini, che contengono il differenziale di una stessa variabile, e sì fatta somma s' integri, cosiderando in essa come costanti tutte le altre variabili, che contiene; e si noti l' integrale, che si ritrova.

Si determini il differenziale dell' integrale notato, considerando in esso tutte le variabili, che contiene; e tale differenziale si sottragga dalla grandezza data.

Se niente vi rimane, è chiaro che l' integrale ritrovato, coll' aggiunta della costante C, sia l' integrale cercato.

Se poi colla detta sottrazione si ha qualche residuo; sì fatto residuo non conterrà la variabile, relativamente alla quale si è fatta la prima integrazione. Si ripeta allora per tale residuo la stessa operazione, che si è fatta per la grandezza data; e così si proceda innanzi, finchè niente vi rimanga della grandezza proposta.

La somma di tutti gl' integrali ritrovati coll' aggiunta della costante C sarà allora l' integrale, che si cerca.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da integrarsi $xdy + ydx$.

L' integrale di ydx, preso con supporre variabile solo x, è $= xy$. Ma il differenziale di xy, preso con considerare ambedue le variabili x, e y, è $= xdy + ydx$, cioè è lo stesso, che la grandezza data. Dunque

$$\int (xdy + ydx) = xy + C.$$

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia da integrarsi $xyzdv + xyvdz + xzvdy + yzvdx$.

L'integrale di $yzvdx$, preso con supporre variabile solo x, è $= xyzv$. Ma il differenziale di $xyzv$, preso con considerare tutte le variabili, che contiene, è $= xyzdv + xyvdz + xvzdy + yzvdx$, ch' è lo stesso, che la grandezza data. Dunque

$$\int (xyzdv + xyvdz + xvzdy + yvzdx) = xyzv + C.$$

ESEMPIO III.

Sia da integrarsi $6x^2ydx + 8xdx + 2x^3dy$.

Essendo l' integrale di $6x^2ydx + 8xdx$, preso con supporre variabile solo x, $= 2x^3y + 4x^2$; ed essendo il differenziale di $2x^3y + 4x^2$, preso con considerare amendue la variabili x, e y, $= 6x^2ydx + 2x^3dy + 8xdx$, cioè lo stesso, che la grandezza data; sarà

$$\int (6x^2ydx + 8xdx + 2x^3dy) = 2x^3y + 4x^2 + C.$$

ESEMPIO IV.

Sia da integrarsi $6xydx + 3x^2dy + 6x^2zdx + 2x^3dz$.

Essendo l'integrale di $6xydx + 6x^2zdx$, preso con far variare solo x, $= 3x^2y + 2x^3z$; ed essendo il differenziale di $3x^2y + 2x^3z$, preso con considerare tutte le variabili, che contiene, $= 6xydx + 3x^2dy + 6x^2zdx + 2x^3dz$, cioè lo stesso, che la grandezza data; sarà

$$\int (6xydx + 3x^2dy + 6x^2zdx + 2x^3dz) = 3x^2y + 2x^3z + C.$$

ESEMPIO V.

Sia da integrarsi $15x^2y^2dx + 10x^3ydy + 6zdz$.

L' integrale di $15x^2y^2dx$, preso con far variare solo x, è $= 5x^3y^2$; ed il differenziale di $5x^3y^2$, preso con far variare sì x, che y, è $= 15x^2y^2dx + 10x^3ydy$. Ma con sottrarre $15x^2y^2dx + 10x^3ydy$ dalla grandezza data, rimane $6zdz$. Dunque, essendo l' integrale di $6zdz = 3z^2$, sarà

$$\int (15x^2y^2dx + 10x^3ydy + 6zdz) = 5x^3y^2 + 3z^2 + C.$$

ESEMPIO VI.

Sia da integrarsi $3x^2y^2dx + 2xzdx + 2x^3ydy + 2yv^2dy + x^2dz + 2y^2vdv + 3x^2dx + 4y^3dy$.

L' integrale di $3x^2y^2dx + 2xzdx + 3x^2dx$, preso con supporre solo x variabile, è $= x^3y^2 + x^2z + x^3$; ed il differenziale le di $x^3y^2 + x^2z + x^3$, preſo con conſiderare tutte variabili x, y, e z, è $= 3x^2y^2dx + 2x^3ydy + 2xzdx + x^2dz + 3x^2dx$. Si ſottragga queſt' ultima grandezza dalla grandezza data, e ſi avrà per reſiduo $2yv^2dy + 2y^2vdv + 4y^3dy$. In oltre l' integrale di $2yv^2dy + 4y^3dy$, preſo con ſupporre variabile ſolo y, è $= y^2v^2 + y^4$, ed il differenziale di $y^2v^2 + y^4$, preſo con far variare sì y, che v, è lo ſteſſo, che il reſiduo $2yv^2dy + 4y^3dy + 2y^2vdv$. Dunque ſarà

$$\int(3x^2y^2dx + 2xzdx + 2x^3ydy + 2yv^2dy + x^2dz + 2y^2vdv + 3x^2dx + 4y^3dy) = x^3y^2 + x^2z + x^3 + y^2v^2 + y^4 + C.$$

ESEMPIO VII.

Sia da integrarſi $max^{m-1}y^ndx + nax^my^{n-1}dy - mcy^{m-1}z^rdy - rcy^mz^{r-1}dz$.

L' integrale di $max^{m-1}y^ndx$, preſo con ſupporre variabile ſolo x, è $= ax^my^n$; ed il differenziale di ax^my^n, preſo con far variare sì x, che y, è $= max^{m-1}y^ndx + nax^my^{n-1}dy$. Si ſottragga $max^{m-1}y^ndx + nax^my^{n-1}dy$ dalla grandezza data; ſi avrà per reſiduo $-mcy^{m-1}z^rdy - rcy^mz^{r-1}dz$. In oltre l' integrale di $-mcy^{m-1}z^rdy$, preſo con ſupporre variabile ſolo y, è $= -cy^mz^r$; ed il differenziale di $-cy^mz^r$,

pre-

preſo con far variare sì y, che z, è lo ſteſſo, che il reſiduo $-mcy^{m-1}z^rdy - rcy^mz^{r-1}dz$. Dunque ſarà

$$\int(max^{m-1}z^ndx + nax^my^{n-1}dy - mcy^{m-1}z^rdy - rcy^mz^{r-1}dz) = ax^my^n - cy^mz^r + C.$$

AVVERTIMENTO.

60. Si noti che non ci fermiamo ad inſegnare il modo d' integrare l' equazioni differenziali a due variabili, qualora i loro membri non ſi ſanno integrare colle regole, che ſi ſono ſtabilite, per non entrare in un' eſame, che ſolo eſigerebbe un lungo trattato. Del reſto quel poco, che fin qui ſi è inſegnato del calcolo integrale, ſe non è ſufficiente a potere integrare qualunque grandezza differenziale, è ſufficientiſſimo per l' uſo, che potrà fare del detto calcolo la gioventù, a cui queſto breve trattato è diretto. Procediamo ora a' principali uſi di sì fatto calcolo.

CA-

CAP. V.

Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le quadrature de' spazj mistilinei, e curvilinei.

PROBL. X.

61. *Determinare la formola generale, che esprime l' elemento dello spazio, che racchiude qualunque curva col suo asse, e con una, o due ordinate allo stesso asse.*

SOLUZIONE.

Fig. 1. Contrassegnino AMB qualunque curva, ed AC il suo asse. Da qualunque punto M della curva s' interda menata l' ordinata MP all' asse, e s' intenda tirata *pm* parallela, ed infinitamente vicina a PM. S' intenda di più menata all' asse un' altra ordinata QN a qualunque distanza AQ dal vertice del medesimo asse. Essendo il trapezietto infinitamente piccolo PM*mp* uguale sì alla differenza de' spazj A*pm*, APM, che alla differenza de' spazj QN*mp*, QNMP, sarà sì fatto trapezietto il differenziale, o sia l'elemento sì dello spazio APM, preso dal vertice A dell' asse della curva, che dello spazio QNMP, preso dall' ordinata QN tirata a qualunque distanza AQ dal vertice dello stesso asse. Ma il trapezietto PM*mp* senza sensibile errore si può prendere per lo rettangoletto delle rette PM, P*p*. Dunque l' elemento sì dello spazio APM, che dello spazio QNMP è $=$ PM $\times$ P*p*. Si mettano l' ordinata PM $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà P*p* $= dx$, e conseguentemente il trapezietto PM*mp* $= ydx$. Sicchè la formola generale, ch' esprime lo spazio, che racchiude qualunque curva col suo asse, e con una, o due ordinate allo stesso asse, è $= ydx$.

Ch' è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XI.

62. *Determinare la formola generale, che esprime l' elemento dello spazio, che racchiude qualunque curva tra gli asintoti, disposti ad angolo retto, con un' ordinata ad uno degli asintoti, coll' ascissa corrispondente alla medesima ordinata, e coll' altro asintoto prolungato col ramo corrispondente della curva all' infinito, o con due ordinate ad uno degli asintoti, e colla parte dello stesso asintoto, ch' è compresa tra le medesime ordinate.*

P So-

SOLUZIONE.

Fig. 2 Contrassegnino ANV qualunque curva tra gli asintoti OR, OT disposti ad angolo retto, e PM un' ordinata menata all' asintoto OR da qualunque punto M della curva. S' intenda tirata mp parallela, ed infinitamente vicina a MP; e s' intendano di più menata all' asintoto OR un' altra ordinata NQ a qualunque distanza OQ dal punto O, ch' è l' origine delle ascisse, e l' asintoto OT col corrispondente ramo BA della curva prolungato all' infinito. Essendo il trapezietto infinitamente picciolo PMmp uguale sì alla differenza de' spazj TOpmA, TOPMA, che alla differenza de' spazj QNmp, QNMP; sarà sì fatto trapezietto il differenziale, o sia l' elemento sì dello spazio TOPMA, preso dall'asinto OT, che dello spazio QNMP, preso dall' ordinata QN tirata all' asintoto OR a qualunque distanza OQ dall'origine O delle ascisse. Ma il trapezietto PMmp senza sensibile errore si può prendere per lo rettangoletto delle rette PM, Pp. Dunque l' elemento di qualunque de' spazj TOPMA, QNMP è $=$ PM $\times$ Pp. Si mettano l' ordinata PM $= y$, e l' ascissa corrispondente OP $= x$; sarà Pp $= dx$, e conseguentemente il detto elemento $= ydx$. Sicchè la formola generale, ch' esprime l' elemento dello spazio, che qualunque curva tra gli asintoti

toti disposti ad angolo retto racchiude con un' ordinata ad uno degli asintoti, coll' ascissa corrispondente alla medesima ordinata, e coll' altro asintoto prolungato all' infinito col corrispondente ramo della curva, o con due ordinate ad uno degli asintoti, e colla parte dello stesso asintoto, ch' è compresa tra le medesime ordinate, è anche $= ydx$.

Ch' è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

63. Esprimendo ydx nel caso della *Fig.* 1 il differenziale sì dello spazio APM, che di qualunque altro spazio QNMP, che differisce dal primo per lo spazio AQN; e nel caso della *Fig.* 2 il differenziale sì dello spazio TOPMA, che di qualunque altro spazio QNMP, che differisce dal primo per lo spazio TOQNA: è chiaro che l'integrale di ydx, che si ha dal calcolo, e che deve variare, secondo varia l'indole della curva, siccome vedremo poco appresso, appartiene in ognuno de' detti casi sì al primo de' detti spazj, che all' altro.

COROLLARIO II.

64. Essendo l' integrale di ydx, che si ha dal calcolo, sempre lo stesso in una data curva, qualunque sia l' origine dello spazio, che si vuole determinare; il valore

 del-

della costante C, che si aggiugne sempre all' integrale, che dà il calcolo, dovrà variare, secondo varierà l'origine dello spazio, che si cerca. Onde se si determineranno del modo, che insegneremo ne' problemi, che seguono immediatamente, l'integrale di *ydx*, corrispondente ad una curva, di cui è data l'equazione, ed il valore, che compete alla costante C, qualora è dato nell' asse, o nell' asintoto della medesima curva il punto, dal quale principia lo spazio da determinarsi; la somma di sì fatti integrale, e valore di C darà l'aja, che si va cercando.

PROBL. XII.

65. *Determinare l' integrale di* ydx, *corrispondente a qualunque curva, di cui si ha l' equazione.*

SOLUZIONE.

Si ricavi dall' equazione della curva il valore di *y*, e sì fatto valore si sostituisca nella formola *ydx*. Si avrà in tal modo una quantità, che conterrà solo *x*, e *dx*.

Si trovi l' integrale di sì fatta quantità, e si avrà l' integrale cercato.

Ch' è ciò, che bisognava determinare.

PROBL. XIII.

66. *Insegnare il modo di determinare il valore, che compete alla costante* C, *che si deve aggiugnere all' integrale di* ydx, *già determinato relativamente ad una data curva, qualora è dato nell' asse della medesima curva il punto, da cui principia lo spazio, che si vuole determinare.*

SOLUZIONE.

Due casi possono darsi. Può darsi il caso che lo spazio, che si cerca, sia APM, preso dal vertice A dell'asse, ovvero QNMP, preso dall' ordinata Q N menata all' asse a qualunque distanza AQ dal suo vertice A. Fig. 1

Nel

CASO I.

Lo spazio APM diviene nullo, quando il punto P cade in A. Ma quando il punto P cade in A, diviene nulla anche l' ascissa AP, e perciò diviene $x = o$. Dunque se nell' integrale ritrovato in vece di x si sostituisce il zero, quel, che nascerà, coll'aggiunta della costante C, sarà $= o$. Si ricavi allora dalla detta equazione il valore di C, e si avrà il valore cercato. Nel

CASO II.

Si metta AQ $= a$, e si ricavi dall'equazione della curva il valore di QN, col sostituire in essa a in vece di x. Lo spazio QNMP diviene nullo, quando il punto P cade in Q. Ma quando il punto P cade in Q, si fa AP $=$ AQ, o sia $x = a$. Dunque se nell' integrale ritrovato si sostituisce a in vece di x, quello, che nascerà, coll' aggiunta della costante C, sarà $= 0$. Si ricavi allora dalla detta equazione il valore di C, e si avrà il valore cercato.

Ch'è quanto bisognava insegnare.

AVVERTIMENTO.

67. Si noti che quel, che si è detto per la determinazione della costante relativamente a qualunque curva, considerata per rispetto del suo asse, ha luogo anche per qualunque curva considerata tra gli asintoti.

ESEMPIO I.

Sia da determinarsi lo spazio, che racchiude la parabola di qualunque genere col suo asse, e con una, o due ordinate al medesimo asse.

Fig. 3 Contrassegni BAM una parabola di qualunque genere, e sieno AC il suo asse, e PM

un' ordinata menata all' asse da qualunque punto M della curva.

Posto il parametro dell' asse $= p$, e poste l' ordinata PM $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà l' equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde sarà

$$y = \sqrt[m+n]{x^m p^n} = x^{\frac{m}{m+n}} p^{\frac{n}{m+n}},$$

e

$$ydx = dx \sqrt[m+n]{x^m p^n}.$$

E perciò

$$\int ydx = \int dx \sqrt[m+n]{x^m p^n} = \frac{m+n}{2m+n} x \sqrt[m+n]{x^m p^n} + C.$$

E, sostituendo y al suo valore $\sqrt[m+n]{x^m p^n}$, sarà

$$\int ydx = \frac{m+n}{2m+n} xy + C.$$

S' intenda a qualunque distanza AD dal vertice A dell' asse menata allo stesso asse l' ordinata DE. Posta l' ascissa AD $= a$, col sostituire nell' equazione generale della curva a in vece di x, si avrà l' ordinata DE $= \sqrt[m+n]{a^m p^n}$.

In oltre per avere il valore di C, corrispondente allo spazio APM, si sostituisca nel-

nell' integrale ritrovato in vece di x il zero. Si avrà $0 + C = 0$, e conseguentemente $C = 0$. Sicchè la costante è nulla, qualora lo spazio, che si cerca, è preso dal vertice dell' asse. Essendo in tale caso nulla la costante, sarà lo spazio APM $=$

$$\frac{m+n}{2m+n}\,xy = \frac{m+n}{2m+n}\,AP \times PM,$$

cioè uguale a quella parte del rettangolo fatto dall' ascissa AP, e dall' ordinata PM, che indica il rotto $\frac{m+n}{2m+n}$.

Per avere poi il valore di C, corrispondente allo spazio DEMP, si sostituisca nell' integrale ritrovato a in vece di x. Si avrà

$$\frac{m+n}{2m+n}\, a \sqrt[m+n]{a^m p^n} + C = 0,$$

e conseguentemente

$$C = -\left(\frac{m+n}{2m+n}\right) a \sqrt[m+n]{a^m p^n}:$$

Onde sarà lo spazio

$$DEMP = \frac{m+n}{2m+n}\left(xy - a\sqrt[m+n]{a^m p^n}\right) =$$

$$\frac{m+n}{2m+n}(AP \times PM - AD \times DE).$$

CO-

COROLLARIO I.

68. Se la parabola è di primo genere: Essendo in tale caso $y^2 = px$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$; saranno lo spazio

$$APM = \frac{2}{3}\,AP \times PM, \text{ e lo spazio } DEMP = \frac{2}{3}(AP \times PM - AD \times DE).$$

COROLLARIO II.

69. Se la parabola è di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = x^2 p$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$; saranno lo spazio $APM = \frac{3}{5}\,AP \times PM$, e lo spazio $DEMP = \frac{3}{5}(AP \times PM - AD \times DE)$.

Posta poi la sua equazione $y^3 = xp^2$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; saranno lo spazio $APM = \frac{3}{4}\,AP \times PM$, e lo spazio $DEMP = \frac{3}{4}(AP \times PM - AD \times DE)$.

ESEM-

ESEMPIO II.

Sia da determinarſi lo ſpazio, che l' iperbola di qualunque genere conſiderata tra gli aſintoti, che formano angolo retto, racchiude con un' ordinata ad uno degli aſintoti, coll' aſciſſa corriſpondente alla medeſima ordinata, e coll' altro aſintoto prolungato all' infinito col ramo corriſpondente della curva, ovvero con due ordinate ad uno degli aſintoti, e colla parte dello ſteſſo aſintoto, ch' è compreſa tra le medeſime ordinate.

Fig. 2 Contraſſegni ANV un' iperbola di qualunque genere, e ſieno OR, OT i ſuoi aſintoti, che formano angolo retto, e PM un' ordinata menata all' aſintoto OR da qualunque punto M della curva. Poſto il lato della potenza $= a$, e poſte l'ordinata MP $= y$, e l' aſciſſa corriſpondente OP $= x$; ſarà l' equazione generale alla curva

$$x^m y^n = a^{m+n}.$$

Onde ſaranno

$$y^n = a^{m+n} x^{-m},$$

$$y = \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} = a^{\frac{m+n}{n}} x^{\frac{-m}{n}};$$

e

$$ydx = dx \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}};$$

E perciò

$$\int ydx = \int dx \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} = \frac{n}{n-m} x \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C.$$

E, mettendo y in vece di $\sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}}$, ſarà

$$\int ydx = \frac{n}{n-m} xy + C.$$

S' intenda a qualunque diſtanza OQ dal punto O, che è l'origine delle aſciſſe, menata all' aſintoto OR l' ordinata QN, e ſi metta l' aſciſſa OQ $= b$.

In oltre, per avere il valore della coſtante C in qualunque caſo, ſi proceda del modo, che ſi è tenuto nell' eſempio precedente; cioè ſi metta nell' integrale ritrovato in vece di x il zero, o il b, ſecondochè lo ſpazio, che ſi vuole determinare, è preſo dall' aſintoto OT, o dall' ordinata QN.

COROLLARIO I.

70. Se l' iperbola è di primo genere. Eſſendo in tale caſo $xy = a^2$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 1$; l'eſpreſſione generale ritrovata $\frac{n}{n-m} x \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C$ diverrà $\frac{1}{0} \times x \sqrt[n]{a^{m+n} x^{-m}} + C = \infty$. Sicchè colla formola generale ritrovata non ci rieſce di determinare lo ſpazio aſintotico relativamente all' iperbola di primo genere. Il come ſi dovrà procedere in tale caſo, s' inſegnerà nel ſeguente eſempio.

CO-

COROLLARIO II.

71. Se l' iperbola è di secondo genere. Posta la sua equazione $xy^2 = a^3$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; la formola generale ritrovata si trasformerà in $2x\sqrt{a^3 x^{-1}} + C = 2\sqrt{a^3 x} + C$. Onde saranno $o + C = o$, e $2\sqrt{a^3 b} + C = o$ le due equazioni, che daranno i valori diversi di C, secondochè lo spazio asintotico, che si cerca, si prende dall' asintoto OT, o dall' ordinata QN. E perciò sarà in un caso $C = o$, e nell' altro caso $C = -2\sqrt{a^3 b}$, e conseguentemente lo spazio, che si cerca, sarà nel primo caso $= 2\sqrt{a^3 x}$, e nell' altro caso $= 2\sqrt{a^3 x} - 2\sqrt{a^3 b}$. Posta poi l'equazione della curva $x^2 y = a^3$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$, la formola generale si trasformerà in $- x \times a^3 x^{-2} + C = - a^3 x^{-1} + C = - \frac{a^3}{x} + C$. Onde saranno $- \frac{a^3}{o} + C = o$, e $- \frac{a^3}{b} + C = o$ le due equazioni, che daranno i diversi valori di C, secondochè lo spazio asintotico, che si cerca, si prende dall' asintoto OT, o dall' ordinata QN. E perciò sarà nel primo caso $C = \frac{a^3}{o} = \infty$, e nel-

l' altro caso $C = \frac{a^3}{b}$; e conseguentemente sarà lo spazio, che si cerca, nel primo caso infinito, e nell' altro caso $= \frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{x}$.

COROLLARIO III.

72. Se l' iperbola è di terzo genere. Posta la sua equazione $xy^3 = a^4$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 3$; la formola generale si trasformerà in $\frac{3}{2} x \sqrt[3]{a^4 x^{-1}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2} + C$. Onde saranno $o + C = o$, e $\frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 b^2} + C = o$ le due equazioni, che daranno i diversi valori di C, secondochè lo spazio asintotico, che si cerca, principia dell' asintoto OT, o dall' ordinata QN. E perciò sarà nel primo caso $C = o$, e nell' altro caso $C = - \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 b^2}$; e conseguentemente sarà lo spazio, che si cerca, nel primo caso $= \frac{3}{2} \sqrt[3]{a^4 x^2}$, e nell'

altro caſo $= \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4 x^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^4 b^2}$.

Poſta poi l'equazione della curva $x^2 y^2 = a^4$, e conſeguentemente $m = 2$, $n = 2$; la formola generale diverrà $\frac{2}{0} \times x\sqrt{a^4 x^{-2}} + C = \infty$. Sicchè non ſi può allora determinare lo ſpazio aſintotico colla formola generale. Ed eſſendo $x^2 y^2 = a^4$, ſarà $xy = a^2$; e perciò ſi farà allora la determinazione dello ſpazio aſintotico nello ſteſſo modo, che ſi terrà per la determinazione del detto ſpazio per riſpetto all'iperbola di primo genere. Poſta finalmente l'equazione della curva $x^3 y = a^4$, e conſeguentemente $m = 3$, $n = 1$; la formola generale diverrà $-\frac{1}{2} x \times a^4 x^{-3} + C = -\frac{1}{2} a^4 x^{-2} + C = \frac{a^4}{2x^2} + C$.

Onde ſaranno $-\frac{1}{2} \times \frac{a^4}{0} + C = 0$, e $-\frac{a^4}{2b^2} + C = 0$ le due equazioni, che daranno i valori di C, che corriſponderanno uno allo ſpazio preſo dall' aſintoto OT, e l'altro allo ſpazio preſo dall'ordinata QN. E perciò ſarà nel primo caſo $C = \frac{1}{2}\frac{a^4}{0} = \infty$, e nell'altro caſo $C = \frac{a^4}{2b^2}$; e conſeguentemente ſarà lo ſpazio, che ſi cerca, nel primo caſo infinito, e nell'altro caſo $= \frac{a^4}{2b^2} - \frac{a^4}{2x^2}$.

COROLLARIO IV.

73. Poſta adunque $n > m$, la coſtante ſarà nulla, ſe lo ſpazio aſintotico ſi prende dal centro dell' iperbola; e ſarà finita, e conſeguentemente aſſegnabile, ſe il detto ſpazio ſi prende da qualunque ordinata QN all' aſintoto OR. Poſta poi $n < m$, la coſtante ſarà infinita, ſe lo ſpazio aſintotico ſi prende dal centro; e ſarà finita, e per conſeguenza aſſegnabile, ſe il detto ſpazio ſi prende da qualunque ordinata QN all' aſintoto OR. Poſta finalmente $m = n$, la formola generale diverrà di un'infinito valore. E perciò non ſi potrà colla medeſima determinare lo ſpazio aſintotico, comunque ſia preſo. Intanto perchè l'equazione generale $x^m y^n = a^{m+n}$ diviene allora $x^m y^m = a^{2m}$, o ſia $xy = a^2$, ch' è l'equazione dell'iperbola di primo genere, perciò ſi farà in tale caſo la determinazione dello ſpazio aſintotico, come appartenente all' iperbola di primo genere.

COROLLARIO V.

74. Sieno finalmente B il vertice dell'aſſe dell' iperbola, e BC l'ordinata menata all'

l' asintoto OR dal punto B; sarà $OC = a$: Onde se nell' espressione, che si è ritrovata per lo spazio QNMP in qualunque de' casi, che si sono considerati, si metterà a in vece di b, si avrà con quel, che nascerà, la quadratura dello spazio asintotico, preso dall'ordinata menata all' asintoto OR dal vertice dell' asse della curva.

ESEMPIO III.

Sia da determinarsi la quadratura dello spazio asintotico nell' iperbola equilatera di primo genere.

Contrassegni ANV un' iperbola equilatera di primo genere, e sieno OR, OT i suoi asintoti, e PM un' ordinata menata all' asintoto OR da qualunque punto M della curva. Posto il lato della potenza $= a$, e poste l' ordinata $MP = y$, e l' ascissa corrispondente $OP = x$, sarà $xy = a^2$ l' equazione alla curva. Essendo

$$xy = a^2,$$

saranno

$$y = \frac{a^2}{x},$$

e

$$ydx = \frac{a^2\,dx}{x}.$$

E per-

E perciò

$$\int ydx = \int \frac{a^2\,dx}{x} = a^2\,lx + C\ (\S\ 39).$$

Or se lo spazio asintotico si prende dall' asintoto OT, sarà $a^2\,l\,o + C = o$ l' equazione, che darà il valore di C, e conseguentemente sarà $C = -a^2\,l\,o$. Se poi lo spazio si prende da qualunque ordinata QN, menata all' asintoto OR a qualsisia distanza OQ dal centro O; posta $OQ = b$, sarà $a^2\,lb + C = o$ l' equazione, che darà il valore di C, e conseguentemente sarà $C = -a^2\,lb$. Sicchè lo spazio asintotico è $= a^2\,lx - a^2\,lo = a^2\,(lx - lo) = a^2 \times l\frac{x}{o} = \infty$, se si prende dall' asintoto OT prolungato all' infinito col corrispondente ramo BA della curva; ed è $= a^2\,lx - a^2\,lb = a^2\,(lx - lb) = a^2 \times l\frac{x}{b}$, se si prende dall' ordinata QN; cioè è infinito nel primo caso, ed è nell' altro caso uguale al prodotto, che nasce moltiplicando per la potenza dell' iperbola il logaritmo iperbolico del numero, ch' esprime l' ascissa OP relativamente all' altra ascissa OQ posta $= 1$.

COROLLARIO I.

75. Essendo l' ascissa, che corrisponde all' ordinata menata ad uno degli asintoti dal vertice dell' asse dell' iperbola uguale al lato della potenza, e perciò $= a$; si avrà nell' iperbola equilatera di primo genere lo spazio asintotico, preso dall' ordinata, che procede dal vertice del suo asse, con sostituire a in vece di b nella grandezza $a^2 \times l\frac{x}{b}$. Onde sarà sì fatto spazio $= a^2 \times l\frac{x}{a}$, cioè uguale al prodotto, che si ha con moltiplicare per la potenza dell' iperbola il logaritmo iperbolico del numero, ch' esprime l' ascissa, che corrisponde all' ordinata, che termina il detto spazio, relativamente al lato della potenza posto $= 1$.

COROLLARIO II.

76. Essendo in oltre $\frac{a^2 dx}{x} = a^2 x^{-1} dx$, ed esprimendo l' integrale di $\frac{a^2 dx}{x}$ lo spazio asintotico relativamente all' iperbola equilatera di primo genere; anche l' integrale di $a^2 x^{-1} dx$ esprimerà lo stesso spazio. Ma quando s' integra $a^2 x^{-1} dx$ colla regola

la

la fondamentale, si ha per integrale $\frac{a^2}{o} + C$, o sia una quantità infinita; e lo spazio asintotico relativamente all' iperbola equilatera di primo genere è infinito, qualora si prende dall' origine degli asintoti. Dunque l' integrale di $a^2 x^{-1} dx$, che si ha colla regola fondamentale, esprime lo spazio asintotico, preso nell' iperbola equilatera di primo genere dall' origine degli asintoti.

AVVERTIMENTO.

77. Si noti che quel, che si è detto dell' integrale di $a^2 x^{-1} dx$, ha luogo per l' integrale di qualunque altra quantità differenziale monomia, che ha la variabile coll' esponente -1. Quindi s' intende perchè si ha sempre una quantità infinita, quando s' integra colla regola fondamentale una differenziale monomia, che ha la variabile coll' esponente -1.

ESEMPIO IV.

Sia da determinarsi la quadratura dello spazio circolare APM, *che l' arco* AM *racchiude coll' ordinata* MP *al diametro* AB, *e coll' ascissa corrispondente* AP. Fig. 4.

Si mettano il diametro AB $= a$, l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente

Q 2 AP

$AP = x$. Sarà $PB = a - x$, e sarà $y^2 = ax - x^2$ l'equazione alla curva. Essendo

$$y^2 = ax - x^2;$$

saranno

$$y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8\sqrt{a^3}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16\sqrt{a^5}} - \frac{5x^{\frac{9}{2}}}{128\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

e

$$ydx = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx - \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{2\sqrt{a}} - \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{8\sqrt{a^3}} - \frac{x^{\frac{7}{2}} dx}{16\sqrt{a^5}} - \frac{x^{\frac{9}{2}} dx}{128\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

E perciò

$$\int ydx = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - \frac{\sqrt{x^5}}{5\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{x^7}}{28\sqrt{a^3}} - \frac{\sqrt{x^9}}{72\sqrt{a^5}} - \frac{10\sqrt{x^{11}}}{1408\sqrt{a^7}}, \text{ ec.}$$

Ma l'integrale di ydx dà lo spazio APM; perchè prendendosi il detto spazio dall'origine delle ascisse, la costante deve essere nulla. Dunque sarà

$$APM = \frac{2}{3}\sqrt{ax^3} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{x^5}{a}} - \frac{1}{28}\sqrt{\frac{x^7}{a^3}} - \frac{1}{72}\sqrt{\frac{x^9}{a^5}} - \frac{10}{1408}\sqrt{\frac{x^{11}}{a^7}}, \text{ ec. a un di presso.}$$

COROLLARIO I.

78. Se l'ascissa AP si fa uguale al raggio $AO = \frac{1}{2}a$, lo spazio circolare APM si fa uguale alla quarte parte dell'intero cerchio. Sicchè se nella serie ritrovata si sostituirà $\frac{1}{2}a$ in vece di x, la serie, che nascerà, darà a un di presso l'aja della quarta parte del cerchio, ed il quadruplo della stessa serie darà la quadratura del cerchio intero. Ma col sostituire nella serie trovata $\frac{1}{2}a$ in vece di x, si ha la serie

$$\frac{2}{3}a^2\sqrt{\frac{1}{8}} - \frac{1}{5}a^2\sqrt{\frac{1}{32}} - \frac{1}{28}a^2\sqrt{\frac{1}{128}} -$$

$$- \frac{1}{72} a^2 \sqrt{\frac{1}{512}} \text{, ec.} = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{1}{224} - \frac{1}{1152} \text{, ec.} \right).$$

Dunque l' aja dell' intero cerchio è a un di presso =

$$4a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{1}{224} - \frac{1}{1152} \text{, ec.} \right) = 2a^2 \sqrt{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{20} - \frac{1}{224} - \frac{1}{1152} \text{, ec.} \right).$$

Per la qual cosa, posto il raggio del cerchio di un palmo, e conseguentemente il diametro AB, o sia a di palmi 2, sarà l' aja dell'intero cerchio $= 8\sqrt{2} \times 0.2781 = 11.3136 \times 0.2781$, o di pal. quadrati 3.146 a un di presso.

COROLLARIO II.

79. Se si mettono nell' ellisse di primo genere uno degli assi $= a$, l' altro asse $= c$, qualunque ordinata al primo de' detti assi $= y$, e l' ascissa corrispondente $= x$, computando la detta ascissa non dal centro, ma da uno degli estremi dell' asse posto $= a$, sarà l' equazione della curva

$$y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2).$$

Onde

Onde saranno

$$y = \frac{c}{a} (ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$ydx = \frac{c}{a} \times dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$\int ydx = \frac{c}{a} \times \int \left(dx (ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \right).$$

E' chiaro dunque che la quadratura dello spazio racchiuso dall' ellisse di primo genere è uguale a quella del cerchio, che ha per diametro l' asse posto $= a$, moltiplicata per lo rotto $\frac{c}{a}$; o ciò, ch' è lo stesso, che la detta quadratura è quarta proporzionale in ordine all' asse $= a$, all' asse $= c$, ed al cerchio, che ha per diametro il primo de' detti assi. Per la qual cosa, posti l' asse maggiore di un' ellisse di palmi 3, e l' asse minore di palmi 2, sarà l' intero spazio racchiuso dalla detta ellisse quarto proporzionale in ordine a 3, a 2, ed a 7.067, ch' è ad un di presso l' aja del cerchio, che ha il diametro di palmi 3, e conseguentemente = pal. quadrati 4.711 a un di presso.

ESEMPIO V.

Fig. 5. *Sia* LMV *la curva logaritmica, e siena* AB *la linea delle ascisse, ed* A *l' origine di esse. Da qualunque punto* M *della curva s'intenda calata su* AB *la perpendicolare* MP*; e sia da determinarsi in sì fatta curva la quadratura dello spazio* ALMP.

Per lo punto M s'intenda tirata la tangente MT; e si mettano l'ascissa AP $= x$, l'ordinata PM $= y$, e la sottangente PT, ch'è costante in tale curva, $= a$. Sarà l' equazione alla curva

$$x = ly.$$

Onde saranno

$$dx = \frac{ady}{y}.$$

e

$$ydx = \frac{aydy}{y} = ady.$$

E perciò

$$\int ydx = \int ady = ay + C = PT \times PM + C.$$

In oltre, quando il punto P cade in A, lo spazio ALMP si fa nullo, e l'ordinata PM, o sia y si fa $=$ AL. Onde sarà PT $\times$ AL $+$ C $= 0$, e conseguentemente C $= -$ PT $\times$ AL. Per la qual cosa lo spazio ALMP è $=$ PT $\times$ PM $-$ PT $\times$ AL $=$ PT (PM $-$ AL), cioè è uguale al rettangolo fatto dalla sottangente PT, e dalla differenza delle ordinate PM, AL.

COROLLARIO I.

80. Quindi è che se si tira qualunque altra ordinata NQ alla linea AB delle ascisse, sarà lo spazio ALNQ $=$ PT (QN $-$ AL).

COROLLARIO II.

81. Essendo lo spazio ALNQ $=$ PT (QN $-$ AL), e lo spazio ALMP $=$ PT (PM $-$ AL), sarà lo spazio PMNQ $=$ PT (QN $-$ PM), cioè uguale al rettangolo fatto dalla sottangente, e dalla differenza delle ordinate, che comprendono lo stesso spazio.

CA-

CAP. VI.

Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in rettificare le linee curve.

DEFINIZIONE.

82 Si dice *rettificare* una linea curva, quando si vuole determinare la sua lunghezza, o sia una retta, che le sia uguale.

PROBL. XIV.

83. *Ritrovare la formola generale, ch' esprime l' elemento di qualunque arco di qualsisia curva.*

SOLUZIONE.

Fig. 1. Contrassegnino AM un'arco qualunque di qualsisia curva AMB, e PM l' ordinata all' asse AC della curva, procedente per l' estremo M dell' arco AM. S' intenda tirata pm parallela, ed infinitamente vicina a PM, e dal punto M s' intenda calata su pm la perpendicolare MR. Sarà l' archetto infinitamente picciolo Mm il differenziale, o sia l' ele-

elemento dell' arco AM. Ma l' archetto Mm senza sensibile errore si può prendere per una lineetta retta, o sia per l' ipotenusa del triangoletto infinitamente picciolo MRm, rettangolo in R, e perciò è $=\sqrt{MR^2+mR^2}$. Dunque l' elemento dell' arco AM è $=\sqrt{MR^2+mR^2}$. Si mettano l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; saranno MR $=$ Pp $= dx$, ed mR $= dy$, e perciò MR$^2 = dx^2$, ed mR$^2 = dy^2$; e conseguentemente sarà $\sqrt{MR^2+mR^2} = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Per la qual cosa, chiamando y l' ordinata all' asse di qualsisia curva, che procede per l' estremo di qualunque arco della medesima, ed x l' ascissa corrispondente, la formola generale, ch' esprime l' elemento del medesimo arco, è $=\sqrt{dx^2+dy^2}$. Ch' è ciò, che bisognava ritrovare.

AVVERTIMENTO.

84. Si noti che se in qualunque curva tra gli asintoti si metterà l' ordinata ad uno di essi, che procede per l' estremo di qualsisia arco della medesima curva, $= y$, e l' ascissa corrispondente $= x$, si troverà, che la formola generale, ch' esprime rà l' elemento del medesimo arco, sarà pure $\sqrt{dx^2+dy^2}$.

CO-

COROLLARIO I.

85. Quindi si avrà la lunghezza di qualunque arco di qualsivoglia curva, di cui è nota l' equazione, con determinare l' integrale di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, che corrisponde all' indole della medesima curva, e con aggiugnere a sì fatto integrale il valore della costante C.

COROLLARIO II.

86. In oltre facendosi nulla in qualunque curva, che si riferisce al suo asse, così l' ascissa, che l' ordinata, quando si fa nullo l' arco preso dal vertice dello stesso asse: è chiaro che si avrà allora il valore della costante C, che si deve aggiugnere all' integrale di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, con sostituire in sì fatto integrale il zero in vece di x, o di y, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

PROBL. XV.

87. *Insegnare il modo di determinare l' integrale di* $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, *corrispondente ad una curva, di cui si ha l' equazione.*

So-

SOLUZIONE.

1. Si ricavi dall' equazione della curva il valore di x, o di y. Indi si determini il differenziale di sì fatto valore di x, o di y, e s' innalzi tale differenziale a quadrato. S' avrà in tal modo il valore di dx^2, o di dy^2.

2. Si sostituisca nella formola generale $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di dx^2, o di dy^2 il suo valore ritrovato; e si avrà una quantità, che conterrà solo una delle variabili.

3. Si determini finalmente l'integrale della detta quantità, che conterrà una sola variabile, e si avrà l' integrale cercato.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da rettificarsi l' arco AM *della parabola* BAM *di qualunque genere.* Fig. 3[illegible]

Posto il parametro dell' asse $= p$, e poste l' ordinata MP, menata all' asse dall' estremo dell' arco AM, $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà l' equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde saranno

$$x^m = p^{-n} y^{m+n},$$

$$x = p^{\frac{-n}{m}} y^{\frac{m+n}{m}},$$

dx

$$dx = \frac{m+n}{m} p^{-\frac{n}{m}} y^{\frac{n}{m}} dy,$$

e

$$dx^2 = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2.$$

E perciò sarà

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2 + dy^2}$$

$$= dy\left(1+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, mutando il segno all'esponente di y nel binomio del modo insegnato nel § 30, sarà

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = y^{\frac{n}{m}} dy\left(y^{-\frac{2n}{m}}+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sicchè s'avrà la lunghezza dell'arco AM, coll'unire in una somma l'integrale di uno de' valori ritrovati di $\sqrt{dx^2+dy^2}$, e quello, che nasce col sostituire il zero in vece di y nello stesso integrale, preso però col segno contrario (§ 85).

AVVERTIMENTO.

88. Se sarà $\frac{2n}{m} = 1$, o sia $m = 2n$, il primo de' valori ritrovati di $\sqrt{dx^2+dy^2}$ avrà la condizione esposta nel § 26; e perciò si potrà integrare esattamente. Se poi sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m}{2n}$, il primo de' detti valori avrà la condizione esposta nel § 29, e per conseguenza anche si potrà integrare esattamente. Se finalmente non sarà $m = 2n$, nè sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m}{2n}$, ma sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{n+m}{-2n}$; allora il secondo de' valori di $\sqrt{dx^2+dy^2}$ avrà la condizione esposta nel § 29, e conseguentemente si potrà esattamente integrare. In ogni altro caso non si potrà avere l'integrale del valore di $\sqrt{dx^2+dy^2}$, che per approssimazione del modo insegnato nel § 35.

COROLLARIO I.

89. Quindi la lunghezza dell' arco AM si avrà con esattezza 1°.. se sarà $m = 2n$; 2°. se sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m}{2n}$; 3°. se sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m+n}{-2n}$; e s' integreranno, per potere avere la detta lunghezza, ne' primi due casi il primo de' valori ritrovati di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, e nel terzo caso il secondo degli stessi valori. In qualunque altro caso non si avrà la lunghezza dell'arco AM, che a un di presso.

COROLLARIO II.

90. Se la parabola è di primo genere; Essendo la sua equazione $y^2 = px$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$: è chiaro che niuno de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si può integrare con esattezza. Sicchè la lunghezza di qualunque arco della parabola di primo genere non si potrà avere, che a un di presso.

CO-

COROLLARIO III.

91. Se la parabola è di secondo genere; Posta la sua equazione $y^3 = p^2 x$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$; è chiaro che niuno de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si potrà integrare allora con esattezza. Sicchè in tale caso non si potrà determinare la lunghezza di qualunque arco della parabola di secondo genere, che per approssimazione. Posta poi la sua equazione $y^3 = px^2$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$; è chiaro che il primo de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si potrà integrare esattamente del modo insegnato nel § 26. Sicchè si avrà in tale altro caso con esattezza la lunghezza di qualunque arco della parabola di secondo genere. In effetto la formola generale $dy\left(1 + \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$ diventa allora $dy\left(1 + \frac{9y}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}$, il di cui integrale per lo § 26 è $= \frac{8p}{27} \times \left(1 + \frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Ma la costante C deve essere uguale allo stesso integrale, preso col

R segno

ſegno contrario, e mutata in eſſo l' y in zero (85); e perciò è $= -\frac{8p}{27}$. Sicchè l' arco AM in sì fatto caſo è $= \frac{8p}{27} \times \left(1 + \frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8p}{27}$. Per la qual coſa, poſti il parametro p di palmi 18, e l' ordinata PM, o ſia y di palmi 16, ſarà l' arco AM $= \frac{16}{3} \times \sqrt{27} - \frac{16}{3} =$ pal. 22. 379.

COROLLARIO IV.

92. Se la parabola è di terzo genere, o che la ſua equazione ſia $y^4 = px^3$, o $y^4 = p^2 x^2$, o $y^4 = p^3 x$, e conſeguentemente $m = 3$, $n = 1$, o $m = 2$, $n = 2$, o $m = 1$, $n = 3$; è chiaro che niuno de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſi potrà integrare allora con eſattezza. Sicchè la lunghezza di qualunque arco della parabola di terzo genere non ſi potrà deteterminare, che a un di preſſo.

COROLLARIO V.

93. Se la parabola è di quarto genere, Poſta la ſua equazione $y^5 = p^2 x^3$, o $y^5 = p^3 x^2$, o $y^5 = p^4 x$, e conſeguentemente $m = 3$,

$m = 3$, $n = 2$, o $m = 2$, $n = 3$, o $m = 1$, $n = 4$; è chiaro che niuno de' due valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſi potrà integrare allora con eſattezza. Sicchè qualunque arco della parabola di quarto genere non ſi potrà rettificare allora, che per approſſimazione. Poſta poi la ſua equazione $y^5 = px^4$, e conſeguentemente $m = 4$, $n = 1$; è chiaro che il primo de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ſi può integrare eſattamente del modo inſegnato nel § 29. Sicchè s' avrà in sì fatto caſo la lunghezza di qualunque arco della parabola di quarto genere con eſattezza. In effetto la formola generale $dy\left(1 + \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$ diventa allora $dy\left(1 + \frac{25}{16} \times \sqrt{\frac{y}{p}}\right)^{\frac{1}{2}}$, il di cui integrale per lo § 29 è $= \frac{1024p}{3125} \sqrt{\left(1 + \frac{25}{16}\sqrt{\frac{y}{p}}\right)^5} - \frac{1024p}{1875} \sqrt{\left(1 + \frac{25}{16}\sqrt{\frac{y}{p}}\right)^3} + C$. Ma la coſtante C è uguale allo ſteſſo integrale,

 pre-

preso col segno contrario, e mutata in essa l'y in zero (§ 85); e perciò è $= -\frac{1024p}{3125} + \frac{1024p}{1875}$. Sicchè l'arco AM in sì fatto caso è $= \frac{1024p}{3125}\sqrt{\left(1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{y}{p}}\right)^5} - \frac{1024p}{1875}\sqrt{\left(1+\frac{25}{16}\sqrt{\frac{y}{p}}\right)^3} - \frac{1024p}{3125} + \frac{1024p}{1875}$.

COROLLARIO VI.

94. Sia l'equazione della curva $y^2 = x^3 p^{-1} = \frac{x^3}{p}$. Essendo allora $m = 3$, $n = -1$; è chiaro che il secondo de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ si può integrare esattamente del modo insegnato nel § 29. Sicchè si avrà in tale caso la lunghezza dell' arco AM con esattezza. In effetto la formola generale $y^{\frac{n}{m}} dy \left(y^{-\frac{2n}{m}} + \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$ diventa allora $y^{-\frac{1}{3}} dy$

$dy\left(y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$, il di cui integrale per lo § 29 è $= \left(y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Ma C per lo § 85 è $= -\left(\frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. Sicchè l'arco AM in sì fatto caso è $= \left(y^{\frac{2}{3}} + \frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9} p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{y^2} + \frac{4}{9}\sqrt[3]{p^2}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{4}{9}\sqrt[3]{p^2}\right)^3}$.
Per la qual cosa, posti p di palmi 8, ed y di palmi 10, sarà l'arco AM = 16. 228 — 2. 354 = pal. 13. 874.

COROLLARIO VII.

95. Quindi, per avere con esattezza la lunghezza dell' arco AM per mezzo dell' integrale del secondo de' valori di $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, è necessario 1° che sia negativo il valore di n; 2° che sia intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m+n}{-2n}$, siccome accade, se l' e-

equazione della curva è $y^4 = x^5 p^{-1}$, o $y^4 = x^6 p^{-2}$, o $y^6 = x^7 p^{-1}$, o $y^6 = x^9 p^{-3}$, ec.

ESEMPIO II.

Sia da rettificarsi qualunque arco circolare minore dell' arco di quadrante.

Fig.4. Contrassegnino AMB un mezzo cerchio, ed AB il suo diametro. Dall' estremo M dell' arco AM, minore dell' arco di quadrante, si cali su AB la perpendicolare MP. Posto il diametro AB $= a$, e poste l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà l' equazione alla curva

$$y^2 = ax - x^2.$$

Onde saranno

$$y = \sqrt{ax - x^2},$$

$$dy = \frac{\frac{1}{2} adx - xdx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

e

$$dy^2 = \frac{\frac{1}{4} a^2 dx^2 - axdx^2 + x^2 dx^2}{ax - x^2}.$$

E perciò sarà

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{\frac{1}{4} a^2 dx^2 - axdx^2 + x^2 dx^2}{ax - x^2}} = \frac{1}{2} adx \left(ax - x^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ma

$$\left(ax - x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} a^{-\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{16} a^{-\frac{7}{2}} x^{\frac{5}{2}} \text{ ec.},$$

e conseguentemente

$$\frac{1}{2} adx \left(ax - x^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} a^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} a^{-\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx, \text{ ec.}.$$

Dunque

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2} = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} a^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40} a^{-\frac{3}{2}} x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112} a^{-\frac{5}{2}} x^{\frac{7}{2}} = \sqrt{x} \left(\sqrt{a} + \frac{1}{6} \sqrt{\frac{x^2}{a}} + \frac{3}{40} \sqrt{\frac{x^4}{a^5}} + \frac{5}{112} \sqrt{\frac{x^6}{a^5}}, \text{ ec.} \right) + C.$$

In oltre facendosi nullo così l'arco AM, che l'ascissa AP, quando il punto M cade in A; la serie ritrovata diverrà nulla, se si sostituirà in essa il zero in vece di x; e conseguentemente la costante C è nulla. Per la qual cosa la lunghezza dell'arco AM è a un di presso =

$$\sqrt{x}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{x^2}{a}} + \frac{3}{40}\sqrt{\frac{x^4}{a^3}} + \frac{5}{112}\sqrt{\frac{x^5}{a^5}}, \text{ ec.}\right).$$

COROLLARIO.

96. Essendo AP il seno verso dell'arco AM, ed essendo il seno verso dell'arco di 60 gradi la metà del raggio; è chiaro che, se nella serie ritrovata si sostituirà $\frac{1}{4}a$ in vece di x, la serie, che nascerà, darà a un di presso la lunghezza dell'arco di 60°, e conseguentemente il suo sestuplo sarà la lunghezza dell'intera periferia. Ma col sostituire nella serie ritrovata $\frac{1}{4}a$ in vece di x, e conseguentemente $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ in vece di $\sqrt{x}$, si ha la serie

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{16}a} + \frac{3}{40}\sqrt{\frac{1}{256}a} + \frac{5}{112}\sqrt{\frac{1}{4096}a}, \text{ ec.}\right),$$

ovvero

$$\frac{1}{2}a\left(1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168}, \text{ ec.}\right).$$

Dunque la lunghezza dell'intera periferia è a un di presso =

$$3a\left(1 + \frac{1}{24} + \frac{3}{640} + \frac{5}{7168}, \text{ ec.}\right).$$

Per la qual cosa, posto il diametro di un palmo, sarà la periferia a un di presso = 3.1411551.

AVVERTIMENTO.

97. I due esempj, che si sono posti in questo capo, sono sufficienti a far comprendere in che modo si deve procedere per determinare la lunghezza di qualunque arco di qualsisia altra curva, di cui si ha l'equazione. Procediamo ora ad insegnare il modo di determinare col calcolo integrale le grandezze de' solidi. E' d'avvertire però che ci limiteremo a' solidi, che si possono considerare come generati dagli spazj, che le curve racchiudono co' loro assi, o co' loro asin-

asintoti, e colle ordinate agli stessi assi, o asintoti, mossi con una perfetta rivoluzione intorno a' medesimi assi, o asintoti, e che perciò diconsi *solidi di rivoluzione*.

CAP. VII.

Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le grandezze de' solidi di rivoluzione.

PROBL. XVI.

98. *Determinare la formola generale, ch' esprime l' elemento di qualunque solido di rivoluzione.*

SOLUZIONE.

Fig. 1. Contrassegnino AMB qualunque curva, AC il suo asse, ed MP qualsivoglia sua ordinata. S' intenda tirata *pm* parallela, ed infinitamente vicina a PM, e lo spazio AMP s' intenda girare con una perfetta rivoluzione intorno l' asse AP. Essendo il trapezietto PMmp l' elemento dello spazio AMP; sarà il solidetto, che nella detta rivoluzione descriverà il trapezietto PMmp, il differenziale, o sia l' elemento del solido, che descriverà nella medesima rivoluzione lo spazio AMP. Ma' il trapezietto PMmp senza sensibile errore si può prendere per un rettangoletto. Dunque il solidetto, che descrive il fatto trapezietto nella detta rivoluzione, si può prendere per un cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp. E perciò l' elemento del solido, che genera lo spazio AMP, girando con una perfetta rivoluzione intorno l' asse AP, è uguale al cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp. Si mettano l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà Pp $= dx$. Si metta di più $= c$ il numero, ch' esprime la periferia di un cerchio relativamente al suo raggio posto $= 1$. Essendo le periferie de' cerchi nella ragione de' loro raggi, sarà la periferia del cerchio, che ha per raggio PM $= cy$, e conseguentemente sarà il cerchio descritto col ragggio

$$PM = cy \times \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} cy^2.$$ Onde sarà

il cilindretto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza Pp, o sia l'elemento del solido, che genera lo spazio AMP, girando con una perfetta rivoluzione

intorno l' asse AP, $= \frac{1}{2} cy^2\, dx$. Lo stesso si risi ritrova, se si considera il solido descritto dallo spazio, che una curva tra gli asintoti racchiude con uno degli asintoti, e con due ordinate allo stesso asintoto, mosso con una perfetta rivoluzione intorno al medesimo asintoto. Dunque la formola generale, ch' esprime l' elemento di qualunque solido di rivoluzione è $= \frac{1}{2} cy^2 dx$. Ch' è ciò, che bisognava determinare.

COROLLARIO I.

99. Quindi si avrà la grandezza di un solido di rivoluzione, qualora è data l' equazione della curva, che racchiude lo spazio, che lo genera colla sua perfetta rivoluzione, con determinare l' integrale di $\frac{1}{2} cy^2 dx$ relativamente alla medesima curva, e con aggiugnere a sì fatto integrale il valore della costante C.

COROLLARIO II.

100. In oltre facendosi nulla l' ascissa in qualunque curva, che si riferisce al suo asse, quando si fa nullo lo spazio, che la curva racchiude con un' ordinata all' asse, preso dal vertice dello stesso asse, e conseguentemen-

mente nullo il solido, che genera lo stesso spazio colla sua perfetta rivoluzione intorno l' asse: è chiaro, che si avrà allora il valore della costante C, che si deve aggiugnere all' integrale di $\frac{1}{2} cy^2 dx$, con sostituire in sì fatto integrale il zero in vece di x, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

COROLLARIO III.

101. Facendosi finalmente in qualunque curva ABV tra gli asintoti OT, OR l' ascissa PO = OC, ch' è l' ascissa, che corrisponde all' ordinata BC, procedente per lo vertice B dell' asse della curva, quando si fa nullo lo spazio BCPM, preso dall' ordinata BC; e conseguentemente nullo il solido, che genera lo stesso spazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno a CP. E chiaro, che si avrà in sì fatto caso il valore della costante C, che si deve aggiugnere all' integrale di $\frac{1}{2} cy^2 dx$, con sostituire nel detto integrale in vece di x il valore dell' ascissa, che corrisponde all' ordinata all' asintoto, che procede per lo vertice dell' asse della curva, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale. Fig. 2.

PRO-

PROBL. XVII.

102. *Insegnare il modo di determinare l'integrale di* $\frac{1}{2}cy^2\,dx$ *relativamente a qualunque curva, di cui si ha l'equazione.*

SOLUZIONE.

Si ricavi dall'equazione della curva il valore di y, e s'innalzi sì fatto valore a quadrato. Si avrà in tal modo il valore di y^2.

Si sostituisca nella formola generale $\frac{1}{2}cy^2\,dx$ in vece di y^2 il suo valore ritrovato; e si avrà una quantità, che conterrà solo x, e dx.

Si determini finalmente l'integrale della detta quantità, e si avrà l'integrale cercato.

Ch'è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Fig. 3. *Sia da determinarsi la grandezza del conoide parabolico, che descrive lo spazio* AMP, *racchiuso dall'arco* AM *della parabola di qualunque genere, dall'asse* AP, *e dall'ordinata* MP *allo stesso asse, mosso con una perfetta rivoluzione intorno* AP.

Po-

sto il paramentro dell'asse $= p$, e poste l'ordinata MP $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$, sarà l'equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = p^n x^m.$$

Onde saranno

$$y = p^{\frac{n}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}}$$

$$y^2 = p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}},$$

e

$$\frac{1}{2}cy^2\,dx = \frac{1}{2}cp^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}}\,dx.$$

E perciò sarà

$$\int \frac{1}{2}cy^2\,dx = \frac{\frac{1}{2}cp^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}+1}}{\frac{2m}{m+n}+1} + C.$$

E, sostituendo y^2 in vece di $p^{\frac{2n}{m+n}} x^{\frac{2m}{m+n}}$, sarà

$$\int \frac{1}{2}cy^2\,dx = \frac{m+n}{3m+n} \times \frac{1}{2}cy^2x + C.$$

Ma il valore di C è nullo, siccome si rileva dal sostituire nell'integrale ritrovato il zero in vece di x. Dunque il conoide cercacato è $= \frac{m+n}{3m+n} \times \frac{1}{2} cy^2 x$. Per la qual cosa contrassegnando $\frac{1}{2} cy^2 x$ il cilindro, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM $= y$, e per altezza AP $= x$, o sia il cilindro, che ha col conoide la stessa base, e la stess' altezza; sarà qualunque conoide parabolico quella parte del cilindro, che ha con esso la stessa base, e la stess' altezza, che dinota il rotto $\frac{m+n}{3m+n}$.

Quindi

1. Se la parabola è di primo genere. Essendo allora $y^2 = px$ l'equazione della curva, e conseguentemente $m = 1$, $n = 1$, sarà il conoide parabolico la metà del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza.

2. Se la parabola è di secondo genere. Posta la sua equazione $y^3 = px^2$, e conseguentemente $m = 2$, $n = 1$, sarà il conoide parabolico $\frac{3}{7}$ del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza. Posta poi la sua equazione $y^3 = p^2 x$, e conseguentemente $m = 1$, $n = 2$, sarà il conoide parabolico $\frac{3}{5}$ del cilindro, che ha con esso la medesima base, e la medesima altezza.

3. Se la parabola è di terzo genere. Secondochè la sua equazione è $y^4 = px^3$, o $y^4 = p^2 x^2$, o $y^4 = p^3 x$, e conseguentemente secondochè sono $m = 3$, $n = 1$, o $m = 2$, $n = 2$, o $m = 1$, $n = 3$, così sarà il conoide parabolico $\frac{2}{5}$, o $\frac{1}{2}$, o $\frac{2}{3}$ del cilindro, che l'uguaglia nella base, e nell'altezza; e così procedendo innanzi.

ESEMPIO II.

Sia da determinarsi la porzione sferica, che descrive lo spazio circolare APM, *mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad* AP. Fig. 4.

Posto il diametro AB del cerchio $= a$, e poste l'ordinata MP $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$, sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = ax - x^2.$$

Onde saranno

$$\frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c \,(axdx - x^2 dx),$$

e

$$\int \frac{1}{2} cy^2 dx = \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

S Ma

Ma il valore di C è nullo, siccome si rileva dal sostituire nell'integrale ritrovato il zero in vece di x. Dunque la solidità della porzione sferica, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza AP, è $= \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$. Per la qual cosa, posti il diametro della sfera di palmi 13, e l'altezza della porzione sferica di palmi 4, sarà la solidità della medesima porzione $= 3.141 \times \left(104 - 21\frac{1}{3}\right) =$ pal. cubici 259.656.

COROLLARIO I.

103. Essendo l'altezza della mezza sfera uguale al raggio, e l'altezza della sfera intera uguale al diametro; è chiaro che si avrà la grandezza della mezza sfera col sostituire nell'espressione ritrovata $\frac{1}{2}a$ in vece di x, e la grandezza della sfera intera col sostituire nella detta espressione a in vece di x. Sicchè saranno la solidità della mezza sfera $= \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{24}a^3\right) = \frac{1}{2}c$

$\times \frac{1}{12}a^3$, e la solidità dell'intera sfera $= \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3$. Per la qual cosa, posto il diametro di una sfera di palmi 4, sarà la sfera $= 3.141 \times 10\frac{2}{3} =$ pal. cubici 33.504.

COROLLARIO II.

104. In oltre essendo la grandezza di una sfera, che ha il diametro $= a$, $= \frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}$ di $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}a^3$, ed essendo il cerchio massimo della stessa sfera $= \frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}a^2$, e conseguentemente il cilindro, che ha per base il cerchio massimo della medesima sfera, e per altezza il diametro, $= \frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}a^3$; è chiaro che qualunque sfe-

ra sia $\frac{2}{3}$ del cilindro, che ha per base il suo cerchio massimo, e per altezza il diametro, o sia $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto intorno alla medesima sfera.

ESEMPIO III.

Fig. 6, e 7. *Sieno* ACB *una mezza elliſſe*, AB *il suo asse maggiore, o minore, ed* MP *un' ordinata qualunque all' asse* AB; *e sia da determinarsi la porzione di ellittoide, che descrive lo spazio* AMP *girando con una perfetta rivoluzione intorno ad* AP.

Si mettano l' asse AB della rivoluzione $= a$, l' altro asse $= b$, l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà l' equazione alla curva

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax - x^2).$$

Onde saranno

$$\frac{1}{2}cy^2\,dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c\,(axdx - x^2\,dx),$$

$$\int \frac{1}{2}cy^2\,dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C.$$

Ma

Ma la costante è nulla, siccome è facile a comprendere. Dunque la grandezza della porzione dell' ellittoide, che descrive lo spazio ellittico AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno ad AP, è $= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$. Per la qual cosa, posti l' asse della risoluzione di palmi 4, l' altro asse di palmi 3, e l' altezza AP della porzione di ellittoide, che si cerca, di palmi 2, sarà la grandezza della detta porzione $= \frac{9}{16} \times 3.141 \times 5\frac{1}{3} =$ pal. cubici 9.423. Posti poi l' asse della rivoluzione di palmi 4, l' altro asse di palmi 5, e l' altezza AP di palmi 2; sarà la grandezza della porzione d'ellittoide, descritta dallo spazio ellittico AMP, $= \frac{25}{16} \times 3.141 \times 5\frac{1}{3} =$ pal. cubici 26.175.

COROLLARIO I.

105. Essendo l' altezza del mezzo ellittoide uguale alla metà dell' asse della rivoluzione, e l' altezza dell' intero ellittoide uguale all' asse intero della rivoluzione: è chiaro

ro che si avrà la grandezza del mezzo ellittoide col sostituire nell' espressione ritrovata $\frac{1}{2}a$ in vece di x, e quella dell' ellittoide intero col sostituire nella detta espressione a in vece di x. Sicchè saranno il mezzo ellittoide $= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{24}a^3\right) = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{12}a^3$, e l' ellittoide intero $= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3$; cioè sarà l' intero ellittoide quarto proporzionale in ordine ad a^2, a, b^2, e ad $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3$. Ma $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3$ dà la grandezza della sfera, che ha il diametro $= a$ (§ 103). Dunque qualunque conoide ellittico è quarto proporzionale in ordine al quadrato dell' asse della rivoluzione, al quadrato dell' altro asse, ed alla sfera, che ha per diametro l' asse della rivoluzione. Per la qual cosa, posti l' asse della rivoluzione di palmi 4, e l' altro asse di

di palmi 3, sarà l' ellittoide quarto proporzionale in ordine a 16, a 9, ed 33 . 504, e conseguentemente = pal. cubici 18. 846. Posti poi l' asse della rivoluzione di palmi 4, e l' altro asse di palmi 5, sarà l' ellittoide quarto proporzione in ordine a 16, a 25, ed a 33 . 504, e conseguentemente = pal. cubici 52 . 35.

COROLLARIO II.

106. Essendo in oltre $\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2}c \times \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}$ di $\frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}b^2 a$, ed essendo il cerchio, che ha il diametro $= b$, $= \frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}b^2$, e conseguentemente il cilindro, che ha per base il cerchio, che ha il diametro $= b$, e per altezza a, $= \frac{1}{2}c \times \frac{1}{4}b^2 a$; è chiaro che qualunque conoide ellittico sia $\frac{2}{3}$ del cilindro, che ha per altezza l' asse della rivoluzione, e per base il cerchio, che ha per diametro l' altro asse, o sia $\frac{2}{3}$ del cilin-

cilindro circoscritto intorno al medesimo ellittoide, e che ha per altezza l'asse della rivoluzione.

ESEMPIO IV.

Fig. 8. *Sia* AM *qualunque iperbola, e sieno* OA *la metà dell'asse primario,* OB *la metà dell'asse secondario, ed* MP *qualunque ordinata all'asse primario prolungato; e sia da determinarsi la grandezza del conoide iperbolico, che genera lo spazio iperbolico* AMP *mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad* AP.

Posti l'asse primario $= a$, l'asse secondario $= b$, l'ordinata MP $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$, sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(ax + x^2 \right).$$

Onde saranno

$$\frac{1}{2} cy^2\, dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left(axdx + x^2\, dx \right),$$

$$\int \frac{1}{2} cy^2\, dx = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right) + C.$$

Ma la costante deve essere nulla, siccome è facile a comprendere. Dunque la grandezza del conoide iperbolico, che descrive lo spazio

zio iperbolico AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno ad AP, è =

$$\frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right).$$

COROLLARIO I.

107. Se si suppone l'ascissa AP uguale all'asse primario, o sia $x = a$, sarà il conoide descritto dallo spazio iperbolico AMP

$$= \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{2} a^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{2} c \times \frac{5}{6} a^3 = \frac{5}{12} ab^2 c.$$

Per la qual cosa, posti l'asse primario di palmi 10, e l'asse secondario di palmi 8; essendo $c = 6.282$, sarà il conoide iperbolico

$$= \frac{5}{12} \times 10 \times 64 \times 6.282 =$$ pal. cubici 1675.2.

COROLLARIO II.

108. Se l'iperbola è equilatera; essendo allora $a = b$, sarà il conoide iperbolico $=$ $\frac{1}{2} c \left(\frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} x^3 \right)$; e nel caso del-

l'

l'ascissa uguale all'asse primario, sarà il conoide iperbolico $= \frac{5}{12} a^3 c$. Per la qual cosa, posto qualunque degli assi di palmi 10, essendo $c = 6.282$, sarà il conoide iperbolico $= \frac{5}{12} \times 1000 \times 6.282 =$ pal. cubici 2617.5.

ESEMPIO V.

Sia MC qualunque ordinata all'asse secondario dell'iperbola AM prolungato, e sia da determinarsi la grandezza del solido, che genera lo spazio iperbolico AOCM, mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad OC.

Posti l'asse primario $= a$, l'asse secondario $= b$, l'ordinata MC $= y$, e l'ascissa corrispondente OC $= x$; sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{1}{4} b^2 + x^2\right).$$

Onde saranno

$$\frac{1}{2} c y^2 dx = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{4} b^2 dx + x^2 dx\right),$$

e

$$\int \frac{1}{2} c y^2 dx = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{4} b^2 x + \frac{1}{3} x^3\right) + C.$$

Ma

Ma la costante deve essere nulla; perchè quando si fa nullo lo spazio AOCM, si fa nulla anche l'ascissa OC, o sia x. Dunque il solido, che descrive lo spazio iperbolico AOCM, girando con una perfetta rivoluzione intorno ad OC, è $=$

$$\frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{4} b^2 x + \frac{1}{3} x^3\right).$$

COROLLARIO I.

109. Se si suppone l'ascissa OC uguale all'asse secondario, o sia $x = b$, sarà il solido descritto dallo spazio iperbolico AOCM

$$= \frac{a^2}{b^2} \times \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{4} b^3 + \frac{1}{3} b^3\right) = \frac{7}{24} a^2 bc.$$

Per la qual cosa, posti l'asse primario di palmi 10, e l'asse secondario di palmi 8, sarà il detto solido $= \frac{7}{24} \times 100 \times 8 \times 6.282 =$ pal. cubici 1465.8.

COROLLARIO II.

110. Se l'iperbola è equilatera; essendo allora $a = b$, sarà il solido descritto dallo spa-

ſpazio iperbolico AOCM $= \frac{1}{2} c \left(\frac{1}{4} b^2 x + \frac{1}{3} x^3 \right)$. E nel caſo, che ſia $x = b$, ſarà il detto ſolido $= \frac{7}{24} b^3 c$. Per la qual coſa, poſto ciaſcuno degli aſſi di palmi 10, ſarà il ſolido deſcritto dallo ſpazio AOCM $= \frac{7}{24} \times 1000 \times 6.282 =$ pal. cubici 1832.25.

ESEMPIO VI.

Fig.2. *Sieno* ABV *un' iperbola equilatera tra gli aſintoti* OR, OT, *ed* MP, *e* BC *due ordinate all' aſintoto* OR, *delle quali* BC *ſia quella, che procede per lo vertice* B *dell' aſſe dell' iperbola; e ſia da determinarſi il ſolido, che genera lo ſpazio aſintotico* BCPM, *moſſo con con una perfetta rivoluzione intorno a* CP.

Poſto il lato della potenza, o ſia OC $= a$, e poſte l'ordinata MP $= y$, e l'aſciſſa corriſpondente OP $= x$, ſarà l'equazione alla curva

$$yx = a^2.$$

Onde ſaranno

$$y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1},$$

y^2

$$y^2 = a^4 x^{-2},$$

e

$$\frac{1}{2} c y^2 dx = \frac{1}{2} c a^4 x^{-2} dx.$$

E perciò

$$\int \frac{1}{2} c y^2 dx = -\frac{1}{2} c a^4 x^{-1} + C = -\frac{a^4 c}{2x} + C.$$

Ma

$$C = \frac{a^4 c}{2a} \ (\S\ 100).$$

Dunque il ſolido, che deſcrive lo ſpazio aſintotico BCPM, girando con una perfetta rivoluzione intorno a CP, è $= \frac{a^4 c}{2a} - \frac{a^4 c}{2x} = \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{x} \right)$. Per la qual coſa, poſte OC $= a$ di palmi 10, e OP $= x$ di palmi 40, ſarà il ſolido deſcritto dallo ſpazio aſintotico BCPM $= 3.141 \times 750 =$ pal. cubici 2355.75.

COROLLARIO I.

111. Eſſendo il ſolido deſcritto dallo ſpazio aſintotico BCPM $= \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{x} \right)$ $=$

$= \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{OP} \right)$; tirata qualunque altra ordinata NQ all' asintoto OR, sarà il solido descritto dallo spazio asintotico BCQN $= \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{OQ} \right)$. Onde sarà il solido descritto dallo spazio asintotico NQPM, compreso tra le ordinate NQ, MP all' asintoto OR, $= \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{OP} \right) - \frac{1}{2} c \left(a^3 - \frac{a^4}{OQ} \right) = \frac{1}{2} c \left(\frac{a^4}{OQ} - \frac{a^4}{OP} \right)$. Per la qual cosa, poste OC $= a$ di palmi 10, OP di palmi 40, ed OQ di palmi 20, sarà il solido descritto dallo spazio asintotico NQPM $= 3 . 141 \times 250 =$ pal. cubici 785 . 25.

COROLLARIO II.

112. Se l' ascissa OP $= x$ si fa infinita si farà $\frac{a^4}{x} = \frac{a^4}{\infty} = \frac{1}{\infty}$; e conseguentemente si potrà prendere senza sensibile errore a^3 per $a^3 - \frac{a^4}{x}$. Onde, prolungate, all

all' infinito e l' iperbola BV, e l' asintoto OR, sarà il solido infinitamente lungo, che genererà lo spazio asintotico infinitamente lungo BCRV, mosso con una perfetta rivoluzione intorno a CR, $= \frac{1}{2} c \times a^3 = \frac{1}{2} c \times OC^3$. Ma $\frac{1}{2} c \times OC^3$ dà il cilindro, che ha per base il cerchio descritto col raggio OC, e ch' è $= \frac{1}{2} c \times OC^2$, e per altezza OC. Dunque il detto solido infinitamente lungo è uguale al cilindro, che ha per base il cerchio, che ha per raggio il lato della potenza dell' iperbola, e per altezza lo stesso lato della potenza. Per la qual cosa, posto il lato della potenza di palmi 10, sarà il detto solido di 3141 pal. cubici.

CAP.

CAP. VIII.

Dell' uso degl' integrali de' differenziali del primo grado ad una variabile in determinare le superficie curve de' solidi di rivoluzione.

PROBL. XVIII.

113. *Ritrovare la formola generale, ch'esprime l' elemento della superficie curva di qualunque solido di rivoluzione.*

SOLUZIONE.

Fig. 1 Contrassegnino AMB qualunque curva, AC il suo asse, ed MP qualsivoglia sua ordinata. S' intenda tirata *pm* parallela, ed infinitamente vicina a MP, e lo spazio AMP s' intenda girare con una perfetta rivoluzione intorno l' asse AP. Essendo l' archetto infinitamente picciolo M*m* l' elemento dell' arco AM, sarà la superficietta, che nella detta rivoluzione descriverà l' archetto M*m*, il differenziale, o sia l' elemento dell' intera superficie, che descriverà nella medesima rivoluzione l' intero arco AM, o sia l' elemento dell' intera superficie curva del solido, che descriverà lo spazio AMP. Ma il trapezietto PM*mp* senza sensibile errore si può prendere per un rettangolo: e perciò la superficietta, che descrive l' archetto M*m* nella detta rivoluzione, si può prendere per la superficietta cilindrica del cilindretto retto, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per uno de' suoi lati M*m*; e conseguentemente è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e da M*m*. Dunque l' elemento della superficie curva del solido, che genera lo spazio AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno l' asse AP, è uguale al rettangoletto fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e dall' archetto M*m*. Si mettano l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$, sarà l' archetto M*m* $= \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Si metta di più $= c$ il numero, ch' esprime la lunghezza della periferia di qualunque cerchio relativamente al suo raggio posto $= 1$; sarà $= cy$ la periferia del cerchio descritto col raggio PM $= y$. Onde sarà il rettangoletto fatto dalla periferia del cerchio descritto col raggio PM, e dall' archetto M*m*, o sia l' elemento della superficie curva del solido, che genera lo spazio AMP girando con una perfetta rivoluzione intorno l' asse AP $= cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Lo stesso si trova per ri-

spet-

ſpetto dell' elemento della ſuperficie curva del ſolido deſcritto dallo ſpazio, che qualunque curva tra gli aſintoti racchiude con uno degli aſintoti, e con due ordinate allo ſteſſo aſintoto, moſſo con una perfetta rivoluzione intorno al medeſimo aſintoto. Dunque la formola generale, ch' eſprime l' elemento della ſuperficie curva di qualunque ſolido di rivoluzione, è $= cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Ch' è ciò, che biſognava trovare.

COROLLARIO I.

114. Quindi ſi avrà la grandezza della ſuperficie curva di un ſolido di rivoluzione, qualora è data l' equazione della curva, che racchiude lo ſpazio, che genera sì fatto ſolido colla ſua perfetta rivoluzione, con determinare l' integrale di $cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$ relativamente alla medeſima curva, e con aggiugnere al detto integrale il valore della coſtante C.

COROLLARIO II.

115. In oltre facendoſi nulla sì l' aſciſſa, che l' ordinata in qualunque curva, che ſi riferiſce al ſuo aſſe, quando ſi fa nullo lo ſpazio, che la medeſima curva racchiude col-

l' aſſe, e con una ſua ordinata, preſo dal vertice dello ſteſſo aſſe, e conſeguentemente nullo il ſolido, che genera lo ſteſſo ſpazio colla ſua perfetta rivoluzione intorno l'aſſe, e nulla la ſuperficie curva del medeſimo ſolido: è chiaro che ſi avrà allora il valore della coſtante C, che ſi deve aggiugnere all' integrale di $cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$, con ſoſtituire in sì fatto integrale il zero in vece di x, o di y, e con prendere quel, che naſce, col ſegno contrario a quello del medeſimo integrale.

COROLLARIO III.

116. Facendoſi finalmente in qualunque curva tra gli aſintoti l' ordinata PM uguale all' ordinata BG, che procede per lo vertice B dell' aſſe della curva, e l' aſciſſa OP uguale all' aſciſſa OC, che corriſponde all' ordinata BC, quando ſi fa nullo lo ſpazio $BCPM$, preſo dall' iſteſſa ordinata BC; e conſeguentemente nullo il ſolido, che genera lo ſteſſo ſpazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno a CP, e nulla la ſuperficie curva del medeſimo ſolido: è chiaro che ſi avrà in sì fatto caſo il valore della coſtante C, che ſi deve aggiugnere all' integrale di $cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$, con ſoſtituire nel detto integrale in vece di y l' ordina- Fig. 2.

dinata all' asintoto, che procede per lo vertice dell' asse della curva, o in vece di x l' ascissa, che corrisponde all' ordinata procedente per lo vertice dell' asse, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario a quello del medesimo integrale.

PROBL. XIX.

117. *Insegnare il modo di determinare l' integrale di* $cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$, *corrispondente ad una curva, di cui si ha l' equazione.*

SOLUZIONE.

1. Si ricavi dall' equazione della curva il valore di y, o di x. Indi si determini il differenziale di sì fatto valore di y, o di x, e s' innalzi tale differenziale a quadrato. Si avrà in tal modo il valore di dy^2, o di dx^2.

2. Si sostituiscano nella formola generale $cy\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di y, e di dy^2 i loro valori ritrovati; e si avrà una quantità, che conterrà solo x, e dx; ovvero si sostituisca in $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ in vece di dx^2 il suo valore ritrovato, e quel, che nasce si moltiplichi per cy; e si avrà una quantità, che conterrà solo y, e dy.

3. Si determini finalmente l' integrale della

la detta quantità, che conterrà solo x, e dx, o solo y, e dy, e si avrà l' integrale cercato.

Ch' è ciò, che bisognava insegnare.

ESEMPIO I.

Sia da determinarsi la grandezza della superficie curva del conoide parabolico, che descrive lo spazio AMP, racchiuso dall' arco AM della parabola di qualunque genere, dall' asse AP, e dall' ordinata MP allo stesso asse, e mosso con una perfetta rivoluzione intorno al medesimo asse. Fig. 3.

Posti il parametro dell' asse $= p$, l' ordinata MP $= y$, e l' ascissa corrispondente AP $= x$; sarà l' equazione generale alla curva

$$y^{m+n} = x^m p^n.$$

Onde saranno

$$x^m = p^{-n} y^{m+n},$$

$$x = p^{-\frac{n}{m}} y^{\frac{m+n}{m}},$$

$$dx = \frac{m+n}{m} p^{-\frac{n}{m}} y^{\frac{n}{m}} dy,$$

e

$$dx^2 = \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2.$$

E perciò saranno

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}} dy^2 + dy^2}$$

$$= dy\left(1+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

e

$$cy\sqrt{dx^2+dy^2} = cydy\left(1+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

E, mutando il segno all' esponente di y nel binomio del modo insegnato nel § 30, sarà

$$cy\sqrt{dx^2+dy^2} = cy^{\frac{n}{m}+1} dy\left(y^{-\frac{2n}{m}}+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sicchè s'avrà la superficie curva, che si cerca, con determinare l' integrale di uno de' valori ritrovati di $cy\sqrt{dx^2+dy^2}$, e con aggiugnere a sì fatto integrale quel, che nasce col sostituire il zero in vece di y nello stesso integrale, preso però col segno contrario (§ 115).

CO-

COROLLARIO I.

118. Ragionando, come si è ragionato nel § 88, si comprenderà che si avrà con esattezza la superficie curva, che si cerca: 1°. se sarà $\frac{2n}{m}=2$, o sia $m=n$: 2°. se sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{m}{2n}$: 3°. se, essendo negativo il valore di n, sarà intero, e positivo il valore del rotto $\frac{2m+n}{-2n}$; e che, per avere la detta superficie con esattezza, si dovrà integrare ne' primi due casi il primo de' valori ritrovati di $cy\sqrt{dx^2+dy^2}$, e nel terzo caso il secondo degli stessi valori.

T 4 CO-

COROLLARIO II.

119. Se la parabola è di primo genere; Eſſendo la ſua equazione $y^2 = px$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 1$, o ſia $m = n$, la ſuperficie curva del conoide ſi avrà con eſattezza. In effetto la formola generale $cydy \left(1 + \left(\frac{m+n}{m}\right)^2 p^{-\frac{2n}{m}} y^{\frac{2n}{m}}\right)^{\frac{1}{2}}$ diventa allora $cydy \left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, il di cui integrale per lo § 26 è $= \frac{1}{12} p^2 c \left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{12} p^2 c \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^3} + C$. Ma C per lo § 115 è $= -\frac{1}{12} p^2 c$. Sicchè la ſuperficie curva del conoide in tale caſo è $= \frac{1}{12} p^2 c \left(\sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)^3} - 1\right)$. Per la qual coſa, poſti il parametro di palmi 4, e l'ordinata PM, o ſia y di palmi 16; eſſendo $c = 6 . 282$, ſarà la ſuperficie curva del conoide $= 8 . 376 \times 131 . 57 = $ pal. quadrati 1102 . 03032.

COROLLARIO III.

120. Se la parabola è di ſecondo genere. Poſta la ſua equazione $y^3 = px^2$, e conſeguentemente $m = 2$, $n = 1$, la ſuperficie curva del conoide ſi avrà con eſattezza, e s'integrerà il primo de' valori di $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ del modo inſegnato nel § 29. Poſta poi la ſua equazione $y^3 = p^2 x$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 2$, la detta ſuperficie ſi avrà per approſſimazione.

COROLLARIO IV.

121. Se la parabola è di terzo genere. Poſta la ſua equazione $y^4 = px^3$, e conſeguentemente $m = 3$, $n = 1$, la ſuperficie curva del conoide ſi avrà con eſattezza integrando eſattamente il primo de' valori di $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ del modo inſegnato nel § 29. Poſta poi la ſua equazione $y^4 = p^2 x^2$, e conſeguentemente $m = 2$, $n = 2$, la detta ſuperficie anche ſi avrà con eſattezza, integrando eſattamente il detto valore di $cy \sqrt{dx^2 + dy^2}$ del modo inſegnato nel § 26. Poſta finalmente la ſua equazione $y^4 = p^3 x$, e conſeguentemente $m = 1$, $n = 3$, la

la detta superficie si determinerà per approssimazione, integrando per approssimazione il detto valore di $cy\sqrt{dx^2+dy^2}$ del modo insegnato nel § 35.

COROLLARIO V.

122. Se l'equazione della curva è $y^3 = x^5 p^{-2}$; essendo allora $m = 5$, $n = -2$, sarà $\frac{2m+n}{-2n} = \frac{8}{4} = 2$; e conseguentemente si potrà avere allora con esattezza la superficie curva del solido descritto dallo spazio AMP, integrando esattamente il secondo de' valori di $cy\sqrt{dx^2+dy^2}$ del modo insegnato nel § 29.

ESEMPIO II.

Fig. 4. *Sia da determinarsi la grandezza della superficie della porzione sferica, che descrive lo spazio circolare* AMP, *mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad* AP.

Posti il diametro AB del cerchio $= a$, l'ordinata MP $= y$, e l'ascissa corrispondente AP $= x$, sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = ax - x^2;$$

On-

Onde saranno

$$y = \sqrt{ax - x^2},$$

$$dy = \frac{\frac{1}{2}adx - xdx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

e

$$dy^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2dx^2 - axdx^2 + x^2dx^2}{ax - x^2}.$$

E perciò saranno

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2}adx\,(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

e

$$cy\sqrt{dx^2 + dy^2} = c\,(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}adx\,(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}cadx.$$

Ma

$$\int \frac{1}{2}cadx = \frac{1}{2}acx + C,$$

e

$$C = 0 \ (\S\ 115).$$

Dunque la superficie della porzione sferica, che

che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza AP, è $= \frac{1}{2} acx$. Per la qual cosa, posto il diametro di palmi 13, e posta l'altezza della porzione sferica di palmi 4, sarà la superficie della medesima porzione $= 6\frac{1}{2} \times 6.282 \times 4 =$ pal. quadrati 163.332.

COROLLARIO I.

123. Essendo l'altezza della sfera uguale al diametro; è chiaro che si avrà la superficie dell'intera sfera col sostituire nell'espressione ritrovata a in vece di x. Sicchè l'intera superficie della sfera è $= \frac{1}{2} ca^2$. Ma $\frac{1}{2} ca^2$ dà il cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera, o sia il quadruplo del cerchio massimo della sfera. Dunque la superficie di qualunque sfera è quadrupla del suo cerchio massimo.

COROLLARIO II.

124. Essendo la superficie della porzione sferica, che ha per altezza AP $= \frac{1}{2} cax$, e la

e la superficie della sfera intera $= \frac{1}{2} ca^2$; sarà la superficie della detta porzione sferica alla superficie dell'intera sfera $= \frac{1}{2} cax : \frac{1}{2} ca^2 = x : a$. Sicchè la superficie di qualunque porzione di sfera sta alla superficie dell'intera sfera, come l'altezza della porzione sferica al diametro della sfera.

ESEMPIO III.

Sia da determinarsi la grandezza della superficie curva del conoide iperbolico, che descrive lo spazio AMP *dell'iperbola equilatera di primo genere, mosso con una perfetta rivoluzione intorno ad* AP. Fig. 8

Posti il semiasse OA $= a$, l'ordinata MP $= y$, e l'ascissa OP, presa dal centro $= x$, sarà l'equazione alla curva

$$y^2 = x^2 - a^2.$$

Onde saranno

$$y = \sqrt{x^2 - a^2},$$

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

e

e

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{x^2 - a^2}.$$

E perciò

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{x^2 - a^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \sqrt{2x^2 - a^2},$$

e

$$cy\sqrt{dx^2 + dy^2} = cdx\sqrt{2x^2 - a^2}.$$

Ma

$$\sqrt{2x^2 - a^2} = x\sqrt{2} - \frac{\frac{1}{2} a^2}{x\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{8} a^4}{x^3\sqrt{8}} - \frac{\frac{1}{16} a^6}{x^5\sqrt{32}}, \text{ ec};$$

e perciò

$$cdx\sqrt{2x^2 - a^2} = cxdx\sqrt{2} - \frac{\frac{1}{2} ca^2 dx}{x\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{8} ca^4 dx}{x^3\sqrt{8}} - \frac{\frac{1}{16} ca^6 dx}{x^5\sqrt{32}}, \text{ ec.}$$

Sic-

Sicchè

$$\int cy\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2} cx^2\sqrt{2} - \frac{\frac{1}{2} ca^2 lx}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{8} ca^4}{2x^2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{16} ca^6}{4x^4\sqrt{32}}, \text{ ec.} + C = \frac{1}{2} c \left(x^2\sqrt{2} - \frac{a^2 lx}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4} a^4}{2x^2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8} a^6}{4x^4\sqrt{32}}, \text{ ec.} \right) + C.$$

In oltre quando si fa nullo lo spazio AMP, e conseguentemente nullo il solido, che descrive sì fatto spazio, girando con una perfetta rivoluzione intorno ad AP, e nulla la superficie curva del medesimo solido, si fa l'ascissa $OP = QA$, o sia $x = a$. Onde si avrà il valore di C col sostituire nella serie ritrovata a in vece di x, e con prendere quel, che nasce, col segno contrario; cioè sarà

$$C = -\frac{1}{2} c \left(a^2\sqrt{2} - \frac{a^2 la}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4} a^2}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8} a^2}{4\sqrt{32}}, \text{ ec.} \right).$$

Sicchè la superficie curva del conoide iperbolico, che ha per base il cerchio descritto col raggio PM, e per altezza AP, è =

$\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}c\,(x^2\sqrt{2} - \frac{a^2\,lx}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4}a^4}{2x^2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8}a^6}{4x^4\sqrt{32}}, \text{ ec. } - \frac{1}{2}c\,)\,a^2\sqrt{2} - \frac{a^2\,la}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4}a^2}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8}a^2}{4\sqrt{32}}, \text{ ec. }) =$$

$$\frac{1}{2}c\,(x^2\sqrt{2} - a^2\sqrt{2} - \frac{a^2\,lx}{\sqrt{2}} + \frac{a^2\,la}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{4}a^4}{2x^2\sqrt{8}} - \frac{\frac{1}{4}a^2}{2\sqrt{8}} + \frac{\frac{1}{8}a^6}{4x^4\sqrt{32}} - \frac{\frac{1}{8}a^2}{4\sqrt{32}}, \text{ ec. }).$$

Per la qual cosa, poste OA di palmi 5, ed OP di palmi 10, $\frac{1}{2}c = 3.141$, sarà la superficie cercata $= 3.141\,(141 - 35.25 - 40.82 + 28.53 - 1.10 + 0.008 - 0.133$ ec.$) = 3.141 \times 92.505 =$ pal. quadrati 290.558.

Fine del calcolo integrale.